Chapitre VIII : Intégration d’une fonction sur un segment

Rédigé par Samy Youssoufine

17 décembre 2025

Note importante

Document WIP. Peut contenir des erreurs/sections incomplètes. Version ALPHA de la nouvelle mise en forme.

Table des matières

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'intégration d'une fonction sur un segment. Les objectifs principaux sont de :

- Rappeler les définitions et propriétés de base des intégrales.
- Rappeler les techniques d'intégration usuelles, notamment l'intégration par parties et le changement de variable.
- Étendre et généraliser ces techniques d'intégration.
- Présenter de nouvelles formules (formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral...).

Ce chapitre ne traitera pas des intégrales impropres, généralisées, etc. Ces notions seront abordées l'année prochaine.

1 Généralités

1.1 Primitives, intégrales et propriétés de base

Définition 1.1.1.1 ***(Primitives)***

Soit $f \in \mathbb{K}^I$.
La fonction $F \in \mathbb{K}^I$ est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.
On dit "une primitive" et non pas "la primitive" car une fonction peut avoir plusieurs primitives différentes (différant d'une constante additive).
Si F est une primitive de f sur I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + c$ avec $c \in \mathbb{K}$.

Définition 1.1.1.2 ***(Intégrale d'une fonction entre deux points)***

Soit $f \in \mathbb{K}^I$.
L'intégrale de f entre a et b est notée $\int_a^b f$ et est définie par :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Remarque 1.1.1.1

Si $f \in \mathbb{C}^I$, alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \Re(f)(t)dt + i \int_a^b \Im(f)(t)dt$.
Par exemple, $\int_0^1 \frac{dt}{t+i} = \cdots = \frac{1}{2}\ln(2) - i\frac{\pi}{4}$.
Attention ! Nous n'avons pas défini la fonction ln sur $\mathbb{C}$. Ici, nous utilisons la définition de ln sur $\mathbb{R}$. Il existe bel et bien un logarithme complexe, mais il entre dans le domaine des fonctions holomorphes, ce qui est hors de portée de ce cours.

Théorème 1.1.1.1

Si $f \in \mathbb{K}^I$ est continue sur I, alors f admet une primitive sur I.

Preuve

recop

Propriété 1.1.1.1 *(Propriétés de l'intégrale)*

Soient $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, et $a, b \in I$.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \int_a^b f + \lambda g = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$.
2. Relation de Chasles : $\forall c \in I, \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
3. Si $f \leq g$ sur I et $a \leq b$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
4. Si $a < b$, $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$
   , et même $\leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| (b-a)$ (Inégalité triangulaire de l'intégrale, ou encore inégalité de la moyenne).

Preuve

recop

Conséquence 1.1.1.1

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}), a < b \in I$.
Si $f \geq 0$ sur I, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
Avec $\int_a^b f(t)dt = 0$ si et seulement si $f = 0$ sur $[a, b]$.

Preuve

recop

Exercice 1.1.1.1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
Montrer que $\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a, b], f(t) = e^{i\theta} |f(t)|$.

Solution :

$\leftarrow$ La démonstration dans le sens indirect est triviale.

$\rightarrow$ Pour démontrer cette propriété dans le sens direct

recop

Remarque 1.1.1.2

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$, alors f est de signe constant sur $[a, b]$. Il s'agit d'un cas particulier du résultat précédent.

1.2 Intégration par parties

1.2.1 Formule d'intégration par parties

Théorème 1.1.2.2

Soient $f, g \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{K})$, et $a, b \in I$.

$$\int_a^b f \cdot g' = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g$$

avec $[f]_a^b = f(b) - f(a)$.

Preuve

On a $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
Donc, en intégrant entre a et b, on obtient :

$$\int_a^b (f \cdot g)' = \int_a^b f' \cdot g + \int_a^b f \cdot g'$$

Donc $\int_a^b f \cdot g' = [fg]_a^b - \int_a^b f' \cdot g$. ■

Exemple 1.1.2.1

$$\int_a^x \ln(t)dt \text{ avec } a, x > 0$$

On pose $\begin{cases} u(t) = \ln(t) & \implies u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & \implies v(t) = t \end{cases}$.
On a donc : $\int_a^x \ln(t)dt = [t\ln(t)]_a^x - \int_a^x 1dt = x\ln(x) - a\ln(a) - (x-a)$.
Donc : $\int_a^x \ln(t)dt = x\ln(x) - x - (a\ln(a) - a)$.

