Chapitre II : Nombres Complexes

Rédigé par Samy Youssoufine

11 décembre 2025

UM6P
University Mohammed VI Polytechnic

EMINES
School of Industrial Management

Table des matières

1 Généralités

- On munit $\mathbb{R}^2$ par les lois $+$ et $\times$ définies par :

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \\ (a,b)\times(c,d) = (ac-bd, ad+bc) \end{cases}$$

- $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est un corps commutatif (voir Chap. 10) appelé le cors des nombres complexes, et noté $\mathbb{C}$.

- L'application $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \rightarrowtail (x,0) \end{cases}$ est injective (démonstration triviale).
On peut donc identifier $(x,0)$ par x, et on écrit $(x,0)$ "$=$" x.
N.B. que cette expression n'est pas mathématiquement correcte.

- On pose $i = (0,1)$, alors : $i^2 = (0,1)\times(0,1) = (-1,0) = -1$.

- On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (x,0)+(0,y) = x + y(0,1) = x+iy$.

  Donc $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \exists! (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } z = a+ib}$ (l'écriture algébrique de z).

$$\boxed{\begin{cases} a \text{ est appelé la partie réelle de } z\text{, notée } \Re(z) \\ b \text{ est appelé la partie imaginaire de } z\text{, notée } \Im(z) \end{cases}}$$

Définition 1.1.0.1 ***(Conjugué d'un nombre complexe)***

Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$, on appelle le conjugué de z le complexe noté $\boxed{\bar{z} = a - ib}$. On peut en déduire les résultats suivants :

$$\boxed{\begin{cases} z + \bar{z} = 2. \cdot \Re(z) \\ z - \bar{z} = 2 \times i \times \Im z \end{cases}}$$

Définition 1.1.0.2 ***(Module d'un nombre complexe)***

Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$, le module de z est le réel positif : $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$. On a donc : $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Propriété 1.1.0.1

1. Soit P le plan orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
   L'application suivante est bijective :
$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{C} \to P \\ z = a + ib \rightarrowtail a \cdot \vec{e_1} + b \cdot \vec{e_2} \end{cases}$$
2. $\forall z \in \mathbb{C} : z = 0 \iff |z| = 0$
3. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
4. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|$
   Avec égalité si et seulement si : $(z = 0$ ou $\exists \alpha \geq 0 : z' = \alpha z)$.
5. $\forall z \in \mathbb{C}^* : \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Preuve

1. (À faire en tant que travail personnel).
2. (Trivial).
3. (Trivial).
4. **Si** $z = 0$ **:** On a égalité.
   Si $z \neq 0$ **:** On pose $\frac{z'}{z} = \alpha + i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
   $|1 + \frac{z'}{z}| = |(1 + \alpha) + i\beta| = \sqrt{(1 + \alpha)^2 + \beta^2}$
   $\iff 1 + |\frac{z'}{z}| = 1 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
   $\iff \ldots$
   $\iff \alpha \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ (toujours vrai)
   $\iff |1 + \frac{z'}{z}| \leq 1 + |\frac{z'}{z}|$
   $\iff |z + z'| \leq |z| + |z'|$
   Avec égalité si et seulement si : $\alpha = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
   $\iff \ldots$
   $\iff z' = \alpha z / \alpha \geq 0$

■

Remarque 1.1.0.1

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. $z \in \mathbb{R} \iff \Im(z) = 0 \iff \bar{z} = z$.
2. $z \in i\mathbb{R} \iff \Re(z) = 0 \iff \bar{z} = -z$ (z est dit *imaginaire pur*).
3. $\begin{cases} |\Re(z)| \leq |z| \\ |\Im(z)| \leq |z| \end{cases}$

Propriété 1.1.0.2

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. $\overline{z + z'} = \overline{z'} + \overline{z}$
2. $\overline{z.z'}| = \overline{z'}.\overline{z}$
3. $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2.\Re(z.\overline{z'}) + |z'|^2$
4. $|z - z'|^2 = |z|^2 - 2.\Re(z.\overline{z'}) + |z'|^2$
5. $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ *(Identité du parallélogramme)*.
6. $|z + z'|^2 - |z - z'|^2 = 4\Re(z.\overline{z'})$

Exercice 1.1.0.1

Soit $z_1, z_n \in \mathbb{C}$. Montrer que : $|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité si et seulement si : $(\exists u \in \mathbb{C}, \exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} : \forall k \in 1, \ldots, n : z_k = a_k.u)$

Solution :

Démonstration de l'inégalité (par récurrence)

Démonstration de l'égalité : (sens direct et indirect)
À refaire en tant qu'exercice.

