Concepts de base de la théorie des fonctions de croyance

David Mercier

david.mercier@univ-artois.fr
http://www.iut-bethune.univ-artois.fr/mercier

Master Recherche Génie Industriel et Logistique

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Introduction à l'outil fonction croyance

Cette introduction est basée notamment sur les présentations de Thierry Denœux et de l'école de printemps sur les fonctions de croyance 2011.

- Spring school on Belief Functions Theory and Applications 2011.
  `http://www.gipsa-lab.inpg.fr/summerschool/bfta/presentation.php`
- T. Denœux.
  `http://www.hds.utc.fr/~tdenoeux`
  articles et exposés.

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Raisonnement dans l'incertain

Dans notre domaine des sciences appliquées, nous sommes très souvent amenés à raisonner à partir de connaissances imparfaites.

Ex : données en provenance de capteurs, d'experts, de modèles, . . .

Différentes formes d'imperfection de l'information

L'incertitude

- Relative à la vérité d'une proposition ;
- Ex : « Je crois que Jean mesure 1,5 mètre ».
- Deux sous-catégories : les évènements répétables (le lancé d'un dé) et les évènements non répétables (taille de Jean, élection présidentielle de 2012)

L'imprécision

- Relative à la nature d'une proposition ;
- Ex : « Jean mesure entre 1,5 mètre et 2 mètres ».

L'ambiguïté ou le vague

- Passage graduel d'une catégorie à une autre.
- Ex : langage courant : « Jean est grand ».
- Ex : phénomènes naturels : le passage graduel du jour et de la nuit, la maturation d'un fruit.

Différentes formes d'imperfection de l'information

L'incertitude

- Relative à la vérité d'une proposition ;
- Ex : « Je crois que Jean mesure 1,5 mètre ».
- Deux sous-catégories : les évènements répétables (le lancé d'un dé) et les évènements non répétables (taille de Jean, élection présidentielle de 2012)

L'imprécision

- Relative à la nature d'une proposition ;
- Ex : « Jean mesure entre 1,5 mètre et 2 mètres ».

L'ambiguïté ou le vague

- Passage graduel d'une catégorie à une autre.
- Ex : langage courant : « Jean est grand ».
- Ex : phénomènes naturels : le passage graduel du jour et de la nuit, la maturation d'un fruit.

Cadre classique : la théorie des probabilités.

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Exemple 1 : une course hippique

« Le tiercé c'est mon dada »(O. Sharif)

- Trois chevaux : c_1, c_2, c_3.
- Question : « qui va gagner la course ? »
- Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- Expert 2 : « Aucune idée. »

Le Derby d'Epsom (Géricault)

Exemple 1 : une course hippique

« Le tiercé c'est mon dada »(O. Sharif)

- Trois chevaux : c_1, c_2, c_3.
- Question : « qui va gagner la course ? »
- Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- Expert 2 : « Aucune idée. »

Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation du problème dans un cadre probabiliste :

Exemple 1 : une course hippique

« Le tiercé c'est mon dada »(O. Sharif)

- Trois chevaux : c_1, c_2, c_3.
- Question : « qui va gagner la course ? »
- Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- Expert 2 : « Aucune idée. »

Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation du problème dans un cadre probabiliste :

- Expert 1 : $p_1(\{c_1\}) = p_1(\{c_2\}) = p_1(\{c_3\}) = \frac{1}{3}$

Exemple 1 : une course hippique

« Le tiercé c'est mon dada »(O. Sharif)

- Trois chevaux : c_1, c_2, c_3.
- Question : « qui va gagner la course ? »
- Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- Expert 2 : « Aucune idée. »

Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation du problème dans un cadre probabiliste :

- Expert 1 : $p_1(\{c_1\}) = p_1(\{c_2\}) = p_1(\{c_3\}) = \frac{1}{3}$
- Expert 2 : $p_2(\{c_1\}) = p_2(\{c_2\}) = p_2(\{c_3\}) = \frac{1}{3}$ (principe de raisonnement insuffisant (PRI))

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Exemple 1 : une course hippique

« Le tiercé c'est mon dada »(O. Sharif)

- Trois chevaux : c_1, c_2, c_3.
- Question : « qui va gagner la course ? »
- Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- Expert 2 : « Aucune idée. »

Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation du problème dans un cadre probabiliste :

- Expert 1 : $p_1(\{c_1\}) = p_1(\{c_2\}) = p_1(\{c_3\}) = \frac{1}{3}$
- Expert 2 : $p_2(\{c_1\}) = p_2(\{c_2\}) = p_2(\{c_3\}) = \frac{1}{3}$ (principe de raisonnement insuffisant (PRI))

Problème : deux opinions différentes, **équiprobabilité** et **incertitude totale**, sont représentées de la même façon.

