

Cours & Exercices: Electricité



Avant propos

Ce manuel cours et des travaux dirigés corrigés, est un outil nécessaire pour les étudiants du réseau I.S.E.T, désirant améliorer, approfondir ses connaissances en matière électricité générale.

Il permet aux étudiants d'acquérir les notions de base tout en s'appuyant sur des exemples et exercices pratiques et réels, faciles à mettre en œuvre permettant d'assimiler les connaissances acquises.

Liste de matières

Chapitre 1: Notions de base d'électricité	1
1. Différence de potentiels	2
2. Courant électrique	2
3. Puissance et énergie électriques	2
4. Dipôle électrique	2
4.1. Définition	2
4.2. Dipôle actif	3
4.3. Dipôle passif	3
4.4. Dipôle linéaire	6
4.5. Dipôle non linéaire	7
5. Association de dipôles passifs	7
6. Association de dipôles actifs	9
7. Théorème de Kennely	11
Exercices sur le chapitre 1	13
Corrections des exercices du chapitre 1	15
Chapitre 2: Etude et calcul des circuits électriques en régime du courant continu	16
1. Circuit électrique	17
2. Les méthodes d'analyse d'un circuit électrique linéaire	18
2.1. Lois de Kirchoff	18
2.2. Simplification du calcul d'un circuit électrique	19
2.3. Théorème de Thévenin	20
2.4. Théorème de Norton	21
2.5. Théorème de Superposition	22
2.6. Théorème de Millman	24

Sommaire

Exercices sur le chapitre 2	26
Correction des exercices du chapitre 2	30
Chapitre 3: Etude des circuits électriques monophasés à courant alternatif	34
1. Introduction	35
2. Signal alternatif et périodique	35
3. Signal sinusoïdal	36
4. Méthode vectorielle de Fresnel	36
5. Méthode d'utilisation de notation complexe	37
5.1. Impédance complexe d'un dipôle linéaire	40
5.2. Equations complexes des dipôles usuels	41
6. Angle de charge d'un dipôle linéaire	41
7. Etude de quelques récepteurs élémentaires	42
8. Etude d'un circuit RLC série en régime sinusoïdal	42
9. Notions de puissances en monophasé	44
9.1. Définition	44
9.2. Mesure de puissances en régime monophasé	44
Exercices sur le chapitre 3	45
Correction des exercices du chapitre 3	51
Chapitre 4: Etude et calcul des circuits triphasés à courant alternatif	56
1. Introduction	57
2. Réseau triphasé directe	57
3. Tension simple et tension composée	57
4. Etude de différentes liaisons entre un réseau et une charge, en régime triphasé équilibré	61

4.1.Liaison entre un réseau et une charge, couplés en étoile	61
4.2.Liaison entre un réseau couplé en étoile et une charge couplée en triangle	63
4.3.Liaison entre un réseau et une charge, couplés en triangle	64
4.4.Liaison entre un réseau couplé en triangle et une charge couplée en étoile	66
5. Notions de puissances en régime triphasé équilibré	67
6. Etude de la liaison d'un réseau et d'une charge, en régime triphasé déséquilibré	69
6.1.Etude de la liaison d'un réseau et d'une charge, en régime triphasé déséquilibré, avec neutre relié	70
6.2.Etude de la liaison d'un réseau et d'une charge, en régime triphasé déséquilibré, neutre non relié	71
7. Notions de puissances en régime triphasé déséquilibré	72
8. Théorème de Boucherot	73
9. Relèvement du facteur de puissance en triphasé	73
9.1.Couplage des condensateurs en triangle	73
9.2.Couplage des condensateurs en étoile	74
Exercices sur le chapitre 4	75
Correction des exercices du chapitre 4	79
Bibliographie	86

Chapitre 1: Notions de base d'électricité

1. Différence de potentiels

La différence de potentiels (ou tension) est une différence entre deux points électriques, de charge de nature différente.

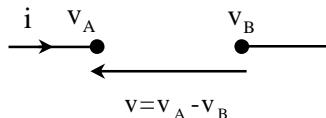


Fig.1.1: Différence de potentiel électrique

2. Courant électrique

Le courant électrique est défini comme étant le déplacement des charges électroniques entre deux points électriques. Il résulte suite à une application d'une différence de potentiel à une charge électrique. Il est défini par: $i = \frac{dq}{dt}$. Avec:

$$\begin{cases} dq: \text{Charge élémentaire en coulomb (C),} \\ i: \text{Courant électrique en ampères (A),} \\ dt: \text{Temps infiniment petit en secondes (S)} \end{cases}$$

3. Puissance et énergie électriques

L'énergie électrique élémentaire est définie par: $dw = vidt$ et s'exprime en joules (J). La puissance électrique instantanée est définie par à travers l'énergie par: $p = \frac{dw}{dt}$ et s'exprime en watts (W).

4. Dipôle électrique

4.1. Définition

On appelle dipôle électrique tout système formé par de deux bornes.

Le comportement d'un dipôle est caractérisé par la relation entre la tension à ses bornes et le courant qui le traverse.

Il existe deux possibilités pour le choix des sens conventionnels de la tension et du courant.

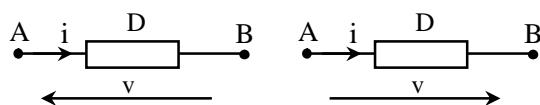


Fig.1.2: Dipôles électriques

Convention générateur:

Le courant et la tension du dipôle, sont orientés dans le même sens, il en résulte que ce dipôle fournit de la puissance.

Convention générateur:

Le courant et la tension du dipôle, sont orientés dans le sens opposé, il en résulte que ce dipôle reçoit de la puissance.

4.2.Dipôle actif

Un dipôle actif est capable de fournir de l'énergie électrique à une charge.

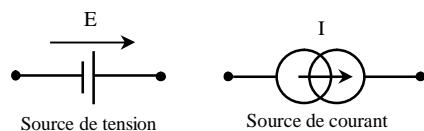


Fig.1.3: Sources électriques

Exemples de dipôles:

Générateur de tension:

Il est composé d'une source de tension en série avec une résistance interne.

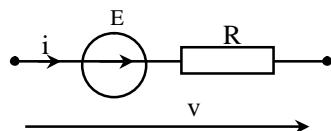


Fig.1.4: Source de tension réelle

Générateur de courant:

Il est composé d'une source de courant en parallèle avec une résistance interne.

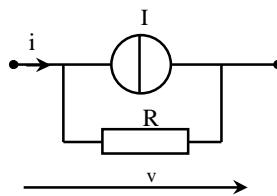


Fig.1.5: Source du courant réel

4.3.Dipôle passif

Un dipôle est dit passif, s'il est incapable de fournir de l'énergie électrique à un récepteur électrique.

Exemples de dipôles:

☒ Résistance:

La résistance (R) d'un fil conducteur d'électricité dépend de plusieurs paramètres:

- La section du fil conducteur (S),
- La longueur du fil conducteur (L),
- La résistivité électrique (ρ),
- La température du climat (T).

Symbol:

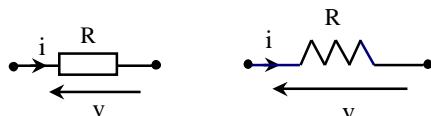


Fig.1.6: Symbole d'une résistance

Expressions:

Elle est définie par: $R = \frac{v}{i} = \rho \frac{L}{S}$ et elle s'exprime aussi par:

$$R = R_0 \cdot (1 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots + a_n T^n)$$
. Avec:

$\left\{ \begin{array}{l} R: \text{Résistance } (\Omega); \quad \rho: \text{Résistivité } (\Omega.m); \\ S: \text{Section } (m^2); \quad R_0: \text{Résistance à la température ambiante}; \\ a_n: \text{Coéfficients de température}; \\ T: \text{Température } (^{\circ}\text{C}). \end{array} \right.$

Résistivité de quelques fils conducteurs:

Conducteurs	Cuivre	Aluminium	Argent
Résistivité ρ (Ωm) à 0°C	$1.72 \cdot 10^{-8}$	$2.69 \cdot 10^{-8}$	$1.64 \cdot 10^{-8}$

☒ Condensateur:

Il est formé par deux armatures séparées par un isolant (diélectrique). Il peut être de type chimique (polarisé) ou de type céramique non polarisé. La capacité d'un condensateur s'exprime en Farad (F), ou en sous multiples de l'unité Farad. Suivant la forme géométrique du condensateur, elle dépend de plusieurs paramètres:

- Caractéristiques géométriques (surface: S; hauteur: h), épaisseur de l'isolant: e ; et rayons d'armatures: R₁ et R₂,
- Permittivité du vide: $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m}$,
- Permittivité relative aux armatures: ε_r.

Symbol:

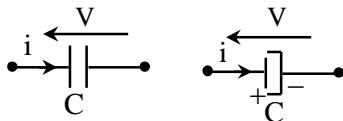


Fig.1.7: Symbole du condensateur

La capacité du condensateur est définie par: $C = \frac{dq}{dv}$.

Exemples de types de condensateurs:

Condensateurs	Forme géométrique	Expression
Plan		$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{e} \cdot S$
Cylindrique		$C = \frac{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{\log(\frac{R_2}{R_1})} \cdot h$

Fig.1.8: Quelques types des condensateurs

☒ Inductance d'une bobine:

Elle est définie à travers le flux magnétique créé par un courant électrique variable ou non, qui circule dans (N) conducteurs, portant un circuit magnétiques ou non. Elle dépend de plusieurs paramètres:

- Caractéristique géométrique (ℓ : longueur et S: section du fil),
- Caractéristique magnétique (perméabilité:μ).

Exemple:

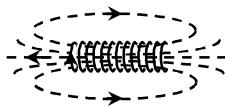


Fig.1.9: Bobine

Symbole:

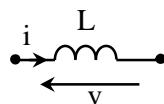


Fig.1.10: Symbole d'une inductance

Elle est définie par: $L = \frac{d\Phi}{di} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$. Avec:

$\left\{ \begin{array}{l} \Phi: \text{Flux magnétique (Wb)}; i: \text{Courant électrique (A)}; \\ L: \text{Inductance (H)}; \mu_0: \text{Perméabilité du vide}; \\ S: \text{Section (m}^2\text{)}; N: \text{Nombre de conducteurs}; \\ l: \text{Longueur de la bobine (m)}. \end{array} \right.$

4.4.Dipôle linéaire

Un dipôle est dit linéaire s'il est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

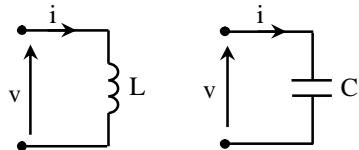


Fig.1.11: Dipôles linéaires

Le condensateur est un accumulateur de tension, son loi de variation est exprimée par : $i = C \frac{dv}{dt}$.

L'inductance est un accumulateur de courant, son loi de variation est exprimée: $v = L \frac{di}{dt}$.

4.5.Dipôle non linéaire

Un dipôle est dit non linéaire, s'il est décrit par une équation différentielle non linéaire.

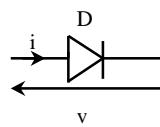


Fig.1.12: Dipôle non linéaire

5. Association de dipôles passifs

☒ Association des résistances en série:

La résistance équivalente d'un groupement des résistances en série est égale à la somme des résistances montées en série.

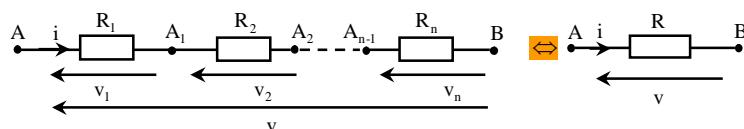


Fig.1.13: Groupement des résistances en série

$$\text{On a donc: } v = \sum_{K=1}^n v_K = \sum_{K=1}^n R_K \cdot i = R \cdot i, \text{ par conséquent on obtient: } R = \sum_{K=1}^n R_K = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

☒ Association des résistances en parallèle:

L'inverse de la résistance équivalente d'un groupement des résistances en parallèle est égale à la somme des inverses des résistances montées en parallèle.

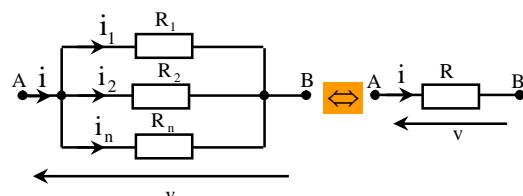


Fig.1.14: Groupement des résistances en parallèle

$$\text{On a donc : } i = \sum_{K=1}^n i_K = \sum_{K=1}^n \frac{v}{R_K}, \text{ par conséquent on obtient: } \frac{1}{R} = \sum_{K=1}^n \frac{1}{R_K} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

☒ Association des inductances en série:

L'inductance équivalente d'un groupement des inductances en série est égale à la somme des inductances montées en série. On a donc: $L_K = \sum_{K=1}^n L_K = L_1 + L_2 + \dots + L_n$.

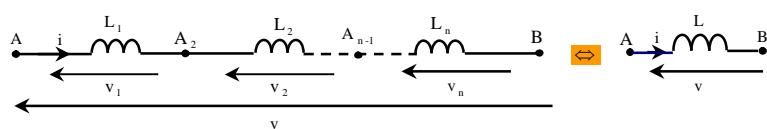


Fig.1.15: Groupement des inductances en série

☒ Association des inductances en parallèle:

L'inverse de l'inductance équivalente d'un groupement en parallèle des inductances est égale à la somme des inverses des inductances.

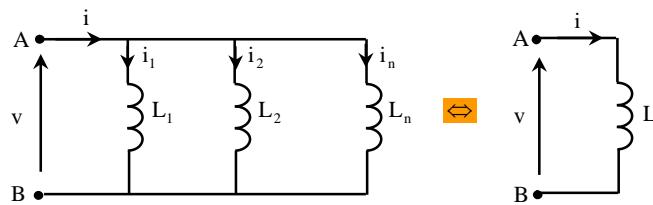


Fig.1.16: Groupement des inductances en parallèle

On a donc: $\frac{1}{L} = \sum_{K=1}^n \frac{1}{L_K} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$.

☒ Association des condensateurs en série:

L'inverse de la capacité équivalente d'un groupement en série des capacités est égal à la somme

des inverses des capacités. On a donc: $\frac{1}{C} = \sum_{K=1}^n \frac{1}{C_K} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$.

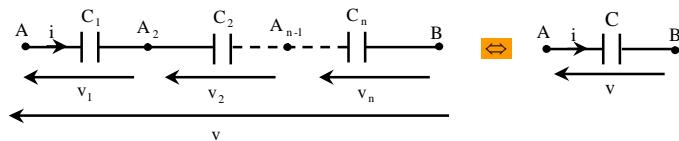


Fig.1.17: Groupement des condensateurs en série

☒ Association des condensateurs en parallèle:

La capacité équivalente d'un groupement en parallèle des capacités est égale à la somme des capacités montées en parallèle. En effet, on a donc : $C = \sum_{K=1}^n C_K = C_1 + C_2 + \dots + C_n$.

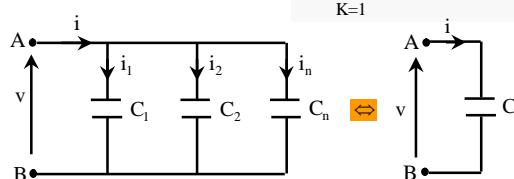


Fig.1.18: Groupement des condensateurs en parallèle

6. Association de dipôles actifs

☒ Association de générateurs de tension en série:

Le générateur équivalent est défini par une f.e.m: $E = \sum_{K=1}^n E_K$ et une résistance interne: $R = \sum_{K=1}^n R_K$.

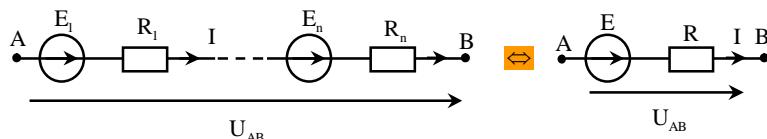


Fig.1.19: Groupement des sources de tension en série

☒ Association des générateurs de tension en parallèle:

Le générateur de tension équivalent est défini par une f.e.m.: $E = \frac{\sum_{K=1}^n E_K}{\sum_{K=1}^n \frac{1}{R_K}}$ et une résistance interne : $R = \frac{1}{\sum_{K=1}^n \frac{1}{R_K}}$

$$\text{interne : } R = \frac{1}{\sum_{K=1}^n \frac{1}{R_K}}.$$

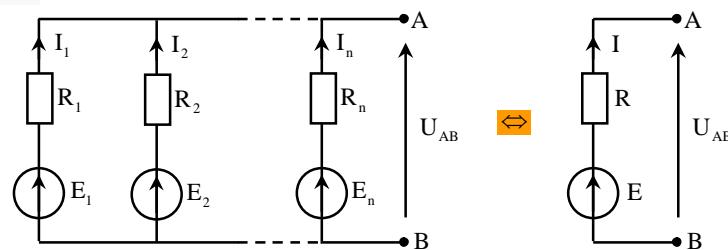


Fig.1.20: Groupement des sources de tension en parallèle

☒ Association des sources de courant en série:

Le générateur de courant équivalent est défini par un courant: $I_N = \frac{\sum_{K=1}^n R_K \cdot I_K}{\sum_{K=1}^n R_K}$ et une résistance interne: $R_N = \sum_{K=1}^n R_K$.

