- CCP DEUG 2003 : Physique 2 -

• **ENONCE :** « Electrocinétique - Electromagnétisme »

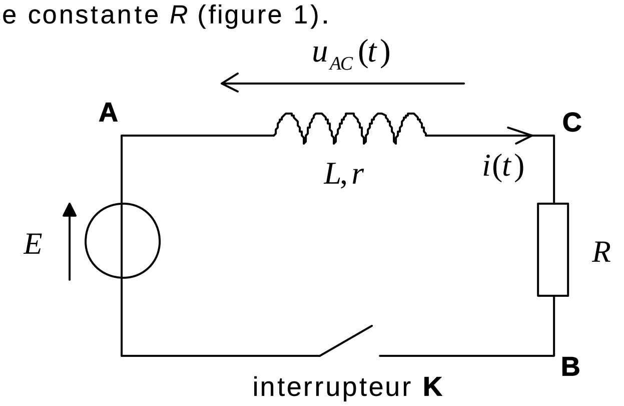
Ce problème, composé de deux parties, permet d'envisager différents aspects de l'induction électromagnétique.

- Partie A : électrocinétique –

*Les paragraphes **I** et **II** exploitent la présence d'une bobine d'induction dans un circuit électrique simple.*

I. Régime transitoire dans une bobine

Une source idéale de tension, de f.é.m. E, peut alimenter un dipôle électrocinétique ***AB*** constitué, en série, d'une bobine d'induction ***AC*** (inductance *L* et résistance constante r) et d'un résistor ***CB*** de résistance constante *R* (figure 1).



- figure 1 -

Au temps *t* = 0, pris comme instant initial, l'interrupteur ***K*** est abaissé et le circuit est fermé.
Soit $u_{AC}(t)$, la tension aux bornes de la bobine et *i*(t), l'intensité dans le circuit.
On pose $t = L/(R+r)$.

1.1) Rappeler la relation entre la tension $u_{AC}(t)$ et l'intensité *i(t)*.

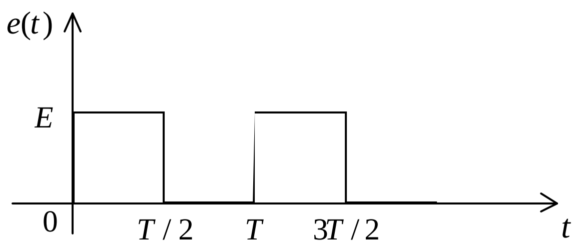
1.2) Ecrire, pour $t \geq 0$, l'équation différentielle linéaire du 1er ordre dont *i(t)* est solution (équation de maille).

1.3) Déterminer, par intégration de l'équation précédente, l'expression de *i(t)*.

1.4) En déduire l'expression de la tension $u_{AC}(t)$.

1.5) Tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions *i(t)* et $u_{AC}(t)$.

1.6) Que deviennent ces deux courbes, si le générateur délivre une tension « créneau » *e(t)* de période *T* (avec $t \ll T/2$) ? La tension est définie de la façon suivante (figure 2) :



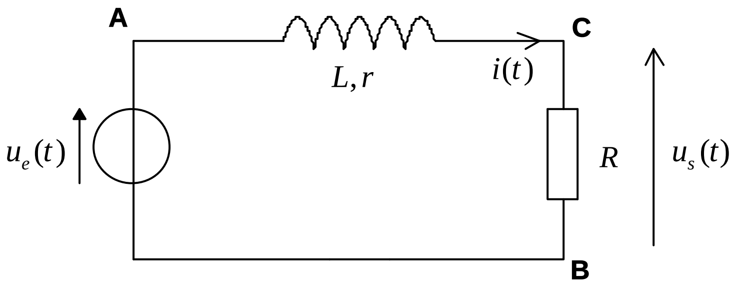
$0 \leq t \leq T/2 : \quad e(t) = E$

$T/2 \leq t \leq T : \quad e(t) = 0$

- figure 2 -

II. Circuit linéaire en régime sinusoïdal

La source idéale de tension précédente, de f.e.m E, est remplacée par un générateur de tension alternative sinusoïdale $u_e(t) = U_m \cos(wt)$ (figure 3) :



- figure 3 -

Soit $u_s(t)$ la tension de sortie aux bornes du résistor.

