

Fiches de Révision

MPSI

TOME I - Physique et Chimie

Jean-Baptiste Théou

Creative Commons - Version 0.1

Licence

J'ai décidé d'éditer cet ouvrage sous la licence Creative Commons suivante : CC-by-nc-sa.
Pour plus d'information :

[http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/.](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/)

Ce type de licence vous offre une grande liberté, tout en permettant de protéger mon travail contre une utilisation commercial à mon insu par exemple.

Pour plus d'information sur vos droits, consultez le site de Creative Commons

Avant-propos

Il y a un plus d'un an, au milieu de ma SUP MP, j'ai décidé de faire mes fiches de révision à l'aide de Latex, un "traitement de texte" très puissant. Il en résulte les fiches qui suivent. Je pense que travailler sur des fiches de révision, totalement séparé de notre cours, est un énorme plus, et réduit grandement la quantité de travail pour apprendre son cours, ce qui laisse plus de temps pour les exercices. Mon expérience en tout cas va dans ce sens, j'ai notamment progressé à l'aide de ces fiches.

J'ai décidé de les rassembler sous forme d'un "livre", ou plutôt sous forme d'un recueil. Ce livre à pour principal intérêt pour moi d'être transportable en cours. C'est cet intérêt qui m'a poussé à faire ce livre.

Dans la philosophie de mes fiches de révision, ce livre est disponible gratuitement et librement sur mon blog. Il est édité sous License Creative Commons. Vous pouvez librement adapter ce livre à vos besoins, les sources Latex sont disponibles sur mon blog. Je pense que pour être en accord avec la philosophie de ces fiches, il sera bien que si vous effectuez des modifications de mon ouvrage, vous rendiez ces modifications disponible à tous. Je laisserai volontiers une place pour vos modifications sur mon blog. Je pense sincèrement que ce sera vraiment profitable au plus grand nombre, et dans la logique de mon travail.

J'ai hiérarchisé mon ouvrage de façon chronologique. Les parties sont rangées dans l'ordre "d'apparition" en MPSI. J'ai mis en Annexe des petites fiches de méthodologie, qui peuvent s'avérer utiles.

Je vous souhaite une bonne lecture, et surtout une bonne réussite.

Jean-Baptiste Théou

Remerciements

Je tient à remercier tout particulièrement Yann Guillou, ex Professeur de Physique-Chimie en MPSI au Lycée Lesage, actuellement en poste en Guadeloupe, qui m'a permis de consolider mes connaissances en physique et qui m'a ouvert les yeux sur la réalité de la physique et sur son histoire. Ces "digressions historiques" resteront de bons moments dans mon esprit, pour longtemps. Je remercie aussi Paul Maheu, Professeur de Mathématiques en MPSI au Lycée Lesage, qui m'a permis d'acquérir de solides connaissances en Mathématiques.

Sans eux, ce livre ne pourrait exister.

Pour finir, je me dois à mon avis d'insérer cette citation dans mon ouvrage, citation que nous a donné Mr Guillou pour nos premiers coups de crayon en Prépa. Elle est à méditer

*Je suis convaincu qu'il est plus bénéfique
pour un étudiant de retrouver des
démonstrations à partir de quelques
indications que de les lire et de les relire
Qu'il les lisent une fois, qu'il les
retrouvent souvent*

SRINIVÂSA AIYANGÂR
RÂMÂNUJAN(1886-1920)

Table des matières

Licence	i
Avant-propos	iii
Remerciements	v
I Optique	11
1 Optique géométrique	13
1.1 Généralités	13
1.1.1 Vocabulaire	13
1.2 Relations de Snell-Descartes	13
1.2.1 Lois de Snell-Descartes	13
1.2.2 Angle limite et reflexion totale	14
1.2.3 Milieu inhomogène	14
1.3 Principe de Fermat	14
1.4 Déviation	14
1.5 Vision d'image, conditions de Gauss	14
1.5.1 Réel et Virtuel	14
1.6 Conditions de Gauss	15
1.7 Miroir sphérique dans les conditions de Gauss	15
1.7.1 Grandissement et relation de conjugaison	15
1.7.2 Plan focal et foyer secondaire	15
1.8 Lentille mince dans les conditions de Gauss	16
1.8.1 Lentille convergente	16
1.8.2 Lentille divergente	16
1.8.3 Distance focale et vergence	16
1.8.4 Relation de conjugaison	16
1.8.5 Plan focal et foyer secondaire	16
II Mécanique	19
2 Cinématique du point	21
2.1 Postulats de Newton	21
2.1.1 Espace et Temps	21
2.1.2 Point matériel - Référentiel	21
2.2 Déplacement élémentaire	21
2.2.1 Expression en coordonnées sphérique	21
2.3 Vitesse	22
2.4 Accélération	22

2.5	Vitesse et accélération dans la base de Frenet	23
2.5.1	Déplacement élémentaire	23
2.5.2	Vitesse	23
2.5.3	Accélération	23
3	Principe fondamental de la dynamique	25
3.1	Masse et quantité de mouvement	25
3.2	Interactions et forces	25
3.3	Forces	25
3.3.1	Electro-magnétique	25
3.3.2	Gravitationnelle	26
3.3.3	De contact	26
3.4	Principe fondamental de la dynamique	26
3.4.1	Référentiel galiléen	26
3.4.2	Enoncé du principe fondamental de la dynamique	26
4	Énergie d'un point matériel	29
4.1	Puissance et travail d'une force	29
4.1.1	Puissance	29
4.1.2	Travail d'une force	29
4.2	Théorème de l'énergie cinétique	29
4.2.1	Énergie cinétique	29
4.2.2	Théorème de l'énergie cinétique	30
4.3	Force conservative	30
4.3.1	Force conservative et énergie potentielle	30
4.4	Énergie mécanique et intégrale première de l'énergie cinétique	30
4.4.1	Energie mécanique	30
4.4.2	Relation entre le théorème de l'énergie cinétique et $E_m(M)_R$	30
4.4.3	Intégrale première de l'énergie cinétique	30
4.4.4	Relation entre l'énergie potentielle et les relations d'équilibre	31
5	Oscillation Forcée	33
5.1	Pendule horizontale soumis à une excitation sinusoïdale	33
5.1.1	Équation différentielle du mouvement	33
5.1.2	Régime forcé ou régime permanent	33
5.2	Résonance en élongation	34
5.2.1	Notation complexe	34
5.2.2	Amplitude complexe de l'oscillateur	34
5.2.3	Résonance d'élargissement	34
5.3	Vitesse	35
5.3.1	Amplitude complexe de la vitesse	35
5.4	Impédance complexe	35
5.4.1	Force explicite	35
5.4.2	Analogie électro-mécanique	36
6	Force centrale	37
6.1	Définitions	37
6.1.1	Moment cinétique	37
6.2	Théorème du moment cinétique	37
6.2.1	Application du théorème du moment cinétique à une force centrale	38
6.3	Approche qualitative de la nature de la trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale	38
6.3.1	Constante des aires	38
6.3.2	Vitesse aréolaire	38
6.3.3	Énergie mécanique d'un système soumis à une force centrale	38
6.3.4	Trajectoire dans un champ newtonien	39

6.4	Etude du mouvement d'un point matériel dans une force centrale d'origine gravitationnelle	39
6.4.1	Formule de Binet	39
6.4.2	Force explicite de la trajectoire d'après les formules de Binet	39
6.4.3	Energie mécanique	39
6.5	Trajectoire elliptique	40
6.5.1	Trajectoire circulaire	40
6.5.2	Trajectoire elliptique	40
6.5.3	Trajectoire parabolique	41
6.5.4	Satellisation, orbite géostationnaire	41
7	Changement de référentiel	43
7.1	Définitions	43
7.1.1	Présentation	43
7.1.2	Dérivation d'un vecteur quelconque par rapport au temps	43
7.1.3	Référentiel en translation	43
7.2	Loi de compositions des vitesses, des accélérations	43
7.2.1	Loi de compositions des vitesses	43
7.2.2	Loi de composition des accélérations	44
7.3	Repère en translation et en rotation	44
7.3.1	Translation	44
7.3.2	Rotation uniforme autour d'un axe fixe	44
8	Référentiel non-galiléen	45
8.1	Principe fondamental de la dynamique	45
8.1.1	Dans un référentiel galiléen	45
8.1.2	Dans un référentiel non-galiléen	45
8.1.3	Forme explicite des forces d'inerties	45
8.2	Théorème généraux dans $R_{N,G}$	46
8.2.1	Théorème de l'énergie cinématique	46
8.2.2	Théorème du moment cinétique	46
8.3	Statique dans le référentiel Terrestre	46
8.3.1	Définition du poids d'un corps	46
8.3.2	Energie potentiel de pesanteur	47
8.4	Dynamique dans le référentiel Terrestre	47
8.4.1	Point matériel en mouvement dans le plan horizontale	47
8.4.2	Point matériel en mouvement verticale	47
8.5	Marée océanique	48
8.5.1	Champs de Marée	48
9	Système de deux points matériels	49
9.1	Référentiel barycentrique	49
9.1.1	Barycentre	49
9.1.2	Référentiel barycentrique	49
9.1.3	Théorème de la résultante cinétique	49
9.2	Éléments cinétique dans R^* galiléen	50
9.2.1	Résultante cinétique	50
9.2.2	Moment cinétique	50
9.2.3	Énergie cinétique	50
9.2.4	Particule fictive	50
9.3	Étude du mouvement d'un système de deux points matériels isolés, en interaction newtonienne	50
9.3.1	Énergie potentielle de gravitation	50
9.3.2	Énergie mécanique	51
9.3.3	Nature de la trajectoire, équation du mouvement	51
9.3.4	Grandeurs caractéristiques du mouvement	51

III Électricité	53
10 Généralité sur les circuits	55
10.1 Le courant électrique	55
10.1.1 Approximation des régimes quasi-stationnaire	55
10.2 Dipôles électriques dans l'A.R.Q.S	55
10.2.1 Convention d'orientation	55
10.2.2 Loi de Kirchhoff	56
10.2.3 Caractéristique d'un dipôle	56
10.2.4 Montage en série, Montage en dérivation	56
10.3 Présentation des principaux dipôles	57
10.3.1 Conducteur ohmique	57
10.3.2 Condensateur	57
10.3.3 Solénoïde	57
10.3.4 Diodes	58
10.3.5 Source de tension et de courant	58
11 Théorèmes généraux	59
11.1 Diviseur de tension	59
11.2 Diviseur de courant	59
11.3 Théorème de Kennely	59
11.4 Théorème de Millman	59
12 Régime Transitoire	61
12.1 Réponse d'un circuit R.C à un échelon de tension	61
12.1.1 Cas général	61
12.2 Réponse d'un circuit R.L à un échelon de tension	61
12.2.1 Cas général	61
12.2.2 Réponse à un échelon de tension	62
12.3 Réponse d'un circuit R.L.C à un échelon de tension	62
12.3.1 Différents régimes d'évolutions	62
13 Régime sinusoïdale forcé	65
13.1 Réponse d'un circuit R.L.C série à une excitation sinusoïdale	65
13.1.1 Réponse de $u_c(t)$	65
13.2 Impédance complexe	65
13.2.1 Impédance complexe d'un dipôle	65
13.3 Diagramme de Fresnel	66
13.4 Théorèmes généraux en régime sinusoïdale forcé	67
13.4.1 Lois de Kirchhoff	67
13.4.2 Diviseur de tension	67
13.4.3 Diviseur de courant	67
13.4.4 Théorème de Kennely	67
13.4.5 Théorème de Millman	68
13.5 Puissance instantanée et puissance moyenne	68
13.5.1 Puissance instantanée	68
13.5.2 Puissance moyenne	68
13.5.3 Grandeur efficace	68
13.5.4 Facteur de puissance	69
13.5.5 Puissance consommée, Puissance dissipé	69
14 Diagramme de Bode	71
14.1 Fonction de transfert	71
14.2 Gain et relation de phase	71
14.3 Ordre de la fonction de transfert	71
14.4 Diagramme de Bode	72
14.4.1 Gain de décibel	72

14.4.2	Tracer un diagramme de bode pour le gain	72
14.4.3	Tracer un diagramme de bode pour l'argument	72
14.4.4	Pulsation de coupure à 3 dB	72
14.4.5	Fonction du 2 nd ordre - Résonnance de charge	72
14.4.6	Fonction du 2 nd ordre - Résonnance de tension	72
14.5	Détermination de la nature du filtre	72
14.5.1	Comportement d'un solénoïde	73
14.5.2	Comportement d'un condensateur	73
IV	Électrostatique	75
15	Mouvement d'une particule chargée	77
15.1	Force de Lorentz	77
15.1.1	Champs électrique, champs magnétique	77
15.1.2	Force de Lorentz	77
15.1.3	Invariance relativiste	77
15.2	Mouvement d'une particule chargé dans un champs électrique	77
15.2.1	Trajectoire	77
15.2.2	Focalisation	78
15.2.3	Canon à électrons	78
15.3	Étude du mouvement d'une particule chargée dans un champs magnétique	78
15.3.1	Mouvement d'une particule dans un champs électromagnétique	78
16	Charge électrique	79
16.1	Distribution de charge	79
16.1.1	Distribution volumique	79
16.1.2	Distribution surfacique et linéaire	80
16.2	Loi de Coulomb	80
16.2.1	Principe de superposition	80
16.3	Champs électrostatique	80
16.3.1	Champs crée par une charge ponctuelle	80
16.3.2	Champs crée par une distribution de charge	80
16.3.3	Champs crée par un disque uniformément chargé en surface avec la densité σ_0	81
16.3.4	Champs crée par un fil de longeur infini uniformément chargé avec la densité λ_0	81
17	Circulation et flux	83
17.1	Définitions	83
17.1.1	Circulation d'un champ de vecteurs	83
17.1.2	Flux d'un champ de vecteur	83
17.2	Circulation du champs électrostatique : Potentiel électrostatique	84
17.2.1	D'une particule ponctuelle	84
17.2.2	Potentiel électrostatique	84
17.2.3	Relation entre le champs et le potentiel	84
17.2.4	Théorème de l'énergie cinétique	85
17.3	Flux du champ électrostatique : Théorème de Gauss	85
17.3.1	Relation de continuité	85
17.3.2	Conditions d'application du théorème de Gauss	85
17.4	Application à la gravitation	85
17.4.1	Généralisation	86

18 Dipole électrique	87
18.1 Propriétés électriques du dipole	87
18.1.1 Propriétés de symétrie	87
18.1.2 Potentiel crée par le dipole	87
18.1.3 Champ électrostatique	87
18.1.4 Propriétés électriques	87
18.2 Action d'un champ électrique sur un dipole	88
18.2.1 Dans un champs uniforme	88
18.2.2 Dans un champ inhomogène	88
18.2.3 Force de Van der Waales	88
V Magnétostatique	89
19 Magnétostatique	91
19.1 Loi de Biot et Savart	91
19.2 Flux du champ magnétique	91
19.2.1 Flux conservatif	91
19.2.2 Variation du champ magnétique dans un tube de champ	91
19.3 Circulation du champ magnétique sur un contour fermé - Théorème d'Ampère	92
19.3.1 Symétrie	92
VI Thermodynamique	93
20 Éléments de statique des fluides	95
20.1 Pression et force pressante	95
20.2 Force Résultante exercé par un fluide	95
20.3 Particule de Fluide	95
20.4 Force pressante exercé par un fluide sur une particule de fluide	95
20.5 Définition d'un gradiant	96
20.6 Loi fondamental de la statique, dans un référentiel galiléen	96
20.7 Théorème de Pascal	96
20.8 Fluide compressible assimilable à un gaz parfait	96
20.9 Loi fondamentale de la statique des fluides dans un référentiel non galiléen	97
20.10Force pressante et poussé d'Archimède	97
21 Introduction à la thermodynamique	99
21.1 Critère d'un gaz parfait monoatomique	99
21.2 Pression cinétique dans un G.P.M.	99
21.3 Température cinétique	99
21.4 Fonction d'état d'un gaz parfait et énergie interne	100
21.5 Étude d'un gaz réel	100
21.6 Capacité Calorifique à volume constant	100
21.7 Mélange Gazeux	100
21.8 Gaz de Van Der Waales	101
21.9 Système Thermodynamique	101
21.10Équilibre thermodynamique et évolution quasi statique	101
21.11Grandeur intensive, extensive	101
21.12Grandeur et fonction d'état	101
21.13Coefficients thermoélastique	101

22 Premier principe de la thermodynamique	103
22.1 Bilan d'une grandeur extensive	103
22.2 Grandeur conservatrice	103
22.3 Premier principe de la thermodynamique	103
22.4 Travail en thermodynamique	103
22.5 Transfert thermique	104
22.6 Forme explicite du premier principe	104
22.7 Différents types de travaux	104
22.7.1 Évolution adiabatique	104
22.7.2 Évolution isochore	104
22.7.3 Évolution isoénergétique	104
22.8 Différentes formes de travaux	104
22.8.1 Évolution isochore	104
22.8.2 Évolution monobar	104
22.8.3 Évolution isobare	105
22.8.4 Évolution quasi-statique et isotherme	105
22.8.5 Évolution polytropique d'indice k	105
22.9 Enthalpie	105
22.10 Capacité calorifique à pression constante	105
22.11 Relation de Mayer	105
22.12 Phase condensés	106
22.13 Principe de la calorimétrie	106
22.14 Second principe de la thermodynamique	106
22.15 Réversibilité d'une évolution	106
22.16 Bilan entropique	107
22.17 Expression de dS	107
22.18 Évolution	107
23 Machines Thermiques	109
23.1 Diagramme de Clapeyron	109
23.2 Machine thermique	109
23.3 Moteurs et machines frigorifiques	109
23.4 Coefficient d'efficacité	110
23.5 Cycle de Beau de Roches	110
23.6 Autres cycles	110
23.7 Principe de fonctionnement d'une machine frigorifique	110
23.7.1 Fonctionnement	111
24 Transition de phase des corps purs	113
24.1 Corps purs	113
24.2 Corps simple	113
24.3 Phase et transition de phase	113
24.3.1 Système diphasé	113
24.3.2 Transition	113
24.4 Variance	113
24.5 Étude du diagramme $p=f(t)$	114
24.5.1 Pente des frontières de coexistence	114
24.5.2 Point Triple : T	114
24.5.3 Point Critique : C	114
24.6 Diagramme $p=f(v)$ de l'équilibre liquide-gaz.	
Isotherme d'Andrews	114
24.6.1 Propriété du point critique	114
24.7 Enthalpie et entropie de transition de phase	115
24.7.1 Enthalpie	115
24.8 Entropie	115
24.9 Complément de culture	115

24.9.1	Évaporation	115
24.9.2	Ébullition	115
24.9.3	Etat métastable	115
VII	Thermochimie	117
25	Définitions	119
25.1	Avancement	119
25.2	Application du Ier principe	119
25.2.1	Résultat calorimétrique	119
25.3	Grandeur chimique de réaction	119
25.4	Grandeur standard de réaction	120
25.4.1	Conditions standard	120
25.4.2	Etat standard d'une entité chimique	120
25.4.3	Grandeur standard de réaction	120
25.4.4	Transfert thermique associé à une réaction chimique	120
26	Enthalpie standard de formation	121
26.1	Loi de Hess	121
26.2	Influence de la température sur l'enthalpie standard de réaction	121
26.3	Température de flamme	121
27	Énergie de liaison	123
28	Énergie d'ionisation et d'attachement électronique	125
VIII	Chimie	127
29	La chimie des solutions	129
29.1	L'eau, molécule et solvant	129
29.1.1	Moment dipolaire	129
29.1.2	Force d'interaction	129
29.2	Réactions chimiques	129
29.2.1	Avancement d'une réaction chimique	130
29.2.2	Équilibre chimique	130
29.2.3	Relation de Guldberg et Waages	130
29.3	Réactions acido-basique	130
29.3.1	Constante d'acidité	131
29.3.2	Constante de basicité	131
29.3.3	Produit ionique de l'eau	131
29.3.4	Relations entre K_A et K_B - pK_A et pK_B	131
29.3.5	Diagramme de prédominance	131
29.3.6	Force d'un acide ou d'une base - Nivellement par l'eau	132
29.4	Réactions de complexation	132
29.4.1	Constante de formation et de dissociation d'un ion complexe	132
29.4.2	Diagramme de prédominance	132
29.5	Réactions de précipitation	132
29.5.1	Diagramme de prédominance	132
29.5.2	Solubilité	133

30 Réaction d'oxydo-réduction	135
30.1 Nombres d'oxydation	135
30.1.1 Plan d'équilibrage d'une réaction avec les nombres d'oxydation	135
30.2 Formule de Nernst	136
30.2.1 Vocabulaire	136
30.2.2 Potentiel d'électrode	136
30.2.3 Enoncé	136
30.3 Réaction d'oxydo-réduction à l'équilibre chimique	136
31 Cinétique Chimique	137
31.1 Avancement - Vitesse d'une réaction chimique	137
31.1.1 Avancement d'une réaction chimique	137
31.1.2 Vitesse d'une réaction chimique	137
31.2 Étude de cinétique	138
31.2.1 Méthode de séparation d'Ostwald	138
31.2.2 Reconnaissance des ordres par rapport à [A(t)]	138
31.2.3 Réaction composée	138
32 Mecanisme réactionnels	139
32.1 Processus élémentaire	139
32.2 Loi de Van't Hoff	139
32.3 Mécanisme réactionnel	139
32.4 Principe de Bodenstein	139
32.5 Hypothèse de l'étape cinétiquement limitante	139
32.6 Réaction en chaîne	139
IX Architecture de la matière	141
33 Sources et Évolution de la mécanique quantique	143
33.1 Loi de Planck	143
33.2 Formule de Ritz	143
33.3 Énergie de l'atome d'hydrogène	143
33.4 Énergie d'un ion hydrogénéoïde	144
33.5 Longueur d'onde de Broglie	144
34 Fonctions d'onde, nombres quantiques	145
34.1 Fonction d'onde	145
34.2 Nombres quantiques	145
34.2.1 Nombre quantique principal	145
34.2.2 Nombre quantique orbital	145
34.2.3 Nombre quantique magnétique	145
34.2.4 Spin	145
34.3 Orbitale atomique	146
35 Atomes polyélectroniques	147
35.1 Règle de Klechkowski	147
35.2 Configuration électronique d'un atome	147
35.2.1 Principe de stabilité	147
35.2.2 Principe d'exclusion de Pauli	147
35.2.3 Principe de Hund	147
35.2.4 Configuration électronique	147
35.3 Ionisation d'un atome	148

36 Classification periodique des éléments	149
36.1 Classification periodique de Mendeleiev	149
36.2 Construction du tableau periodique	149
36.2.1 Les différents blocs	149
36.3 Des propriétés	150
36.3.1 Grandeurs énergétiques	150
36.4 Électronégativité	150
36.4.1 Électronégativité de Pauling	150
36.4.2 Électronégativité de Mulliken	150
36.4.3 Électronégativité de Allred-Rochow	150
37 Structures moléculaires	151
37.1 Théorie de Lewis	151
37.1.1 Représentation de Lewis	151
37.1.2 Liaisons covalentes	151
37.1.3 Valence d'un atome	151
37.1.4 Modèle de Lewis	151
37.2 Théorie de la mésomérie	152
37.2.1 Présentation	152
X Annexe	153
A Outils Mathématique	155
A.1 Produit scalaire	155
A.2 Produit vectorielle	155
A.3 Dérivation d'un vecteur	155
A.4 Coordonnée	155
A.4.1 Coordonnée polaire	155
A.4.2 Coordonnée cylindrique	156
A.4.3 Coordonnée sphérique	156
A.5 Equations différentielles	156
B Equation différentielle croisée	157
B.1 Exemple	157
C Notation Complexe	159
C.1 Utilité	159
C.2 Conversion	159

Première partie

Optique

Chapitre 1

Optique géométrique

1.1 Généralités

Considérons une onde lumineuse. Soit λ sa longeur d'onde, T sa période spatiale. Notons n l'indice du milieu, avec $n(\lambda)$ dans le cas d'un milieu dispersif.

