

P 19

Réflexion d'une onde sur un métal parfait

19.1

Compétences du chapitre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire.	<ul style="list-style-type: none"> • Exploiter la nullité des champs dans un métal parfait. • Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. • Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. • Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire.	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.</i>



19.2 Relations de passage

Ces relations de passage sont également appelées conditions aux limites.



Le champ électromagnétique créé par une distribution volumique de charges et de courants est continu. Si l'on décrit la distribution par un modèle surfacique (distribution surfacique de charges et de courants), le champ électromagnétique peut subir une discontinuité à la traversée de la distribution.

On ne peut pas écrire les équations de Maxwell en un point d'une telle distribution surfacique de sources. Ces équations de Maxwell sont alors remplacées par les relations de passage.

Considérons une surface chargée de densité surfacique σ , séparant deux milieux (1) et (2). Notons \vec{n}_{12} le vecteur unitaire normal à l'interface et dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

19.2.1 Pour le champ électrique

19.2.1.1 Discontinuité de la composante normale du champ électrique

Les composantes normales de \vec{E}_1 et de \vec{E}_2 , notées E_{1N} et E_{2N} sont liées par la relation :

$$E_{2N} - E_{1N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Il peut donc y avoir discontinuité de la composante normale du champ électrique.

\vec{E}_k représente donc le champ électrique créé dans le milieu k , en un point très proche de la surface de séparation et on a également :

$$E_{2N} = \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad E_{1N} = \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{12}$$

19.2.1.2 Continuité de la composante tangentielle du champ électrique

Les composantes tangentielles de \vec{E}_1 et de \vec{E}_2 , notées E_{1T} et E_{2T} sont liées par la relation :

$$E_{2T} = E_{1T}$$

avec :

$$E_{2T} = \vec{E}_2 \cdot \vec{\tau} \quad \text{et} \quad E_{1T} = \vec{E}_1 \cdot \vec{\tau}$$

19.2.1.3 Relation vectorielle

Vectoriellement, on obtient :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

Il peut donc y avoir discontinuité de la composante normale du champ électrique, par exemple comme ci-contre.

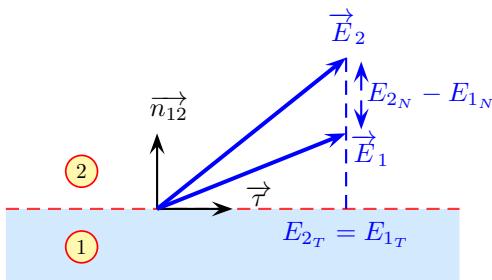


FIGURE 19.1 – Relations de passage : champ électrique

19.2.2 Pour le champ magnétique

Considérons une nappe parcourue par un vecteur densité de courant \vec{j}_s .

19.2.2.1 Continuité de la composante normale

Considérons toujours une surface chargée de densité surfacique σ , séparant deux milieux (1) et (2). Les composantes normales de \vec{B}_1 et de \vec{B}_2 , notées B_{1N} et B_{2N} sont liées par la relation :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$

soit :

$$B_{2N} - B_{1N} = 0$$

avec :

$$B_{2N} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad B_{1N} = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{12}$$

La composante normale du champ magnétique est continue à la traversée d'une surface chargée.

19.2.2.2 Discontinuité de la composante tangentielle

À l'inverse, la composante tangentielle du champ magnétique peut être discontinue de part et d'autre d'une interface entre 2 milieux :

$$B_{2T} - B_{1T} = \mu_0 j_s$$

avec :

$$B_{2T} = \vec{B}_2 \cdot \vec{\tau} \quad \text{et} \quad B_{1T} = \vec{B}_1 \cdot \vec{\tau}$$

19.2.2.3 Relation vectorielle

Vectoriellement, on obtient :

$$\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}}$$

Avec \vec{B}_k le champ magnétique créé dans le milieu k, en un point très proche de la surface de séparation.

