

P 10

Fluides en écoulement laminaire stationnaire

10.1 Compétences du chapitre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Fluides parfaits. Fluides newtoniens : notion de viscosité.	<ul style="list-style-type: none"> Caractériser un fluide parfait par un profil de vitesse uniforme dans une même section droite. Citer des ordres de grandeur de viscosité de gaz et de liquides (dans le cadre des machines hydrauliques et thermiques, des lubrifiants, ...). Relier l'expression de la force surfacique de cisaillement au profil de vitesse. Exploiter les conditions aux limites du champ de vitesse d'un fluide dans une conduite. Lier qualitativement l'irréversibilité d'un écoulement à la viscosité.
Bilan de grandeurs énergétiques extensives.	<ul style="list-style-type: none"> Définir un volume et une surface de contrôle stationnaire. Énoncer et mettre en œuvre la conservation de l'énergie mécanique pour des systèmes ouverts et fermés.
Bilan d'énergie pour un fluide parfait, relation de Bernoulli.	<ul style="list-style-type: none"> Établir un bilan de puissance pour un circuit hydraulique ou pneumatique avec ou sans pompe. Exploiter la relation de Bernoulli pour un fluide incompressible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Perte de charge singulière et régulière.	<ul style="list-style-type: none">• Modifier la relation de Bernoulli afin de tenir compte de la dissipation d'énergie mécanique par frottement.• <i>Mettre en évidence la perte de charge.</i>





— Écoulement laminaire —

Dans le chapitre 6.1, nous avons vu que dans un fluide au repos, les forces de pression sont normales à l'élément de surface sur lequel elles s'exercent.

Pour un fluide en mouvement, il faut envisager d'autres forces : celles relatives à la viscosité. Ainsi, dans les fluides "pâteux" (miel, verre en fusion, ...), ces phénomènes de viscosité deviennent prépondérants.

Le cas limite idéal dans lequel les phénomènes de viscosité sont négligeables correspondent au fluide parfait :



— Fluide parfait —

Le profil des vitesses dans un fluide parfait est uniforme :

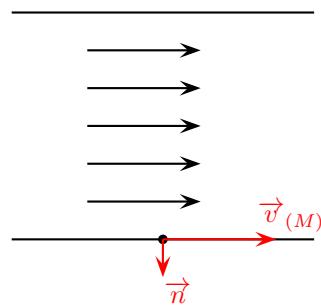


FIGURE 10.1 – Profil de vitesse uniforme

Le fluide glisse sur les parois, il n'y a aucune adhérence.

Les conditions aux limites pour un fluide parfait à la surface d'une conduite immobile sont, pour un point M voisin de la paroi :

$$\vec{v}_{(M)} \cdot \vec{n} = 0$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire normal à la paroi.

La vitesse est alors tangentielle à la paroi.

Si la paroi est elle-même en mouvement, en notant M_{paroi} un point de la paroi proche de M , la relation précédente devient :

$$(\vec{v}_{(M)} - \vec{v}_{(M_{\text{paroi}})}) \cdot \vec{n} = 0$$

ou encore :

$$v_{(M),\perp} = v_{(M_{\text{paroi}}),\perp}$$

10.2 Viscosité

Dans un fluide réel en écoulement, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent.

Considérons un fluide réel, en écoulement unidimensionnel laminaire dont le champ des vitesses est de la forme : $\vec{v} = v(z) \vec{e}_x$.

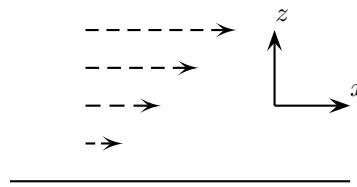


FIGURE 10.2 – Profil de vitesse non uniforme

Les actions de contact exercées par le fluide de la couche (1) sur le fluide de la couche (2) à travers la surface dS se décomposent en une composante normale et une composante tangentielle :

$$\vec{dF}_{1 \rightarrow 2} = \vec{dF}_{n,1 \rightarrow 2} + \vec{dF}_{t,1 \rightarrow 2}$$

La composante normale définit la pression $p(M, t)$:

$$\vec{dF}_{n,1 \rightarrow 2} = p(M, t) \vec{dS}_{1 \rightarrow 2} = p(M, t) \vec{n}_{1 \rightarrow 2} dS$$

La composante tangentielle est appelée *force de viscosité* ou *force de cisaillement*. Dans le cas d'un fluide dit *newtonien*, elle s'écrit :

$$\vec{dF}_{t,1 \rightarrow 2} = -\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) dS \vec{e}_x$$

η , strictement positif, est appelé coefficient de viscosité, ou viscosité **dynamique** du fluide.

