

**R 14**

## Régime transitoire



**14.1****Réponse d'un circuit  $RC$  à un échelon de tension****14.1.1****Cas général**

Considérons un circuit composé d'une maille de charge, qui contient un générateur  $E$ , une résistance  $R$  et un condensateur de capacité  $C$ , et d'une maille de décharge, qui ne contient que  $R$  et  $C$ .

- Un condensateur est constitué de deux surfaces métalliques en regard, appelées armatures, séparées par un isolant ou diélectrique. La tension  $u_{AB}$  aux bornes du condensateur est proportionnelle à la charge  $q_A$  :

$$q_A = C u_{AB} = C u_C$$

En convention récepteur, on représente le condensateur par :

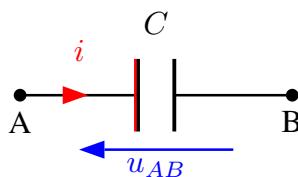


FIGURE 14.1 – Condensateur : conventions

où la flèche de l'intensité pointe vers l'armature  $q_A$ .

**Les unités :**

La constante de proportionnalité  $C$  est la capacité, en farads ( $F$ ),  $q$  s'exprime en coulombs  $C$  et  $u_{AB}$  en volts  $V$ .

- L'intensité  $i$  correspond à un débit de charges  $q$  par unité de temps  $t$  :

$$i = \frac{dq_A}{dt}$$

On en déduit la relation liant intensité et tension :

$$i = C \frac{du_{AB}}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$$

- Si le courant passe dans le sens de la flèche de l'intensité  $i$ , alors  $i$  est positif, et l'armature  $A$  du condensateur acquiert une charge  $q_A$  positive — ou, au minimum, augmente :  $i > 0$  implique  $q_A \nearrow$ . Inversement si le courant passe en sens inverse, alors  $i < 0$  implique  $q_A \searrow$ .

Par application de loi des mailles, on obtient l'équation différentielle de la charge d'un condensateur à travers une résistance :

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$$

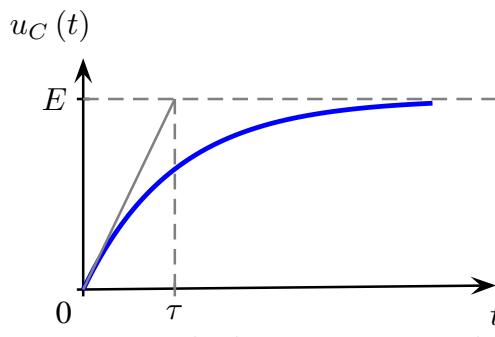
On pose  $\tau$  constante de temps (en secondes) :

$$\tau = RC$$

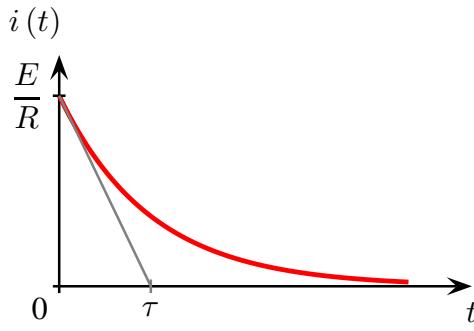
On obtient l'expression de la tension aux bornes du condensateur qui correspond à la charge de celui-ci :

$$u_C(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Réponse en tension : Soumis à un échelon de tension  $0 \rightarrow E$ , la tension du condensateur initialement déchargé est de la forme suivante :

FIGURE 14.2 – Circuit  $RC$  : réponse en tension

Réponse en courant : À partir de la réponse en tension, et de la relation entre l'intensité  $i$  et la tension  $u_{AB}$ , on peut en déduire la forme de la courbe  $i(t)$  :

FIGURE 14.3 – Circuit  $RC$  : réponse en courant

De façon analogue, par application de loi des mailles, on obtient l'équation différentielle de la décharge :

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{\tau} = 0$$

On obtient l'équation de la décharge :

$$u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

### 14.1.2

### Réponse à un échelon de tension

Considérons un système composé d'un G.B.F. (Générateur basse-fréquence), d'une résistance  $R$  et d'un condensateur de capacité  $C$ . Sachant que  $u(t)$  est continue aux bornes d'un condensateur (car l'énergie emmagasinée dans celui-ci est continue), on obtient une succession de charges et de décharges, toutes les demi-périodes du signal échelon.

