Le 15/03/2020

Résumé de cours Algébre MP*

A.CHABCHI

Contents

Abstract

Pour que ce résumé soit plus efficace, il est illustré par de nombreux exemples d'applications, ces exemples utilisent toutes les notions du programme, en cas de difficulté ils peuvent-être laissé pour une seconde lecture. Bon courage !

I. Algèbre linéaire

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}-ev$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

A. Espace vectoriel - Application linéaire

En dimension finie, il faut noter l'apport considérable du calcul matriciel. Ainsi un problème linéaire présente deux aspects : L'aspect vectoriel et l'aspect matriciel, selon les cas, on choisit l'un ces aspect, mais en général n'hésitez de passer de l'un des modes à l'autre. Voir les nombreux exemples de ce résumé.

1. Egalité entre deux s-ev en dimension finie :

Caractérisation : F un s-ev de E ssi $F \neq \varnothing$ et pour tout $(x, y) \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda x + y) \in F$.

Proposition 1 *Deux s-ev sont égaux si et seulement si ils ont la même dimension et l'un est contenu dans l'autre.*

Exemple 2 *En dimension finie, soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *, montrer que* $\ker(u) = \ker\left(u^2\right)$ *équivalent à* $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)$

Réponse : On sait que $\ker(u) \subset \ker\left(u^2\right)$ *et* $\operatorname{Im}\left(u^2\right) \subset \operatorname{Im}(u)$, *la formule du rang assure que* $\dim\ker(u) = \dim\ker\left(u^2\right)$ *ssi* $\dim\operatorname{Im}(u) = \dim\operatorname{Im}\left(u^2\right)$ *d'où l'équivalence cherchée.*

2. Base en dimension finie :

Définition 3 *Base = famille libre et génératrice*

Proposition 4 *Si* $\dim E = n$, *Une famille ayant* n *élément est base de* E *ssi elle est libre ssi elle est génératrice.*

Exemple 5 *Soit* $(P_0, ..., P_n)$ *une famille de polynômes échelonnés :* $\deg(P_k) = k$. *Montrer que c'est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$

réponse : La matrice de $(P_0, ..., P_n)$ *dans la base canonique* $(1, X, ..., X^n)$ *étant triangulaire supérieure dont aucun zéro sur la diagonale, donc la famille est une base.*

Exemple 6 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme nilpotent d'indice* $p = n = \dim(E)$. *Montrer qu'il existe* $e \in E$ *tel que* $B = \left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right)$ *soit une base de* E.

Réponse : On choisit $e \in E$ *tel que* $u^{n-1}(e) \neq 0$, *alors* B *est libre de cardinal* $n = \dim(E)$, *c'est donc une base de* E.

3. Somme directe :

Définition 7 *Soit* E_i *des s-ev de* E. *La somme* $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est directe si tout élément* $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ *s'écrit* ***de manière unique*** *sous la forme* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$

avec $(x_1., , , , x_n) \in E_1 \times .... \times E_n$. *Une telle somme sera notée* $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Caratérisation : La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe $\Longleftrightarrow$

$\forall\ (x_1.,,,,x_n) \in E_1 \times .... \times E_n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0\ \Longrightarrow x_1 = ... = x_n = 0\right)$

En particulier pour $n = 2$, la somme $E_1 + E_2$ est directe ssi $E_1 \cap E_2 = \{\ 0\ \}$.

Caractérisation en dimension finie :

La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe $\Longleftrightarrow$ $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$.

Exemple 8 *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur : $p^2 = p$, avec dimension E finie, montrer que $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont supplémentaire.*

Réponse : Tout vecteur s'écrit : $x = (x - p(x)) + p(x)$ avec $(x - p(x)) \in \ker(p)$ et $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$. De plus leur intersection est réduite au vecteur nul. D'où le résultat.

4. Détermination d'une application linéaire :

Image d'une base : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application linéaire u de E vers F vérifiant :

$\forall\ i \in I,\ u(e_i) = f_i$. Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par les images des éléments d'une base.

Ainsi deux applications linéaires sont égales sur E si et seulement si elles coïncident sur les éléments d'une base de E.

Exemple 9 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique : Càd l'espace E admet une base de la forme $B = \left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right)$. Montrer qu'un endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ commute avec u est entièrement déterminé par $v(e)$. (Raisonner sur les éléments de la base B). En déduire que v est un polynôme en u : Pour cela poser $v(e) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(e)$ et montrer que $v = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k$ en remarquant que ces deux endomorphismes coincident sur la base B.*

Par restriction : On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ et on se donne $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Alors il existe une unique application linéaire u de E vers F vérifiant : $\forall\ i \in \{1, ..., n\}$, u_i soit la restriction de u sur E_i. Autrement dit, une application linéaire est entierement déterminée par ses restriction sur les E_i. Ainsi deux applications linéaires sont égales sur E si et seulement si leurs restrictions sur tout les E_i sont égales.

Exemple 10 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et $v \in \mathcal{L}(E)$ un autre endomorphisme. Montrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si v laisse stable tout les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ de u. Pour le sens indirect, puisque u est diagonalisable on a $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$, puis montrer facilement que $u \circ v$ et $v \circ u$ coincident sur les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ de u.*

5. Formule du rang :

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où dimension de E finie, alors $\boxed{\dim E = rg(u) + \dim\ker(u)}$

Conséquence : Si $\dim E = \dim F$ alors on a :

$$\boxed{u \text{ est inversible} \Longleftrightarrow u \text{ est injective} \Longleftrightarrow u \text{ est surjective}}$$

Exemple 11 *En dimension n, si $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $rg\,(u - \lambda Id_E) = p \geq 1$, alors λ est valeur propre de u de multiplicité $m_\lambda \geq n - p$: en effet selon la formule du rang* $\dim E_\lambda(u) = \dim\ker(u - \lambda Id_E) = n - rg\,(u - \lambda Id_E) = n - p$, *et on sait que pour toute valeur propre* $\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$.

Exemple 12 *En dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim\ker(u) = m$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dim\ker\left(u^{k+1}\right) - \dim\ker\left(u^k\right) \leq m$.*

Réponse : On montrer facilement que $u\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right) \subset \ker\left(u^k\right)$, soit $v : \ker\left(u^{k+1}\right) \longrightarrow \ker\left(u^k\right)$ la restriction de u sur $ker\left(u^{k+1}\right)$, on sait que $\ker(v) = \ker\left(u^{k+1}\right) \cap \ker(u) = \ker(u)$ par croissance de la suite des noyaux itérés. Par application de la formule du rang à v, on obtient : $\dim\ker\left(u^{k+1}\right) = \dim\ker(u) + rg\,(v) \leq m + \dim\ker\left(u^k\right)$ d'où le résultat. (Utiliser surtout pour les endomorphismes nilpotents)

Exemple 13 *Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle, montrer que le rang de A est pair.*

Réponse : On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, et soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canonique associé à A. on a : $u^* = -u$, où u^* désigne l'adjoint de u. On sait que $\operatorname{Im}(u)$ est stable par u, soit alors v l'endomophisme induit par u sur l'image. D'une part on a $\ker v = \ker u \cap \operatorname{Im} u = \ker u^* \cap \operatorname{Im} u = (\operatorname{Im} u)^\perp \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$, ainsi v injective et par dimension bijective. D'autre part $v^* = -v$ donc $\det(v^*) = \det(v) = (-1)^{rg(u)}\det(v)$, d'où $(-1)^{rg(u)} = 1$, càd le rang de u est pair.

Exemple 14 *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, montrer que A et B ont un vecteur propre commun.*

Réponse : Soit u et v les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ associés respectivement à A et B. on a $\mathcal{X}_u$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, donc u admet une valeur propre complexe λ. Puisque $uv = vu$, alors $E_\lambda(u)$ est stable par v. Soit w l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$, puisqu'on travaille dans $\mathbb{C}$, alors w admet un vecteur propre $x = (x_1, ..., x_n)$. Ainsi x est vecteur propre commun à u (car $x \in E_\lambda(u)$) et v. Par suite $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre commun à A et B.

6. Hyperplan :

Définition 15 *C'est un s-ev de codimension 1 : cad admet un supplémentaire de dimension 1.*

$$\boxed{\textbf{C'est aussi le noyau d'une forme linéaire non nulle}}.$$

Exemple 16 $H = \left\{f \in C^0([-1,1], \mathbb{R}) \ / \ f(0) = 0\right\}$ *est un hyperplan de* $C^0([-1,1], \mathbb{R})$.

