

TD1 Cinématique du point

Des vecteurs pour se repérer et trouver vitesses et accélérations

Vecteur position

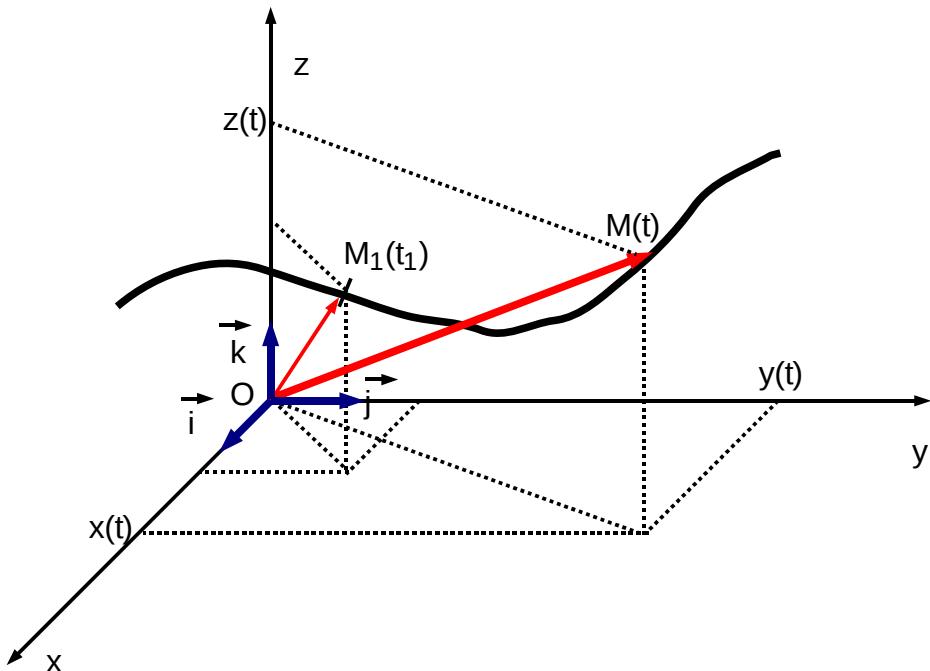
Pour étudier le mouvement d'un point M au cours du temps, il est nécessaire de :

- préciser le référentiel et le repère qui lui est lié $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- préciser la position du point par son vecteur position :

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

Remarque : on utilise parfois l'abscisse curviligne $s = \widehat{O'M}$ sur la trajectoire curviligne d'origine O'.



Vecteur vitesse

Par définition le vecteur vitesse est la dérivée première du vecteur position :

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d \overrightarrow{OM(t)}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{k} \quad (\text{vitesse instantanée : unité m.s}^{-1})$$

A tout moment le vecteur \vec{v} est tangent à la trajectoire.

On peut définir un vecteur unitaire \vec{T} tangent à la trajectoire, dirigé dans le sens des abscisses curvilignes croissantes et dont l'origine est le point M se déplaçant sur la trajectoire. Le vecteur vitesse s'écrit alors :

$$\vec{v} = \frac{d \widehat{OM}}{dt} \cdot \vec{T} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} = \bar{v} \cdot \vec{T} \quad (\text{où } \bar{v} \text{ est la mesure algébrique de } \vec{v} \text{ sur } \vec{T})$$

Vecteur accélération

Le vecteur accélération est défini par

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \cdot \vec{k} \quad (\text{unité m.s}^{-2})$$

Exercice 1

Dans un référentiel lié à la terre, la trajectoire d'un point est repérée par $x(t)=A.\sin(\omega t)$ et $y(t)=B.\cos(\omega t)$ et $z(t)=0$.

- 1°) Calculer les composantes du vecteur vitesse \vec{v}
- 2°) Calculer les composantes du vecteur accélération \vec{a}
- 3°) Quel est le type de trajectoire suivie par le point matériel ? Représenter \vec{v} et \vec{a} pour $t=0$, $t=\pi/2\omega$, $t=\pi/\omega$ et $t=3\pi/2\omega$.

Base de Frenet

La base de Frenet est composée du vecteur \vec{T} précédemment défini (tangent à la trajectoire) et d'un vecteur \vec{N} normal à \vec{T} donc à la trajectoire. (\vec{N} est orienté vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire). Cette base n'est pas fixe puisqu'elle dépend du point de la trajectoire où se trouve le point M. Son intérêt est qu'elle permet de d'écrire le vecteur accélération sous la forme :

$\vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N}$ avec $a_T = \frac{dv}{dt}$ accélération tangentielle et $a_N = \frac{v^2}{\rho}$ où v est le module du vecteur vitesse et ρ le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré ($\rho=R=cste$ si la trajectoire est un cercle). a_T et a_N sont évidemment des fonctions du temps.

Exercice 2

Calculer le rayon de courbure de la trajectoire de l'exercice précédent aux points correspondant aux temps $t=0$, $t=\pi/2\omega$, $t=\pi/\omega$ et $t=3\pi/2\omega$.

Les principaux types de mouvement

- Le mouvement rectiligne et uniforme : un mobile est en mouvement rectiligne et uniforme si son vecteur vitesse reste constant : $\vec{v} = \vec{v}_0 = \text{cste}$. Le vecteur accélération du point mobile est donc nul.
- Le mouvement rectiligne uniformément varié : un mobile est en mouvement rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est rectiligne et si son vecteur accélération est constant : $\vec{a} = \vec{a}_0 = \text{cste}$. Les vecteurs \vec{a} , \vec{v} et \overrightarrow{OM} sont alors colinéaires. Le mouvement est uniformément accéléré si $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ (\vec{a} et \vec{v} sont de même sens). Le mouvement est uniformément retardé si $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$ (\vec{a} et \vec{v} sont de sens contraires)
- Le mouvement circulaire pour lequel la trajectoire est un cercle. Dans ce cas :

- le rayon de courbure de la trajectoire est constant $\rho=R=\text{constante}$
- L'abscisse curviligne s'écrit $s=R\theta$ où θ est l'angle, en radians, repérant la position du point M sur le cercle. S et θ sont, bien sûr, des fonctions du temps.

On en déduit :

- la vitesse linéaire tangentielle : $v=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\theta}{dt}=R\omega$ ($\omega=\frac{d\theta}{dt}$ est appelée vitesse angulaire).
- L'accélération tangentielle : $a_T=\frac{dv}{dt}=R\cdot\frac{d\omega}{dt}=R\frac{d^2\theta}{dt^2}=R\ddot{\omega}=R\ddot{\theta}$ et $\vec{a}_T=R\frac{d\omega}{dt}\vec{T}$. La quantité $\frac{d\omega}{dt}$ est l'accélération angulaire.
- L'accélération normale : $a_N=\frac{v^2}{R}=\omega^2\cdot R$ et $\vec{a}_N=\frac{v^2}{R}\vec{N}=R\cdot\omega^2\cdot\vec{N}$

Cas particulier : mouvement circulaire uniforme.

Le cercle est, dans ce cas, décrit à la vitesse v constante (en module). On a alors $\omega=\text{cste}$, $a_T=0$ et $a_N=\omega^2R=\text{cste}$.

On appelle période la quantité $T=2\pi/\omega$.

Exercice 3

Une bille assimilée à un point matériel, est lancée dans le sens montant dans une gouttière rectiligne inclinée (voir figure 1). Dans le repère $(0, \vec{i})$ (ascendant) choisi selon la trajectoire, à la date $t=0$, la bille occupe la position M_0 ($x_0=5\text{m}$) et a une vitesse $\vec{v}_0=3\cdot\vec{i}$. Elle est soumise à une accélération constante $\vec{a}=-2\cdot\vec{i}$

- 1°) A quelle date t_1 et en quel point M_1 la bille s'arrête-t-elle ?
- 2°) A quelle date t_2 repasse-t-elle en M_0 ? Quel est alors son vecteur vitesse ?
- 3°) A quelle date t_3 passe-t-elle à l'origine ?
- 4°) Préciser les phases de son mouvement pour $t \geq 0$

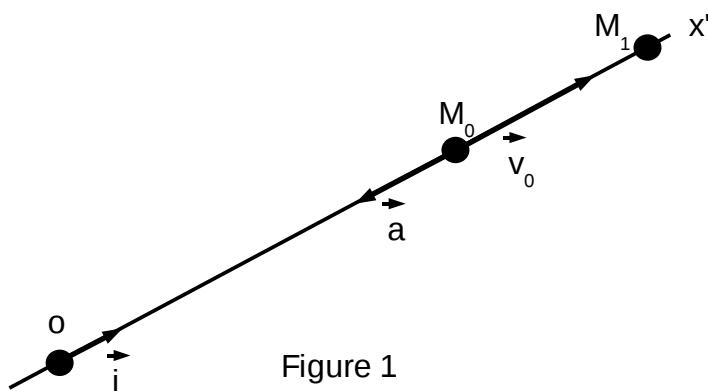


Figure 1

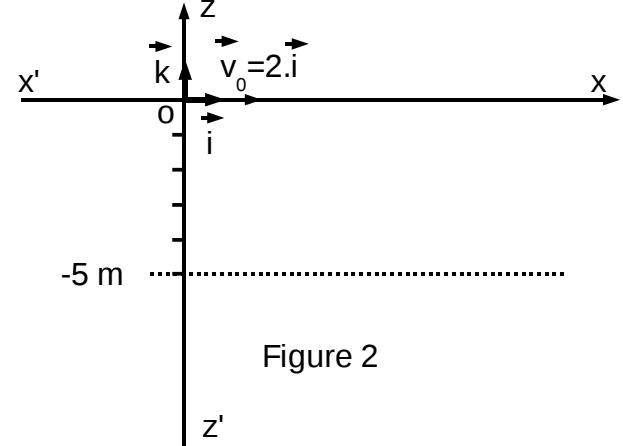


Figure 2

Exercice 4 Mouvement parabolique

Dans le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{k})$ (\vec{k} vertical ascendant voir figure 2) un projectile M supposé ponctuel est lancé dans l'espace à partir du point O à la date

$t=0$ avec une vitesse $\vec{v}_0 = 2\vec{i}$. Il subit une accélération constante $\vec{a} = -10\vec{k}$.

- 1°) Montrer que la trajectoire est plane. Déterminer ce plan.
- 2°) Écrire les lois horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement du projectile puis l'équation cartésienne $z=f(x)$ de sa trajectoire.
- 3°) A la date $t_1=0,5s$ déterminer :
 - le vecteur vitesse \vec{v}_1 du projectile
 - le module v_1 de ce vecteur
 - les coordonnées de la position M_1 du projectile.
- 4°) A quelle date t_2 le projectile rencontre-t-il le plan $z=-5m$?

