

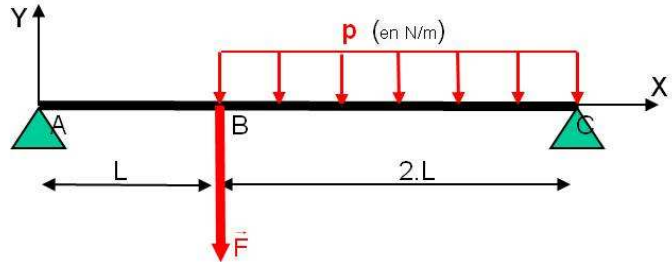
TEST de Resistance des Matériaux

2011-2012 - Correction

Calculatrice autorisée. Téléphone et autres appareils électroniques interdits.
La clarté des explications sera prise en compte. Chaque exercice est indépendant.
Durée 2h

EXERCICE 1 : Torseur de cohésion (9 points – 1h)

La poutre ci-contre est en appui en A et C, soumise à une charge uniformément répartie p suivant $-\vec{y}$ de B à C et une force \vec{F} d'intensité F suivant $-\vec{y}$ en B.



Ces sollicitations sont indépendantes et peuvent être présentes ou non.

Application numérique : $L = 3m$, $F = 3000 N$ et $p = 1000 N/m$

1. Définir les équations littérales des actions aux appuis. (1 point)

On applique le principe fondamental de la statique à { la poutre } isolée.

$$\sum \vec{M}_A \cdot \vec{z} = 0 : -F \cdot L - 2 \cdot p \cdot L \times 2 \cdot L + Y_C \cdot 3 \cdot L = 0$$

$$\sum \vec{M}_A \cdot \vec{z} = 0 : \boxed{Y_C = \frac{1}{3} \cdot (F + 4 \cdot p \cdot L)}$$

$$\sum \vec{F} \cdot \vec{y} = 0 : Y_A - F - 2 \cdot p \cdot L + Y_C = 0$$

$$\sum \vec{F} \cdot \vec{y} = 0 : \boxed{Y_A = \frac{2}{3} \cdot (F + p \cdot L)}$$

2. Pour chaque zone de la poutre, définir les équations littérales des termes du torseur de cohésion. (4 points)

Equations d'équilibre local : 2 zones

Zone AB : Coté Gauche

$$N(x) = 0$$

$$T_y(x) = -\frac{2}{3} \cdot (F + p \cdot L)$$

$$M_{fz}(x) = \frac{2}{3} \cdot (F + p \cdot L) \cdot x$$

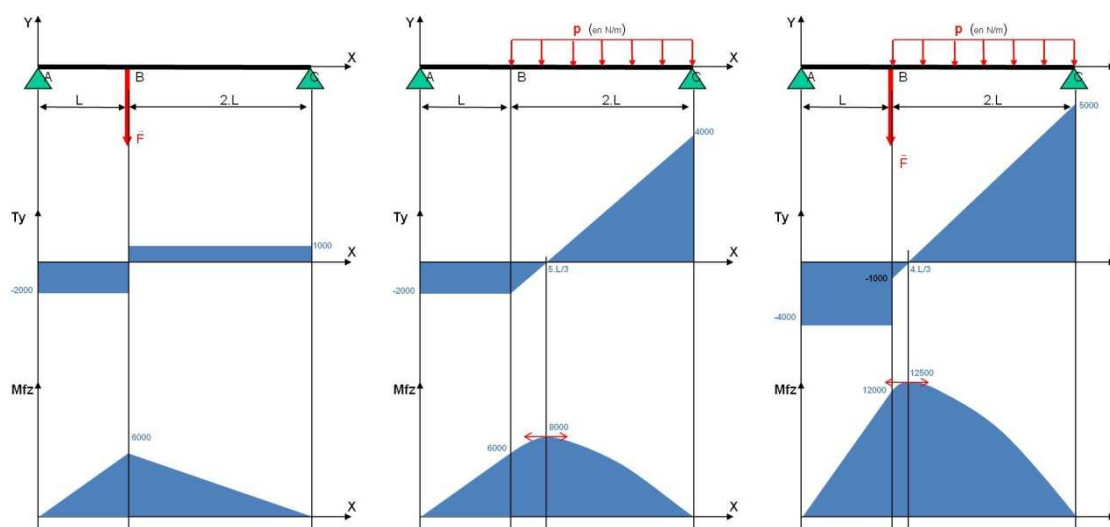
Zone BC : Coté Droit

$$N(x) = 0$$

$$T_y(x) = -p \cdot (3 \cdot L - x) + \frac{1}{3} \cdot (F + 4 \cdot p \cdot L)$$

$$M_{fz}(x) = -p \cdot \frac{(3 \cdot L - x)^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot (F + 4 \cdot p \cdot L) \cdot (3 \cdot L - x)$$