Exemple 17 $H = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ Tr\,(AM) = 0\}$ *est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où A une matrice fixé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Proposition : Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau ssi elles sont liées. (proportionnelles)

7. Dualité en dimension finie : (N'est plus au programme)

$\dim E = n$ et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace des formes linéaires sur E.

1. **Base duale et préduale : (N'est plus au programme)**

   (a) Si $B = (e_1, ..., e_n)$ base de E alors $\exists\, !B^* = (\phi_1, ..., \phi_n)$ base de E^* telle que : $\boxed{\forall\, i, j \in \{1, ..., n\}\,;\ \phi_i(e_j) = \delta_{ij}}$

   (b) Si $C^* = (\phi_1, ..., \phi_n)$ base de E^* alors $\exists\, !C = (e_1, ..., e_n)$ base de E telle que : $\boxed{\forall\, i, j \in \{1, ..., n\}\,;\ \phi_i(e_j) = \delta_{ij}}$.

   Dans ce cas, B^* dite base duale de B et C dite base antéduale de C^*.

2. **Applications attachées :** La dualité peut-être pratique pour montrer qu'une famille de formes linéaires ou de vecteurs est une base :

   (a) $B = (e_1, ..., e_n)$ base de $E \iff u : \begin{array}{c} E^* \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \phi \longmapsto (\phi(e_1), ...\phi(e_n)) \end{array}$ est un isomorphisme.
   ($c\grave{a}d$ $\ker \phi = \{0\}$: la seule forme linéaire qui annule $(e_1, ..., e_n)$ est la forme NULLE)

   (b) $C = (\phi_1, ..., \phi_n)$ base de $E^* \iff u : \begin{array}{c} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto (\phi_1(x), ...\phi_n(x)) \end{array}$ est un isomorphisme.
   ($c\grave{a}d$ $\ker u = \{0\}$: le seule vecteur qui est annulé par $(\phi_1, ..., \phi_n)$ est le vecteur NUL)

Exemple 18 *Soit $x_0, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts, soit ϕ_i et ψ_i les formes linéaires définies sur $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ par $\phi_i(P) = P(x_i)$ et $\psi_i(P) = P'(x_i)$. Montrer que la famille $C = (\phi_0, ..., \phi_n, \psi_0, ..., \psi_n)$ est une base du dual $(\mathbb{R}_{2n+1}[X])^*$.*

Réponse : $u : \begin{array}{c} \mathbb{R}_{2n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+2} \\ P \longmapsto (\phi_0(P), ...\phi_n(P), \psi_0(P), ..., \psi_n(P)) \end{array}$, u est clairement linéaire, si $P \in \ker(u)$ alors P admet les x_i comme racines au moins double, donc P admet $(2n+2)$ racines, or $\deg(P) \leq 2n+1$, ainsi $P = 0$. u est alors injective, par dimension c'est un isomorphisme, ainsi la famille C est une base de $(\mathbb{R}_{2n+1}[X])^*$.

Multiplicateurs de Lagrange : Soit $\phi_1, ..., \phi_p, \phi \in E^*$ des formes linéaires sur E, alors $\bigcap_{i=1}^{p} \ker \phi_i \subset \ker \phi \iff \phi \in\ vect(\phi_1, ..., \phi_p)$

B. Matrices :

1. Tout d'abord les ABC :

- $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$, avec la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} E_{ij}$, $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$
- il faut maîtriser les opérations algébriques sur les matrices, surtout le produit :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \text{ (Produit de la ième ligne } A \text{ par la jième colonne de } B)$$

- If faut savoir former la matrice d'une application linéaire dans des bases données. La kième colonne est formé des coordonnée de ....
- Le rang d'une matrice : $rg\left(A\right) = rg\left(C_1, ..., C_n\right) = rg\left(L_1, ..., L_n\right) = rg\left({}^tA\right)$, où les C_i les colonnes de A, les L_i ses lignes.
- Les produits de matrices définies par blocs,...ETC
- $\dim \mathcal{S}_n\left(\mathbb{R}\right) = \dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$ (matrices symétriques) et $\dim \mathcal{A}_n\left(\mathbb{R}\right) = \dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$(anti-symétriques)

Exemple 19 *Déterminer les matrices $M = \left(m_{ij}\right) \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ qui commutent avec toute les matrices $N \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$.*

Réponse : Il suffit que $ME_{ij} = E_{ij}M$ pour tout $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$, donc $\sum_{k=1}^{n} m_{ki}E_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m_{jk}E_{ik}$, donc pour $\left\{\begin{array}{c} m_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j \\ m_{ii} = m_{jj} \text{ pour tout } (i,j) \end{array}\right.$

Donc $M = \lambda I_n$ est matrice scalaire (une homothétie). La réciproque de ce fait est triviale.

2. Changement de base et de coordonnées

Soit $u \in \mathcal{L}\left(E\right)$, avec $\dim E = n$, soit $B = \left(e_1, ..., e_n\right)$ et $B' = \left(e'_1, ..., e'_n\right)$ deux bases de E et P la matrice de passage de B à B', soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{k=1}^{n} x'_k e'_k \in E$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, alors on a :

$$X = PX' \text{ et } Mat_{B'}\left(u\right) = P^{-1} Mat_B\left(u\right) P$$

3. Matrices équivalentes :

Définition 20 *M et $N \in \mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{K}\right)$ équivalentes s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n\left(\mathbb{K}\right)$ et $Q \in \mathcal{GL}_p\left(\mathbb{K}\right)$ inversibles telles que : $M = PNQ$*

Caractérisation : M et $N \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ équivalentes ssi elles ont le même rang ssi elles représentent la même application linéaire dans des bases bien choisies. On a alors les résultats suivants :

- $rg\left(M\right) = r$ si et seulement si M est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Le rang se conserve par produit à gauche ou à droite par une matrice inversible.
- Une matrice A est de rang r lorsqu'elle admet une sous matrice extraite de taille r inversible et toute les matrices extraites de taille $\geq r+1$ sont non inversibles
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$, $rg\left(A\right) = 1 \Longleftrightarrow A = X^tY$, avec $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}\left(\mathbb{K}\right)$, $X, Y \neq 0$

4. Matrices semblables :

Définition 21 *M et N semblable s' il existe P inversible telle que :* $M = P^{-1}NP$

Invariant de similitude: Deux matrices semblables ont le même rang, la même trace, le même det, le même spectre, le même polynôme caractéristique. Ainsi le det, la trace, le rang, le spectre et le polynôme caractéristique sont appelès des **invariants de similitude**.

Exercice 22 *Classique : Pour $n \leq 3$, $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables* $\Longleftrightarrow \Pi_M = \Pi_N$ *et $\mathcal{X}_M = \mathcal{X}_N$. Retour faux pour $n \geq 4$.*

Caractérisation : M et N semblables ssi elles elles représentent le même endomorphisme dans des bases bien choisies.

Exemple 23 *Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice 3 : $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$, Montrer que est semblable à la réduite de Jordan* $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Réponse : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ l'endomophisme canonique associé à M, on a $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$. Soit $e \in \mathbb{K}^3$ tel que $u^2(e) \neq 0$. On vérifie simplement que $B = (u^2(e), u(e), e)$ est famille libre de 3 élements, donc base de $\mathbb{K}^3$, et $Mat_B(u) = T$. Ainsi M et T sont semblables puisqu'elles représentent le même endomorphisme.

Exercice 24 *(classique) : Deux martices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le sont aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ecrire $P = P_1 + iP_2$ et chercher une matrice de passage réelle de la forme $P_1 + tP_2$.*

5. Trace :

C'est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vérifiant :

$$Tr(MN) = Tr(NM), \quad Tr\left(P^{-1}MP\right) = Tr(M), \quad Tr\left({}^t\bar{M}M\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|^2$$

6. Trace d'endomorphisme :

Définition 25 *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n \geq 1$, alors $Tr(u) = Tr(mat_B(u))$ où B est une base quelconque de E.*

Calcul de la trace : Si $B = (e_1, ..., e_n)$ base de E,

alors $\boxed{Tr(u) = \sum_{i=1}^{n} (\text{composante de } u(e_i) \text{ sur } e_i)}$, la trace de u est la somme des composantes des $u(e_i)$ sur e_i.

