CHAPITRE 1

FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

1. Définitions

Soient A et B deux sous-ensembles non vides inclus dans $\mathbb{R}$. On appelle fonction numérique de la variable réelle x, toute relation f de A dans B qui à tout $x \in A$ associe au plus une image dans B. En d'autres termes, une fonction numérique d'une variable réelle est une fonction dont l'ensemble de départ est un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

Notation :

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Exemple :

Considérons la fonction définie de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-4}}$$

Ici A = $\mathbb{R}$ et B = $\mathbb{R}$.

A est appelé **ensemble de départ** de f et B l'**ensemble d »arrivée** de f.

On appelle **application** toute fonction dont l'ensemble de départ est égal à son ensemble de définition noté D_f défini par :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ f(x) \ existe\}.$$

Exemple :

Considérons la fonction f définie de $]4;\ +\infty[\ \mapsto \ \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(x-4).$$

f est – elle une application ?

En effet, on a :

$$\begin{aligned} f :]4;\ +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \ln(x-4) \end{aligned}$$

Soit D_f le domaine de définition de f :

$$D_f = \{x \in]4;\ +\infty[/ \ x-4 > 0\}.$$

$x-4 > 0 \ \Rightarrow x > 4$

$\qquad\qquad \Rightarrow x \in]4;\ +\infty[.$

Donc $D_f =]4;\ +\infty[$. Nous constatons que l'ensemble de départ est confondu à l'ensemble de départ est confondu à l'ensemble de définition de f. Ainsi f est une application.

2. Notion de limites

2.1. Définitions

Soit f une fonction définie sur D_f et $x_0 \in D_f$. On dit que f admet une limite l en x_0 lorsque $f(x)$ se rapproche de l pour des valeurs de x de plus en plus proche de x_0. On écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

La limite l, si elle existe, est unique.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et comme $x_0 \in D_f$ alors $l = f(x_0)$.

On peut également calculer la limite :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Ainsi si f est définie sur un intervalle du type $]x_0,\ a[$ ou $]a,\ x_0[$ par exemple, on définit la notion de limite à droite en x_0 et on écrit :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$$

l est la limite de f à droite en x_0

et celle à gauche en x_0 est noté :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$$

On alors le résultat suivant :

Si $x_0 \notin D_f$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l \\ \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l \end{cases}$$

Si $x_0 \in D_f$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l \\ \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l \\ \\ f(x_0) = l \end{cases}$$

Dans la pratique, le calcul des limites est basé sur des limites remarquables et des théorèmes.

2.2. <u>Théorèmes</u> :

Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existent, alors :

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \text{ lorsque } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

2.3. <u>Opérations sur les limites</u>

$l, l' \in \mathbb{R}$ et x_0 $fini$ ou $infini.$

<u>Somme</u> :

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
l	l'	$l + l'$
$+\infty$	l'	$+\infty$
$-\infty$	l'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Indétermination

<u>Produit</u> :

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$
l	l'	$l \cdot l'$
$+\infty$	l'	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$
$-\infty$	l'	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
∞	0	Indétermination

Quotient :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$
l	l'	$\dfrac{l}{l'}$
$+\infty$	$l' \neq 0$	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$
$-\infty$	$l' \neq 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
l	∞	0
∞	∞	$Indétermination$
0	0	Indétermination

2.4. Limites remarquables

On utilise les limites remarquables suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = lna, \quad a > 0 \quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m - 1}{x} = m \quad \lim_{x\to 0}(x^\alpha lnx) = 0, \quad \alpha > 0 \quad \lim_{x\to -\infty}(|x|^\alpha e^x) = 0, \quad \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = 0, \qquad \alpha > 0.$$

Nous avons les formes d'indétermination suivantes :

$$0^0 \; ; \; \infty^0 \; ; \; \frac{0}{0} \; ; \; 1^\infty \; ; \; \frac{\infty}{\infty} \; ; 0 \times \infty \; ; \; \infty - \infty.$$

<u>**Exercices**</u>

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to +\infty}(1 + e^x)^{\frac{1}{x}} \; ; \; \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x \; ; \; \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+3}{x-4}\right)^x \; ; \; \lim_{x\to +\infty}(2x+3)^{\frac{1}{x+2}} \; ; \; \lim_{x\to 0}\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x^{x^2}\right) \; ; \; \lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x-2}\right)^{(x-2)^7} \; ; \; \lim_{x\to 0}\frac{1 - cos5x}{x^2} \; ; \; \lim_{x\to 0}\frac{lncosx}{x} \; ; \; \lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}.$$

2.5. Propriétés de comparaison

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$ ou x_0 est une borne dans I ou $x_0 \in \{+\infty\,;\,-\infty\}$.

- Si $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.
- Si $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
- Si $\forall x \in I,\ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.
- Si $l \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in I$, $|f(x) - l| < g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Exercice

Soit la fonction f la fonction définie par : $f(x) = 2x + 1 - 3sinx$. Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

3. Continuité d'une fonction

3.1. Définitions et théorèmes

Soit f la fonction définie sur une partie $I \subset \mathbb{R}$ et x_0 un élément de I. On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$f\ \ est\ continue\ à\ gauche\ en\ x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in D_f \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

$$f\ \ est\ continue\ à\ droite\ en\ x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in D_f \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

$$f\ \ est\ continue\ en\ x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in D_f \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Théorèmes :

- f est continue en x_0 si f est continue à droite en x_0 et continue à gauche en x_0.
- On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I si f est continue en chaque point de I.
- f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si f est continue sur l'ouvert $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.
- $Si\ f$ est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, elle réalise une bijection de I sur $f(I)$ qui est un intervalle de même nature que I et dont les bornes sont les

limites de f en celle de I. Sa réciproque est continue sur $f(I)$ strictement monotone et variant dans le même sens que f.

3.2. Prolongement par continuité

Soit f une fonction continue et définie sur un intervalle I privé de x_0 et admettant la limite l en x_0 c'est-à-dire $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. La fonction g définie sur $I \cup \{x_0\}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) si\ x \in I \\ l\ \ si\ x = x_0 \end{cases}$$

est continue en x_0 et est appelé prolongement par continuité de f en x_0.

3.3. La plus grande et la plus petite valeur

On appelle la plus grande valeur d'une fonction f définie sur un intervalle I, le nombre $f(x_0)$, $x_0 \in I$ avec $f(x) \leq f(x_0)\ \ \forall x \in I$.

On appelle la plus petite valeur d'une fonction f définie sur un intervalle I, le nombre $f(x_1)$, $x_1 \in I$ avec $f(x) \geq f(x_1)\ \ \forall x \in I$.

3.4. Point de discontinuité de première espèce

On dit que le point x_0 est un point de discontinuité de première espèce si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \quad et \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

sont finies et ne sont pas égales.

La différence :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \; - \; \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

est appelé le saut de la fonction au point x_0.

<u>Exercice</u> :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$$

Montrer que $x_0 = 1$ est un point de discontinuité de f.

3.5. Point de discontinuité de deuxième espèce

On dit que le point x_0 est un point de discontinuité de deuxième espèce si l'une des limites

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \quad et \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

est égale à ∞ ou n'existe pas.

Exercice :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \leq 0 \\ \frac{1}{x} \; si \; x > 0 \end{cases}$$

Montrer que $x_0 = 1$ est un point de discontinuité de f.

4. Dérivabilité d'une fonction

f est dérivable à droite en x_0 s'il existe un réel a tel que :

$$a = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_d^{'}(x_0).$$

Le nombre réel a est appelé nombre dérivé de f à droite en x_0.

f est dérivable à gauche en x_0 s'il existe un réel b tel que :

$$b = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_g^{'}(x_0).$$

Le nombre réel a est appelé nombre dérivé de f à gauche en x_0.

Remarque :

- Si f est dérivable en x_0 alors f continue en x_0.
- f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite en x_0, f est dérivable à gauche en x_0 et $f_d^{'}(x_0) = f_g^{'}(x_0)$.
- f est dérivable sur un intervalle $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ dérivable à droite de a et dérivable à gauche de b.

5. Notion d'extrémum

Théorème

Si f est une fonction dérivable en x_0 et si $f^{'}(x)$ s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un extrémum en x_0.

Si f est au moins 2 fois dérivable en x_0 alors f admet un maximum en x_0 si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$.

Si f est au moins 2 fois dérivable en x_0 alors f admet un minimum en x_0 si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$.

6. Tangente à une courbe et notion de point d'inflexion

- Si f est une fonction dérivable en x_0 et de nombre dérivé $f'(x_0)$ alors la courbe de f admet une tangente au point $(x_0, \ f(x_0))$ qui est la droite (T) passant par le point $(x_0, \ f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$. L'équation de la tangente à la courbe est alors :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- f est au moins 2 fois dérivable en x_0. La courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse x_0 si $f''(x)$ s'annule en x_0 en changeant de signe. En ce point la courbe perce la tangente.

<u>Exercice</u>

On considère la fonction f définie sur $[-4; 3]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Déterminer la plus grande valeur, la plus petite valeur, le maximum et le minimum.

7. Majorant, minorant, infirmum et suprémum d'une fonction

Soit f la fonction définie sur I.

- On dit que f admet un majorant sur $I \subset \mathbb{R}$ s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M, \forall x \in I$. M est donc un majorant de f sur I et tout nombre réel supérieur à M est aussi un majorant de f sur I.
- On appelle suprémum de f sur I que l'on note :

$$\sup_{x \in I} f(x)$$

le plus petit des majorants de f sur I.

  - Lorsque f n'est pas majorée sur I, on convient de noter que le suprémum soit :

$$\sup_{x \in I} f(x) = +\infty.$$

<u>Exercice</u>

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par ;

$$f(x) = \frac{1}{4 + cosx}$$

Trouver le suprémum de f sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorème</u>

Soit f la fonction définie sur I.

- On dit que f admet un minorant sur $I \subset \mathbb{R}$ s'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m, \forall x \in I$. M est donc un minorant de f sur I et tout nombre réel inférieur à m est aussi un minorant de f sur I.

- On appelle infirmum de f sur I que l'on note :

$$\operatorname{Inf}_{x\in I} f(x)$$

le plus grand des minorants de f sur I.

  - Lorsque f n'est pas minorée sur I, on convient de noter que l'infirmum soit :

$$\operatorname{Inf}_{x\in I} f(x) = -\infty.$$

Exercice

Considérons la fonction f définie sur $[1;\ +\infty[$ par ;

$$f(x) = lnx$$

Monter que f admet un infirmum.

8. Fonction concave, fonction convexe

On dit qu'une fonction (au moins 2 fois dérivable sur I) est convexe sur un intervalle I si sa courbe représentative est au dessus de toutes ses tangentes c'est-à-dire que $\forall x \in I$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$.

Théorème : f est convexe sur I si $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$.

On dit qu'une fonction (au moins 2 fois dérivable sur I) est concave sur un intervalle I si sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes c'est-à-dire que $\forall x \in I$, $f(x) \leq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$.

Théorème : f est concave sur I si $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$.

Exemple : Etudier la concavité ou la convexité de $f(x) = x^2$.

9. Monotonie d'une fonction

On appelle fonction monotone sur un intervalle I, la fonction qui est croissante ou décroissante sur I . La fonction strictement monotone sur un intervalle I, la fonction qui est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Soit f la fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I.

Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ alors f est croissante sur I.

Si $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$ alors f est décroissante sur I.

Si $f'(x) > 0$ et $f'(x)$ s'annule pour quelques valeurs isolées de I alors f est strictement croissante sur I.

Si $f'(x) < 0$ et $f'(x)$ s'annule pour quelques valeurs isolées de I alors f est strictement décroissante sur I.

Théorème

Une fonction continue et strictement monotone sur $I \subset \mathbb{R}$ réalise une bijection de I sur $f(I)$ et admet par suite une réciproque notée f^{-1} qui est une bijection de $f(I)$ sur I.

$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

$f([a,b[) = \left[f(a), \lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x)\right[$ si f est strictement croissante sur $[a,b[$.

$f([a,b[) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x), f(a)\right]$ si f est strictement décroissante sur $[a,b[$.

$f(]a,b]) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x), f(b)\right]$ si f est strictement croissante sur $]a,b]$.

$f(]a,b]) = \left[f(b), \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)\right[$ si f est strictement décroissante sur $]a,b]$.

$f(]a,b[) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x)\right[$ si f est strictement croissante sur $[a,b[$.

$f(]a,b[) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)\right[$ si f est strictement décroissante sur $]a,b[$.

$f([a,+\infty[) = \left[f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$ si f est strictement croissante sur $[a,+\infty[$.

$f([a,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(a)\right]$ si f est strictement décroissante sur $[a,+\infty[$.

$f(]a,+\infty[) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$ si f est strictement croissante sur $]a,+\infty[$.

$f(]a,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)\right[$ si f est strictement décroissante sur $]a,+\infty[$.

$f(]-\infty,b]) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(b)\right]$ si f est strictement croissante sur $]-\infty,b]$.

$f(]-\infty,b]) = \left[f(b), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$ si f est strictement décroissante sur $]-\infty,b]$.

$f(]-\infty,b[) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x)\right[$ si f est strictement croissante sur $]-\infty,b[$.

$f(]-\infty,b[) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$ si f est strictement décroissante sur $]-\infty,b[$.

$f(]-\infty,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$ si f est strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$.

$f(]-\infty,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$ si f est strictement décroissante sur $]-\infty,+\infty[$.

CHAPITRE 2

FONCTIONS RECIPROQUES DES FONCTIONS CIRCULAIRES – FONCTIONS HYPERBOLIQUES ET LEURS RECIPROQUES

1. Les fonctions réciproques des fonctions circulaires

1.1. La fonction Arcsinus

Considérons la fonction sinus :

$$\begin{aligned} sin : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto y = sin\, x \end{aligned}$$

Cette fonction est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ puisque $(sin\, x)' = cos\, x \ > 0\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ et\ cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ainsi la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$ et admet par la suite une réciproque appelée fonction arcsinus notée $Arcsin$ telle que :

$$Arcsin : [-1,1] \ \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et a pour dérivée :

$$(Arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De façon générale, on a :

$$(Arcsin\, u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}.$$

Notons que :

$$\forall x \in [-1,1], Arcsin(-x) = -Arcsinx$$

De plus :

$$Arcsin\, x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,1] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

On ne peut appliquer la fonction Arcsin que sur des quantités comprises entre -1 et 1.

Exercice :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = Arcsin\frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}$$

Déterminer le domaine de définition et calculer sa dérivée première.

Résolution

On a :

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq \frac{2x}{\sqrt{2-x^2}} \leq 1 \text{ et } 2 - x^2 > 0\right\}$$

$$\begin{cases} -1 \leq \dfrac{2x}{\sqrt{2-x^2}} \leq 1 \\ 2 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\right| \leq 1 \\ 2 - x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x^2}{2-x^2} \leq 1 \\ x \in \left]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 \leq 2 - x^2 \\ x \in \left]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 \leq 2 \\ x \in \left]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\sqrt{\dfrac{2}{5}}\,;\,\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right] \\ x \in \left]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right[\end{cases}$$

$$\boldsymbol{D_f = \left[-\sqrt{\frac{2}{5}}\,;\,\sqrt{\frac{2}{5}}\right]}$$

f est dérivable sur $\left]-\sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}}\,;\,\sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}}\right[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\right)'}{\sqrt{1 - \left[\dfrac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\right]^2}}$$

Après dérivation et simplification, on trouve :

$$f'(x) = \frac{4}{(2-x^2)\sqrt{2-5x^2}}.$$

NB :

$$Arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}\ ; Arcsin(1) = \frac{\pi}{2}\ ;\ Arcsin\ (0) = 0\ ; Arcsin\ a = \alpha \Rightarrow sin\ \alpha = a.$$

1.2. La fonction Arccosinus

Considérons la fonction cosinus :

$$\begin{aligned} cos : [0,\pi] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto y = cos\ x \end{aligned}$$

Cette fonction est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ puisque $(cos\ x)' = -sin\ x\ < 0\ \forall x \in]0,\pi[\ et\ \sin(0) = sin(\pi) = 0$.