3. Tracer les diagrammes d'évolution des termes non nuls du torseur de cohésion pour chaque configuration. (3 points)

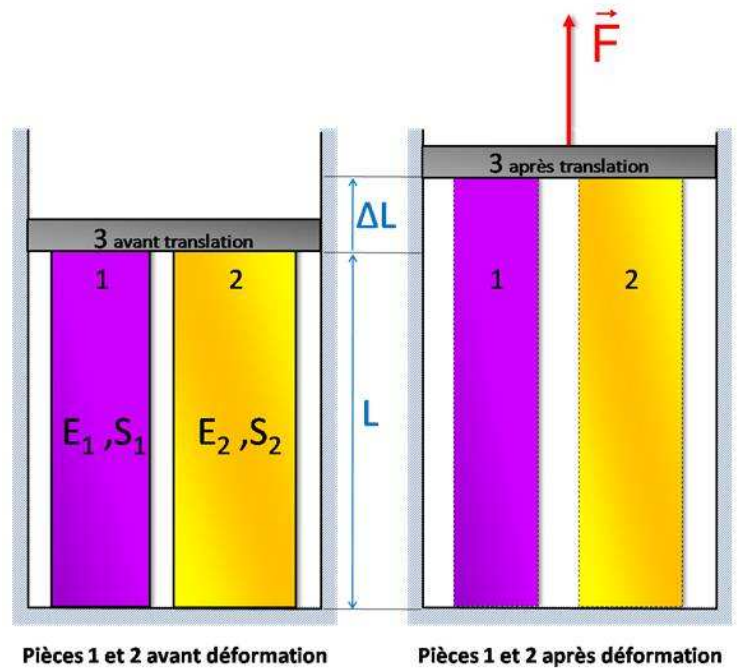


4. Dans quelle configuration et à quel endroit de la poutre, la structure est-elle la plus sollicitée ? (1 point)

C'est dans la configuration $p + F$ que le moment fléchissant est maxi pour l'abscisse $x = \frac{4}{3} \cdot L$.

EXERCICE 2 : Traction (3 points – 15 min)

Dans le mécanisme ci-contre (Vue gauche avant déformation – Vue de droite après déformation), les pièces 1 et 2 sont soumises à de la traction par l'intermédiaire de l'ensemble 3 considéré comme infiniment rigide. Le montage est tel que 3 reste parallèle à l'encastrement (translation rectiligne verticale).



1. Exprimer l'allongement de l'ensemble. (2 points)

$$\Delta L = \frac{F \cdot L}{E_1 \cdot S_1 + E_2 \cdot S_2}$$

2. Exprimer la contrainte dans les pièces 1 et 2 (1 point)

$$\sigma_i = \frac{F \cdot E_i}{E_1 \cdot S_1 + E_2 \cdot S_2}$$

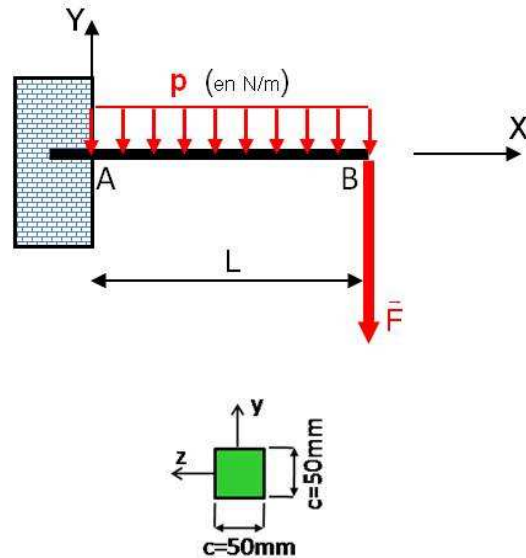
EXERCICE 3 : Flexion (8 points – 45 min)

La poutre métallique ($E = 220 \text{ GPa}$) ci-contre encastrée en A est soumise à l'action d'une charge répartie ($p = 2500 \text{ N/m}$) orientée suivant l'axe $-\vec{y}$ et d'une charge ponctuelle \vec{F} d'intensité $p \cdot L$ à l'abscisse $x = L$.

