Les Logiques Non Monotones

En logique classique, la formalisation du raisonnement est strictement correct.

Le raisonnement sur des informations incertaines, incomplètes et évolutives est dit raisonnement conjoncturel, simplement plausible et sujet à révision.

Exemple :

Sachant que la plupart des oiseaux peuvent voler (1)

Et que Titi est un oiseau (2)

Alors j'en conclus que Titi peut voler (3)

(3) n'est pas correct et valide comme en LP s'il est précisé que :

Titi est une autruche (4),

l'assertion (3) est rétracté.

La propriété de monotonie s'oppose à la formalisation directe d'un raisonnement révisable :

Si {p1, .., pn} *infer* q alors {p1, …,pn, r} *infer* q

A$\models$ p : Tout modèle de A de p. est aussi un modèle

Le mot ‘’tout’’ signifie que seules les conséquences ‘’certaines’’ (valides) de A peuvent être inférées.

Un raisonnement révisable n’est pas valide au sens classique du terme.

Construire une logique non monotone nécessite la définition d’une relation d’inférence permettant de tirer des conclusions qui ne sont pas vérifiées dans tous les modèles des prémisses.

Un système d’inférence formalisant un raisonnement révisable doit :

- permettre l’obtention de formules ‘’plausibles’’.
- D’un point de vue sémantique : inférer des formules qui sont consistantes avec les prémisses (vérifiées dans au moins un modèle de celle-ci).

La conclusion (3) n’est pas une conséquence valide de (1) et (2). C’est une formule consistante. Elle appartient à une image du monde qu’il est possible de se donner de façon consistante sur la base de ces deux prémisses.

- Exclure l’inconsistance : exiger la cohérence entre les différentes affirmations.

La notion de révisabilité est donc associée à la notion de consistance.

Si on apprend qu'on a (4) sachant que les autruches sont des oiseaux qui ne volent pas, l'assertion préalablement inférée (3) doit être rétractée.

La logique non monotone permettra donc d'inférer des formules qui sont consistantes entre elles et consistantes avec un ensemble donné de prémisses.

<u>Conclusion</u> :les formules inférées ne sont plus des tautologies et ne sont plus valides.

Différentes formes de raisonnement non monotones.

Il existe deux classes de raisonnement révisables

- Raisonnement révisable car incertain et conjoncturel : généralement, les objets de type X ont la propriété P. Si A est un objet de type X, alors je déduis que A possède (vraisemblablement) la propriété P.

Exemple :Si Titi est oiseau alors j'en déduis que (vraisemblablement) Titi vole.

La connaissance qui me permet d'inférer pareille conclusion est du type : ‘’la plupart des oiseaux volent’’ ou encore ‘’un oiseaux typique vole’’.

Ce raisonnement est tout à fait incertain et un complément d'information peut amener à devoir le réviser.

- **Un raisonnement révisable car de nature introspective :**

Sur la base de mon état de connaissances, je peux déduire que…

Exemple :”ne me connaissant pas un frère aîné, j’en déduis que je n’ai pas de frère aîné”.

Si j’affirme que je n’ai pas de frère aîné, ce n’est pas parce que vraisemblablement je n’en ai pas.

Le mécanisme de raisonnement ici est différent : il est **introspectif** et repose sur l’hypothèse que toute la connaissance relative au problème est donnée : ‘’si j’avais un frère aîné, je le saurais”.

On peux exiger de ce raisonnement qu’il soit effectué de façon certaine sous l’hypothèse que toute l’information pertinente est donnée et est correct, et tout ce qui n’est pas donnée est faux.

Le caractère révisable du raisonnement provient ici du fait que le raisonnement relatif à un état de connaissance.

La Logique des défauts [Reiter 80]

Le raisonnement par défaut s'analyse :

Si A est déductible à partir d'une certaine description du monde, et si rien n'indique que l'on est dans une situation exceptionnelle B, alors conclure C

- **Caractéristique de non-monotonie ?**

En absence d'information sur B, on conclut C, mais si on acquiert l'information supplémentaire sur B, la formule C n'est plus déductible.

Définition : On se place dans un langage du premier ordre et on ne considère que des formules sans variables libres. Un défaut est un ensemble de n+2 formules qui s'écrit:

$$\mathbf{(1)} \qquad \frac{A : B1, \ldots, Bn}{C}$$

A : prérequis du défaut

Bi : sa justification

C : son conséquent

La formule (1) se lit : si A est une conséquence de la théorie et si aucun des Bi n'est nié par la théorie, alors C est aussi une conséquence de la théorie.

Une théorie Δ est formée d'un ensemble W de formule du langage et d'un ensemble D de défauts :

$$\Delta = <W,D>$$

Soit E un ensemble de formules de L.

On dit que E est déductivement clos Ssi E = Th(E).

