République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur

Université de Science et Technologie Houari Boumediene

Faculté d'électronique et d'informatique

Département d'informatique

Polycopié de cours

Théorie des jeux

NIVEAU LMD Master 1 Informatique visuelle « MIV »

Présenté par Djamila Dahmani Khelifa

2019/2020

Avant-Propos

Ce polycopié de cours s'adresse aux étudiants de première année master 1 Informatique Visuelle. C'est un travail personnel qui émane de mon expérience dans l'enseignement de ce module que j'espère va être bénéfique pour les étudiants.

Vu l'intérêt que portent les étudiants même venant de d'autres spécialités à ce cours, ce polycopié va présenter une introduction générale à cette théorie, tout en expliquant ses fondements et les notions essentielles pour la comprendre.

Ce document comporte 5 chapitres :

Le premier chapitre sera consacré à une Introduction générale à la théorie des jeux et ses concepts fondamentaux, à savoir l'interaction stratégique, la représentation ordinale, les préférences rationnelles, les fonctions d'utilité, et les choix incertains, munis de quelques exemples d'application.

Dans le deuxième chapitre nous nous intéresserons à la modélisation d'un jeu sous la forme normale appelée aussi stratégique et nous traiterons quelques concepts de solutions telles que les dominances et les éliminations successives des stratégies dominées. À la fin du chapitre, des exemples de jeux célèbres résolubles par les éliminations successives de stratégies dominées seront présentés.

Le troisième chapitre est constitué de deux parties : dans la première partie nous aborderons les notions de l'équilibre de Nash, de l'Optimum de Pareto, et du niveau de sécurité d'un joueur. Dans la seconde partie nous allons définir l'extension mixte d'un jeu sous forme normale, nous énoncerons par la suite le fameux théorème de Nash (1951) qui assure l'existence d'un équilibre en stratégies mixtes. Par la suite un aspect très important dans la recherche en algorithmique qui est l'aspect calculatoire de la détermination de l'équilibre mixte d'un jeu fini sera abordé. Enfin des exemples de modèles connus de jeux où les concepts fondamentaux définis dans ce chapitre sont applicables vont être présentés.

Le chapitre quatre est dédié en premier lieu au concept du comportement prudent à savoir les stratégies prudentes pures et mixtes et la notion du paiement de punition d'un joueur. En second lieu, l'application du concept de la prudence au cas particulier des jeux à somme nulle sera présentée. Le théorème de Von Neumann (1928), ainsi que L'aspect algorithmique de la détermination de la valeur mixte d'un jeu à somme nulle seront aussi traités, suivis de quelques exemples d'application.

Le cinquième et dernier chapitre traie d'un autre type de modélisation standard d'un jeu qui est celle de la forme extensive à information parfaite. Nous définirons l'arbre de décision associé, l'équilibre de Nash parfaits en sous- jeux, et enfin nous aborderons quelques modèles de jeux célèbres et leurs applications.

La fin de ce polycopié est réservée à quelques exercices proposés lors des séances de travaux dirigés.

Chapitre 1

Introduction générale à la théorie des jeux et concepts fondamentaux

1.1 Introduction à la théorie des jeux

Dans l'échange de lettres entre Blaise Pascal et Pierre Fermat en 1654, la théorie des probabilités où « la géométrie de la chance » est née. Emile Borel beaucoup plus tard s'intéressant aux travaux de Blaise Pascal et pierre Fermat sur les probabilités, s'est penché sur le cas des jeux, et entre 1921 et 1927, il a écrit un ensemble de papiers où il a introduit le formalisme mathématique de ce que nous appelons aujourd'hui « la théorie des jeux ».

Depuis que John Von Neumann et Oskar Morgenstern ont publié en 1944 leur fameux livre s'intitulant : « Theory of Games and Economic Behavior », la théorie des jeux a gagné une place incontournable en économie. Cependant elle trouve aujourd'hui de nombreuses applications notamment en intelligence artificielle et la théorie des multi-agents, biologie et beaucoup plus récemment en informatique de manière générale (Vision par ordinateur, cryptographie, théorie algorithmique des jeux, vérification de preuves etc…).

L'Homme ne peut survivre sans interagir avec d'autres hommes, et ironiquement, il parait que parfois sa survie est en dépit de ces interactions. L'échange et la production nécessitent la coopération entre les individus mais ces mêmes interactions peuvent aussi conduire à des confrontations désastreuses. On peut affirmer que les technologies, institutions et normes culturelles de plus en plus complexes des sociétés humaines ont existé dans le but de faciliter et de réguler ces interactions. Par exemple, la technologie Internet facilite grandement les transactions acheteur-vendeur, mais les complique également, en augmentant les possibilités de tricherie et de fraude. La théorie des jeux a précisément pour objectif l'étude des interactions au sein d'un groupe d'individus (ou gouvernements, entreprises, etc.) où les actions de chaque individu ont un effet sur l'issue attendu de tous.

La théorie des jeux d'aujourd'hui est un outil mathématique incontournable dans plusieurs disciplines dont les plus importantes sont les sciences de l'informatique. Cela va d'un système de sécurité réseaux aux grandes architectures des réseaux de neurones à convolution.

On ne peut définir correctement la notion de Théorie des jeux sans passer au préalable par la définition des interactions stratégiques :

1.2 Interactions stratégique :

Une interaction stratégique est une situation présentant les caractéristiques suivantes :

✓ Un certain nombre d'entités (individus, entreprises, gouvernement etc.) prennent des décisions et se comportent de différentes manières.

✓ L'ensemble de décisions prises (stratégies), ainsi que le hasard, détermine une issue (quelque chose qui se passe).

- ✓ les agents ont des préférences sur les issues possibles.

Un agent doit être **rationnel** et cherche donc à prendre des décisions qui conduiront aux issues qu'il préfère. Un point fondamental est que l'issue de l'interaction ne dépend seulement de ce que fait un agent mais aussi de ce que font les autres. On fait alors face à un problème de circularité pour choisir mon comportement j'essaie de deviner ce que vont faire les autres, et les autres font de même.

Définition1.2.1 La théorie des jeux permet une analyse formelle des problèmes posés par l'interaction stratégique d'un groupe d'agents rationnels poursuivant des buts qui leurs sont propres.

Exemple1.2.1

Deux personnes marchent dans la rue au milieu du même trottoir mais dans des sens opposés ; si bien qu'elles vont se heurter si elles ne dévient pas de leurs trajectoires. Leur but est de ne pas se heurter. Pour cela chacune doit décider de dévier légèrement vers la droite (sa droite) ou vers la gauche (sa gauche). Le trottoir n'étant pas assez large et si l'une des deux personnes reste au milieu, les deux personnes se heurtent. Si les deux personnes dévient vers leurs gauches respectives ou leurs droites respectives elles ne se heurtent pas donc elles ont atteint leur objectif si l'une dévie vers sa gauche et l'autre vers sa droite elles se heurtent et donc dévier à gauche ou à droite n'est pas en soi une bonne ou mauvaise décision mais elle dépend de ce que décidera l'autre.

1.3 Exemples d'application

- ➢ Jeux de sociétés (Echecs, Dames, Bridges…).
- ➢ Traitement d'images et vision par ordinateur.
- ➢ Situations économiques, politiques ou sociales : Dois-je travailler ou faire semblant ? Enchères et votes, Stratégies militaires, Partages des ressources / Marchandages.
- ➢ Optimisation du routage réseaux (détection et identification des situations d'équilibres).
- ➢ Sécurité réseaux (l'administration et l'intrus deux joueurs à somme nulle).
- ➢ Réseaux de communications « réseaux de capteurs ».

« ***La théorie des jeux est donc une boite à outils, en même temps qu'un mode opératoire, une puissante méthodologie*** »

1.4 Questions et mise en garde sur la Théorie des jeux :

Un jeu est un modèle d'interaction stratégique. Le mot « Jeu » vient du fait que la plus part des jeux de société peuvent être considérés comme étant des interactions stratégiques. La théorie des jeux peut être définie comme l'étude mathématique ou bien formelle de tels modèles d'interactions stratégiques.

Les questions principales sont de plusieurs ordres :

- Comment modéliser mathématiquement des interactions « réelles » ?
- Que peut-on dire de ces modèles ? Quels sont les bons concepts de « Solutions » et sous quelles hypothèses ces solutions possèdent t'elles de bonnes propriétés (existence, unicité, etc.) ?
- Discussion de la pertinence de ces concepts mathématiques dans la vie réelle ?

Etant donné qu'il s'agit d'un cours de mathématique c'est surtout la deuxième question qui nous intéressera le plus.

Mise en garde :

La théorie des jeux étudie les modèles d'interactions stratégiques. Comme dans un modèle on simplifie la situation qu'on cherche à étudier pour qu'elle devienne analysable, cette simplification peut être excessive. De plus nous serons toujours amenés à faire des hypothèses sur les agents à savoir qu'ils sont toujours rationnels et qu'ils connaissent les préférences des autres.

Si vous voulez appliquer la théorie des jeux à un modèle donné il faut se demander si votre modélisation du problème est pertinente et si de plus les hypothèses du concept que vous désirez appliquer sont réunies.

En voici quelques exemples correspondant à ce type de problème :

- Un couple qui doit aller au cinéma et décider d'un film à aller voir, sachant qu'ils préfèrent assister à la même séance et non pas les mêmes préférences sur le film, peut être considéré comme étant un jeu. Par contre une seule personne veut aller voir un film ce n'est pas un jeu (pas d'interactions) c'est plus un problème d'optimisation.
- Si l'on annonce une pénurie d'essence à laquelle vous ne croyez pas, vous serez tout de même obligé de remplir la cuve de votre voiture, non à cause de la situation mais à cause de la réaction des autres joueurs (Interaction) qui vont se presser de remplir les réservoirs de leurs voitures et donc créer par leur comportement une pénurie secondaire.
- Quand un piéton pressé traverse la rue, son utilité réussir à traverser vite et sain et sauf dépend de ses choix mais aussi de ceux des conducteurs donc c'est un problème où la théorie des jeux peut être appliquée.

Dans ce cours nous commencerons d'abord par présenter les jeux dits « sous forme normale » dans lesquelles les joueurs prennent chacun une seule décision simultanément et indépendamment les uns des autres.

1.5 Représentation Ordinale et Fonctions d'utilité

La théorie de la décision modélise le choix d'un agent face à plusieurs alternatives (stratégies). Par exemple vous avez le choix entre plusieurs livres à acheter dans une librairie et vous disposez d'une bourse pour seulement 3 livres.

Nous verrons dans ce chapitre sous quelles conditions les préférences peuvent être représentées par une fonction à valeurs réelles appelée fonction d'utilité. Parfois on peut aussi avoir le choix entre plusieurs situations où le résultat peut être aléatoire. Nous établirons aussi le cas probabiliste ou un agent se comporte comme s'il maximisait une fonction d'espérance mathématique.

1.5.1 Préférences rationnelles

Soit X un ensemble d'alternatives, on définit une relation de préférence faible sur X notée ≥, toute relation binaire sur X vérifiant certaines propriétés :

- $x \geq y$ signifie que l'agent préfère faiblement l'alternative x à y. On écrira que $x \ngeq y$ pour dire que x n'est pas faiblement préférée à y (ce qui n'implique pas que y est faiblement préférée à x).

A partir d'une relation de préférence on pourra définir deux concepts :

- On dira que $x \approx y \; ssi \; x \geq y \; et \; y \geq x$.
- On dira que $x > y \; ssi \; x \geq y \; et \; y \ngeq x$.

$x \approx y$ va s'interpréter comme étant l'agent est indifférent entre les alternatives $x \; et \; y$.

Une relation de préférence faible doit vérifier certains axiomes pour être considérée comme étant **rationnelle** :

- **Complétude** : pour tout couple (x, y) au moins l'une des deux propositions doit être vérifiée $x \geq y \; ou \; bien \; y \geq x$ (deux alternatives sont toujours comparables).
- **Transitivité :** pour tout $x, y \,, z \; si \; x \geq y \; et \; y \geq z \; alors \; x \geq z$.

1.5.2 Représentation ordinale des fonctions rationnelles

Supposons que pour comparer les alternatives sur X l'agent dispose d'une fonction u à variables réelles telle que $x \geq_u y$ si et seulement $u(x) \geq u(y)$. On pourrait interpréter $u(x)$ comme étant l'utilité de l'agent dans l'alternative x.

Proposition1.5.2.1

Soit une fonction $u: X \to R$. Alors $\geq_u$ est une relation de préférence rationnelle.

Preuve : la loi ≥ est une loi d'ordre complet sur le corps réel.

La réciproque est aussi vraie si X est dénombrable :

Théorème1.5.2.1 supposons que X est un ensemble dénombrable, et soit ≥ une relation de préférence faible sur X. Alors il existe une fonction d'utilité u telle $\geq_u$ coïncide avec ≥ si cette dernière est rationnelle.

Preuve.

Rappelons qu'un ensemble X est dénombrable si on peut définir une fonction bijective φ: N→X où N est l'ensemble des entiers naturels.

On va faire un raisonnement par récurrence sur le cardinal de l'ensemble X :

Si le cardinal de X noté Card X est égal à 1 et ≥ une relation de préférence rationnelle définie sur X, on prend alors tout simplement μ:X={x}→R tel que μ(x)=0 et comme qu'il n'existe qu'un seul élément dans X, alors $\geq_\mu$ coïncidera avec la relation de préférence rationnelle ≥ de manière triviale.

On suppose que la construction est toujours possible jusqu'à l'ordre n et on le démontre à l'ordre n+1.

Donc on suppose Card X=n+1 et soit ≥ la relation de préférence rationnelle définie sur X. on pose X=$\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$. Par hypothèse de récurrence on peut définir l'application $\mu: \check{X} \to R$qui coïncide avec la relation ≥ définie sur X, où$\check{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On peut alors distinguer deux sous-ensembles de $\check{X}$:

$\overline{X} = \{x \in \check{X}: x \geq x_{n+1}\}$ et$\underline{X} = \{x \in \check{X}: x_{n+1} \geq$ x$\}$, par complétude nous avons $\overline{X} \cup \underline{X} = \check{X}$. Alors il y'a trois cas qui peuvent se présenter :

1er cas : $\overline{X} = \emptyset$ dans ce cas tous les éléments de $\check{X}$ sont moins préférés à x_{n+1}. Et donc on peut poser $\mu(x_{n+1}) = \max_{i=1,..,n} \mu(x_i) + 1$ et par construction μ ainsi défini coïncidera avec la relation ≥.

2ième cas : $\underline{X} = \emptyset$ dans ce cas tous les éléments $\check{X}$ sont mieux préférés à x_{n+1}, donc de même on peut poser $\mu(x_{n+1}) = \min_{i=1,\dots,n} \mu(x_i) - 1$.

3ième cas : $\underline{X} \neq \emptyset \; et \; \overline{X} \neq \emptyset$: on note $\bar{x}$ l'élément vérifiant $\mu(\bar{x}) = \min_{x \in \overline{X}} \mu(x)$ et $\underline{x}$ l'élément vérifiant $\mu(\underline{x}) = \max_{x \in \underline{X}} \mu(x)$, alors si $x_{n+1} \approx \overline{x}$ on prend $\mu(\bar{x}) = \mu(x_{n+1})$ de même si $x_{n+1} \approx \underline{x}$ on prend $\mu(\underline{x}) = \mu(x_{n+1})$. Sinon $\underline{x} < x_{n+1} < \overline{x}$ on prend

$\mu(x_{n+1}) = (\mu(\bar{x}) + \mu(\underline{x}))/2$, CQFD.

Exemple 1.5.2.1

Une personne a le choix entre 3 destinations pour ses vacances : la Havane, New-York et Venise. Elle préfère la Havane aux deux autres qu'elle juge équivalentes. Ses préférences entre les trois destinations peuvent être représentées par n'importe quelle fonction: $\mathrm{u}: \{\mathrm{Havane}, \mathrm{New-York}, \mathrm{Venise}\} \to \mathrm{R}$ vérifiant $\mathrm{u}(\mathrm{New-York}) = \mathrm{u}(\mathrm{Venise}) < \mathrm{u}(\mathrm{Havane})$ $par\ exemple\ u(Havane) = 2\ et\ u(New-York) = u(Venise) = 1.$

1.6 Préférence sur choix incertains

Dans la majorité des situations auxquelles on fait face à un choix, l'ensemble des stratégies ou des alternatives qui nous sont présentées dépend non seulement du choix que nous prenons mais aussi de l'environnement autours de ce choix. Par exemple si nous avons à choisir entre le tramway, le train, ou encore le bus universitaire afin d'arriver à l'heure à l'université plusieurs facteurs externes peuvent rendre notre choix bon ou mauvais (grève des trains, tramways ou bus, embouteillage, manque de places etc.), c'est pour cela qu'on introduit dans ce cas la notion de stratégie mixte c'est-à-dire qu'un joueur au lieu de choisir une stratégie$x_i\ de\ X$, il choisit une loi de probabilité $\sigma(x_i)$. En d'autres termes il tire au sort une stratégie x_i avec une probabilité $\sigma(x_i)$.

Définition 1.6.1 Soit l'ensemble $X_a = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble des stratégies d'un agent a. Une stratégie mixte de l'agent a est une distribution de probabilité

$\sigma_a: X_a \to [0,1]$ vérifiant : $\sum_{x_i \in X_a} \sigma_a(x_i) = 1.$

Lorsqu'on introduit la notion de préférence aux choix incertains ou bien comme on le verra plus tard les stratégies mixtes, les joueurs en attribuant des probabilités à leurs stratégies pures, il en sera de même pour leurs gains qui deviennent à cet effet aléatoires dans le sens où ils dépendent des probabilités affectées par tous les joueurs à leurs stratégies pures. Le calcul de la fonction d'utilité prendra alors la forme d'une fonction d'espérance. L'exemple en infra illustrera ce concept :

Exemple 1.6.1

Un père dit à son fils : je vais prendre un nombre de jetons au hasard si le nombre est pair et que tu devines que c'est pair je te donnerai deux pièces, si le nombre est impair et tu dis

« pair » alors tu me donneras une pièce, maintenant si le nombre est impair et que tu dis « pair » tu me donneras une pièce, enfin si le nombre est impair dans ma main et tu dis « impair » je te donnerai une pièce.

Quelle stratégie adoptera le fils pour prendre la meilleure décision et de même quelle stratégie adoptera le père pour économiser son argent ?