Exercice 5 Mouvement circulaire uniforme

On admet que la terre se déplace d'un mouvement circulaire uniforme autour du soleil. La distance terre – soleil est égale à 150.10^6 km. Calculer :

- 1°) La période de révolution de la terre autour du soleil en secondes
- 2°) La distance parcourue par le centre de gravité G de la terre pendant une période.
- 3°) La vitesse angulaire de la terre dans sa rotation autour du soleil.
- 4°) La vitesse de G sur sa trajectoire.
- 5°) Les accélérations tangentielle et normales de G.

TD2 Cinématique des solides

Nous nous sommes intéressés jusqu'à présent à un point en mouvement, et pour aller plus loin nous allons nous intéresser à des solides (ensemble de points) et en particulier aux robots. La cinématique des robots est l'étude des positions, vitesses et accélération des éléments d'un robot ("robot kinematics" en anglais).

Formalisme matriciel

Une matrice est un tableau respectant certaines règles d'addition et de multiplication. L'addition étant relativement simple nous présentons seulement la multiplication :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ qui s'écrit :}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{00} \cdot b_{00} + a_{01} \cdot b_{10} + a_{02} \cdot b_{20} & a_{00} \cdot b_{01} + a_{01} \cdot b_{11} + a_{02} \cdot b_{21} & a_{00} \cdot b_{02} + a_{01} \cdot b_{12} + a_{02} \cdot b_{22} \\ a_{10} \cdot b_{00} + a_{11} \cdot b_{10} + a_{12} \cdot b_{20} & a_{10} \cdot b_{01} + a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{10} \cdot b_{02} + a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{20} \cdot b_{00} + a_{21} \cdot b_{10} + a_{22} \cdot b_{20} & a_{20} \cdot b_{01} + a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{20} \cdot b_{02} + a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Point dans l'espace

Un point est donné par $p_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$. Le signe T est là pour la transposée (transformation des lignes en colonnes) et est utilisé régulièrement tout simplement pour économiser de l'espace sur la page. Nous utiliserons donc la même représentation que dans le TD 1 pour les points mais sans faire référence aux vecteurs des bases.

Opérateurs

Un opérateur est donné par un tableau appelé matrice permettant de passer d'un point à un autre :

$$p_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = T \cdot p_1 = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{xx} \cdot x_1 + t_{xy} \cdot y_1 + t_{xz} \cdot z_1 \\ t_{yx} \cdot x_1 + t_{yy} \cdot y_1 + t_{yz} \cdot z_1 \\ t_{zx} \cdot x_1 + t_{zy} \cdot y_1 + t_{zz} \cdot z_1 \end{pmatrix}$$

T est appelée matrice de transformation (ne pas confondre avec le symbole de transposition). Il s'agit encore d'un produit matriciel. La transformation la plus courante pour nous sera un changement de repère (voir TP0).

Coordonnées homogènes

En coordonnées homogènes une composante supplémentaire est ajoutée à chaque point qui représente une sorte de facteur d'échelle.

$p_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)^T$. Il est alors conventionnel de considérer que la projection de ce point dans l'espace 3D est alors :

$$p_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ w_1, & w_1, & w_1 \end{pmatrix}^T$$

Les points sont en général représenté par un facteur d'échelle 1 :

$p_1 = (x_1, y_1, z_1, 1)^T$ qui devient donc un point en coordonnées homogènes

Une direction peut être représentée par un facteur d'échelle nulle qui envoie le point à l'infini :

$q_1 = (x_1, y_1, z_1, 0)^T$ représente une direction.

Transformation homogène [groupe SE(3)]

Une transformation homogène va permettre de passer d'un point en coordonnées homogènes à un autre point en coordonnées homogènes. C'est donc un tableau 4x4 qui va d'ailleurs permettre de faire des choses impossibles avec les matrices 3x3. Par exemple :

$$p_2 = T \cdot p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ y_1 + y_3 \\ z_1 + z_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

permet de réaliser une translation.

La colonne ajoutée dans la matrice de transformation permet toujours de réaliser une translation.

Les matrices de transformation homogènes peuvent être utilisées pour les changements de repères. Nous allons nous intéresser au cas à deux dimensions seulement, même s'il n'a pas beaucoup d'intérêt.

Exemple d'une simple rotation 2D

Une rotation autour de l'axe z est donnée par $R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Application 2D : cinématique d'un robot ayant des bras articulés

Exemple d'un bras manipulateur trois axes

Les équations ci-dessous utilisent des matrices homogènes 3x3 puisque c'est un cas à deux dimensions (figure à droite)

La pose du premier bras relativement au repère est donné par :

$$T_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\textbf{ATTENTION} : \text{ceci est une matrice homogène})$$

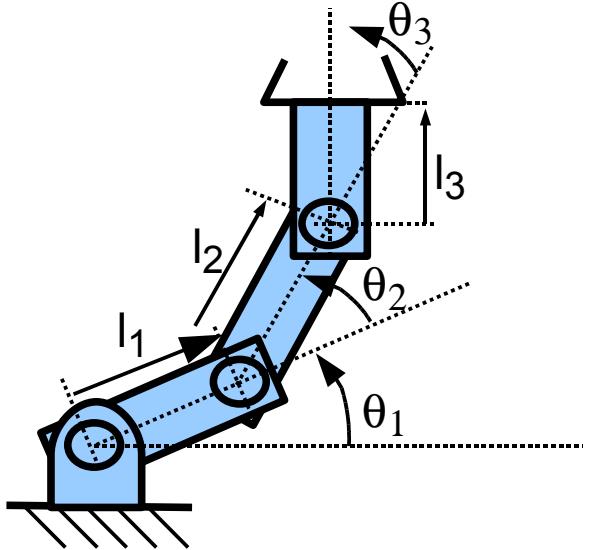
La pose du second bras relativement au premier est donnée par :

$$T_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & l_1 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ qui}$$

correspond à une rotation d'angle θ_2 et une translation l_1 si l_1 est la longueur du premier bras.

La pose du troisième bras relativement au second est donnée par :

$$T_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & l_2 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



La pose de la pince de préhension relativement au troisième bras est donnée par :

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution cinématique directe est le produit des quatre matrices :

$$T = T(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans laquelle on a utilisé les notations : $c_1 \equiv \cos(\theta_1)$, $s_1 \equiv \sin(\theta_1)$, $c_{12} \equiv \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{12} \equiv \sin(\theta_1 + \theta_2)$, $c_{123} \equiv \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

Ainsi l'origine se trouve déplacé comme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les relations cinématiques en résultant sont :

$$x = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$y = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

Un problème pratique important est d'inverser tout cela : connaissant x et y trouver θ_1 , θ_2 et θ_3 , mais nous n'aborderons pas ce problème.

Application 2D : cinématique d'un robot autoporteur

Nous allons nous intéresser maintenant à plusieurs types de robot autoporteurs.

Robot autonome différentiel

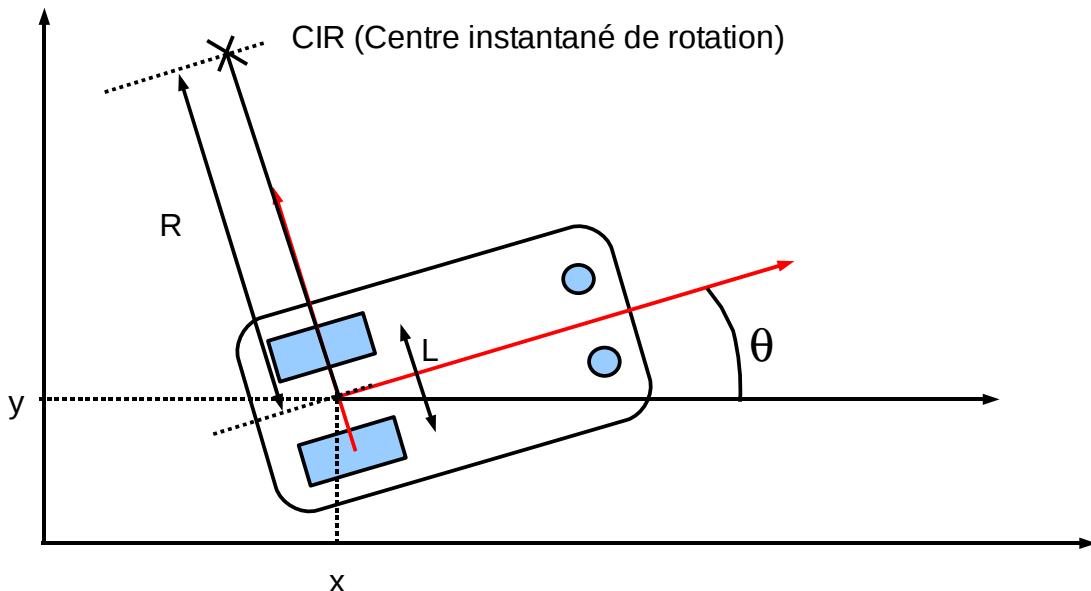
Un robot différentiel est un robot ayant deux roues autopropulsées indépendantes et une ou deux sphères directionnelles. Un schéma est donné un peu plus loin.

Deux repères sont à considérer, celui du laboratoire et celui du robot. On va s'intéresser à ce qui se passe dans les deux repères.

Dans le repère du laboratoire, le CIR (Centre Instantané de Rotation) est donné par :

$$CIR = (x - R \cdot \sin(\theta), y + R \cdot \cos(\theta))^T \quad \text{si } R \text{ est le rayon de courbure de la trajectoire.}$$

$R - L/2$ est le rayon de courbure de la trajectoire de la roue gauche
 $R + L/2$ est le rayon de courbure de la trajectoire de la roue droite



Dans la suite tout ce qui concerne la roue droite sera indiqué d et la roue gauche indiqué g.

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v_d(t)}{R+L/2} \\ \omega &= \frac{v_g(t)}{R-L/2} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{v_d(t) - v_g(t)}{L} \\ R(t) &= \frac{L}{2} \frac{v_g(t) + v_d(t)}{v_g(t) - v_d(t)} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{v(t) = \omega(t) \cdot R(t) = \frac{1}{2} \cdot (v_d(t) + v_g(t))}$$

Modèle cinématique dans repère du robot

Si r est le rayon commun de chacune des roues on peut noter sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r/2 & r/2 \\ 0 & 0 \\ -r/L & r/L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_g(t) \\ \omega_d(t) \end{pmatrix}$$

Modèle cinématique dans le repère du laboratoire

On a vu plus haut $v(t) = \omega(t) \cdot R(t) = \frac{1}{2} \cdot (v_d(t) + v_g(t))$ et $\omega(t) = \frac{v_d(t) - v_g(t)}{L}$.