On pose w_0 = *(R+r)/L* et *K = R/(R+r).*

2.1) Soient $\underline{u}_s$ et $\underline{u}_e$ les amplitudes complexes respectives des tensions de sortie et d'entrée.

2.1.1. Écrire l'impédance complexe $\underline{Z}_{AB}(jw)$ du dipôle ***AB***. On rappelle l'égalité $j^2 = -1$.

2.1.2. Exprimer, en fonction de K, w et w_0, la fonction de transfert (ou transmittance) définie par le rapport complexe $\underline{H}(jw) = \underline{u}_s / \underline{u}_e$.

2.2) La fonction de transfert est caractérisée par son gain (ou module) $G(w)$ et par son argument $j(w)$ (ou déphasage entre les tensions $\underline{u}_s$ et $\underline{u}_e$).

2.2.1. Déterminer, en fonction de K, w et w_0 , les fonctions $G(w)$ et $j(w)$.

2.2.2. Représenter, en fonction de $\log w$, l'allure de la courbe de gain $G_{dB} = 20 \log G(w)$.

2.2.3. Même question pour la courbe de phase $j(w)$.

2.3) Quelle est la caractéristique principale de ce montage ?

- Partie B :Électromagnétisme -

*Les paragraphes **I** et **II** proposent l'étude de quelques phénomènes dissipatifs liés à l'induction.*

Dans un référentiel **R** , en un point *M* d'un circuit conducteur se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_e(M)_{/R}$ dans un champ magnétique $\vec{B}(M)$, il apparaît le champ électromoteur induit :

$$\vec{E}_m(M)_{/R} = -\frac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t} + \vec{v}_e(M)_{/R} \wedge \vec{B}(M) \qquad \textbf{(1)}$$

$\vec{A}(M,t)$ est le potentiel vecteur lié au champ $\vec{B}(M)$ par les relations $\vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\vec{A}(M,t)$ et $div\vec{A} = 0$. Ces deux relations locales permettent l'établissement de la relation intégrale, valable pour toute surface **S**, non fermée, s'appuyant sur le contour ***C*** :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

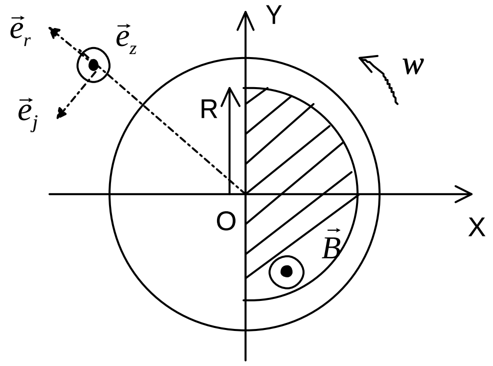
L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct *(Ox, Oy, Oz)* de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On pourra utiliser, le cas échéant, le système de coordonnées cylindriques, constitué du triplet $(\vec{e}_r, \vec{e}_j, \vec{e}_z)$.

I. Disque métallique en rotation dans un champ magnétique

Un disque métallique parfaitement conducteur (cuivre), de centre O, d'épaisseur *h* et de conductivité g , est situé dans le plan *xOy*.

Ce disque est entraîné, autour de son axe *Oz*, par un moteur, dans un mouvement de rotation de vitesse angulaire w .

Un dispositif, non précisé ici, engendre un champ magnétique $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$, uniforme dans toute l'épaisseur du disque, à l'intérieur d'un volume demi-cylindrique de rayon R, contenant tous les points *M(x,y,z)* du disque tels que $0 \leq r \leq R$ et $x \geq 0$, avec *r* distance du point *M* à l'axe *Oz* (figure 4).



<u>Remarque</u> : la zone hachurée correspond à la région de champ $\vec{B}$

- figure 4 -

1.1) $\vec{B}$ est un vecteur uniforme et constant. Montrer que l'expression vectorielle **(1)** définissant le champ électromoteur induit $\vec{E}_m(M)_{/R}$ se simplifie.

1.2) Soit un point *M* du disque, situé à la distance *r* de l'axe *Oz*.

1.2.1. Écrire, en fonction de r, w et $\vec{e}_j$, l'expression vectorielle de la vitesse $\vec{v}_e(M)$ du point M.

