



FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

– *You are real to me.*

Índice

1. Ejercicios

1

1. Ejercicios

- Sean $(a_n)_{n=1}^N$ y $(b_n)_{n=1}^N$ dos sucesiones finitas de números complejos. Denotamos mediante $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ a las sumas parciales de la serie $\sum b_n$, considerando $B_0 = 0$ por convenio. Demostrar la fórmula de **sumación por partes**

$$\sum_{n=M}^N a_n b_n = A_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^N (a_{n+1} - a_n) B_n. \quad (1)$$

DEMOSTRACIÓN: La idea clave de la prueba es expresar $b_n = B_n - B_{n-1}$ y operar con la aritmética. Como debe ser siempre, antes de continuar alentamos al lector a que emplee su propio ingenio para completar la demostración.

Ahora sí, proseguimos (*spoiler alert*). Con la modificación expuesta en el paso anterior, desarrollamos el brazo izquierdo de (1) como se indica

$$\begin{aligned} \sum_{n=M}^N a_n b_n &= \sum_{n=M}^N a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= \sum_{n=M}^N a_n B_n - \sum_{n=M}^N a_n B_{n-1} \\ &= a_N B_N + \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n - \sum_{n=M-1}^{N-1} a_{n+1} B_n \quad [\text{desplazamos índice}] \\ &= a_N B_N - a_M B_{M-1} + \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n - \sum_{n=M}^{N-1} a_{n+1} B_n \\ &= a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n. \end{aligned}$$

Si alguna transición entre igualdades os requiere notable dedicación no os culpo, por esta vez. Hasta luego gangster. Q.E.D.

- **Teorema de Abel.** Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos convergente. Demostrar que

$$\lim_{r \rightarrow 1, r < 1} \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

DEMOSTRACIÓN: Aclaremos, antes de sumergirnos en el caos, que podemos considerar siempre $0 < r < 1$ y que, para cada uno de tales r , la serie $\sum r^n a_n$ converge absolutamente. Definimos, a continuación, los valores

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad A_k = \sum_{n=0}^k a_n, \quad k \in \mathbb{N},$$

y notamos que, bajo las hipótesis, se cumple que

$$A = A \frac{1-r}{1-r} = (1-r) A \frac{1}{1-r} = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n A.$$

Por otra parte, invocando (1) en la serie $\sum r^n a_n$ y tomando $M = 0, N \rightarrow \infty$ no es difícil convencerse de que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n A_n.$$

Todas estas observaciones previas nos facilitarán ahora estimar la cantidad

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n - A \right| &= \left| (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n A_n - (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n A \right| \\ &= \left| (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n - A) \right| \\ &\leq (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n |A_n - A|. \end{aligned}$$

Además, dado $\varepsilon > 0$, como tenemos por construcción $(A_n)_n \rightarrow A$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|A_n - A| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. En consecuencia, por un lado, nos queda

$$(1-r) \sum_{n=N}^{\infty} r^n |A_n - A| \leq (1-r)\varepsilon/2 \sum_{n=N}^{\infty} r^n = r^N \varepsilon/2 < \varepsilon/2, \quad (2)$$

y, por otro lado, como N es fijo y $\sum_{n=0}^{N-1} r^n |A_n - A|$ está acotado para todo $0 < r < 1$, tomando δ suficientemente pequeño, podemos asegurar que

$$(1-r) \sum_{n=0}^{N-1} r^n |A_n - A| < \varepsilon/2, \quad (3)$$

siempre que $1 - \delta < r < 1$. Para finalizar, unificamos (2) y (3) para concluir que

$$(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n |A_n - A| = (1-r) \sum_{n=0}^{N-1} r^n |A_n - A| + (1-r) \sum_{n=N}^{\infty} r^n |A_n - A| < \varepsilon,$$

si $1 - \delta < r < 1$.

Q.E.D.