

## 1. Électrostatique :

- 1.1. Soit  $M$  un point situé à la distance  $r$  d'une charge ponctuelle  $q$  placée en  $P$  telle que  $\vec{r} = PM \cdot \vec{u}$ . Donner l'expression du champ électrique  $\vec{E}(M)$  au point  $M$ .
  - 1.2. En déduire l'expression de  $\vec{E}(M)$  si on a une distribution :
    - # Volumique de densité de charge  $\rho$ .
    - # Surfacique de densité de charge  $\sigma$ .
    - # linéique de densité de charge  $\lambda$ .
  - 1.3. Invariance et symétrie d'une distribution :
 

Principe de Curie : "Les symétries des causes se manifestent dans les effets".

    - 1.3.1. On considère un champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, z)$ ; que peut-on dire d'une distribution de charge invariante par translation selon l'axe ( $Oz$ ) ? Même question si, de plus, la distribution est invariante par rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe ( $Oz$ ) ?
    - 1.3.2. Donner la direction de  $\vec{E}$  par rapport à un plan de symétrie de la distribution de charge ?
    - 1.3.3. Quelle est la direction de  $\vec{E}$  par rapport à un plan d'anti-symétrie ?
  - 1.4. Exemple de calcul de  $\vec{E}$  : Champ créé par un fil infini uniformément chargé, ayant une densité de charge linéique  $\lambda = cte$ . On utilise les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .
  - 1.4.1. Étudier les invariances de la distribution et déterminer les variables dont dépend le champ  $\vec{E}(M)$ .  $M$  étant un point de l'espace qui entoure le fil.
  - 1.4.2. Donner deux plans de symétrie de la distribution et qui passent par  $M$ . En déduire la direction de  $\vec{E}(M)$
  - 1.4.3. Calcul de  $\vec{E}(M)$  : Donner l'expression du champ élémentaire  $d\vec{E}(M)$  en  $M$  créé par une charge élémentaire  $dq$  repérée par l'angle  $\alpha$  depuis le point  $M$ . En déduire que  $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$
- 1.5. Théorème de Gauss :
- 1.5.1. Énoncer le théorème de Gauss.
  - 1.5.2. Appliquer le théorème de Gauss pour retrouver le champ  $\vec{E}(M)$  d'un fil infini portant une charge linéique  $\lambda$  uniforme.
  - 1.5.3. On considère un plan infini  $(O, x, y)$  uniformément chargé en surface  $\sigma = cte > 0$ . Montrer que  $\vec{E}(M) = E(z) \cdot \vec{e}_z$ . Montrer que  $E(z) = -E(-z)$ . Établir l'expression de  $\vec{E}(z)$ . Montrer qu'il y a discontinuité de champ  $\vec{E}$  à la traversée du plan  $z = 0$ .
- 1.6. Potentiel électrostatique  $V(M)$  :
- 1.6.1. Définir le potentiel électrostatique  $V(M)$  en un point  $M$  créé par une charge ponctuelle  $q$  placée en  $P$  à la distance  $r$  du point  $M$ .
  - 1.6.2. Donner les coordonnées de  $\overrightarrow{\text{grad}}V$  en coordonnées cylindriques puis en coordonnées sphériques.
  - 1.6.3. Exprimer la circulation de  $\vec{E}$  d'un point  $A$  à un point  $B$ .
  - 1.6.4. En partant de l'expression de  $\vec{E}$  pour une charge ponctuelle  $q$  retrouver l'expression de  $V(M)$  le potentiel créé par une charge ponctuelle en un point  $M$ . En déduire l'expression du potentiel  $V(M)$  pour une distribution quelconque.
- 1.7. On considère une sphère de rayon  $R$  uniformément chargée de charge volumique  $\rho$ . Calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en distinguant deux cas (à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère). En déduire le potentiel électrique créé par cette sphère.

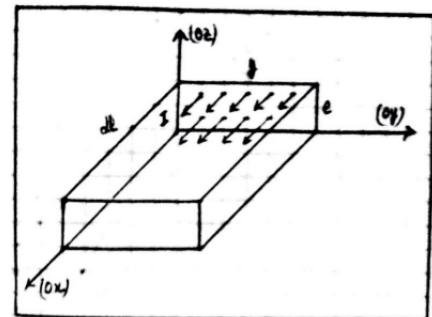
- 1.8. Donner l'expression de l'énergie potentielle électrostatique  $E_p(M)$  d'une charge ponctuelle  $q$  placée en un point  $M$  de potentiel  $V(M)$ . En déduire la relation vectorielle entre la force électrique  $\vec{F}$  et l'énergie potentielle électrique.
- 1.9. Conducteur en équilibre : Rappeler les propriétés d'un conducteur en équilibre. Le théorème de coulomb pour un conducteur permet d'exprimer le champ électrique  $\vec{E}(M)$  en un point  $M$  au voisinage de la surface d'un conducteur en équilibre, donner l'expression de  $\vec{E}(M)$ .
- 1.10. Condensateur : Un condensateur plan est formé par deux conducteurs en influence totale appelés "armatures", séparée par une distance  $e$ , elles portent les charges  $-Q$  et  $+Q = \sigma S > 0$ . Notons  $A$  l'armature positive et  $B$  l'armature négative du condensateur. Déterminer l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  à l'intérieur et à l'extérieur du condensateur et montrer que la tension  $U_{AB} = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$ . En déduire que la capacité  $C$  du condensateur plan est  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$  (à retenir!).

## 2. Magnétostatique :

- 2.1. On considère un parallélépipède de volume :

$d\tau = S.dl = e.y.dl$  traversé en volume par un courant  $I$  (voir ci-contre).

Par analogie avec l'élément de charge  $dq$  on définit l'élément de courant  $d\vec{C} = I.d\vec{l}$ .



