

Chapitre VIII : Intégration d'une fonction sur un segment

Rédigé par Samy Youssoufïne

19 décembre 2025



Note importante

Document WIP. Peut contenir des erreurs/sections incomplètes. Version ALPHA de la nouvelle mise en forme.

Table des matières

1	Généralités	3
1.1	Primitives, intégrales et propriétés de base	3
1.2	Intégration par parties	4
1.2.1	Formule d'intégration par parties	5
1.2.2	Formule d'IPP. généralisée	5
1.3	Changement de variable	7
1.4	Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral	8
2	Calcul des primitives	11
2.1	Primitives des fonctions usuelles	11
2.2	$\int f(\cos(x), \sin(x))dx$ où f est une fraction rationnelle	12

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'intégration d'une fonction sur un segment. Les objectifs principaux sont de :

- ▶ Rappeler les définitions et propriétés de base des intégrales.
- ▶ Rappeler les techniques d'intégration usuelles, notamment l'intégration par parties et le changement de variable.
- ▶ Étendre et généraliser ces techniques d'intégration.
- ▶ Présenter de nouvelles formules (formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral...).

Ce chapitre ne traitera pas des intégrales impropreς, généralisées, etc. Ces notions seront abordées l'année prochaine.

1 Généralités

1.1 Primitives, intégrales et propriétés de base

Définition 1.1.1.1 (*Primitives*)

Soit $f \in \mathbb{K}^I$.

La fonction $F \in \mathbb{K}^I$ est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$. On dit "une primitive" et non pas "la primitive" car une fonction peut avoir plusieurs primitives différentes (différant d'une constante additive).

Si F est une primitive de f sur I , alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + c$ avec $c \in \mathbb{K}$.

Définition 1.1.1.2 (*Intégrale d'une fonction entre deux points*)

Soit $f \in \mathbb{K}^I$.

L'intégrale de f entre a et b est notée $\int_a^b f$ et est définie par :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Remarque 1.1.1.1

Si $f \in \mathbb{C}^I$, alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \Re(f)(t)dt + i \int_a^b \Im(f)(t)dt$.

Par exemple, $\int_0^1 \frac{dt}{t+i} = \dots = \frac{1}{2} \ln(2) - i\frac{\pi}{4}$.

Attention ! Nous n'avons pas défini la fonction \ln sur \mathbb{C} . Ici, nous utilisons la définition de \ln sur \mathbb{R} . Il existe bel et bien un logarithme complexe, mais il entre dans le domaine des fonctions holomorphes, ce qui est hors de portée de ce cours.

Théorème 1.1.1.1

Si $f \in \mathbb{K}^I$ est continue sur I , alors f admet une primitive sur I .

Q **Preuve**

recop

✓ **Propriété 1.1.1.1 (Propriétés de l'intégrale)**

Soient $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, et $a, b \in I$.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \int_a^b f + \lambda g = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$.
2. Relation de Chasles : $\forall c \in I, \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
3. Si $f \leq g$ sur I et $a \leq b$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
4. Si $a < b$, $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
et même $\leq \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| (b - a)$ (Inégalité triangulaire de l'intégrale, ou encore inégalité de la moyenne).

Q **Preuve**

recop

→ **Conséquence 1.1.1.1**

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}), a < b \in I$.

Si $f \geq 0$ sur I , alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Avec $\int_a^b f(t) dt = 0$ si et seulement si $f = 0$ sur $[a, b]$.

Q **Preuve**

recop

IH **Exercice 1.1.1.1**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

Montrer que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a, b], f(t) = e^{i\theta} |f(t)|$.

Solution :

← La démonstration dans le sens indirect est triviale.

→ Pour démontrer cette propriété dans le sens direct

recop

● **Remarque 1.1.1.2**

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$, alors f est de signe constant sur $[a, b]$. Il s'agit d'un cas particulier du résultat précédent.

1.2 Intégration par parties

1.2.1 Formule d'intégration par parties

★ Théorème 1.1.2.2

Soient $f, g \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{K})$, et $a, b \in I$.

$$\int_a^b f \cdot g' = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g$$

avec $[f]_a^b = f(b) - f(a)$.

