

## Partie A- Coup franc et effet Magnus

On étudie le mouvement d'un ballon de football assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , lancé avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  et une vitesse de rotation  $\vec{\omega}_s$  (effet Magnus). Le ballon est soumis à trois forces :

$$\begin{cases} \vec{P} = -mg \vec{e}_y & \text{(poids)} \\ \vec{F}_D = -k \vec{v} & \text{(traînée linéaire)} \\ \vec{F}_M = \lambda (\vec{\omega}_s \wedge \vec{v}) & \text{(force de Magnus, avec } \lambda > 0\text{).} \end{cases}$$

On supposera le référentiel terrestre galiléen et on néglige tout effet du vent.

On choisit la base orthonormée directe  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

$\vec{e}_x$  : horizontale vers le but ;

$\vec{e}_y$  : verticale ascendante ;

$\vec{e}_z$  : horizontale latérale vers la droite.

Le vecteur position du ballon est :  $\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z$ , et sa vitesse  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ .



Figure 1 : Coup franc de Zabiri.

On prend le cas classique où la rotation du ballon est verticale :

$$\vec{\omega}_s = \omega_s \vec{e}_y$$

On impose les conditions usuelles d'un tir :

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha, \quad \dot{z}(0) = 0$$

avec  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ . Ici  $\alpha$  est l'angle d'élévation.

On donne :

$$m = 0,43 \text{ kg} \quad k = 0,02 \text{ kg} \cdot s^{-1} \quad \lambda = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad \omega_s = 50 \text{ rad} \cdot s^{-1} \quad g = 9,8 \text{ m} \cdot s^{-2}$$

$$v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \alpha = 10^\circ$$

1 — En appliquant la deuxième loi de Newton au ballon, montrer que l'on a les équations différentielles couplées suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k\dot{x} + \lambda\omega_s\dot{z} \\ m\ddot{y} = -mg - k\dot{y} \\ m\ddot{z} = -k\dot{z} - \lambda\omega_s\dot{x} \end{cases}$$

2 — Montrer que le mouvement vertical du ballon vérifie l'équation suivante :

$$y(t) = y_0 + \frac{m}{k} \left( \dot{y}_0 + \frac{mg}{k} \right) \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) - \frac{mg}{k} t$$

3 — Pour étudier le mouvement du ballon dans le plan horizontal ( $x, z$ ), on introduit la variable complexe  $u(t) = \dot{x}(t) + i\dot{z}(t)$  avec  $i^2 = -1$ . Montrer que l'on a :

$$u(t) = u_0 \exp \left[ - \left( \frac{k}{m} + i \frac{\lambda\omega_s}{m} \right) t \right]$$

avec  $\dot{u}_0 = \ddot{x}_0 + i\ddot{z}_0$  est à déterminer l'expression en fonction des données.

4 — En déduire  $\dot{x}(t)$  et  $\dot{z}(t)$ . Justifier le constat suivant : "Le module de la vitesse horizontale décroît exponentiellement (frottement), tandis que la phase de  $u(t)$  tourne à la pulsation  $\frac{\lambda\omega_s}{m}$  : la trajectoire est une spirale courbée vers le côté droit." ?

5 — Estimer le temps caractéristique de décroissance de la vitesse horizontale et le temps caractéristique de rotation du vecteur vitesse (effet Magnus). Si la durée du vol du ballon est d'environ une seconde, l'effet Magnus est-il notable ?

## Partie B- 18 mars 1965 : le premier piéton de l'espace



Figure 2 : Photographie extraite du film "the spacewalker" (2017).

Le premier piéton de l'espace Alexeï Arkhipovitch Leonov (1934-2019) réalisa la première sortie extravéhiculaire dans le vide spatial à partir d'un véhicule appelé Voskhod-2 (photo ci-dessus). Cette mission a lancé l'aventure des activités qui actuellement rendent possible la maintenance de la station spatiale internationale (ISS).