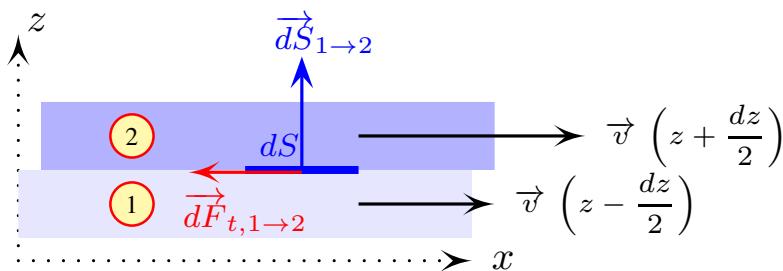


FIGURE 10.3 – Viscosité : champ des vitesses



— Fluide newtonien —

Un fluide newtonien est un fluide dans lequel les forces visqueuses sont proportionnelles à la différence de vitesse, c'est-à-dire au gradient des vitesses.

La contrainte (force surfacique) $\vec{\sigma}$ exercée par une couche supérieure sur un élément de surface inférieure, s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{2 \rightarrow 1} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \sigma_n \vec{n} + \sigma_t \vec{t}$$

avec $\sigma_n = -p$, p étant la pression.



— Contrainte de cisaillement —

La contrainte visqueuse, force surfacique de cisaillement, est donnée par :



où $\frac{\partial v}{\partial n}$ désigne le gradient des vitesses dans la direction normale à la surface, par exemple $\frac{\partial v}{\partial z}$.

Pour un fluide newtonien, les conditions aux limites sont nettement différentes de celles d'un fluide parfait. En effet, pour un point voisin de la surface d'une conduite :

$$\overrightarrow{v_{(M)}} = \vec{0}$$

Évidemment, si la paroi est mobile, on a :

$$(\vec{v}_{(M)} - \vec{v}_{(M_{\text{paroi}})}) = \vec{0}$$

ou encore :

$$v_{(M),\perp} = v_{(M_{\text{paroi}}),\perp} \text{ et } v_{(M),\parallel} = v_{(M_{\text{paroi}}),\parallel}$$

Le profil des vitesses qui en découle possède l'allure suivante :

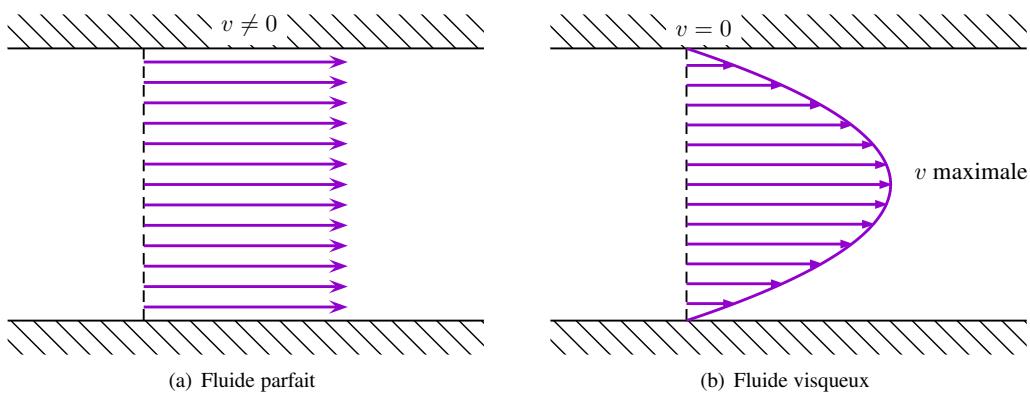


FIGURE 10.4 – Viscosité : profil de vitesses



— Remarque —

Évidemment, le fluide de la couche (1) exerce sur le fluide de la couche (2) une force opposée et égale en module :

$$\vec{dF}_{t,1 \rightarrow 2} = -\vec{dF}_{t,2 \rightarrow 1}$$



— Viscosité —

La viscosité d'un fluide peut se définir comme la propriété de résistance d'un fluide à l'écoulement.

Bien évidemment, l'écoulement d'un fluide visqueux ne peut être qu'irréversible, en raison des frottements qui en découlent.

Les unités :

L'unité de la viscosité dynamique est le poiseuille de symbole $P\ell$.

⇒ **Activité 10.1**

Trouver l'unité de la viscosité dynamique dans les unités du système international.

Quelques ordres de grandeur :

Fluide	Viscosité dynamique (en $Pa.s$)
eau (0 °C)	$1,787 \cdot 10^{-3}$
eau (20 °C)	$1,002 \cdot 10^{-3}$
eau (100 °C)	$2,818 \cdot 10^{-4}$
mercure (20 °C)	1,554
huile d'olive (20 °C)	$\simeq 10^{-1}$
éthanol (20 °C)	$1,20 \cdot 10^{-3}$
glycérol (20 °C)	$\simeq 1,49$
benzène (20 °C)	$6,25 \cdot 10^{-4}$
H_2 (20 °C)	$8,60 \cdot 10^{-6}$
O_2 (20 °C)	$1,95 \cdot 10^{-5}$
air (20 °C)	$1,85 \cdot 10^{-5}$

TABLE 10.2 – Viscosités dynamiques

On définit aussi le coefficient de viscosité **cinétique** d'un fluide :



— Viscosité cinétique —

La viscosité cinétique d'un fluide est le rapport entre son coefficient de viscosité et sa masse volumique :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

La viscosité cinétique tient compte non seulement de la viscosité, mais également de l'inertie du fluide.