Q Preuve

On a $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Donc, en intégrant entre a et b , on obtient :

$$\int_a^b (f \cdot g)' = \int_a^b f' \cdot g + \int_a^b f \cdot g'$$

Donc $\int_a^b f \cdot g' = [fg]_a^b - \int_a^b f' \cdot g$. ■

P Exemple 1.1.2.1

$$\int_a^x \ln(t) dt \text{ avec } a, x > 0$$

On pose $\begin{cases} u(t) = \ln(t) & \implies u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & \implies v(t) = t \end{cases}$.

On a donc : $\int_a^x \ln(t) dt = [t \ln(t)]_a^x - \int_a^x 1 dt = x \ln(x) - a \ln(a) - (x - a)$.

Donc : $\int_a^x \ln(t) dt = x \ln(x) - x - (a \ln(a) - a)$.

1.2.2 Formule d'IPP. généralisée

H Exercice 1.1.2.2 (*Formule d'intégration par parties généralisée*)

Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, et $a, b \in I$.

On souhaite démontrer que :

$$\int_a^b f \cdot g^{(n)} = \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f^{(k-1)} \cdot g^{(n-k)} \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)} \cdot g$$

Solution :

On peut procéder par récurrence sur n , mais il est plus simple de faire une démonstration directe par intégration par parties.

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f^{(k-1)} \cdot g^{(n-k)} \right)' &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} + f^{(k-1)} \cdot g^{(n-k+1)} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f^{(k)} \cdot g^{(n-k+1)} - (-1)^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \\
 &= f \cdot g^{(n)} - (-1)^n f^{(n)} \cdot g
 \end{aligned}$$

Donc, en intégrant entre a et b , on obtient :

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f^{(k-1)} \cdot g^{(n-k)} \right)' = \int_a^b f \cdot g^{(n)} - (-1)^n \int_a^b f^{(n)} \cdot g$$

Ce qui donne bien la formule voulue.

Application 1.1.2.1

On souhaite calculer $J = \int_a^b P(x)e^{cx}dx$ avec $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $c \in \mathbb{R}_+^*$.

On pose $f : x \mapsto e^{cx}$, qui est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)} : x \mapsto c^{n+1}e^{cx}$.

$$\begin{aligned}
 J &= \int_a^b P(x)e^{cx}dx \\
 &= \frac{1}{c^{n+1}} \int_a^b P(x)f^{(n+1)}(x)dx \\
 &= \frac{1}{c^{n+1}} \left[\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} P^{(k-1)}(x) f^{(n+1-k)}(x) \right]_a^b + \frac{(-1)^{n+1}}{c^{n+1}} \int_a^b P^{(n+1)}(x)f(x)dx
 \end{aligned}$$

Or, on sait que P est de degré n , donc $P^{(n+1)} \equiv 0$.

Donc, on a finalement :

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{c^{n+1}} \left[\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} P^{(k-1)}(x) f^{(n+1-k)}(x) \right]_a^b \\
 J &= \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot P^{(k)}(x) \frac{e^{cx}}{c^{k+1}} \right]_a^b
 \end{aligned}$$

1.3 Changement de variable

Définition 1.1.3.3 (*Intégration par changement de variable*)

Soient $g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ telles que $g([a, b]) \subset I$.

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

On dit qu'on a fait le changement de variable suivant :

$$t = g(x) \implies \begin{cases} x = a & \rightarrow t = g(a) \\ x = b & \rightarrow t = g(b) \end{cases}$$

avec $dt = g'(x)dx$.

$$\text{Donc } \int_a^b \underbrace{f(g(x))}_{=t} \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{=dt} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

Preuve

Soit F une primitive de f sur I .

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= \int_a^b F'(g(x)) \cdot g'(x)dx \\ &= \int_a^b (F \circ g)'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} F'(t)dt \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt \end{aligned}$$



Exemple 1.1.3.2

Calculer $I_{n,p} = \int_a^b (b-x)^n \cdot (x-a)^p dx$, avec $n, p \in \mathbb{N}$.