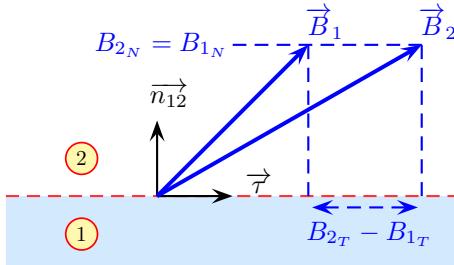
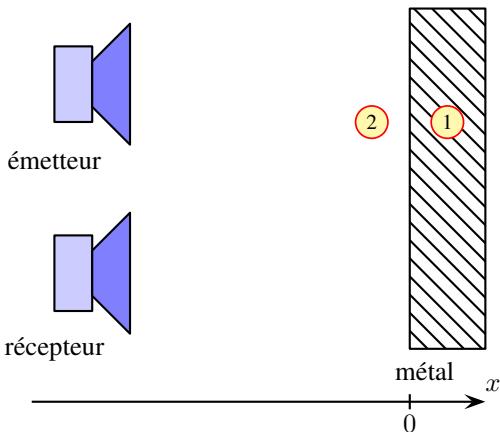


FIGURE 19.2 – Relations de passage : champ magnétique

19.3

Réflexion d'une onde : approche qualitative



Lors de la réflexion des ondes centimétriques (cf. séance de travaux pratiques), on peut observer le phénomène suivant : l'onde incidente induit une onde réfléchie par le plan métallique.

Supposons que l'onde incidente progressive et de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ provient de la région $x < 0$ assimilée au vide (2) et arrive en $x = 0$ sur un métal (1) assimilé au demi-espace $x > 0$.

Le champ pénètre dans le métal sur une faible épaisseur δ appelée épaisseur de peau.

Pour simplifier l'étude, nous supposerons que l'onde incidente est polarisée rectilignement. En effet, une onde polarisée de façon quelconque peut toujours être décrite comme la superposition de deux ondes polarisées rectilignement et de directions orthogonales entre elles.

Le champ électrique incident (polarisé par exemple suivant z) met en mouvement les électrons du métal le long de sa propre direction \vec{e}_z . Il s'établit dans le conducteur un régime sinusoïdal forcé dans lequel la peau du conducteur (région à la surface) est assimilable à une nappe de courants (donc surfaciques) de fréquence ν et de direction \vec{e}_z .

Les courants sont à l'origine d'une autre onde électromagnétique dite onde réfléchie.

Le champ électromagnétique au voisinage du conducteur ($x < 0$) est alors la somme des champs correspondant aux ondes incidente et réfléchie.

On considérera également que le métal est parfait.



— Conducteur parfait —

On considère qu'un conducteur est parfait quand :

$$\gamma \rightarrow +\infty$$

Ce qui revient donc à dire :

$$\vec{E} = \vec{0}$$

à l'intérieur du conducteur parfait.

L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ implique que $\vec{B} = \vec{0}$.

$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ implique $\vec{A} = \vec{0}$ et comme $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, on en déduit $\rho = 0$.

L'équation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ permet alors d'écrire $\vec{j} = \vec{0}$.

Toutes ces relations sont vraies à l'intérieur du conducteur parfait.

Il ne peut donc rester donc que des charges surfaciques de densité σ et des courants surfaciques de densité \vec{j}_s .



— Remarque —

En réalité, le champ pénètre sur une très faible épaisseur δ (toujours l'épaisseur de peau) et s'annule au bout de quelques δ .

19.4 Réflexion normale d'une onde plane progressive monochromatique sur un plan conducteur parfait

Nous nous intéressons ici à la réflexion normale (en incidence normale) d'une onde plane progressive monochromatique sur un métal parfait (ou miroir).

19.4.1 Onde incidente

Considérons une onde incidente caractérisée par un champ électrique incident et un champ magnétique incident de la forme :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k x) \vec{e}_z$$

⇒ Activité 19.1

1. Décrire complètement l'onde électromagnétique.
2. Exprimer le champ magnétique correspondant.



19.4.2 Onde réfléchie

Si le plan $x = 0$ est un plan métallique parfaitement conducteur, les courants sont engendrés à la surface du conducteur et possèdent la même fréquence que le champ électrique qui a mis en mouvement les électrons. Ces courants sont à leur tour la source d'un champ magnétique et donc d'un champ électrique de même fréquence ν .

On peut voir qu'en $x = 0$, le champ \vec{E}_i vaut :

$$E_0 \vec{e}_z \cos \omega t$$

Or les relations de passage imposent la continuité de la composante tangentielle du champ \vec{E} , c'est-à-dire :

$$E_0 \cos \omega t = 0$$

ce qui n'est pas le cas, bien évidemment, à tout instant t .

Il y a donc nécessairement un champ électrique réfléchi tel que :

$$E_{i,T} + E_{r,T} = E_{\text{métal},T} = 0$$

Étant donnée la symétrie du problème, ce champ réfléchi correspond à une onde plane progressive se propageant suivant Ox .

