Chapitre VI : Limites et continuité

Samy Youssoufine

11 décembre 2025

UM6P University Mohammed VI Polytechnic
EMINES School of Industrial Management

Table des matières

1 Définitions de base

1.1 Adhérence

Définition 1.1.1.1 *(Adhérence)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\bar{\mathrm{I}}$ l'intervalle fermé contenant I et ayant les mêmes bornes que I. $\bar{\mathrm{I}}$ est appelé l'adhérence de I.

Exemple 1.1.1.1

1. L'adhérence de l'intervalle ouvert $]0,1[$ est l'intervalle fermé $[0,1]$. On note $\overline{]0,1[} = [0,1]$.
2. L'adhérence de l'intervalle $]0,+\infty[$ est l'intervalle $[0,+\infty[$. On note $\overline{]0,+\infty[} = [0,+\infty[$.
3. $\overline{]-\infty,1[} =]-\infty,1]$.
4. L'adhérence de l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ est lui-même : $\overline{]-\infty,+\infty[} =]-\infty,+\infty[$.
5. L'adhérence de l'intervalle fermé $[a,b]$ est lui-même : $\overline{[a,b]} = [a,b]$. On peut écrire I fermé $\implies \bar{\mathrm{I}} = \mathrm{I}$.

Remarque 1.1.1.1

On a $x_0 \in \bar{\mathrm{I}} \iff \exists (a_n)_n \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \to x_0$.

Preuve

$\Rightarrow$
- Si $x_0 \in \mathrm{I}$, on peut définir la suite constante $a_n = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, $a_n \to x_0$ et $a_n \in \mathrm{I}$ pour tout n.
- Dans le cas contraire, x_0 est une borne de I. Alors, d'après la caractérisation séquentielle des bornes sup./inf., il existe une suite $(a_n)_n \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to x_0$.

$\Leftarrow$ Soient $\alpha = \sup \mathrm{I}$ et $\beta = \inf \mathrm{I}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, \beta \leq a_n \leq \alpha$. Par passage à la limite, on obtient $\beta \leq x_0 \leq \alpha$, donc $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. Si les inégalités sont strictes, alors elles deviennent larges par passage à la limite.

■

1.2 Voisinage

Définition 1.1.2.2 *(Voisinage)*

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage de a tout partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de type $]a - r, a + r[$, où $r > 0$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Remarque 1.1.2.2

- $\mathbb{R}$ est un voisinage de tout réel a.
- $\mathcal{V}(a)$ est un ensemble de parties ("ensemble d'ensembles") de $\mathbb{R}$. On dit qu'un ensemble $V \in \mathcal{V}(a)$ si et seulement si V est un voisinage de a.

- On appelle voisinage de $+\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de type $]M, +\infty[$, où $M \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{V}(+\infty)$ l'ensemble des voisinages de $+\infty$.
- On appelle voisinage de $-\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de type $]-\infty, M[$, où $M \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{V}(-\infty)$ l'ensemble des voisinages de $-\infty$.

Remarque 1.1.2.3

- Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $V \in \mathcal{V}(a) \iff \exists r > 0$ telle que $B(a, r) \subseteq V$, où $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\}$ est une "boule ouverte".
- Si $a \in \mathbb{C}$, on a $V \in \mathcal{V}(a) \iff \exists r > 0$ telle que $B(a, r) \subseteq V$, où $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ est un disque.

Exemple 1.1.2.2

1. $[0,+\infty[\in \mathcal{V}(1)$, mais $[0,+\infty[\notin \mathcal{V}(0)$.
2. $\mathbb{R}^* \in \mathcal{V}(+\infty)$ et $\mathbb{R}^* \in \mathcal{V}(-\infty)$.