→ Soit c , la célérité de la lumière :

$$\lambda = c \cdot T \text{ (Dans le vide)}$$

→ Soit v , la vitesse du rayon dans un milieu d'indice n :

$$v = \frac{c}{n}$$

Dans un prisme, une source polychromatique (ex : lumière blanche) est décomposée, avec sa composante bleue qui est plus déviée que sa composante rouge. Dans un milieu homogène, la lumière se propage en ligne droite

1.1.1 Vocabulaire

Plus un milieu possède un indice important, plus on dit de celui-ci qu'il est réfringent. Un milieu est dit homogène si ses propriétés physiques sont invariantes

1.2 Relations de Snell-Descartes

Définition 1 Considérons deux milieux (homogènes) d'indices différents (n_1 et n_2). On appelle dioptre, la surface de séparation entre ces deux milieux. On appelle plan d'incidence, notée π , le plan défini par le rayon incident, et la normale en I , le point où le rayon touche le dioptre. Sur le dioptre, le rayon incident subit une réflexion et une réfraction. Ces rayons vérifient les lois de Snell-Descartes.

1.2.1 Lois de Snell-Descartes

Soit n_1, n_2 les indices respectifs des milieux 1 et 2. Soit i_1, i_2 les angles respectivement formés avec la normale par le rayon incident et le rayon réfracté.

- Le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence π
- Le rayon réfléchi est symétrique au rayon incident par rapport à la normale
- Loi des sinus : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$
- Loi de retour inverse : Si un rayon va du point A au point B, il utilisera le même itinéraire pour faire le chemin inverse.

1.2.2 Angle limite et reflexion totale

Considérons un rayon évoluant d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent ($n_2 > n_1$). À l'aide de la loi des sinus, on observe l'existence d'un angle limite, notée i_L :

$$\sin(i_L) = \frac{n_2}{n_1}$$

Pour tous rayons ayant un angle d'incidence $i > i_L$, il y a réflexion totale dans le milieu le plus réfringent.

1.2.3 Milieu inhomogène

Considérons un milieu inhomogène. Nous avons les lois suivantes :

- $n(z) \cdot \sin(i(z)) = \text{constante}$
- Le rayon lumineux fui les indices importants.
- Le rayon lumineux reste confiné dans une gaine par le phénomène de réflexion totale, quand $i > i_L$

1.3 Principe de Fermat

Définition 2 *Le chemin optique entre deux points quelconques A et B, notée L_{AB} , est défini par :*

$$L_{AB} = \int_a^b n \cdot dl$$

avec n , indice du milieu.

Principe 1 *Le chemin optique effectivement suivi par la lumière est stationnaire.*

Grâce à ce principe et cette définition, on peut retrouver toutes les relations de Snell-Descartes.

1.4 Déviation

Définition 3 *Considérons un système optique, noté S.O. On appelle déviation d'un rayon lumineux par un S.O. l'angle entre le rayon incident et le rayon émergent. Si l'on convient d'une orientation des angles, la déviation, notée D, peut être algébrique.*

1.5 Vision d'image, conditions de Gauss

Définition 4 *En optique géométrique, une image résulte de l'intersection de rayons ou de supports de rayons issus d'un même point objet.*

Définition 5 *On appelle axe optique l'axe de symétrie du S.O. orienté dans la direction du rayon incident.*

1.5.1 Réel et Virtuel

On définit des objets réels et virtuels, respectivement des images réelles et virtuelles, de la façon suivantes

	Réel	Virtuel
Objet (Rayon incident)	Vient de l'objet	Semble converger vers l'objet
Image (Rayon émergent)	Converge vers l'image	Semble provenir de l'image

Définition 6 On dit d'un système optique qu'il est stigmatique pour un couple de points (A, A') , si tous rayons issus de A passe par A' après avoir traversé le S.O. Le seul système optique rigoureusement stigmatique est le miroir plan.

Définition 7 On dit d'un système optique qu'il est aplanétique si l'image $A'B'$ de l'objet AB , normal à l'axe optique, et également normal à l'axe optique

1.6 Conditions de Gauss

En général, un système optique peut satisfaire un stigmatisme approché dans un S.O. en se placant dans les conditions de Gauss :

- Le rayon lumineux est peu incliné par rapport à l'axe optique
- Le rayon lumineux est peu éloigné de l'axe optique

Hors de ces conditions, on risque d'observer une image floue, accompagnée d'aberrations chromatiques et géométriques.

1.7 Miroir sphérique dans les conditions de Gauss

La notation \overline{X} signifie que X est une grandeur algébrique.

Définition 8 Considérons un miroir sphérique. On appelle sommet, noté S , l'intersection du miroir avec l'axe optique. On note C , le centre de courbure de la calotte sphérique et F le foyer, telque :

$$\overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Dans l'étude d'un miroir sphérique, nous avons les propriétés suivantes :

- Un rayon lumineux incident parallèle à l'axe optique passe par un point particulier qu'on appelle foyer, noté F , à la réflexion.
- Un rayon incident passant par F est réfléchi parallèlement à l'axe optique.
- Un rayon incident passant par C repasse par ce point à la réflexion.
- Tous rayons passant par S sont réfléchis symétriquement par rapport à l'axe optique.

1.7.1 Grandissement et relation de conjugaison

Définition 9 On appelle grandissement, noté γ , le rapport de la dimension de l'image $\overline{A'B'}$ sur celle de l'objet \overline{AB}

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Propriété 1 On définit la relation de conjugaison d'un S.O., relative à une origine, à l'aide de la relation de Thales. Pour un miroir sphérique avec origine au sommet, on obtient :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{\overline{SF}}$$

1.7.2 Plan focal et foyer secondaire

Définition 10 On appelle plan focal, noté π , la plan normal à l'axe optique passant par le foyer F . Tous points du plan focal constituent un foyer secondaire

On utilise un foyer secondaire dans l'étude d'un faisceau de lumière parallèle arrivant incliné par rapport à l'axe optique.

1.8 Lentille mince dans les conditions de Gauss

Une lentille mince résulte de l'association de deux dioptres sphériques, généralement l'un en Flint et l'autre en Crown. On dit d'une lentille qu'elle est mince quand son épaisseur "e" est négligeable devant chacun des rayons de courbure des dioptres sphériques.

1.8.1 Lentille convergente

Ces lentilles vérifient une série de propriétés :

- Tous rayons incidents parallèles à l'axe optique d'une lentille convergente passe par un point particulier appelé foyer image de la lentille, noté F'.
- Une lentille est symétrique dans son action sur la lumière. A tous foyers images F' on associe un foyer objet F par symétrie par rapport à O.
- Tous rayon incident passant par F, le foyer objet, donne un rayon parallèle à l'axe optique après la traversée d'une lentille convergente.
- Tous rayons incidents passant par O, le centre de la lentille, n'est pas déviés.

1.8.2 Lentille divergente

Ces lentilles vérifient une série de propriétés :

- Tous rayons incidents dont le support passe par le foyer F d'une lentille divergente donne un rayon parallèle à l'axe optique après passage du S.O.
- Une lentille est symétrique dans son action sur la lumière. A tous foyers images F' on associe un foyer objet F par symétrie par rapport à O.
- Tous rayons incidents parallèles à l'axe optique d'une lentille divergente donne un rayon divergent donc le support passe par le foyer image F'
- Tous rayons incidents passant par O, le centre de la lentille, n'est pas déviés.

1.8.3 Distance focale et vergence

Définition 11 On appelle distance focale image, la distance entre le centre optique O d'une lentille et le foyer image F' :

$$f' = \overline{OF'}$$

Pour les lentilles convergentes, $f' > 0$, pour les lentilles divergentes, $f' < 0$

Définition 12 On appelle vergence d'une lentille l'inverse de la distance focale :

$$v = \frac{1}{f'}$$

L'unité de la vergence est la dioptrie, notée δ

1.8.4 Relation de conjugaison

Dans le cas d'une lentille mince, la relation de conjugaison est obtenue grâce à la relation de Thalès :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

1.8.5 Plan focal et foyer secondaire

Définition 13 Le plan focal est défini comme la perpendiculaire à l'axe optique passant par un foyer. Pour une lentille mince, on définit le plan focal objet, noté π, et le plan focal image, noté π'.

On associe à ce plan focal un ensemble de propriétés :

- Un faisceau de lumière parallèle, incliné par rapport à l'axe optique d'une lentille convergente focalise en un point sur le plan focal objet, appelé foyer secondaire. Sa position est donnée par un rayon incident passant par O.

→ Un faisceau de lumière parallèle incliné par rapport à l'axe optique d'une lentille divergente donne un faisceau divergent dont le support focalise en un point sur le plan focal image, appelé foyer secondaire. Sa position est donnée par un rayon incident passant par O.

Grâce à ces propriétés, on peut étudier tous types de rayons incidents. On dit que l'objet est à l'infini ou que l'image d'un objet est à l'infini si respectivement les rayons incidents ou émergents sont parallèles à l'axe optique

Deuxième partie

Mécanique

Chapitre 2

Cinématique du point

2.1 Postulats de Newton

2.1.1 Espace et Temps

La mécanique newtonienne repose sur les postulats spatio-temporels de Newton, à savoir :

- L'espace est absolu, immuable, infini, euclidien, homogène et isotrope
- Le temps est absolu et uniforme

2.1.2 Point matériel - Référentiel

Définition 14 Un système sera assimilé à un point à partir du moment où sa position dans l'espace peut être donnée par un triplet de coordonnées.

Définition 15 On parle d'un point matériel quand on concentre la totalité de la masse du système à l'isobarycentre des masses. La position de cet objet sera donc étudié depuis ce point.

Définition 16 Un référentiel est un repère muni de la notion de temps. On peut donc y effectuer des mesures, et donc y réaliser une étude cinématique.

2.2 Déplacement élémentaire

Expression en coordonnées catérisienne

$$\vec{dl}_R = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

Expression en coordonnées cylindrique

$$\vec{dl}_R = dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$$

Expression en coordonnées polaire

$$\vec{dl}_R = dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta$$

2.2.1 Expression en coordonnées sphérique

$$\vec{dl}_R = dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta + rsin(\phi) d\phi \vec{u}_\phi$$

2.3 Vitesse

Définition 17 Soit M un point matériel observé dans un référentiel R . La position de M à l'instant t est donnée par le vecteur position $\vec{OM}(t)$. La vitesse de M dans R est définie par :

$$\vec{V}(M)_R = \left(\frac{d\vec{OM}(t)}{dt} \right)_R$$

De plus, si on considère \vec{dl} un déplacement élémentaire, on obtient :

$$\vec{V}(M)_R = \left(\frac{\vec{dl}}{dt} \right)_R$$

Expression en coordonnées cartésienne

$$\vec{V}(M)_R = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$$

Expression en coordonnées cylindrique

$$\vec{V}(M)_R = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{k}$$

Expression en coordonnées polaire

$$\vec{V}(M)_R = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

2.4 Accélération

Définition 18 Par définition, l'accélération de M , animé de la vitesse $\vec{V}(M)_R$ est donnée par :

$$\vec{a}(M)_R = \left(\frac{d\vec{V}(M)_R}{dt} \right)_R$$

Expression en coordonnées cartésienne

$$\vec{a}(M)_R = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}$$

Expression en coordonnées cylindrique

$$\vec{a}(M)_R = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{k}$$

Expression en coordonnées polaire

$$\vec{a}(M)_R = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta$$

avec :

- $a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$: C'est l'accélération radiale
- $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r \ddot{\theta}$: C'est l'accélération orthoradiale

En coordonnée polaire, on dit qu'un système subit une accélération centrale si et seulement si l'accélération a_θ est nul.

Dans ce cas, le vecteur accélération passe par un point fixe appelé centre de force.

De plus, en dérivant $r^2\dot{\theta}$ par rapport au temps, on remarque que l'expression :

$$\varphi = r^2\dot{\theta}$$

est une constante.

On appelle φ constante des aires

2.5 Vitesse et accélération dans la base de Frenet

Définition 19 Soit \vec{t} un vecteur unitaire tangent à la trajectoire à chaque instant.

Soit $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$, le vecteur rotation instanée.

Soit $\vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{t}$.

On appelle base de Frenet, la base $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{k})$ orthonormée direct

2.5.1 Déplacement élémentaire

On définit un cercle, dit osculateur (tangent à la trajectoire au point $M(t)$, à l'instant t), de rayon R_c et de centre C .

On définit :

$$dl = R_c d\theta$$

2.5.2 Vitesse

On définit la vitesse dans la base de Frenet par :

$$\vec{V}(M)_R = R_c \dot{\theta} \vec{t}$$

2.5.3 Accélération

On définit l'accélération dans la base de Frenet par :

$$\vec{a}(M)_R = a_n \vec{n} + a_t \vec{t}$$

avec :

$$\rightarrow a_n = \frac{v^2}{R_c} : C'est l'accélération normale$$

$$\rightarrow a_t = \left(\frac{dv}{dt} \right)_R : C'est l'accélération tangentielle$$

Chapitre 3

Principe fondamental de la dynamique

3.1 Masse et quantité de mouvement

Définition 20 La masse interte, notée M.I, est un scalaire positif traduisant la répugnance d'un corps au mouvement. C'est une grandeur extensive. On identifie masse inerte et masse gravitationnelle (Grâce aux travaux d'Albert Einstein).

Définition 21 Soit M un point matériel de masse m (inerte), observé dans un référentiel R . La quantité de mouvement de M dans R est défini comme le produit de sa masse par son vecteur vitesse dans R .

$$\vec{P}_{M \in R} = m \cdot \vec{v}_{M \in R}$$

3.2 Interactions et forces

Définition 22 On dit que deux systèmes sont en interaction quand une modification sur l'un entraîne une modification sur l'autre

On distingue 4 forces fondamentales :

- **Nucléaire forte** : Cette interaction est une interaction de courte portée qui assure la cohésion du noyau.
- **Nucléaire faible** : Cette interaction est une interaction de très courte portée. Elle apparaît dans la désintégration β
- **Electro-magnétique** : La matière est électriquement neutre, et cette électro-neutralité résulte d'une fine compensation entre les charges positives et négatives. L'interaction électro-magnétique est responsable des phénomènes atomique et moléculaire.
- **Gravitationnelle** : Cette interaction est responsable du comportement des planètes et des galaxies. Elle est dû à une interaction entre masse gravitationnelle.

3.3 Forces

3.3.1 Electro-magnétique

Soit M , de masse m et de charge q , un point matériel, observé dans un référentiel galiléen R et plongé dans la zone d'action d'un champ électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}), avec \vec{E} champ électrique et \vec{B} champ magnétique. M est soumis dans R à la force de Lorentz :

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{E} + q \cdot (\vec{V}_{M \in R} \wedge \vec{B})$$

Si M est au repos dans R :

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{E}$$

Si le champ électrique est créé par une charge ponctuelle q' immobile dans R, alors on obtient la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{E} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{u}_r$$

3.3.2 Gravitationnelle

Soit M_1 de masse m_1 , soit M_2 de masse m_2 deux points matériels observé dans le référentiel R galiléen. L'interaction entre M_1 et M_2 dans le cadre de la mécanique classique est décrite par la force :

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{u}_r = -\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}}$$

Ceci constitue la quatrième loi de Newton.

3.3.3 De contact

À l'opposé des forces précédentes, qui sont des forces à distance, les forces de contact ne s'appuie que sur l'expérience, elle ne répondent pas à des fondements théorique (Loi phénoménologique).

- Force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}_{M \in R}$
- Force de frottement solide : $R_t = \beta R_n = \beta mg$

3.4 Principe fondamental de la dynamique

3.4.1 Référentiel galiléen

Définition 23 On dit d'un référentiel qu'il est galiléen si, quand M est isolé, il vérifie la première loi de Newton (Le principe d'inertie) :

$$\left(\frac{d\vec{p}_{M \in R}}{dt} \right)_R = \vec{0}$$

En réalité, on détermine si un référentiel est galiléen par l'expérience, en vérifiant qu'il vérifie les lois de Newton

Un repère galiléen vérifie les propriétés suivantes :

- La quantité de mouvement de M est constant dans R quand M est isolé :

$$\overrightarrow{P_{M \in R}} = \overrightarrow{mv(m)_R}$$

- Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est un référentiel galiléen.

3.4.2 Enoncé du principe fondamental de la dynamique

Soit M(m) un point matériel observé dans un référentiel R galiléen, et soumis à la force $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$, la somme des forces extérieures à M. Le principe fondamental de la dynamique postule que :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a(M)_R}$$

Ce principe est aussi connu sous le nom de seconde loi de Newton

Conséquences

Ce principe entraîne, entre autres, les conséquences suivantes :

- Invariance galiléenne : Le bilan des forces extérieures est le même dans tous référentiels galiléens.
- Principe d'équivalence : On obtient l'équivalence entre la masse intrinsèque et la masse gravitationnelle.

Chapitre **4**

Énergie d'un point matériel

4.1 Puissance et travail d'une force

4.1.1 Puissance

Définition 24 Soit $M(m)$ un point matériel de masse m observé dans un référentiel R galiléen et animé de la vitesse $\vec{V}(M)_R$.

Supposons que M soit soumis à l'action d'une force \vec{F} .

La puissance, scalaire associée à cette force à chaque instant, est définie par :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}(M)_R$$

L'unité de la puissance est le Watt.

Propriété 2 Si $M(m)$ est soumis à un ensemble de forces $\Sigma \vec{F}$, alors :

$$P = \sum_i P_i$$

avec :

$$P_i = \vec{F}_i \cdot \vec{V}(M)_R$$

4.1.2 Travail d'une force

Définition 25 Le travail d'une force \vec{F} entre t et $t+dt$ dans le référentiel R est donné par :

$$\delta\omega = P.dt$$

On obtient aussi la formule :

$$\delta\omega = \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

4.2 Théorème de l'énergie cinétique

4.2.1 Énergie cinétique

Définition 26 Soit $M(m)$ point matériel de masse m observé dans R galiléen, et animé de la vitesse $\vec{V}(M)_R$.

L'énergie cinétique de $M(m)$ dans R est donnée par, avec v la norme de $\vec{V}(M)_R$:

$$E_c(M)_R = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(M)_R$$

L'unité de l'énergie cinétique est le Joule.

4.2.2 Théorème de l'énergie cinétique

Soit $M(m)$ un point matériel de masse m observé dans R galiléen, soumis dans R à la résultante $\sum \vec{F}$ des forces extérieures.

Théorème 1 *On obtient la relation :*

$$dE_c(M)_R = \sum_i \delta\omega_i$$

Entre deux instants t_1 et t_2 , le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\Delta_{t_1 \rightarrow t_2} E_c(M) = \sum_i \omega_i$$

avec :

$$\omega_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

4.3 Force conservative

Définition 27 *Une force \vec{F} est dite conservative quand son travail entre deux points M_1 et M_2 ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des positions M_1 et M_2 .*

Ceci implique que sur un contour fermé, le travail d'une force conservative est nul.

Une force qui n'est pas conservative est dites non-conservative.

4.3.1 Force conservative et énergie potentielle

On obtient la formule suivante, liant énergie potentielle et force conservative :

$$\delta\omega = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p$$

4.4 Énergie mécanique et intégrale première de l'énergie cinétique

4.4.1 Energie mécanique

Définition 28 *L'énergie mécanique d'un point matériel $M(m)$ de masse m dans un référentiel R , notée $E_m(M)_R$, est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle totale $E_{p_{tot}}$:*

$$E_m(M)_R = E_c(M)_R + E_{p_{tot}}$$

4.4.2 Relation entre le théorème de l'énergie cinétique et $E_m(M)_R$

Soit $M(m)$ un point matériel de masse m , soumis à des forces non-conservatives, notées F^{n-c} . On obtient la relation suivant :

$$dE_m(M)_R = \Sigma \delta\omega^{n-c}$$

4.4.3 Intégrale première de l'énergie cinétique

L'énergie mécanique de M dans R est constante si et seulement si il n'y a pas de forces non conservatives ou les forces non conservatives ne travaillent pas, c'est à dire que :

$$\vec{F}^{n-c} \perp d\vec{l}$$

Dans ce cas, en dérivant l'expression de l'énergie mécanique, on obtient une expression égale à zéro. Ce qui permet de ne pas avoir à passer par le P.F.D. Ceci constitue l'intégrale première de l'énergie cinétique.

4.4.4 Relation entre l'énergie potentielle et les relations d'équilibre

Considérons un système dont la position ne dépend que d'une seule variable de l'espace.
Supposons que $M(m)$, point matériel de masse m , soit soumis à la force résultante \vec{F} conservative.
Les positions d'équilibre du système sont les extrémums de la fonction E_p .
Si la courbe est convexe au voisinage de l'équilibre, alors l'équilibre est stable.
Si la courbe est concave au voisinage de l'équilibre, alors l'équilibre est instable.

Chapitre 5

Oscillation Forcée

5.1 Pendule horizontale soumis à une excitation sinusoïdale

Considérons un mobile M(m) de masse m, observé dans le référentiel terrestre R galiléen. M est soumis à :

- Son poid \vec{p}
- La réaction normale au support \vec{n}
- Une force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}(M)_R$
- L'action du ressort : $\vec{T} = -k\Delta l$

L'exciteur est fixé au ressort. Le point de fixation peut se déplacer par rapport à sa position centrale O_1 .

Soit $\overrightarrow{OE}_1(t) = x_e(t) \vec{i}$ l'écartement du point de fixation par rapport à sa position centrale.
L'exciteur impose une excitation de type sinusoïdale :

$$x_e(t) = X_E \cos(\omega t)$$

En l'absence d'excitation, quand M est au repos, la position de M est repérée par le point O.
On appellera $x(t)$ l'écartement de M par rapport à O :

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t) \vec{i}$$

5.1.1 Équation différentielle du mouvement

En appliquant le P.F.D à M(m) dans R galiléen, on obtient :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + x(t) \frac{k}{m} = x_e(t) \frac{k}{m}$$

En posant :

$$\begin{aligned} \rightarrow \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \rightarrow \frac{\alpha}{m} &= \frac{\omega_0}{Q} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 X_E \cos(\omega t)$$

5.1.2 Régime forcé ou régime permanent

Définition 29 On considère que le système fonctionne en régime permanent quand $x(t)$ est à peu près égale à la solution particulière de l'équation différentielle, à savoir quand :

$$x(t) \simeq X_E \cos(\omega t + \varphi)$$

On appelle X l'amplitude de l'elongation de l'oscillateur et φ le déphasage entre l'oscillateur et l'excitateur.

