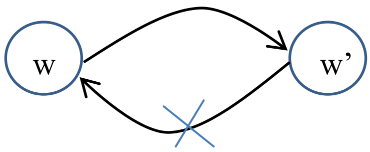
USTHB
Faculté d'Informatique
Département Intelligence Artificielle & Sciences des Données
Master 2 Informatique Visuelle
Représentation des Connaissances et raisonnement Année Universitaire : 2023-2024

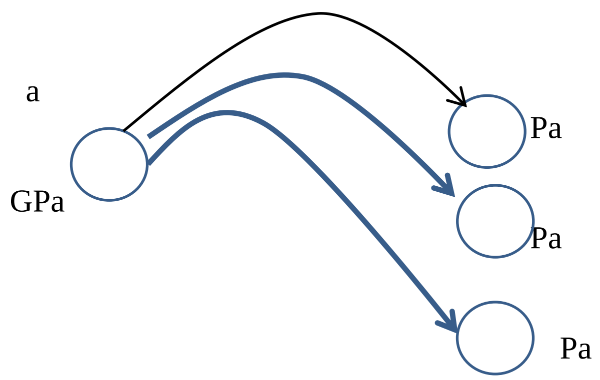
TD N° 2 :
Logique Modale

Exercice 1:
1- Exprimer l'antisymétrie de la relation d'ultériorité temporelle par la théorie des modèles et par l'axiomatique.
2- Exprimer le fait que le temps a une origine par la théorie des modèles et par l'axiomatique.
Solution :
1- Exprimez par la théorie des modèles et par l'axiomatique.
a- l'antisymétrie de la relation d'ultériorité temporelle
a-1 Théorie des modèles :
$\forall(w,w') \in W\ ((wRw' \wedge w'Rw) \supset w=w')$



a-2 Il n'existe pas d'axiome spécifique à l'antisymétrie mais les axiomes suivants permettent entre autres de la modéliser :
Axiomes reliant le passé et le futur :
$a \supset GPa$

ce qui a eu lieu maintenant, on pourra toujours dire que cela a eu lieu



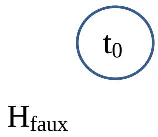
et $a \supset HFa$
Il a toujours été vrai qu'on pouvait dire que cela aura lieu.

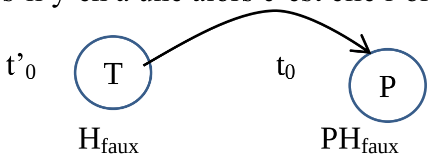
b- que le temps a une origine

b-1 Théorie des modèles :
Soit < la relation d'ultériorité
$\exists\, w_0 \quad \forall(w \in W)$ tq $w \neq w_0 \quad w_0 < w \quad w_0$ est un temps temporal avant tous les autres temps.

b-2 Axiomatisation:

$H_{faux} \vee PH_{faux}$
Toutes les dates avant w_0 satisfont le faux et s'il y'en a une alors c'est elle l'origine.





2- Exprimez en utilisant l'axiomatisation de la logique modale le fait que :

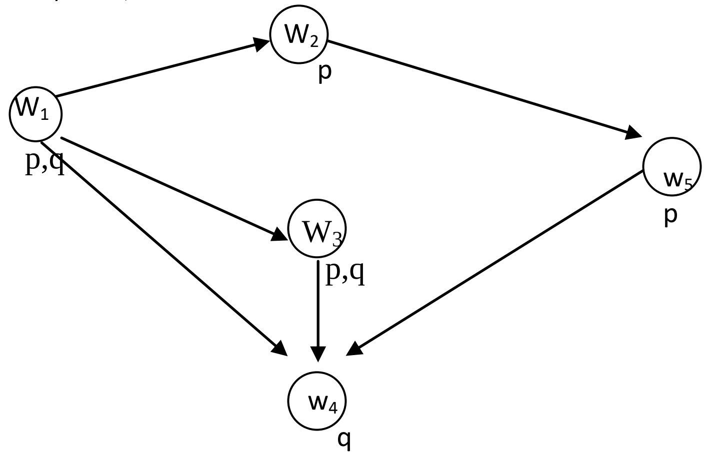
a- Il y a un ordre total des dates futures,
$((Fa \wedge Fb) \supset (F(a \wedge Fb) \vee F(a \wedge b) \vee (Fa \wedge b)))$

b- Il n'existe pas d'instant maximal,
$(Ga \supset Fa)$ (tous les futurs ont un futur)

d- Il n'existe pas d'instant minimal.
$(Ha \supset Pa)$ (tous les passés ont un passé)