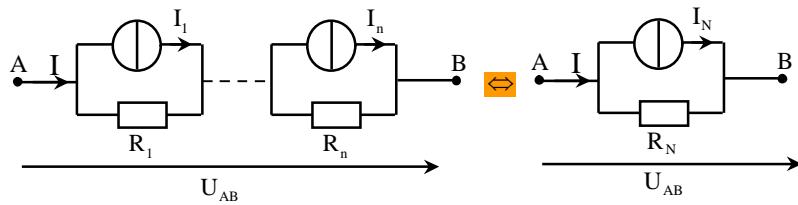


Fig.1.21: Groupement des sources de courant en série

☒ Association des sources de courant en parallèle:

Le générateur de courant équivalent est défini par courant: $I_N = \sum_{K=1}^n I_K$ et une résistance interne : $R_N = \frac{1}{\sum_{K=1}^n \frac{1}{R_K}}$.

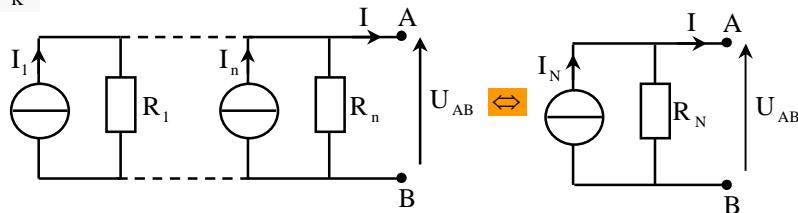


Fig.1.22: Groupement des sources de courant en parallèle

7. Théorème de Kennely

Il est relatif à la transformation des charges passives couplées en triangle en leurs équivalents couplées en étoile, et inversement.

☒ Transformation triangle étoile:

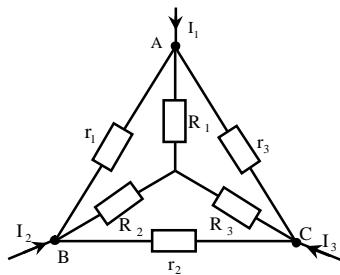


Fig.1.23: Transformation triangle étoile

Les valeurs de résistances sont exprimées par:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \\ R_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3} \\ R_3 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \end{array} \right.$$

Démonstration :

On a : $R_{AB} = r_1 // (r_2 + r_3) = R_1 + R_2$;

$R_{BC} = r_2 // (r_1 + r_3) = R_2 + R_3$ et $R_{AC} = r_3 // (r_1 + r_2) = R_1 + R_3$.

Si on pose $S = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}$; si on veut calculer par exemple R_1 , il suffit

d'écrire: $R_1 = S - R_{BC}$ et la même démarche pour retrouver les valeurs des autres résistances.

☒ Transformation étoile triangle (Y→Δ):

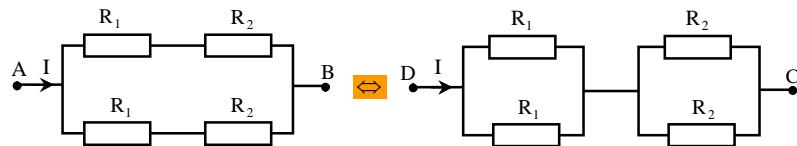
On garde le même montage du précédent. Les valeurs de résistances sont données par:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3} \\ r_2 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1} \\ r_3 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2} \end{cases}$$

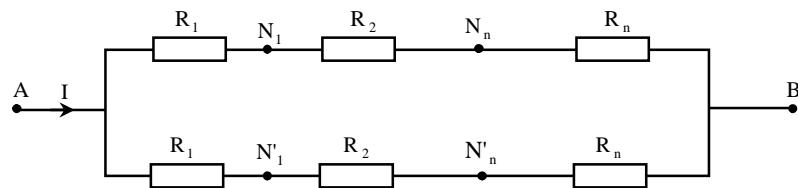
Exercices sur le chapitre 1

Exercice1: (Résistances équivalentes)

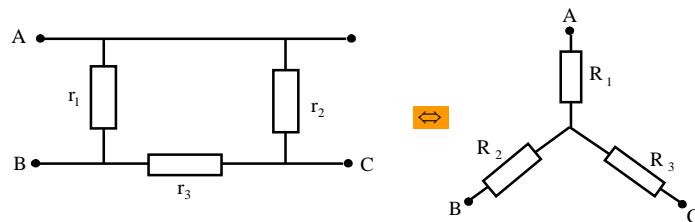
1. Montrer que les deux circuits électriques de la figure ci-dessous sont équivalents,



2. En déduire la résistance équivalente R_{AB} du montage suivant,



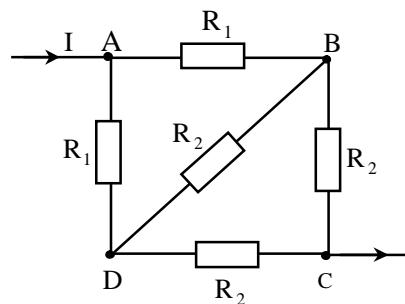
3. Transformation Triangle–étoile



a. Rappeler les expressions de r_1 , r_2 , r_3 en fonction de R_1 , R_2 , R_3 ,

b. Rappeler les expressions de R_1 , R_2 , R_3 en fonction de r_1 , r_2 , r_3 ,

4. On donne les valeurs des résistances ($R_1=R_2=100\Omega$), en déduire la résistance équivalente entre les points A et C du circuit suivant.



Corrections des exercices du chapitre 1

Exercice1: (Résistances équivalentes)

1. La résistance équivalente est : $R_{AB} = \frac{R_1 + R_2}{2} = R_{DC} = \frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2}$

2. La résistance équivalente est : $R_{AB} = \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{2} = \frac{R_1 + \dots + R_n}{2}$

3. Transformation :

a. Triangle \Rightarrow étoile

$$\begin{cases} r_1 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3} \\ r_2 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2} \\ r_3 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1} \end{cases}$$

b. Etoile \Rightarrow triangle

$$\begin{cases} R_1 = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2 + r_3} \\ R_2 = \frac{r_1 \cdot r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \\ R_3 = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \end{cases}$$

4. La résistance équivalente du circuit a pour valeur: $R_{AC} = 250\Omega$.

5. La résistance équivalente du circuit a pour valeur: $R_{AB} = 50\Omega$.

Chapitre 2: Etude et calcul des circuits électriques en régime du courant continu

1. Circuit électrique

Il est composé par un ou plusieurs dipôles électriques qui sont reliés entre eux par des fils conducteurs offrant au moins un trajet fermé, dans lequel circule un courant électrique.

Exemple:

Il est formé par un ensemble de dipôles reliés entre eux.

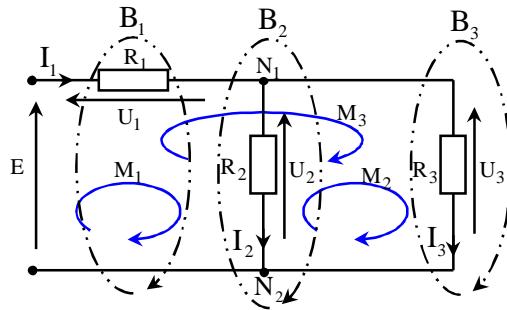


Fig.2.1: Circuit électrique

Le circuit électrique est formé par:

- **Des Nœuds:** Un Nœud (point commun à plusieurs dipôles), est une borne commune à trois dipôles au moins ($N_1; N_2$),
- **Des Branches:** Une Branche est une partie du réseau située entre deux Nœuds ($B_1; B_2; B_3$),
- **Des Mailles:** Une Maille est un ensemble de branches réalisant un circuit fermé ($M_1; M_2; M_3$).

2. Les méthodes d'analyse d'un circuit électrique linéaire

2.1. Lois de Kirchoff

Loi des Nœuds:

La somme algébrique des courants I_k en un nœud est nulle.

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon I_k = 0 ; \text{ avec } \begin{cases} +1 & \text{si le courant } I_k \text{ entre dans le noeud} \\ -1 & \text{si le courant } I_k \text{ sort du noeud} \end{cases}$$

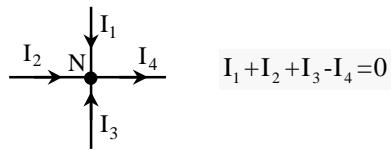


Fig.2.2: Nœud électrique

Loi des Mailles:

La somme algébrique des tensions U_k dans une maille fermée est nulle : $\sum_{k=1}^n U_k = 0$.

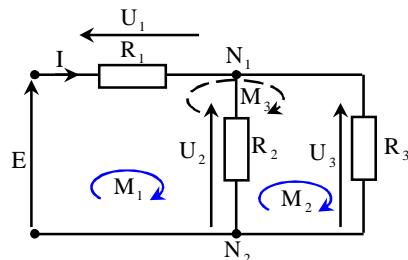


Fig.2.3: Maille électrique

Maille1: $E - U_1 - U_2 = 0$; **maille2:** $U_2 - U_3 = 0$ et **maille3:** $E - U_1 - U_3 = 0$.

2.2.Simplification du calcul d'un circuit électrique

Pont diviseur de tension:

Il permet de calculer la tension aux bornes d'une résistance d'une branche d'un circuit électrique sans faire intervenir le courant qui circule dans cette même branche.

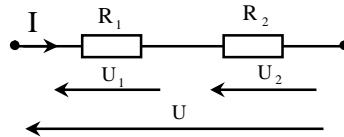


Fig.2.4: Pont diviseur de tension

La tension aux bornes de deux résistors est donnée par: $U = (R_1 + R_2)I$. La tension aux bornes de

$$(R_1) \text{ est donnée par: } U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U.$$

$$\text{La tension aux bornes de } (R_2) \text{ a pour expression : } U_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U.$$

Pont diviseur de courant:

Il est symétrique au pont précédent, il est destiné à calculer le courant dans une résistance, sans faire intervenir la tension à ses bornes.

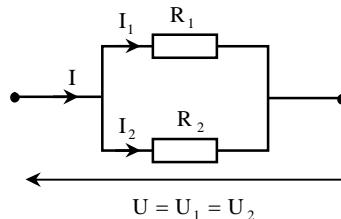


Fig.2.5: Pont diviseur de courant

La tension aux bornes de deux résistors est donnée par :

$$U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I = R_1 I_1 = R_2 I_2. \text{ Les courants dans les branches sont exprimées par: } I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \text{ et}$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I.$$

2.3.Théorème de Thévenin

Un circuit électrique bipolaire linéaire et actif, vu entre les bornes A et B est équivalent à un générateur de tension de f.e.m.:

$E_{Th} = V_{A0} - V_{B0} = U_{AB0}$, à vide (charge déconnectée), en série avec une résistance interne: $R_{Th} = R_{AB}$, en annulant toutes les sources (en court-circuitant toutes les sources de tension et en ouvrant toutes les sources de courant).

Q-N.B : Les sources éteintes doivent être indépendantes.

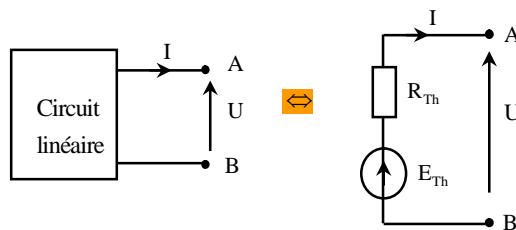
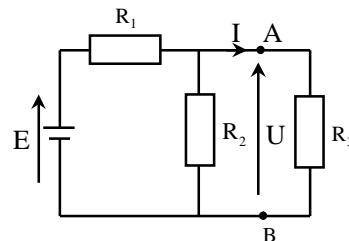


Fig.2.6: Dipôle de Thévenin

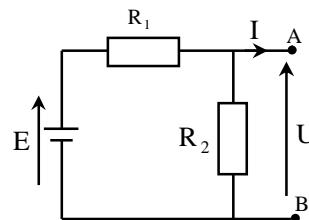
Exemple:

On considère le circuit électrique suivant, on veut calculer le courant (I) dans la branche AB, moyennant le théorème de Thévenin. On donne les valeurs des paramètres suivants: $E=12V$ et $R_1=R_2=R_3=1k\Omega$.



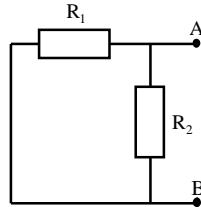
- **Tension de Thévenin:**

$$\text{On trouve: } U_{AB0} = E_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 6V$$



• Résistance de Thévenin:

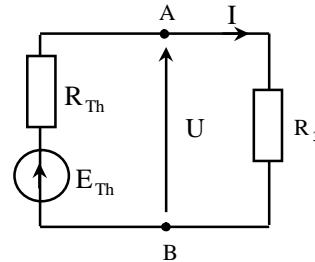
On trouve $R_{AB} = R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2} k\Omega$



• Modèle équivalent du Thévenin:

Le courant dans la charge R_3 vaut alors:

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_3} = 4mA.$$



2.4.Théorème de Norton

Un circuit électrique bipolaire linéaire et actif, vu entre les bornes A et B est équivalent à un générateur de courant: $I_N = I_{cc}$ (en court-circuitant les points A et B), c'est à dire pour $U=0V$, en parallèle avec une résistance interne $R_N = R_{AB}$ vue entre les points A et B (en annulant toutes les sources).

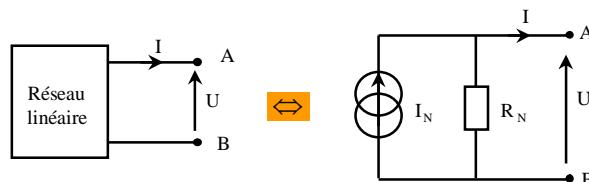
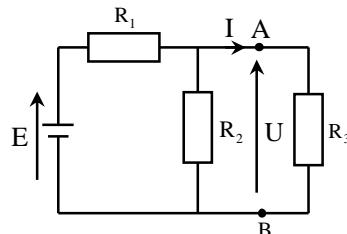


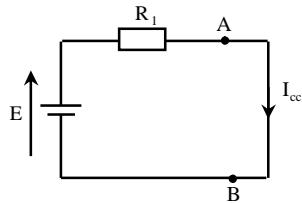
Fig.2.7: Modèle de Norton

Exemple:

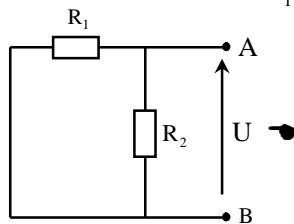
On garde le même exemple, on veut calculer le courant (I) dans la branche AB, en utilisant le théorème de Norton, on prend les valeurs suivantes: $E = 12V$ et $R_1 = R_2 = R_3 = 1k\Omega$.



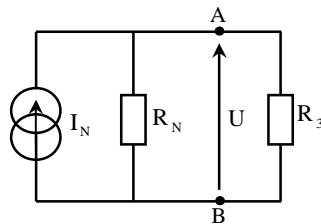
- **Courant de Norton :** On trouve $I_N = I_{cc} = \frac{E}{R_1} = 12\text{mA}$.



- **Résistance de Norton:** On trouve $R_N = R_{Th} = R_{AB} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0.5\text{k}\Omega$.



- **Modèle équivalent de Norton:**



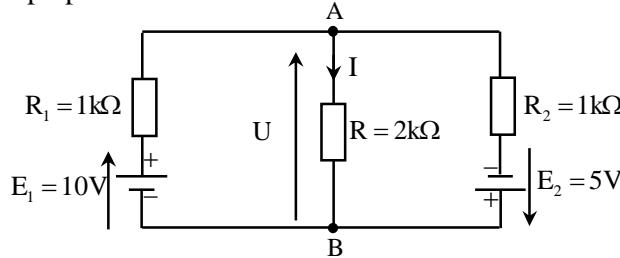
Le courant dans la charge (R_3) vaut alors: $I = \frac{R_N}{R_3 + R_N} I_N = 4\text{mA}$.

2.5.Théorème de Superposition

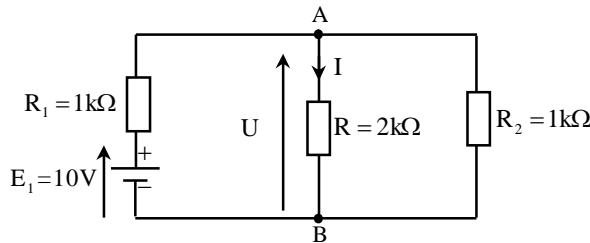
Un circuit électrique linéaire et actif comprenant plusieurs sources indépendantes (plus de deux sources), l'intensité du courant électrique dans une branche est égale à la somme algébrique des intensités des courants produites dans cette même branche par chacune des sources considérées seules, lorsque les autres étant éteintes.

