

Les vecteurs sont désignés par des symboles gras :  $\vec{X}$ ,  $X$  désignant la norme de  $\vec{X}$ . Dans tous les exercices, le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_T$ , dans lequel règne le champ de pesanteur  $\vec{g}$  sera, sauf mention explicite, considéré galiléen pour la durée des phénomènes décrits.

On utilisera systématiquement les théorèmes relatifs à l'énergie ou à la puissance.

**Exercices d'application :** Freinage, travail d'une force fluide, tir à l'arc, point sur la sphère, puits de potentiel, portrait de phase du pendule simple (sauf la période), pendule sur plan incliné

**Culture en sciences physiques :** arc, tension du pendule, potentiel linéaire

**Corrigés en TD :** tir à l'arc, tension du pendule, puits de potentiel, énergie potentielle linéaire.

### Calculs de travaux

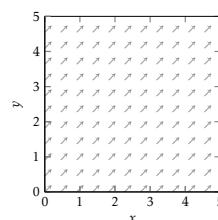
#### Exercice 1 : Travail d'une force de frottement fluide

Un point matériel est animé d'un mouvement sinusoïdal unidimensionnel d'amplitude  $x_0$  et de fréquence  $\nu$ . Il subit l'action d'une force de frottement fluide  $\vec{f}_f = -\alpha \vec{v}$ . Déterminer le travail de  $\vec{f}_f$  au cours d'une période.

#### Exercice 2 : Forces conservatives et non-conservatives

On s'intéresse dans cet exercice à différents champs de force réalisés dans un plan. Les forces sont caractérisées par leurs composantes cartésiennes donnant la force en un point  $(x, y)$  du plan.

Pour chaque champ de force étudié on établira un schéma représentant qualitativement le vecteur  $\vec{F}$  en fonction de la position du type de celui représenté ci-contre pour le champ de force  $\vec{F}_0 = F_0 (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ .



- On considère les champs de forces :  $\begin{cases} \vec{F}_1 = kx \vec{e}_x \\ \vec{F}_2 = ky \vec{e}_x \end{cases}$ , avec  $k = \text{cste}$ .

- Montrer que  $\vec{F}_1$  dérive d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(x)$  dont on donnera l'expression vérifiant  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(0) = 0$ .
- Calculer le travail de  $\vec{F}_1$  le long d'une courbe quelconque joignant deux points  $M_1$  et  $M_2$ . Vérifier ainsi que  $\vec{F}_1$  est保守的 (conservative).
- Exhiber une courbe fermée simple sur laquelle le travail de  $\vec{F}_2$  n'est pas nulle. En déduire que  $\vec{F}_2$  n'est pas保守的 (conservative).

- Le champ de force  $\vec{F}_3$  est défini par :  $\vec{F}_3 = -k(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y)$ .

(a) Montrer que  $\vec{F}_3$  est保守的 (conservative).

(b) Proposer une fonction une fonction  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(x, y)$  telle que :  $\vec{F}_3 = -\left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{pot}}(x, y)}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{pot}}(x, y)}{\partial y} \vec{e}_y\right)$ , où  $\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{pot}}(x, y)}{\partial x}$  désigne la fonction obtenue en dérivant  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(x, y)$  par rapport à  $x$ , en considérant  $y$  constant.

(c) Exprimer  $\mathcal{E}_{\text{pot}}$  en coordonnées polaires. Que retrouvez-vous ?

### Caractérisation de mouvements

#### Exercice 3 : Freinage

Calculer la distance de freinage d'une voiture lancée à la vitesse  $v_0$  sur une route horizontale (coefficients de frottement solide entre les pneus et la route). A.N. pour  $v_0 = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\mu = 0,6$  (route sèche) et  $\mu = 0,2$  (route mouillée).

#### Exercice 4 : Tir à l'arc

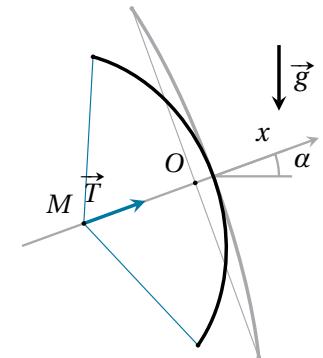


FIG. 1 : Arc au repos (gris clair) et armé.

On étudie un modèle simplifié du tir à l'arc. On considère que la résultante des forces exercées par la corde sur le point  $M$  de la Figure 1 est une force de rappel élastique idéale : son intensité est proportionnelle à l'écart de  $M$  par rapport à la position de repos, avec une constante de raideur  $k$ . La flèche est assimilée à un point matériel de position  $M$  et de masse  $m$  en mouvement rectiligne selon l'axe  $Ox$  incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. On considère tout d'abord le cas  $\alpha = 0$ .

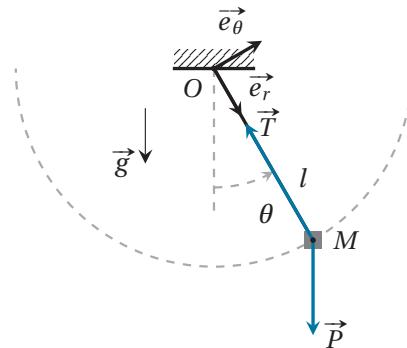
- L'archer arme l'arc pour amener le point matériel de la position  $O$  à la position  $M$ , d'abscisse  $x_0$ . Déterminer le travail qu'il doit fournir.
- Il relâche ensuite la corde. Déterminer la module de la vitesse de la flèche quand elle repasse par le point  $O$ .
- L'archer peut exercer une force maximale d'intensité maximale  $F_0$  et l'amplitude maximale du mouvement de sa main est  $l$ . Justifier qualitativement qu'il existe une valeur optimale de la raideur  $k$ , notée  $k_0$  permettant d'avoir  $v_0$  maximale puis déterminer son expression en fonction de  $F_0$  et  $l$ .
- On donne  $m = 30 \text{ g}$ ,  $F_0 = 2,0 \cdot 10^2 \text{ N}$  et  $l = 70 \text{ cm}$ . Déterminer l'expression de  $k_0$  et calculer sa valeur, ainsi que celle de la valeur correspondante de la vitesse  $v_0$ .

5. Quel autre travail doit on considérer si l'angle  $\alpha$  est non nul ? Montrer que la vitesse en  $O$  ne sera pas changée.
6. Quelle serait l'altitude maximale atteinte en l'absence de frottement pour  $\alpha = \pi/4$ ? Commenter. Quelles critiques pourriez-vous faire au modèle ?