Exercice 2:

1- Spécifier les assertions vraies dans le modèle suivant avec la spécificité que M,x |== ¬B ssi non (M,x |== B).



a- M,w_1 |== ◇(p∧q) vrai car (p∧q) est vrai en w3 et w_1Rw_3.

b- M,w_2 |== ¬☐p faux car M,w_2 |== ☐p. En effet, w5 est le seul monde accessible depuis w_2 et p est vrai en w_5.

c- M,w_3 |== ☐(p⊃q) vrai car (p⊃q) est vrai en w_4 et w_4 est le seul monde accessible depuis w3.

d- M,w_4 |== ☐(q ∧◇¬p) vrai car il n'existe aucun monde accessible depuis w_4. D'où, quel que soit la formule f, ☐f est vrai en $w_4$et ◇ f est faux en w_4.

e- M,w_5 |== ☐(q ∧◇¬p) faux car q est faux en w4 et w_5Rw_4.

Exercice 3 : Exprimez en logique modale les énoncés suivants :

a- Le coronavirus est un fléau mondial
Est-un(Coronavirus, fléau-mondial)

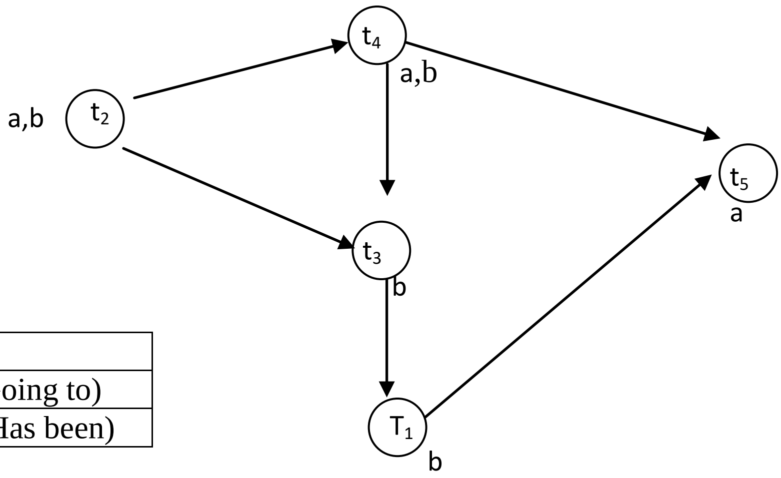
b- Les Italiens ne croient pas que les chinois maitrisent le coronavirus
¬Croire $_{\text{italiens}}$(maitrise(chinois, coronavirus))

c- Les Français savent que le coronavirus est un fléau mondial
Savoir $_{\text{Français}}$ (est-un(Coronavirus, fléau-mondial))

d- Les chinois veulent que le coronavirus ne soit pas un fléau mondial
Vouloir $_{\text{chinois}}$ ¬ (est-un(coronavirus,fléau-mondial))

Exercice 4 :

1- Spécifier les assertions vraies dans le modèle modal temporel suivant dans lequel un monde représente un instant dans le temps, avec la spécificité que M,x |== ¬B ssi non (M,x |== B).



