



---

# FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

*– You are real to me.*

## Índice

1. Ejercicios	1
---------------	---

## 1. Ejercicios

- Sean  $(a_n)_{n=1}^N$  y  $(b_n)_{n=1}^N$  dos sucesiones finitas de números complejos. Denotamos mediante  $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$  a las sumas parciales de la serie  $\sum b_n$ , considerando  $B_0 = 0$  por convenio. Demostrar la fórmula de **sumación por partes**

$$\sum_{n=M}^N a_n b_n = A_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^N (a_{n+1} - a_n) B_n. \quad (1)$$

DEMOSTRACIÓN: La idea clave de la prueba es expresar  $b_n = B_n - B_{n-1}$  y operar con la aritmética. Como debe ser siempre, antes de continuar alentamos al lector a que emplee su propio ingenio para completar la demostración.

Ahora sí, proseguimos (*spoiler alert*). Con la modificación expuesta en el paso anterior, desarrollamos el brazo izquierdo de (1) como se indica

$$\begin{aligned} \sum_{n=M}^N a_n b_n &= \sum_{n=M}^N a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= \sum_{n=M}^N a_n B_n - \sum_{n=M}^N a_n B_{n-1} \\ &= a_N B_N + \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n - \sum_{n=M-1}^{N-1} a_{n+1} B_n \quad [\text{desplazamos índice}] \\ &= a_N B_N - a_M B_{M-1} + \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n - \sum_{n=M}^{N-1} a_{n+1} B_n \\ &= a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n. \end{aligned}$$

Si alguna transición entre igualdades os requiere notable dedicación no os culpo, por esta vez.  
Hasta luego gangster. Q.E.D.

- **Teorema de Abel.** Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  una serie de números complejos convergente. Demostrar que

$$\lim_{r \rightarrow 1, r < 1} \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

DEMOSTRACIÓN: Aclaramos, antes de sumergirnos en el caos, que podemos considerar siempre  $0 < r < 1$  y que, para cada uno de tales  $r$ , la serie  $\sum r^n a_n$  converge absolutamente. Definimos, a continuación, los valores

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad A_k = \sum_{n=0}^k a_n, \quad k \in \mathbb{N},$$

y notamos que, bajo las hipótesis, se cumple que

$$A = A \frac{1-r}{1-r} = (1-r) A \frac{1}{1-r} = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n A.$$

Por otra parte, invocando (1) en la serie  $\sum r^n a_n$  y tomando  $M = 0, N \rightarrow \infty$  no es difícil convencerse de que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n A_n.$$

Todas estas observaciones previas nos facilitarán ahora estimar la cantidad

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n - A \right| &= \left| (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n A_n - (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n A \right| \\ &= \left| (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n - A) \right| \\ &\leq (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n |A_n - A|. \end{aligned}$$

Además, dado  $\varepsilon > 0$ , como tenemos por construcción  $(A_n)_n \rightarrow A$ , sabemos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|A_n - A| < \varepsilon/2$  para todo  $n \geq N$ . En consecuencia, por un lado, nos queda

$$(1-r) \sum_{n=N}^{\infty} r^n |A_n - A| \leq (1-r)\varepsilon/2 \sum_{n=N}^{\infty} r^n = r^N \varepsilon/2 < \varepsilon/2, \quad (2)$$

y, por otro lado, como  $N$  es fijo y  $\sum_{n=0}^{N-1} r^n |A_n - A|$  está acotado en  $0 < r < 1$ , tomando  $\delta$  suficientemente pequeño, podemos asegurar que

$$(1-r) \sum_{n=0}^{N-1} r^n |A_n - A| < \varepsilon/2, \quad (3)$$

siempre que  $1 - \delta < r < 1$ . Para finalizar, unificamos (2) y (3) para concluir que

$$(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n |A_n - A| = (1-r) \sum_{n=0}^{N-1} r^n |A_n - A| + (1-r) \sum_{n=N}^{\infty} r^n |A_n - A| < \varepsilon,$$

si  $1 - \delta < r < 1$ .