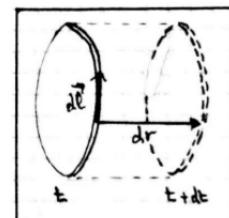
- 2.1.1. Définir le vecteur densité de courant volumique  $\vec{j}$  et en déduire l'expression de  $I$  en fonction de  $\vec{j}$ . Donner l'unité de  $j$ .
- 2.1.2. En faisant tendre  $e$  vers 0 on obtient une distribution surfacique de courant caractérisée par  $\vec{j}_s$  vecteur densité de courant surfacique. Définir  $\vec{j}_s$  et en déduire  $I$  en fonction de  $j_s$  et d'autres grandeurs nécessaires donner l'unité de  $j_s$ .
- 2.1.3. Trouver la relation entre  $j_s$ ,  $j$  et  $e$ .
- 2.2. Certes ; il y a une analogie entre champ électrique  $\vec{E}$  et champ magnétique  $\vec{B}$  c'est que l'équivalent de  $\vec{E}$  c'est  $\vec{B}$ . Écrire l'expression de  $d\vec{E}$  pour une charge élémentaire  $dq$  et par analogie en déduire l'expression de  $d\vec{B}$  vecteur champ magnétique créé par un élément de courant  $d\vec{C} = I.d\vec{l}$  (c'est la loi de Biot et Savart).
- 2.3. Invariance et symétrie : Que représentent les invariances de la distribution de courant pour le champ  $\vec{B}$ ? Quelle est la direction de  $\vec{B}$  par rapport à un plan de symétrie ? Quelle est la direction de  $\vec{B}$  par rapport à un plan d'anti-symétrie ?
- 2.4. Rappeler l'égalité traduisant le théorème d'Ampère.
- 2.5. Exemple : Calcul du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant  $I = cte$  parallèle à l'axe ( $Oz$ ). On travaille en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .
- 2.5.1. En examinant les invariances de la distribution de courant déterminer les variables dont dépend le champ magnétique  $\vec{B}$  créé.
- 2.5.2. En examinant les symétries de la distribution de courant déterminer la direction de  $\vec{B}(M)$  en un point  $M$  quelconque de l'espace.
- 2.5.3. En faisant un calcul direct, trouver l'expression de  $\vec{B}(M)$  en un point  $M$ .
- 2.5.4. En appliquant le théorème d'Ampère, retrouver l'expression de  $B(M)$ .

### 3. Équations locales de l'électromagnétisme :

- 3.1. Rappeler le théorème de Green-Ostrogradski et le théorème de Stokes.
- 3.2. À partir du théorème de Gauss retrouver l'équation de Maxwell-Gauss MG.
- 3.3. Retrouver l'équation de Maxwell-Faraday MF.
- 3.4. Établir l'équation de Poisson de l'électrostatique.
- 3.5. À partir du théorème d'Ampère retrouver l'équation de Maxwell-Ampère MA.
- 3.6. Donner l'équation de Maxwell-flux MΦ. En donner deux significations physiques.
- 3.7. À partir de l'équation de MΦ montrer l'existence d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B} = \vec{\text{rot}}\vec{A}$ .
- 3.8. Montrer que  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ .
- 3.9. Pour une charge élémentaire  $dq$  donner l'expression de  $dV$  potentiel élémentaire créé. En déduire par analogie  $d\vec{A}$  potentiel vecteur créé par l'élément de courant  $I.d\vec{l}$ .
- 3.10. Donner la direction de  $\vec{A}$  par rapport à un plan de symétrie de la distribution puis par rapport à un plan d'anti-symétrie de la distribution.
- 3.11. Un solénoïde infini de rayon  $R$ , d'axe ( $Oz$ ) comportant  $n$  spires par unité de longueur est parcouru par le courant  $I$ . On rappelle que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur  $\vec{B} = \mu_0.n.I.\vec{e}_z$  et nul à l'extérieur.
  - a). Quelle est la forme du potentiel vecteur ?
  - b). Le calculer explicitement en intégrant sur un cercle bien choisi. On distinguerà l'intérieur et l'extérieur du solénoïde.
  - c). Vérifier qu'à l'intérieur :  $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}_{int} \wedge \vec{r}$
  - d). Le potentiel vecteur est-il continu à la traversée du solénoïde ?

### 4. Action d'un champ $\vec{B}$ sur un courant :

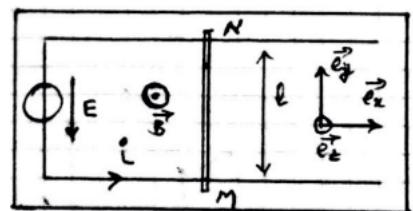
- 4.1. Exprimer  $d\vec{f}_L$  la force de Laplace élémentaire exercée sur une portion de circuit filiforme  $d\vec{l}$  parcourue par un courant  $I$  placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . En déduire  $d\vec{f}_L$  en fonction de  $d\vec{C}$  élément de courant et  $\vec{B}$ . Préciser les différentes expressions de l'élément de courant selon les distributions.
- 4.2. On considère un circuit filiforme parcouru par un courant quasi-uniforme  $I(t)$  ne dépendant pas des variables spatiales, le circuit est placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme. Montrer que l'action mécanique du champ magnétique se réduit à un couple de moment  $\vec{\Gamma}$ . Donner sans démonstration l'expression de  $\vec{\Gamma}$  en fonction de  $\vec{m}$  moment magnétique du circuit et  $\vec{B}$ .
- 4.3. On considère le déplacement élémentaire  $d\vec{r}$ , dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , d'un circuit filiforme entre les instants  $t$  et  $t + dt$  voir figure ci-contre.



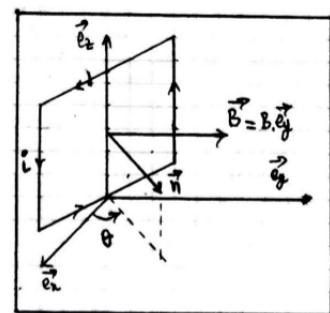
- 4.3.1. Définir  $\delta^2\Phi_c$  le flux coupé par l'élément de longueur  $d\vec{l}$  lors du déplacement  $d\vec{r}$ . En déduire l'expression de  $\delta\Phi_c$  le flux coupé par tout le circuit lors du déplacement  $d\vec{r}$ .
- 4.3.2. Établir la relation entre  $\delta W$  travail élémentaire des forces de Laplace lors du déplacement  $d\vec{r}$  et  $\delta\Phi_c$  le flux élémentaire coupé.