Leonov, tête brûlée mais bon pilote, se fait remarquer en "sauvant" un avion dans des conditions exceptionnelles. Il accepte les sollicitations de sa hiérarchie pour devenir le cosmonaute appelé à une sortie dans l'espace. Après les exploits, entre autres, des 108 minutes légendaires autour de la Terre de Youri Gagarine en avril 1961 et de Valentina Terechkova en 1963 (le premier homme et la première femme réalisant un vol spatial), les Soviétiques ne sont pas vraiment prêts. Ils veulent réaliser une sortie dans l'espace avant les Américains qui mettent de gros moyens pour détrôner les Russes.

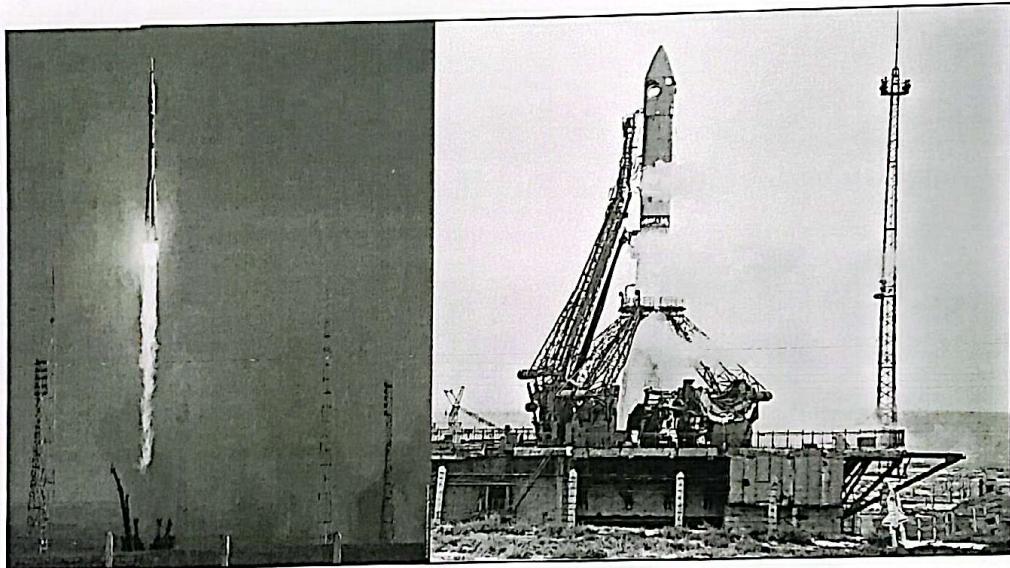


Figure 3 : Photographies extraites de forum-conquêtesspatiale.fr.

Le vaisseau est lancé par une fusée (photo ci-dessus) qui peut, à l'aide de tuyères, éjecter des gaz avec une vitesse de  $u = 3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  (par rapport à la tuyère). La trajectoire de la fusée est supposée rectiligne verticale. Quand on écrit le principe fondamental de la dynamique au système ouvert fusée, dans le référentiel géocentrique, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -m(t)g_0 - u \frac{dm}{dt} \quad (1)$$

L'équation précédente est obtenue par une projection sur l'axe vertical ascendant.

Tout se passe comme si s'exerçait à l'instant  $t$  sur le système de masse  $m(t)$  en plus du poids une force de poussée égale au produit de la vitesse relative d'éjection  $u$  par le débit massique des gaz éjectés  $-\frac{dm}{dt}$ . Les forces de frottement sont négligées.

Hypothèse de travail : le champ de pesanteur est uniforme dans la zone où vaisseau Voskhod se déplace et à la valeur  $g_0$ . L'instant  $t = 0$  est l'instant de départ de la fusée.

6 — Montrer que la fusée chargée (vaisseau, 2 passagers, combustible de masse initiale  $m_{\text{comb}}$ , carcasse, matériel ...) de masse initiale  $m_0 = M + m_{\text{comb}}$  ne peut décoller que si le débit massique est suffisant.

La masse  $m(t)$  de la fusée chargée s'écrit tant qu'il y a du combustible

$$m(t) = M + m_{\text{comb}} \cdot (1 - \alpha t) = m_0 - m_{\text{comb}} \cdot (\alpha t)$$

Le mouvement de la fusée se décompose en 2 phases :

– Phase 1 ( $0 < t < t_1$ ) : éjection de combustible  $m(t) = m_0 - m_{\text{comb}} \alpha t$

$$\frac{dv}{dt} = -g_0 + \frac{um_{\text{comb}} \alpha}{m_0 - m_{\text{comb}} \alpha t}$$

– Phase 2 ( $t > t_1$ ) : combustible épuisée  $m(t) = M$

$$\frac{dv}{dt} = -g_0$$

Ce sont les équations différentielles relatives à la vitesse pendant les deux phases du mouvement.

