Samuel Fernández Riquelme
25 de noviembre de 2025

Funciones de Variable Compleja

– You are real to me.

Índice

1. Ejercicios

- *Sean $(a_n)_{n=1}^N$ y $(b_n)_{n=1}^N$ dos sucesiones finitas de números complejos. Denotamos mediante $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ a las sumas parciales de la serie $\sum b_n$, considerando $B_0 = 0$ por convenio. Demostrar la fórmula de* ***sumación por partes***

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = A_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N} (a_{n+1} - a_n) B_n. \tag{1}$$

Demostración: La idea clave de la prueba es expresar $b_n = B_n - B_{n-1}$ y operar con la aritmética. Como debe ser siempre, antes de continuar alentamos al lector a que emplee su propio ingenio para completar la demostración.

Ahora sí, proseguimos (*spoiler alert*). Con la modificación expuesta en el paso anterior, desarrollamos el brazo izquierdo de (1) como se indica

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) \\
&= \sum_{n=M}^{N} a_n B_n - \sum_{n=M}^{N} a_n B_{n-1} \\
&= a_N B_N + \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n - \sum_{n=M-1}^{N-1} a_{n+1} B_n \qquad \text{[desplazamos índice]} \\
&= a_N B_N - a_M B_{M-1} + \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n - \sum_{n=M}^{N-1} a_{n+1} B_n \\
&= a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.
\end{aligned}$$

Si alguna transición entre igualdades os requiere notable dedicación no os culpo, por esta vez. Hasta luego gangster. Q.E.D.

- ***Teorema de Abel.*** *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos convergente. Demostrar que*

$$\lim_{r \to 1, r<1} \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Demostración: Aclaramos, antes de sumergirnos en el caos, que podemos considerar siempre $0 < r < 1$ y que, para cada uno de tales r, la serie $\sum r^n a_n$ converge absolutamente. Definimos, a continuación, los valores

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad A_k = \sum_{n=0}^{k} a_n, \quad k \in \mathbb{N},$$

y notamos que, bajo las hipótesis, se cumple que

$$A = A\frac{1-r}{1-r} = (1-r)A\frac{1}{1-r} = (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n A.$$

Por otra parte, invocando (1) en la serie $\sum r^n a_n$ y tomando $M = 0, N \to \infty$ no es difícil convencerse de que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n A_n.$$

Todas estas observaciones previas nos facilitarán ahora estimar la cantidad

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n - A\right| &= \left|(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n A_n - (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n A\right| \\ &= \left|(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n - A)\right| \\ &\leq (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n |A_n - A|.\end{aligned}$$

Además, dado $\varepsilon > 0$, como tenemos por construcción $(A_n)_n \to A$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|A_n - A| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N$. En consecuencia, por un lado, nos queda

$$(1-r)\sum_{n=N}^{\infty} r^n |A_n - A| \leq (1-r)\varepsilon/2 \sum_{n=N}^{\infty} r^n = r^N \varepsilon/2 < \varepsilon/2, \tag{2}$$

y, por otro lado, como N es fijo y $\sum_{n=0}^{N-1} r^n |A_n - A|$ está acotado en $0 < r < 1$, tomando δ suficientemente pequeño, podemos asegurar que

$$(1-r)\sum_{n=0}^{N-1} r^n |A_n - A| < \varepsilon/2, \tag{3}$$

siempre que $1 - \delta < r < 1$. Para finalizar, unificamos (2) y (3) para concluir que

$$(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n |A_n - A| = (1-r)\sum_{n=0}^{N-1} r^n |A_n - A| + (1-r)\sum_{n=N}^{\infty} r^n |A_n - A| < \varepsilon,$$

si $1 - \delta < r < 1$. Q.E.D.

- *Si $P \in \mathbb{C}[X]$ es un polinomio de grado n con ceros $\{a_1, ..., a_n\}$, demuestra que*

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - a_j} \tag{4}$$

Demostración: Procedemos por inducción sobre n el grado del polinomio. El caso base $n = 1$ es sencillísimo.

Para el salto inductivo, suponemos que todo polinomio de grado n satisface (4) y consideramos $P \in \mathbb{C}[X]$ arbitrario de grado $n+1$, con ceros $\{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$. Por ser a_{n+1} raíz, sabemos que $P(z) = (z - a_{n+1})Q(z)$, donde Q es un polinomio complejo de grado n, y cuyas raices son precisamente $\{a_1, ..., a_n\}$.