Ainsi la fonction cosinus réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$ et admet par la suite une réciproque appelée fonction arccosinus notée $Arccos$ telle que :

$$Arccos : [-1,1] \to [0,\pi].$$

La fonction arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et a pour dérivée :

$$(Arccos\ x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De façon générale, on a :

$$(Arccos\ u(x))' = \frac{-\ u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}.$$

Notons que :

$$\forall x \in [-1,1], Arccos(-x) = \pi - Arccos\ x$$

De plus :

$$Arccos\ x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,1] \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$$

On ne peut appliquer la fonction Arccos que sur des quantités comprises entre -1 et 1.

Exercice :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = Arccos\frac{1}{x}$$

Déterminer le domaine de définition et calculer sa dérivée première.

Résolution

On a :

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \text{ et } x \neq 0\right\}$$

$$\begin{cases} -1 \leq \dfrac{1}{x} \leq 1 \\ \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{1}{x}\right| \leq 1 \\ \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \leq 1 \\ \\ x \in]-\infty\,;\,0\,[\cup]0\,;\,+\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \leq 0 \\ x \in]-\infty\,;\,0\,[\cup]0\,;\,+\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty\,;\,-1]\cup[1\,;\,+\infty[$$

$$\boldsymbol{D_f} =]-\infty\,;\,-\mathbf{1}]\cup[\mathbf{1}\,;\,+\infty[$$

f est dérivable sur $]-\infty\,;\,-\mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}\,;\,+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

Après dérivation et simplification, on trouve :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x \in]-\infty\,;\,-\mathbf{1}[\\ \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x \in]\mathbf{1}\,;\,+\infty[\end{cases}$$

<u>NB</u>

$$Arccos(-1) = \pi\,; Arccos(1) = 0\,;\; Arccos\,(0) = \frac{\pi}{2}\,; Arccos\ a = \alpha \Rightarrow cos\ \alpha = a.$$

1.3. La fonction Arctangente

Considérons la fonction tangente :

$$tan : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = tan\ x$$

Cette fonction est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ puisque $(tan\ x)' = 1 + tan^2(x) > 0\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi la fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x>0}} tan\, x = -\infty \quad et \quad \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x<0}} tan\, x = +\infty$$

Elle admet par suite une réciproque appelée fonction arctangente notée $Arctan$ telle que :

$$Arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée :

$$(Arctan\, x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

De façon générale, on a :

$$(Arctan\, u(x))' = \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}.$$

De plus :

$$Arctan\, x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

Exercice :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = Arctan\frac{1}{1-x}$$

Déterminer le domaine de définition et calculer sa dérivée première.

Résolution

On a :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x \neq 0\}$$

$$D_f =]-\infty\, ;\, \mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}\, ;\, +\infty[$$

f est dérivable sur D_f et on a :

$$\forall x \in D_f,\ f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2} = \frac{1}{x^2-2x+2}$$

Valeurs remarquables :

$$\lim_{x\to-\infty} Arctan\, x = -\frac{\pi}{2}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} Arctan\, x = \frac{\pi}{2}\ ; Arctan(0) = 0\, ;\ Arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$Arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}\ ; Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}\ ;\ Arctan\, \alpha = \alpha \Rightarrow tan\, \alpha = a.$$

1.4. La fonction Arccotangente

Considérons la fonction cotangente :

$$\begin{aligned} cotan :]0, \pi[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = cotan\, x \end{aligned}$$

Cette fonction est continue et strictement décroissante sur $]0, \pi[$ puisque $(tan\, x)' = -[1 + tan^2(x)] < 0\ \forall x \in]0, \pi[$.

Ainsi la fonction $cotan$ réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $cotan(]0, \pi[) = \mathbb{R}$ avec :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} cotan\, x = +\infty \quad et \quad \lim_{\substack{x \to \pi \\ x < 0}} cotan\, x = -\infty$$

Elle admet par suite une réciproque appelée fonction $arccotangente$ notée $Arccotan$ telle que :

$$Arccotan : \mathbb{R} \to]0, \pi[.$$

La fonction $arccotan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée :

$$(Arccotan\, x)' = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

De façon générale, on a :

$$(Arccotan\, u(x))' = \frac{-\, u'(x)}{1 + [u(x)]^2}.$$

De plus :

$$Arccotan\, x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in]0, \pi[\end{cases}$$

<u>Exercice</u> :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = Arccotan\left(\sqrt{x - 2}\right)$$

Déterminer le domaine de définition et calculer sa dérivée première.

<u>Résolution</u>

On a :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \geq 0\}$$

$$D_f = [\mathbf{2}\ ;\ +\infty[$$

$\boldsymbol{f}$ est dérivable sur $]\mathbf{2}\ ;\ +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in D_f,\ \ f'(x) = \frac{-\left(\sqrt{x-2}\right)'}{1 + \left(\sqrt{x-2}\right)^2} = \frac{-1}{2(x-1)\sqrt{x-2}}$$

<u>Valeurs remarquables</u> :

$\lim\limits_{x\to-\infty} Arccotan\, x = \pi$; $\lim\limits_{x\to+\infty} Arccotan\, x = \pi$

1.5. Propriétés

$\forall x \in [-1\,;1]\ \ sin(Arcsin\, x) = x\ et\ cos(Arcsin\, x) = \sqrt{1-x^2}$

$Pour\ |x| < 1, tan(Arcsin\, x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in [-1\,;1]\ \ cos(Arccos\, x) = x\ et\ sin(Arccos\, x) = \sqrt{1-x^2}$

$Pour\ x \neq 0, tan(Arccos\, x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\forall x \in [-1\,;1]\ \ Arcsin(sin\, x) = x\ et\ Arcsin(cos\, x) = Arcsin\left(sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}-x$

$\forall x \in [-1\,;1]\ \ Arcsin\, x + Arccos\, x = \dfrac{\pi}{2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ Arctan\, x + Arctan\,\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ si\ x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\ si\ x < 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ Arctan\,(-x) = -Arctan\,(x)\ \ et\ \ Arctan(\tan x) = x.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ cos(Arctan\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ \ et\ \ sin(\mathrm{Arctan}\, x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

2. Les fonctions hyperboliques

Les fonctions :

$x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

sont respectivement appelées fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique et sont notées shx et chx. A partir de ces deux fonctions hyperboliques, on peut définir les fonctions tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique notées thx et $cothx$.

On a :

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ ;\ chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;\ thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ ; cothx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Les fonctions sh, ch et th sont définies sur $\mathbb{R}$ et la fonction $coth$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Signalons que la fonction ch est paire et la fonction sh est impaire.

Les fonctions hyperboliques possèdent les propriétés suivantes :

Formulaire :

$ch^2x - sh^2x = 1$

$ch^2x + sh^2x = ch2x$

$sh2x = 2shxchx$

$ch2x = 1 + 2sh^2x = 2ch^2x - 1 = ch^2x + sh^2x$

$sh(x+y) = shxchy + chxshy$ et $sh(x-y) = shxchy - chxshy$

$ch(x+y) = chxchy + shxshy$ et $ch(x-y) = chxchy - shxshy$

$th(x+y) = \frac{thx + thy}{1 + thx \cdot thy}$ et $th(x-y) = \frac{thx - thy}{1 - thx \cdot thy}$

$coth(x+y) = \frac{1 + cothx \cdot cothy}{cothx + cothy}$ $et\ coth(x-y) = \frac{1 - cothx \cdot cothy}{cothx - cothy}$

$chx + chy = 2ch\frac{x+y}{2} \cdot ch\frac{x-y}{2}$

$chx - chy = 2sh\frac{x+y}{2} \cdot sh\frac{x-y}{2}$

$shx + shy = 2sh\frac{x+y}{2} \cdot ch\frac{x-y}{2}$

$shx - shy = 2ch\frac{x+y}{2} \cdot sh\frac{x-y}{2}$

$th2x = \frac{2thx}{1 + th^2x}$.

Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(shx)' = chx$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(chx)' = shx$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(thx)' = 1 - th^2x$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $(cothx)' = 1 - coth^2x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} th\,x = -1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} th\,x = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} coth\,x = -1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} coth\,x = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} coth\,x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} coth\,x = +\infty$.

3. Les réciproques des fonctions hyperboliques

3.1. La fonction argument sinus hyperbolique

Considérons la fonction sinus hyperbolique :

$$\begin{aligned} sh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = sh\, x \end{aligned}$$

Cette fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $(sh\, x)' = chx > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ainsi la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $sh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ avec :

$$\lim_{x \to -\infty} sh\, x = -\infty \ \ et \ \lim_{x \to +\infty} sh\, x = +\infty$$

La fonction sh admet par conséquent une réciproque appelée fonction argument sinus hyperbolique notée $Argsh$ telle que :

$$Argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

La fonction $Argsh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée :

$$(Argsh\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

De façon générale, on a :

$$(Argsh\, u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{[u(x)]^2 + 1}}.$$

De plus :

$$Argsh\, x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.2. La fonction argument cosinus hyperbolique

Considérons la fonction cosinus hyperbolique :

$$\begin{aligned} ch : [0\,;\, +\infty[&\to [1\,;\, +\infty[\\ x &\mapsto y = sh\, x \end{aligned}$$

Cette fonction est continue et strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$ puisque $(ch\, x)' = shx > 0\ \forall x \in [0\,;\, +\infty[$.

Ainsi la fonction ch réalise une bijection de $[0\,;\, +\infty[$ sur $ch([0\,;\, +\infty[) = [1\,;\, +\infty[$ avec :

$$\lim_{x \to 0} ch\, x = 1 \ \ et \ \lim_{x \to +\infty} ch\, x = +\infty$$

La fonction ch admet par conséquent une réciproque appelée fonction argument cosinus hyperbolique notée $Argch$ telle que :

$$Argch : [1\,;\, +\infty[\to [0\,;\, +\infty[$$

La fonction $Argch$ est dérivable sur $]1\,;\, +\infty[$ et a pour dérivée :

$$(Argch\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

De façon générale, on a :

$$(Argch\, u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{[u(x)]^2 - 1}}.$$

De plus :

$$Argch\, x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1\,;\, +\infty[\\ \\ y \in [0\,;\, +\infty[\end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Exercice :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = Argch\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Déterminer le domaine de définition et calculer sa dérivée première.

Résolution

On a :

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{1+x} \geq 0 \text{ et } 1 + x \neq 0\right\}$$

On trouve :

$$D_f =]-1\,;0].$$

f est dérivable sur $]-1\,;0[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 - 1}} = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{-x^2 - 2x}}$$

Se rappeler que $x \in]-1\,;0[\ \Rightarrow 1 + x > 0$.

3.3. La fonction Argument tangente hyperbolique

Considérons la fonction tangente hyperbolique :

$$\begin{aligned} th : \mathbb{R} &\to]-1\,;\, 1[\\ x &\mapsto y = th\, x \end{aligned}$$

Cette fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque :

$$(th\, x)' = 1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi la fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $ch(\mathbb{R}) =]-1\,;\, 1[$ avec :

$$\lim_{x \to -\infty} th\, x = -1 \ \ et \ \lim_{x \to +\infty} th\, x = 1.$$

La fonction th admet par conséquent une réciproque appelée fonction argument tangente hyperbolique notée $Argth$ telle que :

$$Argch :]-1\,;\,1[\ \to \mathbb{R}.$$

La fonction $Argth$ est dérivable sur$]-1\,;\,1[$ et a pour dérivée :

$$(Argth\,x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

De façon générale, on a :

$$(Argth\,u(x))' = \frac{u'(x)}{1-[u(x)]^2}.$$

De plus :

$$Argth\,x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-1\,;\,1[\\ \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} |x| < 1 \\ \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.4. La fonction argument cotangente hyperbolique

Considérons la fonction cotangente hyperbolique :

$$\begin{aligned} coth : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \setminus [-1\,;\,1] \\ x &\mapsto y = coth\,x \end{aligned}$$

Cette fonction est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque :

$$(coth\,x)' = 1 - coth^2 x = \frac{-1}{sh^2 x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Ainsi la fonction $coth$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $coth(\mathbb{R}^*) =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$

La fonction th admet par conséquent une réciproque appelée fonction argument tangente hyperbolique notée $Argth$ telle que :

$$Argch :]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[\ \to \mathbb{R}^*.$$

La fonction $Argcoth$ est dérivable sur$]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$ et a pour dérivée :

$$(Argcoth\,x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

De façon générale, on a :

$$(Argcoth\,u(x))' = \frac{u'(x)}{1-[u(x)]^2}.$$

De plus :

$$Argcoth\,x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[\\ \\ \quad y \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} |x| > 1 \\ \\ y \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Exercice :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = Arcogth\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

Déterminer le domaine de définition et calculer sa dérivée première.

Résolution

On a :

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \left|\frac{x}{1+x}\right| > 1 \text{ et } 1 + x \neq 0\right\}$$

$$\begin{cases} \left|\frac{x}{1+x}\right| > 1 \\ 1 + x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{(1+x)^2} > 1 \\ 1 + x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 < 1 \\ 1 + x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty\,;\,-1\right[\cup \left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right[$$

$$\boldsymbol{D_f = \left]-\infty\,;\,-1\right[\cup \left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right[}$$

f est dérivable sur $\left]-\infty\,;\,-1\right[\cup \left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}{\sqrt{1 - \left[\frac{x}{1+x}\right]^2}}$$

Après dérivation et simplification, on trouve :

$$f'(x) = \frac{1}{2x+1}.$$

3.5. Relation entre les fonctions ln et $Argsh, Argch, Argth, Argcoth$

3.5.1. Relation entre ln et $argch$

Posons :

$x = chy$ schant que $chy = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y + e^{-y}$

$2x = e^y + \dfrac{1}{e^y} \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \qquad (1)$

En posant $u = e^y > 0$ $\;alors\ l'\text{équation}\ (1)\ devient$:

$u^2 - 2xu + 1 = 0$. Le discriminant réduit $\Delta' = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1$.

$u_1 = x - \sqrt{x^2 - 1}$ et $u_2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$. Puisque $u > 0$, on prend :

$u = x + \sqrt{x^2 - 1} = e^y \Rightarrow y = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

Or $x = chy \Rightarrow y = Argchx$.

D'où :

$$\boldsymbol{Argchx = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}$$

3.5.2. Relation entre $\boldsymbol{ln}$ et $\boldsymbol{argsh}$

Posons :

$x = shy$ schant que $shy = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y - e^{-y}$

$2x = e^y - \dfrac{1}{e^y} \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ (2)

En posant $u = e^y > 0$ $alors\ l'équation\ (2)\ devient$:

$u^2 - 2xu - 1 = 0$. Le discriminant réduit $\Delta' = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$.

$u_1 = x - \sqrt{x^2 + 1}$ et $u_2 = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Puisque $u > 0$, on prend :

$u = x + \sqrt{x^2 + 1} = e^y \Rightarrow y = ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Or $x = shy \Rightarrow y = Argshx$.

D'où :

$$\boldsymbol{Argshx = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}.$$

3.5.3. Relation entre $\boldsymbol{ln}$ et $\boldsymbol{argth}$

Posons :

$x = thy$ schant que $thy = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow x = \dfrac{e^y - \frac{1}{e^y}}{e^y + \frac{1}{e^y}} = \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$

$x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow e^{2y} = \dfrac{1 + x}{1 - x}$

$\Leftrightarrow 2y = ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$ soit $y = \dfrac{1}{2} ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

Or :

$x = thy \Leftrightarrow y = Argthx$ et on tire :

$$\boldsymbol{Argthx = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \forall x \in]-1\,;1[}$$

3.5.4. Relation entre $\boldsymbol{ln}$ et $\boldsymbol{argcoth}$

Notons que :

$$\boldsymbol{argcoth\, x = Argth\left(\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow Argcoth\, x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{2}\, ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

D'où :

$$\boldsymbol{Argcoth\, x = \frac{1}{2}\, ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}.$$

3.6. Propriétés

$\forall x \geq 1, ch(Argchx) = x \;\; et\; sh(Argchx) = \sqrt{x^2-1} \;\; et \;\; th(Argchx) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, sh(Argshx) = x \;\; et\; ch(Argshx) = \sqrt{x^2+1} \;\; et \;\; th(Argshx) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\forall x \in]-1\,;1[, th(Argthx) = x \;\; et\; ch(Argthx) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;\; et \;\; sh(Argthx) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Fonctions équivalentes

<u>Théorème</u>

Deux fonctions f et g qui ont la même dérivée sur un intervalle I ont une différence constante c sur cet intervalle. Si de plus $f(x_0) = g(x_0) = 0$ alors $c = 0$ et $f(x) = g(x)$.

