Chapitre IV : Suites numériques

Rédigé par Samy Youssoufine

11 décembre 2025

UM6P
University Mohammed VI Polytechnic
EMINES
School of Industrial Management

Table des matières

1 Généralités sur les suites réelles

1.1 Définitions des suites usuelles

Définition 1.1.1.1 *(Suite réelle)*

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle **suite réelle** toute application U de l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n_0\}$ dans $\mathbb{R}$. On note $U(n) = U_n$, et la suite est notée $(U_n)_{n \geq n_0}$. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque 1.1.1.1

On note l'ensemble des applications d'un ensemble E vers un ensemble F par F^E. Ainsi, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1.1.2

- Si $n_0 = 0$, on note plus simplement la suite $(U_n)_n$.
- $(U_n)_n$ désigne la suite en tant qu'objet (l'application).
- U_n désigne le terme de rang n de la suite (la valeur de l'application en n).

Exemple 1.1.1.1

- $(e^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle.
- $(\frac{1}{\sqrt{n-1}})_{n \geq 2}$ est une suite réelle.

Définition 1.1.1.2 *(Suite arithmétique)*

Une suite $(U_n)_n$ est dite arithmétique s'il existe un réel r, appelé **raison**, tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = U_n + r$$

Propriété 1.1.1.1 *(Terme général d'une suite arithmétique)*

Si $(U_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous entiers $n \geq p$:

Formule clé

$$U_n = U_p + (n-p) \cdot r$$

Définition 1.1.1.3 *(Suite géométrique)*

Une suite $(U_n)_n$ est dite géométrique s'il existe un réel $q \in \mathbb{R}^*$, appelé **raison**, tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = q \cdot U_n$$

Propriété 1.1.1.2 *(Terme général d'une suite géométrique)*

Si $(U_n)_n$ est une suite géométrique de raison q, alors pour tous entiers $n \geq p$:

Formule clé

$$U_n = U_p \cdot q^{n-p}$$

Définition 1.1.1.4 *(Suite arithmético-géométrique)*

Une suite $(U_n)_n$ est dite arithmético-géométrique s'il existe deux réels (a, b) avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et $b \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = aU_n + b$$

Propriété 1.1.1.3 *(Terme général d'une suite arithmético-géométrique)*

Méthode

Méthode : On cherche le point fixe l tel que $l = al + b$, soit $l = \frac{b}{1-a}$.
La suite auxiliaire $(V_n)_n$ définie par $V_n = U_n - l$ est géométrique de raison a.

On en déduit le terme général de $(U_n)_n$:

Formule clé

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = l + a^n(U_0 - l)$$

Définition 1.1.1.5 ***(Suite récurrente linéaire d'ordre 2)***

Une suite $(U_n)_n$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe deux réels (a, b) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$$

La suite est entièrement déterminée par la donnée de ses deux premiers termes U_0 et U_1.

Théorème 1.1.1.1 ***(Solution d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2)***

Pour trouver le terme général de la suite $(U_n)_n$, on résout son **équation caractéristique** :

$$x^2 - ax - b = 0 \quad (*)$$

Soit Δ son discriminant. Trois cas se présentent :

- **Cas 1 :** $\Delta > 0$
  L'équation $(*)$ admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Le terme général est de la forme :

  Formule clé

  $$U_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

  où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sont déterminés par les conditions initiales U_0 et U_1.

- **Cas 2 :** $\Delta = 0$
  L'équation $(*)$ admet une solution réelle double r_0. Le terme général est de la forme :

  Formule clé

  $$U_n = (\alpha n + \beta) r_0^n$$

  où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sont déterminés par les conditions initiales.

- **Cas 3 :** $\Delta < 0$
  L'équation $(*)$ admet deux solutions complexes conjuguées $z = re^{i\theta}$ et $\bar{z} = re^{-i\theta}$. Le terme général est de la forme :

  Formule clé

  $$U_n = r^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$$

  où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sont déterminés par les conditions initiales.

1.2 Suites bornées

Définition 1.1.2.6 *(Suite bornée)*

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- $(U_n)_n$ est dite **majorée** ssi $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$.
  (i.e. l'ensemble $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré).
- $(U_n)_n$ est dite **minorée** ssi $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$.
  (i.e. l'ensemble $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ est minoré).
- $(U_n)_n$ est dite **bornée** ssi elle est majorée et minorée.

Remarque 1.1.2.3

On note l'ensemble des suites réelles bornées $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Propriété 1.1.2.4

$(U_n)_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \iff \exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq \alpha$.

Exemple 1.1.2.2

- $(-n^2)_n$ est majorée (par 0) et non minorée.
- $(\sqrt{n})_n$ est minorée (par 0) et non majorée.
- $((-2)^n)_n$ n'est ni majorée, ni minorée.
- $(\frac{(-1)^n}{n+1})_n$, $(\cos(n))_n$ sont des suites bornées.