5.2 Résonance en élongation

5.2.1 Notation complexe

Pour étudier le système, nous allons définir les notations complexes :

$$x_e(t) = X_E \cos(\omega t) \leftrightarrow \underline{x}_e(t) = X_E e^{i\omega t}$$

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \underline{x}(t) = \underline{X} e^{i\omega t}$$

avec $\underline{X} = X e^{i\varphi}$ l'amplitude complexe de l'oscillateur

5.2.2 Amplitude complexe de l'oscillateur

En injectant dans l'équation différentielle, sachant que si par exemple, A est un complexe, on obtient :

$$\frac{d}{dt}(A) = i\omega A$$

On obtient donc :

$$\underline{X}(u) = \frac{X_E}{1 - u^2 + i \frac{u}{Q}}$$

avec u , pulsation réduite :

$$u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On peut donc déterminer le module de l'amplitude de l'oscillateur et la phase φ :

$$X(u) = \frac{X_E}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{u}{Q(1 - u^2)}$$

5.2.3 Résonance d'élongation

Par analogie avec l'électricité, il y a résonance d'élongation si et seulement si :

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,7$$

À la résonance d'élongation, on obtient les relations suivantes :

$$u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \simeq 1 \text{ Pour Q grand}$$

$$X_{max} = X(u_r) = \frac{QX_E}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \simeq QX_E \text{ Pour Q grand}$$

Pour Q grand, l'oscillateur est en quadrature retard par rapport à l'excitateur, d'après le profil de $\tan(\varphi)$

5.3 Vitesse

5.3.1 Amplitude complexe de la vitesse

Définition 30 L'amplitude complexe de la vitesse est :

$$\underline{v}(t) = i\omega \underline{x}(t)$$

En posant :

$$\begin{aligned} \rightarrow \underline{v}(t) &= \underline{V}(\omega) e^{i\omega t} \\ \rightarrow x(t) &= \underline{X}(\omega) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\underline{V}(\omega) = i\omega \underline{X}(\omega)$$

En posant :

$$\underline{V}(\omega) = V(\omega) e^{i\psi(\omega)}$$

avec :

- $V(\omega)$: module de la vitesse complexe
- $\psi(\omega)$: déphasage de la vitesse par rapport à l'exciteur

Conscient que :

$$\rightarrow \underline{X}(\omega) = X(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$$

$$\rightarrow i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

On obtient :

$$\begin{cases} V(\omega) = \omega \cdot X(\omega) = \frac{\omega_0 \cdot u \cdot X_e}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} \\ \psi(\omega) = \varphi(\omega) + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On montre que $\forall Q$, pour $u_r = 1$, il y a résonance de vitesse.

À la résonance de vitesse :

- $V_{max} = V(\omega_0) = Q\omega_0 X_e$
- $\psi(\omega_0) = 0$: La vitesse est en phase avec l'exciteur.

5.4 Impédance complexe

Définition 31 Considérons un oscillateur mécanique soumis à l'action d'une force excitatrice d'amplitude complexe \underline{F} .

On définit l'impédance complexe d'un oscillateur mécanique par le rapport :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{V}}$$

avec \underline{V} la vitesse complexe

5.4.1 Force explicite

D'après l'équation différentielle du mouvement de $M(m)$, on obtient l'impédance complexe d'un oscillateur mécanique :

$$\underline{Z}(\omega) = im\omega + \alpha + \frac{k}{i\omega}$$

5.4.2 Analogie électro-mécanique

On observe l'équivalence formel des grandeurs suivantes :

. Électricité → Mécanique

. $q(t) \rightarrow x(t)$

. $i(t) \rightarrow v(t)$

. $u(t) \rightarrow f(t)$

. $R \rightarrow \alpha$

. $L \rightarrow m$

. $\frac{1}{c} \rightarrow k$

Chapitre **6**

Force centrale

6.1 Définitions

Soit $M(m)$ point matériel de masse m , observé dans un référentiel R galiléen muni d'un repère d'origine O .

Soit \vec{F} une force agissant sur $M(m)$.

Définition 32 On dit que \vec{F} est une force centrale si et seulement si à tous instants la force \vec{F} est portée par le vecteur \overrightarrow{OM} .

Une force centrale possède un support passant par un point fixe, ici O , appelé centre de force.

6.1.1 Moment cinétique

Supposons que la vitesse d'un point $M(m)$ dans R soit $\vec{V}(M)_R$.

Définition 33 On appelle moment cinétique de M , par rapport à O , notée $\vec{L}(O)_R$, la grandeur vectorielle définie par :

$$\vec{L}(O)_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M)_R$$

avec :

$$\vec{p}(M)_R = m \cdot \vec{V}(M)_R$$

L'unité du moment cinétique est : $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

6.2 Théorème du moment cinétique

Supposons que $M(m)$ soit soumis à l'ensemble des forces résultantes $\Sigma \vec{F}$ dans le référentiel R galiléen.

On obtient le théorème du moment cinétique, aussi notée T.M.C. :

$$\left(\frac{d\vec{L}(O)_R}{dt} \right)_R = \overrightarrow{OM} \wedge \Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{M}(O)$$

avec :

$$\vec{M}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Le moment de la force \vec{F} , par rapport au point fixe O .

6.2.1 Application du théorème du moment cinétique à une force centrale

Soit $M(m)$ un point matériel soumis seulement à la force centrale $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{u}_r$ dans R galiléen. On obtient :

$$\left(\frac{d\vec{L}(O)_R}{dt} \right)_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

Donc :

$$\vec{L}(O)_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M)_R = \vec{cte}$$

Sachant que $\vec{L}(O)_R$ est une constante, on en déduit que la trajectoire est plane, que le plan passe par le centre de force et qu'il contient \overrightarrow{OM} et $\vec{V}(M)_R$

6.3 Approche qualitative de la nature de la trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale

Sachant que la trajectoire du point matériel $M(m)$ de masse m , soumis à la force centrale \vec{F} , est plane, définissons le référentiel R galiléen de tel sorte que le plan (O, X, Y) soit le plan du mouvement.

6.3.1 Constante des aires

En explicitant le moment cinétique de $M(m)$ par rapport à O dans R , en coordonnée polaire, on obtient :

$$\vec{L}(O)_R = mr^2 \dot{\theta} \vec{k} = \vec{cte}$$

On en déduit donc la constante des aires, notée φ :

$$\varphi = r^2 \dot{\theta} = cte$$

6.3.2 Vitesse aréolaire

Définition 34 *On définit la vitesse aréolaire par :*

$$v_{ar} = \frac{\varphi}{2}$$

avec φ la constante des aires

6.3.3 Énergie mécanique d'un système soumis à une force centrale

Supposons que la force centrale \vec{F} soit conservative.
Il en découle que \vec{F} "dérive" d'une énergie potentielle $E_p(r)$.
On utilisant les coordonnées polaire et la constante des aires, et en développant l'énergie cinétique dans l'expression de l'énergie mécanique, on obtient l'énergie potentielle efficace (effective), notée $E_{p,eff}(r)$:

$$E_{p,eff} = \frac{m\dot{r}^2}{2r^2} + E_p(r)$$

D'où l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m(M) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + E_{p,eff} = cte$$

6.3.4 Trajectoire dans un champ newtonien

En explicitant $E_p(r)$ si M(m) est soumis à la force gravitationnelle.
On obtient :

- Si $E_m(M)_R = E_{m1} > 0$, on peut dire que le point matériel M est dans un état libre. Il peut évoluer entre un état minimal r_1 , défini par $\dot{r} = 0$, et l'infini.
- Si $E_m(M)_R = E_{m2} < 0$: Le système est dans un état lié, avec $r \in [r_2; r_3]$. Dans le cas des positions extrêmes (r_2 et r_3), on obtient : $\dot{r} = 0$, la vitesse est orthoradiale. On dit que la particule est dans un puit de potentiel.

6.4 Etude du mouvement d'un point matériel dans une force centrale d'origine gravitationnelle

D'après l'expression de $E_m(M)_R$, on obtient :

$$\ddot{r} - \frac{\varphi}{r^3} + \frac{Gm'}{r^2} = 0$$

6.4.1 Formule de Binet

Propriété 3 Les formules de Binet consistent à exprimer la vitesse de M et son accélération, en fonction de $u = \frac{1}{r}$, et de ses dérivées par rapport à θ

6.4.2 Force explicite de la trajectoire d'après les formules de Binet

On sait que $E_m(M)_R = E_c(M)_R + E_p(M) = cte$ car la force de gravitation est conservative.
On obtient :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

On observe donc que l'équation du mouvement est l'équation d'une conique, d'excentricité e et de paramètre p.

6.4.3 Énergie mécanique

On obtient l'expression de l'énergie mécanique en fonction de l'excentricité e :

$$E_m(M)_R = \frac{-Gmm'}{2p}(1 - e^2)$$

De cette expression, on obtient :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2pE_m(M)_R}{Gmm'}}$$

En déduit les différentes expressions de l'énergie mécanique en fonction de la trajectoire :

- Pour $e = 0$, la trajectoire est circulaire :

$$E_m(M) = \frac{-G.m.m'}{2.p}$$

- Pour $0 < e < 1$, la trajectoire de M(m) est elliptique :

$$\frac{-G.m.m'}{2p} \leq E_m(M) < 0$$

- Pour $e = 1$, la trajectoire est parabolique :

$$E_m(M) = 0$$

- Pour $e > 1$, la trajectoire de M est hyperbolique, son énergie mécanique est positive.

6.5 Trajectoire elliptique

6.5.1 Trajectoire circulaire

Sachant qu'une trajectoire circulaire est un cas particulier d'une trajectoire elliptique, pour laquelle $e=0$, donc pour laquelle $p = r_0$, le rayon du cercle, on obtient :

$$E_m(M)_R = \frac{E_p}{2} = -E_c = cte$$

A partir de cette expression pour l'énergie cinétique, et sachant que dans le cas d'une trajectoire circulaire :

$$v_0 = r_0 \cdot \dot{\theta}_0$$

On obtient :

$$\frac{T_0^2}{r_0^3} = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{Gm'} = cte$$

On retrouve la troisième loi de Kepler.

6.5.2 Trajectoire elliptique

Propriétés

On définit les caractéristiques suivantes pour une ellipse :

- O : Centre de force
- c : Centre de l'ellipse
- A : Apogée : Distance la plus grande entre le centre de force et le point matériel
- P : Périgée : Distance la plus courte entre le centre de force et le point matériel

On obtient les propriétés suivantes pour une ellipse :

- Distance de M au centre de force à l'apogée, r_A :

$$r_A = r(\pi) = \frac{p}{1 - e}$$

- Distance de M au centre de force au périgée, r_P :

$$r_P = r(0) = \frac{p}{1 + e}$$

- Le demi grand axe d'une ellipse, notée a , est défini par :

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

- Demi petit axe d'une ellipse, notée b :

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$$

- Distance focale de l'ellipse (il existe deux foyers, par symétrie), notée f :

$$f = e \cdot a$$

D'après l'expression de a , on obtient :

$$E_m(M)_R = \frac{-Gmm'}{2a} = cte$$

Troisième loi de Kepler

On obtient la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm'} = cte$$

Relation avec la vitesse

On obtient :

$$v^2 = Gm' \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

6.5.3 Trajectoire parabolique

Pour une trajectoire parabolique, c'est à dire pour $e = 1$, l'énergie mécanique est nulle. On obtient l'expression de la vitesse, dites vitesse de libération (en effet, si le point M possède cette vitesse, elle part à l'infini, elle se soustrait au champ de force) :

$$v_L = \sqrt{\frac{2Gm'}{r}} = \sqrt{2}v_0$$

6.5.4 Satellisation, orbite géostationnaire

Définition 35 *On dit d'un satellite qu'il est géostationnaire quand il est fixe dans le référentiel terrestre.*

Ceci implique que sa vitesse angulaire, dans le référentiel géocentrique, est égale à celle de la Terre. Le satellite vérifie donc la loi des aires. Sa trajectoire est donc circulaire, plane, avec son plan perpendiculaire au moment cinétique, et qui passe par le centre de force. La trajectoire s'effectue donc dans le plan de l'équateur.

Orbite de transfert

Définition 36 *On appelle orbite de transfert ou orbite de Hohmann, la trajectoire elliptique empreinte par le satellite pour se placer sur son orbite géostationnaire. À l'apogée, le rayon doit être le rayon de la trajectoire circulaire. On donne au satellite à ce point une nouvelle énergie mécanique pour le mettre dans son orbite circulaire géostationnaire.*

Énergie de satellisation

Soit ΔE_m l'énergie de satellisation, dans un référentiel géostationnaire.

Définition 37 *On définit la latitude d'un lieu à la surface de la Terre, notée λ , par l'angle entre l'équateur et le segment [OM]*

On obtient :

$$\Delta E_m = \frac{-Gm_T m_S}{2r_0} + \frac{Gm_T m_S}{R_T} - \frac{1}{2} m_S R_T^2 \omega^2 \cos^2(\lambda)$$

On minimise donc l'énergie à fournir avec un lancement à l'équateur, dirigé vers l'est pour profiter de la rotation de la Terre

Chapitre 7

Changement de référentiel

7.1 Définitions

7.1.1 Présentation

Définition 38 Soient deux référentiels R et R_1 en mouvement relatifs. On pose que R_1 est un référentiel dit fixe, alors que R est un référentiel dit mobile.

7.1.2 Dérivation d'un vecteur quelconque par rapport au temps

Soit $\vec{u} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ un vecteur défini dans R . On obtient :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{R_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_R + \omega_{\frac{R}{R_1}} \wedge \vec{u}$$

Avec $\omega_{\frac{R}{R_1}}$: le vecteur rotation instantanée de R par rapport à R_1

Si \vec{u} est fixe dans R , c'est à dire que $x(t), y(t), z(t)$ sont des constantes, on obtient que :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{R_1} = \omega_{\frac{R}{R_1}} \wedge \vec{u}$$

7.1.3 Référentiel en translation

Définition 39 On dit que deux référentiels R et R_1 sont en translation si $\omega_{\frac{R}{R_1}} = \vec{0}$

7.2 Loi de compositions des vitesses, des accélérations

7.2.1 Loi de compositions des vitesses

On obtient la relation :

$$\vec{v}(M)_{R_1} = \vec{v}(M)_R + \vec{v}(O)_{R_1} + \omega_{\frac{R}{R_1}} \wedge \vec{OM}$$

On exprime cette relation sous la forme :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_R + \vec{v}_E$$

Avec :

$$\begin{cases} \vec{v}_A : \text{Vitesse absolue (repère fixe)} \\ \vec{v}_R : \text{Vitesse relative (repère mobile)} \\ \vec{v}_E : \text{Vitesse d'entraînement} \end{cases}$$

7.2.2 Loi de composition des accélérations

On obtient la relation :

$$\vec{a}(M)_{R_1} = \vec{a}(M)_R + 2\omega_{\frac{R}{R_1}} \wedge \vec{v}(M)_R + \vec{a}(O)_{R_1} + \omega_{\frac{R}{R_1}} \wedge (\omega_{\frac{R}{R_1}} \wedge \overrightarrow{OM}) + \left(\frac{d\omega_{\frac{R}{R_1}}}{dt} \right)_{R_1} \wedge \overrightarrow{OM}$$

On exprime cette relation sous la forme :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_R + \vec{a}_E + \vec{a}_C$$

Avec :

$$\begin{cases} \vec{a}_C = 2\omega_{\frac{R}{R_1}} \wedge \vec{v}(M)_R : \text{Accélération de Coriolis} \\ \vec{a}_E : \text{Vitesse d'entrainement, obtenu pour la vitesse de M dans R nul} \end{cases}$$

7.3 Repère en translation et en rotation

7.3.1 Translation

Soit R un repère en translation par rapport à R_1 , donc $\omega_{\frac{R}{R_1}} = \vec{0}$.

On obtient :

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_R + \vec{v}(O)_{R_1} \\ \vec{a}_A &= \vec{a}_R + \vec{a}(O)_{R_1} \end{aligned}$$

7.3.2 Rotation uniforme autour d'un axe fixe

Définition 40 On dit que R est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R_1 quand deux des axes de R et de R_1 sont confondus, avec O qui est confondu avec O_1

On obtient, avec \overrightarrow{HM} la distance entre l'axe de rotation et le point M :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_R + \omega_{\frac{R}{R_1}} \wedge \overrightarrow{HM}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_R + 2\omega_{\frac{R}{R_1}} \wedge \vec{v}(M)_R - \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

On observe donc que l'accélération de coriolis ne varie pas d'un repère à l'autre

Chapitre 8

Référentiel non-galiléen

8.1 Principe fondamental de la dynamique

8.1.1 Dans un référentiel galiléen

Définition 41 Soit $M(m)$ un point matériel de masse m observé dans le référentiel R_G galiléen.
Le principe fondamental de la dynamique postule que :

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}(M)_R$$

Propriété 4 Un repère galiléen est défini uniquement par l'expérience, ce qui complique sa définition.

8.1.2 Dans un référentiel non-galiléen

D'après la loi de composition de l'accélération, et du principe fondamental de la dynamique, on obtient dans un référentiel non-galiléen :

$$m \cdot \vec{a}(M)_{R_{NG}} = \Sigma \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

Avec :

$$\begin{cases} \vec{f}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e : \text{Force d'inertie d'entrainement} \\ \vec{f}_{ic} = -m \cdot \vec{a}_c : \text{Force d'inertie de Coriolis} \end{cases}$$

8.1.3 Forme explicite des forces d'inerties

Pour une translation

Définition 42 Soit R_G un référentiel galiléen et R_{NG} un référentiel non galiléen en translation (non uniforme) par rapport à R_G :

$$\begin{cases} \vec{f}_{ie} = -m \cdot \vec{a}(O)_{R_G} : \text{Force d'inertie d'entrainement} \\ \vec{f}_{ic} = \vec{0} : \text{Force d'inertie de Coriolis} \end{cases}$$

On observe bien que, si la translation est uniforme, donc pour $\vec{a}(O)_{R_G} = 0$, le référentiel R_G est galiléen.

Pour une rotation uniforme autour d'un axe fixe

Définition 43 Soit R_{NG} un référentiel non galiléen, animé d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe de R_G :

$$\begin{cases} \vec{f}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM} : \text{Force d'inertie d'entrainement} \\ \vec{f}_{ic} = -2 \cdot m \cdot \vec{\omega}_{\frac{R_{NG}}{R_G}} \wedge \vec{v}(M)_{R_{NG}} : \text{Force d'inertie de Coriolis} \end{cases}$$

8.2 Théorème généraux dans $R_{N.G}$

8.2.1 Théorème de l'énergie cinétique

On obtient le théorème de l'énergie cinétique dans un repère non galiléen :

$$dE_C(M)_{R_{N.G}} = \Sigma \delta\omega + \vec{f}_{ie} \cdot \vec{dl} + \vec{f}_{ic} \cdot \vec{dl}$$

En explicitant, sachant que $\vec{f}_{ic} \perp \vec{dl}$, on obtient :

$$dE_C(M)_{R_{N.G}} = \Sigma \delta\omega + \vec{f}_{ie} \cdot \vec{dl}$$

8.2.2 Théorème du moment cinétique

On obtient :

$$\left(\frac{d\vec{L}(O)_{R_{N.G}}}{dt} \right)_{R_{N.G}} = \Sigma \vec{M}(O)_F + \vec{M}_{ie} + \vec{M}_{ic}$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{M}_{ie} = \vec{OM} \wedge \vec{f}_{ie} \\ \vec{M}_{ic} = \vec{OM} \wedge \vec{f}_{ic} \end{cases}$$

8.3 Statique dans le référentiel Terrestre

Soit R_{GO} le référentiel géocentrique, supposé galiléen.

Définition 44 On appelle référentiel Terrestre, noté R_T , le référentiel qui possède comme origine le barycentre des masses de la Terre, avec trois axes orientés vers trois étoiles lointaines, supposé fixe.

Par définition, le référentiel Terrestre R_T est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R_{GO} .

Si R_{GO} est supposé galiléen, R_T est donc non galiléen.

Définition 45 Soit $M(m)$ un point matériel de masse m au repos dans R_T non galiléen, à la surface Terrestre.

On appelle base locale de projection le trièdre orthonormé direct $(\vec{u}_V; \vec{u}_E; \vec{u}_N)$, avec :

$$\begin{cases} \vec{u}_e : \text{Vecteur orienté vers l'est} \\ \vec{u}_v : \text{Vecteur orienté de direction vertical} \\ \vec{u}_n : \text{Vecteur orienté vers le nord} \end{cases}$$

Soit λ la latitude du lieu (angle entre l'équateur et le point matériel). Par projectoire de $\vec{\omega}_{\frac{R_T}{R_{GO}}}$ dans la base $(\vec{u}_v; \vec{u}_e; \vec{u}_n)$, on obtient :

$$\vec{\omega}_{\frac{R_T}{R_{GO}}} = \omega_{\frac{R_T}{R_{GO}}} \cos(\lambda) \vec{u}_n + \omega_{\frac{R_T}{R_{GO}}} \sin(\lambda) \vec{u}_v$$

8.3.1 Définition du poids d'un corps

Définition 46 On appelle poids d'un point matériel $M(m)$ de masse m l'opposé de la tension T qu'exercera un fil à plomb sur M au repos dans le référentiel d'étude.

Le poid est noté :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{g}$$

Dans un référentiel non galiléen, on obtient :

$$\vec{p} = \frac{-G.m.M_T}{R_T^2} \vec{u}_R + m \cdot \omega^2 \cdot \vec{HM}$$

$$\vec{g} = \frac{-G.M_T}{R_T^2} \vec{u}_R + \omega^2 \cdot \vec{HM}$$

Ordre de grandeur

Le terme d'inertie est nul aux pôles, et maximum à l'équateur où il s'oppose à la force de gravitation.

L'écart qu'il y a entre la gravité aux pôles et à l'équateur est dû pour $\frac{2}{3}$ au terme d'inertie et pour $\frac{1}{3}$ à l'applatissement de la Terre au niveau des pôles.

8.3.2 Energie potentiel de pesenteur

Propriété 5 *Le poids est une force conservative qui dérive de la fonction énergie potentielle de pesenteur, définie dans R_T non galiléen par :*

$$E_{pp} = \frac{-G.M_T.m}{r} - \frac{m.(\omega.r.\cos(\lambda))^2}{2} + A$$

8.4 Dynamique dans le référentiel Terrestre

8.4.1 Point matériel en mouvement dans le plan horizontale

Soit M(m) un point matériel en mouvement dans le plan horizontale, à la surface Terrestre. Dans R_T non galiléen, sa vitesse est quelconque.
On obtient l'expression de la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{ic} = \vec{f}_{ic_{vect}} + \vec{f}_{ic_{horiz}}$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{f}_{ic_{vect}} = -2.m.\omega.\cos(\lambda)\vec{u}_n \wedge \vec{v}(M)_{R_T} & \text{Force d'inertie de Coriolis vertical} \\ \vec{f}_{ic_{horiz}} = -2.m.\omega.\sin(\lambda)\vec{u}_v \wedge \vec{v}(M)_{R_T} & \text{Force d'inertie de Coriolis horizontale} \end{cases}$$

La composante verticale s'ajoute, ou se soustrait au poids. La composante horizontale dévie M vers la droite dans l'hémisphère Nord ($\sin(\lambda) > 0$). On observe cette déviation sur le pendule de Foucault par exemple.

8.4.2 Point matériel en mouvement verticale

Soit M(m) un point matériel en chute libre dans R_T non galiléen.
Par application du P.F.D, et sachant que, pour une chute libre, dans un référentiel galiléen, nous avons :

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -gt \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -2.\omega.\dot{z}.\cos(\lambda) + 2.\omega.\dot{y}.\sin(\lambda) \\ \ddot{y}(t) = -2.\omega.\dot{x}.\sin(\lambda) \\ \ddot{z}(t) = -g + 2.\omega.\dot{x}.\cos(\lambda) \end{cases}$$

Appliquons la méthode dites des perturbations.

Par application de cette méthode, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\omega.g.t^3}{3}.\cos(\lambda) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{-g.t^2}{2} + h \end{cases}$$

8.5 Marée océanique

Nous avons supposé précédemment que le référentiel géocentrique est un référentiel galiléen. En réalité, le référentiel est non galiléen, car il est en translation circulaire et uniforme par rapport au référentiel héliocentrique. Etudions l'influence du Soleil sur la Terre.

