

Anneaux de Saturne : histoire, stabilité et régime chaotique

Rapport présenté par

**GUILLERMIN Jules
LECOMTE Samuel**

Anneaux de Saturne
Histoire, stabilité et régime chaotique

Préambule

Durant des siècles, la physique a évolué autour du concept chaotique des systèmes physiques sans le conceptualiser réellement. La théorisation du chaos tente d'émerger à une époque où la notion de déterminisme chère à Newton, selon laquelle l'évolution d'un système est entièrement prédictible connaissant l'état initial, domine largement dans l'étude scientifique.

Le domaine de la mécanique céleste, en effervescence au XVIII^e siècle, permet à ce déterminisme de s'illustrer en décrivant avec une relative précision le mouvement des planètes du système solaire. Cependant, ce même domaine présente une famille de problèmes dits à N corps où aucune prédiction n'est possible. En prenant l'exemple du système Terre-Soleil-Lune, longuement étudié par Henri Poincaré (*Poincaré, 1890*), nous notons que la précision sur les données propres à chaque astre (position et vitesse) n'est jamais suffisante pour prédire son comportement aux temps longs. Il en est de même sur la question de la stabilité de l'orbite des planètes du Système Solaire. Ces deux exemples, dont la liste n'est pas exhaustive, présentent une grande sensibilité aux conditions initiales, une variation infinitésimale de l'état de départ entraînant une évolution complètement différente. Ainsi, cette imprédictibilité caractérise un système évoluant chaotiquement.

Ce n'est cependant qu'au XX^e siècle que le sujet prend de l'ampleur avec des contributions multiples. L'apport des mathématiciens russes déclenche la théorisation mathématique du chaos avec la création d'outils pour le mesurer tels que l'exposant de Lyapunov, la réalisation d'un diagramme de bifurcation et son analyse ou encore la détermination des constantes de Feigenbaum. Ces outils seront introduits et définis dans ce rapport avant leur utilisation.

Enfin, le travail en météorologie d'Edward Lorenz, dans la deuxième moitié du XX^e siècle, assoie la physique du chaos comme sujet à fort intérêt scientifique, notamment grâce au développement de l'informatique et des premiers calculs numériques. Pour se faire, Lorenz développe un modèle très simplifié de l'atmosphère et (re)découvre la sensibilité aux conditions initiales en faisant varier de façon infime l'une de ses données de départ. A partir de cette observation, Lorenz publie un article (*Lorenz, 1963*) présentant le chaos déterministe comme étant sensible aux conditions initiales et tendant vers un régime chaotique lorsque celles-ci changent de manière infinitésimale. Par ailleurs, il représente graphiquement le comportement aux temps longs de son modèle atmosphérique, par une figure caractéristique connue sous le nom d'attracteur de Lorenz dont la *Figure 1* montre un rendu. Suivant des conditions initiales différentes, l'ensemble de trajectoires varie de manière abrupte et pseudo-aléatoire.

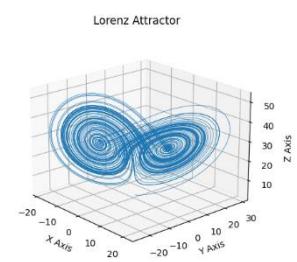


Figure 1: Attracteur étrange de Lorenz simulé sur Python

Aujourd’hui, la recherche tente de démontrer la concordance de la théorie du chaos par rapport à des problèmes mathématiques qui permettraient, selon le mathématicien Jacob Palis, d’obtenir une vue d’ensemble du chaos. Les outils élaborés, notamment au XX^e siècle, pour le quantifier, sont d’une grande aide pour approfondir notre étude d’un quelconque système physique dynamique.

Table des matières

| | |
|--|-----|
| Préambule | I |
| Table des matières | III |
| Introduction | 1 |
| 1. Présentation générale du problème | 2 |
| 1.1. Histoire des anneaux : création, localisation, composition | 2 |
| 2. De la stabilité | 4 |
| 2.1. Conditions de stabilité | 4 |
| 2.2. Analogie ou similitudes entre les anneaux de Saturne et le problème à N corps | 5 |
| 2.3. Mise en équation et présentation du système d'équation | 5 |
| 3. Vers le Chaos | 7 |
| 3.1. Choix d'une méthode numérique pour la résolution de l'équation différentielle | 7 |
| 3.1.1. Intégration par la méthode d'Euler | 7 |
| 3.1.2. Modifications avec la méthode de Verlet | 9 |
| 3.2. Etude du problème pour des valeurs données | 9 |
| 3.3. Discussion sur le comportement chaotique du système | 10 |
| Conclusion | 12 |
| Références | 13 |
| Table des illustrations | 14 |
| Annexes | 15 |
| 1. [Code I] : | 15 |
| 2. [Code II] : | 16 |
| 3. [Code III] : | 17 |
| 4. [Code IV] : | 18 |
| 5. [Code V] : | 18 |
| 6. [Code VI] : | 19 |

Introduction

Dans ce rapport, nous allons traiter le sujet des anneaux de Saturne. Cette étude, analogue à celle du problème à trois corps, est intéressant à plusieurs égards. En effet, il permet de poser les bases de la mécanique céleste, du rôle de chaque corps dans la stabilité de l'ensemble et donc d'étudier l'échelle de temps pour laquelle est définie la stabilité d'un objet.

A la fin du XX^e siècle, les calculs numériques du physicien français Jacques Laskar (*Laskar, 1989*) ont permis de démontrer la sensibilité aux conditions initiales du système solaire avec une multiplication par dix de l'erreur sur ces données tous les dix millions d'années. Le travail de J. Laskar et des groupes de scientifiques concernés par ces recherches ont permis de voir un comportement chaotique à grande échelle, de l'ordre de plusieurs dizaines de millions d'années. Par conséquent, nous allons diriger notre étude vers ce type de questionnement en s'intéressant à la sensibilité aux conditions initiales et plus généralement aux phénomènes de stabilité et d'instabilité.

Au long de ce rapport, nous serons amenés à utiliser des abréviations et des termes mathématiques qu'il peut être intéressant de présenter et de définir succinctement :

- Les équations sont référencées par un numéro qui pourra être utilisé dans le texte.
- Les constantes de masse, masse volumique, longueur, ... utilisées avant la partie 3 sont supposées prises dans leur valeur usuelle et dans leur unité SI.