On cherche alors \vec{E}_r sous la forme :

$$\vec{E}_r = \vec{E}'_0 \cos(\omega t - k' x)$$

La continuité de la composante tangentielle (ici y et z) du champ électrique impose en $x = 0$:

$$\underbrace{E_{i,T} + E_{r,T}}_{x<0} = \underbrace{0}_{x>0}$$

Soit :

$$E_0 \vec{e}_z \cos \omega t + \vec{E}'_0 \cos \omega t = \vec{0} \quad \forall t$$

Ce qui donne :

$$\vec{E}'_0 = -E_0 \vec{e}_z$$

et donc :

$$\vec{E}'_r = -E_0 \cos (\omega t - k' x) \vec{e}_z$$

Ce champ se propage dans le vide. L'équation de propagation :

$$\vec{\Delta} \vec{E}'_r = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}'_r}{\partial t^2}$$

permet d'écrire la relation de dispersion pour le champ réfléchi :

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Ce qui donne le choix entre $k' = \frac{\omega}{c}$ et $k' = -\frac{\omega}{c}$.

La première solution donnerait, par superposition, le champ électrique total :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}'_r = \vec{0} \quad \forall x \text{ et } t$$

ce qui, évidemment, n'est pas satisfaisant.

Il faut donc retenir la deuxième possibilité $k' = -\frac{\omega}{c}$, ce qui donne finalement :

$$\vec{E}'_r = -E_0 \cos (\omega t + k x) \vec{e}_z$$

Le champ réfléchi correspond à une onde plane progressive se propageant dans le sens des x négatifs.

On peut alors en déduire le champ électrique \vec{B}'_r à l'aide de la relation $\vec{B}'_r = \frac{\vec{n}'_r \wedge \vec{E}'_r}{c} = \frac{\vec{k}'_r \wedge \vec{E}'_r}{\omega}$ avec $\vec{k}'_r = -\frac{\omega}{c} \vec{e}_x$. On en déduit :

$$\vec{B}'_r = -\frac{E_0}{c} \cos (\omega t + k x) \vec{e}_y$$

Il n'y a pas d'onde transmise. On obtient donc des ondes planes progressives, se propageant dans des sens opposés.

19.4.3 Onde stationnaire

19.4.3.1 Champ électromagnétique

En utilisant le théorème de superposition, on peut déterminer le champ électrique total, et le champ magnétique total :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}'_r$$

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}'_r$$

⇒ Activité 19.2

Déterminer les expressions des champs électrique et magnétique dans la région $x < 0$ et les mettre sous la forme d'un produit de 2 fonctions, l'une dépendant de l'espace, l'autre dépendant du temps.

Ces champs ne correspondent pas à des ondes progressives.



— Signal stationnaire —

Un signal décrit par la fonction $F(x, t)$ est dit stationnaire s'il peut se mettre sous la forme du produit $F(x, t) = X(x)T(t)$, $X(x)$ étant une fonction dépendant des variables spatiales (ici x) et $T(t)$ étant une fonction dépendant de la variable temporelle t .

19.4.3.2 Caractéristiques de l'onde stationnaire

La structure du champ électromagnétique ($\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}$) représente donc une onde stationnaire. Cette structure est très différente de celle de l'onde progressive.

En particulier, les champs $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ ne sont plus en phase, mais en quadrature. Ces champs s'annulent périodiquement selon x . Les champs vibrent sur place.

