

LA DIFFUSION THERMIQUE

I - LES DIFFÉRENTS MODES DE TRANSFERT THERMIQUE

Différence de température entre deux milieux \Rightarrow transport d'énergie thermique (transfert thermique).

On distingue **trois modes** de transfert thermique : la **conduction**, la **convection** et le **rayonnement**.

I - 1 - la conduction thermique (ou diffusion thermique)

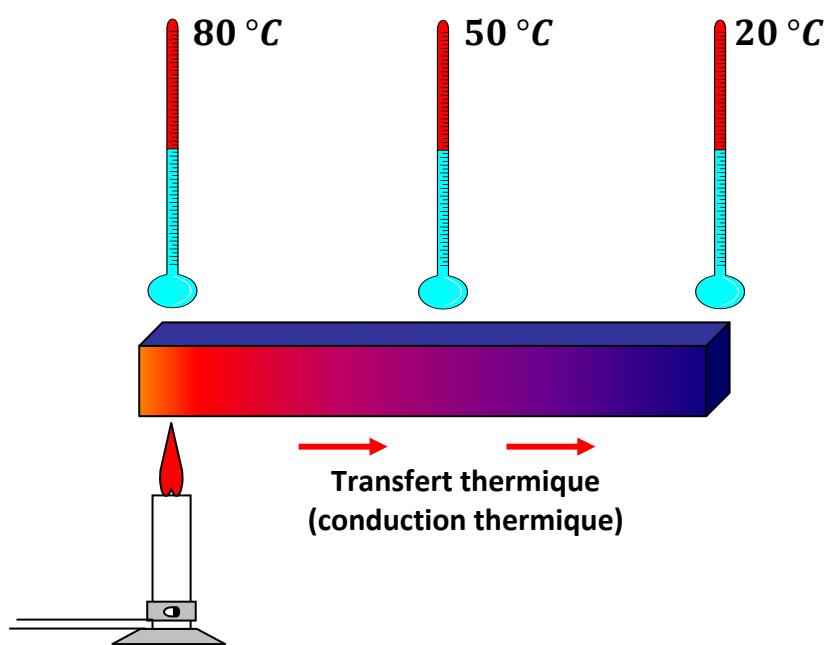
La **conduction** de la chaleur est le cas particulier où la non uniformité de la température entraîne un transfert d'énergie d'un point à un autre **sans transport macroscopique de matière**.

Le transfert est dû à l'agitation thermique des particules microscopiques. C'est un transfert thermique par contact direct (choc entre les particules rapides et particules lentes). Ce transfert thermique en volume par contact direct porte le nom de **conduction thermique**.

Exemple 1 :

Un barreau métallique dont l'une des extrémités est exposée à une flamme, s'échauffe progressivement. La chaleur se propage de proche en proche à l'intérieur du métal.

Le barreau métallique a conduit de la chaleur : cette propriété s'appelle la **conduction thermique**.



Exemple 2 : la chaleur transmise à travers les murs ou le plancher d'une maison se fait par conduction thermique.

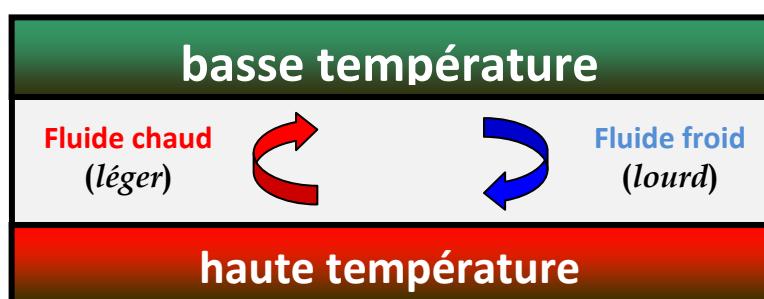
I - 2 - la convection

C'est le déplacement des particules du fluide (**transport macroscopique de matière**) qui provoque le transfert de chaleur. Ce processus est appelé **convection de la chaleur**.

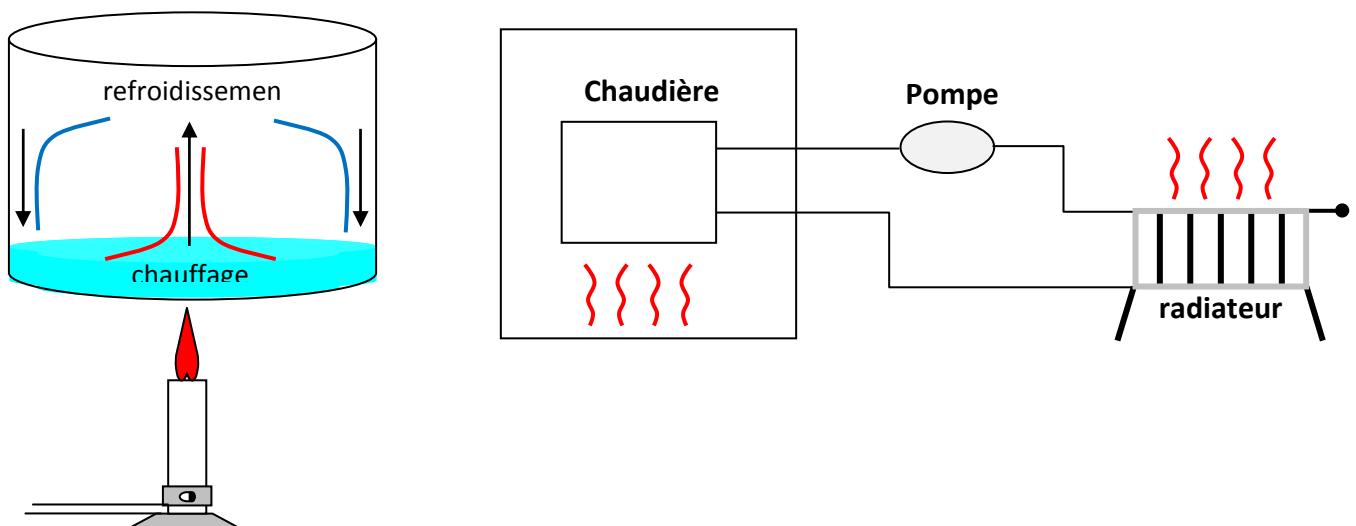
Pour un système solide, seul le transfert par conduction est possible.

