

EITPE 97 - épreuve commune PC - PSI

Premier problème.

1.1a) Avec une source ponctuelle à distance finie on obtient des franges non localisées par les 2 dispositifs.

b) Avec une source étendue et par division du front d'onde on a des franges localisées

Exemple de dispositif à division de front d'onde : les miroirs de Fresnel,..

1.2 La différence de marche entre les ondes qui interfèrent doit être nettement inférieure à la longueur de cohérence.

2-1. Un filtre à bande étroite (eq: filtre interférentiel) permet de sélectionner une raie quasi-monochromatique.

2.2 a) On observe la teinte plate.

b) Le diaphragme permet de se placer dans les conditions de l'optique de Gauss.

3.1

Si M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice, alors, pour un rayon quelconque tel que (1), les trajets réels : KM et MN sont égaux aux trajets symétriques : KM' et $M'N$. On peut remplacer le miroir M_2 par son symétrique M'_2 et constater alors que l'interféromètre est équivalent à une lame d'air d'épaisseur e , distance entre M_1 et M'_2 .

3.2

Les réflexions sur les faces de la lame créent des rayons réfléchis parallèles. Leur interférence aura donc lieu à l'infini. C'est à dire dans le plan focal de la lentille d'observation.

Les éléments de symétrie du problème permettent de préciser que les franges seront de révolution autour de J_y . Ce sont donc des anneaux.

3.3 La différence de marche (2) - (1) est $\delta = 2e \cos i \approx 2e(1 - \frac{i^2}{2})$

δ est une fonction décroissante de i .

Au centre de l'écran ($i = 0$) l'ordre d'interférence est :

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda} = 4028,56\dots \text{ c'est la valeur maximale de } p!$$

Le premier anneau brillant a pour ordre : $p_1 = E(p_0) = 4028$

Pour cet anneau $\cos i = \frac{p_1 \lambda}{2e} = \frac{p_1}{p_0}$ et son rayon est

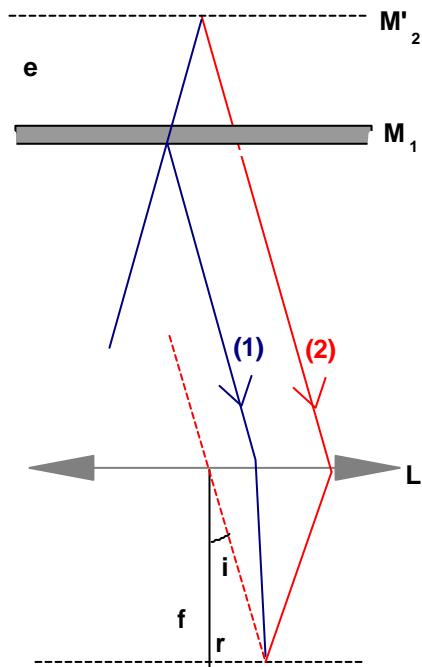
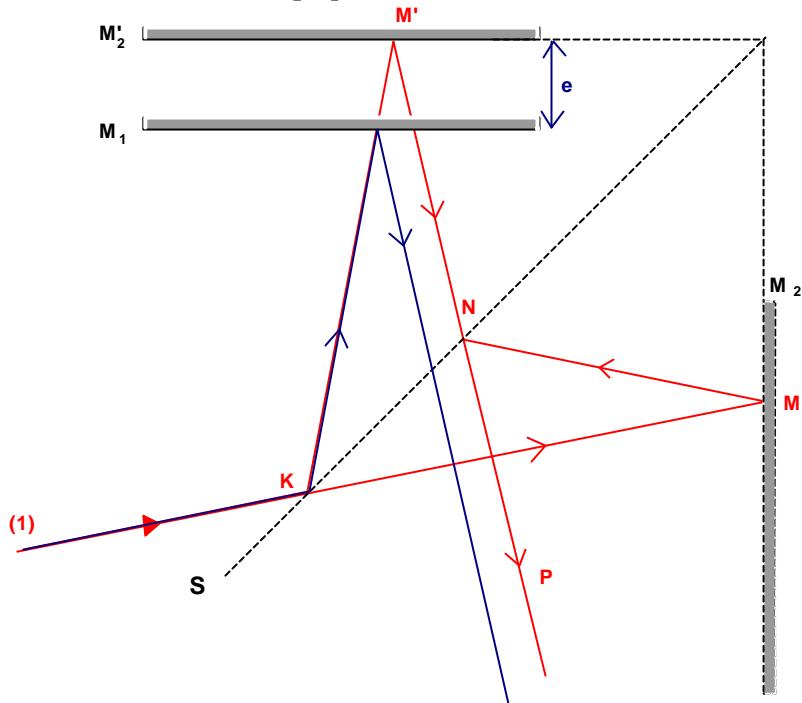
$$r_1 = f \tan i = f[\frac{p_0^2}{p_1^2} - 1]^{1/2} = 16,82 \text{ mm.}$$