Exemple 2 : De l'eau et du vin 1/2

Soit une bouteille contenant un mélange d'eau et de vin.

La bouteille contient :

- au moins autant d'eau que de vin,
- au plus deux fois plus d'eau que de vin.

Question : « quelle est la probabilité que la bouteille contienne au plus 1.5 fois plus d'eau que de vin ? »

bouteille SLOM IKEA®
(1,5€ prix maximum)

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

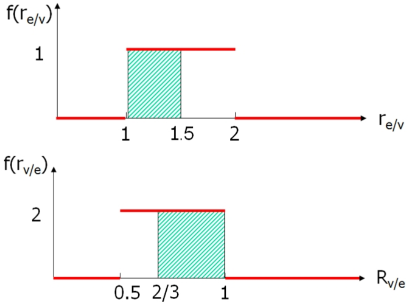
Exemple 2 : De l'eau et du vin 2/2

Avec $\boldsymbol{r_{e/v}}$ le rapport eau sur vin :

- $1 \leqslant r_{e/v} \leqslant 2$;
- PRI : loi de probabilité uniforme sur $[1, 2]$;
- $P(r_{e/v} \leqslant 1.5) = 0.5$.

Avec $\boldsymbol{r_{v/e}}$ le rapport vin sur eau :

- $1 \leqslant r_{e/v} \leqslant 2 \Leftrightarrow 0.5 \leqslant r_{v/e} \leqslant 1$;
- PRI : loi de probabilité uniforme sur $[.5, 1]$;
- $r_{e/v} \leqslant 1.5 \Leftrightarrow r_{v/e} \geqslant \frac{2}{3}$;
- $P(r_{e/v} \leqslant 1.5) =$ $P(r_{v/e} \geqslant \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$, contradiction.



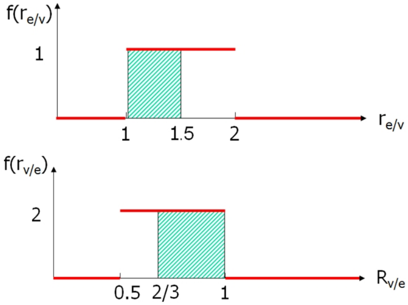
Exemple 2 : De l'eau et du vin 2/2

Avec $\boldsymbol{r_{e/v}}$ le rapport eau sur vin :

- $1 \leqslant r_{e/v} \leqslant 2$;
- PRI : loi de probabilité uniforme sur $[1, 2]$;
- $P(r_{e/v} \leqslant 1.5) = 0.5$.

Avec $\boldsymbol{r_{v/e}}$ le rapport vin sur eau :

- $1 \leqslant r_{e/v} \leqslant 2 \Leftrightarrow 0.5 \leqslant r_{v/e} \leqslant 1$;
- PRI : loi de probabilité uniforme sur $[.5, 1]$;
- $r_{e/v} \leqslant 1.5 \Leftrightarrow r_{v/e} \geqslant \frac{2}{3}$;
- $P(r_{e/v} \leqslant 1.5) = P(r_{v/e} \geqslant \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$, contradiction.



$\Rightarrow$ **Besoin d'une théorie plus riche, plus flexible pour modéliser l'ignorance et l'arbitraire.**

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Plan

Plan

Théorie des fonctions de croyance

Théorie de Dempster-Shafer, Théorie de l'évidence, Modèle des croyances transférables, (en anglais : Belief function theory)

- Besoin d'une théorie plus riche, plus flexible pour modéliser l'ignorance et l'arbitraire.

Théorie des fonctions de croyance

Théorie de Dempster-Shafer, Théorie de l'évidence, Modèle des croyances transférables, (en anglais : Belief function theory)

- Besoin d'une théorie plus riche, plus flexible pour modéliser l'ignorance et l'arbitraire.
- Différentes théories :
  - Théorie des possibilités (Zadeh, 1978 ; Dubois and Prade 1980's-1990's) ;
  - Théorie des probabilités imprécises (Walley, 1990's) ;
  - Théorie des fonctions de croyance (Théorie de Dempster-Shafer, théorie de l'évidence, modèle des croyances transférables)(Dempster, 1968 ; Shafer, 1976 ; Smets 1980's-1990's).

Fonction de masse de croyance
Définition

Considérons $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ (cadre de discernement) un ensemble fini de réponses à une certaine question Q d'intérêt.

Fonction de masse de croyance
Définition

Considérons $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ (cadre de discernement) un ensemble fini de réponses à une certaine question Q d'intérêt.

Définition (fonction de masse)

Une fonction de masse de croyance sur Ω est une application $m : 2^\Omega \to [0, 1]$ t.q.

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1.$$

Tout $A \subseteq \Omega$, $m(A) > 0$ est appelé élément focal (EF) de m.

Fonction de masse de croyance
Interprétation

La fonction de masse m représente :

- l'état de connaissance d'un agent rationnel à un certain instant t, relativement à Q.