#### 4.3.3. Rappeler le théorème de Maxwell pour le flux.

- 4.3.4. Application 01 : On considère deux rails de Laplace parallèles et horizontales placées dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et externe (voir figure ci-contre) parcourues par un courant  $i$ . Exprimer la force de Laplace  $\vec{f}_L$  exercée par le champ magnétique sur la tige amovible MN. Quelle est la puissance de cette force de Laplace si la vitesse de la tige est  $\vec{v}$  ?



- 4.3.5. Application 02 : On considère une spire rectangulaire parcourue par un courant  $I = cte$ , la spire est en rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) fixe dans le champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et stationnaire. En utilisant le théorème de Maxwell, montrer que :  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ . Calculer le moment  $\Gamma$  du couple exercé par  $\vec{B}$  sur la spire rectangulaire. En déduire la puissance de ce couple.

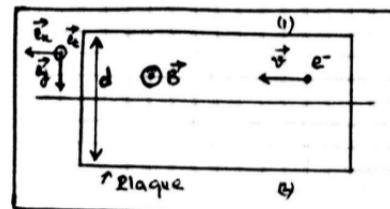


- 4.3.6. Effet moteur d'un champ  $\vec{B}$  tournant : On envisage le cas d'un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  agissant sur un dipôle magnétique permanent (aimant ou spire) de moment magnétique  $\vec{m}$  tels que :  $\vec{m} = m\vec{n} = m \cos \omega_0 t \cdot \vec{e}_x + m \sin \omega_0 t \cdot \vec{e}_y$  et  $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{e}_x + B_0 \sin \omega t \vec{e}_y$ .

Exprimer le moment magnétique  $\vec{\Gamma}$  de la force magnétique et en déduire la puissance  $P_L$  associée.

#### 4.3.7. Effet Hall : (Spécial TSI).

On considère une plaque conductrice parcourue par un courant, plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme (voir figure ci-contre).



- 4.3.7.1. Exprimer  $\vec{F}_m$  la force magnétique exercée sur un électron qui se déplace à la vitesse  $\vec{v}$  dans la plaque. Quel est l'effet de cette force  $\vec{F}_m$  sur la répartition des charges dans la plaque ?

- 4.3.7.2. Exprimer  $\vec{E}_H$  champ électrique de Hall à l'intérieur de la plaque en fonction de  $\vec{B}$  et  $\vec{v}$ .

- 4.3.7.3. Montrer la relation  $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$  vecteur densité de courant volumique et  $\rho_m$  densité de charges volumiques mobiles.

- 4.3.7.4. Montrer que  $U_H$  la tension de Hall qui apparaît entre les faces (1) et (2) s'écrit :  $U_H = d \cdot |A_H| \cdot j \cdot B$  en précisant l'expression de  $A_H$  le coefficient de Hall.

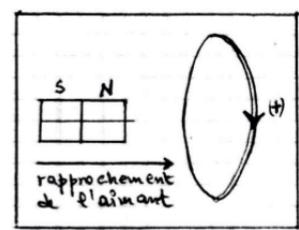
- 4.3.7.5. Donner une application pratique de l'effet de Hall.

### 5. Induction :

- 5.1. Énoncer la loi de Faraday pour l'induction. Écrire l'égalité mathématique traduisant cette loi. Exprimer  $\Phi$  flux du champ  $\vec{B}$  à travers un circuit de surface  $S$ .

**5.2. Énoncer la loi de Lenz pour l'induction.**

On considère le schéma ci-dessous et qui représente une spire orientée et un aimant qui s'approche de cette spire. En appliquant la loi de Lenz déterminer le sens du courant induit  $i$  qui apparaît dans la spire.



**5.3. Donner la relation entre le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  et la f.e.m : force électromotrice induite  $e$ .**

**5.4. Définir l'induction de Neumann et donner l'expression de son champ électromoteur  $\vec{E}_m$ . En partant de la loi de Faraday démontrer le résultat.**

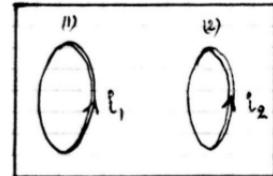
**5.5. Définir l'induction de Lorentz et donner l'expression de son champ électromoteur  $\vec{E}_m$  en fonction des grandeurs nécessaires. Démontrer le résultat.**

**5.6. Écrire la loi d'Ohm aux bornes d'un circuit AB de résistance  $R$  en l'absence de l'induction puis en présence de l'induction. Exprimer la relation entre  $i_{AB}$  courant induit,  $e_{AB}$  f.e.m induite et  $R$  si le circuit AB est fermé. Comparer les signes de  $i_{AB}$  et de  $e_{AB}$**

**5.7. Auto-induction : Un circuit  $C$  parcouru par un courant  $i$  variable crée un champ magnétique variable et par suite un flux propre  $\Phi_p$  variable d'où l'apparition d'une f.e.m propre  $e_p$ . Donner l'expression de  $\Phi_p$  en fonction de  $L$  inductance du circuit et le courant  $i$ . En déduire l'expression de  $e_p$ .**

**5.8. Trouver l'expression de  $L$  pour une bobine de longueur  $l$ , de nombre de spires  $N$  équivalente à un solénoïde de section  $S$ .**

**5.9. Donner le schéma équivalent d'une bobine AB et en déduire la tension  $u_{AB}$  aux bornes de la bobine.**



**5.10. Inductance mutuelle de deux circuits :  $C_1$  et  $C_2$  sont deux circuits parcourus respectivement par les courants  $i_1$  et  $i_2$  voir figure ci-contre.**

Montrer que  $\Phi_1$  le flux à travers  $C_1$  est la somme de deux flux à préciser.

Exprimer  $\Phi_1$  le flux à travers  $C_1$  et  $\Phi_2$  à travers  $C_2$ .

