

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Filière PC - PSI

1ère épreuve

(Durée : 4 heures - Coefficient : 10)

L'épreuve se compose de 3 problèmes indépendants.

Premier problème.

On étudie des phénomènes d'interférences à deux ondes que l'on illustrera à l'aide de l'interféromètre de Michelson.

1. Pour obtenir des interférences à deux ondes, on peut utiliser, soit un dispositif à division de front d'onde, soit un dispositif à division d'amplitude.

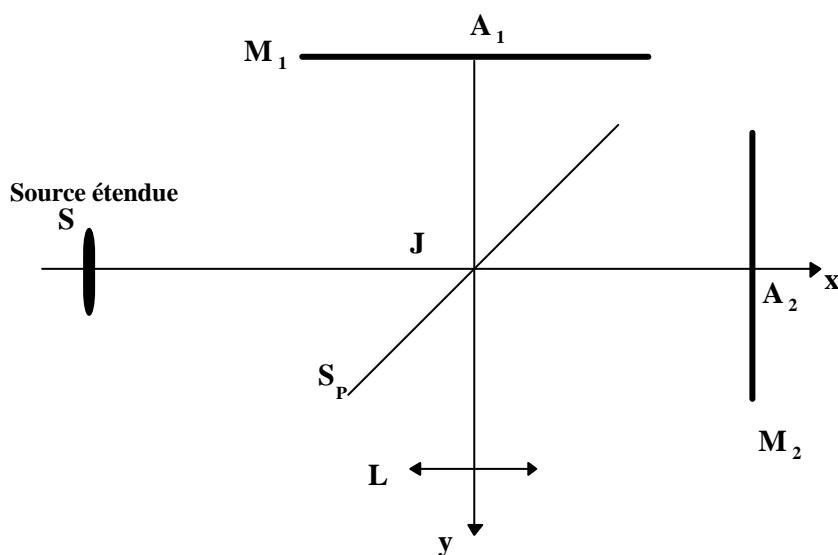
1.1 Préciser pour les deux cas suivants, la localisation des franges en lumière monochromatique avec :

- a) une source ponctuelle,
- b) une source étendue.

On donnera un exemple de dispositif à division de front d'onde.

1.2 Quel est le rôle de la longueur de cohérence dans les conditions d'observation des franges d'interférences?

2. Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi réflectante, non absorbante, appelée séparatrice S_p dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. La lame S_p est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 . L'interféromètre est plongé dans l'air. Dans tout le problème, on ne tiendra compte, ni des inconvénients liés à l'épaisseur non négligeable de la séparatrice (qui sont supposés parfaitement corrigés grâce à une lame compensatrice), ni d'éventuels changements de phases par réflexion. L'indice de l'air sera pris égal à 1.



On utilise comme source étendue S une lampe spectrale de symétrie de révolution autour de l'axe SJ.

2-1. Comment sélectionner une raie quasi-monochromatique de la lumière émise par la lampe?
2.2 On part de la situation où les deux bras sont égaux ($JA_1 = JA_2$). On observe en lumière monochromatique dans le plan focal d'une lentille mince convergente L d'axe optique Jy et de distance focale $f = 1\text{m}$.

a) Qu'observe-t-on ?

b) Pourquoi est-il nécessaire de diaphragmer la lentille ou de limiter l'inclinaison des rayons incidents issus de la source primaire ?

3. On déplace M_2 normalement à son plan de $e = 1,1\text{ mm}$ dans la direction des x positifs.

3.1 Montrer à l'aide d'un schéma que le phénomène d'interférences observé est analogue à celui d'une lame d'air à faces parallèles.

3.2 Donner en le justifiant, le lieu de localisation des franges d'interférences.

3.3 Avec une raie de longueur d'onde $\lambda = 546,1\text{ nm}$ dans le vide, déterminer le rayon du premier anneau brillant.

3.4 On place sur le bras JA_1 et parallèlement au miroir M_1 , une lame d'épaisseur $e' = 9,5\text{ }\mu\text{m}$ et d'indice $n = 1,5117$. Calculer la variation de l'ordre d'interférence au centre et le rayon du premier anneau brillant.

4. A partir de la situation où les deux bras sont égaux ($JA_1 = JA_2$), on fait tourner le miroir M_2 d'un angle α très faible autour d'un axe perpendiculaire JA_1A_2 et passant par A_2 .

4.1 Montrer à l'aide d'un schéma que le dispositif est équivalent à un coin d'air d'angle α .

4.2 Comment éclairer le coin d'air sous incidence quasi-normale?

4.3 Pour des rayons lumineux voisins de l'incidence normale, faire apparaître à l'aide d'un schéma, la position du plan de localisation de la figure d'interférences.

