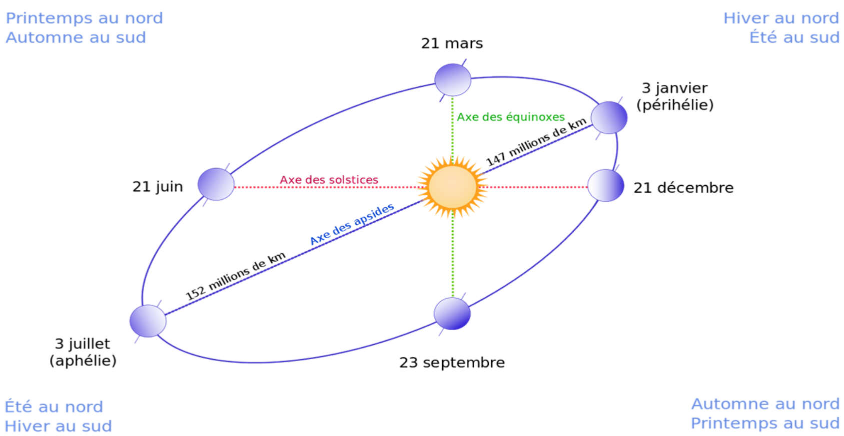
CYCLE PREPARATOIRE INTEGRE

CPI1A

Eléments de cours de mécanique du point matériel

Pr : Ossama AZAGROUZE

Responsable du cours Physique classique-chimie (SDM1 U1)



Septembre 2025

Chapitre 0 : Introduction

A- Qu'est-ce que la mécanique ?

Le mot mécanique vient du grec $\mu\eta\chi\alpha\nu\eta$ « mécané » qui signifie machine. La mécanique est donc l'étude du mouvement des corps : par exemple d'une balle lancée dans l'air, d'un électron dans un tube cathodique ou encore d'une comète orbitant autour du soleil. La mécanique classique correspond à la formulation de la mécanique qui a été développée par Galillée et Newton au 17 ème siècle et qui a étté reformulée par Lagrange et Hamilton aux 18 ème et 19 ème siècles. Pendant plus de deux siècles, la mécanique classique a été considérée comme la seule formulation capable d'expliquer le mouvement de tous les systèmes imaginables.

Mais au début du 20 ème siècle, deux grandes révolutions ont montré que la mécanique classique ne pouvait être utilisée ni pour les mouvements aux vitesses proches de la vitesse de la lumière, ni pour les particules sous-atomiques dans leur mouvement à l'intérieur des atomes. Entre 1900 et 1930 sont alors apparues la mécanique relativiste, développée à l'origine pour décrire les corps en mouvement rapide, et la mécanique quantique, développée à l'origine pour les systèmes sous-atomiques. Dans cette nouvelle compétition entre les différentes mécaniques, on pouvait s'attendre à ce que la mécanique classique perde de son intérêt et de son importance. Cependant, en ce début de 21 ème siècle, la mécanique classique a gardé toute son importance et reste même toujours aussi fascinante. En effet, il existe toujours autant de systèmes physiques intéressants qui sont mieux décrits en termes classiques. Par exemple, pour analyser les orbites des engins spatiaux et les trajectoires des particules chargées dans les accélérateurs modernes, il est inévitable d'utiliser la mécanique classique. Une autre raison est qu'une bonne compréhension de la mécanique classique est toujours un préalable à l'étude de la relativité et de la mécanique quantique.

Un des intérêts d'un cours de mécanique classique est qu'il fournit une belle occasion d'apprendre certaines techniques mathématiques très utiles dans de nombreuses branches de la physique : les vecteurs, le calcul vectoriel, les équations différentielles, les nombres complexes, les séries de Taylor, etc.

B- Point matériel

Dans le cours de première année, on se limite à l'étude mécanique des points matériels. Il convient donc de définir ces systèmes.

On appelle « point matériel » un solide dont la position est entièrement définie par la seule donnée de la position de son centre de masse. Cela revient à négliger tout effet de rotation du solide sur lui-même ainsi que son extension spatiale. Le « point matériel » est une idéalisation commode pour deux raisons :

- Dans de nombreux problèmes importants les corps que l'on étudie peuvent être approchés de manière très réaliste par des masses ponctuelles. Les particules atomiques et sous-atomiques peuvent souvent être assimilées à des masses ponctuelles. Même des objets macroscopiques comme une pierre lancée du haut d'une falaise ou une planète orbitant du soleil peuvent, dans la plus part des situations, être considérées comme des particules ponctuelles.
- La mécanique du « point matériel » est un point de départ pour la mécanique des corps étendus.

C- L'espace et le temps

Les principes de la mécanique classique (principes de Newton) sont formulés à partir de quatre concepts fondamentaux sous-jacents : l'espace, le temps, la masse et la force ou action.

Ici on fait le point sur les deux premiers concepts : l'espace et le temps.

1. L'espace

L'espace physique dans lequel se produisent les mouvements est décrit par un espace euclidien tridimensionnel où sont définis les angles et les distances. Cet espace est supposé être homogène et isotrope. C'est dire que la présence de la masse ainsi que les événements qui s'y produisent n'affectent pas les propriétés de l'espace.

Chaque point M de l'espace tridimensionnel dans lequel se produisent les événements peut être repéré par un vecteur position $\overrightarrow{OM}$ qui détermine la distance et la direction de M depuis une origine choisie O.

Le choix de l'origine O et d'un système de trois axes perpendiculaires constitue le choix le plus naturel d'un repère d'espace. Le vecteur OM est donné par ses composantes dans les directions du système d'axes choisi.

Il est nécessaire de doter l'espace d'une mesure et donc d'une unité. La longueur constitue une dimension physique dont l'unité internationale est le mètre (m).

La définition actuelle du mètre est : La longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $\frac{1}{299792458}$ seconde. En effet la vitesse de la lumière dans le vide est fixée conventionnellement à $299792458\, m.s^{-1}$: il s'agit d'une constante universelle.

2. Le temps

Selon la conception classique, le temps t est un paramètre universel et unique pour tous les observateurs. Cela signifie que tous les observateurs sont équipés d'horloges précises et correctement synchronisées, ils seront tous d'accord sur le moment auquel survient n'importe quel événement. Le temps est donc absolu. Le temps est le paramètre permettant de dater un événement et d'établir la chronologie d'une succession d'événements. Ceci est rendu possible par l'hypothèse d'uniformité du temps : les lois de la physique sont invariantes par translation dans le temps.

Il faut choisir une unité pour le temps : il s'agira de la seconde (s) dans le système international des unités. Actuellement la seconde est légalement définie comme la durée de 9192631770 période de la radiation correspondant à la transition entre deux raies hyperfines de l'état fondamental d'un atome de Césium 133. Il s'agit du temps atomique.

On construit des horloges qui permettent de mesurer le temps.

Remarque : On sait actuellement que le temps est relatif, c'est-à-dire qu'il dépend de l'observateur dans le cadre de la mécanique relativiste : l'instant où survient un événement n'est pas le même pour deux observateurs en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre. Le temps n'est pas universel en relativité, quand les observateurs se déplacent les uns par rapport aux autres à des vitesses proches de celle de la lumière.

3. Repères et référentiels

Tout problème de mécanique classique implique le choix d'un système de référence ou référentiel, c'est-à-dire le choix d'une origine spatiale et d'axes qui constituent le repère permettant de déterminer la position ainsi que le choix d'une origine temporelle (Horloge) permettant de mesurer le temps.

Il y a différentes possibilités de choisir un repère d'espace pour un même problème. En choisissant avec soin le repère vous pouvez assez souvent simplifier le travail de mise en équation et de résolution du problème posé.

Chapitre 1 : Cinématique classique du point

La cinématique consiste uniquement à décrire les trajectoires de points en mouvement, sans s'occuper de ce qui peut être la cause de leur mouvement. Cette description nécessite de préciser le référentiel d'étude. Il est donc nécessaire de repérer un point M dans l'espace. Il faut connaitre les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et des vecteurs qui peuvent être définis à partir de celui-là.

On choisit donc une base de projection dans laquelle on cherche à déterminer les composantes des vecteurs et nous aidera ainsi à effectuer les opérations sur ces vecteurs. Ce choix sera orienté par la symétrie du problème. Différentes solutions peuvent être envisagées.

A- Systèmes de coordonnées

1. Coordonnées cartésiennes

C'est le système de repérage le plus naturel. C'est un repère d'espace comportant une origine O, et un système de trois axes orthogonaux entre eux et qui concourent en O. Soient les axes Ox, Oy, et Oz.

La base de projection est définie par trois vecteurs directeurs (respectivement des axes Ox, Oy, et Oz) et unitaires ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$,$\vec{e}_z$) formant une base orthonormée et directe.

