UNIVERSIDAD DE MURCIA

Samuel Fernández Riquelme
20 de noviembre de 2025

Funciones de Variable Compleja

– *You are real to me.*

Índice

1. Ejercicios

- *Sean $(a_n)_{n=1}^N$ y $(b_n)_{n=1}^N$ dos sucesiones finitas de números complejos. Denotamos mediante $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ a las sumas parciales de la serie $\sum b_n$, considerando $B_0 = 0$ por convenio. Demostrar la fórmula de* ***sumación por partes***

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = A_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N} (a_{n+1} - a_n) B_n. \tag{1}$$

Demostración: La idea clave de la prueba es expresar $b_n = B_n - B_{n-1}$ y operar con la aritmética. Como debe ser siempre, antes de continuar alentamos al lector a que emplee su propio ingenio para completar la demostración.

Ahora sí, proseguimos (*spoiler alert*). Con la modificación expuesta en el paso anterior, desarrollamos el brazo izquierdo de (1) como se indica

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) \\
&= \sum_{n=M}^{N} a_n B_n - \sum_{n=M}^{N} a_n B_{n-1} \\
&= a_N B_N + \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n - \sum_{n=M-1}^{N-1} a_{n+1} B_n \qquad \text{[desplazamos índice]} \\
&= a_N B_N - a_M B_{M-1} + \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n - \sum_{n=M}^{N-1} a_{n+1} B_n \\
&= a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.
\end{aligned}$$

Si alguna transición entre igualdades os requiere notable dedicación no os culpo, por esta vez. Hasta luego gangster. Q.E.D.

- ***Teorema de Abel.*** *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos convergente. Demostrar que*

$$\lim_{r \to 1, r<1} \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Demostración: Aclaramos, antes de sumergirnos en el caos, que podemos considerar siempre $0 < r < 1$ y que, para cada uno de tales r, la serie $\sum r^n a_n$ converge absolutamente. Definimos, a continuación, los valores

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad A_k = \sum_{n=0}^{k} a_n, \quad k \in \mathbb{N},$$

y notamos que, bajo las hipótesis, se cumple que

$$A = A\frac{1-r}{1-r} = (1-r)A\frac{1}{1-r} = (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n A.$$

Por otra parte, invocando (1) en la serie $\sum r^n a_n$ y tomando $M = 0, N \to \infty$ no es difícil convencerse de que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n A_n.$$

Todas estas observaciones previas nos facilitarán ahora estimar la cantidad

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n - A \right| &= \left| (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n A_n - (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n A \right| \\
&= \left| (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n - A) \right| \\
&\leq (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n |A_n - A|.
\end{aligned}$$

Además, dado $\varepsilon > 0$, como tenemos por construcción $(A_n)_n \to A$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|A_n - A| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N$. En consecuencia, por un lado, nos queda

$$(1-r) \sum_{n=N}^{\infty} r^n |A_n - A| \leq (1-r)\varepsilon/2 \sum_{n=N}^{\infty} r^n = r^N \varepsilon/2 < \varepsilon/2, \tag{2}$$

y, por otro lado, como N es fijo y $\sum_{n=0}^{N-1} r^n |A_n - A|$ está acotado en $0 < r < 1$, tomando δ suficientemente pequeño, podemos asegurar que

$$(1-r) \sum_{n=0}^{N-1} r^n |A_n - A| < \varepsilon/2, \tag{3}$$

siempre que $1 - \delta < r < 1$. Para finalizar, unificamos (2) y (3) para concluir que

$$(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n |A_n - A| = (1-r) \sum_{n=0}^{N-1} r^n |A_n - A| + (1-r) \sum_{n=N}^{\infty} r^n |A_n - A| < \varepsilon,$$

si $1 - \delta < r < 1$. Q.E.D.

- *Si $P \in \mathbb{C}[X]$ es un polinomio de grado n con ceros $\{a_1, ..., a_n\}$, demuestra que*

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - a_j} \tag{4}$$

Demostración: Procedemos por inducción sobre n el grado del polinomio. El caso base $n = 1$ es sencillísimo.

Para el salto inductivo, suponemos que todo polinomio de grado n satisface (4) y consideramos $P \in \mathbb{C}[X]$ arbitrario de grado $n+1$, con ceros $\{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$. Por ser a_{n+1} raíz, sabemos que $P(z) = (z - a_{n+1})Q(z)$, donde Q es un polinomio complejo de grado n, y cuyas raices son precisamente $\{a_1, ..., a_n\}$.

Al estudiar la derivada de P obtenemos

$$P'(z) = ((z - a_{n+1})Q(z))' = Q(z) + (z - a_{n+1})Q'(z),$$

y al dividir por $P(z)$ y hacer una instintiva aplicación de la hipótesis de inducción, completamos la desmotración:

$$\begin{aligned}
\frac{P'(z)}{P(z)} &= \frac{Q(z) + (z - a_{n+1})Q'(z)}{(z - a_{n+1})Q(z)} \\
&= \frac{1}{z - a_{n+1}} + \frac{Q'(z)}{Q(z)} \qquad \text{[distribuir denominador]} \\
&= \frac{1}{z - a_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - a_j} \qquad \text{[aplicamos H.I.]} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{z - a_j} \qquad \text{[agrupar]}
\end{aligned}$$

Q.E.D.