3.4

Le rayon (1) traverse sous l'incidence i la lame de verre, son trajet est

$$\text{allongé de : } \frac{2e'}{\cos r} [n - \cos(i - r)] \approx 2e'(n - 1)(1 + \frac{i^2}{2n})$$

$$\text{La différence de marche devient } \delta = 2e(1 - \frac{i^2}{2}) - 2e'(n - 1)(1 + \frac{i^2}{2n})$$



Au centre la variation de p_0 est $\Delta p_0 \approx -18$ soit $p_1 = 4010$

On trouve ensuite pour le premier rayon $r'_1 = 16,80 \text{ mm}$

4.1

L'image M'_2 de M_2 dans la séparatrice fait un angle α avec M_1 .

L'interféromètre est équivalent à un coin d'air dont l'arête est A_1 .

4.2

On éclaire le coin d'air sous incidence quasi-normale en plaçant une source de faible étendue au foyer d'une lentille mince d'axe optique J_x et utilisée dans les conditions de Gauss.

4.3

La figure montre que les rayons qui interfèrent, (1) et (2), se coupent pratiquement au niveau des miroirs lorsque l'angle α est très faible. La figure d'interférences est localisée sur le plan des miroirs.

4.4

La lentille L doit faire l'image de M_1 .

4.5

Si x est la distance de M' à l'arête A_1 , la différence de marche est $\delta = 2\alpha x$

A "x" constant la différence de marche est constante; les franges sont des droites parallèles à l'arête.

L'interfrange est $\Delta x = i \cdot t \cdot q$ $\Delta \delta = \lambda$. Sur l'écran l'interfrange sera donc $i = \gamma \frac{\lambda}{2e} = 3,75 \text{ mm}$.

4.6 Dans cette configuration (δ voisin de zéro) et en lumière blanche, on observe des franges colorées. En plaçant la lame ces franges disparaissent. Pour les retrouver il faut reculer le miroir M_2 de $x = e'(n-1)$ de façon à retrouver une différence de marche quasi-nulle.

La mesure de ce déplacement permet d'en déduire e' ou n .

5.1 Le phénomène observé est la superposition de deux systèmes d'interférences ayant des interfranges légèrement différents. Dans la position initiale il y a coïncidence: les franges brillantes de chaque système sont aux mêmes endroits. Dans la position finale il y a anticoïncidence: les franges brillantes de l'un et les franges sombres de l'autre sont situées aux mêmes endroits..

5.2 Dans la position finale l'intensité lumineuse vaut :

$$I = 2I_0(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_1}) + 2I_0(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_2}) = 4I_0[1 + \cos(\frac{\pi\delta}{\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}) \cdot \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda}]$$

Il n'y a plus de différence d'intensité entre les franges lorsque $V = \cos(\frac{\pi\delta}{\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}) = 0$

En raisonnant au centre (A_1) où $\delta = 2d$ on trouve $\Delta\lambda = \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{4d} = 0,6 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$

6.1 Déterminer le facteur de visibilité V (ou facteur de contraste) des franges en fonction de la différence de marche δ , de $\Delta\lambda$, et de la vitesse de la lumière dans le vide c . On donne $V = (E_2 - E_1) / (E_2 + E_1)$, E_2 étant l'éclairage d'une frange brillante et E_1 celui d'une frange sombre.

On a cette fois une multiplicité de systèmes d'interférences. L'intensité totale est :

$$I = \int_{v_0 - \Delta v}^{v_0 + \Delta v} \frac{I_0 dv}{\Delta v} [1 + \cos \frac{2\pi\delta}{c} v] = I_0 [1 + \operatorname{sinc}(\frac{\pi\delta}{c} \Delta v) \cos(\frac{2\pi\delta}{c} v_0)]$$

La visibilité est donc $V = \left| \text{sinc}\left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta v\right) \right|$

6.2 V s'annule pour la première fois lorsque $\delta = \frac{c}{\Delta v}$ donc la longueur de cohérence vaut $L_c = c / \Delta v$

6.3 Si $L_c = 30$ cm alors $\Delta v = 1$ GHz et $\tau = 1$ ns.

Deuxième problème.