Un ordre de comparaison : $\nu_{\text{air}} \simeq 15 \nu_{\text{eau}}$.



— Exemple —

Un cas très utilisé est celui d'une sphère de rayon r animé d'une vitesse v faible dans un fluide (vitesse par rapport à celui-ci). Celle-ci subit de la part de ce fluide une force de frottement :

$$\vec{F}_f = -6 \pi \eta r \vec{v}$$

Cette formule porte le nom de formule de Stokes.

10.3**Écoulements laminaire et turbulent****10.3.1****Première expérience**

L'écoulement de l'eau à la sortie d'un robinet permet de mettre en évidence des phénomènes différents :

- à des débits faibles, mais continus, l'écoulement est stable : les lignes de courant sont disposées de façon régulière les unes par rapport aux autres. On est alors en présence d'écoulement laminaire.
- si on augmente le débit, des gouttes sont émises en périphérie de l'écoulement principal, de façon périodique : l'écoulement est alors plus instable.
- si on augmente encore le débit, il est possible d'observer une alternance régulière de grosses et de petites gouttes. Il peut également y avoir des zones dans lesquelles l'écoulement est irrégulier. L'écoulement est alors turbulent. Ce phénomène de turbulence peut augmenter : l'écoulement peut en effet devenir très chaotique.

10.3.2**Deuxième expérience**

Considérons une cuve assez haute au fond de laquelle est percée un orifice de petite taille.

Suivant la nature du liquide, par exemple de l'huile ou de l'eau, la forme du jet est différente. Ainsi, l'écoulement de l'huile, lent, donne un jet vertical, stable et cylindrique. À l'inverse, de l'eau donne un jet plus rapide, turbulent, dans lequel des gouttelettes se détachent de l'écoulement principal.

On voit ici que la viscosité influe sur la nature de l'écoulement.

10.3.3**Nombre de Reynolds**

Comme on l'a vu précédemment, la nature de l'écoulement dépend de la vitesse de l'écoulement. Le paramètre déterminant est un nombre sans dimension, appelé nombre de Reynolds.

**— Nombre de Reynolds —**

C'est un nombre sans dimension, caractérisant l'écoulement d'un fluide dans une conduite ou autour d'un obstacle.

Son expression est :



avec :

- ρ la masse volumique du fluide,
- v sa vitesse,
- η sa viscosité dynamique,
- ν sa viscosité cinématique,
- d une longueur caractéristique du système : le diamètre de la canalisation ou de l'obstacle.

Lorsque le nombre de Reynolds est faible, l'écoulement est laminaire. Lorsqu'il est élevé, il est turbulent.

- Un écoulement laminaire correspond à des valeurs du nombre de Reynolds inférieures à environ 1.
- Aux valeurs intermédiaires du Reynolds (entre 1 et 2000 environ), les forces d'inertie sont prépondérantes, mais l'écoulement reste laminaire. Cependant, il n'est plus réversible : si l'on stoppe les forces extérieures, le fluide continue partiellement sur sa lancée.
- Un écoulement est turbulent si le nombre de Reynolds est supérieur à environ 2000.

Il faut cependant comprendre que ces valeurs sont indicatives car elles dépendent de la géométrie de l'écoulement.