1.2.2 Formule d'IPP. généralisée

Exercice 1.1.2.2 *(Formule d'intégration par parties généralisée)*

Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, et $a, b \in I$.
On souhaite démontrer que :

$$\int_a^b f \cdot g^{(n)} = \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f^{(k-1)} \cdot g^{(n-k)}\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)} \cdot g$$

Solution :
On peut procéder par récurrence sur n, mais il est plus simple de faire une démonstration directe par intégration par parties.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f^{(k-1)}\cdot g^{(n-k)}\right)' &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(f^{(k)}\cdot g^{(n-k)}+f^{(k-1)}\cdot g^{(n-k+1)}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f^{(k)}\cdot g^{(n-k+1)}-(-1)^{k}f^{(k)}\cdot g^{(n-k)}\\ &= f\cdot g^{(n)}-(-1)^{n}f^{(n)}\cdot g\end{aligned}$$

Donc, en intégrant entre a et b, on obtient :

$$\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f^{(k-1)}\cdot g^{(n-k)}\right)' = \int_a^b f\cdot g^{(n)}-(-1)^n\int_a^b f^{(n)}\cdot g$$

Ce qui donne bien la formule voulue.

Application 1.1.2.1

On souhaite calculer $J=\int_a^b P(x)e^{cx}dx$ avec $P\in\mathbb{K}_n[X]$ et $c\in\mathbb{R}_+^*$.
On pose $f : x\mapsto e^{cx}$, qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n+1)} : x\mapsto c^{n+1}e^{cx}$.

$$\begin{aligned}J &= \int_a^b P(x)e^{cx}dx\\ &= \frac{1}{c^{n+1}}\int_a^b P(x)f^{(n+1)}(x)dx\\ &= \frac{1}{c^{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}P^{(k-1)}(x)f^{(n+1-k)}(x)\right]_a^b+\frac{(-1)^{n+1}}{c^{n+1}}\int_a^b P^{(n+1)}(x)f(x)dx\end{aligned}$$

Or, on sait que P est de degré n, donc $P^{(n+1)}\equiv 0$.
Donc, on a finalement :

$$J=\frac{1}{c^{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}P^{(k-1)}(x)f^{(n+1-k)}(x)\right]_a^b$$

$$J=\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\cdot P^{(k)}(x)\frac{e^{cx}}{c^{k+1}}\right]_a^b$$

1.3 Changement de variable

Définition 1.1.3.3 ***(Intégration par changement de variable)***

Soient $g \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ telles que $g([a,b]) \subset I$.

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

On dit qu'on a fait le changement de variable suivant :

$$t = g(x) \implies \begin{cases} x = a & \to t = g(a) \\ x = b & \to t = g(b) \end{cases}$$

avec $dt = g'(x)dx$.
Donc $\int_a^b \underbrace{f(g(x))}_{=t} \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{=dt} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$

Preuve

Soit F une primitive de f sur I.
On a donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= \int_a^b F'(g(x)) \cdot g'(x)dx \\ &= \int_a^b (F \circ g)'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} F'(t)dt \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt \end{aligned}$$

■

Exemple 1.1.3.2

Calculer $I_{n,p} = \int_a^b = (b-x)^n \cdot (x-a)^p dx$, avec $n, p \in \mathbb{N}$.
(Ou bien, montrer que $I_{n,p} = (b-a)^{n+p+1} \cdot \sum_{k=0}^n \mathrm{C}_n^k \frac{(-1)^k}{p+k+1}$*)*
Solution :
On va utiliser le changement de variable qui permet de transformer n'importe quel $x \in [a,b]$ en un $t \in [0,1]$.
On sait que $\forall x \in [a,b], \exists t \in [0,1], x = (1-t)a + tb$.
On pose alors $x = (1-t)a + tb$. En dérivant, on obtient :

$$dx = (b-a)dt$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \int_a^b (b-x)^n (x-a)^p dx \\ &= \int_0^1 (b-(1-t)a-tb)^n ((1-t)a+tb-a)^p (b-a) dt \\ &= (b-a)^{n+p+1} \int_0^1 (1-t)^n t^p dt \end{aligned}$$