<u>Théorème</u>

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x.

$f(x)$est dit in iniment petit au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

$f(x)$est dit in iniment grand au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

<u>Théorème</u>

Soient f et g deux fonctions définies dans le voisinage du point x_0. On dit que f est équivalent à g lorsque x tend vers x_0 si :

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ pour $g(x) \neq 0$.

On note :

$$\boldsymbol{f \underset{x\to x_0}{\sim} g} \quad \textbf{ou} \quad \boldsymbol{f \underset{x_0}{\sim} g}$$

$\begin{cases} f \underset{x_0}{\sim} h \\ g \underset{x_0}{\sim} \varphi \end{cases} \Rightarrow fg \underset{x_0}{\sim} h\varphi$; $\begin{cases} f \underset{x_0}{\sim} g \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow f^n \underset{x_0}{\sim} g^n$; $f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow \dfrac{1}{f} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g}$;

$e^f \underset{x_0}{\sim} e^g \Rightarrow f - g \underset{x_0}{\to} 0$ $\left(il\ suffit\ de\ remarquer\ que\ \dfrac{e^f}{e^g} = e^{f-g}\right)$.

Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors, comme :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x_0}{\to} f'(x_0) \text{ on a } f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\to} f'(x_0)(x - x_0).$$

On obtient les équivalents usuels suivants :

$$\boldsymbol{e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x} \ ; \ \boldsymbol{ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x} \ ; \ \boldsymbol{sin\, x \underset{x\to 0}{\sim} x} \ ; \ \boldsymbol{sh\, x \underset{x\to 0}{\sim} x} \ ; \ \boldsymbol{tan\, x \underset{x\to 0}{\sim} x} \ ; \ \boldsymbol{th\, x \underset{x\to 0}{\sim} x} \ ;$$

$$\boldsymbol{Arcsin\, x \underset{x\to 0}{\sim} x} \ ; \ \boldsymbol{Arctan\, x \underset{x\to 0}{\sim} x} \ ; \ \boldsymbol{(1+x)^m - 1 \underset{x\to 0}{\sim} mx} \text{ (pour m un réel ixé).}$$

$En\ remarquant\ que\ 1 - cos\, x = 2\, sin^2 \dfrac{x}{2}\ et\ chx - 1 = 2sh^2 \dfrac{x}{2}$, on obtient :

$$\boldsymbol{1 - cos\, x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}} \ ; \ \boldsymbol{chx - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}}$$

Théorème

On dit que f est négligeable devant g lorsque x tend vers x_0 et l'on note :

$$f \underset{x_0}{=} o(g)$$

si et seulement si :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ , \qquad g(x) \neq 0.$$

Théorème

Tout polynôme non nul est équivalent, en $+\infty$ et en $-\infty$, à son terme de plus haut degré.

Exemple : $x^3 - 2x - 5 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$.

Tout polynôme non nul est équivalent, en 0 à son terme de plus bas degré.

Exemple : $x^3 - 2x^2 + 5x \underset{x\to 0}{\sim} 5x$

Toute fraction rationnelle non nulle est équivalente, en $+\infty$ et en $-\infty$ au quotient de ses termes de plus haut degré.

Exemple :

$$\frac{x^3 - x}{x^4 + x + 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Toute fraction rationnelle non nulle est équivalente, en 0 au quotient de ses termes de plus bas degré.

Exemple :

$$\frac{2x^4 - x^2 + x}{x^2 - 1} \underset{x\to 0}{\sim} -x.$$

TRAVAUX DIRIGES N°1

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}(2x+3)^{\frac{1}{x+2}} \quad ; \quad \lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x^2}}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to0}x^{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to2}\left(\sqrt{x}-2\right)^{(x-2)^7}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-cos5x}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{lncosx}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1} \quad ; \quad \lim_{x\to1}\frac{x^x-1}{xlnx} \quad ;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{5^x-4^x}{x^2+x} \quad ; \quad \lim_{x\to2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{sin\,3x-sin\,x}{ln(x+1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\left(sh\sqrt{x^2+x}-sh\sqrt{x^2-x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to0^+}\frac{(\sin x)^{shx}-1}{(shx)^{\sin x}-1} \quad ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{x^{\frac{1}{x}}}-x\right) \quad ; \quad \lim_{x\to1}\frac{e^{x^2+x}-e^x}{\cos\frac{\pi x}{2}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{\sqrt[3]{x^3+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{xlnx} \quad ; \quad \lim_{x\to0^+}[ln(1+x)]^{ln(1+x^2)} \quad ; \quad \lim_{x\to1^+}\frac{x^x-x}{ln\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$\lim_{x\to0^+}x\,ln\left(xsh\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{ln(1+2\,tan\,x)}{sin\,x}$$

Exercice 2

1. Montrer que le point $x_0=4$ est un point de discontinuité pour la fonction f définie par :

$$f(x)=Arctan\frac{1}{x-4}$$

2. En déduire le saut de la fonction au point $x_0=4$.

Exercice 3

1. Montrer que $\forall\, x \in]-1;1[$,

$$Arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = Arcsin\, x$$

2. Simplifier

$$f(x) = Arcsin\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 4

On considère la fonction définie par :

$$f = Arcsin\left(\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. En posant $x = \cos\theta$, $\theta \in [0,\pi]$, simplifier f(x) pour

$$\frac{\pi}{4}-\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{4}\right] \;\; et \;\; \frac{\pi}{4}-\theta \in \left[-\frac{3\pi}{4}\,;-\frac{\pi}{2}\right]$$

3. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = Arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2.
   a) En posant $x = cos^2(t) avec\; t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, simplifier l'expression f(x).
   b) En déduire les variations de f et dresser le tableau de variation.
3. Montrer que :

$$2Arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} + Arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6

Soit g la fonction définie par $g(x) = Arcsin\, 2x\sqrt{1-x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_g de g.

2. Déterminer les limites aux bornes de D_g.
3. Calculer $g'(x)$. (on précisera la dérivée suivant les valeurs de x). En déduire sur les différents intervalles, une relation entre g et une autre fonction.
4. Construire la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i}, \vec{j})$
5. Résoudre l'équation $g(x) = 2Arcsinx$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = Arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + Arctan\frac{1}{x}$$

1. Déterminer le domaine de définition E de f.
2. Déterminer les limites aux bornes de E.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Donner l'expression de f au moyen d'une autre fonction.
5. Dresser le tableau de variation de f et tracer f dans un repère orthonormé ; unité graphique : 2,5cm.

Exercice 8

Simplifier les expressions suivantes :

$$f(x) = Argch\sqrt{\frac{1+chx}{2}} - \frac{x}{2} \ ;$$

$$g(x) = Arcsin\frac{2x}{1+x^2} + Arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}\ .\ Ici\ on\ posera\ t = Arctan\,x\ avec - \pi \leq 2t \leq \pi$$

$$h(x) = Arcsin\,\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\ \ ;\ \ p(x) = Arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 9

Etudier les fonctions de ℝ dans ℝ définies par les formules suivantes (variable x ; transformer l'expression) :

$$f(x) = ch(2Argth\,x)\ \ ;\ \ g(x) = sh\left(\frac{1}{2}Argch\,x\right)$$

$$h(x) = Argth\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\ \ ;\ \ k(x) = Argth\left(\frac{1+3th\,x}{3+th\,x}\right)$$

Exercice 10

Résoudre les équations :

a) $Argch\, x = Argsh\,(2-x)$

b) $Argch\,(4x^3-3x) - Argch(2x^2-1) = 1$

Exercice 11

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = Arctan\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Montrer que f est 2π-périodique.

3) Montrer que $\forall\, x \in\ D_f, f(\pi - x) = f(x)$

4) Simplifier f(x) pour

$$x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\ et\ pour\ x\ \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[.$$

5) Représenter f sur

$$\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right[.$$

Exercice 12

1. Résoudre

$$Arccos\, x = Arcsin\, 2x\ ;\ Arcsin\,\frac{2x}{1+x^2} = Arctan\, x$$
$$Arcsin\,(\tan x) = x\quad et\quad Arccos\, x = Arcsin\,(1-x)$$

2. Montrer que :

a)

$$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}, |Arctan(sh\, x)| = Arccos\left(\frac{1}{ch\, x}\right)$$

b)

$$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}\,,\qquad Arcsin\,(th\, x) = Arctan\,(sh\, x).$$

Exercice 13

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2Arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - Arcsin2x\sqrt{1-x^2}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f et montrer que f est impaire.

2. En posant $\theta = Arcsin\, x\ avec\ \theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, simplifier $f(x)$ sur [0 ; 1[.

Examen

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right]^{x\ln x} \ ; \ \lim_{x\to0^+}\left[\frac{x[(1+x)^4-1]}{chx-1}\right] \ ; \ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}sh\sqrt{x^2-x} \ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{\sqrt[3]{x^3+1}} \ ; \ \lim_{x\to0^+}\frac{(\sin x)^{shx}-1}{(shx)^{\sin x}-1} \ ; \ \lim_{x\to+\infty}\left(x^{x^{\frac{1}{x}}}-x\right) \ ; \ \lim_{x\to a}\frac{Arcsin(a^2-x^2)}{e^{(x-a)cha}-1}$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = Arctan\frac{1}{x} - Arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + Arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Calculer les limites aux bornes de D_f.
3. a) Calculer la dérivée première de f.

   b) En déduire l'expression de f au moyen d'une autre fonction pour $x < 0$ et pour $x > 0$.

4. Montrer que $\forall x \in]-1;1[$,

$$Arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = Arcsinx$$

Exercice 3

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{x^2+x+5}{x^2+x+1}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_g de g.

Déterminer le suprémum et l'infirmum de g.

CHAPITRE 3

THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS
DERIVEES SUCCESSIVES – FORMULES DE TAYLOR ET MACLAURIN – DEVELOPPEMENT LIMITE

1. Théorème de Rolle

Soit f une fonction définie sur un intervalle donné $[a\,;b]$. f vérifie les conditions du théorème de Rolle si :

- f est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$.
- f est dérivable sur l'intervalle $]a\,;b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors il existe au moins un réel $c \in]a\,;b[$ tel que : $f'(c) = 0$. La valeur c est appelée **valeur intermédiaire**.

Exercice

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = cos^3x + sin^3x, \qquad x \in [0\,;2\pi].$$

f vérifie t – elle les conditions du théorème de Rolle ? Si oui, déterminer les valeurs intermédiaires.

2. Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction définie sur un intervalle donné $[a\,;b]$. f vérifie les conditions du théorème des accroissements finis si :

- f est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$.
- f est dérivable sur l'intervalle $]a\,;b[$

Alors il existe au moins un réel $c \in]a\,;b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{soit } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

La valeur c est appelée **valeur intermédiaire**.

Remarque

Lorsque $f(b) = f(a)$, on $f'(c) = 0$ et on retrouve le théorème de Rolle.

On a :

$c \in]a\,;b[\quad \Leftrightarrow a < c < b$

$\Leftrightarrow 0 < c - a < b - a$

$\Leftrightarrow 0 < \dfrac{c-a}{b-a} < 1$

Posons :

$\theta = \dfrac{c-a}{b-a}$.

Alors, on a :

$c = a + \theta(b - a)$ avec $0 < \theta < 1$.

Ainsi la formule des accroissements finis devient :

$f(b) - f(a) = f'\big(a + \theta(b-a)\big)(b-a)$ avec $0 < \theta < 1$.

En posant :

$b = x$ et $a = x_0, on\ a$:

$f(x) - f(x_0) = f'\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)(x - x_0)$ avec $0 < \theta < 1$.

Exercice

En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer l'inégalité suivante :

$$\frac{x}{1+x^2} < Arctan\, x < x, \qquad x > 0.$$

En déduire un encadrement de $Arctan\frac{3}{4}$.

Solution :

Soit :

$$f : t \mapsto f(t) = Arctan\, t, t \in [0\,;x]$$

f est continue sur $[0\,;x]$ et dérivable sur $]0\,;x[$. f vérifie donc les conditions du théorème des accroissements finis. Il existe au moins un réel c tel que :

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - x_0)$$

Or :

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Alors :

$$Arctan\, x - Arctan(0) = \frac{1}{1+c^2}(x-0), \qquad c \in]0\,;x[$$

$$Arctan\, x = \frac{x}{1+c^2}$$

Puisque $0 < c < x$:

$$0 < c^2 < x^2$$

$$1 + 0 < c^2 + 1 < x^2 + 1$$

$$\frac{1}{x^2 + 1} < \frac{1}{c^2 + 1} < 1$$

$$\frac{x}{x^2 + 1} < \frac{x}{c^2 + 1} < x$$

$$\frac{x}{1 + x^2} < Arctan\, x < x$$

Pour :

$$x = \frac{3}{4} > 0 \text{ , } on\ a\ \frac{\frac{3}{4}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} < Arctan\, \frac{3}{4} < \frac{3}{4}$$

<u>Exercice</u>

A l'aide de la formule des accroissements finis, démontrer que :

$$\frac{x}{1 + x} < ln\,(1 + x) < x\,, \qquad x > 0.$$

3. Dérivées successives

3.1. Définitions

Soit f la fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$. f' est la dérivée première de f sur I. Si f' à son tour admet une dérivée première, alors cette dernière sera appelée dérivée seconde de f sur I et sera notée

$$f''(x)\ \ ou\ \ \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

EN poursuivant ce processus, nous pouvons arriver à définir la dérivée d'ordre n ou la dérivée $n^{ième}$ de f sur I. On a :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

<u>Remarque</u> :

$$f^{(0)} = f.\ \text{Ne pas confondre } f^n \text{ à } f^{(n)}.$$

<u>Exercice</u> :

Déterminer la dérivée d'ordre n de :

$$f(x) = \sin x\ ;\ \ g(x) = lnx\,;\ \ h(x) = 2^x.$$

3.2. Formule de Leibniz

<u>Théorème</u> :

Soient f et g deux fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$ et admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n au moins. Alors la formule suivante est vérifiée :

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(x)^{(k)} \cdot \ g(x)^{(n-k)}$$

avec: :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Exercice : Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$de la fonction f définie par :

$$f(x) = x^5 \cos x.$$

4. Formules de Taylor et de Maclaurin

4.1. Formule de Taylor

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ avec $x_0 = cte$ et x la variable. On suppose que f est $(n+1)$ fois dérivable sur I c'est-à-dire qu'il existe des dérivées d'ordre 1, 2, … jusqu'à l'ordre $n+1$. Les dérivées jusqu'à l'ordre n sont toutes continues sur I. Alors il existe un réel $c \in]x_0\,; x[$ tel que f se présente sous la forme suivante :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!} + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots\dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec :

$$c = x_0 + \theta(x-x_0)\ et\ 0 < c < 1.$$

ou encore :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cette formule est appelée formule de Taylor de la fonction f à l'ordre au point x_0.

Exemple :

Effectuer le développement de la fonction f définie par $f(x) = lnx$ par la formule de Taylor à l'ordre n au point $x_0 = 1$.

4.2. Formule de Maclaurin

Dans la formule de Taylor, lorsque nous posons $x_0 = 0$, nous obtenons la formule suivante :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + f^{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec :

$$c = \theta x\ o\grave{u}\ 0 < c < 1.$$

ou bien :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cette formule est appelée formule de Maclaurin de la fonction f à l'ordre n.

Exercice : Développer par la formule de Maclaurin la fonction f définie par :

$$f(x) = a^x, \qquad a > 0.$$

5. Développement limité : Formule de Taylor-Young

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que f est n fois continument dérivable sur I. Alors, on peut présenter f sous la forme suivante :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + o(x-x_0)^n$$

ou bien

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!} + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots\cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + o(x-x_0)^n$$

Cette formule est appelée $formule\ du\ d$é$veloppement\ \ limit$é à l'ordre n en x_0.