(Ou bien, montrer que $I_{n,p} = (b-a)^{n+p+1} \cdot \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{p+k+1}$)

Solution :

On va utiliser le changement de variable qui permet de transformer n'importe quel $x \in [a, b]$ en un $t \in [0, 1]$.

On sait que $\forall x \in [a, b], \exists t \in [0, 1], x = (1-t)a + tb$.

On pose alors $x = (1-t)a + tb$. En dérivant, on obtient :

$$dx = (b-a)dt$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
 I_{n,p} &= \int_a^b (b-x)^n (x-a)^p dx \\
 &= \int_0^1 (b - (1-t)a - tb)^n ((1-t)a + tb - a)^p (b-a) dt \\
 &= (b-a)^{n+p+1} \int_0^1 (1-t)^n t^p dt
 \end{aligned}$$

Or, on sait que :

$$\int_0^1 (1-t)^n t^p dt = \int_0^1 t^p \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \int_0^1 t^{p+k} dt$$

Donc, on a finalement :

$$\int_0^1 (1-t)^n t^p dt = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{p+k+1}$$

Donc, on en déduit que :

$$I_{n,p} = (b-a)^{n+p+1} \cdot \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{p+k+1}$$

1.4 Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral

★ Théorème 1.1.4.3 (*Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral*)

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$, $a, x \in I$.

Alors on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Q Preuve

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt$.

On effectue une intégration par parties sur I_k :

$$\begin{cases} u(t) = (x-t)^k & \implies u'(t) = -k(x-t)^{k-1} \\ v'(t) = f^{(k+1)}(t) & \implies v(t) = f^{(k)}(t) \end{cases}$$

Donc, on a :

$$I_k = \left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right]_a^x + \underbrace{\int_a^x \frac{k(x-t)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(t) dt}_{=I_{k-1}}$$

Donc $I_{k-1} - I_k = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

Donc $\sum_{k=1}^n (I_{k-1} - I_k) = \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

Donc $I_0 - I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

Or $I_0 = \int_a^x f^{(1)}(t) dt = f(x) - f(a)$.

Donc, on a bien :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

■

→ Conséquence 1.1.4.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Même énoncé que précédemment écrit dans le chapitre 7.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

On a, pour tout $x \neq a \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \sup_{t \in [a,x] \text{ ou } t \in [x,a]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Q Preuve

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $x \neq a \in I$.

Nous allons procéder à une démonstration différente à celle vue dans le chapitre 7 (nous allons utiliser la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral).

On a, par la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral :

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| &\leq \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |f^{(n+1)}(t)| \frac{(x-t)^n}{n!} dt \end{aligned}$$

Or $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a, x]$ ou $[x, a]$, donc elle est bornée.

Donc, on a :

recop

 Application 1.1.4.2

On pose $f : x \mapsto e^{ix}$. Cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}^*$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \sup_{t \in [0,x] \text{ ou } t \in [x,0]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or on sait que $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)} : x \mapsto i^k e^{ix}$.

Donc $f^{(k)}(0) = i^k$.

Donc $\sup_{t \in [0,x] \text{ ou } t \in [x,0]} |f^{(n+1)}(t)| \leq 1$.

Donc, on a finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| e^{ix} - \sum_{k=0}^n \frac{i^k}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ d'après le critère de d'Alembert.

Donc, on a bien :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| e^{ix} - \sum_{k=0}^n \frac{i^k}{k!} x^k \right| = 0$$

Donc, on en déduit la formule d'Euler :

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

En général, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

2 Calcul des primitives

On note $\int f(x)dx$ une primitive de f . Le calcul de $\int f$ se fait après décomposition de f en éléments plus simples (généralement les fonctions usuelles qui seront présentées dans la partie ci-dessous).