Il est aussi facile d'obtenir à partir du schéma :

$$\dot{x}(t) = v(t) \cdot \cos(\theta(t)) \quad \text{et donc} \quad x(t) = \int_0^t v(t) \cdot \cos(\theta(t)) dt$$

$$\dot{y}(t) = v(t) \cdot \sin(\theta(t)) \quad \text{et donc} \quad y(t) = \int_0^t v(t) \cdot \sin(\theta(t)) dt$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t) \quad \text{et donc} \quad \theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt$$

Tout ceci peut encore se condenser sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

Propriété

Propriété très importante :

$$\theta(t) = \frac{r \left(\int_0^t \omega_d(t) dt - \int_0^t \omega_g(t) dt \right)}{L}$$

est toujours vrai quelque soit la

trajectoire.

Exercice 1

Écrire les équations ci-dessus en utilisant le formalisme homogène.

Pour éviter des calculs trop longs nous traiterons un exemple pratique avec SCILAB.

TP - 0 SCILAB : initiation

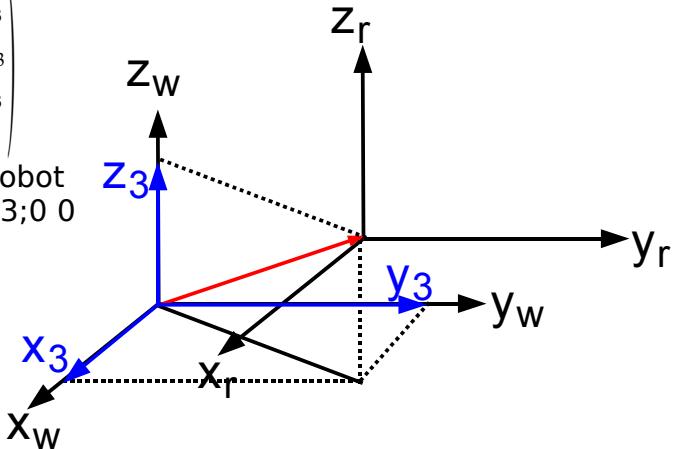
Utilisation de SCILAB

Point : $p_1 = (x_1, y_1, z_1, 1)^T$ s'écrit $p=[x1;x2;x3;1]$; en SCILAB avec des valeurs numériques pour $x1$, $x2$ et $x3$.

Changement de repère (translation) :

$$p_w = T \cdot p_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r + x_3 \\ y_r + y_3 \\ z_r + z_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les indices w représente world et r représente robot
La matrice T s'écrit $T=[1\ 0\ 0\ x3; 0\ 1\ 0\ y3; 0\ 0\ 1\ z3; 0\ 0\ 1]$; en SCILAB



Exercice 1 (SCILAB)

1°) Pour une translation simple de 3 sur l'axe y, chercher la matrice de changement de repère T.

Utiliser cette matrice pour calculer les points $p_{1r}=(0,-3,0,1)^T$ $p_{2r}=(0,0,0,1)^T$ et $p_{3r}=(5,7,15,1)^T$ dans le repère world.

Calculer au contraire les points $p_{1w}=(84,84,84,1)^T$ et $p_{2w}=(4,-4,4,1)^T$ dans le repère du Robot si T^{-1} s'écrit inv(T) en SCILAB.

2°) Un véhicule v se déplace sur une montagne m. A un instant t donné la relation entre les deux repères est donné par la figure ci-contre.

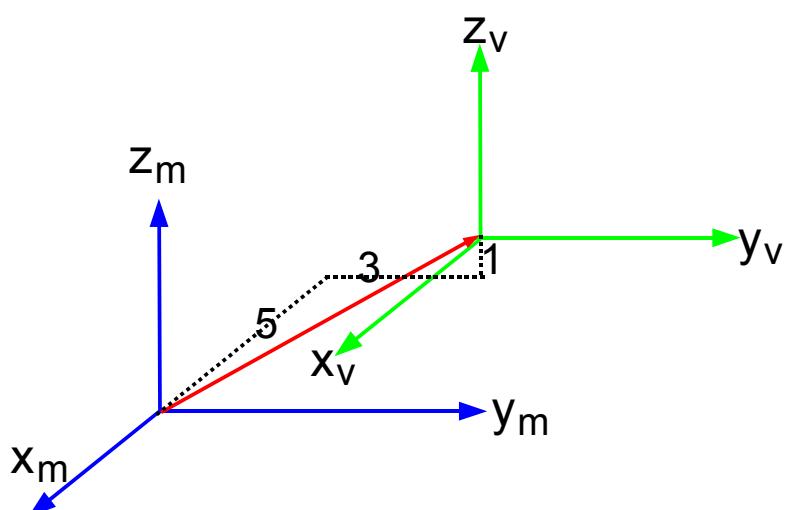
Trouver la matrice de passage du repère du véhicule vers le repère de la montagne et calculer

$$p_{1v}=(10,6,14,1)^T$$

$$p_{2v}=(4,-5,-1,1)^T$$
 et

$p_{3v}=(5,-1,-1,1)^T$ dans le repère de la montagne.

Calculer la matrice de passage inverse et en déduire la position



du point $p_{lm} = (84,84,84,1)^T$ dans le repère du véhicule.

Indications SCILAB :

Les instructions peuvent être placées dans un fichier (qu'on appelle un *script*) à l'aide d'un éditeur de texte (atteint dans SCILAB par Applications->SciNotes). Si on nomme par exemple le fichier *toto.sce*, on peut alors exécuter le script avec l'instruction :

```
-->exec toto.sce
```

Le langage Scilab permet aussi de définir de nouvelles fonctions. Le mot-clé **function** est utilisé pour déclarer le début d'une fonction dans un fichier texte qui se termine par **endfunction**.

Noter l'utilisation de "://" pour indiquer les commentaires. Si la fonction *mafond*, est définie dans le fichier *mafond.sci* elle peut alors être "chargée" et utilisée dans Scilab comme suit :

```
-->getf mafond.sci
```

Changement de repère (rotation)

Une rotation autour de l'axe z s'écrit :

$$p_w = T \cdot p_r = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r \cos(\theta) - y_r \sin(\theta) \\ x_r \sin(\theta) + y_r \cos(\theta) \\ z_r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il est naturellement possible de combiner une rotation et une translation.

Exercice 2

Dans un référentiel lié au soleil, la trajectoire de la terre T est repérée par $x_T(t)=A \cdot \sin(\omega t)$ et $y_T(t)=B \cdot \cos(\omega t)$ et $z_T(t)=0$ avec $A=145$, $B=154$ et $\omega=2\pi$.

A est en million de km et la période en année : $T=1$.

Pour générer 100 points de temps : $t=[0:0.01:1];$

Pour générer $x_T(t)$: $x_T=145 * \sin(2 * 3.14 * t);$

1°) Générer $y_T(t)$ et tracer la trajectoire ($plot(x_T,y_T);$) de la terre

2°) Une étoile fixe par rapport au soleil se trouve à 4 années lumières sur l'axe des x du repère du soleil. Quelle est la trajectoire de cette étoile dans le repère Terre qui est en seule translation (pas de rotation des axes du repère Terre).

3°) Quelle est la trajectoire de cette même étoile dans le repère de Frenet associé à la terre ?

4°) Mars a une période de $T_M=1,88$ années et une trajectoire (très approximative) de la forme :

$x_M(t)=A' \cdot \sin(\omega_M t)$ et $y_M(t)=B' \cdot \cos(\omega_M t)$ et $z_M(t)=0$ avec $A'=240$, $B'=216$ et $\omega_M=2\pi/T_M$. Quelle est la trajectoire de Mars perçue par la terre sur 4 ans ?

Mais revenons sur terre... avec nos robots

Exercice 3 (unités cm et cm.s⁻¹)

On cherche une trajectoire de robot autonome différentiel dans le repère du laboratoire.

Son équation dynamique dans ce repère est :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \omega(t) = \frac{v_d(t) - v_g(t)}{L} \quad \text{et} \quad v(t) = \omega(t) \cdot R(t) = \frac{1}{2} \cdot (v_d(t) + v_g(t))$$

1°) On donne :

```
t=[0:0.1:10]; //intervalle de 10 s.
vd=10+5*sin(2*t); // est la vitesse de la roue droite en fonction du temps
vg=5+2.5*cos(3*t); // vitesse de la roue gauche en fonction du temps
```

Grapher $\omega(t)$ pour $L=0.1$ m ainsi que $v(t)$.

2°) Chercher dans la documentation SCILAB :

```
integrate et inttrap // (trapz en MATLAB)
```

2-1°) Écrire une fonction function $\omega=\underline{\omega}_{\underline{\underline{\omega}}}(t)$ qui calcule $\omega(t) = \frac{v_d(t) - v_g(t)}{L}$

Réponse pour montrer la syntaxe d'une fonction :

```
function O=omega(t)
    vd=10+5*sin(2*t);
    vg=5+2.5*cos(3*t);
    L=10 //car unité en cm;
    O=(vd-vg)/L;
endfunction
```

2-2°) Écrire une fonction function $\theta=\underline{\theta}_{\underline{\underline{\theta}}}(t)$ qui calcule $\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt$ en utilisant la primitive SCILAB **integrate**

2-3°) Écrire une fonction function $v=vitesselineaire(t)$ qui calcule

$$v(t) = \frac{1}{2} \cdot (v_d(t) + v_g(t))$$

2-4°) Utiliser l'ensemble pour déduire $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ d'après la formule :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

3°) A partir de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ de la question 2, trouver par intégration $x(t)$ et $y(t)$.

Attention : $x(t)$ est la primitive de $\dot{x}(t)$: $x(t) = \int_0^t \dot{x}(t) \cdot dt$ alors que "inttrap" permet de calculer : $Z = \underline{\underline{inttrap}}(X, Y) = \int_a^b Y(X) \cdot dX$ avec a et b définis par un tableau X en SCILAB.

Une boucle du genre :

```
x=zeros(size(t));//dimensionner le tableau x
for i=1:max(size(t))
    x(i)=inttrap(t(1:i),xpoint(1:i));
end
```

sera donc nécessaire. ($x_{\text{point}} \Leftrightarrow \dot{x}(t)$)

4°) En déduire la trajectoire du robot.

5°) Refaire le travail pour deux autres fonctions du temps pour $v_d(t)$ et $v_g(t)$.

TD3 Modélisation dynamique

Nous allons aborder dans ce chapitre un certain nombre de principes destinés à raisonner de manière dynamique en mécanique, c'est à dire que nous allons faire apparaître des forces et des moments de forces.