### Exercice 5 : Tension d'un pendule

On considère le mouvement plan vertical d'un pendule simple constitué d'un point matériel de masse  $m$  au bout d'un fil idéal de longueur  $l$  dans le champ de pesanteur. On utilise les notations de la Figure 5.

- Montrer que le mouvement est conservatif et déterminer l'expression de l'énergie potentielle du point matériel en fonction de l'angle  $\theta$ , puis celle de son énergie mécanique.



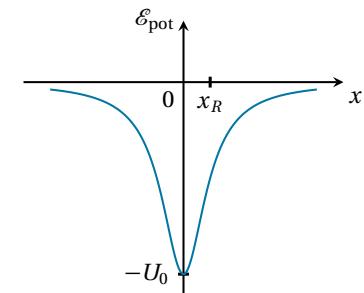
- Le point matériel est initialement en  $\theta = 0$ , animé d'une vitesse angulaire  $\omega_0$ . Déterminer l'expression de sa vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$  tant que le fil reste tendu.
- Appliquer la loi de la quantité de mouvement pour déterminer, sous cette hypothèse, l'expression de la norme  $\|\vec{T}\|$  de la tension  $\vec{T}$  du fil en fonction de l'angle  $\theta$ . À quelle condition sur l'angle  $\theta$  la tension peut-elle s'annuler ?
- En déduire les expressions de  $\cos(\theta)$  pour :
  - l'angle  $\theta_1 \geq 0$  où la vitesse s'annule tant que le fil est tendu ;
  - l'angle  $\theta_2 \geq 0$  où la tension s'annule.
- En déduire qu'on peut observer trois mouvements selon la valeur initiale de  $\omega_0$  :
  - un mouvement d'oscillations d'amplitude angulaire  $\theta_{\max}$  inférieure à  $\pi/2$  ;
  - un mouvement révolutif ou le pendule tourne en permanence dans le même sens ;
  - un mouvement où le fil se détend avant que le pendule n'atteigne l'angle  $\pi$ .

### Exercice 6 : Puits de potentiel

On étudie, dans un vide poussé, le mouvement unidimensionnel selon un axe  $Ox$  d'un atome de lithium  $^7\text{Li}$ , modélisé par un point matériel de masse  $m$ .

Un faisceau laser focalisé au point  $O$  d'abscisse  $x = 0$  exerce sur l'atome une force conservative à laquelle on peut associer l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(x) = -\frac{U_0}{1+x^2/x_R^2}$ , avec  $U_0$  et  $x_R$  des constantes positives. La fonction  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(x)$  est représentée sur la Figure 6.

L'axe  $Ox$  sera horizontal, sauf mention explicite du contraire. Le poids est alors compensé par une autre composante de la force exercée par le laser dont on ne se préoccupera pas.



- On considère un atome initialement immobile en  $x = 0$  au fond du puits de potentiel. On lui communique à l'instant  $t = 0$  une vitesse  $v_0$  positive selon  $\vec{e}_x$ .
  - À quelle condition portant entre autres sur  $v_0$  et  $U_0$  l'atome demeure-t-il dans un état lié ?
  - S'il est mis dans un état de diffusion, déterminer l'expression de sa vitesse limite, notée  $v_\infty$ , quand  $x$  tend vers l'infini.
- On suppose que  $v_0^2 \ll 2U_0/m$ . Montrer, à l'aide d'un développement limité de  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(x)$  pour  $x/x_R \ll 1$ , que le mouvement de l'atome est quasi harmonique. On donnera l'expression de sa pulsation, notée  $\omega_0$ , dont on calculera la valeur.
- Dans cette question seulement, l'axe  $Ox$  est vertical ascendant et on tient compte du poids. On ne suppose plus que  $x/x_R \ll 1$ .
  - Déterminer une nouvelle expression de l'énergie potentielle totale du système, notée  $\mathcal{E}'_{\text{pot}}$ . On utilisera la variable  $y = x/x_R$  et le paramètre sans dimension  $\alpha = U_0/(mgx_R)$ .
  - Justifier brièvement, en traçant son allure, que  $\mathcal{E}'_{\text{pot}}(y)$  peut présenter de nouveau un minimum local si  $\alpha$  est supérieur à une valeur critique  $\alpha_c$  dont on ne cherchera pas à donner la valeur. Tracer l'allure de  $\mathcal{E}'_{\text{pot}}(y)$  pour  $\alpha > \alpha_c$ .
  - On donne  $\alpha_c = 1,54$ . Calculer la valeur de  $U_0$  correspondante, les autres paramètres étant inchangés et commenter.
  - Expliquer, sans mener les calculs, comment on calculerait la profondeur du piège ainsi constitué ainsi que sa position d'équilibre.

**Données :** masse d'un nucléon  $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg, longueur  $x_R = 3,0 \cdot 10^{-4}$  m. La profondeur  $U_0$  est donnée en unité de température :  $U_0 = k_B T_0$  avec  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J · K $^{-1}$  la constante de Boltzmann et  $T_0 = 200$  μK.

### Établissement des équations du mouvement

**Exercice 7 : Énergie potentielle linéaire**

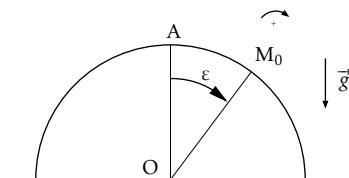
On considère un point matériel en mouvement unidimensionnel le long d'un axe  $Ox$ , soumis à une force  $\vec{F} = F_x \vec{e}_x$  telle que  $F_x = -F_0$  pour  $x > 0$  et  $F_x = F_0$  pour  $x < 0$ , avec  $F_0$  une constante positive.

1. Montrer que la force est conservative et déterminer l'expression de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_{\text{pot}}$  associée. Tracer  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(x)$ . Le point matériel peut-il s'éloigner à l'infini ?
2. Il se trouve à l'instant initial en  $x = 0$ , animé du vecteur vitesse  $v_0 \vec{e}_x$ . Déterminer l'amplitude  $x_{\max}$  de son mouvement ultérieur.
3. On cherche à déterminer la période du mouvement.
  - (a) Exprimer l'expression de sa vitesse  $\dot{x}$  en fonction entre autres de  $v_0$  quand le point matériel se trouve en  $x$  tel que  $0 \leq x \leq x_{\max}$  avec  $\dot{x} \geq 0$ .
  - (b) En déduire la relation suivante entre les variations élémentaires  $dt$  et  $dx$  :
 
$$dt = dx / (v_0 \sqrt{1 - x/x_{\max}})$$
.
  - (c) Intégrer cette égalité pour obtenir la période  $T$  des oscillations. Commenter leur variation avec  $v_0$ .