Proposition 1.1.2.1 *(Stabilité par opérations)*

Soient $(U_n)_n, (V_n)_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(U_n)_n + \lambda(V_n)_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
2. $(U_n)_n \cdot (V_n)_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Preuve

Soit $\Pi, \Pi' \geq 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq \Pi$ et $|V_n| \leq \Pi'$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n + \lambda V_n| \leq |U_n| + |\lambda||V_n| \leq \Pi + |\lambda|\Pi'$.
Et $|U_n \cdot V_n| = |U_n| \cdot |V_n| \leq \Pi \cdot \Pi'$. ■

Proposition 1.1.2.2

Si $(U_n)_n, (V_n)_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $(\max(U_n, V_n))_n$ et $(\min(U_n, V_n))_n$ sont dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Conséquence 1.1.2.1

On peut exprimer le max et le min à l'aide de la valeur absolue :

Formule clé

$$\max(U_n, V_n) = \frac{1}{2}(U_n + V_n + |U_n - V_n|) \tag{1.1}$$

$$\min(U_n, V_n) = \frac{1}{2}(U_n + V_n - |U_n - V_n|) \tag{1.2}$$

1.3 Monotonie d'une suite

Définition 1.1.3.7 *(Monotonie)*

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- $(U_n)_n$ est dite **croissante** (resp. **strictement croissante**) ssi $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$ (resp. $U_{n+1} > U_n$).
- $(U_n)_n$ est dite **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) ssi $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n$ (resp. $U_{n+1} < U_n$).
- $(U_n)_n$ est dite **monotone** ssi elle est croissante ou décroissante.

Remarque 1.1.3.4 *(Méthodes pour étudier la monotonie)*

Méthode

Deux méthodes principales :

- Pour étudier la monotonie de $(U_n)_n$, on étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.
- Si $\forall n, U_n \neq 0$ et de signe constant, on peut étudier la position de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ par rapport à 1, ou le signe de $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1$.

Exemple 1.1.3.3

1. $(n^2)_n, (\sqrt{n})_n$ sont croissantes.
2. Soit la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Pour étudier sa monotonie, calculons $U_{n+1} - U_n$.

$$\begin{aligned}
U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k}\right) \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \\
&= \frac{2(n+1)-(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0
\end{aligned}$$

Donc la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est (strictement) croissante.

1.4 Suites extraites

Définition 1.1.4.8 ***(Suite extraite)***

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(\varphi(n))_n$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. La suite $(V_n)_n$ définie par $V_n = U_{\varphi(n)}$ est appelée **suite extraite** (ou sous-suite) de $(U_n)_n$ par la suite d'extraction $(\varphi(n))_n$. φ est appelée **fonction d'extraction** ou l'extractrice ($\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$).

Propriété 1.1.4.5

- Si $(U_n)_n$ est convergente vers L, alors toute suite extraite $(V_n)_n$ de $(U_n)_n$ est convergente vers L.
- L'extractrice $(\varphi(n))_n$ vérifie l'inégalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.
- Si $(U_n)_n$ est croissante (resp. décroissante), alors toute suite extraite $(V_n)_n$ de $(U_n)_n$ est croissante (resp. décroissante).
- Si $(U_n)_n$ est majorée (resp. minorée, bornée), alors toute suite extraite $(V_n)_n$ de

$(U_n)_n$ est majorée (resp. minorée, bornée).

1.5 Convergence d'une suite

Définition 1.1.5.9 *(Convergence d'une suite)*

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $L \in \mathbb{R}$. On dit que $(U_n)_n$ **converge** vers L (ou que L est la **limite** de $(U_n)_n$) ssi :

Définition fondamentale de la convergence

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |U_n - L| < \varepsilon \quad (*)$$

On note $\lim_{n \to +\infty} U_n = L$ ou $U_n \to L$ quand $n \to +\infty$.

Remarque 1.1.5.5

Le n_0 s'appelle le rang à partir duquel l'inégalité $(*)$ est vérifiée.

Propriété 1.1.5.6

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $L \in \mathbb{R}$. Si $(U_n)_n$ converge vers L, alors L est unique.

Preuve

Soit $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tels que $U_n \to L_1$ et $U_n \to L_2$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_1, |U_n - L_1| < \varepsilon$$
$$\forall n \geq n_2, |U_n - L_2| < \varepsilon$$

Soit $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Alors pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - U_n + U_n - L_2| \\ &\leq |L_1 - U_n| + |U_n - L_2| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $L_1 = L_2$ (on peut se référer aux propriétés étudiées en Chapitre 3 sur la borne inférieure et la borne supérieure). ■

Définition 1.1.5.10 ***(Suite divergente)***

- Si $(U_n)_n$ n'admet pas de limite finie, on dit que $(U_n)_n$ est **divergente**.
- On dit que $(U_n)_n$ **diverge vers** $+\infty$ ssi : $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n > A$ et on note $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
- On dit que $(U_n)_n$ **diverge vers** $-\infty$ ssi : $\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n < A$ et on note $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

Propriété 1.1.5.7

Soient $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$.