Exemple:

Soit le circuit électrique suivant, on veut calculer le courant (I) dans la branche (AB) en utilisant le théorème de Superposition.

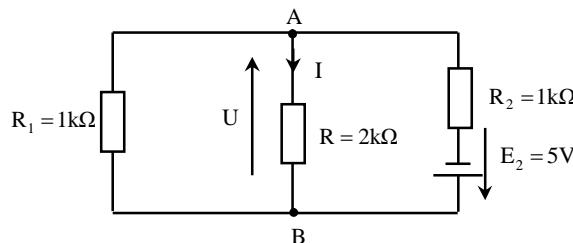


- **Calcul du courant I_1 dans R (Source E_1 est active; source E_2 est passive):**



$$\text{On trouve: } I_1 = \frac{U}{R} = \frac{R_{\text{eq}}}{R(R_1 + R_{\text{eq}})} E_1 = 2 \text{ mA, avec } R_{\text{eq}} = (R//R_2) = \frac{2}{3} \text{ k}\Omega.$$

- **Calcul du courant I_2 dans R (Source E_1 est passive; source E_2 est active):**



$$\text{On trouve: } I_2 = \frac{U}{R} = -\frac{R_{\text{eq}}}{R(R_2 + R_{\text{eq}})} E_2 = -1 \text{ mA ; avec } R_{\text{eq}} = (R//R_1) = \frac{2}{3} \text{ k}\Omega.$$

- **Calcul du courant I dans la branche AB:**

La valeur du courant (I) dans cette branche, est la somme algébrique de deux courants I_1 et I_2 , on obtient donc $I = I_1 + I_2 = 1 \text{ mA}$.

2.6.Théorème de Millman

Un circuit électrique linéaire et actif comportant (n) générateurs en parallèle de f.e.m. E_j et de résistance interne R_j , avec ($1 \leq j \leq n$), vu entre les points A et B est équivalent à un générateur de

$$\text{tension de f.e.m. } E = \frac{\sum_{K=1}^n E_K}{\sum_{K=1}^n \frac{1}{R_K}} \text{ et de résistance interne } R = \frac{1}{\sum_{K=1}^n \frac{1}{R_K}}.$$

N.B : La somme sur les f.e.m. (E_j) est une somme algébrique.

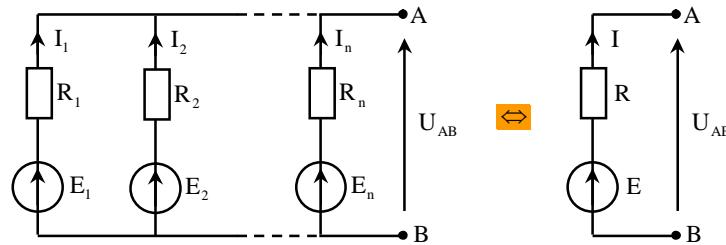


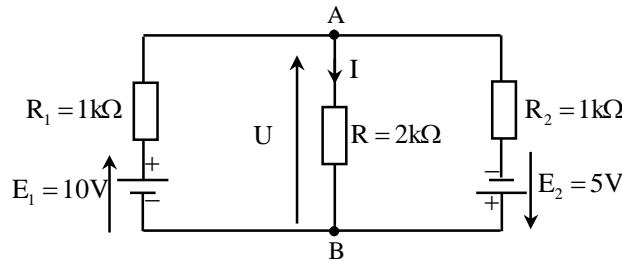
Fig.2.8: Modèle de Millman

Démonstration:

Il suffit d'écrire que la somme algébrique des courants au nœud A est nulle.

Exemple1:

Soit le circuit électrique de l'exemple vu précédemment, on veut calculer le courant (I) dans la branche AB en utilisant le théorème de Millman.



Solution 1:

La valeur de la f.e.m. est donnée par: $E_{Th} = \frac{R_2 E_1 - R_1 E_2}{R_1 + R_2} = 2.5V$, et la valeur de la résistance a pour valeur: $R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}k\Omega$. Le courant dans la branche (AB), vaut alors: $I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R} = 1mA$.

Solution 2:

On calcule directement la tension de charge (U_{AB}) moyennant le théorème de Millman,

$$\text{soit : } U_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R}} = 2V \text{ et } I = \frac{U_{AB}}{R} = 1mA$$

Exemple 2:

On garde le même circuit de l'exemple 1, sauf on inverse les polarités de la source (E_1).

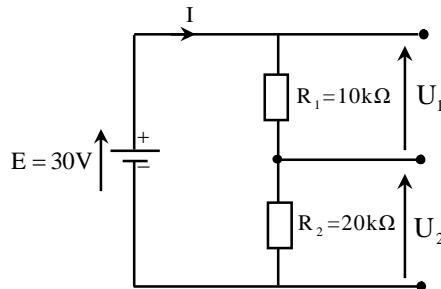
Alors la tension et le courant de charge, valent respectivement :

$$U_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R}} = 6V \text{ et } I = \frac{U_{AB}}{R} = 3mA.$$

Exercices sur le chapitre 2

Exercice 1: (Pont diviseur de tension)

On donne le circuit électrique de la figure suivant :

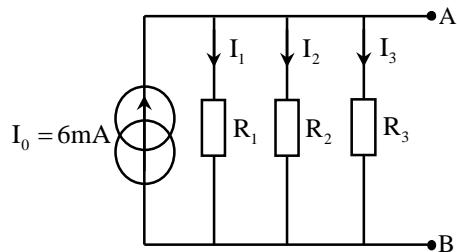


- Déterminer les expressions et les valeurs des tensions U_1 et U_2 .

Exercice 2: (Pont diviseur de courant)

On donne les valeurs des résistors électriques suivantes:

$$R_2 = R_3 = 2R_1 = 2k\Omega .$$

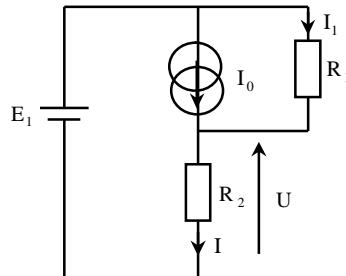


- Calculer les valeurs des courants I_1 et I_2 et I_3 .

Exercice 3:

On donne les valeurs des grandeurs suivantes: $E = 4V$; $I_0 = 4mA$ et $R_1 = R_2 = 1k\Omega$

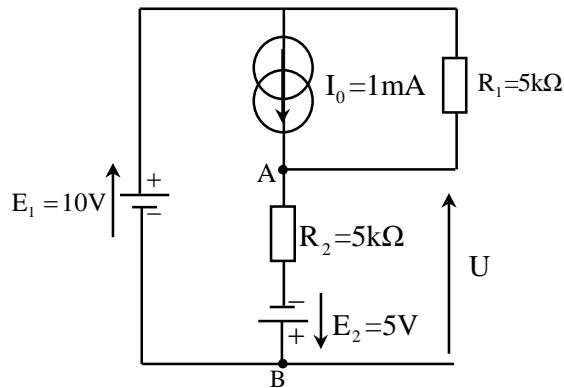
- Déterminer la valeur du courant (I), en utilisant la transformation Norton -Thévenin,
- Vérifier la réponse à partir des lois de Kirchhoff et du théorème de Superposition.



Exercice 4:

Soit le circuit électrique de la figure suivante :

- Déterminer le générateur équivalent de ce circuit vu entre les bornes A et B.

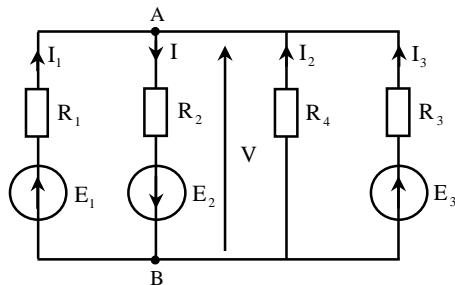


Exercice 5: (Théorèmes: Kirchhoff, Superposition et Millman)

On considère le circuit de la figure suivante, déterminer l'intensité du courant (I) en utilisant:

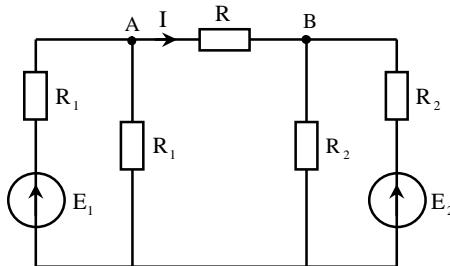
- Les lois de Kirchhoff (nœuds et mailles),
- Le théorème de Superposition,
- Le théorème de Millman.

On donne : $R_1=1\text{k}\Omega$; $R_2=R_3=R_4=2\text{k}\Omega$; $E_1=10\text{V}$; $E_2=5\text{V}$; $E_3=15\text{V}$.



Exercice 6: (Théorèmes : Thévenin et Norton)

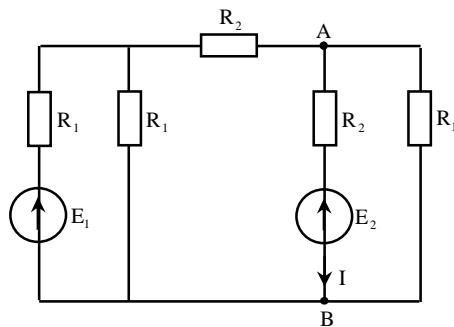
On considère le circuit de la figure suivante, on donne les valeurs des grandeurs : $R_1=2\text{k}\Omega$; $R_2=4\text{k}\Omega$; $R=2\text{k}\Omega$; $E_1=20\text{V}$ et $E_2=10\text{V}$.



1. Calculer les éléments du générateur de Thévenin équivalent vu entre les bornes A et B,
2. Déterminer le générateur de Norton vu entre les bornes A et B.
3. Déterminer le courant (I) dans la branche (AB).

Exercice 7: (Théorèmes de Thévenin et Norton)

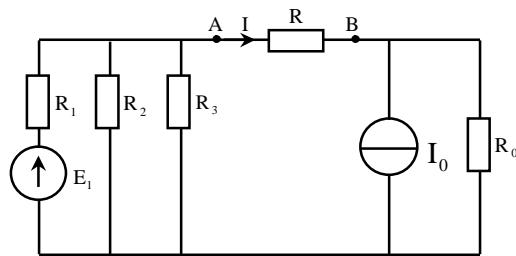
On considère le circuit électrique de la figure ci dessous. On donne les valeurs d'éléments suivants: $E_1=80\text{V}$; $E_2=10\text{V}$; $R_2=5\Omega$ et $R_1=10\Omega$.



1. Déterminer les éléments du générateur de **Thévenin** R_{Th} et E_{Th} du circuit vu entre les points A et B,
2. Calculer le courant (I) dans la branche AB,
3. En déduire les éléments du générateur de **Norton** du circuit entre les points A et B.

Exercice 8:

On considère le circuit électrique de la figure ci-dessous, on donne les valeurs d'éléments suivants: $R_1=R_2=2R_3=4k\Omega$; $R=R_0=1k\Omega$ et $E_1=32V$ et $I_0=2mA$.

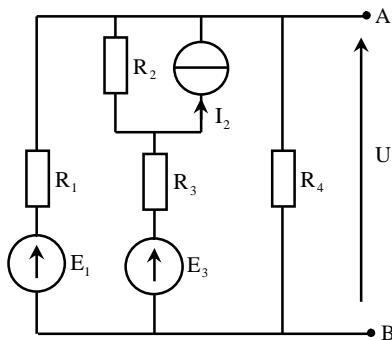


1. Calculer les éléments du Thévenin E_{Th} et R_{Th} vu entre les points A et B,
2. En déduire la valeur du courant (I) dans la branche (AB),
3. Retrouver la valeur du courant (I), moyennant le théorème de Superposition.

Exercice 9:

On considère le circuit électrique de la figure suivante, on donne les valeurs des éléments suivants:

$$E_1=5V; E_3=5V; I_2=10mA; R_1=R_4=2k\Omega \text{ et } R_2=R_3=1k\Omega.$$



1. Déterminer le circuit équivalent de Thévenin vu entre les points A et B de la figure ci-dessus.

Correction des exercices du chapitre 2

Exercice 1:

1. Expressions et valeurs de tensions:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E = 10V \text{ et } U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 20V.$$

Exercice 2:

1. Expressions et valeurs des courants électriques :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} I_0 = 3mA \\ I_2 = \frac{R_{13}}{R_2 + R_{13}} I_0 = 1.5mA \\ I_3 = \frac{R_{12}}{R_3 + R_{12}} I_0 = 1.5mA \end{cases}$$

Avec $R_{12} = R_1 // R_2$; $R_{13} = R_1 // R_3$ et $R_{23} = R_2 // R_3$.

Exercice 3:

1. Expression et valeur du courant en utilisant la transformation Norton-Thévenin:

$$I = \frac{E + I_0 \cdot R_1}{R_1 + R_2} = 4mA.$$

2. Expression et valeur du courant (I)

- En utilisant en utilisant les lois de Kirchhoff :

A partir de deux relations: $I = I_1 + I_0$ et $E = R_1 I_1 + R_2 I$. On obtient alors: $I = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{I_0 \cdot R_1}{R_1 + R_2} = 4mA$.

- En utilisant en utilisant le théorème de Superposition :

L'effet de la f.e.m. « E » toute seule, donne: $I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2mA$,

L'effet de la source du courant « I_0 » toute seule : $I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0 = 2mA$,

Enfin, on obtient la valeur alors: $I = I_1 + I_2 = \frac{E + R_1 I_0}{R_1 + R_2} = 4mA$.

Exercice 4:

1. Les éléments du générateur équivalent :

$$E_{Th} = U_{AB0} = 2.5V ; R_{Th} = R_{AB} = 2.5k\Omega .$$

Exercice 5:

1. Valeur de courant I, en utilisant Les lois de Kirchoff

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 + I_3 \\ I_2 = \frac{V}{R_4}; I_1 = \frac{E_1 - V}{R_1}; I_3 = \frac{E_3 - V}{R_3} \\ V = -E_2 + R_2 \cdot I \end{cases} \quad I = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3} + E_2 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_4}} = 5.5mA$$

1. Valeur du courant (I), en utilisant le théorème de superposition :

$$\bullet V = \frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} E_1; R_{eq} = \frac{2}{3} k\Omega; I_1 = \frac{V}{R_2} = 2mA.$$

$$\bullet V = \frac{R_{eq}}{R_3 + R_{eq}} E_3; R_{eq} = \frac{1}{2} k\Omega; I_3 = \frac{V}{R_2} = 1.5mA.$$

$$\bullet I_2 = \frac{E_2}{R_2 + R_{eq}} = 2mA; R_{eq} = \frac{1}{2} k\Omega;$$

D'où : $I = I_1 + I_2 + I_3 = 5.5mA$.

2. Valeur du courant (I), en utilisant le théorème de Millman

$$\bullet U_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = 6V; \text{ d'où : } I = \frac{U_{AB} + E_2}{R_2} = 5.5mA.$$

Exercice 6:

1. Les éléments du générateur de Thévenin

$$V_{A0} = \frac{E_1}{2}; V_{B0} = \frac{E_2}{2}. \text{ Soit } E_{Th} = V_{A0} - V_{B0} = \frac{1}{2}(E_1 - E_2) = 5V \text{ et } R_{Th} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) = 3k\Omega.$$

$$2. \text{ Valeur de courant: } I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R} = 1mA.$$

$$3. \text{ Les éléments du générateur de Norton: } R_N = 3k\Omega; I_N = \frac{5}{3}mA.$$

Exercice 7:

1. Les éléments du générateur de Thévenin : $E_{Th} = \frac{R_1}{3R_1 + 2R_2} E_1 = 20V$ et $R_{Th} = 5\Omega$.
2. Valeur du courant: $I = \frac{E_{Th} - E_2}{R_{Th} + R_2} = 1A$.
3. Les éléments du générateur de Norton: $I_N = I_{cc} = 4A$; $R_N = 5\Omega$.

Exercice 8:

1. Les éléments du générateur de Thévenin

$$E_{Th} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E_1 - R_0 I_0 = 6V \quad R_{Th} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + R_0 = 2k\Omega.$$

2. Valeur du courant (I) dans la branche (AB) : $I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R} = 2mA$.

3. $R = 2k\Omega$.

4. Valeur du courant dans la branche (AB) en utilisant le théorème de Superposition.

Courant produit par la source (E_1), on trouve: $I_1 = \frac{8}{3}mA$.

Courant produit par la source (I_0), on trouve: $I_2 = \frac{2}{3}mA$.

Le courant dans la branche (AB) vaut alors: $I = I_1 - I_2 = 2mA$

Exercice 9:

1. Les paramètres du générateur de Thévenin: $E_{Th} = \frac{20}{3}V$; $R_{Th} = \frac{2}{3}k\Omega$.

Chapitre 3: Etude des circuits électriques monophasés à courant alternatif

1. Introduction

Les théorèmes vus dans le chapitre 2, resteront applicables pour l'étude et l'analyse des circuits en régime sinusoïdal variable, à condition d'utiliser les outils suivants:

- La représentation vectorielle du Fresnel,
- La méthode symbolique (notions complexes).