Il n'y a pas de convection non plus dans un liquide froid au fond et chaud en surface.

■ **Une pièce chauffée par le sol** : l'air situé au niveau du sol, plus chaud donc plus léger que l'air situé au dessus, tend à s'élever (poussée d'Archimède) ce qui provoque l'apparition d'un mouvement amenant l'énergie thermique dans toute la pièce. Le mouvement d'ensemble des molécules d'air dû à des différences de température est la **convection naturelle**.



■ Le mouvement dans une casserole posée sur le feu s'explique par les différences de densité créées par le chauffage (Le chauffage est l'action de transmettre de l'énergie thermique à un objet, un matériau, un être vivant pour lui...). Le fluide se met en mouvement spontanément quand la différence de température entre le haut et le bas de la couche d'eau atteint une valeur critique.



Un fluide peut être mis en mouvement de **manière artificielle**. Par exemple pour le chauffage central, la pompe active la circulation de l'eau. Les échanges thermiques entre la chaudière et les radiateurs sont accélérées par **convection forcée**. Les radiateurs quant à eux cèdent la chaleur principalement par convection naturelle à l'air de la pièce.

I - 3 - le rayonnement

Le **rayonnement** est totalement différent des deux autres types de transfert de chaleur puisque les substances qui échangent de la chaleur n'ont pas besoin d'être en contact. **Ce rayonnement est l'émission d'ondes électromagnétiques par un corps chauffé.** La terre reçoit sa chaleur du soleil par rayonnement.

Ce mode d'échange est impossible dans les milieux transparents.

II - LA DIFFUSION THERMIQUE

II - 1 - Champ de température

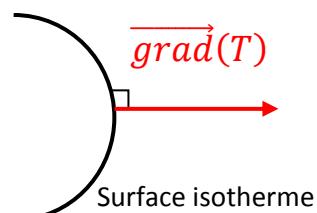
La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire $T = f(x, y, z, t)$ appelé **champ de température**. Si le champ de température est indépendant du temps, le régime est dit permanent (ou stationnaire). Dans le cas contraire, il est dit variable.

II - 2 - le gradient de température

Tous les points de l'espace qui ont la même température, définissent une surface dite **surface isotherme**. La variation de la température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température $\overrightarrow{\text{grad}}T = \frac{\partial n}{\partial T} \vec{n}$

\vec{n} vecteur unitaire de la normale

$\frac{\partial T}{\partial n}$ dérivée de la température le long de la normale.



II - 3 - le flux thermique

On appelle **flux thermique Φ** , la puissance fournie à un système par **transfert thermique**. C'est la **quantité d'énergie qui traverse une surface S par unité de temps** :

$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt} \quad \text{ou} \quad \delta Q = \Phi dt$$

Le flux thermique s'exprime en **Watts**

δQ représente les **échanges thermiques** aux frontières du système.

■ le flux thermique Φ se met sous la forme : $\Phi = \iint \vec{j}_{th} \vec{n} dS$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à l'élément de surface orientée.

\vec{j}_{th} appelé **vecteur densité de courant thermique (W.m^{-2})**

■ Le transfert thermique élémentaire à travers une surface élémentaire dS entre les instants t et $(t + dt)$ s'écrit : $\delta^2 Q = \vec{j}_{th} \vec{dS} dt$

II - 4 - la loi de Fourier : conductivité thermique

Soit un corps homogène dont la température $T(x, t)$ ne dépend que du temps t et de la coordonnée x .

La conduction thermique se manifeste par l'existence d'un vecteur densité de courant thermique **orienté dans le sens des températures décroissantes**.

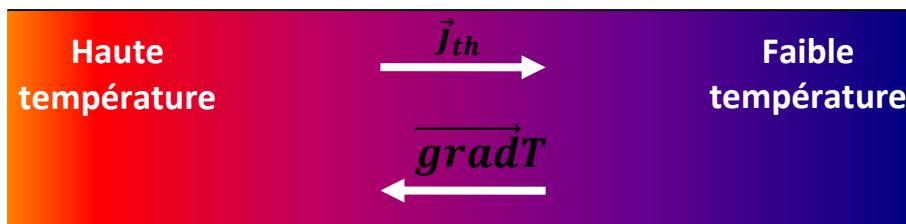
La **loi de Joseph Fourier**, qui est une **loi expérimentale**, stipule que :

$$\vec{J}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

■ soit vectoriellement $\vec{J}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$ avec $\lambda > 0$

■ Le coefficient λ , (noté aussi K), **toujours positif**, est appelé la **conductivité thermique** du milieu étudié. Il traduit l'aptitude du milieu à conduire de la chaleur. Il s'exprime en $\text{W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$.

le signe ($-$) traduit le fait que les échanges tendent à uniformiser la température, autrement dit que spontanément les transferts thermiques se produisent du corps chaud vers le corps froid (**2nd principe de la thermodynamique**).