**Exercice 8 : Point mobile sans frottements sur une sphère**

On lance à l'instant  $t = 0$  un point matériel  $M$  de masse  $m$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$  horizontale du sommet de la face convexe d'une sphère ( $S$ ), fixe de centre  $O$  et de rayon  $a$  sur laquelle il est susceptible de glisser sans frottement. L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur terrestre et on néglige les frottements de l'atmosphère.

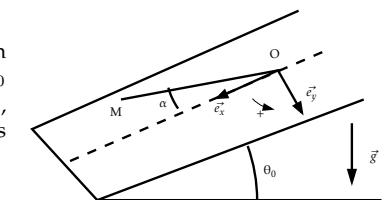
On note  $A$  le point de la sphère situé à la verticale de  $O$ .



1. Montrer que le mouvement est plan et définir le plan dans lequel il s'effectue.
2. Montrer que le système est conservatif.
3. On définit, à l'instant  $t$  l'angle  $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ . On suppose dans un premier temps que l'objet reste au contact de la sphère
  - (a) Exprimer l'énergie mécanique du point matériel en fonction de sa vitesse  $v$  et de sa position repérée par  $\theta$ . En déduire la vitesse  $v$  et la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$ .
  - (b) Retrouver ce résultat par application du théorème de l'énergie cinétique.
  - (c) Déterminer la réaction de la sphère et montrer que, si la vitesse  $v_0$  est suffisamment faible, le point  $M$  quitte la sphère pour un angle  $\theta_1$  dont on donnera l'expression. Que se passe-t-il si la vitesse  $v_0$  est trop élevée ?
  - (d) Déterminer la vitesse quand le point  $M$  atteint le sol. Aurait-on pu déterminer ce résultat directement ? Comment serait qualitativement modifié ce résultat en présence de frottement ?

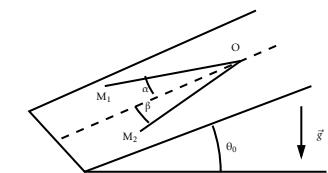
**Exercice 9 : Pendule sur un plan incliné**

Un pendule simple, de masse  $m$  et de longueur  $l$ , oscille en glissant avec frottements sur un plan incliné faisant l'angle  $\theta_0$  constant avec l'horizontale. On désigne par  $\alpha$  l'angle ( $\vec{e}_x, \overrightarrow{OM}$ ), le vecteur unitaire  $\vec{e}_x$  pointant vers le bas selon la ligne de plus grande pente.



1. On considère dans un premier temps que le mouvement s'effectue sans frottement.
  - (a) Montrer que le système est conservatif.
  - (b) Exprimer la conservation de l'énergie mécanique. Que devient cette équation si l'angle  $\alpha$  est petit ?
  - (c) En déduire la nature et la période des petites oscillations.
2. ~~modif~~

On considère maintenant un frottement solide entre le point et le plan incliné de coefficient de frottement  $\mu$ . Lâché en  $M_1$  ( $\overrightarrow{OM}_1$  fait l'angle  $\alpha$  avec la ligne de plus grande pente), la masse remonte en  $M_2$  ( $\overrightarrow{OM}_2$  fait l'angle  $\beta$  avec la ligne de plus grande pente).



- (a) Déterminer  $\mu$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\theta_0$ .
- (b) Le point matériel est-il à l'équilibre en  $M_2$  ?

**Portrait de phase****Exercice 10 : Portrait de phase du pendule simple**

Un pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle  $m$  reliée par une tige rigide de longueur  $l$  et de masse négligeable à un point fixe  $O$  du référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$ . On suppose que le mouvement de la petite masse s'effectue dans un plan vertical et on repère à chaque instant la position du pendule par l'angle  $\theta$  que fait la tige avec la verticale descendante passant par  $O$ . Le pendule sera lâché sans vitesse initiale d'un angle  $\alpha$ .

1. Montrer que le mouvement est conservatif. Établir l'intégrale première du mouvement et l'écrire sous forme adimensionnée en faisant apparaître la pulsation caractéristique  $\omega_0$ .
2. Retrouver les équations bien connues de son mouvement pour les petits angles  $\theta$ .
3. On ne considère plus maintenant des petits angles.

- (a) Tracer l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(\theta)$  (on choisira la constante pour avoir  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(0) = 0$ ) pour  $\theta \in [-2\pi; 2\pi]$ .
- (b) Discuter la nature des mouvements possibles en fonction de la valeur de l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_{m0}$ . Quelles différences pourrait présenter un pendule dans lequel la tige rigide serait remplacée par un fil idéal ?
- (c) Tracer dans le plan de phase  $\theta, \dot{\theta}$  l'allure des trajectoires des mouvements correspondants. Quelle est leur équation pour  $\mathcal{E}_{m0} \ll mgl$  ?
4. (a) En écrivant  $d\theta = d\theta/\dot{\theta}$ , exprimer la période des mouvements liés en fonction de l'énergie  $\mathcal{E}_{m0}$  sous forme d'une intégrale.
- (b) Mettre cette équation sous la forme :

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} f\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{avec} \quad f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 u}},$$

et retrouver le développement à l'ordre 2 en  $\alpha$  établi sur la feuille d'exercices précédente.

**Correction de l'exercice 1**

L'équation horaire du mouvement est  $x = x_0 \cos(2\pi\nu t + \varphi)$ , sa vitesse est  $\dot{x} = -2\pi\nu x_0 \sin(2\pi\nu t + \varphi)$ . Lors d'un déplacement élémentaire  $dx = \dot{x}dt$ , le travail élémentaire vaut  $\delta W(\vec{F}_f) = -\alpha \dot{x}^2 dt = -4\pi^2\nu^2 \alpha x_0^2 \sin^2(2\pi t/T + \varphi) dt$ . Le travail sur une période vaut donc :

$$W_T(\vec{F}_f) = \int \delta W(\vec{F}_f) = -4\pi^2\nu^2 x_0^2 \int_{t=0}^{1/\nu} \sin^2(2\pi t/T + \varphi) dt = -2\pi^2\nu \alpha x_0^2.$$

en reconnaissant la valeur moyenne d'un sinus carré sur une période, égale à  $1/2$ .

**Correction de l'exercice 2**

On représente les cartes de forces ci-dessous.