Théorème : Composition des développements

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction admettant en 0 un développement limité d'ordre n et vérifiant :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

et $g : D_g \to \mathbb{R}$ une fonction admettant en 0 un développement limité d'ordre n. On suppose que $f\left(D_f\right) \subset D_g$. On écrit au voisinage de 0,

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) = Q(x) + o(x^n).$$

Alors gof admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n qui s'écrit :

$$gof(x) = R(x) + o(x^n)$$

où R est le polynôme obtenu en ne gardant dans QoP que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Remarque

Il arrive des fois qu' au point x_0 la limite :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

On dit alors dans ce cas que l'on effectue le développement limité généralisé de f en x_0. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\lim_{x\to x_0} (x-x_0)^n f(x) = \mathrm{a} \in \mathbb{R}.$$

Exercice :

Déterminer le développement limité d'ordre 4 au voisinage de $x_0 = 0$ des fonctions :

$f : x \mapsto f(x) = ln(1+x)$; $g : x \mapsto g(x) = \frac{1}{1+x}$; $h : x \mapsto h(x) = \frac{1}{1+ln(1+x)}$; $k \mapsto k(x) = \frac{1}{\sin x}$

Développements limités des fonctions usuelles

Les fonctions usuelles possèdent des développements limités à tout ordre en $x_0 = 0$ si 0 appartient à leur ensemble de définition.

Pour un entier n quelconque, on admet les théorèmes suivants :

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n)$
- $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + 0(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + 0(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + 0(x^n)$
- $\forall \alpha \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n)$$

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + 0(x^n)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n)}x^n + 0(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + 0(x^n)$
- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}x^n + 0(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + 0(x^{2p+2})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^p . \frac{x^{2p}}{(2p)!} + 0(x^{2p+1})$
- $shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + 0(x^{2p+1})$
- $chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + 0(x^{2p+1})$
- $Arctan\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + 0(x^{2p+2})$
- $Arcsin\, x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + 0(x^{2p+2})$

- $Argsh\, x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} - \cdots + (-1)^p \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + 0(x^{2p+2})$
- $Argth\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + 0(x^{2p+2})$

N.B. : Puisque les développements limités usuels sont tous donnés au voisinage de 0, il sera quasiment indispensable, lorsque $x_0 \neq 0$, de commencer le calcul du développement limité d'une fonction f en x_0 par un changement de variable : si x est l'anciennne variable et $x \to x_0$, on notera par exemple $h = x - x_0\; si\; x_0 \in \mathbb{R}$, $h = \frac{1}{x}$ $(si\; x_0 = +\infty\; ou\; x_0 = -\infty)$ et on exprimera $f(x)$ en fonction de h. le résultat final du développement limité de f en x_0, sera donné à l'aide d'un polynôme en h, ordonné suivant les puissances croissantes. En aucun cas, on ne développera les puissances de $x - x_0$.

6. Règle de l'Hôpital

Elle est utilisée pour lever au point $x = x_0$ les indéterminations du type :

$$\frac{0}{0}\; ou\; \frac{\infty}{\infty}.$$

Soient f et g deux fonctions dérivables au voisinage de $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ et $g'(x) \neq 0$. Si :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0\; ou\; \infty$$

alors :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si le quotient $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ au point $x = x_0$ présente lui aussi une indétermination du type $\frac{0}{0}\; ou\; \frac{\infty}{\infty}$ et que les dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$ satisfont les conditions correspondantes, il convient alors de passer au rapport des dérivées secondes, etc.

Dans le cas d'une indétermination du type $0 \cdot \infty$ ou $\infty - \infty$ il y a lieu de transformer algébriquement la fonction donnée de manière à la ramener à une indétermination du type $\frac{0}{0}\; ou\; \frac{\infty}{\infty}$ et d'appliquer ensuite la règle de l'Hôpital.

Les indéterminations du type 0^0, ∞^0, ou 1^∞ peuvent être levées en prenant le logarithme de la fonction donnée et en calculant la limite du logarithme de cette fonction.

Travaux dirigés N°2

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie par $(x) = x\, Arcsin\, x + \sqrt{1-x^2}$. f vérifie t - elle les conditions du théorème de Rolle ? Si oui, déterminer les valeurs intermédiaires ?
2. Développer par la formule de Taylor à l'ordre n au voisinage de $x_0 = 0$ l'expression :

$$g(x) = Arcsin\, x.$$

Exercice 2

Déterminer le développement limité à l'ordre n et au voisinage de x_0 indiqués des fonctions suivantes :

1. $n=3,\ x_0 = +\infty,\ f(x) = Arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$
2. $n=2,\ x_0 = 2\pi,\ g(x) = \cos\sqrt{x^2 + 5\pi^2}$
3. $n = 4,\ x_0 = 0,\ h(x) = \cos[ln(cos\, x)]$
4. $n = 5,\ x_0 = 0, p(x) = e^{\cos x}\left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$
5. $n = 2,\ x_0 = 0,\ k(x) = \frac{x}{e^x - 1}$
6. $n = 5,\ x_0 = 0\ ;\ l(x) = e^{\cos x}$
7. $n = 4,\ x_0 = 0\ ;\ A(x) = x(chx)^{1/x}$
8. $n = 5,\ x_0 = 0\ ; B(x) = (\cos x)^{\cos x}$
9. $n = 4,\ x_0 = 0\ ; C(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\cos^3 x}$
10. $n = 2,\ x_0 = 0\ ;\ D(x) = e^{\frac{1}{x}\ln\frac{ch\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}}$
11. $n = 2,\ x_0 = +\infty\ ; E(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$
12. $n = 1,\ x_0 = +\infty\ ;\ Q(x) = \frac{x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^x - \left(\frac{x}{2}\right)^{2x}}{x^{\sin x} - \left(\frac{x}{2}\right)^{\sin 2x}} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\ln\cos x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\frac{x}{1+x}-\frac{\sin x}{1+\sin x}\right) \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{Arctan[x^2(1-\cos x)]}{\left(1-\sqrt{cosx}\right)\ln\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \;;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln chx+\ln\cos x)^2}{\sqrt{chx}+\sqrt{\cos x}-2} \;;\; \lim_{x\to+\infty}\left(sh\sqrt{x^2+x}-sh\sqrt{x^2-x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} sh(chx)-ch(shx) \;;\; \lim_{x\to+\infty}\left(ch\sqrt{x+1}-ch\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)^{(x+1)^{\frac{1}{(x+1)}}}-x^{x^{\frac{1}{x}}}\right] \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{2\cos x} \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3xe^x+3x^2}{Arctan\,x-\sin x-\frac{x^3}{6}}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{p}{1-x^p}-\frac{q}{1-x^q}\right) \;;\; \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Exercice 4

1. Calculer à 0,0001 près la valeur approchée de $\sqrt{e}$.
2. Calculer à 10^{-3} près la valeur approchée de $\sqrt[3]{29}$.

Exercice 5

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right] \;;\;\;;\; \lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{5}{6}}-x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{sinx-tan^2x}} \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1+sinx}}-e}{tanx}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{sh\sqrt{x^2+x}-sh\sqrt{x^2-x}}{chx} \;;\; \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tanx} \;;\; \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^x-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\right]$$

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{Arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}$$

   a) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 5 de f.

b) En déduire le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 6 de la fonction g définie par :

$$g(x) = (Arcsinx)^2$$

Exercice 6

On consid4ère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = sin^4x + cos^4x \ \ et \ \ g(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$$

6. f vérifie t- elle les conditions du théorème de Rolle sur $[0; 2\pi]$? Si oui, déterminer les valeurs intermédiaires.
7. g vérifie t- elle les conditions du théorème de Rolle sur $[-2; 1]$? Si oui, déterminer les valeurs intermédiaires.

Exercice 7

1. Développer en série de Taylor les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} \ \ en\, x_0 = 0\,; \ \ g(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 7} \ \ en\, x_0 = -2$$

2. Donner la formule approchée à l'ordre 5 par la formule de Maclaurin de la fonction k définie par :

$$k(x) = (cosx)^{sinx}$$

En déduire la valeur approchée de :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

3. Donner la valeur approximative première de :

$$Arctan(0{,}8)$$

4. On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x}$$

a) Développer h en série de Taylor en $x_0 = 1$.

b) En déduire le développement par la formule de Taylor de la fonction définie par :

$$l(x) = ln(x^2 + x).$$

Exercice 8

On donne les fonctions f et g définies respectivement par :

$$f(x) = Arccos\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - Arcsin\sqrt{\frac{1+cox}{2}} \quad et\ g(x) = Arctan\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}$$

1. a) La fonction f vérifie t – elle les conditions du théorème des accroissements finis sur $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$. Si
   oui, déterminer les valeurs intermédiaires.
   b) En déduire une expression simplifiée de f sur $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.
2. Simplifier $g(x)$ sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left[e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}\right);\ \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^x-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\right];\ \lim_{x\to+\infty}\left(ch\sqrt{x+1}-ch\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Exercice 9

On donne les fonctions f, g, et h respectivement définies par :

$$f(x) = ln\left(1+x+\sqrt{x+1}\right);\ \ g(x) = Argch(4x^3-3x)\ ; h(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$$

1. a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ et de $h(x)$ au voisinage de 0.
   b) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x_0 = 2$ de $g(x)$.
2. a) Développer en série de Taylor au voisinage de $x_0 = 2$ la fonction k définie par :

$$k(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

   b) Déterminer le développement en série de Taylor au point $x_0 = 2$ de l'unique primitive de k qui
   prend la valeur y_0 pour $x = 2$.
3. Déterminer les coefficients a et b pour que la fonction q définie par :

$$q(x) = cosx - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$ ne contienne qu'un seul terme en x de degré 6.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt[3]{x^3+\lambda x^2+1} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de λ pour que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction g définie par :

$$g(x) = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt[3]{x^3-\frac{3}{2}x^2+1}$$

CHAPITRE 4

LES INTEGRALES SIMPLES

1. Différentielle d'une fonction

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si x est la variable, la différentielle de la fonction f est df et vaut :

$$df = f'(x)dx.$$

Exemple :

$$f(x) = Arctan\, x$$

$$df = \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Propriétés

$\forall c \in \mathbb{R}, \qquad dc = 0$

$d(u \pm v) = du \pm dv$

$d(u \cdot v) = du \cdot dv$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

$df(u) = f'(u)du$

2. Les fonctions primitives

Soient F et f deux fonctions définies sur I de $\mathbb{R}$.

On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

L'ensemble des primitives de la fonction f sur I est l'ensemble des primitives des fonctions de la forme $F(x) + c$ où F est une primitive de f et c est une constante quelconque. L'ensemble des primitives de f sur I est noté :

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Propriétés

$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)\, dx$ avec α et β des constantes réelles.

$d\int f(x)dx = f(x)dx$

$\int f'(x)dx = f(x) + c, \qquad c = cte\ réelle.$

$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = F(x) - F(x_0)$ où F est une primitive de f $sur\ I, x_0 \in$ I.

3. Intégrales définies

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a, b \in I$. On appelle intégrale définie de la fonction f sur le segment $[a\,;b]$ et on note :

$$\int_a^b f(x)dx,$$

le nombre réel défini par :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

avec F une primitive de f sur $[a\,;b]$.

Notation

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Propriétés

$\int_a^a f(x)dx$

$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$ avec α et β des constantes réelles.

$\forall c \in [a\,;b], \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Si $f(x) \geq 0, \forall x \in [a\,;b], \int_a^b f(x)dx \geq 0$

Si $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a\,;b], \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx \ \ si\ f\ est\ paire \\ \\ 0\ \ si\ f\ est\ impaire \end{cases}$$

$Si\ m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a\,;b]\ avec\ m, M\ = ctes\ alors\ m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

On appelle valeur moyenne de f sur le segment $[a\,;b]$, la quantité $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

4. Tables d'intégrales types

Dans cette partie, c désigne une constante réelle.

$\int dx = x + c$; $\int x^m dx = \dfrac{1}{m+1}\, x^{m+1} + c,\ \ m \neq -1$;

$\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + c$; $\int \dfrac{u'(x)}{u(x)} dx = ln|u(x)| + c$; $\int \dfrac{dx}{1+x^2}\, dx = Arctan\, x + c$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arcsin\, x + c$; $\int e^x dx = e^x + c$; $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{lna} + c$; $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

$\int cos\, x dx = \sin x + c$; $\int \dfrac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + c$; $\int \dfrac{1}{sin^2 x} dx = -\text{cotan}\, x + c$;

$\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + c$; $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c$; $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c$;

$\int cotan\, x\, dx = \ln|\sin x| + c$; $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = Arcsin\dfrac{x}{a} + c$; $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} Arctan\dfrac{x}{a} + c$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \lambda}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm \lambda}\right| + c$; $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$; $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

$\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -\coth x + c$; $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = th\, x + c$; $\int ch\, x dx = sh\, x + c$; $\int sh\, x dx = ch\, x + c$

$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c$; $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$; $\int \dfrac{1}{sh\, x} dx = ln\left|th\dfrac{x}{2}\right| + c$

$\int \dfrac{dx}{ch\, x} = 2Arctan\, e^x + c$ ou $2Arctan\, th\dfrac{x}{2} = Arctan\, shx + c$; $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = argchx + c$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = Argshx + c$; $\int \dfrac{1}{1 - x^2} dx = Argthx = \dfrac{1}{2} ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + c$;

$\int \dfrac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^n} dx = -\dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{\left(u(x)\right)^{n-1}} + c$; $\int \dfrac{1}{(x-a)^n} dx = -\dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} + c$;

$avec\; n > 1$

5. Intégration par changement de variable

D'une manière générale, si l'intégrale $\int f(x)dx$ est une intégrale type alors $\int f(ax+b)dx$ peut être aisément calculée par la substitution $ax + b = t$

Exemple : $\int \sin(ax + b)dx$

$\Rightarrow dt = adx \Rightarrow \int \sin(ax + b)dx = \int \sin t \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{a}\cos t + c$

$= -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$. Donc $\int (ax + b)\, dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + c$ **où *F* est la primitive de *f*.**

D'une façon générale, si la fonction sous le signe d'intégration est le produit de deux facteurs dont l'un dépend d'une fonction $\varphi(x)$ alors que l'autre est la dérivée de $\varphi(x)$ (à un facteur constant près), il est bon d'effectuer un changement de variable suivant la formule $\varphi(x) = t$.

Exemple :

- $\int x^2\sqrt{x^2 + 5}\, dx$. Posons :

$\sqrt{x^2 + 5} = t \Rightarrow x^3 + 5 = t^2 \Rightarrow 3x^2dx = 2tdt \Rightarrow x^2dx = \frac{2}{3}tdt$

$\Rightarrow \int x^2\sqrt{x^2 + 5}\, dx = \int \sqrt{x^2 + 5}\, x^2dx = \int t.\frac{2}{3}.t.dt = \frac{2}{3}\int t^2dt = \frac{2}{9}t^3 + c$

$= \frac{2}{9}\left(\sqrt{x^2 + 5}\right)^3 = \frac{2}{9}(x^3 + 5)\sqrt{x^3 + 5} + c$

- $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx$. Posons $2\ln x + 3 = t \Rightarrow 2\frac{dx}{x} = dt \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}dt$

$\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx = \int t^3.\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^3\, dt = \frac{1}{8}t^4 + c = \frac{1}{8}(2\ln x + 3)^4 + c$

6. Intégration par parties

On appelle intégration par parties la recherche de l'intégrale d'après la formule

$\int u.v' = uv - \int v.u'$.

Ce procédé s'applique pour calculer les primitives des fonctions suivantes :

- Produit d'une fonction polynomiale par une fonction exponentielle ($P(x).e^x$)
- Produit d'une fonction polynomiale par une fonction sinus ou cosinus ($P(x)\sin x \;\; ou \; P(x)\cos x$).
- Produit d'une fonction exponentielle par sinus ou cosinus ($e^x \sin x \;\; ou \; e^x\cos x$)
- Produit d'une fonction polynomiale par une fonction logarithme ($P(x)\ln x \;\; ou \; P(x)\ln x^n = nP(x)\ln x$)
- Fonctions trigonométriques réciproques : Arcsin, Arccos, Arctan, Argth, Argsh, Argch.

