Chapitre V : Équations différentielles

Rédigé par Samy Youssoufine

11 décembre 2025

University Mohammed VI Polytechnic
EMINES School of Industrial Management

Table des matières

1 Equations différentielles de premier ordre

Définition 1.1.0.1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que l'intérieur de I, noté $\mathring{I}$, soit non vide, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle **équation différentielle de premier ordre** toute équation de type :

Formule clé

$$(L) : x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

d'inconnue $x : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto x(t) \end{cases}$ dérivable sur I. Les fonctions a et b sont des fonctions continues de $\begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto a(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto b(t) \end{cases}$ respectivement.

Remarque 1.1.0.1 ***(Intérieur d'un intervalle)***

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'intérieur de I, noté $\mathring{I}$, est l'ensemble des points de I qui admettent un voisinage entièrement contenu dans I. Autrement dit, $x \in \mathring{I}$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert J tel que $x \in J \subseteq I$. Par exemple, si $I = [a, b]$, alors $\mathring{I} =]a, b[$.

Remarque 1.1.0.2 ***(Pourquoi $\mathbb{K}$ et pas $\mathbb{R}$?)***

Malgré le fait que les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'aient pas été vues en terminale, le cours d'équations différentielles peut être étendu aux fonctions à valeurs complexes, ce qui sera utile en physique. L'analyse complexe sera abordée plus tard dans des chapitres dédiés.

1.1 Propriétés des fonctions à valeurs complexes

Définition 1.1.1.2 ***(Fonction continue à valeurs complexes)***

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction **continue** si et seulement si les fonctions $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont continues.

On a donc : $f : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t) = f_1(t) + i \cdot f_2(t) \end{cases}$.

Si f est dérivable sur I, alors $f' : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f'(t) = f_1'(t) + i \cdot f_2'(t) \end{cases}$.

Propriété 1.1.1.1 ***(Opérations sur les fonctions dérivables)***

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ dérivables sur I.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, f + \lambda \cdot g$ est dérivable sur I et $(f + \lambda \cdot g)' = f' + \lambda \cdot g'$.
2. $f \cdot g$ est dérivable sur I et $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
3. Si $\forall t \in I, g(t) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

Remarque 1.1.1.3 ***(Différence entre fonction qui ne s'annule pas et fonction non-nulle)***

Il est important de noter la distinction entre une fonction qui ne s'annule pas et une fonction non-nulle. Une fonction $g : I \to \mathbb{C}$ est dite **non-nulle** si $\exists t \in I$ tel que $g(t) \neq 0$. En revanche, une fonction qui **ne s'annule pas** satisfait la condition plus stricte que $\forall t \in I, g(t) \neq 0$. Cette deuxième condition conduit à la première.

Propriété 1.1.1.2

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. Alors, e^f est aussi dérivable sur I et $(e^f)' = f' \cdot e^f$.

Preuve

On a $f = f_1 + i \cdot f_2$, donc $e^f = e^{f_1} \cdot e^{i \cdot f_2}$, donc $e^f = e^{f_1} \cdot (\cos(f_2) + i \cdot \sin(f_2))$. Comme f_1 et f_2 sont dérivables sur I, e^{f_1}, $\cos(f_2)$ et $\sin(f_2)$ sont aussi dérivables sur I. Donc $e^{f_1} \cdot \cos(f_2)$ et $e^{f_1} \cdot \sin(f_2)$ sont dérivables. Par conséquent, e^f est dérivable sur I et on a :

$$(e^f)' = (e^{f_1} \cdot \cos(f_2))' + i(e^{f_1} \cdot \sin(f_2))$$

$$= \cdots = (f_1' + i f_2') e^{f_1} (\cos(f_2) + i \sin(f_2))$$
$$= f' \cdot e^f$$

∎

Remarque 1.1.1.4

Certaines propriétés des fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ne sont pas valables dans $\mathbb{C}$. Par exemple, si $f : I \to \mathbb{C}^*$, alors on ne peut pas toujours dire que $ln(|f|)' = \frac{f'}{f}$. Prenons $f : x \mapsto x + i$. On a $\forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| = \sqrt{x^2+1}$, donc $ln(|f(x)|) = \frac{1}{2}ln(x^2+1)$, donc $(ln(|f(x)|))' = \frac{x}{x^2+1}$. Cependant, $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+i}$, et on remarque que $\frac{x}{x^2+1} \neq \frac{1}{x+i}$.

1.2 Résolution de (L)

1.2.1 Résolution de l'équation homogène (H) associée

Remarque 1.1.2.5

Dans certains livres, l'équation (L) considérée est de la forme $x'(t) + a(t) \cdot x(t) = b(t)$. Ce n'est pas l'équation considérée dans ce cours, mais les deux formes sont équivalentes.

Définition 1.1.2.3

On appelle **équation homogène associée** à (L) l'équation :

$$(H) : x'(t) = a(t) \cdot x(t)$$

(i.e. $b \equiv 0$, la fonction nulle).

Propriété 1.1.2.3

Les solutions de (H) sont les fonctions $x_H : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \lambda \cdot e^{A(t)} \end{cases}$, avec A une primitive de a sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque 1.1.2.6 ***(Pourquoi A existe ?)***

Puisque a est continue sur I, alors A existe et est unique à une constante près.

Preuve

Comme a est continue sur I, elle admet une primitive A sur I. On a : $x' = a \cdot x \iff e^{-A} \cdot x' = a \cdot e^{-A} \cdot x \iff (e^{-A} \cdot x)' = 0$ (sachant que $a \neq 0$ et $A'(t) = a(t)$). Donc $e^{-A} \cdot x = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, donc $x = \lambda \cdot e^{A}$. D'où $S_{(H)} = \{t \mapsto \lambda \cdot e^{A(t)} | \lambda \in \mathbb{K}\}$. ■

Exemple 1.1.2.1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(H) : (1+t^2) \cdot x'(t) = t \cdot x(t)$.
2. $(H) : x'(t) = -e^{-i \cdot t} \cdot x(t)$.