Exemple 26 ***Application :*** *On considère l'endomorphisme* $u : \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \longmapsto AM \end{array} \right.$, *calculer $Tr(u)$.*

Réponse : Soit $B = (E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $u(E_{ij}) = AE_{ij} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_{pq}E_{pq}E_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{pi}E_{pj}$, donc la composante de $u(E_{ij})$ sur E_{ij} est a_{ii}. Ainsi $Tr(u) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ii} = nTr(A)$.

7. Déterminant en dimension finie :

Définition 27 *Si $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors* $\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}}$, *où S_n désigne le groupe symétrique et $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.*

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u) = \det(Mat_B(u))$, avec B base quelconque de E.

- C'est une formule théorique, s'utilise rarement. mais reste utile par exemple montrer que pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
  - Le polynôme caractéristique $\mathcal{X}_M(X) = (-1)^n \det(M - XI_n) = X^n - tr(M) X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(M)$.
  - $\det(I_n + xM) = 1 + xTr(M) + O(x^2)$ (Oral Mines)
- **Développement de det**(A) selon sa kième colonne : $\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}\Delta_{ik}}$, où Δ_{ik} désigne le déterminant de la matrice de taille $(n-1)$ obtenue à partir de A en éliminant la ième ligne et la kième colonne. Δ_{ik} **le mineur d'ordre** (i,k).Pratique pour calculer des valeurs propres à partir du polynôme caractéristique.
- **Développement de det**(A) selon sa kième ligne : $\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ki}\Delta_{ki}}$.
- Le det est une fonction $n-$linéaire alternée en fonctions des colonnes (ou des lignes) de A.
-
  - Ne change pas en ajoutant à une colonne (resp une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp lignes) de A.
  - $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, où n la taille de A.
- $\det({}^tA) = \det(A)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- A inversible $\Longleftrightarrow$ $\det(A) = 0$, dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{{}^t com(A)}{\det(A)}$, avec $com(A) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}\right)$, avec Δ_{ij} le mineur d'ordre (i,j).

Exemple 28 *Montrer que $A \longmapsto A^{-1}$ est de classe C^∞ sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.*

Réponse : Soit $A = (a_{ij})$, les coefficients de A^{-1} sont des fonctions rationnelles en les a_{ij}, avec un dénominateur valent det(A) ne s'annulant jamais, donc de classe C^∞ sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 29 *Montrer que le groupe des matrices inversibles $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

Réponse : $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert car image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ par la fonction det qui est continue.

Dense car toute matrice $M = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(M - \dfrac{1}{p}I_n\right)$, avec $\left(M - \dfrac{1}{p}I_n\right) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ pour $p \geq N$ car le spectre de M est FINI.

Exemple 30 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, Montrer que le polynôme caractéristique $t \longmapsto \mathcal{X}_M(t)$ est dérivable en 0 et que $\mathcal{X}'_M(0) = (-1)^{n+1} Tr(com(M))$, où $com(M)$ désigne la comatrice de M.*

Réponse : On dérive un déterminant colonne par colonne.

- **Déterminants particuliers :**
  - Si $A = (a_{ij})$ est **triangulaire,** alors $\det(A) = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Valable en particulier pour A diagonale.
  - Matrice triangulaire par blocs : $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$. Se généralise pour plusieurs blocs.
  - Déterminant de Vandermonde : $V(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = \begin{vmatrix} 1 & & . & . & 1 \\ \lambda_1 & . & . & . & \lambda_p \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & . & . & . & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix} = \prod\limits_{1\leq i<j\leq p}(\lambda_j - \lambda_i)$. Ainsi la matrice Vandermonde est inversible ssi les λ_i sont deux à deux distincts.

Exemple 31 *En dimension n, soit u un endomophisme ayant n valeurs propres, montrer que u est cyclique : càd l'espace E admet une base de la forme $\left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right)$.*

Réponse : On diagonalise u dans base $B = (e_1, ..., e_n)$ de vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, on écrit $e = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $\det_B\left(\left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right)\right) = (x_1 ... x_n)\, V(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)$: Il suffit alors de prendre tout les x_i non nuls.

Exemple 32 *Montrer que toute matrice diagonale $D = diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ est un polynôme de degré $\leq n-1$, en la matrice diagonale $\Delta = diag(1, ..., n)$.*

Réponse : On écrit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_i X^i$, on obtient le système linéaire :

$P(1) = \alpha_1, P(2) = \alpha_2, ..., P(n) = \alpha_n$; matriciellement cela s'ècrit

$\begin{pmatrix} 1^0 & & . & . & 1^{n-1} \\ 2^0 & . & . & . & 2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ n^0 & . & . & . & n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \\ \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \\ \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, *c'est un système de Cramer car sa matrice est du Vandemonde avec des scalaires deux à deux distincts. D'où le résultat.*

II. Réduction en dimension finie

A. Sous espace stable

- F est dit stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$, alors u induit un endormorphisme u_F sur F.
- Si $uv = vu$ alors $\ker(u - \lambda Id_E)$ est stable par v. En particulier $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont toujours stables par u.
- $\ker(u_F) = F \cap \ker(u)$, si de plus $F \cap \ker(u) = \{0\}$, alors u_F est injective.
- Une droite $\Delta = vect(e)$ est stable si et seulement si e est un vecteur propre de u.
- Si $E = F \oplus G$ et $B = (B_F, B_G)$ une base de E adaptée à cette somme, alors F et G sont stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ diagonale par blocs.

B. Polynôme d'endomorphisme ou de matrice

1. Les ABC sur les polynômes

- Un polynôme P de degré $\leq n$ est NUL si et seulement si il admet plus que $(n+1)$ racines. (Comptées avec leur multiplicité)
- $$\begin{aligned} & \alpha \text{ racine de multiplicité } m \text{ d'un polynôme P} \\ \Longleftrightarrow \quad & P(\alpha) = P'(\alpha) = ... = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & P(X) = (X-\alpha)^m Q(X) \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0 \end{aligned}$$
- Tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux du premier degré.
- Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux du premier ordre ou du second ordre avec un descriminent strictement négatif.
- **Bezout :** Deux polynômes P et Q sont premiers entre eux si et seulement si il existe U et $V \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $PU + QV = 1$. Très utilisé en réduction.
- **Relations entre coefficients et racines :** On suppose $P(X) = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ scindé, alors
  - $\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_k} = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$.
  - En particulier $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ $(k=1)$ et $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$. $(k=n)$.

Exemple 33 ***Polynôme d'intepolation de Lagrange :*** *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *une fonction et* $\alpha_0, ..., \alpha_n \in I$ ***deux à deux distincts,*** *montrer qu'il existe un unique polynôme* $P \in \mathbb{K}_n[X]$ *vérifiant* $P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$ *pour tout* $i \in \{0, ..., n\}$.

Réponse : On pose $L_i(X) = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \left(\dfrac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}\right)$, *alors* $L_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$, *donc il suffit de poser* $P(X) = \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i) L_i(X)$ *: polynôme d'interpolation de Lagrange.*

L'unicité : Si un autre polynôme Q *vérifie les mêmes équations, alors* $P - Q$ *de degré* $\leq n$ *et admet* $(n+1)$ *racines, donc il est nul.*

Définition 34 $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, *alors* $P(u) = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$ *avec la convention* $u^0 = Id_E$.

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, *alors* $P(M) = \sum_{k=0}^{m} a_k M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec la convention* $M^0 = I_n$.

On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u)\ /\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ la $\mathbb{K}-$algèbre des polynômes en u. de même pour $\mathbb{K}[M] = \{P(M)\ /\ P \in \mathbb{K}[X]\}$

Proposition : On a : $(PQ)(u) = P(u) o Q(u) = Q(u) o P(u)$. **En particulier les polynômes en** u **commutent entre eux**

Attention $P(u) o Q(u)(x) = P(u)(Q(u)(x))$ mais non pas $(P(u))(x)(Q(u)(x))$ qui n'a pas de sens : produit de deux vecteurs ! Eviter aussi les écritures $P(u(x))$ qui n'ont pas de sens : polynôme appliqué à un vecteur, ce qui est juste c'est $(P(u))(x)$: un endomorphisme appliqué à un vecteur.