- Si $(U_n)_n$ converge vers l, alors toute suite extraite $(V_n)_n$ de $(U_n)_n$ converge vers l. On écrit : $U_n \to l \implies \forall (U_{\varphi(n)})_n$ sous-suite de $(U_n)_n, (U_{\varphi(n)})_n \to l$. L'équivalence est valable.
- Un cas particulier intéressant : $\begin{cases} U_{2n} \to l \\ U_{2n+1} \to l \end{cases} \iff U_n \to l.$
- Preuve à refaire (ou à revoir...).

Remarque 1.1.5.6

- Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $\exists (U_{\varphi(n)})_n$ une suite extraite de $(U_n)_n$ qui n'admet pas de limite, alors $(U_n)_n$ n'admet pas de limite.
- Si $(U_n)_n$ admet deux suites extraites $(U_{\varphi(n)})_n$ et $(U_{\psi(n)})_n$ qui convergent vers deux limites distinctes, alors $(U_n)_n$ n'admet pas de limite. En d'autres termes,

Exercice 1.1.5.1

Étudier la convergence des suites : $(\cos(n\theta))_n$ et $(\sin(n\theta))_n$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Propriété 1.1.5.8

Soient $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$.

- $U_n \to 0 \iff |U_n| \to 0$.
- $U_n \to l \iff |U_n| \to |l|$.
- $(U_n)_n$ convergente $\implies (U_n)_n$ bornée.
- Si $U_n \to l$ avec $l \in]a, b[$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n \in]a, b[$.

Preuve

Preuve de ($U_n \to 0 \iff |U_n| \to 0$)
La définition de la convergence vers 0 est : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |X_n - 0| < \varepsilon$. L'expression $|X_n - 0|$ se simplifie en $|X_n|$. Ainsi, $U_n \to 0$ se traduit par $|U_n| < \varepsilon$ (à partir d'un certain rang), et $|U_n| \to 0$ se traduit par $||U_n| - 0| < \varepsilon$, ce qui est aussi $|U_n| < \varepsilon$. Les deux affirmations sont donc identiques.

Preuve de ($U_n \to l \implies |U_n| \to |l|$)
L'implication inverse est fausse, comme le montre le contre-exemple $U_n = (-1)^n$ où $|U_n| \to 1$ mais $(U_n)_n$ diverge. Pour l'implication directe, on utilise l'inégalité triangulaire inversée : $||U_n| - |l|| \leq |U_n - l|$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $U_n \to l$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|U_n - l| < \varepsilon$. En combinant les deux inégalités, on obtient que pour $n \geq n_0$, $||U_n| - |l|| < \varepsilon$. Ceci prouve bien que $|U_n| \to |l|$.

Preuve que toute suite convergente est bornée
Soit $(U_n)_n$ une suite qui converge vers l. En appliquant la définition de la convergence pour $\varepsilon = 1$, on sait qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|U_n - l| < 1$. Ceci implique que $l - 1 < U_n < l + 1$ pour $n \geq n_0$. Les termes de la suite sont donc bornés à partir de ce rang n_0. L'ensemble des premiers termes $\{U_0, U_1, \ldots, U_{n_0-1}\}$ est un ensemble fini de nombres réels, il est donc également borné. Par conséquent, la suite entière est bornée.

Preuve de la stabilité dans un intervalle ouvert
On suppose $U_n \to l$ avec $l \in]a, b[$. Puisque l est strictement entre a et b, la distance de l à chaque borne est strictement positive. Posons $\varepsilon = \min(l-a, b-l)$. On a bien $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, pour ce ε, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|U_n - l| < \varepsilon$, soit $l - \varepsilon < U_n < l + \varepsilon$. Par construction, $a \leq l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon \leq b$. On en déduit que pour tout $n \geq n_0$, on a $a < U_n < b$. ■

Propriété 1.1.5.9

Soient $(U_n)_n, (V_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l, l' \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.
Si $V_n \to 0$ et $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p : |U_n - l| \leq |V_n|$, alors $U_n \to l$.

Preuve

On a $V_n \to 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |V_n| < \varepsilon$.
Donc $\forall n \geq \max(n_0, p)$, on a $|U_n - l| \leq |V_n| < \varepsilon$. D'où la conclusion. ■

Propriété 1.1.5.10

Soient $(U_n)_n, (V_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p : U_n \leq V_n$.

Alors $\begin{cases} U_n \to +\infty \implies V_n \to +\infty \\ V_n \to -\infty \implies U_n \to -\infty \end{cases}$

Preuve

Soit $A > 0$. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, U_n > A$. Donc $\forall n \geq \max(n_0, p), V_n \geq U_n > A$. D'où la conclusion. On procède de même pour la deuxième implication (on utilise $-V_n$ et $-U_n$). ■

Propriété 1.1.5.11 *(Règle de d'Alembert)*

Soit $(U_n)_n \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ tel que $|\frac{U_{n+1}}{U_n}| \to l \in [0; +\infty[$.

Critères de convergence

- Si $l < 1$, alors $U_n \to 0$.
- Si $l > 1$, alors $|U_n| \to +\infty$.
- Si $l = 1$, aucune conclusion n'est possible.