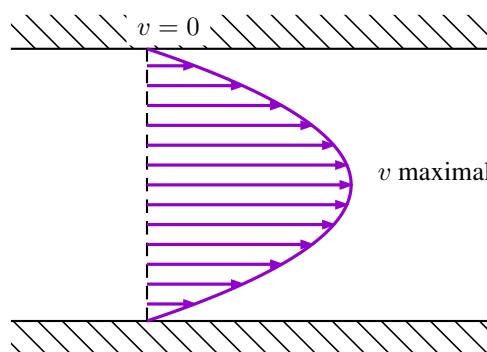


— Exemples —

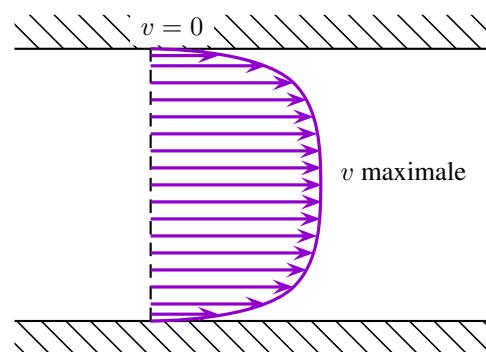
- Dans une conduite, l'écoulement est laminaire lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à une valeur critique pour laquelle se produit une transition assez brutale vers le turbulent. 2300 est la valeur généralement retenue pour cette transition mais, dans des conditions soignées (paroi particulièrement lisse, stabilité de la vitesse), la transition peut se produire pour une valeur plus élevée. On considère souvent que la transition peut se produire entre 2000 et 3000.
- Sur un cylindre à section circulaire placé dans un écoulement, on obtient un écoulement proprement laminaire qui s'ajuste parfaitement à l'obstacle jusqu'à un nombre de Reynolds de l'ordre de 1. Un sillage turbulent apparaît à l'aval aux environs de 105. Entre les deux, la transition se fait à travers diverses formes de sillages tourbillonnaires.
- Avec une plaque plane située dans le lit de l'écoulement, la dimension caractéristique n'est plus l'épaisseur de celle-ci mais la distance d'un point au bord d'attaque. En effet une couche limite, dans laquelle interviennent la viscosité ou la turbulence, se développe à partir du bord d'attaque. Si celui-ci présente une arête émoussée, la couche limite est turbulente dès le début. Dans le cas d'un bord effilé, la couche limite est laminaire sur une certaine longueur, plus turbulente ensuite. Ce caractère laminaire se maintient jusqu'à la distance qui correspond au nombre de Reynolds critique de l'ordre de $5 \cdot 10^5$, la zone située au delà développant une couche limite turbulente.
- Pour un profil d'aile, la distribution d'épaisseur le long de la corde (et le gradient de pression négative associé) de certains profils dits "laminaires" stabilise la laminarité et permet de reculer le point de transition bien au delà de $5 \cdot 10^5$: des valeurs de $7 \cdot 10^6$ sont possibles dans des conditions aérologiques non turbulentes (difficiles à obtenir en soufflerie) sur une surface parfaitement lisse (ailes de planeurs).
- Un corps profilé comme un fuselage peut avoir une transition reculée jusqu'à $5 \cdot 10^7$, dans des conditions idéales également.

10.3.4 Profil des vitesses

Comparons les profils des vitesses d'écoulements laminaire et turbulent :



(a) Écoulement laminaire



(b) Écoulement turbulent

FIGURE 10.5 – Profils d'écoulements

10.4 Écoulement parfait

10.4.1 Le modèle



— Écoulement parfait —

Un écoulement est dit parfait si tous les phénomènes diffusifs peuvent être négligés.

Pour une particule de fluide, cela correspond à négliger les phénomènes diffusifs suivants :

- de quantité de mouvement : absence de viscosité
- de transfert thermique : évolution adiabatique



— Propriété —

Un écoulement parfait évolue de manière adiabatique réversible.

Pour un fluide parfait, la viscosité η est nulle et le nombre de Reynolds R_e est infini. Un écoulement de fluide parfait devrait donc être turbulent. Ce n'est pas le cas car le modèle du fluide parfait n'est pas une extrapolation du fluide réel de faible viscosité.

En effet, la vitesse d'un fluide réel, même de très faible viscosité, est nulle au contact du solide (conduite ou obstacle) alors que celle d'un fluide parfait est non nulle et tangente à la surface du solide.

10.4.2 Limites du modèle

Un fluide transporte de la quantité de mouvement : ce type de transport dû au mouvement est appelé transport convectif.

Le mouvement est également lié à la mise en mouvement de proche en proche des couches de fluide : ce type de mouvement est diffusif. Le nombre de Reynolds peut également s'écrire :

$$R_e = \frac{v d}{\nu}$$

Le numérateur correspond au terme convectif (de convection) et le dénominateur correspond au terme diffusif (de diffusion).

Près d'un obstacle, le terme diffusif est toujours prépondérant sur le terme convectif. Il existe donc une couche, dite couche limite, où le modèle de l'écoulement parfait n'est pas vérifié.



— Couche limite —

Sur une petite épaisseur δ autour de l'obstacle se concentrent les phénomènes de viscosité. Au delà, l'écoulement pourra être considéré comme parfait

Pour un écoulement parfait, on néglige l'épaisseur de la couche limite.

$$\vec{v}_{\text{interface}} \cdot \vec{n} = 0$$

De façon générale, on a, pour un fluide parfait, les propriétés suivantes :



— Conditions aux limites d'un fluide parfait —

À la traversée d'une interface :

- la composante normale de la vitesse est continue,
- la pression est continue.

10.5 Théorème de Bernoulli

Considérons un écoulement stationnaire, incompressible, et sans viscosité.