Al estudiar la derivada de P obtenemos

$$P'(z) = ((z - a_{n+1})Q(z))' = Q(z) + (z - a_{n+1})Q'(z),$$

y al dividir por $P(z)$ y hacer una instintiva aplicación de la hipótesis de inducción, completamos la desmotración:

$$\begin{aligned}
\frac{P'(z)}{P(z)} &= \frac{Q(z) + (z - a_{n+1})Q'(z)}{(z - a_{n+1})Q(z)} \\
&= \frac{1}{z - a_{n+1}} + \frac{Q'(z)}{Q(z)} \qquad \text{[distribuir denominador]} \\
&= \frac{1}{z - a_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - a_j} \qquad \text{[aplicamos H.I.]} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{z - a_j} \qquad \text{[agrupar]}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

- *Demuestra que, para $|z| < 1$, se cumple*

$$\frac{z}{1 - z^2} + \frac{z^2}{1 - z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1 - z}.$$

DEMOSTRACIÓN: Fijado $n \geq 0$, vamos a estudiar la expresión

$$\frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}, \tag{5}$$

usando para ello la fórmula de la serie geométrica con término inicial z^{2^n} y razón $z^{2^{n+1}}$, con lo que desembocamos en

$$\frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(z^{2^{n+1}}\right)^m z^{2^n} = \sum_{m=0}^{\infty} z^{2^n(2m+1)}.$$

A continuación, centrando nuestra atención en el exponente de z, notamos que la correspondencia $(n, m) \mapsto 2^n(2m + 1)$ representa una biyección entre $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ y $\mathbb{N}$ (la prueba de este hecho se sale de nuestro foco teórico).

En consecuencia, al considerar todos los posibles $n \geq 0$ y sumar sus respectivos (5), la expresión resultante consiste en una reordenación de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$, cuyo valor es precisamente

$$\frac{z}{1 - z}.$$

Por último, como $|z| < 1$ por hipótesis, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ converge absolutamente y, a consecuencia de ello, toda reordenación tiene el mismo valor[1], con lo que conluimos la demostración. Q.E.D.

[1]Un así llamado Tom Apostol detalla rigurosamente dicha afirmación, a mí me dejáis tranquilo.

Probar, bajo las mismas condiciones, que

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2z^2}{1+z^2} + \cdots + \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} + \cdots = \frac{1}{1-z}. \tag{6}$$

Demostración: De manera similar, fijamos $n \geq 0$ y examinamos la expresión

$$\frac{z^{2^n}}{1+z^{2^n}} = \frac{z^{2^n}}{1-(-z^{2^n})},$$

donde esta vez el término inicial es z^{2^n} y la razón es $-z^{2^n}$, por lo que, al desarrollar la serie, nos queda que

$$\frac{z^{2^n}}{1+z^{2^n}} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(-z^{2^n}\right)^m z^{2^n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^{2^n(m+1)},$$

y, al multiplicar por 2^n, obtenemos la igualdad

$$\frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m 2^n z^{2^n(m+1)}. \tag{7}$$

Ahora, consideramos $k > 0$ arbitrario, lo factorizamos como $k = 2^\mu r$, donde $r \in \mathbb{N}$ es impar, y analizamos el coeficiente de z^k en el brazo izquierdo de (6). Dividimos el estudio en dos casos:

- Para cuando $0 \leq n < \mu$, su correspondiente serie (7) aporta exactamente un sumando acompañado de z^k, cuyo coeficiente es $(-1)^m 2^n$. Además, como se debe cumplir $2^n(m+1) = k = 2^\mu r$ y $n < \mu$, deducimos que $m+1$ es par y, por ende, m impar. En consecuencia, inferimos que el coeficiente que acompaña a z^k es

$$(-1)^m 2^n = -2^n.$$

- Para $n = \mu$, realizamos un razonamiento análogo al anterior, pero deduciendo que m es par (pues $m+1 = r$ impar), por lo que el coeficiente que acompaña a z^k en este caso es

$$(-1)^m 2^n = 2^\mu.$$

Juntando estos análisis y notando que si $n > \mu$ el término z^k no aparece en el respectivo (7), podemos asegurar que el coeficiente general de z^k en el brazo izquierdo de (6) es

$$2^\mu - (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{\mu-1}) = 2^\mu - 2^\mu + 1 = 1.$$

Para terminar, como el argumento planteado en los párrafos superiroes es válido para todo $k \in \mathbb{N}$ concluimos que ambos lados de la igualdad (6) representan, en efecto, una igualdad. Q.e.d.