7 — Que vaut la vitesse  $v_1$  à l'instant  $t_1 = 1/\alpha$  de la fin de la combustion ?

On prendra  $M = 30$  tonnes et  $m_{\text{comb}} = 90$  tonnes et  $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

En intégrant l'expression (1) de  $v(t)$ , on peut montrer que l'altitude atteinte à l'instant  $t_1$  vaut

$$h = \frac{u}{\alpha} \left( 1 - \frac{M}{m_{\text{comb}}} \ln \left( \frac{m_0}{M} \right) \right) - \frac{g_0}{2\alpha^2}$$

Faire l'application numérique.

8 — À quel instant  $t_2$  la vitesse devient-elle nulle ? Écrire le théorème de l'énergie cinétique entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ . En déduire l'altitude  $H$  maximale que la fusée peut atteindre.

Le vaisseau libéré par la fusée décrit dans le référentiel géocentrique une orbite elliptique dont la distance minimale au foyer est à l'altitude de 167 km et dont la distance maximale au foyer est à l'altitude de 475 km.

9 — Commenter les valeurs numériques obtenues pour  $h$  et  $H$ . Donner l'ordre de grandeur de la durée entre le départ de la fusée et la mise sur orbite du vaisseau habité.

10 — L'accélération de la pesanteur varie avec l'altitude  $z$  selon la loi :

$$g(z) = \frac{GM_T}{(R_T + z)^2}$$

avec  $G$  est la constante d'attraction universelle et  $M_T$  la masse de la Terre.

Calculer la variation relative du champ de pesanteur  $\frac{\Delta g}{g_0}$  entre le sol et l'altitude  $H$ .  
 Discuter l'hypothèse d'uniformité du champ de pesanteur.

On donne :

- Rayon de la Terre :  $R_T = 6370 \text{ km}$
- Vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même :  $\omega_T = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- Accélération de pesanteur à la surface de la Terre :  $g_0 = \frac{GM}{R_T^2} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

## Partie C - Vecteur de Runge-Lenz

On considère une particule  $P$  de masse  $m$  soumise à la force gravitationnelle newtonienne exercée par un corps fixe  $O$  de masse  $M$  supposé beaucoup plus grand ( $M \gg m$ ) :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

On note :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} - mGM \vec{e}_r,$$

où  $\vec{p} = m\vec{v} = m\vec{r}$  est la quantité de mouvement et  $\vec{A}$  est le vecteur de Runge-Lenz. Le symbole " $\times$ " signifie ici le produit vectoriel.

$\vec{OP} = \vec{r}$  est le vecteur position,  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  est le vecteur vitesse et  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ .

11 — Montrer que le moment cinétique  $\vec{L} = \vec{L}_O(P)$  est conservé, et que le mouvement est plan.

12 — En utilisant le système de coordonnées polaires, montrer que la vitesse angulaire s'écrit :

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

13 — Montrer que l'énergie mécanique s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

14 — Calculer  $\frac{d\vec{A}}{dt}$  en utilisant l'équation du mouvement  $\vec{p}' = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$ . En déduire que le vecteur  $\vec{A}$  est constant dans le temps.

15 — En calculant  $\vec{A} \cdot \vec{L}$ , montrer que  $\vec{A}$  est contenu dans le plan du mouvement.

16 — Vérifier que le carré du module de  $\vec{A}$  est le suivant :

$$A^2 = m^2G^2M^2 + 2mEL^2$$

17 — Montrer que pour  $E < 0$  (orbite fermée), le vecteur  $\vec{A}$  a un module :

$$A = mGMe$$

où  $e$  est l'excentricité de la trajectoire. Exprimer  $e$  en fonction de  $E, L, m, G$  et  $M$ .