8.5.1 Champs de Marée

Soit \vec{f}_{ie} la force d'inertie d'entrainement défini par :

$$\vec{f}_{ie} = m \cdot \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

Soit $\vec{F}_{S \rightarrow M}$ la force de gravitation exercée par le Soleil sur le point matériel M, de masse m. On obtient la relation suivante :

$$\vec{f}_{ie} + \vec{F}_{S \rightarrow M} = m \cdot \vec{C}(M)$$

avec $\vec{C}(M)$ le champs de marée ressenti en M. Nous retiendrons que si le point M est situé en face du soleil, la force est attractive. Si le point M est opposé au soleil, la force est répulsive. On observe donc pour cette force un effet dislocateur.

Chapitre 9

Système de deux points materiels

9.1 Référentiel barycentrique

Considérons un système composé de deux points materiels $M_1(m_1)$, de masse m_1 , et $M_2(m_2)$, de masse m_2 . Le système est notée $S = \{M_1, M_2\}$.

9.1.1 Barycentre

Définition 47 On définit le barycentre G , appelé aussi centre de gravité ou centre de masse, par la relation suivante :

$$m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2} = (m_1 + m_2) \overrightarrow{OG}$$

On obtient aussi la relation suivante :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$$

9.1.2 Référentiel barycentrique

Définition 48 Soit R^* le référentiel barycentrique de S .

R^* a pour origine le barycentre G du système, et est en translation par rapport à un référentiel R galiléen, ce qui caractérise par :

$$\frac{\omega_{R^*}}{R_g} = 0$$

Propriété 6 Dans le cas où S est isolé, R^* est en translation rectiligne uniforme par rapport à R_G , c'est donc un référentiel galiléen.

9.1.3 Théorème de la résultante cinétique

Par application du principe fondamental de la dynamique à M_1 et à M_2 , on obtient le théorème dit de la résultante cinétique :

$$(m_1 + m_2) \cdot \overrightarrow{a(G)_R} = \sum_{ext} \vec{F}$$

avec :

$$\sum_{ext} \vec{F} = \sum_{ext \rightarrow 1} \vec{F} + \sum_{ext \rightarrow 2} \vec{F}$$

9.2 Éléments cinétique dans R^* galiléen

9.2.1 Résultante cinétique

Par définition du barycentre, on obtient :

$$\vec{p}(S)_{R^*} = \vec{0}$$

9.2.2 Moment cinétique

On obtient, dans R^* , l'expression suivante pour le moment cinétique, en posant $\vec{r} = \overrightarrow{M_2 M_1}$:

$$\vec{L}(G)_{R^*} = \vec{r} \wedge \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left(\frac{d \vec{r}}{dt} \right)_{R^*}$$

Propriété 7 *Dans R^* , le moment cinétique de S est indépendant du point d'observation, pourvu qu'il soit fixe.*

9.2.3 Énergie cinétique

Soit $E_C(S)_{R^*}$ l'énergie cinétique de S dans R^* . On obtient :

$$E_C(S)_{R^*} = \frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{d \vec{r}}{dt} \right)_{R^*}^2$$

9.2.4 Particule fictive

Soit M une particule fictive de masse $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$, appelé masse réduite et de vecteur position $\vec{r} \cdot \mu$.

L'étude d'un système à deux points matériels peut se ramener à celle d'une particule fictive. On détermine le mouvement de M_1 et de M_2 à l'aide des relations homothétiques suivantes :

$$\overrightarrow{GM_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\overrightarrow{GM_2} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

9.3 Étude du mouvement d'un système de deux points matériels isolés, en interaction newtonienne

Nous allons étudier le système dans le cadre d'une interaction gravitationnelle, mais toutes les relations seront vérifiées pour toutes interactions newtoniennes.

Nous allons tout d'abord faire l'étude du mouvement de la particule fictive.

9.3.1 Énergie potentielle de gravitation

On obtient la même expression pour l'énergie potentielle que dans le cas d'un point matériel soumis à une force centrale :

$$E_p = \frac{-G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}$$

9.3.2 Énergie mécanique

On obtient l'expression de l'énergie mécanique d'un point matériel soumis à une force conservative :

$$E_m(S)_{R^*} = E_C(S)_{R^*} + E_p(r) = cte$$

9.3.3 Nature de la trajectoire, équation du mouvement

Par application du théorème du moment cinétique à $M(\mu)$, on obtient :

$$\vec{L}_{R^*} = \overrightarrow{GM} \wedge \mu \vec{v}(M)_{R^*} = \vec{cte}$$

Donc la trajectoire de M est plane. Le plan du mouvement est normal à \vec{L}_{R^*} , et passe par G . On en déduit que la trajectoire de M_1 et de M_2 sont planes elles aussi. Le système satisfait donc la loi des aires.

Énergie mécanique

Par application de l'énergie mécanique, et à l'aide des formules de Binet, on obtient :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta - \theta_0)}$$

Avec :

$$p = \frac{\varphi}{G(m_1 + m_2)}$$

On obtient la même équation par application du principe fondamental de la dynamique, ou à l'aide de la méthode de Ronge-Lenz.

9.3.4 Grandeurs caractéristiques du mouvement

Énergie mécanique et excentricité

On obtient :

$$E_m(M)_{R^*} = \frac{-G \cdot m_1 \cdot m_2}{2a}$$

avec :

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

Relation entre période et demi-grand axe

On obtient, à l'aide de la vitesse aréolaire :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Étude d'un système de deux points matériel

Un système de deux points matériels isolés se ramène donc bien à l'étude d'une particule fictive dans R^* .

Troisième partie

Électricité

Chapitre 10

Généralité sur les circuits

10.1 Le courant électrique

Dans un conducteur électrique, on peut considérer que la vitesse des porteurs de charge est constante, sous l'action d'une force électromotrice constante, et défini par :

$$\vec{v} = \mu \cdot \vec{E}$$

avec :

$$\mu = \frac{q}{\alpha}$$

avec q la charge, et α le coefficient de frottement fluide.

Soit \vec{j} le vecteur défini par :

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$

avec γ la conductivité du conducteur défini par :

$$\gamma = \frac{n \cdot q^2}{\alpha}$$

Le sens du courant est celui de \vec{j} , et donc celui de \vec{E} . Cependant, à l'échelle macroscopique, nous n'avons pas accès au sens de \vec{j} . Le sens de I , intensité du courant électrique, défini par :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

est donc défini de façon arbitraire

10.1.1 Approximation des régimes quasi-stationnaire

L'approximation des régimes quasi-stationnaire, notée A.R.Q.S., consiste à considérer qu'en régime variable, l'intensité du courant électrique ($i(t)$) dans un circuit filiforme est le même en tout point du circuit.

Ceci revient à considérer qu'il n'y pas d'accumulation de charge dans le circuit.

Dans tout ce qui suit, on suppose cette approximation vérifiée.

10.2 Dipôles électriques dans l'A.R.Q.S

10.2.1 Convention d'orientation

Convention 1 L'orientation du courant est défini de manière arbitraire, comme nous n'avons pas accès à \vec{j} . Le courant ainsi défini est algébrique.

Convention 2 Une tension entre deux points A et B , notée U_{AB} est la différence de potentiel électrique entre ces deux points :

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

La tension U_{AB} est représenté par une flèche partant de la deuxième lettre (B) et orienté vers la première (A).

Par définition :

$$U_{BA} = -U_{AB}$$

Convention 3 Convention récepteur : La tension et l'intensité aux bornes d'un dipole sont représenté opposé

Convention 4 Convention générateur : La tension et l'intensité aux bornes d'un dipole sont représenté dans le même sens

10.2.2 Loi de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff sont la loi des noeuds et la loi des mailles

Loi des noeuds

Un noeud est un point de connection d'au moins trois fils dans un circuit.

Loi 1 Loi des noeuds : La somme des courants entrants est égale à la somme des courants sortants (Ils peuvent être algébrique) :

$$\sum_{\text{entrant}} i(t) = \sum_{\text{sortant}} i(t)$$

Loi des mailles

Dans un circuit, une branche est une portion comprise entre deux noeuds. Toutes associations de branches constituant un contour fermé est une maille.

Loi 2 Dans une maille orienté, la somme algébrique des tensions est nulle

Si, au sein de la maille orienté, les tensions sont dans le sens de la maille, elle sont comptés positivement. Sinon, elle le sont négativement.

10.2.3 Caractéristique d'un dipole

Définition 49 On appelle caractéristique d'un dipole la courbe $U=f(i)$ (ou $i=f(U)$) d'un dipole

Propriété 8 Si la caractéristique passe par l'origine O , alors le dipole est passif. Sinon, il est dit actif.

Ex : Passif : conducteur ohmique ; Actif : générateur.

Pour tracer la caractéristique, on se place en convention récepteur.

10.2.4 Montage en série, Montage en dérivation

Définition 50 Une association de dipole entre deux points A et B sont en série s'il n'y a pas de noeud entre A et B .

Dans ce cas, le courant $i(t)$ est identique en tout point et la tension entre ces deux points est la somme des tensions aux bornes des dipôles présent entre ces deux points :

$$U_{AB} = U_1 + U_2 + \dots$$

Définition 51 Une portion de circuit située entre A et B est considéré en dérivation si plusieurs branches sont placé entre ces points.

Dans ce cas, $U_{AB} = U_1 = U_2 = \dots$ et $i_{total} = i_1 + i_2 + \dots$

10.3 Présentation des principaux dipoles

10.3.1 Conducteur ohmique

Un conducteur ohmique idéal est caractérisé par sa résistance R.
Nous avons les propriétés suivantes :

- $U(t) = R.i(t)$
 - $G = \frac{1}{R}$: Sa conductance, d'unité le Siemens.
 - Dans un montage en série :
- $$R_{eq} = \sum_{j=1}^n R_j$$
- Dans un montage en dérivation :
- $$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}$$

10.3.2 Condensateur

Un condensateur idéal est caractérisé par sa capacité C.
Nous avons les propriétés suivantes :

- $U(t) = \frac{q_A}{C}$
 - Les armatures sont en influence totale, ce qui implique :
- $$q_A = -q_B$$
- L'énergie emmagasinée par le condensateur est :

$$E_{em,C}(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U(t)^2$$

- La puissance instantanée est :
- $$P(t) = \frac{d}{dt}(E_{em,c(t)})$$

- Dans un montage en série :
- $$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j}$$
- Dans un montage en dérivation :
- $$C_{eq} = \sum_{j=1}^n C_j$$

→ Continuité de $u(t)$ à ses bornes. Ceci est une conséquence de la continuité de l'énergie.

10.3.3 Solénoïde

Un solénoïde idéal est caractérisé par son inductance L.
Nous avons les propriétés suivantes :

- $U(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$

→ La puissance instantanée est :

$$P(t) = \frac{d}{dt}(E_{em,L(t)})$$

→ L'énergie emmagasiné par le solénoïde est :

$$E_{em,L(t)} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i(t)^2$$

→ Dans un montage en série :

$$L_{eq} = \sum_{j=1}^n L_j$$

→ Dans un montage en dérivation :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_j}$$

→ Continuité de $i(t)$ à ses bornes. Ceci est encore une conséquence de la continuité de l'énergie

10.3.4 Diodes

Une diode réelle est caractérisé par sa tension de seuil U_s et sa tension d'avalanche U_a .
Une diode idéale est équivalente à un interrupteur.

Pour $u(t) > 0$, la diode est passante, équivalente à un interrupteur fermé.

Pour $u(t) < 0$, la diode est non passante, équivalente à un interrupteur ouvert.

10.3.5 Source de tension et de courant

Source idéale de tension

Une source idéale de tension impose une force électromotrice constante à ses bornes, quelque soit le courant qui la traverse.

Source idéale de courant

Une source idéale de courant impose un courant constant dans sa branche, et quelque soit la différence de potentiel à ses bornes.

Source linéaire de tension ou de courant

Une source linéaire de tension est une source donc la caractéristique est linéarisé, et pour la quel :

$$U(t) = E_0 - ri$$

Association de source idéale

En série, pour les sources de tension :

$$e_T = \sum_{k=1}^n \pm(e_k)$$

En dérivation, pour les sources de courant :

$$i_T = \sum_{k=1}^n \pm(i_k)$$

Chapitre 11

Théorèmes généraux

Tous ces théorèmes ne sont applicable que dans le cas d'un dipole linéaire, c'est à dire un dipole donc la caractéristique est linéaire.

11.1 Diviseur de tension

Considérons l'association de n conducteurs ohmiques en série entre deux points A et B. Soit U_j la tension parcourant le j^{eme} conducteur ohmique, de résistance R_j :

$$U_j = \left(\frac{R_j}{\sum_{k=1}^n R_k} \right) U_{AB}$$

11.2 Diviseur de courant

Considérons deux résistances en dérivation. Soit i le courant entrant, i_1 le courant traversant la résistance R_1 . On obtient :

$$i_1 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) i$$

11.3 Théorème de Kennely

Considérons un montage en étoile contenant les résistances R_1, R_2, R_3 . On obtient le montage équivalent, avec un seul noeud, contenant les résistances r_1, r_2, r_3 , à l'aide des relations :

$$r_1 = \frac{R_2 \cdot R_3}{\sum_i R_i}$$

avec r_1 du coté de A, on a donc au numérateur R_2, R_3 , qui sont eux aussi du coté de A.

11.4 Théorème de Millman

Considérons un circuit composé de plusieurs dipôles : sources de courants, sources de tensions, résistances. Soit A et B deux points du circuits.

Le théorème de Millman permet de déterminer la tension U_{AB} de la façon suivante :

$$U_{AB} = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{U_{jB}}{R_j} + \sum_{k=1}^M \pm i_k}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}}$$

Chapitre 12

Régime Transitoire

12.1 Réponse d'un circuit R.C à un échelon de tension

12.1.1 Cas général

Considérons un circuit composé d'une maille de charge, qui contient un générateur E , une résistance R et un condensateur C , et d'une maille de décharge, qui ne contient que R et C . Par application de loi des mailles, on obtient l'équation différentielle de la charge :

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$$

En posant la constante de temps :

$$\tau = RC$$

On obtient l'équation de la charge :

$$u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

De façon analogue, par application de loi des mailles, on obtient l'équation différentielle de la décharge :

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau} = 0$$

On obtient l'équation de la décharge :

$$u_c(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Réponse à un échelon de tension

Considérons un système composé d'un GBF (Générateur basse-fréquence), d'une résistance R et d'un condensateur C . Sachant que $u(t)$ est continue au borne d'un condensateur, on obtient une succession de charge et de décharge, toutes les demi-périodes du signal échelon.

12.2 Réponse d'un circuit R.L à un échelon de tension

12.2.1 Cas général

Considérons un circuit composé d'une maille de charge, qui contient un générateur E , une résistance R et un solénoïde L , et d'une maille de décharge, qui ne contient que L et R .

Par application de loi des mailles, on obtient l'équation différentielle de la charge :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

En posant la constante de temps :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

D'où l'équation de la charge :

$$u_c(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

De façon analogue, par application de loi des mailles, on obtient l'équation différentielle de la décharge :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = 0$$

D'où l'équation de la décharge :

$$u_c(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

12.2.2 Réponse à un échelon de tension

Considérons un système composé d'un GBF, d'une résistance R et d'un solénoïde L. Sachant que $i(t)$ est continue au borne d'un solénoïde, on obtient une succession de charge et de décharge, toutes les demi-périodes du signal échelon.

12.3 Réponse d'un circuit R.L.C à un échelon de tension

Considérons un circuit composé d'une maille de charge, qui contient un générateur E, un résistance R, un solénoïde L et un condensateur C, et d'une maille de décharge, qui ne contient que L, R et C.

En posant :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

On obtient :

$$\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \frac{w_0}{Q} \frac{du_c(t)}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = \omega_0^2 E$$

12.3.1 Différents régimes d'évolutions

Soit Δ le déterminant de l'équation caractéristique de cette équation :

$$\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

Les régimes d'évolutions dépendent du signe de Δ

$\rightarrow \Delta = 0, Q_c = \frac{1}{2}$: Régime critique.

$\rightarrow \Delta > 0, Q < Q_c$: Régime Aperiodique.

$\rightarrow \Delta < 0, Q > Q_c$: Régime Pseudo-periodique.

Régime pseudo-periodique

Nous nous limiterons à l'étude ce régime, qui est le "seul intéressant" d'un point de vue physique à notre niveau. On peut écrire Δ sous la forme :

$$\Delta = j^2 \omega_0^2 (4 - \frac{1}{Q^2})$$

Les solutions sont donc du type :

$$U_c(t) = E \left(1 - \frac{1}{\cos(\varphi)} e^{\frac{-\omega_0 t}{2Q}} \cos(\Omega t + \varphi) \right)$$

Avec :

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

DéCREMENT logarithmique

Dans l'étude du régime pseudo-periodique, on introduit le décrément logarithmique, défini par :

$$\delta = \ln \left(\frac{u_c(t)}{u_c(t+T)} \right)$$

On obtient donc :

$$\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}$$

et, sur n périodes :

$$\delta_n = n \cdot \delta$$

Chapitre 13

Régime sinusoïdale forcé

13.1 Réponse d'un circuit R.L.C série à une excitation sinusoïdale

Considérons une association R.L.C., contenant un GBF.
Le GBF fournit une tension sinusoïdale $e(t)$:

$$e(t) = E \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega = 2\pi.f$.

À l'aide de la loi des mailles, on obtient :

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{w_0}{Q} \frac{du_c(t)}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = \omega_0^2 e(t)$$

13.1.1 Réponse de $u_c(t)$

La solution de cette équation est de la forme :

$$u_c(t) = u_{c1}(t) + u_{c2}(t)$$

Avec :

→ $u_{c1}(t)$: Solution de l'équation homogène, caractéristique d'un régime transitoire.

→ $u_{c2}(t)$: Solution particulière de l'équation avec second membre, caractéristique d'un régime permanent :

$$u_{c2}(t) = u_c \cos(\omega t + \psi)$$

13.2 Impédance complexe

13.2.1 Impédance complexe d'un dipôle

Considérons un dipôle en régime sinusoïdale forcé.
On obtient :

$$\underline{i}(t) = \underline{I}_M e^{j\omega t}$$

avec $\underline{I}_M = I_M e^{j\varphi}$

$$\underline{u}(t) = \underline{U}_M e^{j\omega t}$$

avec $\underline{U}_M = U_M e^{j\psi}$

Définition 52 On appelle *impédance complexe* le scalaire défini par :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z} \cdot \underline{i}(t)$$

D'où :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_M}{\underline{I}_M}$$

Soit α l'argument de \underline{Z} :

$$\alpha = \psi - \varphi$$

On observe que :

- $\alpha = 0$: $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase
- $0 < \alpha < \pi$: $u(t)$ est en avance par rapport à $i(t)$ dans le dipole
- $-\pi < \alpha < 0$: $u(t)$ est en retard par rapport à $i(t)$ dans le dipole

Impédance d'un conducteur ohmique

Pour un conducteur ohmique, on obtient :

$$\underline{Z}_R = R$$

On observe donc que $\alpha = 0$, il n'y a donc pas de déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$ dans une résistance.

Impédance d'un solénoïde

Pour un solénoïde, on obtient :

$$\underline{Z}_L = j\omega L$$

On observe donc que $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $u(t)$ est en quadrature avance par rapport à $i(t)$

Impédance d'un condensateur

Pour un condensateur, on obtient :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

On observe donc que $\alpha = -\frac{\pi}{2}$: $u(t)$ est en quadrature retard par rapport à $i(t)$

Loi d'additivité

→ En série :

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$$

→ En dérivation :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

13.3 Diagramme de Fresnel

Considérons une association R.L.C. en série.
Par application de la loi des mailles :

$$\underline{E}_M = \underline{U}_R + \underline{U}_C + \underline{U}_L$$

On construit à partir de ce moment le diagramme de Fresnel :

1 - On définit une orientation pour les angles, puis on fixe un axe de référence, en général $\underline{U}_R = R.\underline{I}_M$.

2 - Puis on ajoute \underline{U}_C et \underline{U}_L en respectant la convention d'orientation des angles.

Grâce à ce diagramme, on détermine rapidement le déphasage α entre \underline{I}_M et \underline{E}_M à l'aide de $\tan(\alpha)$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R}$$

Dans le cas d'un circuit en dérivation, on peut définir ce diagramme à l'aide des courants et de la loi des noeuds.

13.4 Théorèmes généraux en régime sinusoïdale forcé

13.4.1 Lois de Kirchhoff

Loi des noeuds

$$\sum_{\text{Entrant}} \underline{I}_M = \sum_{\text{Sortant}} \underline{I}_M$$

Loi des mailles

$$\sum_{k=1}^n \underline{U}_{M_k} = 0$$

13.4.2 Diviseur de tension

Considérons l'association de n conducteurs ohmiques en série entre deux points A et B. Soit \underline{U}_j la tension parcourant le j^{eme} conducteur ohmique, de résistance R_j :

$$\underline{U}_{M_j} = \left(\frac{\underline{Z}_j}{\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k} \right) \underline{U}_M$$

13.4.3 Diviseur de courant

Considérons deux résistances en dérivation.

Soit i le courant entrant, i_1 le courant traversant la résistance R_1 .

On obtient :

$$\underline{I}_{M_1} = \left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right) \underline{I}$$

13.4.4 Théorème de Kennely

Considérons un montage en étoile contenant les dipôles d'impédances complexes $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$. On obtient le montage équivalent, avec un seul noeud, contenant les dipôles d'impédances complexes $\underline{Z}'_1, \underline{Z}'_2, \underline{Z}'_3$, à l'aide des relations :

$$\underline{Z}'_1 = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\sum_i \underline{Z}_i}$$

avec \underline{Z}'_1 du côté de A, on a donc au numérateur $\underline{Z}_2 \underline{Z}_3$, qui sont eux aussi du côté de A.

13.4.5 Théorème de Millman

Considérons un circuit composé de plusieurs dipôles : Sources de courants, sources de tensions, résistances. Soit A et B deux points du circuits.

Le théorème de Millman permet de déterminer la tension U_{AB} de la façon suivante :

$$\underline{E}_{M_{AB}} = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{\underline{E}_{M_jB}}{\underline{Z}_j} + \sum_{k=1}^M \underline{I}_{M_k}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_j}}$$

13.5 Puissance instantanée et puissance moyenne

13.5.1 Puissance instantanée

Considérons un dipôle quelconque en convention récepteur.

Définition 53 On appelle puissance instantanée, notée $p(t)$, dans le dipole AB, en convention récepteur, le produit :

$$p(t) = u(t).i(t)$$

Son unité est le Watt On obtient :

$$p(t) = U_M \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot I_M \cdot \cos(\omega t)$$

$p(t)$ ne s'exprime jamais avec des grandeurs complexes.