Principe fondamental de la dynamique en translation

Centre d'inertie

Par rapport à un point O quelconque, le centre d'inertie (ou centre de gravité) G d'un système de n masses ponctuelles m_i réparties en des points G_i est tel que

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{OG_i} = m \cdot \overrightarrow{OG} \quad \text{avec} \quad m = \sum_{i=1}^n m_i$$

Dans toute la suite nous supposerons, dans un premier temps, que les solides étudiés sont ponctuels (confondus avec leur centre d'inertie).

Si on appelle v_G la vitesse du centre de gravité d'un solide, le vecteur quantité de mouvement de ce solide est défini par :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}_G \quad (\text{unité kg.m.s}^{-1})$$

Principe d'inertie

Dans un repère galiléen, un point matériel isolé (c'est à dire soumis à aucune force) ou pseudo-isolé (c'est à dire tel que $\sum \vec{F} = \vec{0}$) :

- soit conserve son état de repos s'il était préalablement au repos
- soit est animé par d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Ce principe s'applique aussi au centre de gravité d'un solide isolé ou pseudo-isolé.

Principe fondamental de la dynamique

Dans un repère galiléen, la somme vectorielle de toutes les forces appliquées à un solide est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du solide à cet instant :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{l'unité est le Newton : N=kg.m.s}^{-2})$$

Remarque : les deux principes énoncés ci-dessus montrent que la quantité de mouvement est une grandeur qui se conserve pour les solides isolés ou pseudo-isolés.

Théorème du centre d'inertie

Dans un repère galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un solide est égale

au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$$

Équation différentielle de la dynamique

Dans le cas général (mais à une seule dimension) la force se décompose en une partie variable et deux autres parties :

- une force élastique de rappel (constante de rappel k)
- une force de frottement de valeur proportionnelle à la vitesse f

L'équation fondamentale de la dynamique se met alors sous la forme :

$$\sum F_i(t) - f \frac{dx(t)}{dt} - k x(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2} \text{ que l'on préfère écrire sous la forme :}$$

$$\sum F_i(t) = F(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + k x(t)$$

Dans cette équation la force F(t) est l'entrée et x(t) est la sortie : si l'on connaît parfaitement F(t) on en déduira v(t) et x(t) par intégration. Cette intégration n'est pas toujours facile sauf dans le cas où F(t) est constante ou sinusoïdale qui sont les seuls cas que l'on étudiera. Nous allons examiner trois façons de résoudre.

Formalisme complexe

Le formalisme complexe sert à résoudre ce type d'équation en remplaçant les fonctions temporelles par des nombres complexes mais uniquement dans le cas sinusoïdal :

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \Rightarrow x(t) = X_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Le principe est le suivant :

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \Rightarrow \bar{F} = F_0 e^{j\theta} = F_0$$

$$x(t) = X_0 \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \bar{X} = X_0 e^{j\phi}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \Rightarrow X_0 \cdot j\omega e^{j\phi} = j\omega \cdot \bar{X}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) \Rightarrow X_0 \cdot (j\omega)^2 e^{j\phi} = (j\omega)^2 \cdot \bar{X}$$

Formalisme de Laplace

Dans le formalisme de Laplace, toutes les fonctions temporelles sont remplacées par leur transformées de Laplace (écrite en majuscule et fonction de p), les dérivées sont remplacées par une multiplication par p et l'intégrale par une division par p. Ainsi notre équation différentielle devient :

$$\sum F_i(p) = F(p) = M p^2 X(p) + f p X(p) + k X(p)$$

Par faute de temps nous n'utiliserons pas ce formalisme.

Formalisme d'état ou matriciel

Les équations du deuxième ordre comme celles ci-dessus peuvent toujours se ramener à un système de deux équations du premier ordre.

$F(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = M \frac{dv(t)}{dt} + f \cdot v + k \cdot x(t)$ se transforme facilement en

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{f}{M}v(t) + \frac{-k}{M}x(t) + \frac{1}{M} \cdot F(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = 1 \cdot v(t) + 0 \cdot x(t) + 0 \cdot F(t)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f/M & -k/M \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/M \\ 0 \end{pmatrix} \cdot F(t)$$

Une fonction **ode** de SCILAB (**ode45** pour MATLAB) permet alors de résoudre le système

```

function f=Force(t)
// à remplir
endfunction

function Xprime=EquEtat(t,X)
// à remplir en définissant A et B
Xprime=A*X+B*Force(t);
endfunction

// utilise Force et EquEtat
t0=0;t=[0:0.1:10]; // définition du temps t
x0=[0;0]; // vitesse=0 x=0 initialement
x=ode(x0,t0,t,EquEtat);
```

Exercice 1

$F(t)$ est une force sinusoïdale de pulsation $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ et d'amplitude 5 N. Si l'on a $M = 2\text{kg}$, $k = 800 \text{ N/m}$ et $f = 0$, calculer l'amplitude du mouvement ainsi que le déphasage entre la force et le déplacement. Quelle est la vitesse ? Que deviennent ces valeurs si $f = 1 \text{ S.I.}$

Principe fondamental de la dynamique en rotation

Moment d'une force

Nous présentons ci-contre une rotation vue de dessus.

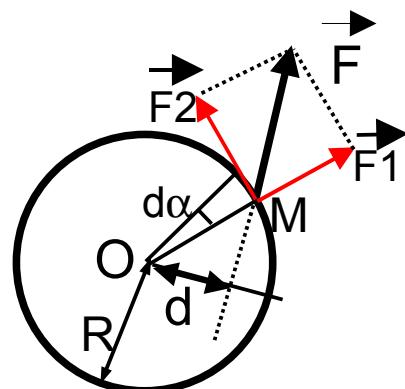
Un point matériel est soumis à une force F mais ce point ne peut décrire qu'une trajectoire qui est un cercle. C'est ce qui se passe quand vous ouvrez une porte.

On appelle moment de la force F le produit vectoriel :

$$\vec{M}_{F/\Delta} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Pour ne pas travailler avec ce produit vectoriel, nous décomposons la force F comme indiqué sur la figure.

F est tangent au mouvement :



$M_{F/\Delta} = M_{F_1/\Delta} + M_{F_2/\Delta} = OM \cdot F_2 = d \cdot \|\vec{F}\|$ (unité N.m)

d s'appelle le bras de levier.

Moment d'inertie

Le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ sera noté I . Il vaut si l'on a un ensemble de masses discret :

$$I_{/\Delta} = \sum_{i=0}^{i=n} m_i \cdot r_i^2 \quad (\text{unité kg.m}^2)$$

Dans le cas général où les masses ne sont plus discrètement réparties mais continûment réparties, il se calcule par la formule :

$$I_{/\Delta} = \iiint_V r^2 \cdot dm = \iiint_V r^2 \cdot \rho \cdot dv$$

si ρ désigne la masse volumique et dv l'élément de volume.

Méthode de calcul des moments d'inertie

Nous venons de voir que le calcul des inerties I est une intégrale très compliquée. Heureusement elle se simplifie dans des cas simples et c'est justement à ces cas que nous allons nous intéresser.

Comment ce calcul peut-il se simplifier ?

Partons du cas discret. On a vu que $I_{/\Delta} = \sum_{i=0}^{i=n} m_i \cdot r_i^2$. Or cette somme se simplifie si tous les r_i sont constants et égaux à r . La somme devient alors : $I_{/\Delta} = r^2 \sum_{i=0}^{i=n} m_i$

Dans le cas d'une répartition continue on a la même simplification. Si on arrive à découper le solide dont on cherche le moment d'inertie en tranches extrêmement fines (épaisseur dr) situées à une distance r constante alors la formule se simplifie comme suit (symétrie cylindrique) :

$$I_{/\Delta} = \iiint_V r^2 \cdot dm = \iiint_V r^2 \cdot \rho \cdot dv = \int r^2 \cdot \rho \cdot S(r) \cdot dr$$

La règle d'or du calcul est donc de trouver le découpage en tranches différentielles situées à distance constante de l'axe de rotation. Il s'agit donc de cylindres ou de morceaux de cylindres.

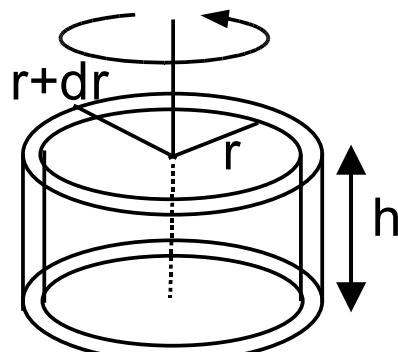
Exercice 2

1°) On considère un cylindre de rayon R et de hauteur h.

Exprimer sa surface latérale.

2°) On considère la tranche de cylindre entre les rayons r et r+dr.

Exprimer son volume dv. Si l'on considère que tous ses points sont à la distance r de l'axe de rotation exprimer son inertie dl.



3°) En déduire par intégration les moments d'inertie d'un cylindre homogène de rayon R, d'un volant d'inertie de rayon intérieur R₁ et de rayon extérieur R₂ ainsi que celui d'une jante d'épaisseur e <<R. Exprimer toutes ces inerties en fonction de la masse.

Principe fondamental de la dynamique en rotation

Pour qu'un solide tourne à une vitesse constante il faut que la somme totale des moments de l'ensemble des forces soit nul. Lorsque ce n'est pas le cas une accélération angulaire est liée à la somme des moments des forces de la façon suivante :

$$\sum M_{F_i/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

Remarque : ce calcul est algébrique, on sépare les forces qui font tourner dans un sens (pris arbitrairement) et les forces qui font tourner dans l'autre sens. Si les moments des premières sont choisis positifs et ceux des deuxièmes sont alors négatifs.

Équation différentielle en rotation

L'équation différentielle en rotation est relativement simple à écrire :

$$\sum M_{F_i/\Delta}(t) = M(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + f \frac{d\theta(t)}{dt} + C_u = J \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t) + C_u$$

Dans cette équation le moment de force M(t) est l'entrée et $\theta(t)$ est la sortie : si l'on connaît parfaitement M(t) on en déduira $\omega(t)$ et $\theta(t)$ par intégration. Cette intégration n'est pas toujours facile sauf dans le cas où M(t) est constante ou sinusoïdale qui sont les seuls cas que l'on étudiera :

$$M(t) = M_0 \sin(\omega t) \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Exercice 3

Les caractéristiques d'un disque audio numérique sont fixées par un standard (livre rouge ou red book)

Diamètre extérieur : 120 mm

Diamètre intérieur : 15 mm

Epaisseur : 1,2 mm

Masse : de 14 à 33g

Sens de rotation horaire (quand le disque est vu de dessus)

Vitesse linéaire : de 1,2 à 1,4 ms^{-1} environ. La vitesse linéaire de lecture est constante et permet d'obtenir un débit des informations audio numériques de 176 400 octets par seconde.