18 — Montrer que :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = (\vec{p} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - mGMr$$

19 — Exprimer  $(\vec{p} \times \vec{L}) \cdot \vec{r}$  en fonction de  $r, \dot{r}$  et  $L$ . En déduire que la relation scalaire entre  $r$  et  $\theta$  est la suivante :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec  $p = \frac{L^2}{mGM}$  est dit le paramètre de la trajectoire conique.

## Partie D- Nappe et assiette

Sur le guéridon de la figure 4, recouvert d'une nappe sans ourlet, on place une assiette bien remplie. D'un geste brusque, on tire la nappe. L'assiette reste en place sur le guéridon.

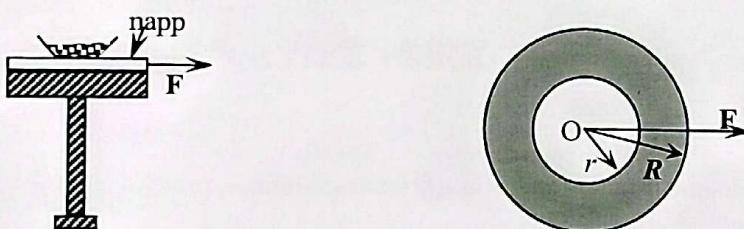


Figure 4 : Vue de côté d'assiette, nappe et guéridon (figure à gauche) ; vue de haut d'assiette et nappe (figure à droite).

La masse de l'assiette est  $M = 400$  g, celle de la nappe est  $m = 50$  g. Le guéridon est modélisé par un disque de centre  $O$  et de rayon  $R = 25$  cm. Il est recouvert d'une nappe de même dimension et d'épaisseur négligeable. L'assiette circulaire, de rayon  $r = 5$  cm, est placée au centre de la nappe. On admet que le support de la force  $\vec{F}$  développée par l'expérimentateur pendant qu'il tire sur la nappe passe par  $O$  et que cette force s'écrit, en fonction du temps  $t$  :

$$\vec{F} = m\alpha t \vec{e}_x$$

où  $\vec{e}_x$  est un vecteur unitaire constant et  $\alpha$  une constante. Le frottement entre la nappe et le guéridon est négligeable. Le coefficient de frottement de glissement entre la nappe et l'assiette est noté  $f$  ( $f = 0,2$ ). Le repère d'espace  $R_g(O, \vec{e}_x)$  est supposé galiléen. On note  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur ( $g = 10$  m/s $^2$ ).

La secousse d'un point matériel est la dérivée temporelle de l'accélération. Il s'agit d'une grandeur cinématique de niveau supérieur à l'accélération.

**20** — Montrer que  $\alpha$  a bien la dimension d'une secousse.

### Une première modélisation

**21** — On donne  $\vec{u}_g = \vec{v}_{\text{assiette}} - \vec{v}_{\text{nappe}}$  la vitesse de glissement de l'assiette par rapport à la nappe. On suppose que, tout le long de l'expérience, l'assiette glisse sur la nappe. Quel est, à l'instant  $t = 0^+$ , le signe de cette vitesse de glissement ? On cherche ici le signe de  $\vec{u}_g \cdot \vec{e}_x$ .

**22** — Montrer que l'accélération de l'assiette est constante dans  $R_g$  et en déduire l'équation horaire du mouvement de son centre  $C_a$  sous la forme suivante :

$$x_a = \frac{gft^2}{2}$$

**23** — Montrer que l'équation horaire du mouvement du centre  $C_n$  de la nappe est la suivante :

$$x_n = -\frac{fMg}{2m}t^2 + \frac{\alpha}{6}t^3$$

**24** — On observe que le déplacement de l'assiette est négligeable et que le contact nappe-assiette dure un temps  $\tau = 0,1$  s ; calculer la valeur de  $\alpha$ . La manipulation peut-elle être conduite avec succès par un enfant ?

### Une modélisation plus réaliste

En réalité, la dynamique de l'assiette comprend deux phases ; dans la première phase, de durée  $t_1$ , l'intensité de la force de frottement est inférieure à la valeur  $fMg$  donnée par la loi de Coulomb, l'assiette ne glisse pas sur la nappe et  $x_a = x_n$ . Le contact entre l'assiette et la nappe induit une force tangentielle  $\vec{T}$  sur l'assiette et donc  $-\vec{T}$  sur la nappe.