Définition 1.1.0.3 ***(Argument d'un complexe (non-nul))***

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a : $|\frac{z}{|z|}| = 1$. On pose $\frac{z}{|z|} = x + iy$ pour avoir $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

Donc $\exists \theta \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$

θ est appelé un argument de z, et on le note par $\arg(z)$ (Les autres arguments de z sont $\theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$).
Si $\theta \in [-\pi, \pi]$, alors θ est dit argument principal de z.
Donc on peut écrire :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \exists \theta \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}$$

(ce qui est aussi vrai pour $z = 0$ (pour tout $\theta \in \mathbb{R}$))

Propriété 1.1.0.3

1. $\forall z \in \mathbb{C}^*$:
   a) $\arg(z) \equiv 0[2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_+^*$
   b) $\arg(z) \equiv 0[\pi] \iff z \in \mathbb{R}_+^*$
   c) $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \iff z \in i\mathbb{R}^*$
2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$:
   a) $\arg(z.z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

b) $\forall n \in \mathbb{Z} : \arg(z^n) \equiv n.\arg(z)[2\pi]$

c) $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

Définition 1.1.0.4 ***(L'ensemble $\mathbb{U}$)***

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\} = e^{i\theta}/\theta \in \mathbb{R}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Il s'agit du cercle unité de centre O et de rayon 1.

Propriété 1.1.0.4 ***(Formule d'Euler)***

$\forall \theta \in \mathbb{R} : \begin{cases} \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} : e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Remarque 1.1.0.2

$$\begin{cases} \forall a, b \in \mathbb{R} : e^{ia} + e^{ib} = 2\cos(\frac{a-b}{2})e^{i\frac{a+b}{2}} \\ \forall a, b \in \mathbb{R} : e^{ia} - e^{ib} = -2i\sin(\frac{a-b}{2})e^{i\frac{a+b}{2}} \end{cases}$$

$$b = 0 \implies \begin{cases} \forall a \in \mathbb{R} : e^{ia} + 1 = 2\cos(\frac{a}{2})e^{i\frac{a}{2}} \\ \forall a \in \mathbb{R} : e^{ia} - 1 = -2i\sin(\frac{a}{2})e^{i\frac{a}{2}} \end{cases}$$

Exemple 1.1.0.1

Calculer le module de $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{2})$. **Solution :**

$z = (\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + (\sqrt{3} + i)$

$\implies z = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) + 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$

$\implies z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\implies z = 2\cos(\frac{\pi}{12})e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$\implies |z| = 2\cos(\frac{\pi}{12})$ (sachant que $\cos(\frac{\pi}{12}) \geq 0$)

Propriété 1.1.0.5

1. $\forall \theta \in \mathbb{R} : |e^{i\theta}| = 1$
2. $\forall \theta \in \mathbb{R} : e^{i\theta} = 1 \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$
3. $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} : e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
4. L'application $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{U} \\ \theta \rightarrowtail e^{i\theta} \end{cases}$ est surjective.

Conséquence 1.1.0.1

1. $\forall \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R} : \prod_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} = e^{i\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k\right)}$
2. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} : (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
3. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} : \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

Définition 1.1.0.5 *(Racine n-ième d'un complèxe)*

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de z tout complexe ω tel que $\omega^n = z$. Si $z = |z|e^{i\theta}$, alors les racines n-ièmes de z sont les complexes :

$$\omega_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \text{ pour } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $|z|^{\frac{1}{n}}$.

Théorème 1.1.0.1

Soient $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors l'équation $z^n = a$ admet n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ données par :

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \text{ pour } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

Preuve

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z^n = a$ et $z = \rho e^{i\alpha}$.