On ne peut donner une réponse déterministe à cette question, on sera obligé d'attribuer une probabilité p à l'annonce du fils pour pair et donc 1-p pour l'annonce impair et de même pour le père d'attribuer une probabilité q pour prendre un nombre de jetons pair et donc 1-q pour prendre un nombre de jetons impair.

$$u(\mathrm{fils}(p,q)) = p(2q + (-1)(1-q)) + (1-p)((1)(1-q) + q(-1))$$
$$= p(3q-1) + (1-p)(1-2q) = p(5q-2) + (1-2q)$$

$$u(\mathrm{père}(p,q)) = q((-2)p + (1-p)(1)) + (1-q)(p + (1-p)(-1)) = q(-3p + 1) + (1-q)(2p-1) = q(-5p+2) + (2p-1)$$

La fonction d'utilité dans ce cas a été déterminée en fonction d'espérance.

Avant de pouvoir appliquer les concepts de stratégies déterministes ou encore incertaines, il faut d'abord modéliser la forme d'un jeu c'est-à-dire la manière dont il va se dérouler. De façon générale un jeu peut être modélisé sous deux formes différentes :

a) **Forme normale** (appelée aussi Stratégique) qui consiste à modéliser un jeu dans lequel les joueurs jouent une seule fois chacun de manière **simultanée** ou bien indépendante.

b) **Forme extensive** qui consiste à modéliser un jeu dans lequel les joueurs jouent de manière **séquentielle**.

Dans les chapitres qui suivent nous allons plus détailler les jeux sous forme normale, ensuite nous donnerons un bref aperçu sur les jeux sous forme extensive.

Chapitre 2

Jeux sous Forme Normale et Notions de dominances

Introduction

Un jeu sous forme normale représente une interaction entre un nombre fini de joueurs rationnels, chaque joueur choisit une action et dispose d'un ensemble fini d'actions. Le choix étant simultané pour tous les joueurs. Tous les joueurs connaissent le jeu et l'objectif de chacun est de maximiser son gain. Si le jeu est à un seul joueur il devient un problème de maximisation. Dès lors que le jeu comporte plus d'un joueur, ce dernier ne contrôle que partiellement son gain qui dépendra aussi des choix des autres joueurs, et donc la notion de bonne stratégie devient ambiguë.

Ci-dessous nous donnons la définition formelle du jeu sous forme normale.

2.1 La forme normale d'un jeu

Les éléments constitutifs d'un jeu G en forme stratégique (normale) sont les suivants :

(1) $N = \{1,2,\dots,n\}$ ensemble de joueurs, on suppose que les joueurs sont en nombre fini. Un joueur quelconque est désigné par l'indice i.

(2) s_i désigne une stratégie du joueur $i \in N$. Une stratégie décrit de manière précise ce que fait un joueur.

(3) S_i est l'ensemble des stratégies du joueur $i \in N$.

(4) $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = S$ est une issue du jeu, c'est-à-dire une combinaison de stratégies à raison d'une stratégie par joueur. On désigne par S_{-i} les stratégies choisies par tous les joueurs à l'exception du joueur i (les stratégies subies par le joueur i).

(5) $u_i(s)$ une fonction d'utilité :$u_i: S \to R$ du joueur i, représente le gain du joueur i si le profil s est adopté.

(6) Chaque joueur connait les ensembles de stratégies et les fonctions d'utilités de tous les joueurs y compris les siens.

Dans le cas particulier où le jeu est à deux joueurs la forme normale peut être présentée sous forme de matrice. Les lignes représentent les actions du joueur1, les colonnes celles du joueur 2. Chaque cellule les gains sous forme d'un couple (x_1, x_2) où x_1 le gain du joueur 1 et x_2 celui du joueur2.

NB. Dans un jeu sous forme normale, les deux joueurs sont toujours supposés connaitre la matrice du jeu.

2.2 Exemples

2.2.1 Exemple « jeu de Coordination »

Deux amis veulent se rencontrer à un endroit (A) ou un endroit (B). Leurs payement sont égaux et valent 1 s'ils se rencontrent et 0 sinon. On peut alors représenter le jeu par cette matrice et c'est un jeu sous forme normale.

1/2	**A**	**B**
A	(1,1)	(0,0)
B	(0,0)	(1,1)

2.2.2 Exemple « Duopole de Cournot »

Deux firmes $E_i \ i = 1,2$ produisent une marchandise similaire de quantité $s_i \in R^+$. Le cout de la production est donné par une fonction croissante :$C_i: R^+ \to R^+$, $C_i(s_i)$ désignera le cout de production de E_i pour une quantité s_i. Cette marchandise sera vendue à un prix qui dépendra de la loi de l'offre et de la demande et qui sera donné par une fonction $P: R^+ \to R^+$ qui a pour variable la quantité totale de production $s = s_1 + s_2$.

Joueurs : E_1 et E_2.

Stratégies $s_i \in R^+, i = 1,2$.

$u_i(s_1, s_2) = P(s_1 + s_2)s_i - C_i(s_i)$

C'est un jeu qui n'est pas sous forme normale car le nombre de stratégies est non-fini.

2.3 Considérations de dominances

On peut penser qu'un joueur rationnel ne choisira jamais une stratégie s'il dispose d'une autre stratégie lui assurant un gain supérieur et ce quel que soit le choix des autres joueurs. Si Chaque joueur possède une stratégie dominante alors il va la jouer et le jeu sera fini.

Exemple2.3.1. Le dilemme du prisonnier

Un jeu très célèbre : on suppose que deux suspects sont interrogés par la police, pour une action délictueuse. La police ne possède pas de preuves suffisantes pour la condamnation des prévenus. L'aveu donc d'au moins l'un d'eux est indispensable. La police propose à chacun d'eux d'avouer, dans quel cas il sera relâché. S'il n'avoue pas et l'autre le fait il aura une peine de 10 ans, s'ils avouent tous les deux ils auront une peine de 5 ans chacun, enfin si aucun des deux n'avoue ils auront tout de même une peine d'un an chacun pour un délit mineur.

La matrice de gains sous forme normale est alors la suivante :

Suspect 2

Suspect1

1 \ 2	Avoue	N'avoue pas
Avoue	(-5,-5)	(0,-10)
N'avoue pas	(-10,0)	(-1,-1)

On remarque que pour les deux joueurs la stratégie qui conduit à une peine moins lourde est « Avoue » indépendamment de ce que décidera l'autre. Donc un équilibre prévisible est (Avoue, Avoue). Cette stratégie est appelée stratégie **strictement dominante**.

Alors comment peut-on définir une stratégie dominante ?

Définition 2.3.1

Dans un jeu en forme stratégique on dit qu'une stratégie s'_i est dominante pour un joueur i si et seulement si $\forall\, s_i \in S_i - \{s'_i\} \quad u_i\,(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \;\; \forall\, s_{-i}$

Si dans un jeu tous les joueurs disposent chacun d'une stratégie dominante et qu'il adopte cette stratégie, le résultat est appelé équilibre en stratégie dominante (Exemple2.3.1 : le profil (Avoue, Avoue)). En outre, trouver des stratégies dominantes pour chaque joueur n'est pas toujours possible, comme on pourra le constater dans l'exemple ci-dessous :

Exemple 2.3.2

Soit la matrice de jeu suivante :

1 \ 2	G	M	D
H	(4,3)	(5,1)	(6,2)
M	(2,1)	(8,4)	(3,6)
B	(3,0)	(9,6)	(2,8)

On remarque que dans ce jeu il n'existe pas de stratégie strictement dominante pour le joueur 1 ni pour le joueur 2. Cependant on pourra déterminer un équilibre par **le processus de dominances successives :**

a) Equilibre Itératif en stratégies strictement dominantes.

Définition2.3.2

Dans un jeu en forme stratégique, on dit qu'une stratégie $\hat{s}_i$ est strictement (fortement) dominée par la stratégie $s'_i \in S_i$, $\hat{s}_i \neq s'_i$ si on a $u(s'_i, s_{-i}) > u(\hat{s}_i, s_{-i}) \;\forall\, s_{-i}$.

(Si l'inégalité est large c'est-à-dire : $u(s'_i, s_{-i}) \geq u(\hat{s}_i, s_{-i}) \;\forall\, s_{-i}$ et $\exists\, s*_{-i}$ tel que $u(s'_i, s*_{-i}) > u(\hat{s}_i, s*_{-i})$ on dira que la stratégie $\hat{s}_i$ est faiblement dominée par la stratégie s'_i.

Si on applique cette définition dans l'exemple précédent nous allons éliminer pour le joueur 2 la stratégie M car elle est fortement dominée par la stratégie D. d'où le tableau réduit suivant :

Ensuite on pourra éliminer la stratégie M pour le joueur 1 car dominée par H d'où le tableau

1 \ 2	G	D
H	(4,3)	(6,2)
B	(3,0)	(2,8)
M	(2,1)	(3,6)
B	(3,0)	(2,8)

La stratégie dominante pour le joueur 1 est alors H on obtient alors le tableau final

1 \ 2	G	D
H	(4,3)	(6,2)

Et donc le couple (H,G) est un équilibre possible de ce jeu.

b) Inconvénients de l'équilibre itératif en stratégies strictement dominantes(ESSD) :

1) L'emploi du processus de dominances successives ne conduit pas nécessairement à une solution unique, donc le jeu est résoluble par cette méthode si on obtient un unique profil en éliminant successivement les stratégies strictement dominées.

2) L'ordre d'élimination n'a pas d'importance si les stratégies éliminées sont strictement dominées. Les stratégies qui subsistent après élimination sont les mêmes quelle que soit la séquence suivie.

3) On peut obtenir des profils différents lorsqu'on choisit des ordres différents d'élimination des stratégies faiblement dominées, comme le montre l'exemple :

Exemple2.3.3

1 \ 2	**L**	**C**	**R**
T	(1,2)	(2,3)	(0,3)
M	(2,2)	(2,1)	(3,2)
B	(2,1)	(0,0)	(1,0)

Ordre d'élimination T,R,B,C donne l'équilibre (M,L) de résultat (2,2).

Ordre d'élimination B,L,C,T donne l'équilibre (M,R) de résultat (3,2).

4) La résolution d'un jeu non coopératif par application successives de la dominance stricte**,** semble donc fournir une solution satisfaisante quand elle conduit à une solution unique. Pourtant la solution à laquelle conduit ce processus ne s'impose pas toujours de manière naturelle. En effet considérons cet exemple :

Exemple 2.3.4

	G	**D**
H	(8,10)	(-100,9)
B	(7,6)	(6,5)

Pour le joueur 2, D est strictement dominée par G donc à éliminer de même pour le joueur 1, sachant que le joueur 2 va jouer G il va forcément choisir H mais il peut penser ainsi si toutefois le joueur 2 se trompe ou parce que la différence n'est pas très importante il va jouer D « je perdrai gros en jouant H alors je vais plutôt jouer B » donc l'équilibre en stratégies dominantes risque de ne pas avoir lieu dans ce cas.

2.4 Exercices sur l'équilibre en dominance

2.4.1 « le jeu des élections »

Soit une élection entre deux candidats. On suppose que les électeurs sont uniformément distribués sur le segment [0,1], et qu'ils votent pour le candidat le plus proche d'eux sur ce segment. On suppose par ailleurs que les candidats n'ont que (m+1) positions possibles (avec m pair) régulièrement distribuées sur le segment [0,1]. Ce jeu est-il solvable par le processus d'élimination successive des stratégies strictement dominées, et dans ce cas quelle sera la solution ?

2.4.2 « le jugement majoritaire »

n juges doivent attribuer une note à un patineur artistique. Chaque juge i choisit une note $s_i \in \{0,1,\dots,10\}$, et la note finale $x(s_1, s_2, \dots, s_n)$ du patineur dépend des notes de l'ensemble des juges. Chaque juge i donne également un avis $a_i \in \{0,1,\dots,10\}$. L'utilité d'un juge i est définie par :

$$g_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = -|a_i - x(s_1, s_2, \dots, s_n)|.$$

1) On suppose que dans cette question $x(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sum_{i=1}^{n} s_i / n$. Montrer qu'il existe des valeurs de $n, a_1, a_2, \dots, a_n$ pour les quelles aucun joueur n'a de stratégies dominantes.

2) On suppose maintenant que n est impair et que $x(s_1, s_2, \dots, s_n)$ représente la médiane des notes s_i. Montrer dans ce cas qu'il existe un équilibre en stratégies dominantes.

2.5 Indications de Solutions :

« Le jeu des élections »

Le jeu peut être représenté comme suit :

La stratégie 0 est strictement dominée par la stratégie $\frac{1}{m}$, de même cette dernière est dominée par $\frac{2}{m}$ et ainsi de suite le candidat de gauche va se placer au milieu du segment de même pour le candidat de droite du segment la stratégie $1 = \frac{m}{m}$ est dominée par la stratégie $\frac{m-1}{m}$ de telle sorte à ce que le candidat va aussi se placer au milieu du segment donc un équilibre en stratégies strictement dominantes est le profil de jeu$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

« Le jugement majoritaire »

1) On prend comme contre-exemple n=2 et $a_1 = a_2 = 5$ dans ce cas :

$g_1(s_1, s_2) = |5 - (s_1 + s_2)/2|$. On remarque que la meilleure réponse d'une stratégie s_2 du joueur 2 est de prendre la stratégie $s_1 = 10 - s_2$ du joueur 1 donc impossible de trouver une stratégie dominante pour le joueur 1 qui maximise son gain quelle que soit la stratégie s_2 jouée par le joueur 2.

2) Dans ce cas on démontre que pour chaque joueur i la stratégie qui consiste à attribuer au patineur la note a_i est dominante c'est-à-dire $g_i(a_i, a_{-i}) \geq g_i(s_i, a_{-i}) \quad \forall s_i \in \{0,1, \dots ,10\} \; et \; \forall a_{-i}$ le profil de notes choisies par les autres juges. Ce qui revient à démontrer que si $\mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n})$ est la médiane des éléments $s_1, \dots , s_n$ alors

$-|a_i - \mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots s_{i-1}, a_i \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n})| \geq -|a_i - \mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n})| \; \forall \; s_i$.

On peut distinguer deux cas :

$a_i \geq \mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots s_{i-1}, a_i \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n})$ ou bien $a_i < \mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots s_{i-1}, a_i \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n})$:

1er cas : $a_i \geq \mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots s_{i-1}, a_i \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n})$

a)

$s_i < a_i$ alors: $\mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots s_{i-1}, a_i \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n}) \geq \mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n})$ donc :

$0 \leq a_i - \mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots s_{i-1}, a_i \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n}) \leq a_i - \mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n}) \Rightarrow -|a_i - \mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots s_{i-1}, a_i \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n})| \geq -|a_i - \mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n})|$ donc $g_i(a_i, a_{-i}) \geq g_i(s_i, a_{-i})$

b)

$s_i > a_i \quad \mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots s_{i-1}, a_i \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n}) = \mathrm{x}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \dots , \mathrm{s}_\mathrm{n})$ et donc dans ce cas $g_i(a_i, a_{-i}) = g_i(s_i, a_{-i})$.

2ième cas : même raisonnement en dual.

2.6 TP1 : Outils en Stratégies Pures

L'objectif de cet ensemble de travaux dirigés est de développer un software qui permettra aux étudiants dans la spécialité Informatique Visuelle d'exploiter les outils de la théorie des jeux, afin de construire, et de tester l'efficacité des modèles proposés en cours.

Le premier TP proposé est présenté comme suit :

Résumé

Dans ce TP nous allons commencer par développer toutes les notions vues en cours en stratégies pures dans un jeu à 2 joueurs et plus, à savoir la détermination d'une stratégie strictement dominante, stratégie faiblement dominante, équilibres par élimination successives des stratégies fortement dominantes et faiblement dominantes.

L'objectif est de développer des algorithmes efficaces avec une complexité algorithmique moindre, et une interface simple et interactive pour l'utilisateur où il y'aura un guide expliquant les procédures.

Il sera aussi demandé de rajouter des exemples célèbres de jeux avec des interfaces explicites où il sera question de tester les notions du chapitre 2.

Langage de programmation

Il est préférable de travailler avec le langage Python, mais le C++ est aussi accepté.

Chapitre 3

Equilibre de Nash en Stratégies pures et Mixtes (Forme Normale)

3.1 Introduction

Le processus de dominations successives vu dans le chapitre qui précède ne conduit pas nécessairement à un résultat. Si aucune stratégie n'est dominée aucune élimination de stratégies ne peut avoir lieu et donc aucune issue du jeu ne peut être prévisible. Il est nécessaire alors de disposer d'une solution où les conditions d'existence sont plus faibles.

Dans les deux exemples qui vont suivre nous remarquons qu'il n'existe pas de stratégie dominante / dominée pour aucun des deux joueurs.

Exemple 3.1.1

1 \ 2	G	D
H	(0,0)	(2,2)
B	(10,11)	(-1,0)

Exemple 3.1.2

1/2	L	M	R
T	(0,6)	(6,0)	(4,3)
M	(6,0)	(0,6)	(4,3)
B	(3,3)	(3,3)	(5,5)

Toutefois la paire (B,G) semble donner un équilibre dans le premier exemple et la paire (B,R) dans le second. Ce qu'on remarque est que pour que chacune de ces deux paires de stratégies, aucun des deux joueurs n'a intérêt de choisir une autre stratégie ou bien dévier, car son gain sera inévitablement diminué. Cette manière de concevoir une issue du jeu est au fait l'un des concepts fondamentaux de la théorie des jeux à savoir l'équilibre de Nash.

Donc ces deux paires constituent des équilibres de Nash : chaque joueur maximise ses gains compte tenu de l'action supposée de l'autre.

Autrement dit supposons l'existence d'une norme (exemple rouler à droite par un conducteur) qui soit connaissance commune, de telle sorte que chaque joueur sait ce que vont faire les autres et surtout qui n'a pas intérêt à dévier individuellement du comportement dicté par la norme.

L'équilibre de Nash est donc un profil de stratégies (c'est-à-dire la donnée d'une stratégie d'équilibre pour chaque joueur), dans lequel chaque stratégie est une meilleure réponse à tout profil de stratégies jouées.

On remarque que dans l'exemple 3.1.2 la paire (H, d) peut aussi représenter un équilibre du jeu sous les considérations précédentes, alors comment définir cet équilibre mathématiquement de manière précise ?