Une présentation historique du sujet sera tout d'abord effectuée, nous aborderons ensuite la modélisation mathématiquement du problème puis son traitement de manière analytique et numérique afin de déterminer les caractéristiques rendant ce système chaotique. Une liste complète des figures présentes dans le rapport et leur code d'exécution est disponible à la fin du document. Vous trouverez également un lien vers un répertoire en ligne regroupant l'ensemble des codes informatiques. Enfin, les références bibliographiques, symbolisées par (*Auteur, année de parution*) sont regroupées à la fin par ordre alphabétique.

1. Présentation générale du problème

Cette première partie est consacrée à la description historique puis mathématique du sujet. Elle permet d'aborder succinctement les différents points de vue quant à la composition, l'apparence et les interactions des anneaux de Saturne avec la planète et ses nombreux satellites. Nous procéderons à la mise en équation du problème, de manière à poursuivre ce rapport avec l'étude à proprement parler de la chaoticité du système.

1.1. Histoire des anneaux : création, localisation, composition

La découverte des anneaux de Saturne s'est faite à une époque majeure pour l'astronomie notamment avec les travaux de Huygens et de Cassini sur la mécanique céleste. Les théories au XVII^e et XVIII^e siècle sur la composition des anneaux sont nombreuses. Certains, comme Cassini, supposent qu'ils sont constitués de roches s'entrechoquant, hypothèse corroborée par Laplace qui montre à cette époque que les anneaux sont multiples et solides (*Laplace P.-S. d., 1787*).

Il faut attendre le milieu du XIX^e siècle pour obtenir de nouvelles explications sur ces objets célestes avec la publication de Maxwell (*Maxwell, 1859*). Il y prouve mathématiquement que la stabilité du système Saturnien impose l'existence de plusieurs anneaux non solides¹. L'ouvrage cité présente une avancée majeure dans la compréhension des anneaux car l'auteur y démontre leur sensibilité aux conditions initiales (p.11-12) ainsi que leur arrangement en plusieurs anneaux concentriques eux-mêmes composés d'éléments solides disjoints possédant chacun une orbite propre (p.65-68).

Depuis, les observations de plusieurs sondes spatiales ont confirmé les observations et la théorie de Maxwell, les anneaux étant, en effet, composés d'une multitude de corps glacés et de poussière d'une taille allant du micromètre au mètre. Entre chaque anneau, une séparation, plus ou moins prononcée, appelée lacune ou division, est observée. Ces espaces sont générés par le passage des satellites de Saturne qui, du fait de l'interaction gravitationnelle, chassent les particules qui s'y trouvent et les renvoient vers les anneaux. Ces satellites² jouent un rôle clé dans la stabilité du système Saturnien.

Les hypothèses quant à la formation des anneaux de Saturne sont nombreuses. Aujourd'hui, la communauté scientifique semble être arrivée à un consensus, montrant qu'ils seraient nés de la désintégration d'une lune d'un diamètre de quelques milliers de kilomètres par les forces de marée de Saturne. En effet, en franchissant une limite nommée limite de Roche³, les forces de gravitation permettant la cohésion de l'objet céleste sont dépassées par

¹ Quelques années avant cette preuve mathématique, des observations de Saturne montraient une certaine transparence dans les anneaux rendant vacillante l'idée d'anneaux solides.

² Ils sont appelés satellites bergers.

³ Edouard Roche (1820-1883), astronome et mathématicien français notamment connu pour son travail sur les effets de marée.

les forces de marée du corps massif vers lequel l'objet est attiré. La limite de Roche dépend des caractéristiques physiques de l'objet céleste et se calcule de la manière suivante :

$$d = 1,26 \times R \times \sqrt[3]{\frac{\rho_p}{\rho_c}}$$

(1)

Avec :

| | |
|--|--|
| R : Rayon de la planète | ρ_c : Masse volumique moyenne du corps attiré |
| ρ_p : Masse volumique moyenne de la planète | |

Dans le cas de Saturne, la limite de Roche est fixée à environ 140 000 Km.

Cette hypothèse est cohérente avec les observations de la composition des anneaux, constitués à 99% de glace d'eau et du reste de particules de poussières. Grâce à cette composition, il est facile d'observer les anneaux de Saturne en comparaison avec les autres structures annulaires du Système Solaire. Par l'action des satellites berger, les anneaux se forment rapidement après la désintégration du satellite. De plus, du fait des forces de marée, ils s'affinent et s'aplatissent grandement, leur épaisseur actuelle étant comprise entre quelques mètres (anneaux proches de Saturne) et quelques kilomètres⁴.

Enfin, en fixant les conditions d'évolutions, les simulations montrent une instabilité aux temps longs causée par l'interaction entre les particules des anneaux et les rayons du Soleil qui se chargent électriquement et sont attirées par le champ magnétique de Saturne. Le taux de perte actuelle de matière permet d'estimer une disparition des anneaux d'ici 300 millions d'années.

⁴ Excepté l'anneau E qui voit son épaisseur aller jusqu'à 60 000 Km

2. De la stabilité

Concentrons-nous maintenant sur l'étude du système. L'observation montre des anneaux stables, sur une période courte. Cette stabilité est due à plusieurs paramètres qu'il convient d'exposer. Nous utiliserons les conditions énoncées par Laplace qui restent valables malgré une conclusion erronée. Par ailleurs, les calculs numériques effectués reposant en grande partie sur une extension du problème à trois corps, il convient de l'exposer brièvement.

2.1. Conditions de stabilité

Dans son troisième volume du *Traité de la Mécanique Céleste* (*Laplace P. S., 1798*), Laplace établit qu'un anneau fluide ou un anneau solide peut être maintenu en équilibre autour de Saturne. Ce maintien lui permet d'établir différentes conditions nécessaires à la stabilité des anneaux de Saturne. Notons également que Laplace remplace l'attraction de l'anneau sur un point de la section méridienne par l'attraction exercée sur le même point par un cylindre droit ayant pour base l'ellipse formant l'anneau et pour densité constante la densité ρ de l'anneau.

Pour définir les conditions de stabilité des anneaux de Saturne formulées par Laplace, voici les différentes notations que nous utiliserons :

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - M : la masse de Saturne supposée sphérique - a et b : les demi grands axes de l'ellipse - l : la distance de l'anneau à Saturne | <ul style="list-style-type: none"> - ω : la vitesse de rotation de l'anneau - f : le coefficient d'attraction - ρ : la densité de l'anneau - ρ_b : la densité de Saturne |
|---|---|

Laplace met en place quatre conditions régies par ces notations :

- a. $\omega^2 = \frac{f \times M}{l^3}$: la vitesse angulaire d'un anneau qui est la même que celle d'un satellite situé à une distance l de Saturne.
- b. $\frac{b}{a} > 1$: la forme de l'anneau est aplatie
- c. Cette condition concerne les rapports entre les densités de Saturne et de l'anneau à différents endroits :
 - $\frac{\rho}{\rho_b} > 1,89$: densité relative à la limite intérieure des anneaux.⁵
 - $\frac{\rho}{\rho_b} > 0,84$: densité relative à la division de Cassini⁶.
 - $\frac{\rho}{\rho_b} > 0,55$: densité relative à la limite extérieure des anneaux.

