Chapitre VII : Dérivation

Rédigé par Samy Youssoufine

26 décembre 2025

Note importante

Document WIP. Peut contenir des erreurs/sections incomplètes. Version ALPHA de la nouvelle mise en forme.

Table des matières

1 Généralités

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

1.1 Dérivée en un point

Définition 1.1.1.1 ***(Dérivabilité en un point)***

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$ et $f \in \mathbb{K}^I$.
On dit que f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si la fonction φ définie par : $\begin{cases} I - \{a\} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$ admet une limite finie en a.
Dans ce cas, la limite est appelée le nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarque 1.1.1.1

1. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
2. Si $f \in \mathbb{C}^I$ tel que $f = f_1 + i f_2$ avec $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^I$, alors f est dérivable en a si et seulement si f_1 et f_2 sont dérivables en a.
   Dans ce cas, $f'(a) = f_1'(a) + i f_2'(a)$.
   On décompose la limite comme suit : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a} + i \lim_{x\to a} \frac{f_2(x)-f_2(a)}{x-a}$

Définition 1.1.1.2

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overset{\circ}{I}$.
On dit que f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a ssi. la fonction φ définie

par : $\begin{cases} I\cap]-\infty,a[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{cases}$ (resp. $\begin{cases} I\cap]a,+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{cases}$) admet une limite finie en a.
On peut aussi utiliser la notion de restriction pour définir la dérivabilité à gauche et à droite. Ainsi, f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a si et seulement si la restriction de f à $I\cap]-\infty,a[$ (resp. $I\cap]a,+\infty[$) est dérivable en a.
On peut donc écrire : f dérivable à droite (resp. à gauche) en $a \iff f_{|I\cap]a,+\infty[}$ (resp. $f_{|I\cap]-\infty,a[}$) dérivable en a.

Propriété 1.1.1.1

Soient $f\in\mathbb{K}^I$ et $a\in\mathring{I}$. On dit que f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a. De plus, dans ce cas, on a : $f'(a)=f'_g(a)=f'_d(a)$.

Remarque 1.1.1.2

1. Si f est une fonction à valeurs réelles telle que f est dérivable à droite et à gauche en $a\in\mathring{I}$, avec $f'_g(a)\neq f'_d(a)$, alors f n'est pas dérivable en a.
   Graphiquement, cela correspond à un angle (point anguleux) au point a. Voir la figure 1.1.

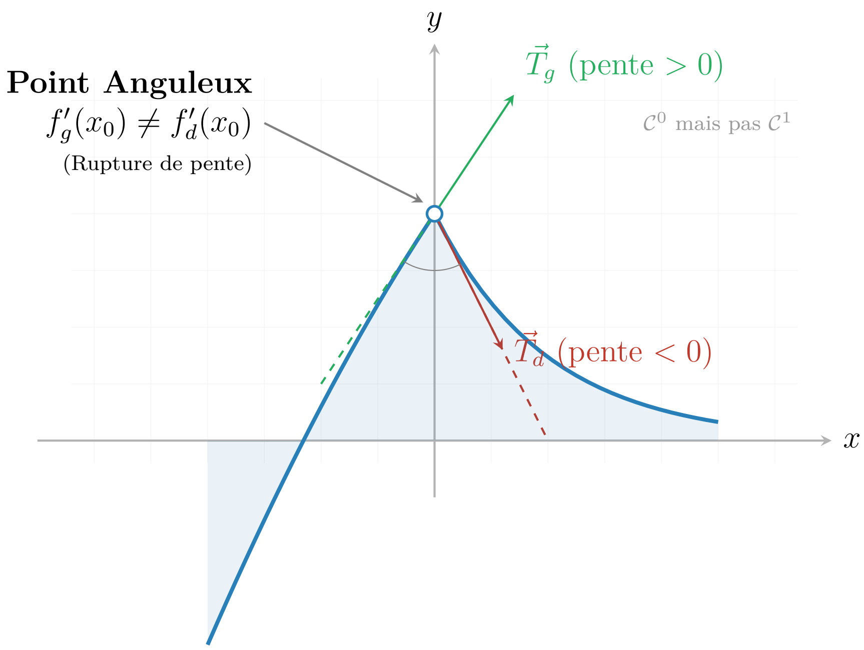


Figure 1.1 – Représentation graphique d'une fonction continue non dérivable en $x=0$. Le changement brusque de la pente (de positive à gauche à négative à droite) crée un point anguleux caractéristique.

1.2 Fonctions dérivées

Définition 1.1.2.3

Soit $f \in \mathbb{K}^I$. On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en a pour tout $a \in I$.
Dans ce cas, on définit la fonction dérivée de f sur I comme la fonction :

$$f' : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

On note l'ensemble des fonctions dérivables sur I par $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$, ou encore $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{K})$

Propriété 1.1.2.2

Soit $f \in \mathbb{K}^I$.

1. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a (La réciproque est fausse !).
2. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.
   On peut donc écrire : $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \implies f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, et encore $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Preuve

Soit $f \in \mathbb{K}^I$ dérivable en $a \in I$.

On pose $\varphi : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \end{cases}$.

Comme f est dérivable en a, φ est continue en a.
On a donc $\forall x \in I, f(x) = \varphi(x)(x-a) + f(a)$.
Donc $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x)(x-a) + f(a) = f(a)$.
Ainsi, f est continue en a. ■

Remarque 1.1.2.3

- La réciproque de la propriété précédente est fausse.
  - Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue mais non-dérivable en 0.
  - On peut aussi voir que la fonction illustrée dans la figure 1.1 est continue mais non-dérivable en 0.
- Certaines fonctions sont continues partout mais non dérivables partout, comme la fonction de Weierstrass, ou celle du mouvement brownien en probabilité. Voir la figure 1.2 pour une illustration de la fonction de Weierstrass.