2. Signal alternatif et périodique

Un signal est dit périodique s'il se répète identiquement à lui-même au cours d'un intervalle de temps (T) régulier. Il est défini par: $v(t)=v(t+nT)$; avec $n \in \mathbb{Z}$ et T : période. Par contre un signal est dit alternatif s'il est formé par deux alternances.

Exemples des signaux alternatifs:

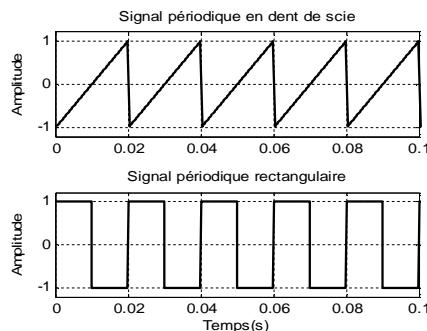


Fig.3.1: Signaux alternatifs

Valeurs caractéristiques:

Un signal variable est caractérisé par :

- Une valeur moyenne définie par: $(v)_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt$.
- Une valeur efficace définie par: $(v)_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t)^2 dt}$.

3. Signal sinusoïdal

C'est un signal alternatif et périodique, défini par fonction de type: $v(t)=V_m \sin(\omega t + \varphi)$, où

$$\omega=2\pi f=2\pi \frac{1}{T} \text{. Avec:}$$

V_m : amplitude; ω : pulsation (rad/s);
 f : fréquence (Hz); T : période (S) ;
 $\omega t + \varphi$: phase instantanée;
 φ : phase à l'origine.

Exemple:

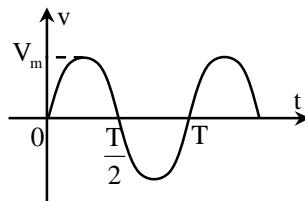


Fig.3.2: Signal sinusoïdal

4. Méthode vectorielle de Fresnel

Elle permet d'additionner des grandeurs instantanées sinusoïdales de même fréquence, mais d'amplitudes et de phases différentes. Dans le plan (Oxy), on choisit un axe fixe et un sens de rotation positif, comme l'indique la figure 3.3.

On associe à la fonction: $v(t)=V_m \cos(\omega t + \varphi)$, un vecteur (\overrightarrow{OM}) appelé vecteur de Fresnel tournant autour du point (0), à la vitesse angulaire constante: ω (rad/s) ; Avec:

$$OM=V_m: \text{Amplitude et } \theta(t)=\omega t + \varphi = (\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM}): \text{Phase.}$$

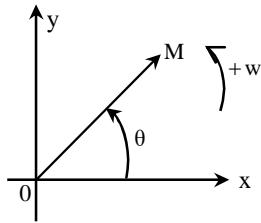


Fig.3.3: Principe de la représentation vectorielle de Fresnel

Sommation des signaux sinusoïdaux:

On se place dans un plan cartésien, on représente chaque signal par son amplitude et sa phase. La somme vectorielle des signaux à additionner, donne l'amplitude et la phase, recherchées.

5. Méthode d'utilisation de notation complexe

Dans le plan (Oxy), pour tout point de coordonnées (a, b), on associe le nombre d'affixe $\bar{V} = a + jb = V_m e^{j\varphi}$: appelé amplitude complexe. Avec $\varphi = \arctan(\frac{b}{a})$: Phasage à l'origine et $V_m = \sqrt{a^2 + b^2}$: Amplitude.

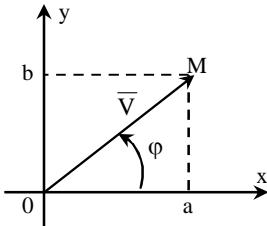


Fig.3.4: Méthode symbolique

Si le vecteur (\vec{OM}) tourne à la pulsation (w). On parle de la notion d'amplitude complexe temporelle : $\bar{V}(t) = \bar{V} e^{jwt} = V_m e^{j(wt+\varphi)}$.

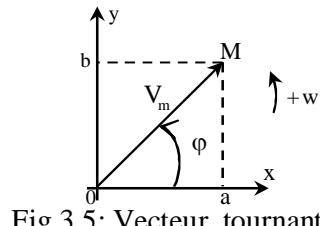


Fig.3.5: Vecteur tournant

Le signal a pour expression: $v(t) = \operatorname{Re}[V_m e^{j(wt+\phi)}] = V_m \cos(wt+\phi)$.

☒ Somme des amplitudes complexes:

L'amplitude complexe de la somme de deux signaux sinusoïdaux (v_1 et v_2), est égale à la somme des amplitudes de chacun des signaux.

On associe à $v_1 \leftrightarrow \bar{V}_1$ et $v_2 \leftrightarrow \bar{V}_2$, donc $v_1 + v_2 \leftrightarrow \bar{V}_1 + \bar{V}_2$.

☒ Dérivation et intégration d'un signal:

On considère le signal $v = V_m \cos(wt+\phi)$, la dérivée correspondante est donnée par:

$$\frac{dv}{dt} = V_m w \cos\left(wt+\phi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Et l'amplitude complexe lui associée est donnée par: $V_m w e^{j(wt+\phi + \frac{\pi}{2})} = jw \bar{V}$. D'une manière

générale, on associe à $v \leftrightarrow \bar{V}$, on obtient alors: $\frac{dv^n}{dt^n} \leftrightarrow (jw)^n \bar{V}$.

L'intégrale lui associé est : $\int v dt = \frac{V_m}{w} \cos\left(wt+\phi - \frac{\pi}{2}\right)$, et l'amplitude complexe associée à cette

intégrale vaut : $\frac{V_m}{jw} e^{j(wt+\phi - \frac{\pi}{2})} = \frac{\bar{V}}{jw}$. D'une manière, on associe à $v \leftrightarrow \bar{V}$, on obtient alors:

$$\int v dt \leftrightarrow \frac{\bar{V}}{jw}.$$

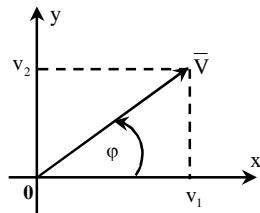
Exemple 1:

On veut additionner les deux signaux suivants:

$$v_1 = 30 \cos(wt) \text{ et } v_2 = 20 \sin(wt).$$

- **Utilisation de la méthode de Fresnel:**

Le module du vecteur somme vaut : $\|\bar{V}\| = \sqrt{30^2 + 20^2} = 36$ et la valeur d'angle du vecteur somme vaut alors : $\varphi = \arctan\left(\frac{20}{30}\right) = 0.8\text{rad}$. On obtient donc $v = v_1 + v_2 = 36\cos(wt + 0.8)$.



- **Utilisation de la méthode des complexes:**

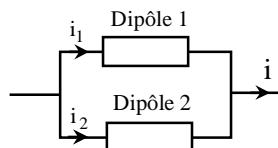
L'amplitude complexe de chaque signal, est définie par : $\bar{V}_1 = 30$ et $\bar{V}_2 = 20j$, alors que la l'amplitude et l'argument de la somme sont fournis par :

$$\begin{cases} \|v_1 + v_2\| = 36 \\ \theta = \arctan(v_1 + v_2) = \arctan\left(\frac{20}{30}\right) = 0.8\text{rad} \end{cases}$$

L'expression instantanée du signal (v) est donnée par : $v = v_1 + v_2 = 36\cos(wt + 0.8)$.

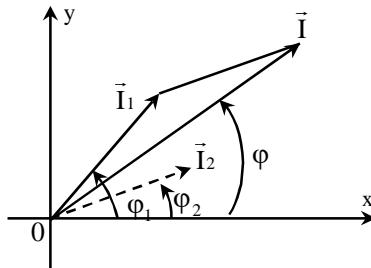
Exemple 2:

On veut additionner les courants dans les deux dipôles en parallèles suivants. Sachant que leurs expressions des courants instantanées sont exprimées par : $i_1 = I_{m1}\cos(wt + \varphi_1)$ et $i_2 = I_{m2}\cos(wt + \varphi_2)$.



- **Utilisation de la méthode de Fresnel:**

La projection des vecteurs \vec{I}_1 et \vec{I}_2 sur l'axe (Ox) donne respectivement les courants i_1 et i_2 . La somme que nous recherchons correspond, comme l'indique la figure ci-dessus, à la somme de deux projections qui n'est autre que la projection du vecteur somme ($\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$).



- **Utilisation de la méthode des complexes:**

Les expressions complexes des courants (i_1 et i_2) sont définies par:

$$\bar{I}_1 = I_{m1} [\cos(\varphi_1) + j\sin(\varphi_1)], \quad \bar{I}_2 = I_{m2} [\cos(\varphi_2) + j\sin(\varphi_2)],$$

Alors que l'expression complexe du courant somme est exprimé par:

$$\bar{I} = [I_{m1}\cos(\varphi_1) + I_{m2}\cos(\varphi_2)] + j[I_{m1}\sin(\varphi_1) + I_{m2}\sin(\varphi_2)].$$

Le module du courant somme est donné par:

$$I_m = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2I_{m1}I_{m2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

L'argument du courant somme est donné par:

$$\varphi = \text{artang}\left(\frac{I_{m1}\sin(\varphi_1) + I_{m2}\sin(\varphi_2)}{I_{m1}\cos(\varphi_1) + I_{m2}\cos(\varphi_2)}\right). \quad \text{L'expression du courant somme est donnée par:}$$

$$i = i_1 + i_2 = I_m \cos(\omega t + \varphi).$$

5.1. Impédance complexe d'un dipôle linéaire

Elle est définie pour un dipôle linéaire comme étant égale au rapport des amplitudes complexes

de la tension sur le courant : $\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = Z e^{j\varphi}$. Avec Z : amplitude et φ : phase.

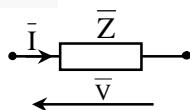


Fig.3.6: Impédance complexe d'un dipôle linéaire

5.2. Equations complexes des dipôles usuels

Elément	Symbol	Equation temporelle	Equation complexe	Impédance complexe
Résistor		$v = Ri$	$\bar{V} = R \bar{I}$	R
Inductance		$v = L \frac{di}{dt}$	$\bar{V} = jLw \bar{I}$	jLw
Condensateur		$v = \frac{1}{C} \int idt$	$\bar{V} = \frac{1}{jCw} \bar{I}$	$\frac{1}{jCw}$

6. Angle de charge d'un dipôle linéaire

Soit un dipôle électrique linéaire (D), alimenté par une tension sinusoïdale. Il réclame un courant sinusoïdal: $i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$, on appelle $\phi = (\vec{V}; \vec{I})$, le déphasage entre la tension et le courant.

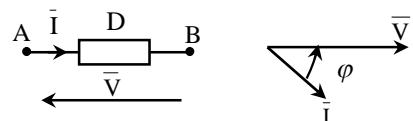


Fig.3.7: Angle de charge d'un dipôle linéaire

7. Etude de quelques récepteurs élémentaires

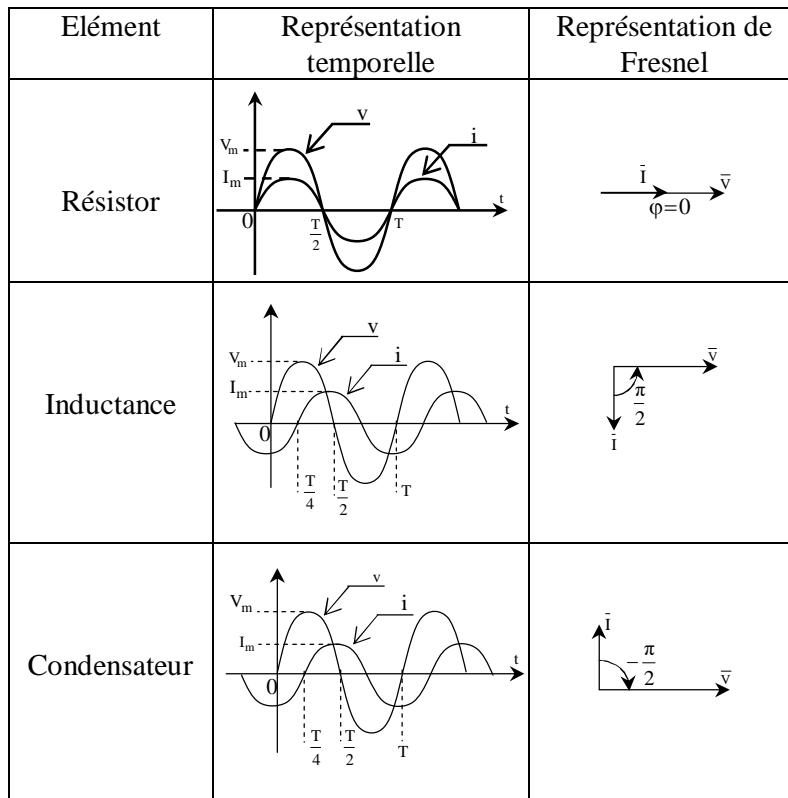


Fig.3.8: Représentation temporelle et vectorielle des tensions et des courants

8. Etude d'un circuit RLC série en régime sinusoïdal

On considère le circuit électrique suivant alimenté par une tension sinusoïdale de type: $v(t)=V\sqrt{2}\cos(\omega t)$.

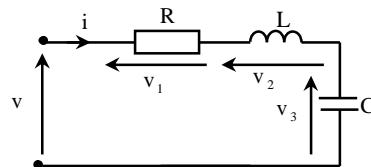


Fig.3.9: Circuit série de type RLC

L'impédance complexe du circuit est la somme des impédances élémentaires : $\bar{Z}=R+j(Lw-\frac{1}{Cw})$.

- **Courant efficace en fonction de la pulsation réduite:**

Le courant instantané complexe est donné par: $\bar{I}(t)=\frac{\bar{V}}{\bar{Z}}=I_m e^{j(wt-\varphi)}$.

Le courant efficace complexe a pour valeur: $\bar{I}=\frac{V}{Z}e^{-j\varphi}$, dont sa valeur efficace est donné

par: $I=\frac{V}{R}\sqrt{\frac{1}{1+Q^2(u-\frac{1}{u})^2}}$; avec $u=\frac{w}{w_0}$: pulsation réduite ; $w_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$: pulsation de résonance et

$Q=\frac{Lw_0}{R}$: facteur de qualité.

- **Angle de déphasage en fonction de la pulsation réduite:**

L'angle de déphasage s'exprime par : $\varphi=-\arctan\left[Q(u-\frac{1}{u})\right]$.

- **Graphes du courant et déphasage en fonction de (u) :**

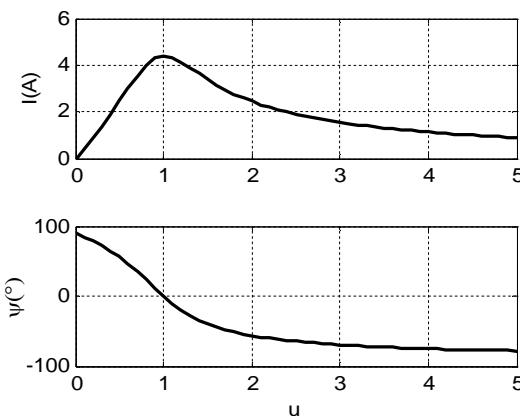


Fig.3.10: Allures du courant et de déphasage en fonction de la pulsation réduite

9. Notions de puissances en monophasé

9.1.Définition

La puissance apparente complexe en régime alternatif monophasé est définie par : $\bar{S} = \bar{V}\bar{I}^* = P + jQ$; où \bar{I}^* : courant complexe conjugué.

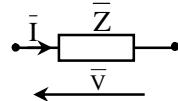


Fig.3.11: Récepteur monophasée en régime monophasé

En valeurs efficaces, on a:

- La puissance apparente: $S=VI=\sqrt{P^2+Q^2}$ (VA) .
- La puissance active: $P=VI\cos(\phi)$ (W) .
- La puissance réactive: $Q=VI\sin(\phi)=P\tan(\phi)$ (VAR) .
- Le facteur de puissance: $f=\frac{P}{S}$.

9.2.Mesure de puissances en régime monophasé

Le wattmètre mesure la puissance moyenne ou active, le voltmètre et l'ampèremètre mesurent respectivement les valeurs efficaces de la tension et du courant absorbés par le récepteur.

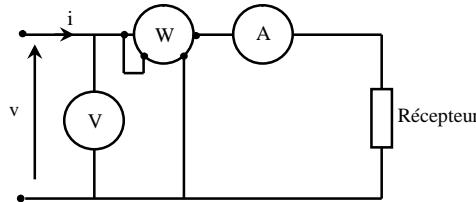


Fig.3.12: Montage de mesure de la puissance active

- La puissance instantanée est donnée par : $p(t)=v(t).i(t)=VI\cos(\phi)-VI\cos(2\omega t+\phi)$.
- La puissance active est donnée par: $P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t).dt=VI\cos(\phi)$.