13.5.2 Puissance moyenne

Définition 54 La puissance moyenne, notée $P(t)$, d'un signal périodique de période T est défini par :

$$P(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p(t) dt$$

On obtient que la puissance moyenne consommée par un dipôle en régime sinusoïdale forcé est :

$$P(t) = \frac{U_M \cdot I_M}{2} \cos(\varphi)$$

avec φ le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$ dans le dipôle

13.5.3 Grandeur efficace

Définition 55 Soit $f(t)$ une fonction périodique, de période T . La valeur efficace de $f(t)$, notée F_e , est défini par :

$$F_e = \sqrt{< f(t)^2 >}$$

avec $< f(t)^2 >$ la valeur moyenne de $f(t)^2$

En régime sinusoïdale forcé, on obtient :

$$U_e = \frac{U_M}{\sqrt{2}}$$

$$I_e = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

13.5.4 Facteur de puissance

Définition 56 Avec les valeurs efficaces en régime sinusoïdale forcé, on obtient :

$$P(t) = U_e \cdot I_e \cdot \cos(\varphi)$$

On appelle $\cos(\varphi)$ facteur de puissance du dipole

13.5.5 Puissance consommée, Puissance dissipé

En régime sinusoïdale forcé, la puissance moyenne consommée par une résistance est :

$$P_R(t) = \frac{R \cdot I_M^2}{2}$$

La puissance moyenne consommée par un solénoïde ou par un condensateur est nul car $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

Chapitre 14

Diagramme de Bode

Considérons un circuit électrique en régime sinusoïdale forcé. Ce circuit peut se ramené à un quadripôle caractérisé par :

- $U_e(t)$: tension d'entrée
- $U_s(t)$: tension de sortie

14.1 Fonction de transfert

Définition 57 On définit la fonction de transfert, notée $\underline{H}(j\omega)$, par le rapport de $\underline{U}_s(t)$ sur $\underline{U}_e(t)$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s(t)}{\underline{U}_e(t)} = \frac{\underline{U}_{M_s}(t)}{\underline{U}_{M_e}(t)}$$

14.2 Gain et relation de phase

On définit le gain de la fonction de transfert par :

$$H(\omega) = \sqrt{\underline{H}(j\omega) \cdot \underline{H}^*(j\omega)}$$

On définit l'argument de la fonction de transfert par :

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

avec $\varphi(\omega)$ l'argument.

Pour déterminer l'argument, on isole au numérateur ou au dénominateur la partie imaginaire, puis on utilise la formule :

$$\tan(\pm\varphi(\omega)) = \frac{\text{Imaginaire}}{\text{Réel}}$$

avec \pm selon si la partie imaginaire est au numérateur (+) ou au dénominateur (-)

14.3 Ordre de la fonction de transfert

Définition 58 On définit l'ordre de la fonction de transfert comme le degré le plus élevé du polynôme associé, avec ω la variable.

14.4 Diagramme de Bode

14.4.1 Gain de décibel

Définition 59 On appelle gain en décibel, notée $H_{dB}(\omega)$, la fonction défini par :

$$H_{dB}(\omega) = 20\log(H(\omega))$$

On utilise, pour le diagramme de bode, une échelle logarithmique

14.4.2 Tracer un diagramme de bode pour le gain

On utilise la méthode suivante pour tracer le diagramme de bode du gain :

- On pose H_{dB} en ordonnée, $\log(\omega)$ en abscisse
- On calcule les asymptotes : $x \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$
- On prend des valeurs particulière

14.4.3 Tracer un diagramme de bode pour l'argument

On utilise la méthode suivante pour tracer le diagramme de bode de l'argument :

- On calcule les asymptotes de $\tan(\varphi)$: $x \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$. On en déduit les asymptotes de φ .
- On prend des valeurs particulière

14.4.4 Pulsation de coupure à 3 dB

Définition 60 La pulsation de coupure à 3dB, notée ω_c , est la pulsation pour laquelle :

$$H_{dB}(x) = H_{dB_{Max}} - 3$$

Ce qui est équivalent à :

$$H(x) = \frac{H_{Max}(x)}{\sqrt{2}}$$

14.4.5 Fonction du 2nd ordre - Résonnance de charge

On observe que sur un montage R.L.C. avec sortie au borne de C, il y à résonnance de charge pour $Q > 0,7$. À la résonnance, les caractéristiques sont les suivantes :

- $x_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$
- $H_{Max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$
- $U_s(t)$ est en quadrature retard par rapport à $U_e(t)$

14.4.6 Fonction du 2nd ordre - Résonnance de tension

On observe que sur un montage R.L.C. avec sortie au borne de R, il y à résonnance de tension $\forall Q$. À la résonnance, les caractéristiques sont les suivantes :

- $x_0 = 1$
- $H_{Max} = 1$
- $U_s(t)$ et $U_e(t)$ sont en phase.

14.5 Détermination de la nature du filtre

On peut déterminer de façon qualitative le type de filtre crée par le circuit étudié

14.5.1 Comportement d'un solénoïde

- En Basse-Fréquence : Interrupteur fermé
- En Haute-Fréquence : Interrupteur ouvert

14.5.2 Comportement d'un condensateur

- En Basse-Fréquence : Interrupteur ouvert
- En Haute-Fréquence : Interrupteur fermé

Quatrième partie

Électrostatique

Chapitre 15

Mouvement d'une particule chargée

15.1 Force de Lorentz

15.1.1 Champs électrique, champs magnétique

Définition 61 A chaque fois qu'on détecte une différence de potentiel entre deux points de l'espace, on introduit une grandeur vectorielle, appelé *champs électrique*, notée \vec{E} , d'unité Volt/mètre.

Définition 62 Un aimant ou un circuit parcouru par un courant peut avoir une action sur une boussole. On modélise cette action par un *champs magnétique*, notée \vec{B} , d'unité le Tesla.

15.1.2 Force de Lorentz

Définition 63 Soit $M(m,q)$ une particule de masse m et de charge q observée dans le référentiel R galiléen. Si M est plongée dans la zone d'action d'un champs électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) avec un vitesse $\vec{V}(M)_R$, elle subit la force de Lorentz :

$$\vec{F}_l = q(\vec{E} + \vec{V}(M)_R \wedge \vec{B})$$

15.1.3 Invariance relativiste

Propriété 9 On peut définir un référentiel R' dans lequel $\vec{E}' = \vec{0}$.

On observe donc que le champs \vec{E} et \vec{B} ne suffisent pas pris à part, on prend donc en compte pour l'étude d'un système le couple : (\vec{E}, \vec{B}) .

Propriété 10 En général, au cours de l'étude d'une particule élémentaire, on néglige l'influence de son poids.

15.2 Mouvement d'une particule chargé dans un champs électrique

15.2.1 Trajectoire

Soit \vec{E} un champs électrique de norme E . Soit $M(m,e^-)$ un électron assimilé à un point matériel de masse m et de charge e^- observé dans R galiléen.

On obtient, par application du P.F.D, l'équation horaire :

$$y(x) = \frac{e.E}{m.v_0^2} \cdot x^2$$

La trajectoire est donc une parabole.

15.2.2 Focalisation

Considérons un faisceau de particules chargées passant dans la zone d'action de :

$$\vec{E} = E \cdot \vec{i}$$

avec un vecteur vitesse

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha) \cdot \vec{i} + v_0 \sin(\alpha) \cdot \vec{j}$$

on obtient :

$$x(y) = \frac{-E_C}{2m(v_0 \sin(\alpha))^2} \cdot y(t)^2 + \frac{y(t)}{\tan(\alpha)}$$

On obtient la portée maximale, pour $x(y) = 0$ et $y \neq 0$:

$$y_p = \frac{m \cdot v_0^2}{e \cdot E} \cdot \sin(2\alpha)$$

La portée est maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Pour des angles proches de α , le faisceau focalise toujours en y_p .

15.2.3 Canon à électrons

Définition 64 Pour émettre des électrons, on chauffe un filament et on impose aux électrons de passer par des petites ouvertures.

Les électrons sont arrachés au filament. Soit B le point d'entrée de la phase d'accélération, et A le point de sortie. On obtient :

$$dEc_{B \rightarrow A} = q(V_B - V_A)$$

En négligeant la diffraction en A ($\lambda_{dB} = \frac{h}{p} \ll d$, avec d diamètre de l'ouverture), on obtient :

$$\vec{v}_0 = \sqrt{\frac{2eU_{AB}}{m}} \cdot \vec{i}$$

15.3 Étude du mouvement d'une particule chargée dans un champs magnétique

Propriété 11 Par application du P.F.D, on montre qu'un champs magnétique ne peut pas modifier la norme de la vitesse, mais il peut modifier la trajectoire de la particule.

Propriété 12 Si v_0 est perpendiculaire à B , la trajectoire de $M(m,q)$, point matériel de masse m et de charge q , est circulaire uniforme.

Propriété 13 Si v_0 est quelconque, la trajectoire de $M(m,q)$, point matériel de masse m et de charge q , est hélicoïdale uniforme.

15.3.1 Mouvement d'une particule dans un champs électromagnétique

Propriété 14 Soit $M(m,q)$ une particule de masse m et de charge q , placée à l'origine d'un référentiel galiléen, sans vitesse initiale.

Par application du P.F.D. et de la méthode de résolution des équations couplées, on obtient que la trajectoire de M est une cycloïde.

Propriété 15 Sachant que :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}$$

avec \vec{E}' le champs électrique dans un référentiel R' et \vec{u} un vecteur quelconque.

En posant $\vec{u} = \frac{E}{B} \cdot \vec{j}$, on obtient que dans le référentiel R' en translation uniforme par rapport à R de vecteur \vec{u} .

Chapitre 16

Charge électrique

Définition 65 La matière est électriquement neutre. Cette neutralité résulte d'une fine compensation entre les charges positives et les charges négatives dans la matière.

La charge électrique est une grandeur extensive, conservative (non créée et non détruite) et quantifiée. (Ceci n'est plus vérifié dans le cadre d'une étude au niveau nucléaire)

Définition 66 Une charge est dites ponctuelle quand on peut concentrer la totalité de la charge en un point. On la note q .

16.1 Distribution de charge

On distingue trois types de distributions de charges :

- Distribution volumique
- Distribution surfacique
- Distribution linéique

16.1.1 Distribution volumique

Soit une distribution volumique de charges, pour toute la charge Q_T , dans un volume v . Soit M un point appartenant au voisinage duquel on définit un volume $dv(M)$. Ce volume $dv(M)$ porte la charge $dq(M)$

Définition 67 On appelle densité volumique de charge, défini au voisinage de M , la grandeur suivante :

$$\rho(m) = \frac{dq(M)}{dv(M)}$$

Son unité est le $C.m^{-3}$

Propriété 16 Une densité volumique est considérée uniforme quand :

$$\rho(M) = \rho_0 = \text{cte}$$

Propriété 17 La charge totale portée par v est donnée en fonction de $\rho(M)$ par :

$$Q_T = \iiint_V dq(M) = \iiint_V \rho(M).dv(M)$$

Si la distribution est uniforme :

$$Q_T = \rho_0 \cdot v$$

16.1.2 Distribution surfacique et linéaire

Si respectivement l'épaisseur ou la section est négligeable devant la dimension du corps considéré, on peut effectuer les approximations suivantes :

- Dans le cadre d'une distribution surfacique, $dq(M) \simeq \sigma(M).dS(M)$
- Dans le cadre d'une distribution linéaire, $dq(M) \simeq \lambda(M).dL(M)$

On obtient donc dans le cas d'une distribution uniforme :

- Dans le cadre d'une distribution surfacique $Q_T = \sigma_0.S$
- Dans le cadre d'une distribution linéaire, $Q_T = \lambda_0.L$

16.2 Loi de Coulomb

Définition 68 Soient q_1, q_2 deux charges ponctuelles plongées dans le vide. La force d'interaction électrostatique exercée par q_1 sur q_2 est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

Cette force est en $\frac{1}{r^2}$. On dit qu'elle est newtonienne. C'est une force conservative.

16.2.1 Principe de superposition

Considérons une charge ponctuelle $M'(q')$ de charge q' soumise à l'action de N charges ponctuelles q_i .

La force ressentie par $M'(q')$ est :

$$\vec{F}_{res} = \sum_i^N \frac{q_i \cdot q'}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i$$

avec : $\vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{M_i M'}}{\|\overrightarrow{M_i M'}\|}$.

Ceci constitue le principe de superposition. On postule qu'il y a linéarité entre la cause et les effets.

On peut généraliser ceci pour une distribution volumique, surfacique ou linéaire.

16.3 Champs électrostatique

L'intérêt de définir un champs est qu'on se libère du sujet d'étude. Un champs est une propriété intrinsèque de l'espace.

16.3.1 Champs créé par une charge ponctuelle

Définition 69 Soient deux charges ponctuelles, $M(q)$ de charge q , et $M'(q')$ de charge q' . La force exercée par q sur q' est donnée par la loi de Coulomb.

Le champs électrique en M' est donné par :

$$\frac{\vec{F}_{M \rightarrow M'}}{q'} = \vec{E}(M') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

16.3.2 Champs créé par une distribution de charge

Distribution volumique de charge

Soit P un point quelconque d'une distribution volumique de charge, au voisinage duquel on définit un volume élémentaire $dv(p)$, contenant la charge $dq(p) = \rho(P).dv(P)$.

Soit M un point quelconque de l'espace.

En partant de l'expression du champs crée par un charge ponctuelle (Méthode de calcul directe), on obtient :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P) \cdot \vec{PM} \cdot dV(P)}{(PM)^3}$$

Distribution surfacique de charge

On obtient par un raisonnement analogue :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P) \cdot dS(P)}{(PM)^3}$$

Distribution linéique de charge

De même :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P) \cdot dL(P)}{(PM)^3}$$

16.3.3 Champs crée par un disque uniformement chargé en surface avec la densité σ_0

Par application des formules précédentes, et en s'appuyant sur les symétries du problèmes, on obtient, avec α l'angle entre l'axe de symétrie et le sommet du disque, et \vec{u} vecteur directeur de l'axe de symétrie :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} (1 - \cos(\alpha)) \vec{u}$$

16.3.4 Champs crée par un fil de longueur infini uniformement chargé avec la densité λ_0

Par application, on obtient :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 \cdot OM} \vec{u}$$

Chapitre 17

Circulation et flux

17.1 Définitions

17.1.1 Circulation d'un champ de vecteurs

Définition 70 Soit $\vec{A}(M)$ un champ de vecteur au point M .

On appelle circulation de $\vec{A}(M)$ entre deux points M_1 et M_2 , le scalaire défini par :

$$C = \int_{M_1}^{M_2} dC(M) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{A}(M) \cdot d\vec{l}$$

Sur un contour fermé, la circulation est notée :

$$C = \oint \vec{A}(M) \cdot d\vec{l}$$

Définition 71 $\vec{A}(M)$ est en circulation conservative si sa circulation ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement du point de départ et du point d'arrivé.

Propriété 18 Sur un contour fermé, si la force est conservative :

$$C = \oint \vec{A}(M) \cdot d\vec{l} = 0$$

17.1.2 Flux d'un champ de vecteur

Définition 72 Par définition, le flux du champs de vecteur $\vec{A}(M)$, à travers la surface S orienté est donnée par :

$$\phi = \iint_S \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$

Avec $d\vec{S}(M)$ surface orienté définie au voisinage du point M .

Définition 73 Si la surface est fermé, le flux devient :

$$\phi = \iint_S \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$

La surface fermé délimite un volume. On peut donc distinguer un milieu interieur d'un milieu extérieur. Il est d'usage d'orienter dans ce cas $d\vec{S}(M)$ vers l'extérieur.

17.2 Circulation du champs électrostatique : Potentiel électrostatique

17.2.1 D'une particule ponctuelle

Soit $O(q)$ une charge ponctuelle de charge q placée à l'origine d'un repère R . La circulation du champs $\vec{E}(M)$ entre deux points quelconque $M_1(r_1)$ et $M_2(r_2)$ est :

$$C = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M) \cdot \vec{dl}$$

En explicitant \vec{dl} en coordonnée cylindrique, on obtient :

$$C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$\vec{E}(M)$ est donc à circulation conservative

17.2.2 Potentiel électrostatique

Définition 74 Par analogie avec la définition des fonctions énergies potentielles E_p , on appelle potentiel électrostatique en M , notée $V(M)$, la fonction définie par :

$$C = -\Delta V = -(V(M_2) - V(M_1))$$

On obtient dans le cas d'un champs électrostatique créé par une charge ponctuelle en M :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

Ceci est obtenu en posant qu'à l'infini, $V(M) = 0$

17.2.3 Relation entre le champs et le potentiel

Sachant que C est égale à $-\Delta V$, et d'après la définition de la circulation, on obtient :

$$dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot \vec{dl}$$

Et comme, par définition :

$$dV(M) = \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot \vec{dl}$$

On obtient la relation suivante :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

Par analogie avec la statique des fluides, on obtient :

Propriété 19 Les surfaces équipotentielle sont \perp à $\vec{E}(M)$

Propriété 20 $\vec{E}(M)$ descent les potentielles. Il est orienté des hauts potentiels vers les bas potentiels.

Propriété 21 On obtient la formulation intégrale associés :

$$V_2 - V_1 = - \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M) \cdot \vec{dl}$$

Par application du principe de superposition, toutes les relations établies précédemment sont vérifiées quelque soit la distribution de charge.

17.2.4 Théorème de l'énergie cinétique

Propriété 22 Par application du théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$$\Delta E_c(M) = -q \cdot \Delta V$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un potentiel $V(M)$:

$$E_p(M) = q \cdot V(M)$$

17.3 Flux du champ électrostatique : Théorème de Gauss

Théorème 2 Le flux du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ à travers une surface de Gauss S_g fermé est égale à la charge interieure à cette surface, notée Q_{int} , sur la permittivité du vide ε_0 .

$$\phi = \iint_{M \in S_g} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

17.3.1 Relation de continuité

- $\vec{E}(M)$ est continue à la traversé d'une distribution volumique de charge, mais discontinue à la traversé d'une distribution surfacique.
- $V(M)$ est continue à la traversé d'une distribution volumique ou surfacique de charge, mais discontinue à la traversé d'une distribution linéique.

Ces relations de continuité nous permettent de determiner V par intégration, et de vérifier la pertinence de nos calculs pour le champs.

17.3.2 Conditions d'application du théorème de Gauss

Considérons une charge ponctuelle de charge q situé en O . Soit S_{g_1} une surface de Gauss centré sur O_1 avec O_1 différent de O .

Par application du théorème de Gauss, on obtient :

$$\phi = \iint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$$

La nulité du flux n'implique pas la nulité du champs. Une bonne utilisation du théorème de Gauss passe par l'étude de la topographie du champs.

Principe de Curie

Théorème 3 "La symétrie de la cause se retrouve dans les effets"

Appliqué à l'électrostatique, ce principe implique que tous éléments de symétrie pour la charge est un élément de symétrie pour le champs. Donc, si la distribution de charge admet un plan de symétrie de translation ou de rotation, alors \vec{E} est porté par ce plan.

17.4 Application à la gravitation

Tous les résultats établies en électrostatique sont généralisable à la gravitation.

On passe donc de l'électrostatique à la gravitation en effectuant les changements suivants :

- $q \rightarrow m$
- $\vec{E}(M) \rightarrow \vec{g}(M)$
- $\frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow -4\pi \cdot G$

17.4.1 Généralisation

Définition 75 Par analogie, le potentiel gravitationnelle est donnée par :

$$\vec{g}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(M))$$

Avec $V(M)$ le potentiel gravitationnelle.

On obtient donc le potentiel gravitationnelle créé par une masse ponctuelle M à une distance r :

$$V(M) = \frac{-G.m}{r}$$

Définition 76 Si on place une masse m' en M , l'énergie potentielle d'interaction entre m et m' est donnée par :

$$E_p = m'.V(M) = \frac{-G.m.m'}{r}$$

Propriété 23 Le théorème de Gauss appliqué à la gravitation devient :

$$\phi = \oint \vec{g}(M).d\vec{S} = -4\pi.G.M_{int}$$

avec M_{int} la masse interieur à la surface de Gauss.

Chapitre 18

Dipole électrique

18.1 Propriétés électriques du dipole

Définition 77 On appelle dipole électrique un système électroniquement neutre, dans lequel le barycentre des charges positives est différent de celui des charges négatives

18.1.1 Propriétés de symétrie

Soit une charge $-q$ placé en N, et une charge q passée en P.
Soit $a = NP$, la distance entre les charges. On pose $O = \frac{a}{2}$.

Soit M situé à une distance r de O, avec $r \gg a$.

Par application du principe de Curie, on obtient que le plan horizontal est un plan de symétrie. On détermine donc le champs $\vec{E}(M)$ dans ce plan.

18.1.2 Potentiel crée par le dipole

Soit \vec{p} le vecteur moment dipolaire défini par :

$$\vec{p} = q \cdot \overrightarrow{NP}$$

On obtient, à l'aide du principe de superposition, l'expression du potentiel crée par un dipole électrostatique à grande distance :

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

18.1.3 Champ électrostatique

Sachant que $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(M))$, on obtient l'expression du champ électrique crée à une grande distance :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cdot (\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p})$$

18.1.4 Propriétés électriques

Nous avons les propriétés suivantes :

→ Dans le cas d'une charge ponctuelle :

$$\rightarrow V(r) \propto \frac{1}{r}$$

$$\rightarrow E(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

→ Dans le cas d'un dipole :

$$\rightarrow V(r,\theta) \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\rightarrow E(r,\theta) \propto \frac{1}{r^3}$$

On observe donc qu'un dipole électrique à des actions de courte portée, et contrairement à une charge ponctuelle, ses actions sont anisotrope, c'est à dire que le potentiel et le champs dépendent de θ .

Propriété 24 *On obtient l'équation suivante pour les lignes de champs :*

$$r(\theta) = r_0 \cdot \sqrt{|\cos(\theta)|}$$

18.2 Action d'un champ électrique sur un dipole

18.2.1 Dans un champs uniforme

Propriété 25 *Dans un champs électrique uniforme, le dipole ne se déplace pas, mais il tourne sous l'action d'un couple :*

$$\vec{M}(O) = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$$

Ce couple tend à orienter \vec{p} dans le sens de \vec{E}_0

Propriété 26 *L'énergie potentielle d'interaction d'un dipole, de moment polaire \vec{p} , dans un champs \vec{E}_0 est donnée par :*

$$E_{p_{dipole}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

18.2.2 Dans un champ inhomogène

Propriété 27 *Le dipole tend à s'orienter dans le sens de \vec{E} , mais cette fois-ci, la résultante des forces n'étant pas nulle, le dipole se déplace vers les zones de champs intense.*

18.2.3 Force de Van der Waales

Définition 78 *À l'échelle atomique et moléculaire, la force dominante est d'origine électromagnétique. À courte portée, de l'ordre du μm , cette force est modélisé par la force de Van der Waales, qui est une force attractive $\propto \frac{1}{r^7}$. Elle résulte de trois interactions dipolaires :*

- 1- Keeson : Une interaction entre dipole permanent (H_2O et H_2O par exemple)
- 2- London : Une interaction entre dipole instantanée (Comme le dipole créé par l'électron et le protons dans le modèle de Bohr par exemple)
- 3- Debye : Une interaction créée entre un dipole permanent et un dipole induit (Un dipole polarisé qui polarise un dipole à la base neutre)

Il existe une force répulsive qui compense à très courte distance la force de Van der Waales. Elle est une conséquence du principe quantique d'exclusion de Pauli. Elle est du type $\frac{1}{r^{13}}$

Cinquième partie

Magnétostatique

Chapitre 19

Magnétostatique

19.1 Loi de Biot et Savart

Une particule chargée au repos crée un champ électrique \vec{E} . Si une charge est mise en mouvement, on peut lui associer un courant électrique.

Ce courant I crée un champ magnétique \vec{B} .

La relation entre I et \vec{B} est donnée par la relation de Biot et Savart

Théorème 4 Considérons un circuit filiforme, parcouru par un courant I constant. Soit P un point quelconque du circuit, au voisinage duquel on défini une longueur élémentaire $d\vec{l}$ orienté dans le sens de I . On obtient la formule de Biot et Savart :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{4\pi \cdot PM^2}$$

Cette loi est vérifiée en régime indépendant du temps, dans le vide.

Propriété 28 De cette formule, de par la présence du produit vectoriel, on en déduit l'existence d'une antisymétrie entre la cause I et l'effet \vec{B}

Propriété 29 Le champ résultant en M est donnée par :

$$\vec{B}(M) = \int_{fil} d\vec{B}(M)$$

19.2 Flux du champ magnétique

19.2.1 Flux conservatif

Propriété 30 À l'aide de la loi de Biot et Savard, on montre de $\vec{B}(M)$ est à flux conservatif. Ceci signifie que l'intégrale de $\vec{B}(M)$ sur une surface fermé est toujours nulle :

$$\iint_{M \in S} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0$$

19.2.2 Variation du champ magnétique dans un tube de champ

Les lignes de champs de $\vec{B}(M)$ sont partout tangents à $\vec{B}(M)$.
On obtient donc que quand $\vec{B}(M)$ est uniforme, ses lignes de champs sont parallèle.