⁵ Entre la planète et le premier anneau.

⁶ Région séparant les 3^e et 4^e anneaux.

- d. Les anneaux de saturne sont de forme irrégulière pour qu'il y ait anti-coïncidence entre le centre de gravité des anneaux et le centre de la planète.

Ces conditions sont toutes nécessaires pour obtenir la stabilité des anneaux autour de Saturne. Si ces conditions ne sont pas respectées, le mouvement semble devenir instable et par conséquent chaotique au fur et à mesure du temps.

2.2. Analogie ou similitudes entre les anneaux de Saturne et le problème à N corps

Le problème à N corps est une théorie de mécanique céleste consistant à déterminer les trajectoires d'un ensemble de N corps s'attirant mutuellement. Plus précisément, il s'agit de résoudre les équations du mouvement de Newton pour N corps interagissant gravitationnellement, connaissant leurs masses ainsi que leurs positions et vitesses initiales. Le cas $N = 2$ a été résolu par Newton, mais dès $N = 3$ apparaissent des solutions non triviales, car elles sont sensibles aux conditions initiales.

Ce problème mathématique est fondamental pour l'astronomie classique où les effets de la relativité générale peuvent être négligés : vitesses des corps petites devant la vitesse de la lumière dans le vide, et champs de gravitation faibles, ce qui est essentiellement le cas dans le Système solaire. Pour trouver une formule adéquate pour décrire le problème à N corps, nous résolvons la seconde loi de Newton : $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

2.3. Mise en équation et présentation du système d'équation

Pour commencer, prenons un seul corps noté q_1 , attiré sous l'effet de la force gravitationnelle par les deux seuls autres corps dans l'univers notés q_2 et q_3 .
Nous obtenons donc pour la force entre le corps 1 et le corps 2 :

$$\overrightarrow{F_{21}} = -G \frac{m_2 \cdot m_1}{d_{21}^2} \overrightarrow{u_{21}} \quad (2)$$

Avec :

G : la constante gravitationnelle
 m_1 et m_2 : les masses des corps 1 et 2
 d_{21} : la distance entre les 2 corps

$\overrightarrow{u_{21}}$: un vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{u_{21}} = \frac{\overrightarrow{q_2 q_1}}{d_{21}}$ avec $\overrightarrow{q_2 q_1}$: vecteur pointant de $\overrightarrow{q_2}$ vers $\overrightarrow{q_1}$

L'équation (2) devient finalement :

$$\overrightarrow{F_{21}} = -G \frac{m_2 \cdot m_1}{d_{21}^3} \times \overrightarrow{q_2 q_1}$$

En généralisant avec le corps 3, il vient :

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{m_1} \times (\overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{31}})$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}_1 = -\frac{G}{m_1} \times \left(\frac{m_2 \cdot m_1}{d_{21}^3} \times \overrightarrow{q_2 q_1} - \frac{m_3 \cdot m_1}{d_{31}^3} \times \overrightarrow{q_3 q_1} \right)$$

Enfin, pour N corps :

$$\vec{a}_j = -\frac{G}{m_j} \times \sum \frac{m_j m_k \times (\vec{q}_j - \vec{q}_k)}{\|\vec{q}_j - \vec{q}_k\|^3} \quad (3)$$

Avec :

m_1, m_2, \dots, m_N : les masses des N particules, constantes

q_1, q_2, \dots, q_N : leurs vecteurs position 3D dépendant du temps t.

a_j : l'accélération de la particule j

En s'intéressant à l'accélération de la particule j qui dépend de sa position et de celle d'une particule indépendante de la particule, nous constatons une non-linéarité puisque l'accélération de la particule j n'est autre que la dérivée seconde de sa position.
L'équation (3) est valide si on suppose que l'espace est cartésien et orthogonal au temps, ce qui n'est vrai qu'en mécanique classique pour des vitesses inférieures à la vitesse de la lumière dans le vide et pour des masses contenues.

Cette formule suppose enfin que seule la gravitation est prise en compte⁷, que l'espace entre les particules n'est constitué que du vide absolu n'interagissant donc pas directement avec elles. De plus, la totalité de la masse de chaque particule peut être concentrée en un seul point de l'espace, qui lui-même est continu et isotrope dans toutes les directions. Enfin, la masse individuelle des particules se conserve avec leurs vitesses et accélérations relatives, de même que la quantité de mouvement totale des particules relative à l'observateur. Plusieurs simplifications sont effectuées afin de rendre le calcul et l'analyse faisable.

⁷ Nous présumons par exemple que les particules sont non chargées pour ne pas subir d'interaction électromagnétique et sont suffisamment éloignées pour négliger les effets des interactions fortes et faibles.

3. Vers le Chaos

Cette dernière partie résume notre étude du système et son comportement par rapport à la modification de certains paramètres. Nous présenterons les outils mathématiques utilisés permettant de caractériser l'apparition d'un régime chaotique. Nos simulations numériques se basent sur un problème à N corps réduit représentant le comportement interne des anneaux.

3.1. Choix d'une méthode numérique pour la résolution de l'équation différentielle

Afin d'avoir une idée plus précise et une représentation de notre problème, nous choisissons d'utiliser des codes informatiques pour nous permettre de le mettre en évidence de manière numérique et imagée. Il existe une multitude de méthodes d'intégration numérique qui ne sont pas équivalentes, nous allons nous concentrer sur deux d'entre elles afin de voir les changements qui apparaissent.