Solution :

1. On a $a(t) = \frac{t}{1+t^2}$. Une primitive de a est $A(t) = \frac{1}{2} \cdot ln(1+t^2)$. Donc les solutions de (H) sont $x_H(t) = \lambda \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot ln(1+t^2)} = \lambda \cdot \sqrt{1+t^2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. On a $a(t) = -e^{-i \cdot t}$. Une primitive de a est $A(t) = \frac{1}{i} \cdot e^{-i \cdot t}$. Donc les solutions de (H) sont $x_H(t) = \lambda \cdot e^{\frac{1}{i} \cdot e^{-i \cdot t}}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Remarque 1.1.2.7

Pour construire une primitive de a, il suffit de choisir un point $t_0 \in I$ et de définir $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u) du$. Il ne s'agit pas d'un passe-partout.

1.2.2 Résolution de l'équation complète (L) (avec second membre non nul)

Propriété 1.1.2.4

Si x_p est une solution particulière de (L), alors les solutions de (L) sont données par :

Formule clé

$$S_{(L)} = \{x_H + x_p | x_H \in S_{(H)}\}$$

où x_H est la solution générale de l'équation homogène (H).

Preuve

On a : $x' = ax + b \iff (x - x_p)' = a(x - x_p)' \iff x - x_p = x_H \iff x = x_H + x_p$. ■

Exemple 1.1.2.2

$$(L) : x'(t) = 2t \cdot x(t) + 1 - 2t^2$$

Solution : L'équation homogène associée est $(H) : x'(t) = 2t \cdot x(t)$. Une primitive de $a(t) = 2t$ est $A(t) = t^2$. Donc les solutions de (H) sont $x_H(t) = \lambda \cdot e^{t^2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que $x(t) = t$ est une solution particulière de (L) car $x'(t) = 1$, et $2t \cdot x(t) + 1 - 2t^2 = 2t^2 + 1 - 2t^2 = 1$. Donc les solutions de (L) sont :

$$\boxed{S_{(L)} = \{t \mapsto \lambda \cdot e^{t^2} + t | \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

1.2.3 Recherche d'une solution particulière

Cas particulier : $a(t) = \alpha \in \mathbb{K}$ et $b(t) = P(t) \cdot e^{\omega t}$, avec P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Théorème 1.1.2.1

On a $\begin{cases} a(t) = \alpha \in \mathbb{K} \\ b(t) = P(t) \cdot e^{\omega t} \end{cases}$, avec P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\omega \in \mathbb{K}$.
On cherche alors une solution particulière de la forme $x_p(t) = Q(t)e^{\omega t}$, où Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Si $\omega = \alpha$, alors $Q'(t) = P(t)$, on calcule alors $Q(t)$ par intégration et on trouve que le degré de Q est égal au degré de P plus 1.
2. Dans le cas contraire, on essaie de trouver $Q(t)$ en identifiant les polynômes. Le degré de Q est alors égal au degré de P.

Exemple 1.1.2.3

1. $(L_1) : x'(t) = 2x(t) + (t^2 + 2t + 3)e^t$
2. $(L_2) : x'(t) = 2x(t) + (t^2 + t - 1)e^{2t}$

Solution :

1. On a : $x_H : t \mapsto \lambda e^{2t}$. On cherche la solution particulière de la forme $x_p(t) = Q(t)e^t$. On a $\alpha = 2$ et $\omega = 1$, donc $\omega \neq \alpha$. On remplace dans (L_1) : $(2at + b) + (at^2 + bt + c) = 2(at^2 + bt + c) + t^2 + 2t + 3$. En réarrangeant, on trouve $-at^2 + (2a - b)t + (b - c) = t^2 + 2t + 3$. En identifiant les coefficients, on trouve : $\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 2 \\ b - c = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -7 \end{cases}$. Donc $x_p(t) = (-t^2 - 4t - 7)e^t$. Finalement, les solutions de (L_1) sont :

$$\boxed{S_{(L_1)} = \{t \mapsto \lambda e^{2t} + (-t^2 - 4t - 7)e^t | \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

2. On a : $x_H : t \mapsto \lambda e^{2t}$. On cherche la solution particulière de la forme $x_p(t) = Q(t)e^{2t}$. On a $\alpha = 2$ et $\omega = 2$, donc $\omega = \alpha$. On remplace dans (L_2) : $Q'(t)e^{2t} + 2Q(t)e^{2t} = 2Q(t)e^{2t} + (t^2+t-1)e^{2t}$. En simplifiant, on trouve $Q'(t) = t^2+t-1$. En intégrant, on trouve $Q(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + C$. On peut choisir $C = 0$ pour une solution particulière. Donc $x_p(t) = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t\right) e^{2t}$. Finalement, les solutions de (L_2) sont :
$$\boxed{S_{(L_2)} = \{t \mapsto \lambda e^{2t} + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t\right) e^{2t} | \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 1.1.2.1

1. Résoudre $(L) : x'(t) = 2x(t) + te^{it}$.
2. En déduire la solution de $(L) : x'(t) = 2x(t) + t\sin(t)$.
3. Résoudre $(L) : x'(t) = x(t) + \cos(t)$.

Solution :

1. (non réalisé ...)
2. (non réalisé ...)
3. On cherche d'abord les solutions de l'équation $(L_1) : x'(t) = x(t) + e^{it}$, parce qu'on souhaite trouver une solution particulière de la forme $x_p(t) = a \cdot e^{it}$. On a $x_H : t \mapsto \lambda e^t$. On remplace dans (L) pour obtenir : $a \cdot i \cdot e^{it} = a \cdot e^{it} + e^{it}$. En simplifiant, on trouve $a(i-1) = 1$, donc $a = \frac{1}{i-1} = \frac{-1-i}{2}$. Donc une solution particulière de (L_1) est $x_p(t) = \frac{-1-i}{2}e^{it}$. En prenant la partie réelle, on trouve une solution particulière de (L) : $x_p(t) = \frac{-1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$. Finalement, les solutions de (L) sont :
$$S_{(L)} = \{t \mapsto \lambda e^t + \frac{-1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Remarque 1.1.2.8

Pour la dernière équation, nous pouvons aussi procéder par superposition des solutions. Cette méthode consiste à résoudre séparément les équations $x'(t) = x(t)$ et $x'(t) = \cos(t)$, puis à additionner les solutions obtenues.