Attention

Attention : Le cas $l = 1$ ne permet aucune conclusion ! Il faut alors utiliser d'autres méthodes.

Exemple 1.1.5.4

On pose $U_n = \frac{n!}{n^n}$. Étudier la convergence de $(U_n)_n$.

On a $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Or $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \to e^{-1} < 1$.

Donc, par la règle de d'Alembert, $U_n \to 0$

Remarque 1.1.5.7

On a : $\forall x \in \mathbb{R} : \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$, parce que : $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \exp(x \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}) \to e^x$.

Propriété 1.1.5.12

Soient $(U_n)_n, (V_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p : U_n \leq V_n$ et $\begin{cases} U_n \to l \in \mathbb{R} \\ V_n \to l' \in \mathbb{R} \end{cases}$

Alors $l \leq l'$.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0, \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :
$\forall n \geq n_1 : -\frac{\varepsilon}{2} + l < U_n < l + \frac{\varepsilon}{2}$
$\forall n \geq n_2 : -\frac{\varepsilon}{2} + l' < V_n < l' + \frac{\varepsilon}{2}$
Donc pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a :
$-\frac{\varepsilon}{2} + l < U_n < l + \frac{\varepsilon}{2} \leq V_n < l' + \frac{\varepsilon}{2}$
$\implies l - l' < \varepsilon \ (\forall \varepsilon > 0)$
$\implies l - l' \leq \inf(\mathbb{R}_+^*) = 0$ D'où $l \leq l'$. ■

Théorème 1.1.5.2 ***(Théorème des gendarmes)***

Soient $(U_n)_n, (V_n)_n, (W_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p : U_n \leq V_n \leq W_n$ et $\begin{cases} U_n \to l \in \mathbb{R} \\ W_n \to l' \in \mathbb{R} \end{cases}$ avec $l = l'$. Alors $V_n \to l$.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0, \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :
$\forall n \geq n_1 : -\varepsilon + l < U_n < l + \varepsilon$
$\forall n \geq n_2 : -\varepsilon + l' < W_n < l' + \varepsilon$
Donc pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a :
$-\varepsilon + l < U_n < l + \varepsilon \leq V_n \leq W_n < l' + \varepsilon = l + \varepsilon$
$\implies |V_n - l| < \varepsilon \ (\forall \varepsilon > 0)$
D'où le théorème. ■

Exemple 1.1.5.5

On a : $\forall n \geq 1 : U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n^2}$.
Calculons $\lim_{n\to+\infty} U_n$.
On a : $\forall n \geq 1, \forall k \in [1, n], 1 + n^2 \leq k + n^2 \leq n + n^2$. Donc : $\frac{n}{n+n^2} \leq \frac{n}{k+n^2} \leq \frac{n}{1+n^2}$.
Donc : $\frac{n^2}{n+n^2} \leq U_n \leq \frac{n^2}{1+n^2}$.
Or : $\frac{n^2}{n+n^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ et $\frac{n^2}{1+n^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to 1$.
Donc, par le théorème des gendarmes, $U_n \to 1$.

Conséquence 1.1.5.2

Soient $(U_n)_n, (V_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $V_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ et $U_n \to 0$. Alors $U_n V_n \to 0$.

Propriété 1.1.5.13

Soient $(U_n)_n, (V_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $\begin{cases} U_n \to l \in \mathbb{R} \\ V_n \to l' \in \mathbb{R} \end{cases}$

Alors :

- $U_n + \alpha V_n \to l + \alpha l'$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$
- $\lambda U_n \to \lambda l$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- $U_n V_n \to l \cdot l'$
- Si $l' \neq 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : V_n \neq 0$ et $\frac{1}{V_n} \to \frac{1}{l'}$

Preuve

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq n_1 : |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\forall n \geq n_2 : |V_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$. Donc pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a :
  $|U_n + \alpha V_n - (l + \alpha l')| \leq |U_n - l| + |\alpha||V_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = 0$, la conclusion est évidente. Sinon, on applique le point précédent avec $\alpha = \lambda$.
- Les autres preuves sont dans le cahier, manuscrites.

■

Propriété 1.1.5.14

Soient $(U_n)_n, (V_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Alors :

1. $(U_n)_n$ est minorée et $V_n \to +\infty \implies U_n + V_n \to +\infty$
2. $(V_n)_n$ est majorée et $U_n \to -\infty \implies U_n + V_n \to -\infty$

Preuve

On a : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n + V_n \geq m + V_n \to +\infty$. D'où $U_n + V_n \to +\infty$. ■

Théorème 1.1.5.3

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $(U_n)_n$ est croissante et majorée, alors $(U_n)_n$ converge vers $\sup(\{U_n, n \in \mathbb{N}\})$.
2. Si $(U_n)_n$ est décroissante et minorée, alors $(U_n)_n$ converge vers $\inf(\{U_n, n \in \mathbb{N}\})$.
3. Si $(U_n)_n$ est croissante non majorée, alors $U_n \to +\infty$.
4. Si $(U_n)_n$ est décroissante non minorée, alors $U_n \to -\infty$.
5. Toute suite monotone admet une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$. Cela **ne veut pas dire que**

toute suite monotone converge.