Les vecteurs sont unitaires :

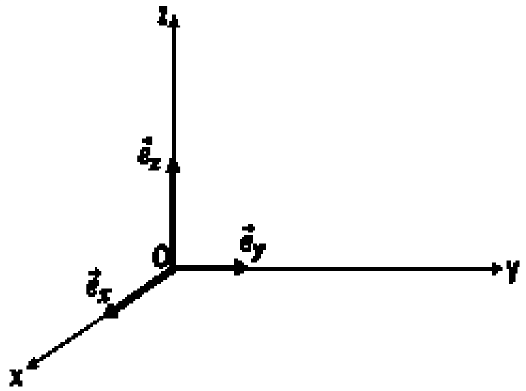
$\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\|=\|\vec{e}_z\|=1$

Les vecteurs sont orthogonaux deux à deux :

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y=\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z=\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x=0$ (où . est le produit scalaire)

Les vecteurs constituent une base directe :

$$\begin{cases} \vec{e}_x \times \vec{e}_y=\vec{e}_z \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z=\vec{e}_x \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x=\vec{e}_y \end{cases}$$

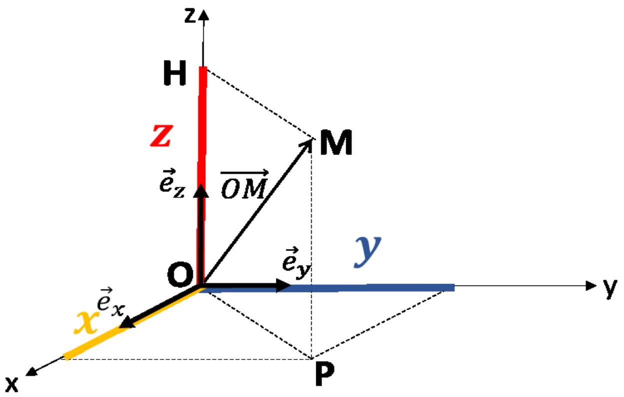


Où $\times$ est le produit vectoriel.

Un point M de l'espace est repéré dans le repère cartésien par ses coordonnées (x, y, z) qui sont les projections du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur les vecteurs unitaires de la base cartésienne ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$).

C'est à dire:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad x,\ y\ et\ z\ \in \left]-\infty\ ,\ +\infty\right[$$

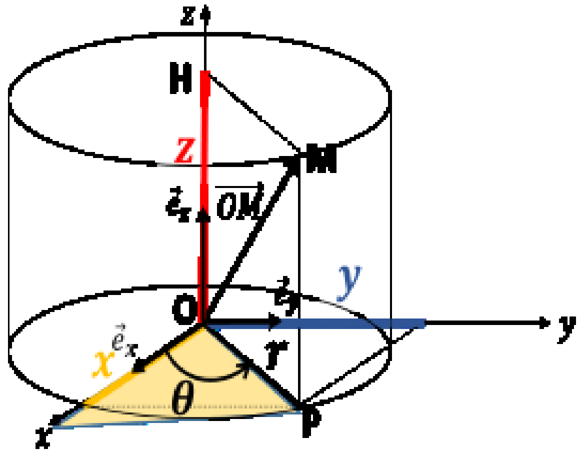


Bien que ce système de coordonnées soit le plus naturel, il n'est pas forcément le plus adapté à la symétrie du problème, notamment lorsqu'elle est cylindrique ou sphérique.

2. Coordonnées cylindriques

2.1. Définition

De nombreux problèmes possèdent un <u>axe privilégié</u>, et l'utilisation du système de coordonnées cartésiennes est alors peu judicieuse. Un point en rotation autour d'un axe (sur un manège tournant par exemple) est plus aisément repéré par sa distance au centre, et par un angle de rotation autour de l'axe. C'est pour faciliter l'étude de ce genre de problèmes que sont introduites les coordonnées cylindriques.



La symétrie cylindrique consiste donc à privilégier un axe noté habituellement (Oz) qui est l'axe du cylindre. La position est alors définie par l'altitude z et la distance r du point M à l'axe (Oz). On utilise en outre un angle de rotation appelé angle polaire et noté habituellement q. Cet angle de rotation est défini par rapport à un axe choisi arbitrairement mais perpendiculairement à l'axe (Oz).

On appelle plan polaire le plan perpendiculaire à l'axe (Oz) passant par le point M. Le point P est la projection orthogonale de M sur le plan (xoy).

Si le point M se déplace dans un plan, alors il est repéré par ses coordonnées dites polaires (r,q). On « supprime » l'axe (Oz), il s'agit d'un plan z=Cte.

La position d'un point M est définie par un unique triplet (r, θ, z).

$r \in [0, +\infty[$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $z \in]-\infty, +\infty[$

2.2. Lien avec les coordonnées cartésiennes

On peut relier les composantes en coordonnées cylindriques à celles en coordonnées cartésiennes. En faisant, par exemple, le choix de l'axe (Ox) comme axe de référence pour les angles de rotation q et de projeter sur les axes (Ox) et (Oy) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = r\cos\theta} \\ \boldsymbol{y = r\sin\theta} \\ \boldsymbol{z = z} \end{cases}$$

On peut inverser ces relations pour obtenir l'expression des coordonnées cylindriques en fonction des coordonnées cartésiennes :

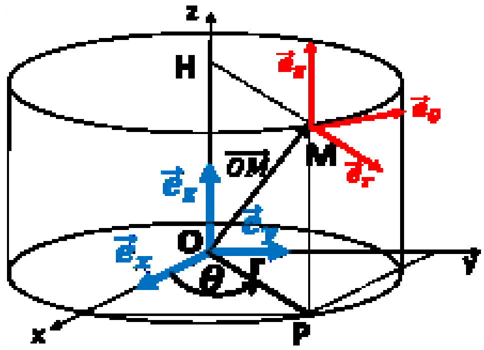
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \; [\pi] \\ z = z \end{cases}$$

2.3. Base locale cylindrique

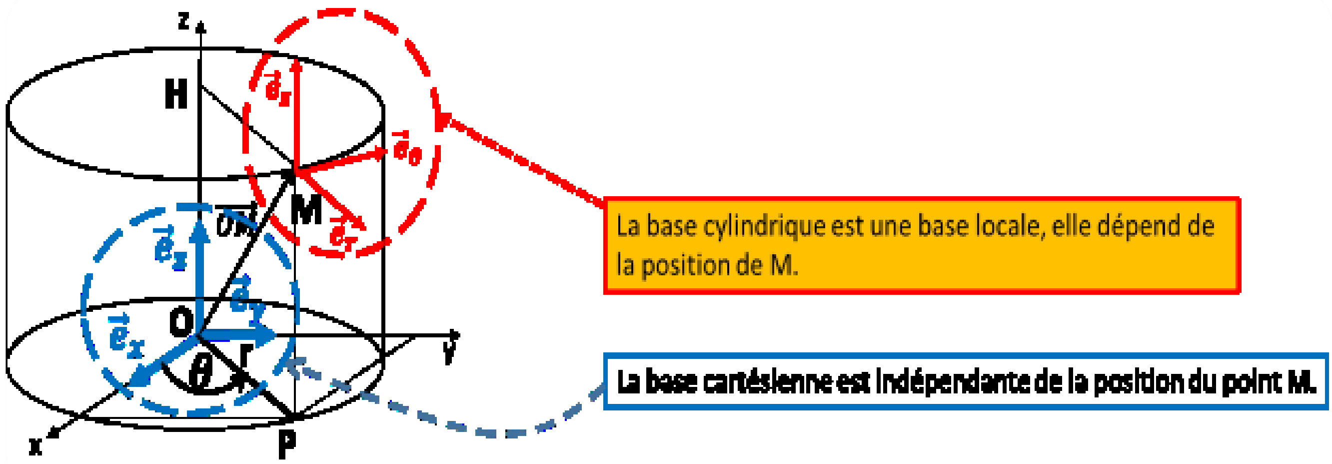
Définition : Une base locale correspond à une base définie en chaque point M de l'espace, elle est donc liée au point dans son mouvement.

On construit la base locale cylindrique ou la base cylindrique par les trois vecteurs suivants :

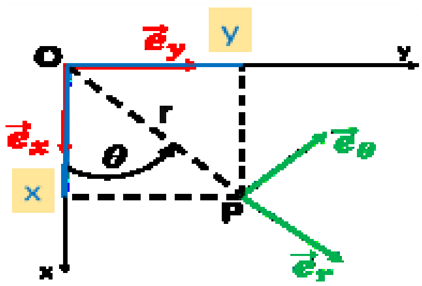
- le premier vecteur noté $\vec{e}_r$ est un vecteur unitaire dont la direction et le sens sont ceux du vecteur $\overrightarrow{OP}$,
- le second noté $\vec{e}_\theta$ est un vecteur unitaire dans le plan polaire obtenu par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ à partir de $\vec{e}_r$,
- le troisième noté $\vec{e}_z$ est un vecteur unitaire suivant l'axe (Oz).



Important : Les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent du point M et se déplacent avec celui-ci, d'où la dénomination « locale » donnée à cette base. Alors que le vecteur $\vec{e}_z$ est indépendant du point M, il est fixe par rapport à M.



Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit dans cette base :



$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

Les vecteurs de cette base cylindrique s'expriment dans la base cartésiennes par :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = cos\theta\,\vec{e}_x + sin\theta\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -sin\theta\,\vec{e}_x + cos\theta\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{e}_z$ est inchangé.

Tout vecteur peut se décomposer sur cette base selon : $\vec{U} = U_r\vec{e}_r + U_\theta\vec{e}_\theta + U_z\vec{e}_z$

U_r est appellé composante radiale

U_θ est appellé composante orthoradiale

U_z est appellé compsante axiale.