2. Décomposition des noyaux :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 P_2 ... P_m$ où $P_1, ..., P_m$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, **premiers entre eux deux à deux,** alors : $\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker P_i(u)$

Si de plus $P(u) = 0$, on aura : $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker P_i(u)$ .C'est le cas où $P = \mathcal{X}_u$ ou $P = \Pi_u$.

Exemple 35 *Pour une symértie* $s^2 = Id_E$ *donc* $(s - Id)(s + Id) = 0$, *on a* $E = \ker(s - id) \oplus \ker(s + Id)$, *de même pour un projecteur* $E = \ker(p) \oplus \ker(p - Id)$.

3. Polynôme annulateurs et polynôme minimal

- I_u l'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal de $\mathbb{K}$, lorsqu'il est non nul il est engendré un unique polynôme unitaire Π_u dit le polynôme minimal de u.
- En dimension finie Π_u existe toujours.
- $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \Pi_u$ et $\left(Id_E, u, ..., u^{\deg \Pi_u - 1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
- $P \in \mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme $P(u)$ est inversible si et seulement si $\operatorname{pgcd}(P, \Pi_u) = 1$. Dans ce cas son inverse $(P(u))^{-1}$ est aussi un polynôme en u.

Exemple 36 *: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice p, montrer que $A^2 - A + 2I_n$ est inversible et que son inverse est un polynôme de degré $\leq p-1$.*

Réponse : On a $\Pi_A = X^p$, donc pgcd($\Pi_A, X^2 - X + 2) = 1$, donc $A^2 - A + 2I_n$ inversible et $\left(A^2 - A + 2I_n\right)^{-1} \in \mathbb{K}[A] = vect\left(I_n, A, ..., A^{p-1}\right)$.

C. Eléments propres :

Définition 37 $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda \in Sp(u)$ *ssi* ($E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id_E) \neq \{0\}$) *càd* ($(u - \lambda Id_E)$ *non injective*) *càd* ($\exists\, x \in E,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0},\ u(x) = \lambda x$).
De même $\lambda \in Sp(M)$ *ssi* $\exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1},\ \mathbf{X} \neq \mathbf{0},\ MX = \lambda X$.

- En dimension finie, $\lambda \in Sp(u) \iff (u - \lambda Id_E)$ non inversible $\iff \det(u - \lambda Id_E) = 0 \iff rg(u - \lambda Id) < \dim E$.
- La somme $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ est toujours directe : Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est donc libre.
- Si $uv = vu$ alors les $E_\lambda(u)$ sont stables par v

Exemple 38 *Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables et qui commutent, montrer que u et v sont diagonalisables dans une même base.*

Réponse : Notons $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de u, puisque u est diagonalisable alors $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}(u)$. Par ailleurs $uv = vu$, donc les $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v, on note v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$, v_i est diagonalisable car v est diagonalisable, donc l'espace $E_{\lambda_i}(u)$ admet une base B_i formée de vecteurs propres de v_i (donc de v). Ainsi $B = (B_1, ..., B_p)$ est une base de diagonalisation commune de u et v.

1. Polynôme annulateur :

$P \in \mathbb{K}[\mathbb{X}]$, $u(x) = \lambda.x \Longrightarrow (P(u))(x) = P(\lambda).x$. Donc si $P(u) = 0$, *alors* $Sp(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K},\ P(\lambda) = 0\}$:

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } u \text{ sont parmis les racines de tout polynôme annulateur de } u.}$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } u \text{ sont exactement les racines du polynôme minimal } \Pi_u \text{ de } u.}$

Exercice 39 *La suite des noyaux itérés $F_k = \ker(u - \lambda Id)^k$ devient stationnaire exactement à partir de l'indice de la valeur propre λ : multiplicité de λ en tant que racine de Π_u.*

2. Endomorphisme induit :

Si v est un endomorphisme induit par u sur F alors $Sp(v) \subset Sp(u)$ et $E_\lambda(v) = F \cap E_\lambda(u)$

3. Polynôme caractéristique :

- **On suppose** $\dim E$ **finie**. On a $\mathcal{X}_u(X) = (-1)^n \det(u - Xid_E)$ et $\mathcal{X}_M(X) = (-1)^n \det(M - XI_n)$.
- $\mathcal{X}_u(X) = X^n - tr(u)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(u)$.

- Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par u divise celui de u.

- Le spectre de u est l'ensemble des racines (dans $\mathbb{K}$) du polynôme caractéristique de u.

- Si $\lambda \in Sp(u)$ alors $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$: la multiplicité de la valeur propre λ.En particulier la dimension d'un sous-espace propre associé à une valeur propre simple est 1.

- Lorsque $\mathcal{X}_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ alors la trace (respectivement le déterminant) de u est la somme (respectivement le produit) des valeurs propres de u comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Exemple 40 *Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice A d'ordre* 2.

Réponse : On directement $\mathcal{X}_A(X) = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$.

Exemple 41 *Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice de type compagon*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{X}_M(X) = (-1)^n \det(M - XI_n)$, *notons* $(C_1, ..., C_n)$ *les colonnes de la matrice* $(M - XI_n) =$

$$\begin{pmatrix} -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & -X + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

et effectuant l'opération

$C_1 \longleftarrow C_1 + XC_2 + ... + X^{n-1}C_n$, *puis on développe le déterminant obtenu selon sa première colonne, on obtient alors* $\mathcal{X}_M(X) = \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right)$

Exemple 42 ***Matrice à diagonale strictement dominante :*** *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on suppose que pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$: $|a_{ii}| > \sum_{j=1,\ j \neq i}^{n} |a_{ij}|$. *Montrer que 0 n'est pas valeur propre de A et en déduire que A est inversible.*

Réponse : Si par l'absurde $0 \in Sp(A)$, *alors il existe* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ *tel que* $AX = 0$, *soit k tel que* $\|X\|_\infty = |x_k|$, *alors l'équation* $(AX)_k = 0$ *donne* $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i = 0$, *donc*

$$a_{kk}x_k = -\sum_{i=1, i\neq k}^{n} a_{ik}x_i, \text{ donc } |a_{kk}| = \left|\sum_{i=1, i\neq k}^{n} a_{ik}\frac{x_i}{x_k}\right| \leq \sum_{i=1, i\neq k}^{n} |a_{ik}| \left|\frac{x_i}{x_k}\right| \leq \sum_{i=1, i\neq k}^{n} |a_{ik}| : Absurde$$

Ainsi $0 \notin Sp(A)$ *et par suite A est inversible.*

Exercice 43 *Localisation des valeurs propres ou des racines d'un polynôme : Soit* $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$*. Montrer que les racines de P vérifient :* $|\lambda| \leq \max\left(|a_0|, 1+|a_1|, ..., 1+|a_{n-1}|\right).$ *Considérer la matrice compagon* ${}^tM$ *de l'exemple ci-dessus associé au polynôme P. Remarquer que si* $P(\lambda) = 0$*, alors* ${}^tM - \lambda I_n$ *n'est pas à diagonale strictement dominante et conclure avec l'exemple précédant.*

4. Théorème de Cayley-Hamilton :

$\mathcal{X}_u(u) = 0$ et $\mathcal{X}_M(M) = 0$: le polynôme caractéristique de u annule u ou encore Le polynôme minimal de u divise le polynôme caractéristique de u.