1.2.2. En déduire l'expression vectorielle du champ électromoteur induit $\vec{E}_m(M)_{/R}$ lorsque le point *M* se trouve dans le champ magnétique.

1.2.3. Recopier, approximativement, la figure **4** et représenter le vecteur $\vec{E}_m(M)_{/R}$ en un point choisi dans la région où règne le champ magnétique.

1.2.4. Le conducteur obéit à la loi d'Ohm locale. En déduire l'expression vectorielle du vecteur densité de courant induit $\vec{j}_i(M)$.

1.2.5. Le champ électromoteur $\vec{E}_m(M)_{/R}$ agit-il dans un circuit ouvert ou dans un circuit fermé ?

1.2.6. Compléter, en fonction de la réponse donnée à la question précédente, le dessin du paragraphe 1.2.3. :

- dans l'hypothèse d'un circuit ouvert, indiquer les zones d'accumulation et de défaut d'électrons
- dans l'hypothèse d'un circuit fermé, proposer le tracé d'un circuit que peuvent emprunter les charges mises en mouvement.

1.3) Dans la partie du disque soumise au champ $\vec{B}$, le courant induit dissipe une puissance volumique donnée par l'expression :

$$\frac{dP}{dt} = g\,(E_m)^2 \qquad \text{avec } dt = \text{volume élémentaire de conducteur}$$

1.3.1. Sous quelle forme cette puissance électrique est-elle dissipée (ou dégradée) ?

1.3.2. Exprimer, en fonction de g, r, w et B_0 , la puissance volumique $\frac{dP}{dt}$ mise en jeu.

1.3.3. Déterminer la puissance totale P_I dissipée dans le volume de conducteur, soumis au champ magnétique.

1.3.4. Quel pourrait être l'effet de ce phénomène dissipatif sur la vitesse de rotation du moteur ?

1.3.5. *Application pratique*

Citer une application de ce dispositif électromagnétique.

1.3.6. *Application numérique*

$g = 5{,}8 \times 10^7 \, S.m^{-1}; \; w = 1{,}0 \times 10^3 rad.s^{-1}; \; h = 5 \; mm; \; R = 10 \; cm; \; B_0 = 1{,}0 \times 10^{-2} T$

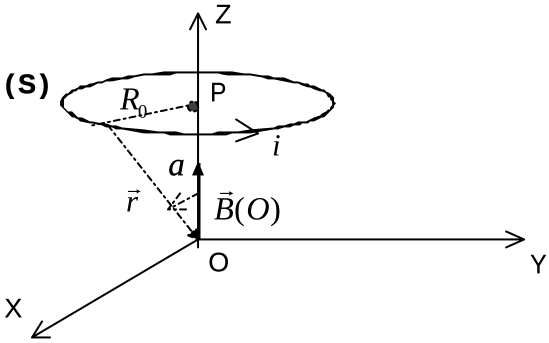
Calculer la puissance P_I .

II. Matériau conducteur soumis à un champ magnétique variable

2.1) Une spire **S**, formée d'un fil conducteur de diamètre négligeable, est placée dans un plan parallèle au plan *xOy*. De rayon R_0 et de centre *P(0,0,z)* choisi sur l'axe *Oz*, la spire est parcourue par un courant i. Le champ magnétique, créé au point O, est donné par la formule **(2)** (qui n'est pas à établir) :

$$\vec{B}(O) = B\vec{e}_z = \frac{m_0 i}{2R_0} \sin^3(a)\vec{e}_z \qquad \textbf{(2)}$$

a est l'angle $(\vec{e}_z, -\vec{r})$; *r* est la distance entre les points de **S** et l'origine *O* (figure 5) :



- Figure 5 -

Utiliser le résultat **(2)** pour déterminer le champ magnétique créé en *O* par un solénoïde infiniment long, d'axe *Oz*, et constitué par un empilement de spires jointives *(n* spires identiques à **S** par unité de longueur) et parcourues par le courant i.