3. Coordonnées sphériques

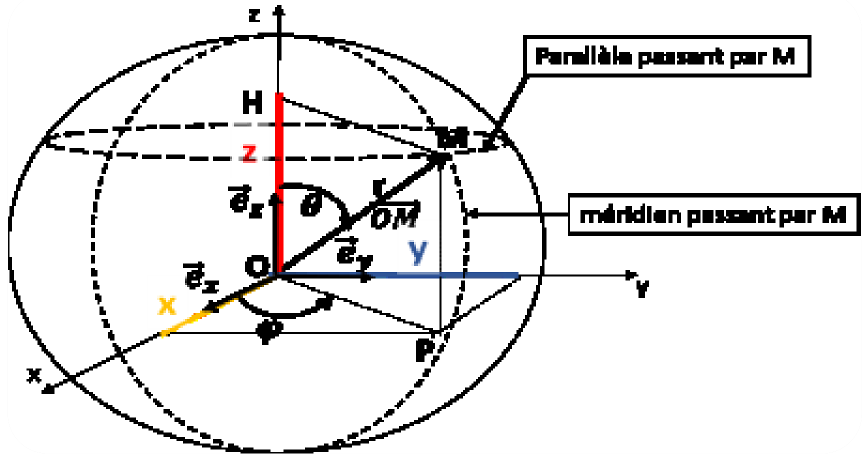
3.1. Définition

Ce type de coordonnées sert à repérer un point sur une sphère (exemple point à la surface de la terre) ou tout mouvement d'un point M autour d'un point particulier O. En général un problème à symétrie sphérique est simplifié en utilisant les coordonnées sphériques et la base associée.

Un point M est donc repérer par trois coordonnées sphériques :

- r la distance du point M au point O,
- θ la colatitude et est défini comme l'angle entre un axe (cartésien) fixe (Oz) et la droite (OM),
- φ la longitude ou azimut correspond à l'angle entre un axe perpendiculaire à (Oz), l'axe (Ox), et la droite (OP) où P est la projection de M dans le plan perpendiculaire à (Oz) passant par O. O est l'origine du repère cartésien.

Les coordonnées sphériques du point M sont (r, θ, φ).



3.2. Lien avec les coordonnées cartésiennes

On projette le vecteur OM sur les axes cartésiens (Ox), (Oy) et (Oz) et on obtient :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Les domaines de définition des coordonnées sphériques sont :

$$r \in [0, +\infty[\;,\quad \theta \in [0, \pi] \quad \text{et} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

On peut inverser les relations pour obtenir l'expression des coordonnées sphériques en fonction des coordonnées cartésiennes :

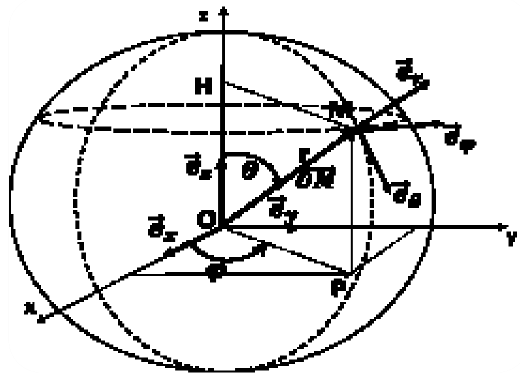
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \quad [\pi] \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad [\pi] \end{cases}$$

Sous réserve pour les points où la tangente des angles prend une forme indéterminée. En l'occurrence le point O et les points de l'axe (Oz).

3.3. La base sphérique local

Il s'agit d'une base orthonormée et directe dont les vecteurs unitaires sont définis par :

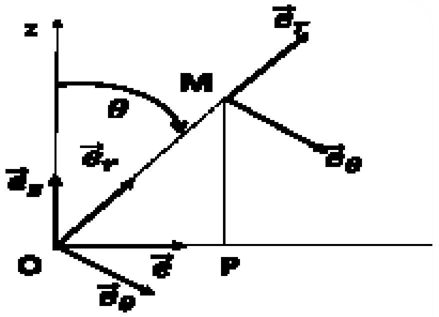
- le vecteur radial $\vec{e}_r$ un vecteur don't la direction et le sens sont ceux du vecteur OM $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$



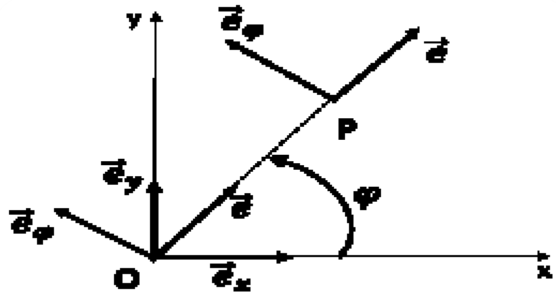
- le vecteur $\vec{e}_\theta$ un vecteur unitaire dans le plan méridien (Oz, OM) obtenu par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ à partir de $\vec{e}_r$. Il est donc tangent au méridien passant par M,
- Le troisième vecteur $\vec{e}_\varphi$ est un vecteur unitaire pour que la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ soit une base directe: il est donc perpendiculaire au plan méridien et tangent au parallèle passant par M.

La base est locale, elle dépend du point M. Lorsque le point M est mobile, les vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ changent d'oreintation.

Le vecteur position OM s'écrit dans cette base : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.



Projection dans le plan méridien



Projection dans le plan xoy

$$OP = r\sin\theta$$

On a :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \end{cases}$$

Et

$$\vec{e} = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$

Tout vecteur peut se décomposer sur cette base locale selon :

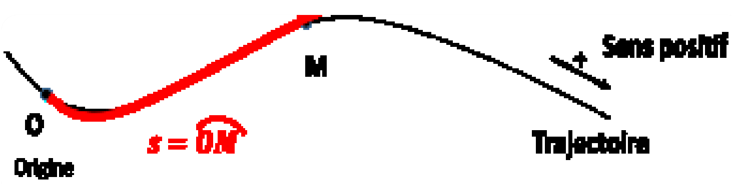
$$\vec{U} = U_r\vec{e}_r + U_\theta\vec{e}_\theta + U_\varphi\vec{e}_\varphi$$

4. Coordonnée curviligne – Base de Frenet

La base de Frenet est une base définie localement pour tout point M d'une trajectoire. La position sur la trajectoire est définie par l'abscisse curviligne.

4.1. Abscisse curviligne

Soit une trajectoire décrite par un point M.



L'abscisse curviligne s est la longueur de la trajectoire orientée depuis une position O choisie comme origine sur la courbe de la trajectoire. $\boldsymbol{s = \widehat{OM}}$

4.2. Base de Frenet

La base de Frenet est définie par :

- Le vecteur $\vec{\boldsymbol{t}}$ unitaire tangent à la trajectoire au point M considéré,
- Le vecteur $\vec{\boldsymbol{n}}$ unitaire normal à la trajectoire et dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire
- Le vecteur $\vec{\boldsymbol{b}}$ complétant la base directe de l'espace : $\vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{t}} \times \vec{\boldsymbol{n}}$

Le vecteur $\vec{\boldsymbol{b}}$ est perpendiculaire au plan formé par $(\vec{\boldsymbol{t}}, \vec{\boldsymbol{n}})$. Ce plan est unique, on l'appelle plan osculateur (Voir plus loin).

B- Dérivée d'un vecteur unitaire tournant par rapport à l'angle de rotation

Les vecteurs de base de la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont indépendants de la position du point M, donc indépendants des coordonnées du point (que ce soit les coordonnées cartésiennes elles même ou celles cylindriques ou sphériques. Mathématiquement cela veut dire que leur dérivée par rapport à n'importe quelle coordonnée est nulle !).

Soit $\dfrac{d\vec{e}_i}{dq} = \vec{0}$ avec $i = x, y \; ou \; z$ et $q = x, y, z, r, \theta \; ou \; \varphi$

1. Vecteurs de base cylindrique

Les vecteurs de base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ s'expriment dans la base fixe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ par :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta \, \vec{e}_x + \sin\theta \, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta \, \vec{e}_x + \cos\theta \, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

ne dependent que de θ. Le vecteur $\vec{e}_z$ est un vecteur cartésien commun aux deux bases, il est fixe donc indépendant du déplacement du point M.

Lorsque le point $M(r, \theta, z)$ devient $M'(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$, les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ deviennent respectivement $\vec{e}_r + d\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta + d\vec{e}_\theta$.

Les variations induites par le déplacement du point M ne sont fonction que de θ.

En dérivant par rapport à θ les expressions précédentes

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \\ \dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r \end{cases}$$

on en déduit le résultat important suivant :

$$\begin{cases} d\vec{e}_r = d\theta . \vec{e}_\theta \\ d\vec{e}_\theta = -d\theta . \vec{e}_r \end{cases}$$

2. Vecteurs de base sphérique

Les vecteurs de base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ s'expriment dans la base fixe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ par :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r} = \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y \end{cases}$$

ne dépendent que de θ et de φ.

Lorsque le point $M(r, \theta, \varphi)$ devient $M'(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$, les vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ deviennent respectivement $\vec{e}_r + d\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta + d\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi + d\vec{e}_\varphi$.

Les variations induites par le déplacement du point M ne sont fonction que de θ et φ.