	◇	□
Futur	F(Futur)	G(Going to)
Passé	P (Past)	H (Has been)

a- M,t_1 |== G(¬a∧¬b) est faux car t5 est le seul état temporel accessible depuis t1 et (¬a∧¬b) est faux en t5.

b- M, t_5 |== HP(b⊃a) faux car t_1 et t_4 sont les seuls passés de t_5. Pour t_1, t_3 est son seul passé dans lequel b est vrai et a est faux d'où (b⊃a) est faux en t_3. D'où P(b⊃a) est faux en t_1 .

c- M, t_2 |== ¬F(a⊃b) est faux car t_4 et t_3 sont les seuls futurs de t_2. Or (a⊃b) est vrai en t_4 ainsi qu'en t3. D'où, F(a⊃b) est vrai en t2 ce qui implique que M, t_2 |== ¬F(a⊃b) est faux.

d- M,t_5|== G¬Fb vrai car il n'existe aucun monde accessible à partir de t5. Ainsi quel que soit la formule f, Gf est vrai en t5.

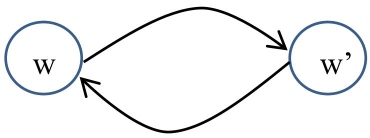
Exercice 5 :

Montrer que :

1. $(a \supset \Box\Diamond a)$ est une tautologie si et seulement si R est symétrique.

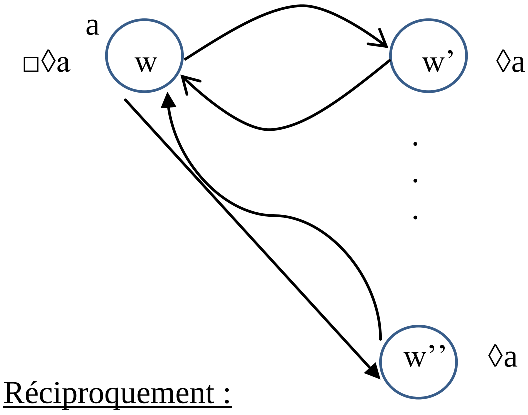
   Une relation R est dite symétrique ssi :

   $\forall(w,w') \in W\ ((wRw' \supset w'Rw)$



Si R est symétrique, et si a est vrai en un monde w, alors pour tout monde w’ accessible depuis w, $\Diamond a$ est vrai

D’où $\Box\Diamond a$ est vrai en w.



<u>Réciproquement :</u>

Supposons que $(a \supset \Box\Diamond a)$ soit vrai en tout monde de tous les modèles et R est non symétrique : Il existe un coupe de monde $(w,w') \in W$ tel que wRw’ et $\neg$w’Rw

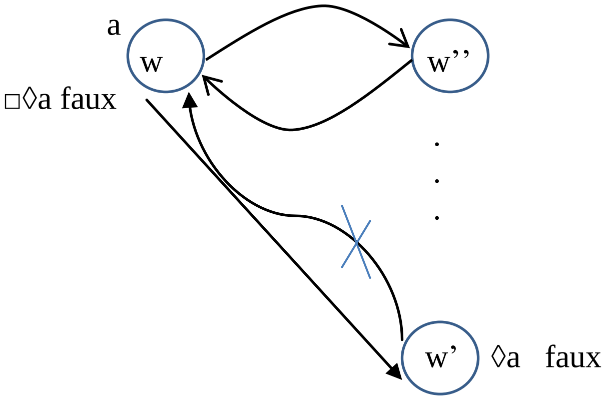
Considérons la fonction v telle que v(a)={w}

a est vrai en w

$\Diamond a$ est faux en w’ (car w’ n’a pas accès au seul monde où a est vrai)

Donc $\Box\Diamond a$ est faux en w (car w a accès à un monde w’ où $\Diamond a$ est faux)

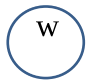
Ainsi, $(a \supset \Box\Diamond a)$ est faux en w : Contradiction



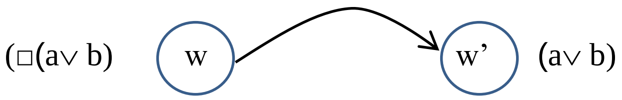
2. (□(a∨ b) ⊃ (□a∨□b)) est une tautologie si et seulement si R relie chaque monde à au plus un monde.

