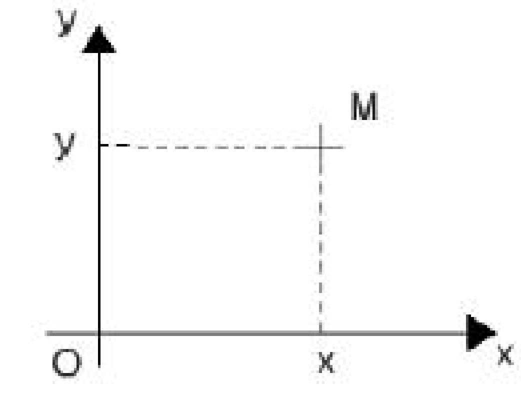
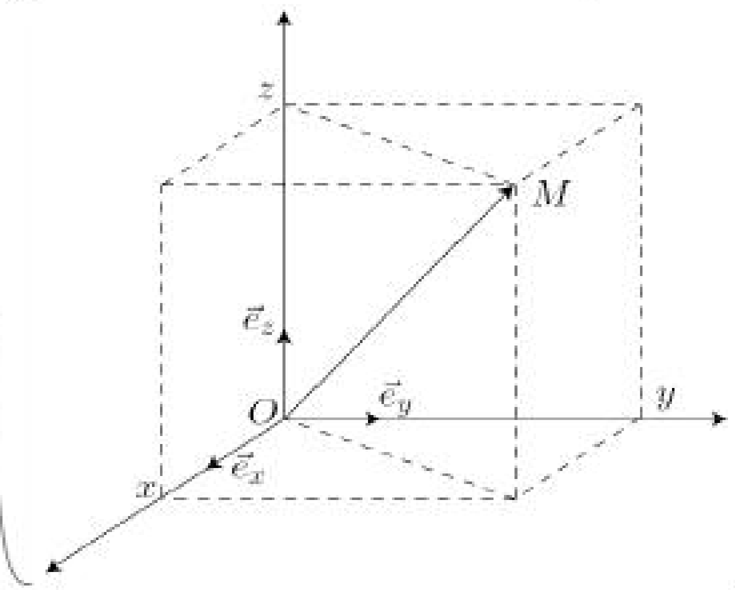
Description du mouvement

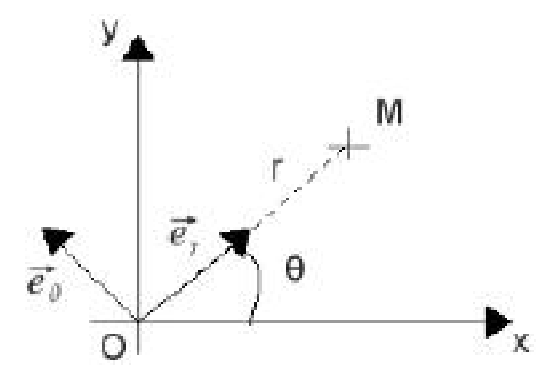
- **Mouvement d'un point**
  - Vecteur position
    - en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$
    - en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix}$
  - Vecteur accélération
    - en coordonnées cartésiennes : $\vec{a} = \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}$
    - en coordonnées cylindriques : $\vec{a} = \begin{vmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}$
  - Vecteur vitesse
    - en coordonnées cartésiennes : $\vec{v} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix}$
    - en coordonnées cylindriques : $\vec{v} = \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{vmatrix}$
    - Pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}r \\ r\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z \end{vmatrix}$
    - Pour un mouvement circulaire de rayon R $\vec{v} = \begin{vmatrix} -v^2/R \\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}t \\ 0 \end{vmatrix}$
- **Mouvement d'un solide**
  - **Solide :** Système matériel indéformable
  - **Mouvement de translation :** Tous les points du solide ont le même vecteur vitesse (et donc tout segment joignant deux points reste parallèle à lui-même).
  - **Mouvement de rotation autour d'un axe fixe :** Tous les points M du solide ont un mouvement circulaire. $\boxed{\vec{v}_{\mathrm{M}} = r\dot{\theta}\ \vec{e}_\theta = r\omega\ \vec{e}_\theta}$
- **Référentiel**
  - Repère d'espace
    - Origine O
    - Base orthonormée
      - cartésienne
        - En 2D