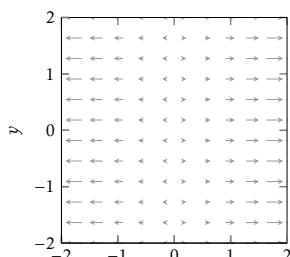
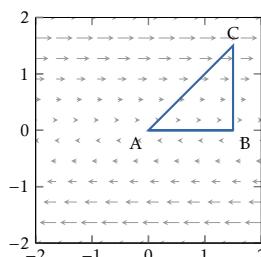
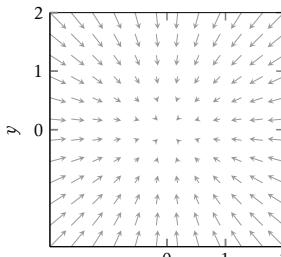
(a) pour la force  $\vec{F}_1$ (b) pour la force  $\vec{F}_2$ (c) pour la force  $\vec{F}_3$ 

FIG. 2

1. (a) La force  $\vec{F}_1$  est dirigée selon  $\vec{e}_x$  et ne dépend que de  $x$  : on se trouve dans le cas d'un système unidimensionnel. On identifie immédiatement :

$$\vec{F}_1 = -\frac{d\mathcal{E}_{\text{pot}}}{dx} \vec{e}_x, \text{ avec } \mathcal{E}_{\text{pot}}(x) = -kx^2/2 + \text{cste}.$$

On choisit une constante nulle pour avoir  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(0) = 0$ .

- (b) Le travail élémentaire de la force  $\vec{F}_1$  lors d'un déplacement  $d\vec{M}$  vaut  $\delta W(\vec{F}_1) = kx \vec{e}_x \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y) = kx dx = d(kx^2/2)$ . Lors d'un déplacement quelconque d'un point  $M_1(x_1, y_1)$  à  $M_2(x_2, y_2)$ , le travail qu'elle fournit vaudra :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_1) = \int_{x_1}^{x_2} d(x^2/2) = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2),$$

indépendant du chemin suivi.

(c) On peut par exemple considérer le triangle de sommets :  $A(0, 0)$ ,  $B(x_0, 0)$ ,  $C(x_0, y_0)$  (voir la figure 2b). Le travail le long du trajet  $ACBA$  vaut :  $W_{ACBA} = W_{AC} + W_{CB} + W_{BA}$ . Les deux derniers sont nuls puisque :  $\begin{cases} x \text{ est constant sur } C \rightarrow B \\ y \text{ est nul sur } B \rightarrow A \end{cases}$ . Sur la portion  $A \rightarrow C$ , on a  $y = y_0 x/x_0$ .

Le travail y vaut ainsi  $W_{AC} = \int_{x=0}^{x_0} k \frac{y_0}{x_0} x dx = \frac{1}{2}ky_0 x_0$ . Le travail sur la courbe fermée est donc non nul ce qui équivaut à dire que le travail dépend du chemin suivi (travail différent pour aller de  $A$  à  $C$  directement ou en passant par  $B$ ). La force  $\vec{F}_2$  n'est donc pas conservative.

2. (a) Le travail élémentaire de la force  $\vec{F}_3$  lors d'un déplacement élémentaire  $dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y$  vaut  $\delta W(\vec{F}_3) = -k(x dx + y dy)$ . Pour un déplacement d'un point  $M_1(x_1, y_1)$  à  $M_2(x_2, y_2)$ , on aura donc :

$$W(\vec{F}_3) = -\frac{1}{2}k(x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2).$$

- (b) La fonction  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$  convient.

- (c) On a  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(r, \theta) = \frac{1}{2}kr^2$  : on retrouve l'énergie potentielle d'un ressort idéal de longueur au repos nulle et dont une extrémité est fixée à l'origine du repère.

**Correction de l'exercice 3**

La voiture est soumise à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et à la réaction  $\vec{R}$  de la route. La composante normale du poids compense exactement le poids :  $\vec{R}_\perp = -m\vec{g}$  et ces deux forces ne travaillent pas puisqu'elles sont orthogonales au déplacement. En revanche la réaction tangentielle :  $\vec{R}_{||} = -\mu \vec{R}_\perp \frac{\vec{v}}{v}$  travaille et puisqu'elle est constante, son travail lors d'un déplacement de longueur  $d$  vaut :  $W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{R}_{||}) = -\mu mgd$ . On applique donc le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial où elle vaut  $\frac{1}{2}mv_0^2$  et l'instant final où elle est nulle :

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mgd \quad \text{soit} \quad d = \frac{v_0^2}{2\mu g},$$

et donc  $d_{0,6} = 133$  m et  $d_{0,2} = 400$  m. Elle varie inversement proportionnellement au coefficient de frottement.

**Correction de l'exercice 4**

1. La flèche est soumis à son poids  $\vec{P}$ , à la tension  $\vec{T}$ , et à la force de l'archer  $\vec{F}_a$ . L'arc étant considéré idéal, on néglige sa masse et tout frottement. L'énergie mécanique de la flèche est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles associées au poids  $\mathcal{E}_{\text{pot},P}$  et à la force de tension de l'arc  $\mathcal{E}_{\text{pot},T}$ . Tant que le mouvement est horizontal, le poids ne travaille pas. L'énergie potentielle associée à la tension de l'arc est  $\mathcal{E}_{\text{pot},T} = kx^2/2$ , avec  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$ .

Quand l'archer arme l'arc, la flèche est immobile au début et à la fin du mouvement : l'énergie cinétique reste donc nulle. En revanche l'énergie potentielle élastique croît de 0 à  $\frac{1}{2}kx_0^2$ . On applique le théorème de l'énergie mécanique au point matériel  $M$  : sa variation est égale au travail de la force non conservative de l'archer, qu'on note  $W_a$ . On a donc :

$$\Delta\mathcal{E}_m = \Delta\mathcal{E}_c + \Delta\mathcal{E}_{\text{pot},T} = \frac{1}{2}kx_0^2 = W_a.$$

2. Lors de la phase ultérieure du mouvement, l'archer n'exerce plus de force et l'énergie mécanique se conserve. De l'état  $x = x_0, v = 0$  à l'état  $x = 0, v = v_0$ , on a donc :

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{soit: } v_0 = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

3. La norme de la force  $\vec{T}$  vaut  $k|x|$ . L'archer doit exercer une force de même intensité pour maintenir l'arc armé. Si la raideur est très importante l'archer ne pourra pas armer l'arc d'une distance importante. Si elle est trop faible, le travail  $W_a$  qu'il effectuera pour armer l'arc de  $l$  sera trop faible. Plus précisément, on a  $W_a = kx_0^2/2 = F_0x_0/2$  puisque la force  $\vec{F}_a$  compense  $\vec{T} = kx_0\hat{e}_x$  quand l'arc est armé au maximum. Ce travail sera maximal quand  $x_0$  prend sa valeur maximale  $l$ . Comme  $kx_0 = F_0$ , on doit avoir  $k_0 = F_0/l$ .

