Chapitre I : Calcul Algébrique

Rédigé par Samy Youssoufine

11 décembre 2025

UM6P University Mohammed VI Polytechnic

EMINES School of Industrial Management

Table des matières

1 Sommes (Σ)

1.1 Généralités

Définition 1.1.1.1

Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$. La **somme** des éléments de cette famille est notée :

$$\sum_{i\in I} a_i$$

Si $I = \{0, 1, \ldots, n\}$ (où $n \in \mathbb{N}$), alors on écrit :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{0\leq i\leq n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

Propriété 1.1.1.1 ***(Linéarité de la somme)***

1. **Additivité sur les ensembles disjoints :** Si I et J sont deux ensembles finis tels que $I \cap J = \emptyset$, alors :

$$\sum_{k\in I\cup J} a_k = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{j\in J} a_j$$

2. **Homogénéité :** Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une constante (indépendante de l'indice de sommation i), alors :

$$\sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i$$

3. **Additivité :** Pour deux familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$:

$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$$

Preuve

La preuve repose sur les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition.

1. On pose $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ et $J = \{j_1, \ldots, j_q\}$. Puisque $I \cap J = \emptyset$, l'union $I \cup J$ contient $p+q$ éléments distincts. La somme sur $I \cup J$ est donc $(a_{i_1} + \cdots + a_{i_p}) + (a_{j_1} + \cdots + a_{j_q})$, ce qui correspond à la somme des deux sommes.
2. C'est une simple factorisation : $\lambda a_1 + \cdots + \lambda a_p = \lambda(a_1 + \cdots + a_p)$.

■

Conséquence 1.1.1.1

1. ***Relation de Chasles pour les sommes :*** *Si $1 \leq n < m$, alors :*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{m} a_i$$

2. ***Somme d'une constante :***

$$\sum_{i \in I} \lambda = \lambda \cdot card(I)$$

En particulier, $\sum_{k=p}^{n} \lambda = \lambda \cdot (n-p+1)$.

Exemple 1.1.1.1 *(Sommes usuelles)*

1. $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = n(n+1) + (n+1) = (n+1)^2$.

1.2 Changement d'indice et sommes télescopiques

1.2.1 Changement d'indice

Proposition 1.1.2.1

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=m}^{n} a_{k+p} = \sum_{j=m+p}^{n+p} a_j$$

Cette opération est appelée un **changement d'indice** (ou translation d'indice).

Remarque 1.1.2.1

1. Un changement d'indice doit être une transformation affine ($k \mapsto ak + b$) pour préserver la nature "consécutive" des indices. Un changement non linéaire comme $k \mapsto k^2$ n'est pas valide.
2. La permutation des bornes est un cas particulier : $\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0 = \sum_{j=0}^{n-1} a_j$.

1.2.2 Sommes télescopiques

Proposition 1.1.2.2

Pour une suite (a_k), on a :

$$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$$

Preuve

Le développement de la somme donne :

$$(a_{p+1} - a_p) + (a_{p+2} - a_{p+1}) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n)$$

Tous les termes intermédiaires s'annulent deux à deux, ne laissant que $-a_p$ et a_{n+1}. ■

Exemple 1.1.2.2

1. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
   On décompose en éléments simples : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. La somme devient télescopique :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

2. Calculer $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.
   On utilise l'expression conjuguée : $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1$$

Remarque 1.1.2.2 *(Télescopage à plusieurs pas)*
Pour une somme comme $\sum_k (a_{k+2} - a_k)$, on peut la décomposer pour faire apparaître des sommes télescopiques simples :

$$\sum_k (a_{k+2} - a_k) = \sum_k (a_{k+2} - a_{k+1} + a_{k+1} - a_k) = \sum_k (a_{k+2} - a_{k+1}) + \sum_k (a_{k+1} - a_k)$$

1.3 Sommes classiques

1.3.1 Identité remarquable et suite géométrique

Théorème 1.1.3.1 *(Identité de Bernoulli)*

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\textit{Formule } a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}$$

Preuve
On développe le membre de droite :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = (a^n + \sum_{j=1}^{n-1} a^j b^{n-j}) - (b^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k}) = a^n - b^n$$

■

Remarque 1.1.3.3
En posant $b = 1$ et $a \neq 1$, on retrouve la somme des termes d'une suite géométrique.

