USTHB
Faculté d'Informatique
Département Intelligence Artificielle et Sciences des Données
Master 2 Informatique visuelle
Représentation des Connaissances et Raisonnement Année Universitaire : 2023-2024

TD5- TP5
Théorie des Fonctions de Croyance

Rappel :

Distribution de masses de croyance :

$$m: 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$$

$$i) m(\emptyset) = 0$$

$$ii) \sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$$

Deux mesures sont définies

- *Crédibilité*

$$bel : 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$$

$$bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

Toute la masse de croyance placée exactement sur *A*.

$$bel(A) = 1 - pl(\overline{A})$$

- *Plausibilité*

$$pl : 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$$

$$pl(A) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(B)$$

Force avec laquelle on ne doute pas de la proposition *A*.

$$pl(\emptyset) = 0; \; pl(\Omega) = 1$$

$$bel(A) \leq P(A) \leq pl(A)$$

Combinaison conjonctive :

Degré de conflit :

$$K = (m_1 \cap m_2)(\emptyset) = \sum_{A \cap B = \emptyset} m_1(A) \cdot m_2(B)$$

Règle de Dempster : somme conjonctive + normalisation

$$(m_1 \oplus m_2)(C) = \frac{\sum_{A \cap B = C} m_1(A) \cdot m_2(B)}{1 - K}$$

Exercice 1 :

Nous désirons développer un système afin de définir l'espèce d'une plante végétale "l'iris». Les trois espèces possibles sont: Setosa, Versicolor, Virginica. Trois experts en botanique évaluent l'appartenance d'un échantillon à une espèce comme suit:

- le premier expert appui l'appartenance de l'échantillon au type Versicolor avec un degré 0.6.
- le second expert estime l'appartenance de l'échantillon:
  - au type Setosa à 0.1,
  - et au type Setosa ou au type Virginica à 0.5.
- le troisième expert ne donne pas d'indice particulier.

1- Modélisez ces connaissances en utilisant la théorie des fonctions de croyance

Ω={Setosa (S), Versicolor (V), VIrginica (I) }

Expertise 1

$M_1(\{V\})=0.6$; $M_1(\Omega)=0.4$

Expertise 2:

$M_2(\{S\})=0.1$; $M_2(\{S,I\})= 0.5$; $M_2(\Omega)=0.4$

Expertise 3:

$M_1(\Omega)=1$

2- Calculez les degrés de croyance et les degrés de plausibilité associés à la distribution du premier expert.

Hypothèse	m	Bel	Pl
{V}	0.6	0.6	1
{S}	0	0	0.4
{I}	0	0	0.4
{V,I}	0	0.6	1
{V ,S}	0	0.6	1
{S,I}	0	0	0.4
Ω	0.4	0.6+0.4=1	
$\varnothing$	0	0	0

3- Quelle est l'hypothèse la plus soutenue?
Aucune hypothèse n'est privilégiée.

4- Comment combiner les différentes hypothèses en utilisant la théorie des fonctions de croyance? Explicitez chaque étape.

Degré de conflit :

$$K = (m_1 \cap m_2)(\varnothing) = \sum_{A \cap B = \varnothing} m_1(A) \cdot m_2(B)$$

Règle de Dempster : somme conjonctive + normalisation

$$(m_1 \oplus m_2)(C) = \frac{\sum_{A \cap B = C} m_1(A) \cdot m_2(B)}{1 - K}$$

a- Combinaison de m1 et de m2

m1 / m2	{V} 0.6	Ω 0.4
{S} 0.1	∅ 0.1*0.6=0.06	{S} 0.1*0.4=0.04
{S,I} 0.5	∅ 0.5*0.6=0.3	{S,I} 0.5*0.4=0.2
Ω 0.4	{V} 0.6*0.4=0.24	Ω 0.4*0.4=0.16

K=0.06+0.3=0.36
1/1-k=1.5625
m_{12}({V})=1.5625*0.24=0.375
m_{12}({S})=1.5625*0.04=0.0625
m_{12}({S,I)}=1.5625*0.2=0.3125
m_{12}(Ω)=1.5625*0.160=0.25

b- Combinaison de m12 avec m3:

M12 / M3	{V} 0.375	{S} 0.0625	{SI} 0.3125	Ω 0.25
Ω 1	{V} 0.375	{S} 0.0625	{SI} 0.3125	Ω 0.25

Etant donné que la troisième expertise correspond à un cas d'ignorance totale, la combinaison de m_{12} avec m_3 fournit la même distribution de masse que m_{12} (1 étant l'élément neutre de la multiplication). Les éléments focaux restent inchangés et k=0 (1/1-k=1).

Ainsi,
m_{123}({V})=1.5625*0.24=0.375
m_{123}({S})=1.5625*0.04=0.0625
m_{123}({S,I)}=1.5625*0.2=0.3125
m_{123}(Ω)=1.5625*0.160=0.25
Σ m_{123}(A)=1 et m_{123}(∅)=0 dans le cas d'un monde clos.