Exercices du chapitre 3

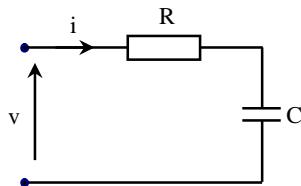
Exercices sur le chapitre 3

Exercice 1:

On considère le circuit électrique série de type (RC), alimenté par une tension sinusoïdale dont la valeur efficace est de 230V-50Hz.

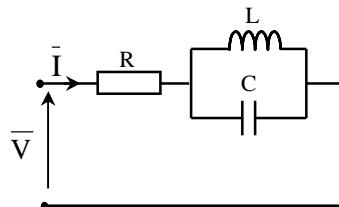
On donne $R=1\text{k}\Omega$ et $C=1\mu\text{F}$.

1. Etablir l'expression de l'impédance complexe et sa valeur,
2. En déduire l'expression et la valeur de déphasage du courant par rapport à la tension,
3. En déduire le courant complexe.



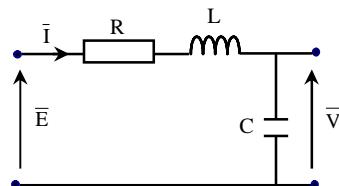
Exercice 2:

Soit le circuit électrique de la figure suivante. Etablir l'expression de l'impédance complexe, en déduire le déphasage de courant par rapport à la tension d'alimentation.



Exercice 3:

On considère le circuit électrique de la figure ci-contre. Déterminer le rapport complexe ($\frac{\bar{V}}{\bar{E}}$), appelé fonction de transfert (ou transmittance).



Exercices du chapitre 3

Exercice 4:

On considère le circuit électrique série de type (RLC), alimenté par un générateur de tension de type: $e = E_0 \cos(\omega t)$ avec (ω): pulsation ; $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: pulsation propre du circuit (RLC) ;

$Q = \frac{L \cdot \omega}{R} = \tau \cdot \omega$: facteur de qualité. En régime permanent l'intensité du courant dans le circuit

électrique est de la forme $i = I_0 \cos(\omega t + \phi)$.

1. Exprimer le courant (I) et le déphasage (ϕ) en fonction du facteur de qualité (Q) et de la

pulsation réduite ($x = \frac{\omega}{\omega_0}$),

2. Tracer les graphes des grandeurs (I) et (ϕ) en fonction de (x),

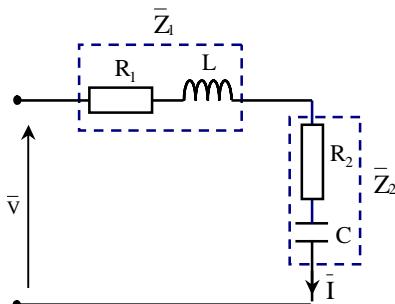
3. Calculer en fonction de ω_0 et Q pour ($Q^2 \gg 1$), les pulsations ω_1 et ω_2 du générateur pour

lequel ($I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$),

4. En déduire la bande passante ($\omega_2 - \omega_1$) en fonction de L et R .

Exercice 5:

On considère le circuit électrique de la figure ci-dessous, il est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur 230V-50Hz. On donne les valeurs des paramètres suivantes : $R_1 = 150\Omega$; $L = 0.5H$, $R_2 = 200\Omega$ et $C = 15\mu F$.



1. Calculer les impédances complexes Z_1 et Z_2 ,

2. En déduire l'impédance complexe équivalente du montage,

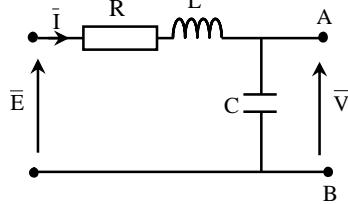
Exercices du chapitre 3

3. Calculer le courant qui traverse ce circuit,
4. Calculer les différentes puissances consommées par ce circuit.

Exercice 6:

On considère le circuit électrique ci-dessous, alimenté par une tension sinusoïdale, qui a pour valeur efficace: $E=230\sqrt{2}(V)$. On donne les valeurs des paramètres suivants:

$$R=20\Omega \text{ et } L_w=\frac{1}{C_w}=10\Omega .$$



1. Déterminer les paramètres du modèle de Thévenin équivalent à ce circuit vu entre les points A et B,
2. On branche entre les points A et B un récepteur dont son impédance complexe vaut: $\bar{Z}(\Omega)=5+j20$, calculer le courant efficace complexe qui traverse ce circuit,
3. En déduire la tension efficace complexe aux bornes de la charge.

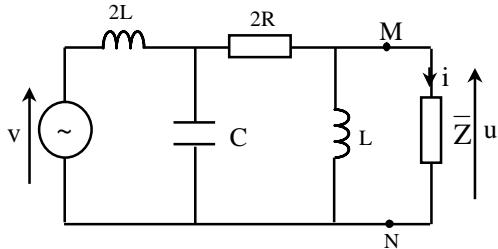
Exercice 7:

On considère le circuit électrique ci-dessous, il est alimenté par une source de tension alternative : $v(t)=V\sqrt{2}\cos(\omega t)$. La fréquence du générateur est réglée de façon à avoir: $L_w=\frac{1}{C_w}=R$. On donne les valeurs des grandeurs suivantes: $V=240V$ et $R=10\Omega$.

1. Déterminer les paramètres du modèle de Thévenin vu entre les points M et N,
2. Calculer le courant complexe de la charge, pour: $\bar{Z}=\frac{4}{5}R$,

Exercices du chapitre 3

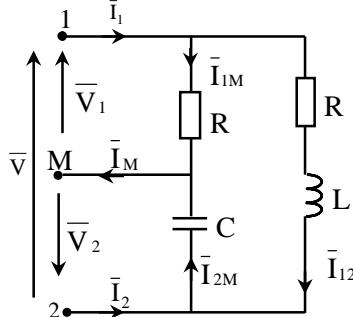
3. En déduire le courant instantané de la charge.



Exercice 8:

Soit le circuit électrique de la figure suivante, il est alimenté par un transformateur à point milieux, qu'il n'est pas représenté et il délivre entre les points 1 et 2 une tension sinusoïdale de la forme: $v(t)=230\sqrt{2}\cos(100\pi t)$, pris comme référence. On donne la valeur des éléments:

$$R = \frac{1}{Cw} = Lw = 50\Omega .$$



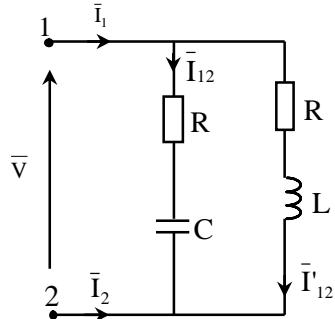
Partie I:

1. Donner les expressions complexes des tensions efficaces \bar{V}_1 ; \bar{V}_2 et \bar{V} ,
2. Calculer les expressions complexes des courants efficaces \bar{I}_{1M} ; \bar{I}_{2M} et \bar{I}_{12} ,
3. En déduire les expressions complexes des courants efficaces \bar{I}_1 ; \bar{I}_2 et \bar{I}_M ,
4. Calculer la puissance fournie par le transformateur, ainsi que le facteur de puissance.

Exercices du chapitre 3

Partie II :

On conserve le même circuit électrique, mais on supprime la masse du transformateur, donnée par la figure ci-dessous :



5. Calculer les courants efficaces complexes \bar{I}_1 et \bar{I}_2 ,
6. Calculer les courants efficaces complexes \bar{I}_{12} et \bar{I}'_{12} ,
7. Calculer la puissance fournie par le transformateur, ainsi que le facteur de puissance.

Correction des exercices du chapitre 3

Exercice 1:

1. L'expression de l'impédance complexe : $\bar{Z} = R + \frac{1}{jCw}$.

La valeur du module de l'impédance complexe vaut: $Z = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{Cw})^2} = 3.336 K\Omega$,

2. L'expression et la valeur de déphasage du courant par rapport à la tension vaut alors:

$$\varphi = \arg(\bar{Z}) = -\arctan\left(\frac{1}{RCw}\right) = -72.6^\circ,$$

3. Le courant complexe vaut alors: $\bar{I} = \frac{V}{Z} e^{-j\varphi} = 69e^{+j72.6^\circ} (\text{mA})$.

Exercice 2:

1. Les expressions du module de l'impédance et du déphasage:

La tension complexe est définie par: $\bar{V} = (R + j\frac{Lw}{1-LCw^2}) \bar{I} = \bar{Z} \bar{I} = Z I e^{j\varphi}$.

L'expression du module de l'impédance complexe vaut : $Z = \sqrt{R^2 + (\frac{Lw}{1-LCw^2})^2}$.

L'angle vaut alors : $\varphi = \arg(\bar{Z}) = \arctan\left(\frac{Lw}{R(1-LCw^2)}\right)$.

Exercice 3:

1. Le rapport complexe $\frac{\bar{V}}{\bar{E}}$:

La tension complexe est définie par: $\bar{E} = (R + jLw - j\frac{1}{Cw}) \bar{I} = \bar{Z} \bar{I}$.

Le courant complexe a pour expression: $\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j(Lw - \frac{1}{Cw})}$ et la tension complexe de sortie a pour

expression: $\bar{V} = \frac{\bar{E}}{1 - LCw^2 + jRCw}$.

Par conséquent le rapport complexe vaut : $\bar{H} = \frac{\bar{V}}{\bar{E}} = \frac{1}{1 - LCw^2 + jRCw}$.

Exercice 4:

1. L'expression du courant complexe: $\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{E}}{R + j(Lw - \frac{1}{Cw})}$.

Son module est donné par : $I = \frac{E}{Z} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (Lw - \frac{1}{Cw})^2}}$.

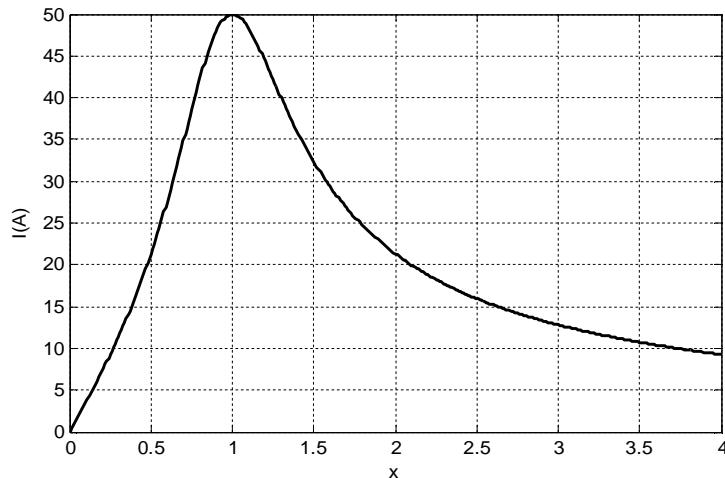
Alors que son déphasage vaut alors : $\varphi = \arg(\bar{I}) = \frac{1 - LCw^2}{RCw}$.

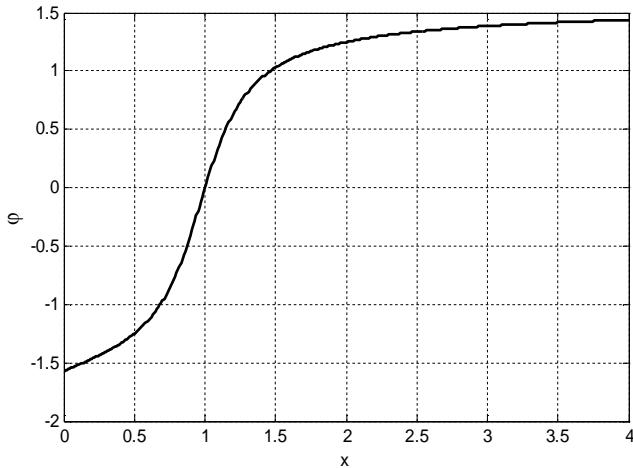
En posant $x = \frac{w_0}{w}$; $Q = \frac{Lw_0}{R}$ et $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Les nouvelles expressions du courant et de déphasage sont données par: $I = \frac{E_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$ et

$$\varphi = Q\left(\frac{1}{x} - x\right).$$

2. Graphes du courant et de déphasage en fonction de la pulsation réduite





3. Pulsations w_1 et w_2

A la résonance on a $I_0 = \frac{E_0}{R}$ pour $x = 1$ ou $w = w_0$.

Pour $I = \frac{E_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}} = \frac{E_0}{R\sqrt{2}}$. On obtient alors : $1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2=2$. Les solutions possibles

sont: $x=\pm\frac{1}{2Q}\pm\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}$. Les solutions acceptables ($x>0$) sont : $x_1 = 1+\frac{1}{2Q}$ et $x_2 = 1-\frac{1}{2Q}$.

4. Bande passante

La bande passante est définie par: $BP=w_2-w_1=w_0(x_1-x_2)=\frac{w_0}{Q}=\frac{R}{L}$. Avec $Q=\frac{Lw_0}{R}$, soit la

nouvelle valeur: $Q=\frac{w_0}{BP}=\frac{w_0}{w_2-w_1}$.

Exercice 5:

1. L'impédance complexe du circuit électrique:

On a $\bar{Z}_1(\Omega)=R_1+jLw=150+j157$ et $\bar{Z}_2(\Omega)=R_2-j\frac{1}{Cw}=200-j212$. D'où : $\bar{Z}(\Omega)=\bar{Z}_1+\bar{Z}_2=350-j55$.

2. Le courant complexe qui traverse le circuit a pour valeur: $\bar{I}(A)=\frac{\bar{V}}{\bar{Z}}=Ie^{j\varphi}=0.649e^{j8.93^\circ}$.

3. Les tensions complexes aux bornes de chaque récepteur:

- **Récepteur 1:** $\bar{V}_1 = \bar{Z}_1 \bar{I} = 140.92e^{j55.24^\circ} V$

- **Récepteur 2:** $\bar{V}_2 = \bar{Z}_2 \bar{I} = 189.15e^{-j37.74^\circ} V$

4. Les différentes puissances:

- Puissance active: $P = VI\cos(\varphi) = 147.46W$
- Puissance reactive $Q = VI\sin(\varphi) = -23.17VAR$
- Puissance apparente : $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 149.27VA$

Ou bien, la puissance apparente complexe vaut: $\bar{S} = \bar{V} \cdot \bar{I}^* = P + jQ = 151.06e^{-j8.93^\circ} VA$.

Exercice 6:

1. Les paramètres du modèle de Thévenin équivalent du circuit vu entre les points A et B:

$$\bar{E}_{Th}(V) = -\frac{1}{2}j\bar{E} = 115\sqrt{2}e^{-j90^\circ} \text{ et } \bar{Z}_{Th}(\Omega) = 5-j10.$$

2. Valeur du courant efficace complexe: $\bar{I}(A) = \frac{\bar{E}_{Th}}{\bar{Z}_{Th} + Z} = 11.5e^{-j135^\circ}$ et $\bar{Z}(\Omega) = 5+j20$

3. Valeur efficace complexe aux bornes de la charge : $\bar{V}(V) = \bar{Z}\bar{I} = 237e^{-j59^\circ}$

Exercice 7:

1. Les paramètres de Thévenin: $\bar{E}_{Th}(V) = \frac{\bar{V}}{5}(1-2j)$ et $\bar{Z}_{Th}(\Omega) = \frac{2}{5}R(1+3j)$.

2. Courant complexe dans la charge: $\bar{I}(A) = \frac{\bar{E}_{Th}}{\bar{Z} + \bar{Z}_{Th}} = -\frac{\bar{V}}{12R}(1+3j)$, $\bar{I}(A) = 6.324e^{-j108.35^\circ}$.

3. L'expression du courant instantané dans la charge: $i(t) = 8.944\cos(\omega t - 1.89)$

Exercice 8:

Partie I :

1. Tensions efficaces complexes: $\bar{V}_1 = -\bar{V}_2 = 115V$ et $\bar{V} = 230V$
2. Courants efficaces complexes: $\bar{I}_{1M} = 2.3A$; $\bar{I}_{2M} = -j.2.3A$ et $\bar{I}_{12} = 3.2527e^{-j45^\circ} (A)$
3. Courants efficaces complexes: $\bar{I}_1 = 5.143e^{-j26.57^\circ} (A)$ et $\bar{I}_2 = -2.3(A)$ et $\bar{I}_M = \bar{I}_{12}$.
4. Puissance fournie et facteur de puissance: $P=793.5W$; $Q=264.5VAR$ et $\cos(\varphi) = 0.949$.