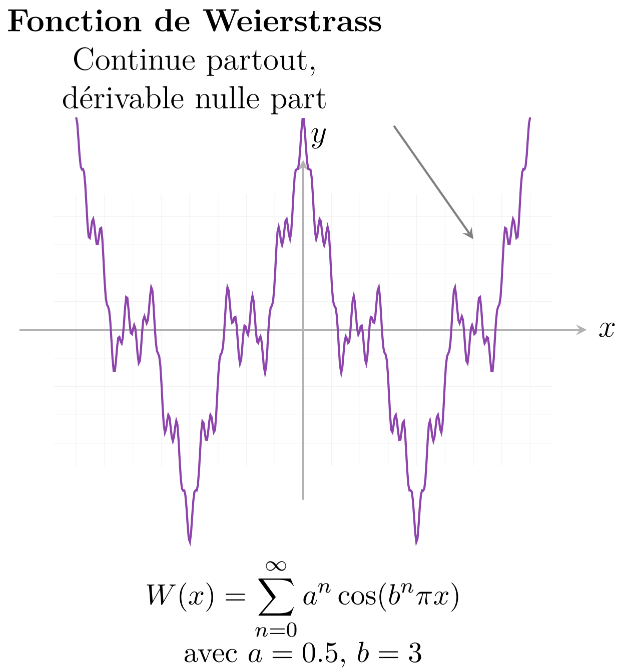


Figure 1.2 – Représentation graphique de la fonction de Weierstrass $W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ avec $a = 0{,}5$ et $b = 3$. Cette fonction est continue partout mais n'est dérivable en aucun point.

1.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 1.1.3.3

Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda f + g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
2. $fg \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $(fg)' = f'g + fg'$
3. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Preuve *(Preuve de la propriété 3 - 1.)*

Soit $a \in I$.

$$\begin{aligned}(\lambda f+g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(\lambda f+g)(x)-(\lambda f+g)(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{\lambda(f(x)-f(a))+(g(x)-g(a))}{x-a}\\ &= \lambda\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= \lambda f'(a)+g'(a)\end{aligned}$$

■

Preuve *(Preuve de la propriété 3 - 2.)*

Soit $a \in I$.

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a} g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= g(a)f'(a)+f(a)g'(a)\end{aligned}$$

■

Preuve *(Preuve de la propriété 3 - 3.)*

Soit $a \in I$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{g(a)(f(x)-f(a))-f(a)(g(x)-g(a))}{(x-a)g(x)g(a)}\\ &= \frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}\\ &= \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}\end{aligned}$$

■

Preuve *(Preuve de la propriété 3 - 4.)*

Soit $a \in I$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{g(a)-g(x)}{(x-a)g(x)g(a)} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{-(g(x)-g(a))}{(x-a)g(x)g(a)} \\ &= -\frac{g'(a)}{g(a)^2} \quad \text{car } \frac{1}{g} \text{ est continue en } a\end{aligned}$$

■

Exemple 1.1.3.1

1. Soit $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$. On pose $g : x \mapsto f(x)e^x$.
   On a g est dérivable sur I avec $\forall x \in I, g'(x) = f'(x)e^x + f(x)e^x = (f'(x) + f(x))e^x$.
2. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ où $a_k \in \mathbb{K}$.
   On a $P \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

Propriété 1.1.3.4

Soit f une fonction de I vers $\mathbb{C}$.
Alors f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions parties réelles et imaginaires de f sont dérivables sur I.
Cela équivaut aussi à dire que $\overline{f}$ est dérivable sur I, et on a $\left(\overline{f}\right)' = \overline{f'}$.

Preuve

On pose $f = f_1 + i f_2$ avec $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$.
Si f est dérivable sur I, alors f_1 et f_2 sont dérivables sur I avec $\forall x \in I, f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x)$.
Ce qui implique que $\overline{f}(x) = f_1(x) - i f_2(x)$ est dérivable sur I avec $\forall x \in I, \left(\overline{f}\right)'(x) = f_1'(x) - i f_2'(x) = \overline{f'(x)}$.
Réciproquement, si f_1 et f_2 sont dérivables sur I, alors f est dérivable sur I avec $\forall x \in I, f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x)$.
De plus, si $\overline{f}$ est dérivable sur I, alors f_1 et f_2 sont dérivables sur I avec $\forall x \in I, \left(\overline{f}\right)'(x) = f_1'(x) - i f_2'(x)$.
Ainsi, f est dérivable sur I avec $\forall x \in I, f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x) = \overline{\left(\overline{f}\right)'(x)}$. ■

Propriété 1.1.3.5

Soient $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(J, \mathbb{K})$ avec $f(I) \subset J$.
Alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur I avec $\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Attention

Il est important de noter que cette propriété nécessite que f soit dans $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et non dans $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$. En effet, la dérivabilité de $g \circ f$ n'est pas garantie si f prend des valeurs complexes.

Preuve

Soit $a \in I$.

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= g'(f(a)) \cdot f'(a)
\end{aligned}$$

■

Exercice 1.1.3.1

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I, telle que $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.

1. Montrer que $|f|$ est dérivable sur I.
2. Calculer $(|f|)'(x)$ pour tout $x \in I$ en fonction de $|f|$ et f.

Solution :

1. On veut montrer que la fonction $|f| : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |f(x)| \end{cases}$ est dérivable sur I.

   a) Méthode 1 (Décomposer la fonction f en $f_1 + if_2$) ;

      i. On pose $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I, f(x) = f_1(x) + if_2(x)$.

      ii. Comme f est dérivable sur I, alors f_1 et f_2 sont dérivables sur I.

      iii. On a $\forall x \in I, |f(x)| = \sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2}$.

      iv. On a $f_1(x)^2 + f_2(x)^2 > 0$ car $f(x) \neq 0$ (démonstration par absurde triviale).

      v. On pose $g : \begin{cases} (0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sqrt{t} \end{cases}$.

      vi. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

      vii. Par composition, $|f| = g \circ h$ avec $h : \begin{cases} I \to]0, +\infty[\\ x \mapsto f_1(x)^2 + f_2(x)^2 \end{cases}$ est dérivable sur I.

b) Méthode 2 (Utiliser la fonction conjugée) ;

i. On a $\forall x \in I, |f(x)| = \sqrt{f(x)\overline{f(x)}}$.

ii. On pose $g : \begin{cases}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sqrt{t} \end{cases}$

iii. Reste de la résolution quasi identique...

2. Calcul de la dérivée de $|f|$.

a) On a $\forall x \in I, |f(x)| = \sqrt{f(x)\overline{f(x)}}$.

b) On a alors $|f|' = \frac{f' \cdot \overline{f} + f \cdot (\overline{f})'}{2\sqrt{f\overline{f}}}$.

c) Or, $(\overline{f})' = \overline{f'}$.

d) Donc, $\forall x \in I, (|f|)'(x) = \frac{f'(x)\overline{f(x)} + f(x)\overline{f'(x)}}{2|f(x)|}$.

e) On peut aussi écrire $(|f|)'(x) = \frac{\Re\left(f'(x)\overline{f(x)}\right)}{|f(x)|}$.