Fonction de masse de croyance
Interprétation

La fonction de masse m représente :

- l'état de connaissance d'un agent rationnel à un certain instant t, relativement à Q.

Masse $m(A)$: part de croyance allouée à A (et à aucun sous-ensemble strict).

Fonction de masse de croyance
Interprétation

La fonction de masse m représente :

- l'état de connaissance d'un agent rationnel à un certain instant t, relativement à Q.

Masse $m(A)$: part de croyance allouée à A (et à aucun sous-ensemble strict).

Masse $m(\Omega)$: degré d'ignorance totale.

Fonction de masse de croyance
Interprétation

La fonction de masse m représente :

- l'état de connaissance d'un agent rationnel à un certain instant t, relativement à Q.

Masse $m(A)$: part de croyance allouée à A (et à aucun sous-ensemble strict).

Masse $m(\Omega)$: degré d'ignorance totale.

Résumé :

- fonction de masse de croyance = opinion pondérée ;
- à chaque alternative du monde est associé un nombre entre 0 et 1.

Retour sur l'exemple de la course hippique

« Si vous avez perdu au tiercé, vengez-vous. Mangez du cheval. »(P. Dac)

- Trois chevaux : c_1, c_2, c_3.
- Question : « qui va gagner la course ? »
- Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- Expert 2 : « Aucune idée. »

Le Derby d'Epsom (Géricault)

Retour sur l'exemple de la course hippique

« Si vous avez perdu au tiercé, vengez-vous. Mangez du cheval. »(P. Dac)

- Trois chevaux : c_1, c_2, c_3.
- Question : « qui va gagner la course ? »
- Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- Expert 2 : « Aucune idée. »

Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation dans le cadre des fonctions de croyance :

Retour sur l'exemple de la course hippique

« Si vous avez perdu au tiercé, vengez-vous. Mangez du cheval. »(P. Dac)

- Trois chevaux : c_1, c_2, c_3.
- Question : « qui va gagner la course ? »
- Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- Expert 2 : « Aucune idée. »

Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation dans le cadre des fonctions de croyance :

- Expert 1 : $m_1(\{c_1\}) = m_1(\{c_2\}) = m_1(\{c_3\}) = \frac{1}{3}$

Retour sur l'exemple de la course hippique

« Si vous avez perdu au tiercé, vengez-vous. Mangez du cheval. »(P. Dac)

- Trois chevaux : c_1, c_2, c_3.
- Question : « qui va gagner la course ? »
- Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- Expert 2 : « Aucune idée. »

Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation dans le cadre des fonctions de croyance :

- Expert 1 : $m_1(\{c_1\}) = m_1(\{c_2\}) = m_1(\{c_3\}) = \frac{1}{3}$
- Expert 2 : $m_2(\{c_1, c_2, c_3\}) = 1$

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Autre exemple
The Peter, Paul and Mary Saga (Smets)

Problème

Un juge sait ceci :

- Big Boss a décidé que M. Jones devait mourir ;
- 3 tueurs possibles : Peter, Paul, Mary ;
- Big Boss désigne à pile ou face le sexe du tueur (pièce non truquée) ;
- Aucune idée sur le choix entre Peter et Paul, dans le cas où un homme est choisi ;
- M. Jones est tué par un tueur de Big Boss.

Autre exemple

The Peter, Paul and Mary Saga (Smets)

Problème

Un juge sait ceci :

- Big Boss a décidé que M. Jones devait mourir ;
- 3 tueurs possibles : Peter, Paul, Mary ;
- Big Boss désigne à pile ou face le sexe du tueur (pièce non truquée) ;
- Aucune idée sur le choix entre Peter et Paul, dans le cas où un homme est choisi ;
- M. Jones est tué par un tueur de Big Boss.

Question : « qui a tué M. Jones ? »

Autre exemple

The Peter, Paul and Mary Saga (Smets)

Problème

Un juge sait ceci :

- Big Boss a décidé que M. Jones devait mourir ;
- 3 tueurs possibles : Peter, Paul, Mary ;
- Big Boss désigne à pile ou face le sexe du tueur (pièce non truquée) ;
- Aucune idée sur le choix entre Peter et Paul, dans le cas où un homme est choisi ;
- M. Jones est tué par un tueur de Big Boss.

Question : « qui a tué M. Jones ? »

Modélisation avec des fonctions de croyance

k, le tueur, appartient à $\Omega = \{Peter, Paul, Mary\}$;

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Autre exemple

The Peter, Paul and Mary Saga (Smets)

Problème

Un juge sait ceci :

- Big Boss a décidé que M. Jones devait mourir ;
- 3 tueurs possibles : Peter, Paul, Mary ;
- Big Boss désigne à pile ou face le sexe du tueur (pièce non truquée) ;
- Aucune idée sur le choix entre Peter et Paul, dans le cas où un homme est choisi ;
- M. Jones est tué par un tueur de Big Boss.