3.1.1. Intégration par la méthode d'Euler

Nous faisons, dans un premier temps, une intégration par la méthode d'Euler à l'aide du [Code I] présent en annexe. Cette méthode à l'avantage d'être simple dans son fonctionnement. Cependant, il faut être vigilant quant à l'interprétation des résultats qui ne sont pas nécessairement bien représentatifs du système étudié. Ainsi, nous obtenons les figures suivantes :

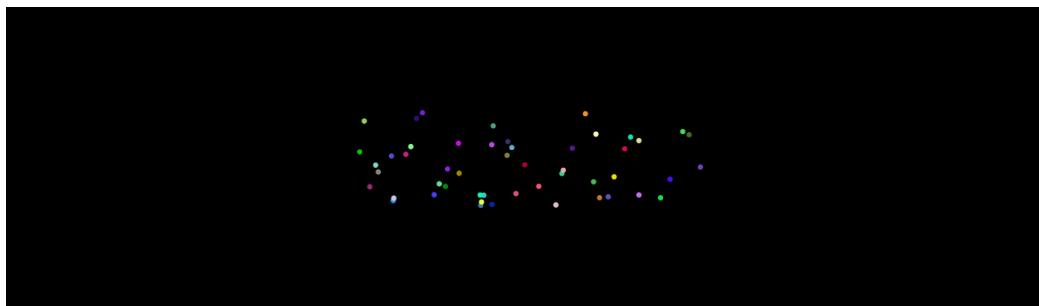


Figure 2 : Nuage de particules à l'instant t initial

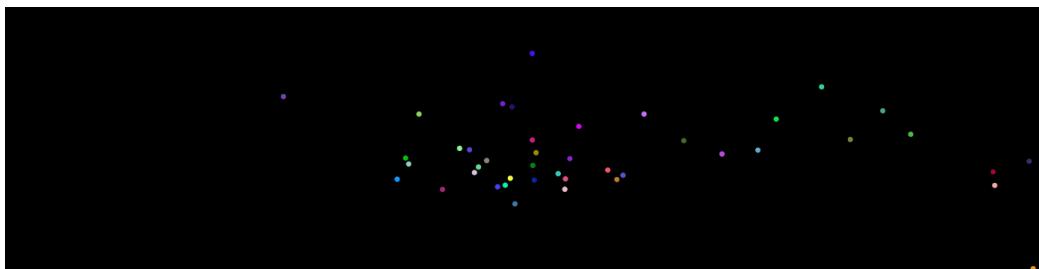


Figure 3 : Le même nuage à un instant $t + \delta t$

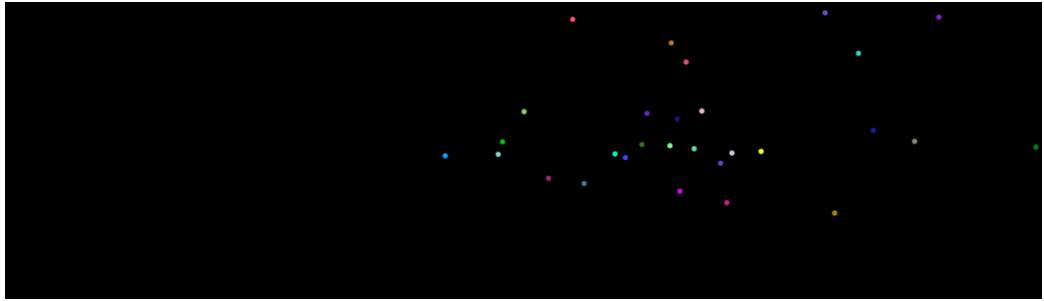


Figure 4 : Le même nuage à l'instant final

Les *Figure 2*, *Figure 3* et *Figure 4* représentent un certain nombre de particules en interaction dont leur trajectoire propre évolue au cours du temps. Nous prenons l'échelle de temps suivante : 1 seconde réelle vaut 2 mois dans la simulation. Nous remarquons, très clairement, au cours de l'évolution temporelle que les différentes particules suivent des trajectoires aléatoires et imprévisibles. Ainsi, ces observations montrent véritablement une tendance à se diriger vers un mouvement chaotique.

Cependant, en regardant précisément, nous constatons un défaut avec cette méthode d'intégration. Pour mettre en exergue ce défaut, il peut être intéressant de simuler l'orbite d'une planète autour d'un astre avec cette méthode de calcul, nous obtenons les *Figure 5* et *Figure 6*. L'échelle de temps utilisée est la même que précédemment : 1 seconde réelle équivaut à 2 mois dans la simulation.

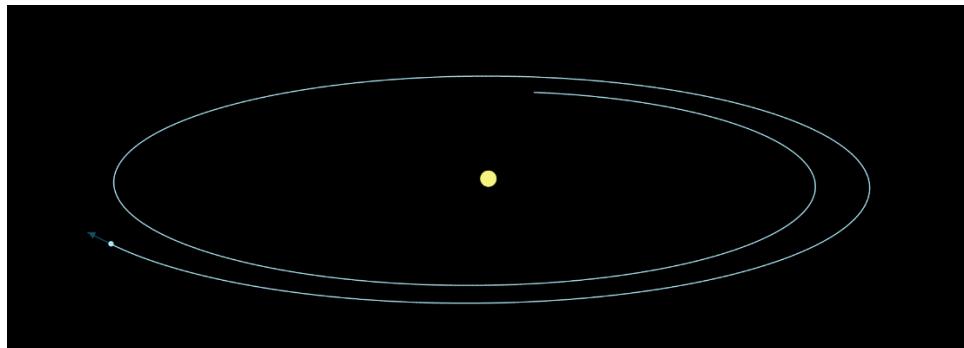


Figure 5 : Trajectoire simulée sur Java script avec la méthode d'intégration d'Euler, temps initial

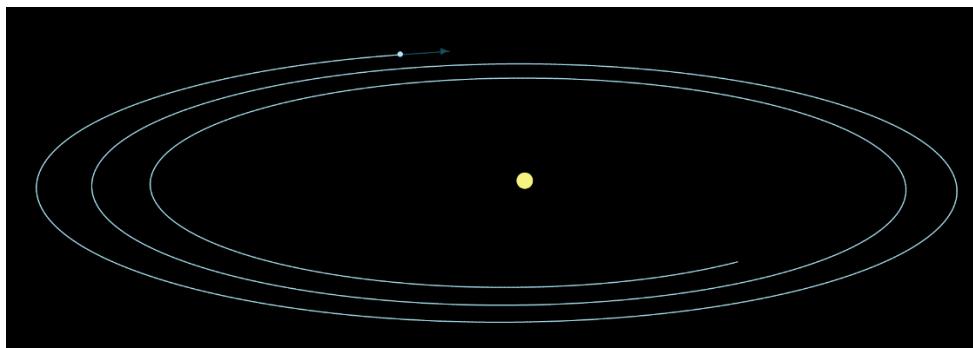


Figure 6 : Trajectoire simulée sur Java script avec la méthode d'intégration d'Euler, instant $t + \delta t$

Nous notons immédiatement que l'orbite n'est pas stable et qu'elle s'éloigne de plus en plus de l'astre central. Voyons maintenant les changements apportés par une autre méthode de calcul numérique.