Remarques :

① La loi linéaire de Fourier (comme la loi de Fick et la loi d'Ohm) est une loi expérimentale (phénoménologique). Elle n'est pas valable dans le cas :

- où le gradient thermique est trop fort
- où le gradient thermique varie trop rapidement dans le temps.
- le milieu est anisotrope $\Rightarrow \lambda$ dépend de la direction.

② Ordres de grandeur des conductivités thermiques de quelques matériaux

Matériaux	Conductivité thermique ($\text{W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$) Valeurs pour une température de 293,15 °C
Diamant	1000-2600
Argent	418
Cuivre	390
Or	317
Aluminium	237
Carbone	129
Étain	66,6
Acier inoxydable	26
Verre	1,2

Béton	0,92
Eau	0,6
brique (terre cuite)	0,84
Marbre	0,30
Liège	0,30
Laine de verre	0,04
Polystyrène expansé	0,036
Air (100 kPa)	0,0262

③ Le transport de charges, d'énergie ou de particules correspondent à une évolution spontanée et irréversible.

④ Analogie entre les lois de Fourier, loi d'Ohm et loi de Fick

Diffusion thermique	Conduction électrique	Diffusion Particulaire
transfert thermique Q	charge q	Nombre particules N
vecteur densité de courant thermique \vec{J}_{th}	vecteur densité de courant électrique \vec{J}_{elect}	vecteur densité de courant de particule \vec{j}
température T	potentiel V	Concentration n
conductivité thermique λ	conductivité électrique γ	coefficient de diffusion D
Loi de Fourier $\vec{J}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T$	Loi d'Ohm $\vec{J}_{elect} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}V$	Loi de Fick $\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}}n$

III - ÉQUATION DE LA DIFFUSION THERMIQUE

Considérons un milieu homogène de **masse volumique ρ** , de **conductivité thermique λ** et de **capacité thermique massique c (chaleur massique)**.

■ On suppose que ρ , c et λ sont **constantes** et uniformes dans le domaine de température étudiée.

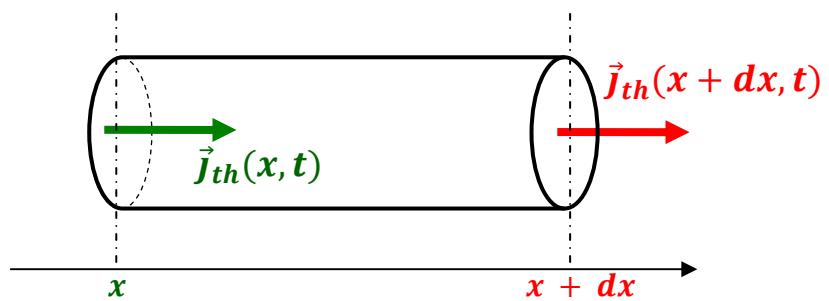
III - 1 - conduction à une dimension sans terme source

Étudions le cas où $T = T(x, t)$ et où il n'y a pas d'apport d'énergie autre que par conduction.

Le flux thermique traversant une surface de section S normale à l'axe Ox orientée selon les x croissants est :

$\Phi(x, t) = j_{th}(x, t)S$ où \vec{j}_{th} est le **vecteur densité de courant thermique**.

Considérons le **volume élémentaire de section S compris entre les abscisses x et $(x + dx)$, de température $T(x, t)$** .



Effectuons le bilan énergétique entre les deux instants voisins t et $(t + dt)$.

◆ à l'abscisse x , il entre dans le système une énergie :

$$\delta Q_e = \Phi(x, t) dt = j_{th}(x, t) S dt$$

◆ à l'abscisse $(x + dx)$, il en sort une énergie :

$$\delta Q_s = \Phi(x + dx, t) dt = j_{th}(x + dx, t) S dt$$

■ Le **1^{er} principe de la thermodynamique** entre les deux instants successifs t et $(t + dt)$, s'écrit :

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q = (j_{th}(x, t) - j_{th}(x + dx, t)) S dt = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} S dt dx$$

dU est la variation de l'énergie interne du milieu considéré.

δW représente les échanges de travail aux frontières du système.

Volume constant et pas de travail mécanique et pas de mouvement d'ensemble $\Rightarrow \delta W = 0$

Or $dU = mcdT = \rho c S dx dT \Rightarrow dU = \rho c S dx \{T(x, t + dt) - T(x, t)\}$

l'élévation de la température dT s'effectue pendant une durée dt telle que :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$\begin{cases} dU = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt \\ dU = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} S dt dx \end{cases} \mapsto \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}$$

conclusion 1 :

Si la conduction se fait sans d'autre apport en source d'énergie (conduction seule), le 1^{er} principe de la thermodynamique se traduit par :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}$$

$$\text{Introduisons la loi de Fourier } j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

c'est **l'équation de diffusion**.

conclusion 2 :

Dans le cas où la conduction est le seul transfert thermique et à une dimension, la température $T(x, y)$ vérifie **l'équation de la diffusion thermique** : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
Cette équation est aussi appelée **équation de la chaleur**.