Si R relie chaque monde a au plus un monde et si □(a∨ b) est vrai en w,

- soit w n'est relié à aucun monde, donc ∀ la formule f, □ f est vrai en w, en particulier □a



- soit w est relié à un monde unique w' où a∨b est vrai :



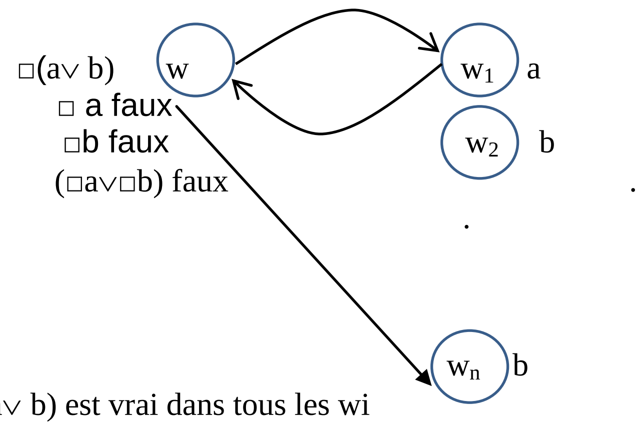
  - si a est vrai en w' alors □a est vrai en w,
  - si b est vrai en w', alors □b est vrai en w.

  Ainsi, dans tous les cas, (□a∨ □b) est vrai en w.

<u>Réciproquement :</u>

Supposons que (□(a∨ b) ⊃ (□a∨□b)) est vrai en tout monde de tous les modèles et qu'il existe un monde w ayant accès à plusieurs mondes distincts w_i avec 1<=i <=n et n >=2

Considérons la fonction v telle que v(a)={w_1} et v(b)=W-{w_2}



(a∨ b) est vrai dans tous les wi

Tels que wRwi donc (□(a∨b)) est vrai en w (1)

a est faux en w2 donc □a est faux en w

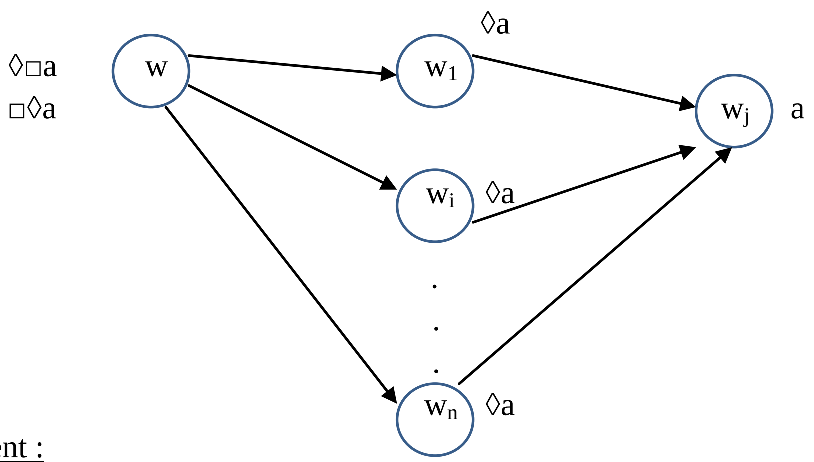
b est faux en w1 donc □b est faux en w

il en résulte (□a∨□b) faux en w (2)

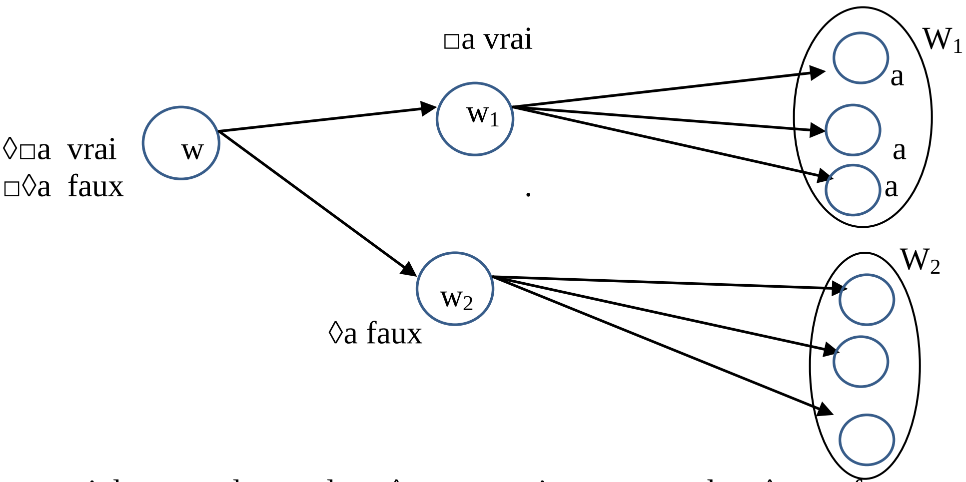
contradiction (□(a∨ b) ⊃ (□a∨□b)) faux en w