1. Les mouvements vibratoires du $n^{\text{ième}}$ plan sont dus aux forces $F_{n+1 \rightarrow n}$ et $F_{n-1 \rightarrow n}$

La relation fondamentale conduit à : $\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \omega_0^2(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$ avec $\omega_0^2 = C/M$.

2. $u_n = u_0 \exp j(nK.a - \omega.t)$ est solution de l'équation précédente si

$$-j^2 \omega^2 = \omega_0^2(e^{jKa} + e^{-jKa} - 2) = 2\omega_0^2(\cos Ka - 1) \Rightarrow \omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{Ka}{2} \right|$$

3. La fonction $\omega(K)$ a pour période $2\pi/a$. On peut alors vérifier que u_n prend la même valeur lorsque K augmente de $2\pi/a$. On peut donc limiter le domaine des valeurs de K à $\{-\pi/a ; \pi/a\}$

4. La courbe $\omega(K)$ restreinte au domaine précédent est donnée ci-contre.

5.1 Sur l'intervalle : $K \in \{0 ; \pi/a\}$

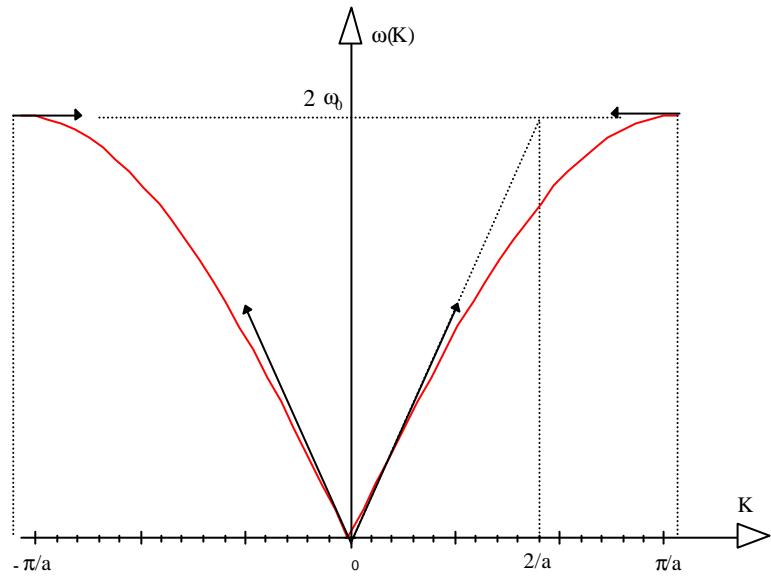
la vitesse de phase est

$$V_\phi = \frac{\omega}{K} = 2 \frac{\omega_0}{K} \sin \frac{Ka}{2}$$

tandis que la vitesse de groupe vaut

$$V_G = \frac{d\omega}{dK} = a\omega_0 \cos \frac{Ka}{2}$$

5.2 Les limites indiquées sur le graphe sont



$$Ka \rightarrow 0 \quad V_\phi \rightarrow a\omega_0 \quad \text{et} \quad V_G \rightarrow a\omega_0 = V_\phi \quad (\text{pas de dispersion})$$

$$Ka \rightarrow \pi \quad V_\phi \rightarrow 2 \frac{a\omega_0}{\pi} \quad \text{et} \quad V_G \rightarrow 0 \quad (\text{onde stationnaire})$$

5.3 La longueur d'onde est telle que $K = 2\pi/\lambda$

$$Ka \rightarrow 0 \quad \text{soit } a \ll \lambda \quad \Rightarrow u_n = u_{n+1} \quad \text{et} \quad \omega \approx \frac{2\pi a}{\lambda} \omega_0 \ll \omega_0$$

$$Ka \rightarrow \pi \quad \text{soit } \lambda \approx 2a \quad \Rightarrow u_n = -u_{n-1} \quad \text{et} \quad \omega \approx 2\omega_0$$

6.1 Compte tenu des hypothèses on a cette fois

$$\frac{d^2 u_{2n}}{dt^2} = \omega_1^2(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 2u_{2n}) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 u_{2n+1}}{dt^2} = \omega_1^2(u_{2n+2} + u_{2n} - 2u_{2n+1})$$

