R 15

Régime sinusoïdal forcé

15.1 Réponse d'un circuit RLC série à une excitation sinusoïdale

Considérons une association RLC, contenant un GBF.
Le Générateur Basse Fréquence (GBF) fournit une tension sinusoïdale $e\,(t)$:

$$e\,(t) = E\,\cos(\omega\,t + \varphi)$$

avec $\omega = 2\,\pi\,f$.
À l'aide de la loi des mailles, on obtient :

$$\frac{d^2 u_c\,(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{du_c\,(t)}{dt} + \omega_0^2\,u_c\,(t) = \omega_0^2\,e\,(t) = \omega_0^2\,\cos(\omega\,t + \varphi)$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$u_c\,(t) = u_{ch}\,(t) + u_{cp}\,(t)$$

Avec :

- $u_{ch}\,(t)$: Solution de l'équation homogène, caractéristique d'un régime transitoire.
- $u_{cp}\,(t)$: Solution particulière de l'équation avec second membre, caractéristique d'un régime permanent :

$$u_{cp}\,(t) = U_c\,\cos(\omega\,t + \psi)$$

15.2 Impédance complexe

15.2.1 Impédance complexe d'un dipôle

Considérons un dipôle en régime sinusoïdal forcé.
On obtient, en utilisant les complexes :

$$\underline{i}\,(t) = \underline{I_M}\,e^{j\,\omega\,t}$$

avec $\underline{I_M} = I_M\,e^{j\,\varphi}$

$$\underline{u}\,(t) = \underline{U_M}\,e^{j\,\omega\,t}$$

avec $\underline{U_M} = U_M\,e^{j\psi}$

— Impédance complexe —

On appelle impédance complexe le scalaire $\underline{Z}$ défini par :

$$\underline{u}\,(t) = \underline{Z}\,\underline{i}\,(t)$$

D'où :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U_M}}{\underline{I_M}}$$

Soit ϕ l'argument de $\underline{Z}$:

$$\phi = \psi - \varphi$$

On observe que :
- $\phi = 0$: $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase.
- $0 < \phi < \pi$: $u(t)$ est en avance par rapport à $i(t)$ dans le dipôle.
- $-\pi < \phi < 0$: $u(t)$ est en retard par rapport à $i(t)$ dans le dipôle.

15.2.1.1 Impédance d'un conducteur ohmique

Pour un conducteur ohmique, on obtient :

$$\underline{Z_R} = R$$

On observe donc que $\phi = 0$, il n'y a donc pas de déphasage entre $u_R(t)$ et $i_R(t)$ dans une résistance.

15.2.1.2 Impédance d'une bobine

Pour une bobine, on obtient :

$$\underline{Z_L} = j\,\omega\,L$$

On observe donc que $\phi = \frac{\pi}{2}$: $u_L(t)$ est en quadrature avance par rapport à $i_L(t)$.

15.2.1.3 Impédance d'un condensateur

Pour un condensateur, on obtient :

$$\underline{Z_C} = \frac{1}{j\,\omega\,C}$$

On observe donc que $\phi = \frac{-\pi}{2}$: $u_C(t)$ est en quadrature retard par rapport à $i_C(t)$.

15.2.1.4 Loi d'additivité

- Pour des dipôles en série :

$$\underline{Z_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z_k}$$

- Pour des dipôles en dérivation :

$$\underline{Y_{\text{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z_{\text{eq}}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z_k}}$$

15.3 Diagramme de Fresnel

Considérons une association RLC en série.
Par application de la loi des mailles :

$$\underline{E_M} = \underline{U_R} + \underline{U_C} + \underline{U_L}$$

On construit à partir de ce moment le diagramme de Fresnel :
- On définit une orientation pour les angles, puis on fixe un axe de référence, en général $\underline{U_R} = R\,\underline{I_M}$.
- Puis on ajoute $\underline{U_C}$ et $\underline{U_L}$ en respectant la convention d'orientation des angles.

Grâce à ce diagramme, on détermine rapidement le déphasage ϕ entre $\underline{I_M}$ et $\underline{E_M}$ à l'aide de $\tan\phi$:

$$\tan\phi = \frac{\underline{Z_L} - \underline{Z_C}}{\underline{Z_R}}$$

Dans le cas d'un circuit en dérivation, on peut définir ce diagramme à l'aide des courants et de la loi des nœuds.

15.4 Théorèmes généraux en régime sinusoïdal forcé

15.4.1 Lois de Kirchhoff

15.4.1.1 Loi des nœuds

$$\sum_{\text{Entrant}} \underline{I_M} = \sum_{Sortant} \underline{I_M}$$

15.4.1.2 Loi des mailles

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{U_{M_k}} = 0$$

15.4.2 Diviseur de tension

Considérons l'association de n conducteurs ohmiques en série entre deux points A et B.
Soit U_k la tension parcourant le k^{me} conducteur ohmique, de résistance R_k :

$$\underline{U_{M_k}} = \left(\frac{\underline{Z_k}}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Z_k}}\right) \underline{U_M}$$

15.4.3 Diviseur de courant

Considérons deux résistances en dérivation.
Soit i le courant entrant, i_1 le courant traversant la résistance R_1.
On obtient :

$$\underline{I_{M_1}} = \left(\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\right) \underline{I}$$