Partie II :

5. Courants efficaces complexes: $\bar{I}_1 = -\bar{I}_2 = 4.6A$
6. Courants efficaces complexes:
 $\bar{I}_{12} = 3.2527e^{+j45^\circ} (A)$; $\bar{I}_{12} = \bar{I}_{12}^*$. Où \bar{I}_{12}^* : C'est la partie conjuguée du courant \bar{I}_{12}
7. Puissance fournie et facteur de puissance: $P=1058W$ et $\cos(\varphi) = 1$.

Conclusion:

Le deuxième montage possède un meilleur facteur de puissance que le premier montage.

Chapitre 4: Etude et calcul des circuits triphasés à courant alternatif

1. Introduction

Les réseaux électriques triphasés sont très utilisés dans l'industrie pour leurs nombreuses propriétés apportées à la production, au transport de l'énergie électrique en haute ou très haute tension (HT et THT) pour réduire les pertes par effet joules dans les lignes.

2. Réseau triphasé directe

Un réseau triphasé équilibré direct est un système de grandeurs (tensions ou courants) sinusoïdales de même amplitude et de même fréquence, ordonné dans le sens trigonométrique. Il dit indirecte dans le cas inverse. Le réseau triphasé est formé par trois générateurs de tension (ou de courant) indépendants peut être connectés en étoile avec ou sans point neutre. Ou couplé en triangle.

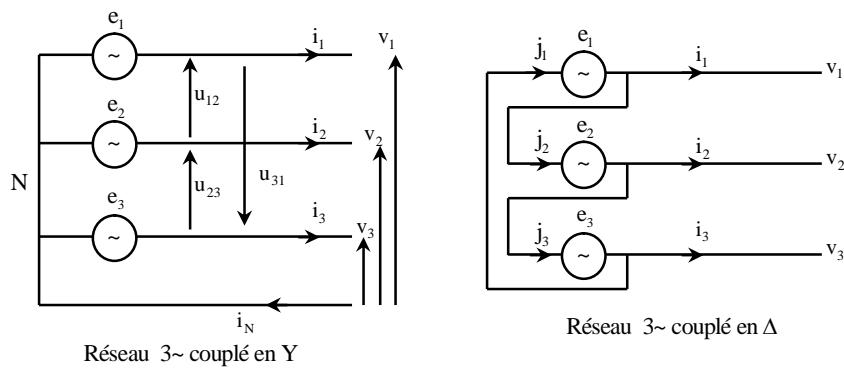


Fig.4.1: Nature de couplage d'un réseau triphasé

3. Tension simple et tension composée

Une tension simple est une tension mesurée entre une phase et un neutre, dont la valeur efficace est notée par la lettre (V). Alors qu'une tension composée est une tension mesurée entre deux phases dont la valeur efficace est notée par la lettre (U).

Tensions simples temporelles:

Les équations instantanées des tensions simples sont données par:

$$\begin{cases} v_1(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t) \\ v_2(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ v_3(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

Tensions simples complexes:

Les équations associées en régime complexe sont fournies par:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = V\sqrt{2}e^{j\omega t} \\ \bar{V}_2 = V\sqrt{2}e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})} \\ \bar{V}_3 = V\sqrt{2}e^{j(\omega t - \frac{4\pi}{3})} \end{cases}$$

Tensions composées complexes:

Les tensions composées instantanées, ou complexes, sont déduites à partir des équations des tensions simples.

$$\begin{cases} \bar{U}_{12} = \bar{V}_1 - \bar{V}_2 = \bar{V}_1\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{U}_{23} = \bar{V}_2 - \bar{V}_3 = \bar{V}_1\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ \bar{U}_{31} = \bar{V}_3 - \bar{V}_1 = \bar{V}_1\sqrt{3}e^{-j\frac{7\pi}{6}} \end{cases}$$

En effet, il existe trois tensions composées inverses notées par: \bar{U}_{21} ; \bar{U}_{32} et \bar{U}_{13} .

☒ Tensions composées temporelles :

Les équations instantanées des tensions composées sont déduites à partir des tensions simples, elles sont fournies par :

$$\begin{cases} u_{12}(t)=V\sqrt{6}\cos(wt+\frac{\pi}{6}) \\ u_{23}(t)=V\sqrt{6}\cos(wt-\frac{\pi}{2}) \\ u_{31}(t)=V\sqrt{6}\cos(wt-\frac{7\pi}{6}) \end{cases}$$

☒ Récapitulations:

Les tensions simples sont décalées entre eux d'un angle de ($\frac{2\pi}{3}$ rad) et les tensions composées

sont aussi sont décalées entre eux d'un angle de ($\frac{2\pi}{3}$ rad). Alors que les tensions successives

simples et composées sont déphasées d'un angle de ($\frac{\pi}{6}$ rad).

Par conséquent on a:

$$\bullet (\overrightarrow{V_1}; \overrightarrow{V_2}) = (\overrightarrow{V_2}; \overrightarrow{V_3}) = (\overrightarrow{V_3}; \overrightarrow{V_1}) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\bullet (\overrightarrow{U_{12}}; \overrightarrow{U_{23}}) = (\overrightarrow{U_{23}}; \overrightarrow{U_{31}}) = (\overrightarrow{U_{31}}; \overrightarrow{U_{12}}) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\bullet (\overrightarrow{U_{12}}; \overrightarrow{V_1}) = (\overrightarrow{U_{23}}; \overrightarrow{V_2}) = (\overrightarrow{U_{31}}; \overrightarrow{V_3}) = \frac{\pi}{6}.$$

Le rapport respectivement des valeurs efficaces et des amplitudes des tensions simples et des tensions composées sont données par:

$$U=V\sqrt{3} ; U_m=U\sqrt{2}=\sqrt{3}V_m=V\sqrt{6}.$$

☒ Remarque:

Un système, de tensions ou de courants d'un générateur ou d'un récepteur, est équilibré, si on a en valeurs instantanées ou en valeurs complexes, on a : $e_1+e_2+e_3=0$ et $i_1+i_2+i_3=0$. Il en résulte que les grandeurs composées forment aussi un système équilibré.

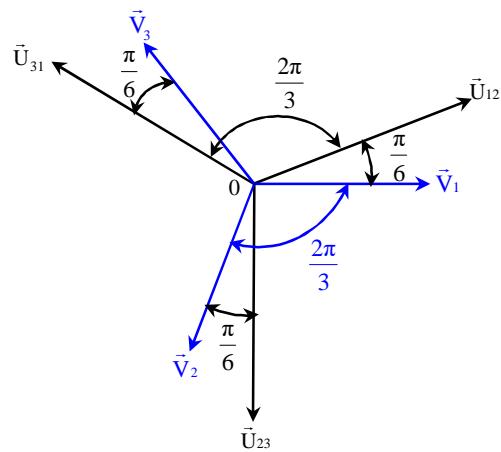


Fig.4.2: Représentation vectorielle des tensions simples et des tensions composées

Autre représentation vectorielle des tensions simples et composées:

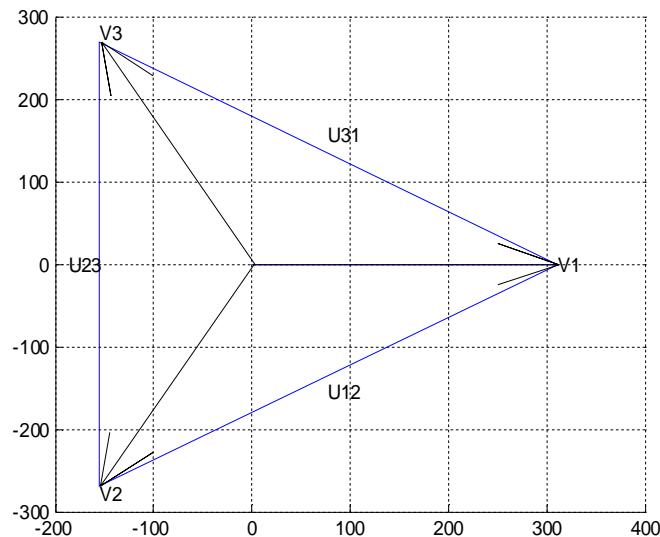


Fig.4.3: Diagramme vectorielle des tensions simples et des composées

Représentation temporelles des tensions simples et des tensions composées:

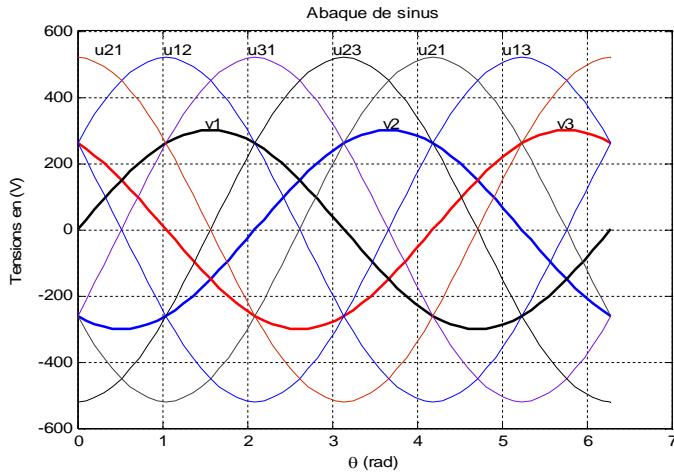


Fig.4.4: Représentation temporelle des tensions simples et composées

4. Etude de différentes liaisons entre un réseau et une charge, en régime triphasé équilibré

Il existe plusieurs façons de relier un réseau électrique triphasé à une charge électrique triphasée, à savoir le couplage en étoile (Y), en triangle (D) et en Zig-zig (Z).

4.1. Liaison entre un réseau et une charge, couplés en étoile

On va étudier la liaison entre un réseau triphasé et une charge, triphasés couplés en étoile. On suppose de plus que les deux systèmes sont symétriques

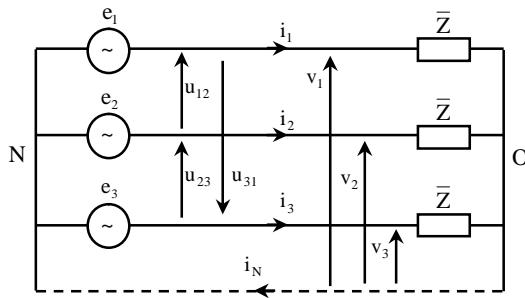


Fig.4.5: Liaison entre source et une charge, triphasés couplés en étoile

Le système de tensions triphasées d'alimentation est donné par:

$$\begin{cases} e_1(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t) \\ e_2(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ e_3(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

Par application de la loi de mailles, les courants ont pour expressions:

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_1 = \frac{\bar{E}_1}{Z} = I\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi)} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_2 = \frac{\bar{E}_2}{Z} = I\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3})} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_3 = \frac{\bar{E}_3}{Z} = I\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3})} \end{cases}$$

Les courants de lignes (\bar{I}_1 , \bar{I}_2 et \bar{I}_3) sont déphasés d'un angle de $(-\varphi)$, par rapport aux tensions simples. Ils ont même valeurs efficaces: $I=J=\frac{V}{Z}$. Alors que le courant dans le neutre est nul:

$\bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{0}$. Donc pour cette liaison, il est inutile de connecter les neutres de la source et de la charge.

Représentation vectorielle des courants et des tensions:

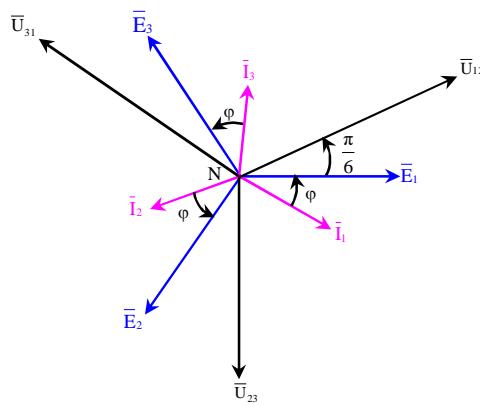


Fig.4.6: Représentation vectorielle des courants et des tensions

4.2.Liaison entre un réseau couplé en étoile et une charge couplée en triangle

On va étudier la liaison entre un réseau triphasé couplé en étoile et une charge triphasée couplée en triangle. Ils sont de plus équilibrés.

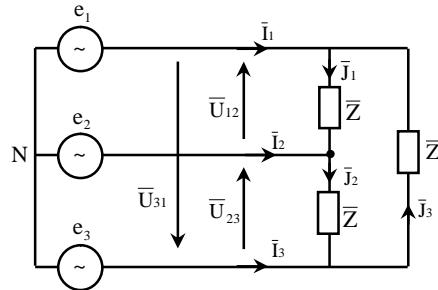


Fig.4.7: Liaison entre source couplée en étoile à une charge couplée en triangle

Par application de la loi de mailles, les expressions des courants dans les phases du récepteur sont fournies par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_1 = \frac{\bar{U}_{12}}{Z} = J\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{6})} \\ \bar{J}_2 = \frac{\bar{U}_{23}}{Z} = J\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})} \\ \bar{J}_3 = \frac{\bar{U}_{31}}{Z} = J\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi - \frac{7\pi}{6})} \end{array} \right.$$

Les courants dans les phases (\bar{J}_1 , \bar{J}_2 et \bar{J}_3) sont décalés d'un angle ($-\varphi$) par rapport aux tensions composées. Ils ont même valeur efficace: $J = \frac{U}{Z} = \sqrt{3} \frac{V}{Z}$. Les courants de lignes (\bar{I}_1 , \bar{I}_2 et \bar{I}_3) se déduites à partir des courants dans les phases, ils sont aussi déphasés d'un angle de ($-\varphi$) par rapport aux tensions simples.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_1 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3 = I\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi)} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1 = I\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3})} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2 = I\sqrt{2}e^{j(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3})} \end{array} \right.$$

Tous les courants dans les lignes ont même valeur efficace: $I = J\sqrt{3} = \frac{3V}{Z}$.

Représentation vectorielle des courants et des tensions:

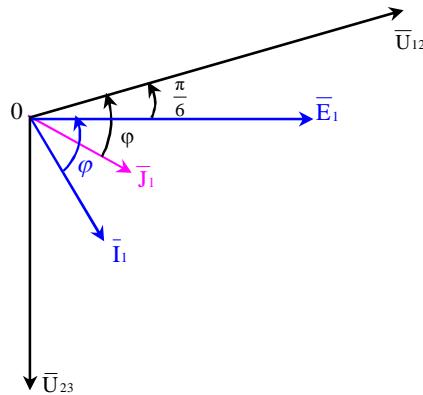


Fig.4.8: Représentation vectorielle des courants et des tensions

4.3.Liaison entre un réseau et une charge, couplés en triangle

On va étudier la liaison entre un réseau et une charge, triphasés couplés en triangle.

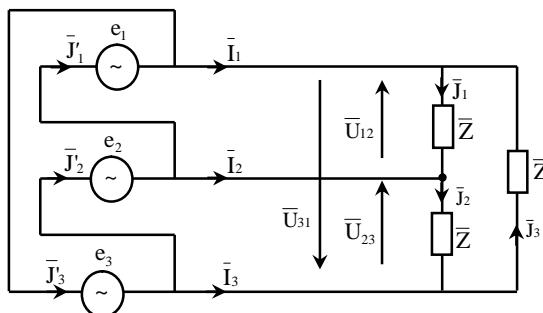


Fig.4.9: Liaison entre source et une charge, couplées en triangle

Les tensions simples et les tensions composées sont égales et sont décris par:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1(t) = u_{12}(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t) \\ e_2(t) = u_{23}(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ e_3(t) = u_{31}(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{array} \right.$$

Par application de la loi de mailles, les expressions des courants complexes dans les phases du récepteur sont données par:

$$\begin{cases} \bar{J}_1 = \frac{\bar{U}_{12}}{Z} = J\sqrt{2}e^{j(wt-\varphi)} \\ \bar{J}_2 = \frac{\bar{U}_{23}}{Z} = J\sqrt{2}e^{j(wt-\varphi-\frac{2\pi}{3})} \\ \bar{J}_3 = \frac{\bar{U}_{31}}{Z} = J\sqrt{2}e^{j(wt-\varphi-\frac{4\pi}{3})} \end{cases}$$

Les courants (\bar{I}_1 , \bar{I}_2 et \bar{I}_3) dans les lignes se déduites à partir des courants dans les phases, ils sont eux même déphasés d'un angle de $(-(\varphi + \frac{\pi}{6}))$ par rapport aux tensions simples.

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3 = I\sqrt{2}e^{j(wt-\varphi-\frac{\pi}{6})} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1 = I\sqrt{2}e^{j(wt-\varphi-\frac{\pi}{2})} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2 = I\sqrt{2}e^{j(wt-\varphi-\frac{7\pi}{6})} \end{cases}$$

Les courants, dans les phases et dans les lignes, ont respectivement pour valeurs efficaces:

$$J = \frac{V}{Z} \text{ et } I = \sqrt{3} \frac{V}{Z}.$$

Représentation vectorielle des courants et des tensions:

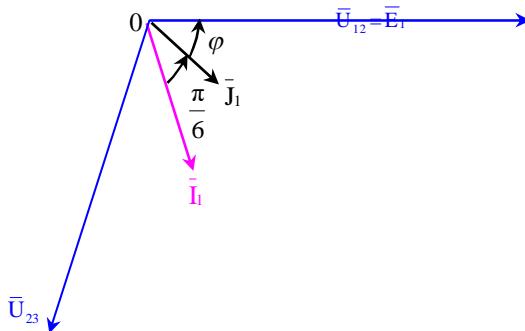


Fig.4.10: Représentation vectorielle des grandeurs, courants et tensions

4.4.Liaison entre un réseau couplé en triangle et une charge couplée en étoile

On va étudier la liaison entre un réseau triphasé couplé en triangle et une charge triphasée couplée en étoile.