4.4 Comment faut-il placer la lentille L pour observer les interférences sur un écran ?

4.5 Caractériser le système de franges et donner la valeur de l'interfrange i sur l'écran, sachant que le grossissement de la lentille est 4.

Application numérique: $\alpha = 1$ minute d'arc. $\lambda = 546,1\text{ nm}$. Donner la valeur de i .

4.6 On éclaire le coin d'air en lumière blanche, et on replace la lame d'épaisseur e' . Indiquer un moyen de déterminer l'épaisseur e' ou l'indice moyen de la lame.

5. L'interféromètre est réglé comme à la question 4, mais la source primaire est maintenant une lampe à vapeur de sodium dont on suppose que le spectre d'émission ne contient que deux raies intenses, de couleur jaune et de longueur d'onde $\lambda_1 = 589,0\text{ nm}$ et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ avec $0 << \Delta\lambda << \lambda_1$.

On déplace le miroir M_2 de façon à faire défiler les franges obtenues dans la question 4. On constate que les franges disparaissent lorsque le déplacement de M_2 est $d = 0,15\text{ m}$.

5.1 Expliquer le phénomène.

5.2 En déduire $\Delta\lambda$ et λ_2 .

6. L'interféromètre est réglé comme à la question 4.

La radiation utilisée maintenant, la raie rouge du cadmium, ($\lambda_0 = 643,8\text{ nm}$) n'est pas rigoureusement monochromatique.

On peut admettre que le spectre d'émission : $I(v) = I_0$ est une constante entre $(v_0 - \Delta v/2)$ et $(v_0 + \Delta v/2)$; v_0 est la fréquence centrale de la raie correspondant à la longueur d'onde λ_0 .

6.1 Déterminer le facteur de visibilité V (ou facteur de contraste) des franges en fonction de la différence de marche δ , de Δv , et de la vitesse de la lumière dans le vide c . On donne $V = (E_2 - E_1) / (E_2 + E_1)$, E_2 étant l'éclairage d'une frange brillante et E_1 celui d'une frange sombre.

6.2 Pour quelle valeur de δ V s'annule-t-il pour la première fois?

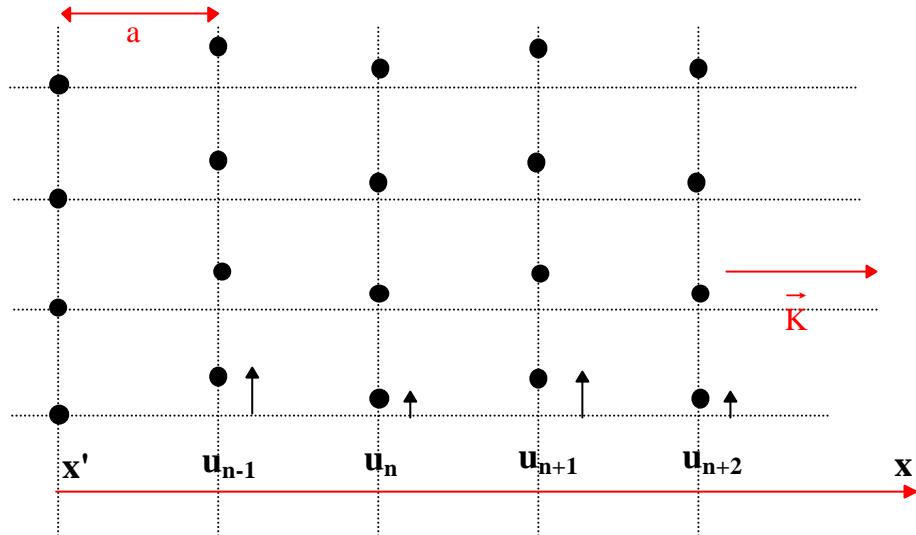
On notera : $L_c = c / \Delta v$, la longueur de cohérence.

6.3 Michelson avait trouvé pour la raie rouge du cadmium $L_c = 30\text{ cm}$. Calculer Δv pour la raie rouge du cadmium et en déduire la durée τ du train d'onde.

Deuxième problème.

On veut étudier les vibrations élastiques des solides cristallins dans le domaine des courtes longueurs d'onde. Pour simplifier le problème, on s'intéresse aux vibrations élastiques purement transversales de plans atomiques parallèles supposés identiques. Soit a la distance entre les plans.

On note u_n la coordonnée de déplacement du $n^{\text{ème}}$ plan et M la masse d'un plan. Chaque plan est soumis de la part de chacun de ses voisins à une force de rappel de la forme : $F_{n+1 \rightarrow n} = -C(u_n - u_{n+1})$



1. Etablir l'équation différentielle du mouvement pour un plan.

2. On cherche des solutions de la forme : $u_h = u_0 \exp j(n.K.a - \omega t)$; $\vec{K} = K \vec{i}$ est le vecteur d'onde et ω la pulsation. $j^2 = -1$.