3.1.2. Modifications avec la méthode de Verlet

Lors de l'utilisation de la méthode d'intégration de Verlet, des changements apparaissent. Nous réutilisons le même code informatique [Code I] que précédemment en remplaçant la fonction « *calculNextAcc* » par la fonction « *update* » comme réalisé dans le [Code II]. Il est désormais possible de relancer la simulation avec la même échelle de temps dont la *Figure 7* montre un rendu.

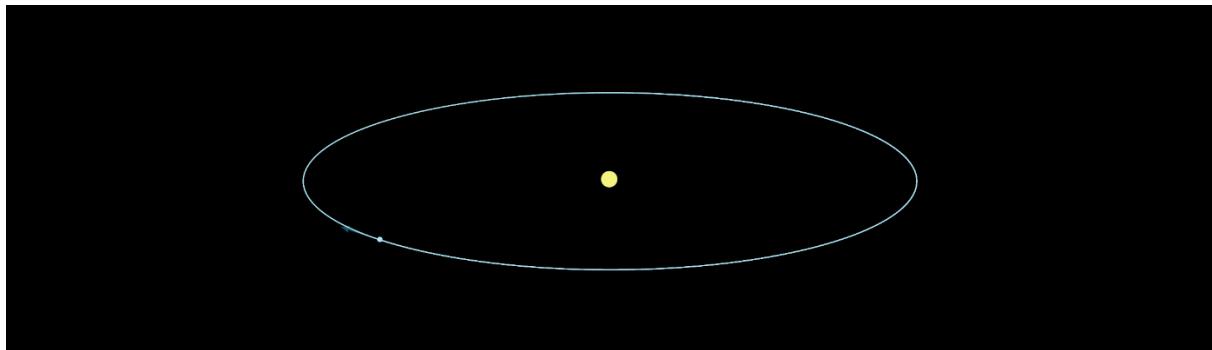


Figure 7 : Trajectoire circulaire simulée sur Java script avec la méthode d'intégration de Verlet

Les orbites successives sont désormais bien stables au cours du temps contrairement à ce qui avait été obtenu avec la méthode d'Euler. On en conclut que cette méthode de calcul est plus efficace et plus représentative dans notre cas.

3.2. Etude du problème pour des valeurs données

Nous cherchons maintenant à étudier l'évolution d'un nombre de corps donné en interaction sur un temps relativement long. L'idée est donc de simuler l'évolution des trajectoires de vingt corps sur une durée de dix ans [Code III]. Les rendus de cette simulation sont effectués en 2D⁸ et en 3D⁹ nous permettant ainsi d'obtenir une vue d'ensemble du problème. Les *Figure 8* à *Figure 11* retracent cela.

⁸ Voir [Code IV]

⁹ Voir [Code V]

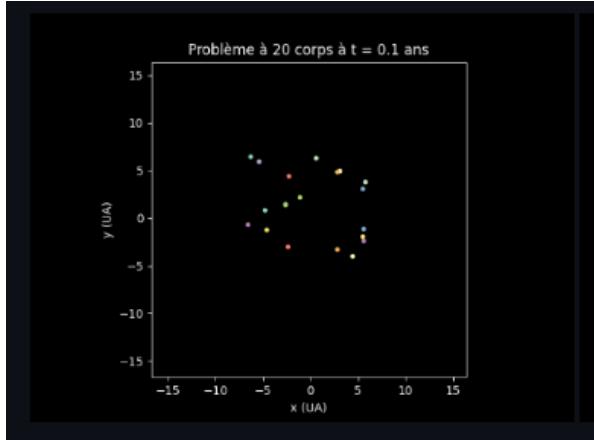


Figure 8 : Représentation 2D de la simulation à l'instant initial

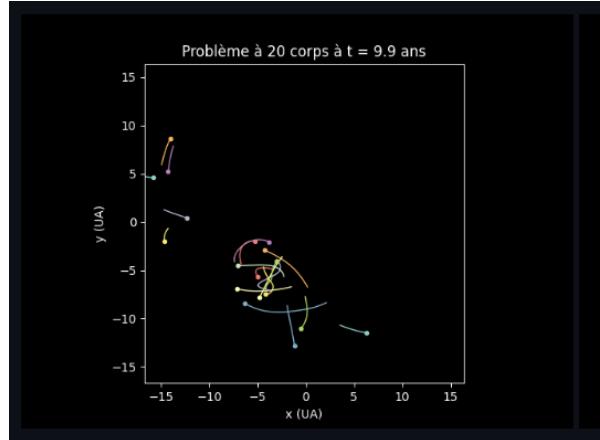


Figure 9 : Simulation 2D à l'instant final

Tout d'abord, la *Figure 8*, prise au temps initial, nous montre que les particules sont disposées aléatoirement. En suivant l'évolution de ces dernières jusqu'à un instant final fixé à 10 ans sur la simulation, la *Figure 9* présente le caractère imprévisible des trajectoires puisqu'aucune particule n'a suivi la même au cours du temps et aucune d'entre elles ne se retrouvent dans le même état final qu'une autre.

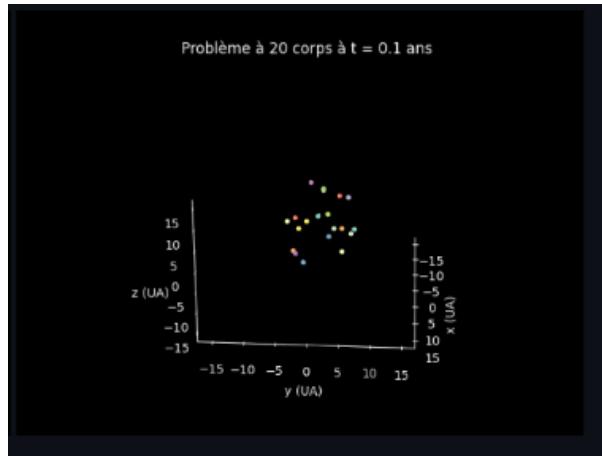


Figure 10: Représentation 3D de la simulation à l'instant initial

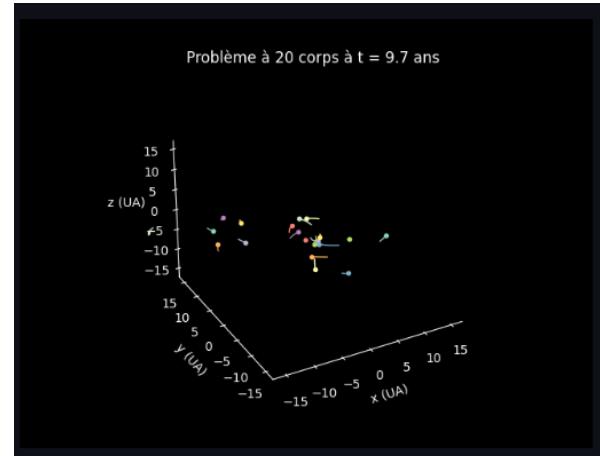


Figure 11: Même simulation à l'instant final

La représentation 3D des *Figure 10* et *Figure 11* nous permet de confirmer les observations faites auparavant en 2D et ce peu importe le point de vue ou la dimension prise.