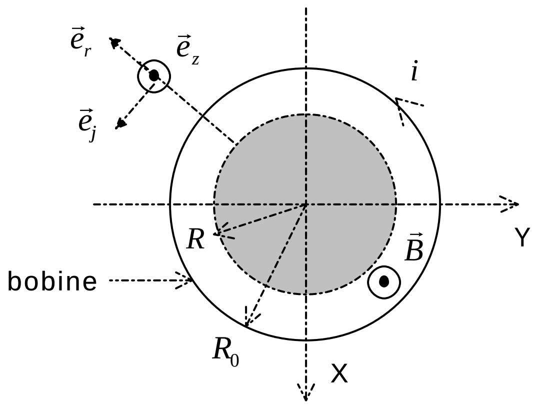
2.2) Les spires du solénoïde sont parcourues par un courant variable. On admet qu'à l'intérieur de ce bobinage, le champ magnétique créé est uniforme dans l'espace : $\vec{B} = B\vec{e}_z$, mais *B* est variable dans le temps selon la loi $B(t) = B_m \sin(wt)$.

Des considérations de symétrie permettent de montrer que le potentiel vecteur $\vec{A}(M,t)$, associé au champ magnétique, en un point *M* situé à la distance r de l'axe *Oz* (avec $r \prec R_0$), est tangent au cercle ***C*** de rayon r et d'axe *Oz*. $\vec{A}(M,t)$ s'écrit alors sous la forme :

$$\vec{A}(M,t) = A(r,t)\vec{e}_j$$

Exprimer, en fonction de r, B_m, w et t , le potentiel vecteur $A(r, t)$.

2.3) Un cylindre métallique (cuivre) de rayon *R* (avec $R \prec R_0$), de hauteur *H* et de conductivité g , est placé à l'intérieur du solénoïde. Le barreau et le bobinage sont coaxiaux (axe *Oz*) et immobiles (figure 6) :



<u>Remarque</u> : la zone en gris correspond au barreau métallique .

- figure 6 -

2.3.1. Montrer qu'à l'intérieur du barreau, l'expression **(1)** du champ électromoteur se simplifie.

2.3.2. Exprimer, en fonction de r, B_m, w et t , la norme E_m du champ électromoteur.

2.3.3. Recopier, approximativement, la figure **6** et présenter le tracé de quelques lignes de courants induits.

2.3.4. Ce type de courants porte le nom d'un Physicien. Lequel ?

2.4) Dans le barreau, totalement soumis au champ $\vec{B}$ variable, les courants induits dissipent une puissance volumique instantanée, définie par : $\frac{dP}{dt} = g\,(E_m)^2$

2.4.1. Sous quelle forme cette puissance est-elle dissipée ?

2.4.2. Déterminer, en fonction de g, r, B_m, w et t, la puissance volumique instantanée dP/dt mise en jeu.

2.4.3. En déduire la puissance volumique moyenne dissipée $\langle dP/dt \rangle$.

2.4.4. Exprimer, en fonction de g, H, B_m, w et R ,la puissance moyenne totale P_{II} dégagée dans tout le barreau métallique.

2.4.5. <u>Application pratique</u>

Citer une application de ce dispositif électromagnétique.

2.4.6. <u>Application numérique</u>

$g = 5{,}8\times10^{7}\,S.m^{-1};\ w = 5{,}0\times10^{4}\,rad.s^{-1};\ H = 0{,}20m;\ R = 5{,}0\times10^{-2}\,m;\ B_m = 2{,}0\times10^{-4}\,T$

Calculer la puissance moyenne totale P_{II} dégagée.

- Fin de l'énoncé -

● **CORRIGE** : « Electrocinétique - Electromagnétisme »

- **Partie A** : électrocinétique -

1.1) Pour les deux dipôles en série, on a : $\boxed{u_{AC}(t)=ri(t)+L\dfrac{di}{dt}}$ (1)

1.2) $t\geq 0$: $\boxed{E=(R+r)i(t)+L\dfrac{di}{dt}}$

1.3) Il vient : $i(t)=A\exp(-t/\tau)+\dfrac{E}{R+r}$; la présence de l'inductance impose la **continuité** de l'intensité $\Rightarrow$ $i(0^+)=i(0^-)=0=A+\dfrac{E}{R+r}$ $\Rightarrow$ $A=-\dfrac{E}{R+r}$ $\Rightarrow$ $\boxed{i(t)=\dfrac{E}{R+r}[1-\exp(-t/\tau)]}$