**25** — Pour  $0 \leq t \leq t_1$ , intégrer l'équation fondamentale de la dynamique appliquée à la nappe puis à l'assiette. Déduire de ces deux relations que la durée de la phase sans glissement est  $t_1 = \frac{f(M+m)g}{\alpha m}$ . Exprimer  $x_a(t_1)$ ,  $(\frac{dx_a}{dt})_{t=t_1}$ ,  $x_n(t_1)$  et  $(\frac{dx_n}{dt})_{t=t_1}$ .

**26** — Déterminer, pour  $t \geq t_1$ , et sous la forme de polynômes de la variable  $(t - t_1)$ , les équations horaires respectives du mouvement de  $C_a$ ,  $x_a = \varphi(t - t_1)$  et de celui de  $C_n$ ,  $x_n = \eta(t - t_1)$ .

**27** — On observe que le contact nappe-assiette dure  $t_c - t_1 = 0,1$  s. Calculer la valeur de la secousse (on devrait arriver à l'équation  $\alpha(t_c - t_1)^3 = 6(R + r)$ ). Calculer  $t_1$ .

## Partie E- Acidité de l'acide fluorhydrique

L'acide fluorhydrique (HF), gaz incolore de production industrielle, est un acide faible très corrosive et toxique. Il est utilisé dans la production de substances fluorocarbonées, de solutions aqueuses de HF, dans la synthèse d'hexafluorure d'uranium, dans l'alkylation des produits dérivés du pétrole et dans la synthèse de produits chimiques.

On note  $K_a$  la constante d'acidité et  $\alpha$  le coefficient de dissociation de cet acide en solution aqueuse.

**28** — Définir un acide et une base selon Brønsted.

**29** — Écrire la réaction de dissociation de HF dans l'eau. Exprimer  $K_a$  en fonction de  $\alpha$  et de la concentration initiale  $c$  en acide.

La variation de  $\alpha$  et celle du  $pH$  de la solution d'acide fluorhydrique en fonction du logarithme de la concentration en acide ( $\log(c)$ ) sont représentées sur les graphes de la figure 5.

**30** — Interpréter les courbes représentées sur les deux graphes.

**31** — Sachant que pour  $\log(c) = -2,9$ ,  $\alpha = 0,5$ , calculer la valeur de  $pK_a$  (HF/F<sup>-</sup>).

**32** — Calculer la concentration de la solution d'acide fluorhydrique où HF est dissocié à 80%. En déduire le  $pH$  de cette solution.

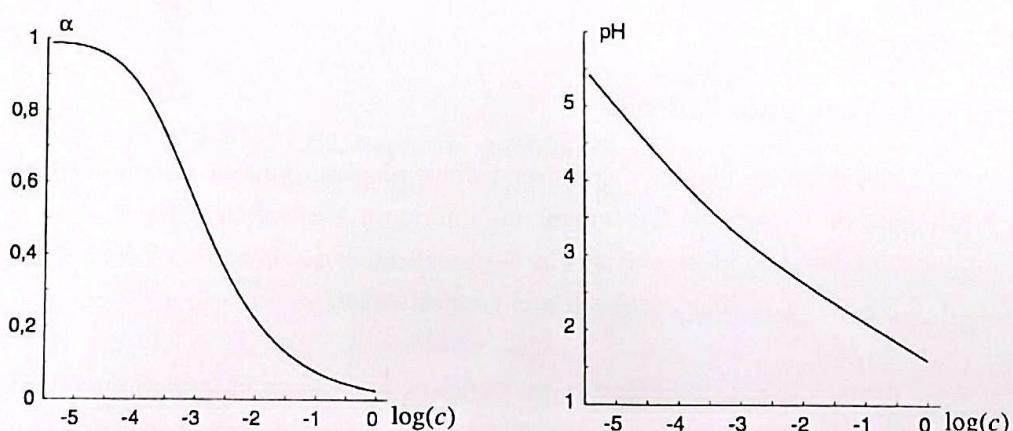
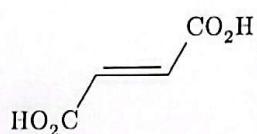


Figure 5 : variation de  $\alpha$  et de  $pH$  en fonction de  $\log c$ .