Exemple 44 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *dont le polynôme caractéristique* $\mathcal{X}_u$ *est scindé dans* $\mathbb{K}[X]$*, on pose* $\mathcal{X}_u = (-1)^n \prod_{i=1}^{i=p} (\lambda_i - X)^{m_i}$ *et* $F_i = \ker(u - \lambda_i Id)^{m_i}$*. Montrer que les* F_i *sont stables par u et que* $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$*.*

Réponse : On applique la décomposition des noyaux aux polynômes $(\lambda_i - X)^{m_i}$ *qui sont premiers entre eux deux à deux, on trouve :* $\ker(\mathcal{X}_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$*, or ker*$(\mathcal{X}_u(u)) = E$ *selon le théorème de Cayley-Hamiton.*

Exemple 45 *En dimension finie, soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *admettant 0 comme valeur propre simple, montrer que* $\ker(u) = \ker\left(u^2\right)$ *et en déduire que* $\ker(u)$ *et* $\operatorname{Im}(u)$ *sont supplémentaire dans E.*

Réponse : Puisque 0 est valeur propre simple, alors $\mathcal{X}_u$ *est de la forme* XQ*, avec* $Q(0) \neq 0$*, donc pgcd*$(X, Q) = 1$*, de même pgcd*$\left(X^2, Q\right) = 1$*. D'autres part les polynômes* $\mathcal{X}_u = XQ$ *et* X^2Q *sont annulateurs de u (Cayley-Hamilton), donc selon la décompostion des noyaux :* $E = \ker(u) \oplus \ker Q(u) = \ker\left(u^2\right) \oplus \ker Q(u)$*. En passant aux dimension, on obtient* $\dim\ker(u) = \dim\ker\left(u^2\right)$*, or il est classique que* $\ker(u) \subset \ker\left(u^2\right)$*, d'où l'égalité* $\ker(u) = \ker\left(u^2\right)$*. Puis, on montre facilement que* $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$*, ils sont donc supplémentaire par la formule du rang.*

Exemple 46 *Si* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *nilpotente, alors* $M^n = 0$ *: En effet* $Sp_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$*, donc* $\mathcal{X}_M(X) = X^n$*, Caley-Hamilton assure* $M^n = 0$

D. Réduction en dimension finie

1. Endomorphisme diagonalisable :

Définition 47 $u \in \mathcal{L}(E)$ *est dit diagonalisable lorsque l'une des conditions équivalentes est réalisée :*

- E admet une base formée de vecteurs propres de u.
- $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u).$
- $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right).$
- Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Définition 48 ***Matrice diagonalisable :*** *$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable s'elle est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à une matrice diagonale.*

- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable. Càd il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que : $D = P^{-1}AP$

2. Théorèmes de diagonalisation :

Théorème1 : u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique$\mathcal{X}_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$ la mutiplicité de λ.

Théorème2 : u est diagonalisable si et seulement si u est annulé par un polynôme

scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et à racines simples.(par exemple un projecteur, une symétrie sont diagonalisables)

Théorème3 : Si le polynôme caractéristique $\mathcal{X}_u$ est scindé et à racines simples sur $\mathbb{K}$ alors u est diagonalisable. Attention : il s'agit uniquement d'une condition suffisante, elle n'est pas nécessaire : voir le cas des homothéties diagonalisable avec une seule valeur propre !

Exemple 49 *Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Réponse : On a $\mathcal{X}_A(X) = (X+4)(X-1)(X-3)$ scindé et à racice simple, donc A diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus $E_{-4}(A) = vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3(A) = vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, donc $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$, avec $P = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exemple 50 *Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $A = X\ {}^tX = (x_i x_j)_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Quel est le rang de A? En déduire les valeurs propres de A. Sous -quelle condition A est diagonalisable?*

Réponse : La kième colonne de A est $C_k = x_k X$, donc $rg(A) = rang(C_1, ..., C_n) \le 1$: deux colonnes sont liées. donc $\dim\ker(A) \ge n-1$, donc 0 valeur propre d'ordre $\ge (n-1)$. L'autre valeur propre est donnée par $Tr(A)$ est vaut $Tr(A) = {}^tXX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. donc A diagonalisbale si et seulement si $A = 0$ ou $Tr(A) \neq 0$.

3. Endomorphisme et matrice trigonalisable :

Définition 51 *$u \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable lorsqu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.*

Définition 52 ***Matrice trigonalisable :*** *$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable s'elle est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à une matrice triangulaire supérieure. Càd il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que : $T = P^{-1}AP$*

- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est trigonalisable.

4. Théorème de trigonalisation :

Théorème : u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique$\mathcal{X}_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

Exemple 53 *Réduire la matrice* $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Réponse : On a $\mathcal{X}_A(X) = (X+2)(X-1)^2$, *et* $\dim E_1(A) = 1 < 2$, *donc* A *non diagonalisable, mais* $\mathcal{X}_A$ *étant scindé donc* A *est trigonalisble dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *On cherche 3 vecteurs libres* (C_1, C_2, C_3) *tels que :* $AC_1 = C_1$, $AC_2 = C_1 + C_2$ *et* $AC_3 = -2C_3$, *alors* A *sera semblable à* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

- **Conséquences :**
  - Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}-ev$ est trigonalisable.
  - Toute matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- **endomorphisme induit :**
  - Si $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable (respectivement trigonalisable), alors tout les endomorphismes induits par u sont aussi diagonalisables (respectivement trigonalisables)
  - Si $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable (respectivement trigonalisable), alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, les endomorphismes $P(u)$ et $\exp(u)$ sont aussi diagonalisables (respectivement trigonalisables) dans la même base.

5. Réduction des symétriques :

- On suppose ici E euclidien.
  - **Théorème spectral :** Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{L}(E) : u^* = u$ est diagonalisable dans une base **orthonormée de** E.
  - **Version matricielle :** Toute matrice symétrique réelle $S \in S_n(\mathbb{R})$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale. càd il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale formée des valeurs propres de S et $P \in O_n(\mathbb{R})$ orthogonale : ${}^tP = P^{-1}$ telles que :
  $$D = {}^tPSP = P^{-1}SP$$

6. Densité classique :

Exemple 54 *Montrer que le groupe des matrices inversibles* $GL_n(\mathbb{K})$ *est un ouvert dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *L'idée est de preturber la diaginale.*

Réponse : l'application $\det : M \longmapsto \det(M)$ *est continue car polynômiale des coefficients de* M *et* $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$, *or* $\mathbb{K}^*$ *ouvert donc aussi* $Gl_n(\mathbb{K})$ *ouvert de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Par ailleurs pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M = \lim_{p \to +\infty} \left(M - \frac{1}{p} I_n \right)$, or le spectre de M est finie donc pour p assez grand $\frac{1}{p} \notin Sp(M)$, donc $\left(M - \frac{1}{p} I_n \right)$ inversible, ainsi M est limite d'une suite de matrice inversible, donc adhérente à $GL_n(\mathbb{K})$.

Pour montrer certains propiètés sur les matrices (ou les endomorphismes) on pourra commencer par le cas des matrices inversibles et généraliser par cette densité.

Exemple 55 *Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dense dans celui des matrices trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Indication : On trigonalise A et on pertube légerement la diagonale pour rendre les valeurs propres deux à deux distinctes pour obtenir une suite de matrice diagonalisable

III. Espace préhilbertiens

Les résultats les plus importants sont le théorème spectral et la réduction dans des BON des formes quadratiques :

Dans toute la suite E un $\mathbb{R}-ev$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E,

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

- Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$: ${}^tXY = {}^tYX = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. A ne pas confondre avec $X^tY = (x_i y_j)_{1 \le i,j \le n}$ qui est une matrice carrée de taille n

A. Produit scalaire - Forme quadratique

1. Produit scalaire - norme prélilbertienne

- **Produit scalaire** : Forme ϕ bilinéaire symétrique définie positive sur E.(Pour montrer un produit scalaire, la bilinéairité et la symétrie sont on général évidentes, on met l'accent sur définie positive). E est dit préhilbertien et ϕ se note $\langle .,. \rangle$.
- $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est la norme préhilbertienne associée à ce produit scalaire
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** E préhilbertien alors pour tout $x, y \in E$, $|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \|y\|$ avec égalité si et seulement si (x, y) liés. Très utile pour montrer des inégalités dans des espaces prélibertiens : $\mathbb{R}^n$, $C([a,b], \mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ...

2. Orthogonalité

E préhilbertien

- $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

- A partie de E, $A^{\perp} = \{x \in E \ / \ \forall\, a \in A,\ \langle x, a\rangle = 0\}$ (Pour montrer qu'un vecteur a est nul, on pourra penser à montrer qu'il est orthogonal à tout vecteur x de E).

- Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors : $E = F \oplus F^{\perp}$ et $F^{\perp\perp} = F$ (Toujours valable si E de dimension finie : Euclidien)

- **Pythagore :** $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Le sens direct se généralise pour un nombre fini de vecteurs orthogonaux.