On définit parfois le paramètre $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ appelé **diffusivité thermique** ou coefficient de diffusion thermique, qui s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. $\frac{\partial T}{\partial t} = -a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Remarques :① longueur et temps caractéristiques :

Le coefficient de diffusion α s'exprime en $m^2.s^{-1}$ \Rightarrow le coefficient de diffusion a les mêmes dimensions que le rapport $\frac{L^2}{\tau}$. La durée τ et la longueur L caractérisent le phénomène de diffusion.

$$\text{Donc } \alpha \sim \frac{L^2}{\tau} \quad \Rightarrow \quad L \sim \sqrt{\alpha \tau}$$

② Équation de la diffusion thermique à trois dimensions

Considérons le cas général où la température T dépend des trois coordonnées x, y, z . Ce type de milieu est souvent appelé **conducteur thermique**.

■ La variation de l'énergie interne entre t et $(t + dt)$ est :

$$dU = \iiint_V \{T(M, t + dt) - T(M, t)\} \rho c dV \approx \left[\iiint_V \rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} dV \right] dt$$

Le transfert thermique reçu par le système est :

$$\delta Q = \left\{ - \oint_S \vec{J}_{th}(M, t) \cdot \vec{dS} \right\} dt$$

$$\text{le premier principe} \Rightarrow \iiint_V \rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} dV = - \oint_S \vec{J}_{th}(M, t) \cdot \vec{dS}$$

$$\text{le théorème d'Ostrogradski} \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{J}_{th}$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_{th} = 0$$

Cette équation traduit le bilan local d'énergie.

$$\text{maintenant la loi de Fick} \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} T) \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

où Δ est l'opérateur **Laplacien**.

conclusion 3 :

Si les seuls apports énergétiques s'opèrent par conduction, le 1^{er} principe de la thermodynamique se traduit dans le cas général par la relation : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{J}_{th}$ et l'**équation de la diffusion thermique** s'écrit : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$

Δ est l'opérateur **Laplacien**.

③ Supposons que le processus inverse est possible. Inversons le temps.

soit $T' = T(x, t') = T(x, t)$ avec $t' = -t$

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial T'}{\partial t'}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow -\rho c \frac{\partial T'}{\partial t'} = \lambda \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}$$

$\Rightarrow T'$ ne vérifie pas l'équation de diffusion \Rightarrow la **diffusion est un processus irréversible**, donc créatrice d'entropie.

III - 2 - conduction avec terme source

Dans certaines situations, de l'énergie thermique peut être apportée localement et transmise au corps (**sources de chaleur internes**).

- les processus dégageant ou absorbant de l'énergie sont :

- l'effet Joule
- une réaction chimique exothermique ($\mathcal{P}_v > 0$) ou endothermique ($\mathcal{P}_v < 0$).
- une réaction nucléaire
- un changement de phase

Dans le cas à trois dimensions

La **production d'énergie** a lieu dans le volume du système. Elle est caractérisée par une **puissance volumique** \mathcal{P}_v telle que la **puissance produite** dans le volume élémentaire dV est :

$$d\mathcal{P}_{prod} = \mathcal{P}_v(M, t) dV$$

\mathcal{P}_v s'exprime en $W \cdot m^{-3}$

$$\mathcal{P}_{prod}(t) = \iiint_V \mathcal{P}_v(M, t) dV$$

$$\delta^2 Q_{produite} = d\mathcal{P}_{prod} dt$$

- le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$dU = \delta Q + \mathcal{P}_{prod} dt$$

$$\rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{th}(M, t) = \mathcal{P}_v(M, t)$$

Par exemple pour l'effet Joule $\mathcal{P}_{prod} = \frac{j_{elect}^2}{\gamma}$

- L'équation de la chaleur s'écrit :

- en symétrie cylindrique:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{th})}{\partial r} + \mathcal{P}_v$$

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mathcal{P}_v$$

- en symétrie sphérique :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 j_{th})}{\partial r} + \mathcal{P}_v$$

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mathcal{P}_v$$

• à une seule dimension :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \mathcal{P}_v \quad j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathcal{P}_v$$

IV - BILAN THERMIQUE DANS LE CAS D'UNE SYMETRIE CYLINDRIQUE

Considérons le cas où la répartition de température est à symétrie cylindrique autour d'un axe : $T = T(r, t)$.

La loi de Fourier $\Rightarrow \vec{j}_{th} = -\overrightarrow{\text{grad}}T(M, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r \Rightarrow \vec{j}_{th} = j_{th}(r, t) \vec{u}_r$

Effectuons le bilan thermique entre les instants t et $t + dt$, pour le système compris entre le cylindre de rayon r et le cylindre de rayon $r + dr$ et de hauteur L .

■ le volume de ce système est $2\pi L r dr$

■ la variation de l'énergie interne, entre t et $t + dt$ est :

$$dU = \rho c 2\pi L r dr [T(r, t + dt) - T(r, t)] \approx \rho c 2\pi L r \frac{\partial T}{\partial t} dr dt$$

■ le transfert thermique reçu par le système entre t et $t + dt$ est :

à travers le cylindre de rayon r :

$$\delta Q_r = \emptyset(r, t) dt = j_{th}(r, t) 2\pi L r dt$$

à travers le cylindre de rayon $r + dr$:

$$\delta Q_{r+dr} = -\emptyset(r + dr, t) dt = -j_{th}(r + dr, t) 2\pi L (r + dr) dt$$

la puissance produite dans le volume est :

$$\mathcal{P}_{prod} = \mathcal{P}_v(r, t) 2\pi L r dr$$

$$\delta Q_{totale} = \{j_{th}(r, t)r - j_{th}(r + dr, t)(r + dr)\} 2\pi L dt + \mathcal{P}_v(r, t) 2\pi L r dr dt$$