Preuve

1. Soit $M = \sup(\{U_n, n \in \mathbb{N}\})$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon < U_{n_0} \leq M$. Donc pour tout $n \geq n_0$, on a : $M - \varepsilon < U_{n_0} \leq U_n \leq M$. D'où $|U_n - M| < \varepsilon$.
2. On procède de même en utilisant la borne inférieure.

■

Exercice 1.1.5.2

Calculer la limite des suites suivantes (si elle existe) :

- $U_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = U_n + e^{-U_n}$
- $U_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = U_n - U_n^2$

1.6 Suites adjacentes

Définition 1.1.6.11

Soient $(U_n)_n, (V_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont **adjacentes** ssi :

- $(U_n)_n$ est croissante et $(V_n)_n$ est décroissante (ou l'inverse)
- $\lim_{n \to +\infty}(V_n - U_n) = 0$

Théorème 1.1.6.4

Soient $(U_n)_n, (V_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes telles que $U_n \nearrow$ et $V_n \searrow$.
Alors :

- Les deux suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$.
- $\forall n, p \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \leq V_p$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \leq l \leq V_n$.

Preuve

- Supposons que $\exists n_0, p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n_0} > V_{p_0}$.
  Alors, pour tout $n \geq \max(n_0, p_0)$, on a : $U_n \geq U_{n_0} > V_{p_0} \geq V_n$.
  Donc, $\forall n \geq \max(n_0, p_0)$, on a : $U_n - V_n \geq U_{n_0} - V_{p_0}$.
  Donc $lim_{n \to +\infty}(U_n - V_n) = 0 \geq U_{n_0} - V_{p_0}$
  $\implies U_{n_0} \leq V_{p_0}$.
- On a $(U_n)_n$ croissante et majorée par V_0, donc elle converge vers $l_1 \in \mathbb{R}$.
  On a $(V_n)_n$ décroissante et minorée par U_0, donc elle converge vers $l_2 \in \mathbb{R}$.
  Or, $V_n - U_n \to 0$, alors $l_2 - l_1 = 0 \implies l_1 = l_2 = l \in \mathbb{R}$.
- On a $\forall n, p \in \mathbb{N}, U_n \leq V_p$. Donc $p \to +\infty \implies \forall n \in \mathbb{N} U_n \leq \lim_{p \to +\infty} V_p = l$.
  De même, $\forall p \in \mathbb{N}, l \leq V_p$.
  Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq l \leq V_n$.

■

Exemple 1.1.6.6

Soit $\begin{cases} U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ V_n = U_n + \frac{1}{n \cdot n!} \end{cases}$

Clair, voir cahier.

Exercice 1.1.6.3

On pose $\forall n \in \mathbb{N} : I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot e^{-t} dt$. Montrer, à l'aide de $(I_n)_n$ que $\lim U_n = \lim V_n = e$. Puis, montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Théorème 1.1.6.5 ***(Théorème des segments emboîtés)***

Soit $(I_1 = [a_n, b_n])_n$ une suite décroissante de segments (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$), avec $\delta(I_n) = b_n - a_n \to 0$. Alors, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{l\}$ avec $l \in \mathbb{R}$.

Preuve

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [a_n, b_n]$.

- On a : $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subset I_n \iff [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $\iff \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Donc $(a_n)_n$ est croissante et $(b_n)_n$ est décroissante.
- On a : $\delta(I_n) = b_n - a_n \to 0$. Donc $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. Donc, par le théorème des suites adjacentes, $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$.
- On a : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq l \leq b_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, l \in [a_n, b_n] = I_n$. Donc $l \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$.
- Soit $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, x \in I_n = [a_n, b_n]$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq x \leq b_n$. En passant à la limite, on a $l \leq x \leq l$. Donc $x = l$. Donc $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n \subset l$.
- En combinant les deux inclusions, on obtient : $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = l$.

■

Théorème 1.1.6.6 ***(Théorème de Bolzano-Weierstrass)***

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors, il existe une sous-suite $(U_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, i.e. $(U_n)_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \implies \exists (U_{\varphi(n)})_n$ sous-suite de $(U_n)_n, (U_{\varphi(n)})_n \to l \in \mathbb{R}$.

Preuve

On a : $(U_n)_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \iff \exists a_0, b_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq U_n \leq b_0$.
On pose $\varphi(0) = 0$, et c_0 le milieu de $[a_0, b_0]$.

On pose :

$$\begin{cases} A_1 = \{k > 0 / a_0 \leq U_k \leq c_0\} \\ A_2 = \{k > 0 / c_0 \leq U_k \leq b_0\} \end{cases}$$

On a : $A_1 \cup A_2 = \{k > 0 / a_0 \leq U_k \leq b_0\} = \mathbb{N}^*$.
Donc A_1 ou A_2 est infini.