En qualité de u on prend une fonction qui devient plus simple à la suite de la dérivation, alors que v' sera représentée par la partie de l'expression figurant sous le signe d'intégration dont l'intégrale est connue ou peut être trouvée.

Ainsi, par exemple, pour les intégrales du type $\int p(x)\, e^x dx$, $\int p(x).\sin ax\, dx$, $\int p(x).\cos ax\, dx$ où *p(x)* est un polynôme, u est remplacé par *p(x)*, *v'* l'étant respectivement par les expressions e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$.

Pour les intégrales du type $\int P(x).\ln x\,dx$, $\int P(x).Arc\sin x\,dx$, $\int P(x).Arc\cos x\,dx$, u est remplacée respectivement par les fonctions *lnx*, *Arcsinx*, *Arccosx*, alors qu'à *v'* on substitue l'expression *P(x)dx*.

Exemple : $I = \int Arc\tan x\,dx$. Posons $u'(x) = 1$; $u(x) = x$

$$v(x) = Arc\tan x \;;v'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$I = xArc\tan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xArc\tan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = xArc\tan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$

$J = \int e^x.\sin x\,dx$. Posons $u(x) = e^x$; $u'(x) = e^x$

$$v'(x) = \sin x \;\;; v(x) = -\cos x.$$

$J = -e^x\cos x - \int -e^x\cos x\,dx$. Considérant $\int e^x\cos x\,dx$

Posons $a(x) = e^x$ alors $a'(x) = e^x$

$b'^{(x)} = \cos x$; $b(x) = \sin x$

$\int e^x\cos x\,dx = e^x.\sin x - \int e^x.\sin x\,dx$ alors $J = -e^x\cos x + (e^x.\sin x - 1)$ donc $2J = -e^x\cos x + e^x.\sin x$

Par suite :

$J = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c.$

7. <u>Intégration des fractions rationnelles</u> : $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx, Q(x) \neq 0$

On appelle fraction rationnelle, une fraction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes.

On dit que la fraction rationnelle est **propre** ou **régulière** lorsque le degré du polynôme $P(x)$ est inférieur à celui du polynôme $Q(x)$. Dans le cas contraire on dit qu'elle est **impropre** ou **irrégulière**.

a-<u>Intégrale du type</u> : $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx$

On le calcule comme suit :

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \int \left(\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a}{c} + \frac{a}{c}\right)dx = \int \left[\left(\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a}{c}\right) + \frac{a}{c}\right]dx$$

$$= \int \left(\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a}{c}\right)dx + \frac{a}{c}\int dx$$

Ex : Calcul de $I = \int \frac{3x+2}{4x+1}dx$

$$\int \left(\frac{3x+2}{4x+1} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right)dx = \int \left(\frac{3x+2}{4x+1} - \frac{3}{4}\right)dx + \frac{3}{4}\int dx$$

$$= \int \frac{3x + 2 - \frac{3}{4}(4x + 1)}{4x + 1} dx + \frac{3}{4}\int dx = \frac{5}{4}\int \frac{dx}{4x + 1} + \frac{3}{4}\int dx$$

$$= \frac{5}{4} * \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{4x + 1} + \frac{3}{4}\int dx$$

$$I = \frac{5}{16}\ln|4x + 1| + \frac{3}{4}x + C$$

b- <u>Intégration des fractions rationnelles par décomposition en éléments simples</u> :

Avant de procéder à l'intégration d'une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$, il convient d'effectuer les transformations et les calculs algébriques suivants :

- Si l'on donne une fraction rationnelle impropre, il faut faire apparaître la parie entière, c'est-à-dire présenter la fraction sous la f=forme : $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, où $M(x)$ est un polynôme $\frac{P1(x)}{Q(x)}$ étant une fraction rationnelle propre ;
- Décomposer le dénominateur de la fraction en facteurs linéaires et quadratiques :

$$Q(x) = (x - a)^m \dots\dots\dots (x^2 + px + q)^n \dots, où\ \frac{P^2}{4} - q < 0, c'est - à - dire\ le\ trinôme$$

$x^2 + px + q$ a des racines complexes conjuguées ;

- Décomposer une fraction rationnelle propre en éléments simples :

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a)^m} + \frac{A_2}{(x - a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x - a} + \dots + \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{x^2 + px + q} + \dots$$

- -Calculer les coefficients indéterminés $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_n, C_n, \dots$, et pour ce faire, réduire au même dénominateur la dernière égalité, égaler entre les coefficients des mêmes puissances de X dans le premier et dans le deuxième membres de l'identité obtenue et résoudre le système d'équations linéaire qui en résulte par rapport aux coefficients cherchés. On peut déterminer les coefficients à l'aide d'une autre méthode, en donnant à la variable X dans l'identité obtenue des valeurs numériques arbitraires. Il est souvent utile de mettre en œuvre les deux méthodes de calcul de coefficients.

Par suite, l'intégration d'une fraction rationnelle se ramènera à la recherche des intégrales d'un polynôme et des fractions élémentaires rationnelles.

<u>Cas 1</u> : Le dénominateur n'a que des racines réelles distinctes, c'est-à-dire il se décompose en facteurs du premier degré non réitératifs.

<u>Exemple</u> :

$$I = \int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$$

Chacun des binômes $x - 1$; $x - 2$; $x - 4$ entre dans la décomposition du dénominateur au premier degré, la fraction rationnelle propre donnée peut être représentée par une somme d'éléments simples :

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}$$

En faisant disparaître les dénominateurs on a :

$x^2 + 2x + 6 = A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2)$.(*)

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 6 = A(x^2 - 6x + 8) + B(x^2 - 5x + 4) + C(x^2 - 3x + 2)$

Regroupons les termes de puissances :

$x^2 + 2x + 6 = (A + B + C)x^2 + (-6A - 5B - 3C)x + (8A + 4B + 2C)$

Par identification on a :

$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ -6A - 5B - 3C = 2 \\ 8A + 4B + 2C = 6 \end{cases}$ A partir de ce système d'équations on obtient : $\begin{cases} A = 3 \\ B = -7 \\ C = 5 \end{cases}$

Ainsi la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples est de la forme

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x-4}$$

Lors de la décomposition, les inconnues A, B, C peuvent être trouvées d'une autre manière.

Après avoir fait disparaître les inconnues de l'égalité, on peut donner à la valeur x autant de valeurs particulières qu'il y a d'inconnues dans le système d'équations. Dans notre cas, il s'agit de trois valeurs particulières.

Il est particulièrement commode de donner à x des valeurs correspondant aux racines réelles du dénominateur. Appliquons cette méthode à la résolution du présent exemple.

Après avoir fait disparaître les dénominateurs, nous avons obtenu l'égalité (*). Les racines réelles des dénominateurs sont les nombres 1, 2 et 4. Posons dans cette égalité $x = 1$, alors $1^2 + 2.1 + 6 = A(1-2)(1-4) + B(1-1)(1-4) + C(1-1)(1-2) \Leftrightarrow 9 = 3A \Rightarrow$ $A = 3$. En posant $x = 1$ on a $14 = -2B \Rightarrow B = -7$; en posant $x = 4$, on obtient $30 = 6C \Rightarrow C = 5$. Par suite on a obtenu les mêmes valeurs que par l'application de la première méthode de calcul des inconnues. Ainsi,

$$I = \int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx = 3\int \frac{dx}{x-1} - 7\int \frac{dx}{x-2} + 5\frac{dx}{x-4}$$

$$= 3\ln|x-1| \ln|x-2| \ln|x-4| + c = \ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right| + C$$

Cas 2 : Les racines du dénominateur sont réelles, mais certaines d'entre elles sont multiples, c'est-à-dire que le dénominateur se décompose en facteurs du premier degré dont quelques-uns se répètent.

Exemple :

$$J = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$$

Au facteur $(x-1)^3$ correspondent trois éléments simples $\frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$, alors qu'au facteur x+3 correspond un seul élément simple $\frac{D}{x+3}$. Ainsi,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}$$

En faisant disparaître les dénominateurs on a :

$$x^2+1 = A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2(x+3) + D(x-1)^3$$

Les racines réelles des dénominateurs sont les nombres 1 et -3. En posant x=1, on obtient 2 = 4A $\Rightarrow A = \frac{1}{2}$. En faisant x = - 3, on obtient 10 = - 64D $\Rightarrow D = -\frac{5}{32}$

Comparons les coefficients de la puissance la plus élevée de x, c'est-à-dire les coefficients de x^3. Dans le premier nombre, le terme comportant x^3 n'existe pas c'est-à-dire que le coefficient de x^3est nul. Dans le deuxième membre le coefficient de x^3 est égale à C+D. Ainsi, C+D=0⇒C=-D d'où $C = \frac{5}{32}$.

Il reste le coefficient B pour ce faire il faut avoir encore une équation. On peut obtenir celle-ci en comportant les coefficients des mêmes puissances de x (par exemple, dex^3) ou en donnant à x une valeur numérique quelconque. Il est plus commode de choisir une valeur telle que les calculs soient réduits au minimum. En faisant par exemple x=0, on obtient : 1=3A-3B+3C d'où :

$$1 = \frac{3}{2} - 3B + \frac{15}{32} + \frac{5}{32} \Rightarrow B = \frac{3}{8}$$

L décomposition définitive de cette fraction en éléments simples à la forme :

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{3}{8(x-1)^2} + \frac{5}{32(x-1)} - \frac{5}{32(x+3)}$$

On obtient finalement :

$$J = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$J = -\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C$$

Cas 3 :

Parmi les racines du dénominateur il y a des racines complexes simples, c'est-à-dire que la décomposition du dénominateur comporte des facteurs quadratiques non réitératifs.

Exemple : $K = \int \frac{dx}{x^5 - x^2}$

Décompositions le dénominateur en facteurs :

$x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1)$ alors

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

En faisant disparaître les dénominateurs on a :

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1)$$

Les racines réelles des dénominateurs sont 0 et 1. Pour x=0, on a 1=-A ; pour x=1, on a 1 = 3C soit $C = \frac{1}{3}$; Réécrivons l'équation précédente sous la forme

$1 = A(x^3 - 1) + B(x^4 - x) + C(x^4 + x^3 + x^2) + Dx^4 + Ex^3 - Dx^3 - Ex^2$. En comparant les coefficients de x^4, x^3, x^2, on obtient le système d'équations : $\begin{cases} B + C + D = 0 \\ A + C + E - D = 0 \\ C - E = 0 \end{cases}$ et on trouve $B = 0, D = -\frac{1}{3}, E = \frac{1}{3}$. Ainsi

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$$

Par conséquent,

$$K = \int \frac{dx}{x^5 - x^2} = -\int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{3(x-1)} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)}dx$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx$$

<u>Cas</u> 4 : Parmi les racines du dénominateur, il y a des racines complexes multiples, c'est-à-dire que la décomposition du dénominateur comporte des facteurs quadratiques non réitératifs.

Exemple : $U = \int \frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)} dx$

Etant donné que $x^2 + 1$ est un facteur qui intervient deux fois, on a :

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

En faisant disparaître les dénominateurs, ion obtient : $x^3 - 2x = Ax + B + (Cx + D)(x + 1)$

Égalisons entre eux les coefficients des mêmes puissances de x :

$$\begin{cases} 1 = C & (x^3) \\ 0 = D & (x^3) \\ -2 = A + C\,; A = -3 & (x^3) \\ 0 = B + D\,; B = 0 & (x^3) \end{cases}$$

Par conséquent,

$$U = \int \frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{-3xdx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{xdx}{(x^2+1)} = -\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= \frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

c- Intégrale du type : $\boldsymbol{I_1} = \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}$

On donne d'abord la forme canonique de $ax^2 + bx + c$. Ainsi, on a :

$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{d}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{2a}\right)\right]$ Posons $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{2a} = \pm k^2$

et $x + \frac{b}{2a} = t$; $dx = dt$. On alors $I = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{t^2 \pm k^2}$

- ✓ $\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2} = \frac{1}{ka}Arctan\frac{t}{k} + C$
- ✓ $\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2} = \frac{1}{a}\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right| + C$

Exemple :

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2 + 16} \Rightarrow$$

Posons $t = x + 3$ alors $dt = dx$

$$I = \int \frac{dt}{t^2 + 16} = \int \frac{dt}{t^2 + 16} = \frac{1}{4}Arctan\frac{t}{4} + C$$

Donc

$$I = \frac{1}{4}Arctan\frac{x+3}{4} + C$$

d-Intégrale du type $\int \frac{\boldsymbol{Ax+B}}{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{I_2}$

On essaie de dériver $ax^2 + bx + c$, ce qui donne 2ax+b. On peut donc écrire :

$Ax + B = \frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)$. Alors

$$I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c}dx$$

Soit :

$$I = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

La seconde intégrale est justement I_1 que nous savons calculer. En effet on effectue un changement de variable dans la première intégrale en posant :

$ax^2 + bx + c = t \Rightarrow (2ax + b)dx = dt \Rightarrow \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$

$= \ln|ax^2 + bx + c| + C$.En définitive $I_2 = \frac{A}{2a}\ln|ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)I_1$

Exemple : $I_2 = \int \frac{x}{2x^2+2x+5}dx$

$$I_2 = \int \frac{\frac{1}{4}(4x + 2) - \frac{1}{2}}{2x^2 + 2x + 5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x + 5}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 5}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2 + 2x + 5| - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 2x + \frac{5}{2}}$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\ln|2x^2 + 2x + 5| - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\ln|2x^2 + 2x + 5| - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2 + 2x + 5| - \frac{1}{4}.\frac{1}{\frac{3}{2}}Arc\tan\frac{t}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2 + 2x + 5| - \frac{1}{6}Arc\tan\frac{2x + 1}{3} + C$$

$$I_3 = \frac{2x^3 + 3x}{x^4 + x^2 + 1}dx$$

$$I_3 = \int \frac{(2x^2 + 3)xdx}{x^4 + x^2 + 1}$$

En posant $x^2 = t$, on a $2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int \frac{2t + 3}{t^2 + t + 1}dt$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int \frac{(2t + 1) + 2}{t^2 + t + 1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1}dt + \int \frac{dt}{t^2 + t + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1}dt + \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\ln|t^2 + t + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}}Arc\tan\frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^4 + x^2 + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}}Arc\tan\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3}} + C$$

e- **Calcul de l'intégrale** : $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x.dx}{(x^2 + a^2)^n}$$
$$= \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int x\frac{xdx}{(x^2 + a^2)^n}$$

Posons $u(x) = x$ alors $u'(x) = 1$

$$v'(x) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} \; ; v(x) = -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$$

D'où

$$I_n = \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}\right]$$

Ou

$$I_n = \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}}$$

Cette formule appliquée $(n-1)$ fois permet de ramener l'intégrale I_n à une intégrale du type $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

Exemple : Calculons $I = \int \frac{dx}{(x^2+2)^3}$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2 + x^2 - x^2}{(x^2 + 2)^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{x.xdx}{(x^2 + 2)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} - \frac{1}{2}\int x\frac{xdx}{(x^2 + 2)^3}$$

Considérant l'intégrale $\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$ posons :

$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = \frac{x}{(x^2 + 2)^3} \; ; v(x) = -\frac{1}{2(3-1)}\frac{1}{(x^2 + 2)^{3-1}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2 + 2)^2}$$

$$\frac{1}{2}\int x\frac{xdx}{(x^2 + 2)^3} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\frac{x}{(x^2 + 2)^2} - \int -\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2 + 2)^2}dx\right] = -\frac{1}{8}\frac{x}{(x^2 + 2)^2} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$$

Donc :

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} + \frac{1}{8}\frac{x}{(x^2 + 2)^2} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{8}\frac{x}{(x^2 + 2)^2} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2+x^2-x^2}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{dx}{(x^2+2)} - \int x\frac{xdx}{(x^2+2)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}Arc\tan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int x\frac{xdx}{(x^2+2)^2}$$

Posons $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = \frac{x}{(x^2+2)} \ ; v(x) = -\frac{1}{2(2-1)}\frac{1}{(x^2+2)^{2-1}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2}$$

Alors

$$-\frac{1}{2}\int x\frac{xdx}{(x^2+2)^2} = -\frac{1}{2}\left[-\frac{x}{2(x^2+2)} - \int -\frac{1}{2}\frac{dx}{x^2+2}\right] = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+2)} - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}Arc\tan\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$I = \frac{1}{8}\frac{x}{(x^2+2)^2} + \frac{3}{8}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}Arc\tan\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}Arc\tan\frac{x}{\sqrt{2}}\right] + C$$

$$I = \frac{1}{8}\frac{x}{(x^2+2)^2} + \frac{3}{32}\frac{x}{(x^2+2)} + \frac{3\sqrt{2}}{64}Arc\tan\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

f - <u>Intégrale du type</u> : $\boldsymbol{I_n = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx}$

$$I_n = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

La première intégrale du deuxième membre de l'égalité sera aisément trouvée par substitution x^2+$x^2 + px + q = t$, alors que la seconde sera transformée comme suit :

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^n}$$

En posant maintenant $x + \frac{p}{2} = t, dx = dt$ et en faisant $q - \frac{p^2}{4} = a^2$, on obtient

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Ce qui peut être calculé comme précédemment.