Méthode de variation de la constante (M.V.C.)

Théorème 1.1.2.2

Soit $(L) : x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$ une équation différentielle de premier ordre, avec a et b continues sur un intervalle I. Soit x_H la solution générale de l'équation homogène associée $(H) : x'(t) = a(t) \cdot x(t)$, qui s'écrit $x_H(t) = \lambda \cdot e^{A(t)}$, où A est une primitive de a sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On cherche une solution particulière de (L) de la forme $x_p(t) = \lambda(t) \cdot e^{A(t)}$.
En dérivant $x_p(t)$, on obtient :

$$x_p'(t) = \lambda'(t) \cdot e^{A(t)} + \lambda(t) \cdot a(t) \cdot e^{A(t)}$$

En remplaçant dans (L), on trouve :

$$\lambda'(t) \cdot e^{A(t)} + \lambda(t) \cdot a(t) \cdot e^{A(t)} = a(t) \cdot \lambda(t) \cdot e^{A(t)} + b(t)$$

Ce qui simplifie à :

$$\lambda'(t) \cdot e^{A(t)} = b(t)$$

Donc :

$$\lambda'(t) = b(t) \cdot e^{-A(t)}$$

En intégrant, on obtient :

$$\lambda(t) = \int b(u) \cdot e^{-A(u)} du + C$$

(dans le cours, on choisit les bornes t_0 et t pour l'intégrale et on omet d'écrire $\lambda(t_0)$, mais ici on laisse une constante d'intégration C).
Donc une solution particulière de (L) est donnée par :

$$x_p(t) = \left(\int b(u) \cdot e^{-A(u)} du + C \right) \cdot e^{A(t)}$$

Propriété 1.1.2.5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$ et $I^\circ \neq \emptyset$. Les solutions de l'équation (L) : $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ où $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont continues, $x : I \to \mathbb{K}$ dérivable sont $S_{(L)} = \{t \mapsto \lambda e^{A(t)} + x_p(t) | \lambda \in \mathbb{K}\}$, où A est une primitive de a (donc $A(t) = \int_{t_0}^t a(u)du$) sur I et x_p est la fonction définie par $x_p(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(u)e^{-A(u)}du$.

Preuve

Soit $A : t \mapsto \int_{t_0}^{t} a(u)du$.
On a $x' = ax + b \iff e^{-A}x' = ae^{-A}x + be^{-A} \iff (e^{-A}x)' = be^{-A}$.
En intégrant, on obtient :

$$e^{-A(t)}x(t) = \lambda + \int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}du$$

D'où : $x(t) = \underbrace{\lambda e^{A(t)}}_{x_H(t)} + \underbrace{e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}du}_{x_p(t)}$. ■

Exemple 1.1.2.4

1. $(L) : x'(t) = \frac{t}{1+t^2}x(t) + t$
2. $(L) : (e^t - 1)x'(t) = e^t x(t) + 1,\ I =]0, +\infty[$

Solution :

1. On cherche une solution particulière de (L) sous la forme $x_p = \lambda(t) \cdot \sqrt{1+t^2}$ où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable.
En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve : $\lambda'(t) \cdot \sqrt{1+t^2} + \lambda(t) \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
2. On réecrit l'équation différentielle sous la forme : $x'(t) = \frac{e^t}{e^t-1}x(t) + \frac{1}{e^t-1}$.
On a $a(t) = \frac{e^t}{e^t-1}$ et $b(t) = \frac{1}{e^t-1}$. Une primitive de a est $A(t) = ln|e^t - 1|$. Donc $e^{A(t)} = |e^t - 1| = e^t - 1$ (car $t > 0$).
Une solution de l'équation homogène associée est $x_H(t) = \lambda(e^t - 1)$.
On cherche une solution particulière de (L) sous la forme $x_p(t) = \lambda(e^t - 1)$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve : $\lambda'(t)(e^t - 1) + \lambda(t)e^t = \frac{e^t}{e^t-1}\lambda(t)(e^t - 1) + \frac{1}{e^t-1}$. En simplifiant, on obtient : $\lambda'(t)(e^t - 1) = \frac{1}{e^t-1}$. Donc $\lambda'(t) = \frac{1}{(e^t-1)^2}$. Pour intégrer, on ajoute et retranche progressivement e^t. En intégrant, on trouve : $\lambda(t) = -\frac{e^t}{e^t-1}$. Donc $x_p(t) = -ln(1 - e^{-t})(e^t - 1) - 1$.
Finalement, les solutions de (L) sont : $\boxed{S_{(L)} = \{t \mapsto (e^t - 1)(\lambda - ln(1 - e^{-t})) - 1 | \lambda \in \mathbb{K}\}}$

CONTINUE 1. (DANS L'INCAPACITÉ DE RECOPIER A TEMPS...)