- Si A_1 est infini, on pose $a_1 = a_0, b_1 = c_0$. On choisit $\varphi(1) \in A_1$, donc $U_{\varphi(1)} \in [a_0, c_0] = [a_1, b_1]$, donc $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2}$, et $\varphi(1) > \varphi(0) = 0$.
- Si A_2 est infini, on pose $a_1 = c_0, b_1 = b_0$. On choisit $\varphi(1) \in A_2$, et on a $a_1 \leq U_{\varphi(1)} \leq b_1$, donc $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2}$ et $\varphi(1) > \varphi(0)$.

Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\exists a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$

et φ qui vérifient :

$$\begin{cases} \forall k \in [0,n], a_k \leq U_{\varphi(k)} \leq b_k \\ \forall k \in [0,n], b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \\ \forall k \in [0,n], \varphi(k) > \varphi(k-1) \\ \{k > \varphi(n)/a_n \leq U_k \leq b_n\} = E \text{ est infini} \end{cases}$$

Soit c_n le milieu de $[a_n, b_n]$. On pose $E_1 = \{k > \varphi(n)/a_n \leq U_k \leq c_n\}$ et $E_2 = \{k > \varphi(n)/c_n \leq U_k \leq b_n\}$.
On a : $E_1 \cup E_2 = E$. Donc E_1 ou E_2 est infini.

- Si E_1 est infini, on pose $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n$. On choisit $\varphi(n+1) \in E_1$, donc :

$$\begin{cases} \varphi(n+1) > \varphi(n) > \cdots > \varphi(0) \text{ d'après H.R.} \\ a_n \leq U_{\varphi(n+1)} \leq c_n \\ b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \end{cases}$$

- Si E_2 est infini, on suit un raisonnement similaire.

On a construit deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante et :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq U_{\varphi(n)} \leq b_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \end{cases}$$

$(1) + (2) \implies (a_n)_n et (b_n)_n$ sont deux suites adjacentes.
Donc, par le théorème des suites adjacentes, $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$. D'où $(3) \implies \forall n \in \mathbb{N} : U_{\varphi(n)} \to l \in \mathbb{R}$.
■

Remarque 1.1.6.8 ***(Récurrence forte)***

- En récurrence simple, on prouve $P(n)$ en supposant $P(n-1)$.
- En récurrence forte, on prouve $P(n)$ en supposant $\forall k \leq n, P(k)$.
- Exemple : Pour prouver que $(U_n)_n$ est croissante, on peut supposer que $\forall k < n, U_k \leq U_{k+1}$.

Remarque 1.1.6.9

I est dit intervalle de $\mathbb{R}$ ssi $\forall a < b \in I, [a,b] \subset I$.
Un segment est un intervalle fermé et borné.

2 Suites récurrentes

Définition 2.2.0.12

Soient D une partie non-vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Soit I un intervalle de D stable par f, i.e. $f(I) \subset I$ (ce qui équivaut à dire que $\forall x \in I, f(x) \in I$). Soit la suite $(U_n)_n$ définie par $U_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$. La suite U_n est appelée la **suite récurrente** associée à f (d'ordre 1).

Remarque 2.2.0.10

La condition $f(I) \subset I$ est essentielle pour que la suite soit bien définie.

Preuve *(Contre-exemple)*

On pose : $f : x \to \sqrt{x-1}$, $I =]1, +\infty[$ et $U_0 = 5$.
On a : $U_1 = f(U_0) = \sqrt{5-1} = 2$, $U_2 = f(U_1) = \sqrt{2-1} = 1$.
Or $1 \notin I$, donc U_3 n'existe pas et donc la suite n'est pas définie pour tout n.
Le problème vient du fait que $f(I) = \mathbb{R}_+^* \not\subset I$. ■

Remarque 2.2.0.11

Si $U_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = f(U_n)$, alors la suite $(U_n)_n$ est entièrement déterminée par U_0, et on peut écrire :

Formule clé

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = f^n(a)$$

où f^n est la composée de f avec elle-même n fois (avec la convention $f^0 = id_{\mathbb{R}}$).

2.1 Monotonie

Propriété 2.2.1.15

1. $\forall x \in I : \begin{cases} f(x) \geq x \implies (U_n)_n \text{ est croissante } \nearrow \\ f(x) \leq x \implies (U_n)_n \text{ est décroissante } \searrow \end{cases}$
2. Si f est croissante sur I, si $U_0 \leq U_1$, alors $(U_n)_n$ est croissante, et si $U_0 \geq U_1$, alors $(U_n)_n$ est décroissante. *Ce résultat est démontré par récurrence.*
3. Si f est décroissante sur I :
   $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} U_{2n+2} = f(U_{2n+1}) = f(f(U_{2n})) = f^2(U_{2n}) \\ U_{2n+3} = f(U_{2n+2}) = f(f(U_{2n+1})) = f^2(U_{2n+1}) \end{cases}$
   Donc les suites $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$ sont récurrentes d'ordre 1 associées à $f^2 = f \circ f$, qui est croissante sur I. Donc U_{2n} et U_{2n+1} sont chacune monotones (voir point précédent).