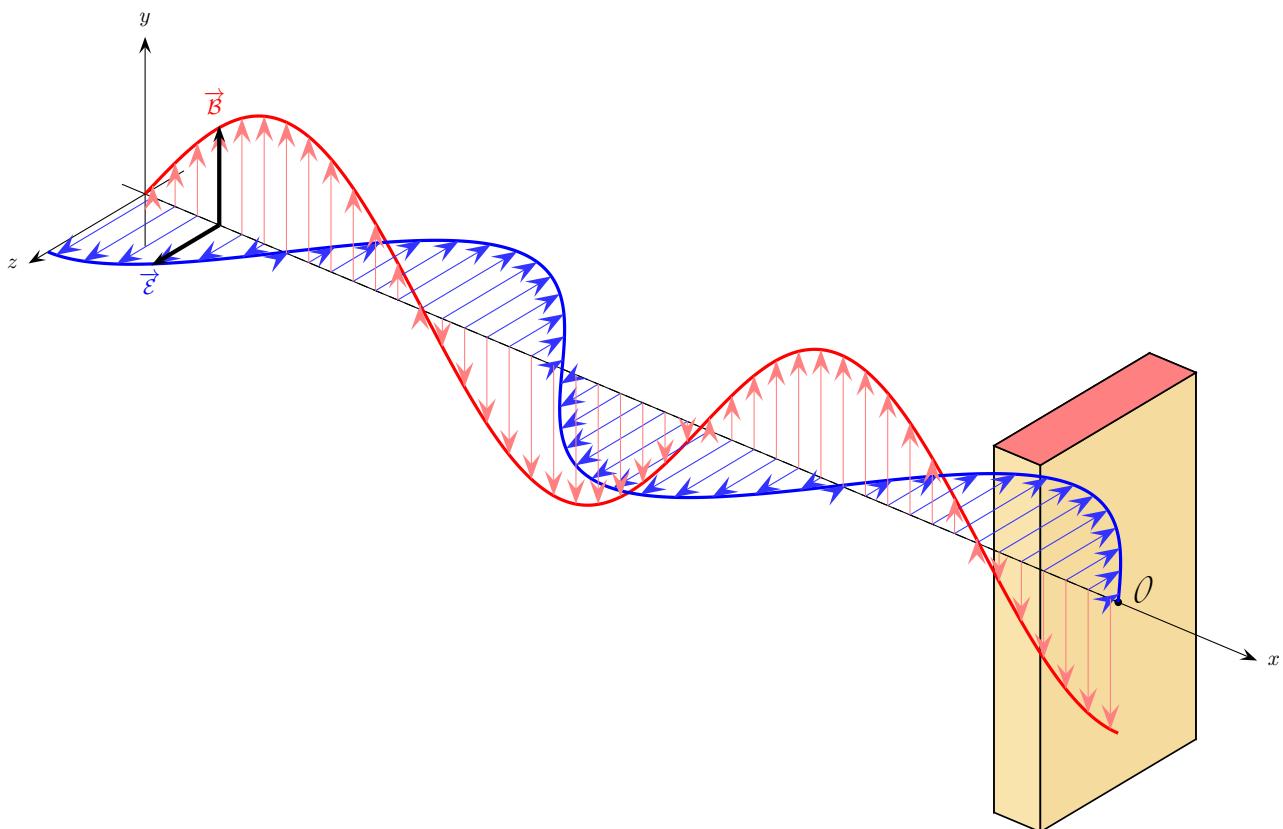


FIGURE 19.3 – Onde stationnaire

Exprimons le vecteur d'onde k :

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

\vec{E} est nul aux points N_E dits nœuds du champ \vec{E} définis par $\sin k x = 0$ avec $x < 0$. Cela donne :

$$x = -n \frac{\pi}{k}, n \in \mathbb{N}$$

ou encore, en tenant compte de l'expression de k :

$$x = -n \frac{\lambda}{2}$$

\vec{E} est maximal aux points V_E dits ventres du champ \vec{E} définis par $\sin k x = \pm 1$ avec $x < 0$. Cela donne :

$$x = -\frac{2p+1}{2} \frac{\pi}{k}, p \in \mathbb{N}$$

ou encore, en tenant compte de l'expression de k :

$$x = -p \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$$

Chaque nœud de \vec{B} correspond à un ventre de \vec{E} et vice-versa.

Le miroir (plan conducteur métallique parfait) est un nœud de champ électrique et un ventre de champ magnétique.

La distance entre 2 plans nodaux ou ventraux d'un même champ vaut $\frac{\lambda}{2}$.

La distance entre 2 plans particuliers consécutifs vaut $\frac{\lambda}{4}$.