$\implies z^n = \rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}$

$\implies \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

$\implies \begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ \alpha \equiv \frac{\theta}{n} + 2\frac{k\pi}{n} \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Par la division euclidienne de s par n, on a :

$$\exists (q, r) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1, \ldots, n-1\} : k = qn + r$$

Donc les solutions sont :

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\frac{k\pi}{n}\right)} \text{ pour } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

On a montré qu'il y a au plus n solutions.
Montrons qu'elles sont toutes distinctes :
Soient $k, k' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tels que $z_k = z_{k'}$. (avec $k > k'$)

$\implies r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\frac{k\pi}{n}\right)} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\frac{k'\pi}{n}\right)}$

$\implies e^{i2\frac{k\pi}{n}} = e^{i2\frac{k'\pi}{n}}$

$\implies 2\frac{k\pi}{n} \equiv 2\frac{k'\pi}{n}[2\pi]$

$\implies k \equiv k'[n]$

$\Longrightarrow\ \exists p \in \mathbb{N}^* : k = k' + pn$
$\Longrightarrow\ k - k' \geq n$ (contradiction) CQFD.

$\blacksquare$

Exemple 1.1.0.2

1. Les racines carrées de $a = re^{i\theta}$ sont $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$.
2. Les racines cubiques de $a = re^{i\theta}$ sont $z_k = r^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+2\frac{k\pi}{3}\right)}$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$, soit $\begin{cases} z_0 = r^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\theta}{3}} \\ z_1 = r^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} \\ z_2 = r^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} \end{cases}$

   On peut remplacer $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ par j pour obtenir $\begin{cases} z_0 = r^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\theta}{3}} \\ z_1 = j.r^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\theta}{3}} \\ z_2 = j^2.r^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\theta}{3}} \end{cases}$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On remarque que $1 + j + j^2 = 0$.

Conséquence 1.1.0.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est : $\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} / k = 0, 1, \ldots, n-1\}$. Il forme l'ensemble $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$ des solutions de l'équation $z^n = 1$, qu'on peut aussi noter $\mathbb{U}_n = \{\omega^k \in \mathbb{C} / k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Remarque 1.1.0.3

1. $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$
2. $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$ (somme des racines n-ièmes de l'unité) (Voir relation entre coefficients et racines d'un polynôme scindé dans le chapitre 12).

Définition 1.1.0.6 *(Exponentielle complexe)*

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe par : $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$. On peut aussi l'écrire sous la forme : $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$.

Propriété 1.1.0.6

1. $\forall z \in \mathbb{C} : e^z \neq 0$
2. $\forall z \in \mathbb{C} : |e^z| = e^{\Re(z)}.\cos(\Im(z))$
3. $\forall z \in \mathbb{C} : \Im(z) = e^{\Re(z)}.\sin(\Im(z))$

4. $\forall z, z' \in \mathbb{C} : e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$
5. $\forall z \in \mathbb{C} : e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
6. $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
7. $\forall z \in \mathbb{C} : e^z = 1 \iff (\Re(z) = 0 \text{ et } b \equiv 0[2\pi]) \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}$
8. L'application $\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \\ z \rightarrowtail e^z \end{cases}$ est surjective.

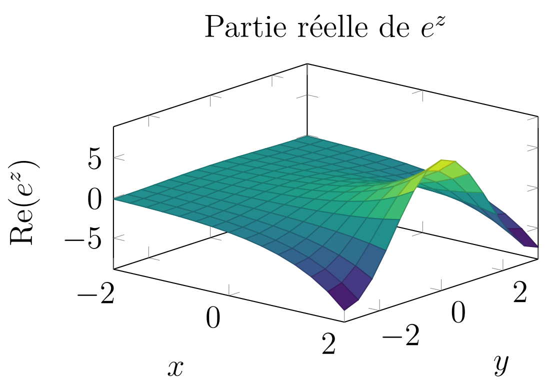

Figure 1.1 – Surface représentant la partie réelle de e^z où $z = x+iy$

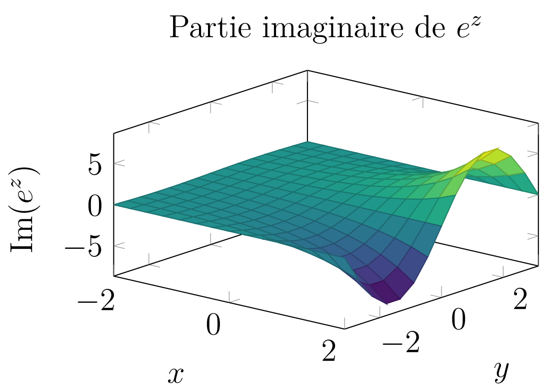

Figure 1.2 – Surface représentant la partie imaginaire de e^z où $z = x + iy$

2 Nombres complexes et géométrie

2.1 Généralités

Soit P le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
Soients $A(a)$,$B(b)$,$C(c)$, $D(d) \in P$ et $z_a, z_b, z_c, z_d \in \mathbb{C}$ leurs affixes respectives, avec $z_a \neq z_b$ et $z_c \neq z_d$.