- **Procédé de Gram-Schmidt :** Si E euclidien et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, alors il existe une base une base **orthonormée** $C = (c_1, ..., c_n)$ de E,vérifiant pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $vect\,(c_1, ..., c_k) = vect\,(e_1, ..., e_k)$; avec

$$c_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \text{ et } \quad c_{k+1} = \frac{e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle c_i, e_{k+1}\rangle\, c_i}{\left\| e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle c_i, e_{k+1}\rangle\, c_i \right\|}$$

  Noter que la matrice de passage de B à C est triangulaire supérieure, ainsi que son inverse.

  Pour retenir la formule, noter aussi que le numérateur de c_{k+1} est $e_{k+1} - p\,(e_{k+1})$ où p la projection orthogonale sur $Vect\,(c_1, ..., c_k)$

- Ce procédé s'applique dans les préhilbertiens aux bases infinies

  Exemple 56 ***Décomposition QR :*** *Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit $M = QR$, où Q orthogonale et R triangulaire supérieure. On note B_c la base canonique, B la base des colones de A et C la BON obtenue par Gram-Schmidt à partir de B. Alors $M = P_{B_cC} = P_{B_cB}P_{BC}$, poser $Q = P_{B_cB}$ orthogonale car transforme une BON et une BON et $R = P_{BC}$ triangulaire supérieure selon le critère de Gram-Schmidt.*

- **Intérêt des B.O.N. :**

  $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = Mat_B\,(u) = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base **orthonormée** de E,

  $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

  - Produit scalaire dans BON :
    $\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$: comme dans $\mathbb{R}^n$ Euclidien canonique
  - Norme dans BON : $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^tXX$.
  - Matrice d'un endomorphisme u dans BON : $m_{ij} = \langle e_i, u\,(e_j)\rangle$.

- Projection orthogonale dans BON : On suppose ici E préhilbertien et F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors : $E = F \oplus F^{\perp}$, On note p_F la projection orthogonale sur F : $p_F(x)$ est caractérisé par $\begin{cases} p_F(x) \in F \\ (x - p_F(x)) \in F^{\perp} \end{cases}$.
  - Si $B = (e_1, ..., e_n)$ une base **orthonormée** de F, alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle e_i \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, x \rangle|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$$

    De plus $p_F(x)$ est l'unique élément de F en lequel la distance $d(x, F)$ est atteinte.
  - **Inégalité de Bessel** : Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de E, alors la série $\sum_{n\geq 0} |\langle e_n, x \rangle|^2$ est convergente et on a $\sum_{n\geq 0} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

- **Suite totale ou base hilbertienne :** Une suite orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite base hilbertienne de E lorsque $vect\left((e)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est dense dans E.

- **Identité de Parseval :** Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E, et p_n la projection orthogonale sur $F_n = vect(e_0, ..., e_n)$, alors $\lim_{n\to+\infty} \|x - p_n(x)\| = 0$. dans ce cas on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x \rangle^2 = \|x\|^2 \text{ : Parseval}$$

Exemple 57 *Dans* $E = C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *muni de* $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$. *La famille* $\left(1, \sqrt{2}\cos(nx), \sqrt{2}\sin(nx)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une base hilbertienne de* E.*(solution utilise le théorème d'approximation de Weierstrass trigonométrique)*

Exemple 58 *Dans* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *muni de* $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt$. *La famille* $\left(\frac{L_n}{\|L_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base hilbertienne de* E, *où* $(L_n)_n$ *la famille des polynômes orthogonaux de Legendre. (solution utilise le théorème de Weierstrass algébrique)*

- **Théorème de la projection orthogonale (Distance à un sous-ev) :** On suppose E préhilbertien et F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors : $E = F \oplus F^{\perp}$, On note p_F la projection orthogonale sur F.

$$\text{Si} \quad x \in E, \text{ alors } d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

- **Forme linéaire d'un euclidien :** E euclidien alors pour toute forme linéaire ϕ sur E, il existe un unique élément a de E tel que :

$$\forall\, x \in E,\ \phi(x) = \langle a, x \rangle$$

  (utile pour montrer l'existence de l'adjoint)

Exemple 59 *Soit* ϕ *une forme linéaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *montrer qu'il existe une unique matrice* A *telle que* $\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \phi(M) = Tr(AM)$

Réponse : On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de son produit scalaire usuel* $\langle M, N \rangle = Tr({}^tMN)$ *et on applique le résultat ci-dessus.*

B. Endomorphisme d'un Euclidien

On suppose E euclidien $u \in \mathcal{L}(E)$

1. Adjoint (Adhérence du programme)

- Il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$, $\forall\, x, y \in E$; $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$:

l'adjoint d'un endomorphisme est l'analogue de la transposée d'une matrice : cette remarque est très utile pour retrouver les propriètés de l'adjoint.

- $\mathcal{M}at_{\mathbf{BON}}(u^*) = {}^t(\mathcal{M}at_{\mathbf{BON}}(u))$. **Attention ce résultat nécessite une base Orthonormée**.

  Donc u et u^* ont les même spectres, déterminants, polynômes caractéristiques,traces, rangs et normes triples.

- F est un sous-ev stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*. En particulier un hyperplan H est sable par u si et seulement si son orthogonal $H^\perp$ est dirigé par un vecteur propre de u^*.
- $\ker(u^*) = \operatorname{Im}(u)^\perp$, $\operatorname{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$
- **Endomorphisme symétrique ou autoadjoint :**
  - u est dit symétrique ou autoadjoint si $\forall\, x, y \in E$; $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$, on a :
  $$u \textit{ symétrique} \Leftrightarrow \mathcal{M}at_{\mathbf{BON}}(u) \text{ est symétrique}$$
  - Un projecteur p de E est symérique si et seulement si il est orthogonal càd $(\operatorname{Im}(p))^\perp = \ker(p)$
  - Endomorphisme symétrique est dit positif : pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geq 0$
  - Endomorphisme symétrique défini positif : pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, $\langle u(x), x\rangle > 0$.
  - Matrice symétrique positive : $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ lorsque :
  $$\begin{aligned} &\left(Pour\ tout\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geq 0\right) \\ &\Longleftrightarrow l'endomorphisme\ canonique\ de\ \mathbb{R}^n associ\acute{e}\ est\ positif \\ &\Longleftrightarrow la\ forme\ quadratique\ associ\acute{e}e\ q(X) =^t XSX\ est\ positive \end{aligned}$$
  - Matrice symétrique définie positive : $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque :
  $$\begin{aligned} Pour\ tout\ X &\in \mathbb{R}^n \backslash\{0\},\ {}^tXSX \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow l'endomorphisme\ canonique\ de\ \mathbb{R}^n associ\acute{e}\ est\ d\acute{e}fini\ positif \\ &\Longleftrightarrow la\ forme\ quadratique\ q(x) = \langle u(x), x\rangle\ \ associ\acute{e}e\ est\ d\acute{e}finie\ positive \end{aligned}$$

Exemple 60 *Montrer que u^*u, uu^*, ${}^tAA$ et A^tA sont toujours symétriques positifs.*

Réponse : La symétrie est clair, puis $\langle u^*u(x), x\rangle = \|u(x)\|^2 \geq 0$ et ${}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2 \geq 0$

- **Automorphisme orthogonal ou isométrie vectorielle :**
  - $u \in \mathcal{GL}(E)$ est orthogonal si $u^* = u^{-1}$.

– $u \in \mathcal{L}(E)$, *alors* :

$$\begin{aligned} & u \text{ est orthogonal} \\ \Longleftrightarrow\ & u \text{ conserve le produit scalaire : } \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, y\rangle \\ \Longleftrightarrow\ & u \text{ conserve la norme : } \|u(x)\| = \|x\| \\ \Longleftrightarrow\ & \text{la matrice de } u \text{ dans une } \mathbf{BON} \text{ est orthogonale :} \\ & C\grave{a}d\ \ {}^t\mathcal{M}at_{\mathbf{BON}}(u) = (\mathcal{M}at_{\mathbf{BON}}(u))^{-1} \\ \Longleftrightarrow\ & u \text{ transforme une } \mathbf{BON} \text{ de } E \text{ en une } \mathbf{BON} \text{ de } E. \end{aligned}$$

– La composée et l'inverse d'isométrie est une isométrie, on parle du groupe orthogonal $O(E)$.

– Si u est orthogonal alors $\det(u) = \pm 1$, $Sp(u) \subset \{-1, 1\}$.