3.2 Equilibre de Nash en stratégies pures

Définition3.2.1

Un profil de stratégie $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*)$ est un équilibre de Nash si et seulement si l'inégalité suivante est satisfaite pour chaque joueur $i = 1, \dots, n$

$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$ pour tout $s_i \in S_i$.

Autrement dit si le joueur $\boldsymbol{i}$ anticipe correctement que les autres participants au jeu vont choisir les stratégies associées s_{-i}^* , il maximise son gain en choisissant au sein de l'ensemble de ses propres stratégies S_i la stratégie s_i^*

Cette propriété de stabilité implique que le joueur ne veut pas changer de stratégie, la solution ainsi obtenue est un équilibre.

Comment déterminer les équilibres de Nash?

Pour répondre à cette question nous avons besoin de définir la notion de fonction de meilleure réponse :

3.2.1 Fonction de meilleure réponse

Définition3.2.1.2 : la fonction de meilleure réponse du joueur i est la fonction R_i qui associe à chaque combinaison de stratégies des autres joueurs s_{-i} les stratégies du joueur i qui maximisent son utilité.

Elle peut être définie formellement par l'équation suivante :

$$R_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \; \forall s'_i \in S_i\} = arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

$R_i(s_{-i})$ peut-être une application ou une correspondance cela dépendra de S_i l'ensemble des stratégies du joueur i et aussi de la fonction gain u_i (on étudiera l'existence plus loin).

La fonction de la meilleure réponse va nous permettre de déterminer l'équilibre de Nash. En effet :

Chaque joueur $i = 1, \dots, n$, et selon l'ensemble de stratégies s_{-i} que peuvent prendre les autres joueurs va choisir la meilleure réponse qu'il va donner afin de maximiser son gain. Si les ensembles des stratégies meilleures réponses ainsi construits ont des profils d'intersection, ces profils seront les équilibres de Nash.

Exemple3.2.1.1

1 2	B_1	B_2	B_3
A_1	**(6,7)**	**(9,6)**	**(0,6)**
A_2	**(5,2)**	**(8,2)**	**(4,5)**
A_3	**(7,7)**	**(7,8)**	**(0,9)**

Pour le joueur 1 les meilleures réponses sont déterminés par rapport aux stratégies du joueur 2 :

Si le joueur 2 choisit la stratégie $\boldsymbol{B_1}$ c'est $\boldsymbol{R_1(B_1) = A_3}$ est donc (A_3, B_1) est un profil de meilleure réponse

De même les autres profils de meilleure réponse sont $\boldsymbol{R_1(B_2)} = (A_1, B_2)$ et

$\boldsymbol{R_1(B_3)} = (A_2, B_3)$ pour les autres choix.

De même on obtient pour le joueur 2 les meilleures réponses selon le choix du joueur1 sont $\boldsymbol{R_2(A_1)} = (A_1, B_1)$, $\boldsymbol{R_2(A_2)} = (A_2, B_3)$ et $\boldsymbol{R_2(A_3)} = (A_3, B_3)$.

Donc le point d'intersection, autrement dit l'équilibre de Nash dans cet exemple est le profil(A_2, B_3).

Exemple3.2.1.2 « Jeu du carrefour »

Deux conducteurs et pas de code de la route, les deux voitures arrivent à la même vitesse, deux solutions pour chaque voiture passer (P) ou stopper (S), la matrice associée au jeu est la suivante :

1/2	**P**	**S**
P	(-1,-1)	(2,1)
S	(1,2)	(0,0)

Ce jeu possède deux équilibres de Nash (P,S) et (S,P) lequel des deux choisir ?(le choix se fera inévitablement selon la norme du code de la route)

Exemple3.2.1.3 « Pierre, Feuille, Ciseaux »

1/2	Pierre	Feuille	Ciseaux
Pierre	**(0,0)**	**(-1,1)**	**(1,-1)**
Feuille	**(1,-1)**	**(0,0)**	**(-1,1)**
Ciseaux	**(-1,1)**	**(1,-1)**	**(0,0)**

Ce jeu ne possède pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.

Exemple3.2.1.4 « la bataille du couple »

Un couple discute les possibilités de sortie pour une soirée, il y'a deux possibilités le Théâtre ou le Foot, les chiffres sont à titre indicatif.

Femme/Homme	Théâtre	Foot
Théâtre	**(3 ,1)**	**(0,0)**
Foot	**(0,0)**	**(1, 3)**

On remarque alors que dans ce jeu Il existe deux équilibres de Nash : (Théâtre, Théâtre) et (Foot, Foot). Dans ces cas le choix d'une norme ou d'une institution peut aider à déterminer un équilibre particulier.

Propositions 3.2.1

1) Si un jeu est solvable par éliminations successives des stratégies strictement dominées alors, le profil (le vecteur de stratégies qui en résulte) est le seul équilibre de Nash du jeu initial.

2) Si un jeu est solvable par éliminations successives de stratégies faiblement dominées alors, les profils (les vecteurs de stratégies) qui en résultent sont des équilibres de Nash du jeu initial.

Remarque3.2.1

L'inverse de 2) n'est pas toujours vrai, l'élimination de stratégies faiblement dominées peut écarter un équilibre de Nash comme le montre l'exemple suivant :

Exemple3.2.5

1/2	**G**	**D**
H	(10,0)	(5,2)
B	(10,11)	(2,0)

(H,D) est une issue du jeu par élimination de stratégie faiblement dominées mais un deuxième équilibre de Nash est éliminé il s'agit du profil (B,G) (on verra plus tard qu'il est Optimal au sens de Pareto) .

3.2.2 Propriétés

- Un jeu en stratégies pures peut posséder plusieurs équilibres de Nash comme il peut n'en posséder aucun (voir exemples en supra). Dans ce dernier cas comment alors va-t-on choisir un équilibre particulier ?
- Deux équilibres de Nash $s *= (s_i *, s_{-i} *)$ $et\, s' *= (s'_i *, s'_{-i} *)$ sont interchangeables si et seulement si $(s_i *, s'_{-i} *)$ $et\, s' *= (s'_i *, s_{-i} *)$ sont aussi des équilibres de Nash.
- Deux équilibres de Nash sont équivalents s'ils sont la même fonction d'utilité.
- Parmi les motivations justifiant la définition de l'équilibre de Nash, supposons qu'avant de jouer les joueurs tentent et arrivent à harmoniser leurs stratégies. Ainsi chacun des joueurs s'engage à réaliser une action donnée. Cela peut être par exemple la clarification de l'apport de chaque actionnaire à la création en commun d'une entreprise. Tous les paiements issus de cette activité commune sont décrits dans la matrice de paiements, en particulier si l'un des joueurs venait à ne pas respecter son engagement aucune pénalité supplémentaire n'existe. Pour que cet engagement soit crédible, il est nécessaire qu'aucun joueur ne puisse en changeant unilatéralement sa stratégie augmenter son niveau d'utilité. Dans ces conditions, il est possible de prédire la solution du jeu, une telle prédiction est dite stratégiquement stable ou auto-imposé (Self Enforcing Agreement) et est précisément l'équilibre de Nash.

3.3 Optimum de Pareto

Quand un profil de stratégie s est au moins aussi bon qu'un autre profil de stratégie s' pour presque tous les joueurs et strictement meilleur pour un joueur i, on pourra alors penser que le profil s est meilleur que le profil s' . On dira alors que le profil s domine au sens de Pareto le profil s'.

De manière mathématique cela peut être défini comme suit :

Définition3.3.1 : s domine s'au sens de pareto si et seulement si:

$$\forall\ i \quad u_i(s) \geq u_i(s'),$$

$$\exists j :\ u_j(s) > u_j(s')\ .$$

Définition 3.3.2 : Un profil s* est un optimum de Pareto s'il n'existe pas de profil le dominant au sens de Pareto.

Autrement dit : s* est un optimum de Pareto si aucun des joueurs ne peut obtenir un paiement plus élevé sans que le gain d'un autre joueur ne diminue.

Remarques 3.3.1

- Dans le dilemme du prisonnier le profil (ne pas avouer, ne pas avouer) domine au sens de Pareto le profil (avouer, avouer). Montrer que dans le dilemme du Prisonnier le seul profil qui ne soit pas Pareto dominant est l'équilibre de Nash.
- Supposons que nous ayons plusieurs équilibres de Nash on peut choisir celui qui est un optimum de Pareto. Dans l'Exemple 3.2.5 : le profil (B,G) est un équilibre de Nash et un Optimum au sens de Pareto donc il sera préférable au deuxième équilibre (H, D) si on ne prend pas en compte le niveau de sécurité qu'on va présenter dans la section suivante.

Exemple3.3.1

Choix simultané d'un chiffre, chaque joueur doit choisir un chiffre entre 1 et 10. Si le nombre sélectionné par les deux joueurs est le même, chaque joueur reçoit une somme d'argent multipliée par 10 fois ce nombre. Si les chiffres ne sont pas identiques les joueurs ne reçoivent rien. Combien d'équilibres de Nash possède ce jeu et combien sont-ils Pareto dominants ?

Tous les profils de type (a, a) sont des équilibres de Nash le seul d'entre eux qui est optimum de Pareto est l'équilibre (10,10) dont le gain est de (100,100).

a) Optimum de Pareto versus Niveau de Sécurité

On définit le minimum de sécurité d'une stratégie s_i pour le joueur i comme étant le gain minimum que peut apporter cette stratégie quel que soit le choix des autres joueurs.

$$\min_{s_{-i}} u_i\,(s_i, s_{-i})$$

On définit le niveau de sécurité d'un joueur i comme le niveau de sécurité maximal des stratégies de i

.

Exemple 3.3.2

1/2	U	V
U	**(9,9)**	**(0,8)**
V	**(8,0)**	**(7,7)**

On remarque que l'équilibre Pareto dominant est (U,U), cependant il est de niveau de sécurité égal à 0 pour les deux joueurs. Or la stratégie V est d'un niveau de sécurité meilleur égal à 7 pour chacun et donc elle peut donner l'équilibre du jeu qui sera dans ce cas (V, V).

b) Points focaux

- Le problème posé par la multiplicité d'équilibres de Nash est un problème de coordination.
- Pour certains jeux, certains équilibres de Nash semblent plus évidents que d'autres pour les joueurs. Cela est dû à certaines conventions prédéfinies. Ces équilibres de Nash obtenus à partir de ces conventions sont appelés points focaux.

Dans la bataille du couple (Théâtre, Théâtre) est un point focal.

3.4 Exercices d'application

Exercice3.4.1

Supposons qu'il n'existe que deux firmes dans le monde construisant des ordinateurs, Dell et Compaq. Avant de produire leurs ordinateurs ces firmes doivent décider de rendre leurs machines compatibles ou de ne pas le faire, et cela en adoptant le même système d'exploitation ou pas. Nous supposons qu'elles ont le choix entre deux systèmes d'exploitation Linux et Windows. Clairement la compatibilité bénéficie aux utilisateurs mais aussi aux deux constructeurs. Cependant pour des raisons liées à l'histoire, chacune préfèrerait que ça soit l'autre qui fasse l'effort de s'adapter. Par exemple, nous considérons que DELL préfère le système Windows et Compaq Linux.

Pour décrire ce jeu stratégique nous supposons que Dell a une avance technologique sur Compaq et que c'est elle qui annonce en premier le système d'exploitation qu'elle a retenu pour ses ordinateurs (dans une conférence de presse tenu en janvier par exemple). Compaq ayant pris acte de cette annonce doit à son tour faire une conférence de presse (en Mars), pour s'engager pour un système.

Une fois que les deux firmes se sont engagées pour un système la production va commencer les profits de chaque firme sont les suivants : si les deux ont choisi Windows, le résultat s'interprète comme la victoire de Dell car son système devient le standard du marché. Si les deux firmes choisissent linux c'est Compaq le vainqueur. Toute fois quel que soit le système sélectionné l'important est de faire le même choix car la compatibilité est plus rentable. De manière concrète si les deux choisissent Windows, Dell gagne 600 et Compaq 200, sinon si le système choisi est linux c'est Compaq qui gagne 600 et Dell 200, enfin si elles ne choisissent pas le même système chacune ne gagne que 100.

1) Ce jeu est-il à informations complètes ? est-il simultané ?
2) Décrire ce jeu sous forme normale.
3) Ce jeu admet-il des équilibres de Nash ?les Déterminer dans ce cas.

Exercice 3.4.2

Le jeu se joue entre André et Betsy avec l'aide d'un meneur de jeu celui-ci tire à pile ou face une pièce biaisée qui tombe sur face 8 fois sur 10. Ce biais est connu des joueurs.

Le meneur de jeu est isolé pour effectuer son tirage et n'informe qu'André du résultat. André annonce ensuite à Betsy « pile » ou « face » et peut ne pas dire la vérité. Betsy doit alors deviner et annoncer le vrai résultat du tirage au sort.

Les utilités de joueurs sont définies de la manière suivante :

- Betsy reçoit 10 si elle devine juste 0 sinon.
- Le gain d'André est la somme des deux montants :

Il reçoit 20 si Betsy a annoncé face et 0 sinon.

Il reçoit 10 s'il dit la vérité et 0 sinon.

1) Représenter ce jeu sous forme stratégique.

2) Vérifier si ce jeu possède des équilibres de Nash en stratégies pures et dans ce cas les déterminer.

Solution de l'exercice 3.4.1

Ce jeu est à information complète mais pas simultané.

On pourra décrire ce jeu sous une forme normale en dépit du fait qu'il est sous forme extensive (définie dans le chapitre1). L'idée principale est d'inclure des stratégies sous forme de plan d'actions pour chaque choix dans une situation donnée. Dans ce cas le joueur Dell possède seulement deux stratégies : choisir Windows ou bien Linux cependant Compaq selon le choix de Dell aura un plan d'actions complet. C'est-à-dire une stratégie de Compaq sera du type : « si Dell choisit Linux on choisit Windows sinon on choisit linux » par exemple. Donc Dell disposera de quatre stratégies. La matrice de jeu sera donc :

Dell/Compaq	**Windows/Windows, Linux/Linux) (A)**	**Windows/Windows, Windows/Linux (B)**	**Linux/Windows, Windows/Linux(C)**	**Linux/Windows, Linux/Linux (D)**
Windows(W)	(600,200)	(600,200)	(100,100)	(100,100)
Linux(L)	(200,600)	(100,100)	(100,100)	(200,600)

Pour calculer le gain, nous avons appliqué le principe de l'espérance mathématique :

$u_1(\mathrm{W}, \mathrm{A}) = u_1$(W, (Windows/Windows, Linux/Linux))=600 car dans ce cas Compaq va suivre Dell.

Et de même on a u_2(W, A)= 200.

Les équilibres de Nash de ce jeu sont déterminés par l'intersection des ensembles de meilleures réponses :

$BR1 = \{(W, A), (W, B), (W, C), (L, C), (L, D)\} \cap BR2 =$
$\{(W, A), (W, B), (L, A), (L, D)\} = \{(W, A), (W, B), (L, D)\}$= ensemble des équilibres de Nash. On en déduit que les seuls équilibres c'est là lorsqu'ils se mettent d'accord sur l'un des deux systèmes d'exploitation.

Solution de l'exercice 3.4.2

De même que l'exercice précédent une représentation particulière des stratégies va ramener le jeu à une forme normale:

Donc le joueur 1 « André » dispose de 4 stratégies car le mensonge ou la vérité peuvent être partiels:

A_1:(face/face, pile/pile) il dit la vérité c'est-à-dire sachant face c'est face sachant pile c'est pile.

A_2: (pile/face, pile/pile) il ne ment que sur le cas face.

A_3: (face/face, face/pile) il ne ment que sur pile.

A_4: (pile/face, face/pile) il ment.

De même pour Betsy le croire ne pas le croire, le croire partiellement.

Donc 4 stratégies:

B_1: (face/face, pile/pile) le croire complétement s'il dit pile c'est pile s'il dit face c'est face.

B_2: (pile/face, pile/pile) dire toujours pile.

B_3 :(face/face, face/pile) dire toujours face.

B_4:(pile/face, face/pile) ne pas le croire du-tout ; le contredire.

On calcule les gains de chacun comme dans l'exemple qui suit:

$u_1(A_1, B_1) = \frac{8}{10}(10 + 20) + \frac{2}{10}(10) = 26$

$u_2\,(A_1, B_1) = \frac{8}{10}(10) + \frac{2}{10}(10) = 10$

D'où le tableau:

1 /2	B1	B2	B3	B4
A1	**(26,10)**	(10,2)	(30,8)	(14,0)
A2	(2,2)	(2,2)	(22,8)	**(22,8)**
A3	(24,8)	(8,0)	(28,8)	(8,2)
A4	(4,0)	(0,10)	(20,8)	(16,10)

Les ensembles de meilleures réponses sont :

$$\boldsymbol{BR1} = \{(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{B_1}), (\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{B_2}), (\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{B_3}), (\boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{B_4})\}$$

$$\boldsymbol{BR1} = \{(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{B_1}), (\boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{B_3}), (\boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{B_4}), (\boldsymbol{A_3}, \boldsymbol{B_1}), (\boldsymbol{A_3}, \boldsymbol{B_3}), (\boldsymbol{A_4}, \boldsymbol{B_2}), (\boldsymbol{A_4}, \boldsymbol{B_4})\}$$

Les équilibres de Nash**:** $(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{B_1})$, $(\boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{B_4})$**.**

Le **Pareto dominant** est : $(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{B_1})$: « dire la vérité pour l'un et y croire pour l'autre. »

L'autre équilibre revient à dire elle croit qu'il ment toujours et lui sait qu'elle ne lui fait pas confiance donc il va toujours dire pile pour maximiser son gain mais il s'agit d'un équilibre fragile.

3.5 Extension mixte d'un jeu

Un des problèmes inhérents au concept de l'équilibre de Nash en stratégies pures est que pour certains jeux, de tels équilibres n'existent pas comme par exemple les jeux de Pierre, Ciseaux et Feuille (vu dans la section 3.2).

Un autre exemple plus simple est celui du penalty (Tire au but) : Lors d'une séance de tir au but, le tireur (J1) doit décider de tirer à gauche ou à droite et le gardien (J2) doit décider de sauter à gauche ou à droite. Les deux joueurs sont supposés excellents : le tireur cadre toujours son tir et le gardien arrête toujours le tir, s'il part dans la bonne direction. Evidemment le tireur cherche à maximiser sa chance d'avoir un but et donc il préfère marquer et le gardien veut la minimiser donc préfère l'en empêcher.

