R 3

Énergie d'un point matériel

3.1 Puissance et travail d'une force

3.1.1 Puissance d'une force

Soit $M\ (m)$ un point matériel de masse m observé dans un référentiel $\mathcal{R}$ et animé de la vitesse $\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}}$.
Supposons que M soit soumis à l'action d'une force $\overrightarrow{F}$.

— Puissance —

La puissance, scalaire, associée à cette force à chaque instant, est définie par :

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}}$$

Les unités :
L'unité de la puissance $\mathcal{P}$ est le Watt de symbole W. F s'exprime bien sûr en N et v en $m.s^{-1}$.

— Propriété —

Si $M\ (m)$ est soumis à un ensemble de forces $\Sigma\overrightarrow{F}$, alors :

$$\mathcal{P} = \sum_i \mathcal{P}_i$$

avec :

$$\mathcal{P}_i = \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}}$$

3.1.2 Travail d'une force

— Travail d'une force —

Le travail d'une force $\overrightarrow{F}$ entre les instants t et $t + dt$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est donné par :

$$\boxed{\delta W = \mathcal{P}\, dt}$$

On obtient aussi la formule :

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

3.2 Théorème de l'énergie cinétique

3.2.1 Énergie cinétique

— Énergie cinétique d'un point matériel —

Soit $M\ (m)$ point matériel de masse m observé dans $\mathcal{R}$, et animé de la vitesse $\overrightarrow{v_{(M)}}_{/\mathcal{R}}$.
L'énergie cinétique de $M\ (m)$ dans $\mathcal{R}$ est donnée par, avec v la norme de $\overrightarrow{v_{(M)}}_{\mathcal{R}}$:

$$E_{c_{(M)}/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\, m\, v^2_{(M)/\mathcal{R}}$$

Les unités :
L'unité de l'énergie cinétique est le Joule de symbole J.

3.2.2 Théorème de l'énergie cinétique

Soit $M\ (m)$ un point matériel de masse m observé dans $\mathcal{R}_1$ galiléen, soumis dans $\mathcal{R}_1$ à la résultante $\Sigma \overrightarrow{F}$ des forces extérieures.

— Théorème de l'énergie cinétique —

La variation élémentaire d'énergie cinétique s'exprime de la façon suivante :

$$dE_{c_{(M)}/\mathcal{R}_1} = \sum_i \delta W_i = \delta W \left(\sum \overrightarrow{F} \right)$$

Entre deux instants t_1 et t_2, le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\Delta E_{c_{(M)}} = E_c(M)_{t_2} - E_c(M)_{t_1} = \sum_i W_i = W \left(\sum \overrightarrow{F} \right)$$

avec :

$$W_i = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

3.3 Force conservative

3.3.1 Force conservative

— Force conservative —

Une force $\overrightarrow{F}$ est dite conservative quand son travail entre deux points M_1 et M_2 ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des positions M_1 et M_2.
Ceci implique que sur un contour fermé, le travail d'une force conservative est nul.
Une force qui n'est pas conservative est dite non-conservative.

3.3.2 Force conservative et énergie potentielle

Une force conservative peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

3.3.3 Travail d'une force conservative

Le trvail d'une force conservative est alors :

$$\delta W_{(\overrightarrow{F_C})} = \overrightarrow{F_C} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -dE_p$$

3.4 Énergie mécanique et intégrale première de l'énergie cinétique

3.4.1 Énergie mécanique

— Énergie mécanique —

L'énergie mécanique d'un point matériel $M(m)$ de masse m dans un référentiel $\mathcal{R}$, notée $E_{m_{(M)}/\mathcal{R}}$, est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle totale $E_{p_{tot}}$:

$$\boxed{E_{m_{(M)}/\mathcal{R}} = E_{c_{(M)}/\mathcal{R}} + E_{\text{ptot}}}$$

3.4.2 Relation entre le théorème de l'énergie cinétique et la variation d'énergie mécanique

Soit $M\ (m)$ un point matériel de masse m, soumis à des forces non-conservatives, notées $\overrightarrow{F_{NC}}$. On obtient la relation suivante :

$$\boxed{dE_{m_{(M)}/\mathcal{R}_1} = \Sigma\, \delta W_{(\overrightarrow{F_{NC}})}}$$

ou encore :

$$\boxed{\Delta E_{m_{(M)}/\mathcal{R}_1} = \Sigma\, W_{(\overrightarrow{F_{NC}})}}$$

3.4.3 Intégrale première de l'énergie cinétique

L'énergie mécanique de M dans $\mathcal{R}$ est constante si et seulement si il n'y a pas de force non-conservative ou bien si les forces non-conservatives ne travaillent pas, c'est-à-dire que :

$$\overrightarrow{F_{NC}} \perp \overrightarrow{d\ell}$$

Dans ce cas, en dérivant l'expression de l'énergie mécanique, on obtient une expression égale à zéro. Cela permet de ne pas avoir à passer par le $P.F.D.$

3.4.4 Relation entre l'énergie potentielle et les relations d'équilibre

Considérons un système dont la position ne dépend que d'une seule variable de l'espace.
Supposons que $M\ (m)$, point matériel de masse m, soit soumis à la force résultante $\vec{F}$ conservative.
Les positions d'équilibre du système sont les extrema de la fonction E_p. Si l'énergie potentielle est fonction de la variable x, elles sont donc données par :

$$\frac{dE_p}{dx} = 0$$

Si la fonction est convexe au voisinage de l'équilibre, alors l'équilibre est stable et :

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$$

Si la courbe est concave au voisinage de l'équilibre, alors l'équilibre est instable. Dans ce cas, on :

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$$