Ecrire la relation entre K et ω appelée relation de dispersion. On écrira cette relation sous la forme : $\omega = f(K, a, \omega_0)$ avec $\omega_0^2 = C/M$.

3. Montrer que deux solutions pour lesquelles K diffère de $2\pi/a$ représentent le même état physique et que l'on peut limiter le domaine de variation des valeurs de K à $\{-\pi/a ; \pi/a\}$

4. Tracer la courbe donnant ω en fonction de K .

5. Vitesse de phase et vitesse de groupe.

5.1 Calculer la vitesse de phase V_ϕ et la vitesse de groupe V_G en fonction de K , ω_0 et a , sur l'intervalle: $K \in \{0 ; \pi/a\}$.

5.2 Donner leurs limites pour Ka tendant vers 0 et Ka tendant vers π .

5.3 En introduisant une longueur d'onde $\lambda = 2\pi/K$, donner une interprétation physique aux deux valeurs limites de Ka .

6. On considère maintenant un solide formé d'ions de charge $+e$ et $-e$. Les plans pairs ont la masse M_1 et sont constitués de charges positives, les plans impairs ont la masse M_2 et sont constitués de charges négatives. On fait la même modélisation que pour le cas précédent (même force de rappel); il n'y a pas d'autres forces mises en jeu. On suppose que $M_1 > M_2$.

6.1 Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour chaque type de plan.

6.2 On cherche des solutions de la forme :

$$u_{2n+1} = U \exp \{ j[(2n+1)K.a - \omega_0 t] \} \text{ et } u_{2n} = V \exp \{ j[2nK.a - \omega_0 t] \}.$$

Trouver deux relations liant U, V, a et K. En déduire deux relations de dispersion.

On posera $\omega_1^2 = C/M_1$, $\omega_2^2 = C/M_2$ et on mettra ces relations sous la forme : $\omega^2 = f(K, a, \omega_1^2, \omega_2^2)$.

6.3 En remarquant que le pas du réseau est maintenant $2a$, trouver l'intervalle de variation de K. Sur un même graphe, tracer les courbes donnant ω en fonction de K pour les deux relations trouvées.

6.4 Calculer ω^2 pour les deux branches du graphe lorsque K est très voisin de 0. Calculer alors le rapport U/V dans chaque cas.

6.5 Que se passe-t-il lorsqu'on envoie sur un tel cristal, une onde électromagnétique de longueur d'onde λ très grande devant a . A quelle branche du graphe attribue-t-on le nom de branche optique? Le justifier.

Troisième problème.

Etude d'un filtre passe-haut du premier ordre.

1. Filtre passif théorique.

1.1 La tension V_e est une tension sinusoïdale de fréquence f .

Déterminer la fonction de transfert du réseau sur la figure 1 : $H = \underline{V}_s / \underline{V}_e$

1.2 Tracer le diagramme de Bode de ce filtre. On pose $\omega_0 = 1/RC$

1.3 Justifier la conclusion suivante :

Si le diagramme de Bode d'un filtre présente une pente de 20 dB par décade et un déphasage de $\pm \pi/2$, le montage est déivateur.

1.4 Donner un montage utilisant un A-O (amplificateur opérationnel) monté en suiveur, permettant d'observer sans déformation V_s .

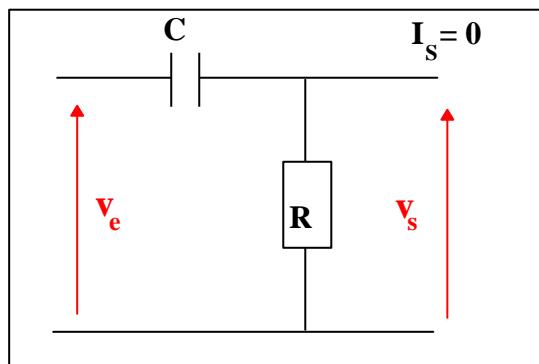


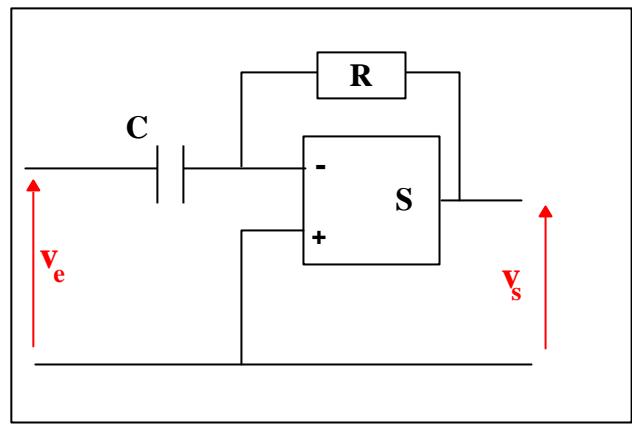
Figure 1

2. Montage déivateur avec A-O idéal.

L'A-O fonctionne en régime linéaire.