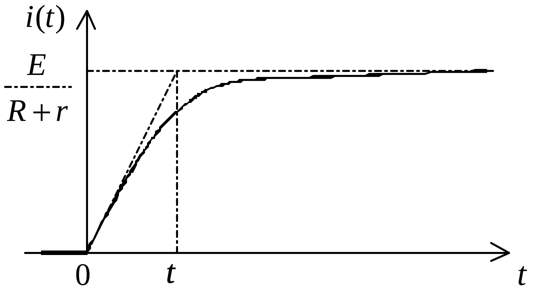
1.4) D'après (1), on a : $u_{AC}(t)=\dfrac{rE}{R+r}[1-\exp(-t/\tau)]+L\times\dfrac{E}{R+r}\times\dfrac{R+r}{L}\exp(-t/\tau)$ $\Rightarrow$

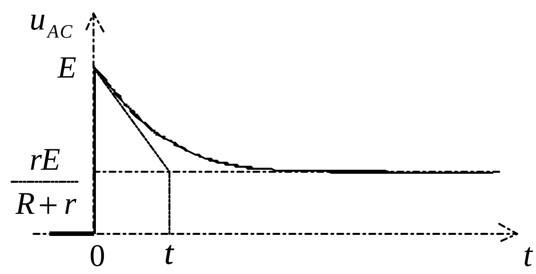
$$\boxed{u_{AC}(t)=\frac{rE}{R+r}+\frac{RE}{R+r}\exp(-t/\tau)}$$

* à $t=0$: $u_{AC}(t)=E$; normal, puisque $i(0^+)=0$ $\Rightarrow$ c'est le dipôle AC qui « encaisse » la tension E.

* $t\to\infty$: $u_{AC}(t)\to\dfrac{rE}{R+r}$; normal, puisque $i(\infty)=cste$ $\Rightarrow$ $\dfrac{di}{dt}(\infty)=0$ $\Rightarrow$ on obtient un « diviseur de tension » r en série avec R, ce qui conduit bien à $u_{AC}(\infty)=\dfrac{rE}{R+r}$.

1.5)





1.6) Remarque préliminaire : $\tau\ll\dfrac{T}{2}$ $\Rightarrow$ les régimes permanents ont le temps d'être atteints.

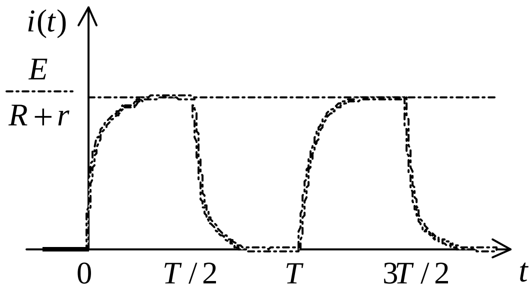
* $0\leq t\leq\dfrac{T}{2}$: les solutions sont les mêmes que précédemment.

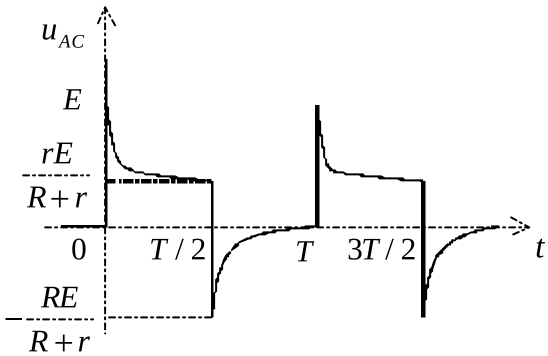
* $0\leq t\leq\dfrac{T}{2}\leq t\leq T$: on a cette fois : $(R+r)i(t)+L\dfrac{di}{dt}=0$ $\Rightarrow$ $i(t')=A\exp(-t'/\tau)]$ $\quad t'=t-\dfrac{T}{2}$

Or, par continuité : $i(t'=0^+)=i(t'=0^-)=\dfrac{E}{R+r}$ $\Rightarrow$ $\boxed{i(t')=\dfrac{E}{R+r}\exp(-t'/\tau)}$

* Enfin : $u_{AC}(t')=\dfrac{rE}{R+r}\exp(-t'/\tau)-L\times\dfrac{R+r}{L}\times\dfrac{E}{R+r}\exp(-t'/\tau)$ $\Rightarrow$ $\boxed{u_{AC}(t')=-\dfrac{RE}{R+r}\exp(-t'/\tau)}$

