CDS 23 janvier 2026

transcription approximative

Question 1

$$\vec{v} = r\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Question 2

On a $E_p(\vec{f})$. $\vec{f}$ étant conservative, on peut directement écrire

$$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

En faisant les calculs, on trouve $\vec{f} =$

Question 3

Le moment cinétique.

Son expression est :

$$\vec{L}_0 = \cdots = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

Il est constant parce que sa dérivée est nulle (produit vectoriel de $\vec{r}$ et $\vec{f}$, colinéaires).

Cela implique $r^2\dot{\theta} = const$. On l'appelle la constante des aires.

La vecteur $\vec{OM}$ balaye des aires égales en des temps égaux. C'est un conséquence immédiate de la conservation de l'énergie mécanique.

Question 4

$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$

$\vec{a} = \dot{v}\vec{e}\theta - v\dot{\theta}\vec{e}_r = -\dfrac{v^2}{r}\vec{e}_r + \dot{v}\vec{e}_\theta$

Question 5

En appliquant le principe fondamental à $\Sigma = \{\text{satellite}\}$, on trouve :

$$m\vec{a} = \vec{f}$$

On trouve $\dot{v} = 0$ et $-\dfrac{mv^2}{r} = -\dfrac{g_0 Mm}{r^2}$

D'où $v^2 = \dfrac{g_0 R_T^2}{r}$

Question 6

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_p = -\frac{g_0 m R_T^2}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{g_0 R_T^2}{r}$$

$$E_m = -\frac{1}{2}\frac{g_0 m R_T^2}{r} \leq 0$$

Question 7 : Application numérique (skipped)

Question 8

Seules des forces conservatives (gravitationnelles) agissent sur le satellite. Donc son énergie mécanique est conservée.

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = const$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{g_0 m R_T^2}{r}}_{=E_{p,eff}(r)}$$

On utilise l'expression de $\vec{L}_0$ pour écrire $\dot{\theta} = \dfrac{L_0}{mr^2}$.

On a donc

$$E_{p,eff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{g_0 m R_T^2}{r}$$

Donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{L_0^2}{2mr^2} - \dfrac{g_0 m R_T^2}{r}$

Question 9

Les orbites permises physiquement doivent vérifier $E_m \geq E_{p,eff,min}$.

Question 10

a) E_{m1} : hyperbolique.

E_{m2} : elliptique.

b) Pour la valeur $E_m = E_{p,eff,min}$, l'orbite est circulaire.

Question 11

$$\dot{r} = 0$$

(extremums de l'orbite elliptique, périhélie et aphélie)

$$a = \frac{r_b + r_h}{2}$$

Question 12

Trivial, on utilise l'expression trouvée précédemment et on remplace r par r_b et r_h.

$\alpha = -mg_0R_T^2$

$\beta = -\frac{L_0^2}{2m}$

Question 13

Trivial, on utilise les propriétés des racines et des coefficients des équations du second degré, on remplace dans l'équation initiale pour retrouver l'expression de E_m souhaitée en fonction de a.

Question 14

Environ -39 GJ.

Question 15

Trivial.

Question 16

$$\Delta E_m = E_{m,trans} - E_{m,basse}$$

Application numérique à faire.

Deuxième partie simple.

$$\Delta E_m / M_c = m_c$$

avec m_c la masse de carburant nécessaire et M_c le pouvoir calorifique du carburant.

Question 17

C'est un mélange de dioxygène et d'hydrogène liquide.

Question 18

$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 R_T^2}}$

On trouve $T \approx$ 1h30 pour une orbite basse.

Question 19

On dérive E_m et on retrouve le résultat souhaité (on n'oublie pas les frottements et l'expression de $\vec{v}$...).