Chapitre IX : Analyse asymptotique

Rédigé par Samy Youssoufine

19 décembre 2025

UM6P
University Mohammed VI Polytechnic

EMINES
School of Industrial Management

Note importante

Document WIP. Peut contenir des erreurs/sections incomplètes. Version ALPHA de la nouvelle mise en forme.

Table des matières

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'analyse asymptotique des fonctions et des suites. Les objectifs principaux sont de :

- Étudier les comportements asymptotiques des suites et des fonctions.
- Présenter des outils d'analyse asymptotique, tels que **le développement limité**.

1 Comparaison des suites et fonctions

1.1 Comparaison des suites

Définition 1.1.1.1 ***(Négligence, domination et équivalence de suites)***

Soient $(U_n), (V_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que :

- (U_n) est **négligeable** devant (V_n) lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |U_n| \leq \varepsilon |V_n|$. On note alors $U_n = o(V_n)$ ou $U_n = \underset{n \to +\infty}{o}(V_n)$.
- (U_n) est **dominée** par (V_n) lorsque $\exists M \geq 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |U_n| \leq M |V_n|$. On note alors $U_n = O(V_n)$ ou $U_n = \underset{n \to +\infty}{O}(V_n)$.
- (U_n) est **équivalente** à (V_n) lorsque $U_n - V_n = o(V_n)$, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |U_n - V_n| \leq \varepsilon |V_n|$. On note alors $U_n \sim V_n$ ou $U_n \underset{n \to +\infty}{\sim} V_n$.

Remarque 1.1.1.1

Il faut faire très attention à l'écriture manuscrite de $o(V_n)$, pour éviter de la confondre avec d'autres notations. Il faut, dans l'idéal, qu'elle soit de la même taille/hauteur que le signe égal $(=)$.

Propriété 1.1.1.1

Soient $(U_n), (V_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- Si (V_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et que (U_n) est négligeable devant (V_n), alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = 0$.

  Donc $\boxed{U_n = o(V_n) \iff \dfrac{U_n}{V_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$.
- Si (V_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et que (U_n) est dominée par (V_n), alors la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est bornée.

  Donc $\boxed{U_n = O(V_n) \iff \left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)_n \text{ est bornée}} \in \mathbb{B}(\mathbb{C})$.
- Si (V_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et que (U_n) est équivalente à

(V_n), alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$.

Donc $\boxed{U_n \sim V_n \iff \dfrac{U_n}{V_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$.

Exemple 1.1.1.1

1. $\frac{\cos(n)}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ car $\frac{\frac{\cos(n)}{n}}{\frac{1}{n}} = \cos(n)$ est bornée.
2. $\forall k \geq 1, e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ car $\frac{e^{-n}}{\frac{1}{n^k}} = n^k e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ car $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = n\ln(1+\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Les propriétés ci-dessus sont des cas particuliers de la définition, où (V_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. En effet, si (V_n) s'annule infiniment souvent, le quotient $\frac{U_n}{V_n}$ n'est pas forcément défini pour tout n. Maintenant, nous souhaitons généraliser ces propriétés même si (V_n) peut s'annuler à partir d'un certain rang.

Propriété 1.1.1.2 *(Cas général des propriétés ci-dessus)*

Soient $(U_n), (V_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- $U_n = o(V_n) \iff \exists (\varepsilon_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\varepsilon_n \to 0$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n = \varepsilon_n V_n$.
- $U_n = O(V_n) \iff \exists (\beta_n)_n \in \mathbb{B}(\mathbb{C})$ tel que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n = \beta_n V_n$.
- $U_n \sim V_n \iff \exists (\alpha_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\alpha_n \to 1$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n = \alpha_n V_n$.

Preuve

- **Démonstration de la première équivalence :**
  - Pour démontrer la première équivalence dans le sens indirect, on part du fait que $\varepsilon_n \to 0$. On a donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |\varepsilon_n| \leq \varepsilon$. Donc, pour $n \geq n_0$, on a $|U_n| = |\varepsilon_n|\,|V_n| \leq \varepsilon\,|V_n|$, ce qui prouve que $U_n = o(V_n)$.
  - Pour démontrer la première équivalence dans le sens direct, on part du fait que $U_n = o(V_n)$. Donc, par définition, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |U_n| \leq \varepsilon\,|V_n|$. On peut alors définir la suite $(\varepsilon_n)_n$ de la manière suivante :
    — $\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{U_n}{V_n} & \text{si } V_n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
    — Il est clair que $\varepsilon_n \to 0$ car pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\forall n \geq n_1, |\varepsilon_n| \leq \varepsilon$ (il faut étudier les cas où $V_n = 0$ et $V_n \neq 0$).
  - Maintenant, il faut vérifier que $U_n = \varepsilon_n V_n$ à partir d'un certain rang.
  - Si $V_n \neq 0$, on a $U_n = \frac{U_n}{V_n} \cdot V_n = \varepsilon_n V_n$.
  - Si $V_n = 0$, alors $\forall n \geq n_1, |U_n| \leq 0 \iff U_n = 0 \implies 0 \cdot V_n = \varepsilon_n \cdot V_n$.