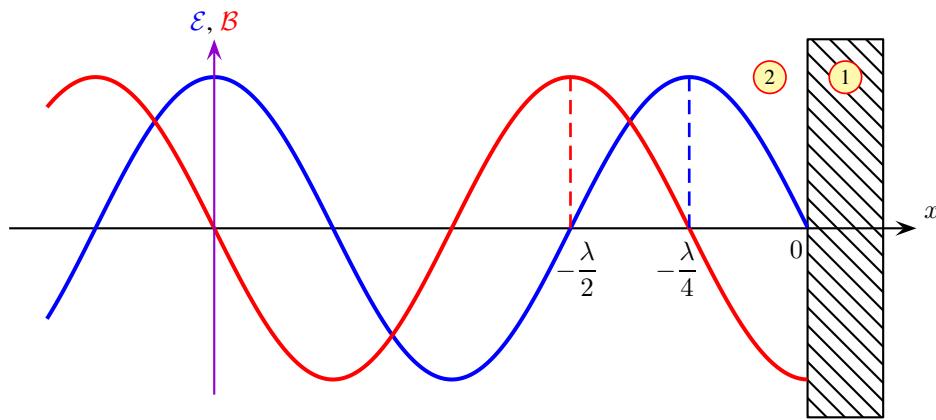


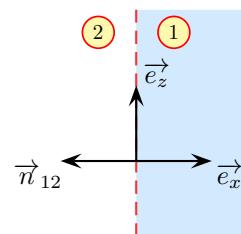
FIGURE 19.4 – Plans nodaux et ventraux

19.4.3.3

Courant et densité de charges surfaciques

- La composante normale du champ électrique peut être discontinue à la traversée d'une interface entre 2 milieux.
- Écrivons la relation de passage en $x = 0$ entre le vide ($x < 0$) et le métal ($x > 0$) en posant $\vec{n}_{12} = -\vec{e}_x$:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{N \text{ vide}} - \vec{E}_{N \text{ métal}} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \\ \vec{E}_{N \text{ vide}} \cdot \vec{e}_x - 0 &= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ \sigma &= 0\end{aligned}$$



- De même, la composante tangentielle du champ magnétique peut être discontinue à la traversée d'une interface.

La relation de passage s'écrit, en $x = 0$:

$$\begin{aligned}\vec{B}_{T \text{ vide}} - \vec{B}_{T \text{ métal}} &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_{T \text{ vide}} - \vec{0} &= -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \\ -2 \frac{E_0}{c} \vec{e}_y \cos \omega t &= -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{j}_s = \frac{2 E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \vec{e}_z}$$

Cela signifie qu'en $x = 0$, le champ incident \vec{E}_i et \vec{j}_s sont colinéaires et en phase : c'est normal puisque c'est le champ incident qui met en mouvement les électrons du métal.

19.4.3.4

Aspect énergétique

En calculant le vecteur de Poynting, on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ &= \frac{4 E_0^2}{\mu_0 c} \sin \omega t \cos \omega t \sin k x \cos k x \vec{e}_x \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin 2 \omega t \sin 2 k x \vec{e}_x\end{aligned}$$

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting est alors :

$$\langle \vec{P} \rangle = \vec{0} \text{ car } \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$$

Sur une période, il n'y a donc pas de transport d'énergie, en tout point de l'espace occupé par le vide.

De plus, $\forall t$, l'énergie reste confinée entre deux plans nodaux et ventraux consécutifs (distants de $\frac{\lambda}{4}$).

L'onde stationnaire ne transporte pas d'énergie

Dans le volume métallique, la puissance électromagnétique volumique cédée par le champ aux charges vaut :

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

Il n'y a aucune perte par effet Joule dans un conducteur parfait.

19.5

Cavité résonante

19.5.1 Dispositif

Considérons une cavité vide entre les abscisses $x = 0$ et $x = \ell$ à l'intérieur d'un conducteur, considéré comme parfait.

Si un émetteur engendre en continu une onde électromagnétique arrivant en incidence normale sur la surface d'abscisse $x = \ell$, l'onde est alors entièrement réfléchie. Elle se propage alors en sens inverse jusqu'à l'abscisse $x = 0$ où elle se réfléchit à nouveau. Le processus se répète à l'infini et l'onde résultante possède alors une structure stationnaire.

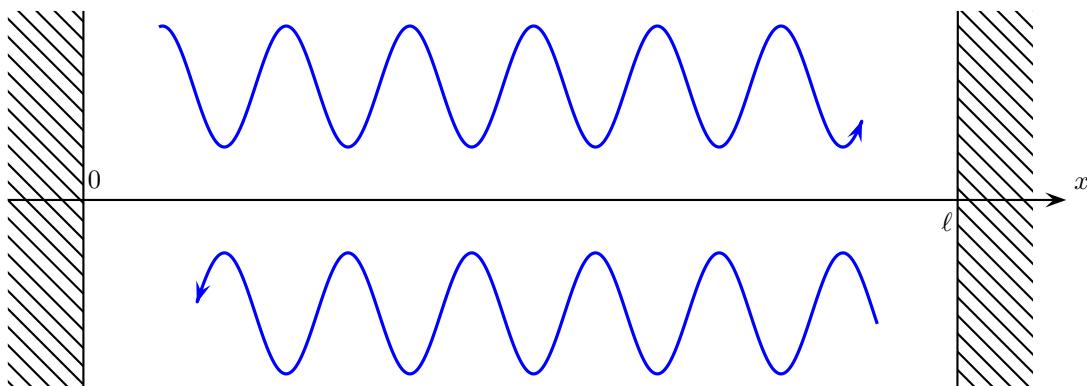


FIGURE 19.5 – Cavité résonante

19.5.2 Champ électrique

L'onde étant stationnaire et monochromatique, on peut chercher le champ électrique par exemple sous la forme :