En dérivant les expressions précédentes on obtient les résultats importants suivants :

$$\begin{cases} d\vec{e}_r = d\theta\vec{e}_\theta + sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \\ d\vec{e}_\theta = -d\theta\vec{e}_r + cos\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \\ d\vec{e}_\varphi = -d\varphi\vec{e} \end{cases}$$

3. Cas général d'un vecteur unitaire

On admet le résultat important suivant :

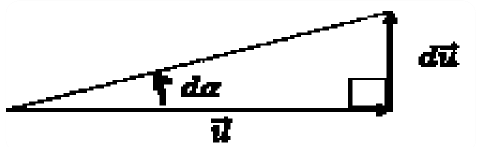
Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire. On a $\vec{u}^2 = 1$ ce qui implique en dérivant par rapport à l'angle de rotation α $\vec{u}.\frac{d\vec{u}}{d\alpha} = 0$. On en déduit que $\vec{u}$ et $\frac{d\vec{u}}{d\alpha}$ sont orthogonaux.

C- Déplacements élémentaires

1. Définition

Les déplacements élémentaires s'obtiennent en faisant varier de manière élémentaire chacune des coordonnées du système de coordonnées considérées.

Le vecteur déplacement élémentaire d'un point M correspondant à la variation du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ entre deux positions infiniment voisines (correspondants à deux instants infiniment voisins t et $t + dt$) sur la trajectoire suivie par le point M.



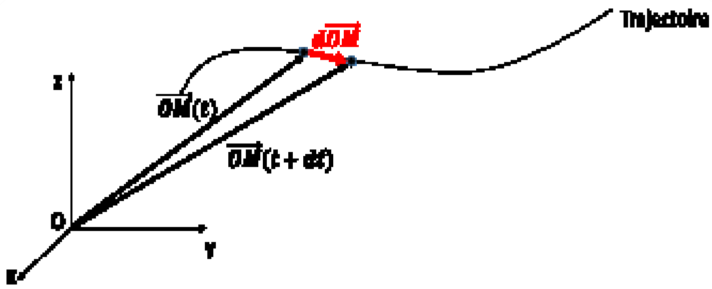
Soit

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t)$$

$d\overrightarrow{OM}$ est un vecteur tangent à la trajectoire.

2. Expressions dans différents systèmes de coordonnées

- Dans la base cartésienne $d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$



- Dans la base cylindrique $d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$

- Dans la base sphérique $d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + rsin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$

- Dans la base de Frenet $d\overrightarrow{OM} = ds\,\vec{t}$

D- Grandeurs cinématiques

On étudie le mouvement du point M par rapport à un référentiel constitué d'un repère d'espace $\mathcal{R}(O, xyz)$ et d'une horloge qui sert à dater la position du point M. Le point O est donc un point fixe par rapport à l'observateur qui étudie le mouvement de M.

$\vec{t}$ = vecteur unitaire tangent

$\vec{t}$ dépend du temps (mobile)

$d\vec{OM} = ds\,\vec{t}$ élément de l'abscisse curviligne parcourue pendant dt.

$\boxed{d\vec{OM} = ds\,\vec{t}}$

Comme le temps est absolu (indépendant du référentiel) en mécanique classique, alors on notera le référentiel par $\mathcal{R}(O, xyz)$.
La cinématique consiste en l'étude de l'évolution du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ au cours du temps et à donner l'équation horaire du mouvement par $\overrightarrow{OM}(t)$ ou par ses composantes dans la base de projection choisie (cartésienne, cylindrique, sphérique ou de Frenet).
La courbe décrite par le point M au cours du temps est dite **Trajectoire**. L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant le temps entre les coordonnées du point.

1. Vitesse et hodographe

1.1. Définitions :

1.1.1. Vitesse : On définit la vitesse instantanée du point M à l'instant t par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ par

$$\vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}/\mathcal{R}$$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire au point considéré.
Le vecteur vitesse dépend du référentiel où on le calcule.

1.1.2. Hodographe

Comme le vecteur position, le vecteur vitesse évolue au cours du temps. Le vecteur vitesse décrit une courbe dans l'espace qu'on appelle Hodographe. Il s'agit du lieu des points P tels qu'à chaque instant $\boldsymbol{\overrightarrow{OP}(t) = \vec{v}_{(M/\mathcal{R})}}$.

1.1.3. Expressions de la vitesse dans les différentes bases de projection

- **Système cartésien:** $\vec{v}_{(M/R)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \frac{dx}{dt}\,\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\,\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\,\vec{e}_z = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$

- **Système cylindrique:** $\vec{v}_{(M/R)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$

- **Système sphérique:** $\vec{v}_{(M/R)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

- **Coordonnées intrinsèques:** $\vec{v}_{(M/R)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \dot{s}\,\vec{t}$ où $\vec{t}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire dans le sens du movement.

(voir démo dans le cours magistral)

2. Accélération

- Définition :

L'accélération exprime le changement du vecteur vitesse (norme et direction) au cours du temps.

Elle est définie par : $\boldsymbol{\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \frac{d\vec{v}_{(M/\mathcal{R})}}{dt}/\mathcal{R} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/\mathcal{R}}$

- Expressions dans les différentes bases de projection
  - Système cartésien:

$$\vec{a}_{(M/R)} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{(M/R)}}{dt}/R = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/R = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{e}_z = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

  - Système cylindrique: $\vec{a}_{(M/R)} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{(M/R)}}{dt}/R = (\ddot{r} - r\dot{\boldsymbol{\theta}}^2)\vec{e}_{\boldsymbol{r}} + (\boldsymbol{2\dot{r}\dot{\theta}} + r\ddot{\theta})\,\vec{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{z}\,\vec{e}_{\boldsymbol{z}}$

  - Système sphérique:

$$\boldsymbol{\vec{a}}_{(M/R)} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{(M/R)}}{dt}/R = (\ddot{r} - r\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{rsin}^2\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2)\vec{e}_{\boldsymbol{r}} + (\boldsymbol{2\dot{r}\dot{\theta}} + r\ddot{\theta} - \boldsymbol{rsin\theta cos\varphi}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2)\,\vec{e}_{\boldsymbol{\theta}} + (\boldsymbol{2}\dot{r}sin\theta\,\dot{\boldsymbol{\varphi}} + rsin\theta\,\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + 2rcos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})\vec{e}_{\boldsymbol{\varphi}}$$

- Coordonnées intrinsèques: $\vec{a}_{(M/R)} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{(M/R)}}{dt}/R = \ddot{s}\,\boldsymbol{\vec{t}} + \frac{\dot{s}^2}{\boldsymbol{R_c}}\vec{n}$

où $\boldsymbol{\vec{t}}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire dans le sens du movement

$\boldsymbol{\vec{n}}$ le vecteur unitaire normaleà la trajectoire.

$\boldsymbol{R_c}$ le rayon de courbure de la trajectoire.

Il est à noter que l'accélération est contenue dans le plan dit osculateur défini par le point M et la base $(\boldsymbol{\vec{t}}, \boldsymbol{\vec{n}})$**.** Ce plan change, en général, au cours du temps.

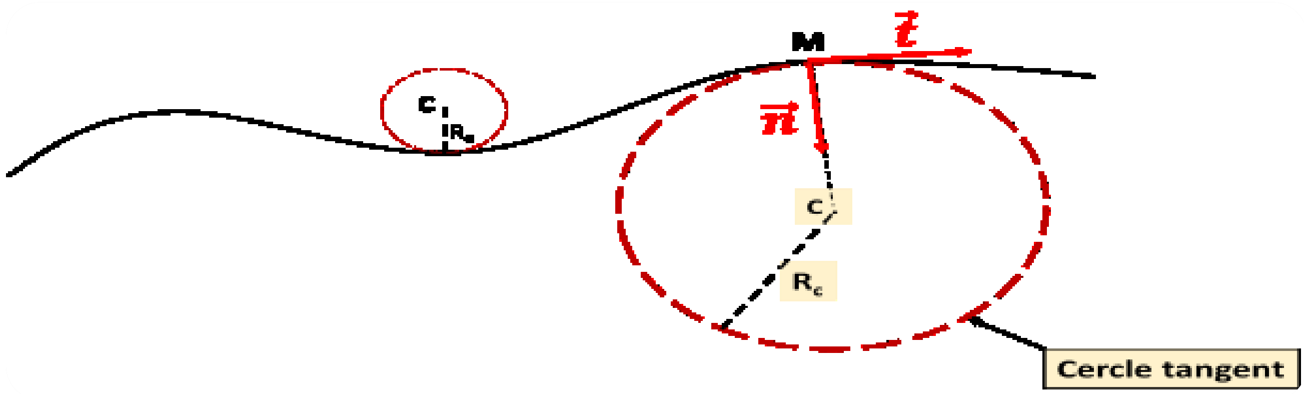
On montre qu'à chaque instant le mouvement est tangent à un mouvement circulaire dont le rayon correspond au rayon de courbure $\boldsymbol{R_c}$ de la trajectoire. Le vecteur normal $\vec{\boldsymbol{n}}$ est dirigé vers le centre de courbure C qui est aussi le centre du cercle tangent.