Propriété 2.2.1.7

1. $AB = |z_b - z_a|$
2. $\vec{AB} = \overrightarrow{z_a z_b} = z_b - z_a$
3. I milieu de $[AB] \iff z_i = \frac{z_a+z_b}{2}$
4. G barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c) \iff z_g = \frac{az_a+bz_b+cz_c}{a+b+c}$
5. A, B, C alignés $\iff \exists\lambda \in \mathbb{R} : z_c - z_a = \lambda(z_b - z_a)$
6. A, B, C alignés $\iff \frac{z_c-z_a}{z_b-z_a} \in \mathbb{R}$
7. $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \arg(\frac{z_v}{z_u})[\pi]$ (angle orienté entre deux vecteurs non nuls)
8. $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} \equiv \arg(\frac{z_c-z_a}{z_b-z_a})[\pi]$
9. $(AB) \parallel (CD) \iff \frac{z_b-z_a}{z_d-z_c} \in \mathbb{R}$
10. $(AB) \perp (CD) \iff \frac{z_b-z_a}{z_d-z_c} \in i\mathbb{R}^*$
11. ABC est un triangle rectangle **direct** en A $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \iff \arg(\frac{z_c-z_a}{z_b-z_a}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \iff \frac{z_c-z_a}{z_b-z_a} \in i\mathbb{R}^*_+$

Exemple 2.2.1.3

Soients $A(2+i)$,$B(4+2i)$ deux points du plan P. Déterminer $C(c)$ tel que ABC soit un triangle et isocèle rectangle en A. **Solution :**

$$ABC \text{ isocèle rectangle en } A \iff \begin{cases} AB = AC \\ \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |b-a| = |c-a| \\ \arg(\frac{c-a}{b-a}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} |\frac{c-a}{b-a}| = 1 \\ \frac{c-a}{b-a} = i \end{cases}$$
$$\iff c - a = i(b-a)$$
$$\iff c = ia + (1-i)b$$
$$\iff \dots$$
$$\iff c = 1 + 3i$$

Remarque 2.2.1.4

Soit $D(A(a), \vec{u}(\alpha))$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{C} \\ \alpha \in \mathbb{C}^* \end{cases}$.

$M(z) \in D \iff \vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont liés. $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{AM} = \lambda \vec{u} \iff \frac{z-a}{\alpha} \in \mathbb{R}$ $\iff \overline{\frac{z-a}{\alpha}} = \frac{z-a}{\alpha} \iff (z-a)\bar{\alpha} = \overline{(z-a)}\alpha \iff \bar{\alpha}z - \bar{\alpha}a = \alpha\bar{z} - \alpha\bar{a} \iff$ $\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} = \bar{\alpha}a - \alpha\bar{a}$

Il s'agit d'une équation complexe de la droite (D).

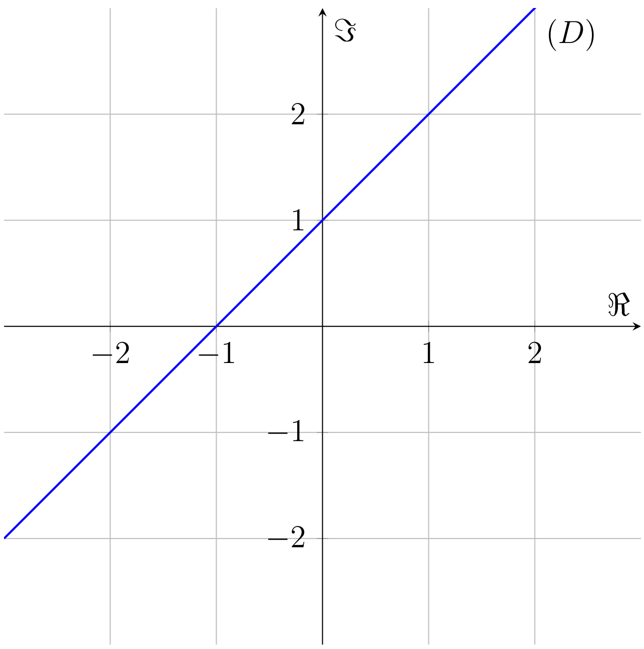

Figure 2.1 – Représentation graphique de la droite (D) dans le plan complexe.