Propriété 1.1.2.6 ***(Problème de Cauchy)***

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$ et $I^\circ \neq \emptyset$. Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution $x : I \to \mathbb{K}$ dérivable de l'équation $(L) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ telle que $x(t_0) = x_0$. Autrement écrit :

$$\exists! x, \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Preuve

Les solutions de (L) sont $S_{(L)} = \{t \mapsto \lambda e^{A(t)} + x_p(t) | \lambda \in \mathbb{K}\}$, où A est une primitive de a sur I et x_p est la fonction définie par $x_p(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}du$.
On cherche λ tel que $x(t_0) = x_0$. On a $x(t_0) = \lambda e^{A(t_0)} + x_p(t_0)$. Or, $x_p(t_0) = e^{A(t_0)} \int_{t_0}^{t_0} b(u)e^{-A(u)}du = 0$. Donc $x(t_0) = \lambda e^{A(t_0)}$. Donc $\lambda = \frac{x_0}{e^{A(t_0)}}$.
Or $e^{A(t_0)} = 1$ car $A(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} a(u)du = 0$. Donc $\lambda = x_0$.
Finalement, la solution de (L) telle que $x(t_0) = x_0$ est $x : t \mapsto x_0 e^{A(t)} + x_p(t)$. ■

Remarque 1.1.2.9

En pratique, nous ne nous intéressons pas aux bornes inférieures des intégrales utilisées. Nous avons donc pu utiliser le même t_0 pour les intégrales et le point d'initialisation du problème de Cauchy, sans perte de généralité.

Exemple 1.1.2.5

Résoudre $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + t \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Solution :
La solution du système homogène associée est $x_H(t) = \lambda e^{2t}$.
On cherche une solution particulière de (L) sous la forme $x_p(t) = at + b$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient : $a = 2(at+b)+t$. En identifiant les coefficients, on trouve : $\begin{cases} a = 2a + 1 \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Donc $x_p(t) = \lambda e^{2t} - \frac{1}{4}(2t+1)$.
Or $x(0) = 1$, donc $x(0) = \lambda e^0 + x_p(0) = \lambda - \frac{1}{4}$. Donc $\lambda = \frac{5}{4}$.
Finalement, la solution de (L) est $x(t) = \frac{5}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}(2t+1)$.

2 Equations différentielles linéaires de second ordre à coefficients constants

Définition 2.2.0.4

On appelle une équation différentielle linéaire de second ordre à coefficients constants toute équation dy type : $(L) : ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$ d'inconnue $x : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto x(t) \end{cases}$ dérivable sur I, et $f : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto f(t) \end{cases}$ une fonction continue sur I.

L'équation homogène associée est $(H) : ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$.

2.1 Résolution de l'équation homogène (H)

- **Résolution de l'équation homogène** (H)
  - On cherche la solution de (H) sous la forme $x_H(t) = e^{rt}$, avec $r \in \mathbb{K}$. Donc : $ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \iff ar^2 + br + c = 0$ (car $e^{rt} \neq 0$). Donc r est une racine du polynôme caractéristique $P(X) = aX^2 + bX + c$, sachant que cette équation admet toujours deux racines dans $\mathbb{C}$ (éventuellement confondues).

  - Soit r solution de ce polynôme caractéristique.
    On pose $y(t) = x(t) \cdot e^{-rt}$, i.e. $x(t) = y(t) \cdot e^{rt}$.
    Donc $x'(t) = y'(t)e^{rt} + ry(t)e^{rt}$.
    Et $x''(t) = y''(t)e^{rt} + 2ry'(t)e^{rt} + r^2y(t)e^{rt}$.
    En remplaçant dans (H), on trouve : $ay''(t) + (2ar + b)y'(t) = 0$.

  - Donc : $\begin{cases} z = y' \\ az' = -(ar + b)z \end{cases}$. On a posé z pour simplifier les notations et aboutir à deux équations différentielles de premier ordre.

  - Si $ar + b = \Delta = 0 \iff r = -\frac{b}{a}$, alors $z' = 0$, donc $y''(t) = 0$, donc $y(t) = \lambda t + \mu$.
    Donc $y'(t) = \lambda \iff y(t) = \lambda t + \mu$.
    Donc $x(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$.

▷ Sinon $(\Delta \neq 0)$:

— Si $\Delta < 0$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors P n'admet pas de racines réelles. On note $z = r + is$ et $\bar{z} = r - is$ les deux racines complexes de P. Donc $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $x(t) = \alpha e^{zt} + \beta e^{\bar{z}t}$.
Or, $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}$, alors $x(t) = \overline{x(t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Cela équivaut à dire que : $\alpha e^{zt} + \beta e^{\bar{z}t} = \bar{\alpha} e^{\bar{z}t} + \bar{\beta} e^{zt}$.
Par identification des coefficients, on trouve que $\alpha = \bar{\beta}$.
Donc $x(t) = \alpha e^{zt} + \bar{\alpha} e^{\bar{z}t}$.
On trouve alors que $x(t) = 2\Re(\alpha e^{rt} \cdot e^{ist})$.
Si $\alpha = a + ib$, alors $x(t) = 2e^{rt}(a\cos(st) - b\sin(st))$.
Finalement, les solutions de (H) sont :

$$\boxed{S_{(H)} = \{t \mapsto e^{rt}(A\cos(st) + B\sin(st)) | A, B \in \mathbb{R}\}}$$

— On écrit aussi $\exists A, B \in \mathbb{R}, x_H : t \mapsto e^{rt}(A\cos(st) + B\sin(st))$.

Résumé 2.2.1.1

Soit $(H) : ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$. L'équation caractéristique associée est $(E_c) : aX^2 + bX + c = 0$.

1. **Dans le premier cas** $(\Delta = 0)$, (E_c) admet une racine double (solution unique) $r_0 = -\frac{b}{2a}$.
Les solutions de (H) sont :
$$\boxed{S_{(H)} = \{t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{r_0 t} | \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}}$$
2. **Dans le second cas**, (E_c) admet deux racines $\in \mathbb{K}$ distinctes r_1 et r_2.
Les solutions de (H) sont :
$$\boxed{S_{(H)} = \{t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} | \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}}$$
3. **Dans le troisième cas** ($\Delta < 0$ **et** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), (E_c) n'admet pas de racines réelles.
On note $r + is$ et $r - is$ les deux racines complexes de P.
Les solutions de (H) sont :
$$\boxed{S_{(H)} = \{t \mapsto e^{rt}(A\cos(st) + B\sin(st)) | A, B \in \mathbb{R}\}}$$

Exemple 2.2.1.6

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $x'' + \omega^2 x = 0$.
2. $y'' - 2y' + y = 0$.