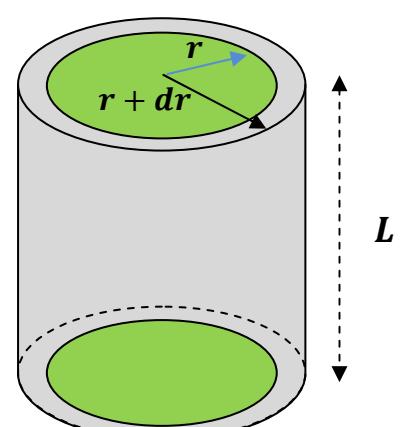
$$\approx -\frac{\partial(r j_{th}(r, t))}{\partial r} 2\pi L dr dt + \mathcal{P}_v 2\pi L r dr dt$$

le premier principe \Rightarrow

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} + \mathcal{P}_v$$

La loi de **Fick** \Rightarrow

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} + \mathcal{P}_v$$



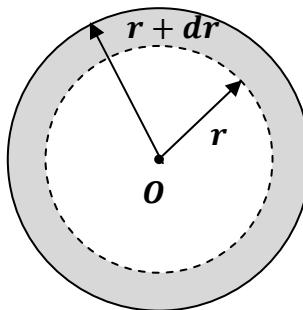
V - BILAN THERMIQUE DANS LE CAS D'UNE SYMETRIE SPHERIQUE

Considérons le cas où la répartition de température est à symétrie sphérique autour d'un axe : $\mathbf{T} = \mathbf{T}(r, t)$

$$\text{La loi de Fourier} \Rightarrow \vec{J}_{th} = -\overline{\mathbf{grad}T(M, t)} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{J}_{th} = j_{th}(r, t) \vec{u}_r$$

Effectuons le bilan thermique entre les instants t et $t + dt$, pour le système compris entre sphère de rayon r et la sphère de rayon $r + dr$ (les deux sphères ont pour centre le point O)

- le volume de ce système est $4\pi r^2 dr$



- la variation de l'énergie interne, entre t et $t + dt$ est :

$$dU = \rho c 4\pi r^2 dr [T(r, t + dt) - T(r, t)] \approx \rho c 4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial t} dr dt$$

- le transfert thermique reçu par le système entre t et $t + dt$ est :

- ☒ à travers la sphère de rayon r :

$$\delta Q_r = \emptyset(r, t) dt = j_{th}(r, t) 4\pi r^2 dt$$

- ☒ à travers le cylindre de rayon $r + dr$:

$$\delta Q_{r+dr} = -\emptyset(r + dr, t) dt = -j_{th}(r + dr, t) 4\pi (r + dr)^2 dt$$

- ☒ la puissance produite dans le volume est :

$$\mathcal{P}_{prod} = \mathcal{P}_v(r, t) 4\pi r^2 dr$$

$$\delta Q_{totale} = \{j_{th}(r, t)r - j_{th}(r + dr, t)(r + dr)\} 4\pi r^2 dt + \mathcal{P}_v(r, t) 4\pi r^2 dr dt$$

$$\approx -\frac{\partial(r^2 j_{th}(r, t))}{\partial r} 4\pi dr dt + \mathcal{P}_v 4\pi r^2 dr dt$$

le premier principe \Rightarrow

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_{th})}{\partial r} + \mathcal{P}_v$$

La loi de **Fick** \Rightarrow

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial(r^2 \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} + \mathcal{P}_v$$

VI - SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION

L'équation de la diffusion permet de déterminer l'évolution de la température $\mathbf{T}(\mathbf{M}, t)$ en fonction des coordonnées du point \mathbf{M} et du temps t . La solution de cette équation dépend des constantes d'intégration qui sont déterminées par les conditions aux limites spatiales et temporelles. Notons que pour des conditions initiales données la solution est unique.

VI - 1 - cas du régime permanent

VI - 1 - a - cas où $\mathcal{P}_v = 0$

En régime permanent (indépendant du temps), l'équation de diffusion thermique s'écrit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = \text{constante} = C_1$$

$\Rightarrow \quad T(x) = C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad T(x) \text{ est une fonction affine de } x.$

$$\frac{dj_{th}}{dx} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad j_{th} = \text{constante}$$

■ à 3 dimensions

$\operatorname{div} \vec{j}_{th} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \text{la densité de courant thermique est un champ à flux conservatif. On a aussi } \Delta T = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \quad \text{le champ de température vérifie l'équation de Laplace.}$

Application 1

Considérons un mur plan d'épaisseur L . Quelles est la température $T(x)$ à l'intérieur du mur, défini par $0 \leq x \leq L$, sachant que $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$?

l'équation de la diffusion thermique s'écrit $\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0$. On trouve pour la température une loi affine : $T(x) = Ax + B$ où A et B sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites. Les conditions aux limites sonnées conduisent à : $T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L}$
 $\emptyset = j_{th} S = -\lambda \frac{dT}{dx} S = \lambda(T_1 - T_2) \frac{S}{L} \quad \Rightarrow \quad \text{ce flux est indépendant de } x.$

VI - 1 - b - cas où $\mathcal{P}_v \neq 0$

à 3 dimensions : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}_{th} + \mathcal{P}_v = 0$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{j}_{th} = \mathcal{P}_v$$

cette équation est formellement analogue à l'équation de **Maxwell-Gauss** en électrostatique :

$$\iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_v(M, t) dV \quad \Rightarrow \quad \Phi = \mathcal{P}_{produite}$$

\Rightarrow en régime permanent, toute l'énergie produite à l'intérieur d'un volume \mathcal{V} est évacuée par transfert thermique à travers sa surface.