4. On calcule :

$$k_0 = 2,8 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2W_a}{m}} = \sqrt{\frac{F_0l}{m}} = 68 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

5. Si l'angle  $\alpha$  n'est pas nul, le poids travaille quand on arme l'arc et quand on lâche la corde. Néanmoins son travail sur un aller-retour est nul puisqu'il s'agit d'une force conservative : la vitesse d'éjection de la flèche ne sera pas changée si l'archer arme l'arc sur la même distance.

Néanmoins, Le poids « aide » l'archer en rajoutant une force vers le bas ; celui-ci pourrait donc armer sur une distance plus grande s'il n'est pas déjà au maximum de ce que la longueur de ses bras lui permet.

6. Une fois le point  $O$  atteint, le point matériel n'est plus soumis qu'à son poids si on ne prend pas en compte les frottements. On écrit de nouveau la conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial ( $O, v_0$ ) et le sommet de la trajectoire d'altitude  $h$  par rapport à  $O$ . La vitesse n'est cependant pas nulle au sommet de la trajectoire, seule sa composante verticale l'est. On a vu lors de l'étude de la chute libre, que la composante horizontale de la vitesse,  $v_0 \cos(\alpha)$ , ne varie pas lors du mouvement. On a donc  $v^2 = v_0^2 \cos^2(\alpha)$  au sommet de la trajectoire. En choisissant son origine au point  $O$ , l'énergie potentielle de pesanteur varie quant à elle de 0 à  $mgh$ , et la conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2(\alpha) + mgh \quad \text{soit: } h = \frac{v_0^2(1 - \cos(\alpha)^2)}{2g} = \frac{F_0l}{2mg}(1 - \cos(\alpha)^2) = 1,2 \cdot 10^2 \text{ m}.$$

Il est bien évident qu'on atteint pas une telle altitude. Il faudrait bien sûr prendre en compte le frottement de l'air mais aussi le fait qu'une partie de l'énergie est communiquée au bois de l'arc qui possède une vitesse non nulle au moment où la flèche se sépare de l'arc. Signalons que d'autres géométries d'arc permettent d'éliminer ce défaut.

### Correction de l'exercice 5

1. Le point matériel est soumis à son poids, conservatif, d'énergie potentielle associée  $\mathcal{E}_{\text{pot},P} = mgz + \text{cste}$  et à la tension du fil  $\vec{T}$  qui ne travaille pas : le mouvement est donc conservatif, et l'énergie potentielle du point matériel est celle du poids. On peut choisir la constante pour lui imposer d'être nulle en  $\theta = 0$ , on a alors  $\mathcal{E}_{\text{pot}} = mgl(1 - \cos(\theta))$ .

Le point matériel est animé d'un mouvement circulaire, le module de sa vitesse est donc  $l\dot{\theta}$  et son énergie cinétique est  $\mathcal{E}_c = ml^2\dot{\theta}^2/2$ . On en déduit l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos(\theta)).$$

2. On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre :

- l'instant initial où  $\theta = 0$  et  $v_0 = l\omega_0$  ;
- un instant ultérieur où la vitesse est  $v_0 = l\dot{\theta}$  à la position  $\theta$ . On a :

$$\mathcal{E}_m = \frac{ml^2\omega_0^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos(\theta))$$

$$\text{soit: } \dot{\theta}^2 = \omega_0^2 - \frac{2g}{l}(1 - \cos(\theta)). \quad (1)$$

3. La loi de la quantité de mouvement s'écrit :  $m\vec{a}(M) = \vec{T} + \vec{P}$ . Sur un mouvement circulaire, on a  $\vec{a}(M) = -l\dot{\theta}^2\hat{e}_r + l\ddot{\theta}\hat{e}_\theta$ . Comme  $\vec{P} = mg(\cos(\theta)\hat{e}_r - \sin(\theta)\hat{e}_\theta)$  et  $\vec{T} = T_r\hat{e}_r$  est radiale, on projette sur  $\hat{e}_r$  pour obtenir :

$$-ml\dot{\theta}^2 = T_r + mg \cos(\theta) \quad (2)$$

$$\text{soit: } T_r = -ml\dot{\theta}^2 - mg \cos(\theta) = -ml\omega_0^2 + mg(2 - 3\cos(\theta)). \quad (3)$$

La tension  $\vec{T}$  ne peut être que selon  $-\hat{e}_r$  quand le fil est tendu. Son module est donc :

$$\|\vec{T}\| = -T_r = mg \cos(\theta) + ml^2\dot{\theta}^2.$$

Il faut donc que  $\cos(\theta)$  soit négatif pour que  $\|\vec{T}\|$  puisse s'annuler, soit  $|\theta| \geq \pi/2$ . Tant que  $M$  ne s'élève pas au dessus de  $O$ , le fil restera tendu.

4. • L'angle  $\theta_1$  annule l'expression (1), il vérifie donc :

$$\cos(\theta_1) = \left(1 - \frac{l\omega_0^2}{2g}\right).$$

- L'angle  $\theta_2$  annule quant à lui l'expression (3), il vérifie :

$$\cos(\theta_2) = \frac{2 - l\omega_0^2/g}{3} = \frac{2}{3}\cos(\theta_1).$$

5. • Si  $\omega_0^2 \leq 2g/l$ ,  $\cos(\theta_1)$  est positif, et la décroissance de  $\cos$  sur  $[0; \pi]$  assure que  $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi/2$ . On vérifie que la vitesse s'annule avant que le fil ne se détende et donc que le pendule oscille de  $-\theta_1$  à  $\theta_1$  avec le fil tendu, comme vu précédemment.

- Si  $\omega_0^2 \geq 2g/l$  les expressions définissant  $\cos(\theta_1)$  et  $\cos(\theta_2)$  sont négatives, on a donc  $0 \geq \cos(\theta_2) \geq \cos(\theta_1)$ , soit  $\pi/2 \leq \theta_2 \leq \theta_1$  en vertu de la décroissance de  $\cos$ . Si la détente du fil se produit, ce sera avant que la vitesse ne s'annule et on n'atteint pas l'altitude maximale prédicta par l'intégrale première du mouvement. La détente se produira si l'expression définissant  $\cos(\theta_2)$  est supérieure à  $-1$  soit pour  $\omega_0^2 = 5g/l$ . Dans le cas contraire, il n'existe pas d'angle  $\theta_2$  tel que  $\cos(\theta_2) = \frac{2}{3}(1 - l\omega_0^2/(2g))$ .