**5.11. On prend comme ( $C_1$ ) une bobine  $b_1$  de nombre de spires  $N_1$  parcourue par un courant  $i_1$  de longueur  $l_1$  et comme ( $C_2$ ) une bobine ( $b_2$ ) de nombre de spires  $N_2$  parcourue par un courant  $i_2 = 0$ . Trouver l'expression de  $M$  coefficient d'induction mutuelle entre les deux circuits.  $S_2$  est la surface d'une spire de ( $b_2$ ), idem pour  $S_1$ .**

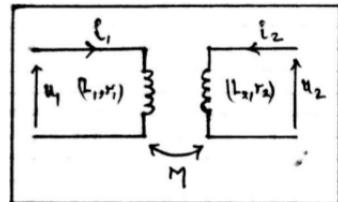
**5.12. Étude énergétique :**

**5.12.1. On considère une bobine ( $b$ ) d'inductance  $L$  parcourue par un courant  $i$ . À partir de l'expression de  $u_{AB}$  aux bornes de la bobine en déduire l'expression de l'énergie magnétique  $E_m$  dans la bobine.**

**5.12.2. On considère les deux bobines (solenoides) suivantes de longueur  $l_1 = l_2 = l$  (voir figure ci-contre).**

# Exprimer  $u_1$  et  $u_2$ . En déduire l'expression de  $E_m$  en fonction de  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$ ,  $i_1$  et  $i_2$ .

# On prend  $r_1 = r_2 = 0$  et  $i_2 = 0$ , retrouver la formule dite formule des transformateurs.



**5.13. Définir les courants de Foucault.**

### 5.14. Applications :

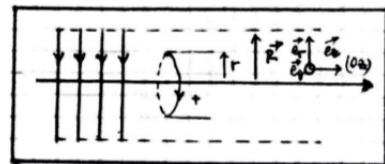
#### Exo 1 : Induction de Neumann :

Soit un solénoïde infini de rayon  $R$ , d'axe ( $Oz$ ) de nombre de spires par unité de longueur  $n$  parcourue par un courant  $i(t)$  non stationnaire (voir figure ci-contre). On rappelle que :

Pour  $r < R$  :  $\vec{B} = \mu_0 \cdot n \cdot i(t) \cdot \vec{e}_z$  et  $\vec{A} = \mu_0 \cdot n \cdot i(t) \cdot \frac{r}{2} \cdot \vec{e}_\theta$

Pour  $r > R$  :  $\vec{B} = \vec{0}$  et  $\vec{A} = \mu_0 \cdot \frac{n \cdot i(t)}{2r} \cdot R^2 \cdot \vec{e}_\theta$

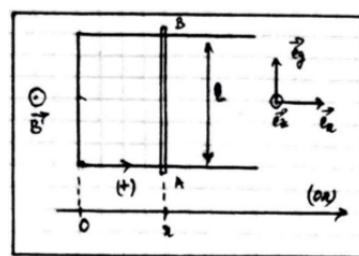
Soit ( $C$ ) une spire de rayon  $r$  ayant le même axe ( $Oz$ ) que le solénoïde. Calculer par les deux méthodes, loi de Faraday et circulation de  $\vec{E}_m$ , la force électromotrice  $e$  dans la spire pour  $r < R$  et  $r > R$



#### Exo 2 : Induction de Lorentz :

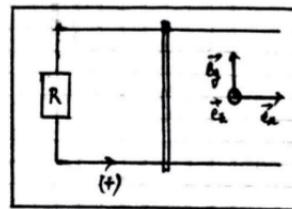
Soit une tige  $AB$  de longueur  $l$  qui se déplace sur deux rails de Laplace et est placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  stationnaire et uniforme. La vitesse de la tige est  $\vec{v}$  voir figure ci-contre.

Déterminer par deux méthodes la f.e.m qui apparaît dans le circuit.



#### Exo 3 : Conversion de puissance mécanique en puissance électrique.

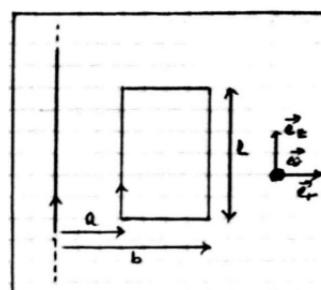
On considère une tige  $AB$  de longueur  $l$  de masse  $m$  qui peut se déplacer sans frottement sur deux rails horizontales dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$ . la résistance totale  $R$  est constante. On donne  $\vec{V}(t=0) = V_c \cdot \vec{e}_x$ .



1. Établir l'équation électrique du dispositif formé par l'ensemble des éléments (tige + rails).
2. Établir l'équation mécanique du dispositif.
3. En déduire la loi d'évolution de  $V(t)$ .
4. Évaluer l'énergie électrique dissipée par effet Joule dans la résistance.

#### Exo 4 : Inductance mutuelle $M$ .

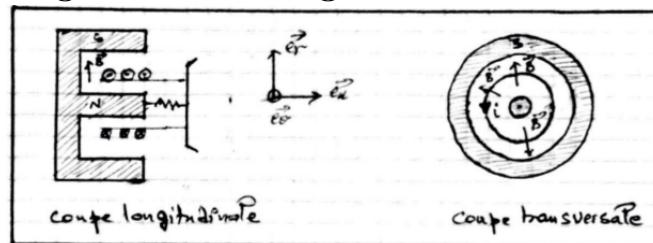
Calculer  $M$  l'inductance mutuelle d'un fil infini parcouru par un courant  $i > 0$  et d'un cadre (voir figure ci-contre).



#### Exo 5 : Haut parleur

Un haut parleur est constitué d'un aimant permanent fixe cylindrique d'axe ( $Ox$ ) créant un champ magnétique radial d'intensité constante  $B$ . un bobinage d'inductance propre  $L$  et de résistance  $R$  est enroulé sur un support solidaire de la membrane qui est soumise à une force de rappel  $F = -k \cdot x$  avec  $x$  écartement par rapport

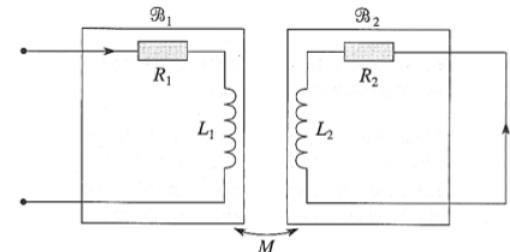
à la position d'équilibre. Le mouvement est amorti par une force de frottement  $f = -\alpha \dot{x}$ . Le bobinage est relié à un générateur de f.e.m  $E(t)$ .