Solution (1) :

1. Si la résolution est dans $\mathbb{C}$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions

qui sont $i\omega$ et $-i\omega$. Donc les solutions de (H) sont :

$$\boxed{S_{(H)} = \{t \mapsto \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t} | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}}$$

2. Si la résolution est dans $\mathbb{R}$, alors l'équation caractéristique n'admet pas de solutions réelles. Donc les solutions de (H) sont :

$$\boxed{S_{(H)} = \{t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) | A, B \in \mathbb{R}\}}$$

On peut encore réecrire les solutions de (H) sous la forme $\boxed{t \mapsto C\cos(\omega t + \varphi)}$, avec $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ et φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{A}{C}$ et $\sin(\varphi) = \frac{B}{C}$. On a toujours deux constantes à déterminer.

Solution (2) :
L'équation caractéristique admet une solution unique $r_0 = 1$. Donc les solutions de (H) sont :

$$\boxed{S_{(H)} = \{t \mapsto (\alpha t + \beta)e^t | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}}$$

Propriété 2.2.1.7

Soit $(H) : ax'' + bx' + cx = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$.
Alors $\exists \varphi, \psi : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $S_{(H)} = \{t \mapsto \alpha\varphi(t) + \beta\psi(t) | \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$, avec $\forall t \in I, \omega(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0$.
ω est appelée le **wronskien** de φ et ψ et (φ, ψ) est appelé **système fondamental de solutions de** (H).

Preuve

1. **Cas 1 où $\Delta = 0$:**
On a $x_H : t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{r_0 t}$.
On pose $\varphi : t \mapsto e^{r_0 t}$ et $\psi : t \mapsto te^{r_0 t}$. On a $\omega(t) = \begin{vmatrix} e^{r_0 t} & te^{r_0 t} \\ r_0 e^{r_0 t} & (1 + r_0 t)e^{r_0 t} \end{vmatrix} = e^{2r_0 t} \neq 0$.
2. **Cas 2 où (E_c) admet deux solutions $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{K}$:**
On a $x_H : t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$.
On pose $\varphi : t \mapsto e^{r_1 t}$ et $\psi : t \mapsto e^{r_2 t}$.
On a $\omega(t) = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix}$
$= (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0$ (sachant que $r_1 \neq r_2$).
3. **Cas 3 où $\Delta < 0$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:**
On a $x_H : t \mapsto e^{rt}(A\cos(st) + B\sin(st))$.
On pose $\varphi : t \mapsto e^{rt}\cos(st)$ et $\psi : t \mapsto e^{rt}\sin(st)$.
On a $\omega(t) = \begin{vmatrix} e^{rt}\cos(st) & e^{rt}\sin(st) \\ e^{rt}(r\cos(st) - s\sin(st)) & e^{rt}(r\sin(st) + s\cos(st)) \end{vmatrix} = s \cdot e^{2rt} \neq 0$ (car $s \neq 0$).

■

2.2 Recherche d'une solution particulière

$$(\mathbf{L}) : \mathbf{ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)}$$
$S_{(H)} = \{t \mapsto \alpha\varphi(t) + \beta\psi(t) | \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$, où (φ, ψ) est un système fondamental de solutions de (H).

2.2.1 Méthode de variation des constantes

Théorème 2.2.2.3

On cherche une solution particulière de (L) de la forme :

$$h : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \lambda(t)\varphi(t) + \mu(t)\psi(t) \end{cases}$$

où $\begin{cases} \lambda, \mu : I \to \mathbb{K} \text{ sont des fonctions dérivables et} \\ h' = \lambda\varphi' + \mu\psi' \quad (\leftarrow \text{ condition supplémentaire pour simplifier}) \end{cases}$

On a : $h' = \lambda'\varphi + \lambda\varphi' + \mu'\psi + \mu\psi'$. Or $h' = \lambda\varphi' + \mu\psi'$. Donc $\lambda'\varphi + \mu'\psi = 0$ (1).
En dérivant h' : $h'' = \lambda''\varphi + \lambda'\varphi' + \lambda'\varphi' + \lambda\varphi'' + \mu''\psi + \mu'\psi' + \mu'\psi' + \mu\psi''$.
Or $h'' = \lambda'\varphi' + \mu'\psi' + \lambda\varphi'' + \mu\psi''$. Donc $\lambda'\varphi' + \mu'\psi' = \frac{f}{a}$ (2) *(MÉTHODE 1)*.
On sait aussi que (φ, ψ) est un système fondamental de solutions de (H), donc $\begin{cases} a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = 0 \\ a\psi'' + b\psi' + c\psi = 0 \end{cases}$. On a donc (MÉTHODE 2).
On a donc le système suivant à résoudre :

Formule clé

$$(*) : \begin{cases} \lambda'\varphi + \mu'\psi = 0 \\ \lambda'\varphi' + \mu'\psi' = \frac{f}{a} \end{cases}$$

Le déterminant de $(*)$ est le wronskien $\omega(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0$. Donc le système $(*)$ admet une unique solution (λ', μ') qui dépend uniquement de $\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ (des fonctions continues).

Remarque 2.2.2.10

Dans la pratique, on va directement utiliser le système linéaire $(*)$, sans passer par les étapes intermédiaires.

Exemple 2.2.2.7

$$(L) : x''(t) + x' - 2x = \frac{e^t}{e^t + 1}$$

Solution :
L'équation homogène associée est $(H) : x''(t) + x' - 2x = 0$. L'équation caractéristique associée est $(E_c) : r^2 + r - 2 = 0$, qui admet pour solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$. Donc les solutions de (H) sont : $S_{(H)} = \{t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-2t} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
On pose $\varphi : t \mapsto e^t$ et $\psi : t \mapsto e^{-2t}$. On a $\omega(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -3e^{-t} \neq 0$.
On cherche une solution particulière de (L) sous la forme $h(t) = \lambda(t)e^t + \mu(t)e^{-2t}$.
On a le système suivant à résoudre :

$$(*) : \begin{cases} \lambda' e^t + \mu' e^{-2t} = 0 \\ \lambda' e^t - 2\mu' e^{-2t} = \frac{e^t}{e^t+1} \end{cases}$$

En résolvant, on trouve : $\begin{cases} \lambda' = \frac{1}{3(e^t+1)} \\ \mu' = -\frac{e^{3t}}{3(e^t+1)} \end{cases}$.
En intégrant, on trouve : $\lambda(t) = \frac{t}{3} - \frac{1}{3}\ln(e^t + 1) + C_1$.

