

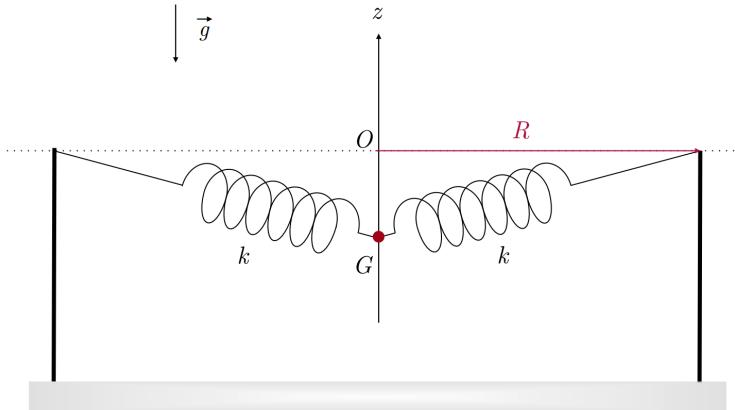
Un trampoline se présente comme une toile faite de bandes de nylon tressées et reliées à un cadre métallique circulaire par une centaine de ressorts, ces derniers étant recouverts par un tapis semi-rigide pour la sécurité de l'utilisateur.

Dans cet exercice, on recherche la ou les conditions permettant le décollage sans élan d'un gymnaste lorsqu'il oscille simplement par l'action du tapis du trampoline.

On modélise le gymnaste par un point matériel  $G$  de masse  $m$  positionné au centre du tapis et le tapis du trampoline par deux ressorts identiques sans masse, de même longueur à vide  $\ell$ , de même raideur  $k$ , attachés au point  $G$ . Pour tendre le tapis du trampoline, la longueur à vide des ressorts est légèrement inférieure au rayon  $R$  du cadre métallique, on note alors  $\ell = \alpha R$  avec  $\alpha$  légèrement inférieur à l'unité.

Soit  $Oz$  l'axe des cotes dont l'origine  $O$  est prise au centre du tapis lorsque ce dernier est horizontal. La position du point  $G$  est alors repérée par sa cote  $z$ . On note  $g$  l'intensité de la pesanteur.

1. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle élastique  $E_{pe}$  en fonction de  $k$ ,  $R$ ,  $z$  et  $\alpha$ .
2. Montrer que dans le cas où  $|z| \ll R$ , la force élastique  $\vec{F}$  est équivalente à celle d'un ressort vertical d'allongement  $z$  et de constante de raideur apparente  $k_{app}$  à exprimer en fonction de  $k$  et  $\alpha$ . Commenter le résultat.
3. En se plaçant dans l'hypothèse de la question précédente, déterminer l'équation différentielle du mouvement du point  $G$ . Donner la forme générale des solutions.



Le modèle proposé n'est en fait pas réaliste car il suppose que le gymnaste soit lié au tapis ce qui ne permet pas d'effectuer un décollage. D'autre part le tapis du trampoline attire le gymnaste vers le bas dès que  $z > 0$ , ce qui aussi ne convient pas. On modélise alors l'action du trampoline sur le gymnaste par une force  $\vec{N}$  de contact. Compte tenu des résultats précédents, on fait cependant

l'hypothèse que tant que le gymnaste est en contact avec le tapis, la cote  $z$  du points  $G$  vérifie l'équation suivante  $z(t) = z_c - Z_1 \cos(\omega t)$  avec  $Z_1 > 0$ .

4. Déterminer les caractéristiques de la force  $\vec{N}$ .
5. Déterminer la condition portant sur  $Z_1$  et  $\omega$  pour que le point  $G$  quitte le tapis du trampoline. Commenter le résultat.
6. La condition précédente étant vérifiée, déterminer la cote  $z_d$  et la vitesse  $v_d$  au moment du décollage du point  $G$ .
7. Quelle est la cote  $z_S$  atteinte par le point  $G$  au sommet  $S$  du saut si les frottements sont négligés.