Montrer que ce montage réalise une dérivation du signal d'entrée.

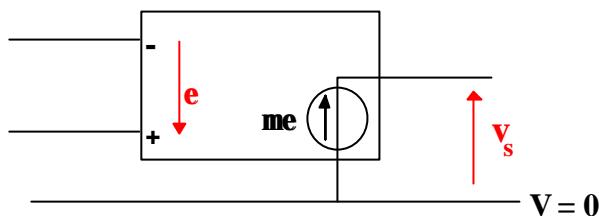
Remarque : par essence, cet amplificateur amplifie les signaux de hautes fréquences et donc des signaux parasites captés par effet d'antenne dans les fils de raccordement. Il faut donc prévoir une limitation du gain en haute fréquence. Il suffit de rajouter au générateur une résistance R' en série mais souvent la résistance interne R_G du générateur suffit.



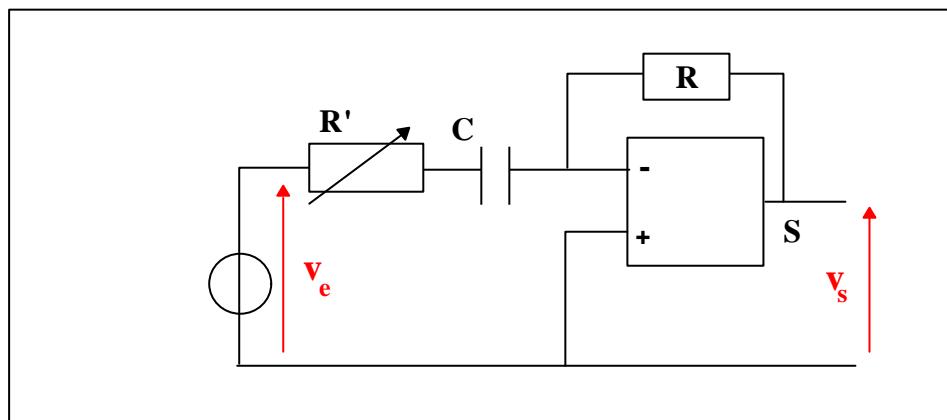
Un A-O idéal fonctionnant en régime linéaire est tel que $V_+ - V_- = \varepsilon = 0$ et $I_+ = I_- = 0$.

3. Etude du montage avec A-O réel.

On modélise l'A-O réel par le schéma suivant : en particulier, le comportement de l'A-O en sortie est modélisé par un générateur de tension idéal de valeur $\mu\varepsilon$.



On réalise le montage suivant :



3.1 Calculer la fonction de transfert : $H = V_s / V_e$ avec un amplificateur A-O réel caractérisé par $\mu = \mu_0 / (1 + j f/f_0)$.

On définit : la fréquence de coupure à gain nul $f_1 = \mu_0 f_0$; et $f_2 = 1/2\pi RC$

3.2 En admettant que $R \gg R'$, $f_2 \gg f_0$ et $\mu_0 \gg 1$, montrer que H se met sous la forme :

$$H = A j x / (1 + j x/Q - x^2)$$

avec $x = f / f_c$, $A = -f_c/f_2$; $f_c^2 = f_1 f_2$; $Q = 1 / f_c(R'/R f_2 + 1/f_1)$

3.3 Application numérique :

$f_1 = 1 \text{ MHz}$; $R = 10 \text{ k}\Omega$; $C = 100 \text{ nF}$; $R' = 50 \Omega$; Calculer f_c , Q , et A .

3.4 Donner l'allure du diagramme de Bode en amplitude : $G_{dB} = 20 \log |H|$ en fonction de $\log x$

3.5 Interpréter le fait que le montage n'est pas dérivateur aux fréquences voisines de 10 kHz.

3.6 Le signal d'entrée est un signal triangulaire symétrique de fréquence $f = 100$ Hz. On constate que le signal de sortie n'est pas tout à fait un signal créneau mais qu'il s'y superpose des ondulations de fréquence voisine de 10 kHz.

Justifier ces observations à partir du diagramme de Bode et de la décomposition de Fourier d'un signal triangulaire.