Hypothèse	M_{123}	Bel	Pl
{V}	0.375	0.375	0.375+0.25=0.625
{S}	0.0625	0.0625	0.0625+0.3125+0.25=0.625
{I}	0	0	0.3125+0.25=0.5625
{V,I}	0	0.375	0.375+0.3125+0.25=0.9375
{V ,S}	0	0.375+0.0625=0.4375	0.375+0.0625+0.3125+0.25=1
{S,I}	0.3125	0.0625+0.3125=0.375	0.0625+0.3125+0.25=0.625
Ω	0.25	0.375+0.0625+0.3125+0.25=1	0.375+0.0625+0.3125+0.25=1
∅	0	0	0

L'intervalle de confiance est définie par [bel(A), Pl(A)]. Plus l'intervalle est petit, plus l'hypothèse est soutenue ce qui correspond dans cet exercice aux hypothèses {V} et {S,I}.

Exercice 2 :

Trois experts ont la tâche de classifier des images IRM cérébrales afin de détecter des tumeurs cérébrales.

- Le premier atteste que la zone considérée appartient à la matière blanche ou à la zone tumorale à 66 % et à la matière grise à 15%.
- Le deuxième expert affirme que la zone appartient à la matière grise à 33% et à la zone tumorale à 50%.
- Le troisième expert atteste que la zone attribuée appartient à chaque catégorie d'une manière équitable.

1- Modélisez ce problème en utilisant la théorie de Dempster-Shafer.

Ω={ Matière Blanche (MB), Zone Tumorale(ZT), Matière Grise (MG) }

Expertise 1

$M_1(\{MB,ZT\})=0.66$; $M_1(\{MG\})= 0.15$; $M_1(\Omega)=0.19$;

Expertise 2:

$M_2(\{MG\})=0.33$; $M_2(\{ZT\})= 0.5$; $M_2(\Omega)=0.17$

Expertise 3:

$M_3(\{MB\})=M_3(\{MG\})=M_3(\{ZT\})=1/3$

2- Sachant que la première source est affaiblie à 12%, comment peut-on prendre en compte ces différents indices afin de trouver le coupable. Explicitez Que peut-on conclure?

Affaiblissement (*discounting*)

- *m* induite par une source *S*
- P(*S* non fiable) = α
- Affaiblissement de *m* :

$$
\begin{aligned}
{}^{\alpha}m(A) &= (1-\alpha)m(A) \quad \forall A \in 2^{\Omega} \setminus \Omega \\
{}^{\alpha}m(\Omega) &= m(\Omega) + \alpha(1 - m(\Omega))
\end{aligned}
$$

- Si α = 1 ☞ $^{\alpha}$ *m*(Ω)=1
- Si α = 0 ☞$^{\alpha}$ *m* = *m*

Expertise 1 affaiblie à 12%

$M'_1(\{MB,ZT\})=(1-0.12)* M_1(\{MB,ZT\})=0.66*0.88=0.5808$;

$M'_1(\{MG\})= 1-0.12)* M_1(\{MG\})=0.15*0.88=0.132$;

$M'_1(\Omega)=M_1(\Omega)+0.12(1- M_1(\Omega))=0.19+0.12*(1-0.19)=0.2872$;

3- Comment tenir compte des trois sources de connaissances. Explicitez

a- Combinaison de m'_1 et m_2 :

m'_1 / m_2	{MB,ZT} 0.5808	{MG} 0.132	Ω 0.2872
{MG} 0.33	∅ 0.5808*0.33= 0.1916	{MG} 0.04356	{MG} 0.094
{ZT} 0.5	{ZT} 0.2904	∅ 0.066	{ZT} 0.1436
Ω 0.17	{MB,ZT} 0.0987	{MG} 0.0224	Ω 0.0488

K=0.1916+0.066=0.2576

1/1-k=1.3469

M_{12}({MG})=1.3469*(0.04356+0.094+0.0224)=0.2154

M_{12}({ZT})=1.3469*(0.2904+0.1436)=0.5845

M_{12}({MB,ZT})=1.3469*0.0987=0.1329

M_{12}(Ω)=1.3469*0.0488=0.0657

b- Combinaison de m_{12} et m_3

m_{12} / m_3	{MG} 0.2154	{ZT} 0.5845	{MB,ZT} 0.1329	Ω 0.0657
{MG} 0.3333	{MG} 0.0717	∅ 0.1948	∅ 0.0442	{MG} 0.0218
{ZT} 0.3333	∅ 0.0717	{ZT} 0.1948	{ZT} 0.0442	∅ 0.0218
{MB} 0.3333	∅ 0.0717	∅ 0.1948	{MB} 0.0442	{MB} 0.0218

K=0.1948+0.0442+0.0717+0.0218+0.0717+0.1948=0.599

1/1-k=2.4937

Il vient :

m_{123}({MG})= 2.4937*(0.0717+0.0218)=0.2331

m_{123}({ZT})= 2.4937*(0.1948+0.0442)=0.5967

m_{123}({MB})= 2.4937*(0.0442+0.0218)=0.1645

Σ m_{123}(A)=1 et m_{123}(∅)=0 dans le cas d'un monde clos.

<u>Remarque :</u>

Les éléments focaux de la distribution de masse résultante sont des singletons. Cette distribution correspond à une distribution de probabilités.