Les conditions d'étude sont donc :

- fluide parfait
- écoulement permanent (les trajectoires s'identifient aux lignes de courant)
- écoulement incompressible (la masse volumique ρ est constante le long d'une trajectoire)
- nous supposerons en outre que les forces volumiques extérieures dérivent d'une énergie potentielle e_p

10.5.1 Bilan d'énergie cinétique

Considérons comme système, le fluide situé entre A et B à l'instant t et entre A' et B' à l'instant $t + dt$:

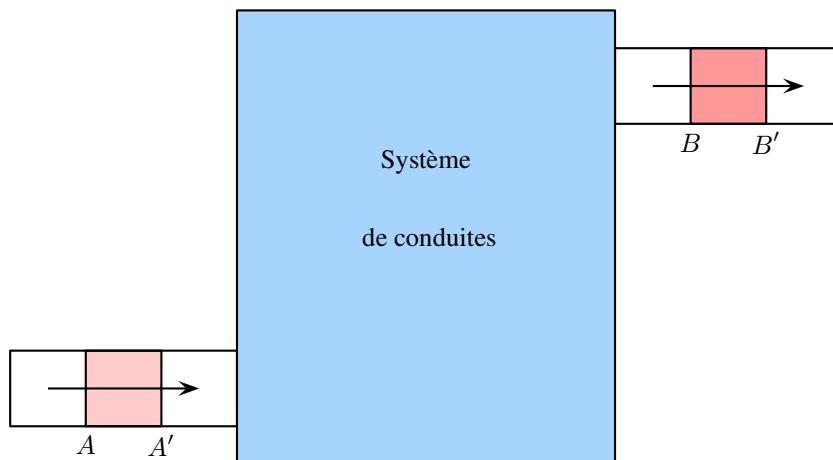


FIGURE 10.6 – Écoulement dans un système

La masse transférée est $\delta m = D_m dt = \rho D_V dt$.

Le débit massique est uniforme le long de la canalisation car l'écoulement est stationnaire.

Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$dE_c = E_c(t+dt) - E_c(t) = \delta W$$

Le régime étant permanent, l'énergie cinétique de la portion de fluide située entre A' et B se conserve :

$$E_c^{A'B}(t+dt) = E_c^{A'B}(t)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} dE_c &= E_c(t+dt) - E_c(t) \\ &= \underbrace{\left[E_c^{A'B}(t+dt) + E_c^{BB'} \right]}_{t+dt} - \underbrace{\left[E_c^{A'B}(t) + E_c^{AA'} \right]}_t \\ &= E_c^{BB'} - E_c^{AA'} \\ &= \frac{1}{2} \delta m (v_B^2 - v_A^2) \\ &= \frac{1}{2} D_m dt (v_B^2 - v_A^2) \end{aligned}$$

Concernant le travail δW , on peut distinguer 2 termes :

- les forces de pesanteur, qui fournissent, avec un axe z ascendant, un travail élémentaire :

$$\delta W_g = -D_m dt g (z_B - z_A)$$

- les forces de pression, dont le travail élémentaire vaut :

$$\delta W_p = p_A D_V dt - p_B D_V dt$$

En effet, en utilisant la définition du travail ainsi que les expressions $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ et $d\ell = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \text{ pour une force conservative} \\ \delta W &= \vec{F} \cdot d\ell \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\ell \\ &= -dE_p\end{aligned}$$

Ici :

$$\begin{aligned}\delta^2 W_g &= \vec{dF} \cdot \vec{d\ell} \\ &= \vec{dP} \cdot \vec{d\ell} \\ &= \delta m \vec{g} \cdot \vec{d\ell} \\ &= -\delta m g dz \\ \delta W_g &= -\delta m g (z_B - z_A)\end{aligned}$$

ou en utilisant l'énergie potentielle de pesanteur :

$$\delta^2 W_g = -d^2 E_p$$

avec $dE_p = \delta m g z + C^{te}$, on obtient :

$$\delta W_g = -dE_p = -\delta m g (z_B - z_A)$$

De plus :

$$\begin{aligned}\delta W_p &= p_A \delta V_A - p_B \delta V_B \\ &= p_A D_V dt - p_B D_V dt\end{aligned}$$

On obtient, avec $D_V = \frac{D_m}{\rho}$:

$$\underbrace{\frac{1}{2} D_m dt (v_B^2 - v_A^2)}_{dE_c} = \underbrace{-D_m g dt (z_B - z_A)}_{\delta W_g} + \underbrace{\frac{p_A}{\rho} D_m dt - \frac{p_B}{\rho} D_m dt}_{\delta W_p}$$

En passant les indices A d'un côté et B de l'autre, en simplifiant par $D_m dt$ et en multipliant par ρ , il vient :

$$p_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A = p_B + \rho \frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B$$

On en déduit finalement :



— Théorème de Bernoulli (1738) —

Pour un écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide parfait, la quantité $p + \rho \frac{v^2}{2} + e_{p,V}$ se conserve le long d'une ligne de courant.

Ainsi, dans le champ de pesanteur, et avec z ascendant, l'énergie potentielle volumique de gravité $e_{p,V}$ vaut $\rho g z + C^{te}$ et le long d'une ligne de courant, on a :

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z = C^{te}}$$



— Remarque —

Si l'écoulement du fluide est de plus irrotationnel, alors la relation précédente est valable en tout point du fluide en écoulement.

