Correction du devoir maison n°4

Problème n°1

1.1

$$\text{div } \overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = \overrightarrow{0}$$

Or,
$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ \mathrm{V} \quad \text{d'où} \quad \Delta \mathrm{V} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

C'est l'équation de Poisson.

Dans l'isolant, $\rho = 0$ donc $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \mathrm{V}}\left(r\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}\right) = 0$.

Il vient $r\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r} = \mathrm{C}$ puis $\mathrm{V} = \mathrm{C}\ln r + \mathrm{D}$.

En $r = r_1$, $\mathrm{V} = \mathrm{C}\ln r_1 + \mathrm{D} = \mathrm{U}$

En $r = r_2$, $\mathrm{V} = \mathrm{C}\ln r_2 + \mathrm{D} = 0$

d'où
$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{U}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \quad \text{et} \quad \mathrm{D} = -\frac{\mathrm{U}\ln r_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

soit
$$\boxed{\mathrm{V}(r) = \frac{\mathrm{U}\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}}$$

1.2

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ \mathrm{V} = -\frac{\mathrm{U}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\frac{1}{r}\overrightarrow{e_r}}$$

Les relations de passage exprimant la discontinuité de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ à travers une interface chargée surfaciquement s'écrivent :

A l'interface âme/isolant en r_1,

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}_{\mathrm{N1}} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{E}}_{\mathrm{N2}} = -\frac{\mathrm{U}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\frac{1}{r_1}\overrightarrow{e_r} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e_r}$$

d'où
$$\boxed{\sigma_1 = \frac{\mathrm{U}}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\frac{\varepsilon_0}{r_1}}$$

A l'interface isolant/gaine en r_2

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}_{\mathrm{N2}} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{E}}_{\mathrm{N1}} = -\frac{\mathrm{U}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\frac{1}{r_2}\overrightarrow{e_r} = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e_r}$$

d'où
$$\boxed{\sigma_2 = \frac{-\mathrm{U}}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\frac{\varepsilon_0}{r_2}}$$

La surface de l'âme est S=$2\pi r_1 \ell$ et la charge présente sur l'âme est donc :
$$\boxed{\mathrm{Q}_1 = 2\pi r_1 \ell \sigma_1 = \frac{\mathrm{U}\varepsilon_0 2\pi\ell}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$$

De même la surface de la gaine est $2\pi r_2 \ell$ et la charge présente sur la gaine est :
$$\boxed{\mathrm{Q}_2 = 2\pi r_2 \ell \sigma_2 = \frac{-\mathrm{U}\varepsilon_0 2\pi\ell}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$$

On constate que ces charges sont opposées et que le cable est bien électriquement neutre.

1.3 La capacité du cable est :
$$\boxed{\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\ell}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$$

1.4 L'énergie volumique du champ électrique est :
$$u_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2$$
$$\mathrm{W}_{\mathrm{E}} = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2 d\tau$$

On intègre dans l'espace où E est non nul, c'est à dire dans l'isolant.
$$\mathrm{W}_{\mathrm{E}} = \int_{r=r_1}^{r=r_2}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{z=0}^{z=\ell} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2(r) dr\, r d\theta\, dz$$
$$\mathrm{W}_{\mathrm{E}} = \int_{r=r_1}^{r=r_2} \frac{\mathrm{U}^2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\frac{\varepsilon_0}{2r} dr \ell 2\pi$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{W}_{\mathrm{E}} = \frac{\pi\ell\varepsilon_0\mathrm{U}^2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$$

et
$$\boxed{\mathrm{C} = \frac{\varepsilon_0 2\pi\ell}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$$

2.1 Tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie. $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est perpendiculaire à ces plans et est donc selon $\overrightarrow{e_\theta}$. L'invariance par rotation selon Oz et par translation selon $\overrightarrow{e_z}$ (le cable est infiniment long) impliquent que $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ ne dépend ni de z ni de θ.

Finalement,
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{B}(r)\overrightarrow{e_\theta}}$$

Les lignes de champ sont des cercles centrées sur l'axe Oz.

2.2 Dans l'isolant, on a toujours $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \dfrac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$. Le champ est nul dans la gaine et le champ est donc discontinu en r_2.