3.3. Discussion sur le comportement chaotique du système

Nous disposons de plusieurs outils mathématiques pour quantifier le chaos d'un système. Tout d'abord, le diagramme de bifurcation permet de schématiser l'ensemble des points rencontrés par un jeu d'équations en faisant varier une condition initiale. Il peut faire apparaître des points de stabilité appelés points fixes, région de l'espace vers laquelle tend la

trajectoire qui l'a créée. De ce diagramme peuvent être déduites les deux constantes de Feigenbaum qui sont des rapports entre les branches de bifurcation. Enfin, le calcul de l'exposant de Lyapunov d'un système dynamique présente une importance particulière car son résultat indique directement le niveau de stabilité ou d'instabilité des trajectoires.

Cependant, les éléments que nous avons choisis d'étudier ont rendu impossible la génération du diagramme de bifurcation. Par ailleurs, nous n'avons pas réussi à mener à terme le calcul des exposants de Lyapunov, le [Code VI], présent en annexe, y fait référence bien qu'êtant non fonctionnel.

Néanmoins, il est possible d'exploiter des résultats connus pour le problème à trois corps réduit et de les appliquer à notre étude avec une incertitude non quantifiable à prendre en compte. En se basant sur les résultats obtenus par (*B. Quarles, 2011*)¹⁰, avec des conditions posées sur les masses et distances entre chaque corps, une estimation du comportement de notre système peut être donnée. Ainsi, il est possible que la majorité des variations permette de préserver l'équilibre des anneaux mais dans certains cas où la masse relative du corps induit¹¹ dépasse une valeur limite, l'exposant de Lyapunov devient positif et la stabilité est rompue. Toujours en s'appuyant sur l'article cité, nous déterminons l'horizon de Lyapunov, au-delà duquel le régime chaotique s'impose et rend impossible toute nouvelle prédition. En définissant cet horizon comme l'inverse de l'exposant de Lyapunov considéré, nous pouvons estimer qu'il soit de l'ordre de quelques années.

Cette interprétation corrobore ce qui a été présenté en première partie au sujet de l'instabilité des anneaux aux temps longs. De plus, les cas de stabilité discutés dans notre étude sont calculés à partir d'un système très simplifié ne prenant en compte qu'un faible nombre d'interactions excluant principalement les forces de marée causées par Saturne. L'existence d'un régime chaotique à grande échelle, du moins à l'intérieur de la limite de Roche, est dès lors impossible puisque les satellites bergers sont la clé de la stabilité. Enfin, une variation de la condition initiale posée sur la masse des anneaux tend à montrer l'apparition d'un régime chaotique, les particules des anneaux étant éjectés de leur orbite.

¹⁰ L'équipe a étudié la stabilité d'une planète dans un système à deux étoiles au moyen de plusieurs critères dont les exposants de Lyapunov.

¹¹ Ici, les anneaux.

Conclusion

Notre étude détaillée des anneaux de Saturne par des voies analytiques et numériques a permis de mettre en lumière la possibilité d'un comportement chaotique de ce système. Avec un comportement similaire à celui du problème à N corps réduit, les simulations ont mis en évidence l'apparition d'un régime chaotique en adéquation avec l'étude présentée par Kevin Baines et son équipe (O'Donoghue, et al., 2019) quant à l'instabilité de l'ensemble annulaire de Saturne à long terme.

Cependant, notre étude pourrait grandement bénéficier d'une refonte de l'analyse numérique afin de gagner en précision et de pouvoir être en mesure de calculer l'ensemble de variables définissant le chaos. Cette partie, non présente dans l'actuel rapport, pourra faire l'objet d'un futur compte rendu.

Références

- B. Quarles, J. E. (2011). The instability transition for the restricted 3-body problem. *Astronomy and Astrophysics*, 9. doi:<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201016199>
- Laplace, P. S. (1798). *Traité de mécanique céleste* (Vol. 2). (I. d. Crapelet, Éd.) J.B.M. Duprat. Récupéré sur <https://library.si.edu/digital-library/book/traitdemcaniquec02lapl>
- Laplace, P.-S. d. (1787). *Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne*. Récupéré sur <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6359825p>
- Laskar, J. (1989). A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System. *Nature London*, 237-238. doi:<https://doi.org/10.1038/338237a0>
- Lorenz, E. N. (1963, mars 1). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 130-141. Récupéré sur https://journals.ametsoc.org/downloadpdf/journals/atsc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.pdf
- Maxwell, J. C. (1859). *On the stability of the motion of Saturn's Rings*. Récupéré sur <https://archive.org/details/onstabilityofmot00maxw>
- O'Donoghue, J., Moore, L., Connerney, J., Melin, H., Stallard, T. S., Miller, S., & Baines, K. H. (2019). Observations of the chemical and thermal response of ‘ring rain’ on Saturn’s ionosphere. *Icarus*, 322, 251-260. doi:<https://doi.org/10.1016/j.icarus.2018.10.027>
- Poincaré, H. (1890). Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta mathematica*, 239-266.

