

Chapitre VI : Limites et continuité

Samy Youssoufine

24 décembre 2025

Table des matières

1 Définitions de base	2
1.1 Adhérence	2
1.2 Voisinage	3
1.3 Limite d'une fonction	4
2 Propriétés	9
2.1 Caractérisation séquentielle de la limite	9
2.2 Caractérisation séquentielle de la continuité	10
2.3 Propriétés diverses	10
2.4 Théorème d'encadrement	13
2.5 Composée et continuité	14
2.6 Fonctions k -Lipschitziennes	14

1 Définitions de base

1.1 Adhérence

Définition 1.1.1.1 (*Adhérence*)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On note \bar{I} l'intervalle fermé contenant I et ayant les mêmes bornes que I . \bar{I} est appelé l'adhérence de I .

Exemple 1.1.1.1

1. L'adhérence de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ est l'intervalle fermé $[0, 1]$. On note $\overline{]0, 1[} = [0, 1]$.
2. L'adhérence de l'intervalle $]0, +\infty[$ est l'intervalle $[0, +\infty[$. On note $\overline{]0, +\infty[} = [0, +\infty[$.
3. $\overline{]-\infty, 1[} =]-\infty, 1]$.
4. L'adhérence de l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ est lui-même : $\overline{]-\infty, +\infty[} =]-\infty, +\infty[$.
5. L'adhérence de l'intervalle fermé $[a, b]$ est lui-même : $\overline{[a, b]} = [a, b]$. On peut écrire I fermé $\implies \bar{I} = I$.

Remarque 1.1.1.1

On a $x_0 \in \bar{I} \iff \exists (a_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \rightarrow x_0$.

Q Preuve

- \Rightarrow
- Si $x_0 \in I$, on peut définir la suite constante $a_n = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, $a_n \rightarrow x_0$ et $a_n \in I$ pour tout n .
 - Dans le cas contraire, x_0 est une borne de I . Alors, d'après la caractérisation séquentielle des bornes sup./inf., il existe une suite $(a_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \rightarrow x_0$.
- \Leftarrow Soient $\alpha = \sup I$ et $\beta = \inf I$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, \beta \leq a_n \leq \alpha$. Par passage à la limite, on obtient $\beta \leq x_0 \leq \alpha$, donc $x_0 \in \bar{I}$. Si les inégalités sont strictes, alors elles deviennent larges par passage à la limite.

■

1.2 Voisinage

□ Définition 1.1.2.2 (Voisinage)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage de a toute partie de \mathbb{R} contenant un intervalle de type $]a - r, a + r[$, où $r > 0$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a .

● Remarque 1.1.2.2

- \mathbb{R} est un voisinage de tout réel a .
- $\mathcal{V}(a)$ est un ensemble de parties (“ensemble d’ensembles”) de \mathbb{R} . On dit qu’un ensemble $V \in \mathcal{V}(a)$ si et seulement si V est un voisinage de a .
- On appelle voisinage de $+\infty$ toute partie de \mathbb{R} contenant un intervalle de type $[M, +\infty[$, où $M \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{V}(+\infty)$ l’ensemble des voisinages de $+\infty$.
- On appelle voisinage de $-\infty$ toute partie de \mathbb{R} contenant un intervalle de type $] - \infty, M[$, où $M \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{V}(-\infty)$ l’ensemble des voisinages de $-\infty$.

● Remarque 1.1.2.3

- Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $V \in \mathcal{V}(a) \iff \exists r > 0$ telle que $B(a, r) \subseteq V$, où $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\}$ est une “boule ouverte”.
- Si $a \in \mathbb{C}$, on a $V \in \mathcal{V}(a) \iff \exists r > 0$ telle que $B(a, r) \subseteq V$, où $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ est un disque.

Exemple 1.1.2.2

1. $[0, +\infty[\in \mathcal{V}(1)$, mais $[0, +\infty[\notin \mathcal{V}(0)$.
2. $\mathbb{R}^* \in \mathcal{V}(+\infty)$ et $\mathbb{R}^* \in \mathcal{V}(-\infty)$.