Durée maximale de lecture : 74 mn

Capacité : 840 Mo

Profondeur d'impression ou gravure : 0,13 μm

Pas de la spire : 1,6 μm

Largeur de la piste : 0,5 μm

Diamètre du spot laser : environ 1 μm

1°) On rappelle que le moment d'inertie d'un volant d'inertie homogène est donné par la formule : $J = 1/2 m (R^2 + r^2)$ si r représente le rayon intérieur et R le rayon extérieur du volant.

En considérant le disque audio numérique comme un volant d'inertie, calculer son moment d'inertie maximal.

2°) Le disque est gravé en spirale en commençant par l'intérieur. Le débit de lecture doit toujours être le même, et ainsi la vitesse linéaire de lecture est constante et fixée à 1,2 ms^{-1} . C'est donc la vitesse de rotation qui varie en fonction de la position r de la tête de lecture sur le rayon ($25\text{mm} < r < 58\text{mm}$). Calculer les vitesses de rotation en début de lecture et en fin de lecture.

3°) Le disque est supposé immobile. On veut lui faire subir une accélération angulaire constante telle qu'il puisse lire la première piste au bout d'une seconde. La première piste lue est à l'intérieur de la surface enregistrée. Si l'on néglige les frottements, quel sera le couple moteur constant C nécessaire pour réaliser l'accélération constante correspondante ?

4°) (**Question hors TD**) L'information sur la piste en spirale est située à des endroits appelés pits. En schématisant un peu on peut dire que la présence ou l'absence d'une micro-bosse sur un pit correspond à un bit d'information. Le débit D est de 176 400 octets par secondes.

Quelle est la distance séparant deux pits si l'on garde la vitesse linéaire v de 1,2 m.s^{-1} ?

Réponse : $L = 1,2 / 1411200 = 0,85034 \mu\text{m}$. ($176400 \times 8 = 1411200$)

Translation et rotation simultanée

Reporté dans le prochain TD.

Et si l'on ajoutait un moteur électrique

Étude d'un moteur à courant continu

Nous rappelons qu'un moteur à courant continu est régi par les équations :

- équations électriques : $u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K_e \omega(t)$

où R et L sont respectivement la résistance et l'inductance du moteur, ω est la vitesse angulaire du moteur et K_e la constante électrique du moteur.

- équations mécaniques : $K_c i(t) = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + f \frac{d \theta(t)}{dt} + C_u = J \frac{d \omega(t)}{dt} + f \omega(t) + C_u$

où J est le moment d'inertie de la charge, f le coefficient de frottement de la charge et C_u le couple utile.

i) On pose $X = [\omega; i]$: état du moteur, $E = [u(t); C_u(t)]$ entrées du moteur (commande en tension et en couple). Montrer que les équations données peuvent se mettre sous la forme d'une représentation matricielle :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \omega(t) \\ i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f/J & Kc/J \\ Kc/J & -r/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega(t) \\ i(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/J \\ 1/L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ C_u(t) \end{pmatrix}$$

que l'on appelle équation d'état si l'on prend comme variables d'états $i(t)$ et $\omega(t)$. Elle détermine la relation entre les deux entrées $u(t)$ et $C_u(t)$ et les sorties $\omega(t)$ et $i(t)$.

Exercice 4

Préparation du TP-1

TP -1 Simulation d'un moteur électrique avec SCILAB

1°) Étude d'un moteur à courant continu

Pour la théorie voir ci-dessus.

Pour simuler le moteur on écrira dans un fichier exo1ii.sce :

```

function e=entree(t)
// echelon de tension de 30V et couple utile 0
e=[30;0];
endfunction

function Xprime=moteurU(t,X)
// moteurU car commandé en tension
L=0.08; //inductance
f=0.000143; //frottement sec
Kc=0.167;
Ke=0.167;
r=1.5; // resistance
J=0.01226; // moment d'inertie à vide
A=[-f/J Kc/J;-Ke/L -r/L];
B=[0 -1/J;1/L 0];
Xprime=A*X+B*entree(t);
endfunction

```

```
// utilise entrée et moteurU
t0=0;t=[0:0.1:10];
x0=[0;0];
x=ode(x0,t0,t,moteurU);
plot(t,x(1,:))
```

C'est ce fichier exo1ii.sce qui est lancé avec la commande **exec exo1ii.sce**.
L'intégration se fait avec ode et non plus inttrap comme en TP 0.

Indication :

```
plot(t,x(2,:)); //*** pour le courant
trace le courant seul tandis que
plot(t,x(1,:)); //*** pour la vitesse
trace la vitesse seule.
```

2°) Travail à réaliser

i) Essayer de simuler ce moteur. Déterminer la constante de temps de ce moteur. Quel est le courant maximum de démarrage que doit supporter ce moteur pour 30 V d'alimentation ?

Indication :

Utiliser la primitive max

ii) Trouver le courant et la vitesse aux alentours des 10s.

Indication :

```
t0=0;t=[0:0.1:10];
x0=[0;0];
x=ode(x0,t0,t,moteurU);
Imot=x(2,max(size(x)))
OhmegaMot=x(1,max(size(x)))
```

sans ";" à la fin pour affichage.

iii) Pour ce moteur on va d'abord lui envoyer un échelon de tension de 30V puis 10 secondes après un échelon de couple utile de 2 N.m. Modifier le fichier **exo1ii.sce** et simuler. Les deux constantes de temps sont-elles les même ? Quel courant est absorbé par le moteur pour fournir le couple utile de 2 N.m et quelle est alors sa vitesse de rotation en radian par seconde ?

Indication :

```
if t<10      // %%%%%% au lieu de e=[30;0];
    e=[30;0];
else
    e=[30;2];
end
```

ne ferait-il pas l'affaire dans la fonction entrée ? Modifier aussi la simulation pour qu'elle aille jusqu'à 20 s.

iv) Trouver le couple utile entre 3 et 4 N.m qui annule la vitesse. Quel est le courant correspondant ? Comparer à U/R.

Indication : Cette recherche se fait par essais et erreurs, autrement dit à la main.

3°) Ce moteur est maintenant installé dans un véhicule présenté dans l'exercice 4 du TD4. Comme nous allons étudier son fonctionnement sur trajectoire linéaire, on supposera qu'un moteur unique actionne les deux roues motrices sans démultiplication (ce qui n'est pas très réaliste).

i) Les masses et frottements vont être ramenés au moteur.

Si les deux roues motrices ont un diamètre de 20 cm et que le véhicule possède une masse totale de $M = 4 \text{ kg}$, quel moment d'inertie faut-il ajouter à J du moteur ? On ajoute un coefficient de frottement de 0,02 (à f). Quelle est la nouvelle constante de temps ? Quelle est la nouvelle vitesse à vide pour une alimentation de 30V. Si au bout de 10s on coupe l'alimentation du moteur, au bout de combien de temps peut-on considérer le moteur comme arrêté ?

- ii) Le véhicule aborde une montée comme dans la figure 1 ci-contre. Il démarre en C et arrive en B au bout de 20 s, avec sa vitesse pour aborder la partie montante. Le problème est de trouver à partir de quel angle α_A le véhicule ne pourra gravir la pente. Une montée revient à ajouter un couple utile de $MgR\sin(\alpha)$ si R est le rayon de la roue, M est la masse du véhicule et g

l'accélération de la pesanteur ($g = 9,81 \text{ S.I.}$)

Indication :

$\sin(\alpha)$ nécessite α en radian dans SCILAB. Essayez d'écrire la fonction entrée de telle manière que l'on puisse facilement changer l'angle en $^\circ$. L'angle recherché se trouve entre 40° et 70° . La valeur de π s'écrit %pi en SCILAB

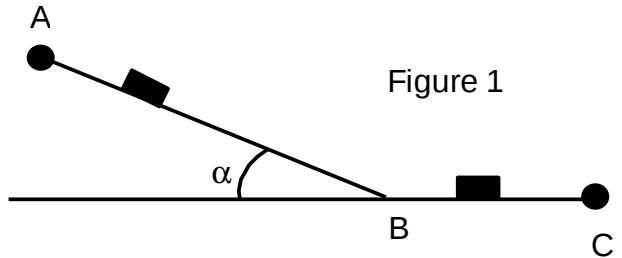


Figure 1

4° Moteur commandé en tension avec couple de torsion de rappel

Le moteur est maintenant relié à un ressort donnant un couple de rappel proportionnel à l'angle de rotation : $C_u(t) = K\theta$. On prendra comme constante de couple de rappel $K = 0,5 \text{ N.m/rad}$. Cette équation vous montre que l'on a besoin de θ dans nos équations. Il nous faut donc intégrer ω et pour trouver θ . Cela peut se faire par l'équation d'état ci-dessous :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -f/J & Kc/J \\ 0 & -Ke/L & -r/L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/J \\ 1/L & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(t) \\ C_u(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{pmatrix} + B \cdot \begin{pmatrix} u(t) \\ C_u(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

qui nous montre deux entrées : $u(t)$ et $C_u(t)$ (à droite). Notre problème maintenant ne dépend plus que d'une seule entrée, la tension $u(t)$, ce qui va modifier l'équation d'état (1). La deuxième ligne de l'équation (1) peut se développer comme suit :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = 0 \cdot \theta(t) - \frac{f}{J} \cdot \omega(t) + \frac{Kc}{J} \cdot i(t) + 0 \cdot u(t) - \frac{1}{J} \cdot C_u(t)$$

La partie $C_u(t)$ de cette équation est passée à gauche comme

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{-C_u(t)}{J} - \frac{f}{J} \cdot \omega(t) + \frac{Kc}{J} \cdot i(t) + 0 \cdot u(t) = \frac{-K\theta(t)}{J} - \frac{f}{J} \cdot \omega(t) + \frac{Kc}{J} \cdot i(t) + 0 \cdot u(t)$$

ce qui modifie la matrice A et la matrice B.

Écrire les nouvelles matrices A et B.

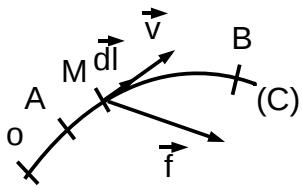
- i) Simuler un échelon de tension de 30V et dire combien de tours fera le moteur.
- ii) Au bout de combien de temps s'arrête-t-il ?

TD 4 Travail, puissance énergie

Cas de la translation

Travail et énergie potentielle

Travail d'une force



Soit un point matériel M effectuant un déplacement le long d'une trajectoire (C) depuis un point A (instant t_1) jusqu'à un point B (instant t_2) tandis qu'il est soumis à une force \vec{f} .

On appelle travail élémentaire dW de la force \vec{f} le produit scalaire :

$$dW(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{dl}$$

où \vec{dl} représente un déplacement élémentaire (infiniment petit) du point M sur sa trajectoire.