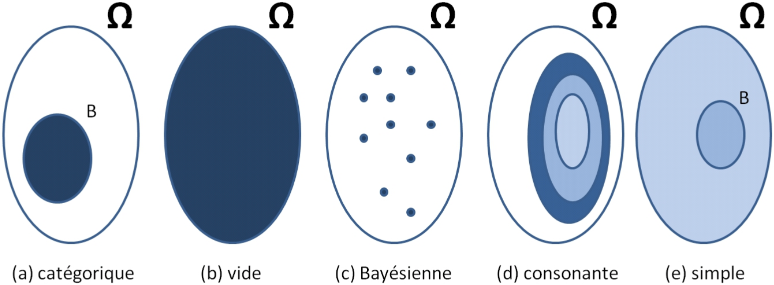
Question : « qui a tué M. Jones ? »

Modélisation avec des fonctions de croyance

k, le tueur, appartient à $\Omega = \{Peter, Paul, Mary\}$;

$m(\{Peter, Paul\}) = 0.5$ et $m(\{Mary\}) = 0.5$.

Cas particuliers de fonctions de masse



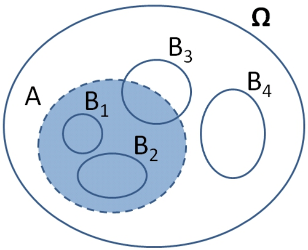
Représentation des éléments focaux de certaines classes de masse de croyance

- Fonction de masse catégorique sur $B \subseteq \Omega$: $m_B(B) = 1$
- Fonction de masse vide : $m_\Omega(\Omega) = 1$ (ignorance totale)
- Fonction de masse Bayésienne : éléments focaux singletons.
- Fonction de masse consonante : éléments focaux emboités.
- Fonction de masse simple : deux éléments focaux maximum dont Ω.

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Fonction de croyance et fonction de plausibilité

Définitions



$$bel(A) = m(B_1) + m(B_2)$$
$$pl(A) = m(B_1) + m(B_2) + m(B_3)$$

- $bel(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m(B), \quad \forall A \subseteq \Omega\,.$
- **Interprétation :** $bel(A)$ représente la part totale de croyance soutenant A.
- $pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B), \quad \forall A \subseteq \Omega\,.$
- **Interprétation :** $pl(A)$ représente la part maximale de croyance qui pourrait soutenir A.

Fonction de communalité et fonction de implicabilité

Définitions

- $b(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B), \quad \forall A \subseteq \Omega$ (fonction d'implicabilité)
- $q(A) = \sum_{B \supseteq A} m(B), \quad \forall A \subseteq \Omega$ (fonction de communalité)
- $b(A)$ représente la somme des masses allouées aux sous-ensembles de A, $b(\Omega) = 1$.
- $q(A)$ représente la somme des masses allouées aux sur-ensembles de A, $q(\emptyset) = 1$.

Exemple

Peter, Paul and Mary

A	$m(A)$	$bel(A)$	$b(A)$	$pl(A)$	$q(A)$
$\emptyset$	0	0	0	0	1
$\{Peter\}$	0	0	0	0.5	0.5
$\{Paul\}$	0	0	0	0.5	0.5
$\{Peter, Paul\}$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\{Mary\}$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\{Mary, Peter\}$	0	0.5	0.5	1	0
$\{Mary, Paul\}$	0	0.5	0.5	1	0
Ω	0	1	1	1	0

Exemple

Peter, Paul and Mary

A	$m(A)$	$bel(A)$	$b(A)$	$pl(A)$	$q(A)$
$\emptyset$	0	0	0	0	1
$\{Peter\}$	0	0	0	0.5	0.5
$\{Paul\}$	0	0	0	0.5	0.5
$\{Peter, Paul\}$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\{Mary\}$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\{Mary, Peter\}$	0	0.5	0.5	1	0
$\{Mary, Paul\}$	0	0.5	0.5	1	0
Ω	0	1	1	1	0

Il peut être observé que :

- $bel(A \cup B) \geqslant bel(A) + bel(B) - bel(A \cap B)$
- $pl(A \cup B) \leqslant pl(A) + pl(B) - pl(A \cap B)$

bel et *pl* sont des mesures non additives .