On retient : $\vec{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})} = \dot{\boldsymbol{s}}\,\vec{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{v}\,\vec{\boldsymbol{t}}$

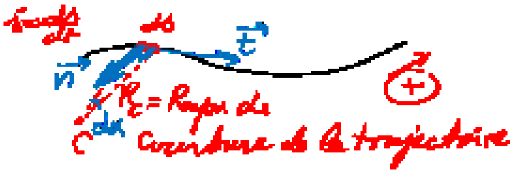
Et $\vec{\boldsymbol{a}}_{(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})} = \ddot{\boldsymbol{s}}\,\vec{\boldsymbol{t}} + \frac{\dot{\boldsymbol{s}}^2}{\boldsymbol{R_c}}\vec{\boldsymbol{n}} = \dot{\boldsymbol{v}}\,\vec{\boldsymbol{t}} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R_c}}\vec{\boldsymbol{n}}$

<u>Le plan osculateur est le plan contenant le cercle tangent</u>.

3. Exemples de mouvements



$\vec a(M/R) = \frac{d\vec v(M/R)}{dt}/_R = \frac{d(\dot s\,\vec t)}{dt}/_R$



$\frac{d\vec t}{dt}/_R = \dot\varphi\,\vec n = \frac{\dot s}{R_c}\vec n$

$\Rightarrow \vec a(M/R) = \underbrace{\ddot s}_{a_t}\,\vec t + \underbrace{\dot s \times \frac{\dot s}{R_c}}_{a_n}\vec n$ $\quad a_t = \ddot s$, $a_n = \frac{\dot s^2}{R_c}$

3.1. Mouvement uniforme, accéléré et décéléré

3.1.1. Mouvement uniforme

Un mouvement est dit uniforme s'il se fait à norme de vitesse constante.

$$\|\vec{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})}\| = \boldsymbol{Cte} \text{ ou } \vec{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})}^{\,2} = Cte \text{ ou } \vec{\boldsymbol{a}}_{(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})}.\vec{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})} = \boldsymbol{0}$$

3.1.2. Mouvement accéléré

Un mouvement est dit accéléré si $\vec{\boldsymbol{a}}_{(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})}.\vec{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})} > \boldsymbol{0}$

Un mouvement est uniformément accéléré si $\vec{\boldsymbol{a}}_{(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})}.\vec{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})} = \boldsymbol{Cte} > \boldsymbol{0}$

3.1.3. Mouvement décéléré

Un mouvement est dit décéléré si $\vec{\boldsymbol{a}}_{(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})}.\vec{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})} < \boldsymbol{0}$

Un mouvement est uniformément décéléré si $\vec{a}_{(M/R)}.\vec{v}_{(M/R)} = Cte < 0$

3.2. Mouvement rectiligne

Un mouvement est dit rectiligne s'il correspond à un déplacement le long d'une droite fixe dans le référentiel d'étude. Les vecteurs vitesse te accélération sont portés par la droite sur laquelle s'effectue le mouvement.

Le système de coordonnées le plus adapté est celui qui privilégie un axe qui sera la droite. On peut donc choisir les coordonnées cartésiennes d'xe (Ox) par exemple.

- Mouvement rectiligne et uniforme : $\vec{v}_{(M/R)} = \vec{v} = v\vec{e}_x = \overrightarrow{Cst}$ et $\vec{a}_{(M/R)} = \vec{0}$
  La loi horaire est $x(t) = v.t + x_0$ et $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x$

- Mouvement rectiligne uniformément varié : $\vec{a}_{(M/R)} = \vec{a} = a\vec{e}_x$ et $\vec{v}_{(M/R)} = \vec{a}t + \vec{v}_0$
  La loi horaire est $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0.t + x_0$ et $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x$

- Si $\vec{a}.\vec{v} >$ le movement est uniformèment accéléré.
- Si $\vec{a}.\vec{v} < 0$ le movement est uniformèment décéléré.

3.3. Mouvement circulaire

Un mouvement est dit circulaire si le point M se déplace sur un cercle fixe d'axe fixe et de centre fixe par rapport à l'observateur (référentiel). Le mouvement est donc plan. On prend comme plan du mouvement le plan cartésien (xoy) ou un plan qui lui est parallèle, et l'axe du cercle est l'axe (Oz). Le cercle est de rayon R.

Les coordonnées adaptées au problème sont les coordonnées cylindriques. Dans la base cylindrique, les équations horaires du mouvement sont :

$$\begin{cases} r = R = constante \\ \theta(t) = (\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}) \\ z = constante \end{cases}$$

- Le vecteur position est $\overrightarrow{OM}(t) = R\vec{e}_r(t)$
- Le vecteur vitesse est $\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
- La vitesse angulaire est $\omega(t) = \dot{\theta}$
- Le vecteur vitesse de rotation est défini par le vecteur $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$. L'axe Oz est l'axe de rotation.

  La vitesse s'exprime alors par : $\vec{v}(t) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

  Remarque : Il est à noter que ω est algébrique, il dépend de l'orientation choisi pour l'angle θ.

- L'accélération s'obtient en dérivant l'expression de la vitesse $\vec{a}(t) = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

- Dans la base de Frenet

$$\vec{v}_{(M/R)} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = v\,\vec{t}$$

$$\vec{a}_{(M/R)} = \ -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta = \dot{v}\,\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

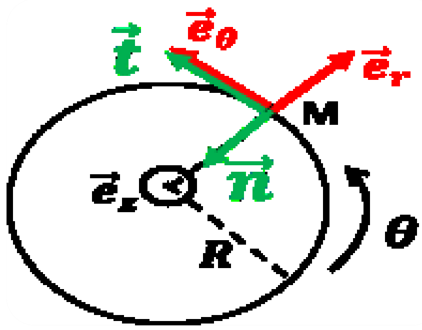
- Mouvement circulaire uniforme :

$$\dot{\theta} = \omega = Cste$$

$$v = R\omega \qquad\qquad \dot{v} = 0$$

$$\vec{a}_{(M/R)} = \ -R\omega^2\vec{e}_r = R\omega^2\vec{n}$$

Le mouvement circulaire uniforme est un <u>mouvement accéléré</u> !



Chapitre 2 : Changement de référentiel ou Relativité Galiléenne

A- Notions de base

Le changement de référentiel est une question qui apparait naturellement dans des situations courantes. Le cadre ici est celui de la relativité galiléenne qui est la base de la mécanique classique. Elle suppose que le repère d'espace est euclidien et que le temps est absolu.
L'objet du chapitre est d'obtenir les lois de composition cinématique de la vitesse et de l'accélération dans deux référentiels qui sont en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre.

1. Notions de référentiels absolu et relatif

   Dans la suite, on introduit les notions de :

   - <u>Référentiel absolu :</u> Le référentiel absolu est le référentiel considéré comme fixe. On le note $\mathcal{R}(O, xyz)$. On lui associe donc un observateur fixe O et un système d'axe $(\vec{e}_x\ ,\ \vec{e}_y\ ,\vec{e}_z)$. Le vecteur position du point M est $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

   - <u>Référentiel relatif</u> : Le référentiel relatif est le référentiel considéré comme mobile. On le note $\mathcal{R}'(O', x'y'z')$. On lui associe donc un observateur fixe O' et un système d'axe $(\vec{e}'_x\ ,\ \vec{e}'_y\ ,\vec{e}'_z)$. Le vecteur position du point M est $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}'_x + y'\vec{e}'_y + z'\vec{e}'_z$.

     Ces dénominations « absolu » et « relatif » n'ont pas de signification intrinsèque. Les deux référentiels, cinématiquement parlant, ont des rôles parfaitement symétriques.

2. Notion du point coïncidant

   On appelle point coïncidant le point P du référentiel mobile qui, à l'instant t, coïncide avec le point M du référentiel fixe (absolu).
   Le point p est fixe dans le référentiel mobile. En revanche, le point M défini dans le référentiel fixe est mobile en général, c'est-à-dire qu'il n'est pas au même endroit pour deux instants distincts.
   Les trajectoires des points P et M se croisent à l'instant t et se séparent juste après. Le point P est entrainé par le référentiel mobile auquel il est lié alors que le point M reste fixe. Le point P coïncide avec un autre point M' à l'instant t+dt.

