Devoir numéro 3 d'Algèbre [1]

Année : 1ère année **Durée :** 02 Heures

Exercice 1

On considère l'ensemble $F = \left\{ M(\alpha,\beta) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta & \beta \\ 0 & \beta & \beta \end{pmatrix}, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\}$

1. (a) Montrer que la multiplication "$\times$" des matrices est une loi de composition interne dans F.
   (b) La loi "$\times$" est-elle commutative dans F?
   (c) Justifier que $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de la loi "$\times$" pour F.
2. Montrer que $(F, \times)$ est un groupe.
3. (a) Monter que $H = \{M(0,\beta).\, \beta \in \mathbb{R}^*\}$ est un sous-groupe de F.
   (b) Le sous-groupe H est-il distingué dans F?
   (c) $(H, \times)$ est-il un groupe commutatif ?

Exercice 2

On considère l'ensemble : $\mathcal{J} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{J}$ muni de la multipliction des matrices est un groupe.
   (b) Ce groupe est-il commutatif ?
2. Soient $A \in \mathcal{J}$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Calculer A^k.
3. Peut-on trouver dans $\mathcal{J}$, un sous-groupe d'ordre 2 ? un sous-groupe d'ordre 3 ? Justifier votre réponse dans chaque cas.

BONNE CHANCE

1. Dr Bernardin KPAMEGAN et Dr Sylvain ATTAN/ CPPA/2019-2020
18 Décembre 2019.