Théorème 1.1.3.2 *(Somme géométrique)*

Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

1.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \textit{si } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \textit{si } x \neq 1 \end{cases}$$

2. *Pour $p \leq n$:*

$$\sum_{k=p}^{n} x^k = \begin{cases} n-p+1 & \text{si } x = 1 \\ x^p \frac{1-x^{n-p+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

1.3.2 Binôme de Newton

Théorème 1.1.3.3 ***(Formule du binôme de Newton)***

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{Binôme de Newton } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial.

Propriété 1.1.3.2 ***(Propriétés des coefficients binomiaux)***

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. ***Symétrie :*** *Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.*
3. ***Formule de Pascal :*** *Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.*

Preuve ***(Preuve du binôme par récurrence)***

- **Initialisation** $(n = 0)$ **:** $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. La formule est vraie.

▶ **Hérédité :** Supposons la formule vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \quad \text{(par H.R.)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0}b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \quad \text{(Formule de Pascal)} \\
&= \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

La formule est vraie au rang $n+1$.

■

Exercice 1.1.3.1

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

Preuve *(Solutions)*

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.
2. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0$ pour $n \geq 1$.
3. On utilise la technique de la dérivation. Soit $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Alors $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$. Pour $x=1$, on obtient $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$.

■

1.4 Sommes doubles

Définition 1.1.4.2

Soit une famille d'éléments $(a_{i,j})$ où $i \in I$ et $j \in J$ sont des ensembles finis. La somme double est :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right) \quad \text{(Théorème de Fubini)}$$

Exemple 1.1.4.3 ***(Somme triangulaire)***

Calculer $S = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$. On peut écrire cette somme comme une somme double et intervertir l'ordre de sommation :

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n(n+3)}{4}$$

2 Produits ($\prod$)

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.2.1.3

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$ avec $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ un ensemble fini. On note le **produit** des éléments de cette famille par :

$$\prod_{i\in I} a_i = a_{i_1} \times a_{i_2} \times \cdots \times a_{i_n}$$

Si $I = \{1, \ldots, n\}$, alors :

$$\prod_{i\in I} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{1\leq i\leq n} a_i$$

Exemple 2.2.1.4

1. **Factorielle :** $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$
2. **Produit et somme :** $\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^{\sum_{k=1}^{n} k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Propriété 2.2.1.3

1. $\prod_{i=1}^{n}(\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i$. *Plus généralement,* $\prod_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^{card(I)} \prod_{i\in I} a_i$.
2. *Si* $I \cap J = \emptyset$, *alors* $\prod_{k\in I\cup J} a_k = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)\left(\prod_{j\in J} a_j\right)$. *En particulier, pour* $m > n$, $\prod_{i=1}^{m} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=n+1}^{m} a_i\right)$.
3. ***Changement d'indice :*** $\prod_{i=1}^{n} a_{i+p} = \prod_{k=p+1}^{n+p} a_k$.
4. ***Produit télescopique :*** *Si* $\forall i \in \{p, \ldots, n\}, a_i \neq 0$, *alors :*

$$\prod_{i=p}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$$

5. $\prod_{i\in I}(a_i b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)\left(\prod_{i\in I} b_i\right)$.

Remarque 2.2.1.4

Attention à ne pas confondre les propriétés des sommes et des produits. En général :

$$\sum_{i\in I} a_i b_i \neq \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i\right)$$

En effet, le membre de droite correspond à une somme double : $\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in I} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I^2} a_i b_j$.

2.2 Exercices sur les produits

Exercice 2.2.2.2

1. Calculer $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
2. Calculer $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$ à l'aide des factorielles.
3. (Intégrales de Wallis) Soit $n \geq 0$, on pose $U_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt$.
   a) Calculer U_0 et U_1.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$.
   c) En déduire U_{2n} et U_{2n+1} en fonction de n.