Définition 79 En retirant un "certain" nombre de lignes de champs, on défini un tube de champs.

Propriété 31 En explicitant la conservation du flux de $\vec{B}(M)$ sur le tube de champs, on obtient que :

$$B_1 dS_1 = B_2 dS_2$$

La conservation du flux de $\vec{B}(M)$ implique donc que $\vec{B}(M)$ est plus intense dans les zones d'étranglement du tube de champs.

Propriété 32 Par application du théorème de Gauss dans un tube de champs :

$$\iint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int \ de \ S}}{\varepsilon_0}$$

19.3 Circulation du champ magnétique sur un contour fermé - Théorème d'Ampère

Définition 80 On définit le courant enlacé, notée I_{enlace} , comme la somme algébrique des courants traversant la surface S . Ces courants sont comptés positivement si ils traversent S par sa face Sud, et négativement si ils traversent par sa face Nord.

Énoncé 1 La circulation du champ magnétique sur un contour fermé φ orienté est égale au produit de la perméabilité du vide par le courant enlacé par le contour :

$$C = \oint_{M \in \varphi} \vec{B}(M) \cdot \vec{dl} = \mu_0 \cdot I_{enlace}$$

19.3.1 Symétrie

Propriété 33 Une bonne utilisation du théorème d'Ampère repose sur l'observation attentive de la topologie de \vec{B} , exactement comme pour le théorème de Gauss.

Par application du principe de Curie, on en déduit que tous plans de symétrie de translation ou de rotation pour I est perpendiculaire à $\vec{B}(M)$ et que les variables naturelles du courant sont les variables naturelles du champ magnétique

Sixième partie

Thermodynamique

Chapitre 20

Éléments de statique des fluides

Définition 81 Un fluide est un milieu continu, déformable. On considère dans cette définition les liquides et les gaz. Un fluide est considéré comme parfait si son coefficient de viscosité est nul.

20.1 Pression et force pressante

On appelle pression exercé par le fluide en M, le scalaire défini par :

$$d\vec{F}_p = p(M).dS(M)\vec{n}$$

Système d'unité :

- 1 bar = $10^5 Pa$
- 1 tor, (De Torricelli) = pression exercé par 1mm de Hg (Mercure)
- 1 atm = 1,013 bar

20.2 Force Résultante exercé par un fluide

Considérons un solide immergé dans un fluide. La force pressante résultante exercé par un fluide sur ce solide, est la somme des forces $d\vec{F}(M)$:

$$\vec{F}_{res} = \iint_{Surface} d\vec{F}_{(M)} = - \iint_{Surface} p(M).dS\vec{n}_e$$

avec \vec{n}_e vecteur unitaire, orienté vers l'extérieur, normal à $dS(M)$

20.3 Particule de Fluide

Considérons un fluide quelconque. Soit M un point quelconque dans le fluide. Soit $\rho(M)$, masse volumique dans le fluide, au voisinage de M Soit d_M , masse d'un volume élémentaire au voisinage de M, dV_M

$$d_M = \rho(M).dV_M$$

20.4 Force pressante exercé par un fluide sur une particule de fluide

Considérons une particule de fluide cubique définie au voisinage de M(x,y,z). Soit $d\vec{F}_{res}$ la force exercé par le fluide sur la particule de fluide.

$$d\vec{F}_{res} = -\vec{grad}(p).dV_m$$

20.5 Définition d'un gradiant

Définition 82 Soit p la pression du fluide, avec $p = p(x,y,z)$

$$(\frac{\partial p}{\partial x})_{y,z} \vec{i} + (\frac{\partial p}{\partial y})_{x,z} \vec{j} + (\frac{\partial p}{\partial z})_{x,y} \vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}}(p)$$

On le définit aussi à l'aide de la relation :

$$dp(M) = \overrightarrow{\text{grad}}(p) \cdot \vec{dl}$$

20.6 Loi fondamentale de la statique, dans un référentiel galiléen

Définition 83 Considérons un fluide au repos dans le référentiel R galiléen. Considérons une particule de fluide définie au voisinage d'un point M . La masse de cette particule de fluide est :

$$d_m = \rho(M).dV_m$$

Considérons que la particule de fluide est au repos. Grâce au P.F.D., on obtient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \rho(M) \cdot \vec{g}$$

Ceci constitue la loi fondamentale de la statique des fluides dans R .

20.7 Théorème de Pascal

Définition 84 Un fluide est dit incompressible si :

$$\rho(M) = \rho_0 = \text{cte}$$

Considérons un fluide incompressible. Par application de la loi fondamentale de la statique, on obtient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \rho(M) \cdot \vec{g}$$

Sachant que la variation de pression est donnée par :

$$dp(M) = \overrightarrow{\text{grad}}(p) \cdot \vec{dl}$$

En explicitant, on obtient la relation de Pascal :

$$p(M) = p_0 + \rho_0 \cdot g \cdot z$$

avec ici, $z > 0$

Théorème 5 "Un fluide incompressible transmet intégralement les variations de pressions"

20.8 Fluide compressible assimilable à un gaz parfait

Considérons un gaz parfait isotherme. En utilisant la loi fondamentale de la statique des fluides et la définition du gradiant, on obtient :

$$p(z) = p_0 e^{\frac{-Mgz}{Rt_0}}$$

20.9 Loi fondamentale de la statique des fluides dans un référentiel non galiléen

Considérons une particule $M(dM)$ de masse dM au repos dans un référentiel non galiléen. On ajoute deux forces dans la somme des forces du PFD :

1. La force d'entraînement $\overrightarrow{dF_{ie}} = -d_m \cdot \vec{a}_e$
2. La force de coriolis $\overrightarrow{dF_{ic}} = -d_m \cdot \vec{a}_c = \vec{0}$

Ceci nous conduit à la loi fondamentale de la statique dans un référentiel non galiléen :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \rho(M) \cdot (\vec{g} - \vec{a}_e)$$

Si le repère est non galiléen, et qu'il est en :

1. Translation rectiligne par rapport à un référentiel galiléen, alors :

$$\vec{a}_e = a_0 \cdot \vec{i}$$

avec a_0 accélération de ce repère par rapport à celui galiléen

2. Rotation uniforme autour d'un axe fixe du référentiel galiléen :

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{R}$$

avec \vec{R} la distance entre l'axe de rotation et le point

Les surfaces isobare sont perpendiculaire à \vec{g} dans un référentiel galiléen, et perpendiculaire à $\vec{g} - \vec{a}_e$

20.10 Force pressante et poussé d'Archimède

Définition 85 *On appelle poussé d'Archimède la force définie par :*

$$\overrightarrow{F_{res}} = - \iint_{\text{Surface}} p(m) \cdot dS \cdot \vec{n}_e$$

Théorème 6 "Tous corps immergé dans un ou plusieurs fluides subit une force pressante résultante opposée au poids du fluide déplacé." Cette force est notée $\vec{\pi}$

Chapitre 21

Introduction à la thermodynamique

21.1 Critère d'un gaz parfait monoatomique

- I) Les atomes sont modélisés par des sphères dur, de rayon r_0 et $r_0 \ll l$, avec l : Distance moyenne inter-atome
- II) Il faut que l soit suffisamment grand pour qu'on puisse négliger l'énergie potentielle d'interaction interatomique ($\propto \frac{1}{r}$)
- III) La vitesse moyenne de chacun des atomes doit être nul : $\langle \vec{v}_i \rangle$. Le gaz est au repos macroscopique
- IV) La loi de distribution des vitesses du G.P.M. doit être stationnaire. Le gaz est dit à l'équilibre thermodynamique
- V) La loi de distribution des vitesses doit être la même dans toute éléments de volume du gaz. Le gaz est homogène

21.2 Pression cinétique dans un G.P.M.

Considérons un G.P.M. occupant un volume V , constitué de N atomes. Soit d_n le nombre d'atomes percutant $dS(M)$ entre t et $t + dt$

$$d_n = \frac{n}{6} \cdot dl \cdot dS$$

avec $n = \frac{N}{V}$ Le facteur $\frac{1}{6}$ s'explique par la supposition de l'équirépartition des atomes selon $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, mais seulement la moitié des atomes sont dans le bon sens, donc $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ On a aussi :

$$dl = v_3 \cdot dt$$

avec v_3 vitesse quadratique moyenne du gaz La pression exercé par un G.P.M est donc :

$$p = \frac{n.m. \langle v^2 \rangle}{3}$$

21.3 Température cinétique

Définition 86 Par définition, $\langle E_c \rangle \geq 0$, donc $T \geq 0$, en Kelvin

21.4 Fonction d'état d'un gaz parfait et énergie interne

Définition 87 L'équation d'état régissant les gaz parfaits est :

$$p.V = n.R.T$$

L'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique est donnée par :

$$u_{GPM} = \frac{3}{2}.n.R.T$$

21.5 Étude d'un gaz réel

À faible pression, avec une température T constante, on peut modéliser les gaz réels diatomique par la équation d'état des gaz parfaits. On dit des gaz vérifiant cette équation d'état qu'ils sont parfait.

L'énergie d'un gaz parfait diatomique est donnée par :

1. A basse température : $u_{GPD} = \frac{3}{2}.n.R.T$ (Molécules en Translation)
2. A température ambiante : $u_{GPD} = \frac{5}{2}.n.R.T$ (Molécules en Translation et en rotation)
3. A haute température : $u_{GPD} = \frac{7}{2}.n.R.T$ (Molécules en Translation, rotation et vibration)

21.6 Capacité Calorifique à volume constant

Définition 88 On défini la capacité calorifique à volume constant par, sachant que $u(T,V)$:

$$C_v = (\frac{\partial u}{\partial T})_V$$

Dans le cadre de l'étude d'un gaz parfait, $u(T)$, donc :

$$C_v = \frac{du}{dT}$$

On défini aussi les capacités massique et molaire :

$$\text{I)} \quad C_{V,m} = \frac{1}{m} \cdot (\frac{\partial u}{\partial T})_V$$

$$\text{II)} \quad C_{V,mol} = \frac{1}{n} \cdot (\frac{\partial u}{\partial T})_V$$

On obtient donc, pour n moles de G.P. :

$$\Delta u = n.C_{mol} \cdot \Delta T$$

C_V s'exprime en $J.K^{-1}$

21.7 Mélange Gazeux

Dans l'étude d'un mélange gazeux, on défini :

$$n_T = n_1 + n_2 + \dots + n_N$$

$$p_T = p_1 + p_2 + \dots + p_N$$

La seconde relation est appelé loi de Dalton. Les p_i représente la pression partielle de chacun des gaz. La pression partielle est la pression qui sera exerce par le gaz si il étais seul dans le volume

21.8 Gaz de Van Der Waales

Ce modèle se base sur l'équation d'état des gaz parfaits, en ajoutant deux composante, négligé dans le modèle des gaz parfaits.

- I) L'interaction moléculaire (attractive). On note p_1 cette correction
- II) Le volume propre des atomes (covolume). On note V_1 ce covolume

L'équation qui régit les gaz dits de Van Der Waales est :

$$(p + \frac{n^2}{V^2} \cdot a)(V - nb) = n \cdot R \cdot T$$

avec a et b constante défini par l'expérience

21.9 Système Thermodynamique

Définition 89 Un système, thermodynamique ou non, est une surface fermé qui délimite un milieu intérieur d'un milieu extérieur. Il en existe trois type :

- I) Système ouvert : Échange de matière et d'énergie
- II) Système fermé : Échange d'énergie uniquement
- III) Système isolé : Aucun échange avec le milieu extérieur

21.10 Équilibre thermodynamique et évolution quasi statique

Définition 90 Un système est à l'équilibre thermodynamique si l'évolution est stationnaire, et le système est au repos macroscopique. Quand ce cas, les grandeurs moyenné telque T, p, u, \dots ont un sens, ce qui n'est pas le cas hors équilibre.

Une évolution est quasi statique est une évolution où l'on peut considérer qu'à chaque moment, le système est dans un état d'équilibre thermodynamique. Les grandeurs moyenné ont dans ce cas un sens, et dépendent du temps.

21.11 Grandeur intensive, extensive

Définition 91 Une grandeur est extensive si l'addition a un sens pour elle. Si ça n'est pas le cas, la grandeur est dit intensive

21.12 Grandeur et fonction d'état

Définition 92 Une grandeur est dites d'état si elle caractérise un système. Elles sont définies par l'expérience. Pour un gaz par exemple, on a : p, V, T .

Une fonction d'état est un lien entre les grandeurs d'état.

21.13 Coefficients thermoélastique

Définition 93 On défini trois coefficients thermoélastique :

- I) $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$, appelé coefficient de dilatation isobare
- II) $\chi_t = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$, appelé coefficient de compressibilité isotherme
- III) $\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$

Pour déterminer ces coefficients dans l'étude d'un type de gaz, il existe deux méthodes :

- I) On intègre la première et on dérive dans la seconde
- II) On utilise le fait que : $df(x) = f'(x).dx$ et on différencie l'expression

Chapitre 22

Premier principe de la thermodynamique

22.1 Bilan d'une grandeur extensive

Définition 94 Soit X une grandeur extensive dans un système fermé.

$$dX = X(t + dt) - X(t) = \delta X^r + \delta X^p$$

22.2 Grandeur conservatrice

Définition 95 On dit d'une grandeur extensive qu'elle est conservatrice si et seulement si $X^P = 0$. Une grandeur extensive conservative est constante si et seulement si le système est isolé.

22.3 Premier principe de la thermodynamique

Définition 96 Le premier principe est un principe d'évolution. Il existe une grandeur, appelé énergie totale, extensive et conservative, que l'on peut définir dans tout système fermé. On appelle énergie totale d'un système, toutes l'énergie présente, peu importe sa forme.

$$E_{tot} = E_{m,M} + u + E_{nucl} + E_{autre}$$

Dans le cadre du programme, on se limitera à :

$$E_{tot} = E_{m,M} + u$$

Dans un système fermé, on a :

$$\Delta E_{tot} = E_{tot}^r$$

22.4 Travail en thermodynamique

Définition 97 En thermodynamique, on appelle travail le travail des forces extérieurs non conservatives. En général, ce sont des forces pressantes. Considérons un système déformable. Notons p_{ext} la pression exercée par le milieu extérieur au voisinage de M. On obtient l'expression du travail :

$$\delta\omega = -p_{ext}(M).dV$$

On en déduit donc que, si le système se dilate, donc que $dV > 0$, on a $\delta\omega < 0$: Le milieu extérieur est résistant. Si le système se comprime, donc que $dV < 0$, on a $\delta\omega > 0$. Le milieu extérieur est moteur. Si $\delta\omega = 0$, alors l'évolution est isochore.

22.5 Transfert thermique

Le transfert thermique peut prendre trois formes : $\delta Q > 0$, $\delta Q < 0$, $\delta Q = 0$. Pour ce dernier, on dit que l'évolution est adiabatique. On peut retenir que la réaction est endothermique si $\delta Q > 0$ à l'aide de ceci :

$$\delta Q > 0 \Rightarrow D \Rightarrow \text{endothermique}$$

22.6 Forme explicite du premier principe

Appliquons le premier principe à un système fermé.

$$\Delta E_{tot} = \Delta E_{m,M} + \Delta u = \omega + Q$$

On détermine Q grâce à cette relation.

22.7 Différents types de travaux

On considère dans toute ces évolutions $\Delta E_{m,M} = 0$.

22.7.1 Évolution adiabatique

Pour qu'un système évolue de manière adiabatique, il faut soit que :

- I) Le système soit calorifugé. Il est donc isolé thermiquement.
- II) Le système évolue rapidement. En effet, tout problème de transfert thermique est un problème cinétique.

22.7.2 Évolution isochore

L'évolution isochore est caractérisée par un volume constant, donc par un travail nul, comme $dV = 0$. On obtient donc :

$$\Delta u = Q$$

22.7.3 Évolution isoénergétique

On a $\Delta u = 0$, donc $\Delta E_{tot} = 0 = \omega + Q$. On obtient donc :

$$Q = -\omega$$

22.8 Différentes formes de travaux

22.8.1 Évolution isochore

Dans le cas d'une évolution isochore, on a :

$$\omega = 0$$

22.8.2 Évolution monobar

La pression extérieure est une constante, on la note p_1 . On obtient l'expression du travail :

$$\omega = -p_1 \cdot (V_2 - V_1)$$

22.8.3 Évolution isobare

Une évolution monobar est une évolution monobar et quasi-statique. L'évolution quasi-statique de n moles de G.P. est caractérisé par une pression intérieur qui est égale à tout moment à la pression extérieur. On a donc : $p(t) = p_{ext}$. L'expression du travail est :

$$\omega = -p_1.(V_2 - V_1)$$

22.8.4 Évolution quasi-statique et isotherme

En partant de l'expression du travail, et comme le gaz vérifie l'équation d'état des gaz parfait, on obtient :

$$\omega = n.R.T_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

22.8.5 Évolution polytropique d'indice k

On dit d'une évolution qu'elle est polytropique d'indice k si :

$$p(t).V^k(t) = cte$$

Dans ce cas, le travail s'exprime :

$$\omega = \frac{1}{k-1} \cdot n.R.(T_2 - T_1)$$

22.9 Enthalpie

Définition 98 Soit H grandeur d'état appelé enthalpie. On la définit de la façon suivant :

$$H = u + p.V$$

Dans le cadre d'un évolution isobare, on obtient :

$$dH = \delta Q$$

Ce qui démontre son intérêt

22.10 Capacité calorifique à pression constante

Définition 99 On définit la capacité calorifique à pression constante de la façon suivant :

$$C_{p,mol} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

$$C_{v,mol} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V$$

22.11 Relation de Mayer

Dans le cadre de l'étude d'un G.P., on a :

$$C_v = \frac{du}{dT}$$

d'où

$$C_p = C_v + n.R$$

donc

$$C_{p,mol} - C_{v,mol} = R$$

Définition 100 On définit la grandeur $\gamma = \frac{C_{p,mol}}{C_{v,mol}} > 1$

Pour un G.P.M., on a $\gamma = 1,67$

Pour un G.P.D., on a $\gamma = 1,4$

On en déduit l'expression de $C_{v,mol}$ et de $C_{p,mol}$ en fonction de γ

$$C_{v,mol} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$C_{p,mol} = \frac{\gamma \cdot R}{\gamma - 1}$$

22.12 Phase condensés

Définition 101 Dans les phases consensée, on peut faire l'hypothèse que $u(T)$ et $H(T)$ On obtient donc :

$$C_p = C_v = C$$

Donc, de plus, on obtient :

$$du = dH = C.dT$$

22.13 Principe de la calorimétrie

La vocation de la calorimétrie est de déterminer Q.
Dans le cas d'une évolution isochore :

$$\Delta u = Q$$

Dans le cas d'une évolution isobare :

$$\Delta H = Q$$

22.14 Second principe de la thermodynamique

Le second principe est un principe d'évolution. Dans le 1^{er} principe, Q est l'inconnu par excellence. Dans le 2nd principe, c'est S^p

22.15 Réversibilité d'une évolution

Définition 102 Une évolution est réversible si on peut retourner la ligne du temps, si le passage de $E_i \rightarrow E_f$ et de $E_f \rightarrow E_i$ est possible.

Partout où il y a phénomène de transport, il y a irréversibilité. Il y a quatre phénomènes qui entraînent l'irréversibilité :

- I) Existence d'un gradiant de température. C'est la loi de Fourier.
- II) Existence d'un gradiant de concentration. C'est la loi de Fick
- III) Existence d'un gradiant de potentiel. $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$
- IV) Existence d'un gradiant de vitesse dans l'écoulement du système. Existence d'une viscosité.

Théorème 7 "Pour tous système fermé, on peut définir une fonction d'état, notée S, appelé entropie, qui sera une grandeur extensive, mais non conservative. Cette grandeur peut être créée ou non, mais jamais détruite."

22.16 Bilan entropique

$$\Delta S = S^r + S^p = \int dS$$

$$S^r = \int \frac{\delta Q}{T_f}$$

Si le système est caractérisé par T,V, on a :

$$dS = \frac{du}{T} + \frac{p.dV}{T}$$

Si il est caractérisé par p,T, on a :

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{V.dp}{T}$$

On détermine S^p à l'aide de la relation :

$$S^p = \Delta S - S^r$$

22.17 Expression de dS

Pour un G.P. l'expression de dS est :

$$dS = n.C_v \cdot \frac{dT}{T} + n.R \cdot \frac{dV}{V} = n.C_{p,mol} \cdot \frac{dT}{T} - n.R \cdot \frac{dp}{p}$$

Pour une phase condensé, on a :

$$dS = C \cdot \frac{dT}{T}$$

22.18 Évolution

Toute évolution adiabatique et quasi-statique, dont l'évolution isentropique, vérifie :

$$p(t) \cdot V^\gamma = cte$$

Il y a quatre types d'évolutions :

- I) Isochore ($V=cte$)
- II) Isotherme ($T= cte$)
- III) Isobare ($p=cte$)
- IV) Isentropique ($S =cte$)

Dans le cadre d'une évolution isentropique, la pente cette évolution dans un diagramme de Watt est γ fois celle d'une isotherme

Chapitre 23

Machines Thermiques

Définition 103 On dit d'un système qu'il subit une évolution cyclique si périodiquement, le système passe par un même état thermodynamique. Le bilan de toute fonctions d'état, est donc, sur un cycle, nul

23.1 Diagramme de Clapeyron

Toutes évolutions est décrites à partir de quatre modèles dans ce diagramme :

- I) Isobare
- II) Isochore
- III) Isotherme
- IV) Isentropique

Dans un diagramme de Clapeyron, un cycle est dit moteur si il décrit une évolution dans le sens direct

Dans ce diagramme, $\oint pdV$ est égale à l'aire du cycle. Il en découle que $|\omega|$ est l'aire du cycle dans ce diagramme.

Dans un cycle :

$$\Delta u = \omega + Q = 0$$

Il en découle que $Q > 0$

23.2 Machine thermique

Il existe deux type de sources thermiques :

- I) Les thermostat : La température de la source est une constante (Océan, lac ...)
- II) Les pseudo-sources : La température de la source peut évoluer sous l'influence de la machine thermique (Cuve ...)

23.3 Moteurs et machines frigorifiques

Soit Q_1 le transfert thermique de la source froide, en contact avec un thermostat de température T_1 et Q_2 le transfert thermique de la source chaude en contact avec un thermostat de température T_2

Du diagramme de Raveau, qui exprime $Q_2 = f(Q_1)$, on extrait deux fonctionnement intéressant :

- I) Le moteur ditherme. Celui-ci est caractérisé par :

- $Q_1 < 0$
- $Q_2 > 0$

→ $w < 0$

II) La machine frigorifique. Celui-ci est caractérisé par :

→ $Q_1 > 0$

→ $Q_2 < 0$

→ $w > 0$

Dans cette étude, sachant que le système est en contact avec un thermostat, on a les formules suivants :

$$\Delta u = w + Q_1 + Q_2$$

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + S^P$$

23.4 Coefficient d'efficacité

Définition 104 On appelle coefficient d'efficacité, notée η , le rapport de l'énergie utile de la machine thermique, compte tenu de sa vocation, sur l'énergie dépensé, en valeur absolue.

$$\eta = \frac{\text{Énergie utile}}{\text{Énergie dépensé}}$$

Par exemple, pour un moteur thermique ditherme, on a :

$$\eta = \left| \frac{w}{Q_2} \right|$$

23.5 Cycle de Beau de Roches

Définition 105 Ce cycle constitue le moteur à quatre temps. Les quatre temps sont :

→ Admission du mélange air-essence ($A_0 \rightarrow A$)

→ Compression ($A \rightarrow B$)

→ Au point B, en théorie, explosion du mélange, ce qui entraîne une surpression.