Dans le suite de ce chapitre, et sauf mention contraire, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ désignera une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} **non vide**. On peut noter $f \in \mathbb{R}^I$. On utilise la notation : $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

1.3 Limite d'une fonction

Définition 1.1.3.3

1. **Limite finie en un point fini** : Soit $a \in \bar{I}$. On dit que $f \rightarrow l$ lorsque $x \rightarrow a$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

2. **Limite infinie (+) en un point fini** : Soit $a \in \bar{I}$. On dit que $f \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow a$ si et seulement si :

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - a| < \delta \implies f(x) > M.$$

3. **Limite infinie (-) en un point fini** : Soit $a \in \bar{I}$. On dit que $f \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow a$ si et seulement si :

$$\forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - a| < \delta \implies f(x) < M.$$

Si $I = [\alpha, +\infty[$

4. On dit que $f \rightarrow l$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I : x > B \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

5. **Limite infinie (+)** : On dit que $f \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I : x > B \implies f(x) > A.$$

6. **Limite infinie (-)** : De même pour $f \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

 **Remarque 1.1.3.4**

On peut généraliser les définitions précédentes en une unique définition en utilisant la notion du voisinage.

Soient $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $l \in \bar{\mathbb{R}}$.

On dit que f tend vers l en a lorsque :

$$\forall W \in \mathcal{V}(l), \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I, x \in V \implies f(x) \in W \iff f(I \cap V) \subseteq W$$

 **Exemple 1.1.3.3**

Pour $a = -\infty$ et $I =]-\infty, \beta]$, $l = +\infty$, on a :

$$\forall W =]A, +\infty[\in \mathcal{V}(+\infty) \quad (A > 0)$$

$$\exists V =]-\infty, B[\in \mathcal{V}(-\infty) \quad (B > 0)$$

$$\forall x \in I, x \in V \implies f(x) \in W \iff x < B \implies f(x) > A.$$

Cela revient (équivalence) à démontrer que

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x < B \implies f(x) > A.$$

Donc $f \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$.

 **Propriété 1.1.3.1 (*Unicité de la limite*)**

Soient $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f tend vers l en a , alors l est unique.

 **Définition 1.1.3.4**

l est appelé la **limite** de f en a . On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\lim_a f = l$$

$$f \xrightarrow{a} l$$

Q Preuve

Supposons que $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$. Supposons que $f \xrightarrow[a]{} l$ et $f \xrightarrow[a]{} l'$.

On a donc $\forall \varepsilon > 0$, $\begin{cases} \exists \eta_1 > 0, \forall x \in I : |x - a| < \eta_1 \implies |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists \eta_2 > 0, \forall x \in I : |x - a| < \eta_2 \implies |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$
Soit $x \in I$ tel que $|x - a| < \eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. On a donc :

$$\begin{aligned} |l - l'| &= |l - f(x) + f(x) - l'| \\ &\leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Cela veut donc dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, |l - l'| < \varepsilon$$

Possible uniquement si $l - l' = 0 \iff l = l'$. D'où l'unicité de la limite.
CQFD. ■

E Définition 1.1.3.5 (*Limites à gauche et à droite*)

Soient $a \in \bar{I}$ et $f \in \mathbb{R}^I$. On appelle la limite à droite de f en a la limite de la fonction f lorsque x tend vers a par des valeurs supérieures à a , ou encore la limite de la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ (qu'on peut noter $f|_{I \cap]a, +\infty[}$) en a . On la note :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ ou } \lim_{>} f(x)$$

On appelle la limite à gauche de f en a la limite de la fonction f lorsque x tend vers a par des valeurs inférieures à a , ou encore la limite de la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ (qu'on peut noter $f|_{I \cap]-\infty, a[}$) en a . On la note :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ ou } \lim_{<} f(x)$$

Remarque 1.1.3.5

Il n'est pas incorrect de considérer la limite de la fonction restreinte à $[a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a]$) en a (intervalle fermé). Cela s'explique par le fait que a appartient à l'adhérence de $I \cap]a, +\infty[$ (resp. $I \cap]-\infty, a[$).