Exemple

De l'eau et du vin

Avec $r_{e/v}$ le rapport eau sur vin :

- On a $1 \leqslant r_{e/v} \leqslant 2$ ou encore $r_{e/v} \in [1, 2]$.
- Modélisation avec une masse catégorique $m_{r_{e/v}}([1, 2]) = 1$.
- Ainsi :

$$bel_{r_{e/v}}([1, 1.5]) = 0, \text{ et } pl_{r_{e/v}}([1, 1.5]) = 1 \ .$$

- Sachant $r_{v/e} \in [1/2, 1]$, on a $m_{r_{v/e}}([1/2, 1]) = 1$.
- Ainsi :

$$bel_{r_{v/e}}([2/3, 1]) = 0, \text{ et } pl_{r_{v/e}}([2/3, 1]) = 1 \ .$$

Relations entre ces fonctions

$$m(A) = \begin{cases} \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} bel(B) & \text{si } A \neq \emptyset \,, \\ 1 - Bel(\Omega) & \text{si } A = \emptyset \end{cases} \tag{1}$$

$$bel(A) = pl(\Omega) - pl(\overline{A}), \quad \forall A \subseteq \Omega \,. \tag{2}$$

$$m(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} b(B), \quad \forall A \subseteq \Omega \,. \tag{3}$$

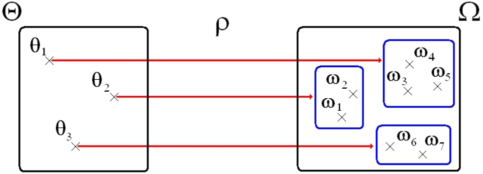
$$m(A) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} q(B), \quad \forall A \subseteq \Omega \,. \tag{4}$$

Représentations équivalentes : les fonctions *bel*, *b*, *pl*, *q*, *m* sont en correspondance biunivoque.

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Extension vide : Transport de l'information

Changement de cadre de discernement



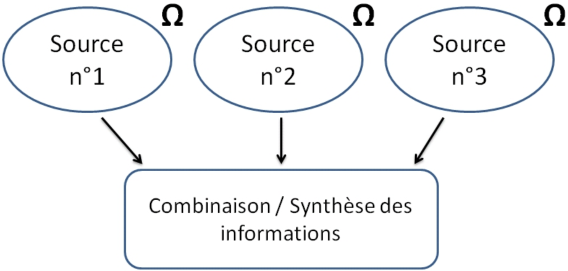
- Soit m^{Θ} une fonction de masse sur Θ traduisant un certain état de connaissance ;
- Comment exprimer cet état de connaissance dans un référentiel plus fin ? (Transport de m^{Θ} dans Ω)
- Solution la moins informative : $m^{\Omega}(\rho(A)) = m^{\Theta}(A), \forall A \subseteq \Theta$;
- Définitions :
  - Ω est un raffinement de Θ ;
  - Θ est un grossissement de Ω .

Fusion d'informations

On considère différentes sources d'information qui :

- s'expriment sur le même cadre de discernement ;
- donnent des informations sur le même objet ;

On cherche alors à synthétiser/combiner ces informations via une seule masse de croyance.



Combinaison conjonctive
Définition

Condition d'application

Deux fonctions de masse m_1 et m_2 issues de deux sources d'informations fiables et distinctes.

Combinaison conjonctive

$$m_{1 \textcircled{\cap} 2}(A) = m_1 \textcircled{\cap} m_2(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C), \quad \forall A \subseteq \Omega$$

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Combinaison conjonctive
Définition

Condition d'application

Deux fonctions de masse m_1 et m_2 issues de deux sources d'informations fiables et distinctes.

Combinaison conjonctive

$$m_{1 \textcircled{\cap} 2}(A) = m_1 \textcircled{\cap} m_2(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C), \quad \forall A \subseteq \Omega$$

Exemple

$m_1 \setminus m_2$	Ω (.4)	$\{a, c\}$(.6)
$\{a, b\}$ (.5)	$\{a, b\}$ (.5 × .4 = .2)	$\{a\}$ (.5 × .6 = .3)
$\{c\}$ (.5)	$\{c\}$ (.5 × .4 = .2)	$\{c\}$ (.5 × .6 = .3)

$$m_{1 \textcircled{\cap} 2}(\{a, b\}) = .2, m_{1 \textcircled{\cap} 2}(\{a\}) = .3, m_{1 \textcircled{\cap} 2}(\{c\}) = .5,$$

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Combinaison conjonctive
Propriétés

- Associative et commutative : $(m_1 \textcircled{\scriptsize$\cap$} m_2) \textcircled{\scriptsize$\cap$} m_3 = m_1 \textcircled{\scriptsize$\cap$} (m_3 \textcircled{\scriptsize$\cap$} m_2)$.
- Élément neutre m_Ω : $\forall m, m \textcircled{\scriptsize$\cap$} m_\Omega = m_\Omega \textcircled{\scriptsize$\cap$} m = m$.
- Généralisation de l'intersection ensembliste : si m_A et m_B sont deux fonctions de masse catégorique, on a $m_A \textcircled{\scriptsize$\cap$} m_B = m_{A \cap B}$.
- Conditionnement de m par A définie par $m \textcircled{\scriptsize$\cap$} m_A$.