2.1 Primitives des fonctions usuelles

Les primitives des fonctions usuelles sont les suivantes :

- ▶ $\forall k, \lambda \in \mathbb{N} \times \mathbb{K}, \int \lambda x^k dx = \lambda \frac{x^{k+1}}{k+1} + \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{K}$.
- ▶ $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \forall a \in \mathbb{K}, \int (x-a)^n dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{K}$.
- ▶ $\forall a \in \mathbb{R}, \int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.
- ▶ $\forall a \in \mathbb{C}, \int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{2} \ln((x-\alpha)^2 + \beta^2) + i \arctg\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$.
- ▶ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n} = \int \frac{dx}{\left((x+\frac{a}{2})^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)\right)^n}$.

Par changement de variable, on peut aboutir à une nouvelle intégrale de la forme $\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$, qu'on peut calculer par IPP.

Exercice 2.2.1.3

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{(x^3+1)(x+1)}$.

1. Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}$.
2. Calculer $\int f(x)dx$.

Solution :

- ▶ On a $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$.

▷ **Méthode 1 :** Donc, on cherche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, 1 = a(x+1)(x^2 - x + 1) + b(x^2 - x + 1) + (cx + d)(x + 1)^2$.

En développant et en regroupant les termes, on obtient :

$$1 = (a + c)x^3 + (b - a + 2d)x^2 + (a - b + 2c + d)x + (b + d)$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b - a + 2d = 0 \\ b - d = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{1}{3}, d = \frac{1}{3}$.

► **Méthode 2 :** On peut faire tendre x vers -1 pour trouver b , après avoir multiplié par $(x + 1)^2$. On trouve $b = \frac{1}{3}$. Ensuite, en faisant tendre x vers $+\infty$ et avoir multiplié l'expression par $(x + 1)$, on trouve $c = -a$. On peut ensuite poser $x = 0$ et $x = 1$ pour obtenir un système de deux équations à deux inconnues en a et d . On trouve les mêmes valeurs que précédemment.

► Pour la deuxième question, on a donc :

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \left(\frac{1/3}{x+1} + \frac{1/3}{(x+1)^2} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 - x + 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2 - x + 1} dx \end{aligned}$$

► Après quelques calculs, on trouve finalement :

$$\int f(x)dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

2.2 $\int f(\cos(x), \sin(x))dx$ où f est une fraction rationnelle

Pour calculer cette intégrale, il faut utiliser le changement de variable de Weierstrass : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Cela veut dire que $x = 2\operatorname{arctg}(t)$, et donc $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, sous réserve que $x \neq \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (car \tan n'est pas défini en ces points).

Ce changement de variable est efficace car il permet d'exprimer $\cos(x)$, $\sin(x)$ et dx en fonction de t de la manière suivante :

- $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, car $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1$
- $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, car $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$
- $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

 **Remarque 2.2.2.3**

On peut également appliquer la règle de Bioche, qui consiste à effectuer le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \underbrace{\int f(\cos x, \sin x)dx}_{=\omega(x)} \\ \text{Si } \omega(-x) = \omega(x) \implies t = \cos x, \quad \omega \text{ invariante par } -x \\ \text{Si } \omega(\pi - x) = \omega(x) \implies t = \sin x, \quad \omega \text{ invariante par } \pi - x \\ \text{Si } \omega(\pi + x) = \omega(x) \implies t = \tan x, \quad \omega \text{ invariante par } \pi + x \\ \text{Sinon} \implies t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$$

 **Exemple 2.2.2.3**

1. $I_1 = \int \frac{dx}{\sin(x)}.$

- On pose $t = \cos(x) \implies dt = -\sin(x)dx.$
- Donc, on a $I_1 = - \int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt.$
- Donc, on trouve finalement $I_1 = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)} \right| \right) + C,$ soit $I_1 = -\operatorname{argth}(\cos(x)) + C.$
- On peut aussi directement remarquer à partir de la deuxième ligne qu'on peut utiliser la formule de $\operatorname{argth}.$

2. $I_2 = \int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{1+\cos(x)} dx.$

- On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$
- Donc $I_2 = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt.$
- Après simplification, on trouve $I_2 = \int \frac{t^2+2t-1}{1+t^2} dt.$
- On sépare en deux intégrales : $I_2 = \int (1 + \frac{2t}{1+t^2}) dt - 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt.$
- On trouve finalement $I_2 = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \ln(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)) - x + C.$

Fin du chapitre VIII.