Propriété 1.1.3.6

Soit $f : I \to J$ une bijection (donc $f(I) = J$).
Si f est dérivable en $a \in I$ avec $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ avec $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Preuve

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} &= \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \\
&= \frac{1}{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \\
&= \frac{1}{f'(a)}
\end{aligned}$$

Sans oublier que $y \in J \implies y = f(x)$ avec $x \in I$ car f est une bijection. ■

Remarque 1.1.3.4

Si $f : I \to J$ dérivable sur I telle que $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur J avec $\forall y \in J, \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Propriété 1.1.3.7

1. Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1,1[$.
   Et on a $\forall x \in]-1,1[, (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
3. argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ avec $\forall x \in]1,+\infty[, (\operatorname{argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
4. argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
5. argth est dérivable sur $]-1,1[$ avec $\forall x \in]-1,1[, (\operatorname{argth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Remarque 1.1.3.5

On a $\forall x \in]-1,1[, \arccos'(x) + \arcsin'(x) = 0$.
Donc $\arccos(x) + \arcsin(x) = C$ pour une certaine constante C.
En évaluant en $x = 0$, on trouve $C = \frac{\pi}{2}$.
Cette égalité est conservée pour $x \in \{-1, 1\}$.

Définition 1.1.3.4 *(Dérivée n-ième)*

Soient $n \in \mathbb{N}*$ et $f \in \mathbb{K}^I$.
f est dite $\mathcal{D}^n$ sur I lorsque f est n-fois dérivable sur I, et on note la dérivée n-ième de f par $f^{(n)}$
On note $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{K}^I$ n-fois dérivables sur I.

Remarque 1.1.3.6

Il est important de noter que la notation de la composée n-ième $(f \circ f \circ \cdots \circ f)$ a la même notation que la dérivée n-ième. Il faut donc faire attention au contexte !

Propriété 1.1.3.8 *(Formule de Leibniz)*

Soient $f, g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.

Formule clé

$$f \cdot g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}) \text{ avec}$$
$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Preuve

Nous allons procéder à la démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : Pour $n = 1$, la formule de Leibniz est donnée par la propriété des opérations sur les fonctions dérivables, qui stipule que $(fg)' = f'g + fg'$. La formule est donc vérifiée pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons supposer que la propriété est vraie pour ce rang n.
Soient $f, g \in \mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

On sait donc que $f, g \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{K})$ et que $(fg)^{(n)} \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{K})$, et $(f, g)' = fg' + f'g$.
On sait que $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{K})$, donc $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $g' \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$, donc $f' \cdot g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.
On sait aussi que $f' \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$, donc $f' \cdot g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.
Donc $fg' + f'g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(f^{(k+1)} \cdot g^{(n-k)} + f^{(k)} \cdot g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k+1)} \cdot g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{k-1} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} \\
&= \mathrm{C}_{n+1}^0 f^{(0)} \cdot g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k\right) f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} + \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} \cdot g^{(0)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

Ainsi, la formule de Leibniz est vérifiée pour $n + 1$.
Par le principe de récurrence, la formule de Leibniz est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Remarque 1.1.3.7

$f^{(0)} = f$ par convention.
On ne peut pas parler d'une fonction "zéro-fois dérivable", mais la notation $f^{(0)}$ est utile pour exprimer des formules générales, comme la formule de Leibniz.

Exemple 1.1.3.2

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.
3. Soient $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. On a $\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}, (x \mapsto \frac{1}{x-a})^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$.
4. Soient $k, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$.
   On a $\forall x \in \mathbb{R}, (x \mapsto (x-a)^k)^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-n)!}(x-a)^{k-n} & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$
5. $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{s} a_k x^k$ avec $s \in \mathbb{N}$.
   On a $\forall j \in \{0, \dots, s\}, P^{(j)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{s} a_k x^k\right)^{(j)}$
   $= \sum_{k=0}^{j-1} a_k \underbrace{(x^k)^{(j)}}_{=0} + \sum_{k=j}^{s} a_k \underbrace{\left(x^k\right)^{(j)}}_{=\frac{k!}{(k-j)!}x^{k-j}}$.
   Donc, $\forall j \in \{0, \dots, s\}, P^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{s} a_k \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j}$.
   Donc, pour tout $j \in \{0, \dots, s\}$, $P^{(j)}(0) = a_j \cdot \frac{j!}{1}$
   $\implies a_j = \frac{P^{(j)}(0)}{j!}$
6. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
   Ou encore, $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Remarque 1.1.3.8 ***(Développement limité)***

Les deux derniers exemples forment la base du développement limité des fonctions en un point, qui sera vu plus en détail dans un prochain chapitre. Le développement limité consiste, en principe, à approcher une fonction par un polynôme de degré n en un point donné, en utilisant les dérivées successives de la fonction à ce point. Il reste donc toujours une erreur pour des fonctions quelconques, mais les fonctions polynomiales sont parfaitement représentées par leur développement limité.

Définition 1.1.3.5

Soient $f \in \mathbb{K}^I$ et $a \in \mathbb{N}$.

- f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I lorsque $f^{(n)}$ existe et est continue sur I.
- On note l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I par $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsque f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On note l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I par $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$.

Remarque 1.1.3.9

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) \subsetneq \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}) \subsetneq \mathcal{C}^{n-1}(I, \mathbb{K})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Attention : il s'agit d'une inclusion stricte $\subsetneq \equiv \subset$! On note normalement les inclusions par $\subseteq$, mais dans ce cours, les inclusions non-strictes seront tout de même notées $\subset$.

2. $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}) = \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.

Exemple 1.1.3.3

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.
On a $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Donc f est de classe $\mathcal{D}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On a $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f'(0)$, donc f' est continue en 0.
Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
En revanche, on peut démontrer que $f \notin \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car f' n'est pas dérivable en 0.

Propriété 1.1.3.9

Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda f + g \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$

2. $f \cdot g \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$

Preuve

Preuves à refaire en tant qu'exercices. ■

Propriété 1.1.3.10

Soient $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^n(J,\mathbb{K})$ avec $f(I) \subset J$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$.

Preuve

Nous allons procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Pour $n = 0$, la propriété est vraie car la composition de fonctions continues est continue (voir chapitre sur la continuité).
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous allons supposer que la propriété est vraie pour ce rang n.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^{n+1}(J, \mathbb{K})$ avec $f(I) \subset J$.
Donc, on a f est $\mathcal{C}^1$ et g est $\mathcal{C}^1$.
Donc $g \circ f$ est dérivable sur I avec $(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$.
Donc f est C^{n+1}, ce qui implique que $f' \in \mathrm{C}^n$.
Donc, sachant que g est C^{n+1}, donc $g' \in \mathrm{C}^n$, et f est C^{n+1}, donc f' est C^n, par hypothèse de récurrence, on a $g' \circ f$ est C^n.
Donc, $f' \cdot (g' \circ f)$ est C^n.
Donc $g \circ f$ est C^{n+1}. ■

Propriété 1.1.3.11

Soit $f \in \mathrm{C}^n(I, \mathbb{K})$ telle que f ne s'annule pas sur I. Alors $\frac{1}{f} \in \mathrm{C}^n(I, \mathbb{K})$.