On peut modéliser une telle séance de tir au but par la fonction d'utilité et le jeu matriciel suivants :

Exemple3.5.1 (Tire au But)

1/2	Sg	Sd
Tg	**(0,1)**	**(1,0)**
Td	**(1,0)**	**(0,1)**

Dans les jeux cités en supra et de manière générale il n'existe pas d'équilibres de Nash pour la raison suivante : la notion d'équilibre de Nash en stratégies pures suppose que chaque joueur connait les stratégies que vont choisir les autres joueurs et va choisir celle qui l'arrangerait le mieux en fonction de ces dernières. Or nous sommes dans des jeux ou chacun a intérêt à cacher sa stratégie ou à bluffer.

Les stratégies mixtes ou aléatoires vont nous permettre de représenter ces possibilités de bluff, ou dans un langage mathématique de jouer aléatoirement.

Nous commençons par définir le concept de stratégie mixte ; soit $G(I,(S_i)_i,(g_i)_i)$, un jeu sous forme normale

Définition3.5. 1

Une stratégie mixte pour le joueur i est une loi de probabilité sur S_i. Σ_i=$\Delta(S_i)$ représente l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i.

On utilisera les notations : $\Sigma = \prod_i \Sigma_i$, et $\Sigma_{-i} = \prod_{j\neq i} \Sigma_j$.

Par opposition aux stratégies mixtes on appellera S_i l'ensemble des stratégies pures ou déterministes du joueur i.

On trouvera selon les cas, différentes notations d'une stratégie mixte

(1) Notation Fonction: σ_i est l'application $S_i \to [0.1]$ qui associe à chaque stratégie s_i la probabilité d'être jouée. Exemple :$S_1 = \{H, B\}, \sigma_1(H) = \sigma_1(B) = 1/2$

(2) Notation Vecteur : on écrira: σ_i comme un vecteur de probabilité si $S_i = \{s_{i1}, \dots., s_{in}\}$ l'ensemble des stratégies pures du joueur i σ_i se présente alors comme un vecteur de probabilité $(\sigma_i(s_{i1}), \dots, \sigma_i(s_{in}))$. Exemple : $\sigma_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(3) Combinaison convexe de stratégies pures $\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}B$.

Il y'a plusieurs interprétations des stratégies mixtes parmi elles nous citons :

❖ Possibilité « Matérielle » de jouer aléatoirement. Rien ne s'oppose à priori à ce qu'un joueur révèle quelle stratégie pure va-t-il utiliser. La stratégie mixte est un choix aléatoire d'une stratégie pure.

❖ Part d'incertitude que chacun laisse sur sa stratégie. Une stratégie mixte représente plutôt une croyance que chaque joueur a sur les manières de jouer des autres joueurs. Chaque joueur souhaite cacher ses choix.

❖ Dans une grande population de joueurs, une stratégie correspondant à une proportion dans laquelle une stratégie pure est jouée dans la population. Par exemple dans la ville de New Delhi, 30% des piétons se rangent à gauche (systématiquement) lorsque qu'il rencontre un autre piéton et 70% à droite. Donc lorsque je croise un piéton dans cette ville je joue face à une stratégie mixte (30%,70%).

❖ Incertitude sur les paiements, un comportement de jouer liée à un état d'esprit pendant le jeu peut rendre les paiements incertains et donc entrainer des stratégies mixtes.

Proposition3.5.1. L'ensemble des stratégies mixtes Σ_i du joueur i est convexe. Ses points extrémaux sont les stratégies qui accordent la probabilité 1 sur un seul point de S_i.

Remarquons qu'une stratégie pure s_i correspond à la stratégie mixte jouée avec une probabilité 1. On considère S_i comme sous ensemble de Σ_i. En considérant l'ensemble des stratégies mixtes, nous faisons une extension de l'ensemble des stratégies pures du joueur i .

3.5.1 L'expression formelle de l'extension mixte d'un jeu.

Dans un jeu sous forme normale où les actions s'effectuent de manière simultanée, le choix d'une stratégie mixte d'un joueur se fait indépendamment des autres joueurs et donc soit $s = (s_1, \dots, s_n)$ un profil de stratégies, alors la probabilité de la réalisation du profil s est obtenue comme suit :

$$\sigma(s) = \prod_i \sigma_i\,(s_i)$$

Pour calculer la fonction d'utilité d'un joueur i nous faisons l'hypothèse de Von Neumann et Morgenstern selon laquelle, l'utilité pour l'aléa est l'espérance de l'utilité obtenue.

Dans le cas par exemple de deux joueurs la fonction d'utilité du joueur 1 associée à une stratégie mixte $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ est :

$$u_1(\sigma) = \sigma_1(s_{11})[\sigma_2(s_{21})u_1(s_{11}, s_{21}) + \sigma_2(s_{22})u_1(s_{11}, s_{22}) + \cdots + \sigma_2(s_{2k})u_1(s_{11}, s_{2k})] + \cdots \sigma_1(s_{1l})[\sigma_2(s_{21})u_1(s_{1l}, s_{21}) + \sigma_2(s_{22})u_1(s_{1l}, s_{22}) + \cdots + \sigma_2(s_{2k})u_1(s_{1l}, s_{2k})].$$

$u_1(\sigma) = \sigma_1(s_{11}) \sum_{s_2 \epsilon S_2} \sigma_2(s_{11}, s_2) u_1(s_{11}, s_2) +$
$\cdots \sigma_1(s_{1l}) \sum_{s_2 \epsilon S_2} \sigma_2(s_{1l}, s_2) u_1(s_{1l}, s_2).$

$$\boldsymbol{u_1(\sigma) = \sum_{s_1 \epsilon S_1} \sigma_1 (s_1) u_1(s_1, \sigma_2) \ldots . (I)}$$

Où $u_1(s_1, \sigma_2)$ est le paiement d'une stratégie s_1 sachant que le joueur 2 adopte la stratégie mixte σ_2.

De manière générale lorsque qu'il y'a plus de deux joueurs la formule (I) calculant la fonction d'utilité d'un joueur i pour un profil de stratégie mixte noté $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$ peut s'écrire selon le lemme :

Lemme 3.5.1.1 : $\boldsymbol{u_i(\sigma) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \epsilon S_i} \sigma_i (s_i) u_i(s_i, \sigma_{-i}) \ldots . (II)}$

Donc grâce à cette définition nous pourrons étendre la fonction d'utilité u_i aux profils à stratégies mixtes.

Les fonctions u_i sont polynomiales donc continues et linéaires par rapport à $\sigma_i(s_i)$. En effet, par exemple dans le cas de deux joueurs nous avons :

$$\boldsymbol{u_1(\sigma) = \sigma_1(s_{11})\sigma_2(s_{21})u_1(s_{11}, s_{21}) + \cdots + \sigma_1(s_{1k})\sigma_2(s_{2l})u_1(s_{1k}, s_{2l}) \ldots (III)}$$

D'où la généralisation :

Lemme 3.5.1.2 : $\boldsymbol{u_i(\sigma) = \sum_{s \epsilon S} \sigma(s) u_i (s) \ldots . (IV)}$

Où $S = S_1 \times \ldots . \times S_n$ et $\sigma(s) = \sigma(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \prod_{i=1,..,n} \sigma_i (s_i)$

Définition 3.5.1.1 l'extension mixte d'un jeu sous forme normale $(I, S_i, (u_i)_i)$ est le jeu sous forme normale$(I, \Sigma_i, (u_i)_i)$.

Dans l'extension mixte :

- L'ensemble des joueurs est I.
- Chaque joueur choisit une stratégie $\boldsymbol{\sigma_i} \in \Sigma_i$.
- Le paiement $u_i(\sigma)$ est calculé par la formule du lemme 3.5.2.

Exemple 3.5.1.1

On suppose dans un jeu sous forme normale qu'un joueur i dispose de trois stratégies déterministes : $s_{i1}, s_{i2},$ et s_{i3} . L'ensemble des stratégies mixtes de ce joueur

$\Sigma_i = \{x_1 s_{i1} + x_2 s_{i2} + x_3 s_{i3} : (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$. Σ_i peut être représenté par les points de l'intérieur d'un triangle équilatéral de hauteur 1, selon le théorème de Viviani ci-dessous. La somme des trois distances d'un point de l'intérieur du triangle par rapport aux trois côtés est égale à la hauteur du triangle.

Théorème de Viviani : Dans un triangle équilatéral, la somme des distances d'un point intérieur au triangle aux trois côtés est égale à la hauteur du triangle.

La Figure 3.5.1 illustre ce concept :

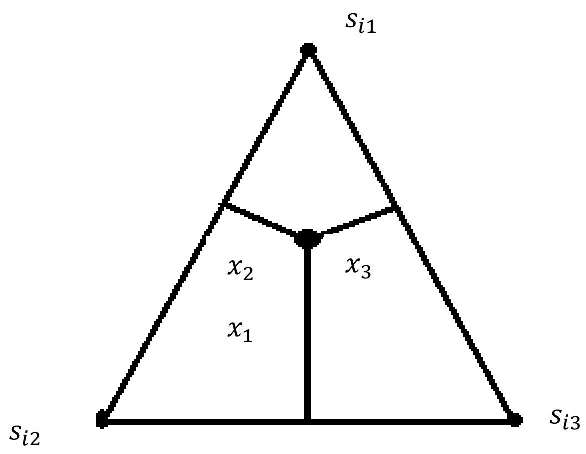


Figure3.5.1

Proposition3.5.1.1

La fonction $u: \Sigma \to \mathbb{R}$ est multilinéaire c'est-à-dire elle linéaire pour chaque coordonnée Σ_i.

Preuve :

Il faut montrer que pour $\forall i$ $\sigma''_i = \gamma\sigma_i + (1-\gamma)\sigma'_i$ nous avons $u_i(\sigma''_i, \sigma_{-i}) = \gamma u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) + (1-\gamma)u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$ vrai en utilisant le lemme 3.5.1.

Exemple 3.5.1.2

1/2	L	M	R
U	**(4,3)**	**(5,1)**	**(6,2)**
D	**(2,1)**	**(8,4)**	**(3,6)**
M	**(3,0)**	**(9,6)**	**(2,5)**

1) Calculer le paiement des joueurs pour les stratégies $\sigma_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $\sigma_2 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2) Calculer le paiement de la stratégie D sachant que le joueur 2 va adopter la stratégie mixte σ_2.

Solution :

1) Par la formule du lemme 3.5.1, on calcule à titre d'exemple le gain du premier joueur :

$u_1(\sigma_1,\sigma_2) = \sigma_1(\mathrm{U})[\sigma_2(L)u_1(U,L) + \sigma_2(M)u_1(U,M) + \sigma_2(\mathrm{R})u_1(U,R)] + \sigma_1(D)[\sigma_2(L)u_1(D,L) + \sigma_2(M)u_1(D,M) + \sigma_2(\mathrm{R})u_1(D,R)] + \sigma_1(M)[\sigma_2(L)u_1(M,L) + \sigma_2(M)u_1(M,M) + \sigma_2(\mathrm{R})u_1(M,R)] = \frac{1}{3}(0\times 4 + \frac{1}{2}\times 5 + \frac{1}{2}\times 6) + \frac{1}{3}\left(0\times 2 + \frac{1}{2}\times 8 + \frac{1}{2}\times 3\right) + \frac{1}{3}\left(0\times 3 + \frac{1}{2}\times 9 + \frac{1}{2}\times 2\right) = \frac{11}{2}$.

De même on pourra calculer le gain du joueur 2, en utilisant la formule donnée par le lemme 3.5.2 :

$u_2(\sigma_1,\sigma_2) = \sigma(U,L)u_2(U,L) + \sigma(U,M)u_2(U,M) + \sigma(U,R)u_2(U,R) + \sigma(D,L)u_2(D,L) + \sigma(D,M)u_2(D,M) + \sigma(D,R)u_2(D,R) + \sigma(M,L)u_2(M,L) + \sigma(M,M)u_2(M,M) + \sigma(M,R)u_2(M,R) =$

Sachant que $\sigma(s_1,s_2) = \sigma_1(s_1)\times\sigma_2(s_2)$ on obtient alors :

$u_2(\sigma_1,\sigma_2) = 4$

2) $u_1(D,\sigma_2) = \sigma_2(L)\times u_1(D,L) + \sigma_2(M)\times u_1(D,M) + \sigma_2(R)\times u_1(D,R) = \frac{9}{2}$

Définition 3.5.1.2

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes est un équilibre de Nash sur l'ensemble des stratégies Σ_i et fonctions de paiements u_i.

Un équilibre de Nash en stratégie mixtes est donc un profil de stratégies mixtes $\sigma \in \Sigma$ tel que $\forall\, i, \forall \sigma'_i \in \Sigma_i, u_i(\sigma_i,\sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma'_i,\sigma_{-i})$.

Interprétation : chaque joueur s'il connait les probabilités choisies par les autres joueurs est content de la probabilité qu'il a choisie. Bien entendu cela ne veut pas dire que chaque joueur sera content pour toutes les réalisations possibles, seulement qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier de cette stratégie.

3.5.2 Propriétés

Proposition3.5.2.1 σ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si :
$\forall \mathrm{i}, s_i \in S_i \; u_i(\sigma_i,\sigma_{-i}) \geq u_i(s_i,\sigma_{-i})$.

Interprétation : il suffit que le maximum de gain soit atteint en pures pour chaque joueur i, cela réduit énormément les comparaisons.

Preuve :

« si » : est vraie car l'ensemble des stratégies pures est contenu dans celui des mixtes.

« Seulement si » : $u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma'_i\,(s_i) u_i(s_i, \sigma_{-i})$ d'après le lemme 1 or $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i})$ d'où $\leq \sum_{s_i \in S_i} \sigma'_i\,(s_i) u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \sum_{s_i \in S_i} \sigma'_i\,(s_i) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ car :

$\sum_{s_i \in S_i} \sigma'_i\,(s_i) \ = 1$ (Distribution de probabilités) , donc $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Corollaire3.5.1. Tout équilibre de Nash en stratégie pures et un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Preuve (Déduction directe de la proposition précédente).

Par conséquent, considérer les stratégies mixtes nous donne plus d'équilibres qu'avec les stratégies pures.

Définition 3.5.4 : Dans un jeu fini le support de $\sigma_i \in \Sigma_i$ est

$$supp(\sigma_i) = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}$$

Proposition3.5.4 (Indifférence sur le support). $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$ est un équilibre de Nash ssi

$\forall s_i \in \ supp(\sigma_i) : \quad u_i(s_i, \sigma_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} u_i\,(t_i, \sigma_{-i}) \ldots (V)$

On en déduit alors que $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$ est un équilibre de Nash si et seulement si

$\forall s_i, s'_i \in \ supp(\sigma_i) \quad u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s'_i, \sigma_{-i}) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \ldots (VI)$ et

$$\forall s_i \notin \ supp(\sigma_i) \quad u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Preuve

$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \epsilon S_i} \sigma_i\,(s_i) u_i(s_i, \sigma_{-i}) = \max_{s_i \in S_i}(u_i(s_i, \sigma_{-i}))$ (Inéquation de la proposition3)

$$\sum_{s_i \epsilon S_i} \sigma_i\,(s_i) u_i(s_i, \sigma_{-i}) = \max_{s_i \in S_i}(u_i(s_i, \sigma_{-i}) \sum_{s_i \epsilon S_i} \sigma_i\,(s_i)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{s_i \epsilon S_i} \sigma_i\,(s_i)((u_i(s_i, \sigma_{-i}) - \max_{s_i \in S_i}\big(u_i(s_i, \sigma_{-i})\big) = 0\,.$$

Comme $u_i(s_i, \sigma_{-i}) - \max_{s_i \in S_i}\big(u_i(s_i, \sigma_{-i})\big) \leq 0$ on en déduit alors que pour $s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0$ c'est-à-dire $s_i \in \ supp(\sigma_i)$ nous avons $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = \max_{s_i \in S_i}\big(u_i(s_i, \sigma_{-i})\big)$.

La déduction découle évidemment de l'égalité en supra.

Cela suggère une procédure de recherche d'équilibres mixtes de Nash:

(1) Essayer tous les supports possibles.
(2) Résoudre les probabilités rendant chaque joueur indifférent sur son support.
(3) Vérifier que les stratégies hors support ne donnent pas un paiement supérieur.

Remarque 3.5.1

Ainsi, dans un équilibre de Nash σ, seules les stratégies pures qui sont meilleures réponse aux stratégies des autres sont jouées avec une probabilité strictement positives et toutes ces stratégies donnent la même utilité espérée. En pratique le concept d'indifférence est utile pour le calcul des équilibre de Nash en voici un exemple :

Exemple 3.5.4

On considère le jeu sous forme normale suivant (bataille du couple) :

Femme/Homme	Théâtre	Foot
Théâtre	(3 ,2)	(1,1)
Foot	(0,0)	(2, 3)

En stratégie pures il existe deux équilibres de Nash (T,T) et (F,F). si on suit le raisonnement plus haut un équilibre de Nash en Stratégies mixtes doit être indifférent au support, supposons La probabilité x est associée à T et $1-x$ à F par le joueur1 donc $\sigma_1(x, 1-x)$et de même y pour T et $1-y$ pour F pour le joueur2 $\sigma_1(y, 1-y)$, :

u_1(T,σ_2)=$u_1(F, \sigma_2) \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}$ de même $x=\frac{3}{4}$. D'où l'équilibre de Nash en mixte : $\left((\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right),(\frac{3}{4},\frac{1}{4}))$.

Théorème 3.5.1(le théorème de Nash 1951)

Soit $(I, S_i, (u_i)_i)$ un jeu sous forme stratégique alors son extension mixte $(I, \Sigma_i, (u_i)_i)$, admet un équilibre de Nash. Autrement dit tout jeu fini admet un équilibre en stratégies mixtes.

C'est une conséquence du théorème de Kakutani qu'on admettra :

Théorème3.5.2 (Kakutani,1941) (généralisation du théorème du point fixe de Brouwer,1912)

Soit Xun ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit f une correspondance de X dans X ($\forall\, x \in X, f(x) \subset X$). Si

(i) $\forall\, x \in X\ f(x) est\ convexe\ non\ vide.$
(ii) Le graphe de f est fermé (i.e. $x_n \to x$ et $y_n \to y$ et $y_n \in f(x_n)\ \ alors\ \ y \in f(x).)$

Alors $\exists x^* \in X\ tel\ que\ x^* \in f(x^*)$.