<u>Exemple</u> : Calculer $I = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - 2}{(x^2+2x+3)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$$

$$I = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2-1)}\frac{1}{x^2+2x+2} - 2\int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}.$$

posant dans cette intégrale $x + 1 = t, dx = dt$ on a :

$$\int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}Arc\tan\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int t\frac{tdt}{(t^2+2)^2}$$

Posons $u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1$

$$v'(t) = \frac{t}{(t^2+2)} \; ; \; v(t) = -\frac{1}{2(2-1)}\frac{1}{(t^2+2)^{2-1}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+2}$$

Alors

$$-\frac{1}{2}\int t\frac{tdt}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2}\left[-\frac{t}{2(t^2+2)} - \int -\frac{1}{2}\frac{dt}{(t^2+2)}\right] = \frac{1}{4}\frac{t}{t^2+2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}Arc\tan\frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$I = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2-1)}\frac{1}{x^2+2x+3} - 2\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}Arc\tan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{4(x+1)^2+2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}Arc\tan\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right] + c$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{(x+1)}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}Arc\tan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

$$= -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}Arc\tan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

g- <u>Méthode d'Ostrogradsky</u>

Si $Q(x)$ a des racines multiples, alors $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}dx$ (1) *où* $Q_1(x)$est le plus grand commun diviseur du polynôme $Q(x)$ par sa dérivée $Q'(x)$: $Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x)$; $X(x)$ et $Y(x)$ sont des polynômes à coefficients indéterminés, dont les degrés sont respectivement inférieurs d'une unité au degré de $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$. On calcule ces coefficients indéterminés des polynômes $X(x)$ et $Y(x)$ en dérivant (1).

<u>Exemple</u> : $I = \int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$

$$I = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}dx.$$

En dérivant cette identité, on a :

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

Ou $1 = (2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C) + (Dx^2+Ex+F)(x^3-1)$

En identifiant les coefficients correspondants aux mêmes puissances de x, on trouve :

$$D = 0 \; ; E - A = 0 \; ; F - 2B = 0 \; ; D + 3C = 0 \; ; E + 2A = 0 \; ; B + F = -1$$

D'où $A = 0$; $B = -\frac{1}{3}$; $C = 0$; $D = 0$; $E = 0$; $F = -\frac{2}{3}$ et par conséquent,

$$I = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1} \quad (a)$$

Pour calculer l'intégrale du second membre de l'égalité (a), décomposons la fraction $\frac{1}{x^3-1}$ en éléments simples

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{L}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} \Rightarrow 1 = L(x^2+x+1) + Mx(x-1) + N(x-1) \quad (b)$$

En faisant $x = 1$, on trouve $L = \frac{1}{3}$.

En identifiant les coefficients de x de mêmes puissances dans les deux membres de l'égalité (b), on trouve : $L + M = 0$; $L - N = 1 \Rightarrow M = -\frac{1}{3}$; $N = -\frac{2}{3}$

Par suite,

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}Arc\tan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Et

$$I = \int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}\right| + \frac{2}{3\sqrt{3}}Arc\tan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

8. Intégration des fonctions rationnelles

a. Intégrales du type $\int R\left[x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right]dx$

On détermine le dénominateur commun k des fractions $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$. On effectue la substitution $x = t^k \Rightarrow dx = k.t^{k-1}dt$. Chaque puissance fractionnaire de x peut alors être exprimée par une puissance entière de t et par conséquent, la fonction à intégrer se transforme en une puissance rationnelle de t.

Exemple : $I = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx$. Le dénominateur commun des fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ est 4. Posons par conséquent $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$ alors

$I = 4\int \frac{t^2}{t^3+1}t^3\,dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt = 4\int\left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt$ (division euclidienne)

$$= 4\int t^2\,dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt = 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + C = \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right] + C.$$

b. Intégration du type $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx$

On détermine le dénominateur commun K des fractions $\frac{m}{n}, \dots \frac{r}{s}$ et on pose $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$

Exemple $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt{2x+1}}$

$$I = \int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{1}{3}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

Ici le PPCM de 3 et 2 est 6. Posons alors $2x + 1 = t^6$ donc

$x = \frac{1}{2}(t^6 -)\ et\ dx = 3t^5 dt$

$$I = \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3\int \frac{t^2 dt}{t-1} = 3\int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt = 3\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C$$

$$= \frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{3}} + 3(2x+1)^{\frac{1}{6}} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1} - 1\right| + C$$

c. Intégrale du type : $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Il faut donner dans ce cas la forme canonique de $ax^2 + bx + c$. Ainsi

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]$$

En posant $x + \frac{b}{2a} = t$ on a : $I = \int \frac{dx}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$

Intégrale dont la résolution est déjà développée

Exemple :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$$

On a : $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$ Posons $x + 1 = t \Rightarrow dx = dt$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 + 4}\right| + C = \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} + C\right|$$

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2 + 4x - 1}}$$

On a :

$$-3x^2 + 4x - 1 = -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) = -3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] = 3\left[\frac{1}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2\right].$$

En posant $x - \frac{2}{3} = t; dx = dt$. Ainsi

$$J = \int \frac{dt}{\sqrt{3\left[\frac{1}{9} - t^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{9} - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} Arc\sin\frac{t}{\frac{1}{3}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} Arc\sin(3x - 2) + C$$

d- <u>Intégrale du type</u> $\boldsymbol{I = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx}$

$$I = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + B + \frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Dans la première intégrale on pose $ax^2 + bx + c = t \Rightarrow (2ax + b)dx = dt$

$$\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + C$$

La seconde intégrale a été calculée ci-haut.

<u>Exemple</u> :

$$I = \int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x + 4) + (3 - 10)}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2) + 6}} dx$$

$$I = \frac{5}{2}\sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10}\right| + C.$$

e- Intégrale du type $\boldsymbol{I = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}; n \in \mathbb{N}}$

On pose ici $x - \alpha = \frac{1}{t}$ alors

$$x = \frac{1}{t} + \alpha \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$$

<u>Exemples</u> :

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}$$

Posons $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$ et par conséquent

$$I = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2} - \frac{2}{t} + 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2t + 5}} = -\ln\left|\frac{x}{1 - x + \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}\right| + C$$

f-Intégrale du type $I = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx;\, où\ P_n(x)$est un polynôme de degré n

$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ où $Q_{n-1}(x)$ est le polynôme de degré (n-1) à coefficients indéterminés λ étant un certain nombre.

En dérivant l'identité en question et en réduisant le résultat au même dénominateur, on obtient l'égalité de deux polynôme à partir de laquelle on peut déterminer les coefficients du polynôme $Q_{n-1}(x)$ et le nombre $\lambda + \lambda \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Exemple : $I = \int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

Ici n=3, donc l'identité correspondante est de la forme

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}dx = (b_0x^2 + b_1x + b_2)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

En dérivant les deux membre de l'identité, on obtient :

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = (2b_0x + b_1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + (b_0x^2 + b_1x + b_2)\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + \lambda \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

En faisant disparaître les dénominateurs on a :

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 3b_0x^3 + (5b_0 - 2b_1)x^2 + (4b_0 + 3b_1 + b_2)x + (2b_1 + b_2 + +\lambda)$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 3b_0 = 1 \\ 5b_0 + 2b_1 = 2 \\ 4b_0 + 3b_{1+}b_2 = 3 \\ 2b_1 + b_2 + \lambda = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = \frac{1}{3} \\ b_1 = \frac{1}{6} \\ b_2 = \frac{7}{6} \\ \lambda = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$I = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2}\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C$$

g- <u>Intégrale du type</u> $\boldsymbol{I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx}$

Cette intégrale peut être ramenée à celle d'une fonction rationnelle par les substitutions de variables d'Euler.

- ✓ Première substitution d'Euler :$a > 0$

  Si $a > 0$, on pose : $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}.x + t$

Prenons pour fixer les idées, le signe + devant $\sqrt{a}$, alors $ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a.xt + t^2}$. D'où x est défini comme une fonction rationnelle de t : $x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}t}$

(dx est aussi une fonction rationnelle de t) ; par conséquent

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}.x + t = \sqrt{a}.\frac{t^{2-c}}{b-2\sqrt{a}t} + t$

TCHEBYCHEV a démontré que les intégrales des binômes différentielles ne peuvent être exprimées par des fonctions élémentaires que dans les trois cas suivantes :

<u>1^er^Cas</u> : P est un nombre entier ; dans ce cas, le changement de variables $X = t^5$ où S est le PPCM des dénominateurs des fractions m et n, ramène l'intégrale proposée à une intégrale d'une fraction rationnelle.

<u>Exemple</u> : $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$

Ici la fonction sous le signe d'intégration peut être écrite comme suit : $x^{-1/2}\left(x^{1/4} + 1\right)^{-10}$ c'est-à-dire P=-10 est un nombre entier. Or le PPCM des dénominateurs 2 et 4 est 4. Pour cela posons $x = t^4 \Leftrightarrow dx = 4t^3dt$ et

$$I = \int \frac{4t^3dt}{t^2(t+1)^{10}} = 4\int \frac{tdt}{(t+1)^{10}} = \int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}dt = \int \frac{dt}{(t+1)^9} - \int \frac{dt}{(t+1)^{10}}$$

$$= \int (t+1)^{-9}dt - \int (t+1)^{-10}dt = -\frac{1}{8(t+1)^8} + \frac{1}{9(t+1)^9} + C$$

Ainsi :

$$I = -\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8} + \frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9} + C$$

<u>2^e^cas</u> : $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier.

Ici, le changement de variable $a + bx^n = t^s$, ramène l'intégrale en question à une intégrale d'une forme rationnelle.

<u>Exemple</u> : $I = \int \frac{x^3dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$

En mettant la fonction sous le signe d'intégration sous la forme $x^3(4-x^2)^{\frac{-3}{2}}$ on a :

m=3 ; n=2 ; $p = -\frac{3}{2}$. Vu que $\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2$ est un nombre entier. On peut poser

$4 - x^2 = t^2 \Rightarrow -2xdx = 2tdt\ soit\ xdx = -tdt\ et\ x^2 = 4 - t^2$. On a

$$I = -\int (4 - t^2)^{-3} t dt = -\int \frac{4 - t^2}{t^2} dt\ \ soit\ I = \int dt - 4\int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{4}{t} + C = \frac{t^2 + 4}{t} + C.$$

3<u>ème</u> <u>cas</u> : $\mathbf{\frac{m+1}{n} + p}$ est un nombre entier.

Dans ce cas, on pose $ax^{-n} + b = t^s$ où s est le dénominateur de la fraction p.

<u>Exemple</u> :

$$I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1 + x^2}}$$

Ici, $m = -4, n = 2, p = -\frac{1}{2}\ et\ \frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2$ est un nombre entier. Par conséquent, on pose $x^{-2} + 1 = t^2$ alors $-2x^{-2}dx = 2tdt$; $x^{-3}dx = -tdt$. on a alors

$I = \int x^{-4}(1 + x^2)^{\frac{-1}{2}}dx = \int x^{-4}[x^2(x^{-2} + 1)]^{\frac{-1}{2}}dx = \int x^{-2}(x^{-2} + 1)^{\frac{-1}{2}}x^{-3}dx$. Par conséquent, $I = -\int (t^2 - 1)\, t^{-1} t dt = -\int (t^2 - 1)dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sqrt{x^{-2} + 1} - \frac{\sqrt{(x^{-2}+1)^3}}{3} + c = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + C = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C$

9. <u>Intégration des fonctions trigonométriques</u>

a-<u>Intégrales du type</u> $\int \mathbf{R(\sin x, \cos x)\, dx}$; où R est une fonction rationnelle

On procède à un changement de variable dit substitution trigonométrique universelle $\tan\frac{x}{2} = t$. Par suite de ce changement de variable, on a :

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - tan^2\frac{x}{2}}{1 + tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 - t^2};\ \tan\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2Arctan\, t$$

et

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

<u>Exemple</u> :

$$I = \int \frac{dx}{(4\sin x + 3\cos x + 5)}$$

La fonction sous le signe d'intégration est une fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$. Posons $\tan\frac{x}{2} = t$ alors $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ et

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C$$

$$I = \int \frac{dx}{(4\sin x + 3\cos x + 5)} = \frac{-1}{\tan\frac{x}{2} + 2} + C$$

N.B : La substitution universelle $\tan\frac{x}{2} = t$ conduit, dans biens de cas, à des calculs trop compliqués.

$I = \int sin^4x(1 - sin^2x)^2 cosxdx$. Posons $\sin x = t \Longrightarrow \cos x\, dx = dt$

$$I = \int t^4(1-t^2)^2dt = \int t^4dt - 2\int t^6dt + \int t^8dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 + C$$

$$I = \int \frac{1}{5}sin^5x - \frac{2}{7}sin^7x + \frac{1}{9}sin^9x + C$$

$$J = \int \frac{cos^3x}{sin^4x}dx = \int \frac{cos^2x}{sin^4x}\cos x\, dx = \int \frac{(1 - sin^2x)}{sin^4x}\cos x\, dx.$$

En posant $\sin x = t$ on a :

$\cos x\, dx = dt$. Ainsi $J = \int \frac{(1-t^2)}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^2} + \frac{1}{t} + C$

$$J = -\frac{1}{3sin^3x} + \frac{1}{\sin x} + C$$

- ✓ **$\int \sin^m x.\cos^n x\, dx$, où m et n sont des nombres pairs non négatifs**

Posons m=2p et n=2q. On sait que $sin^2x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$;

$cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ et $\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

$$\int sin^mx.cos^nxdx = \int sin^{2p}x.cos^{2q}xdx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x\right)^p.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x\right)^q dx$$

On obtient un développement suivant les puissances paires et impaires de $\cos 2x$. Les termes contenant des puissances impaires peuvent être intégrées comme précédemment. En ce qui concerne les termes contenant des puissances paires, nous appliquerons successivement la formule ci- haut (de $sin^2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ et de $cos^2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x$) afin d'abaisser le degré de ces puissances.

<u>Exemples</u> : $I = \int sin^2xcos^2xdx$

$$I = \int (\sin x.\cos x)^2dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx$$

$$I = \frac{1}{8}\int (1 - \cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

$$J = \int sin^2xcos^4x\, dx = \int (\sin x.\cos x)^2cos^2x\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2.\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$J = \int \frac{1}{8}\int sin^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int sin^2 2x\cos 2x\,dx$$

$$J = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{8}\int sin^2 2x.\frac{1}{2}d(\sin 2x)$$

$$J = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\,dx + \frac{1}{16}\int sin^2 2x.d(\sin 2x)$$

$J = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}sin^2 2x + C$

Ainsi $I = \int \frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1} = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1}$

$$I = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(t\sqrt{2})}{2t^2-1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C$$

<u>**N.B**</u> : On pourrait aussi constater que la fonction sous le signe d'intégration est impaire par rapport au sinus ou aussi par rapport à cosinus.

$$J = \int \frac{cos^3x + cos^5x}{sin^2x + sin^4x}dx = \int \frac{(cos^2x + cos^4x)\cos x}{sin^2x + sin^4x}dx = \int \frac{cos^2x(1 + cos^2x)\cos x}{sin^2x + sin^4x}$$

(Constater que la fonction sous le signe d'intégration est impaire par rapport au cosinus.)