On dit que f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à droite et à gauche en a , et que ces deux limites sont égales. On peut noter cette limite par :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

 **Remarque 1.1.3.6**

On peut noter la restriction d'une fonction à un ensemble A par $f|_A$.

 **Définition 1.1.3.6 (Continuité)**

Soit $a \in I$. On dit que f est **continue en a** lorsque f admet une limite réelle en a et que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

On peut aussi écrire $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

 **Définition 1.1.3.7**

Soit $a \in \overset{\circ}{I}$. On dit que f est **continue à droite en a** lorsque $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$. On dit que f est **continue à gauche en a** lorsque $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a .

 **Définition 1.1.3.8**

On dit que f est **continue sur I** si et seulement si f est continue en tout point de I . Autrement dit :

$$\forall a \in I, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I vers \mathbb{R} .

 **Exemple 1.1.3.4**

1. Les polynômes sont continus sur \mathbb{R} .
2. Les fonctions \sin, \cos, \exp sont continues sur \mathbb{R} .
3. La fonction $f : x \mapsto E(x)$ est continue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Démonstration :

 **Exercice 1.1.3.1**

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto E(x) \cdot \sin(\pi x) \end{cases}$; Montrer que f est continue en tout point de \mathbb{R} .

Solution :

A compléter

 **Définition 1.1.3.9 (Prolongement par continuité)**

Soient $a \in \bar{I}$ et $f \in \mathbb{R}^{I-a}$. On dit que f **admet un prolongement par continuité** ou qu'elle est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite

A compléter

finie en a . Dans ce cas, on peut définir une fonction $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}$$

La fonction \tilde{f} est appelée le **prolongement par continuité de f en a** , et \tilde{f} est continue en a .

Exemple 1.1.3.5

$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{cases}$ admet un prolongement par continuité en 0. En effet,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. On peut donc définir $\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$, qui est continue en 0.

2 Propriétés

2.1 Caractérisation séquentielle de la limite

★ Théorème 2.2.1.1 (*Caractérisation séquentielle de la limite*)

Soient $a \in \bar{I} \cup \pm\infty$ et $l \in \bar{\mathbb{R}}$. On a :

🔑 Formule clé

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \forall (u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, u_n \rightarrow a \implies f(u_n) \rightarrow l$$

🔍 Preuve

$$\implies f \underset{a}{\rightarrow} l \quad (a \in \bar{I}, l \in \mathbb{R})$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Soit $(u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \rightarrow a$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - a| < \eta$$

$$\text{Donc, } \forall n \geq n_0, |f(u_n) - l| < \varepsilon$$

$$\implies f(u_n) \rightarrow l.$$

$$\iff \text{Supposons que } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq l.$$

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x_\eta \in I, |x_\eta - a| < \eta \text{ et } |f(x_\eta) - l| \geq \varepsilon.$$

$$\text{Pour } \eta = \frac{1}{n+1}, \exists (x_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \text{ telle que } |x_n - a| < \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - l| \geq \varepsilon.$$

Donc, $x_n \rightarrow a$ mais $f(x_n) \not\rightarrow l$. Contradiction. Donc, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

► Raisonnement analogue pour les autres cas de a et l .



2.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

★ Théorème 2.2.2.2 (*Caractérisation séquentielle de la continuité*)

Soient $a \in I$. La fonction f est continue en a si et seulement si :

🔑 Formule clé

$$\forall (u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, u_n \rightarrow a \implies f(u_n) \rightarrow f(a)$$

La preuve de ce théorème est analogue à celle du théorème précédent.

2.3 Propriétés diverses

✓ Propriété 2.2.3.2 (*Bornitude locale*)

Soit $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

Si f admet une limite réelle en a , alors f est bornée dans un voisinage de a .

🔍 Preuve

Supposons que $f \xrightarrow[a]{} l$ avec $l \in \mathbb{R}$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I \cap V, |f(x) - l| < \varepsilon$

Pour $\varepsilon = 1$, on a $\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I \cap V, |f(x) - l| < 1$

$\implies \forall x \in I \cap V, l - 1 < f(x) < l + 1$

Donc, f est bornée dans le voisinage V de a . CQFD. ■

✓ Propriété 2.2.3.3 (*Valeurs absolues*)

Soient $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $l \in \bar{\mathbb{R}}$.

$$1. |f| \xrightarrow[a]{} 0 \iff f \xrightarrow[a]{} 0.$$

$$2. f \xrightarrow[a]{} l \implies |f| \xrightarrow[a]{} |l|.$$

La réciproque de cette dernière est fausse (démonstration triviale par contre-exemple).