L'énergie stockée par un condensateur de capacité  $C$ , dont la tension aux bornes est  $u_C$ , vaut :

$$E_C = \frac{1}{2} C u_C^2$$

**Les unités :**

$E_C$  s'exprime en Joules ( $J$ ).



— Remarque —

Un condensateur s'oppose aux variations brusques de la tension à ses bornes. La tension aux bornes d'un condensateur n'est jamais discontinue.

On peut étudier l'influence de  $R$  ou de  $C$ . En effet, la valeur de  $\tau$  est modifiée :

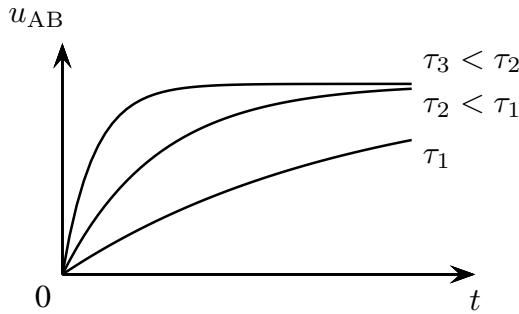


FIGURE 14.4 – Charge d'un condensateur : influence de R et C

On peut aussi étudier l'influence de  $E$ , à constante de temps  $\tau$  identique :

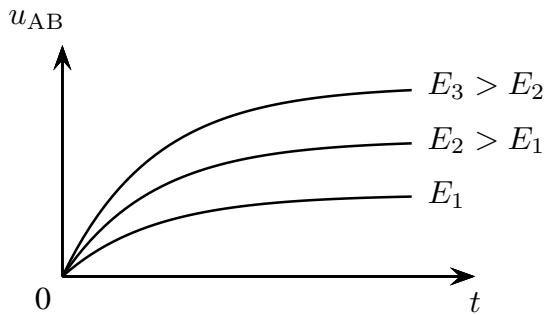


FIGURE 14.5 – Charge d'un condensateur : influence de E

## 14.2 Réponse d'un circuit $RL$ à un échelon de tension

### 14.2.1 Cas général

- La relation entre la tension aux bornes de la bobine et l'intensité qui la traverse s'écrit :

$$u_L = r i + L \frac{di}{dt}$$

avec  $L$  inductance de la bobine en henrys ( $H$ ) et  $r$  résistance interne de la bobine en ohms ( $\Omega$ ). La convention récepteur est respectée sur le schéma suivant :

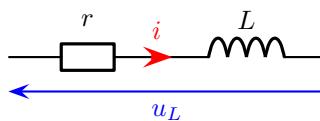


FIGURE 14.6 – Schéma d'une bobine

- Une bobine s'oppose aux variations brusques de l'intensité du courant dans le circuit où elle se trouve. L'intensité du courant dans le circuit ne peut pas subir de discontinuité.

Considérons un circuit composé d'une maille de charge, qui contient un générateur  $E$ , une résistance  $R$  et une bobine d'inductance  $L$ , ainsi qu'une maille de décharge, qui ne contient que  $L$  et  $R$ . Par application de loi des mailles, on obtient l'équation différentielle de la charge :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E}{L}$$

En posant la constante de temps  $\tau$  (en secondes) :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

D'où l'expression de l'intensité au cours de la charge :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

La solution de cette équation a une courbe de la forme suivante, lors de l'établissement du courant :

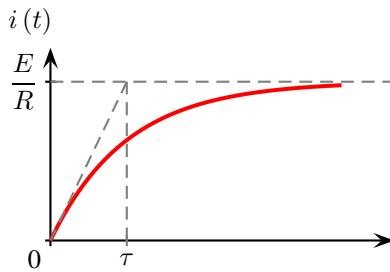


FIGURE 14.7 – Circuit  $RL$  : réponse en courant

À partir de la réponse en courant précédente, et de la relation entre la tension  $u_L$  et l'intensité  $i$ , on peut déduire la forme de la réponse en tension  $u_L$  :