$$\vec{E}(x, t) = f(x) \sin \omega t \vec{e}_z$$

On suppose dans ce cas que le régime est sinusoïdal forcé à la fréquence $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

L'équation de propagation :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

permet alors d'écrire, en projection sur \vec{e}_z :

$$f''(x) \sin \omega t + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) \sin \omega t = 0$$

Soit en simplifiant et en posant $k = \frac{\omega}{c}$:

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0$$

⇒ Activité 19.3

1. Donner la forme de la solution.
2. En utilisant les conditions aux limites en $x = 0$ et en $x = \ell$, en déduire une condition sur k .



Cela signifie que le champ électrique est quantifié sous la forme :

$$\vec{E}_p(x, t) = E_0 \sin\left(p\pi \frac{x}{\ell}\right) \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

En tenant compte de $\omega = k c$, on obtient :

$$\vec{E}_p(x, t) = E_0 \sin\left(p\pi \frac{x}{\ell}\right) \sin\left(p\pi \frac{ct}{\ell}\right) \vec{e}_z$$

19.5.3

Modes propres

On voit que l'onde stationnaire ne peut exister que si les extrémités de la cavité correspondent à des plans nodaux de \vec{E} .

En prenant $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}$ et en tenant compte de la condition $k = \frac{p\pi}{\ell}$, on obtient :

$$\boxed{\ell = p \frac{\lambda}{2}}$$

En effet, la distance entre deux plans nodaux consécutifs de \vec{E} vaut $\frac{\lambda}{2}$.

On peut représenter la forme de l'onde, similaire à celle obtenue en première année avec la corde de Melde.

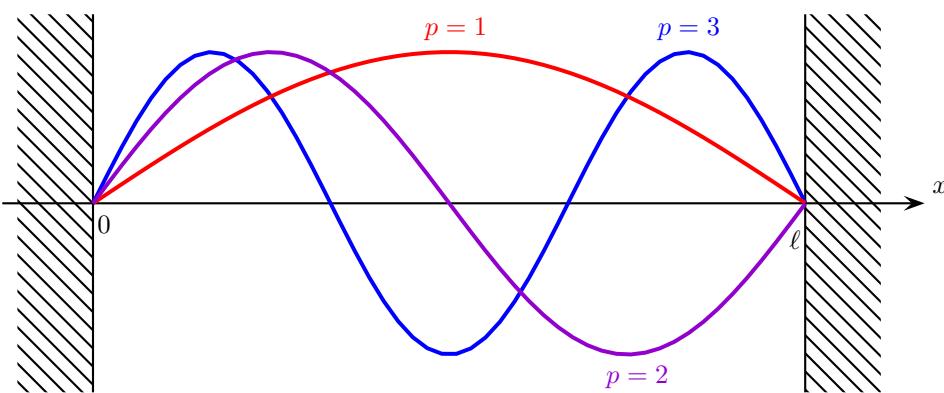


FIGURE 19.6 – Modes propres

On voit ainsi que le mode p possède $p + 1$ nœuds et sa fréquence associée vaut :

$$\nu_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{p c}{2 \ell}$$

19.5.4 La résonance

On voit ici que dans le cas d'une cavité, sans perte, à l'intérieur d'un conducteur parfait, si la fréquence de l'onde émise correspond à une fréquence propre ν_p , alors les différentes ondes réfléchies sont en phase et l'onde stationnaire donne une énergie infinie !

En réalité, aucun métal n'est parfait et l'onde est en partie absorbée par les parois conductrices de la cavité. Ainsi, l'énergie reste finie ...

Par ailleurs, si la fréquence de l'onde émise ne correspond pas à une fréquence ν_p , alors les champs électriques des ondes réfléchies sont peu à peu déphasés et la superposition de ces champs donne finalement un champ électrique nul : on parle d'interférences destructives.