On note $\Gamma_\Delta(E)$ le plus petit ensemble de formules du langage :

- Contenant W,
- Déductivement clos,
- Tel que pour tout défaut appartenant à D pour lequel $A \in \Gamma(E)$, et pour lequel $\forall i \in [1,n]$, $\neg$ $Bi \notin E$, on ait $C \in \Gamma(E)$.

Exemple:

$\Delta = <W, D>$, $W = \{p\}$, $D = p : q/r$, alors $\Gamma(\emptyset) = Th(\{p,r\})$

E est une extension de Δ ssi $E = \Gamma(E)$

Cette contrainte est dite contrainte de **point fixe**

Exemple:

Δ = <W,D> où W = {A} et D = {A : B / C, A : $\neg$C / $\neg$B}

Cette théorie a deux extensions

1. E = Th ({A,C}); Γ(E) inclut W, donc A; la négation de la justification du premier défaut de D $\notin$ E, donc son conséquent C $\in$ Γ (E); en revanche la négation de la justification du second défaut appartient à E donc nous ne sommes pas contraints d'ajouter $\neg$B à Γ(E); par clôture déductive et minimalité, Γ(E) = Th({A, C}) = E, donc E est une extension.
2. E' = Th({A, $\neg$B}); Γ(E) inclut W, donc A; la négation de la justification du 1ier défaut de D$\in$E', mais non celle du second, donc le conséquent de ce défaut, $\neg$B $\in$ Γ(E') par clôture déductive et minimalité Γ(E') = Th({A, $\neg$B}) = E', donc E' est aussi une extension.

Cette manière de raisonner :

- Conduit à accepter plusieurs solutions (Pluri-extensionalité), ceci permet d'expliquer certains phénomènes d'ambiguïté
- Nécessite une hiérarchie sur les formules f :

1. $f \in W$
2. $f \notin W$ mais f appartient à toutes les extensions
3. f appartient à certaines extensions
4. f n'appartient à aucune

Il existe deux attitudes : sceptique (1-2) ou crédule (1,2,3).

Evaluation :

Cette logique est-elle décidable? Etant donné une théorie Δ, existe-t-il un algorithme qui, pour toute formule, donne son statut ($f \in$ à toute extension/ à une extension/ à aucune extension)

La logique du raisonnement par défaut est indécidable.

Défauts générateurs d'une extension

Soit E une extension de $\Delta = \langle W,D \rangle$; le défaut : $d = A : B1, \ldots, Bn/C \in D$ est dit générateur de l'extension E Ssi son pre-requis A appartient à E et si aucune négation de ses justifications $\neg Bi$ n'appartient à E.

<u>Théorème</u> : *Si DG désigne l'ensemble des conséquents des défauts générateurs d'une extension E, alors $E = Th(W \cup DG)$.*

Ce théorème ne nous apporte pas de procédé de construction des extensions d'une théorie $\langle W, D \rangle$, car il faut deviner a priori quels défauts sont générateurs; Il délimite cependant le champ des possibilités : une extension est caractérisée de façon unique par un sous ensemble de D (mais évidemment, tout sous-ensemble de D ne détermine pas une extension). La pluri-extensionalité est, d'une certaine façon, liée à l'ordre dans lequel on considère les défauts.

Nous nous intéressons à une forme particulière de théories, celle dont tous les défauts ont une seule justification, et où celle-ci est équivalente au conséquent.

Ces théories sont appelées **normales**, les défauts de la forme A:B/C tels que B = C étant appelés **défauts normaux**.

On dira qu'une théorie <W, D> est semi-monotone si pour tout ensemble D' de défauts normaux, toute extension de <W,D> est sous-ensemble d'une extension de <W, D $\cup$ D'>.

Théorème : toute théorie normale est semi-monotone.

Preuve : cf. [Reiter,80] ou Besnard, 89]

Corollaire : *Toute théorie normale possède au moins une extension.*

Qu’est-ce que la semi-monotonie?

Si l’on parvient à établir qu’une formule appartient à une extension d’une théorie normale Δ, elle appartient également à une extension de toute théorie construite en rajoutant des défauts normaux à Δ.

La même propriété peut également s’exprimer ainsi :

si on a réussi à prouver une formule sans utiliser tous les défauts d’une théorie normale Δ, cette preuve suffit pour établir l’appartenance de la formule à une extension de Δ.