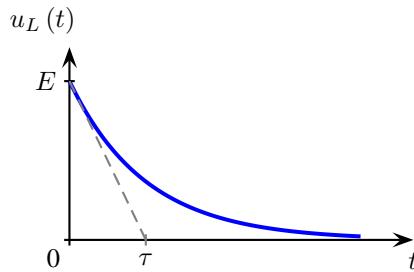


FIGURE 14.8 – Circuit  $RL$  : Réponse en tension

Une bobine d'inductance  $L$  traversée par un courant d'intensité  $i$  emmagasine l'énergie :

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2$$

#### Les unités :

$E_L$  l'énergie emmagasinée s'exprime en joules ( $J$ ),  $L$  l'inductance en henrys ( $H$ ) et  $i$  l'intensité du courant en ampères ( $A$ ).

De façon analogue, par application de loi des mailles, on obtient l'équation différentielle de la décharge :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = 0$$

D'où l'expression de l'intensité pendant la décharge :

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

#### 14.2.2

#### Réponse à un échelon de tension

Considérons un système composé d'un *G.B.F.*, d'une résistance  $R$  et d'un solénoïde d'inductance  $L$ . Sachant que  $i(t)$  est continue au borne d'un solénoïde (car son énergie est continue), on obtient une succession de charges et de décharges, toutes les demi-périodes du signal échelon.

**14.3****Réponse d'un circuit RLC à un échelon de tension**

Considérons un circuit composé d'une maille de charge, qui contient un générateur  $E$ , une résistance  $R$ , un solénoïde d'inductance  $L$  et un condensateur de capacité  $C$ , ainsi que d'une maille de décharge, qui ne contient que  $L$ ,  $R$  et  $C$ .

En posant la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

On obtient :

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E$$

ou encore :

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E$$

**14.3.1****Différents régimes d'évolution**

On cherche des solutions du type :

$$u_C(t) = A e^{rt}$$

où  $r$  est une constante. De ce fait,

$$\frac{du_C(t)}{dt} = A r e^{rt} = r u_C(t)$$

et

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} = A r^2 e^{rt} = r^2 u_C(t)$$

On obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

ou encore :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

Soit  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique de cette équation :

$$\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right) = 4 (\lambda^2 - \omega_0^2)$$

Les régimes d'évolutions dépendent du signe de  $\Delta$  :

- $\Delta = 0$ ,  $Q_c = \frac{1}{2}$  : régime critique avec  $\lambda = \omega_0$ .
- $\Delta > 0$ ,  $Q < Q_c$  : Régime apériodique avec  $\lambda > \omega_0$ .
- $\Delta < 0$ ,  $Q > Q_c$  : Régime pseudo-périodique avec  $\lambda < \omega_0$ .

### 14.3.1.1 Régime pseudo-périodique

On peut écrire  $\Delta$  sous la forme :

$$\Delta = 4j^2 (\omega_0^2 - \lambda^2)$$

ou encore :

$$\Delta = j^2 \omega_0^2 \left( 4 - \frac{1}{Q^2} \right)$$

Les solutions sont donc du type :

$$u_C(t) = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = F e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) = G e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \psi)$$

avec :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

ou encore :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$\omega$  est appelée pseudo-pulsation.

Dans cette étude du régime pseudo-périodique, on introduit le décrément logarithmique, défini par :

$$\delta = \ln \left( \frac{u_C(t)}{u_C(t+T)} \right)$$

On obtient, avec  $u_C(t+T) = e^{-\lambda T} u_C(t)$  :

$$\delta = \lambda T = \frac{\omega_0 T}{2Q}$$

et, sur  $n$  périodes :

$$\delta_n = n \delta$$



#### — Remarque —

Si le régime est très peu amorti, la période est quasiment égale à la période propre :

$$T \simeq T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \text{ et } Q = \frac{\pi}{Q} = \frac{2\pi\lambda}{\omega_0}.$$

### 14.3.1.2 Régime apériodique

On a alors :

$$u_C(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

ou encore :

$$u_C(t) = e^{-\lambda t} (F e^{\Delta t} + G e^{-\Delta t})$$

### 14.3.1.3 Régime critique

On a alors :

$$u_C(t) = e^{-\lambda t} (A + B t)$$