→ Déressement : $B \rightarrow C \rightarrow D$

→ Échappement : Évacuation des gaz brûlés : $D \rightarrow A \rightarrow A_0$

Ce cycle est constitué de deux isochores (BC et DA) et de deux isentropiques (AB et CD). La formule de S^r développé dans l'étude n'est plus valable ici, les sources thermique n'étant plus des thermostats, mais des pseudo sources

23.6 Autres cycles

Il existe d'autres cycles :

→ Cycle Diesel

→ Cycle de Brayton-Joules

→ Cycle de Stirling

23.7 Principe de fonctionnement d'une machine frigorifique

Une machine frigorifique est caractérisé par :

→ $Q_1 > 0$: On récupère de l'énergie depuis la source froide

→ $Q_2 < 0$: On restitue de l'énergie à la source chaude

→ $w > 0$: On doit consommer du travail, généralement de l'énergie électrique

23.7.1 Fonctionnement

Un fluide caloporteur (CFC,NH₃....) circulent dans la machine frigorifique. Sous l'action du compresseur, le fluide caloporteur passe de sa phase gazeuse à sa phase liquide. Ce faisant, il restitue de l'énergie à la source chaude. Sous l'action du détendeur, le fluide caloporteur passe de sa phase liquide à sa phase gazeuse. Ce faisant, il absorbe de l'énergie au contact de la source froide.

La machine frigorifique fonctionne donc à l'aide des transitions de phases, qui réclament des transferts thermiques.

Chapitre 24

Transition de phase des corps purs

24.1 Corps purs

Définition 106 On assimile un système à un corps pur quand on peut considérer que ce système est constitué d'entité chimique de même nature. Le corps pur est un modèle, dans lequel tous corps étranger est supposé infiniment dilué.

24.2 Corps simple

Définition 107 On appelle corps simple un corps composé d'une unique entité comme H_2 , O_2

24.3 Phase et transition de phase

24.3.1 Système diphasé

Définition 108 On dit qu'un système est diphasé si il contient un corps pur dans deux formes. (Eau liquide et gaz par exemple)

24.3.2 Transition

Un corps pur peut se présenter sous trois formes :

- Solide
- Liquide
- Gaz

Il existe six transitions de phase :

- Solide → Liquide : Fusion
- Liquide → Solide : Solidification
- Liquide → Gaz : Vaporisation
- Gaz → Liquide : Liquéfaction
- Gaz → Solide : Condensation
- Solide → Gaz : Sublimation

24.4 Variance

Définition 109 La variance d'un système est le nombre de grandeur intensive nécessaire et suffisante pour caractériser l'état du système

Si le système dépend de (p, V, T) , il est divariant. En effet, p et T sont des grandeurs intensives.
 Si il ne dépend que de T , le système est dit monovariant.
 Tous système diphasé est monovariant.

24.5 Étude du diagramme $p=f(t)$

Il existe deux points caractéristiques sur ce diagramme :

- T : Point triple du corps pur
- C : Point Critique

24.5.1 Pente des frontières de coexistence

La pente de la courbe est toujours croissante, c'est à dire qu'une augmentation de T impose une augmentation de pression dans un corps pur.

Il existe une exception. Pour l'eau, la pente de la frontière Solide → Liquide est négative

24.5.2 Point Triple : T

Définition 110 T , appelé point triple, correspond au domaine de coexistence des trois phases du corps pur considéré. Ce point est une propriété intrinsèque du corps. C'est le point triple de l'eau pur qui définit l'échelle de température. On le fixe à 273,15 K.

24.5.3 Point Critique : C

Définition 111 C est la limite de coexistence des phases liquide et gazeuse d'un corps pur. Au dessus de ce point, on passe de manière continue de l'état gazeuse à l'état liquide sans observer d'état diphasé. On observe ce qu'on appelle un état fluide.

24.6 Diagramme $p=f(v)$ de l'équilibre liquide-gaz. Isotherme d'Andrews

Dans cette étude, v est le volume massique. Au point L , il y a apparition de la première bulle de Gaz. Au point V , la dernière goutte d'eau se vaporise. Cette évolution s'effectue à pression constante. Cette pression, qui est notée $P_s(T)$ ou $\pi_s(T)$, est la pression de vapeur saturante. Cette pression augmente avec la température. Ceci est l'illustration que tout système diphasé est monovariant. Ceci est vrai pour $T < T_s$. Pour $T > T_s$, on passe de l'état liquide à l'état gazeux de manière continue, on dit qu'on est dans un état fluide.

24.6.1 Propriété du point critique

Opalescence Optique

Au point critique, pour $T=T_c$, χ_t tend vers ∞ . Ceci implique donc que la densité du milieu connaît de très forte fluctuation, or on montre que l'indice d'un milieu est lié à la densité de celui-ci. Dans ces conditions, le corps pur diffuse de manière particulière la lumière, on appelle ce phénomène opalescence optique.

Stockage des fluides

D'après l'équation d'état de l'eau liquide, on a montré qu'une faible augmentation de température, au corps d'une évolution isochore, entraîne une très forte augmentation de pression. Pour cette raison, on stocke les fluides dans un état diphasé. On les stocke dans un volume V supérieur au volume V_c du point critique, car une augmentation de température entraîne un augmentation de pression relativement faible.

24.7 Enthalpie et entropie de transition de phase

On définit au cours de cette section l'enthalpie et l'entropie au cours de certaine évolution. Cependant, ces deux grandeurs sont toutes deux des fonctions d'états, donc les expressions qui suivent sont vrai pour tout type d'évolution.

24.7.1 Enthalpie

Définition 112 *Dans le cadre d'une évolution isotherme, on a :*

$$\Delta H = ml = L = Q$$

Chaleur latente

Définition 113 *La variation d'enthalpie d'un corps pur au cours d'une transition de phase est appelé chaleur latente de transition de phase, notée L .*

De plus, nous savons que Q est positif pour une transition de phase d'un état ordonné vers un état moins ordonné. Ce qui implique que dans ce cas, L est positif. Dans la situation inverse, L est négatif, tout comme Q .

24.8 Entropie

Définition 114 *Dans le cadre d'une évolution isotherme, donc isobare, la variation d'entropie d'une masse m de corps pur est donnée par :*

$$\Delta S = \frac{ml}{T}$$

24.9 Complément de culture

24.9.1 Évaporation

Considérons de l'eau. Cette eau se vaporise, à une température T_0 , jusqu'à atteindre la pression de vapeur saturante, π_s , qui dépend de T . Dans l'atmosphère, l'eau se vaporise jusqu'à que la pression partielle de l'eau soit égale à π_s . On définit donc τ , le taux d'hygrométrie, qui est le rapport de la pression partielle de l'eau sur la pression de vapeur saturante :

$$\tau = \frac{p(H_2O)}{\pi_s(T_0)}$$

24.9.2 Ébullition

L'ébullition est l'apparition de bulle dans un liquide. La condition d'ébullition est :

$$\begin{cases} \pi_s(T_0) > p_0 + \rho gh & \text{Ébullition} \\ \pi_s(T_0) < p_1 + \rho gh & \text{Pas d'ébullition} \end{cases}$$

avec $p_1 > p_0$

24.9.3 Etat métastable

Très souvent, dans les transitions de phases, il existe un retard. On parle durant ce retard d'état métastable. Ce retard s'exprime dans de nombreux phénomènes comme :

- Trainée blanche après le passage des avions
- Chevaux du lac Ladoga

Septième partie

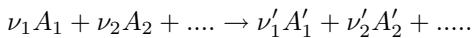
Thermochimie

Chapitre 25

Définitions

25.1 Avancement

Définition 115 Considérons la réaction suivant :



L'avancement à l'instant t est :

$$\xi(t) = \frac{n_i - n_i(t)}{\nu_i} = \frac{n'_i(t) - n'_i}{\nu'_i}$$

L'avancement ne dépend pas des entités chimique mise en jeux. C'est une grandeur caractéristique de la réaction.

25.2 Application du Ier principe

25.2.1 Résultat calorimétrique

→ Si un système subit une évolution isochore, nous savons que :

$$\Delta u = Q_v$$

→ Si un système subit une évolution mono ou isobare, alors :

$$\Delta H = Q_p$$

Ceci n'est vérifié, pour une évolution monobar, si $p_i = p_f$, ce qui est généralement le cas en chimie

25.3 Grandeur chimique de réaction

Soit X une grandeur caractéristique du système.

$$X(T, p, \dots, n_i, \dots)$$

avec $n_i(t)$ nombre de moles de réactif A_i ou de produit A'_i à l'instant t .

Définition 116 On appelle X_m de réaction l'expression $\Delta_r X$ défini par :

$$\Delta_r X = \sum_{i=1}^N \nu_i X_{m,i}$$

On l'appelle opérateur de Lewis.

En t et $t+dt$, à T et p fixé, on obtient :

$$dX(\dots n_i \dots) = \Delta_r X d\xi$$

On obtient aussi la relation :

$$\left(\frac{dX}{d\xi} \right)_{T,p} = \Delta_r X$$

25.4 Grandeur standard de réaction

25.4.1 Conditions standard

Définition 117 On considère qu'un système est dans les conditions standard si et seulement si :

$$p = p^0 = 1\text{bar}$$

Avec une température quelconque. En général, dans les grandeurs tabulées, $T = 298\text{ K}$.

25.4.2 Etat standard d'une entité chimique

Définition 118 On appelle état standard d'une entité chimique son état physique de référence dans les conditions standard. Ces états sont dépendants de la température.

25.4.3 Grandeur standard de réaction

Définition 119 On appelle grandeur standard de réaction une grandeur de réaction prise dans les conditions standard. On la note :

$$\Delta_r X^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i X_{m,i}^0$$

25.4.4 Transfert thermique associé à une réaction chimique

Dans le cas d'une évolution isochore, mono ou isotherme, on a :

$$Q_v = \Delta u^0(T) = \Delta_r u^0(T) \xi(T)$$

Dans le cas d'une évolution mono ou isobare, mono ou isotherme, on a :

$$Q_p = \Delta H^0(T) = \Delta_r H^0(T) \xi(T)$$

Chapitre 26

Enthalpie standard de formation

Définition 120 On appelle enthalpie standard de formation d'une entité chimique, notée $\Delta_f H^\circ$, l'enthalpie standard de réaction de la formation de l'entité, à partir des corps simples qui la compose, dans les conditions standard, à une température T donnée.

Il en découle donc que l'enthalpie standard de formation d'un corps simple est nul.

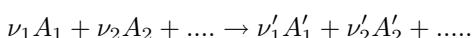
26.1 Loi de Hess

D'après la définition ci-dessus, on obtient la loi suivante, dit loi de Hess, pour la grandeur X :

$$\Delta_r X = \left(\sum_i \nu_i X_{i_f} (\text{produit}_i) - \sum_i \nu_i X_{i_f} (\text{reactif}_i) \right)$$

26.2 Influence de la température sur l'enthalpie standard de réaction

Considérons la réaction :



On obtient :

$$\Delta_r H^0(T_2) = \Delta_r H^0(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} (\Delta_r C_{p,mol}^0 dT)$$

26.3 Température de flamme

Considérons un système qui subit une évolution adiabatique, durant laquelle une réaction chimique dégage une transfert thermique Q .

Notons n_i la quantité de matière de l'entité i , à l'équilibre.

On obtient la relation suivante, qui permet de déterminer la température de flamme :

$$Q + \int_{T_{ini}}^{T_{fla}} \sum_i n_i C p_{mol,i}^0 dT = 0$$

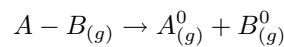
On obtient la température finale des entités présentes en fin de réaction, appelé température de flamme.

Chapitre 27

Énergie de liaison

Considérons une molécule A-B à l'état gazeuse.

Définition 121 L'énergie de la liaison A-B est l'énergie qu'il faut fournir à cette molécule pour rompre la liaison et produire les entités A et B à l'état gazeux.



On la note :

$$E_{\text{Liaison}}(A - B) = D(A - B)$$

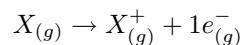
D'un point de vue thermodynamique :

$$D(A - B) = \Delta_r H^0(T)$$

Chapitre 28

Énergie d'ionisation et d'attachement électronique

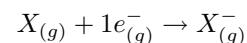
Définition 122 L'énergie de ionisation d'un atome X donnée est l'énergie qu'il faut fournir pour arracher un électron à l'atome $X_{(g)}$ au cours de la réaction :



L'énergie d'ionisation est l'enthalpie standard de cette réaction

Pour $T \rightarrow 0\text{K}$, ce modèle concorde avec celui de la mécanique quantique.

Définition 123 L'énergie d'attachement électronique, notée $E_{AE}(T)$, est l'opposé de $\Delta_r H^0$ de la réaction suivante :



$$E_{AE}(T) = -\Delta_r H^0(T)$$

Huitième partie

Chimie

Chapitre 29

La chimie des solutions

29.1 L'eau, molécule et solvant

29.1.1 Moment dipolaire

Définition 124 On définit le vecteur dipolaire \vec{P} par :

$$\vec{P} = q\vec{NP}$$

avec :

- N : Barycentre des charges négatives
- P : Barycentre des charges positives
- q : Charge associée au dipole

Son unité est le Debye, notée D .

$$1D = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} C.m$$

A température ambiante, nous avons : $p(H_2O) = 1,85D$

29.1.2 Force d'interaction

En partant de la loi de Coulomb :

$$F_{vide} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

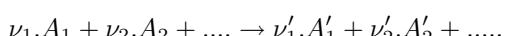
On obtient la force reliant deux charges dans l'eau :

$$F_{eau} = \frac{F_{vide}}{\varepsilon_R}$$

avec ε_R : Permitivité relative à l'eau, égale à 80 à température ambiante. Ceci nous renseigne sur le caractère polarisant de la molécule d'eau.

29.2 Réactions chimiques

Considérons la réaction suivant :



29.2.1 Avancement d'une réaction chimique

Définition 125 L'avancement à l'instant t est donné par :

$$\xi(t) = \frac{n_i - n_i(t)}{\nu_i} = \frac{n'_i(t) - n'_i}{\nu'_i}$$

L'avancement ne dépend pas des entités chimiques mise en jeu. C'est une grandeur caractéristique de la réaction.

29.2.2 Équilibre chimique

Définition 126 On considère que la réaction ci-dessus est à l'équilibre chimique quand la vitesse de réaction, définie par :

$$v = \frac{1}{\nu'_1} \cdot \frac{d[A'_i(t)]}{dt} = -\frac{1}{\nu_1} \cdot \frac{d[A_i(t)]}{dt}$$

est nulle.

29.2.3 Relation de Guldberg et Waages

Définition 127 On appelle quotient de cette réaction, noté $Q(t)$, le produit de l'activité des produits, affecté de leurs coefficients stochiométriques, sur le produit des réactifs affecté de leurs coefficients stochiométriques :

$$Q(t) = \frac{a(A'_1)^{\nu'_1} \cdot a(A'_2)^{\nu'_2} \dots}{a(A_1)^{\nu_1} \cdot a(A_2)^{\nu_2} \dots}$$

On définit l'activité des différentes entités chimiques de la façon suivante :

→ Si X est le solvant (eau) :

$$a(X) = 1$$

→ Si X est un soluté non soluble en solution, ou un liquide non soluble :

$$a(X) = 1$$

→ Si X est un soluté soluble en solution, alors, avec C_0 : Concentration de référence, souvent 1 mol.l⁻¹.

$$a(X) = \frac{[X(t)]}{C_0}$$

→ Si X est un gaz, alors, avec p_0 : Pression de référence, souvent 1 bar.

$$a(X) = \frac{p(X(t))}{p_0}$$

L'activité est donc une grandeur sans dimensions.

Cette relation permet d'établir qu'à l'équilibre chimique, le quotient de la réaction est une constante qui ne dépend que de la température. Cette constante est notée K(T) :

$$K(T) = Q(t_e) = cte$$

29.3 Réactions acido-basique

Définition 128 Selon la définition de Bronsted, un acide est une entité susceptible de céder un ou plusieurs protons

29.3.1 Constante d'acidité

Considérons le couple acido-basique AH/A^- . Ce couple réagit avec l'eau selon la réaction :



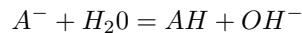
Par application de la relation de Guldberg et Waages, on définit la constante de réaction :

$$K(T) = \frac{[A^-] \cdot [H_3O^+]}{[AH]} = cte$$

Cette constante de réaction est appelée constante d'acidité, notée $K_A(T)$.

29.3.2 Constante de basicité

En utilisant le caractère amphotère (ampholyte)¹ de l'eau, on définit la constante de basicité comme la constante de la réaction suivante :

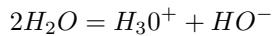


On note $K_B(T)$:

$$K_B(T) = \frac{[AH] \cdot [HO^-]}{[A^-]}$$

29.3.3 Produit ionique de l'eau

Conscient que l'eau est un composé amphotère, on définit le produit ionique de l'eau comme la constante de réaction de la réaction suivante :



On note $K_e(T)$

$$K_e(T) = [H_3O^+] \cdot [HO^-]$$

29.3.4 Relations entre K_A et K_B - pK_A et pK_B

On obtient la relation suivante :

$$K_A = \frac{K_e}{K_B}$$

On note $pX = -\log(X)$, avec X une grandeur sans dimension. On obtient une seconde relation :

$$pK_A + pK_B = pK_e$$

29.3.5 Diagramme de prédominance

Pour tracer un diagramme de prédominance, on isole $[H_3O^+]$ de la constante d'acidité K_A . Puis on passe au $pH = p([H_3O^+])$. On obtient une formule de la forme :

$$pH = pK_A + \log \left(\frac{[A^-]}{[AH]} \right)$$

On obtient donc la frontière entre les deux domaines de prédominance : $pH = pK_A$. On détermine les pH de prédominance à partir de cette formule.

On dit qu'une entité est majoritaire si elle est au moins 10 fois plus concentrée que son entité conjuguée.

¹Entité chimique qui peut être, selon les cas, une base ou un acide

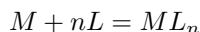
29.3.6 Force d'un acide ou d'une base - Nivellement par l'eau

Plus le pK_A d'un couple est faible, plus l'acide est fort. Respectivement, plus le pK_A d'un couple est élevé, plus la base est forte.

Les acides les plus forts ne sont pas observable dans l'eau, on dit que ces acides sont nivellé par l'eau.

29.4 Réactions de complexation

On peut modéliser les réactions de complexation par une réaction du type :



avec :

- M : Cation métallique (ex : Fe^{3+})
- L : Ligand (ex : Molécule avec un atome possèdant un doublet non liant, un anion)
- ML_n : L'ion complexe

29.4.1 Constante de formation et de dissociation d'un ion complexe

On appelle constante de formation d'un ion complexe, notée K_F , la constante de la réaction de complexation donnée par la relation de Guldberg et Waages.

Respectivement, la constante de dissociation d'un ion complexe, notée K_D , est la constante de la réaction de dissociation donnée par la relation de Guldberg et Waages :

$$K_D = \frac{1}{K_F}$$

Quand on procède à la création d'un ion complexe en de multiples étapes, on remarque que la constante de réaction finale est égale au produit des constantes des réactions intermédiaires.

29.4.2 Diagramme de prédominance

Pour tracer un diagramme de prédominance, on isole $[HO^-]$ de la constante de formation K_F . Puis on passe au $pOH = p([OH^-])$. On obtient une formule de la forme :

$$pOH = pK_D + \log\left(\frac{[M]}{[ML_n]}\right)$$

29.5 Réactions de précipitation

Définition 129 Les réactions de précipitation sont des cas particuliers de réactions de complexation dans lesquels le produit de la réaction est électriquement neutre, c'est donc un précipité.

La réaction de précipitation est caractérisée par une constante de dissociation appelé produit de solubilité du soluté, notée K_s , à l'équilibre chimique (donc quand la solution est saturée).

Par application de la relation de Guldberg et Waages :

$$K_s = [M].[L]^n$$

29.5.1 Diagramme de prédominance

On obtient une équation de la forme :

$$p(L) = pK_s + \log(M)$$

On travaille à partir de cette équation.

29.5.2 Solubilité

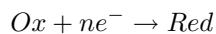
Définition 130 La solubilité d'un soluté, notée s , correspond au nombres de moles de soluté que l'on peut dissoudre par litre de solution.

Son unité est mol.l^{-1}

Chapitre 30

Réaction d'oxydo-réduction

Définition 131 Une réaction d'oxydo-réduction est une réaction durant laquelle il y a échange d'électrons.
L'équation type de réaction est :



30.1 Nombres d'oxydation

Les nombres d'oxydation permettent d'équilibrer une équation. Ils sont toujours écrit à l'aide de chiffre romaine. Ils sont régit par les règles suivantes :

- Dans une entité monoatomique, le nombre d'oxydation est la charge de l'entitée.
- Dans une entité polyatomique, la somme des nombres d'oxydation des différents éléments est égale à la charge de l'entitée.
- En général : $n.o(H) = I$; $n.o(O) = -II$

Les nombres d'oxydations permettent de savoir si une entité X est oxydée ou réduite, et de connaître le nombre d'électrons échangés :

- Si $\Delta n.o(X) > 0$: Il y a oxydation de X
- Si $\Delta n.o(X) < 0$: Il y a réduction de X
- $|\Delta n.o(X)|$ = Nombres d'électrons échangés

30.1.1 Plan d'équilibrage d'une réaction avec les nombres d'oxydation

- On calcule les nombres d'oxydations des différentes entités mise en jeu.
- On équilibre les $\Delta n.o$ sachant qu'il faut que :

$$\sum_i \nu_i \Delta n.o(X_i) = 0$$

- On vérifie la conservation des charges, si besoin on ajoute des H^+ en milieu acide, des OH^- en milieu basique
- On vérifie la conservation de la matière, si besoin on ajoute des H_2O .

→ On vérifie si la réaction est bien équilibrée.

30.2 Formule de Nernst

30.2.1 Vocabulaire

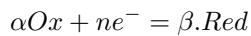
Définition 132 Les notions d'anode et de cathode sont définis par la polarité de la pile. Nous retiendrons que la réduction s'effectue à la cathode.

30.2.2 Potentiel d'électrode

Définition 133 On appelle potentiel d'électrode le potentiel d'une électrode de mesure par rapport à l'électrode de référence, à savoir l'électrode standard à hydrogène (E.S.H)

30.2.3 Enoncé

Définition 134 Considérons le couple oxydant-réducteur dont la demi-équation électronique est :



La formule de Nernst établie que le potentiel d'électrode relatif à ce couple a pour expression :

$$E(Ox/Red) = E^0(Ox/Red) + \frac{R.T}{n.F} \cdot \ln \left(\frac{a^\alpha(g(Ox))}{a^\beta(g(Red))} \right)$$

On obtient l'expression usuelle, à la température de 25°C :

$$E(Ox/Red) = E^0(Ox/Red) + \frac{0.06}{n} \cdot \log \left(\frac{a^\alpha(g(Ox))}{a^\beta(g(Red))} \right)$$

avec $g(Ox)$ le groupe oxydant et $g(Red)$ le groupe réducteur

A partir de cette expression, on peut établir le diagramme de prédominance.