Preuve *(Solutions (Partielles))*

1. **Produit télescopique :**

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k} = \left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

2. **Utilisation des factorielles :**

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\left(\prod_{k=1}^{n}2k\right)^2}$$

On a $\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ et $\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n!$. De même, $\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$. Le produit vaut donc :

$$\frac{\frac{(2n)!}{2^n n!}\cdot\frac{(2n+1)!}{2^n n!}}{(2^n n!)^2} = \frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^4} = \frac{2n+1}{4^{2n}}\binom{2n}{n}^2$$

3. Intégrales de Wallis :

a) $U_0 = \int_0^{\pi/2} 1\, dt = \frac{\pi}{2}$.
$U_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\, dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$.

b) On effectue une intégration par parties sur $U_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t)\sin(t)\, dt$.

$$\begin{aligned} \text{Posons } u(t) = \sin^{n+1}(t) &\implies u'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t) \\ \text{et } v'(t) = \sin(t) &\implies v(t) = -\cos(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= [-\sin^{n+1}(t)\cos(t)]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^n(t)\, dt \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)\, dt \\ &= (n+1)(U_n - U_{n+2}) \end{aligned}$$

D'où $(n+2)U_{n+2} = (n+1)U_n$, et donc $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}U_n$.

c) Par récurrence, on obtient :

$$U_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2}U_0 = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2 \cdot 4^n}\binom{2n}{n}$$

$$U_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3}U_1 = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

■

3 Systèmes linéaires

3.1 Généralités

3.1.1 Définition d'un système

Définition 3.3.1.4

Un système de n équations linéaires à p inconnues $(x_1, \dots, x_p)$ est de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les coefficients (a_{ij}) pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ et les seconds membres (b_i) pour $1 \leq i \leq n$ sont des constantes connues.

Exemple 3.3.1.5

Pour $n = p = 2$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Application 3.3.1.1 ***(Position de deux droites dans le plan)***

Un système de deux équations à deux inconnues peut être interprété comme l'intersection de deux droites (D_1) et (D_2) :

$$\begin{cases} (D_1) : \alpha x + \beta y = \gamma \\ (D_2) : ax + by = c \end{cases}$$

- Si (D_1) rencontre (D_2) en un point (x_0, y_0), le système (L) admet une **solution unique** : $S_{(L)} = \{(x_0, y_0)\}$.

- Si (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles, le système (L) n'admet **aucune solution** : $S_{(L)} = \emptyset$.
- Si $(D_1) = (D_2)$, le système (L) admet une **infinité de solutions** (les points de la droite) : $S_{(L)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y = \gamma\}$.

Exemple 3.3.1.6 *(Exemples triviaux)*

$$(L_1) : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad (L_2) : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases} \qquad (L_3) : \begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

3.1.2 Résolution d'un système linéaire

Proposition 3.3.1.3

Pour résoudre un système linéaire, on cherche à le transformer en un système **équivalent** (ayant les mêmes solutions) et "plus simple", c'est-à-dire un **système triangulaire** ou, dans le cas général, un **système échelonné**.

Définition 3.3.1.5 *(Système triangulaire)*

Un système est dit **triangulaire** si tous les coefficients sous la diagonale principale sont nuls. Par exemple :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \ddots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Un tel système se résout en utilisant la "méthode de la remontée".

Définition 3.3.1.6 *(Système échelonné)*

Un **système échelonné** est un système linéaire dont chaque équation (ou ligne) commence par strictement plus de zéros que la précédente. Par exemple :

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1n}x_n & = \gamma_1 \\ \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \alpha_{23}x_3 + \cdots + \alpha_{2n}x_n & = \gamma_2 \\ \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \alpha_{34}x_4 + \ldots & = \gamma_3 \\ \ddots \end{cases}$$

Théorème 3.3.1.4 ***(Opérations élémentaires (Pivot de Gauss))***

Les opérations suivantes permettent de passer d'un système à un autre qui lui est équivalent :