On en déduit les courbes suivantes :





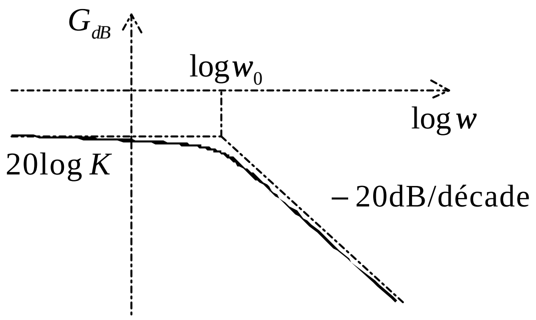
2.1.1) De façon évidente : $\boxed{\underline{Z}_{AB} = (R+r) + jL\omega}$

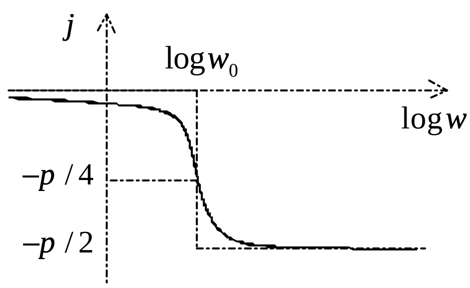
2.1.2) La relation du diviseur de tension fournit :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{R}{R+r+jL\omega} = \frac{K}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$

2.2.1) $$\boxed{G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}} \qquad \boxed{\varphi(\omega) = -\mathrm{Arctan}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

2.2.2) et 2.2.3) En remarquant que $K \prec 1$, on a $20\log(K) \prec 0$; on obtient alors les courbes « classiques » :





2.3) Il s'agit d'un filtre **passe-bas**, du **1er ordre**, de fréquence de coupure : $\boxed{f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}}$

Rq : pour $\omega \gg \omega_0$, le montage est également **intégrateur**.

- **Partie B** : Electromagnétisme -

1.1) Puisque le champ $\vec{B}$ est constant, le terme $\dfrac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t}$ est nul ; il vient alors :

$$\boxed{\vec{E}_m(M)_{/R} = \vec{v}_e(M)_{/R} \wedge \vec{B}(M)}$$

1.2.1) Le point M décrivant un cercle de rayon r, on a : $\boxed{\vec{v}_e(M) = rw\vec{e}_j}$

1.2.2) On en déduit : $\boxed{\vec{E}_m(M) = rw\vec{e}_j \wedge B_0\vec{e}_z = rwB_0\vec{e}_r}$

1.2.3) Sur la figure, il suffit de tracer un vecteur champ électrique **radial**...

1.2.4) Conformément à la loi d'Ohm, on écrit : $\boxed{\vec{j}_i = g\,\vec{E}_m = g\,rwB_0\vec{e}_r}$

1.2.5) Ce champ induit peut agir dans les deux cas proposés :
* <u>circuit fermé</u> : dans ce cas, il entraîne l'apparition d'un courant électrique.
* <u>circuit ouvert</u> : dans ce cas, il y a une simple accumulation de charges dans certaines zones du dispositif.

1.2.6) * <u>circuit ouvert</u> : le champ électrique étant dirigé de O vers l'extérieur et le mouvement des électrons étant de sens contraire, il y a accumulation d'électrons au point O, et défaut d'électrons à la périphérie du disque de rayon R et de hauteur h.

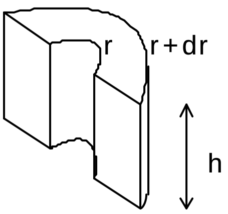
* <u>circuit fermé</u> : la fermeture du circuit électrique peut être assurée par des **contacts glissants** en O et à la périphérie du disque de rayon R.

1.3.1) La puissance électrique est transformée en **puissance thermique** (= effet Joule ; = agitation plus grande des ions du réseau cristallin, puis transfert thermique conducto-convectif vers le milieu extérieur).