Dans le suite de ce chapitre, et sauf mention contraire, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ désignera une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ **non vide**. On peut noter $f \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$. On utilise la notation : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

1.3 Limite d'une fonction

Définition 1.1.3.3

1. **Limite finie en un point fini** : Soit $a \in \bar{\mathrm{I}}$. On dit que $f \to l$ **lorsque** $x \to a$ si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{I} : |x-a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$
2. **Limite infinie** $(+)$ **en un point fini** : Soit $a \in \bar{\mathrm{I}}$. On dit que $f \to +\infty$ **lorsque** $x \to a$ si et seulement si :
$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{I} : |x-a| < \delta \implies f(x) > M.$$
3. **Limite infinie** $(-)$ **en un point fini** : Soit $a \in \bar{\mathrm{I}}$. On dit que $f \to -\infty$ **lorsque** $x \to a$ si et seulement si :
$$\forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{I} : |x-a| < \delta \implies f(x) < M.$$

Si $\mathrm{I} = [\alpha, +\infty[$

4. On dit que $f \to l$ **lorsque** $x \to +\infty$ si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{I} : x > B \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$
5. **Limite infinie** $(+)$: On dit que $f \to +\infty$ **lorsque** $x \to +\infty$ si et seulement si :
$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathrm{I} : x > B \implies f(x) > A.$$
6. **Limite infinie** $(-)$: De même pour $f \to -\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

Remarque 1.1.3.4

On peut généraliser les définitions précédentes en une unique définition en utilisant la notion du voisinage.
Soient $a \in \bar{\mathrm{I}} \bigcup \{\pm\infty\}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f tend vers l en a lorsque :

$$\boxed{\forall W \in \mathcal{V}(l), \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathrm{I}, x \in V \implies f(x) \in W \iff f(\mathrm{I} \bigcap V) \subseteq W}$$

Exemple 1.1.3.3

Pour $a = -\infty$ et $\mathrm{I} =]-\infty, \beta]$, $l = +\infty$, on a :

$$\forall W =]A, +\infty[\in \mathcal{V}(+\infty) \quad (A > 0)$$

$$\exists V =]-\infty, B[\in \mathcal{V}(-\infty) \quad (B > 0)$$

$$\forall x \in \mathrm{I}, x \in V \implies f(x) \in W \iff x < B \implies f(x) > A.$$

Cela revient (équivalence) à démontrer que

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathrm{I}, x < B \implies f(x) > A.$$

Donc $f \to +\infty$ lorsque $x \to -\infty$.

Propriété 1.1.3.1 *(Unicité de la limite)*

Soient $a \in \bar{\mathrm{I}} \bigcup \{\pm\infty\}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Si f tend vers l en a, alors l est unique.

Définition 1.1.3.4

l est appelé la **limite** de f en a. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

$$\lim_{a} f = l$$

$$f \underset{a}{\to} l$$

Preuve

Supposons que $a \in \bar{\mathrm{I}}$ et $l \in \mathbb{R}$. Supposons que $f \underset{a}{\to} l$ et $f \underset{a}{\to} l'$.

On a donc $\forall \varepsilon > 0, \begin{cases} \exists \eta_1 > 0, \forall x \in \mathrm{I} : |x-a| < \eta_1 \implies |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists \eta_2 > 0, \forall x \in \mathrm{I} : |x-a| < \eta_2 \implies |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x-a| < \eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. On a donc :

$$\begin{aligned} |l - l'| &= |l - f(x) + f(x) - l'| \\ &\leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Cela veut donc dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, |l - l'| < \varepsilon$$

Possible uniquement si $l - l' = 0 \iff \boxed{l = l'}$. D'où l'unicité de la limite. CQFD. ■

Définition 1.1.3.5 ***(Limites à gauche et à droite)***

Soient $a \in \bar{\mathrm{I}}$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$. On appelle la limite à droite de f en a la limite de la fonction f lorsque x tend vers a par des valeurs supérieures à a, ou encore la limite de la restriction de f à $\mathrm{I} \bigcap]a, +\infty[$ (qu'on peut noter $f_{|\mathrm{I} \bigcap]a,+\infty[}$) en a. On la note :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \text{ ou } \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$$

On appelle la limite à gauche de f en a la limite de la fonction f lorsque x tend vers a par des valeurs inférieures à a, ou encore la limite de la restriction de f à $\mathrm{I} \bigcap]-\infty, a[$ (qu'on peut noter $f_{|\mathrm{I} \bigcap]-\infty,a[}$) en a. On la note :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \text{ ou } \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$$

Remarque 1.1.3.5

Il n'est pas incorrect de considérer la limite de la fonction restreinte à $[a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a]$) en a (intervalle fermé). Cela s'explique par le fait que a appartient à l'adhérence de $\mathrm{I} \bigcap\,]a, +\infty[$ (resp. $\mathrm{I} \bigcap\,]-\infty, a[$).