Combinaison conjonctive normalisée

Règle de Dempster-Shafer

Forme normalisée : règle de Dempster-Shafer

$$m_{1\oplus 2}(A) = m_1 \oplus m_2(A) = \begin{cases} \frac{m_{1\bigcirc\!\!\!\!\cap 2}(A)}{1-K_{12}} & \text{si } A \neq \emptyset \text{ ,} \\ 0 & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$

avec $K_{12} = m_{1\bigcirc\!\!\!\!\cap 2}(\emptyset)$ le degré de conflit .

Application

Quand une masse strictement supérieure à zéro sur le vide n'est pas (ou plus) acceptée.

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Combinaison disjonctive
Définition

Condition d'application

Deux fonctions de masse m_1 et m_2 telles que au moins une des sources est fiable (on ne sait pas laquelle).

Combinaison disjonctive

$$m_{1 \bigcirc\!\!\!\!\cup\, 2}(A) = m_1 \bigcirc\!\!\!\!\cup\, m_2(A) = \sum_{B \cup C = A} m_1(B) m_2(C), \quad \forall A \subseteq \Omega$$

Combinaison disjonctive
Définition

Condition d'application

Deux fonctions de masse m_1 et m_2 telles que au moins une des sources est fiable (on ne sait pas laquelle).

Combinaison disjonctive

$$m_{1\bigcirc\!\!\!\!\cup 2}(A) = m_1 \bigcirc\!\!\!\!\cup\, m_2(A) = \sum_{B \cup C = A} m_1(B) m_2(C), \quad \forall A \subseteq \Omega$$

Exemple

$m_1 \setminus m_2$	Ω (.4)	$\{a, c\}$(.6)
$\{a, b\}$ (.5)	Ω (.5 × .4 = .2)	Ω (.5 × .6 = .3)
$\{c\}$ (.5)	Ω (.5 × .4 = .2)	$\{a, c\}$ (.5 × .6 = .3)

$$m_{1\bigcirc\!\!\!\!\cup 2}(\{a, c\}) = .3, m_{1\bigcirc\!\!\!\!\cup 2}(\Omega) = .7$$

LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Affaiblissement

Situation d'application

- Il est parfois possible d'avoir un doute sur la fiabilité d'une information m fournie par une source S.
- Avec $\alpha \in [0,1]$ (appelé taux d'affaiblissement) t.q. $(1-\alpha)$ représente le degré de fiabilité de la source.

Opération d'affaiblissement (discounting)

$$\begin{cases} {}^{\alpha}m(A) & = & (1-\alpha)m(A), \quad \forall A \subset \Omega, \\ {}^{\alpha}m(\Omega) & = & (1-\alpha)m(\Omega) + \alpha \ , \end{cases}$$

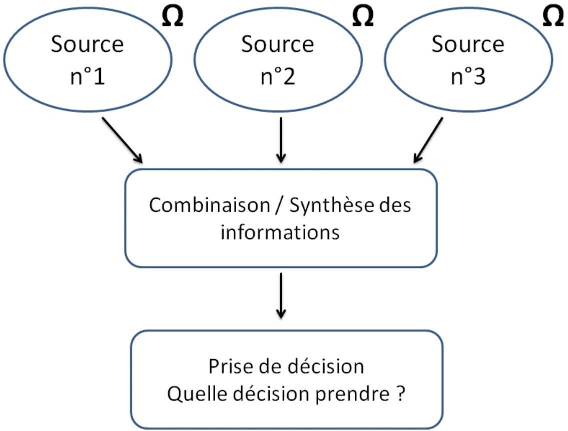
ou, plus simplement : ${}^{\alpha}m = (1-\alpha)m + \alpha \ m_{\Omega}$.

Exemple

- $\Omega = \{a,b,c\}, m(\{a\}) = 0.3, m(\Omega) = 0.7$.
- La source est fiable avec un degré 0.6, i.e. $\alpha = 0.4$.
- Alors ${}^{\alpha}m(\{a\}) = 0.18, {}^{\alpha}m(\Omega) = 0.82$.

Prise de décision

Souvent la dernière étape d'un processus de fusion



LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Prise de décision

Formalisation (classique) du problème

Besoin de définir

- L'ensemble des décisions $\mathcal{D} = \{d_1, \ldots, d_n\}$ pouvant être prises.
- L'ensemble des états de la nature considérés (cadre de pari) Γ .
- Une fonction de coût $c : \mathcal{D} \times \Gamma \to \mathbb{R}$, t.q. $c(d, \gamma)$ représente le coût de décider d alors que la vérité est γ .