Exemple 2.2.1.4

$(D) : (1+i)z - (1-i)\bar{z} - 2i = 0$ est une équation complexe de la droite passant par $A(1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1-i)$.

2.2 Similitudes directes

Définition 2.2.2.7

On appelle une similitude directe toute application de la forme $S : P \to P$ telle que :

$$\exists a, b \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} : S(a,b) : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \rightarrowtail az + b \text{ avec} \end{cases} \quad a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$$

2.2.1 Translation

Définition 2.2.2.8

On appelle translation toute application de la forme $T_{\vec{u}(b)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C} : T_{\vec{u}(b)} : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \rightarrowtail z + b \text{ avec } b \in \mathbb{C} \end{cases}$$

(Il s'agit du cas où $a = 1$ et $b \in \mathbb{C}^*$)

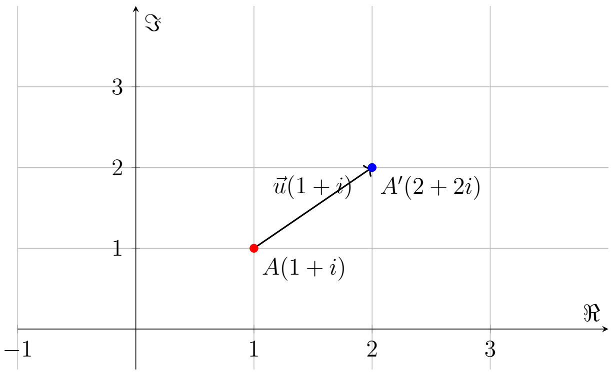

Figure 2.2 – Représentation graphique de la translation $T_{\vec{u}(1+i)}$.

2.2.2 Homothétie

Définition 2.2.2.9

On appelle homothétie toute application de la forme $H_{(\Omega(\omega),a)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C} : H_{(\omega)} : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \rightarrowtail az + b \iff z' - \omega = a(z - \omega) \text{ avec } \omega = \frac{b}{1-a} \end{cases}$$

On dit que c'est une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport a, avec $\omega = \frac{b}{1-a}$.
(Il s'agit du cas où $b \in \mathbb{C}^*$ et $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$)

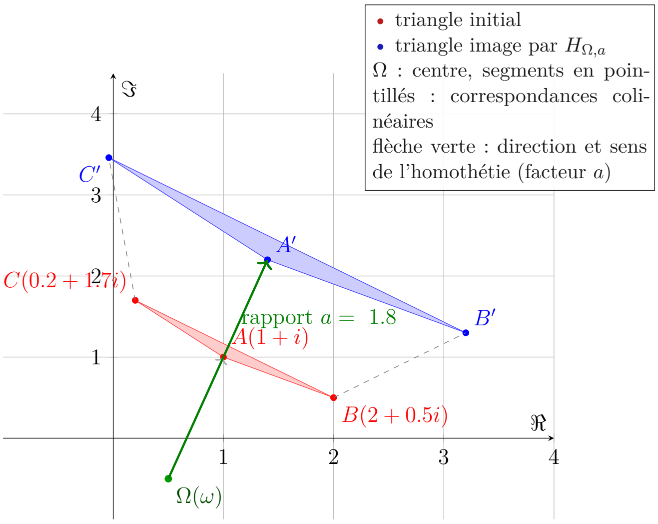

Figure 2.3 – Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et rapport a — image d'un triangle.