2 Étude globale

2.1 Extrémums locaux et globaux

Définition 2.2.1.6

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $x_0 \in I$.
Un extrémum de f en x_0 est une valeur $f(x_0)$ telle que f ne prend pas de valeur plus grande (respectivement, plus petite) que $f(x_0)$ à proximité de x_0. Plus simplement, un extremum est un point où la fonction atteint un "pic" (maximum) ou un "creux" (minimum).
On dit que x_0 est un minimum (respectivement, un maximum) local de f lorsque :

$$\exists r > 0, \forall x \in I \cap]x_0 - r, x_0 + r[, f(x) \geq f(x_0) \quad \text{(respectivement, } f(x) \leq f(x_0))$$

Si l'inégalité précédente est vraie pour tout $x \in I$, alors on dit que x_0 est un minimum (respectivement, un maximum) global de f.

Propriété 2.2.1.12

Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathring{I}$.
Si x_0 est un extrémum local de f, alors $f'(x_0) = 0$.
Le résultat n'est pas vrai pour les extrémités de l'intervalle I (Voir remarque ci-dessous).

Remarque 2.2.1.10

Il faut faire très attention à la condition $x_0 \in \mathring{I}$ (intérieur de I). En effet, si x_0 est un point frontière de I, la propriété peut ne pas être vraie. Par exemple, pour la fonction $f(x) = x^2$ définie sur l'intervalle $[0, 1]$, le point $x_0 = 0$ est un minimum global, et le point $x = 1$ est un maximum global, mais $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 2 \neq 0$.

2.2 Théorème de Rolle

Théorème 2.2.2.1 ***(Théorème de Rolle)***

Soit f une fonction de $[a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$ telle que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$.
Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve

- Si f est constante sur $[a,b]$, alors $\forall x \in]a,b[, f'(x) = 0$.
- Sinon, comme f est continue sur $[a,b]$, alors l'image de f sur $[a,b]$ est un segment. Donc f sera bornée et atteindra ses bornes.
  - Donc $\exists \alpha, \beta \in [a,b], \begin{cases} f(\alpha) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \\ f(\beta) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \end{cases}$
  - Si $\alpha, \beta \in \{a,b\}$, alors $f(a) = f(b) \implies f(\alpha) = f(\beta)$, donc f est constante sur $[a,b]$ (cas déjà traité).
  - Sinon, au moins un des deux (disons α, aucune perte de généralité) est dans $]a,b[$.
    - Donc, α est un extremum local de f.
    - Donc, d'après la propriété sur les extrémums locaux, $f'(\alpha) = 0$.
- Ainsi, dans tous les cas, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

$\blacksquare$

Remarque 2.2.2.11

Le théorème de Rolle n'est pas vrai pour les fonctions à valeurs complexes. Par exemple, la fonction $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{ix}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, et satisfait $f(0) = f(2\pi) = 1$. Cependant, sa dérivée $f'(x) = ie^{ix}$ n'est jamais nulle sur $]0, 2\pi[$.

Exercice 2.2.2.2 ***(Rolle itéré)***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sur I, telle que f prend la même valeur en $n+1$ points distincts de I. Alors $\exists c \in \mathring{I}$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
Solution :
Nous allons procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : Pour $n = 1$, la propriété est vraie d'après le théorème de Rolle.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons supposer que le résultat est vrai au rang n. Nous allons montrer qu'il est vrai au rang $n+1$.

- Soit f une fonction $I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, telle que f prend la même valeur en $n+2$ points distincts de I.
- Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n+2}$ ces $n+2$ points distincts de I.
- Donc, f est continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \cdots = f(\alpha_{n+2})$, c.à.d. $\forall i \in \{1, \ldots, n+1\}, f(\alpha_i) = f(\alpha_{i+1})$.
- Nous allons maintenant appliquer le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ pour $i \in \{1, \ldots, n+1\}$.
- D'après le théorème de Rolle, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, il existe $c_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $f'(c_i) = 0$.
- On sait que f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, donc $f' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$. Et comme f' prend la même valeur en $n+1$ points distincts de I, alors, par hypothèse de récurrence, il existe $c \in \overset{\circ}{I}$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$.
- Donc $\exists c \in \overset{\circ}{I}$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Ainsi, par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