Comme $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{\vec{dl}}{dt}$ le travail élémentaire peut encore s'écrire $dW = \vec{f} \cdot \vec{v} \cdot dt$

Finalement pour un déplacement du point M de A jusqu'à B il vient :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot \vec{dl} \quad \text{ou} \quad \boxed{W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_{t_A}^{t_B} \vec{f} \cdot \vec{v} dt} \quad (\text{l'unité est le Joule J=kgm}^2\text{s}^{-2})$$

Remarques

- Le travail d'une force peut être positif (travail moteur) ou négatif (travail résistant cas des forces de frottement par exemple)
- Si plusieurs forces sont appliquées au point matériel, le travail total est égal au travail de la résultante de toutes les forces
- Dans le cas d'un système matériel le travail total est égal à la somme algébrique des travaux de toutes les forces appliquées (forces intérieures et extérieures).

Si le système matériel est un solide indéformable, le travail des forces intérieures est nul et le travail total se réduit au seul travail des forces extérieures.

Nous n'envisagerons ici que le cas des solides indéformables.

Énergie potentielle

Chaque fois que le travail d'un système de force $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots)$ appliqué à un solide ne dépend pas du chemin suivi par le solide pour aller d'un point A vers un point B, on peut définir une fonction énergie potentielle E_p . Le travail effectué par les forces \vec{f}_i dans le déplacement de A vers B est alors égal à la variation d'énergie potentielle entre ces deux points (énergie potentielle finale moins énergie potentielle initiale) changée en signe :

$$\sum W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_i) = -(E_{pB} - E_{pA})$$

Autrement dit le travail effectué pour aller de A à B est égal à l'énergie potentielle initiale moins l'énergie potentielle finale :

$$\sum W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_i) = E_{pA} - E_{pB}$$

Exemple : force de pesanteur

On rappelle que le poids \vec{P} d'un solide est défini par le produit de la masse m de ce solide par l'accélération de pesanteur \vec{g} soit : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ avec $|\vec{g}| = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (On sait que \vec{P} est appliqué au centre de gravité G du solide)

L'énergie potentielle est alors donnée par :

$$E_p = \|\vec{P}\| \cdot z + \text{cste} = m \cdot g \cdot z + \text{cste}$$

où z est l'altitude de G, l'axe \vec{Oz} étant vertical ascendant et avec $g = \|\vec{g}\|$.

Dans ces conditions le travail effectué par \vec{P} lors d'un déplacement d'un point A à un point B s'écrit :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = m \cdot g \cdot (z_A - z_B)$$

Énergie cinétique

L'énergie cinétique est une énergie qui est associée au mouvement. Tout solide de masse m dont le centre d'inertie G est animé d'une vitesse v possède une énergie :

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (\text{Joule J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2})$$

Conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique totale est définie comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle (quand elle existe). Elle se conserve au cours du temps pour un système n'ayant pas d'échange d'énergie autre que mécanique avec l'extérieur et plus particulièrement dans le cas d'un système supposé sans frottement.

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$$

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un repère Galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un solide entre deux instants quelconques t_1 (point A) t_2 (point B) est égale à la somme algébrique des travaux effectués par toutes les forces s'exerçant sur le solide pendant le même intervalle de temps.

Démonstration

En appelant \vec{V} la vitesse du centre d'inertie et \vec{F} la somme vectorielle de toutes les forces appliquées ($\vec{F} = \sum \vec{f}_i$) il vient : $dW = \vec{F} \cdot \vec{V} \cdot dt$.

D'autre part : $\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{V})}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$. Donc $dW = m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} \cdot dt = m \vec{V} \cdot d\vec{V}$

Or $E_c = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m \vec{V}^2$ soit $dE_c = d(\frac{1}{2} m \vec{V}^2) = m \vec{V} \cdot d\vec{V} = m V \cdot dV$ et $dW = d(\frac{1}{2} m V^2)$.

En intégrant de t_1 (point A) à t_2 (point B) on obtient :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2} m (V_B^2 - V_A^2) = E_{cB} - E_{cA}$$

Cas particulier : si l'on peut définir une énergie potentielle et s'il n'y a pas de frottement on a :

$$E_{pA} - E_{pB} = E_{cB} - E_{cA} \text{ où l'on retrouve la conservation de l'énergie mécanique.}$$

(s'il y a des frottements, il existe un travail résistant (négatif) des forces de frottement, pour lequel on ne peut pas définir d'énergie potentielle : il n'y a pas conservation de l'énergie mécanique).

Exercice 1

Un solide S_1 supposé ponctuel de masse $m_1 = 50\text{g}$, est abandonné sans vitesse initiale d'un point A et glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale (figure 1 ci-dessous). Après un parcours $AB = L = 1\text{m}$, il aborde un plan horizontal sur lequel il continue de glisser avant de heurter un solide S_2 immobile supposé ponctuel, de masse $m_2 = 150\text{g}$.

Tous les mouvements s'effectuent sans frottement. On prendra $g = 10 \text{ ms}^{-2}$.

- 1) Calculer juste avant le choc avec S_2 , la vitesse v_1 du solide S_1 , sa quantité de mouvement p_1 et son énergie cinétique E_{c1} .
- 2) Au moment du choc il y a accrochage des deux solides. Appliquer la loi de conservation de la quantité de mouvement pour en déduire la vitesse v_G du centre d'inertie de l'ensemble des deux solides juste après le choc.
- 3) Y a-t-il eu conservation de l'énergie cinétique ?

Exercice 2

Un skieur assimilé à un point G, de masse 80 kg , glisse sur une piste formée de deux parties AB et BC situées dans le même plan vertical (figure 2 ci-dessous). L'arc AB de centre O situé sur la verticale de B, a un rayon $r = 50 \text{ m}$ et BC est une partie horizontale de longueur $l = 50\text{m}$.

Le skieur part sans vitesse initiale du point A tel que $\alpha_A = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 60^\circ$. On prendra $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$.

1°) En négligeant les frottements, calculer la vitesse du skieur en un point M quelconque de l'arc AB repéré par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$. En déduire sa vitesse au point E tel que $\alpha_E = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}) = 30^\circ$ et celle du point B.

2°) En fait sur le trajet ABC, existent des forces de frottements assimilables à une force tangente à la trajectoire et d'intensité constante F. Si le skieur arrive sans vitesse en C, quelle est la valeur F du module de cette force de frottement ?

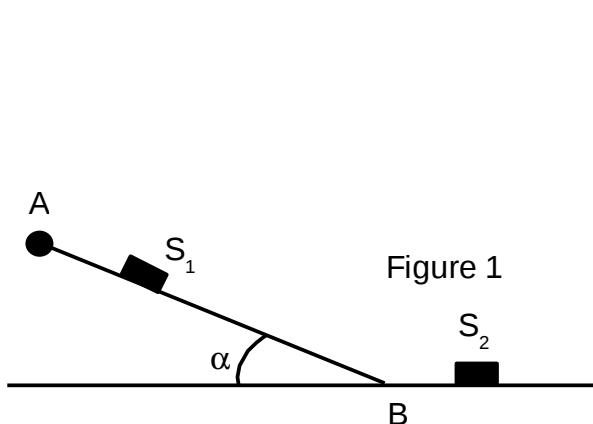


Figure 1

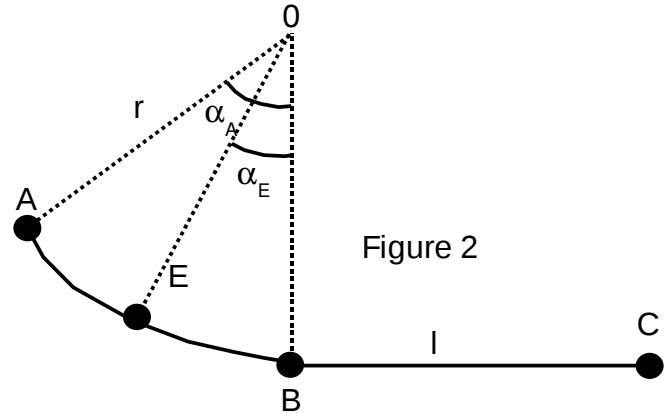


Figure 2

Cas de la rotation

Travail élémentaire d'une force en rotation

Soit un point M en rotation autour d'un axe Δ (figure ci-contre) se déplaçant d'une quantité élémentaire $d\Omega$ et soumis à la force F. Le travail élémentaire de cette force lors du déplacement peut naturellement s'écrire :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) \cdot d\vec{l}$$

Comme le vecteur $d\vec{l}$ est tangent au déplacement, les produits $\vec{F}_1 \cdot d\vec{l}$ et $\vec{F}_3 \cdot d\vec{l}$ sont nuls. Il vient donc :

$$dW = \vec{F}_2 \cdot d\vec{l} = \vec{F}_2 \cdot \vec{OM} \cdot d\alpha = F_2 \cdot OM \cdot d\alpha$$

La quantité $F_2 \cdot OM$ est appelé moment de la force F par rapport à Ω . Dans le cas présent c'est aussi le moment de la force F/ Ω .

Il nous faut donc retenir :

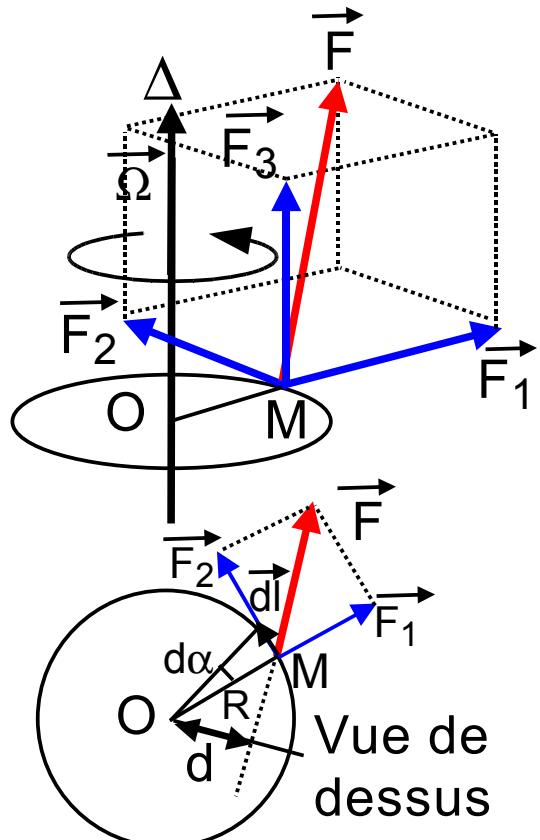
$$dW = M_{F/\Delta} \cdot d\alpha \quad (J = N.m \times rad)$$

et si F est tangent au mouvement :

$$M_{F/\Delta} = OM \cdot F \quad (\text{unité N.m})$$

ou si F n'est pas tangent :

$$\boxed{M_{F/\Delta} = \vec{OM} \wedge \vec{F}}$$



Le repérage du sens du vecteur moment est donné par le sens du tire-bouchon.