Propriété 2.2.2.8 ***(Composée de deux homothéties)***

Soient $H_{(\Omega_1(\omega_1),a_1)}$ et $H_{(\Omega_2(\omega_2),a_2)}$ deux homothéties. On pose $H_1 : z' = a_1 z + b_1$ et $H_2 : z' = a_2 z + b_2$. Alors :

1. Si $a_1.a_2 = 1$, alors $H_{(\Omega_1,a_1)} \circ H_{(\Omega_2,a_2)}$ est une translation de vecteur $\vec{u}(a_1 b_2 + b_1)$.
2. Si $a_1.a_2 \neq 1$, alors $H_{(\Omega_1,a_1)} \circ H_{(\Omega_2,a_2)}$ est une homothétie de centre $\Omega(\frac{a_1 b_2 + b_1}{1 - a_1.a_2})$ et de rapport $a = a_1.a_2$.

2.2.3 Rotation

Définition 2.2.2.10

On appelle rotation toute application de la forme $R_{(\Omega(\omega),\theta)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C} : R_{(\omega,\theta)} : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \rightarrowtail e^{i\theta}(z-\omega) + \omega \text{ avec } \omega \in \mathbb{C} \text{ et } \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On dit que c'est une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ.
(Il s'agit du cas où $b \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$)

2.3 Similitudes indirectes

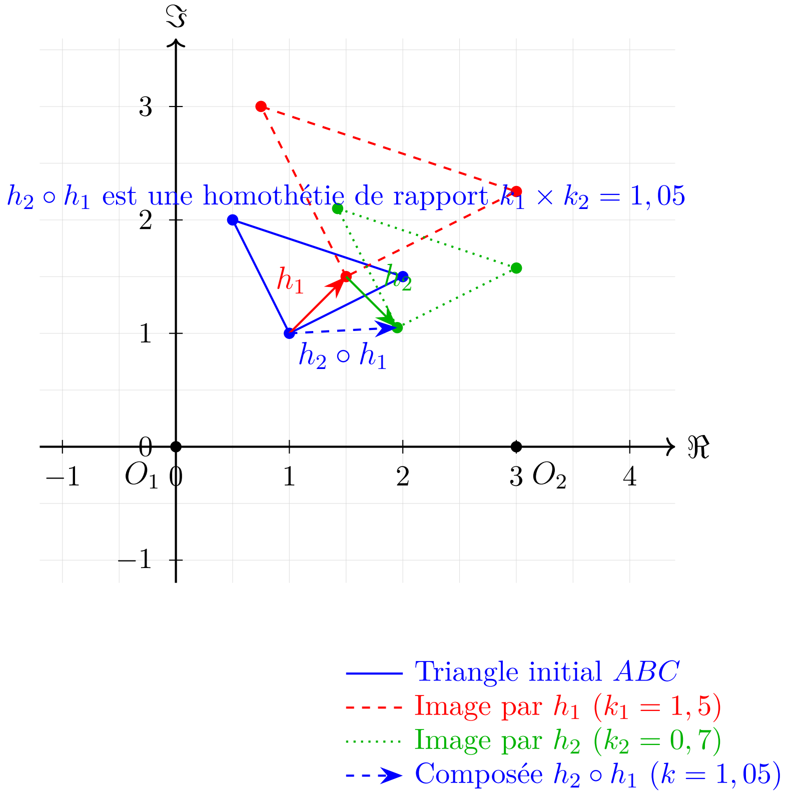

Figure 2.4 – Composition de deux homothéties : $H_{\Omega_2,a_2} \circ H_{\Omega_1,a_1}$. Les lignes pointillées montrent les droites de correspondance (colinéarité) depuis chaque centre.