- Si  $\omega_0^2 \geq 5g/l$ , les deux expressions définissant  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont inférieures à  $-1$ . Le fil ne se détend jamais et sa vitesse ne s'annule jamais. Son mouvement est révolutif autour de  $O$ .

**Correction de l'exercice 6**

1. L'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_{pot}(x)$  est conservée.

(a) L'atome sera dans un état lié si son énergie mécanique est inférieure à la valeur asymptotique de  $\mathcal{E}_{pot}$  quand  $x$  tend vers l'infini, soit pour  $\mathcal{E}_m < 0$ . On calcule  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - U_0$  à l'état initial, la condition est donc :  $v_0 < \sqrt{2U_0/m}$ .

(b) On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial et l'état final asymptotique quand  $x$  tend vers l'infini. L'énergie potentielle  $\mathcal{E}_{pot}$  tend alors vers 0 et on a :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - U_0 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \quad \text{soit: } v_\infty^2 = v_0^2 - \frac{2U_0}{m}.$$

2. Pour  $z \ll 1$ , on a :  $(1+z)^u \simeq 1+uz$ . En appliquant ce résultat pour  $z = (x/x_R)^2$  et  $u = -1$ , on peut donc écrire  $\mathcal{E}_{pot}(x) \simeq -U_0(1 - \frac{x^2}{x_R^2})$ , de la forme :

$$U_0 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{avec: } \frac{k}{2} = \frac{U_0}{x_R^2}.$$

On reconnaît l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique, dont la pulsation sera :

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{2U_0/(mx_R^2)} = 2,3 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

avec  $m = 7 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  et  $U_0 = k_B \times 2,0 \cdot 10^2 \mu\text{K}$ .

3. (a) On rajoute l'énergie potentielle de pesanteur  $mgx$  à l'expression précédente. On obtient :

$$\mathcal{E}'_{pot} = mgx - \frac{U_0}{1 + \frac{x^2}{x_R^2}} = mgx_R y - \frac{U_0}{1 + y^2} = mgx_R \left( y - \frac{\alpha}{1 + y^2} \right).$$

(b) On a représenté l'allure de  $\mathcal{E}'_{pot}(y)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  sur la Figure 3. Pour  $\alpha$  faible, on retrouve la droite de l'énergie potentielle, dans laquelle l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_{pot}$  due au laser creuse une indentation d'autant plus grande que  $\alpha$  est grand. Si  $\alpha$  est suffisamment important, la contribution de  $\mathcal{E}_{pot}$  peut rendre  $\mathcal{E}'_{pot}$  localement décroissante : on a alors un minimum local d'énergie potentielle, soit un nouvel équilibre stable.

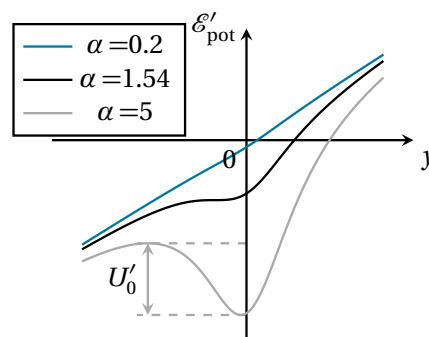


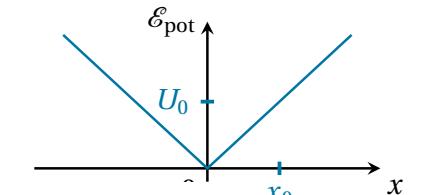
FIG. 3 : Allure de  $\mathcal{E}'_{pot}$  pour différentes valeurs de  $y$ .

(c) La valeur  $\alpha = 1,54$  marque l'apparition de ce minimum local. On calcule alors  $U_0 = \alpha_c m g x_R = k_B \times 3,8 \cdot 10^{-6} \mu\text{K}$ . Cette valeur est bien inférieure à celle donnée précédemment. Avec  $T_0 = 200 \mu\text{K}$ , le système possédera bien un minimum local.

(d) La profondeur du piège est la grandeur  $U'_0$  représentée sur la Figure 3. On détermine les abscisses du minimum  $x_{min}$  et du maximum  $x_{max}$  locaux de  $\mathcal{E}'_{pot}$  en annulant sa dérivée. La profondeur  $U'_0$  est alors  $\mathcal{E}'_{pot}(x_{max}) - \mathcal{E}'_{pot}(x_{min})$ . La position d'équilibre est en  $x = x_{min}$ .

**Correction de l'exercice 7**

1. On a  $F_x = -\frac{d\mathcal{E}_{pot}}{dx}$ . Pour  $x > 0$ , on peut donc choisir  $\mathcal{E}_{pot} = F_0 x$ . Pour  $x < 0$ , on aura  $\mathcal{E}_{pot} = -F_0 x$ . On a finalement  $\mathcal{E}_{pot} = F_0 |x|$ , représentée sur la Figure 7. L'énergie potentielle tend vers l'infini quand  $x$  s'éloigne à l'infini. Un point matériel sera donc toujours dans un état lié.



Remarquons que la force n'est pas définie en  $x = 0$ . Une étude plus fine du modèle au voisinage de  $x = 0$  permettrait de résoudre cette discontinuité.

2. On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial ( $x = 0, \dot{x} = v_0$ ) et la position extrême ( $x = x_{max}, \dot{x} = 0$ ). On a :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = F_0 x_{max} \quad \text{soit: } x_{max} = \frac{mv_0^2}{2F_0}.$$

3. (a) On écrit la même relation avec pour état final ( $x \leq x_{max}, \dot{x} \geq 0$ ). On obtient :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + F_0 x \quad \text{soit: } \dot{x}^2 = v_0^2 - \frac{2F_0 x}{m}.$$

(b) Tant que  $\dot{x} \geq 0$ , on a  $\dot{x} = \sqrt{\dot{x}^2}$ , on peut donc écrire :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{soit: } dt = \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{dx}{v_0 \sqrt{1 - \frac{2F_0 x}{mv_0^2}}} = \frac{dx}{v_0 \sqrt{1 - \frac{x}{x_{max}}}}.$$

(c) En posant  $y = x/x_{max}$ , on a  $dx = x_{max} dy$ . De plus le mouvement du point matériel de  $x = 0$  à  $x_{max}$  correspond à un quart de période, on a donc :  $\frac{T}{4} = (x_{max}/v_0) \int_0^{x_{max}/x_{max}} dy / \sqrt{1 - y}$ . Une primitive de  $1/\sqrt{1-y}$  est  $-2\sqrt{1-y}$ , on en déduit :

$$T = \frac{4x_{max}}{v_0} \left[ -2\sqrt{1-y} \right]_{y=0}^1 = \frac{8x_{max}}{v_0} = \frac{4mv_0}{F_0}.$$

On constate qu'elle dépend de l'énergie du mouvement par l'intermédiaire de  $v_0$  : les oscillations ne sont pas harmoniques.