6.2 En remplaçant par les solutions proposées on obtient le système dégénéré

$$\begin{cases} (2\omega_1^2 - \omega^2)V - 2U\omega_1^2 \cos(Ka) = 0 \\ 2V\omega_1^2 \cos(Ka) - (2\omega_2^2 - \omega^2)U = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir des solutions non nulles il faut que le déterminant soit nul.

$$\text{Soit} \quad (2\omega_1^2 - \omega^2)(2\omega_2^2 - \omega^2) = 4\omega_1^2\omega_2^2 \cos^2(Ka)$$

$$\omega^4 - 2(\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + 4\omega_1^2\omega_2^2(1 - \cos^2(Ka)) = 0$$

La résolution de cette équation bicarrée fournit les deux relations de dispersion.

$$\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2(1 - \cos^2(Ka))$$

$$\Delta = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_1^2\omega_2^2 \cos^2(Ka)$$

Les racines sont ω_- et ω_+ :

$$\begin{cases} \omega_-^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_1^2\omega_2^2 \cos^2(Ka)} \\ \omega_+^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_1^2\omega_2^2 \cos^2(Ka)} \end{cases}$$

6.3

Les pulsations ω_- et ω_+ ont pour période π/a . Et on remarque que u_{2n} et u_{2n+1} prennent la même valeur lorsque K augmente de π/a , donc le domaine des valeurs de K s'étend de $\{-\pi/2a ; \pi/2a\}$ ce qui est identique au résultat antérieur compte tenu que le pas du réseau vaut maintenant $2a$.

On suppose $M_1 > M_2$ alors $\omega_1 < \omega_2$ et l'allure des deux graphes sont indiquées ci-contre:

6.4

Pour K voisin de zéro on a

$$\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2(1 - \cos^2(Ka))$$

$$\Delta \approx (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 2\omega_1^2\omega_2^2(Ka)^2$$

$$\sqrt{\Delta} = (\omega_1^2 + \omega_2^2) \left[1 - \frac{\omega_1^2\omega_2^2(Ka)^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2} \right]$$

D'où au premier ordre en (Ka) : $\omega_-^2 \approx 0$ et $\omega_+^2 \approx 2(\omega_1^2 + \omega_2^2)$

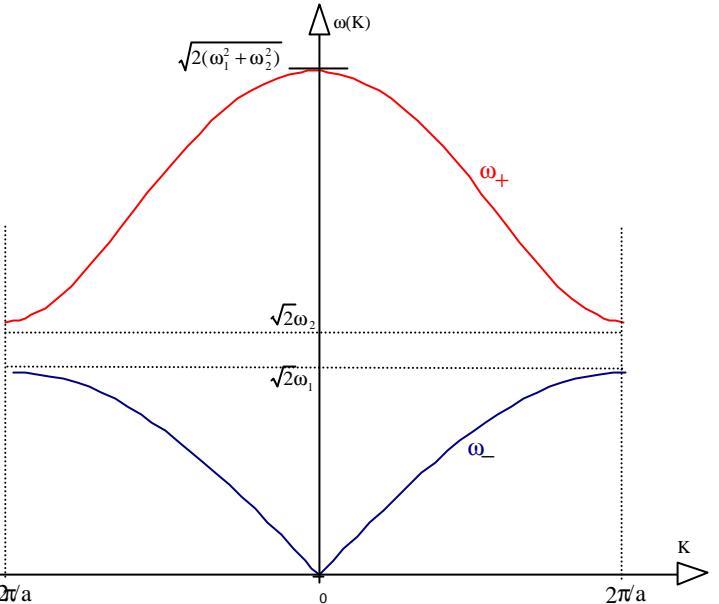
Le rapport U/V est donné par :

$$\frac{U}{V} = \frac{2\omega_1^2 - \omega^2}{2\omega_1^2 \cos(Ka)} \begin{cases} \approx 1 & \text{pour } \omega_- \text{ (mouvements en phase)} \\ \approx -\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = \frac{M_1}{M_2} & \text{pour } \omega_+ \text{ (mouvements en opposition)} \end{cases}$$

6.5 Si la longueur d'onde λ est très grande devant a , alors Ka est voisin de zéro. On se trouve dans le cas précédent. Il y a deux modes de vibrations possibles:

un mode acoustique : $\omega = \omega$ (la fréquence est faible)