10.5.2 Interprétation énergétique

L'équation de Bernoulli ne fait que traduire la conservation de l'énergie :

- $\frac{p}{\rho}$ est une énergie massique associée aux forces de pression,
- $e_p = g z$ est l'énergie potentielle massique associée aux forces de pesanteur (dont le poids),
- $e_c = \frac{1}{2} v^2$ représente l'énergie cinétique massique.

Si on choisit d'écrire la relation de Bernoulli sous la forme :

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = C^{te}$$

on peut faire apparaître :

- la pression statique $p^* = p + \rho g z$,
- la pression dynamique $\frac{1}{2} \rho v^2$.



— Remarques —

- $\frac{p^*}{\rho g} = z + \frac{p}{\rho g}$ est appelée **hauteur piézométrique**,
- $p^* + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g}$ est appelée **charge totale**.

10.5.3 Applications

10.5.3.1 Le tube de Pitot

La sonde de Pitot permet de mesurer la vitesse d'un écoulement de fluide autour d'une structure, par exemple de l'air pour un avion. Cette sonde est composée de 2 prises de pression.

À l'entrée du tube en A , la vitesse du fluide est nulle : c'est un *point d'arrêt*.

Au point B , la vitesse du fluide est égale à la vitesse v_B : celle-ci est supposée non perturbée par la sonde et on obtient donc $v_B \approx v = v_M$.

Les altitudes de A M et B sont identiques (ou presque).

Si le fluide est de l'air de masse volumique ρ_{air} à la pression p_{air} , la relation de Bernoulli s'écrit alors entre M et A :

$$\begin{aligned} p_A + \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} v_A^2 + \rho_{\text{air}} g z_A &= p_M + \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} v_M^2 + \rho_{\text{air}} g z_M \\ p_A &= p_M + \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} v_M^2 \quad (z = C^{te}) \\ p_A &= p_{\text{air}} + \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} v^2 \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

La relation de Bernoulli entre B et M s'écrit, en négligeant toujours le terme d'énergie potentielle (donc les forces de pesanteur) :

$$\begin{aligned} p_B + \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} v_B^2 + \rho_{\text{air}} g z_B &= p_M + \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} v_M^2 + \rho_{\text{air}} g z_M \\ p_B + \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} v_B^2 &= p_M + \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} v_M^2 \quad (z = C^{te}) \\ p_B &= p_M \quad (v_B = v_M) \end{aligned}$$

Avec la relation ①, on obtient :

$$p_A - p_B = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} v^2 \quad ②$$

Or, dans le liquide, de masse volumique ρ_ℓ , on a :

$$p_{A'} - p_{B'} = \rho_\ell g h$$

En supposant $\rho_\ell \gg \rho_{\text{air}}$:

$$p_A - p_B = \rho_\ell g h \quad ③$$

La vitesse du fluide peut alors en être déduite des équations ② et ③ :

$$v = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho_{\text{air}}}}$$

ou encore :

$$v = \sqrt{2g h \frac{\rho_\ell}{\rho_{\text{air}}}}$$

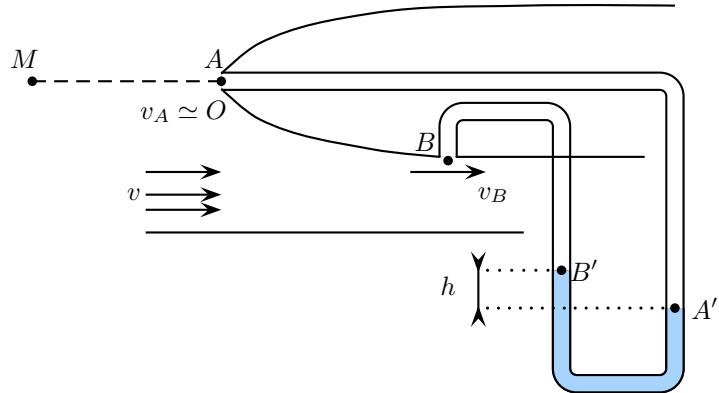


FIGURE 10.7 – Tube de Pitot

⇒ Activité 10.2

Effectuez le calcul rigoureux, sans utiliser l'approximation $\rho_\ell \gg \rho_{\text{air}}$. On prendra $z_A \simeq z_B$.



10.5.3.2 Autres applications

L'équation de Bernoulli permet de comprendre le principe de divers instruments et appareils tels que trompe à eau, bec Bunsen, pistolet à peinture, carburateur, ...

En revanche, elle ne permet pas d'expliquer les pertes de charge dans les tuyaux, car le fluide est supposé non visqueux.