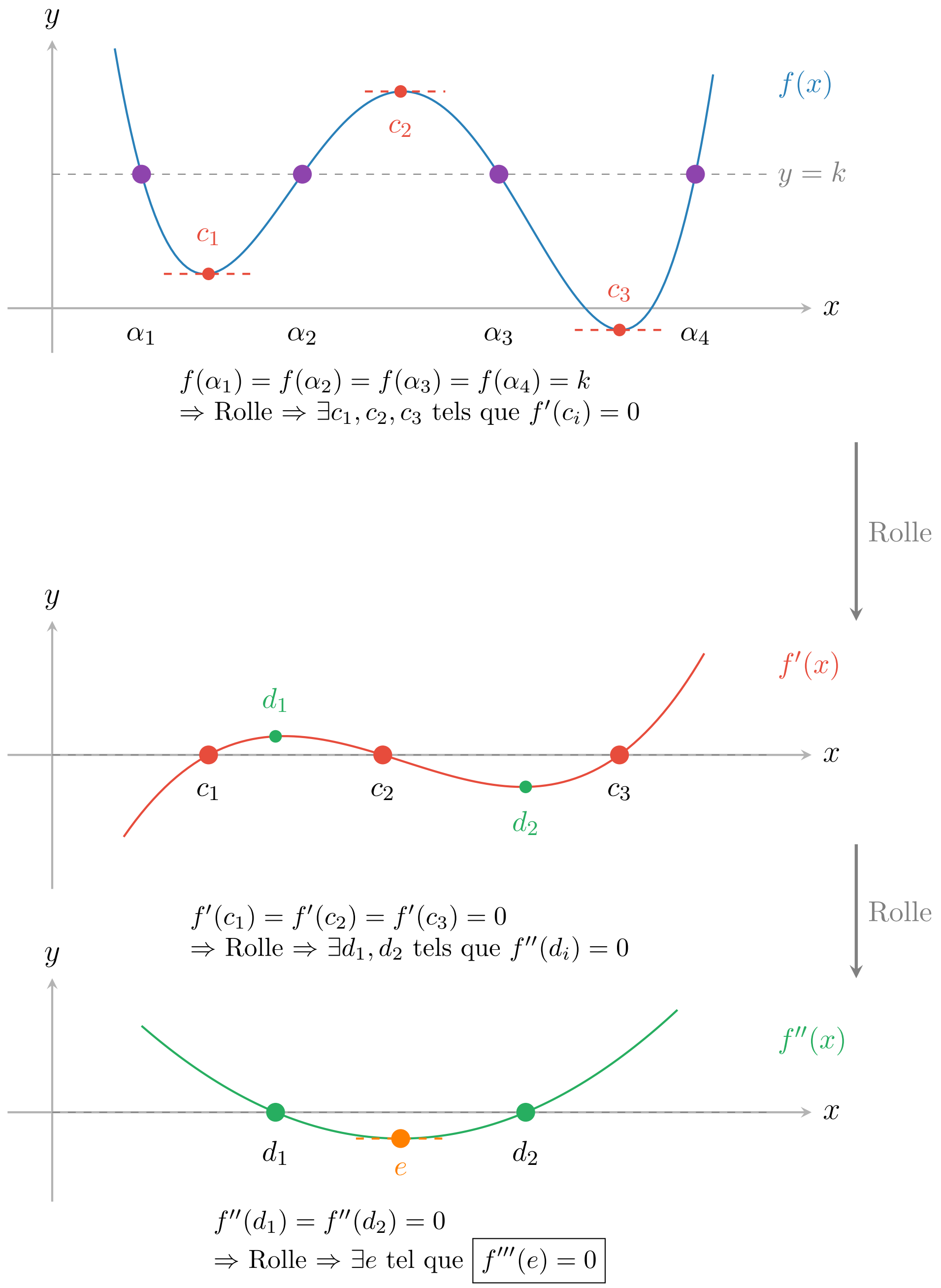


Figure 2.1 – Illustration de l'exercice : Application successive du théorème de Rolle. Si f prend la même valeur en $n + 1 = 4$ points, alors f' s'annule en 3 points, puis f'' s'annule en 2 points, et finalement $f^{(3)}$ s'annule en au moins 1 point.

Remarque 2.2.2.12

Le résultat ci-dessus peut être utilisé en tant que théorème ou propriété de cours.

Application 2.2.2.1

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\forall t \in [a,b], \exists c \in [a,b]$ tel que $f(t) = f(a) \cdot \frac{t-b}{a-b} + f(b) \cdot \frac{t-a}{b-a} + \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(c)$.

Preuve

Si $t \in \{a,b\}$, la propriété est triviale en prenant $c = t$.
Soit $t \in]a,b[$. On définit la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - f(a) \cdot \frac{x-b}{a-b} - f(b) \cdot \frac{x-a}{b-a} - \frac{(x-a)(x-b)}{2} A$ où A est une constante, avec $g(t) = 0$.

On a $\begin{cases} g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [a,b] \\ g(a) = g(b) = g(t) = 0 \end{cases}$ (sans oublier que t est **fixé**).

Donc, d'après l'exercice précédent, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g''(c) = 0$.
Après quelques calculs de dérivées, on trouve que $g''(x) = f''(x) - A$.
En remplaçant x par c, on obtient $g''(c) = f''(c) - A = 0$, donc $A = f''(c)$.
En remplaçant ensuite A dans l'expression de $g(x)$, puis en introduisant t, on obtient la formule souhaitée. ■

2.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 2.2.3.2 ***(Théorème des accroissements finis)***

Soit f une fonction de $[a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$ telle que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Preuve

Soient $x, y \in I$ avec $x < y$.
On pose $g : t \mapsto (f(x) - f(y))t - f(t)(x-y)$.

On a $\begin{cases} g \text{ est continue sur } [x,y] \\ g \text{ est dérivable sur }]x,y[\\ g(x) = g(y) \end{cases}$

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]x,y[$ tel que $g'(c) = 0$.
i.e. $(f(x) - f(y)) - f'(c)(x-y) = 0$. ■

Application 2.2.3.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que f' est bornée sur I
i.e. $\exists M \geq 0, \forall x \in I, |f'(x)| \leq M$.

Donc f **est lipschitzienne** sur I, i.e. $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Preuve

Soient $x, y \in I$ avec $x < y$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
Donc, $|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| \leq M|y - x|$.
Ainsi, $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. ■

Exemple 2.2.3.4

1. Les fonctions cos et sin sont des fonctions 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ car leurs dérivées sont bornées par 1.
2. La fonction arctg est aussi 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée est $\frac{1}{1+x^2}$, qui est bornée par 1.

Théorème 2.2.3.3

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

1. f est croissante sur $I \iff f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathring{I}$.
2. f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathring{I}$.
3. f est constante sur $I \iff f'(x) = 0, \forall x \in \mathring{I}$.

Preuve

$\Longrightarrow$ Soit $x \in \mathring{I}$, $\forall y \in I - \{x\}$.

- ▷ Comme f est croissante sur I, on a $f(y) - f(x) \geq 0$ si $y > x$ et $f(y) - f(x) \leq 0$ si $y < x$.
- ▷ Donc, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$.
- ▷ Donc, en passant à la limite $y \to x$, on a $f'(x) \geq 0$.
- ▷ Cela veut donc dire que $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0$.

$\Longleftarrow$ Soient $x, y \in I$ avec $x < y$.

- ▷ D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
- ▷ Donc, comme $f'(c) \geq 0$, on a $f(y) - f(x) \geq 0$.
- ▷ Ainsi, f est croissante sur I.

■

Théorème 2.2.3.4

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et strictement croissante sur I.

Cela équivaut à dire que : $\begin{cases} f' \geq 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} \\ A = \{x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0\} \text{ est d'intérieur vide.} \end{cases}$

Un exemple visuel est donné dans la figure 2.2.

Remarque 2.2.3.13

Une partie A d'un intervalle I est dite d'intérieur vide si elle ne contient pas d'intervalle non trivial, c.à.d. qu'il n'existe pas d'intervalle $[c, d] \subset I$ avec $c < d$ tel que $[c, d] \subset A$.