Application 2

Un barreau de combustible radioactif est cylindrique de rayon R_1 et longueur L ; les réactions radioactives y dégagent la puissance volumique \mathcal{P}_v uniforme. Quelle est la répartition de température à l'intérieur du barreau? On considère le régime permanent.

Par symétrie, la température ne dépend que de la distance r à l'axe du barreau : $T(r)$. Le vecteur densité de courant thermique est $\Rightarrow \text{div} \vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$

Effectuons le bilan thermique d'un cylindre de rayon r tel que $r < R_1$

La puissance dégagée à l'intérieur du cylindre est $\mathcal{P}_{produite} = \mathcal{P}_v \pi r^2 L \Rightarrow$ la puissance thermique quittant le cylindre est : $\Phi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = \iiint_V -\lambda \frac{dT}{dr} dV = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L$

$$\Phi = \mathcal{P}_{produite} \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\mathcal{P}_v r}{2\lambda} \Rightarrow T(r) = T(R_1) + \frac{\mathcal{P}_v}{4\lambda} (R_1^2 - r^2)$$

\Rightarrow la température diminue lorsqu'on s'éloigne de l'axe.

VI - 2 - la résistance thermique

Ce paragraphe va nous permettre de préciser la notion de **résistance thermique** et d'en donner un exemple d'application.

Considérons un milieu conducteur de chaleur de coefficient de diffusion λ , ne dépendant que d'une seule variable d'espace et dont les températures aux points $x = \mathbf{0}$ et $x = L$ sont fixées.

Pour $x = \mathbf{0}, T = T_0$ et en $x = L, T = T_L$.

Nous considérons le régime permanent, indépendant du temps.

L'objectif est de relier, dans les conditions décrites ci-dessus, la différence de température $T_0 - T_L$ et le flux de chaleur à travers le milieu, en fonction des caractéristiques de celui-ci.

Le flux de chaleur à travers le milieu est $\Phi = -\lambda \frac{dT}{dx} S$

L'équation de diffusion est $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) = T_0 + (T_L - T_0) \frac{x}{L}$$

$$\Phi = j_{th} S = -\frac{\lambda S}{L} (T_L - T_0) \Leftrightarrow \frac{(T_L - T_0)}{\Phi} = \frac{L}{\lambda S}$$

Maintenant, rappelons que pour un fil de longueur L , de section S et de conductance γ , on exprime la résistance $R = \frac{L}{\gamma S}$

Si dans l'expression précédente, nous remplaçons V par T et γ par λ , on aura $R = \frac{L}{\lambda S} = R_{th}$ appelée **résistance thermique**.

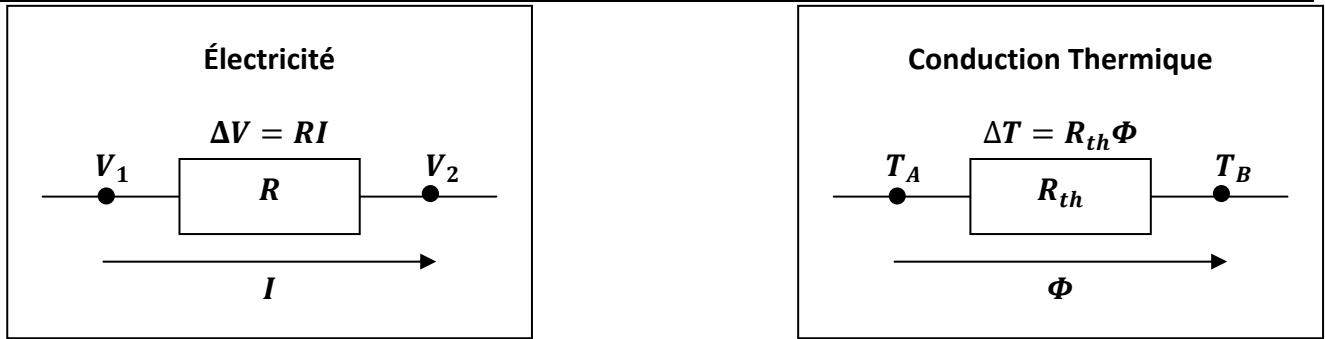
La loi d'Ohm s'écrit : $V_1 - V_2 = RI$ avec $V_1 - V_2$ la différence de potentiel et I le flux d'électrons à travers la section.

Pour un problème en régime permanent donné, connaissant les températures limites, nous pourrons alors déterminer le flux thermique de façon très simple par analogie avec la loi d'Ohm $T_1 - T_2 = R\Phi$

La résistance thermique R_{th} s'exprime en K.W⁻¹.

On définit aussi la **conductance thermique** par : $G_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}} = \frac{1}{R_{th}}$

$\Phi_{1 \rightarrow 2}$ est le **flux thermique** qui traverse deux isothermes : c'est le flux thermique existant en régime permanent entre les faces d'entrée et de sortie d'un conducteur thermique.

VI - 2 - a - Association de résistances thermiques

Comme pour les résistances électriques, les résistances thermiques peuvent être associées.