- Établir un système de deux équations différentielles couplées l'une dite "électrique" et l'autre "mécanique".
- On se place en régime harmonique (notation complexe  $v = v \exp(j\omega t)$ ). Établir l'expression de l'impédance complexe du haut parleur que l'on écrira sous la forme :  $Z = R + jL\omega + Z_m$  en explicitant le terme  $Z_m$ .
- Proposer un schéma électrique équivalent au haut parleur.

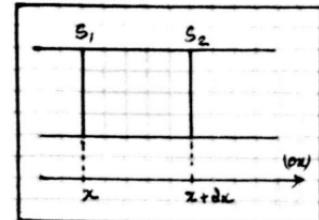
#### Exo 6 : Impédance équivalente d'une bobine couplée avec une autre bobine,

Une bobine  $\mathcal{B}_1$  d'inductance  $L_1$  et de résistance  $R_1$  est couplée, avec un coefficient de mutuelle  $M$ , à une bobine  $\mathcal{B}_2$  d'inductance  $L_2$  et de résistance  $R_2$  fermée sur elle-même. Déterminer l'impédance complexe entre les bornes de  $\mathcal{B}_1$  en régime permanent sinusoïdal de pulsation  $\omega$ .



#### 6. Équations de Maxwell :

- Considérons un volume  $V$  fixe délimité par une surface ( $\Sigma$ ) fermée et orientée vers l'extérieur ayant deux sections  $S_1$  et  $S_2 = S_1$  voir figure ci-contre. On considère que le mouvement des charges se fait selon ( $Ox$ ) seul.



En effectuant un bilan de charge entre les deux instants  $t$  et  $t + dt$ , établir l'équation locale de la conservation de la charge.

- Énoncer les équations de Maxwell dans un référentiel galiléen en présence d'une distribution de charge volumique  $\rho$  et de courant  $\vec{j}$ .
- À partir de l'équation de MA retrouver l'équation de la conservation de charge.
- À partir de l'équation de MG retrouver le théorème de Gauss.
- À partir de l'équation de MF montrer que  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . Retrouver la loi de Faraday pour l'induction.
- À partir de l'équation de MΦ retrouver la conservation du flux du champ magnétique  $\vec{B}$ .
- À partir de l'équation de MA retrouver le théorème d'Ampère généralisé.
- En utilisant la jauge de Lorentz, montrer que l'on a :  $\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$  et  $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$ .
- En quoi consiste l'approximation du régime quasi-stationnaire ARQS en électromagnétisme ?

- 6.10. Rappeler la loi d'Ohm locale dans un conducteur de conductivité  $\gamma$  ainsi que la relation entre  $\vec{j}$  et  $\vec{v}$  vitesse des charges mobiles et comparer les deux termes courant  $j$  et courant de déplacement  $\vec{j}_d = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . On donne :  $\gamma = 6.10^7 S/m$ ,  $\nu = 50 Hz$ ,  $\epsilon_0 = 9.10^{-12} SI$ . Que devient les équations de Maxwell dans l'ARQS en présence d'une densité de courant volumique  $j \neq 0$  et  $\rho \neq 0$  ?
- 6.11. Donner les deux relations de passage du champ électromagnétique à la traversée d'une interface.

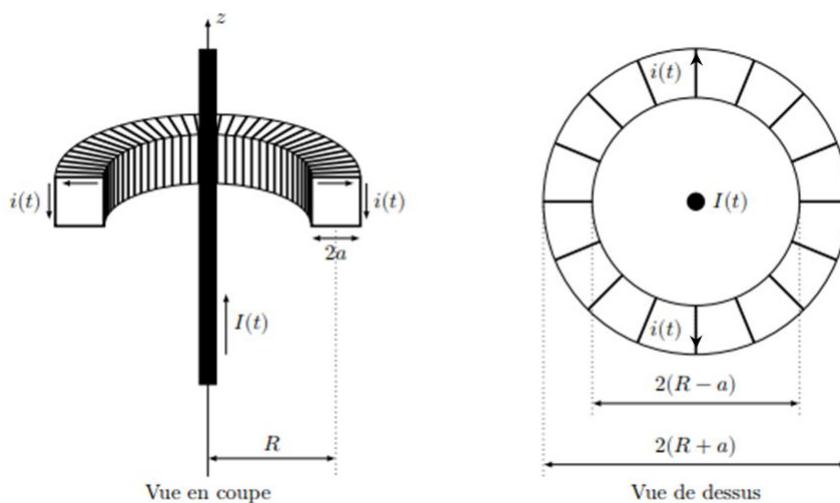
## 7. Énergie électromagnétique :

- 7.1. On considère une charge élémentaire mobile  $dq = \rho_m \cdot d\tau$  subissant une force de Lorentz dans un champ électromagnétique. Montrer que la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la charge  $dq$  est :  $P_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$ . Quelle est l'expression de  $\langle P_v \rangle$  en notation complexe ?
- 7.2. Retrouver l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique  $\mathcal{E}_m$  à partir de l'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine.
- 7.3. À partir de l'énergie électrique emmagasinée dans un condensateur plan, retrouver l'expression de la densité volumique d'énergie électrique  $\mathcal{E}_e$ .
- 7.4. En déduire  $\mathcal{U}$  la densité volumique d'énergie électromagnétique dans un champ  $(\vec{E}, \vec{B})$ .
- 7.5. En considérant l'équation de MA et de MF, retrouver le théorème de Poynting. Définir  $\vec{\Pi}$  vecteur de Poynting. En donner une signification physique. Quelle est l'unité de  $\Pi$ . Qu'indique le sens de  $\vec{\Pi}$ ?  
Donner en notation complexe  $\langle \Pi \rangle$  la moyenne du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$ .
- 7.6. En effectuant un bilan énergétique dans une région de l'espace où règne un champ électromagnétique sans dissipation de puissance volumique retrouver l'identité de Poynting.