Preuve

- On suppose que f est strictement croissante sur I, mais que $A = \{x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0\}$ est d'intérieur non-vide. C'est-à-dire qu'il existe $[a, b] \subset \overset{\circ}{I}$ avec $a < b$ tel que $\forall x \in [a, b], f'(x) = 0$. Cela implique que f est constante sur $[a, b]$, et donc que f n'est pas strictement croissante sur I, ce qui contredit nos hypothèses. Ainsi, A est d'intérieur vide.
- Réciproquement, supposons que $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, que $A = \{x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0\}$ est d'intérieur vide et que f est croissante sur I.
  i.e. $\forall a < b \in I, f(a) \leq f(b)$.
  Si $\exists a < b \in I, f(a) = f(b)$, alors d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. Donc $c \in A$.
  Comme f est croissante sur I, on a $\forall x \in]a, b[, f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, donc $f(x) = f(a)$, i.e. $]a, b[\subset A$, ce qui contredit le fait que A est d'intérieur vide.
  Donc, $\forall a < b \in I, f(a) < f(b)$, i.e. f est strictement croissante sur I.

$\blacksquare$

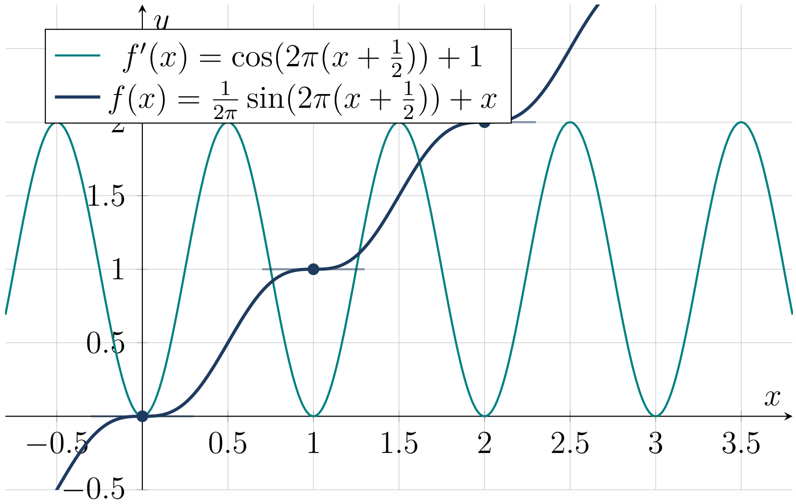


Figure 2.2 – Illustration d'une fonction g strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (en bleu) dont la dérivée $f'(x)$ (en vert) s'annule pourtant une infinité de fois (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Cela montre que $f' > 0$ n'est pas une condition nécessaire pour la stricte croissance, $f' \geq 0$ et ne s'annulant pas sur un intervalle suffit.

Théorème 2.2.3.5 ***(Inégalité des accroissements finis généralisée (IAF.G.))***

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, dérivables sur $\mathring{I}$, telles que $|f'| \leq g'$ sur $\mathring{I}$.
Alors, $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$.

Preuve

Soient $x < y \in I$ (sans perte de généralité).

On a $-g' \leq f' \leq g'$ sur $\mathring{I}$. Donc $\begin{cases} \forall t \in \mathring{I}, f'(t) + g'(t) \geq 0 \\ \forall t \in \mathring{I}, g'(t) - f'(t) \geq 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} f(x) - f(y) + g(x) - g(y) \geq 0 \\ g(x) - g(y) - (f(x) - f(y)) \geq 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} f(x) - f(y) \geq -(g(x) - g(y)) \\ f(x) - f(y) \leq g(x) - g(y) \end{cases}$

Donc, $|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$.
Donc, $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$. ∎

Conséquence 2.2.3.1

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$ telle que f' est bornée sur $\mathring{I}$, i.e. $\exists M \geq 0, \forall x \in \mathring{I}, |f'(x)| \leq M$. Alors, $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$.

Preuve

On prend $g : I \mapsto M \cdot x$ et on applique l'inégalité des accroissements finis généralisée.

- On a $g'(x) = M$.
- Donc, $|f'(x)| \leq M = g'(x)$.
- Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis généralisée, $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)| = M\,|x - y|$.

Ainsi, $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$. ■

Conséquence 2.2.3.2

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction continue sur I, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{I}$, alors :

$$\forall x, y \in \mathring{I} \text{ tels que } x < y, |f(y) - f(x)| \leq \sup_{t \in [x,y]} |f'(t)| \cdot (y - x).$$

Preuve

On sait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{I}$, donc f' est continue sur $\mathring{I}$, donc sur $[x, y]$.
On en déduit donc que f' est bornée sur $[x, y]$ et qu'elle atteint ses bornes (l'image d'un segment par une fonction continue est un segment).
On applique donc l'inégalité des accroissements finis généralisée. ■

Théorème 2.2.3.6 *(Prolongement de la dérivée)*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur } [a, b[\\ \lim_{x \to b^-} f'(x) = l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Alors f est dérivable en b avec $f'(b) = l$.

Preuve

Pour démontrer ce théorème, nous devons montrer que $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = l$.

- On sait que $\lim_{x \to b^-} f'(x) = l$.
- Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall x \in [c, b[\colon |f'(x) - l| < \varepsilon$.
- Soit $x \in [c, b[$, i.e. $x < b$.
- Comme f est continue sur $[x, b]$, dérivable sur $]x, b[$.
- Alors, en appliquant le théorème des accroissements finis, $\exists d \in]x, b[\colon f'(d) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$.
- On a $d \in]x, b[\implies d \in [c, b[$.

▶ Donc $|f'(d) - l| < \varepsilon \implies \left|\frac{f(x)-f(b)}{x-b} - l\right| < \varepsilon$.

On conclut que $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = l \in \mathbb{R}$, i.e. f est dérivable en b avec $f'(b) = l$. ■

Remarque 2.2.3.14

1. f est dérivable en $b \not\Longleftarrow \lim_{x\to b^-} f'(x) = f'(b)$ (Contre-exemple : $f : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$).
2. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que
$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a,b[\\ \lim_{x\to b^-} f'(x) = l \end{cases}$$
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Théorème 2.2.3.7 *(Généralisation du prolongement)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } [a,b[\\ \forall k \in [\![1,n]\!], \lim_{x\to b^-} f^{(k)}(x) = l_k \in \mathbb{R} \end{cases}$$
Alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ avec $\forall k \in [\![1,n]\!] : f^{(k)}(b) = l_k$.
La démonstration de ce théorème se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.2.3.3

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0 \quad, x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution :

- ▶ On a f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
- ▶ On a $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$.
- ▶ Donc f est continue en 0.
- ▶ **Nous allons montrer que $f^{(n)}$ admet une limite finie en 0.**
  - ▷ En faisant quelques dérivations, on remarque que :
  - ▷ $n = 1, f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$.
  - ▷ $n = 2, f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$.
  - ▷ Nous allons donc montrer que $\forall n \geq 1, \exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \neq 0, f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}}$ avec $d^\circ P_n = 3n$.
    — Preuve par récurrence sur n.