10.6 Perte de charge
10.6.1 Mise en évidence
10.6.1.1 Dispositif expérimental

Dans cette expérience, un réservoir, qui garde son niveau constant grâce à un système de trop plein se déverse dans une canalisation sur laquelle sont disposées un certain nombre de prises de pression statique.

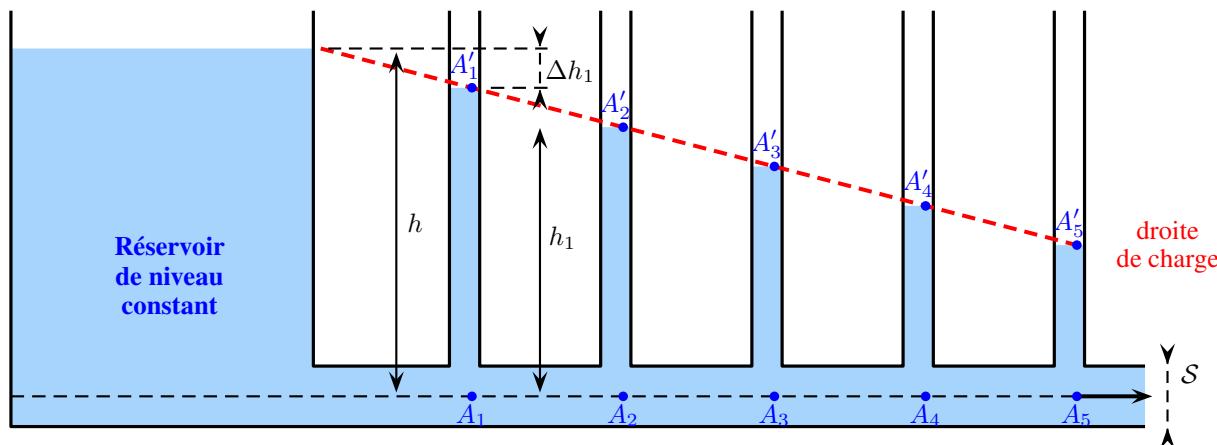


FIGURE 10.8 – Perte de charge

10.6.1.2 Observations

On constate que :

- le niveau affiché dans les prises de pression est différent,
- ce niveau diminue avec l'éloignement du réservoir,
- cette diminution est proportionnelle à cet éloignement.

⇒ **Activité 10.3**

Ces observations sont-elles compatibles avec le théorème de Bernoulli ?

Ceci vient dans la réalité de dissipations par frottements dans l'écoulement : l'égalité de Bernoulli n'est pas vérifiée. En effet, entre l'amont (noté e pour *entrée*) et l'aval (noté s pour *sortie*), on a :

$$p_s + \rho g z_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2 < p_e + \rho g z_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2$$

10.6.2 Définition



— Perte de charge —

Les unités :

La perte de charge Δp_η s'exprime évidemment en Pa .

Considérons un tronçon de conduite parcouru par un fluide incompressible, en régime stationnaire.

Deux termes interviennent dans le calcul des pertes de charge :

- la perte de charge régulière, c'est-à-dire la perte de charge en ligne, qui est due aux frottements le long du trajet (cette perte de charge régulière dépend de la nature du fluide, du matériau de la conduite, de sa géométrie, ...),
- la perte de charge singulière, liée à la présence d'obstacles localisés, tels que les robinets, vannes, coude, modifications brutales de sections, ...

10.6.3 Conséquences

Considérons un fluide réel, incompressible, en écoulement stationnaire dans un système de conduites. Le fluide traverse des machines avec lesquelles il peut échanger de l'énergie :

- des pompes pourront donner de l'énergie mécanique au fluide,
- des turbines recevront de l'énergie mécanique de la part du fluide.

Notons \mathcal{P}_i la puissance échangée avec le fluide ($\mathcal{P}_i > 0$ pour les pompes et $\mathcal{P}_i < 0$ pour les turbines).

Bilan d'énergie cinétique :

Considérons comme système, le fluide situé à entre A et B à l'instant t et entre A' et B' à l'instant $t + dt$:

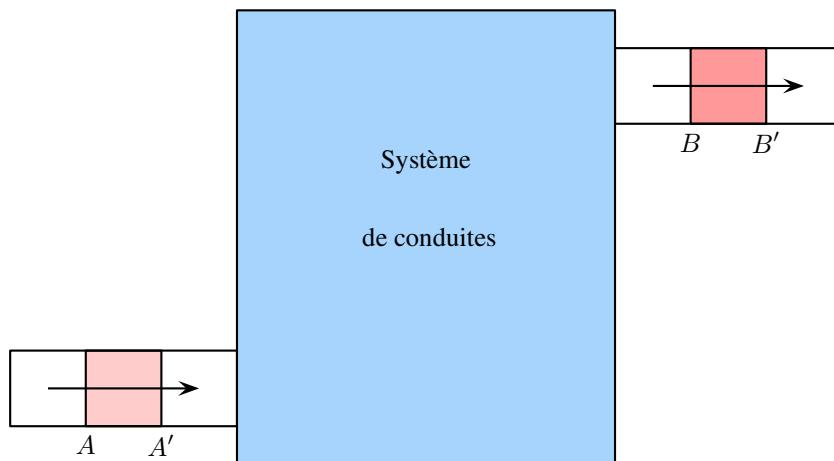


FIGURE 10.9 – Écoulement dans un système

La masse transférée est $\delta m = D_m dt = \rho D_v dt$.