Principe de la Preuve du théorème 3.5.1

Soit $X = \boldsymbol{\Sigma} = \prod_i \Sigma_i$ c'est un ensemble convexe et compact ; et soit $f = (f_1, \dots, f_n)$ définie par

$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$= arg $\max\limits_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i\,(x_1, \dots, x_{i-1}\sigma_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Comme chaque Σ_i est convexe et compact et comme on sait que la fonction $\sigma_i \to u_i(x_1, \dots, x_{i-1}\sigma_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ est linéaire (vue plus haut) donc en particulier concave alors arg $\max\limits_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i\,(x_1, \dots, x_{i-1}\sigma_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ est non vide et convexe donc le point (i) est vérifié la fonction u_i est multilinéaire en dimension finie d'où la continuité de u_i et donc la fermeture de f.

4 Détermination de l'équilibre de Nash en Stratégie mixte

Exemple3.4.5 (Apparier les sous)(Matching pennies) est un exemple célèbre qui ne possède pas d'équilibre de Nash (semblable au jeu de penalty) ce jeu consiste aux deux joueurs d'annoncer simultanément « pile » ou « face » si les deux joueurs font une annonce identique (respectivement différente) le joueur 1 reçoit 1 (respectivement -1) et le joueur2 reçoit -1(respectivement 1). La matrice du jeu est donc :

1/2	Pile	Face
Pile	(1,-1)	(-1,1)
Face	(-1,1)	(1,-1)

Commençons par déterminer $r(q)$ du joueur 1 pour que sa stratégie mixte $\sigma_1 = (r, 1-r)$ la meilleure réponse à la stratégie du joueur 2 $\sigma_2 = (q, 1-q)$.

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = (1-2q) + r(4q-2)$$

Donc $r(q) = \begin{cases} 1 \; si \; 4q - 2 > 0 \Leftrightarrow q > \frac{1}{2} \\ r \in [0,1] \; si \; q = \frac{1}{2} \\ 0 \; si \; q < \frac{1}{2} \end{cases}$

$$u_2(\sigma_1, \sigma_2) = (2r-1) + q(2-4r)$$

De même pour le joueur 2

$$q(r)=\begin{cases}1\ si\ r<\dfrac{1}{2}\\ q\in[0{,}1] si\ r=\dfrac{1}{2}\\ 0\ si\ r>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

En dessinant les deux courbes l'équilibre de Nash est (σ_1,σ_2) avec $\sigma_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $\sigma_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et il vérifie la propriété l'indifférence au support.(voir la Figure 3.5.2)

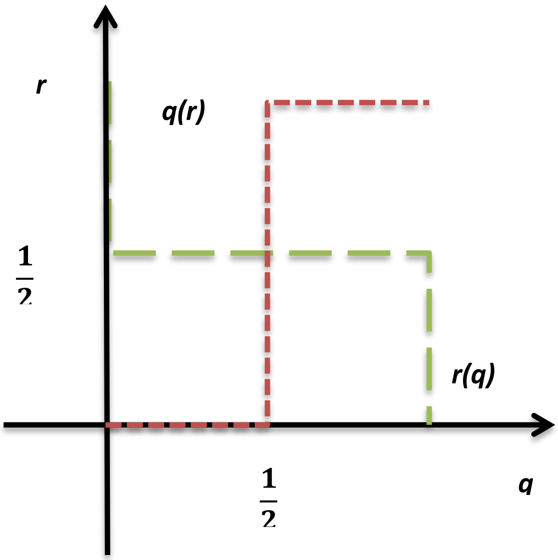


Figure3.5.2

5 Stratégies mixtes et dominées

Nous pourrons étendre la notion de domination stricte aux stratégies mixtes.

Definition3.5.5

On dit que σ_i domine strictement $\sigma_i{}'$ lorsque pour tout σ_{-i} ,

$$u_i(\sigma_i,\sigma_{-i})>u_i(\sigma_i',\sigma_{-i})$$

Pour vérifier qu'une stratégie domine une autre, il suffit de le vérifier face à tout profil en stratégie pure.

Proposition3.5.5

σ_i domine strictement $\sigma_i{}'$ si et seulement si

$$u_i(\sigma_i,s_{-i})>u_i(\sigma_i',s_{-i})$$

La condition nécessaire est évidente, la suffisante se déduit par linéarité.

Une stratégie non dominée par aucune stratégie pure peut l'être par une stratégie mixte.

Exemple3.5.6

Soit le jeu sous forme normale :

1/2	G	M	D
H	(1,1)	(0,2)	(0,4)
M	(0,2)	(5,0)	(1,6)
B	(0,2)	(1,1)	(2,1)

M non strictement dominée en pure elle l'est en mixte par la stratégie 1/2 G+1/2 D.

On peut alors redéfinir la procédure d'élimination itérée des stratégies dominées en prenant en compte les stratégies dominées par les mixtes.

Exemple 3.5.7

Deux personnes B et A dans deux voitures séparés veulent passer un pont

2 choix s'imposent :$\begin{cases} passer \\ attendre \end{cases}$ tous les deux veulent minimiser le temps du transport. Le jeu sous sa forme normale est :

1/2	Attendre	Passer
Attendre	(60,60)	(1,2)
Passer	(2,1)	(5,5)

Déterminer tous les équilibres de Nash de ce jeu .

De manière générale il existe des algorithmes permettant le calcul de l'équilibre de Nash mixte dans le cas de deux joueurs dont les plus célèbre sont : l'algorithme Enumération du support , énumération des sommets, et l'algorithme de Lemke -Howson. La section 3.3.4 sera consacrée à la présentation de ces algorithmes.

6 *Exemples d'applications*

<u>Exemple d-1 « fureur de vivre »</u>

Deux personnes B et A dans deux voitures séparés veulent passer un pont

2 choix s'imposent :$\begin{cases} passer \\ attendre \end{cases}$ tous les deux veulent minimiser le temps du transport. Le jeu sous sa forme normale est :

1/2	Attendre	Passer
Attendre	(60,60)	(1,2)
Passer	(2,1)	(5,5)

1) Déterminer tous les équilibres de Nash de ce jeu.

Exemple d-2 « Variante de la bataille du couple »

Soit le jeu sous forme normale suivant

1 /2	A	B	C
a	(3,2)	(1,1)	(0,1 .5)
b	(0,0)	(2,3)	(1,2)

1) Déterminer tous les équilibres de Nash en stratégies pures.
2) En utilisant la procédure d'invariance au support, déterminer tous les équilibres en stratégies mixtes.

Exemple d-3 « le jeu de l'inspection »

Le jeu de l'inspection fait intervenir un agent (par exemple un travailleur joueur 1) et un principal par exemple joueur 2. Le joueur 1 a le choix entre travailler (T) ou tricher (NT). En travaillant le joueur 1 produit la valeur v mais supporte un coup d'effort g. le principal peut décider soit inspecter (I) soit ne pas inspecter (NI). L'inspection a un coup h et permet au principal de savoir si l'agent a travaillé ou triché. Le travailleur reçoit un salaire w sauf s'il existe une preuve (suite à une inspection qu'il a triché). Dans ce dernier cas il obtient 0. Les deux joueurs choisissent leur jeu de manière simultanée et les données du jeu sont en informations commune. On a de plus

v>w>g>h>0.

1) Donner la matrice de paiement de ce jeu.
2) Existent-ils des équilibres de Nash en stratégies pures.
3) Déterminer les équilibres de Nash en stratégies mixtes. Que peut-on en conclure ?

Solution de l'exemple d-3

1) La matrice de payement de ce jeu est

1/2	I	NI
T	(w-g, v-w-h)	(w-g,v-w)
NT	(0,-h)	(w,-w)

2) Il n'existe pas d'équilibre de Nash pure.
3) Pour retrouver les équilibres en mixtes on applique l'indifférence au support soit (σ_1, σ_2) un équilibre de Nash en mixte tel que $\sigma_1 = (x, 1-x)\ et$

$\sigma_2 = (y, 1-y)$. Les équations obtenues par indifférence au support sont :

$$u_1(T,\sigma_2) = u_1(NT,\sigma_2) \Leftrightarrow y(w-g) + (1-y)(w-g) = y \times 0 + (1-y)w$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{g}{w}$$

$$u_2(\sigma_1, I) = u_2(\sigma_1, NI) \Leftrightarrow x(v-w-h) + (1-x)(-h)$$
$$= (v-w)x + (1-x)(-w) \Leftrightarrow x = 1 - \frac{h}{w}$$

On conclut dans l'équilibre de Nash en mixte concernant le travailleur que la probabilité de tricher qui est égale à $\frac{h}{w}$ c'est-à-dire croissante par rapport au cout d'inspection et décroissante par rapport au salaire donc plus le salaire w est important moins la probabilité de tricher sera grande. Concernant le principal la probabilité d'inspecter est égale à $\frac{g}{w}$, donc croissante par rapport à l'effort fourni par le travailleur et décroissante par rapport au salaire donc même conclusion plus le salaire est inadéquat par rapport à l'effort plus la probabilité d'inspecter augmente. Donc le mieux serait de payer le travailleur selon l'effort fourni cela est plus rentable même si ce n'est pas évident en apparence.

6.1 Approche computationnelle du calcul de l'équilibre Nash mixte

Le calcul de l'équilibre de Nash dans un jeu sous forme stratégique est l'un des plus importants problèmes de l'algorithmique de la théorie des jeux. Il est essentiellement considéré comme étant un problème combinatoire. Les algorithmes de résolution de jeux ont été étudiés avec l'apparition de la théorie des jeux et ont été exploités dans d'autres situations d'optimisation mathématique comme par exemple le problème de complémentarité linéaire. Dans le cas d'un jeu fini à deux joueurs l'équilibre de Nash mixte est la solution d'un problème de complémentarité linéaire, dont l'algorithme de résolution le plus célèbre est celui de Lemke-Howson(1964).

Nous allons d'abord introduire les notations qui seront utilisés, avant d'énoncer quelques algorithmes pour le calcul de l'équilibre mixte d'un jeu. Les notions de la théorie des graphes et de la programmation linéaire étant supposées connues.

Un jeu fini à deux joueurs va être présenté par deux matrices (Bimatrix game). En effet chacun des deux joueurs possède sa matrice de gain qu'on notera A, B respectivement.

Soit M l'ensemble des m stratégies du joueur 1 et N l'ensemble des n stratégies du joueur2, alors les matrices $A\ et\ B$ sont les matrices de type (m, n) dont les coefficients représentent le gain du joueur 1 et du joueur 2 respectivement. Comme dans l'exemple qui suit :

Exemple3.6.1 : soit le jeu stratégique à deux joueurs suivant

1/2	a	b	c
L	(2 ,4)	(1,0)	(8,5)
G	(-1,0)	(2,1)	(1,4)

Alors $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Les lignes de la matrice A seront notés a_i et les colonnes de la matrice B b_j qui seront en fait les colonnes de la matrice transposé de B.

Afin de pouvoir utiliser les notions de la programmation linéaire, nous serons obligés de redéfinir quelques notions déjà présentées dans les sections précédentes un utilisant les matrices de gain de chacun des joueur.

Définitions 3.6.1 :

1) Une stratégie mixte du joueur 1 est la donnée d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^m : Ex = 1$ où m est le nombre de stratégies pures du joueur 1 et E la matrice à une ligne et m colonnes. $E = (1 \dots 1)$.
2) Une stratégie mixte du joueur 2 est la donnée d'un vecteur $y \in \mathbb{R}^n : Fx = 1$ où n est le nombre de stratégies pures du joueur 2 et F la matrice à une ligne et n colonnes. $F = (1 \dots 1)$.

3) Le gain du joueur 1 pour la paire de stratégies mixtes (x, y) est égal à $x^t Ay$ et celui du joueur 2 est égal à $x^t By$. Une meilleure réponse à la stratégie mixte y du joueur 2 est la stratégie mixte x qui maximise $x^t Ay$ et de même une meilleure réponse de la stratégie mixte x du joueur 1 est la stratégie mixte y du joueur 2 qui maximise $x^t By$.
4) L'équilibre de Nash est une paire (x^*, y^*) qui une meilleure réponse de chacun des joueurs.

Une stratégie mixte est meilleure réponse si et seulement si elle fait intervenir avec des probabilités strictement positives les stratégies pures qui sont meilleures réponses (vu dans les sections précédentes). On énonce alors le théorème de Nash(1951) en utilisant les nouvelles notations comme suit :

Théorème3.6.1 (Nash 1951)

La paire de stratégies mixtes (x^*, y^*) est un équilibre de Nash dans le jeu bi-matriciel (A, b) si et seulement si pour toutes les stratégies pures $i \in M \; et \; j \in N$

$$x^*_i > 0 \Rightarrow a_i y^* = \max_{k \in M} a_k y^* = u \dots (1)$$

$$y^*_j > 0 \Rightarrow b_j x^* = \max_{k \in M} b_k x^* = v \dots (2)$$

Ce qui peut aussi être exprimé comme un problème de programmation linéaire comme suit :

Exemple3.6.2 : recherche d'un équilibre de Nash en mixte dans un jeu bi-matriciel $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Soit le jeu bi-matriciel défini par les matrices :$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, et \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ le seul équilibre de Nash en pure est le profil de gain (3,3).

En mixte on pourrait chercher un équilibre du type $((x_1, x_2, 0), (y_1, y_2))$ donc le programme linéaire à résoudre serait du type $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = v \\ 2x_1 + 6x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3y_1 + 3y_2 = u \\ 2y_1 + 5y_2 = u \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$

La solution est $(\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5},0\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right))$.

Un équilibre de Nash (x^*,y^*) est la solution d'un problème (LP) du type :

$$\boldsymbol{Maximiser\ x^T(Ay)\ sujet} \text{ à } \boldsymbol{Ex = e\ x \geq 0}$$

$$\boldsymbol{Maximiser\ x^T(By)\ \ sujet} \text{ à } \boldsymbol{Fy = f\ y \geq 0}$$

Les conditions de la proposition ci-dessous définissent son problème dual ou le problème de linéarité complémentaire (CLP).

Proposition 3.6.1

(x^*,y^*) est un équilibre de Nash dans un jeu (A,B) si et seulement si pour u,v adéquats :

$$\boldsymbol{Ex^* = e\ o}\text{ù } \boldsymbol{e = 1}$$

$$\boldsymbol{Fy^* = f\ o}\text{ù } \boldsymbol{f = 1}$$
$$\boldsymbol{E^T U - Ay^* \geq 0}$$
$$\boldsymbol{F^T v - B^T x^* \geq 0}$$
$$\boldsymbol{x^*{}_i, y^*{}_i \geq 0}$$

Pour la résolution de ce problème certains algorithmes ont été développés. Dans la majorité des cas cela concernait les jeux non dégénérés d'où la définition :

Définition 3.6.2 : un jeu est dit non dégénéré si il n'y a pas de stratégie mixte de support de taille k qui a plus de k meilleures réponses pures.

Corollaire 3.6.1 : dans un jeu bi matriciel non dégénéré, les stratégies mixtes de (x, y) de tout équilibre de Nash ont des supports de tailles égales.

a) Algorithme par énumération de supports.

Entrée un jeu non dégénéré

$for\ k \in \{1,2,\dots,\min(m,n)\}$

$for\ (I,J) deux\ ensembles\ de\ taille\ k\ do$

Résoudre les systèmes $\sum_{i\in I} x_i B_{ij} = v\ \sum_{i\in I} x_i = 1$

$$\sum_{j\in J} A_{ij} y_j = u\ \sum_{J\in J} y_j = 1$$

Vérifier que $0 \leq x_i \leq 1\ et\ 0 \leq y_j \leq 1$ et les conditions (1) et ((2) de maximisation.

end for

end for

SORTIE tous les équilibres de Nash.

Complexité: 4^n .

Algorithme de Lemke-Howson (1964) en termes de graphes (Shapley 1974).

Cette approche se base sur la construction un chemin sur le simplexe de chacun des ensembles de stratégies.

L'étape cruciale dans la construction de ces chemins est l'étiquetage des stratégies. Chaque stratégie mixte s_i est étiquetée par :

Les stratégies pures de i qui ne sont pas dans le support de s_i

Les stratégies pures de j qui sont les meilleures réponses à s_i

Définitions 3.6.3

$$X(i) = \{x \in X: x_i = 0\}$$

$$X(j) = \left\{x \in X: B_j x \geq B_k x \ \forall k \in N\right\}$$

$$Y(i) = \{y \in Y: A_i y \geq A_k y \ \forall k \in M\}$$

$$Y(j) = \left\{y \in Y: y_j = 0\right\}$$

L'ensemble des étiquettes de la stratégie mixte *x* (respectivement *y*) est alors $L(x) = \{k \in S_1 \cup S_2: x \in X(k)\}$ (respectivement $L(y) = \{k \in S_1 \cup S_2: y \in Y(k)\}$.)

D'où le théorème :

Théorème3.6.2 : une stratégie mixte $(x, y) dans\ X \times Y$ est un équilibre de Nash du jeu bi-matriciel (A, B) si et seulement si $\forall\ k \in S_1 \cup S_2\ \ x \in X(K) ou\ y \in Y(k) (\ ou\ les\ deux)$.

A partir de cet étiquetage, on définira un graphe pour chaque ensemble de stratégies :

Définitions 3.6.2

1) Soit G_1 le graphe :
   - Nœuds=$\{x \in X: |\{k: x \in X(k)\}| = m\} \cup \{0_n\}$.
   - Arrêtes=$\{(x, x'): xet\ x' diff\acute{e}rent\ par\ une\ \acute{e}tiquette\}$

   De même :
2) G_2 le graphe :
   - Nœuds=$\{y \in Y: |\{k: y \in Y(k)\}| = n\} \cup \{0_m\}$.

- Arrêtes=$\{(y, y'): yet\ y' diff érent\ par\ une\ étiquette\}$

3) Enfin $G_1 \times G_2$ le graphe :
- Nœuds=$\{(x, y): x \in G_1\ et\ y \in G_2\} \cup \{0_n\}$.
- Arrêtes=$\{((x, y), (x', y')): (x, x') est\ une\ arrête\ de\ G_1\ et\ y = y' ou\ \ (y, y') est\ une\ arrête\ de\ \ G_2 et\ x = x'\}$.