■

Définition 1.1.1.2 ***(Relation d'ordre, relation d'équivalence)***

- Une relation binaire sur un ensemble $E \neq \emptyset$ est une partie R de $E \times E$. Si $(x, y) \in R$, on note xRy.
- Une relation R est dite :
  - **réflexive** si et seulement si $\forall x \in E, xRx$.
  - **symétrique** si et seulement si $\forall x, y \in E, xRy \implies yRx$.
  - **antisymétrique** si et seulement si $\forall x, y \in E, (xRy \text{ et } yRx) \implies x = y$.
  - **transitive** si et seulement si $\forall x, y, z \in E, (xRy \text{ et } yRz) \implies xRz$.
- Une relation R sur E est dite une relation d'ordre si et seulement si R est réflexive, antisymétrique et transitive.
- Une relation R sur E est dite une relation d'équivalence si et seulement si R est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 1.1.1.2

- La relation $\geq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre. En effet, elle est réflexive ($\forall x \in \mathbb{R}, x \geq x$), antisymétrique (si $x \geq y$ et $y \geq x$, alors $x = y$) et transitive (si $x \geq y$ et $y \geq z$, alors $x \geq z$).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $\equiv \mod n$ sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence. En effet, elle est réflexive (pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a \equiv a \mod n$, sachant que $a - a = 0 \cdot n$, donc $\exists k \in Z, \ldots$), symétrique (si $a \equiv b \mod n$, alors $b \equiv a \mod n$) et transitive (si $a \equiv b \mod n$ et $b \equiv c \mod n$, alors $a \equiv c \mod n$).

Propriété 1.1.1.3 ***(Étude des relations o, O et $\sim$)***

- **Étude de la relation o :**
  - La relation o n'est pas reflexive, car $1 \neq o(1)$. Elle est donc ni une relation d'ordre, ni une relation d'équivalence.
  - Elle n'est aussi pas symétrique, car $1 = o(n)$ n'implique pas que $n = o(1)$.
  - Par contre, elle est transitive : si $U_n = o(V_n)$ et $V_n = o(W_n)$, alors $U_n = o(W_n)$.
- **Étude de la relation O :**
  - La relation O est réflexive, car $U_n = O(U_n)$ (on prend $M = 1$ depuis la définition).
  - Elle est aussi transitive : si $U_n = O(V_n)$ et $V_n = O(W_n)$, alors $U_n = O(W_n)$.
- **Étude de la relation $\sim$:**
  - La relation $\sim$ est réflexive, car $U_n \sim U_n$ (on prend $\alpha_n = 1$ depuis la définition).
  - Elle est aussi symétrique : si $U_n \sim V_n$, alors $V_n \sim U_n$ (on prend $\alpha'_n = \frac{1}{\alpha_n}$).
  - Elle est aussi transitive : si $U_n \sim V_n$ et $V_n \sim W_n$, alors $U_n \sim W_n$ (on prend $\alpha''_n = \alpha_n \cdot \alpha'_n$).

▷ Donc, **la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.**

Remarque 1.1.1.2

- $U_n = o(V_n) \implies U_n = O(V_n)$.
- $U_n = o(1) \iff U_n \to 0$. $o(1)$ représente les suites qui convergent vers 0. On peut la noter aussi $\varepsilon_n \to 0$.
- $U_n = O(1) \iff (U_n)_n$ est bornée.
- $(U_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{C}^*$ si et seulement si $U_n \sim l$.
- $O(1) = \alpha_n$ où $(\alpha_n)_n$ est une suite bornée.
- $\begin{cases} o(U_n) = U_n \cdot o(1) \\ O(U_n) = U_n \cdot O(1) \end{cases}$
- $\begin{cases} o(1) \cdot O(1) = o(1) \cdot o(1) = o(1) \\ O(1) \cdot O(1) = O(1) \end{cases}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \begin{cases} \lambda \cdot o(1) = o(1) \\ \lambda \cdot O(1) = O(1) \end{cases}$
- $o(1) + o(1) = o(1)$ et $O(1) + O(1) = O(1)$.
- $o(1) + O(1) = O(1)$.
- $o(O(U_n)) = O(U_n) \cdot o(1) = U_n \cdot \underbrace{O(1) \cdot o(1)}_{=o(1)} = o(U_n)$.
- $O(o(U_n)) = o(U_n) \cdot O(1) = U_n \cdot \underbrace{o(1) \cdot O(1)}_{=o(1)} = o(U_n)$.