30.3 Réaction d'oxydo-réduction à l'équilibre chimique

Condérons la réaction :



A l'équilibre, nous avons :

$$E(Ox_1/Red_1) = E(Ox_2/Red_2)$$

A partir de la relation de Guldberg et Waages, on obtient l'expression de la constante de réaction :

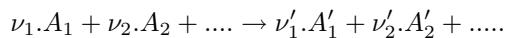
$$K(t) = 10^{\frac{n}{0.06}(E^0(Ox) - E^0(Red))}$$

Chapitre 31

Cinétique Chimique

31.1 Avancement - Vitesse d'une réaction chimique

Considérons la réaction suivant :



31.1.1 Avancement d'une réaction chimique

Définition 135 L'avancement à l'instant t est donnée par :

$$\xi(t) = \frac{n_i - n_i(t)}{\nu_i} = \frac{n'_i(t) - n'_i}{\nu'_i}$$

On obtient donc les relations, en utilisant les concentrations au lieu des quantités de matières :

$$[A_i(t)] = [A_i(0)] - \nu_i.x(t)$$

$$[A'_i(t)] = [A'_i(0)] + \nu'_i.x(t)$$

31.1.2 Vitesse d'une réaction chimique

Définition 136 La vitesse de réaction est définie par :

$$v = \frac{1}{\nu'_1} \cdot \frac{d[A'_i(t)]}{dt} = -\frac{1}{\nu_1} \cdot \frac{d[A_i(t)]}{dt}$$

D'où, d'après les relations précédents :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

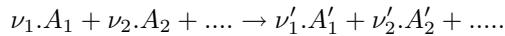
Facteur cinétique

Il existe certains facteurs pouvant influer sur la vitesse d'une réaction :

- La température
- La concentration
- L'influence éventuelle d'un catalyseur
- La pression extérieur, dans le cas d'une réaction entraînant un dégagement gazeux
- L'éclairage de la solution
- La surface de contact en phase hétérogène (ex : corrosion d'un bateau)

Influence de la concentration

Définition 137 Considérons la réaction suivant :



On dit que cette réaction admet un ordre si elle peut s'exprimer sous la forme, si la température de la solution est constante :

$$v = k[A_1(t)]^{\alpha_1} \cdot k[A_2(t)]^{\alpha_2} \dots$$

avec : α_i : coefficient déterminé par l'expérience. On détermine l'ordre global de cette réaction par :

$$\alpha = \sum_i \alpha_i$$

Influence de la température

En faisant l'hypothèse que la réaction précédente admet un ordre, on montre que la constante k dépend de la température. On obtient la loi d'Arrhenius :

$$k = A e^{-\frac{E_{m,A}}{RT}}$$

avec A le facteur d'Arrhenius, défini par l'expérience et $E_{m,A}$ l'énergie d'activation molaire.

31.2 Étude de cinétique

31.2.1 Méthode de séparation d'Ostwald

Cette méthode consiste à augmenter les concentrations de tous les réactifs, sauf un, pour pouvoir étudier celui. Le rapport des concentrations doit être de 100 au moins. On néglige donc l'influence de tous les autres réactifs, on obtient donc une équation à un seul réactif, mais on conserve les n produits.

31.2.2 Reconnaissance des ordres par rapport à $[A(t)]$

Le but est d'obtenir comme courbe une fonction affine, pour pouvoir déterminer k facilement. Pour obtenir la fonction affine, on utilise la définition de la vitesse :

$$v = \frac{1}{\nu'_1} \cdot \frac{d[A'_1(t)]}{dt} = -\frac{1}{\nu_1} \cdot \frac{d[A_1(t)]}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$$

Et on fait le lien avec l'expression en fonction de k et des concentrations.

Soit a la concentration initiale.

→ Ordre 0 : On obtient une droite, de pente $-vk$ avec :

$$y = [A(t)]$$

→ Ordre 1 : On obtient une droite, de pente $-vk$ avec :

$$y = \ln \left(\frac{a}{[A(t)]} \right)$$

→ Ordre 2 : On obtient une droite, de pente vk avec :

$$y = \left(\frac{1}{[A(t)]} - \frac{1}{a} \right)$$

31.2.3 Réaction composée

Dans l'étude des réactions composée, on procède de la même façon que précédemment. En considérant soit, qu'il s'effectue deux réactions opposées en parallèle, soit qu'on est dans le cas de réactions successives.

Chapitre 32

Mécanisme réactionnels

32.1 Processus élémentaire

Définition 138 Un processus élémentaire décrit la réaction entre quelques entités chimique, à l'échelle atomique ou moléculaire. Le nombre de réactifs mis en jeu dans un processus élémentaire constitue sa molécularité. Le nombre d'atomes ou de molécules mis en jeu dans un processus élémentaire est toujours entier.

32.2 Loi de Van't Hoff

Loi 3 L'ordre partiel α_i du réactif A_i dans un processus élémentaire s'identifie à son coefficient stochiométrique

32.3 Mécanisme réactionnel

Définition 139 On appelle mécanisme réactionnel l'ensemble des processus élémentaires nécessaire pour décrire la cinétique d'une réaction complexe. Les entités chimique présentes dans le mécanisme réactionnel sont des intermédiaires réactionnels, qui peuvent ou non apparaître dans l'équation bilan.

32.4 Principe de Bodenstein

Définition 140 Soit X un intermédiaire réactionnel. Si X n'apparaît pas dans l'équation bilan, on peut faire l'hypothèse que :

$$\frac{d[X(t)]}{dt} = 0$$

32.5 Hypothèse de l'étape cinétiquement limitante

Définition 141 Si une constante de vitesse est très faible devant toutes les autres, c'est cette constante qui conditionne la vitesse globale de la réaction.

32.6 Réaction en chaîne

Une réaction en chaîne décrit trois étapes :

- 1- L'initiation : $A \rightarrow B$
- 2- La boucle : $B \rightarrow C + D ; C \rightarrow B$. Elle peut se réaliser un très grand nombre de fois.

3- La rupture : $B \rightarrow E$

Bien souvent, dans les réactions en chaîne, on peut appliquer l'hypothèse de l'étape cinétiquement limitant, conscient que la boucle s'effectue un très grands nombres de fois devant les autres phases.

Neuvième partie

Architecture de la matière

Chapitre 33

Sources et Évolution de la mécanique quantique

33.1 Loi de Planck

Définition 142 Une onde de fréquence ν peut être représentée comme une paquet de photons. Chaque photons possède une énergie E définie par :

$$E = h\nu$$

Avec h , la constante de Planck :

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

On introduit aussi \hbar , défini par :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Or comme : $\lambda = CT$, on obtient :

$$E = \frac{hC}{\lambda}$$

Cette énergie est exprimé en Joules

33.2 Formule de Ritz

Soit $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ le nombre d'onde. La formule de Ritz est :

$$\sigma = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Avec :

$$\begin{cases} R_H = 10979708 \text{ m}^{-1} \\ n : \text{Le nombre principale de la série (ex : 2 pour l'hydrogène)} \\ m : \text{Entier supérieur à } n, \text{ que l'on fait varier pour trouver la série : } m=n+1, m=n+2, \dots \end{cases}$$

33.3 Énergie de l'atome d'hydrogène

Définition 143 En utilisant comme unité l'électron volt défini par : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, on obtient l'énergie de l'atome dans un niveau n :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$$

n est appelé *nombre quantique principal*.

33.4 Énergie d'un ion hydrogénoid

Définition 144 Un ion hydrogénoid est un édifice monoatomique monoélectrique, donc qui ne comporte plus qu'un seul électron.

On définit les relations suivantes pour ce type d'ion :

$$\begin{cases} E_n = -13.6 \left(\frac{Z}{n} \right)^2 \\ r_n = n^2 \left(\frac{a_0}{Z} \right) \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} Z = \text{Nombre de charge du noyau} \\ a_0 = \text{Rayon de Bohr} \end{cases}$$

33.5 Longueur d'onde de Broglie

Définition 145 On définit la longueur d'onde de Broglie pour tous corpuscules en mouvement par :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$$

Avec p la quantité de mouvement du corpuscule.

Chapitre 34

Fonctions d'onde, nombres quantiques

34.1 Fonction d'onde

Définition 146 Une fonction d'onde est défini comme une solution de l'équation de Schrodinger. Cette variable est une variable d'espace, elle oblige donc l'existence de trois paramètres, appelé nombres quantiques

Pour une valeur donnée de n , il existe n^2 fonctions d'ondes. On dit que le niveau d'énergie est dégénéré de degrés n^2

34.2 Nombres quantiques

34.2.1 Nombre quantique principal

Ce nombre quantique quantifie l'énergie, il est noté n . Il est utilisé dans la quantification de l'énergie d'un ion hydrogénoid.

34.2.2 Nombre quantique orbital

Ce nombre quantique quantifie le moment cinétique, il est noté l . En mécanique quantique, le module du moment cinétique est :

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2$$

Il ne peut prendre que certaines valeurs :

$$0 \leq l \leq n - 1$$

34.2.3 Nombre quantique magnétique

Ce nombre quantique, noté m_l , quantifie la projection d'un moment cinétique sur un champ magnétique \vec{B} extérieur. Soit L_z la projection du moment cinétique sur l'axe z'z :

$$L_z = m_l \hbar$$

Les valeurs que peu prendre m_l sont :

$$-l \leq m_l \leq l$$

34.2.4 Spin

Ce nombre quantique, noté m_s , quantifie le moment cinétique intrinsèque de l'électron. Il ne peut prendre comme valeur que $\pm \frac{1}{2}$

La quadriplet suivant (n, l, m_l, m_s) défini un état quantique. À une valeur de n correspond $2n^2$ états quantitique

34.3 Orbitale atomique

On associe aux différentes valeurs du nombre quantique l une lettre :

1	0	1	2	3	4
Lettre	s	p	d	f	g

On obtient l'écriture suivante :

$$\psi_{(n,l,ml)} = n.Lettre_{ml}$$

Ex :

$$\psi_{(3,1,-1)} = 3p_{-1}$$

Chapitre 35

Atomes polyélectroniques

Un système peut être caractérisé dans la mécanique quantique par le quadruplet (n, l, m_l, m_s)

35.1 Règle de Klechkowski

Ce règle défini la façon de remplir les orbitales orbitale atomique.

35.2 Configuration électronique d'un atome

35.2.1 Principe de stabilité

Énoncé 2 Connaissant l'évolution des niveaux énergétiques des différentes O.A. d'un atome à N électrons, le remplissage des O.A. se fait dans le sens des énergies croissantes.

35.2.2 Principe d'exclusion de Pauli

Énoncé 3 Dans un atome polyélectronique, deux électrons ne peuvent être dans le même état quantique

Ceci implique que sur chaque O.A, on peut mettre au maximum deux électrons antiparallèle

35.2.3 Principe de Hund

Énoncé 4 Quand on place des électrons dans des O.A. dégénérées, les électrons occupent un maximum d'O.A. avec des spins parallèles. C'est seulement quand tout les O.A. sont occupé par des spins parallèle que l'on rajoute des électrons en spin antiparallèle.

35.2.4 Configuration électronique

Considerons l'atome d'oxygène ($Z = 8$) dans son état fondamental, on peut établir le diagramme énergétique suivant : On écrit cette configuration électronique sous la forme :

$$O(Z = 8) : 1s^2 2s^2 2p^4$$

On définit deux états :

→ Paramagnétique : Tous les électrons ne sont pas appareillés. Le système peut donc facilement capter ou céder des électrons

→ Diamagnétique : Tous les électrons sont appareillés. Le système est "solide"

La dernière règle est que quand on remplit une couche dégénérée, on classe toujours, dans la configuration électronique, les éléments par valeur de n .

35.3 Ionisation d'un atome

Définition 147 *On appelle énergie de première ionisation E_{i1} l'énergie minimale à fournir pour arracher un électron à un atome gazeux dans son état fondamental. Cette énergie est positive, c'est à dire qu'un atome a besoin d'énergie pour perdre un électron, il ne peut pas en céder spontanément.*

Chapitre 36

Classification périodique des éléments

36.1 Classification périodique de Mendeleïev

Définition 148 Les électrons de valence sont les électrons dont le nombre quantique principale n est le plus élevé, ainsi que ceux qui appartiennent à des sous-couches en cours de remplissage.

Les éléments sont classés, dans le tableau de Mendeleïev, par ordre croissant de numéro atomique, et d'après leurs propriétés physicochimiques. Ces propriétés sont due aux électrons de valence. Les éléments possédant les mêmes caractéristiques sont classés sur la même colonne.

36.2 Construction du tableau périodique

36.2.1 Les différents blocs

Le bloc s

Le bloc s est constitué de la première et de la deuxième colonne du tableau périodique. Il rassemble les éléments possédant une configuration électronique de valence du type :

$$n.s^x$$

Le bloc p

Ce bloc est constitué des 6 dernières colonnes, numérotées de 13 à 18. Il rassemble les éléments possédant une configuration de valence du type :

$$n.s^2.n.p^x$$

Le bloc d

Ce bloc est constitué des 10 dernières colonnes centrales, numérotées de 3 à 12. Il rassemble les éléments possédant une configuration de valence du type :

$$(n-1).d^x.ns^2$$

Cependant, ce bloc admet quelques exceptions, qui s'expliquent du fait de la proximité entre les différents niveaux d'énergie ns et $(n-1).d$.

Le bloc f

Ce bloc est le bloc séparé des autres. Il correspond aux éléments possédant des électrons de valence dans les orbitales f.

Propriété

On remarque, pour les blocs s et p, que le nombre principale n des électrons de valance correspond au numéro de la ligne.

La 18 ème ligne rassemble les gaz rares. Ils sont utilisés dans l'expression des configurations électronique, sachant que ceci possède des configurations électronique stable.

36.3 Des propriétés

36.3.1 Grandeur énergétique

Ionisation

Nous avons défini précédemment l'énergie de première ionisation. Elle est positive. On montre, que d'une manière générale, l'énergie d'ionisation augmente de la gauche vers la droite sur une même ligne.

Affinité électronique

Définition 149 On appelle affinité électronique, noté E_{ae} , l'énergie libérée par la fixation d'un électron par un atome gazeux. C'est donc la réaction opposé à la réaction de ionisation.

Par convention, nous avons :

- Si la réaction est exothermique, alors E_{ac} est positif
- Si la réaction est endothermique, alors E_{ac} est négatif.

On montre aussi que l'affinité électronique augmente de la gauche vers la droite dans le tableau.

36.4 Électronégativité

L'électronégativité, noté χ , est une grandeur relative, adimensionnée, qui détermine l'aptitude d'un atome à attirer les électrons d'une liaison sans influence extérieur. Il existe plusieurs définition pour cette électronégativité. Cependant, quelque soit la définition, l'électronégativité augmente de gauche à droite.

36.4.1 Électronégativité de Pauling

Cette échelle d'électronégativité repose sur la mesure de l'énergie de dissociation d'une molécule A-B. Considérons la réaction de synthèse de la molécule A-B à partir de A_2 et B_2 . Notons Q le transfert thermique de cette réaction. Pauling nous dit que :

$$(\chi(A) - \chi(B))^2 = p.|Q|$$

En fixant l'électronégativité de l'hydrogène, on peut déterminer p, et donc déterminer n'importe quelle électronégativité.

36.4.2 Électronégativité de Mulliken

L'électronégativité de l'atome X est définie par la moyenne de l'énergie d'ionisation et de l'affinité électronique de l'atome X, multiplié par un coefficient k, qui dépend du système énergétique choisi :

$$\chi(X) = k \cdot \frac{E_{i1}(X) + E_{ae}(X)}{2}$$

36.4.3 Électronégativité de Allred-Rochow

Cette définition repose sur la mesure de la force électrostatique exercée par tous les atomes d'une molécule sur le doublet d'une liaison.

Chapitre 37

Structures moléculaires

37.1 Théorie de Lewis

37.1.1 Représentation de Lewis

La réactivité des atomes est régie par les électrons de valence. La représentation de Lewis permet de mettre ce fait en avant. Elle est défini de la façon suivante :

- Le noyau et les électrons de coeur (le complément des électrons de valence) sont représenté par le symbole de l'élément.
- Un électron célibataire (dans les électrons de valence) est représenté par un point
- Un doublet d'électron (dans les électrons de valence) est représenté par un tiret
- La charge d'un composé ionique est entourée par un cercle.

À l'aide de cette représentation, on montre par exemple que tous les éléments d'une même colonne ont une représentation de Lewis identique.

37.1.2 Liaisons covalentes

Les atomes se lient entre eux pour se stabiliser. Pour se faire, ils ne sont pas obligé de s'échanger des électrons, ils peuvent se les partager. Dans ce cas, les atomes s'associent pour créer une molécules à liaisons covalentes. Ils y a plusieurs types de liaisons covalentes :

- Liaison covalente simple : Chaque atomes apporte un électron célibataire.
- Liaison covalente de coordination (ou dative) : Les deux électrons de la liaison sont apportés par un seul atomes

Les deux électrons constituent un doublet liant. Les atomes peuvent partager un ou plusieurs doublet, pour se stabiliser (tendre vers la configuration d'un gaz rare). Ceci dépend de leurs nombre d'électrons de valence.

37.1.3 Valence d'un atome

Définition 150 *On défini la valence d'un atome (à ne pas confondre avec les électrons de valence) par le nombre de liaisons que peut réaliser un atome dans un édifice polyatomique.*

37.1.4 Modèle de Lewis

Éléments chimiques de la première ligne

La première ligne est composé de deux entités : L'hydrogène et l'hélium. L'hydrogène est monovalent, c'est à dire qu'il ne possède d'un électron de valence, et qu'il ne peut donc réaliser d'une liaison covalente.

Éléments chimiques de la deuxième ligne

Pour cette deuxième ligne, on défini la règle de l'octet. Dans un édifice polyatomique, les éléments chimiques de la deuxième ligne s'entourent au maximum d'un octet, c'est à dire de huit électrons. L'octet est constitué de doublets liants ou non liants.

Charge formelle

Définition 151 *Lors de la réalisation d'une liaison covalente de coordination, l'atome possédant le doublet acquiert une charge formelle positive, formelle, car on postule l'égale répartition du doublet. On obtient Q_f , la charge formelle, en comparant le nombre d'électron de valence de l'atome isolé, noté n_v , et celui de l'atome dans l'édifice, noté n_e :*

$$Q_f = (n_v - n_e).e$$

Avec e la charge élémentaire.

Éléments chimiques de la troisième ligne

Pour les éléments de cette troisième ligne, on défini la règle de la valence maximale, car les éléments de cette ligne ne respecte pas la règle de l'octet.

Définition 152 *La valence maximale d'un atome est égale au nombre d'électrons de valence. Si un atome possède x électrons de valence, il peut s'entourer de $2x$ électrons dans un édifice polyatomique.*

Pour les autres lignes

Dans le cas des autres lignes, on défini la règle des 18 électrons. Dans un édifice polyatomique, les entités chimiques s'entourent au maximum de 18 électrons.

37.2 Théorie de la mésomérie

On montre que la théorie de Lewis à une limitation. En effet, pour le même édifice polyatomique, on peut obtenir plusieurs représentation de Lewis. Il se pose donc la question de savoir laquel est prédominante.

37.2.1 Présentation

Quand un composé est décrit pas plusieurs représentation de Lewis, la théorie de la mésométrie suppose que la configuration effective de l'édifice résulte d'une moyenne des formules limites. Ceci revient à délocaliser des électrons. C'est à dire que si un édifice polyatomique (par exemple deux atomes) possède par exemple deux représentations de Lewis, qui sont distinct d'un électron, on suppose que l'électron différent est délocalisé, c'est à dire qu'il est réparti sur les deux atomes en même temps.

Dixième partie

Annexe

Annexe A

Outils Mathématique

A.1 Produit scalaire

Soit $\vec{X}(x_1, y_1, z_1), \vec{Y}(x_2, y_2, z_2)$.
Le produit scalaire est défini par :

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = \|\vec{X}\| \cdot \|\vec{Y}\| \cdot \cos(\theta)$$

A.2 Produit vectorielle

$$\begin{aligned} \vec{X} \wedge \vec{Y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix} \\ \vec{X} \wedge \vec{Y} &= \vec{W} \end{aligned}$$

avec \vec{W} orthogonale à \vec{X} et \vec{Y}

A.3 Dérivation d'un vecteur

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{W} \wedge \vec{X}$$

avec \vec{W} le vecteur rotation instantanée.

Appliqué à \vec{u}_θ et \vec{u}_r , on obtient :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

A.4 Coordonnée

A.4.1 Coordonnée polaire

$$d\vec{l} = dr.\vec{u}_r + rd\theta.\vec{u}_\theta$$

A.4.2 Coordonnée cylindrique

$$\vec{dl} = dr.\vec{u}_r + rd\theta.\vec{u}_\theta + dz.\vec{k}$$

A.4.3 Coordonnée sphérique

$$\vec{dl} = dr.\vec{u}_r + rd\theta.\vec{u}_\theta + rsin(\theta)d\varphi.\vec{u}_\varphi$$

A.5 Equations différentielles

$$\rightarrow x' + \alpha x = 0$$

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}$$

$$\rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = C.\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\rightarrow x'' - \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$

$$\rightarrow x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = 0$$

→ Si $\Delta > 0$:

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

→ Si $\Delta < 0$:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$$

→ Si $\Delta = 0$:

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}(A + Bt)$$

Annexe **B**

Equation différentielle croisée

B.1 Exemple

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \dot{z} \cdot \omega \\ \ddot{z} = \frac{e \cdot E}{m} - \omega \cdot \dot{y} \end{cases}$$

Posons : $\underline{u} = y + i.z$. On obtient donc, en faisant $\ddot{y} + i.\ddot{z}$:

$$\ddot{y} + i.\ddot{z} = \omega(\dot{z} - i.\dot{y}) + i \cdot \frac{e \cdot E}{m}$$

D'où :

$$\ddot{\underline{u}} = -i\omega \cdot \dot{\underline{u}} + i \cdot \frac{e \cdot E}{m}$$

A partir de cette équation, on la résoud comme une équation différentielle habituelle. Puis par identification de la partie réelle et de la partie imaginaire, on obtient les expressions de \ddot{y} et \ddot{z}

Notation Complexe

C.1 Utilité

Avec les notations complexes, on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\underline{X}) = i\omega \underline{X}$$

avec \underline{X} grandeur complexe et $i^2 = -1$

C.2 Conversion

Soit X la grandeur défini par :

$$X = X_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

En notation complexe, on obtient :

$$\underline{X} = X_{max} e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\underline{X} = X_{max} e^{i\omega t}$$

avec $\underline{X}_{max} = X_{max} e^{i\varphi}$

Index

A

Angle limite, 14
Aplanétisme, 15
Axe optique, 14

B

Base de Frenet, 23
Accélération, 23
Vitesse, 23

C

Cercle osculateur, 23
Conditions de Gauss, 15
Constante des aires, 23

D

Déviation, 14
Dioptre, 13
Distance focale, 16

G

Grandissement, 15

I

Images - Optique, 14
Réels, 14
Virtuelles, 14

L

Lentille
Relation de conjugaison, 16
Lentille convergente, 16
Lentille divergente, 16
Lentille Mince, 16

M

Milieu dispersif, 13
Milieu homogène - Optique, 13
Milieu inhomogène - Optique, 14
Milieu réfringent, 13
Miroir sphérique, 15
Relation de conjugaison, 15

O

Objets - Optique

Réelles, 14
Virtuels, 14

P

Plan d'indidence, 13
Plan focal, 15
Point matériel, 21
Accélération, 22
Accélération centrale, 23
Centre de force, 23
Déplacement élémentaire, 21
Vitesse, 22
Postulats de Newton, 21
Principe de Fermat, 14

R

Référentiel, 21
Réflexion totale, 14
Relation de Snell-Descartes, 13

S

Stigmatisme, 15

V

Vergence, 16