4) Soit $k \in S_1 \cup S_2$ et $(x, y) \in G_1 \times G_2$; (x, y) est une paire presque k-complètement étiquetée $\forall\ l \in S_1 \cup S_2 - \{k\}, l\ etiquette\ x\ ou\ y$.

Lemme 3.6.1

- Tout équilibre de Nash (x, y) (et le pseudo-équilibre $(0_m, 0_n)$) est dans $G_1 \times G_2$ est adjacent exactement à nœud (x', y') qui est presque k-complètement étiqueté.
- Soit (x, y) une paire k-complètement étiquetée, il y'a exactement deux nœuds adjacents presque k-complètement étiqueté dans $G_1 \times G_2$.

Théorème3.6.3

Soit un jeu non-dégénéré bi-matriciel (A, B) et $k \in S_1 \cup S_2$ alors l'ensemble des nœuds presque k-complètement étiquetés dans $G_1 \times G_2$ consiste en des chemins et des cycles disjoints. Les points terminaux des chemins sont des équilibres de Nash, et le pseudo-équilibre$(0_m, 0_n)$. Le nombre des équilibres de Nash est impair.

D'où l'algorithme de Lemke-Howson (1964) sous sa forme donnée par Shapley(1974) :

b) Algorithme de Shapley :

(a) Se placer au point $(0_m, 0_n)$.

(b) Choisir une étiquette $k \in S_1 \cup S_2$.

(c) Aller au seul point adjacent à $(0_m, 0_n)$ presque k-complètement étiqueté (x_1, y_1). Il existe alors une étiquette l_1 dupliqué.

(d) Aller au seul point adjacent à (x_1, y_1) presque l_1-complètement étiqueté et différent du point de provenance (ici$(0_m, 0_n)$).

(e) Itérer l'étape (d) jusqu'à trouver un point (x_l, y_l) sans étiquette dupliquée ; ce point est un équilibre de Nash.

Remarque3.3.4.1 : cet algorithme ne permet de déterminer qu'un seul équilibre de Nash.

6.2 TP2: calcul de l'équilibre de Nash en mixtes

Résumé

Dans ce TP nous allons développer une petite application qui permet de calculer les équilibres de Nash, profils Pareto dominants et Niveau de sécurité d'une stratégie ainsi que d'un joueur en stratégie pures. Elle permettra aussi de déterminer l'équilibre de Nash mixte dans un jeu à

deux joueurs avec plus de 3 stratégies chacun, en implémentant les deux algorithmes vus dans cette dernière section du chapitre à savoir : l'algorithme par énumération de supports et celui de Shapley. En plus de l'élaboration d'un graphe de comparaison sur le temps d'exécution. Cela permettra à l'ensemble des étudiants de comprendre le principe des algorithmes de calcul proposés.

Langage de programmation

Il est préférable de travailler avec le langage Python, mais le C++ est aussi accepté.

Chapitre 4

Comportements prudents et jeux à somme nulle

4.1 Comportement prudent

4.1.1 Introduction : un aspect non capturé par l'équilibre de Nash, est la notion du risque. En effet considérant le jeu suivant :

Exemple4.1.1.1

1/2	L	R
T	(3,1)	(2,2)
M	(0,8)	(0,-1)
B	(-100,2)	(3,3)

Il est facile de voir que (B, R) est le seul équilibre de Nash en stratégies pures avec le paiement (3,3). Cependant cet équilibre n'est pas une solution réalisable car la notion de risque et de sécurité n'est pas présente dans le raisonnement sous –jacent à l'équilibre de Nash.
Pour un joueur i, le critère de prudence implique d'évaluer chaque stratégies dans son cas le plus judicieux ou le moins contraignant. Après avoir effectué cette évaluation, il maximise son gain en choisissant la meilleure stratégie. C'est pour cette raison une règle qui prend en considération le risque a été introduite :
le joueur i est prudent (pessimiste) s'il croit qu'en utilisant la stratégie s_i, les autres joueurs vont prendre le vecteur de stratégies s_{-i} qui lui est le plus défavorable donc tel que :

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \min_{t_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i\,, t_{-i})$$

Dans ce cas s'il est rationnel, il va jouer la stratégie s_i^* qui va maximiser son paiement étant donnée sa croyance c'est-à-dire vérifiant :

$$u_i(\, s_i^*,\, s_{-i}^*) = \max_{s_i \in S_i} \min_{t_{-i} \in s_{-i}} u_i(s_i, t_{-i}) = \underline{v_i}$$

Donc si le joueur i joue la stratégie s_i^*, alors il est sûr qu'au pire des cas d'obtenir un paiement $\underline{v_i}$.

4.1.2 Critère de prudence et paiement maxmin.

Définition 4.1.2.1 s_i^* est appelée action prudente ou maxmin du joueur i si et seulement si

$$s_i^* \in \arg \max_{s_i \in S_i} \min_{t_{-i} \in s_{-i}} u_i(s_i, t_{-i})$$

Un vecteur de stratégies où tous les joueurs utilisent une stratégie maxmin est appelé : un vecteur de stratégies maxmin.

Définition 4.1.2.2. $\underline{v_i}$ est appelée la valeur maxmin du joueur i, c'est le paiement supérieur qu'il peut garantir quelles que soient les stratégies jouées par les autres joueurs.

Pour trouver la stratégie maxmin du joueur 1 dans l'exemple précédent, on rajoute une colonne dans laquelle on inscrit dans chaque ligne l, le paiement minimal du joueur 1 quand il joue cette stratégie

1/2	L	R	min
T	(3,1)	(2,2)	2
M	(0,8)	(0,-1)	0
B	(-100,2)	(3,3)	-100

Donc il joue la stratégie T, donc $\underline{v_1} = 2$

De même pour le joueur 2

1/2	L	R
T	(3,1)	(2,2)
M	(0,8)	(0,-1)
B	(-100,2)	(3,3)
Min	1	-1

Donc il joue la stratégie L et $\underline{v_2} = 1$.

Par définition des stratégies maxmin, on déduit que le vecteur des paiements $u = (u_i)_{i\in N}$ associé à un vecteur de stratégies maxmin satisfait toujours : pour chaque joueur i $u_i \geq \underline{v_i}$. En fait cette inégalité peut être stricte comme dans l'exemple le vecteur maxmin étant (T,L) de paiement (3,1) où $3 > \underline{v_1} = 2$.

On peut aussi remarquer que le vecteur de paiement associé à un vecteur de stratégies maxmin n'est pas toujours bien défini car un joueur peut avoir plusieurs stratégies maxmin exemple :

1/2	L	R
T	(3,1)	(0,4)
B	(2,3)	(1,1)

Dans ce jeu le paiement maxmin peut égal à (2,3) ou bien (1,1).

4.1.3 Stratégies prudentes mixtes

Exemple 4.1.3.1

Soit la matrice de jeu suivante :

1/2	G	D
H	(8,10)	(-100,9)
B	(7,6)	(6,5)

On pose $\sigma_1 = (p, 1-p)$ et $\sigma_2 = (q, 1-q)$, on peut calculer $\min_{s_2\in\{G,D\}} u_1(\sigma_1, s_2)$ et ensuite déterminer la stratégie prudente du joueur 1 σ_1 et procéder de même pour le joueur2.

Nous allons déduire que le profil stratégie prudente de ce jeu est au fait un profil de stratégies pures à savoir (B,G).

La question est pourquoi chercher une stratégie mixte prudente et dans quel intérêt ? pour y répondre on a besoin de la définition suivante :

Définition 4.1.3.1

Le paiement MinMax (ou paiement de punition) v_id'un joueur i est le plus petit paiement auquel le joueur j peut être contraint s'il se défend de manière optimal (en jouant une meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs) :

$$\min_{t_{-i}\in s_{-i}} \max_{s_i\in S_i} u_i(s_i, t_{-i}) = v_i$$

Lorsque l'on cherche les stratégies prudentes d'un joueur, on peut vérifier rapidement si on doit ou pas considérer les stratégies mixtes. Il s'agit de déterminer si lorsque tous les autres joueurs adoptent les stratégies pures, le paiement maxmin du joueur i est égal à son paiement minmax(ie $\underline{v_i} = v_i$) dans ce cas nécessairement la stratégie prudente du joueur i est pure (Voir l'exemple précédent).

D'un point de vue mathématique : il s'agit de déterminer si la fonction de paiement d'un joueur admet un **point selle**. On peut facilement le vérifier grâce aux matrices dans le cas d'un jeu bi-matriciel :

Définition 4.1.3.2

Soit le jeu bi-matriciel (A, B), il existe un point selle pour un des joueur si et seulemnt si dans sa matrice de gain il existe un élément qui est à la fois le plus petit élément d'une ligne et le plus grand élément d'une colonne.

Nous donnerons une définition plus détaillé du point selle dans les jeux à somme nulle(section 4.2).

Dans le cas où le payement de sécurité d'un joueur i n'est pas son paiement de punition, on doit alors considérer les stratégies mixtes.

Exemple 4.1.3.2

1/2	**G**	**C**	**D**
H	**(3,1)**	**(3,2)**	**(6,3)**
M	**(2,6)**	**(4,0)**	**(4,2)**
B	**(4,0)**	**(7,3)**	**(5,4)**

- En stratégies pures, les paiements maxmin et minmax du joueur 1 sont égaux =4. La stratégie prudente du joueur 1 est simplement B.
- En stratégies pures le paiement minmax du joueur 2 est égal à 3 et le paiement maxmin est égal à 2. La stratégie prudente du joueur 2 n'est donc pas D.
- On doit alors considérer les stratégies mixtes pour le joueur 2.
- On peut remarquer que la stratégie C est strictement dominée par la stratégie D. On peut l'éliminer :

1/2	**G**	**D**
H	**(3,1)**	**(6,3)**
M	**(2,6)**	**(4,2)**
B	**(4,0)**	**(5,4)**

Nous allons alors calculer la stratégie prudente du joueur 2 en stratégies mixtes c'est-à-dire $\boldsymbol{\sigma_2} \in \boldsymbol{arg} \max_{\sigma_i \in \Sigma_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i})$ donc :

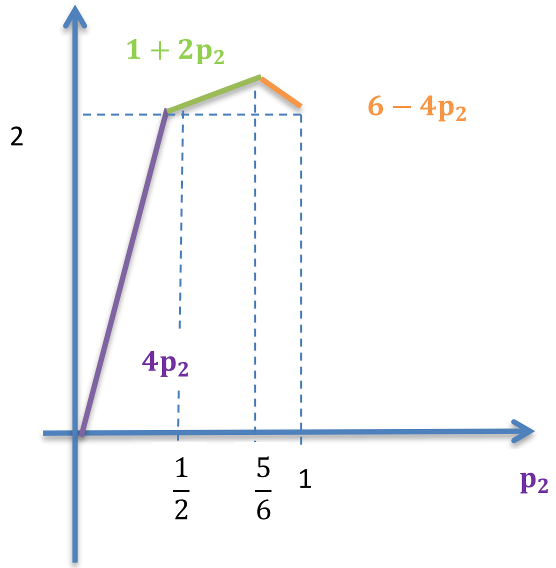
$$\boldsymbol{\sigma_2} \in \max_{\sigma_2} \min_{s_1 \in \{H,M,b\}} u_2(s_1, \sigma_2)$$

- Soit $\sigma_2 = (1 - p_2, p_2)$ une stratégie mixte du joueur 2 :

$$U_2(H, \sigma_2) = 1 + 2p_2 \text{ ; } U_2(M, \sigma_2) = 6 - 4p_2 \text{ ; } U_2(B, \sigma_2) = 4p_2$$

- Pour chacune de ses stratégies mixtes (ie $p_2 \in]0,1[$), le joueur 2 envisage la pire réponse possible du joueur 1. C'est-à-dire :

$$\min_{\{H,M,B\}}(1+2p_2, 6-4p_2, 4p_2) = \begin{cases} 4p_2 \text{ si } p_2 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ 1+2p_2 \text{ si } p_2 \in \left]\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right[\\ 6-4p_2 \text{ si } p_2 \in \left]\frac{5}{6}, 1\right[\end{cases}$$



- Enfin il choisit la stratégie mixte c'est-à-dire la valeur de p_2 qui maximise ce minimum et donc c'est $p_2 = \frac{5}{6}$ donc $\sigma_2 = (\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$, son paiement de sécurité est alors égal à 8/3=2.666…

4.1.4 L'équilibre de Nash et l'équilibre maxmin.

L'équilibre de Nash et le maxmin sont deux concepts basés sur deux idées différentes : l'un capture la stabilité et l'autre la sécurité. Typiquement ces deux concepts donnent des prédictions différentes.
Exemple le jeu de **la poule mouillée**

1/2	a	b
a	(2,2)	(1,3)
b	(3,1)	(1,0)

Le profil (a, b) est un équilibre maxmin qui n'est pas un équilibre de Nash .Donc un profil en maxmin n'est pas forcément un équilibre de Nash.
Cependant il existe des jeux pour les quels ces deux concepts coïncident par exemple le dilemme du prisonnier. Au fait ça s'explique mathématiquement ainsi :
Proposition4.1.1 : Une stratégie faiblement dominante est aussi une stratégie maxmin.
Corollaire 4.1.1 : dans un jeu ou chaque joueur possède une stratégie faiblement dominante, le vecteur des stratégies dominantes est un équilibre de Nash, et aussi un vecteur de stratégies maxmin.
Corollaire 4.1.2 : dans un jeu ou chaque joueur possède une stratégie strictement dominante, le vecteur des stratégies strictement dominantes est l'équilibre de Nash et aussi le vecteur des stratégies maxmin.

4.2 Jeux à somme nulle

4.2.1 Modèle

Formellement, un jeu à somme nulle est un triplet $\Omega = \{A, B, f\}$ où :

- A est un ensemble non vide appelé ensemble d'actions(ou de stratégies) du joueur J1.
- B est un ensemble non vide d'actions du joueur J2.
- $f: A \times B \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée qu'on appelle fonction de paiement ou bien d'utilité ou encore de gain. Le joueur J1 cherche à maximiser et le joueur J2 à minimiser.

Ceci modélise l'interaction stratégique suivante : J1 et J2 choisissent simultanément (sans savoir ce que fait l'autre) $a \in A\ et\ b \in B$ respectivement. les actions sont aussi révélées et le paiement est f (a,b). Ce paiement modélise le contentement de J1et le mécontentement de J2.

Remarque4.2.1.1 : Dans le cas particulier où A ou B est un singleton il s'agira d'un problème de minimisation ou bien de maximisation respectivement.

Si A et B sont des ensembles finis on parle de jeu fini (ou jeux matriciel), qu'on représente sous forme de matrice. Le joueur J1 choisit une ligne et le joueur J2 une colonne, et le paiement correspondant est dans l'intersection de cette ligne et cette colonne

De manière générale on peut représenter un jeu sous forme normale par une matrice :

4.2.2 Représentation du jeu sous forme normale

Si on représente les n stratégies du joueur X en ligne et les m stratégies du joueur Y en colonne, la simple lecture de la matrice n×m ayant comme entrées les valeurs de la fonction paiement nous permettra une représentation très intéressante du jeu :

Exemple 4.2.2.1

	y_1	y_2	y_3
x_1	**-2**	**+1**	**-1**
x_2	**-2**	**-4**	**+1**
x_3	**-3**	**+2**	**-4**

On lira alors que si le joueur si X choisit la stratégie x_1 et le joueur Y la stratégie y_1 alors le joueur Y doit payer -2 à X c'est-à-dire X doit payer 2 à Y.
Avec la notion de paiement il est logique X choisit une stratégie qui maximise f(x,y) et Y doit en choisir celle qui la minimise.
Donc dans cet exemple le joueur X va choisir la stratégie x_1 qui est la plus optimale car parmi les paiements minimaux proposés par Y il va de soi que X choisit le plus grand car il ne perdre au maximum que 2 et parmi paiements maximaux proposés par X le joueur Y ne pourra que choisir le plus petit autrement dit Y va forcément choisir la stratégie y_1 car il ne perd rien dans ce cas. C'est la méthode du minmax et maxmin. Si maxmin= minmax on dit que le jeu admet **une valeur en stratégie pure**. Ici $\underline{v}$ = -2.

4.2.3 Valeur en stratégies pures

Définition 4.2.3.1 : le maxmin en stratégie pure noté $\underline{v}$ est la quantité :

$$\underline{v} = \underset{a\in A}{Max}(\underset{b\in B}{\min}\ f(a,b))$$

Le Maxmin représente le paiement maximal que le joueur J1 peut assurer quelle que soit l'action de J2.

Interprétation :

$\underline{v}$ est la « valeur » du jeu dans lequel le joueur J1 choisit d'abord son action a, qui est annoncé à J2 qui à son tour choisira son action b en fonction de a.

Définition 4.2.3.2 :

Le minmax en stratégie pure est noté $\overline{v}$ est la quantité

$$\overline{v} = \underset{b\in B}{\min}\ (\underset{a\in A}{Max}\ f(a,b))$$

Le minmax représente le paiement minimal que le joueur J 2peut assurer quel que soit l'action de J1.

De même que $\underline{v}$, $\overline{v}$ est la « valeur » du jeu dans lequel le joueur J2 choisit d'abord son action b, qui est annoncée à J1, celui-ci choisissant son action a en fonction de b.

Les interprétations ci-dessus de $\underline{v}$ et $\overline{v}$ laisse penser qu'on devrait avoir $\underline{v} \leq \overline{v}$. En effet :

Proposition 4.2.3.1

Pour tout jeu, $\underline{v} \leq \overline{v}$.

preuve :

Pour tout $a \in A\ et\ b \in B$, on $f(a,b) \leq \underset{a'\in A}{Max}\ f(a',b)$. En fixant a et en prenant le minimum sur b de cette égalité on trouve :

$$\underset{b\in b}{\min}\ f(a,b) \leq \underset{b\in B}{\min}\ \underset{a'\in A}{Max}\, f(a,b) = \overline{v}$$

Puisque ceci est vrai pour tout a alors nous avons

$$\underline{v} = \underset{a\in A}{Max}\,\underset{b\in b}{\min}\ f(a,b) \leq \underset{b\in B}{\min}\ \underset{a'\in A}{Max}\, f(a,b) = \overline{v}$$

Définition4.2.3.3 : on dit qu'un jeu admet une valeur v en stratégie pure si et seulement si $\underline{v} = \overline{v}$ =v.

