UNIVERSIDAD DE MURCIA

Samuel Fernández Riquelme
8 de noviembre de 2025

Funciones de Variable Compleja

– *You are real to me.*

Índice

1. Ejercicios **1**

1. Ejercicios

- *Sean $(a_n)_{n=1}^N$ y $(b_n)_{n=1}^N$ dos sucesiones finitas de números complejos. Denotamos mediante $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ a las sumas parciales de la serie $\sum b_n$, considerando $B_0 = 0$ por convenio. Demostrar la fórmula de* ***sumación por partes***

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = A_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N} (a_{n+1} - a_n) B_n. \tag{1}$$

Demostración: La idea clave de la prueba es expresar $b_n = B_n - B_{n-1}$ y operar con la aritmética. Como debe ser siempre, antes de continuar alentamos al lector a que emplee su propio ingenio para completar la demostración.

Ahora sí, proseguimos (*spoiler alert*). Con la modificación expuesta en el paso anterior, desarrollamos el brazo izquierdo de (1) como se indica

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) \\
&= \sum_{n=M}^{N} a_n B_n - \sum_{n=M}^{N} a_n B_{n-1} \\
&= a_N B_N + \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n - \sum_{n=M-1}^{N-1} a_{n+1} B_n \qquad \text{[desplazamos índice]} \\
&= a_N B_N - a_M B_{M-1} + \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n - \sum_{n=M}^{N-1} a_{n+1} B_n \\
&= a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.
\end{aligned}$$

Si alguna transición entre igualdades os requiere notable dedicación no os culpo, por esta vez. Hasta luego ganster. Q.E.D.

- ***Teorema de Abel.*** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos convergente. Demostrar que*

$$\lim_{r \to 1, r<1} \sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Demostración: Déjame salir. □