2.3

$$e_\mathrm{B} = \frac{\mathrm{B}^2}{2\mu_0}$$

On intègre de la même façon qu'en 1.5 et

$$\mathrm{W_B} = \int_{r=r_1}^{r=r_2} \frac{\ell \mu_0 \mathrm{I}^2}{4\pi}\frac{dr}{r}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{W_B} = \frac{\ell \mu_0 \mathrm{I}^2}{4\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{L}\mathrm{I}^2}$$

On trouve alors

$$\boxed{\mathrm{L} = \frac{\mu_0 \ell \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi}}$$

3.1 C'est une question de cours.

3.2

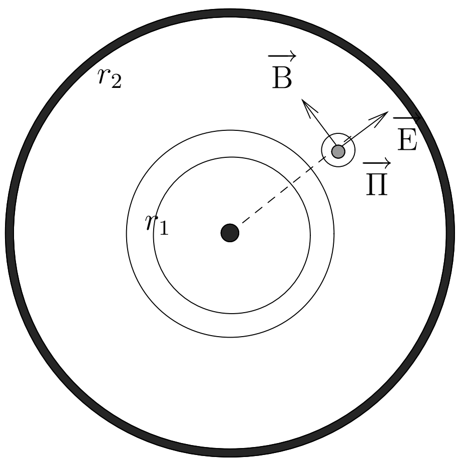
$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{E}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\mu_0} = -\frac{\mathrm{U}}{\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)}\frac{1}{r}\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi r}\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$$

soit

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = \frac{\mathrm{UI}}{2\pi r^2 \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}\overrightarrow{e_z}}$$

3.3

Nous avons la situation suivante :



Il faut calculer le flux de $\overrightarrow{\Pi}$ à travers une section du cable. On calcule le flux à travers une couronne d'épaisseur dr et de surface $2\pi r dr$ puis on intègre de r_1 à r_2 :

$$d\varphi = 2\pi r dr \|\overrightarrow{\Pi}\|$$

$$\iint \overrightarrow{\Pi}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \frac{\mathrm{UI}}{2\pi r^2 \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)} dr$$

d'où
$$\boxed{\iint \overrightarrow{\Pi}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \mathrm{UI}}$$

Le champ électromagnétique transporte la puissance UI : c'est la puissance électrocinétique du cable.

Problème n°2 : thermodynamique

$\boxed{1}$ On utilise la définition pour un gaz parfait $c_{\mathrm{P}} = \dfrac{\Delta h}{\Delta \mathrm{T}}$ et on se place à basse pression où les isothermes sont presque des isenthalpes. On mesure alors que pour Δh valant 20 kJ/kg, $\Delta \mathrm{T} \approx 25$°C. On a donc $c_{\mathrm{P}} \approx 0,8 = k\mathrm{J}.kg^{-1}.\mathrm{K}^{-1}$.

Pour un gaz parfait on a $\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{M}} = 0,79k\mathrm{J}.kg^{-1}.\mathrm{K}^{-1}$

$\boxed{2}$ C'est du cours !

$\boxed{\textbf{3-4-5}}$ Il faut bien lire le texte et placer sur le diagramme les différents états. Cette étape est cruciale.

- le point (1) est l'intersection de l'isobare à 3,5 bar et de la courbe de rosée. On constate que $h_1 = 400k\mathrm{J}/kg$. La température est $\theta_i = 5$°C.
  On a aussi $s_1 = 1,72\mathrm{J.K}^{-1}.kg^{-1}$.
- le point (2) est toujours sur cette isobare mais pour $h_2 = 420k\mathrm{J}/kg$. On a $\theta_2 = 25$°C.
  On détermine $s_2 = 1,78\mathrm{J.K}^{-1}.kg^{-1}$.
- Pour trouver le point (3), il faut poursuivre l'isentropique (juste avant $s = 1,80k\mathrm{J}/kg\mathrm{K}$) et trouver l'intersection avec l'isobare à 10 bars. On trouve $\theta_3 = 65$°C (et $h_3 = 445k\mathrm{J}/kg$).
  On a aussi $s_3 = s_2 = 1,78\mathrm{J.K}^{-1}.kg^{-1}$.
- pour le point (4), il s'agit de l'intersection de cette isobare avec la courbe d'ébullition, $\theta_4 = 40$°C.
  Il vient $s_4 = 1,19\mathrm{J.K}^{-1}.kg^{-1}$.
- l'état (5) est sur cette isobare mais il faut déterminer (6) avant : c'est l'intersection de l'isobare 3,5bar et l'isotitre $x = 0,2$. On trouve ensuite (5) qui a la même ethalpie massique. On a alors $\theta_5 = 35$°C.
  On trouve $s_5 = 1,17\mathrm{J.K}^{-1}.kg^{-1}$.
  $\theta_6 = \theta_1 = 5$°C. On a aussi $s_6 = 1,17\mathrm{J.K}^{-1}.kg^{-1}$.