Exemple 4.2.3.1

Soit le jeu à deux joueurs à somme nulle représenté par la matrice de paiement suivante :

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Stratégies du joueur Y} \\
\text{Stratégies du joueur X} & \begin{array}{cccc} \underline{-1} & +1 & +1 & \underline{-1} \\ -2 & -3 & +2 & +2 \\ -2 & +1 & -2 & +1 \\ \underline{-1} & -3 & +4 & +1 \end{array}
\end{array}
$$

Dans ce cas $\bar{v}$ = Maxmin=minMax = $\underline{v}$ =-1, mais on peut se poser la question les points $p_1(x_1, y_1), q(x_1, y_4)\ et\ t(x_4, y_1)$ ayant tous pour image -1 , correspondent ils à des stratégies optimales ?

Pour y répondre on est amenés à la définition du point selle dans les jeux à somme nulle.

Définition4.2.3.4

Un point $s(x^*, y^*)$ est un point selle pour un jeu à deux joueurs et à somme zéro ssi :

$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y)$

A savoir que si X déplace son choix de stratégie de manière unilatérale de x^* à une autre stratégie$x$, alors que Y conserve son choix y^*, le paiement diminue autrement dit X s'auto pénalise et de même pour Y, si X maintient son choix x^* alors que Y va vers une autre stratégie $y \neq y^*$ la fonction f augmente et donc Y sera pénalisé.

Le point $s(x^*, y^*)$ est le meilleur compromis entre les deux parties.

Cela répond à la question posée en fin de l'exemple précèdent les points $q(x_1, y_4)\ et\ t(x_4, y_1)$ ne vérifient pas la condition du point selle. Le jeu alors de l'exemple admet un seul point selle qui est le point $p_1(x_1, y_1)$.

Théorème 4.2.3.1 :

Si l'ensemble S est l'ensemble de tous les points selle d'un jeu est non vide $S \neq \emptyset$, alors le paiement est le même pour tous ces points selle et ils sont échangeables.

Preuve

D'après la définition du points selle nous avons d'une part :

$f(x_2, y_1) \leq f(x_1, y_1) \leq f(x_1, y_2) \ldots\ldots (1)$ d'autre part nous avons :

$f(x_1, y_2) \leq f(x_2, y_2) \leq f(x_2, y_1) \ldots\ldots (2)$ à partir des deux inéquations on peut déduire alors que

$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.

Les points sont échangeables car $\forall\ x \in X\ f(x, y_1) \leq f(x_1, y_1) \Rightarrow f(x_1, y_1) = \max_{x \in X} f(x, y_1) = \min_{y \in Y} f(x_1\,, y)$

Or d'après les inégalités (1) et (2) précédentes. $f(x_2, y_1)$= $f(x_1, y_1)$=$\max_{x\in X} f(x, y_1)$ et aussi $f(x_2, y_1) = f(x_2, y_2) = \min_{y\in Y} f(x_2\,, y)$. D'où (x_2, y_1) est un point selle. De même pour(x_1, y_2) .

Remarque :

Etant donné que tous les points selles du jeu ont le même paiement et sont échangeables, on peut alors en conclure qu'il existe un sous ensemble O_X respectivement O_Y que nous appellerons l'ensemble des stratégies optimales du joueur 1 respectivement du joueur 2, tel que $O_X \times O_Y = S$ si le joueur 1 choisit une stratégie de O_X il est sûr d'obtenir un gain au moins égal à la valeur du jeu ; de même pour le joueur 2 s'il choisit une stratégie de O_Y il est sûr de devoir payer plus que la valeur du jeu.

Le joueur 1 tente d'imposer un gain compris entre la valeur et +∞ et le joueur 2 un paiement entre -∞ et la valeur.

Mais on ne peut modéliser un jeu à somme nul de la sorte s'il ne possède pas de points selles

Théorème4.2.3.2 ***Existence de points selles*** (à admettre sans démonstration) : si les ensembles X et Y sont compacts(bornés et fermés) alors $\max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x, y) \Rightarrow S \neq \emptyset\ et\ \ v = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x, y)$.

Réciproquement si $S \neq \emptyset \Rightarrow \max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x, y) = v$

Exemple 4.2.3.1 :

3boites : Noir , rouge, verte.

Joueur 2 repartit 2 pièces entre les trois boites.

Joueur 1 choisit une boite et gagne le contenu.

Donner la matrice du jeu. Ce jeu possède-t-il des points selles ?

La matrice du jeu est la suivante :

1/2	NN	RR	VV	NR	NV	RV	MIN
N	2	0	0	1	1	0	0
R	0	2	0	1	0	1	0
V	0	0	2	0	1	1	0
MAX	2	2	2	1	1	1	

Le jeu ne possède pas de valeur donc pas de points selle.

4.2.4 Stratégies prudentes mixtes dans les jeux à somme nulle

Définition 4.2.4.1 .une stratégie mixte σ_1 du joueur 1 est une stratégie prudente ou maxmin si et seulement si $\sigma_1 \in \arg \max_{\sigma_i \in \sum_i} \min_{y\in Y} f(\,\sigma_i, y)$ et de même un stratégie mixte σ_2 du joueur 2 est prudente si et seulement si $\sigma_2 \in arg \min_{\sigma_{2\in\Sigma_2}} \max_{x\in X} f(x, \sigma_2)$

Remarque : On peut bien parler de maxmin et minmax car l'ensemble des stratégies **mixtes** d'un joueur i=1,2 est compact donc les bornes sont atteintes.

Théorème 4.2.4.1 (VonNeumann 1928) : Tout jeu fini possède une valeur en stratégies mixtes.

Propriétés

1) Tout jeu fini admet un point selle en stratégies mixtes ;
2) Si (σ_i, σ_{-i}) est un couple de stratégies optimales alors :$f(s_i, \sigma_{-i}) = V, \forall\, s_i \in supp(\sigma_i)$ pour $i = 1,2$

Exemple4.2.4.1

Soit la matrice de jeu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Déterminer les stratégies mixtes prudentes de ce jeu.

On peut remarquer que $\underline{v} = 1 < \bar{v} = 2$ donc pas de points selle en stratégies pures.

En mixtes : on cherche d'abord celle du joueur 2 car il possède moins de stratégies : donc on doit déterminer :

$$\min_{q\in[0,1]} \max\big(2q + 1 - q, q + 2(1-q), 4(1-q)\big) = \min_{q\in[0,1]} \max\big(q + 1, -q + 2{,}4(1-q)\big)$$

Or: $\max\big(q + 1, -q + 2{,}4(1-q)\big) = \begin{cases} 4(1-q)\ sur\ [0, \frac{3}{5}] \\ q + 1\ sur\ [\frac{3}{5}, 1] \end{cases}$

Donc le minimum est atteint pour $q = \frac{3}{5}$ donc la stratégie prudente du joueur 2 est $\sigma_2 = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$

Pour trouver la stratégie prudente du joueur 1 on vérifie d'abord le gain de ses différentes stratégies pures face à la stratégie prudente σ_2, pour toute stratégie appartenant au support le gain reste inchangée : pour la première stratégie on trouve $2\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$, pour la deuxième $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$, et enfin pour la troisième : $4\frac{2}{5} = \frac{8}{5}$ donc $\underline{v} = \frac{8}{5}$ et la stratégie 2 n'appartient pas au support donc la starétgie prudente du joueur 1 est de type $\sigma_1 = (p, 0{,}1 - p)$ toujours par rapport à l'invariance du support du joueur 2 on trouve $p = \frac{4}{5}$ et $\sigma_1 = (\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5})$ et $\bar{v} = \frac{8}{5}$.

On peut aussi remarquer que la stratégie 2 du joueur 1 est complétement dominée par une combinaison mixte des stratégies 1 et 3.

Théorème4.2.4.2 (Von Neumann 1928) : tout jeu fini a une valeur en stratégie mixte.

Théorème 4.2.4.3

Considérons un jeu fini à somme nulle alors un profil $(\sigma *_1, \sigma *_2)$ est un profil d'équilibre de Nash si et seulement si c'est un profil de stratégies prudentes.

Donc la notion de prudence coïncide complétement avec la notion de l'équilibre de Nash dans les jeux finis à somme nulle.

4.3 TP3 : calcul de la valeur en mixtes pour les jeux à somme nulle

Résumé

Dans ce TP nous allons développer une petite application qui permet de calculer les points selle et la valeur d'un jeu à somme nulle. Pour ce faire il faut adapter les algorithmes de calcul de l'équilibre de Nash vus dans le chapitre précédent au problème posé.

Langage de programmation

Il est préférable de travailler avec le langage Python, mais le C++ est aussi accepté.

Chapitre 5

Jeux sous forme extensive

Introduction

Nous avons vu dans les précédents chapitres que la forme normale ou stratégique a pour vocation la modélisation des jeux dans lesquels les joueurs jouent une seule et tous en même temps. La modélisation d'un jeu sous forme extensive correspond aux jeux séquentiels c'est-à-dire les jeux où le temps joue un rôle.

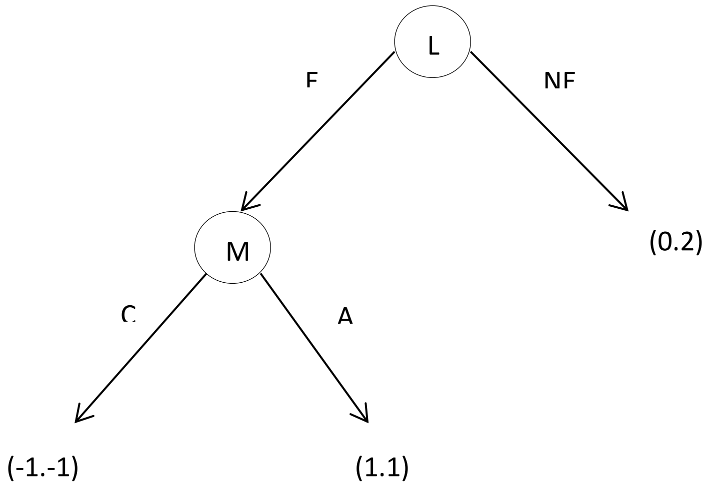
Des exemples très connus sont les jeux de société : jeux d'échecs, cartes, Monopoly etc.., mais l'intérêt que ce polycopié a porté aux jeux stratégiques est justifié par le fait que tout jeu séquentiel peut être représenté avec un choix judicieux des stratégies sous forme normale (voir la solution de l'exercice 3.4.1). Cependant il est nécessaire d'introduire quelques concepts sur la modélisation sous formes extensive.

5.1 Modèle

Avant de définir le modèle d'une manière exacte le modèle, nous donnons un exemple pour mieux l'illustrer :

Exemple 5.1.1

Une firme M possède le monopole sur un marché, et une autre firme L peut décider d'entrer (E) ou (NE) pas sur ce marché. LA firme M peut alors accepter (A) ou combattre(C) la firme L. Le jeu peut alors être représenté par un arbre comme suit :



On peut lire alors :

Si la firme L décide de ne pas entrer sur le marché elle ne gagne rien et la firme M garde le marché et gagne 2, sinon si la firme M accepte et s'adapte les deux firmes se partage le marché et gagne chacune 1 sinon elles vont rentrer dans un combat (médiatique, publicitaire etc..) et perdent chacune 1.

Donc un jeu sous forme extensive peut être représenté par un arbre (graphe connexe sans cycles) où :

- A chaque nœud terminal correspond un résultat du jeu.
- A chaque nœud non terminal est associé un joueur : arrivé à ce point du jeu c'est à son tour de jouer.

- Chaque représente chaque action que peut entreprendre le joueur à cet étape du jeu.

5.2 jeux en information parfaite

Définition 5.2.1 : un jeu sous forme extensive en information parfaite est donné par :

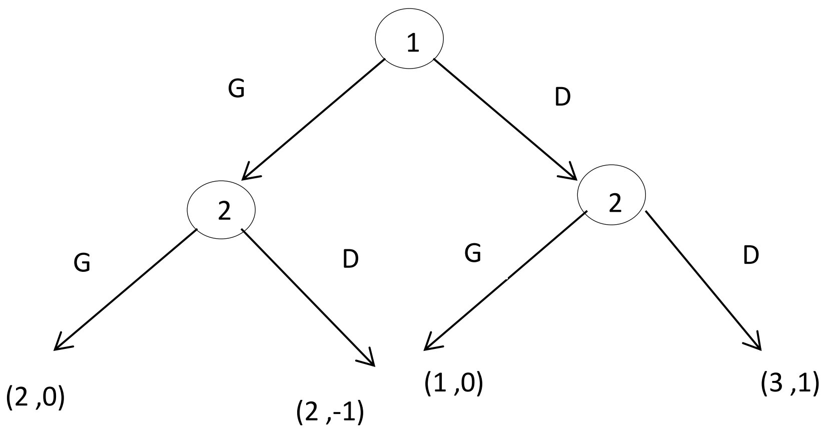
- Un nombre fini de joueurs.
- Un arbre Z constitué d'un ensemble de nœuds $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ muni d'une relation de « succession ».
- Le nœud initial t_1 (racine) qui n'est le successeur d'aucun autre nœud.
- Chaque nœud (non initial) est le successeur d'un seul nœud.
- Les nœuds terminaux n'ont pas de successeurs ($\mathrm{s}(t_i)$ représente l'ensemble des successeurs d'un noeud t_i).
- A chaque nœud non terminal t_i est associé un joueur *i,* qui doit jouer à ce point du jeu.
- A chaque nœud t_i correspond un ensemble d'actions $A(t_i)$ à chaque action correspond un seul nœud successeur de $\mathrm{s}(t_i)$.
- A chaque nœud terminal correspond un vecteur de paiement.
- Pour chaque joueur i une fonction u_i de paiement définie sur l'ensemble des nœuds terminaux noté $\check{T}$, $u_i : \check{T} \to \mathbb{R}$.

Une stratégie pure s_i dans un jeu sous forme extensive du joueur i associe à chacun de ses ensembles d'informations $u(t_i)$ $t_i \in T$ une action $a \in A(t_i)$.

Exemple 5.2.1 (Exemple récurrent)

Soit un jeu à deux joueurs, où chaque joueur possède deux actions possibles : aller à gauche ou à droite un joueur joue en premier, chaque joueur préfère être à droite si l'autre est à droite sinon il préfère la gauche.

La présentation de ce jeu sous sa forme extensive est la suivante :



5.3 Introduction du joueur hasard (Nature)

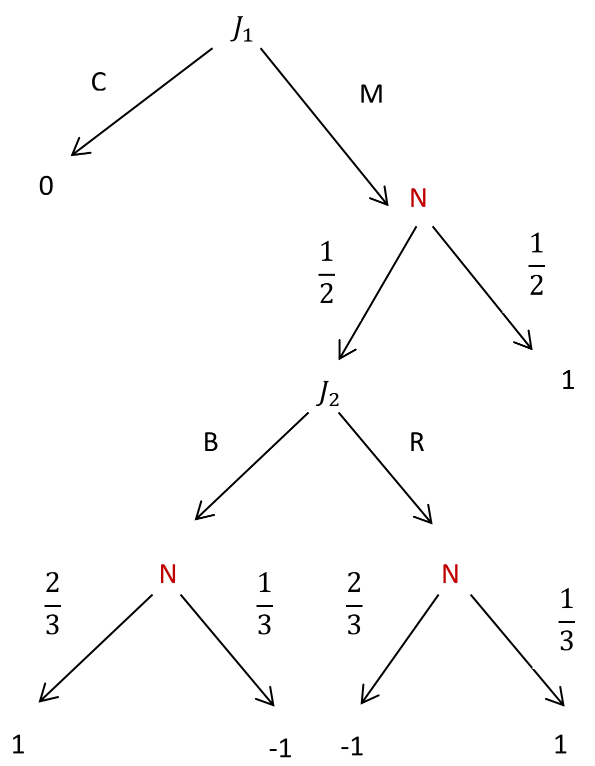
Le modèle de jeu sous forme extensive à information parfaite ne peut pas toujours présenter les situations aléatoires qui peuvent intervenir durant le jeu. D'où la nécessité d'introduire un joueur « Nature ». C'est une variante du model présenté dans la définition 5.2.1 auquel on ajoute :

- Un joueur « Nature », on le rajoute dans l'arbre c'est le joueur 0 qui n'a pas de fonction de paiement.
- Les probabilités de chacune des actions du joueur « Nature » sont énoncées.

Exemple 5.3.1

On considère le jeu à deux joueurs et à somme nulle suivant : le joueur 1 choisit de se Coucher(partie nulle), ou de Miser. S'il mise, on tire pile ou face si c'est pile le joueur 1 gagne. Si c'est face, c'est au joueur 2 de jouer en choisissant Blanc ou Rouge. On mélange deux blanches et une rouge et on tire au hasard. Si le joueur 2 avait deviné juste il gagne, sinon c'est le jouer 1 qui gagne.

La forme extensive de ce jeu avec un joueur N nature est le suivant :



5.4 Réduction sous forme normale.

Même si les jeux sous forme extensive font intervenir la notion du temps. Ils peuvent tout de même être représentés par des jeux sous forme stratégique ou normale. Cette représentation est basée sur le simple fait qu'un joueur peut au préalable décider avant que le jeu ne commence ce qu'il va faire faire dans chaque nœud qu'il contrôle (voir l'exercice 3.4.1).

5.5 Equilibres de Nash

Définition 5.5.1 un équilibre de Nash d'un jeu sous forme extensive est un équilibre de Nash de sa forme normale associée.

Proposition 5.5.1 : tout jeu sous forme extensive fini à information parfaite et sans hasard admet un équilibre en stratégies pures.

Un corollaire assez intéressant à preuve évidente :

Corollaire 5.5.1 (Théorème de Zermelo et Von Neumann) : dans tout à deux joueurs à informations parfaites, déterministe à somme nulle au gains(Victoire, défaite, nul), l'un des joueurs possède une stratégie dans laquelle il assure au moins le nul.