Pour intégrer μ', on réalise les opérations suivantes : $\mu' = -\frac{1}{3}\left[\frac{e^{3t}+1}{e^t+1} - \frac{1}{e^t+1}\right]$
$= -\frac{1}{3}\left[\frac{(e^t+1)(e^{2t}-e^t+1)}{e^t+1} - \frac{1}{e^t+1}\right]$
$= -\frac{1}{3}\left(e^{2t} - e^t + 1 - \frac{e^t}{e^t+1}\right)$.

Remarque 2.2.2.11

Posons $(L) : ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$.
Si x_p est une solution particulière de (L), alors $S_{(L)} = \{t \mapsto x_H(t) + x_p(t) | x_H \in S_{(H)}\}$.

Remarque 2.2.2.12

Il existe une méthode (un peu complexe) pour trouver une solution particulière.

- **Si l'équation caractéristique admet des racines réelles distinctes** r_1 **et** r_2, on posera $(L) : x'' + \frac{b}{a}x' + \frac{c}{a} = \frac{f}{a}$ avec $\frac{b}{a} = -(r_1 + r_2)$ et $\frac{c}{a} = r_1 \cdot r_2$ (avec $r_1 = r_2$ si racine double).
  Donc $(L) : x'' - (r_1 + r_2)x' + r_1 r_2 x = \frac{f}{a}$.
  Donc $(L) : (x'' - r_1 x') - r_2(x' - r_1 x) = \frac{f}{a}$.
  En posant $y = x' - r_1 x$, on a : $\begin{cases} y' - r_2 y = \frac{f}{a} \\ x' - r_1 x = y \end{cases}$
  On résout ce système de deux équations différentielles de premier ordre pour ensuite trouver x.
  On obtient $y_p(t) = \underbrace{e^{r_2 t} \displaystyle\int \frac{f(u)}{a} e^{-r_2 u} du}_{F(t)}$
  On aura ensuite $x' - r_1 x = F(t)$, ce qui implique que $x_p(t) = e^{r_1 t} \int^t F(s) e^{-r_1 s} ds$
  On obtient alors $x_p = e^{r_1 t} \int^t \left(e^{-r_1 s} \int^s \frac{f(u)}{a} du\right) ds$
  Nous ne disposons pas des connaissances techniques nécessaires pour calculer (facilement !) ce genre d'intégrales. Pour les rares qui vont s'y intéresser, allez vous renseigner sur le théorème de Fubini, entre autres.
- **Dans le cas où** (E_c) **n'admet pas de racines** (i.e. : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta_{(E_c)} < 0$, alors on cherche une solution particulière de (L) en employant la méthode précédente dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, puis on utilise uniquement la partie réelle de cette dernière.

2.2.2 Cas particuliers

Un premier cas particulier, $f : t \mapsto P(t)e^{\omega t}$

Formule clé

$f : t \mapsto P(t)e^{\omega t}$

P est un polynôme est $\omega \in \mathbb{K}$.

Nous allons chercher une solution particulière de la forme

$x_p : t \mapsto Q(t)e^{\omega t}$ avec Q un polynôme.

Application 2.2.2.1

En remplaçant dans (L) :

$$\begin{cases} x_p'(t) = (Q'(t) + \omega Q(t))e^{\omega t} \\ x_p''(t) = (Q''(t) + 2\omega Q'(t) + \omega^2 Q(t)) \end{cases}$$

On trouve ensuite : $aQ''(t) + (2a\omega + b)Q'(t) + (a\omega^2 + b\omega + c)Q(t) = P(t)$

→ **Dans le cas où ω n'est pas une solution de l'équation caractéristique** (E_c) (i.e. $a\omega^2 + b\omega + c \neq 0$).

→ **Dans le cas contraire...**

- **Dans le cas où** $2a\omega + b \neq 0$ (on sait que ω est une racine simple de l'équation caractéristique)
  Alors $d°Q = d°P + 1$, on pose $Q(0) = 0$ et on cherche Q par identification des polynômes.
- **Dans le cas contraire...**
  Alors $d°Q = d°P + 2$ avec $Q''(t) = \frac{1}{a}P(t)$. On intègre alors deux fois (sans oublier le terme $\frac{1}{a}$...).

Exemple 2.2.2.8

1. $x'' - x = te^{2t}$
2. $x'' - x = te^{t}$

Solutions :

1. On pose $P : t \mapsto t$, $\omega = 2$.
   On a alors : $x''(t) - x(t) = P(t)e^{\omega t}$.
   On cherche alors une solution particulière de la forme
   $x_p : t \mapsto Q(t)e^{\omega t}$ et $x_p : t \mapsto (at + b)e^{2t}$.
   On a : $\omega^2 - 1 = 3 \neq 0$, on trouve alors la solution particulière, puis on cherche la solution homogène pour enfin aboutir à cet ensemble de solutions :
   $$\boxed{S = \{t \mapsto \alpha e^{t} + \beta e^{-t} + (\frac{1}{3}t - \frac{4}{9})e^{2t} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}}$$
2. On a $x''(t) - x(t) = te^{t}$. On pose $P(t) = t$ et $\omega = 1$.
   On a alors $x''(t) - x(t) = P(t)e^{\omega t}$. On a $\omega^2 - 1 = 0$. Donc ω est une racine simple

de (E_c). On cherche une solution particulière de la forme $x_p(t) = (at^2 + bt)e^t$. En remplaçant dans l'équation d'origine, on trouve $a = -b = \frac{1}{4}$, et on obtient ainsi

$$\boxed{S = \{t \mapsto \beta e^{-t} + (\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}t + \alpha)e^t \ \mid \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}}$$

Un autre cas particulier, où $f : t \mapsto P_1(t)\cos(\omega t) + P_2(t)\sin(\omega t)$

Formule clé

$$f : t \mapsto P_1(t)\cos(\omega t) + P_2(t)\sin(\omega t)$$
$$\text{où } \omega \in \mathbb{R} \text{ et } P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$$

Remarque 2.2.2.13

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré $d° \leq n$. Cette notion sera abordée de manière plus détaillée dans le chapitre 12 sur les polynômes.