Une preuve d'une formule f dans une théorie normale $\Delta = \langle W,D \rangle$ est une suite finie D0, …, Dn telle que :

- Chaque Di ($0 \leq i \leq n$) est un sous-ensemble de D ; on note Pr(Di) l'ensemble des pré-requis des défauts du sous-ensemble Di, Cn(Di) l'ensemble de leurs conséquents;
- f est démontrable en logique ordinaire à partir de W et des conséquents de D0 [en d'autres termes, $f \in Th(W \cup Cn(D0))$];
- Les prérequis de Di-1 sont démontrables en logique ordinaire à partir de W et des conséquents de Di

  [pour $1 \leq i \leq n$, $f \in Pr(Di\text{-}1) \supset f \in Th(W \cup Cn(Di))$];
- $Dn = \emptyset$
- L'ensemble des conséquents des défauts utilisés est cohérent avec le monde [$f \notin Th(W \cup_{i=0,n} Cn(Di))$]

Remarque : Sans la dernière de ces conditions, la notion de preuve ainsi définie déterminerait une logique monotone : en effet, l’ajout de nouvelle formules à W ne remet en cause aucune des autres conditions, mais elle peut apporter une incohérence à l’ensemble des conséquents des défauts utilisés.

Exemple :

Reprenons l'exemple zoologique déjà traité : les nautiles sont des céphalopodes; les céphalopodes sont des mollusques ; les mollusques ont généralement une coquille ; les céphalopodes généralement n'en ont pas ; les nautiles en ont une. La théorie $\Delta = < W, D >$ suivante semble convenir :

$W = \{ (\forall x) (N(x) \supset Cé(x))$, [les nautiles sont des céphalopodes]

$(\forall x) (Cé(x) \supset M(x))$, [les céphalopodes sont des mollusques]

$(\forall x) (N(x) \supset Co(x)) \}$ [les nautiles ont une coquille]

$D = \{ M(x) : Co(x)/ Co(x)$, [les mollusques ont généralement une coquille]

$Cé(x) : \neg Co(x)/ \neg Co(x)$ [les céphalopodes n'ont généralement pas de coquille]}

* On rappelle que les formules de D représentent en fait l'ensemble des défauts obtenus en remplaçant x par les différentes constantes du langage.

a est un nautile, b un céphalopode, c un mollusque, que peut on conclure?

Ou bien quelles sont les extensions de

< W {N(a), Cé(b), M(c)}, D>

On remarque que cette traduction est imparfaite : la connaissance selon laquelle les céphalopodes n'ont généralement pas de coquille devrait, dans le cas de l'individu b, être prioritaire sur celle qui affirme que les mollusques (et b en est un) ont généralement une coquille.

Dans [Froidevaux &Kayser 88] il a été proposé la traduction suivante :

W ={$(\forall x)$ $(N(x) \supset Cé(x))$, $(\forall x)$ $(Cé(x) \supset M(x))$, $(\forall x)$ $(N(x) \supset Co(x))$ }

Comme ci-dessus

$(\forall x)$ $(Cé(x) \supset \neg R1(x))$, [la règle R1 (ci-dessous) ne s'applique pas aux céphalopodes]

$(\forall x)$ $(N(x) \supset \neg R2(x))$}, [la règle R2 ne s'applique pas aux nautiles]

$D = \{ M(x) : R1(x) \wedge Co(x) / Co(x)$ [les mollusques auxquels s'applique la règle R1 ont en généralement une coquille]

$Cé(x) : R2(x) \wedge \neg Co(x) / \neg Co(x)$ [les céphalopodes auxquels s'applique la règle R2 n'en ont généralement pas]

Montrons que la théorie $<W \cup \{N(a), Cé(b)\ M(c)\ \}, D>$ possède une seule extension : Appelons d1a (premier défaut instancié par x=a), … d2c les 6 défauts de D. Toute extension de la théorie contient

$Th(W \cup \{N(a), Cé(b), M(c)\})$, ce qui inclut notamment $cé(a)$, $M(a)$, $Co(a)$, $\neg R1(a)$, $\neg R2(a)$, $M(b)$, $\neg R1(b)$. La présence de

$\neg R1(a)$, $\neg R2(a)$, $\neg R1(b)$ empêche d1a, d2a et d1b d'être générateurs. $Co(b)$ ne pourrait être obtenu que par d1b, donc le fait qu'il ne soit pas générateur empêche cette formule d'appartenir à une extension. $\neg R2(b)$ n'est pas démontrable, donc aucune extension ne peut contenir la négation de la justification de d2b ; ce défaut est générateur.

De même, Cé(c) n’est pas démontrable, donc d2c ne peut être générateur. Or ¬Co(c) n’aurait pu être obtenu que par ce défaut, donc ¬Co(c) n’appartient à aucune extension.

¬R1(c) n’est pas démontrable, donc aucune extension ne peut contenir la négation de la justification de d1c; ce défaut est générateur. Le statut de chaque défaut est déterminé, donc il n’y a qu’une extension.

E = Th(W ∪{N(a), Cé(b), M(c), ¬Co(b), Co(c)})

Cette extension unique contient les formules intuitivement souhaitées.

Nous avons été conduits à utiliser des défauts non normaux, mais ayant la particularité d’avoir pour justification la conjonction de leur conséquent et d’une autre formule. De tels défauts ont été baptisés semi-normaux par Reiter, et une théorie ne comportant que des défauts semi-normaux est dite semi-normale.