**Correction de l'exercice 8**

- Le mouvement s'effectuera dans le plan  $P$  défini par la vitesse initiale et le poids. En effet, la réaction du support étant colinéaire à  $\vec{OM}$ , aucune force n'induira de mouvement dans la direction perpendiculaire à  $P$ .
- Le point matériel est soumis au poids, conservatif, et à la réaction du support qui ne travaille pas en l'absence de frottement. Son énergie mécanique se conserve donc dans un référentiel galiléen.
- (a) L'énergie potentielle de pesanteur peut être définie comme  $\mathcal{E}_{\text{pot}} = mgz = mga \cos \theta$ . L'énergie mécanique est alors  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + mga \cos \theta = \mathcal{E}_{m0} = \text{cste} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mga$ . On a donc :

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ga(1 - \cos \theta)} \text{ soit } \dot{\theta} = v/a = \sqrt{v_0^2/a^2 + 2g(1 - \cos \theta)/a}.$$

- (b) Le travail de la seule force qui travaille, le poids, lorsque le l'altitude varie de  $z = a$  à  $z = a \cos \theta$  vaut  $mga(a - a \cos \theta)$ , la variation d'énergie cinétique vaut donc :  $\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = mga(1 - \cos \theta)$ . On retrouve évidemment le même résultat puisque le théorème de l'énergie cinétique et l'intégrale première de l'énergie décrivent exactement la même idée, la seule différence étant le côté du signe égal où l'on écrit le travail des forces conservatives.
- (c) Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, dans la base polaire, en utilisant les expressions de l'accélération pour un mouvement circulaire :  $\begin{cases} ma\ddot{\theta} &= mga \sin \theta \\ -ma\dot{\theta}^2 &= -mga \cos \theta + R \end{cases}$ . La deuxième équation permet de déterminer la réaction  $R = mga \cos \theta - ma\dot{\theta}^2 = 3mga \cos \theta - 2mg - mv_0^2/a$ . Cette dernière s'annule pour l'angle  $\theta_1$  vérifiant  $\cos \theta_1 = 2/3 + v_0^2/(3ag)$ . La vitesse  $v_0$  doit être inférieure ou égale à  $\sqrt{ag}$  pour que cette expression soit inférieure ou égale à 1 et que l'angle  $\theta_1$  soit bien défini. Dans le cas contraire, le point matériel décolle instantanément de la sphère.
- (d) À cet instant, l'altitude est  $z_1 = a \cos \theta_1$  et la vitesse  $v_1 = \sqrt{ga \cos \theta_1}$ . La conservation de l'énergie mécanique entre cet instant et l'instant où il touche le sol où  $z = 0$  assure que :  $\frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = \frac{1}{2}mv_{\text{sol}}^2$ , soit  $v_{\text{sol}}^2 = ga \cos \theta_1 + 2ga \cos \theta_1 = 3ga \cos \theta_1 = 2ga + v_0^2$ . Bien évidemment on aurait pu (et dû) obtenir ce résultat directement par conservation de l'énergie mécanique entre le sommet de la sphère et le sol :  $\frac{1}{2}mv_0^2 + mga = \frac{1}{2}mv_{\text{sol}}^2$ . En présence de frottement, dont le travail est toujours résistif, la vitesse au sol sera plus faible.

**Correction de l'exercice 9**

- (a) Le point matériel n'est soumis qu'à son poids, conservatif, et à la réaction normale du support qui ne travaille pas, son énergie mécanique se conserve.
- (b) L'énergie potentielle de pesanteur se met sous la forme  $\mathcal{E}_{\text{pot}} = mgz = mgl(1 - \cos \alpha) \sin \theta_0$ , en choisissant l'origine des énergies potentielles en  $\alpha = 0$  et en l'exprimant en fonction du seul degré de liberté du problème. En effet, en repérant les altitudes par rapport à  $O$ , on a  $z = -x \sin \theta_0$  et  $x$  est relié à  $\alpha$  par  $x = l \cos \alpha$ . L'énergie cinétique, pour ce mouvement circulaire, vaut  $v = l\dot{\alpha}$  et l'intégrale première du mouvement s'écrit donc :

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + mgl(1 - \cos \alpha) \sin \theta_0 = \text{cste}.$$

Pour  $\alpha \ll 1$ , on retrouve (en développant  $\cos \alpha \simeq 1 - \alpha^2/2$ ) un oscillateur harmonique avec :  $\ddot{\alpha}^2 + \omega_0^2\alpha^2 = \text{cste}$ , avec  $\omega_0 = \sqrt{g \sin \theta_0/l}$ .

- Les petites oscillations sont donc harmoniques, de période  $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g \sin \theta_0}$ .
- (a) La variation d'énergie mécanique entre  $M_1$  et  $M_2$  sera égale au travail, résistif, de la force de frottement  $\vec{R}_{||}$  solide. D'après la loi de Coulomb du frottement cinétique, la norme de cette dernière vaudra  $\mu R_{\perp}$ . La relation fondamentale de la dynamique, projetée perpendiculairement au plan assure que  $R_{\perp} = mg \cos \theta_0$ . On aura donc  $R_{||} = \mu mg \cos \theta_0 = \text{cste}$ . Son travail sur  $M_1 \rightarrow M_2$  sera alors  $R_{||}l(\alpha + \beta)$  puisque la longueur de l'arc qu'elle parcourt est  $l(\alpha + \beta)$  (les angles sont ici géométriques). Finalement  $W(\vec{R}_{||}) = -\mu mg \cos \theta_0(\alpha + \beta)$ . On a donc :

$$0 + mgz(\alpha) = 0 + mgz(\beta) - \mu mg \cos \theta_0 g(\alpha + \beta) \\ \mu = \frac{mgl \sin \theta_0 (\cos \beta - \cos \alpha)}{mg \cos \theta_0 (\alpha + \beta)} = \tan \theta_0 \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\alpha + \beta}$$