$\boxed{\textbf{4.a}}$ On a simplement $w_u = h_3 - h_2 = 25k\mathrm{J}/kg$

$\boxed{\textbf{4.b}}$ On a alors $\mathrm{P}_1 = \dfrac{\delta \mathrm{W}}{dt} = \dfrac{dmw_u}{dt} = \mathrm{D}_m w_u = 3.25k\mathrm{W}$

$\boxed{5}$ Le gaz est refroidit à pression constante puis est liquéfié jusqu'en (4). Le liquide est alors refroidit jusqu'en (5).

$$q_{\mathrm{C}} = h_4 - h_3 = 255 - 445 = -190k\mathrm{J}/kg$$

Le fluide reçoit un transfert thermique négatif de la source chaude : il réchauffe l'extérieur (comme un frigo réchauffe la cuisine).

$\boxed{6}$ On a aussi
$$q_{\mathrm{F}} = h_1 - h_6 = 400 - 245 = 155k\mathrm{J}/kg$$
Ce transfert thermique est positif : le fluide prélève de la chaleur à la source froide (l'habitacle) ce qui le refroidit.

$\boxed{7}$ On a $\mathrm{P}_2 = q_{\mathrm{F}}\mathrm{D}_m = 20,1k\mathrm{W}$

8 L'efficacité de la machine frigorifique est

$$\eta = \frac{q_F}{w_u} = 6,2$$

Problème n°3 : Mines PSI 2015

1 Pour un gaz parfait diatomique, on a à T ambiante (il faut le supposer !) $c_v = 5 \times \frac{R}{2}$ et, d'après la relation de Mayer, $c_p = c_v + R = 7 \times \frac{R}{2}$, soit $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$. Pour une compression adiabatique réversible donc isentropique, on a la relation de Laplace $P^{1-\gamma}T^\gamma = C^{te}$, ce qui donne entre l'entrée et la sortie d'un compresseur $\left(\frac{p_{\text{sortie}}}{p_{\text{entrée}}}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{T_{\text{sortie}}}{T_{\text{entrée}}}\right)^\gamma = 1$, soit $T_{\text{sortie}} = T_E r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} < T_{\max}$ et $r_{\max} = \left(\frac{T_{\max}}{T_E}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{p_A}{p_E}\right)^{1/N_{\min}}$. En prenant le logarithme,

$$N_{\min} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\ln(p_A/p_E)}{\ln(T_{\max}/T_E)}$$

A.N. $N_{\min} = 4,57$. On prendra donc cinq étages et $r = 100^{1/5} = 2,51$ et $T_{\text{sortie}} = 390\text{K}$.

2 Par contre, pour une même contrainte en température, il faut diminuer r et donc augmenter N. Le terme $TdS > 0$ de $dH = TdS + VdP$ va en effet conduire à une augmentation plus importante de l'enthalpie et donc de la température.

3 Si on suppose le réfrigérant globalement adiabatique (il n'y a pas de travail), on a d'après le premier principe $D_{\text{eau}}c_e\left(T'_{\text{sortie}} - T_e\right) + D\frac{7R}{2M}\left(T_E - T_{\text{sortie}}\right) = 0$, soit

$$\left.\frac{D_{\text{eau}}}{D}\right|_{\min} = \frac{7R}{2M}\frac{T_{\text{sortie}} - T_E}{c_e\left(T'_{\max} - T_e\right)}$$

A.N. $\left.\frac{D_{\text{eau}}}{D}\right|_{\min} = 0,32$

4 $\mathscr{C}_1$ est une isotherme. À basse pression, l'hypothèse gaz parfait se justifie et h n'est fonction que de la température, les isenthalpes se confondent avec les isothermes, on a donc une asymptote verticale à basse pression.