1. ***Permutation*** *de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$ (avec $i \neq j$).*
2. ***Multiplication*** *d'une ligne par un scalaire non nul α : $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (avec $\alpha \neq 0$).*
3. ***Ajout*** *à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (avec $i \neq j$).*

Exemple 3.3.1.7 ***(Résolution par pivot de Gauss)***

1. Soit le système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 8 \end{cases} \xrightarrow[\text{L3}\leftarrow\text{L3}-3\text{L1}]{\text{L2}\leftarrow\text{L2}-\text{L1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 4x_3 = -3 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{L3}\leftarrow\text{L3}+\text{L2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 4x_3 = -3 \\ -2x_3 = -1 \end{cases}$$

Par remontée, on trouve $x_3 = 1/2$, puis $x_2 = -1$, et enfin $x_1 = 3$. D'où $S = \{(3, -1, 1/2)\}$.

2. Soit le système :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Après résolution, on trouve une infinité de solutions : $S = \{(2, 1 + t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3.2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Définition 3.3.2.7 ***(Structure de $\mathbb{R}^n$)***

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^n$ de deux lois :

- L'addition vectorielle : $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.
- La multiplication par un scalaire : $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

Définition 3.3.2.8 ***(Sous-espace vectoriel)***

Une partie non vide $F \subseteq \mathbb{R}^n$ est un **sous-espace vectoriel** (s.e.v.) de $\mathbb{R}^n$ si elle est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad x + \lambda y \in F$$

Cela équivaut à vérifier deux conditions :

1. Le vecteur nul $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ appartient à F.
2. F est stable par addition et multiplication par un scalaire.

Définition 3.3.2.9 *(S.E.V. engendré par une famille de vecteurs)*

Soient $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble de toutes leurs combinaisons linéaires est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, appelé **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p})$. On le note :

$$\text{Vect}(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{v_i} \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$$

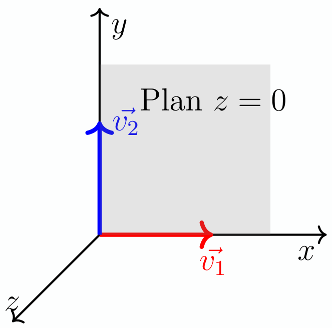
C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ contenant tous les vecteurs $\vec{v_i}$.

Exemple 3.3.2.8

Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $\vec{v_1} = (1, 0, 0)$ et $\vec{v_2} = (0, 1, 0)$.

$$\text{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \{\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda_1, \lambda_2, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

C'est le plan horizontal d'équation $z = 0$.



Définition 3.3.2.10 *(Famille libre et liée)*

Une famille de vecteurs $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p})$ est dite :

- **libre** si la seule façon d'obtenir le vecteur nul comme combinaison linéaire est de choisir tous les coefficients nuls.

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{v_i} = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

- **liée** si elle n'est pas libre. Cela signifie qu'au moins un des vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Définition 3.3.2.11 *(Base et Dimension)*

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

- Une famille $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p})$ est une **famille génératrice** de F si $F = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p})$.
- Une **base** de F est une famille génératrice de F qui est également libre.
- Toutes les bases d'un s.e.v. F ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé la **dimension** de F, notée $\dim(F)$.

3.3 Sous-espaces affines et structure des solutions

Définition 3.3.3.12 *(Sous-espace affine)*

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{a}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble

$$\mathcal{A} = \vec{a} + F = \{\vec{a} + \vec{v} \mid \vec{v} \in F\}$$

est appelé un **sous-espace affine** passant par $\vec{a}$ et de direction F. Sa dimension est celle de sa direction : $\dim(\mathcal{A}) = \dim(F)$.

Proposition 3.3.3.4 *(Non-unicité du point de passage)*

Le point de passage d'un sous-espace affine n'est pas unique. Si $\mathcal{A} = \vec{a} + F$, alors pour tout point $\vec{b} \in \mathcal{A}$, on a aussi $\mathcal{A} = \vec{b} + F$.

Preuve

Soit $\vec{b} \in \mathcal{A}$. Par définition, il existe un vecteur $\vec{v_1} \in F$ tel que $\vec{b} = \vec{a} + \vec{v_1}$.