3. ($\Diamond\Box a \supset \Box\Diamond a$) est une tautologie si et seulement si R est ''confluente'' (c'est-à-dire que chaque fois que R relie un monde w à deux mondes w_1 et w_2, il existe un monde w_3 accessible à la fois depuis w_1 et w_2).

Si R est confluente et que et $\Diamond\Box a$ est vrai en un monde w, il existe un monde w_1 accessible depuis w où $\Box a$ est vrai.
Pour tout monde w_i accessible depuis w (y compris w_1), il existe un monde w_j accessible à la fois à partir de w_1 et w_i.
a est vrai en w_j (car $\Box a$ est vrai en w1 et w_1Rw_j) donc $\Diamond a$ est vrai dans tous les mondes w_i accessible depuis w d'où $\Box\Diamond a$ est vrai en w.



<u>Réciproquement :</u>
Supposons que ($\Diamond\Box a \supset \Box\Diamond a$) est vrai en tout monde de tous les modèles et qu'il existe un triplé de mondes $(w_1,w_2,w_3) \in W$ tels que wRw_1 et wRw_2 et que tous les sous-ensembles W_1 et W_2 des mondes respectivement accessibles depuis w_1 et w_2 soient disjoints ($W_1 \cap W_2 = \emptyset$)
Considérons la fonction v telle que $v(a)=\{W_1\}$



$\Box a$ est vrai dans tous les w_1 donc $\Diamond\Box a$ est vrai en w cependant $\Diamond a$ est faux en w (car a est faux dans tous les mondes accessibles depuis w_2)
donc $\Box\Diamond a$ faux en w car wRw2
Ainsi, $\Diamond\Box a$ vrai en w et $\Box\Diamond a$ faux en w est faux en w ceci implique que ($\Diamond\Box a \supset \Box\Diamond a$) est faux en w :
D'où contradiction.

Exercice 6 :

La logique de S5 est axiomatisée de la façon suivante :

(A6) : $(\Box(a \supset b) \supset (\Box a \supset \Box b))$

(A7) **:** $(\Box a \supset a)$

(A9) : $(\Diamond a \supset \Box\Diamond a)$

(R6)[Nécessitation]: si X est une formule, R6(X) est l'ensemble contenant l'unique élément $\Box X$

Montrer que :

1- si $(a \supset b)$ est un théorème, $(\Box a \supset \Box b)$ l'est aussi.

Preuve :

X[1]: $(a \supset b)$	Hypothèse
X[2]: $\Box(a \supset b)$	R6(X[1])
X[3] : $(\Box(a \supset b) \supset (\Box a \supset \Box b))$	A6
X[4] : $(\Box a \supset \Box b)$	R2(X[3],X[2])

2- si $(a \supset b)$ est un théorème, $(\Diamond a \supset \Diamond b)$ l'est aussi

X[1]: $(a \supset b)$	Hypothèse
X[2]: $(\neg b \supset \neg a)$	Logique des propositions
X[3] : $(\neg\Box\neg a \supset \neg\Box\neg b)$	Résultat de 1
X[4] : $(\Box\neg b \supset \Box\neg a)$	Logique des propositions
X[5] : $(\Diamond a \supset \Diamond b)$	par définition du $\Diamond$