Application 2.2.2.2

Avant de commencer, il est important de noter que si on pose $P(t) = P_1(t) - iP_2(t)$, alors $\Re(P(t)e^{i\omega t}) = f(t)$. Cela va simplifier beaucoup de calculs par la suite.

On cherche d'abord une solution particulière de l'équation différentielle $(L_1) : ax'' + bx' + cx = P(t)e^{i\omega t}$ et on considère uniquement sa partie réelle.

- **Si $i\omega$ n'est pas une racine de (E_c), alors** $\tilde{x_p} : t \mapsto B(t)e^{i\omega t}$, $B \in \mathbb{C}_n[X]$. On pose $B(t) = Q_1(t) - iQ_2(t)\,;Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_n[X]$.
  Donc $x_p = \Re(\tilde{x_p}) : t \mapsto Q_1(t)\cos(\omega t) + Q_2(t)\sin(\omega t)$ avec $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_n[X]$
- **Dans le cas contraire...**
  On cherche une solution particulière de la forme $x_p : t \mapsto Q_1(t)\cos(\omega t) + Q_2(t)\sin(\omega t)$, avec $\begin{cases} Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_{1H}[X] \\ Q_1(0) = Q_2(0) = 0 \end{cases}$

Exemple 2.2.2.9

$$(\mathbb{K} = \mathbb{R})\ ;\ (L) : x'' + x = t\sin(t)$$

Remarque 2.2.2.14 ***(Décomposition en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire)***

Toute fonction f définie sur un ensemble symétrique par rapport à l'origine peut être écrite de manière unique comme la somme d'une fonction paire u et d'une fonction impaire v.

- Fonction paire (u) : $u(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$
- Fonction impaire (v) : $v(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

Exemple simple : $\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\cosh(x)} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\sinh(x)}$

Remarque 2.2.2.15 ***(Nouveau sous-cas particulier !)***

Si $f : t \mapsto (P_1(t)\cos(\omega t) + P_2 \sin(\omega t))e^{\alpha t}$ avec $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a, \omega \in \mathbb{R}$... (On utilise $P(t) = P_1(t) - iP_2(t)$ et on a $\Re(P(t)e^{(\alpha+i\omega)t} = f(t))$

- **Si** $a + i\omega$ **n'est pas une racine de** (E_c), alors $x_p : t \mapsto (Q_1(t)\cos(\omega t) + Q_2(t)\sin(\omega t))e^{at}$, avec $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_n[X]$.
- **Si** $a + i\omega$ **est une racine simple de** (E_c), alors $x_p : t \mapsto (Q_1(t)\cos(\omega t) + Q_2(t)\sin(\omega t))e^{at}$ avec

Propriété 2.2.2.8 ***(Superposition des solutions)***

Soit $(L) : ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = \sum_{i=1}^{r} f_i(t)$ avec $r \geq 2$; $\forall 1 \leq i \leq r : f_i : I \to \mathbb{K}$ continue et $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$.
Pour trouver une solution particulière de (L), on cherche une solution particulière de chaque $(L_i) : ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f_i(t)$, notée $\tilde{x}_{(i)}$.
Et dans ce cas, une solution particulière de (L) est $x_p : t \mapsto \sum_{i=1}^{r} \tilde{x}_{(i)}(t)$.

Exemple 2.2.2.10

Résoudre $x'' + 2x' - 3x = e^{-t} + \sin(t) + t^2$.
Solution :
On cherche une solution particulière de chaque équation suivante :

1. $(L_1) : x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$
2. $(L_2) : x'' + 2x' - 3x = \sin(t)$
3. $(L_3) : x'' + 2x' - 3x = t^2$

Pour (L_1), on cherche une solution particulière de la forme $x\tilde{(}1) : t \mapsto \lambda e^{-t}$. En remplaçant dans (L_1), on trouve : $\lambda e^{-t} - 2\lambda e^{-t} - 3\lambda e^{-t} = e^{-t} \iff -4\lambda = 1 \iff \lambda = -\frac{1}{4}$. Donc $\tilde{x}_{(1)} : t \mapsto -\frac{1}{4}e^{-t}$.
Pour (L_2), on cherche une solution particulière de la forme $x\tilde{(}2) : t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$.
En remplaçant dans (L_2), on trouve :

$$(-a\cos(t) - b\sin(t)) + 2(-a\sin(t) + b\cos(t)) - 3(a\cos(t) + b\sin(t)) = \sin(t)$$

En identifiant les coefficients, on trouve le système suivant : $\begin{cases} 4b + 2a + 1 = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{10} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$.

Donc $\tilde{x}_{(2)} : t \mapsto -\frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t)$.

Pour (L_3), on cherche une solution particulière de la forme $\tilde{x_(}3) : t \mapsto at^2 + bt + c$.

En remplaçant dans (L_3), on trouve : $2a + 2(2at + b) - 3(at^2 + bt + c) = t^2$.

En identifiant les coefficients, on trouve le système suivant : $\begin{cases} -3a = 1 \\ 4a - 3b = 0 \\ 2a + 2b - 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{4}{9} \\ c = -\frac{14}{27} \end{cases}$.

Donc $\tilde{x}_{(3)} : t \mapsto -\frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{9}t - \frac{14}{27}$.

On combine ensuite les solutions trouvées pour trouver une solution particulière de l'équation d'origine...