- Montrons que $\mathcal{A} \subseteq \vec{b} + F$. Soit $\vec{x} \in \mathcal{A}$. Il existe $\vec{v_2} \in F$ tel que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{v_2}$. Comme $\vec{a} = \vec{b} - \vec{v_1}$, on a $\vec{x} = (\vec{b} - \vec{v_1}) + \vec{v_2} = \vec{b} + (\vec{v_2} - \vec{v_1})$. Puisque F est un s.e.v., $\vec{v_2} - \vec{v_1} \in F$, donc $\vec{x} \in \vec{b} + F$.
- Montrons que $\vec{b} + F \subseteq \mathcal{A}$. Soit $\vec{x} \in \vec{b} + F$. Il existe $\vec{v_3} \in F$ tel que $\vec{x} = \vec{b} + \vec{v_3}$. En remplaçant $\vec{b}$, on a $\vec{x} = (\vec{a} + \vec{v_1}) + \vec{v_3} = \vec{a} + (\vec{v_1} + \vec{v_3})$. Comme $\vec{v_1} + \vec{v_3} \in F$, on a $\vec{x} \in \mathcal{A}$.

Les deux inclusions prouvent l'égalité. ■

Théorème 3.3.3.5 *(Unicité de la direction)*

La direction d'un sous-espace affine est unique. Si $\mathcal{A} = \vec{a_1} + F_1 = \vec{a_2} + F_2$, alors $F_1 = F_2$.

Preuve

On a $\vec{a_2} \in \mathcal{A} = \vec{a_1} + F_1$, donc il existe $\vec{v_1} \in F_1$ tel que $\vec{a_2} = \vec{a_1} + \vec{v_1}$, d'où $\vec{a_1} - \vec{a_2} = -\vec{v_1} \in F_1$. De même, $\vec{a_1} \in \mathcal{A} = \vec{a_2} + F_2$, donc $\vec{a_1} - \vec{a_2} \in F_2$.

- Soit $\vec{x} \in F_2$. Alors $\vec{a_2} + \vec{x} \in \mathcal{A} = \vec{a_1} + F_1$. Il existe donc $\vec{v'} \in F_1$ tel que $\vec{a_2} + \vec{x} = \vec{a_1} + \vec{v'}$. On en déduit $\vec{x} = (\vec{a_1} - \vec{a_2}) + \vec{v'}$. Comme $\vec{a_1} - \vec{a_2} \in F_1$ et $\vec{v'} \in F_1$, leur somme $\vec{x}$ est dans F_1. Donc $F_2 \subseteq F_1$.
- L'argument est symétrique : en partant de $\vec{x} \in F_1$, on montre de la même manière que $\vec{x} \in F_2$, donc $F_1 \subseteq F_2$.

Par double inclusion, $F_1 = F_2$. ■

Exemple 3.3.3.9

1. Soit $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$. Un point $(x, y, z) \in \mathcal{A}$ vérifie $z = 1 - x - y$. On peut donc l'écrire :

$$(x, y, 1 - x - y) = (0, 0, 1) + (x, y, -x - y) = (0, 0, 1) + x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

Ainsi, $\mathcal{A} = \vec{a} + \text{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ avec $\vec{a} = (0, 0, 1)$, $\vec{v_1} = (1, 0, -1)$ et $\vec{v_2} = (0, 1, -1)$. $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de dimension 2 (un plan).

2. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 1\}$. C'est la droite affine d'équation $x = 1 + 2y$. On peut écrire un point de D :

$$(1 + 2y, y) = (1, 0) + y(2, 1)$$

Ainsi, $D = (1, 0) + \text{Vect}((2, 1))$. C'est une droite affine.

3.3.1 Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Théorème 3.3.3.6

Soit (L) un système linéaire et $\mathcal{A}$ l'ensemble de ses solutions.

- Soit $\mathcal{A}$ est vide ($\mathcal{A} = \emptyset$).
- Soit $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine $\mathcal{A} = \vec{x_p} + F$, où :
  - $\vec{x_p}$ est une **solution particulière** de (L).
  - F est le s.e.v. des solutions du **système homogène associé** (H), où tous les seconds membres sont nuls.