Posons $\sin x = t$; $\cos x dx = dt$; donc :

$$J = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)dt}{t^2 + t^4}$$

Mais :

$$\frac{(1-t^2)(2-t^2)dt}{t^2+t^4} = 1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}$$

$$K = \int \frac{dx}{sin^2x + 2\sin x.\cos x - cos^2x}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par cos^2x on a :

$$K = \int \frac{\frac{dx}{cos^2x}}{\frac{sin^2x}{cos^2x} + \frac{2\sin x.\cos x}{cos^2x} - \frac{cos^2x}{cos^2x}} = \int \frac{\frac{dx}{cos^2x}}{tan^2x + 2\tan x - 1}$$

Posons $\tan x = t \Rightarrow \frac{1}{cos^2x}dx = dt$

$$K = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 - 2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$K = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan x + 1 - \sqrt{2}}{\tan x + 1 - \sqrt{2}}\right| + C$$

b-**Intégrale du type $\int \sin^m x \cos^n x dx$, m et n sont des nombres entiers**

On distingue trois cas :

- ✓ $\int sin^m x cos^n x dx$, **où l'un au moins des nombres m et n est impaire** :

Supposons pour fixer les idées que n est impair.

Posons n=2p+1 et

$$\int sin^m x cos^n x dx = \int sin^m x . cos^{2p+1} x dx = \int sin^m x . cos^{2p} x \cos x \, dx$$

$$= \int sin^m x . (1 - sin^2 x)^p cosx dx$$

Et on pose $\sin x = t$; $\cos x dx = dt$ et on a : $\int sin^m x . cos^n x dx = \int t^m (1 - t^2)^p dt$

Exemple : $I = \int sin^4 x cos^5 x dx$

Dans certains cas $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$ peut être simplifiée.

1- Si $R(\sin x, \cos x)$ est une fonction impaire par rapport à $\sin x$, c'est-à-dire si $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, le changement de variable correspondant est $\cos x = t \Longrightarrow -\sin x \, dx = dt$ autrement dit si l'élément différentielle $R(\sin x, \cos x)$ est invariant par le changement de x en $-x$ on posera $t = \cos x$.

2- Si $R(\sin x, \cos x)$ est une fonction impaire par rapport à $\cos x$, c'est-à-dire si $R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x)$, on fait le changement de variable

$\sin x = t \Longrightarrow \cos x \, dx = dt$ Autrement dit si l'élément différentiel $R(\sin x, \cos x)$ est invariant par le changement de x en π-x on posera $t = \sin x$.

3-Si $R(\sin x, \cos x)$ est une fonction paire par rapport à $\sin x$ et $\cos x$, c'est-à-dire si $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, le changement de variable correspondant est $\tan x = t$ autrement dit si l'élément différentiel $R(\sin x, \cos x)$ est invariant par le changement de x en $\pi + x$ on posera $t = \tan x$ cela revient à poser d'abord $y = 2x$ puis

$t = \tan x$.

Autres manières de vite détecter le changement de variable correspondant

- ✓ Si l'intégrale est de la forme $\int R(\cos x) \sin x \, dx$, on peut poser $\cos x = t \Longrightarrow \sin x \, dx = -dt$
- ✓ Si l'intégrale est de la forme $\int R(sin \ x) \ cos \ x \ dx$ on peut poser $\sin x = t \Longrightarrow \cos x \, dx = dt$
- ✓ Si l'intégrale ne dépend que de $R(\sin x, \cos x)$, où $\sin x$ et $\cos x$ ne figure qu'aux puissances paires, on pose $\tan x = t$ car $sin^2 x \ et \ cos^2 x$ peuvent être exprimées par des expressions rationnelles de $\tan x$:

$$cos^2x = \frac{1}{1 + tan^2x} = \frac{1}{1 + t^2}\,;\; sin^2x = \frac{tan^2x}{1 + tan^2x} = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

N.B :

$$\frac{1}{cos^2} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = 1 + tan^2x \Longrightarrow cos^2x = \frac{1}{1 + tan^2x} = \frac{1}{1 + t^2}$$

$$\frac{1}{sin^2x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{sin^2x} = 1 + cotan^2x = \frac{1}{tan^2x} + 1 = \frac{1 + tan^2x}{tan^2x} = \frac{1 + t^2}{t^2} \Longrightarrow sin^2x = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

Exemples :

$$I = \int \frac{(\sin x + sin^3x)dx}{\cos 2x} = \int \frac{(1 + sin^2x)\sin x\, dx}{\cos 2x}$$

On peut poser

Cos $x = t \Longrightarrow -\sin x\ dx = dt$; $sin^2x = 1 - cos^2x = 1 - t^2$;

$\cos 2x = 2cos^2x - 1 = 2t^2 - 1$;

$$K = \int cos^6x\, dx = \int (cos^2x)^3 dx$$

$$= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int (1 + 3\cos 2x + 3cos^2x + cos^3 2x)dx$$

$K = \frac{1}{8}\int dx + \frac{3}{8}\int \cos 2x\, dx + \frac{3}{8}\int cos^2x\ dx + \frac{1}{8}\int cos^3 2x\ dx = \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x\,(1 - sin^2 2x)dx$

$$K = \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{16}\int dx + \frac{3}{16}\int \cos 4x\ dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x\ dx - \frac{1}{8}\int sin^2 2x.\frac{1}{2}d(\sin 2x)$$

$$K = \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}\sin 2x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{48}sin^3 2x + C$$

$$K = \frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}sin^3 2x + C$$

- ✓ $\int sin^mx.cos^nx\,dx$, où m et n sont des nombres pairs et l'un d'eux au moins est négatif

Dans ce cas, il faut poser $\tan x = t$ ou $\cot x = t$

Exemple : $I = \int \frac{sin^2x}{cos^6x}dx$

$$I = \int \frac{sin^2x(sin^2x + cos^2x)^2}{cos^6x}dx = \int tan^2x(1 + tan^2x)^2dx$$

Posons $\tan x = t \Longrightarrow (1 + \tan x)dx = dt$

$$I = \int t^2(1 + t^2)^2dt$$

C . Intégrale du type $\int \sin mx . \cos nx$, $\int \cos mx . \cos nx$, $\int \sin mx . \sin nx$

On utilise les formes trigonométriques suivantes :

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$,

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)]$$

Exemple : $I = \int \sin 2x . \cos 5x\, dx$

$$I = \int \frac{1}{2}[\sin 7x + \sin(-3x)]\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 7x\ dx - \frac{1}{2}\int \sin(3x)\,dx$$

$$I = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C$$

$$J = \int \cos x . \cos\frac{x}{2} . \cos\frac{x}{4}dx = \int \left(\cos x . \cos\frac{x}{2}\right) . \cos\frac{x}{4}dx$$

$$J = \int \frac{1}{2}\left[\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right]\cos\frac{x}{4}dx = \frac{1}{2}\int \cos\frac{3x}{2} . \cos\frac{x}{4}dx + \frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{2} . \cos\frac{x}{4}dx$$

$$J = \frac{1}{4}\int \left(\cos\frac{7x}{4} + \cos\frac{5x}{4}\right)dx + \frac{1}{4}\int \left(\cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)dx$$

$$J = \frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4} + \frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4} + \frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4} + \sin\frac{x}{4} + C$$

10. Intégration de certaines fonctions irrationnelles à l'aide des transformations trigonométriques

- ✓ Pour la première forme $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$, on pose $x = a \sin t$ ou $x = a\cos t$
- ✓ Pour la seconde forme $\int R\left(x, \sqrt{a^2 \pm x^2}\right) dx$, on pose $x = a \tan t$ ou $x = a\text{cotan}\, t$
- ✓ Pour la troisième forme $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$, on pose $x = \frac{a}{\cos t}$ ou $x = \frac{a}{\sin t}$

Exemple : $I = \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx$

Posons $x = a \sin t$ alors $dx = a \cos t\, dt$ et on a :

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 sin^2 t}}{a \sin t} a \cos t\, dt = a \int \frac{cos^2 t}{\sin t} dt$$

$$I = a \int \frac{1 - sin^2 t}{\sin t} dt\, a \int \frac{dt}{\sin t} - a \int \sin t\, dt$$

On rappelle que $\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\frac{1}{\sin t} - \cot t\right| + C$

Donc : $I = a\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \frac{\cos t}{\sin t}\right| + a \cos t + C$

Où $\sin t = \frac{x}{a}$, $\cos t \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$. Par conséquent : $I = \ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

Exercices résolus

Calculs des intégrales :

- $I = \int \frac{dx}{x^4+1}$

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - \left(x\sqrt{2}\right)^2$$

$$= \left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right)$$

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{ax + b}{\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)} + \frac{cx + d}{\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right)}$$

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{(a + c)x^3 + \left(a\sqrt{2} - c\sqrt{2} + b + d\right)x^2 + \left(a + b\sqrt{2} + c - d\sqrt{2}\right)x + b + d}{x^4 + 1}$$

$$\begin{cases} a + c = 0; \quad b + d = 1 \\ (a + c)\sqrt{2} + b + d = 0 \\ a + c + (b - d)\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ b = d = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}dx + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}dx \qquad (Finissez)$$

Chapitre 5 :

LES INTEGRALES GENERALISEES OU INTEGRALES IMPROPRES

1. Définition

On appelle intégrales généralisées ou intégrales impropres :

- les intégrales à bornes infinies ;
- les intégrales des fonctions non bornées.

L'intégrale impropre d'une fonction f entre les bornes a et +∞ est définie par l'égalité :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Si cette limite existe et donne une quantité finie, on dit que l'intégrale impropre est convergente ; si la limite donne ∞ ou n'existe pas on dit que cette intégrale est divergente.

D'une manière analogue,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$$

Si la fonction f présente une discontinuité infinie au point c du segment $[a\ ;\ b]$ et est continue pour $a \le x < c\ \ et\ \ c < x \le b$, alors, par définition,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\alpha\to 0}\int_{c+\alpha}^{b} f(x)dx$$

On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ (où $f(c) = \infty, a < c < b$) est convergente lorsque les deux limites existent et donnent des quantités finies au 2^{e} membre de l'égalité ; elle est divergente si l'une au moins des limites n'existe pas ou est infinie.

2. Exercice d'application

Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \cos x\, dx \ \ ; \ \int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2} \ \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} \ \ ; \ \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}$$

3. Les intégrales de Riemann

L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ $converge\ si\ et\ seulement\ si\ \alpha < 1$

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ $converge\ si\ et\ seulement\ si\ \alpha > 1$

Travaux dirigés

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int Argth\sqrt{\frac{chx-1}{chx+1}}dx$; $I_2 = \int \frac{x^4}{x^2+1} Arctanxdx$; $I_3 = \int \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

$I_4 = \int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$; $I_5 = \int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}dx$; $I_6 = \int sin^5x\,dx$; $I_7 = \int cos^4x\,sin^2x\;dx$

$I_8 = \int \frac{dx}{sinx+sin2x}$; $I_9 = \int \frac{dx}{sin^4x+cos^4x}$; $I_{10} = \int_0^{\pi} \frac{1-cos\frac{x}{3}}{sin\frac{x}{2}}dx$;

$I_{11} = \int \frac{sinx}{1+sinx}dx$; $I_{12} = \int \frac{dx}{sh^3x}$; $I_{13} = \int_0^{ln2} \frac{dx}{5shx-4chx}$; $I_{14} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

$I_{15} = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x}+1}\;dx$; $I_{16} = \int (x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x}}\;dx$;

$I_{17} = \int \frac{dx}{x-2+\sqrt{x^2-2x+2}}$; $I_{18} = \int \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}dx$

$I_{19} = \int \frac{x-1}{x+1}\sqrt{2x-x^2}\,dx$; $I_{20} = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$

$I_{21} = \int \frac{sin^3x+cos^3x}{sin^4x+cos^4x+1}dx$; $I_{22} = \int_0^{ln2} \frac{sh^2x}{ch^5x}\,dx$; $I_{23} = \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}}\,dx$

$I_{24} = \int \frac{dx}{chx\sqrt{ch2x}}$; $I_{25} = \int \frac{dx}{5chx+3shx+4}$; $I_{26} = \int \frac{dx}{(2+cox)^2}$;

$I_{27} = \int \sqrt{\frac{ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2+1}}dx$; $I_{28} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{\sqrt{1+sinx\,cosx}}\,dx$

$I_{29} = \int x\sqrt{-x^2+3x-2}\;dx$; $I_{30} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

$I_{31} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}\,dx$; $I_{32} = \int \frac{dx}{e^x+2e^{-x}}$; $I_{33} = \int \frac{cosx+2sinx}{sinx-cosx}\,dx$

$I_{34} = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$; $I_{35} = \int \frac{dx}{x^4+1}$; $I_{36} = \int \frac{sinx\,cosx}{\sqrt{cos^2x - sin^2x}}\,dx$

$I_{37} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}\ \cdot \sqrt{ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}$; $I_{38} = \int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$; $I_{39} = \int \frac{dx}{\sqrt{cosx(1-cosx)}}$

; $I_{40} = \int \frac{dx}{shx}$; $I_{41} = \int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x}\,dx$; $I_{42} = \int \frac{dx}{xlnx \cdot ln(lnx)}$; $I_{43} = \int \frac{dx}{cosx}$;

$I_{44} = \int_0^{\pi} ln\sqrt{\frac{1+thx}{1-thx}}\,dx$; $I_{45} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+cosx}$; $I_{46} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$; $I_{47} = \int \sqrt{1+2x^2}\,dx$

$I_{48} = \int_0^{1/2} \sqrt{x(2-3x)}\ dx$; $I_{49} = \int_0^1 \frac{x-2}{1+\sqrt{4x-x^2}}\,dx$; $I_{50} = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 2

Calculer les intégrales généralisées suivantes (on étudiera la leur convergence) :

$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$; $J_2 = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - Arctan\frac{1}{x}\right)dx$; $J_3 = \int_0^{+\infty} ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,dt$;

$J_4 = \int_0^1 \frac{ln(1-x^2)}{x^2}\,dx$; $J_5 = \int_0^1 \frac{lnx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\ dx$

Exercice 3

3. Calculer l'aire de la figure comprise entre la chaînette d'équation :
   $y = a\,ch\frac{x}{a}$, l'axe OY et la droite d'équation $y = \frac{a}{2e}\,(e^2+1)$.
4. Calculer l'aire intérieure à l'astroïde :
$$x(t) = a\,cos^3t \quad et \quad y(t) = b\,sin^3t$$
5. Calculer l'aire intérieure à la lemniscate de Bernoulli d'équation :
$$\rho^2 = a^2\cos 2\theta$$
6. Calculer le volume d'un tore engendré par la rotation du cercle d'équation :
$$x^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad avec\ b \geq a.$$
7. Calculer la longueur de l'arc de la courbe d'équation :
$$x(t) = cos^5t\ \ et\ y(t) = sin^5t$$

Exercice 4

On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$$

1. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$
2. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$
3. On considère la fonction f dé inie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$

   Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ en utilisant les résultats de la question 1.

Exercice 5

Soient le nombre réel strictement positif $\boldsymbol{a}$ donné et f la fonction de la variable réelle t, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = ae^{-a\,t}\ si\ t \geq 0 \\ f(t) = 0 \qquad si\ t < 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$.

   b) Pour tout $x > 0$, calculer en fonction de x et a, les intégrales :

   $I(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $J(x) = \int_0^x tf(t)dt$. *Calculer* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x)$.
2. Soit Y la variable aléatoire qui à toute ampoule de type B associe la mesure, en heures, de sa durée de vie. La mesure, en heures, de la durée de vie moyenne des ampoules de la production B est l'espérance mathématique de Y notée E(Y) et définie par :

   $$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

   a) Exprimer E(Y) en fonction de a.