3. Définitions

   On distingue alors plusieurs vitesses et accélérations :

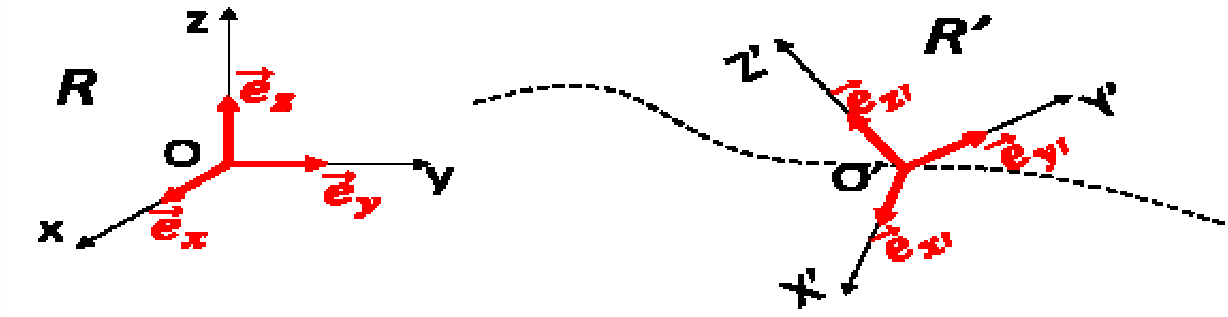
   - La vitesse absolue $\vec{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{M}/_{\boldsymbol{\mathcal{R}}})}$ est la vitesse du point m dans le référentiel absolu $\boldsymbol{\mathcal{R}}$,
   - L'accélération absolue $\vec{\boldsymbol{a}}_{(\boldsymbol{M}/_{\boldsymbol{\mathcal{R}}})}$ est l'accélération du point m dans le référentiel absolu $\boldsymbol{\mathcal{R}}$,
   - La vitesse relative $\vec{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{M}/_{\boldsymbol{\mathcal{R}'}})}$ est la vitesse du point m dans le référentiel relatif $\boldsymbol{\mathcal{R}'}$,
   - L'accélération relative $\vec{\boldsymbol{a}}_{(\boldsymbol{M}/_{\boldsymbol{\mathcal{R}'}})}$ est l'accélération du point m dans le référentiel relatif $\boldsymbol{\mathcal{R}'}$,
   - La vitesse d'entrainement $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{e}_{(\boldsymbol{M})}}$ est la vitesse du point coïncidant P dans le référentiel absolu $\boldsymbol{\mathcal{R}}$,
   - L'accélération d'entrainement $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{e}_{(\boldsymbol{M})}}$ est l'accélération du point coïncidant P dans le référentiel absolu $\boldsymbol{\mathcal{R}}$,

B- Dérivation par changement de référentiel

$R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ le référentiel absolu. $R'(O',\vec{e}_{x'},\vec{e}_{y'},\vec{e}_{z'})$ un référentiel en mouvement par rapport à $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. C'est le repère relatif.

Le mouvement de R' par rapport à R est caractérisé par les deux quantités : $\left[\vec{v}_{(O'/R)}, \vec{\Omega}_{(R'/R)}\right]$.

$\vec{v}_{(O'/R)}$ est la vitesse de O', origine de R', dans le référentiel R.



$\vec{\Omega}_{(R'/R)}$ est le vecteur vitesse de rotation de R' par rapport à R. Ce vecteur vitesse de rotation caractérise le changement de direction, au cours du temps, des axes du repère R' par rapport aux axes du repère R.
Ceci se traduit analytiquement par les relations (que l'on admettra) de dérivation suivantes :

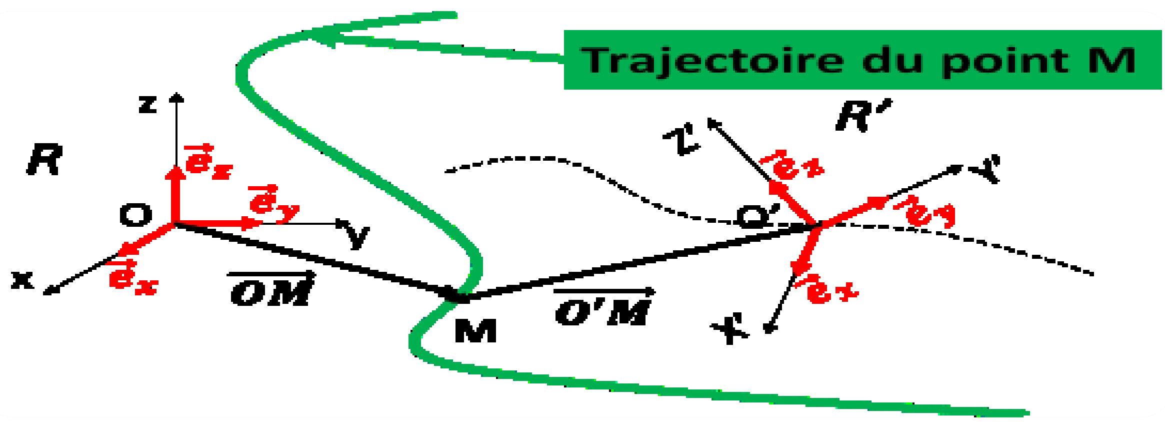
$$\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}/R = \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{e}_{x'} \qquad \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}/R = \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{e}_{y'} \qquad \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}/R = \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{e}_{z'}$$

<u>La relation de dérivation par changement de référentiel :</u>
$\vec{u}(t)$ une fonction vectorielle du temps observée par R et R', alors

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt}/R = \frac{d\vec{u}(t)}{dt}/R' + \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{u}(t)$$

C- Composition des vitesses

Soit un point M en mouvement par rapport aux deux référentiels R et R'.



$\vec{v}_{(M/R)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R$ et $\vec{v}_{(M/R')} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R'$ la vitesse dans R (respectivement dans R').

La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{v}_{(M/R)} \quad = \quad \vec{v}_{(M/R')} \quad + \quad \vec{v}_e(M)$$

Vitesse absolue | Vitesse relative | Vitesse d'entraînement

Avec

$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{(O'/R)} + \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \overrightarrow{O'M}$

Démo : (Voir cours)

$\vec{v}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R = \vec{v}_{O'/R} + \underbrace{\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R'}_{\vec{v}(M/R')} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$

$\vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/R') + \underbrace{\vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{v}_e(M)}$

$\vec{v}_e(M)$ = vitesse d'entraînement = c'est la vitesse du point coïncident c.à.d la vitesse du pt de R' (lié à R') avec lequel coïncide M à l'instant considéré.

$\vec{v}(M/R) = \vec{v}_{(M/R')} + \vec{v}_e(M)$

La relativité galiléenne du mvt.

D- Composition des accélérations

$\vec{a}_{(M/R)} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/R$ et $\vec{a}_{(M/R')} = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}/R'$ l'accélération dans R (respectivement dans R').

La loi de composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{a}_{(M/R)} \quad = \quad \vec{a}_{(M/R')} \quad + \quad \vec{a}_e(M) \quad + \quad \vec{a}_c(M)$$

Accélération absolue | Accélération relative | Accélération d'entraînement | Accélération de Coriolis

Avec

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{(O'/R)} + \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \left[\vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \overrightarrow{O'M} \right] + \frac{d\vec{\Omega}_{(R'/R)}}{dt}/R \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Et

$$\vec{a}_c(M) = 2\, \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{v}_{(M/R')}$$

E- Cas particuliers de mouvement de R' par rapport à R

Les expressions des vitesses et des accélérations précédentes se simplifient pour des mouvements particuliers de R' par rapport à R.

1. Cas où R' est en translation par rapport à R

   Dans ce cas, les axes de R' ne subissent aucune rotation par rapport à R. Les axes de R' gardent des directions fixes par rapport à ceux de R. Soit $\vec{\Omega}_{(R'/R)} = \vec{0}$ et donc les vecteurs unitaires sont constants par rapport à R. Soit : $\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}/R = \vec{0}$, $\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}/R = \vec{0}$ et $\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}/R = \vec{0}$

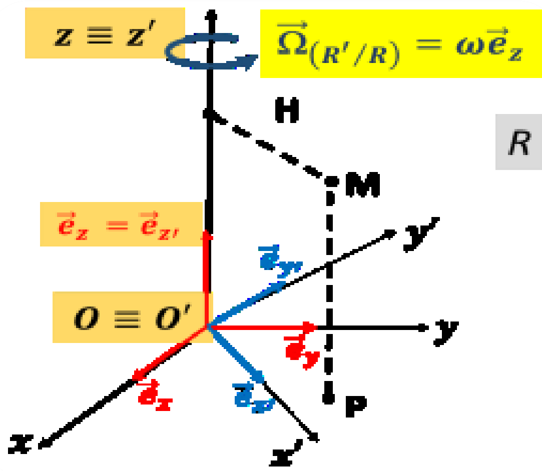
   La vitesse d'entraînement devient : $\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{(O'/R)}$

   La loi de composition des vitesses devient : $\vec{v}_{(M/R)} = \vec{v}_{(M/R')} + \vec{v}_{(O'/R)}$

   Et les accélérations d'entraînement $\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{(O'/R)}$ et de Coriolis $\vec{a}_c(M) = \vec{0}$

   La loi de composition des accélérations devient :

   $\vec{a}_{(M/R)} = \vec{a}_{(M/R')} + \vec{a}_{(O'/R)}$



2. Cas où R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans R

   Dans ce cas un axe de R' est fixe dans R. Tous les points de cet axe sont au repos dans R. On peut alors sans perte de généralité du problème coisir le cas de figure ci-contre où on a choisi O' confondu avec O et (Oz') confondu avec (Oz).

   L'axe (Oz) est l'axe de rotation. Il s'agit ici d'une rotation à un degré .

   H est la projection orthogonale du point M sur l'axe de rotation.

   Soit $\vec{\Omega}_{(R'/R)} = \omega\vec{e}_z = \overrightarrow{Cte}$ rotation uniforme.