Principes de rationalité (cadre Bayésien)(Savage,DeGroot)

- L'incertitude sur Γ étant décrite par une mesure probabilité P, choisir la décision d minimisant le risque espéré suivant :

$$R_P(d) = \mathbb{E}_P[c(d, \cdot)] = \sum_{\gamma \in \Gamma} c(d, \gamma) P(\{\gamma\}) .$$

Prise de décision : extension au cadre des fonctions de croyance
Approche Transferable Belief Model (TBM) Smets

- Distinction entre la modélisation et la manipulation des informations d'un côté et la prise de décision de l'autre côté : niveau crédal vs niveau pignistique.
- Une mesure de probabilité est nécessaire pour éviter une séquence de paris perdants (Dutch book problem) .
- Transformation pignistique :
  - ⋆ Γ : une composition de grossissements/raffinements de Ω
  - ⋆ $m^{\Omega} \rightarrow m^{\Gamma} \rightarrow$ probabilité

$$BetP(\{\gamma\}) = \sum_{\{A \subseteq \Gamma, \gamma \in A\}} \frac{m(A)}{\mid A \mid} \times \frac{1}{1 - m(\emptyset)}.$$

- On choisit la décision minimisant R_{BetP} .
- Exemple : $\Omega = \{a, b, c\}$, $m(\{a\}) = .3$ et $m(\{a, c\}) = .7$
  - ⋆ $BetP(\{a\}) = .3 + .7/2 = .65$
  - ⋆ $BetP(\{c\}) = .7/2 = .35$

Prise de décision : extension au cadre des fonctions de croyance
Cas particulier : coûts 0-1

Coûts 0-1

- $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, et $\mathcal{D} = \{d_1, \ldots, d_n\}$ où d_i signifie choisir γ_i .
- La fonction de coût c est définie par :

$$c(d_i, \gamma_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \text{ (bonne réponse)} \\ 1 & \text{si } i \neq j \text{ (mauvaise réponse)} \end{cases}$$

Dans ce cas :

- Minimiser R_{BetP} revient à choisir la décision maximisant $BetP$.
- Exemple : avec $BetP(\{a\}) = .65$ et $BetP(\{c\}) = .35$, on prend la décision consistant à choisir a .

Prise de décision : extension au cadre des fonctions de croyance

Risques espérés inférieur et supérieur

Risque espéré inférieur

$$\underline{R}(d) = \sum_{A \subseteq \Gamma} m(\{\gamma\}) \min_{\gamma \in A} c(d, \gamma) \ .$$

Risque espéré supérieur

$$\overline{R}(d) = \sum_{A \subseteq \Gamma} m(\{\gamma\}) \max_{\gamma \in A} c(d, \gamma) \ .$$

Stratégie de décision

- Stratégie optimiste : choisir la décision d qui minimise le risque inférieur $\underline{R}$.
- Stratégie pessimiste : choisir la décision d qui minimise le risque supérieur $\overline{R}$.

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Exemple
Paradoxe d'Ellsberg

- On considère une urne avec 30 boules rouges (r) et 60 boules qui sont noires (n) ou jaunes (j) .
- On vous demande de choisir l'un de ces deux paris :
  - A Vous recevez 100€ si vous tirez une boule rouge .
  - B Vous recevez 100€ si vous tirez une boule noire .
- Dans un second temps, on vous demande de faire un autre choix entre ces deux paris :
  - C Vous recevez 100€ si vous tirez une boule rouge ou jaune .
  - D Vous recevez 100€ si vous tirez une boule noire ou jaune .
- La plupart des gens préfèrent A à B et D à C .
- Dans un cadre probabiliste, on aurait donc $P(\{r\}) > P(\{n\})$ et $P(\{n\}) + P(\{j\}) > P(\{r\}) + P(\{j\})$ soit $P(\{n\}) > P(\{r\})$ contradiction .

Exemple

Paradoxe d'Ellsberg revu avec des fonctions de croyance

- $\Gamma = \Omega = \{r, n, j\}$, $m(\{r\}) = 1/3$ et $m(\{n, j\}) = 2/3$.
- Table des coûts et des risques associés :

décision \ vérité	r	n	j	$\underline{R}$	$\overline{R}$
A	-100	0	0	-100/3	-100/3
B	0	-100	0	-200/3	0
C	-100	0	-100	-100	-100/3
D	0	-100	-100	-200/3	-200/3

- La conduite observée (préférer A à B et D à C) peut donc s'expliquer par une stratégie pessimiste (minimisation de $\overline{R}$) .

Prise de décision : extension au cadre des fonctions de croyance
Cas particulier : coûts 0-1

Coûts 0-1

- $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, et $\mathcal{D} = \{d_1, \ldots, d_n\}$ où d_i signifie choisir γ_i .
- La fonction de coût c est définie par :

$$c(d_i, \gamma_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \text{ (bonne réponse)} \\ 1 & \text{si } i \neq j \text{ (mauvaise réponse)} \end{cases}$$

Dans ce cas :

- $\underline{R}(d_i) = 1 - pl(\{\gamma_i\})$ et $\overline{R}(d_i) = 1 - bel(\{\gamma_i\})$.
- Stratégie optimiste : choisir la décision qui maximise la plausibilité *pl*.
- Stratégie pessimiste : choisir la décision qui maximise la fonction de croyance *bel*.

