

GRUPOS Y ANILLOS

- *Alto, policía, ha cometido usted un crimen.*
- *Lo asumo.*
- *Lo arresto.*

Índice de Contenidos

1	Resolucion Ejercicios	1
---	-----------------------	---

1 Resolucion Ejercicios

Cualquiera podrá interpretar el propósito de esta sección a partir del encabezado. Se redactaran solo aquellos ejercicios que susciten un interés especial (bajo mi criterio).

1.1.7 *Demostrar que si $(X, *)$ es un monoide finito y $x \in X$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) *x es cancelable por un lado.*
- (ii) *x es cancelable.*
- (iii) *x tiene simétrico por un lado.*
- (iv) *x es simétrico.*

DEMOSTRACIÓN: El flujo de la prueba va a ser el siguiente: suponer x cancelable por la izquierda y concluir que x tiene simétrico por la derecha, para deducir, seguidamente, que x es cancelable por la derecha. Queda a las necesidades de cada uno convencerse de la suficiencia de este argumento.

Supongamos x cancelable por la izquierda y definamos la aplicación $f : X \rightarrow X$ dada por

$$f(a) = x * a.$$

Bajo estas hipótesis, f es biyectiva. En efecto, para probar la inyectividad aplicamos el ser x cancelable y llegamos a que

$$f(a) = f(a') \Rightarrow x * a = x * a' \Rightarrow a = a'.$$

Más aún, gracias a un resultado del ejercicio 1.1.2, como X es un conjunto finito f es además sobreyectiva (o, si me permites, biyectiva). En consecuencia, para e el neutro de X , existe $a \in X$ cumpliendo $f(a) = e$, por lo que, en definitiva, nos queda

$$x * a = f(a) = e,$$

es decir, x tiene simétrico por la derecha.

Siguiendo esta línea, veamos que x es cancelable por la derecha, suponiendo para ello $y, z \in X$ arbitrarios tales que $y * x = z * x$. El único paso restante es comprobar que

$$y = y * e = y * x * a = z * x * a = z * e = z.$$

Q.E.D.

1.1.8 *Sea $*$ una operación en un conjunto X y supongamos que $*$ tiene un neutro y tres elementos a, b, c tales que $a \neq c$, b es el simétrico por la izquierda de a y c es el simétrico por la izquierda de b . Demostrar que $*$ no es asociativa.*

DEMOSTRACIÓN: Es un razonamiento directo, únicamente es necesario examinar la expresión $c * b * a$:

$$(c * b) * a = e * a = a \neq c = c * e = c * (b * a).$$

Q.E.D.

*Concluir que si $(M, *)$ es un monoide en el que todo elemento tiene simétrico por la izquierda, entonces $(M, *)$ es un grupo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $a \in M$ arbitrario. Por hipótesis, a tiene simétrico por la izquierda, digámosle b , y este, a su vez, tiene también simétrico por la izquierda c . No obstante, como $*$ es conmutativa, para no llegar a contradicción al aplicar el resultado anterior, se debe dar $a = c$. En consecuencia, para terminar, nos queda que

$$\begin{aligned} a * b &= c * b = e, \\ b * a &= e, \end{aligned}$$

por lo que a es invertible.

Q.E.D.

1.2.2 *Sea $m \in \mathbb{Z}$. Demostrar que si m no es cuadrado en \mathbb{Z} , entonces tampoco es un cuadrado en \mathbb{Q} .*

DEMOSTRACIÓN: Nos ocuparemos, en su lugar, de probar el contrarrecíproco de la proposición del enunciado. Suponemos $m = q^2$ donde $q = a/b \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$. En consecuencia, deducimos que

$$m = \frac{a^2}{b^2},$$

y al despejar $a^2 = b^2 m$ notamos que

$$a^2 = b(bm) \implies b \mid a^2,$$

donde invocamos el Lema de Euclides para obtener $b \mid a$. No obstante, como a y b eran coprimos, la única causa justificada es que $b = 1$, por lo que concluimos finalmente que $m = a^2$. Q.E.D.