Preuve

Soit le système (L) : $\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i$ et le système homogène associé (H) : $\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = 0$. Notons F l'ensemble des solutions de (H).

1. **Montrons que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^p$.**
   - Le vecteur nul $\vec{0}$ est dans F car $\sum a_{ij} \cdot 0 = 0$.
   - Soient $\vec{y}, \vec{y'} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}(y_j + \lambda y'_j) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} y_j + \lambda \sum_{j=1}^{p} a_{ij} y'_j = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$. Donc $\vec{y} + \lambda \vec{y'} \in F$.
2. **Montrons que** $\mathcal{A} = \vec{x_p} + F$, en supposant que $\mathcal{A}$ n'est pas vide et que $\vec{x_p}$ est une solution particulière de (L). Soit $\vec{x} \in \mathcal{A}$. On a donc $\sum a_{ij} x_j = b_i$ et $\sum a_{ij}(x_p)_j = b_i$. En soustrayant les deux équations, on obtient : $\sum a_{ij}(x_j - (x_p)_j) = 0$. Ceci signifie que le vecteur $\vec{x} - \vec{x_p}$ est une solution du système homogène, donc $\vec{x} - \vec{x_p} \in F$. On a donc $\vec{x} \in \vec{x_p} + F$. L'égalité est démontrée par équivalences successives.

■

Exemple 3.3.3.10

Résoudre le système $(L) : \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ 2x + y + 2z + t = 6 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 10 \end{cases}$.

- **Solution particulière :** On remarque que $\vec{a} = (1, 1, 1, 1)$ est une solution particulière de (L).
- **Résolution du système homogène** (H) **:**

$$(H) : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x + y + 2z + t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{L3}\leftarrow\text{L3}-3\text{L1}]{\text{L2}\leftarrow\text{L2}-2\text{L1}} \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -y - t = 0 \\ -y - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

  Les solutions sont de la forme $(x, y, -x, -y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de (H) est $F = \{x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ avec $\vec{v_1} = (1, 0, -1, 0)$ et $\vec{v_2} = (0, 1, 0, -1)$.
- **Solution générale de** (L) **:** L'ensemble des solutions de (L) est $\mathcal{A} = \vec{a} + F = \{(1, 1, 1, 1) + x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

3.3.2 Exercices d'application

Exercice 3.3.3.3

Résoudre les systèmes suivants :

1. Dans $\mathbb{R}^n$: (L_1) $\quad \left\{ \sum_{k=1}^{i} x_k = 2^{i+1} - 2 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \right.$.
2. Dans $\mathbb{R}^{n+1}$: (L_2) $\quad \left\{ \sum_{k=0}^{n} C_k^i x_k = b_i \quad \forall i \in \{0, \ldots, n\} \right.$.

Preuve *(Solutions)*

1. Pour (L_1), on procède par soustraction. Pour $i \geq 2$:

$$x_i = \left(\sum_{k=1}^{i} x_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{i-1} x_k\right) = (2^{i+1} - 2) - (2^i - 2) = 2^{i+1} - 2^i = 2^i$$

Pour $i = 1$, $x_1 = 2^{1+1} - 2 = 2$. La formule $x_i = 2^i$ fonctionne aussi. La solution unique est donc $S = \{(2^1, 2^2, \dots, 2^n)\}$.

2. Pour (L_2), le système est triangulaire car $\binom{k}{i} = 0$ si $k < i$. On peut l'écrire $\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} x_k = b_i$. Le système homogène associé a pour unique solution le vecteur nul (par récurrence descendante). Il existe donc une unique solution au système (L_2). L'idée est de poser un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où $(a_0, \dots, a_n)$ est la solution recherchée. On montre que $P(X+1) = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$. En posant $Q(X) = \sum b_i X^i$, on a $P(X) = Q(X-1)$. Par identification des coefficients de $P(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j (X-1)^j$, on trouve la solution unique :

$$a_k = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} b_j \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

■