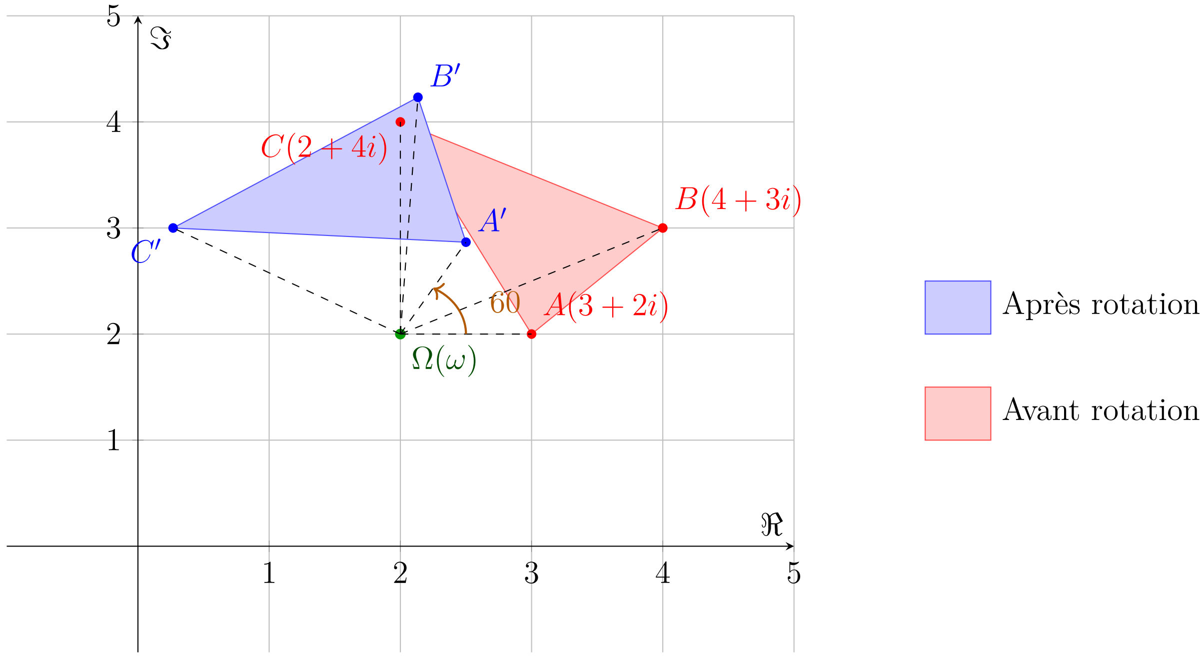

Figure 2.5 – Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ — image d'un triangle.

2.3.1 Symétrie axiale

Définition 2.2.3.11

Soit (D) la droite passant par $\Omega(\omega)$ et dirigée par le vecteur unitaire $\vec{u}(e^{i\theta})$.
Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la symétrie axiale d'axe (D).
La relation complexe de la symétrie axiale d'axe (D) est :

$$\boxed{z' = \bar{z}e^{2i\theta} - \omega e^{2i\theta} + \omega}$$

où ω est l'affixe de Ω et θ l'argument de $\vec{u}$.

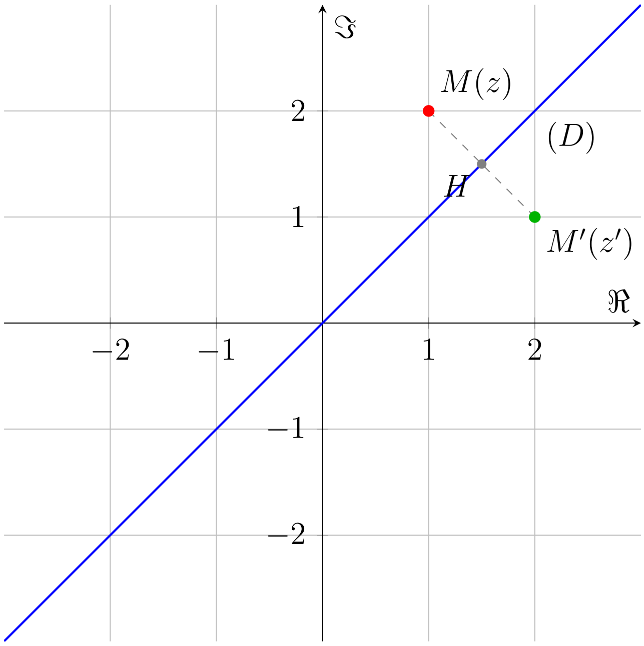

Figure 2.6 – Représentation graphique de la symétrie axiale d'axe (D).

Preuve

On a M et M' symétriques par rapport à (D) $\iff \begin{cases} \vec{OM'} = \vec{OM} + 2\vec{HM} \\ \vec{HM} \perp \vec{u} \end{cases}$.

$$\iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\widehat{\Omega\vec{M}, \vec{u}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \Omega M'}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \theta - \arg(z - \omega) \equiv \arg(z' - \omega) - \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg(z' - \omega) \equiv 2\theta - \arg(z - \omega)[2\pi] \end{cases}$$

$$\iff z' - \omega = |z-\omega|e^{i(2\theta - \arg(z-\omega))} = \overline{|z-\omega|}e^{2i\theta}e^{i\arg(\overline{(z-\omega)})} = e^{2i\theta}(\bar{z} - \bar{\omega})$$

Conclusion : $z' = \bar{z}e^{2i\theta} - \omega e^{2i\theta} + \omega$.