## Pince Ampèremétrique (d'après Oral Concours Centrale-Supélec TSI)

Une bobine torique de section carrée de côté  $2a$ , de rayon moyen  $R$ , comportant  $N$  spires jointives est fermée sur un ampèremètre de résistance négligeable. La bobine torique a une résistance équivalente notée  $\mathcal{R}$ .

La bobine enserre un fil conducteur que l'on supposera rectiligne et infini et dont l'axe coïncide avec celui de la bobine torique ; le conducteur est parcouru par un courant  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . Ce courant variable induit un courant  $i(t)$  dans la bobine torique. Vu la symétrie du problème, on travaille en coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ).



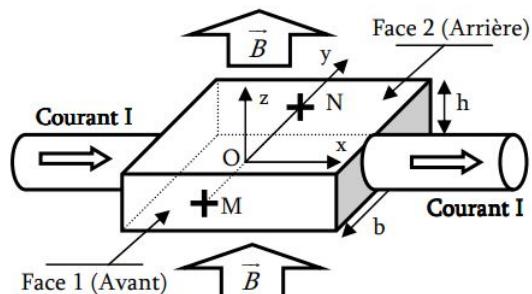
1. Calculer, en exploitant soigneusement les symétries, le champ magnétique  $\vec{B}_{\text{bobine}}(r, \theta, z)$  créé par la bobine en tout point, en fonction, notamment, de  $N$ ,  $i(t)$  et  $r$ .
2. Calculer, de même, le champ magnétique  $\vec{B}_{\text{fil}}(r, \theta, z, t)$  créé par le fil en tout point, en fonction, notamment, de  $I(t)$ .
3. Donner la définition de l'inductance mutuelle  $M$  entre deux circuits et de l'inductance propre  $L$  d'un circuit.  
On donne ici l'inductance propre de la bobine torique et l'inductance mutuelle entre le fil et la bobine torique :  $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right)$ ,  $M = \frac{\mu_0 N a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right)$   
Retrouver ces deux expressions et commenter.
4. Calculer l'intensité complexe  $\underline{i}(t)$  du courant dans la bobine en régime sinusoïdal forcé (régime imposé par le fil central, toujours parcouru par  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ ).
5. Que devient le rapport  $|\frac{i}{I}|$  à haute fréquence ? Préciser le sens de l'expression "haute fréquence HF".  
On donne  $N = 10000$  ;  $R = 6\text{cm}$  ;  $a = 1\text{cm}$  ;  $f = 50\text{Hz}$  ;  $\mathcal{R} = 0,2\Omega$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{SI}$ .  
Calculer la fréquence  $f_0$  limite au delà de laquelle, on peut dire qu'on est en HF.  
Pourquoi peut-on qualifier le dispositif de transformateur de courant ?  
Pourquoi est-ce un appareil très utilisé pour la mesure des forts courants ?

## Capteur à effet Hall :

On considère une plaque rectangulaire d'épaisseur  $h$ , et de largeur  $b$ , représentée sur la figure ci-contre. Elle est réalisée dans un semi-conducteur où la conduction électrique est assurée par des électrons mobiles dont le nombre par unité de volume est  $n$ . La plaque est parcourue par un courant d'intensité  $I$ , uniformément réparti sur la section de la plaque avec la densité volumique  $\vec{J} = J \vec{e}_x$ , ( $J > 0$ ).

Elle est alors placée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  ( $B > 0$ ), créé par des sources extérieures.

Le champ magnétique créé par le courant dans la plaque est négligeable devant le champ extérieur, et on suppose que le vecteur densité de courant est toujours porté par l'axe ( $Ox$ ) (circulation permanente des électrons).



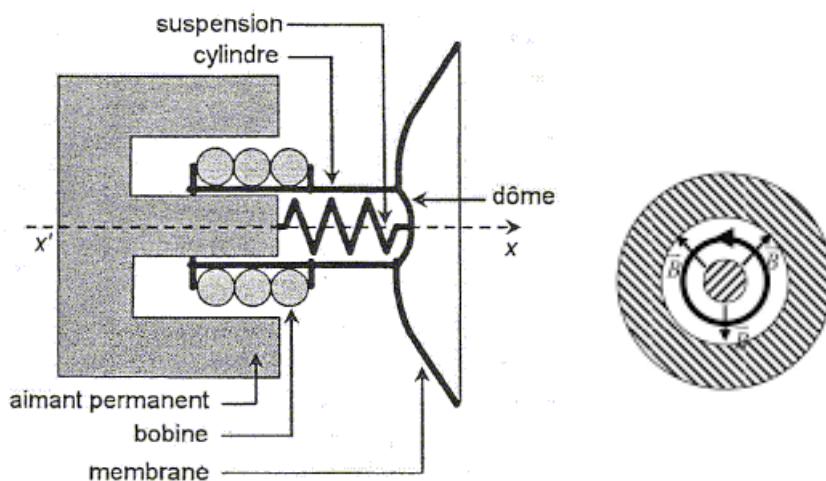
1. Exprimer le vecteur vitesse  $\vec{v}$  des électrons dans la plaque en fonction de  $\vec{J}$ ,  $n$  et  $e$  en l'absence de champ magnétique extérieur.
2. Lors de l'apparition d'un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ , le courant est dévié et il va y avoir accumulation de charges. Représenter sur un schéma ce phénomène.
3. En régime permanent, après que les charges se soient accumulées, le vecteur densité de courant  $\vec{J}$  est forcément parallèle à ( $Ox$ ) (sinon des charges sortiraient par les cotés de la plaque...), en déduire que ces charges font apparaître un champ électrique dit de Hall :  $\vec{E}_H = \frac{1}{ne} \vec{J} \wedge \vec{B}$ .
4. Exprimer les composantes de ce champ de Hall  $\vec{E}_H$ .
5. On considère 2 points  $M$  et  $N$  en vis-à-vis des faces 1 ( $y = -\frac{b}{2}$ ) et 2 ( $y = +\frac{b}{2}$ ). Calculer la différence de potentiel entre ces deux points  $U_H = V_N - V_M$  appelée tension de Hall.
6. Montrer que  $U_H$  s'écrit  $U_H = \frac{C_H}{h} \cdot I \cdot B$ , et exprimer la constante  $C_H$ . En quoi la mesure de cette tension de Hall peut-elle être utile ?
7. AN : Pour l'antimoniure d'indium  $InSb$ ,  $C_H = 375 \cdot 10^{-6} u_{SI}$ ,  $I = 0,1A$ ,  $h = 0,3mm$  et  $U_H = 88mV$ . Calculer la norme du champ  $B$ , ainsi que la densité volumique  $n$  en électrons par  $m^3$ .