15.4.4 Théorème de Kennelly

Considérons un montage en étoile contenant les dipôles d'impédances $\underline{Z_1}, \underline{Z_2}, \underline{Z_3}$.
On obtient le montage équivalent en triangle, contenant les impédances $\underline{z_1}, \underline{z_2}, \underline{z_3}$, à l'aide des relations :

$$\underline{y_1} = \frac{\underline{Y_2}\,\underline{Y_3}}{\underline{Y_1} + \underline{Y_2} + \underline{Y_3}}$$

$$\underline{y_2} = \frac{\underline{Y_1}\,\underline{Y_3}}{\underline{Y_1} + \underline{Y_2} + \underline{Y_3}}$$

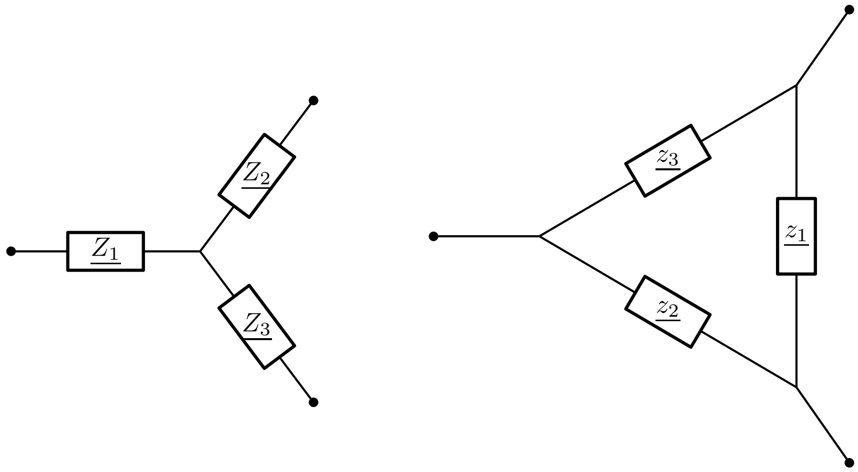
$$\underline{y_3} = \frac{\underline{Y_1}\,\underline{Y_2}}{\underline{Y_1} + \underline{Y_2} + \underline{Y_3}}$$

On a alors $\underline{y_k} = \dfrac{1}{\underline{z_k}}$ et $\underline{Y_k} = \dfrac{1}{\underline{Z_k}}$.
Inversement, on peut exprimer les résistances $\underline{Z_k}$ en fonction des résistances $\underline{z_k}$:

$$\underline{Z_1} = \frac{\underline{z_2}\,\underline{z_3}}{\underline{z_1} + \underline{z_2} + \underline{z_3}}$$

$$\underline{Z_2} = \frac{\underline{z_1}\,\underline{z_3}}{\underline{z_1} + \underline{z_2} + \underline{z_3}}$$

$$\underline{Z_3} = \frac{\underline{z_1}\,\underline{z_2}}{\underline{z_1} + \underline{z_2} + \underline{z_3}}$$



15.4.5 Théorème de Millman

Considérons un circuit composé de plusieurs dipôles : Sources de courants, sources de tensions, résistances. Soient A et B deux points du circuits.
Le théorème de Millman permet de déterminer la tension U_{AB} de la façon suivante :

— Théorème de Millman —

$$\underline{E_M}_{AB} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{E_M}_k}{\underline{Z}_k} + \sum_{k=1}^{m} \underline{I_M}_k}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_k}}$$

15.5 Puissance instantanée et puissance moyenne

15.5.1 Puissance instantanée

Considérons un dipôle quelconque en convention récepteur.

— Puissance instantanée —

On appelle puissance instantanée, notée $\mathcal{P}(t)$, dans le dipôle AB, en convention récepteur, le produit :

$$\mathcal{P}(t) = u(t)\, i(t)$$

Les unités :
Son unité est le Watt.

On obtient :

$$\mathcal{P}(t) = U_M \cos(\omega t + \phi)\, I_M \cos(\omega t)$$

où ϕ est le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$ dans le dipôle.
$\mathcal{P}(t)$ ne s'exprime jamais avec des grandeurs complexes.

15.5.2 Puissance moyenne

— Puissance moyenne —

La puissance moyenne, notée $\langle \mathcal{P}(t) \rangle$, d'un signal périodique de période T est définie par :

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathcal{P}(t)\, dt$$

La puissance moyenne consommée par un dipôle en régime sinusoïdal forcé est alors :

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle = \frac{U_M\, I_M}{2} \cos(\phi)$$

15.5.3 Grandeurs efficaces

— Valeur efficace —

Soit $f(t)$ une fonction périodique, de période T.
La valeur efficace de $f(t)$, notée F_{eff}, est défini par :

$$F_{\text{eff}} = \sqrt{\langle f^2(t) \rangle}$$

avec $\langle f^2(t) \rangle$ la valeur moyenne de $f^2(t)$

En régime sinusoïdal forcé, on obtient :

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_M}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

15.5.4 Facteur de puissance

— Facteur de puissance —

Avec les valeurs efficaces en régime sinusoïdal forcé, on obtient :

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \cos\phi$$

On appelle $\cos\phi$ facteur de puissance du dipôle.

15.5.5 Puissance consommée, Puissance dissipée

En régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne consommée par une résistance est :

$$\langle \mathcal{P}_R(t) \rangle = \frac{R\, I_M^2}{2}$$

La puissance moyenne consommée par un solénoïde (une bobine) ou par un condensateur est nulle car $\phi = \pm\dfrac{\pi}{2}$