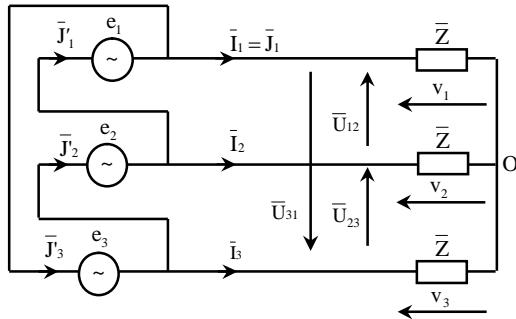


Fig.4.11: Liaison entre source couplée en triangle à une charge couplée en étoile

Le système de tensions d'alimentation, est donné par:

$$\begin{cases} e_1(t) = u_{12}(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t) \\ e_2(t) = u_{23}(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ e_3(t) = u_{31}(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

Les expressions des tensions simples au niveau de la charge sont exprimées par :

$$\begin{cases} v_1(t) = V\sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) \\ v_2(t) = V\sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\omega t - \frac{5\pi}{6}) \\ v_3(t) = V\sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\omega t - \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

Par application de la loi de mailles, les expressions des courants complexes dans les phases du récepteur (ou bien de lignes) sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_1 = \bar{J}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}} = I\sqrt{2}e^{j(wt-\varphi-\frac{\pi}{6})} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}} = I\sqrt{2}e^{j(wt-\varphi-\frac{5\pi}{6})} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}} = I\sqrt{2}e^{j(wt-\varphi-\frac{3\pi}{2})} \end{array} \right.$$

Les courants, dans les phases et dans les lignes, ont pour valeurs efficaces: $I=J=\frac{V}{Z\sqrt{3}}$.

☒ Représentation vectorielle des courants et des tensions:

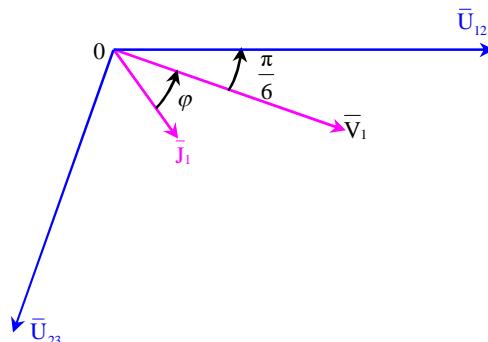


Fig.4.12: Représentation vectorielle des courants et des tensions

5. Notions de puissances en régime triphasé équilibré

Pour un réseau et une charge, triphasés équilibrés, les impédances sont identiques et de même nature.

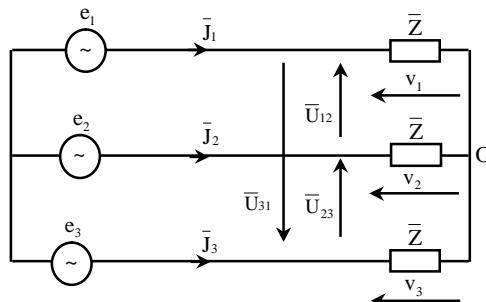


Fig.4.13: Liaison entre un générateur et un récepteur, triphasés

On suppose que la charge est à caractère inductif, les expressions instantanées, de la tension et du courant, pour la première phase, sont donnés par:

$$\begin{cases} v_1(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t) \\ j_1(t) = J\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

• **Puissance active:** Tout calcul fait, on montre que la puissance instantanée, c'est aussi la puissance moyenne (ou active), elle est définie par : $P=3VJ\cos(\varphi)=P=3\frac{V^2}{Z}\cos(\varphi)$

• **Puissance réactive:** $Q=3VJ\sin(\varphi)=\sqrt{3}UI\sin(\varphi)$

• **Puissance apparente complexe:**

On note par \bar{J}^* : le courant complexe conjugué, on définit alors la puissance apparente complexe par : $\bar{S}=3\bar{V}\bar{J}^*=P+jQ$

• **Facteur de puissance:** C'est le rapport entre la puissance active et la puissance apparente: $\cos(\varphi)=\frac{P}{S}=\frac{P}{3VJ}=\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$.

Mesure de puissances en triphasé équilibré

• **Système triphasé équilibré à 4 fils:**

La puissance absorbée par une phase est exprimée par: $P_1=VJ\cos(\varphi)$, et la puissance consommée par le récepteur triphasé est donnée par: $P=3P_1=3VJ\cos(\varphi)$.

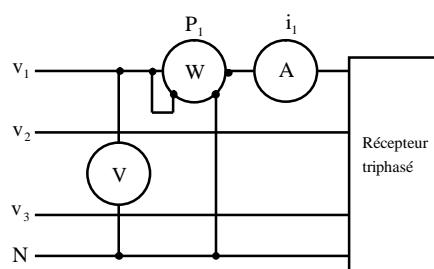


Fig.4.14: Mesure de la puissance en triphasé équilibré avec neutre

•Système triphasé à trois phases:

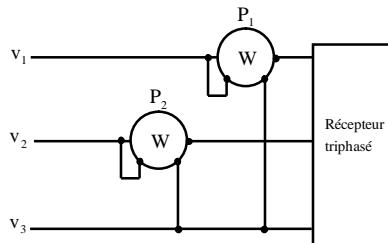


Fig.4.15: Mesure de la puissance par la méthode des deux wattmètres

La puissance mesurée par le wattmètre 1 : $P_1 = \bar{U}_{13} \cdot \bar{I}_1 = UI\cos(\varphi - \frac{\pi}{6})$,

La puissance mesurée par le wattmètre 2 : $P_2 = \bar{U}_{23} \cdot \bar{I}_2 = UI\cos(\varphi + \frac{\pi}{6})$,

•La puissance active absorbée : $P = P_1 + P_2 = \sqrt{3}UI\cos(\varphi)$,

La somme de deux puissances est une somme algébrique.

•La puissance réactive absorbée: $Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2) = \sqrt{3}UI\sin(\varphi)$.

•Le déphasage vaut alors: $\varphi = \arctan\left(\frac{P_1 + P_2}{\sqrt{3}(P_1 - P_2)}\right)$.

6. Etude de la liaison d'un réseau et d'une charge, en régime triphasé déséquilibré

Le déséquilibre peut être causé par le réseau, par la charge, ou bien par les deux à la fois. Une charge est dite déséquilibrée, si elle est formée au moins par deux impédances de branche différentes.

Il en résulte que les courants dans les phases et dans les lignes ne sont pas égaux, par conséquent on obtient un décalage entre le neutre du réseau et le neutre de la charge, par rapport à l'équilibre du régime équilibré.

On suppose que le réseau d'alimentation est une source de tension triphasée équilibrée parfaite et les récepteurs sont linéaires. On va étudier le déséquilibre causé par la charge seulement.

6.1. Etude de la liaison d'un réseau et d'une charge, en régime triphasé déséquilibré, avec neutre relié

On considère le montage de la figure ci-contre:

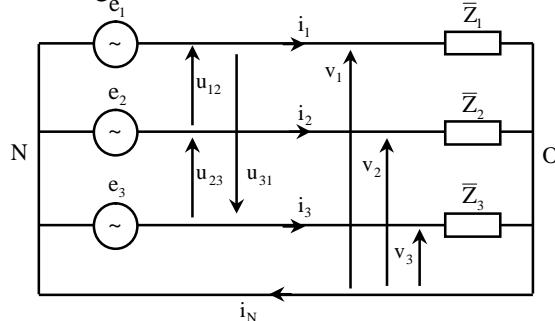


Fig.4.16: Charge triphasée déséquilibrée couplée en étoile avec neutre relié

Les neutres du réseau et de la charge sont nommées par N et O.

$$\text{Le courant du neutre est donnée par: } \bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}_3}.$$

Il peut être aussi exprimé en fonction des angles de charge et des valeurs efficaces des courants

par: $\bar{I}_N = \sqrt{2} \cdot e^{(j\omega t)} [I_1 e^{-(\varphi_1)} + I_2 e^{-(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3})} + I_3 e^{-(\varphi_3 + \frac{4\pi}{3})}]$. La tension entre les neutres a pour expression: $\bar{V}_{NO} = 0$.

☒ Représentation vectorielle des courants et des tensions:

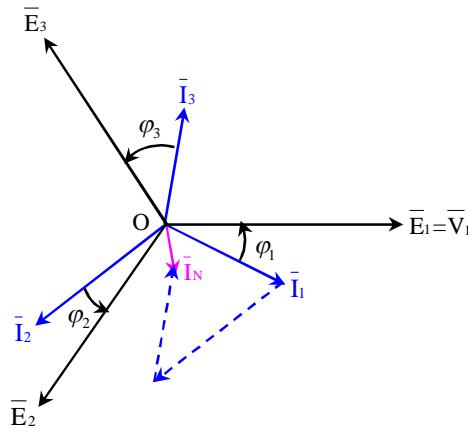


Fig.4.17: Représentation vectorielle des tensions et des courants d'un récepteur déséquilibré couplé en étoile avec neutre relié

**6.2. Etude de la liaison d'un réseau et d'une charge, en régime triphasé déséquilibré,
neutre non relié**

Si les neutres ne sont pas reliées entre eux, par conséquent, il existe une tension entre les points N et O notée par: \bar{V}_{ON} .

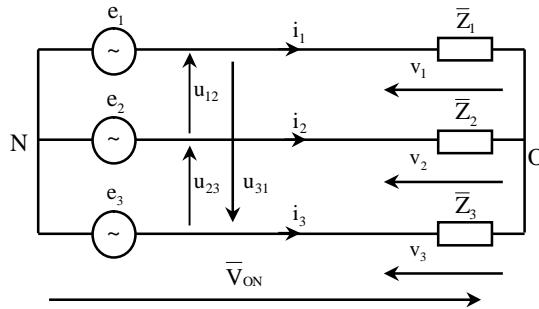


Fig.4.18: Charge triphasée couplée en étoile sans neutre relié

La tension complexe du neutre est déterminée par le théorème de Millman:

$$\bar{V}_{ON} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}_3}. \text{ Cette tension présente un danger d'électrocution pour les êtres humain. Les tensions aux bornes de chaque récepteur ont pour expressions:}$$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{E}_1 - \bar{V}_{ON} \\ \bar{V}_2 = \bar{E}_2 - \bar{V}_{ON} \\ \bar{V}_3 = \bar{E}_3 - \bar{V}_{ON} \end{cases}$$

Le courant dans le neutre est nulle: $\bar{I}_{NO}=0$.

☒ Représentation vectorielle des courants et des tensions:

Les tensions composées seulement forment un système de tensions triphasées équilibrées.

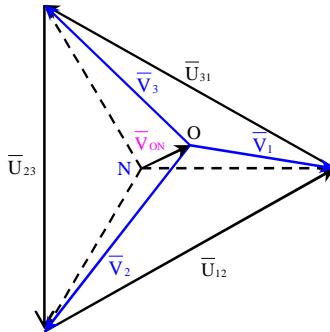


Fig.4.19: Représentation vectorielle des tensions et des courants d'un récepteur déséquilibré couplé en étoile sans neutre relié

☒ Conclusion:

Pour le régime triphasé déséquilibré, on doit relier les neutres du réseau de la charge, s'ils sont couplés en étoile.

7. Notions de puissances en régime triphasé déséquilibré

La puissance instantanée absorbée par une charge triphasée déséquilibrée est la somme des puissances véhiculées par chaque phase, on a donc : $p(t)=v_1i_1+v_2i_2+v_3i_3$.

• **Puissance active:** $P=V_1I_1\cos(\varphi_1)+V_2I_2\cos(\varphi_2)+V_3I_3\cos(\varphi_3)$.

• **Puissance réactive:** $Q=V_1I_1\sin(\varphi_1)+V_2I_2\sin(\varphi_2)+V_3I_3\sin(\varphi_3)$.

• **Puissance apparente:** $S=\sqrt{P^2+Q^2}$.

• **Facteur de puissance:** $f=\frac{P}{S}$.

8. Théorème de Boucherot

La puissance active totale consommée par une installation électrique est égale à la somme des puissances actives consommées par chaque élément électrique de cette installation, on a donc:

$$P = \sum_{k=1}^n P_k = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

La puissance réactive consommée par une installation électrique est égale à la somme des puissances réactives consommées par chaque élément électrique de cette installation, on a donc :

$$Q = \sum_{k=1}^n Q_k = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

Ce théorème ne s'applique pas aux puissances apparentes, que l'on ne peut pas les cumuler.

9. Relèvement du facteur de puissance en triphasé

Pour une installation électrique, on est amené parfois à améliorer le facteur de puissance, pour ne pas avoir une pénalité de la part de la société de distribution de l'énergie électrique.

Il existe alors plusieurs façons de coupler les capacités, pour une ligne triphasée, à savoir:

9.1.Couplage des condensateurs en triangle

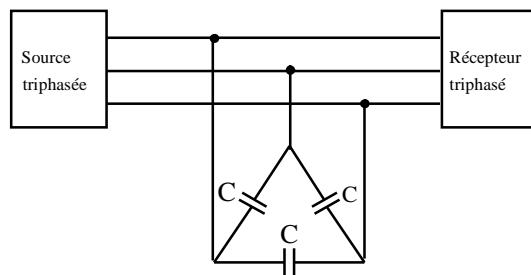


Fig.4.20: Condensateurs couplés en triangle

La tension efficace aux bornes d'un condensateur est notée par (V), il absorbe une puissance réactive: $Q_C = -CwV^2$.

La puissance réactive absorbée par les trois condensateurs: $Q = 3Q_C = 3CwV^2$.

Charge seule	P	$Q_{ch} = P \cdot \tan(\varphi)$	$\cos(\varphi)$
Les condensateurs seuls	0	$Q = -3CwV^2$	0
Charge et condensateurs	P	$Q_T = Q + Q_{ch} = P \cdot \tan(\varphi')$	$\cos(\varphi')$

Fig.4.21: Tableau d'amélioration du facteur de puissance

La capacité du condensateur est exprimée par: $C = \frac{P[\tan(\varphi) - \tan(\varphi')]}{3wV^2}$.

9.2.Couplage des condensateurs en étoile

Le même raisonnement analogue au précédemment, on montre que la capacité du condensateur est donnée par: $C = \frac{P[\tan(\varphi) - \tan(\varphi')]}{3wV^2}$.

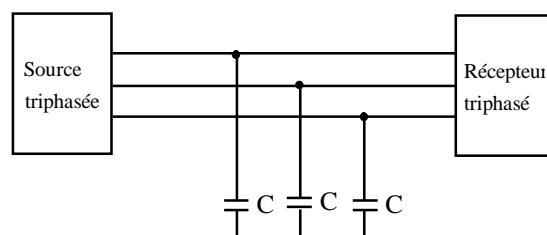
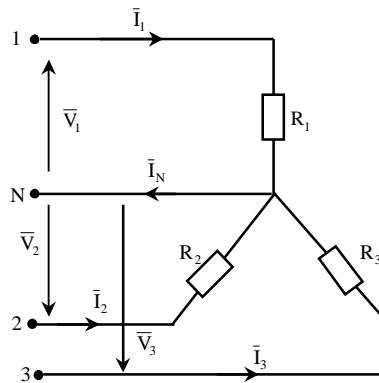


Fig.4.22: Couplage des condensateurs en étoile

Exercices sur le chapitre 4

Exercice 1:

On considère une charge résistive triphasée, alimentée par un réseau de tension triphasé équilibré, dont la valeur efficace de la tension simple est de l'ordre de $V=220V-50Hz$. Les résistances ont pour valeurs: $R_1=R_2=R_3=R=100\Omega$.

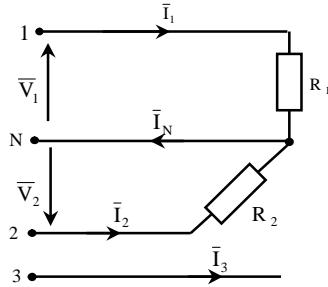


1. Quelle est la valeur du courant dans chaque fil de ligne,

On change à présent les valeurs des résistances, on prend alors $R_1=100\Omega$, $R_2=200\Omega$ et $R_3=400\Omega$.

2. Que deviennent les courants des lignes,
3. Calculer analytiquement et graphiquement le courant efficace dans le neutre I_N .