Couple moteur et son moment - puissance d'un moteur

L'action d'un moteur se traduit par des forces exercées par l'arbre. Ces forces sont des

forces de contact réparties à sa surface. On peut les schématiser par un ensemble de groupes de deux forces F de même intensité et de sens opposé appliquées aux deux extrémités d'un même diamètre d de l'arbre. Un tel système constitue ce que l'on appelle un couple de forces. Si l'on note C le moment de ce couple de force ($C=F.d$) on peut définir la puissance par $P = C \cdot \Omega$.

Exercice 3

Dans une notice automobile on lit : couple maximal (à 3000 tours/mn) 16,4 m.daN (comprendre : moment du couple maxi). Quelle est alors la puissance du moteur ?

Dans la même notice on lit : puissance maximale 96 ch à 5200 tours/minute. Quelles conclusions en tirez-vous ? (1ch = 736 W)

Énergie cinétique d'un corps en rotation

Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un axe fixe Δ , ses diverses parties élémentaires de masses m_i décrivent des cercles de rayons r_i avec différentes vitesses linéaires v_i . Si toutes les vitesses linéaires v_i sont différentes, la vitesse angulaire de tous ces points est la même (si le corps ne se déforme pas pendant la rotation), c'est à dire que :

$$\Omega = v_1/r_1 = v_2/r_2 = \dots$$

L'énergie cinétique du corps tournant sera

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_n^2 \\ &= \Omega^2/2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots + m_n r_n^2) \end{aligned}$$

La quantité entre parenthèse sera appelée moment d'inertie par rapport à l'axe Δ et notée I . Elle vaut donc :

$$I_{\Delta} = \sum_{i=0}^{i=n} m_i \cdot r_i^2 \quad (\text{unité kg.m}^2)$$

Dans le cas général où les masses ne sont plus discrètement réparties mais continûment réparties,

$$\text{il se calcule par la formule : } I_{\Delta} = \iiint_V r^2 \cdot dm = \iiint_V r^2 \cdot \rho \cdot dv$$

si ρ désigne la masse volumique et dv l'élément de volume.

On retiendra donc :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot I_{\Delta} \cdot \omega^2 \quad (\text{Joule} = \text{kg.m}^2 \times (\text{rad/s})^2)$$

Cas de la translation et rotation

On se trouve dans cette situation assez souvent : dès qu'un moteur (qui tourne) est utilisé pour faire avancer quelque chose. Dans ce cas la translation peut se ramener à de la rotation en utilisant la relation entre vitesse angulaire et vitesse de translation.

On retiendra donc :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot I_{/\Delta} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 \quad (\text{Joule} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \times (\text{rad/s})^2)$$

Exercice 4

On désire dimensionner les moteurs d'un robot auto-porteur présenté ci-dessous. Il est composé de deux roues motrices commandées par deux moteurs et d'une roue libre en forme de sphère à l'avant. Il comporte aussi un accumulateur et une électronique de commande. On appelle M la masse totale de l'ensemble et elle vaut $M=1,5\text{kg}$. Les roues ont un diamètre $D=10\text{ cm}$, une épaisseur de 5 mm et sont en aluminium ($\rho=2702\text{ kgm}^{-3}$) ainsi que la sphère de diamètre 5 cm . Le rotor des moteurs peut être considéré comme un cylindre plein en cuivre ($\rho=8933\text{ kgm}^{-3}$) de diamètre $2,5\text{ cm}$ et de longueur $3,5\text{ cm}$.

1°) Quelle est l'énergie cinétique totale du robot lorsqu'il a une vitesse de 10 cm/s ? Le moment d'inertie d'une sphère est $I=2/5 Mr^2$.

2°) On suppose les frottements constants (indépendants de la vitesse). Le Robot s'arrête en 30 cm lorsque l'on coupe les moteurs si sa vitesse initiale est 10 cm/s . A quel couple constant correspondent ces frottements ?

3°) Quel couple moteur devront délivrer ces moteurs si l'on veut atteindre la vitesse de 10 cm/s à partir de l'arrêt en $1,5\text{ s}$ sur un plan horizontal ? (On tiendra naturellement compte des frottements et l'accélération sera supposée constante)

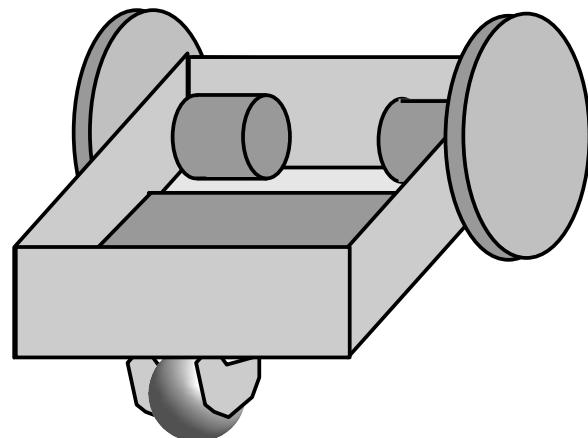
4°) Quelle puissance devront délivrer ces moteurs pour pouvoir gravir une pente de 30° en gardant la vitesse de 10 cm/s ?

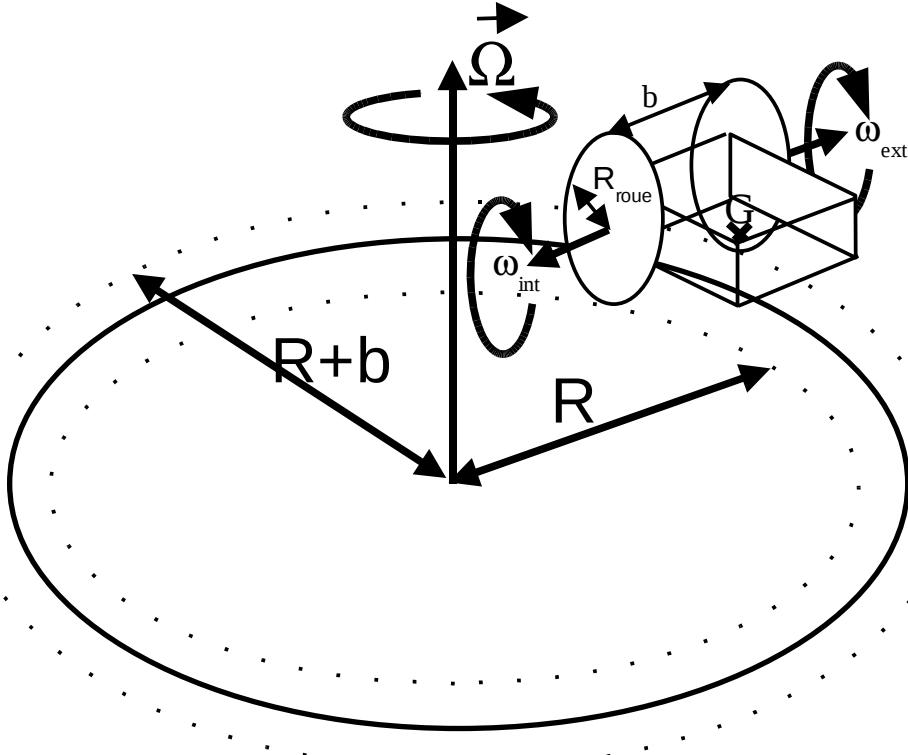
5°) Les deux moteurs tournent maintenant avec des vitesses constantes mais différentes. La voie entre les deux roues est de $b=20\text{ cm}$. Un moteur tourne à 2 rad/s et l'autre à $1,9\text{ rad/s}$ et on désire calculer le rayon intérieur R du cercle parcouru par le robot (voir figure ci-après).

5-a) Calculer les distances intérieures et extérieures ΔL_{int} et ΔL_{ext} parcourues par les roues pour un même intervalle de temps Δt en fonction de R_{roue} , Δt , ω_{int} , ω_{ext} si ω_{int} et ω_{ext} désignent respectivement les vitesses angulaires de la roue intérieure et de la roue extérieure.

5-b) Refaire ce même calcul en fonction de Ω vitesse de rotation du robot sur le cercle le rayon du cercle R et la voie b pour un même intervalle de temps Δt .

5-c) En déduire de la vitesse de rotation Ω et la période T correspondante ainsi que le rayon R en fonction de R_{roue} , b , ω_{int} , ω_{ext} . Applications numériques.





TP - 2 Simulation d'un robot différentiel avec SCILAB

Si, pour une raison ou une autre, on a besoin de la distance angulaire, il est possible de laisser le système intégrer la vitesse angulaire en prenant tout simplement comme vecteur d'état : $X=[\theta; \omega; i]$. Cela permet d'utiliser l'algorithme "ode" pour intégrer ω et donner θ .

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -f/J & Kc/J \\ 0 & -Ke/L & -r/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/J \\ 1/L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ C_u(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{pmatrix} + B \cdot \begin{pmatrix} u(t) \\ C_u(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ceci a déjà été partiellement utilisé en fin du TP1.

Un essai peut se faire avec le fichier "tp2.sce" contenant l'ensemble :

Les divers essais	fonction entree	fonction moteurU
<pre>//***** main t0=0;t=[0:0.1:50]; x0=[0;0;0]; x=ode(x0,t0,t,moteurU); Theta=x(1,max(size(t))); Imot=x(3,max(size(t))); OhmegaMot=x(2,max(size(t))); // la position angulaire plot(t,x(1,:));pause // la vitesse angul et le courant plot(t,x(2:3,:));</pre>	<pre>function e=entree(t) // echelon de tension de 30V // et couple utile 0 e=[30;0]; endfunction</pre>	<pre>function Uprime=moteurU(t,X) // moteurU car commandé en tension L=0.08; f=0.000143+0.02; Kc=0.167; Ke=0.167; r=1.5; J=0.01226+0.04; A=[0 1 0;0 -f/J Kc/J;0 -Ke/L -r/L]; B=[0 0;0 -1/J;1/L 0]; Uprime=A*X+B*entree(t); endfunction</pre>

1°) Simulez ce moteur en montrant qu'il s'agit du même moteur qui bloque avec le même couple résistant que dans le TP1 (question 2-iv).