On considère trois matériaux **A**, **B** et **C** d'épaisseur L_A , L_B et L_C et de conductivité respective λ_A , λ_B et λ_C .

On considère que le contact entre chaque couche est parfait, c'est-à-dire que la température à l'interface entre les deux matériaux est identique dans chaque matériau (pas de saut de température au passage d'une interface).

$$\text{Globalement, nous avons : } T_1 - T_4 = \frac{L}{\lambda S} \Phi$$

$$\text{Pour la couche A : } T_1 - T_2 = \frac{L_A}{\lambda_A S} \Phi$$

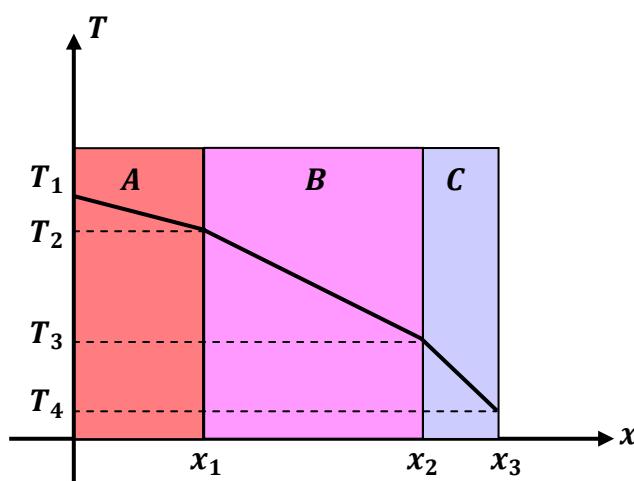
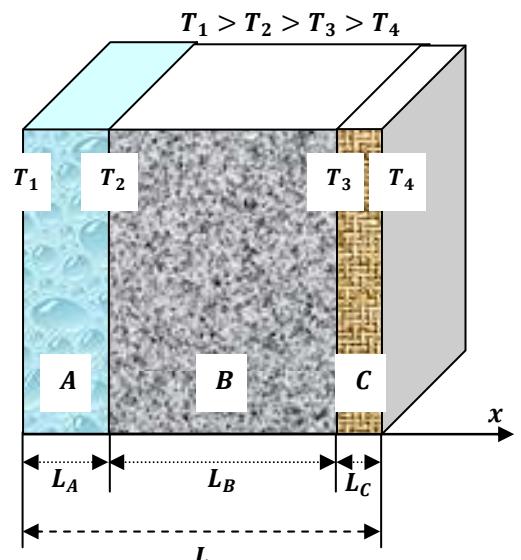
$$\text{Pour la couche B : } T_2 - T_3 = \frac{L_B}{\lambda_B S} \Phi$$

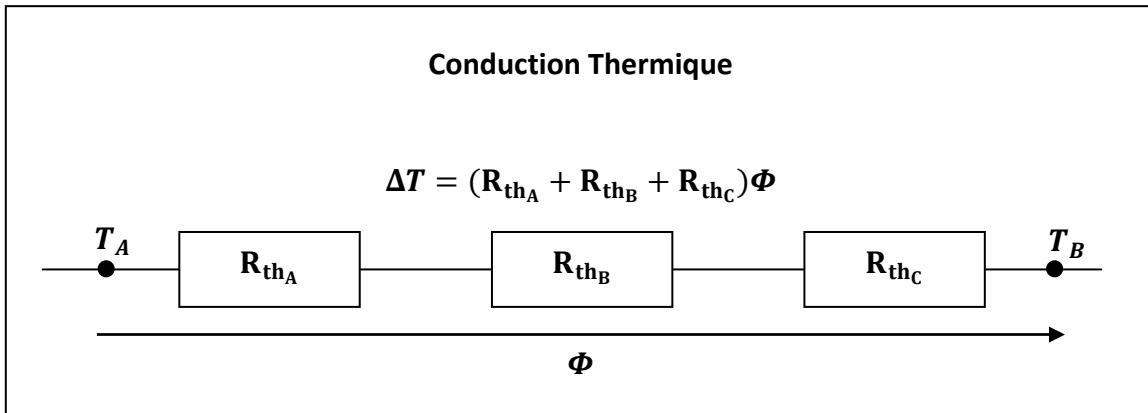
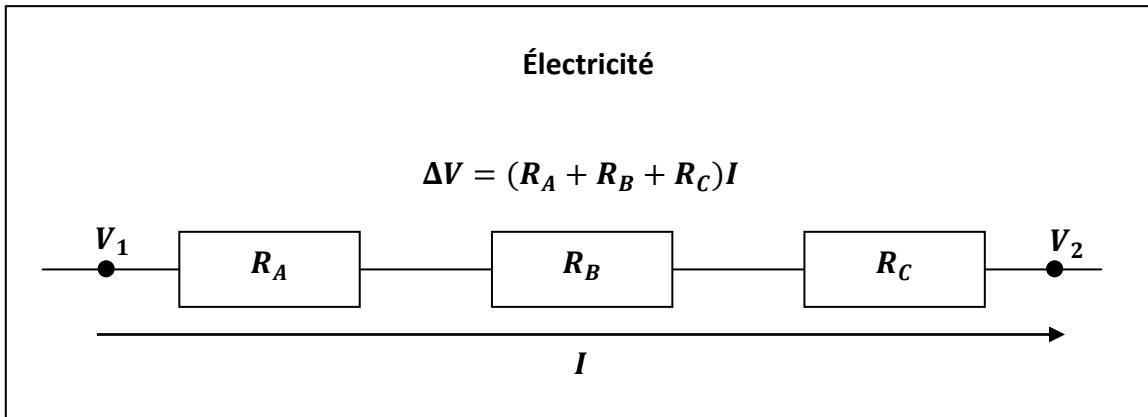
$$\text{Pour la couche C : } T_3 - T_4 = \frac{L_C}{\lambda_C S} \Phi$$