Table des illustrations

| | |
|--|----|
| <i>Figure 1: Attracteur étrange de Lorenz simulé sur Python.....</i> | 1 |
| <i>Figure 2 : Nuage de particules à l'instant t initial</i> | 7 |
| <i>Figure 3 : Le même nuage à un instant $t + \delta t$</i> | 7 |
| <i>Figure 4 : Le même nuage à l'instant final</i> | 8 |
| <i>Figure 5 : Trajectoire simulée sur Python avec l'intégration d'Euler, temps initial</i> | 8 |
| <i>Figure 6 : Même trajectoire à un instant $t + \delta t$</i> | 8 |
| <i>Figure 7 : Trajectoire circulaire simulée sur Python avec l'intégration de Verlet.....</i> | 9 |
| <i>Figure 8 : Représentation 2D de la simulation à l'instant initial</i> | 10 |
| <i>Figure 9 : Simulation 2D à l'instant final</i> | 10 |
| <i>Figure 10: Représentation 3D de la simulation à l'instant initial</i> | 10 |
| <i>Figure 11: Même simulation à l'instant final</i> | 10 |

Annexes

Lien vers le répertoire contenant les codes informatiques :

https://drive.google.com/drive/folders/1zAug2zpwR9yY7F1i4jNMWYLVkb6u29Cb?usp=share_link

1. [Code I] :

```
1  class NBody {
2      /** Appelé à la création de l'objet */
3      constructor(mass, x0, y0, vx0, vy0, color, name) {
4          this.mass = mass;                      // masse de l'objet
5          this.pos = new Vector(x0, y0);        // position initiale de l'objet
6          this.vel = new Vector(vx0, vy0);      // vitesse initiale de l'objet
7          this.acc = new Vector(0, 0);          // pas d'accélération initiale
8          // couleur [R, G, B] aléatoire
9          this.color = color;
10
11         this.path = [];
12         this.name = name;
13     }
14
15 }
```

```
28
29     /** Calcule la prochaine accélération à t = t+dt */
30     calculNextAcc(dt, everyObjects) {
31         let G = 6.67430E-11; // constante gravitationnelle
32         this.acc.set(0, 0); // on supprime l'ancienne accélération
33
34         for(let i = 0; i < everyObjects.length; i++) {
35             // si l'objet à l'index i est l'objet dont on calcule l'accélération, on continue la boucle
36             if(everyObjects[i] == this)
37                 continue;
38
39             // accélération pour chaque corps
40             let vectDirection = Vector.sub(this.pos, everyObjects[i].pos);
41             let distance      = Vector.dist(this.pos, everyObjects[i].pos);
42
43             this.acc.add(vectDirection).mult(-G * everyObjects[i].mass).div(distance ** 3);
44         }
45     }
```

Orbite avec la méthode d'Euler :

```

47
48     /** Appelé 60 fois/seconde */
49     draw(drawer) {
50         let r = 15;
51
52         drawer
53             .noFill()
54             .stroke(this.color[0], this.color[1], this.color[2]);
55
56         if(this.name == "Terre") {
57             r = 5;
58
59             // Affichage du vecteur vitesse
60             let v = Vector.mult(this.vel, 1000000);
61             v.color = [this.color[0] - 150, this.color[1] - 150, this.color[2] - 150];
62             v.draw(this.pos);
63
64             // Affichage des orbites
65             this.path[this.path.length] = [this.pos.x, this.pos.y];
66
67             for (let i = 1; i < this.path.length; i++)
68                 drawer.line(this.path[i - 1][0], this.path[i - 1][1], this.path[i][0], this.path[i][1]);
69
70             if(this.path.length > 1600)
71                 this.path.shift();
72         }
73
74         drawer
75             .noStroke()
76             .fill(this.color[0], this.color[1], this.color[2])
77             .ellipse(this.pos.x, this.pos.y, r, r);
78     }
79 }
```

2. [Code II]¹² :

```

15
16     /** Appelé x fois/seconde
17     * @param dt Le temps passé depuis la dernière update
18     * @param everyObjects Liste de tous les objets de la simulation */
19     update(dt, everyObjects) {
20         this.calculNextAcc(dt, everyObjects);
21         this.pos.add(Vector.mult(this.vel, dt)).add(Vector.mult(this.acc, dt*dt / 2));
22
23         this.accCopy = this.acc.copy();
24         this.calculNextAcc(dt, everyObjects);
25
26         this.vel.add(Vector.add(this.accCopy, this.acc).mult(dt / 2));
27     }
```

¹² Remplacement de la fonction « *calculNextAcc* » par la fonction « *update* ».

3. [Code III] :

```

11 import numpy as np
12 import matplotlib.pyplot as plt
13 from matplotlib import animation
14 from scipy.integrate import odeint
15 from mpl_toolkits import mplot3d
16 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
17 import time
18 start_time = time.time()
19
20
21
22
23 #Initialisation des constantes
24 N = 20                                #Nombre de corps
25 ti = 0                                  #Temps initial
26 tf = 10                                 #Temps final
27 n = 500                                 #Nombre d'itérations temporelles
28 dt = (tf-ti)/n                          #Pas temporel
29 T = np.linspace(ti, tf, n)               #Liste des temps
30 G = 6.674e-11 * (6e24 * (365*24*60*60)**2) / (1.496e11)**3 #Constante gravitationnelle
31 M = np.random.uniform(low=6e24, high=2e30, size=N) / 6e24      #Masses
32
33
34 #Création du tableau des solutions
35 R0 = np.random.uniform(low=-7, high=7, size=3*N)
36 V0 = np.random.uniform(low=-5, high=5, size=3*N)
37 Y0 = np.append(R0,V0)                   #Conditions initiales
38
39
40 def NCorps(Yk, t):
41     """ Calcule la liste contenant les fonctions à intégrer (vitesses et accélérations)
42     -----
43     :param Yk: liste, liste des positions et des vitesses à la k-ième itération
44     :param t: liste, liste des temps
45     :return Sk: liste, liste des fonctions à intégrer (vitesses et accélérations) pour calculer les positions et les vitesses à la k+1-ième itération
46     -----
47     ...
48     #Place les positions dans un tableau 2D pour plus de praticité
49     Rk = np.zeros((3,N))
50     a = 0
51     b = 0
52     c = 0
53     for i in range(0,3*N):
54         if i%3 == 0:
55             Rk[0,a] = Yk[i]
56             a = a+1
57         if i%3 == 1:
58             Rk[1,b] = Yk[i]
59             b = b+1
60         if i%3 == 2:
61             Rk[2,c] = Yk[i]
62             c = c+1
63
64     #Création de la liste contenant les fonctions à intégrer
65     Sk = []
66     for i in range(3*N, 6*N):
67         Sk.append(Yk[i])
68     for i in range(0, N):
69         axk = 0
70         ayk = 0
71         azk = 0
72         for j in range(0, N):
73             if j != i:
74                 axk = axk - G*M[j]*(Rk[0,i]-Rk[0,j])/(((Rk[0,i]-Rk[0,j])**2+(Rk[1,i]-Rk[1,j])**2+(Rk[2,i]-Rk[2,j])**2)**(3/2)+1e-1)
75                 ayk = ayk - G*M[j]*(Rk[1,i]-Rk[1,j])/(((Rk[0,i]-Rk[0,j])**2+(Rk[1,i]-Rk[1,j])**2+(Rk[2,i]-Rk[2,j])**2)**(3/2)+1e-1)
76                 azk = azk - G*M[j]*(Rk[2,i]-Rk[2,j])/(((Rk[0,i]-Rk[0,j])**2+(Rk[1,i]-Rk[1,j])**2+(Rk[2,i]-Rk[2,j])**2)**(3/2)+1e-1)
77             Sk.append(axk)
78             Sk.append(ayk)
79             Sk.append(azk)
80     return Sk
81
82
83
84 Y = odeint(NCorps, Y0, T)