2.2 Convergence

Propriété 2.2.2.16

Supposons que f est continue sur $\bar{I} \subset \mathbb{R}$ avec $\bar{I} = I \cup \{\inf(I), \sup(I)\}$ (exemple : $I =]1, +\infty[$, alors $\bar{I} = [1, +\infty[$).
Si U_n converge vers $l \in \bar{I}$, alors $l = f(l)$, i.e. la limite éventuelle de U_n est une solution de l'équation $f(x) = x$ sur $\bar{I}$.

Exemple 2.2.2.7

Étudier la convergence de la suite définie par $U_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \frac{U_n^2+3}{4}$.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \in [0, +\infty[$.
On a : $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = \frac{x^2+3}{4} \geq x$
$\iff x^2 - 4x + 3 \geq 0$
$\iff (x-1)(x-3) \geq 0$.
Donc $f(x) \geq x$ pour $x \in [0, 1] \cup [3, +\infty[$ et $f(x) \leq x$ pour $x \in [1, 3]$.
Cas 1 : $U_0 \in [0, 1[$. On a : $f([0, 1[) \subset [0, 1[$.
Donc $(U_n)_n$ est croissante et majorée par 1.
Donc $U_n \to l \in [0, 1[$.
Or $l = f(l) \implies l^2 - 4l + 3 = 0 \implies l \in \{1, 3\}$.
Donc $\boxed{U_n \to 1}$.
Cas 2 : $U_0 \in]1, 3[$.

On a : $f([1,3]) \subset [1,3]$.
Donc $(U_n)_n$ est décroissante et minorée par 1.
Donc $U_n \to l \in [1,3]$. Or $l = f(l) \implies l^2 - 4l + 3 = 0 \implies l \in \{1,3\}$.
Or $l \leq U_0 < 3 \implies l \neq 3$.
Donc $\boxed{U_n \to 1}$.
Cas 3 : $U_0 \in [3, +\infty[$.
On a : $f([3,+\infty[) \subset [3,+\infty[$.
Donc $(U_n)_n$ est croissante. Supposons que U_n est majorée.
Donc $U_n \to l \in [3,+\infty[$. Or $l = f(l) \implies l^2 - 4l + 3 = 0 \implies l \in \{1,3\}$.
Or $l \geq 3 \implies l = 3$.
Donc $\boxed{U_n \to 3}$ si $(U_n)_n$ est majorée.
Cela impliquerait que $3 \geq U_0$, or $U_0 > 3$ car $U_n \nearrow$.
Donc, comme $(U_n)_n$ est croissante et non-majorée, on a : $\boxed{U_n \to +\infty}$.
Cas 4 : $U_0 \in \{1,3\}$.
On a : $\boxed{U_n = U_0 \to U_0}$.

3 Suites complexes

Définition 3.3.0.13

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle suite complexe toute application U : $\begin{cases} \{k \in \mathbb{N}/k \geq n_0\} \to \mathbb{C} \\ n \rightarrowtail U(n) = U_n \end{cases}$.
On note l'ensemble des suites complexes par $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Remarque 3.3.0.12

Soit $(Z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = \Re(Z_n) + i\Im(Z_n)$ avec $\Re(Z_n), \Im(Z_n) \in \mathbb{R}$. Donc, on peut définir deux suites réelles $(\Re(Z_n))_n$ et $(\Im(Z_n))_n$. On peut alors définir une suite complexe par la réunion de deux suites réelles.

Exemple 3.3.0.8

1. $\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = \frac{1-n}{1+n} + ie^{-n}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n$.

Définition 3.3.0.14 *(Suite bornée dans $\mathbb{C}$)*

Soit $(Z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(Z_n)_n$ est bornée ssi la suite des modules $(|Z_n|)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$, i.e. ssi $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |Z_n| \leq M$.
On note $\mathbb{B}(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites bornées dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Exemple 3.3.0.9

$Z_n = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n$ est bornée car : $\forall n \in \mathbb{N}, |Z_n| = \left|\frac{1-i}{2}\right|^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leq 1$.

Propriété 3.3.0.17

Soit $(Z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On a : $(Z_n)_n \in \mathbb{B}(\mathbb{C}) \iff (\Re(Z_n))_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ et $(\Im(Z_n))_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$.

Preuve

$\Longrightarrow$ $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, |\Re(Z_n)| \leq |Z_n| \\ \forall n \in \mathbb{N}, |\Im(Z_n)| \leq |Z_n| \end{cases}$

$\Longleftarrow$ Trivial.