Le débit massique est uniforme le long de la canalisation car l'écoulement est stationnaire.

Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$dE_c = E_c(t + dt) - E_c(t) = \delta W$$

Le régime étant permanent, l'énergie cinétique de la portion de fluide située entre A' et B se conserve. On obtient alors :

$$dE_c = E_c^{BB'} - E_c^{AA'} = \frac{1}{2} D_m dt (v_B^2 - v_A^2)$$

Concernant le travail δW , on peut distinguer 4 termes :

- les forces de pesanteur, qui fournissent, avec un axe z ascendant, un travail élémentaire :

$$\delta W_g = -D_m dt g (z_B - z_A)$$

- les forces de pression, dont le travail élémentaire vaut :

$$\delta W_p = p_A D_V dt - p_B D_V dt$$

- le travail des machines :

$$\delta W_i = \mathcal{P}_i dt$$

- le travail des forces visqueuses, résistantes et qui fournissent au fluide le travail élémentaire négatif (puisque résistant) :

$$\delta W_\eta = -D_V \Delta p_\eta dt$$

On obtient alors, avec $D_V = \frac{D_m}{\rho}$:



— Théorème de Bernoulli généralisé —

On peut écrire également :

$$p_B - p_A + \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) + \rho g (z_B - z_A) = \frac{\mathcal{P}_i}{D_V} - \Delta p_\eta$$

ou encore, avec $D_m = \rho D_V$ et $J_{AB} = -\frac{\Delta p_\eta}{\rho} < 0$:

$$\frac{p_B - p_A}{\rho} + \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2) + g (z_B - z_A) = \frac{\mathcal{P}_i}{D_m} + J_{AB}$$

ou même, en notant $h_\eta = \frac{\Delta p_\eta}{\rho g}$:

$$\frac{p_B - p_A}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{(v_B^2 - v_A^2)}{g} + (z_B - z_A) = \frac{\mathcal{P}_i}{g D_m} - h_\eta$$

Dans les 3 expressions encadrées ci-dessus, Δp_η , J_{AB} et h_η représentent les pertes de charge.

- $\Delta p_\eta > 0$ représente une perte de pression,
- $J_{AB} < 0$ représente une perte d'énergie massique (puisque homogène à $\frac{\mathcal{P}_i}{D_m} = w_i$),
- $h_\eta > 0$ représente une perte de hauteur de liquide.

La perte de charge J_{AB} peut être due à une perte de charge régulière (ou linéaire), notée J_R ou J_L ou à une perte de charge singulière, notée J_S .

10.6.4 Pertes de charge singulières

Quand la conduite subit de brusques variations de section ou de direction, il se produit des pertes de charge dites singulières.

Celles-ci peuvent être mesurées et calculées à l'aide de l'expression suivante :

$$J_S = -K_S \frac{v^2}{2}$$

K_S est un coefficient sans unité et v est la vitesse du fluide.

10.6.5 Pertes de charge régulières

Les pertes de charge régulières ou linéaires sont réparties de façon régulière le long de la conduite. Elles sont proportionnelles à la longueur L de la conduite, inversement proportionnelles à son diamètre intérieur d et proportionnelles à la vitesse v du fluide.

En notant λ le coefficient de perte de charge linéaire (ou régulière) :

$$J_L = J_R = -\lambda \frac{v^2}{2} \frac{L}{d}$$



— Propriété —

En complément des valeurs indiquées page 193, on pourra pour la suite admettre les résultats empiriques à titre indicatif :

- Si $Re < 2000$, l'écoulement est laminaire.
- Si $Re > 2000$, l'écoulement est turbulent :
 - lisse si $2000 < Re < 10^5$,
 - rugueux si $Re > 10^5$.

On peut calculer de façon approximative les pertes de charge régulières en utilisant les formules suivantes :

- Dans un régime d'écoulement laminaire, on peut poser :

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad \text{formule de Poiseuille}$$

- Dans un régime d'écoulement turbulent lisse, on peut poser :

$$\lambda = 0,316 Re^{-1/4} \quad \text{formule de Blasius}$$

- Dans un régime d'écoulement turbulent rugueux, on peut poser :

$$\lambda = 0,79 \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}} \quad \text{formule de Blenck}$$

d et ε s'expriment en mm (ε est la rugosité de la surface interne de la conduite)



— Remarque —

D'autres formules existent pour évaluer les pertes de charge.