1.3.2) On sait que la puissance volumique cédée à la matière par le champ $\vec{E}_m$ s'écrit :

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = \vec{j}_i \cdot \vec{E}_m = g\,r^2w^2B_0^2}$$

1.3.3) La grandeur $\dfrac{dP}{dt}$ ne dépendant que de la variable r, il est judicieux de choisir l'élément suivant comme volume élémentaire d'intégration :



$$dt = p\,hrdr \;\Rightarrow\; P_I = \int_0^R gw^2B_0^2p\,hr^3dr$$

D'où: $$\boxed{P_I = \frac{gw^2B_0^2p\,hR^4}{4}}$$

1.3.4) Il y a conversion d'énergie cinétique (rotation du moteur) en énergie thermique, donc un phénomène de **freinage**.

1.3.5) Il s'agit des « freins électromagnétiques », sur les camions ou les trains par exemple (on peut citer le procédé industriel « **TELMA** »).

1.3.6) Le calcul conduit à : $\boxed{P_I = 2{,}28\ kW}$

2.1) On peut écrire : $\vec{B}(O)=\int_{solénoide}\dfrac{m_0 di}{2R_0}\sin^3 a\,\vec{e}_z$, où di est le courant parcourant une tranche élémentaire de solénoïde de largeur $dz \Rightarrow di=nidz$; il vient ensuite :

$z=R_0\,\mathrm{cotan}a \;\Rightarrow\; dz=-\dfrac{R_0}{\sin^2(a)}da \;\Rightarrow\; \vec{B}(O)=\dfrac{m_0 ni}{2}\times\int_{-p}^{0}-\sin a\,da\,\vec{e}_z$ (intégration suivant la variable croissante) ; on en déduit finalement :

$$\boxed{\vec{B}(O)=\frac{m_0 ni}{2}\times(\cos 0-\cos p)\vec{e}_z=m_0 ni\vec{e}_z}$$

2.2) En appliquant le théorème de Stokes-Ampère, on a :

$$\vec{B}=\overrightarrow{rot}\vec{A} \;\Rightarrow\; \iint_{\text{disque rayon } r}\vec{B}\cdot d\vec{S}=\iint_{\text{disque rayon } r}\overrightarrow{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}=\oint_C A(r,t)\times dl \;\Rightarrow$$

$$B_m\sin(wt)\times pr^2=A(r,t)\times 2pr \;\Rightarrow\; \boxed{A(r,t)=\frac{B_m}{2}\sin(wt)\times r}$$

2.3.1) Aucun point du système n'est en mouvement, d'où : $\boxed{\vec{E}_m=-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$

2.3.2) Il vient donc : $\boxed{E_m=-\dfrac{wB_m}{2}\cos(wt)\times r}$

2.3.3) Les lignes de courants induits sont des **cercles** de centre O et de rayon r , avec :

$$\boxed{\vec{j}=g\,\vec{E}_m=-\frac{gwB_m}{2}\cos(wt)\times r\,\vec{e}_j}$$

2.3.4) Ce sont les courants de **Foucault** (Léon Foucault, 1819-1868).

2.4.1) Comme dans la partie précédente, la puissance dissipée par les courants induits l'est sous forme **thermique**.

2.4.2) La puissance volumique dissipée s'écrit encore: $\boxed{\dfrac{dP}{dt}=\vec{j}\cdot\vec{E}_m=\dfrac{gw^2B_m^2}{4}\cos^2(wt)\times r^2}$

2.4.3) Sachant que la valeur moyenne d'un « $\cos^2$ » vaut $1/2$, il vient :

$$\boxed{\left\langle\frac{dP}{dt}\right\rangle=\frac{gw^2B_m^2r^2}{8}}$$

2.4.4) L'élément d'intégration est un « tube » d'épaisseur dr et de longueur H (volume compris entre deux cylindres concentriques de longueur H et de rayons respectifs r et $r+dr$) ; on a donc :

$$dt=2pHr\,dr \;\Rightarrow\; P_{II}=\int_0^R\frac{gw^2B_m^2pH}{4}\times r^3dr \;\Rightarrow\; \boxed{P_{II}=\frac{gw^2B_m^2pR^4H}{16}}$$

Rq : on peut remarquer que la dépendance de P_{II} vis-à-vis des différentes variables $(w,B_m,R..)$ est la même que pour P_I .

2.4.5) Il s'agit du chauffage par **induction** (industriel ou électroménager).

2.4.6) L'application numérique conduit à : $\boxed{P_{II}=1{,}42\;kW}$