Extrait du CNC 2016 - Physique II - TSI (Induction, Haut parleur) :

Un haut parleur électrodynamique est constitué d'une bobine plate d'axe ( $x'x$ ), comportant  $N$  spires de rayon  $a$ , et solidaire d'une membrane. L'ensemble bobine + membrane a pour masse totale  $m$  et peut se translater parallèlement à l'axe ( $x'x$ ). Lorsque la bobine s'écarte de sa position d'équilibre d'un écart algébrique  $x$ , elle est rappelée par une force élastique due à un ressort de raideur  $k$ . De plus, l'air produit sur la membrane une force de frottement visqueux, proportionnelle à sa vitesse de translation, qui peut s'écrire  $\vec{F}_f = -h.\vec{v}$  où  $h$  est une constante positive.

La réaction du support de la bobine est verticale et opposée au poids.

La bobine est placée dans un champ magnétique de la forme  $\vec{B} = B_0.\vec{u}_r$ , où  $B_0$  est une constante et  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire normal à ( $x'x$ ).



On applique aux bornes de la bobine une tension sinusoïdale :  $u(t) = U_M \cos(2\pi.f.t)$ , de fréquence  $f$  et on note par  $i(t)$  l'intensité du courant dans la bobine.

1. Exprimer la force de Laplace  $\vec{F}_L$  à laquelle la bobine est soumise.
2. Écrire le théorème de la résultante cinétique pour l'équipage mobile, et en déduire l'équation différentielle du mouvement : équation notée (M).
3. Exprimer pourquoi un mouvement de la membrane crée dans la bobine une force électromotrice d'induction  $e$ . Déterminer l'expression de cette force électromotrice  $e$ .
4. La bobine a une résistance  $R$  et une inductance  $L$ . Déterminer, alors, l'équation électrique dans ce circuit : équation notée (E).
5. Écrire les deux relations (M') et (E') liant les expressions complexes  $\underline{u}(t)$ ,  $\underline{i}(t)$  et  $\underline{v}(t)$  associées respectivement à  $u(t)$ ,  $i(t)$  et  $v(t)$ .
6. Éliminer la vitesse  $\underline{v}(t)$  entre les équations (M') et (E') pour faire apparaître une relation entre  $u(t)$  et  $i(t)$ . Définir alors l'impédance complexe  $\underline{Z}$  du circuit.

Extrait du CNC 2012 - Physique II - TSI ( Champ magnétique - Induction) :

Données utiles :

- Expression du rotationnel en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'un vecteur  $\vec{U}$  :

$$\vec{rot} \vec{U} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r U_\theta}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

- $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^5} dx = \frac{5\pi}{128}$

1. Magnétostatique dans le vide : Cette partie est consacrée à l'étude des propriétés générales du champ magnétique  $\vec{B}$ .

1.1. Équation de Maxwell :

1.1.1. Rappeler les équations de Maxwell de l'électromagnétisme dans le vide en présence d'une répartition volumique de charges électriques de densité  $\rho$  et de courant de densité  $\vec{j}$ .

1.1.2. Que deviennent ces équations en régime stationnaire indépendant du temps ?

1.2. Loi de Biot et Savart et symétries :

1.2.1. Donner l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  créé dans le vide par une répartition volumique de courants stationnaire de densité  $\vec{j}$ . Que devient cette expression pour une répartition linéaire de courant ?

1.2.2. Si la répartition de courant admet un plan de symétrie (P), quelle sera la direction du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point de ce plan ?

1.2.3. Même question si (P) est un plan d'antisymétrie de la répartition de courants.

Les questions suivantes concernant la forme intégrale des équations de Maxwell et les relations de passage à la traversée d'une surface ( $\Sigma$ ) déduites de ces formes intégrales.

1.3. Flux du champ magnétique :

1.3.1. Quelle est la propriété fondamentale du flux du champ magnétique  $\vec{B}$ ? Donner l'expression intégrale qui exprime cette propriété.

1.3.2. En déduire une relation de passage de  $\vec{B}$  de part et d'autre d'une surface ( $\sigma$ ).

1.3.3. Existe-t-il des monopôles magnétiques (charges magnétiques libres isolées qui seraient l'équivalent des charges électriques)? Conclure sur la forme des lignes de champ magnétiques.

1.4. Circulation du champ magnétique :

1.4.1. À partir des équations de Maxwell, établir le théorème d'Ampère. Est-il toujours valable dans le cas des régimes dépendants du temps ?

1.4.2. Établir la seconde relation de passage de  $\vec{B}$  de part et d'autre d'une surface ( $\Sigma$ ) parcourue par un courant surfacique  $\vec{j}_s$ .

1.5. Champ et potentiel créés par un dipôle magnétique :

Le potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique de moment  $\vec{M} = M \cdot \vec{u}_z$ , à un point  $M$  (figure 1), est donné par l'expression :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{M} \wedge \vec{OM}}{4\pi OM^3} \quad (1)$$

1.5.1. Quelle est la relation entre un potentiel-vecteur et le champ magnétique qui lui est associé ?

1.5.2. En déduire l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le dipôle magnétique en un point  $M$  repéré par  $(r, \theta, z)$  dans le système de coordonnées cylindrique d'axe ( $Oz$ ).