On dit que f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à droite et à gauche en a, et que ces deux limites sont égales. On peut noter cette limite par :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Remarque 1.1.3.6
On peut noter la restriction d'une fonction à un ensemble A par $f_{|A}$.

Définition 1.1.3.6 *(Continuité)*

Soit $a \in \mathrm{I}$. On dit que f est **continue en** a lorsque f admet une limite réelle en a et que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

On peut aussi écrire $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{I} : |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Définition 1.1.3.7

Soit $a \in \mathring{\mathrm{I}}$. On dit que f est **continue à droite en** a lorsque $lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. On dit que f est **continue à gauche en** a lorsque $lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Définition 1.1.3.8

On dit que f est **continue sur** I si et seulement si f est continue en tout point de I. Autrement dit :

$$\forall a \in \mathrm{I}, \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

On note $\mathcal{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I vers $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1.3.4

1. Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions sin,cos, exp sont continues sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $f : x \mapsto E(x)$ est continue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
   Démonstration :

A compléter

Exercice 1.1.3.1

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto E(x) \cdot sin(\pi x) \end{cases}$; Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Solution :

A compléter

Définition 1.1.3.9 *(Prolongement par continuité)*

Soient $a \in \bar{\mathrm{I}}$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}-a}$. On dit que f **admet un prolongement par continuité** ou qu'elle est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie en a. Dans ce cas, on peut définir une fonction $\tilde{f} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim_{x \to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est appelée le **prolongement par continuité de** f en a, et $\tilde{f}$ est continue en a.

Exemple 1.1.3.5

$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{sin(x)}{x} \end{cases}$ admet un prolongement par continuité en 0. En effet, $\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$. On peut donc définir $\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$, qui est continue en 0.

2 Propriétés

2.1 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 2.2.1.1 *(Caractérisation séquentielle de la limite)*

Soient $a \in \bar{\mathrm{I}} \bigcup \pm\infty$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On a :

Formule clé

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall (u_n)_n \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}, u_n \to a \implies f(u_n) \to l$$

Preuve

$\implies$ $f \underset{a}{\to} l \quad (a \in \bar{\mathrm{I}}, l \in \mathbb{R})$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathrm{I}, |x-a| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$
Soit $(u_n)_n \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to a$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - a| < \eta$
Donc, $\forall n \geq n_0, |f(u_n) - l| < \varepsilon$
$\implies f(u_n) \to l$.

$\impliedby$ Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) \neq l$.
$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x_\eta \in \mathrm{I}, |x_\eta - a| < \eta$ et $|f(x_\eta) - l| \geq \varepsilon$.
Pour $\eta = \frac{1}{n+1}, \exists (x_n)_n \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ telle que $|x_n - a| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$.
Donc, $x_n \to a$ mais $f(x_n) \not\to l$. Contradiction. Donc, $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

- Raisonnement analogue pour les autres cas de a et l.

■

2.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2.2.2.2 ***(Caractérisation séquentielle de la continuité)***

Soient $a \in \mathrm{I}$. La fonction f est continue en a si et seulement si :

Formule clé

$$\forall (u_n)_n \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}, u_n \to a \implies f(u_n) \to f(a)$$

La preuve de ce théorème est analogue à celle du théorème précédent.

2.3 Propriétés diverses

Propriété 2.2.3.2 ***(Bornitude locale)***

Soit $a \in \bar{\mathrm{I}} \bigcup \{\pm\infty\}$.

Si f admet une limite réelle en a, alors f est bornée dans un voisinage de a.

Preuve

Supposons que $f \underset{a}{\to} l$ avec $l \in \mathbb{R}$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathrm{I} \bigcap V, |f(x) - l| < \varepsilon$
Pour $\varepsilon = 1$, on a $\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathrm{I} \bigcap V, |f(x) - l| < 1$
$\implies \forall x \in \mathrm{I} \bigcap V, l - 1 < f(x) < l + 1$
Donc, f est bornée dans le voisinage V de a. CQFD. ∎

Propriété 2.2.3.3 ***(Valeurs absolues)***

Soient $a \in \bar{\mathrm{I}} \bigcup \{\pm\infty\}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. $|f| \underset{a}{\to} 0 \iff f \underset{a}{\to} 0$.
2. $f \underset{a}{\to} l \implies |f| \underset{a}{\to} |l|$.
   La réciproque de cette dernière est fausse (démonstration triviale par contre-exemple).