Le circuit électrique précédent, présente une coupure au niveau de la phase 3, donné par de la figure suivante:



Entre la phase 1 et le neutre, on connecte un radiateur électrique dont la puissance active est de 3kW. Entre la phase 2 et le neutre, on connecte une lampe de 100W.

4. Calculer alors les courants efficaces des lignes.

En cas de la coupure de la ligne neutre et de la ligne 3.

5. Calculer de nouveau les courants et les tensions efficaces de deux récepteurs, en déduire la tension efficace complexe du neutre.

Exercice 2:

Sur le réseau triphasé: 220/380V-50Hz sans neutre, on couple en étoile trois récepteurs identiques. Chaque récepteur est formé d'une résistance en série avec une inductance, dont leurs valeurs valent respectivement: $R=10\Omega$ et $L=0.1H$.

- 1.** Faire le schéma du montage en indiquant les flèches des tensions et des courants,
- 2.** Déterminer la valeur efficace des courants de lignes, ainsi que leurs déphasages par rapport aux tensions correspondantes,
- 3.** Calculer les puissances actives, réactives et apparentes,
- 4.** Construire le diagramme de Fresnel du couplage en étoile.

Ces trois récepteurs sont maintenant couplés en triangle.

- 5.** Calculer la valeur efficace des courants de lignes,
- 6.** Construire le diagramme de Fresnel du couplage en triangle.

Exercice 3:

Récepteur couplé en étoile avec neutre:

Phase 1 : $R_1=125\Omega$ et $L_1=0.2H$, sont en série.

Phase 2 : $R_2=125\Omega$ et $C_2=6\mu F$, sont en série.

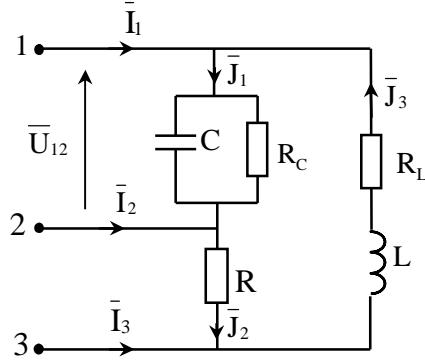
Phase 3 : $R_3=220\Omega$.

La tension du réseau: 230V-50Hz.

- 1.** Calculer les courants complexes en ligne et la puissance active, réactive et apparente,
- 2.** En déduire le facteur de puissance,
- 3.** Tracer le diagramme de Fresnel des tensions et courants (on prend la tension V_1 comme référence).

☒ Récepteur couplé en triangle:

On donne les valeurs des paramètres du montage de la figure suivante: $R=60\Omega$; $R_L=125\Omega$; $R_C=290\Omega$; $L=0.5H$ et $C=6\mu F$.



4. Calculer les intensités des courants dans les récepteurs et les courants en ligne.

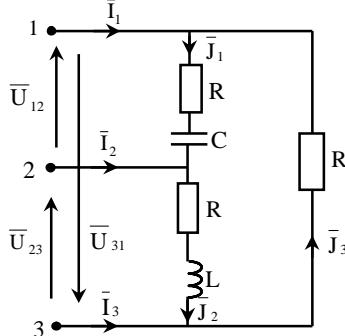
Prendre la tension \bar{U}_{12} comme référence de phase,

5. Tracer le diagramme de Fresnel des tensions et courants.

Exercice 4:

Le circuit électrique suivant est alimenté par une source de tension triphasée équilibrée directe, dont la tension efficace a pour valeur 400V. On donne les valeurs des paramètres suivants :

$$R = \frac{1}{Cw} = Lw = 40\Omega .$$

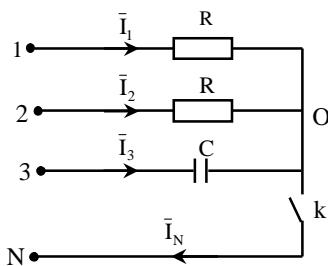


1. Calculer les courants complexes dans les phases et les lignes et tracer leur diagramme vectoriel,

2. Calculer les puissances, active et réactive, absorbée par ce circuit.

Exercice 5:

Un système de tensions triphasées directes équilibrées, couplé en étoile de pulsation (w), alimente un récepteur triphasé couplé en étoilé comprenant deux résistors de résistance (R) et un condensateur de capacité (C), tel que: $R = \frac{1}{Cw} = 100\Omega$. La valeur efficace des tensions simples est $V=230V$.



1. Déterminer, lorsque l'interrupteur k est fermé:

- Les courants complexes de lignes,
- Les puissances active et réactive,
- Le facteur de puissance.

2. Reprendre les mêmes questions lorsque K est ouvert.

Correction des exercices du chapitre 4

Exercice 1 :

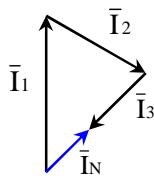
1. Courant efficace de ligne : $I = \frac{V}{R} = 2.2A$, le courant complexe du neutre : $\bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{0}$

2. Courants efficaces des lignes : $I_1 = \frac{V}{R_1} = 2.2A$, $I_2 = \frac{V}{R_2} = 1.1A$, $I_3 = \frac{V}{R_3} = 0.55A$.

3. Courant efficace dans le neutre I_N :

• **Méthode graphique :**

On trouve $I_N = 1.455A$.



• **Méthode Analytique:**

$\bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 1.455e^{-j19.09^\circ} A$, d'où $I_N = 1.455A$ et $\varphi = -19^\circ$.

4. Courants efficaces en cas de coupure de la ligne 3

• Courants efficaces de ligne et du neutre:

$$I_1 = \frac{P_1}{V} = 13.636A ; I_2 = \frac{P_2}{V} = 0.454A \text{ et } \bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 13.415e^{-j1.69^\circ}.$$

On a donc : $I_N = 13.415A$.

5. Courants et tensions efficaces en cas de coupure de la ligne neutre et de la troisième phase

• Courants efficaces:

$$\bullet I_1 = I_2 = \frac{P_1 + P_2}{V\sqrt{3}} = 8.135A \text{ et } I_N = 0A.$$

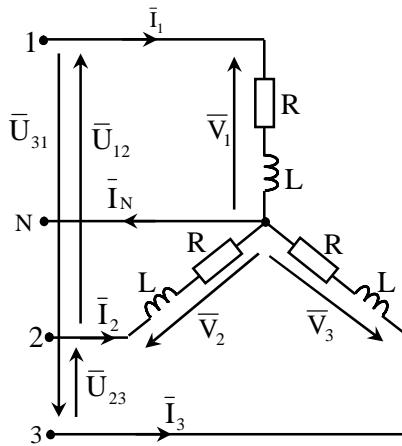
$$\bullet \text{Tensions efficaces: } V_{R1} = \frac{P_1}{I_1} = 368.8V \text{ et } V_{R2} = \frac{P_2}{I_2} = 12.3V.$$

• Valeurs de résistances des récepteurs, on trouve: $R_1 = 45.34\Omega$ et $R_2 = 1.51\Omega$.

- Tension efficace complexe du neutre: $\bar{V}_{ON} = \frac{R_2 \bar{V}_1 + R_1 \bar{V}_2}{R_1 + R_2} = 209.45 e^{+j61.68^\circ}$.

Exercice 2:

- Schéma de montage d'éléments couplés en étoile

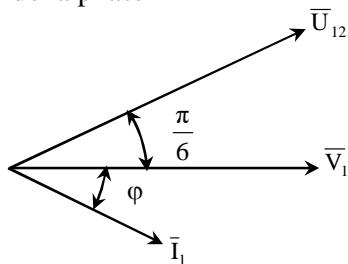


- Courant efficace des lignes : $I = J = \frac{V}{Z} = 6.67 A$;

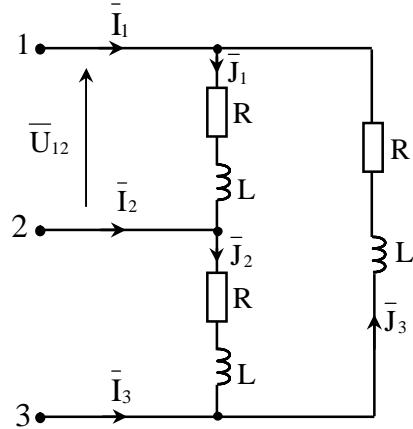
$$\bullet (\vec{U}_{12}; \vec{I}_1) = (\vec{U}_{12}; \vec{V}_1) + (\vec{V}_1; \vec{I}_1) = 30^\circ + \varphi = 102^\circ.$$

- Puissances : $P = 1360 W$; $Q = 4186 VAR$; $S = 4401 VA$.

- Représentation vectorielle de la phase 1

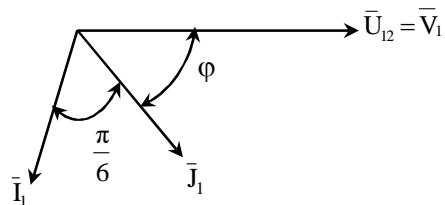


5. Schéma de montage d'éléments couplés en triangle



- Courant efficace des phases et des lignes : $J = \frac{V}{Z} = 11.52A$; $I = J\sqrt{3} = 20A$.

6. Représentation vectorielle de la phase 1



Exercice 3:

☒ Récepteur couplé en étoile avec neutre:

1. Courants complexes de lignes

- Calcul des impédances complexes :

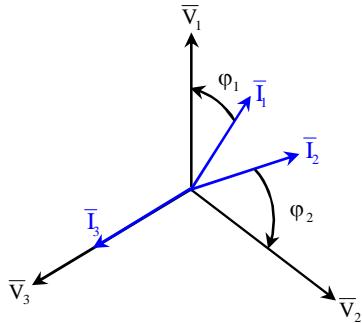
$$\bar{Z}_1(\Omega) = 125 + j62.83 ; \bar{Z}_2(\Omega) = 125 - j530.5 \text{ et } \bar{Z}_3(\Omega) = 220 .$$

$$• \bar{I}_1 = 1.644e^{-j26.68^\circ} A ; \bar{I}_2 = 0.422e^{-j43.26^\circ} A \text{ et } \bar{I}_3 = 1.0454e^{+j120^\circ} A .$$

$$• \text{Puissances: } P = 600.53W ; Q = 75.34\text{VAR et } S = 605.23\text{VA} .$$

2. Facteur de puissance: $\cos(\varphi) = \frac{P}{S} = 0.99$.

Diagrammes de Fresnel des tensions et courants:

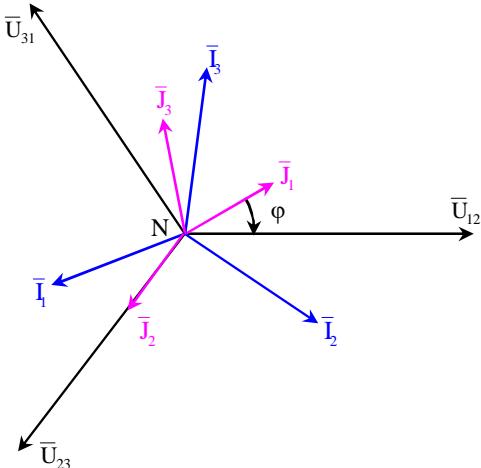


Récepteur couplé en triangle:

3. Courants de lignes et dans les récepteurs

- $\bar{Z}_1(\Omega) = 254.46e^{+j0.5}$; $\bar{Z}_2(\Omega) = 60$; $\bar{Z}_3(\Omega) = 200.75e^{+j0.9}$
- $J_1 = 0.904A$; $J_2 = 3.84A$; $J_3 = 1.146A$.
- $I_1 = 1.57A$; $I_2 = 6.65A$; $I_3 = 1.985A$.

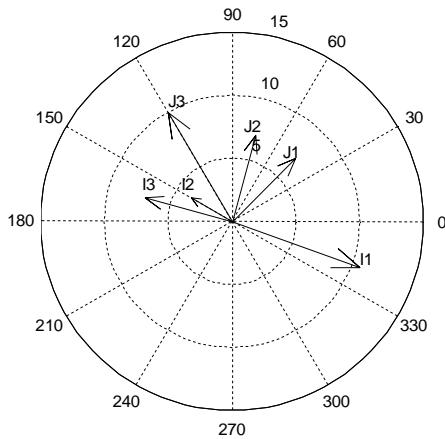
4. Représentation vectorielle des courants et des tensions



Exercice 4:

1. Courants complexes dans :

- Les phases : $\bar{J}_1(A)=5\sqrt{2}e^{+j45^\circ}$; $\bar{J}_2(A)=5\sqrt{2}e^{+j75^\circ}$ et $\bar{J}_3(A)=10e^{+j120^\circ}$.
- Les lignes : $\bar{I}_1(A)=10.65e^{-j20^\circ}$; $\bar{I}_2(A)=3.66e^{+j150^\circ}$ et $\bar{I}_3(A)=7.07e^{+j165^\circ}$.



2. Les puissances, active et réactive :

$$\text{La puissance active : } P = P_1 + P_2 + P_3 = 6 \text{ kW}$$

$$\text{La puissance réactive : } Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 5.9 \text{ kVAR}$$

Exercice 5:

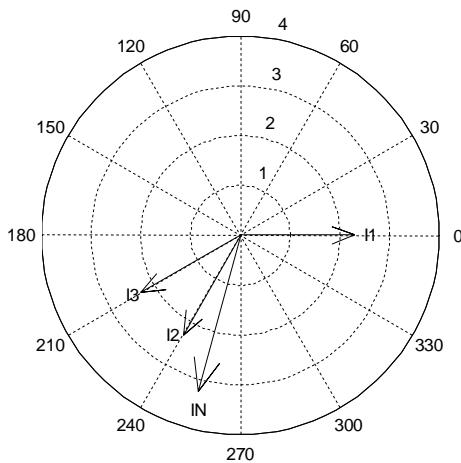
1. Interruuteur k est fermé :

• Courants complexes efficaces :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_1(A) = \frac{\bar{V}_1}{R} = 2.3 \\ \bar{I}_2(A) = \frac{\bar{V}_2}{R} = 2.3 e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ \bar{I}_3(A) = j \frac{\bar{V}_3}{R} = 2.3 e^{+j\frac{7\pi}{6}} \end{array} \right.$$

$$\text{Et } \bar{I}_N(A) = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 3.25e^{+j\frac{17\pi}{12}}.$$

- Tension efficace complexe du neutre: $\bar{V}_{ON} = 0$.



- Les puissances active et réactive valent respectivement : $P = 1058W$ et $Q = -529VAR$.
- Le facteur de puissance vaut: $\cos(\phi) = 0.8944$.

2. Interrupteur k est ouvert:

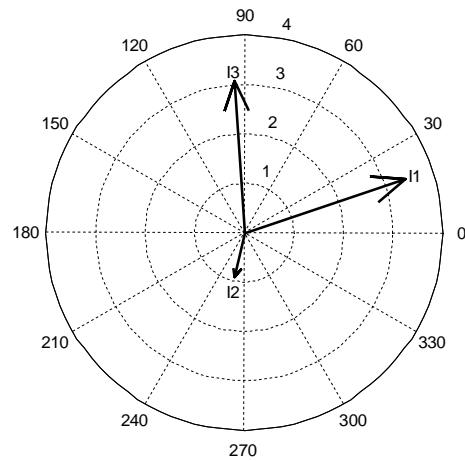
- Tension de neutre :

$$\bar{V}_{ON}(V) = \frac{\frac{\bar{V}_1}{R} + \frac{\bar{V}_2}{R} + j\frac{\bar{V}_3}{R}}{\frac{2}{R} + j\frac{1}{R}} = \frac{\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + j\bar{V}_3}{2+j} = 145.465e^{+j228.435}$$

- Courants complexes efficaces:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_1(A) = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_{ON}}{R} = 3.44e^{+j18.23^\circ} \\ \bar{I}_2(A) = \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_{ON}}{R} = 0.92e^{-j101.51^\circ} \\ \bar{I}_3(A) = \frac{\bar{V}_3 - \bar{V}_{ON}}{R} = 3.09e^{+j94^\circ} \end{array} \right.$$

Et $\bar{I}_N = 0$.



- La puissance active : $P = 1592W$
- La puissance réactive : $Q = 1.67VAR$
- Le facteur de puissance : $\cos(\phi) = 0.999.$

Bibliographie

- [1] Précis d'électrotechnique Tome 1 et Tome 2, Auteur : Michel Pinard, éditions : Bréal.
- [2] Physique appliquée, Auteur : Alexandre Wozniak, éditions : Educalivre.
- [3] Fonctions de base à éléments passifs, Auteur : Michel Girard, éditions : Ediscience international.
- [4] Fondements d'électricité et électromagnétisme, Auteur : Jacques Laroche, éditions : Dunod.
- [5] Electrocinétique, Auteur : Hubert Lumbroso, éditions : Dunod.
- [6] Electricité Electromagnétisme, Auteur : Frédéric Bancel, éditions : Dunod.
- [7] Amplificateurs opérationnels 2, Auteur : Michel Girard, éditions : Dunod.