## Partie F- acides maléique et fumarique

Les acides maléique (noté MalH<sub>2</sub>) et fumarique (FumH<sub>2</sub>) sont deux diacides carboxyliques éthyléniques diastéréoisomères l'un de l'autre.

Acide maléique  $\text{MalH}_2$ Acide fumarique  $\text{FumH}_2$ 

Préparé par hydrolyse de l'anhydride maléique (lui-même obtenu par oxydation du benzène ou du butane), l'acide maléique est utilisé comme monomère pour la synthèse de polyesters insaturés et de copolymères acrylomaléiques intervenant dans la formulation de certains détergents. Son isomérisation en milieu acide conduit à l'acide fumarique, produit naturellement présent dans les fruits et légumes, utilisé par exemple comme additif alimentaire (E 297) en tant qu'acidifiant et aussi pour la synthèse de polyesters insaturés.

### Titrage de l'acide maléique seul

Le titrage d'une solution aqueuse d'acide maléique  $\text{MalH}_2$  de concentration molaire  $C_0$  inconnue à l'aide de soude  $\text{NaOH}$  de concentration molaire  $C = 0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  est simulé. La courbe donnant l'évolution du  $pH$  lors de l'addition de soude dans un bêcher contenant initialement un volume d'essai  $V_0 = 0,100 \text{ L}$  d'acide maléique est représentée sur la figure 6.

- 33 — Interpréter qualitativement la courbe et en déduire la valeur de la concentration molaire  $C_0$ .
- 34 — Évaluer très simplement  $pK_{A2} (\text{MalH}^-/\text{Mal}^{2-})$  à l'aide de la courbe.
- 35 — On donne  $pK_{A1} (\text{MalH}_2/\text{MalH}^-) = 1,8$ . Peut-on retrouver cette valeur de manière analogue à celle du  $pK_{A2} (\text{MalH}^-/\text{Mal}^{2-})$ ? Justifier.

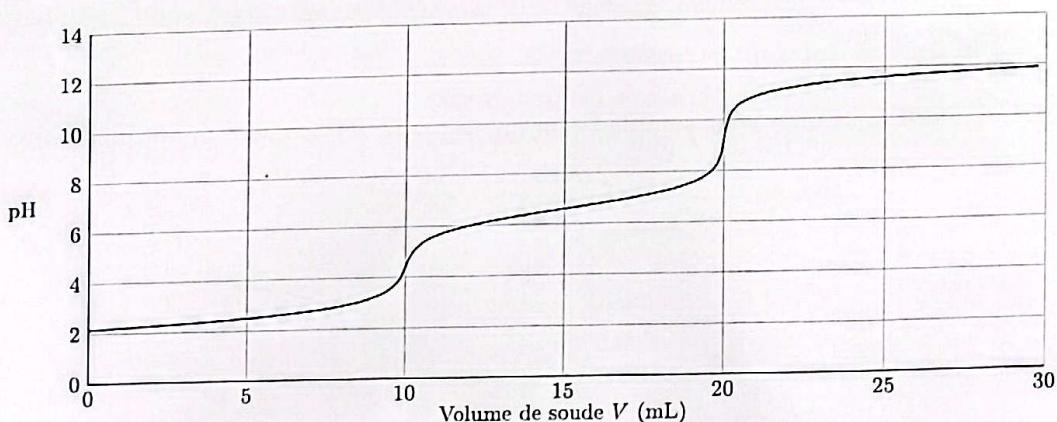


Figure 6 : Titrage de l'acide maléique seul.