Propriété 1.1.1.4 *(Conservation de la convergence par équivalence)*

Soient $(U_n), (V_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, telles que $U_n \sim V_n$.
$(U_n)_n$ est convergente si et seulement si $(V_n)_n$ est convergente.
Dans ce cas, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

Preuve

On a $U_n \sim V_n \iff \exists (\alpha_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\alpha_n \to 1$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n = \alpha_n V_n$.
Supposons que $(U_n)_n$ est convergente, et soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. On a donc :

$$V_n = \frac{U_n}{\alpha_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{l}{1} = l.$$

Donc $(V_n)_n$ est convergente, et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. ■

Propriété 1.1.1.5 *(Conservation de la divergence vers $\pm\infty$ par équiv.)*

Si $U_n \sim V_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$, alors $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$. (Note : le signe $\pm$ est le même des deux côtés.)

Propriété 1.1.1.6 *(Produit des équivalences)*

Soient $(a_n)_n, (b_n)_n, (u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \sim b_n$ et $u_n \sim v_n$. Alors :

- $a_n u_n \sim b_n v_n$.
- Si b_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{u_n}{v_n}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, U_n^k \sim V_n^k$.
- Si $U_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, U_n^\lambda \sim V_n^\lambda$.

Preuve

On sait que $\exists \alpha_n, \beta_n \to 1$ telles que $a_n = \alpha_n b_n$ et $u_n = \beta_n v_n$ à partir d'un certain rang. Donc :

- $a_n u_n = \alpha_n \beta_n b_n v_n$, avec $\alpha_n \beta_n \to 1$, donc $a_n u_n \sim b_n v_n$.
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, b_n \neq 0$. Donc, pour $n \geq n_0$, on a $\frac{a_n}{b_n} = \alpha_n$ et $\frac{u_n}{v_n} = \beta_n$. Donc, $\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{u_n}{v_n}$.
- La démonstration des autres propriétés est similaire.

■

Remarque 1.1.1.3

1. En général, $U_n \sim V_n$ n'implique pas $\not\Rightarrow$ $f(U_n) \sim f(V_n)$. Par exemple, $e^{U_n} \sim e^{V_n}$ n'est vrai que si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$.
2. $U_n \sim V_n \quad \underbrace{\not\Rightarrow}_{\text{n'implique pas !}} \quad U_n - V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. On ne peut pas toujours additionner des équivalences. Par exemple, si $U_n = n + 1 + \frac{1}{n}$ et $V_n = n$, on a $U_n \sim V_n$ et $U_n - 1 \sim V_n - 1$, mais $U_n + (U_n - 1) \not\sim V_n + (V_n - 1)$. En général : $\boxed{U_n \sim V_n \text{ et } A_n \sim B_n \quad \underbrace{\not\Rightarrow}_{\text{n'implique pas !}} \quad U_n + A_n \sim V_n + B_n}$.
4. $U_n \sim 0 \iff U_n = 0$ à partir d'un certain rang.

Exercice 1.1.1.1

1. Soient $(U_n)_n, (V_n)_n \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ telles que $U_n \sim V_n$. **Pour quelle(s) condition(s) aura-t-on** $\ln(U_n) \sim \ln(V_n)$?
2. *(Équivalent de l'intégrale de Wallis)* On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ (Intégration par parties).

b) Montrer que la suite $(n \cdot I_n \cdot I_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \sim I_{n-1}$.

d) En déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

e) Calculer I_{2n} et donner un équivalent de C_{2n}^n.

f) On pose $U_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$. On admet que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ pour un certain $l \in \mathbb{R}^*$.
Montrer que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (c'est la formule de Stirling).

NE PAS OUBLIER DE FAIRE CA PENDANT LES VACANCES

1.2 Comparaison des fonctions

Définition 1.1.2.3

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathring{I} \neq \emptyset$.

1. On dit que f est **négligeable** devant g en $x_0 \in I$ si et seulement si $\exists V \in V(x_0), \exists \varepsilon : V \to \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et $\forall x \in V, f(x) = \varepsilon(x)g(x)$. On note alors $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$.
2. f est dominée par g en $x_0 \in I$ si et seulement si $\exists V \in V(x_0), \exists M : V \to \mathbb{C}, \forall x \in V, f(x) = M(x)g(x)$. On note alors $f(x) = \underset{x\to x_0}{O}(g(x))$.
3. f est équivalente à g en $x_0 \in I$ si et seulement si $f(x) - g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$, i.e. $\exists V \in V(x_0), \exists \alpha : V \to \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 1$ et $\forall x \in V, f(x) = \alpha(x)g(x)$. On note alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

Remarque 1.1.2.4

- Si g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0, alors

recop

Exemple 1.1.2.3

1. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
2. $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$