```

4. [Code IV] :

```

90 ## Animation 2D
91
92 plt.style.use('dark_background')
93 fig = plt.figure()
94 ax = plt.axes()
95 ax.axis('square')
96 ax.set_xlim(np.min(R0)-10, np.max(R0)+10)
97 ax.set_ylim(np.min(R0)-10, np.max(R0)+10)
98 plt.xlabel("x (UA)")
99 plt.ylabel("y (UA)")

100 trail = 50
101
102
103 def Animate2D(k):
104     for i, ligne in enumerate(lignes, 0):
105         ligne.set_data(Y[k:max(1, k - trail):-1, 3*i], Y[k:max(1, k - trail):-1, 3*i+1])
106     plt.title("Problème à " + str(N) + " corps à t = " + str(round(T[k],1)) + " ans")
107     return lignes
108
109 lignes = [ax.plot([], [], "o-", markersize = 3, markevery = 10000, lw = 1)[0] for _ in range(N)]
110
111 anim2D = animation.FuncAnimation(fig, Animate2D, frames = len(T), interval = 30, blit = False)
112
113 writergif = animation.PillowWriter(fps=30)
114 anim2D.save("2D_N_Body_Problem.gif", writer=writergif)
115

```

5. [Code V] :

```

118 ## Animation 3D
119
120 plt.style.use('dark_background')
121 fig = plt.figure()
122 ax = plt.axes(projection = '3d')
123 ax.zaxis.set_rotate_label(False)
124 ax.w_xaxis.set_pane_color((0.0, 0.0, 0.0, 0.0))
125 ax.w_yaxis.set_pane_color((0.0, 0.0, 0.0, 0.0))
126 ax.w_zaxis.set_pane_color((0.0, 0.0, 0.0, 0.0))
127 ax.grid(False)
128 ax.set_xlim3d(np.min(R0)-10, np.max(R0)+10)
129 ax.set_ylim3d(np.min(R0)-10, np.max(R0)+10)
130 ax.set_zlim3d(np.min(R0)-10, np.max(R0)+10)
131 ax.set_xlabel("x (UA)")
132 ax.set_ylabel("y (UA)")
133 ax.set_zlabel("z (UA)")

134
135 trail = 20
136
137 def Animate3D(k):
138     for i, ligne in enumerate(lignes, 0):
139         ligne.set_data(Y[k:max(1, k - trail):-1, 3*i], Y[k:max(1, k - trail):-1, 3*i+1])
140         ligne.set_3d_properties(Y[k:max(1, k - trail):-1, 3*i+2])
141     ax.view_init(azim=k/2)
142     plt.title("Problème à " + str(N) + " corps à t = " + str(round(T[k],1)) + " ans")
143     return lignes
144
145 lignes = [ax.plot([], [], "o-", markersize = 3, markevery = 10000, lw = 1)[0] for _ in range(N)]
146
147 anim3D = animation.FuncAnimation(fig, Animate3D, frames = n, interval = 30, blit = False, repeat = True)
148
149 writergif = animation.PillowWriter(fps=30)
150 anim3D.save("3D_N_Body_Problem.gif", writer=writergif)
151
152 print("%s secondes" % (time.time() - start_time))
153 plt.show()

```

6. [Code VI] :

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import random as rdm
4
5 # def lyapunov(mu, x0, n):
6 #     def f(x):
7 #         return mu * x * (1-x)
8 #     def fprime(x):
9 #         return mu * (1-2*x)
10 #    x = x0
11 #    l = fprime(x0)
12 #    for k in range(n-1):
13 #        x = f(x)
14 #        l += np.log(abs(fprime(x)))
15 #    return l / n
16 #
17 # #
18 # plt.figure()
19 # plt.title("Variations de l'exposant de Lyapunov")
20 # plt.xlim(3, 4)
21 # plt.ylim(-2, 1)
22 # plt.plot([3, 4], [0, 0])
23 # X = np.linspace(3, 4, 512)
24 # Y = [lyapunov(mu, .9, 100) for mu in X]
25 # plt.plot(X, Y, 'r')
26 # plt.show()
27
28 def lyapunov(q0, n):
29     G=6.6742*10**-11
30     mj=rdm.randint(1,1000)
31     xj=rdm.randint(1,1000)
32     yj=rdm.randint(1,1000)
33     zj=rdm.randint(1,1000)
34     qj=np.array([[xj],[yj],[zj]], dtype=object)
35     for i in range(n):
36         xk=rdm.randint(1,1000)
37         yk=rdm.randint(1,1000)
38         zk=rdm.randint(1,1000)
39         qk=np.array([[xk],[yk],[zk]], dtype=object)
40         mk=rdm.randint(1,1000)
41         aj=(-G/mj)*((mj*mk*(qj-qk))/(qj-qk)**3)
42     def f(q):
43         return aj
44
45     def fprime(qj):
46         ajprime=(-G/mj)*mj*mk*((1/((qj-qk)**3))+(qj-qk)*(-3/((qj-qk)**4)))
47         if np.all(ajprime==0) :
48             lyapunov(q0,n)
49         else :
50             return ajprime
51     qj = q0
52     l = fprime(q0)
53     for k in range(n-1):
54         qj = f(qj)
55         l += np.log(abs(fprime(qj)))
56     return l / n
57
58 plt.figure()
59 plt.title("Variations de l'exposant de Lyapunov")
60 plt.xlim(3, 4)
61 plt.ylim(-2, 1)
62 plt.plot([3, 4], [0, 0])
63 X = np.linspace(3, 4, 512)
64 Y = [lyapunov( 9, 20)]
65 plt.plot(X, Y, 'r')
66 plt.show()
67
68

```