LGI2A
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Plan

Plan

En résumé

- Fonctions de croyance : cadre riche et flexible pour prendre en compte des informations imparfaites.
- Bien définir le ou les cadre(s) de discernement.
- À chaque alternative du monde est associé un nombre entre 0 et 1 .
- Bien faire la distinction entre la modélisation et la manipulation des informations d'un côté et la prise de décision de l'autre côté : niveau crédal vs niveau pignistique (Smets).

Pour aller plus loin

- Il vous a été présenté ici juste les concepts de base de la théorie des fonctions de croyance.
- Nombreux autres concepts :
  - Principe de minimum d'information .
  - Conditionnement et déconditionnement .
  - Projection et extension vide .
  - Décombinaison et décomposition en fonctions de masse simple .
  - Combinaison prudente .
  - ...

Spring school on Belief Functions Theory and Applications 2011.
http://www.gipsa-lab.inpg.fr/summerschool/bfta/presentation.php

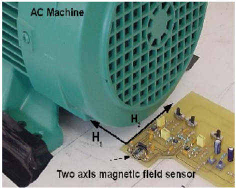
Bibliographie

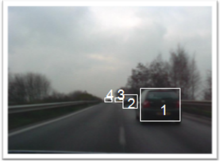
G. Shafer.
A mathematical theory of evidence.
Princeton University Press, 1976.

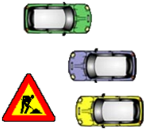
T. Denœux.
`http://www.hds.utc.fr/~tdenoeux`
articles et exposés.

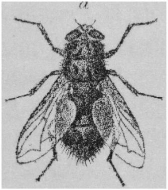
P. Smets.
`http://iridia.ulb.ac.be/~psmets`
articles (1994,1998,2005).

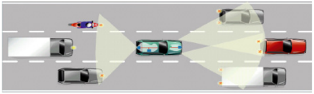
Quelques exemples d'applications développées au sein du LGI2A









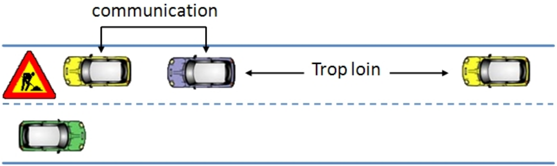


LGI2A

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

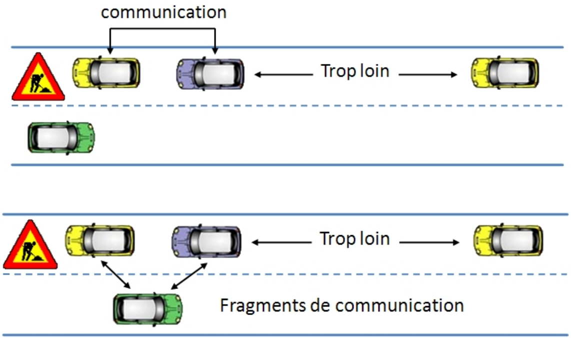
Communication inter-véhicules

Collaboration avec le LAMIH - UVHC (Projet régional CISIT 2007-2013)



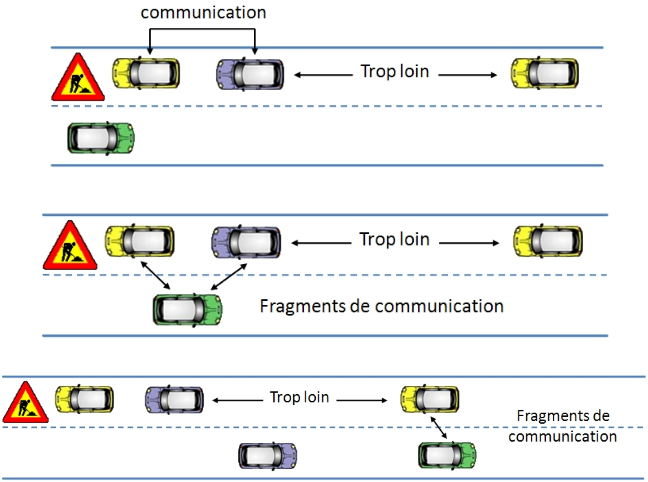
Communication inter-véhicules

Collaboration avec le LAMIH - UVHC (Projet régional CISIT 2007-2013)



Communication inter-véhicules

Collaboration avec le LAMIH - UVHC (Projet régional CISIT 2007-2013)



Fin...

Merci de votre attention,