Preuve

1. $\Longrightarrow$ Supposons que $|f| \underset{a}{\to} 0$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathrm{I} \bigcap\ V, ||f(x)| - 0| < \varepsilon$
$\Longrightarrow\ \forall x \in \mathrm{I} \bigcap\ V, |f(x)| < \varepsilon$
$\Longrightarrow\ \forall x \in \mathrm{I} \bigcap\ V, |f(x) - 0| < \varepsilon$
Donc, $f \underset{a}{\to} 0$.

   $\Longleftarrow$ Supposons que $f \underset{a}{\to} 0$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathrm{I} \bigcap\ V, |f(x) - 0| < \varepsilon$
$\Longrightarrow\ \forall x \in \mathrm{I} \bigcap\ V, |f(x)| < \varepsilon$
$\Longrightarrow\ \forall x \in \mathrm{I} \bigcap\ V, ||f(x)| - 0| < \varepsilon$
Donc, $|f| \underset{a}{\to} 0$.

2. On utilise la propriété stipulant que $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$ (inégalité triangulaire).

■

Propriété 2.2.3.4 ***(Bornitude et produit)***

Soient $f, g \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}} \bigcup \{\pm\infty\}$.

Formule clé

$$\begin{cases} g \text{ est bornée au } \mathcal{V}(a) \\ f \underset{a}{\to} 0 \end{cases} \Longrightarrow (f \cdot g) \underset{a}{\to} 0$$

Preuve

g est bornée au $\mathcal{V}(a) \implies \exists M > 0, \exists V_1 \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathrm{I} \bigcap\ V_1, |g(x)| \leq M$
$f \underset{a}{\to} 0 \implies \forall \varepsilon > 0, \exists V_2 \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathrm{I} \bigcap\ V_2, |f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$
Soit $V = V_1 \bigcap V_2 \in \mathcal{V}(a)$
$\forall x \in \mathrm{I} \bigcap\ V, |(f \cdot g)(x) - 0| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$
Donc, $(f \cdot g) \underset{a}{\to} 0$. CQFD. ■

Propriété 2.2.3.5

Soient $f, g \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}} \bigcup \{\pm\infty\}$.

Formule clé

$$\begin{cases} |f-l| \leq |g| \text{ au } \mathcal{V}(a) \\ g \underset{a}{\to} 0 \end{cases} \implies f \underset{a}{\to} l$$

Preuve

- On a $\exists V_1 \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathrm{I} \bigcap V_1, |f(x) - l| \leq |g(x)|$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists V_2 \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathrm{I} \bigcap V_2, |g(x) - 0| < \varepsilon$.
- On pose $V = V_1 \bigcap V_2 \in \mathcal{V}(a)$.
- $\forall x \in \mathrm{I} \bigcap V, |f(x) - l| \leq |g(x)| < \varepsilon$.
- Donc, $f \underset{a}{\to} l$. CQFD.

■

Propriété 2.2.3.6 ***(Bornitude et limite)***

Soient $f \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}} \bigcup \{\pm\infty\}$.

Si $lim_{x \to a} f(x) = l$, avec $\alpha < l < \beta$, alors f est comprise entre α et β dans un voisinage de a. On peut écrire
$\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathrm{I} \cap V,\ \alpha < f(x) < \beta$.

Preuve

On a (globalement) $\alpha < l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon < \beta$.
Soit $\varepsilon = \min(l - \alpha, \beta - l) > 0$.
$\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathrm{I} \bigcap V, |f(x) - l| < \varepsilon$
$\implies \forall x \in \mathrm{I} \bigcap V, -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$
$\implies \forall x \in \mathrm{I} \bigcap V, l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$
$\implies \forall x \in \mathrm{I} \bigcap V, \alpha < f(x) < \beta$. CQFD. ■

Conséquence 2.2.3.1

Si $f \underset{a}{\to} l$ avec $l > 0$, alors $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in \mathrm{I} \bigcap V, f(x) > \frac{l}{2} > 0$.

Propriété 2.2.3.7

Soient $f, g \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$, $(l, l') \in \mathbb{R}^2$ et $a \in \bar{\mathrm{I}} \cup \{\pm\infty\}$.