Q Preuve

\Leftarrow Supposons que $|f| \xrightarrow{a} 0$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I \cap V, |f(x)| - 0| < \varepsilon$$

$$\implies \forall x \in I \cap V, |f(x)| < \varepsilon$$

$$\implies \forall x \in I \cap V, |f(x) - 0| < \varepsilon$$

Donc, $f \xrightarrow{a} 0$.

\Leftarrow Supposons que $f \xrightarrow{a} 0$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I \cap V, |f(x) - 0| < \varepsilon$$

$$\implies \forall x \in I \cap V, |f(x)| < \varepsilon$$

$$\implies \forall x \in I \cap V, |f(x) - 0| < \varepsilon$$

Donc, $|f| \xrightarrow{a} 0$.

2. On utilise la propriété stipulant que $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$ (inégalité triangulaire).



✓ Propriété 2.2.3.4 (*Bornitude et produit*)

Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.



Formule clé

$$\begin{cases} g \text{ est bornée au } \mathcal{V}(a) \\ f \xrightarrow{a} 0 \end{cases} \implies (f \cdot g) \xrightarrow{a} 0$$

Q Preuve

g est bornée au $\mathcal{V}(a) \implies \exists M > 0, \exists V_1 \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I \cap V_1, |g(x)| \leq M$

$f \xrightarrow{a} 0 \implies \forall \varepsilon > 0, \exists V_2 \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I \cap V_2, |f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$

Soit $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a)$

$\forall x \in I \cap V, |(f \cdot g)(x) - 0| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$

Donc, $(f \cdot g) \xrightarrow{a} 0$. CQFD.



✓ Propriété 2.2.3.5

Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.



Formule clé

$$\begin{cases} |f - l| \leq |g| \text{ au } \mathcal{V}(a) \\ g \xrightarrow[a]{} 0 \end{cases} \implies f \xrightarrow[a]{} l$$

Preuve

- On a $\exists V_1 \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I \cap V_1, |f(x) - l| \leq |g(x)|$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists V_2 \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I \cap V_2, |g(x) - 0| < \varepsilon$.
- On pose $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a)$.
- $\forall x \in I \cap V, |f(x) - l| \leq |g(x)| < \varepsilon$.
- Donc, $f \xrightarrow[a]{} l$. CQFD.

■

 Propriété 2.2.3.6 (*Bornitude et limite*)

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, avec $\alpha < l < \beta$, alors f est comprise entre α et β dans un voisinage de a . On peut écrire
 $\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I \cap V, \alpha < f(x) < \beta$.

Preuve

On a (globalement) $\alpha < l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon < \beta$.

Soit $\varepsilon = \min(l - \alpha, \beta - l) > 0$.

$$\begin{aligned} \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I \cap V, |f(x) - l| &< \varepsilon \\ \implies \forall x \in I \cap V, -\varepsilon &< f(x) - l < \varepsilon \\ \implies \forall x \in I \cap V, l - \varepsilon &< f(x) < l + \varepsilon \\ \implies \forall x \in I \cap V, \alpha &< f(x) < \beta. \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

■

Conséquence 2.2.3.1

Si $f \xrightarrow[a]{} l$ avec $l > 0$, alors $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in I \cap V, f(x) > \frac{l}{2} > 0$.

✓ Propriété 2.2.3.7

Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$, $(l, l') \in \mathbb{R}^2$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

1. $\begin{cases} f \xrightarrow[a]{} l \\ g \xrightarrow[a]{} l' \end{cases} \implies \begin{cases} (f+g) \xrightarrow[a]{} (l+l') \\ (f \cdot g) \xrightarrow[a]{} (l \cdot l') \end{cases}$
2. Si $l \neq 0$, alors $\frac{1}{g} \xrightarrow[a]{} \frac{1}{l'}$. Donc $\frac{f}{g} \xrightarrow[a]{} \frac{l}{l'}$.