2°) Recherche du rayon de courbure avec deux moteurs

$$\text{Montrer que la matrice } 6 \times 6 \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f/J & Kc/J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Ke/L & -r/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -f/J & Kc/J \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Ke/L & -r/L \end{vmatrix} \quad \text{satisfait le problème avec la}$$

$$\text{matrice } 6 \times 4 . \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/J & 0 & 0 \\ 1/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/J \\ 0 & 0 & 1/L & 0 \end{vmatrix} \quad \text{Trouver le rayon R de courbure pour une}$$

alimentation de 30V pour un moteur et 20V pour l'autre.

Même travail pour 30V et 25V.

Indications : le robot différentiel en SCILAB

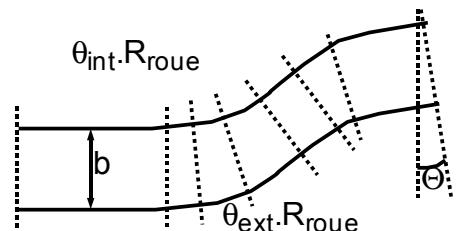
Les divers essais	fonction entrée	fonction moteurU
<pre>clear() t0=0; t=[0:0.1:30]; x0=[0;0;0;0;0;0]; x=ode(x0,t0,t,moteurU); // rayon de courbure général plot(t(1,2:10),0.2*x(4,2:10)./ (x(1,2:10)-x(4,2:10)));</pre>	<pre>function e=entree(t) // 30V à gauche // 20V à droite e=[30;0;20;0]; endfunction</pre>	<pre>function Uprime=moteurU(t,X) // moteurU car commandé en tension //%% Compléter les valeurs ici J=0.01226+0.5*M*Rayon*Rayon; A=[0 0.1 0 0 0;0 -f/J Kc/J 0 0 0;0 -Ke/L -r/L 0 0 0;0 0 0 0 0.1 0;0 0 0 0 -f/J Kc/J;0 0 0 0 -Ke/L -r/L]; B=[0 0 0 0;0 -1/J 0 0;1/L 0 0 0;0 0 0 0 0 0 -1/J;0 0 1/L 0]; Uprime=A*X+B*entree(t); endfunction</pre>

Il faut ramener la masse M de 4 kg en inertie : cela se fait par (dans la fonction MoteurU) :
Rayon = 0.1; // car 10 cm de rayon
J=0.01226+0.5*M*Rayon*Rayon;

3°) Recherche de trajectoire

Il est difficile de trouver la trajectoire à partir du rayon de courbure car on ne connaît pas le centre instantané du cercle. On va donc plutôt utiliser une méthode numérique incrémentale pour ce calcul.

A chaque instant on connaît le déplacement de la roue intérieure et celui de la roue extérieure comme indiqué dans la figure ci-contre. Cette connaissance permet de calculer l'angle de rotation Θ de la trajectoire.



On démontre facilement que :

$$\Theta = \frac{\theta_{ext} \cdot R_{roue} - \theta_{int} \cdot R_{roue}}{b} = \frac{R_{roue}}{b} \cdot (\theta_{ext} - \theta_{int}) = \frac{R_{roue}}{b} \left(\int_0^t \omega_{ext} \cdot dt - \int_0^t \omega_{int} \cdot dt \right)$$

Ceci est une formule qui est toujours vraie, quelque soit la trajectoire (à démontrer).

On peut déduire la vitesse de rotation instantanée :

$$\Omega = \frac{\omega_{ext} \cdot R_{roue} - \omega_{int} \cdot R_{roue}}{b} = \frac{R_{roue}}{b} \cdot (\omega_{ext} - \omega_{int})$$

On montre aussi :

$$\vec{v} = \frac{\omega_{ext} \cdot R_{roue} + \omega_{int} \cdot R_{roue}}{2} = \frac{R_{roue}}{2} \cdot (\omega_{ext} + \omega_{int})$$

Le calcul de x peut s'effectuer par :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{(\theta_{i+1}_{ext} - \theta_{i}_{ext}) \cdot R_{roue} + (\theta_{i+1}_{int} - \theta_{i}_{ext}) \cdot R_{roue}}{2} \cdot \cos(\Theta_i) = x_i + \frac{R_{roue}}{2} \cdot (\theta_{i+1}_{ext} - \theta_{i}_{ext} + \theta_{i+1}_{int} - \theta_{i}_{ext}) \cdot \cos(\Theta_i)$$

et que celui de y se fait par :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{(\theta_{i+1}_{ext} - \theta_{i}_{ext}) \cdot R_{roue} + (\theta_{i+1}_{int} - \theta_{i}_{ext}) \cdot R_{roue}}{2} \cdot \sin(\Theta_i) = y_i + \frac{R_{roue}}{2} \cdot (\theta_{i+1}_{ext} - \theta_{i}_{ext} + \theta_{i+1}_{int} - \theta_{i}_{ext}) \cdot \sin(\Theta_i)$$

Il n'y a plus qu'à réaliser les calculs avec SCILAB.

Indications :

On prendra une démultiplication de 10 pour ces essais. On a alors :

Il faut ramener la masse M de 4 kg en inertie : cela se fait par (dans la fonction MoteurU) :
 Rayon = 0.1/10; // car 10 cm de rayon mais à diviser par démultiplication de 10
 $J=0.01226+0.5*M*Rayon*Rayon;$

Le robot différentiel en SCILAB en question 2 + essai ci-dessous

```
//***** main
t0=0;t=[0:0.5:150];
x0=[0;0;0;0;0];
x=ode(x0,t0,t,moteurU);
// la vitesse angul et le courant d'un moteur
//-->plot(t,x(2:3,:));
// rayon de courbure général
//-->plot(t(1,2:10),0.2*x(4,2:10)./(x(1,2:10)-x(4,2:10)));
//angle orientation robot Thetatot(t)
tot=max(size(t));
Thetatot = 0.5*(x(4,:) / 10 - x(1,:)) / 10; // R/b=0.5 + demultiplication 10
//-->plot(t,Thetatot);
// calcul de xi et yi
xi=zeros(1,tot);
yi=zeros(1,tot);
for i=2:tot,
    xi(1,i)=xi(1,i-1)+ 0.5* ((x(4,i)-x(4,i-1))+(x(1,i)-x(1,i-1)))*cos(Thetatot(i-1));
    yi(1,i)=yi(1,i-1)+ 0.5* ((x(4,i)-x(4,i-1))+(x(1,i)-x(1,i-1)))*sin(Thetatot(i-1));
end
```

```

yi(1,i)=yi(1,i-1) + 0.5* ((x(4,i)-x(4,i-1))+(x(1,i)-
x(1,i-1)))*sin(Thetatot(i-1));
end

plot(xi(1,:),yi(1,:))

```

doit donner une trajectoire circulaire.

4°) Trouver une commande en tension pour dessiner le signe ∞ comme trajectoire.

Indication : il faut encore une fois faire des essais et erreurs.

5°) Dessiner la courbe de puissance mécanique instantanée :

$P_{meca}(t) = C(t)\cdot\omega(t) = C_{ext}(t)\cdot\omega_{ext}(t) + C_{int}(t)\cdot\omega_{int}(t)$ avec $C(t) = K_c \cdot i(t)$

pour votre trajectoire ∞ .

6°) Dessiner la courbe de puissance électrique instantanée totale (celle des deux moteurs) pour votre trajectoire ∞ .

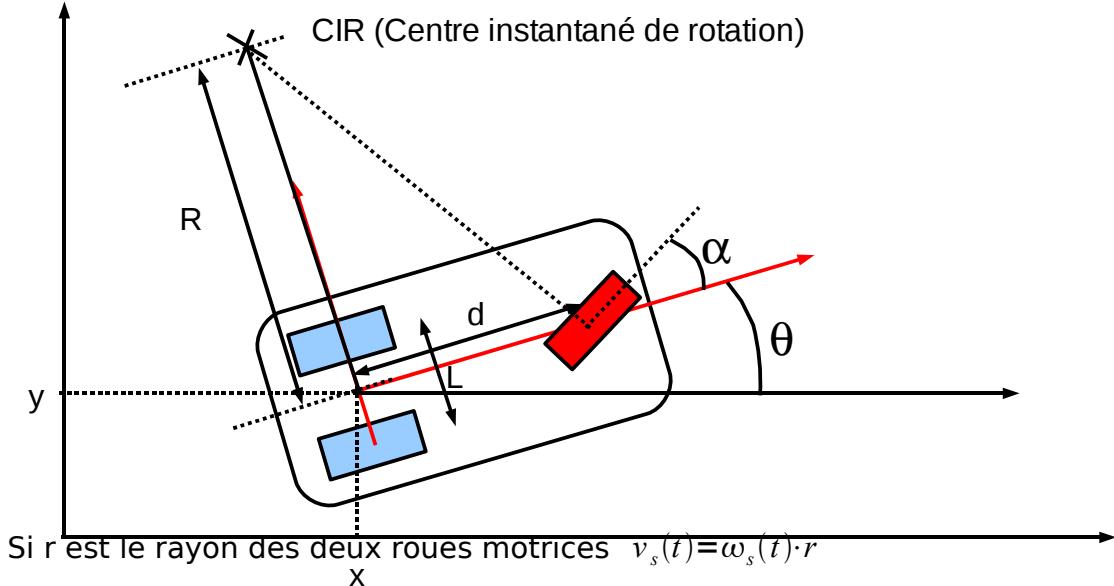
$P_{elec}(t) = U(t) \cdot i(t) = U_{ext}(t) \cdot i_{ext}(t) + U_{int}(t) \cdot i_{int}(t)$

7°) Vérifie-t-on $P_{elec}(t) = P_{meca}(t) + r \cdot i_{ext}(t)^2 + r \cdot i_{int}(t)^2$

8°) Calculer la puissance électrique totale $P_{elec} = \int_0^{T_{fin}} U(t) \cdot i(t) \cdot dt$ pour votre trajectoire ∞

ANNEXE

Robot autonome tricycle



La figure nous donne $R(t) = d \cdot \tan(\pi/2 - \alpha(t))$ et aussi : $\omega(t) = \frac{\omega_s(t) \cdot r}{\sqrt{d^2 + R(t)^2}}$. Donc
 $\omega(t) = \frac{v_s(t)}{d} \cdot \sin(\alpha(t))$

Modèle cinématique dans le repère du robot

$$\omega(t) = \frac{v_s(t)}{d} \cdot \sin(\alpha(t))$$

$$v_y(t) = 0$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{v_s(t)}{d} \cdot \sin(\alpha(t))$$

Modèle cinématique dans le repère du laboratoire

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad v(t) = v_s(t) \cdot \cos(\alpha(t)) \quad \text{et} \quad \omega(t) = \frac{v_s(t)}{d} \cdot \sin(\alpha(t))$$

Exercice 2

Résolution d'un exemple pratique avec SCILAB. Voir TP0 plus loin.