Vecteur de Runge-Lenz

Consacrer 20 minutes de préparation à cet exercice.

Puis, si vous manquez d'idée pour débuter, consultez l'indice fourni et recommencez à chercher.

Une solution détaillée vous est ensuite proposée.

Si vous avez des questions complémentaires, n'hésitez pas à les poser sur le forum.

On étudie les mouvements dus à une force centrale :

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$$

Question

Monter que l'énergie est conservée puis la calculer.

Solution

La force découle de l'énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{k}{r}$$

L'énergie mécanique est donc conservée.

Question

Monter que le mouvement est plan.

Solution

Le moment de $\vec{F}$ est nul donc le moment cinétique est une constante.

Ainsi la vitesse et le mouvement se font orthogonalement à une direction fixe et constante.

Le mouvement est donc plan. On appelle $\vec{u}_z$ la direction du moment cinétique :

$$\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

Question

On pose :

$$\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{L} - km\frac{\vec{r}}{r}$$

Calculer $\frac{d\vec{A}}{dt}$ puis $\vec{A} \wedge \vec{L}$. Quelle est la direction de $\vec{A}$?

Que peut-on dire sur le vecteur $\vec{p}$?

Solution

$\vec{A}$ est dans le plan du mouvement :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{L} - km\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{F} \wedge \vec{L} - km\dot{\theta}\vec{u}_\theta = 0$$

C'est un vecteur constant.

On choisit $\vec{A} = A\vec{u}_x$. On définit $\vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$.

On évalue :

$$\vec{A} \wedge \vec{L} = \vec{p} \wedge \vec{L} \wedge \vec{L} - km\vec{u}_r \wedge \vec{L} = L^2\vec{p} - kmL\vec{u}_r \wedge \vec{u}_z$$

On a donc :

$$AL\vec{u}_y + L^2\vec{p} = -kmL\vec{u}_\theta$$

Ainsi, $\vec{p}$ parcourt un cercle.

Question

Calculer $\vec{A} \cdot \vec{r}$. Discuter du mouvement en fonction de la norme de A.

Solution

On calcule :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = Arcos\theta = \left(\vec{p} \wedge \vec{L}\right) \cdot \vec{r} - kmr = (\vec{r} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{L} - kmr = L^2 - kmr$$

où θ est l'angle entre la direction de $\vec{A}$ et la direction de $\vec{r}$.

On en déduit :

$$r = \frac{L^2}{A\cos\theta + km} = \frac{\frac{L^2}{km}}{1 + \frac{A}{km}\cos\theta}$$

Le mouvement suit donc une conique d'excentricité :

$$e = \frac{A}{km}$$

- Si $e < 1$: la trajectoire est une ellipse (si $e = 0$, c'est un cercle).
- Si $e = 1$: c'est une parabole.
- Si $e > 1$: c'est une hyperbole.