🔍 Preuve

À reprendre en tant qu'exercice.


→ Conséquence 2.2.3.2 (*Opération sur les fonctions continues*)

Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$ continues sur I .

1. a) $\forall a \in \mathbb{R}$, $f + \alpha g$ est continue sur I .
- b) fg est continue sur I .
2. Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I . On peut aussi en déduire que $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

2.4 Théorème d'encadrement

★ Théorème 2.2.4.3

Soient $f, g, h \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

🔑 Formule clé

$$\begin{cases} f \leq g \leq h \text{ au } \mathcal{V}(a) \\ f \xrightarrow[a]{} l \\ h \xrightarrow[a]{} l \end{cases} \implies g \xrightarrow[a]{} l$$

🔍 Preuve

- On a (i) : $\exists V_1 \in \mathcal{V}(a)$, $\forall x \in I \cap V_1$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (première hypothèse).
- On a (ii) : $\forall \varepsilon > 0$, {

faut
reco-
pier...

✓ **Propriété 2.2.4.8 (Limite et inégalité)**

Soient $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $f, g \in \mathbb{R}^I$ telles que $f \leq g$ sur un $\mathcal{V}(a)$.

1. Si $f \xrightarrow[a]{} +\infty$, alors $g \xrightarrow[a]{} +\infty$.
2. Si $g \xrightarrow[a]{} -\infty$, alors $f \xrightarrow[a]{} -\infty$.

IH **Exercice 2.2.4.2**

Soit $f \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} = l \in \bar{\mathbb{R}}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = l$.

 A faire pour le
21/11

2.5 Composée et continuité

✓ **Propriété 2.2.5.9 (Composée de fonctions continues)**

Soient I, J des intervalles de \mathbb{R} tels que $\overset{\circ}{I} \cap \overset{\circ}{J} \neq \emptyset$, $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ continues et tel que $g(J) \subseteq I$. Soient $a \in J \cup \{\pm\infty\}$ et $b \in I \cup \{\pm\infty\}$ et $l \in \bar{\mathbb{R}}$.

1. Si $f \xrightarrow[b]{} l$ et $g \xrightarrow[a]{} b$, alors $(f \circ g) \xrightarrow[a]{} l$.

Q **Preuve**

■

2.6 Fonctions k -Lipschitziennes

D **Définition 2.2.6.10**

Soient I un intervalle de \mathbb{R} tel que $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$ et $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que $f \in \mathbb{R}^I$ est **k -Lipschitzienne** si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Si $k \in [0, 1[$, on dit que f est **k -contractante**.

✓ Propriété 2.2.6.10

Toute fonction k -Lipschitzienne est continue sur I .

🔍 Preuve

- ▶ Soit $a \in I$.
- ▶ On a $\forall x \in I, |f(x) - f(a)| \leq k|x - a| \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow a$.
- ▶ Donc, f est continue en a . CQFD.


💡 Exercice 2.2.6.3

Soit A une partie non-vide de \mathbb{R} . On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \inf\{|x - y|, y \in A\} = d(x, A) \end{cases}$

Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

Solution :

Le but est de montrer que cette fonction est 1-Lipschitzienne. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall a \in A, f(x) &= \inf_{z \in A} |x - z| \leq |x - a| \\ &\leq |x - y + y - a| \\ \forall a \in A, f(x) &\leq |x - y| + |y - a| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies \forall a \in A, f(x) - |x - y| \leq |y - a| \\ &\implies f(x) - |x - y| \text{ est un minorant de } \{|y - a|, a \in A\} \\ &\implies f(x) - |x - y| \leq \inf\{|y - a|, a \in A\} = f(y) \\ &\implies f(x) - f(y) \leq |x - y| \end{aligned}$$

En échangeant x et y , on obtient aussi : $f(y) - f(x) \leq |y - x| = |x - y|$ En combinant les deux inégalités, on obtient : $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ Donc, f est 1-Lipschitzienne, donc continue sur \mathbb{R} .