5 $\mathscr{C}_2$ est une isentrope. On a alors, dans la zone vapeur, $dh = vdp$, la pente de la courbe est bien positive.

6 La courbe $\mathscr{C}_3$ se décompose en courbe de rosée à droite (vapeur à droite et mélange liquide-vapeur à gauche) et courbe d'ébullition à gauche (liquide à gauche et mélange à droite). Le point O est le point critique.

7 $\mathscr{C}_4$ est la courbe isotitre. Le diazote en M est de titre 0,1 i.e. un mélange avec 10% de liquide et 90% de vapeur.

8 D'après la règle des moments

$$h_C = (1-x)h_{\text{vap}} + xh_{\text{liq}}$$

9 En D, on récupère la fraction vapeur du débit D soit $D' = (1-x)D$ et $D_m = xD$

10 Un bilan d'énergie sur l'échangeur adiabatique et sans partie mobile conduit à $D'(h_E - h_{\text{vap}}) + D(h_B - h_A) = 0$ Dans la vanne de détente, la transformation est isenthalpique (système ouvert, régime permanent, adiabatique, sans partie mobile) et donc $h_B = h_C = (1-x)h_{\text{vap}} + xh_{\text{liq}}$. Soit $(1-x)h_E - h_A + xh_{\text{liq}} = 0$ ou

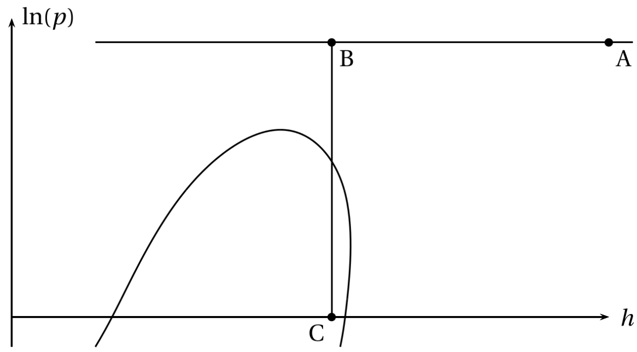
$$x = \frac{h_E - h_A}{h_E - h_{\text{liq}}}$$

11 On lit sur le diagramme enthalpique $h_E = 525\ \text{kJ.kg}^{-1}$ (isotherme 27°C, isobare 1 bar), $h_A = 500\ \text{kJ.kg}^{-1}$ (isotherme 27°C, isobare 100bar) ;

$$h_{\text{vap}} = 280\ \text{kJ.kg}^{-1} \quad h_{\text{liq}} = 85\ \text{kJ.kg}^{-1} \quad x = 0,057$$

Pour un gaz parfait h ne dépend que de la température $h_{\mathrm{A}} = h_{\mathrm{E}}$ et donc $x = 0$, on n'a pas de liquide!

12



B est à l'intersection de l'isobare passant par A et de l'isenthalpe passant par C. Au point B, l'azote est sous forme de gaz à la température de -115°C.

13 Pour un compresseur adiabatique $w_i = \Delta h = c_p \Delta \mathrm{T}$. La puissance correspondante est donc

$$\mathrm{P} = \mathrm{ND}c_p \left(\mathrm{T}_{\mathrm{sortie}} - \mathrm{T}_{\mathrm{E}}\right)$$

avec $c_p = \frac{7\mathrm{R}}{2\mathrm{M}}$, capacité thermique massique et $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{D}_m}{x}$.

Application numérique : $\boxed{\mathrm{P} = 248k\mathrm{W}}$

Le débit de 1L/h correspond à $\frac{0{,}81}{3600} = 0,23g.s^{-1}$ qui, par une règle de trois, donne 1,9kW. L'ordre de grandeur est tout à fait respecté.