– $O^+(E) = SO(E)$ le sous groupe des isométries positives, dit le groupe spécial orthogonal.

– **Réduction ;**

  * Un automorphisme orthoganal u est diagonalisable si et seulement si $u^2 = Id_E$ càd u est une symétrie orthigonale.
  * Si $u \in O^+(E)$ une isométrie positive, alors il existe une BON de E dans laquelle la matrice de u est diiagonale par bloc de la forme $diag(I_p, -I_q, A_1, ..., A_s)$, avec $A_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$, $p, q, s \in \mathbb{N}$.

2. Réduction dans le groupe orthogonal

- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme (respectivement d'une matrice réelle) symétrique sont deux à deux orthogonaux.

- Le polynômes caractéristiques d'un endomorphisme (respectivement d'une matrice réelle) symétrique est scindé sur $\mathbb{R}$: toutes ses valeurs propres sont réelles.

  Le résultat le plus important de réduction reste le :

  THEOREME SPECTRAL : Diagonaliser un endomorphisme ou une matrice est toujours très intéressant, dans un euclidien les diagonaliser dans une BON sera idéal, ceci est possible pour ceux qui sont Symétriques

- **Théorème spectral :** Tout endomorphisme symétrique u de E est diagonalisabe dans une base **orthonormée** de E. (La base B de diagonalisation à un double interêt : la matrice de u dans B est **diagonale** et les calculs dans B sont simples car elle est **orthonormée**).

- **Théorème spectral pour les matrices symétriques réelles :** Toute matrice symétrique réelle S de $S_n(\mathbb{R})$ est **orthogonalement semblable** à une matrice diagonale. càd : il existe D diagonale formée des valeurs propres de S et il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ orthogonale telles que :

$$D = {}^tPSP = P^{-1}SP$$

Exemple 61 *La forme quadratique* ***la plus utilisée et la plus étudiée et qui fait partie du programme*** *est* $q(x) = \langle u(x), x\rangle = {}^tXSX$ *où* u *et* S *sont symétriques. Réduire cette forme.*

Réponse : pour réduire cette forme, ***on applique le théorème spectral à*** u *ou à* S, *on trouve dans une BON de vecteurs propres de* u : $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, *avec les* λ_i *les valeurs propres de* u *et les* y_i *les coordonnées de* x *dans la BON de vecteurs propres.*

Exemple 62 *L'autre forme quadratique aussi très utilisée est* $q(x) = \|u(x)\|^2 = \|MX\|^2$, *où* u *et* M *sont quelconques non forcément symétriques. Réduire cette forme quadratique*

Réponse : Pour réduire cette forme, il faut remarquer que $q(x) = \langle u^* \circ u(x), x\rangle = {}^tX({}^tMM)X$, *c'est donc la forme quadratique associée à l'endo symétrique* $u^* \circ u$ *ou à la matrice symétrique* ${}^tMM$, ***on applique le théorème spectral à*** $u^* \circ u$ *ou à* ${}^tMM$, *on trouve dans une BON de vecteurs propres de* ${}^tMM$: $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, *avec les* λ_i *les valeurs propres de* ${}^tMM$ *et les* y_i *les coordonnées de* x *dans la BON de vecteurs propres.*

Voici d'autres applications :

Exemple 63 • *Soit* u *symétrique, on suppose* $sp(u) \subset \mathbb{R}^+$, *montre que* u *positif :* $q(x) = \langle u(x), x\rangle \geq 0,\ \forall\, x \in E$

Réponse : ***on applique le théorème spectral à*** u , *on trouve dans une BON* $(e_1, ..., e_n)$ *de vecteurs propres de* u : $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, *avec les* λ_i *les valeurs propres de* u *et les* y_i *les coordonnées de* x *dans la BON de vecteurs propres.*

Exemple 64 • ***Encadrement de*** $q(x)$ *:*

$$\min(\lambda_i)\|x\|^2 \leq q(x) = \langle u(x), x\rangle \leq \max(\lambda_i)\|x\|^2$$

Exemple 65 • ***Norme subordonnée euclidienne*** *: Si de plus on prend* $u = v^*v$ *ou* $S = {}^tMM$, *on obtient :*

$$q(x) = \|v(x)\|^2 = \|MX\|^2 \leq \rho\left({}^tMM\right)\|x\|^2$$

Ce qui donne $|||v||| = \sqrt{\rho(v^*v)}$ *et* $|||M||| = \sqrt{\rho({}^tMM)}$

- **Caractérisation des symétrique positifs et définis positifs : (Adhérence du programme)**
  - $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset [0, +\infty[$.(Même résultat pour une matrice symétrique)
  - $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique est défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset]0, +\infty[$. (Même résultat pour une matrice symétrique)

C. Géométrie euclidienne de R^2 et R^3 :

Ici $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est euclidien usuel orienté. Soit B une BON, en général B la base canonique de E.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E, avec $M = mat_B(u)$, alors

$$u \text{ est une isométrie vectorielle} \iff {}^tMM = I_n$$

- Isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2 = O\left(\mathbb{R}^2\right)$:

$$u \in O\left(\mathbb{R}^2\right) \iff Mat_{BON}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

– De plus $Mat_{BON}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow u$ est la rotation d'angle θ (de centre l'origine bien sur !); avec les complexes $u(z) = e^{i\theta} z$.

– De plus $Mat_{BON}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow u$ est la symétrie axiale d'axe (Δ) d'angle polaire $\dfrac{\theta}{2}$: Càd d'équation cartésienne : $y\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - x\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 0$. avec les complexes $u(z) = e^{i\theta}\bar{z}$.

– Le groupe $O^{+}\left(\mathbb{R}^2\right)$ est abélien : les rotations du plan commutent

- Isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3 = O\left(\mathbb{R}^3\right)$:

$$\begin{aligned} u &\in O\left(\mathbb{R}^3\right) \Longleftrightarrow \exists \text{ } une \text{ } BON \text{ } B = (c_1, c_2, c_3) \text{ };\\ Mat_B(u) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

– On a de plus : $\dim(\ker u - Id) = 1 \Longleftrightarrow Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$ u est la rotation d'axe $\Delta = vect(c_1) = \ker(u - Id)$ orienté par c_1 et d'angle $\theta \neq 0$. On a les résultats suivants

– **Formule de Rodrigues :** Si $r = r(\Delta, \theta)$ avec $(\Delta) = vect(a)$ où a est un vecteur **unitaire,** alors on a :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}^3,\ \ r(x) = \cos(\theta)\, x + (1 - \cos(\theta))\,\langle a, x\rangle\, a + \sin(\theta)\,(a \wedge x)}$$

  * L'axe Δ est donné par $\Delta = \ker(u - Id)$
  * $Tr(u) = 1 + 2\cos(\theta)$ donne le $\cos(\theta)$
  * Le produit mixte $\langle x \wedge r(x), a\rangle = \sin(\theta)\,\|a \wedge x\|^2$ détermine le signe du $\sin(\theta)$, $x \in \mathbb{R}^3$ quelconque.

– On a de plus $\dim(\ker u - Id) = 2 \Longleftrightarrow Mat_B(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow u$ est la reflexion de plan $P = vect(c_2, c_3) = \ker(u - Id)$.

– On a de plus

$$\begin{aligned} \dim(\ker u - Id) &= 0 \Longleftrightarrow Mat_B(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow u = r(\Delta, \theta) \circ s\left(\Delta^{\perp}\right) = s\left(\Delta^{\perp}\right) \circ r(\Delta, \theta) \end{aligned}$$

où $\Delta = \ker(u + Id)$. Dans ce cas on a les résultats suivants :

  * L'axe Δ est donné par $\Delta = \ker(u + Id)$
  * $Tr(u) = -1 + 2\cos(\theta)$ donne le $\cos(\theta)$
  * Pour tout $x \in \Delta^{\perp}$, Le produit mixte $\langle x \wedge r(x), a\rangle = \sin(\theta)\,\|a \wedge x\|^2$ détermine le signe du $\sin(\theta)$

- Déplacement de $\mathbb{R}^3$: Isométrie affine positive de $\mathbb{R}^3$

  Soit f un déplacement de $\mathbb{R}^3$, alors $\mathcal{F}=\left\{M\in\mathbb{R}^3 \ \ / \ f(M)=M\right\}$, alors $\mathcal{F}$ est soit vide soit une droite.