2. Étude de la chute d'un aimant permanent, de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{u}_z$ , qui tombe à l'intérieur d'un cylindre métallique creux, d'épaisseur  $e$  faible devant le rayon moyen  $a$ . Le cylindre métallique est vertical, son extrémité supérieure est placée en  $z = 0$  et sa longueur est  $L \gg a$  (figure 2). L'aimant est de la forme cylindrique de rayon légèrement inférieur à celui du cylindre métallique et de longueur  $l \ll L$ .

On suppose que, durant le mouvement de chute, le moment magnétique de l'aimant reste toujours vertical et dirigé vers le bas. La conductivité électrique du métal est  $\sigma$ . L'abscisse de l'aimant au cours de la chute est notée  $z_A(t)$ , l'axe ( $Oz$ ) étant orienté suivant la verticale descendante. Les frottements de l'air sont négligés. On suppose de plus que le champ magnétique créé par l'aimant n'est pas perturbé par la présence du cylindre.

Pour les applications numériques, on prendra :  $a = 1\text{cm}$ ;  $e = 1\text{mm}$ ;  $\mathcal{M} = 0,6\text{A.m}^2$ ;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{H/m}$  et  $g = 9,81\text{m/s}^2$

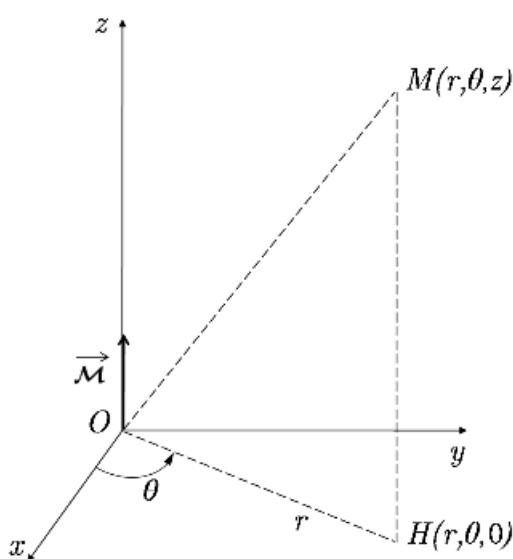


Figure 1 : Dipôle magnétique.

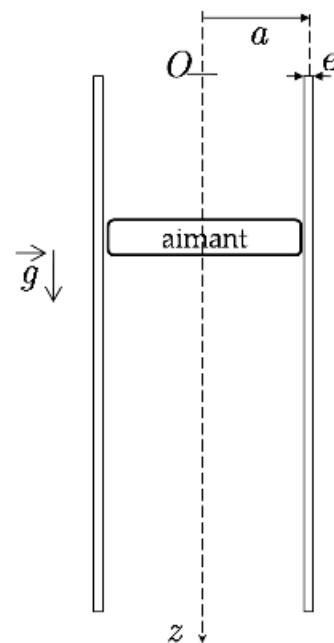


Figure 2 : Chute d'un aimant dans un conducteur métallique.

## 2.1. Courant induit dans le conducteur ;

2.1.1. En utilisant la relation (1), donner l'expression du potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$  créé par l'aimant en un point  $M$  de côte  $z$  du conducteur. Justifier que ce potentiel dépend du temps.

2.1.2. Déterminer l'expression du champ électrique  $\vec{E}(M)$  induit par les variations du potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$ . On notera  $v$  la vitesse de chute de l'aimant.

Puisque  $e \ll a$ , on suppose dans la suite que ce champ est uniforme sur l'épaisseur du métal.

- 2.1.3. En déduire l'expression de la densité volumique du courant induit  $\vec{j}$  ainsi créée dans le conducteur. On suppose que la loi d'Ohm est vérifiée dans le conducteur.
- 2.2. Force exercée par le conducteur sur l'aimant :  
Soit  $\vec{F}$  la force exercée par le conducteur sur l'aimant et  $F_z$  sa projection sur l'axe ( $Oz$ ).
- 2.3. Exprimer la force élémentaire  $d^2\vec{F}$  exercée par un élément de volume  $d^2V = ead\theta dz$  du conducteur sur l'aimant. En déduire la projection sur ( $Oz$ ) de la résultante  $dF_z$  créée par une couronne d'épaisseur  $dz$  du conducteur.
- 2.4. Déterminer la force de freinage exercée par le conducteur sur l'aimant. Montrer qu'elle est de type  $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ . Justifier l'utilisation de l'intégrale  $I$  donnée au début de l'énoncé et donner l'expression approchée de  $\alpha$ .
- 2.5. Calculer la valeur numérique de  $\alpha$  pour le cuivre :  $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 S.m^{-1}$ .
3. Étude du mouvement de chute de l'aimant dans le conducteur métallique.  
L'aimant de masse  $m = 2g$  est lancé dans le conducteur métallique, de longueur  $L = 1,5m$ , à l'instant  $t = 0$  en  $z = 0$  sans vitesse initiale.
- 3.1. Écrire l'équation différentielle du mouvement de l'aimant. Exprimer la vitesse de l'aimant  $v(t)$  et sa position  $z_A(t)$ .
- 3.2. Montrer que l'aimant atteint une vitesse limite  $v_l$  avec un temps caractéristique du régime transitoire  $\tau$ . Donner l'expression de  $v_l$  et  $\tau$  en fonction de  $\alpha$ ,  $m$  et  $g$ .
- 3.3. Calculer numériquement  $v_l$ ,  $\tau$  et  $z_A(\tau)$  en utilisant la valeur de  $\alpha$  trouvée à la question précédente, ou à défaut en prenant  $\alpha = 0,15 kg.s^{-1}$ . Commenter.
- 3.4. En déduire le temps de chute total  $T$  de l'aimant dans le conducteur et le comparer à celui  $T'$  de sa chute dans un tube de verre de mêmes caractéristiques géométriques. Commenter.
- 3.5. Proposer une application de ce dispositif.