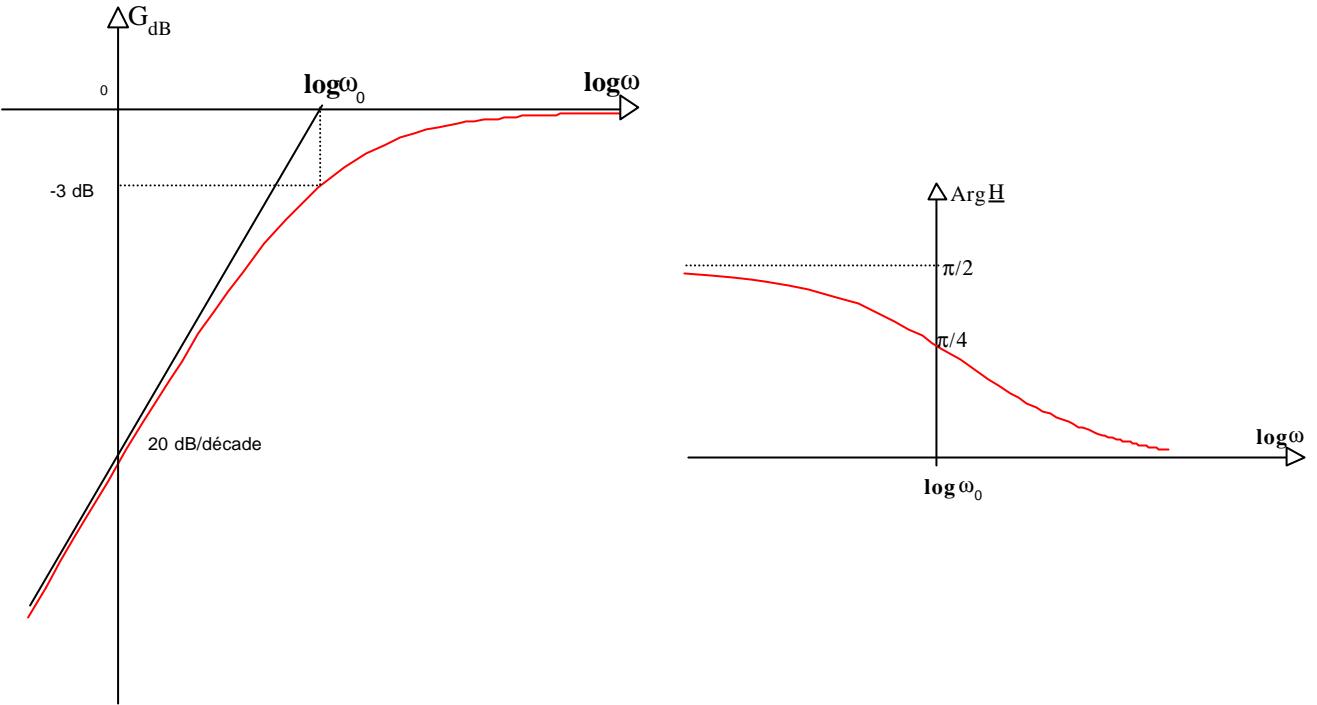
un mode optique : $\omega = \omega_+$ (la fréquence est élevée)



Troisième problème.

1.1 Fonction de transfert : $H = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

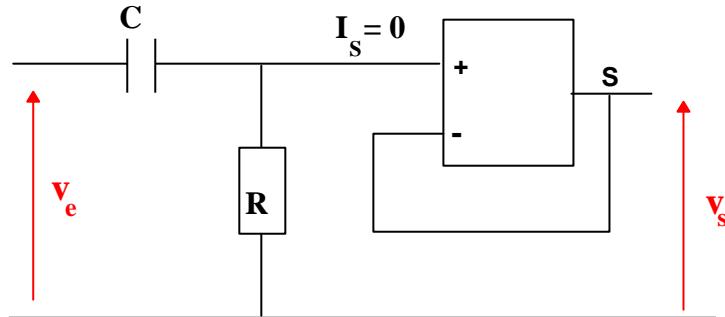
1.2 Diagramme de Bode



1.3 Si le diagramme de Bode d'un filtre présente une pente de 20 dB par décade et un déphasage de $\pm \pi/2$, la fonction de transfert a pour expression $\underline{H} = \pm j \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$

On reconnaît l'opérateur dérivation dans le terme $j\omega$; soit $\underline{V}_s = \pm \frac{1}{\omega_0} \frac{d\underline{V}_e}{dt}$; cqfd.