1. $\begin{cases} f \underset{a}{\to} l \\ g \underset{a}{\to} l' \end{cases} \implies \begin{cases} (f+g) \underset{a}{\to} (l+l') \\ (f \cdot g) \underset{a}{\to} (l \cdot l') \end{cases}$.
2. Si $l \neq 0$, alors $\frac{1}{g} \underset{a}{\to} \frac{1}{l'}$. Donc $\frac{f}{g} \underset{a}{\to} \frac{l}{l'}$.

Preuve

À reprendre en tant qu'exercice. ■

Conséquence 2.2.3.2 *(Opération sur les fonctions continues)*

Soient $f, g \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ continues sur I.

1. a) $\forall a \in \mathbb{R}, f + \alpha g$ est continue sur I.
   b) fg est continue sur I.
2. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I. On peut aussi en déduire que $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

2.4 Théorème d'encadrement

Théorème 2.2.4.3

Soient $f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}} \cup \{\pm\infty\}$.

Formule clé

$$\begin{cases} f \leq g \leq h \text{ au } \mathcal{V}(a) \\ f \underset{a}{\to} l \\ h \underset{a}{\to} l \end{cases} \implies g \underset{a}{\to} l$$

Preuve

- On a (i) : $\exists V_1 \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathrm{I} \bigcap\ V_1, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (première hypothèse).
- On a (ii) : $\forall \varepsilon > 0, \{$

■

faut recopier...

Propriété 2.2.4.8 *(Limite et inégalité)*

Soient $a \in \bar{\mathrm{I}} \bigcup \{\pm\infty\}$ et $f, g \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ telles que $f \leq g$ sur un $\mathcal{V}(a)$.

1. Si $f \underset{a}{\rightarrow} +\infty$, alors $g \underset{a}{\rightarrow} +\infty$.

2. Si $g \underset{a}{\rightarrow} -\infty$, alors $f \underset{a}{\rightarrow} -\infty$.

Exercice 2.2.4.2

Soit $f \in \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $lim_{x \rightarrow +\infty} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = l$.

A faire pour le 21/11

2.5 Composée et continuité

Propriété 2.2.5.9 *(Composée de fonctions continues)*

Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $\mathring{\mathrm{I}} \bigcap \mathring{\mathrm{J}} \neq \emptyset$, $f \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ et $g \in \mathbb{R}^{\mathrm{J}}$ continues et tel que $g(J) \subseteq I$. Soient $a \in \mathrm{J} \bigcup \{\pm\infty\}$ et $b \in \mathrm{I} \bigcup \{\pm\infty\}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $f \underset{b}{\rightarrow} l$ et $g \underset{a}{\rightarrow} b$, alors $(f \circ g) \underset{a}{\rightarrow} l$.

Preuve

■

2.6 Fonctions k-Lipschitziennes

Définition 2.2.6.10

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\mathring{\mathrm{I}} \neq \emptyset$ et $k \in \mathbb{R}^{+}$. On dit que $f \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ est k-**Lipschitzienne** si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Si $k \in [0, 1[$, on dit que f est k-**contractante**.

Propriété 2.2.6.10

Toute fonction k-Lipschitzienne est continue sur I.

Preuve

- Soit $a \in I$.
- On a $\forall x \in \mathrm{I}, |f(x) - f(a)| \leq k|x - a| \to 0$ lorsque $x \to a$.
- Donc, f est continue en a. CQFD.

■

Exercice 2.2.6.3

Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$. On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \inf\{|x-y|, y \in A\} = d(x, A) \end{cases}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution :

Le but est de montrer que cette fonction est 1-Lipschitzienne. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall a \in A, f(x) = \inf_{z \in A} |x - z| &\leq |x - a| \\ &\leq |x - y + y - a| \\ \forall a \in A, f(x) &\leq |x - y| + |y - a| \end{aligned}$$

$\implies \forall a \in A, f(x) - |x - y| \leq |y - a|$
$\implies f(x) - |x - y|$ est un minorant de $\{|y - a|, a \in A\}$
$\implies f(x) - |x - y| \leq \inf\{|y - a|, a \in A\} = f(y)$
$\implies f(x) - f(y) \leq |x - y|$
En échangeant x et y, on obtient aussi : $f(y) - f(x) \leq |y - x| = |x - y|$ En combinant les deux inégalités, on obtient : $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ Donc, f est 1-Lipschitzienne, donc continue sur $\mathbb{R}$.