   Donc ce choix donne :

   $\vec{v}_{(O'/R)} = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \overrightarrow{O'M} = \omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{HM}$

   $\vec{a}_{(O'/R)} = \vec{0}$ et $\frac{d\vec{\Omega}_{(R'/R)}}{dt}/R = \vec{0}$

   D'où

   $\vec{v}_{(M/R)} = \vec{v}_{(M/R')} + \omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{HM}$

   Et $\vec{a}_{(M/R)} = \vec{a}_{(M/R')} - \omega^2\overrightarrow{HM} + 2\,\omega\vec{e}_z \wedge \vec{v}_{(M/R')}$

Chapitre 3 : Principes de la dynamique Newtonienne

La dynamique est la partie de la mécanique qui étudie les mouvements en tenant compte des causes qui en sont responsables. il est alors judicieux de définir des notions de bases de la mécanique du point matériel avant de donner les principes de la dynamique newtonienne. A cet effet on rappelle l'espace est euclidien (de géométrie plate, la distance reliant deux points est la longueur de la ligne droite qui relie les deux points) homogène et isotrope, et le temps est absolu dont le sens où l'écoulement du temps ne dépend pas de l'observateur (référentiel).

1 Notions fondamentales

Il existe trois notions fondamentales à définir.

1.1 Point matériel

Un point matériel est un modèle d'un objet (corps) dont le repérage ne nécessite que la connaissance de trois coordonnées de l'espace de sa position. les objets réels occupant généralement un certain espace. Cette vision correspond donc à une vision simplifiée d'un objet matériel, quand ce dernier évolue sur une trajectoire dont la longueur caractéristique est nettement grande devant la taille de l'objet lui même. Par exemple quand on s'interesse au mouvement de la terre autour du soleil, on ne tient pas compte de son mouvement de rotation propre (autour de l'axe nord/sud)!L'effet de cette rotation prepre sur son mouvement autour du soleil est très faible, donc on peut le négliger si on regarde le mouvement sur des durées relativement petite!

1.2 Masse inertielle

On peut définir l'inertie mécanique comme la résistance que présente un objet à toute variation de sa vitesse, c'est à dire à toute modification de l'état de son mouvement. Pour un point matériel, la propriété d'inertie est représentée par un scalaire positif appelé Masse inertielle. Il s'agit d'une caractéristique intrinsèque du point matériel. La masse est invariante dans le temps et ne dépend pas du référentiel. Elle possède aussi la propriété d'être additive.
Remarque : On montre que la masse inertielle et la masse gravitationnelle sont identiques. Donc dans ce qui va suivre on parlera de la masse d'un point matériel.

1.3 Force

Dans le cas général, un point matériel (corps) est mécaniquement non isolé, mais il subit des actions mécaniques de la part des autres corps de l'univers. Mais on peut rencontrer des situation où ces actions appliquées aux points matériels sont soit d'effet global nul ou pratiquement nul.
Ces actions mécaniques sont appelées forces. La force implique l'existence d'un acteur (celui qui exerce la force) et un receveur (celui qui subit la force). La force est modélisée par un vecteur, c'est le vecteur force. Son module est l'intensité de la force, sa direction est la droite d'action de la force et son point d'application est le point matériel lui même.
Une force sera donc matérialisée par un vecteur associé à un point d'application. Elle est mesurée au moyen d'un dynamomètre et s'exprime en Newton (symbole N) dans le système international d'unités. On considère deux catégories de forces que peut subir un point matériel:

- Forces d'interaction à distance comme les forces de gravitation, les forces électromagnétiques, les forces nucléaires de cohésion.
- Forces de contact comme les forces de frottement et de tension.

On donnera des exemples de ces forces dans un prochain paragraphe!

2 Les postulats de la dynamique newtonienne

2.1 $1^{ère}$Loi de Newton ou principe d'inertie

Le principe d'inertie repose sur l'existence de d'au moins un référentiel priviligié dit référentiel galiléen. C'est un postulat fondamental!
Les référentiels appartenant à cette classe ptiviligiée nde référentiels, doivent être en mouvement de translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres! L'archétype de ces référentiels est en première approximation le référentiel de Copernic. Le référentiel, de Coperniçc est le référentiel dont l'origine est le centre de masse du système solaire est dont les axes sont dirigés ves trois étoiles (Points objets très lointains!) de la sphères des "fixes". Les étoiles de la sphère céleste qu'on observe la nuit ont cette apparence d'être liées entre elles, elles constituent donc un solide qui peut servir de référentiel.
Enoncé :

- *Il existe au moins un référentiel priviligié, dit référentiel galiléen*
- *dans un réfrentiel galiléen $\Re_g$, un point matériel mécaniquement isolé est soit au repos soit en mouvement rectiligne et uniforme.*

Exemples de référentiels galiléens usuels:
Il n'existe pas de référentiel galiléen rigoureux, mais on en définir quelques un qu'on peut considérer comme galiléens en fonction des caractéristiques du mouvement observé. D'où les référentiels usuels suivants :

1. **Référentiel de Copernic** : $\Re_C$ est un référentiel dont l'origine est le centre de masse du système solaire et qui possède des axes dirigés vers trois étoiles de la sphères des fixes. L'expérience montre que le référentiel de Copernic est un excellent référentiel galiléen (malgré le mouvement du Soleil dans notre galaxie qui elle-même est en mouvement par rapport aux autres galaxies).

2. **Référentiel héliocentrique** : $\Re_H$ est un référentiel dont l'origine est le centre de masse du soleil et qui est en translation par rapport au référentiel de Copernic $\Re_C$. on a donc $\vec{\Omega}_{\Re_H/\Re_C} = \vec{0}$.

3. **Référentiel géocentrique** : $\Re_G$ est un référentiel dont l'origine est le centre de masse de la terre et qui est en translation par rapport au référentiel de Copernic $\Re_C$. on a donc $\vec{\Omega}_{\Re_G/\Re_C} = \vec{0}$. Ce référentiel est utilisé par exemple pour l'étude des mouvements des satellites artificiels.

4. **Référentiel terrestre** : $\Re_T$ est un référentiel dont l'origine est le centre de masse de la terre et qui est en rotation par rapport au référentiel géocentrique $\Re_G$. on a donc $\vec{\Omega}_{\Re_T/\Re_G} = \Omega\overrightarrow{SN}$, où $\overrightarrow{SN}$ est la direction sud/nord géographique.

2.2 $2^{ème}$ Loi de Newton ou principe fondamentale de la dynamique

Si un point matériel n'est pas mécaniquement isolé, c'est-à-dire s'il subit une action non compensée, le principe d'inertie nous dit que sa quantité de mouvement ne peut pas être constante dans le temps. Le principe (ou relation) fondamental(e) de la dynamique nous permet de lier la cause (actions non compensées) à l'effet observé (quantité de mouvement variable).
Enoncé : Dans un référentiel galiléen $\Re_g$ le mouvement d'un point matériel M qui subit un ensemble de forces dont la résultante est $\vec{F}$, obéit au principe fondamental suivant :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}(M/\Re_g)}{dt}/\Re_g$$

L'pplication du pfd sous cette forme n'est pas adapté à tous les problèmes posés. On mettra le résultat sous forme de théorèmes (voir le cours suivant).

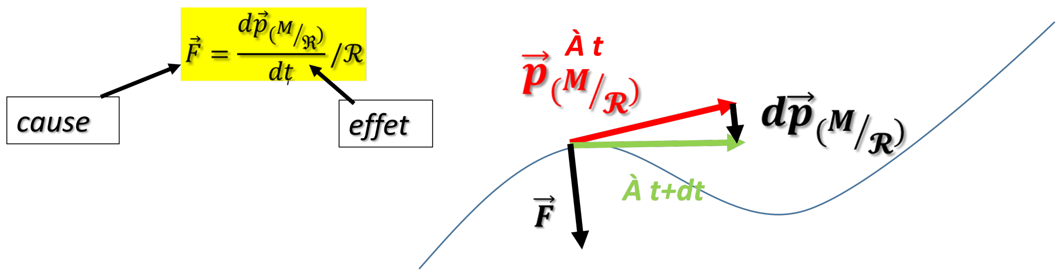


Figure 1: Illustration géométrique du principe fondamental de la dynamique.

2.3 $3^{ème}$ Loi de Newton ou principes des actions réciproques

Soit deux points matériels M_1 et M_2. Si le point M_1 exerce une action sur le point M_2, alors, simultanément, le point M_2 exerce une action (ou réaction) sur le point M_1 et réciproquement. *Enoncé : Lorsque deux points matériels M_1 et M_2 sont en interaction, quel que soit le référentiel d'étude et quel que soit leur mouvement (ou en l'absence de mouvement), l'action du point M_1 sur le système M_2 est exactement opposée à la réaction du système M_2 sur le système M_1.*

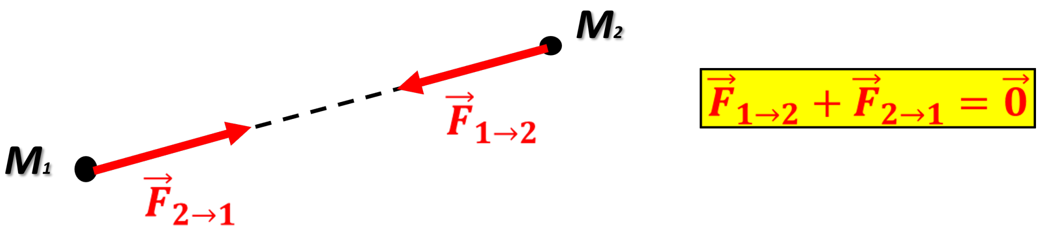


Figure 2: Illustration géométrique du principe fondamental de la dynamique.