1.4 Montage suiveur.



2. A-O idéal en régime linéaire : $V^- = V^+ = 0$ par théorème de Millman donne : $0 = \frac{\frac{V_e}{Z_c} + \frac{V_s}{R}}{\frac{1}{Z_c} + \frac{1}{R}}$

Soit $\underline{H} = -jRC\omega$ c'est donc un déivateur conformément au résultat précédent.

3.1 A-O réel en régime linéaire on a encore $V^+ = 0$ donc $V^- = -\varepsilon$

$$\text{Théorème de Millman: } -\varepsilon = \frac{\frac{V_e}{R'+Z_c} + \frac{V_s}{R}}{\frac{1}{R'+Z_c} + \frac{1}{R}} \quad \text{or} \quad \varepsilon = \frac{V_s}{\mu} \quad \Rightarrow -\frac{V_s}{\mu} \left(\frac{1}{R'+Z_c} + \frac{1}{R} \right) - \frac{V_s}{R} = \frac{V_e}{R'+Z_c}$$

$$\text{Donc } \underline{H} = \frac{-\mu}{(R'+Z_c)(\frac{1}{R'+Z_c} + \frac{1+\mu}{R})} = \frac{-\mu}{1+(1+\mu)\frac{R'+Z_c}{R}} = \frac{-1}{\frac{1}{\mu} + (\frac{1}{\mu}+1)\frac{R'+Z_c}{R}} \text{ avec } \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0} + j\frac{f}{f_1}$$

$$\underline{H} = \frac{-1}{\frac{1}{\mu_0} + j\frac{f}{f_1} + (\frac{1}{\mu_0} + j\frac{f}{f_1} + 1)(\frac{R'}{R} - j\frac{f_2}{f})} = \frac{-1}{\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_0}\frac{R'}{R} + \frac{R'}{R} + \frac{f_2}{f_1} + jf(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_1}\frac{R'}{R}) - \frac{1}{\mu_0}j\frac{f_2}{f} - j\frac{f_2}{f}}$$

3.2 On cherche à identifier cette dernière expression à $\underline{H} = \frac{A j x}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2} = \frac{A}{\frac{1}{Q} + j x + \frac{1}{j x}}$ où $f = f_c x$

En considérant des valeurs particulières ($x = 0, x = \infty, x = 1$) on trouve en identifiant :

$$f_c^2 = f_1 f_2 \frac{\frac{1}{\mu_0}}{1 + \frac{R'}{R}} ; \quad A = -\frac{-f_1}{f_c(1 + \frac{R'}{R})} ; \quad Q = \frac{-\frac{1}{A}}{\frac{1}{\mu_0} + (1 + \frac{1}{\mu_0})\frac{R'}{R} + \frac{f_2}{f_1}}$$

Lorsque $R' \ll R$ et $\mu_0 \gg 1$ on obtient les résultats proposés dans l'énoncé.

$$f_c = \sqrt{f_1 f_2} ; \quad A = -\frac{f_c}{f_2} ; \quad \frac{1}{Q} = f_c \left(\frac{1}{f_2} \frac{R'}{R} + \frac{1}{f_1} \right)$$

$$\underline{\text{A-N}} : f_c = 12,6 \text{ kHz} ; \quad A = -79,8 ; \quad Q = 2,45$$

3.4

L'allure du diagramme de Bode en amplitude est celui d'un filtre passe-bande avec un facteur $Q > 0,7$

En BF: $G_{dB} = 20 \log |A| + 20 \log(x)$

En HF: $G_{dB} = 20 \log |A| - 20 \log(x)$

$f \approx f_c$: $G_{dB} = 20 \log (|A|Q) - 40[\log(Q)]^2$

3.5

Aux fréquences voisines de 10 kHz on a $x \approx 1$, on se place donc dans la bande passante du filtre où la fonction de transfert n'est pas du tout celle d'un déivateur.

3.6

Un signal triangulaire de fréquence $f = 100 \text{ Hz}$, valeur nettement inférieure à f_c , est dérivé par le montage.

La sortie correspond donc à un créneau.

Néanmoins, les harmoniques de la décomposition en série de Fourier qui sont dans la bande passante, sont fortement amplifiés.

Lors de la reconstitution cela fait apparaître des ondulations de fréquence voisine de 10 kHz.