- On considère l'équilibre du point matériel sous l'effet de la tension du fil, de son poids et de la réaction tangentielle  $\vec{R}_{||}$ . La projection de la relation fondamentale de la dynamique dans le plan  $xOy$  s'écrit, en coordonnées polaires :  $\begin{cases} \vec{e}_r : 0 &= -T + mg \sin \theta_0 \cos \beta \\ \vec{e}_{\theta} : 0 &= -mg \sin \theta_0 \sin \beta + R_{||} \end{cases}$ . On a toujours  $R_{\perp} = mg \cos \theta_0$  et donc  $R_{||}/R_{\perp} = \tan \theta_0 \sin \beta < \mu$ . Il ne restera donc immobile que si  $\tan \theta_0 \sin \beta < \mu$ .

**Correction de l'exercice 10**

- Le point matériel n'est soumis qu'à des forces conservatives (son poids) ou qui ne travaillent pas (la tension de la tige), le système est donc conservatif. L'énergie potentielle peut s'exprimer selon :

$$\mathcal{E}_{\text{pot}}(\theta) = mgl(1 - \cos \theta) \text{ soit } \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\text{pot}} + \mathcal{E}_{\text{cin}} = mgl(1 - \cos \theta) + \underbrace{\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2}_{\vec{v} \text{ mvmt circulaire}}$$

$$\frac{2\mathcal{E}_m}{ml^2} = \dot{\theta}^2 + \underbrace{2\omega_0^2(1 - \cos \theta)}_{=g/l}.$$

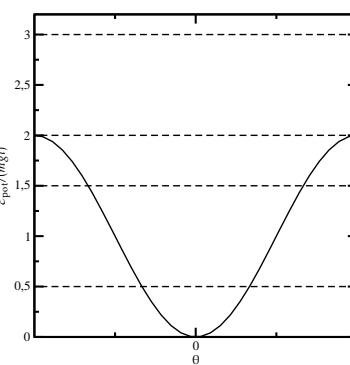
- Pour les petits angles,  $(1 - \cos \theta) \simeq \theta^2/2$  et on retrouve l'intégrale première du mouvement d'un oscillateur harmonique :

$$\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta^2 = \text{cste}.$$

- (a) et (b)

L'énergie potentielle est représentée sur la figure ci-contre.

- Pour une énergie mécanique  $\mathcal{E}_{m0}$  inférieure à  $2mgl$ , le mouvement sera périodique, le point matériel oscillant entre deux points de rebroussement en  $\pm\theta_0$ , avec  $\theta_0 \in [-\pi; \pi]$ .
- Pour  $\mathcal{E}_{m0} \geq 2mgl$ , le point matériel effectuera une infinité de tours, sa vitesse étant minimale en  $\pi[2\pi]$  mais sans jamais s'annuler.

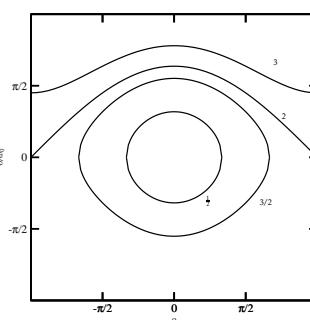


Dans le cas d'un fil, ces mouvements ne pourront être observés que si le fil reste tendu en permanence. On vérifierait cette condition en calculant la tension et en s'assurant qu'elle est toujours centripète (comme étudié dans l'exercice sur l'enroulement).

Les trajectoires dans l'espace des phases correspondant aux valeurs de l'énergie indiquées sur le graphe de l'énergie potentielle sont représentées sur la figure ci-contre dans les coordonnées  $\theta$  et  $\dot{\theta}/\omega_0$ .

- Les valeurs indiquées correspondent aux valeurs respectives de  $\alpha = \mathcal{E}_m/(mgl)$ .
- (c) On retrouve pour  $\alpha = 3$  le mouvement périodique de révolution, des mouvements périodiques oscillants pour  $\alpha = 3$  et  $\alpha = 1$ .

On vérifie également que pour les faibles valeurs de  $\alpha$  donc pour les petits angles, la trajectoire tend vers une ellipse (un cercle pour ce choix particulier de variable) : on retrouve les oscillations harmoniques du pendule simple pour les petits angles.



4. (a) et (b) On a :

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2\mathcal{E}_{m0}}{ml^2} - 2\omega_0^2(1 - \cos\theta) = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_{\max})$$

avec  $\theta \leq \theta_{\max}$  tel que  $\mathcal{E}_{\text{pot}}(\theta_{\max}) = \mathcal{E}_{m0}$ . Sur le quart de période,  $\begin{cases} t & \in [0; T/4] \\ \theta & \in [0; \theta_{\max}] \end{cases}$ , où  $\theta$  est

croissant, on aura alors :

$$\begin{aligned} \omega_0\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\max}} &= \frac{d\theta}{dt} \\ \sqrt{2}\omega_0 dt &= \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\max}}} \\ \sqrt{2}\omega_0 \int_0^{T/4} dt &= \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\max}}} = \int_0^{\theta_{\max}} \frac{\sqrt{2}d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \\ \frac{\omega_0 T}{2} &= \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta / (\sin \frac{\theta_{\max}}{2})}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2}}}}. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable  $\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_{\max}}{2}} = \sin x$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \sin \frac{\theta_{\max}}{2} \sin x \rightarrow \frac{d\theta}{\sin \frac{\theta_{\max}}{2}} = \frac{2 \cos x}{\cos \frac{\theta}{2}} dx \\ \frac{\omega_0 T}{2} &= \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\cos \frac{\theta}{2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} dx \\ \omega_0 T &= \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} \sin^2 x}} dx, \quad \text{de la forme annoncée.} \end{aligned}$$

5. Pour  $\theta_{\max} \ll 1$ , on a  $k = \sin \frac{\theta_{\max}}{2} \simeq \frac{\theta_{\max}}{2} \ll 1$  et on peut développer le dénominateur selon :

$$(1 - k^2 \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 x \simeq 1 + \frac{\theta_{\max}^2}{8} \sin^2 x \text{ et calculer } \frac{\omega_0 T}{4} \simeq \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi \theta_{\max}^2}{32} \right)$$

soit  $\omega_0 T = 2\pi \left( 1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16} \right)$  On retrouve bien le résultat précédemment établi.