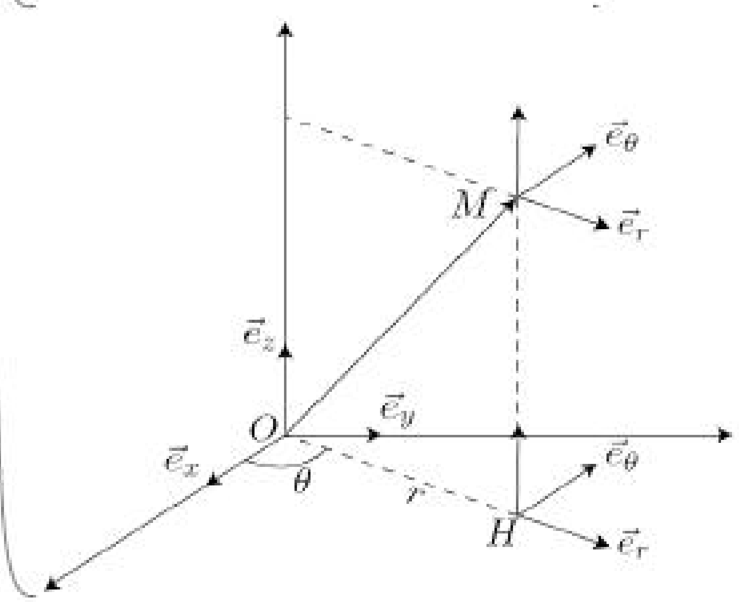
        - En 3D



      - cylindrique
        - mobile dans le temps
        - En 2D



        - En 3D



  - Repère de temps

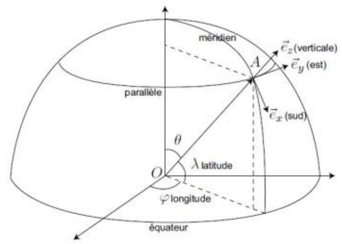
Paramétrage d'un point

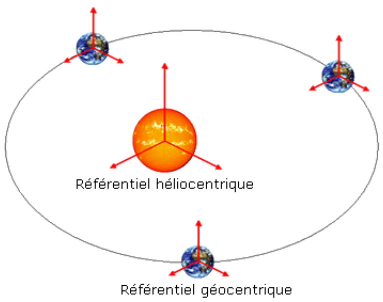
Référentiels☆

Une origine et 3 axes :

<u>Référentiel terrestre</u>

$$R_T = \{A, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\}$$



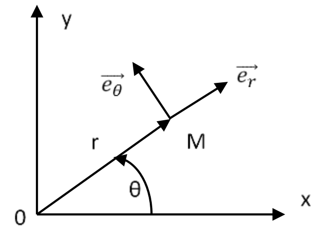


$R_{hélio} = \{S, X, Y, Z\} =$

$R_{géo} = \{O, X, Y, Z\} = \{T, \overrightarrow{e_X}, \overrightarrow{e_Y}, \overrightarrow{e_Z},\}$

(X, Y, Z) vers des étoiles « fixes »

Coordonnées polaires☆☆☆



$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}}$$

$(\overrightarrow{e_r}, \ \overrightarrow{e_\theta}) =$ base polaire

$d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$

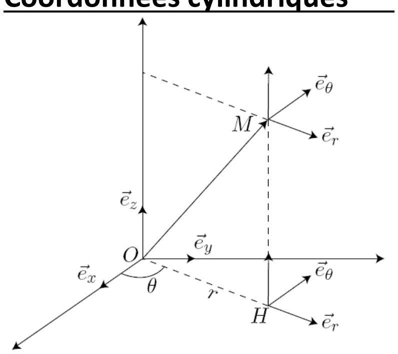
(dr) et $(rd\theta)$ matérialisent des déplacements élémentaires suivant $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ pendant le temps dt.

$$\boxed{\vec{V} = \frac{dr}{dt}\,\overrightarrow{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\,\overrightarrow{e_\theta} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}}$$

Retenir : $\boxed{\frac{d}{dt}(\overrightarrow{e_r}) = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}}$ et $\boxed{\frac{d}{dt}(\overrightarrow{e_\theta}) = -\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r}}$

<u>Exercices</u>
n° 801, 825

Coordonnées cylindriques☆☆☆



$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r} + z\,\overrightarrow{e_z}}$$

$(\overrightarrow{e_r}, \ \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}) =$ base cylindrique

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + dz\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\,\overrightarrow{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{dz}{dt}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\boxed{\vec{V} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z}}$$

Vitesse instantanée☆☆☆

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}}$$

$d\overrightarrow{OM} =$ quantité dont c'est déplacé le point M dans le référentiel R pendant le temps dt :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t)}$$

Vitesse moyenne☆☆☆

$$\boxed{V_{moy} = \frac{distance\ parcourue}{temps\ de\ parcours}}$$

Ne pas confondre vitesse moyenne et vitesse instantanée !