On peut montrer que les valeurs d'effort tranchant et moment fléchissant sont égaux aux relations ci-dessous :

$$T_y(x) = p \cdot x - 2 \cdot p \cdot L$$

$$M_f z(x) = -\frac{1}{2} p \cdot x^2 + 2 \cdot p \cdot L \cdot x - \frac{3}{2} p \cdot L^2$$



1. Exprimer puis calculer le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe \vec{z} . (1 point)

$$I_z = \frac{c^4}{12} = 520833 \text{ mm}^4$$

2. Déterminer le lieu et la valeur de la contrainte maxi. (2 points)

Le moment fléchissant est maxi à l'origine et vaut 3750 N.m

La contrainte vaut donc : $\sigma_{\max} = \sigma(0) = \frac{M_{fz}(0)}{E \cdot I_z} \cdot \frac{c}{2} = 180 \text{ MPa}$

3. Déterminer le lieu et la valeur de la flèche maxi. (5 points)

Méthode des déplacements :

Hypothèses :

- Matériau homogène, continu et isotrope
- Elasticité linéaire
- Petites perturbations \rightarrow Rotation de la section droite par rapport à la fibre neutre négligée. Cela implique que l'on néglige l'effort tranchant pour traduire le déplacement de la poutre. Ainsi $\gamma = 0 \rightarrow \frac{dv}{dx} = \theta$

Déformations longitudinales :

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{N}{E \cdot S} \rightarrow u(x) = 0$$

Déformations transversales :

$$\frac{dv(x)^2}{dx^2} = \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{M_{fz}}{E \cdot I_z} = \frac{1}{E \cdot I_z} \left[-\frac{1}{2} p \cdot x^2 + 2 \cdot p \cdot L \cdot x - \frac{3}{2} p \cdot L^2 \right]$$

1ère intégration :

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{1}{E \cdot I_z} \left[-\frac{1}{6} p \cdot x^3 + p \cdot L \cdot x^2 - \frac{3}{2} p \cdot L^2 \cdot x \right] + C_1$$

2nd intégration :

$$v(x) = \frac{1}{E.Iz} \cdot \left[-\frac{1}{24} p \cdot x^4 + \frac{1}{3} p \cdot L \cdot x^3 - \frac{3}{4} p \cdot L^2 \cdot x^2 \right] + C_1 \cdot x + C_2$$

Conditions aux limites pour déterminer les constantes C_1 et C_2

En $x = 0$ il y a un encastrement, donc pas de déplacement $v(0) = 0$ ni de rotation de la section droite ou de la fibre neutre $\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = 0$.

On détermine la constante C_1 :

$$0 = \frac{1}{E.Iz} \cdot \left[-\frac{1}{6} p \cdot x^3 + p \cdot L \cdot x^2 - \frac{3}{2} p \cdot L^2 \cdot x \right] + C_1$$

$$C_1 = 0$$

Puis la constante C_2 :

$$0 = \frac{1}{E.Iz} \cdot \left[-\frac{1}{24} p \cdot x^4 + \frac{1}{3} p \cdot L \cdot x^3 - \frac{3}{4} p \cdot L^2 \cdot x^2 \right] + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Bilan :

$$\theta(x) = \frac{1}{E.Iz} \left[-\frac{1}{6} p \cdot x^3 + p \cdot L \cdot x^2 - \frac{3}{2} p \cdot L^2 \cdot x \right]$$

$$v(x) = \frac{1}{E.Iz} \cdot \left[-\frac{1}{24} p \cdot x^4 + \frac{1}{3} p \cdot L \cdot x^3 - \frac{3}{4} p \cdot L^2 \cdot x^2 \right]$$

Lieu de la flèche maxi :

La flèche est maxi quand $\theta(x_{vmax}) = 0$

$$-\frac{1}{6} p \cdot x^3 + p \cdot L \cdot x^2 - \frac{3}{2} p \cdot L^2 \cdot x = 0$$

$$p \cdot x \cdot \left[-\frac{1}{6} x^2 + L \cdot x - \frac{3}{2} L^2 \right] = 0$$

Solutions :

- $x = 0$ Encastrement
- $x = 3 \cdot L$ Hors zone

La solution est donc à la frontière $x = L$ (prévisible !!!)

$$v_{max} = -\frac{11}{24} \cdot \frac{p \cdot L^4}{E.Iz}$$

Application numérique :

$$v_{max} = -10 \text{ mm}$$