Q.E.D.

- Si  $P \in \mathbb{C}[X]$  es un polinomio de grado  $n$  con ceros  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , demuestra que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - a_j} \quad (4)$$

**DEMOSTRACIÓN:** Procedemos por inducción sobre  $n$  el grado del polinomio. El caso base  $n = 1$  es sencillísimo.

Para el salto inductivo, suponemos que todo polinomio de grado  $n$  satisface (4) y consideramos  $P \in \mathbb{C}[X]$  arbitrario de grado  $n+1$ , con ceros  $\{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ . Por ser  $a_{n+1}$  raíz, sabemos que  $P(z) = (z - a_{n+1})Q(z)$ , donde  $Q$  es un polinomio complejo de grado  $n$ , y cuyas raíces son precisamente  $\{a_1, \dots, a_n\}$ .

Al estudiar la derivada de  $P$  obtenemos

$$P'(z) = ((z - a_{n+1})Q(z))' = Q(z) + (z - a_{n+1})Q'(z),$$

y al dividir por  $P(z)$  y hacer una intuitiva aplicación de la hipótesis de inducción, completamos la desmotración:

$$\begin{aligned} \frac{P'(z)}{P(z)} &= \frac{Q(z) + (z - a_{n+1})Q'(z)}{(z - a_{n+1})Q(z)} \\ &= \frac{1}{z - a_{n+1}} + \frac{Q'(z)}{Q(z)} \quad [\text{distribuir denominador}] \\ &= \frac{1}{z - a_{n+1}} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - a_j} \quad [\text{aplicamos H.I.}] \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{z - a_j} \quad [\text{agrupar}] \end{aligned}$$

Q.E.D.

- *Demuestra que, para  $|z| < 1$ , se cumple*

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z}.$$

DEMOSTRACIÓN: Fijado  $n \geq 0$ , vamos a estudiar la expresión

$$\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}, \quad (5)$$

usando para ello la fórmula de la serie geométrica con término inicial  $z^{2^n}$  y razón  $z^{2^{n+1}}$ , con lo que desembocamos en

$$\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{m=0}^{\infty} (z^{2^{n+1}})^m z^{2^n} = \sum_{m=0}^{\infty} z^{2^n(2m+1)}.$$

A continuación, centrando nuestra atención en el exponente de  $z$ , notamos que la correspondencia  $(n, m) \mapsto 2^n(2m+1)$  representa una biyección entre  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  y  $\mathbb{N}$  (la prueba de este hecho se sale de nuestro foco teórico).

En consecuencia, al considerar todos los posibles  $n \geq 0$  y sumar sus respectivos (5), la expresión resultante consiste en una reordenación de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ , cuyo valor es precisamente

$$\frac{z}{1-z}.$$

Por último, como  $|z| < 1$  por hipótesis, la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$  converge absolutamente y, a consecuencia de ello, toda reordenación tiene el mismo valor<sup>1</sup>, con lo que concluimos la demostración. Q.E.D.

---

<sup>1</sup>Un así llamado Tom Apostol detalla rigurosamente dicha afirmación, a mí me dejáis tranquilo.

*Probar, bajo las mismas condiciones, que*

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2z^2}{1+z^2} + \cdots + \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} + \cdots = \frac{1}{1-z}.$$

DEMOSTRACIÓN: De manera similar, fijamos  $n \geq 0$  y examinamos la expresión

$$\frac{z^{2^n}}{1+z^{2^n}} = \frac{z^{2^n}}{1-(-z^{2^n})},$$

donde esta vez el término inicial es  $z^{2^n}$  y la razón es  $-z^{2^n}$ , por lo que, al desarrollar la serie, nos queda que

$$\frac{z^{2^n}}{1+z^{2^n}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-z^{2^n})^m z^{2^n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^{2^n(m+1)},$$

y, al multiplicar por  $2^n$ , obtenemos la igualdad

$$\frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m 2^n z^{2^n(m+1)}.$$

Ahora, consideramos  $k > 0$  arbitrario y analizamos las apariciones de  $z^k$ .