Accélération☆☆☆

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{V}}$$

Avec $\boxed{d\vec{V} = \vec{V}(t + dt) - \vec{V}(t)}$

Ne pas confondre $\frac{d\vec{V}}{dt}$ et $\frac{dV}{dt}$

Rigueur

Puisqu'on fait l'étude dans un référentiel $\mathcal{R}$, on devrait écrire $\vec{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$

Cela traduit comment varie le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$.

$\left(\frac{d}{dt}(\overrightarrow{e_r})\right)_{/\mathcal{R}}$ traduit comment varie $(\overrightarrow{e_r})$ dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$.

TD-M1

Cinématique

Tester le cours

Qu'est ce qu'un solide ?	C'est un objet pour lequel les distances entre deux points sont invariantes au cours du temps.
Qu'est ce qu'un point matériel ?	C'est un système dont le mouvement est entièrement décrit par celui de son centre d'inertie. On néglige alors les mouvements de rotation sur lui-même.
Quelle est l'expression de la vitesse en fonction du vecteur position ? En donner une interprétation géométrique.	$$\overrightarrow{v}(M) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}$$ C'est la tangente à la trajectoire en tout point.
Quelles sont les dérivées de $\overrightarrow{e_r}$ et de $\overrightarrow{e_\theta}$ par rapport au temps ?	$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$$
Expressions en coordonnées cartésiennes : ◇ du vecteur position et de sa norme, ◇ du vecteur déplacement élémentaire, ◇ des longueur, surface et volumes élémentaires, ◇ du vecteur vitesse et de sa norme, ◇ du vecteur accélération et de se norme.	◇ $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$ et $\lVert\overrightarrow{\mathrm{OM}}\rVert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ◇ $d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}$ ◇ $\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}x$ (ou $\mathrm{d}y$ ou $\mathrm{d}z$) ; $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ (ou $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z$ ou $\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$) ; $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ ◇ $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ et $\lVert\overrightarrow{v}\rVert = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$ ◇ $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$ et $\lVert\overrightarrow{a}\rVert = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$
Expressions en coordonnées polaires : ◇ du vecteur position et de sa norme, ◇ du vecteur déplacement élémentaire, ◇ des longueur, surface et volumes élémentaires, ◇ du vecteur vitesse et de sa norme, ◇ du vecteur accélération et de se norme.	◇ $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{e_r}$ et $\lVert\overrightarrow{\mathrm{OM}}\rVert = r$ ◇ $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + \mathrm{d}d\theta\overrightarrow{e_\theta}$ ◇ $d\ell = \mathrm{d}r$ ou $\mathrm{d}\ell = r\,\mathrm{d}\theta$; $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ ◇ $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ ◇ $\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta}$
Expressions en coordonnées cylindriques : ◇ du vecteur position et de sa norme, ◇ du vecteur déplacement élémentaire, ◇ des longueur, surface et volumes élémentaires, ◇ du vecteur vitesse et de sa norme, ◇ du vecteur accélération et de se norme.	◇ $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$ et $\lVert\overrightarrow{\mathrm{OM}}\rVert = \sqrt{r^2+h^2}$ ◇ $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$ ◇ $\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}r$ ou $\mathrm{d}\ell = r\,\mathrm{d}\theta$ ou $\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}z$; $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$ ou $\mathrm{d}S = r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z$; $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z$ ◇ $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ ◇ $\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$
Pour un mouvement circulaire de rayon R et de vitesse angulaire ω donner l'expression : ◇ du vecteur position, ◇ du vecteur vitesse, ◇ du vecteur accélération (on donnera une expression en fonction de la norme de la vitesse).	◇ $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = R\overrightarrow{e_r}$ ◇ $\overrightarrow{v} = R\omega\overrightarrow{e_\theta}$ ◇ $\overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{e_r} + R\dot{\omega}\overrightarrow{e_\theta} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta}$