3 Les forces

Les forces ou actions sont de deux types : forces à distance et forces de contact.

3.1 Forces d'interaction à distance

Ces interactions s'appliquent entre corps, alors que les corps ne sont pas en contact matériel direct. Comme :

- **Force de gravitation de Newton** L'interaction mutuelle des corps

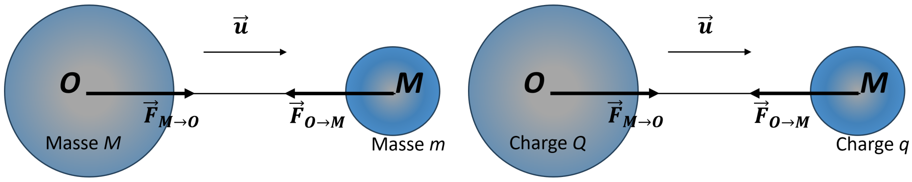


Figure 3: Interaction gravitationnelle et électrostatique.

est exprimée en considérant que les corps sont assimilables à des points matériels et possédant chacun une masse gravitationnelle. Elle s'exprime par la loi universelle de Newton :

$$\overrightarrow{F}_{O\to M} = -\mathcal{G}\frac{mM}{OM^3}\overrightarrow{OM} = -\mathcal{G}\frac{mM}{OM^2}\overrightarrow{u}$$

- **Interaction électrostatique coulombienne** L'interaction coulombienne est l'analogue de l'interaction gravitationnelle pour des charges électriques ponctuelles. La force d'interaction d'une charge Q placée en O sur une charge q placée en M s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_{O\to M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{OM^3}\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{OM^2}\overrightarrow{u}$$

- La force que subit une charge électrique q placée dans un champ électromagnétique $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ et en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v}$ par rapport au référentiel dans lequel le champ électromagnétique est défini, s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

3.2 Forces de contact

3.2.1 Réaction de support

La force que subit un point matériel posé sur un support matériel en provenance du support s'appelle réaction du support. D'après le principe des actions réciproques, l'action du point matériel sur le support est exactement opposé à la réaction du support sur le point.

- Il y a deux types de force de frottement :

- **Le frottement solide:** Le frottement solide se produit quand deux solides sont en contact. Le frottement solide apparaît dès que l'on cherche à faire glisser un corps posé sur un support solide.

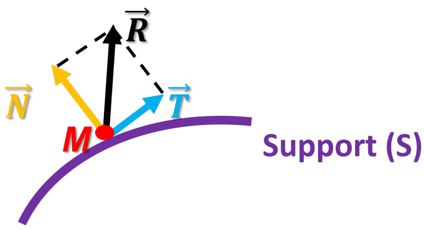


Figure 4: Réactiond'un support solide sur un corps.

Cette réaction est composée, en général, d'une composante $\overrightarrow{N}$ normale à la surface du contact et dirigée du support vers le point matériel. Et d'une composante tangentielle $\overrightarrow{T}$, c'est la force de frottement solide de glissement.
Les lois de Coulomb pour le frottement de glissement sont telles que :

- **S'il y a glissement du point M sur le support (S)**, alors :

  $$\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$$

  où f est le coefficient de frottement, qui dépend de la nature du contact.
- **S'il n'y a pas de glissement du point M sur le support (S)**, alors :

  $$\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$$

  .
- Le contact existe tant que

  $$\|\vec{N}\| > 0$$

  Si le contact cesse

  $$\|\vec{N}\| = 0$$

  .
- En l'absence de frottement $f = 0$, alors $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$ et la réaction est normale $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{N}$; elle reste donc perpendiculaire au support à chaque instant.

4 Equilibre d'un point matériel

Un point matériel est en équilibre dans un référentiel s'il est au repos dans ce référentiel. Donc si :

- La résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle ou son accélération par rapport au référentiel est nulle

- Sa vitesse par rapport au référentiel est nul tout le temps.

. - Si le référentiel $\mathcal{R}$ est galiléen alors $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$ quelque soit l'instant considéré.
- Si le référentiel $\mathcal{R}'$ est non galiléen alors $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_{ie} + \overrightarrow{F}_{ic} = m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{0}$ quelque soit l'instant considéré.

5 Applications

5.1 Chute libre

On considère un point matériel M qui est en mouvement de chute libre par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. On étudiera d'abord le cas d'une chute libre dans le champ de pesanteur terrestre sans frottement de l'air, puis on étudiera l'effet du frottement de l'air. On négligera la poussée d'Archimède. le frottement du point matériel avec l'air est modèlisé par la force de frottement fluide de la forme $\overrightarrow{f} = \lambda\overrightarrow{v}$, où $\lambda > 0$. On cherchera la

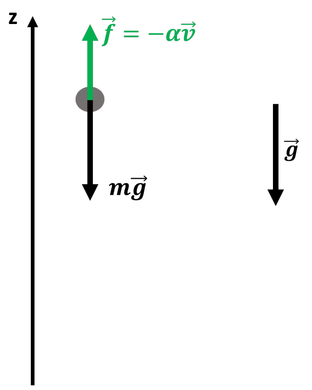


Figure 5: Caption

solution avec les conditions initiales suivantes : à $t = 0$, le point matériel M se trouve en O l'origine du repère d'espace et sa vitesse initiale par rapport au référentiel terrestre, supposé galiléen, est : $\overrightarrow{v}_0 = v_{0x}\overrightarrow{e}_x + v_{0z}\overrightarrow{e}_z$ et $\|\vec{v}_0\| = v_0$. On pose L'angle $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{v}_0, \overrightarrow{e}_x})$

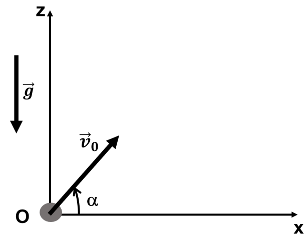


Figure 6

5.1.1 Chute libre : absence de frottement avec lair

1. Montrer que les lois horaires sont :

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 cos\alpha).t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 sin\alpha)t \end{cases}$$

2. Déterminer l'équation et la nature de la trajectoire.

3. Déterminer les coordonnées x_S, z_S du sommet S de la trajectoire. Commenter.

4. Déterminer la portée P, le point de chute sur l'axe (Ox). Calculer l'angle de portée maximale.

5. Quelle est la parabole de sûreté? La définir et la calculer.

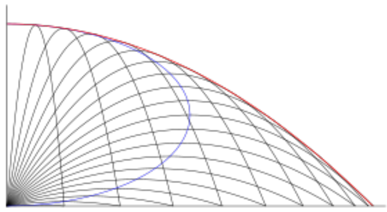


Figure 7: Parabole de sûreté.

5.1.2 Chute libre : existence de frottement avec lair

La loi de force de frottement avec l'air est : $\overrightarrow{f} = \lambda \overrightarrow{v}$, où $\lambda > 0$.

1. Monter que la vitesse est donnée par :

$$\overrightarrow{v} = \begin{cases} v_x(t) = (v_0 cos\alpha).exp(-\frac{t}{\tau}) \\ v_z(t) = -\tau g + (v_0 sin\alpha + \tau g)exp(-\frac{t}{\tau}) \end{cases}$$

2. Montrer que le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) = \tau v_0 cos\alpha[1 - exp(-\frac{t}{\tau})] \\ z(t) = \tau\{-gt + (v_0 sin\alpha + \tau g)[1 - exp(-\frac{t}{\tau})]\} \end{cases}$$

Commenter et donner l'allure de la trajectoire.

5.2 Action d'un ressort linéaire

caractéristiques d'un ressort : Un ressort idéal est un ressort sans masse, parfaitement élastique à spires non jointives.
Il est caractérisé par sa longueur naturelle l_0 et sa constante de raideur k en $N.m^{-1}$. Plus la constante de raideur k d'un ressort est grande, plus le ressort est dur.

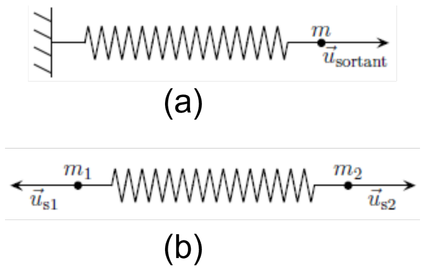


Figure 8: Caption

La force qu'exerce un ressort idéal sur un objet accroché à une de ses extrémité s'exprime sous la forme $\overrightarrow{F} = -k\Delta l \overrightarrow{u}_{sortant}$ où :

- k est la constante de raideur,
- $\Delta l = l - l_0$ est l'allongement du ressort, il est algébrique,
- $\overrightarrow{u}_{sortant}$ est le vecteur unitaire toujours dirigé vers l'extérieur et tangent au ressort au niveau de ce qui subit la force. Il dépend de la position de la masse comme le montre la figure 8. Pour le cas (b), Les forces s'écrivent :
  - La force du ressort exercée sur la masse m_1 est : $\overrightarrow{f}_1 = -k\Delta l \overrightarrow{u}_{s1}$
  - La force du ressort exercée sur la masse m_1 est : $\overrightarrow{f}_2 = -k\Delta l \overrightarrow{u}_{s2}$.