— Initialisation : $n = 1$, $P_1(X) = 2X^3$ avec $d°P_1 = 3$.
— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang n.
— (Calculs...)
— On trouve $f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{-1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x}) + \frac{2}{x^3}P_n(\frac{1}{x})\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ avec $P_{n+1}(x) = \underbrace{2x^3P_n(x)}_{d°=3n+3} - \underbrace{x^2P_n'(x)}_{d°=3n+1}$.
— Donc $d°P_{n+1} = 3(n+1)$.

▷ Donc on a $\forall n \geq 1, \forall x \neq 0, f^(n)(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$.

▷ Alors $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{t\to\infty} P_n(t)e^{-t^2}$.

▶ Donc $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0 \in \mathbb{R}$, et ce, pour tout $n \geq 1$.

On conclut que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

Théorème 2.2.3.8 *(Formule de Taylor-Lagrange)*

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \cap D^{n+1}(\mathring{I}, \mathbb{R})$.
Alors $\forall a \in I, \forall x \neq a, \exists c \in]\min(a,x), \max(a,x)[$ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Remarque 2.2.3.15

Pour $n = 0$, on retrouve la formule du théorème des accroissements finis.

Preuve

▶ Soient $a \in I, x \neq a$.

▶ On pose $g : t \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t)(x-t)^k - A(x-t)^{n+1}$ où A est une constante telle que $g(a) = 0$.

▷ Donc g est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$, avec $g(x) = g(a) = 0$ (g étant définie pour t dans I).

▷ Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]\min(a,x), \max(a,x)[$ tel que $g'(c) = 0$.

▷ Or nous savons que $g'(t) = -f^{(n+1)}(t)(x-t)^n - (n+1)A(x-t)^n$.

▷ Donc $g'(c) = 0 \iff A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

▶ En remplaçant A dans l'expression de $g(a) = 0$, on obtient la formule de Taylor-Lagrange.

■

Cette méthode utilisée dans les démonstrations précédentes doit devenir un quasi-réflexe pour la résolution d'exercices où des dérivées dépendent d'un certain c existant dans [...].

Conséquence 2.2.3.3 ***(Inégalité de Taylor-Lagrange)***

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.
On a, pour tout $x \neq a \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k \right| \leq \sup_{t \in [a,x] \text{ ou } t \in [x,a]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

La démonstration se fait en utilisant la formule de Taylor-Lagrange, et en utilisant le fait que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, donc $\left| f^{(n+1)}(c) \right| \leq \sup_{t \in [a,x] \text{ ou } t \in [x,a]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$.

3 Convexité

Définition 3.3.0.7

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ telle que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $\mathring{I} \neq \emptyset$.

1. f est dite **convexe** sur I si et seulement si $\forall t \in [0,1], \forall x, y \in I$

$$f(tx + (1-t)y \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

2. f est dite **concave** si et seulement si $-f$ est concave, donc si et seulement si $\forall t \in [0,1], \forall x, y \in I$

$$f(tx + (1-t)y \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Remarque 3.3.0.16 *(Changement de variable du roi)*

Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$.

On pose $\varphi : \begin{cases} [0,1] \to [x,y] \\ t \mapsto tx + (1-t)y \end{cases}$

On remarque que φ est continue, dérivable et $\varphi'(t) = x - y < 0$.
Donc φ est bijective de $[0,1]$ vers $[x,y]$.

$$\implies \begin{cases} \forall t \in [0,1], \varphi(t) \in [x,y] \\ \forall a \in [x,y], \exists! t \in [0,1] : a = \varphi(t) \end{cases}$$

Ce changement de variable est utile pour prouver des propriétés sur les fonctions convexes/concaves. Il est appelé **changement de variable du roi**. Il est aussi utilisé dans l'intégration ($I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-u)du$). Le **changement de variable de la reine** n'a pas été abordé en détail pendant le cours mais reste intéressant à étudier.

Propriété 3.3.0.13 *(Inégalité de Jensen)*

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ convexe sur I.

Alors, $\forall n \geq 1, \begin{cases} \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1] \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \\ \forall x_1, \ldots, x_n \in I \end{cases}$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \cdot f(x_i)$$

Preuve

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$, on a $f(x) \leq f(x)$. Pour $n = 2$, on obtient la définition de la convexité.
- Soit $n \geq 1$, supposons que le résultat est vrai au rang n.
  - Soient $\begin{cases} \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1] \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \\ x_1, \dots, x_{n+1} \in I \end{cases}$
  - On pose $t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \implies \lambda_{n+1} = 1 - t$
  - Dans le cas où $t = 0$, alors $\lambda_{n+1} = 1, \forall n \in [\![1, n]\!], d_i = 0$.
  - Cela implique que $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f(x_{n+1}) \leq f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$

■

Propriété 3.3.0.14

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.

$$f \text{ est convexe sur } I \iff \forall a \in I : \varphi_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases} \quad \text{est croissante.}$$

Preuve

$\rightarrow$ On commence la démonstration dans le sens direct.

- Il faudra distinguer entre trois cas, sachant qu'il y a trois paramètres, donc trois positions relatives possibles.
- Les cas à distinguer seront donc : $x < a < y$, $a < x < y$, et $x < y < a$.
- Dans ce cours, nous ne traiterons que le cas $x < a < y$, les deux autres étant similaires.
  - Soient $x, y \in I$ tels que $x < a < y$.
  - Donc $a \in]x, y[$.
  - Donc $\exists t \in]0,1[: a = tx + (1-t)y$.
  - Donc $\exists t \in]0,1[: t \cdot f(a) + (1-t) \cdot f(a) = f(a)$.
  - Donc $\exists t \in]0,1[: t \cdot f(a) + (1-t) \cdot f(a) = f(tx + (1-t)y)$.
  - Par convexité de f, on a donc $\exists t \in]0,1[: t \cdot f(a) + (1-t) \cdot f(a) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.
  - Donc $t(f(a) - f(x)) \leq (1-t)(f(y) - f(a))$.

- $\triangleright$ Donc $f(a) - f(x) \leq \frac{1-t}{t}(f(y) - f(a))$.
- $\triangleright$ On a $a - x = \cdots = (1-t)(y-x)$ et $y - a = t(y-x)$.
- $\triangleright$ Donc $\frac{1-t}{t} = \frac{a-x}{y-a}$.
- $\triangleright$ Donc $f(a) - f(x) \leq \frac{a-x}{y-a}(f(y) - f(a))$.
- $\triangleright$ Donc $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$.
- $\triangleright$ Donc $\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y)$.
- $\triangleright$ Donc, φ_a est croissante.