Or, on sait que :

$$\int_0^1 (1-t)^n t^p dt = \int_0^1 t^p \sum_{k=0}^n \mathrm{C}_n^k (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^n \mathrm{C}_n^k (-1)^k \int_0^1 t^{p+k} dt$$

Donc, on a finalement :

$$\int_0^1 (1-t)^n t^p dt = \sum_{k=0}^n \mathrm{C}_n^k \frac{(-1)^k}{p+k+1}$$

Donc, on en déduit que :

$$I_{n,p} = (b-a)^{n+p+1} \cdot \sum_{k=0}^n \mathrm{C}_n^k \frac{(-1)^k}{p+k+1}$$

1.4 Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral

Théorème 1.1.4.3 *(Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral)*

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$, $a, x \in I$.
Alors on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Preuve

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt$.
On effectue une intégration par parties sur I_k :

$$\begin{cases} u(t) = (x-t)^k & \Longrightarrow \quad u'(t) = -k(x-t)^{k-1} \\ v'(t) = f^{(k+1)}(t) & \Longrightarrow \quad v(t) = f^{(k)}(t) \end{cases}$$

Donc, on a :

$$I_k = \left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\right]_a^x + \underbrace{\int_a^x \frac{k(x-t)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(t)dt}_{=I_{k-1}}$$

Donc $I_{k-1} - I_k = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.
Donc $\sum_{k=1}^n (I_{k-1} - I_k) = \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.
Donc $I_0 - I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.
Or $I_0 = \int_a^x f^{(1)}(t)dt = f(x) - f(a)$.
Donc, on a bien :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

■

Conséquence 1.1.4.2 ***(Inégalité de Taylor-Lagrange)***

Même énoncé que précédemment écrit dans le chapitre 7.
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.
On a, pour tout $x \neq a \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k \right| \leq \sup_{t \in [a,x] \text{ ou } t \in [x,a]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $x \neq a \in I$.
Nous allons procéder à une démonstration différente à celle vue dans le chapitre 7 (nous allons utiliser la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral).
On a, par la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral :

$$\begin{aligned}\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| &\leq \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^x \left| f^{(n+1)}(t) \right| \frac{(x-t)^n}{n!} dt\end{aligned}$$

Or $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a, x]$ ou $[x, a]$, donc elle est bornée.
Donc, on a :

■ recop

Application 1.1.4.2

On pose $f : x \mapsto e^{ix}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \sup_{t \in [0,x] \text{ ou } t \in [x,0]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or on sait que $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)} : x \mapsto i^k e^{ix}$.
Donc $f^{(k)}(0) = i^k$.
Donc $\sup_{t \in [0,x] \text{ ou } t \in [x,0]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \leq 1$.
Donc, on a finalement :

$$\forall n \in N, \left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ d'après le critère de d'Alembert.
Donc, on a bien :

$$\lim_{n \to +\infty} \left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!} x^k \right| = 0$$

Donc, on en déduit la formule d'Euler :

$$\boxed{e^{ix} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^k}{k!}}$$

En général, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\boxed{e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}}$$

2 Calcul des primitives

On note $\int f(x)dx$ une primitive de f. Le calcul de $\int f$ se fait après décomposition de f en éléments plus simples (généralement les fonctions usuelles qui seront présentées dans la partie ci-dessous).

2.1 Primitives des fonctions usuelles

Les primitives des fonctions usuelles sont les suivantes :

- $\forall k, \lambda \in \mathbb{N} \times \mathbb{K}, \int \lambda x^k dx = \lambda \frac{x^{k+1}}{k+1} + \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{K}$.
- $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \forall a \in \mathbb{K}, \int (x-a)^n dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{K}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}, \int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.
- $\forall a \in \mathbb{C}, \int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{2} \ln\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right) + i\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n} = \int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)\right)^n}$.

  Par changement de variable, on peut aboutir à une nouvelle intégrale de la forme $\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$, qu'on peut calculer par IPP.

Exercice 2.2.1.3

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{(x^3+1)(x+1)}$.

1. Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}$.
2. Calculer $\int f(x)dx$.

À faire pour le vendredi 19