Quelle doit être la valeur de a pour que la durée de vie moyenne des ampoules de la production B soit égale à 1000 heures ? Dans ce cas, pour tout t réel positif, exprimer f(t) en fonction de t.

Chapitre 6 :

APPLICATIONS DES INTEGRALES DEFINIES

1. ***Calcul d'aire d'une figure plane***

On considère dans tout ce chapitre un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Théorème

Soit g et f deux fonctions continues et définies sur $[a, b]$ telles que $f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$. Alors l'aire de la partie du plan délimité par les courbes d'équations y=f(x) et y=g(x) et les droites d'équations x=a et x=b est définie par :

$$A = \int_a^b [\mathrm{g(x) - f(x)]dx.u.a} \qquad \text{avec } \mathrm{u.a} = \|\vec{\imath}\|.\|\vec{\jmath}\|\ cm^2$$

Cas particulier

- ✓ Si f(x) = 0 alors $A = \int_a^b \mathrm{g(x)dx.u.a}$
- ✓ Si g(x) = 0 alors $A = \int_a^b -\mathrm{f(x)dx.u.a}$

Exemple :

Calculer l'aire de la partie du plan délimité par la courbe d'équation $y = 4x - x^2$ et l'axe des abscisses. L'unité graphique est 2cm sur (Ox) et 1,5cm sur (Oy).

Résolution

L'équation caractéristique de l'axe des abscisses est y=0 donc on forme le système suivant :

$$y = 4x - x^2 \ et\ y = 0.$$

On en déduit $4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou\ x = 4$

$\forall$ x$\in$ [0,4], $4x - x^2 \geq 0$ alors l'aire cherchée est :

$$A = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx \times 2 \times 1{,}5 \ \ cm^2$$

$$= \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] \times 2 \times 1{,}5 cm^2$$

A = 32 cm^2

Exercice 1

Calculer l'aire de la partie du plan délimité par la courbe d'équation y $= \frac{1}{a^2+x^2}$, a>0 et son asymptote horizontale.

Remarque

Si la courbe est donnée par des équations sous forme paramétrique :

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

alors l'aire du domaine limité par cette courbe, les droites $x = a$, $x = b$ et le segment $[a, b]$ de l'axe (Ox) s'exprime par la formule

$$\boxed{A = \int_{t_1}^{t_2} y(t).\, x'(t)dt}$$

où t_1 et t_2 se déterminent à partir des équations

$$a = x(t1)$$
$$b = x(t2)$$

Pour $t_1 < t < t_2$.

Exercice d'application

Calculer l'aire de la figure plane limitée par une arche de la cycloïde d'équation

$$x(t) = 2(t - sint)$$
$$y(t) = 2(1 - cost)$$

où $0 \leq t \leq 2\pi$ et l'axe Ox.

Solution

A=$\int_0^{2\pi} y(t).\, x'(t)dt \times u.a$ or x'(t) = 2(1-cost) donc

$$A = 4\int_0^{2\pi} (1 - cost)^2 dt \times u.a$$

$$A = 4\int_0^{2\pi} (1 - 2cost + cos^2 t)dt \times u.a$$

$$A = 4\int_0^{2\pi} (1 - 2cost + \frac{1 + cos2t}{2})dt \times u.a$$

$$A = 4\int_0^{2\pi} (\frac{3}{2} - 2cost + \frac{1}{2}cos2t)dt \times u.a$$

$$A = 4[\frac{3}{2}t - 2sint + \frac{1}{4}sin2t]_0^{2\pi} \times u.a$$

A=$12\pi \times u.a$

Exercice 2

Calculer l'aire de l'ellipse d'équation :

$$\begin{cases} x = a.cost \\ y = b.sint \end{cases} \quad avec\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Remarque :

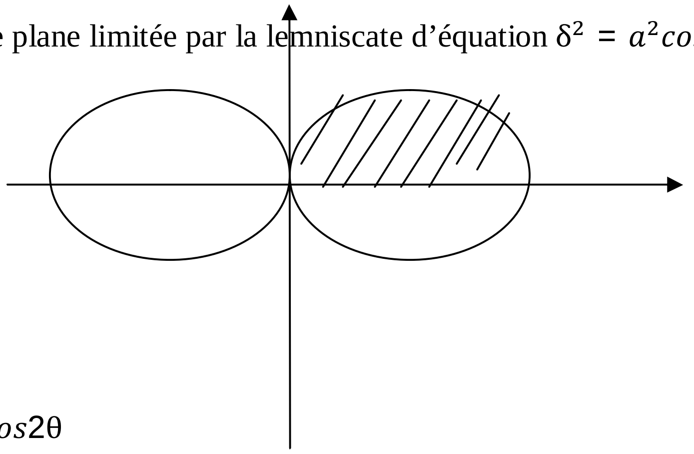
L'aire d'un secteur curviligne limitée par une courbe donnée en coordonnées polaires par l'équation δ=f(θ) et par deux rayons polaires θ=α et θ=β s'exprime par

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \delta^2 d\theta \times u.a}$$

Exercice d'application

Calculer l'aire de la figure plane limitée par la lemniscate d'équation $\delta^2 = a^2 cos2\theta$

Résolution



$\delta^2(-\theta) = a^2\cos(-2\theta)$

$\quad = a^2 cos2\theta$

$(\delta)^2(-\theta) = \delta^2(\theta) = a^2 cos2\theta$

Posons $\delta = 0$ et $\delta = a$

$\delta = 0 \Rightarrow \cos2\theta = 0$

$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\delta = a \Rightarrow \cos2\theta = 1$

$\Rightarrow \theta = 0$

Le quart de l'aire située dans le premier quadrant est

$$\frac{1}{4}A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \delta^2 d\theta \times \text{u.a}$$

$$\frac{1}{4}A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 cos2\theta d\theta \times \text{u.a}$$

$$\frac{1}{4}A = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2\theta d\theta \times \text{u.a}$$

$$\frac{1}{4}A = \frac{a^2}{2}[\frac{1}{2}sin2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \times \text{u.a}$$

$$\frac{1}{4}A = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}(1)\right) \times u.a$$

$$\frac{1}{4}A = \frac{a^2}{4} \times u.a$$

D'où

$$\boxed{A = a^2 \times \text{u.a}}$$

2. ***Calcul de longueur***

En coordonnées cartésiennes

Si une courbe d'équation $y = f(x)$ est régulière sur le segment $[a, b]$ (c'est-à-dire que la dérivée $y' = f'(x)$ est continue sur $[a, b]$ alors la longueur de l'axe correspondant de cette courbe se calcule d'après la forme :

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + y^2}\, dx \times \text{u.a}}$$

Application

Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y^2 = x^3$ compris entre x = 0 et x = 1, y ≥0

Résolution

$y^2 = x^3 \Rightarrow$ y=$\sqrt{x^3}$ car y≥0

$\Rightarrow$ y'=$\frac{3\sqrt{x^3}}{2x}$

$\Rightarrow y'^2 = \frac{9}{4}x$ alors

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\; dx.u.l$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^1 \frac{9}{4}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}\; dx.u.l$$

$$= \frac{4}{9}[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1 + \frac{9}{4}x)^{\frac{1}{2}+1}]_0^1 .u.l$$

$$L = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} - 1\right].u.l$$

Exercice 3

Calculer la longueur de la circonférence d'équation $x^2+y^2 = R^2$, R = rayon

Remarque

S la courbe est donnée sous forme paramétrique x=x(t) et y=y(t) alors la longueur de l'arc de la courbe correspondante à la variation monotone du paramètre t entre t_1 et t_2 est exprimée par

$$\boldsymbol{L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ \ dt\ \times u.l}$$

Exemple

Calculer la longueur de la cycloïde d'équation :

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

Résolution

On a :

$$\boldsymbol{L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ \ dt\ \times u.l}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1 - cost)]^2 + (asint)^2}\ \ dt\ \times u.l$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - 2cost + cos^2t + sin^2t}\ \ dt\ \times u.l$$

$$L = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - cost}\ dt \times u.l$$

$$L = 2a\int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}\ dt\ \times u.l$$

$$L = 2\,a[-2cos\frac{t}{2}]_0^{2\pi}\ \times u.l$$

L=8a.

Exercice 4 :

Calculer la longueur de la courbe d'équation :

$$\begin{cases} x(t) = cos^5 t \\ y(t) = sin^5 t \end{cases} \quad \text{entre } t_1 = 0 \text{ et } t_2 = \frac{\pi}{2}$$

Remarque :

Si une courbe régulière est dérivée en coordonnées polaires par une équation de la forme $\delta = f(\theta)$ où α≤θ≤β alors la longueur de l'arc est :

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\delta^2 + \delta'^2} d\theta . u.l}$$

Exemple:

Calculer la longueur de l'arc de la courbe d'équation $\delta = sin^3 \frac{\theta}{3}$ comprise entre θ=0 et θ=$\frac{\pi}{2}$

Résolution

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\delta^2 + \delta'^2} d\theta . u.l$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sin^6(\frac{\theta}{3}) + cos^2(\frac{\theta}{3}) sin^4(\frac{\theta}{3})}\, d\theta . u.l$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sin^4(\frac{\theta}{3})}\, d\theta . u.l$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(\frac{\theta}{3})\, d\theta . u.l$$

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos\frac{2\theta}{3})\, d\theta . u.l$$

$$L = \frac{1}{2}[\theta - \frac{3}{2} sin\frac{2\theta}{3}]_0^{\frac{\pi}{2}} . u.l$$

$$\boxed{L = \frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3}) . u.l}$$

3-) ***Calcul de volume d'un corps de révolution***

Le volume d'un corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) du trapèze curviligne délimité par la courbe y=f(x) et les droites d'équations y=0 et x=a et x=b est défini par :

$$\boxed{V=\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.u.v}$$

De façon générale si la figure limitée par les courbes $y_1 = f(x)$ et $y_2 = g(x)$ avec $0 \leq f(x) \leq g(x)$ et les droites d'équations x=a et x=b tourne autour de l'axe (ox) alors le volume du corps de révolution est donné par la formule

$$\boxed{V=\pi \int_a^b [g(x)]^2 - [f(x)]^2 dx.u.v}$$

Exemple :

Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe (ox) de la figure limitée par la courbe d'équation y = $(x-1)^3$ et les droites d'équations x=1 et x=2.

Résolution

$V=\pi \int_1^2 y^2 \, dx.u.v$

$V=\pi \int_1^2 (x-1)^3 \, dx.u.v$

$V=\pi [\frac{1}{4}(x-1)^4]_1^2 .u.v$

$V=\frac{\pi}{4}[(2-1)^4 - 0].u.v$

$V=\frac{\pi}{4}.u.v$

Examen N°1 : MATHEMATIQUES 1

Durée : 1h30

Exercice 1

Un médicament est injecté par voie intramusculaire dans le corps. Il passe du muscle au sang puis est éliminé par les reins. On désigne par $f(t)$ la quantité de médicament (en millilitres) contenue dans le sang à l'instant t (en heures). Une étude a permis de constater que, pour tout $t \in [0;\ +\infty[$, on a :

$$f(t) = q\left(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\right)$$

où t = 0 est l'heure de l'injection et q la quantité de médicament injectée. On définit ainsi une fonction f qui à tout $t \in [0;\ +\infty[$, associe $f(t)$.

1. a) Etudier le sens de variation de la fonction f. La fonction f admet – elle un maximum ? Si oui,
   préciser sa valeur.
   a) Calculer la limite de f en $+\infty$ et dresser le tableau de variation de f.
   b) Donner une interprétation biologique du tableau de variation.
2. La quantité du médicament contenue dans le sang à n'importe quel instant t ne doit pas dépasser le seuil de toxicité $S_M = 2{,}6$ et le médicament est efficace si $S_e = 1{,}2$.
   a) Déduire de la question 1) les valeurs que l'on peut donner à q pour qu'à aucun moment la quantité présente dans le sang ne dépasse S_M ?
   b) Dans un repère orthogonal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\|\vec{\imath}\| = 1\ cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = 2\ cm$, tracer la courbe de la fonction f et tracer sa tangente au point d'abscisse 0 puis déterminer sur le graphique l'intervalle de temps pendant lequel le médicament est efficace.

Exercice 2

On donne les fonctions f, g, h et k respectivement définies par :

$$f(t) = \sqrt{t+1}\ ;\ \ g(t) = ln(1+t)\ ;\ h(t) = 1 + t + \sqrt{t+1}\ ;\ k(x) = \ ln\left(1 + x + \sqrt{x+1}\right)$$

4. a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $f(t)$ et de $g(t)$ au voisinage de 0.
   b) En déduire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $h(t)$ et $k(x)$.
   c) En déduire également le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de :
   $$p(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}.$$
5. Calculer les limites suivantes :
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{1+sinx}} - e}{tanx}\ ;\ \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{sinx - tan^2 x}}\ ;\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{tanx}$$
6. a) Développer la fonction $x \longmapsto \ln x$ en série de Taylor, au voisinage de 1.
   b) En utilisant la formule des accroissements finis, démontrer les inégalités suivantes :
   $$\frac{x}{1+x} < ln(1+x) < x \qquad pour\ -1 < x < 0.$$

Examen N°3 : MATHEMATIQUES 1
Durée : 04h00

Exercice 1

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int \frac{dx}{2x^3 - 54} \ ; \ I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{6\pi}}{5 + x^2} dx \ ; \ I_3 = \int \frac{2x + 5}{x + 2} dx$$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' + xy = 0 \ ; \ 5y' - 3y + 3x^3 - 4 = 0$$

Exercice 2

Deux chercheurs ont constaté qu'après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie (taux de glucose dans le sang) décroît à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps selon la loi :

$$g' + kg = 0$$

où g désigne la fonction glycémique dépendant du temps t ($(t \geq 0)$ et k une constante strictement positive appelée coefficient d'assimilation glucidique.

1. Trouver l'expression $g(t)$ à l'instant t sachant qu'à l'instant $t = 0$, $g(0) = 2$.
2. Etudier les variations de la fonction g définie par :

$$g(t) = 2e^{-k\,t} \quad o\grave{u}\ k > 0.$$

   Donner l'allure de sa courbe.
3. Déterminer en fonction de k, l'abscisse T du point d'intersection de la tangente à la courbe au point $M(0; 2)$ avec l'axe des temps.
4. Trouver la formule donnant le coefficient k en fonction de $g_1 = g(t_1)$, g_1 étant le taux de glycémie à l'instant t_1 donné et positif.
5. La valeur moyenne de k chez un sujet normal varie de $1{,}06.10^{-2}$ à $2{,}42.10^{-2}$. Préciser si les résultats du sujet X, qui a un taux de glycémie $g_1 = 1{,}20$ à l'instant $t_1 = 30$ sont normaux.

Exercice 3

A l'instant $t = 0$, on injecte dans le sang une dose de 3 millilitres (ml) d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des 12heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang (en ml) en fonction du temps t (en heures) est $f(t)$, où f est la fonction définie sur $[0; 12]$ par :

$$f(t) = 3e^{-0{,}1\,t}$$

1. Etudier les variations de f sur $[0; 12]$.

2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. (On choisira pour unités : 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées).
3. Déterminer graphiquement, à 10^{-1} près, la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 4 heures et de 5 heures 30 minutes.
4. Retrouver les résultats par le calcul.
5. Après avoir injecté à un patient une dose de 3 ml du médicament, on procède à une seconde injection lorsque la quantité présente dans le sang devient inférieure à 1,25 ml ? Par lecture graphique, indiquer au bout de combien de temps on procède à la seconde injection. Retrouver le résultat par le calcul.

Exercice 4

La température θ d'un corps placé dans une enceinte dont la température α est supposée constante, évolue au cours du temps de la façon suivante :

"$la\ vitesse\ de\ variation\ de\ la\ température\ est\ proportionnelle$ à $la\ différence\ \theta - \alpha\ et\ de\ signe\ opposé$".

A l'instant $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0$.

1. Exprimer θ en fonction du temps t. On prendra k comme coefficient de proportionnalité.
2. Calculer la température moyenne du corps entre un instant t_1 et un instant t_2.