$\blacksquare$

Remarque 3.3.0.13

1. Les définitions et propriétés de convergence dans $\mathbb{R}$ s'étendent naturellement à $\mathbb{C}$ (elles sont analogues).
2. Les opérations algébriques sur les limites des suites complexes sont analogues à celles des suites réelles.
3. Une suite complexe est soit convergente soit elle n'admet pas de limite.
4. La notion de suite monotone n'existe pas dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ car $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné. Cependant, on peut définir la notion de suite bornée (on vient de le faire $\uparrow\uparrow\uparrow$). La notion de suite adjacente n'existe pas non plus dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Propriété 3.3.0.18

Soit $(Z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On a : $Z_n \to l = a + ib \iff \begin{cases} \Re(Z_n) \to a \\ \Im(Z_n) \to b \end{cases}$

Preuve

$\Longrightarrow$ On a : $|\Re(Z_n) - a| = |\Re(Z_n - l)| \leq |Z_n - l| \quad (\dots)$.

$\Longleftarrow$ Trivial.

$\blacksquare$

Exercice 3.3.0.4

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \to 0$. Montrer que $(1 + \frac{a_n}{n})^n \to 1$.
On a : $|(1 + \frac{a_n}{n})^n - 1| = |\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \frac{a_n^k}{n^k}| \leq \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{|a_n|^k}{n^k} = (1 + \frac{|a_n|}{n})^n - 1 \to 0$. D'où $\dots$
CQFD.

Théorème 3.3.0.7 ***(Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$)***

Toute suite bornée dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Preuve

Soit $(Z_n)_n \in \mathbb{B}(\mathbb{C})$. Donc, par la propriété précédente, $(\Re(Z_n))_n$ et $(\Im(Z_n))_n$ sont dans $\mathbb{B}(\mathbb{R})$.
On pose : $x_n = \Re(Z_n)$ et $y_n = \Im(Z_n)$.
On a : $(x_n)_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. Donc, par le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $l_1 \in \mathbb{R}$.
On a : $(y_{\varphi(n)})_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. Donc, par le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite $(y_{\varphi(\psi(n))})_n$ qui converge vers $l_2 \in \mathbb{R}$.
Et on a : $x_{\varphi(\psi(n))} \to l_1$, parce que c'est une sous-suite de $x_{\varphi n}$.
On pose : $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \psi$. On a bien : $(x_{\tilde{\varphi}(n)}, y_{\tilde{\varphi}(n)})$ convergentes.
Donc : $Z_{\tilde{\varphi}(n)} = x_{\tilde{\varphi}(n)} + iy_{\tilde{\varphi}(n)} \to l_1 + il_2 \in \mathbb{C}$.
Donc : $(Z_n)_n$ admet une sous-suite convergente. CQFD. ■

Exercice 3.3.0.5

Soient $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n, (d_n)_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$.
Montrer que $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que f str. croissante et : $(a_{f(n)})_n, (b_{f(n)})_n, (c_{f(n)})_n, (d_{f(n)})_n$ convergent.

Solution :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} U_n = a_n + ib_n \\ V_n = c_n + id_n \end{cases}$$

Application 3.3.0.1

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On pose : $\begin{cases} P_n = \sum_{k=0}^{n} |U_k| \\ S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k \end{cases}$

Montrer que : $(P_n)_n$ converge $\implies$ $(S_n)_n$ converge.

Preuve

Preuve à refaire (recopiage complètement faux) ■

4 Complément : Moyenne de Cesàro

Définition 4.4.0.15 *(Convergence au sens de Cesàro)*

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(U_n)_n$ converge au sens de Cesàro ssi la suite des moyennes partielles $(V_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} U_k$ converge dans $\mathbb{C}$.

Propriété 4.4.0.19

Si $(U_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que : $U_n \to l \in \mathbb{C}$, alors $(U_n)_n$ converge au sens de Cesàro et $\lim_{n\to+\infty} V_n = l$.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $U_n \to l$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$|V_n - l| = \left|\frac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n} U_k) - l\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(U_k - l)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}|U_k - l|$$

$$\implies |V_n - l| \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1}|U_k - l| + \sum_{k=n_0+1}^{n}|U_k - l|\right)$$

$$\implies |V_n - l| \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1}|U_k - l| + (n - n_0)\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

$$\implies |V_n - l| \leq \frac{\alpha}{n} + (n - n_0)\frac{\varepsilon}{2}.$$

avec $\alpha = \sum_{k=1}^{n_0-1}|U_k - l|$ (constante).
Et on a : $\frac{\alpha}{n} \to 0$.
Donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_1, \frac{\alpha}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc, pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a :

$$|V_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $V_n \to l$. CQFD. □ ■

Propriété 4.4.0.20

Si $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $U_n \to +\infty$, alors $(V_n)_n \to +\infty$

Preuve

On a : $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n > 2A$.
Donc, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} U_k \geq \frac{1}{n}$$

■

Remarque 4.4.0.14

Si $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \bar{\mathbb{R}}$, alors $(V_n)_n$ converge vers l.

Attention

La réciproque est fausse : $(U_n)_n$ ne converge pas forcément si $(V_n)_n$ converge.

Théorème 4.4.0.8 *(Cesàro généralisé)*

Soient $(U_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$ tel que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$.
Si $lim_{n \to +\infty} U_n = a \in \mathbb{C}$, alors :

$$V_n = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k U_k \to a$$

À DÉMONTRER EN TANT QU'EXERCICE