Remarque 2.2.2.16 ***(Résolution de $(L) : ax'' + bx' + cx = f$ dans le cas où $\underset{E_c}{\Delta} = 0$)***

Soit ω la racine double de (E_c). On pose $y(t) = x(t)e^{-\omega t}$. Donc $x(t) = y(t)e^{\omega t}$.

Donc : $x'(t) = y'(t)e^{\omega t} + \omega y(t)e^{\omega t}$.

Donc : $x''(t) = y''(t)e^{\omega t} + 2\omega y'(t)e^{\omega t} + \omega^2 y(t)e^{\omega t}$.

(On factorise par $e^{\omega t}$ dans la suite).

En remplaçant dans (L), on trouve :

$[ay''(t) + (2a\omega + b)y'(t) + (\omega^2 a + 2\omega b + c)\, y(t)]\, e^{\omega t} = f(t)$.

Or on a $\omega^2 a + 2\omega b + c = 0$ et $2a\omega + b = 0$. Donc on obtient : $ay''(t) = f(t)e^{-\omega t}$.

Donc $y''(t) = \frac{f(t)}{a}e^{-\omega t}$.

En intégrant deux fois, on obtient $y(t)$, puis $x(t) = y(t)e^{\omega t}$.

En intégrant deux fois, nous allons aussi obtenir deux constantes à déterminer, que nous noterons α et β (comme d'habitude dans les équations différentielles de second ordre).

Théorème 2.2.2.4 ***(Problème de Cauchy)***

Soit $(PC) : \begin{cases} ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$, $f : I \to \mathbb{K}$ continue, $t_0 \in I$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{K}^2$. Alors, il existe une unique solution $x : I \to \mathbb{K}$ dérivable de (PC). Autrement écrit :

$$\exists! x, \begin{cases} ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Preuve

Les solutions de (PC) sont de la forme $x : t \mapsto \alpha\varphi(t) + \beta\psi(t) + x_p(t)$, où (φ, ψ) est un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée et x_p est une solution particulière de (L), et $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = y_0$.
On cherche α et β. On trouve le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha\varphi(t_0) + \beta\psi(t_0) = x_0 - x_p(t_0) \\ \alpha\varphi'(t_0) + \beta\psi'(t_0) = y_0 - x_p'(t_0) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est le wronskien $\omega(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi(t_0) & \psi(t_0) \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$.
Donc le système admet une unique solution (α, β) qui dépend uniquement de $\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ (des fonctions continues). ■

Exemple 2.2.2.11

Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$(PC) : \begin{cases} x'' - x = t \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

Solution :
L'équation homogène associée est $(H) : x'' - x = 0$. L'équation caractéristique associée est $(E_c) : r^2 - 1 = 0$, qui admet pour solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. Donc les solutions de (H) sont : $S_{(H)} = \{t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
On remarque facilement que $t \mapsto -t$ est une solution particulière de (L). Donc $x_p : t \mapsto -t$.
On pose $\varphi : t \mapsto e^t$ et $\psi : t \mapsto e^{-t}$. On a $\omega(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.
Les solutions de (PC) sont de la forme $x : t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t} - t$.
On cherche α et β. On trouve le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha e^0 + \beta e^0 = 0 - (-0) \\ \alpha e^0 - \beta e^0 = 0 - (-1) \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$.
Finalement, la solution de (PC) est :

$$\boxed{x : t \mapsto \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - t}$$

Fin du Chapitre.

$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$ **Résumés dans les pages suivantes** $\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$

Résumé 2.2.2.2 *(Équa. diff. lin. du 1er ordre)*

Forme générale : $(L) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ sur un intervalle I.

1. **Solution de l'équation homogène** $(H) : x' = a(t)x$

$$x_H(t) = \lambda e^{A(t)}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } A'(t) = a(t)$$

2. **Recherche d'une solution particulière** x_p
   - **Cas simple :** Si $b(t)$ est de la forme $P(t)e^{\omega t}$, chercher x_p sous la forme $Q(t)e^{\omega t}$.
   - **Méthode de la Variation de la Constante (MVC) :** On pose $x_p(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$. On obtient $\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$.

$$x_p(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)} du$$

3. **Solution générale de** (L)

$$S_{(L)} = \{x_H + x_p \mid x_H \in S_{(H)}\}$$

4. **Principe de superposition :** Si $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$, alors $x_p = x_{p1} + x_{p2}$.

Résumé 2.2.2.3 *(Équa. diff. lin. du 2nd ordre à coeff. constants)*

Forme générale : $(L) : ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)$ avec $a \neq 0$.

1. **Résolution de l'homogène** (H) **via** $ar^2 + br + c = 0$ **(**Δ**)**
   - $\Delta > 0$ (2 racines réelles r_1, r_2) : $x_H(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$
   - $\Delta = 0$ (1 racine double r_0) : $x_H(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}$
   - $\Delta < 0$ (racines $r \pm i\omega$) : $x_H(t) = e^{rt}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$
2. **Recherche d'une solution particulière** x_p
   - **Second membre** $P(t)e^{mt}$ **:** On cherche $Q(t)e^{mt}$.
     - Si m n'est pas racine de (E_c) : $\deg Q = \deg P$.
     - Si m est racine simple : $\deg Q = \deg P + 1$.
     - Si m est racine double : $\deg Q = \deg P + 2$.
   - **Second membre trigonométrique :** Passer en complexe ($e^{i\omega t}$), résoudre, puis prendre la partie réelle.
3. **Variation des constantes (Cas général)** Si $x_H(t) = \lambda\varphi(t) + \mu\psi(t)$, on cherche $x_p(t) = \lambda(t)\varphi(t) + \mu(t)\psi(t)$ en résolvant le système :

$$\begin{cases} \lambda'(t)\varphi(t) + \mu'(t)\psi(t) = 0 \\ \lambda'(t)\varphi'(t) + \mu'(t)\psi'(t) = \frac{f(t)}{a} \end{cases}$$