Le flux est constant \Rightarrow

$$T_1 - T_4 = (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + (T_3 - T_4)$$

$$\Rightarrow T_1 - T_4 = \left(\frac{L_A}{\lambda_A S} + \frac{L_B}{\lambda_B S} + \frac{L_C}{\lambda_C S} \right) \Phi = (R_{thA} + R_{thB} + R_{thC}) \Phi$$





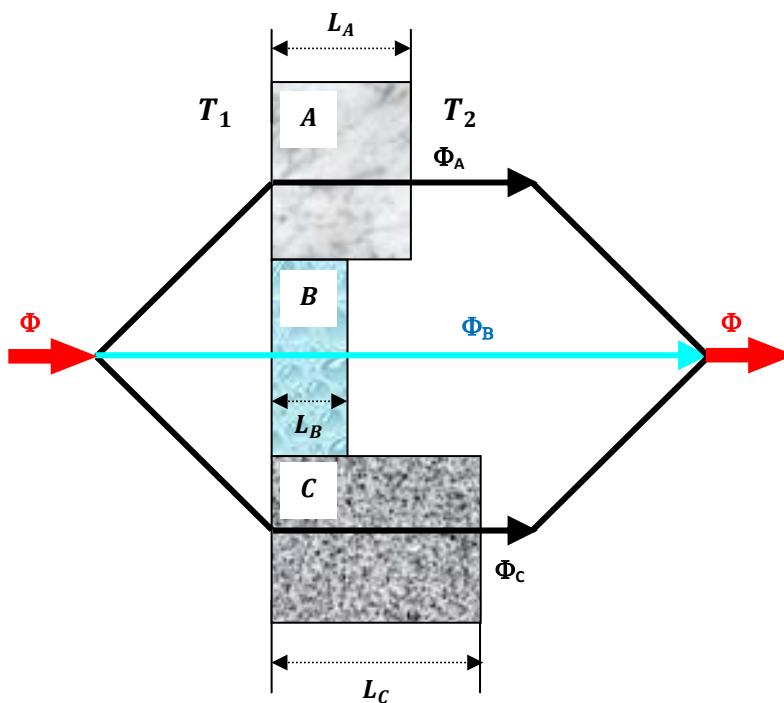
VI - 2 - b - Surfaces planes en parallèle

On considère des matériaux juxtaposés côte à côté. Chaque matériau est homogène et limité par deux plans parallèles. C'est par exemple le cas d'un mur avec une fenêtre.

On considère que la température est uniforme en surface de chaque élément (T_1 et T_2).

Soient S_A et S_B et S_C les surfaces respectives des éléments **A**, **B** et **C** et on suppose que le flux est perpendiculaire à la paroi composée.

$$T_1 > T_2$$



Il est également possible de faire une analogie entre un montage électrique de résistances en parallèle. Les conductances thermiques s'additionnent :

$$G_{th} = \frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th_A}} + \frac{1}{R_{th_B}} + \frac{1}{R_{th_C}} = \frac{1}{\frac{L_A}{\lambda_A S_A}} + \frac{1}{\frac{L_B}{\lambda_B S_B}} + \frac{1}{\frac{L_C}{\lambda_C S_C}}$$

VI - 2 - c - résistance thermique entre deux cylindres de rayons R_1 et R_2

Les surfaces isothermes sont des cylindres coaxiaux de rayon R_1 et R_2 et de hauteur H .

Les lignes de courant thermique sont radiales et

$$\vec{j}_{th} = j_{th}(r) \vec{u}_r$$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_S j_{th}(r) \vec{u}_r dS \vec{u}_r = j_{th}(r) S = j_{th}(r) 2\pi r H$$

$$j_{th}(r) = \frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{2\pi r H} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{1}{\lambda} j_{th}(r) = -\frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{2\pi r H \lambda} \quad \Rightarrow$$

$$T_2 - T_1 = -\frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{2\pi H \lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{2\pi H \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi H \lambda}$$

On a aussi :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{\lambda} j_{th}(r) = -\frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{2\pi r H \lambda} \quad \Rightarrow \quad T(r) = -\frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{2\pi H \lambda} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Avec r_0 une constante.

VI - 2 - d - résistance thermique entre deux sphères de rayons R_1 et R_2

Les surfaces isothermes sont des sphères de même centre et de rayons R_1 et R_2 .

Les lignes de courant sont radiales et $\vec{j}_{th} = j_{th}(r) \vec{u}_r$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_S j_{th}(r) \vec{u}_r dS \vec{u}_r = j_{th}(r) S = j_{th}(r) 4\pi r^2$$

$$j_{th}(r) = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{1}{\lambda} j_{th}(r) = -\frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{4\pi r^2 \lambda} \quad \Rightarrow$$

$$T_2 - T_1 = -\frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{4\pi \lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \Rightarrow$$

$$R_{th} = \frac{1}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

On a aussi :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{4\pi r^2 \lambda} \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{4\pi \lambda} \frac{1}{r} + B$$

Avec B une constante.