$\leftarrow$ On commence la démonstration dans le sens réciproque.

- ▶ On suppose que $\forall a \in I, \varphi_a$ est croissante.
  - $\triangleright$ Soient $x, y \in I, t \in [0,1]$ tels que $x \neq y$.
  - $\triangleright$ On prendra par exemple $x < y$ sans perte de généralité.
  - $\triangleright$ On pose $a = tx + (1-t)y \in]x, y[$.
  - $\triangleright$ Donc, par hypothèse, on a $\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y)$.
  - $\triangleright$ Donc, $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$.
  - $\triangleright$ Donc $f(a) - f(x) \leq \underbrace{\frac{a-x}{y-a}}_{=\frac{1-t}{t}}(f(y) - f(a))$ (quelques cas particuliers $t = 0 \ldots$ ont été omis pour simplifier la démonstration).
  - $\triangleright$ Donc $t(f(a) - f(x)) \leq (1-t)(f(y) - f(a))$.
  - $\triangleright$ Donc $tf(a) + (1-t)f(a) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.
  - $\triangleright$ On en déduit donc que f est convexe sur I.
- ▶ Ainsi, on a montré l'équivalence.

■

Propriété 3.3.0.15

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction convexe.
$\forall a < b < c \in I, f$ est dérivable à droite et à gauche en b avec $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b) \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$

Preuve

- ▶ On pose $\psi_1 : \begin{cases}]a, b[\to \mathbb{R} \\ u \mapsto \frac{f(u)-f(b)}{u-b} \end{cases}$.
- ▶ On pose $\psi_2 : \begin{cases}]b, c[\to \mathbb{R} \\ v \mapsto \frac{f(v)-f(b)}{v-b} \end{cases}$.

- On peut aussi considérer une fonction $\varphi : \begin{cases} I \setminus \{b\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \end{cases}$, puis considérer ses restrictions à $]a, b[$ et $]b, c[$.
- On sait que ψ_1 est croissante.
- On peut donc montrer que ψ_1 est majorée et qu'elle admet donc une limite réelle et finie en b.
- En réalité, ψ_1 est majorée par $\varphi_b(v)$, en fixant $v \in]b, c[$.
- Donc, $\lim_{u \to b^-} \psi_1(u)$ existe et est finie. ψ_1 admet une limite finie à gauche en b.
- On a donc $\psi_1(a) \leq \lim_{u \to b^-} \psi_1(u) \leq \psi_1(v)$.
- Donc f est dérivable à gauche avec $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \leq \frac{f(v)-f(b)}{v-b}$.
- Donc $\forall v \in]b, c[$, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) \leq \psi_2(v)$.
- On sait aussi que ψ_2 est croissante.
- Elle est minorée par $f'_g(b)$. Donc ψ_2 admet une limite finie à droite en b.
- Donc, $\forall u \in]a, b[$, $f'_g(b) \leq f'_d(b) \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$.
- Ainsi, on a montré que f est dérivable à droite et à gauche en b avec $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b) \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

■

Conséquence 3.3.0.4

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction convexe sur I.
Alors, f est continue sur $\mathring{I}$.

Preuve

■

Conséquence 3.3.0.5

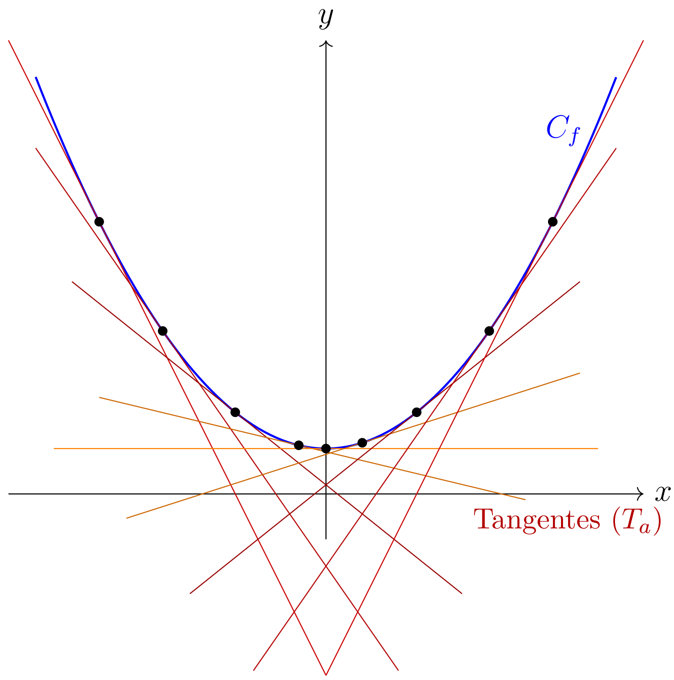
Soit $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$.

$$f \text{ est convexe sur } I \iff f'' \geq 0 \text{ sur } \mathring{I}$$

Propriété 3.3.0.16

Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$.

$$f \text{ est convexe sur } I \iff C_f \text{ est au-dessus de ses tangentes sur } I$$



Remarque 3.3.0.17

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est donnée par : $(T_a) : y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Preuve

On cherche à démontrer que pour tout $a \in I$, et que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Démonstration dans le sens direct :

- Soit $a \in I$.
- Soit $x \in I$, avec $x \neq a$.
- On pose $\varphi_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \end{cases}$ croissante (car f est convexe).
- Donc, si $x < a$, on a $\varphi_a(x) \leq \lim_{t \to a^-} \varphi_a(t) = f'_g(a) \leq f'_d(a)$.
- Donc, si $x < a$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f'_g(a)$ et $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f'_d(a)$.
- Donc, si $x < a$, on a $f(x) - f(a) \geq f'_g(a)(x - a)$ et $f(x) - f(a) \geq f'_d(a)(x - a)$.
- Donc, si $x < a$, on a $f(x) \geq f(a) + f'_g(a)(x - a)$ et $f(x) \geq f(a) + f'_d(a)(x - a)$ (1). On en déduit que la courbe est au-dessus de la demi-tangente à droite et à gauche en a pour $x < a$.
- On répète le raisonnement pour le cas $x > a$.
- Ainsi, on a montré que pour tout $a \in I$, et que pour tout $x \in I$, la courbe de f est au-dessus de ses demi-tangentes en a.

Démonstration dans le sens réciproque à refaire.

■