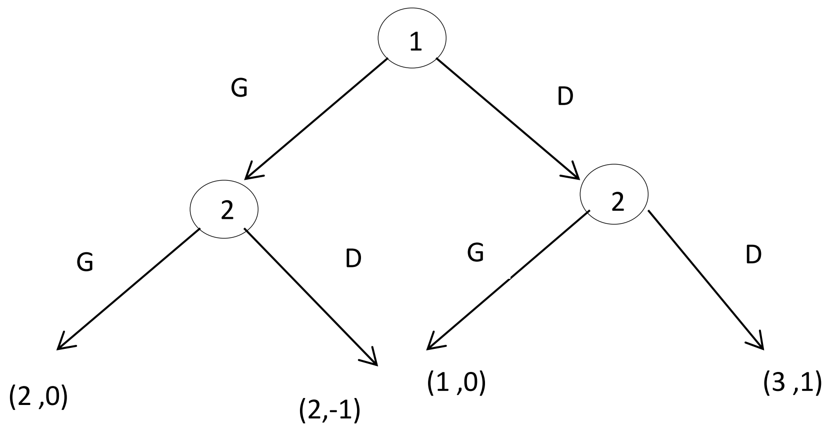
Donc dans un jeu de ce type où le nul n'est pas issue du jeu chaque joueur possède inévitablement une stratégie gagnante (mais il faut encore la trouver).

Ce résultat peut être appliqué aux jeux de table comme le jeu des Dames, Echecs, etc…

5.6 Equilibre parfait (l'algorithme de Kuhn,1913)

Nous allons reprendre l'exemple récurrent (exemple 5.2.1) pour expliquer ce concept :

La présentation de ce jeu sous sa forme extensive est la suivante :



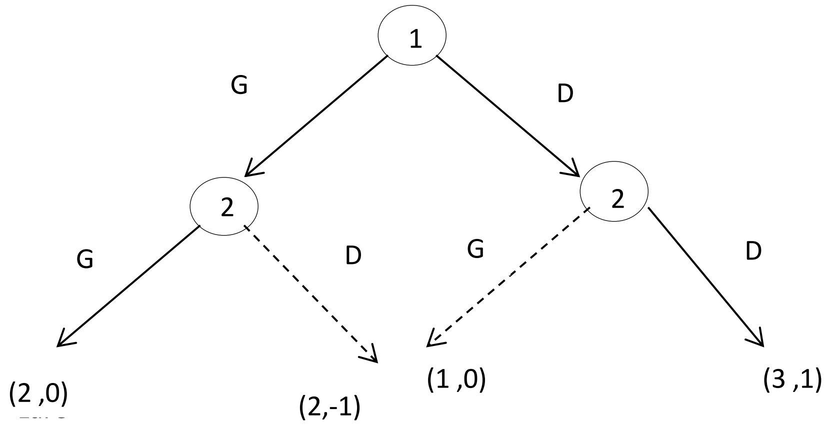
Et déterminons les équilibres de Nash pour cela nous allons réduire ce jeu à sa forme normale dont la matrice est la suivante : la stratégie (G/D) s'interprète ainsi : « sachant qu'il est allé à droite je vais à gauche ».

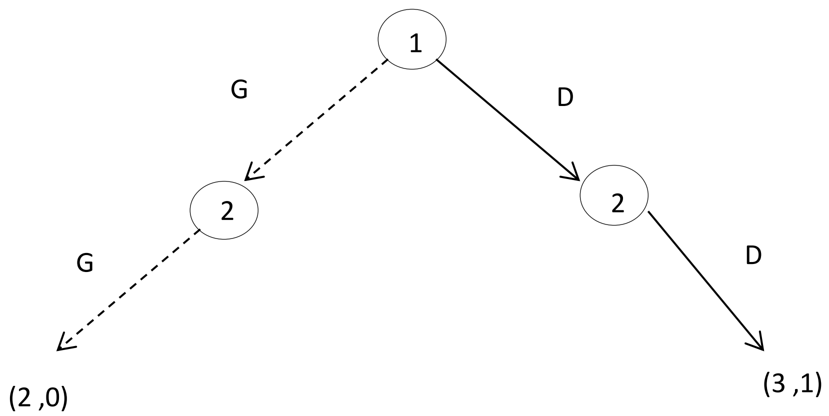
1/2	G/G	D/G	G/D	D/D
G	(2,0)	(2,-1)	**(2,0)**	(2,-1)
D	(1,0)	(3,1)	(1,0)	**(3,1)**

D'où les équilibres de Nash sont : (**G, G/D**) de paiement (0,2) et (**D,D/D)** de paiement (3,1).

Le premier équilibre (**G, G/D**) est du moins qu'on puisse dire très peu rationnel sachant que le joueur 1 a annoncé qu'il allait jouer à droite le joueur 2 va jouer à gauche alors que le mieux pour lui serait de jouer à droite. Donc un équilibre non réalisable ce qu'on appelle communément les équilibres basés sur une menace non crédible. Pour éviter ce genre de situation l'idée est simple elle consiste à exiger que la stratégie soit « séquentiellement rationnelle », c'est-à-dire optimale en tout point de l'arbre.

Donc le raisonnement se fera ainsi le joueur 1 sait que la stratégie optimale du joueur 2 est de jouer G s'il joue G et D s'il joue D. et l'optimale pour lui c'est D donc il jouera D ce qui conduira au deuxième équilibre de Nash c'est-à-dire (D, D/D) de paiement (3,1) comme on peut le voir sur l'arbre:





L'équilibre déterminé sous cette forme est appelé **équilibre parfait** du jeu.

Le raisonnement précédent peut être généralisé à tout jeu en information parfaite.

L'algorithme est le suivant : plaçons-nous en fin d'un jeu, en un nœud prédécesseur d'un nœud terminal. Imaginons que le déroulement du jeu conduise à ce point. On peut anticiper que le joueur en question, jouera de manière optimale et choisira l'action (on suppose ici qu'il n'y a pas d'indifférence pour simplifier) qui maximise son gain. On peut donc effacer les autres actions issues de ce nœud. Le comportement devient d'une certaine manière totalement prévisible et on peut remplacer le nœud en question par le nœud terminal (avec les paiements correspondants) associé à l'action optimale. On recommence la procédure d'analyse pour les autres nœuds qui précèdent immédiatement les nœuds terminaux. A chaque étape de l'algorithme, l'arbre est (strictement) réduit. Si l'on répète l'opération on débouche nécessairement sur le nœud initial. Le jeu est réduit à un problème de décision simple du premier joueur.

5.7 Equilibre parfait en sous-jeux

Définition 5.7.1 : On appelle sous jeu d'un jeu donné sous forme extensive**,** le jeu défini par un sous arbre commençant en un ensemble d'informations réduit à un singleton.

Définition 5.7.2 : un profil de stratégies σ est un équilibre sous-jeu parfait s'il induit un équilibre de Nash dans tous les sous jeux.

Remarque 5.7.3 : un équilibre sous-jeu parfait est un équilibre de Nash**.**

Si on reprend **l'exemple 5.1.1** : les équilibres de Nash de ce jeu sont (E,A) et (NE,C), le premier est un équilibre sous-jeu parfait et le second ne l'est pas.

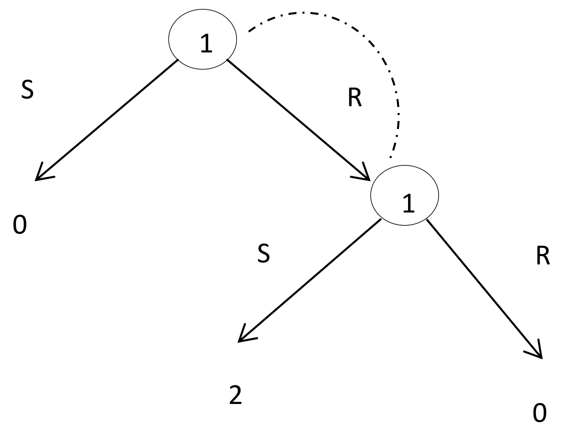
Théorème 5.7.1 tout jeu sous forme extensive à information parfaites admet un équilibre sous-jeu parfait en stratégies pures.

5.8 Stratégies mixtes et de comportements :

Dans un jeu sous forme extensive une stratégie mixte peut être exprimée comme suit : le premier joueur choisit une stratégie pure de manière aléatoire. Or le nombre de stratégies pures d'un jeu sous forme extensive grandit de manière exponentielle avec le nombre d'ensembles d'informations et le nombre d'actions $A(t_i)$ associées à chaque nœud. Une stratégie mixte devient alors un concept compliqué à traiter car c'est une distribution de probabilités sur un très grand nombre d'éléments. De ce fait un autre type de stratégie aléatoire a été introduit qui est celle du comportement. Dans une stratégie du comportement à chaque fois qu'il choisit une action il la choisit aléatoirement, ce qui limite l'ensemble car le nombre d'actions est limité par rapport à l'ensemble de toutes les stratégies pures dans un jeu sous forme extensive.

Exemple 5.8.1

Soit un conducteur distrait. Une autoroute comprend deux sorties, et pour se rendre chez lui, il doit prendre la seconde sortie. Mais comme il est distrait, au moment où il doit sortir il ne sait plus s'il se trouve à la première ou la seconde sortie. La présentation de ce jeu sous sa forme extensive est la suivante :



Toutes les stratégies pures donnent un paiement 0, car à chaque fois il va se retrouver en train de se poser la question comme il ne distingue pas s'il est dans le premier nœud ou le deuxième. Ses seules stratégies pures sont (S,S) ou (R,R).donc de paiement 0 et comme le paiement d'une stratégie mixte est l'espérance des paiement des pures donc il sera toujours égal à 0

Mais avec une stratégie du comportement qui consiste à jouer $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}R$ dans chacun des nœuds, il obtient un gain en espérance mathématique égal à $\frac{1}{2}$. Donc il aura tout de même une chance sur quatre d'arriver chez lui.

Théorème 5.8.1. Tout jeu sous forme extensive à information imparfaite admet un équilibre sous-jeu parfait en stratégies mixtes (donc en stratégies du comportement).

Preuve : la preuve se fait par « induction en amont » on raisonne par récurrence sur la taille de l'arbre.

Pour $n = 1$ évident

Pour $n \geq 2$. On identifie un sous-jeu de taille minimal

Ce sous jeu admet un équilibre de Nash (théorème de Nash), comme il est de taille minimale c'est aussi un équilibre sous-jeu parfait.

On remplace le sous jeu par le paiement de Nash, le nouveau jeu possède un équilibre sous–jeu parfait par hypothèse de récurrence.

Remarque 5.8.1

On déduit de cette preuve un algorithme pour trouver des équilibres sous-jeu parfaits :

- Identifier un sous-jeu minimal
- Calculer un équilibre de Nash de ce sous-jeu.
- Remplacer le sous-jeu par un nœud terminal dont le paiement est celui de l'équilibre de Nash.
- Recommencer cette procédure.
- Dans le cas où le sous-jeu de taille minimale admet plusieurs équilibres de Nash(c'est lorsque un joueur possède deux actions qui lui rapportent le même gain), on choisit un des équilibres et on continue la procédure.

Exercices

Exercice 1 :
Supposons qu'un agent ait le choix pour se rendre au travail entre trois alternatives :
La voiture, le bus ou le métro. Si la différence du temps de trajet est inférieure à 5 minutes, l'agent préfère le moyen le plus confortable sinon il préféra le plus rapide. Supposons que la voiture est plus confortable que le bus qui est plus confortable que le métro. Supposons aussi que la durée du trajet en voiture est $t_v = 18\, min$, celui en bus est $t_b = 14\, min$ et pour le métro $t_m = 10\, min$
Est-ce que cette relation peut définir une relation de préférence rationnelle ?

Exercice 2 (jeux de la tirelire**)**

Le jeu suivant est proposé à deux étudiants choisis au hasard : chacun à la possibilité de mettre 0 ou 100 dinars dans une tirelire. Après que chaque étudiant ait pris sa décision sans connaitre la décision de l'autre, le contenu de la tirelire sera multipliée par 1.5 et partagé à parts égales entre les deux étudiants.

1) Modéliser ce jeu sous forme normale.
2) Déterminer une stratégie dominante pour les deux joueurs.
3) Vérifier si ce jeu possède un équilibre en stratégie strictement dominantes.

Exercice 3

Soit la matrice suivante illustrant la forme normale d'un jeu à deux joueurs :

1 \ 2	B_1	B_2	B_3
A_1	(10,10)	(4,9)	(4,11)
A_2	(5,6)	(8,3)	(3,4)
A_3	(4,0)	(8,1)	(5,3)

1) Effectuer l'itération des stratégies dominées.
2) Déterminer un équilibre en stratégies strictement dominantes.

Exercice4

Deux joueurs décident de se partager un dinar. Le processus de marchandage se déroule de la manière suivante : les joueurs annoncent simultanément la part qu'ils veulent recevoir s_1 et s_2, $0 \leq s_1, s_2 \leq 1$. Alors les joueurs recevraient les parts qu'ils ont demandées si $s_1 + s_2 \leq 1$, 0 sinon.

1) Peut-on représenter ce jeu par une matrice de dimension fini ?
2) Laquelle de ces stratégie est une stratégie strictement dominante
   a) 1
   b) 0.5
   c) 0
   d) Aucune des 3 premières.

Exercice 7

1) Montrer que si dans un jeu, un joueur i possède une stratégie strictement dominante alors elle est unique.
2) **Jeu : le renvoi de l'ascenseur :** Deux inconnus se retrouvent au rez-de-chaussée d'une grande tour devant un petit ascenseur à une seule place dont la porte est ouverte. Il n'y'a pas de bouton pour le rappeler quand il sera monté. Les deux joueurs ont deux solutions : trahir ou coopérerez. S'ils coopèrent tous les deux un joueur monte puis renvoie l'ascenseur, les deux joueurs gagnent. Si un joueur coopère et l'autre trahit, prend l'ascenseur gagne et ne le renvoie pas. Si les deux joueurs trahissent aucun ne cède et ils seront obligés de monter à pieds et ils perdent tous les deux.

a) Ecrire la matrice du jeu ? ce jeu possède-t-il des stratégies strictement dominantes ? faiblement dominantes ? sont-elles uniques pour chaque joueur ? sont-elles équivalentes ? Que peut en en déduire ?

Exercice 8 Enchères au second prix (Enchères de Vickrey) :

Un objet invisible par exemple un tableau est vendu suivant la procédure suivante :

- Chaque acheteur potentiel (joueur) i soumet sous enveloppe une propositionb_i.
- L'acheteur qui soumet la plus grande offre gagne l'objet et paye pour l'acquérir le second meilleur prix offert $y = \max_{j \neq i} b_j$.
- On suppose que chaque acheteur potentiel à une évaluation v_i pour l'objet qui reflète toute valeur subjective et objective pour lui.
  1) L'ensemble des stratégies est-il-fini ?

  Quelle sera l'issue du jeu en utilisant la notion de dominance.

Exercice 9 (modèle de Bertrand Duopoly)

Deux firmes produisant un même bien, avec un coût de production égal à C >0 par unité.
Chaque firme impose un prix positif ou nul (p_1 et p_2) respectivement.
Tous les clients achètent de la firme au prix le plus bas si $p_1 \neq p_2$, la moitié des clients achètent de chacune des firmes si les prix sont égaux.
D est la demande totale.
Le profit d'une firme i sera calculé comme suit :
0 si $p_i > p_j$ (aucun n'achète de la firme i)
$D(p_i - c)/2$ si $p_i = p_j$
$D(p_i - c)$ si $p_i < p_j$ (tous les clients achètent de la firme i)
Trouver l'équilibre de Nash en stratégie pure est ce :

a) Toutes les deux proposent le prix 0
b) La première propose 0 et la deuxième C.
c) Les deux proposent le prix C.
d) Ne possède pas d'équilibre de Nash en stratégie pure.

Exercice10

Deux joueurs choisissent chacun, à l'insu l'un de l'autre, une pièce de monnaie de 10 dinars, 50 dinars ou 100 dinars et se les montrent simultanément.
Si les deux pièces présentées sont de même valeur, le joueur 1 (qui sera le joueur des lignes) gagne la pièce du joueur 2 ; si elles sont différentes, c'est le joueur 2 qui gagne celle du joueur1.

1) Ce jeu est-il un jeu à somme nulle ? Construire la matrice du jeu.
2) Que valent Maxmin et Min max en stratégies pures ?

3) Quel majorant v¯le joueur 2 peut-il imposer à l'espérance de gain du joueur 1 en jouant la stratégie mixte σ_2=(3/26;11/26;12/26).
4) Montrer que le joueur 1peut s'assurer une espérance de gain v¯en jouant une unique stratégie mixte que l'on déterminera.En déduire la valeur du jeu et les stratégies mixtes optimales pour les deux joueurs.

Exercice 11

Soit le jeu à 3 joueurs sous forme normale suivant, 2 stratégies chacun :

3 :E		
1/2	**C**	**D**
A	**(0,0,0)**	**(0,1,-1)**
B	**(2,2,2)**	**(-1,3,4)**

3 :F		
1/2	**C**	**D**
A	**(8,4,2)**	**(7,7,-2)**
B	**(9,2,5)**	**(-10,1,0)**

Trouver tous les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu, les profils Pareto dominants et les niveaux de sécurité de chaque joueur.

Exercice 12

On considère le jeu à somme nulle donné par $X = Y = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$ $f(x, y) = \frac{1}{x+y} + 2xy$

1) Quelles sont les stratégies dominantes du joueur 1 et 2 ?
2) Le jeu admet-il une valeur ? Si oui la déterminer.

Exercice 13

Soit un marché où deux entreprises produisent un bien homogène. Comme dans le duopole de Cournot les stratégies sont les quantités produites par chaque entreprise, mais le jeu se déroule en deux étapes. À la première étape, l'entreprise 1 choisit la quantité q1, puis à la seconde étape, après avoir observé q1, l'entreprise 2 choisit q2. Le fait que l'entreprise 1 choisit sa production en premier lieu, i.e., est "leader", constitue une donnée de la situation. La fonction de demande inverse à la branche est : p (q1 + q2) = a − (q1 + q2). La fonction de coût est la même pour les deux entreprises : C(q) = cq avec 0 < c < a.

1. Représenter le jeu sous forme extensive.
2. Déterminer l'équilibre de Nash parfait (aussi appelé "équilibre de Stackelberg").
3. Comparer les profits des deux entreprises dans le jeu en deux étapes et celui où elles choisissent leurs quantités simultanément (duopole de Cournot).