■

Exemple 2.2.3.5

Soit (D) la droite passant par $\Omega(1+i)$ et dirigée par le vecteur unitaire $\vec{u}(e^{i\frac{\pi}{3}})$. Déterminer l'image de $M(2+2i)$ par la symétrie axiale d'axe (D). **Solution :**
$z' = \bar{z}e^{2i\theta} - \omega e^{2i\theta} + \omega$
$= (2-2i)e^{2i\frac{\pi}{3}} - (1-i)e^{2i\frac{\pi}{3}} + (1+i)$
$= (2-2i)(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) - (1-i)(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + (1+i)$
$= (-1-\sqrt{3} - i(1-\sqrt{3})) - (\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}) + (1+i)$
$= \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{\implies M'(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2})}$$

Exercice 2.2.3.2

Soit (D) la droite d'équation cartésienne $y = x+1$. Déterminer l'image de $M(2+i)$ par la symétrie axiale d'axe (D).
Solution :
(D) passe par $A(i)$ et $B(-1)$. Donc $\vec{AB}$ ou $\vec{BA}$ est un vecteur directeur de (D).
Ce qui veut dire que $\vec{BA}(1+i)$ est un vecteur directeur de (D).
On prend $\vec{u}(e^{i\frac{\pi}{4}})$ vecteur unitaire directeur de (D), passant par $B(-1)$.
On aura donc : $M' = S_{(D)}(M) \iff z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(\bar{z} - (-1)) + (-1)$
$\iff \boxed{z' = 3i} \iff \boxed{M'(3i)}$.

Définition 2.2.3.12 *(Similitude indirecte)*

On appelle une similitude indirect d'axe (D) de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport r toute application de la forme $f = h \circ S_{(D)}$, avec

$$\begin{cases} h \text{ homothétie de centre } \Omega(\omega) \text{ et de rapport } r \\ S_{(D)} \text{ symétrie axiale d'axe } (D) \text{ passant par } \Omega \end{cases}$$

Propriété 2.2.3.9

Soient $h = H(\Omega(\omega), r)$ et $\vec{u}(e^{i\theta})$ un vecteur unitaire directeur de (D).

On a :

$$f(z) = a\bar{z} + b \text{ avec } \begin{cases} a = re^{2i\theta} \\ b = \omega - re^{2i\theta}\bar{\omega} \end{cases}$$

Preuve

On a : $f(z) = h(S_{(D)}(z)) = h(\bar{z}e^{2i\theta} - \omega e^{2i\theta} + \omega)$

$= \ldots$

$= a\bar{z} + b \text{ avec } \begin{cases} a = re^{2i\theta} \\ b = \omega - re^{2i\theta}\bar{\omega} \end{cases}$ ■

Propriété 2.2.3.10

Soit $f : z \rightarrowtail a\bar{z} + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

- **Si $|a| \neq 1$, alors f est une similitude indirecte. Elle admet un unique point fixe $\Omega(\omega)$, et dans ce cas,** $f(z) - \omega = r.e^{i2\theta}(\bar{z} - \bar{\omega})$, avec r=$|a|$ et $\theta \equiv \frac{\arg(a)}{2}[\pi]$.
- **Si $|a| = 1$, alors f est une isométrie indirecte.**
  - Si $b \neq -a\bar{b}$, alors f n'admet pas de point fixe.
  - Si $b = -a\bar{b}$, alors f admet une infinité de points fixes appartenant à la droite d'équation complexe (D)
    - — Si $b = 0$, alors (D) est dirigée par $\vec{u}(e^{i\theta})$ avec $\theta \equiv \frac{\arg(a)}{2}[2\pi]$.
    - — Si $b \neq 0$, alors (D) est la médiatrice du segment OB $(B(b))$.

Remarque 2.2.3.5

On remarque que dans le cas où $|a| = 1$ et $b \neq -a\bar{b}$, alors la composée de $f \circ f$ et une translation de vecteur $\vec{v}(a\bar{b} + b)$.