### Titrage de l'acide fumarique seul

La simulation du titrage d'une solution aqueuse d'acide fumarique  $\text{FumH}_2$  est réalisée dans les mêmes conditions que pour l'acide maléique. La courbe obtenue est représentée figure ci-dessous :

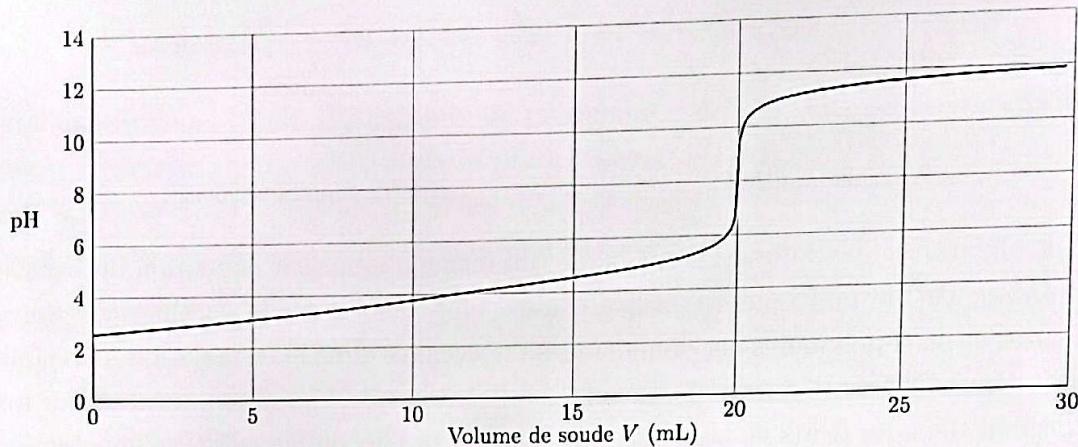


Figure 7 : Titrage de l'acide fumarique seul.

36 — Interpréter cette courbe de titrage.

On donne :  $pK_{A'1}$  ( $\text{FumH}_2/\text{FumH}^-$ ) = 3,0 et  $pK_{A'2}$  ( $\text{FumH}^-/\text{Fum}^{2-}$ ) = 4,5.

### Titrage d'un mélange d'acides maléique et fumarique

La courbe simulée du titrage d'une solution aqueuse comportant un mélange d'acide maléique de concentration molaire  $C_M$  et d'acide fumarique de concentration molaire  $C_F$  est donnée figure 8. La dérivée de la courbe simulée  $\text{pH} = f(V)$  est aussi tracée ; elle présente un léger maximum pour un volume versé de 14,5 mL et un maximum très prononcé pour 21,0 mL.

Ces courbes ont été obtenues à partir d'un volume de prise d'essai du mélange titré de  $V'_0 = 50,0$  mL et d'une solution titrante de soude de concentration molaire  $C = 0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

37 — Déterminer les valeurs des concentrations molaires  $C_M$  et  $C_F$ , en justifiant la méthode mise en œuvre.

38 — Cette méthode vous semble-t-elle précise pour déterminer simultanément  $C_M$  et  $C_F$ ? Justifier.

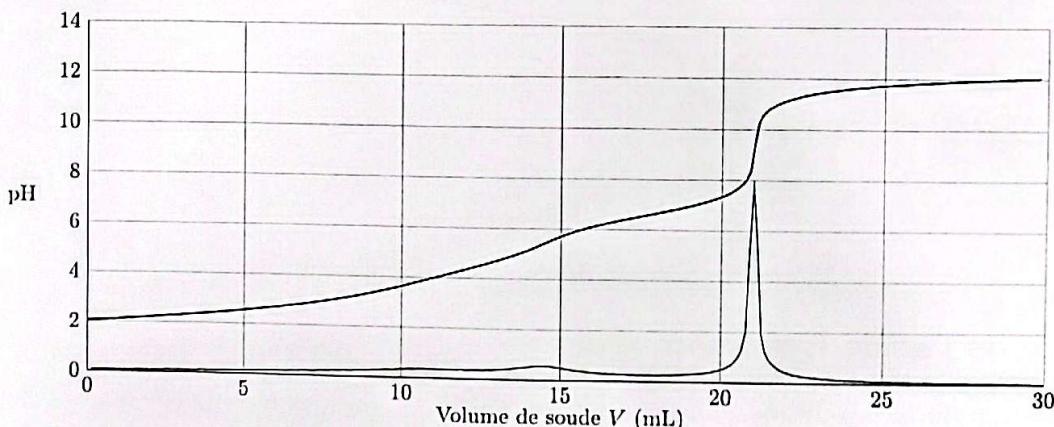


Figure 8 : Titrage d'un mélange d'acides maléique et fumarique.