  - $\mathcal{F}=\left\{M\in\mathbb{R}^3 \ \ / \ f(M)=M\right\}=\Delta$ une droite affine $\Longleftrightarrow f$ une rotation affine d'axe Δ d'angle θ.
  - $\mathcal{F}=\left\{M\in\mathbb{R}^3 \ \ / \ f(M)=M\right\}=\varnothing$ le vide et $M\longmapsto\overrightarrow{Mf(M)}$ constante $\Longleftrightarrow f$ *la translation* de vecteur $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{Of(O)}$
  - $\mathcal{F}=\left\{M\in\mathbb{R}^3 \ \ / \ f(M)=M\right\}=\varnothing$ le vide et $M\longmapsto\overrightarrow{Mf(M)}$ non constante $\Longleftrightarrow f$ est un vissage $=t_{\overrightarrow{V}}\circ r(\Delta,\theta)=r(\Delta,\theta)\circ t_{\overrightarrow{V}}$; avec $\overrightarrow{V}$ parallèle à Δ.

D. Forme quadratique (Ne sont plus expilcitement au programme)

Définition 66 *Pour $x=(x_1,...,x_n)$ une forme quadratique en x est de la forme*

$$q(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j$$

q contient uniquement des carrés en x_i et des produits x_ix_j.

En général on s'intéresse au signe de q, pour cela il faut la réduire : càd éliminer les produits x_ix_j et ne garder que les carrés y_i^2 avec y_i les nouvelles coordonnées de x.

Exemple 67 *La première forme quadratique que vous avez étudier depuis plusieurs années est $q((x,y))=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2$, elle est positive ou négative si et seulement si $\Delta'=\beta^2-\alpha\gamma\leq 0$*

Ici on a utilisé les aquis de la terminale, Cette année on fera mieux : On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}$ symétrique de q,

$$\begin{array}{lcl}\textit{alors } q \textit{ positive ou négative} & \Longleftrightarrow & M \textit{ positive ou } (-M) \textit{ positive}\\ & \Longleftrightarrow & \textit{les valeurs propres de } M \textit{ sont } \geq 0 \textit{ ou } \leq 0\\ & \Leftrightarrow & \det(M)=\alpha\gamma-\beta^2\geq 0\end{array}$$

- **Réduction des formes quadratiques :(Le cas général n'est plus au programme)**

  - Si q est une forme quadratique sur E et ϕ sa forme polaire, alors il existe une base $B=(e_1,...,e_n)$ **orthonormée** de E dans laquelle la matrice de q est diagonale. *càd* : $\phi(e_i,e_j)=0$ pour $i\neq j$.

    Dans cette base si $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ alors $q(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i^2$, où $\alpha_i=\phi(e_i,e_i)=q(e_i)$.

    Donc q se décompose en sommes de carrés de formes linéaires indépendantes (coordonnées), cette décomposition a l'avantage d'être dans une base **orthonormée**.

- **Réduction des matrices symétriques représentant une forme quadratique** (N'est plus au programme) : Toute matrice symétrique réelle S est **congruente** à une matrice diagonale. Càd il existe D diagonale et P inversible telles que :

$$D={}^tPSP$$

- **Attention** P n'est pas **orthogonale,** D et S **ne sont pas semblables** ! Ne pas confondre ce résultat avec celui obtenu à l'aide du théorème spectral appliqué à S : Une matrice symétrique représente un endomorphisme symétrique (dans une BON) ou une forme quadratique, on peut alors la réduire selon ces deux aspects :

  – $\left\{\begin{array}{c}\text{Dans le premier cas, elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale} \\ \text{Dans le deuxième cas, elle est congruente à une matrice diagonale}\end{array}\right.$

- Toute matrice symétrique réelle définie positive S est **congruente** à la matrice identité. Càd il existe P inversible telle que :

$$I_n = {}^tPSP$$

- **Réduction simultanées : (N'est plus au programme)** Si q_1 est une forme quadratique définie positive sur E et q_2 une forme quadratique sur E, alors il existe une base de E q_1- **orthonormale** et q_2- **orthgonale**.

- Matriciellement : Si A et B sont deux matrices symétriques réelles avec A définie positive, alors il existe P inversible et D diagonale telles que :

$$I_n = {}^tPAP \text{ et } D = {}^tPBP$$

E. Extension aux préhilbertiens complexe :(N'est plus au programme)

Les changements dans les produits scalaires complexes sont :

- La bilinéairité est remplacée par la linéairité à droite et la semi-linéairité à gauche.
- La symétrie est remplacée par le caractère hermitien : $\phi(x,y) = \overline{\boldsymbol{\phi}(y,x)}$
- les régles de calcul changent : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$
- **Pythagore :** $x \perp y \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (un seul sens)
- Si $(e_1,...,e_n)$ est une BON de F, alors la projection orthogonale sur F est

  $p_F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i$: Noter que la projection est linéaire, donc x est placé à droite

Les notions d'othogonalité, de projection orthogonale, de procédé de Gram-Schmidt, d'inégalité de Bessel, ..., restent valables.

IV. Structure

A. Groupe

- Si $(G,.)$ un groupe, alors $F \subset G$ est un sous-groupe ssi $F \neq \varnothing$ et $\forall (x,y) \in F$, $xy^{-1} \in F$.
- Une intersection de sous-groupe est un sous-groupe. On parle alors de sous-groupe engendré par une partie comme étant l'intesection de tout les sous- groupes contenant la partie.

- Une réunion de sous-groupes n'est jamais un sous-groupe sauf s-ils sont tous contenu dans l'un d'entre eux.

- Un produit cartésien de groupe est un groupe pour la loi produit.

Exemple 68 *Si* f *:*$G \to G'$ *un morphisme de groupe :* $f(xy) = f(x) f(y)$ *, alors* $\ker(f)$ *et* $\operatorname{Im}(f)$ *sont des sous-groupes respectifs de* G *et* G'

Exemple 69 E *un* $\mathbb{K}$*-ev,* $(GL(E), o)$ *le groupe linéaire de* E*, analogue de* $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ *pour les matrices*

Exemple 70 $O(E)$ *,* $O^+(E)$ *sont des sous-groupes de* $GL(E)$

Groupe monogène - cyclique

- Groupe monogène = engendré par un seul élément : $G = \langle a \rangle = \{a^n \quad / \ n \in \mathbb{Z}\}$

- Groupe cyclique = mongéne et fini : $G = \langle a \rangle = \left\{e, a, ..., a^{p-1}\right\}$

Proposition 71 *Tout groupe monogène infini est isomorphe à* $(\mathbb{Z}, +)$ *et tout groupe cyclique de cardinal* n *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ *.*

Ordre d'un élément dans un groupe :

- $a \in (G, .)$ est d'ordre fini si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = e$. Dans ce cas $O(a) = p = \min\{n \in \mathbb{N} \ / \ a^n = e\}$

- Si $O(a) = p$ alors $\langle a \rangle = \left\{e, a, ..., a^{p-1}\right\}$ et $a^n = e \Longleftrightarrow p$ divise n.(*Théorème* de Lagrange)

- Dans un groupe fini tout les éléments sont d'ordre fini diviseurs de l'ordre de G (cardinal de G)

- **Théorème de Lagrange :** Le cardinal de tout sous groupe divise la cardinal du groupe.

B. Anneau, corps, algèbre

- Les définitions d'anneaux, sous-anneau, corps, $\mathbb{K}$-algèbre, morphisme d'anneaux doivent être connu.

- Si $(A, +, \times)$ anneau commutatif, $I \subset A$ est un idéal si $I \neq \varnothing$, $\forall x, y \in I$, $\forall a \in A$, $x + y \in I$ et $ax \in I$ (Absorant)

Proposition 72 *Les seuls idéaux de* $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *sont les* $n\mathbb{Z}$*,* $n \geq 0$*.* $\mathbb{Z}$ *est principal*

Proposition 73 *Les seuls idéaux de* $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ *sont les* $P\mathbb{K}[X]$ *.* $\mathbb{K}[X]$ *est principal*

- **Application à l'arithmétique des nombres entiers et des polynômes :** Divisibilité, pgcd, ppcm, Bezout, Gauss, irréductible, anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, théorème chinois.