

TD 13 : Dynamique du point matériel

I. Tester ses connaissances et sa compréhension du cours

- 1) Définir un référentiel galiléen et donner des exemples.
- 2) Rappeler les lois de Coulomb. Pourquoi parle-t-on de lois phénoménologiques ?
- 3) Retrouver les résultats de la chute d'un point matériel soumis à des frottements linéaires.
- 4) Retrouver les résultats du mouvement parabolique d'un point matériel soumis à des frottements linéaires.
- 5) Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique.

II. Questions de réflexion – Physique pratique

1) Condition d'équilibre

Soit un point matériel tel que la somme des forces qu'il subit est nulle. Ce point est-il immobile ?

2) Ascenseur

Un ascenseur de masse $m = 1300 \text{ kg}$ monte avec une accélération $a = 1,5 \text{ m.s}^{-2}$.

Quelle est la tension du câble qui le hisse ?

3) Coefficient de frottement nul

Donner un cas simple où le coefficient de frottement est quasi nul.

4) Cartons et déménageurs

Un déménageur doit pousser sur le sol deux lourds cartons identiques. Vaut-il mieux les faire glisser superposés, ou placés l'un derrière l'autre ?

5) Coefficient de frottement papier-papier

Imaginer une expérience simple permettant de mesurer le coefficient de frottement papier-papier. La réaliser.

III. Exercices d'entraînement

1) La physique du basket-ball !! (DS7 2019)

Je vous propose dans ce problème de modéliser les tirs effectués au basket-ball et d'étudier les conditions nécessaires pour qu'un tir au basket-ball atteigne le panier.

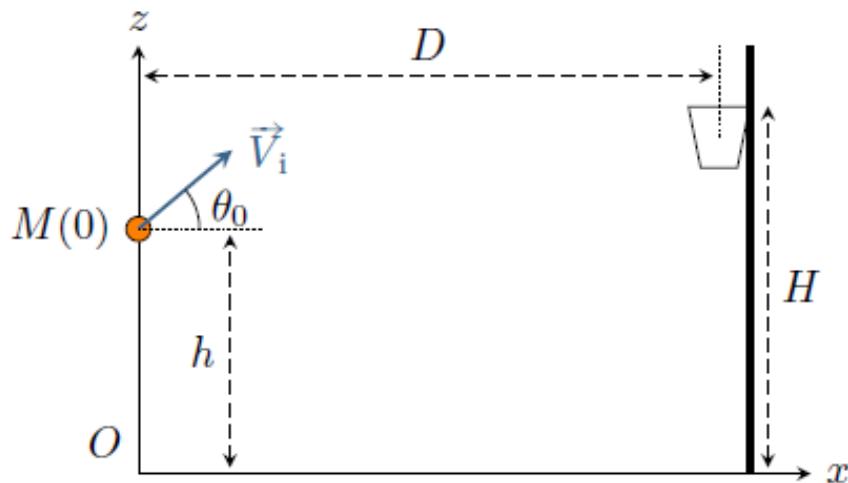
Dans ce problème, on assimilera le ballon de basket à un point matériel $M(m)$ et on négligera également les éventuels rebonds sur le plateau perpendiculaire au panier.

À l'instant initial, le ballon quitte les mains d'un joueur à une hauteur h au dessus du sol et à distance D du panier.

On note O la projection de la position initiale du ballon sur le sol, et (Ox) l'axe horizontal du terrain assimilé au référentiel terrestre galiléen de repère fixe (Oxz) .

Le joueur donne au ballon une vitesse initiale \vec{v}_0 supposée parfaitement orientée vers le panier et formant un

angle θ_0 avec l'horizontale.



Données numériques :

- ✗ Champ de pesanteur terrestre : $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
- ✗ Masse du ballon : $m = 624 \text{ g}$
- ✗ Hauteur du panier : $H = 3,05 \text{ m}$
- ✗ Hauteur initiale du ballon : $h = 2,30 \text{ m}$

Rappel mathématique : $\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$

Dans cette première partie, on négligera totalement les frottements de l'air ainsi que la rotation éventuelle du ballon.

- 1.1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que le ballon, assimilé à un point matériel $M(m)$, est soumis à une accélération constante.
- 1.2. Établir les équations horaires (paramétriques) du mouvement du ballon $x(t), y(t), z(t)$.
- 1.3. Montrer que la trajectoire du ballon est plane.
- 1.4. Que peut-on dire du mouvement selon l'axe (Ox) ? Selon l'axe (Oz) ?
- 1.5. Établir l'équation cartésienne de la trajectoire.

- 1.6. Établir une équation portant sur l'angle θ_0 pour que le panier soit marqué.

L'écrire sous forme d'un polynôme en $\tan \theta_0$

- 1.7. Montrer que cette équation n'admet de solution physiquement acceptable que si :

$$v_0^4 - 2g(H-h)v_0^2 - g^2D^2 \geq 0$$

- 1.8. Montrer que cette condition n'est vérifiée que si la vitesse initiale v_0 est supérieure à une vitesse minimale $v_{0\min}$ telle que : $v_{0\min} = \sqrt{g(H-h + \sqrt{(H-h)^2 + D^2})}$

- 1.9. On suppose que le joueur tente un lancer franc ($D = 4,60 \text{ m}$) en lançant le ballon à la vitesse $v_0 = 10,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. A-t-il une chance de marquer le panier ?

- 1.10. Déterminer littéralement puis numériquement la (les) valeurs d'angle θ_0 qu'il peut donner pour marquer le panier.

2) Influence des frottements sur le mouvement du pendule simple (*)

On considère un point matériel M de masse m , accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse nulle.

L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre.

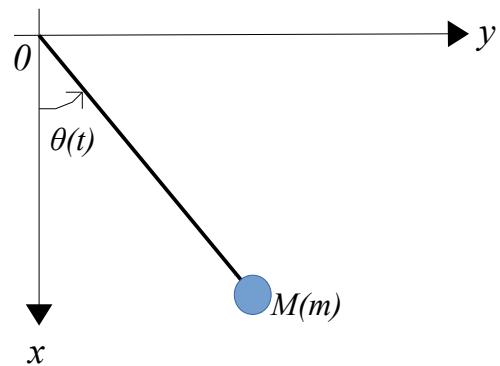
On note $\theta(t)$ l'angle orienté entre le l'axe (Ox) et le vecteur position.

On suppose que le mouvement reste dans le plan vertical (Oxy), l'angle $\theta(t)$ restant toujours faible.

A l'instant $t = 0$, on lâche la masse d'un angle θ_0 sans vitesse initiale.

Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de $\theta(t)$ diminue lentement.

On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par la force de frottements fluide : $\vec{F} = -h \cdot \vec{v}$ où h est une constante positive et \vec{v} le vecteur vitesse de M à chaque instant.



1. Établir l'équation différentielle linéaire vérifiée par $\theta(t)$, et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta(t) = 0$$

2. Proposer un programme PYTHON permettant d'implémenter la méthode d'Euler vectorielle, à savoir résoudre numériquement l'EDNL $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta(t) = 0$ sur l'intervalle de temps $[0 ; 20s]$ compte tenu des conditions initiales $\theta_0 = 0,1 \text{ rad}$ et $\dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$

3.1. A quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

3.2. Dans ce cas, déterminer la pseudo-période T. Que représente alors τ ?

3.3. On appelle décrément logarithmique la quantité $\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\theta(t) - \theta(\infty)}{\theta(t+nT) - \theta(\infty)} \right)$.

Exprimer le décrément logarithmique δ en fonction de T et τ .

4.1. La figure ci-dessous représente les variations de $\theta(t)$ avec le temps.

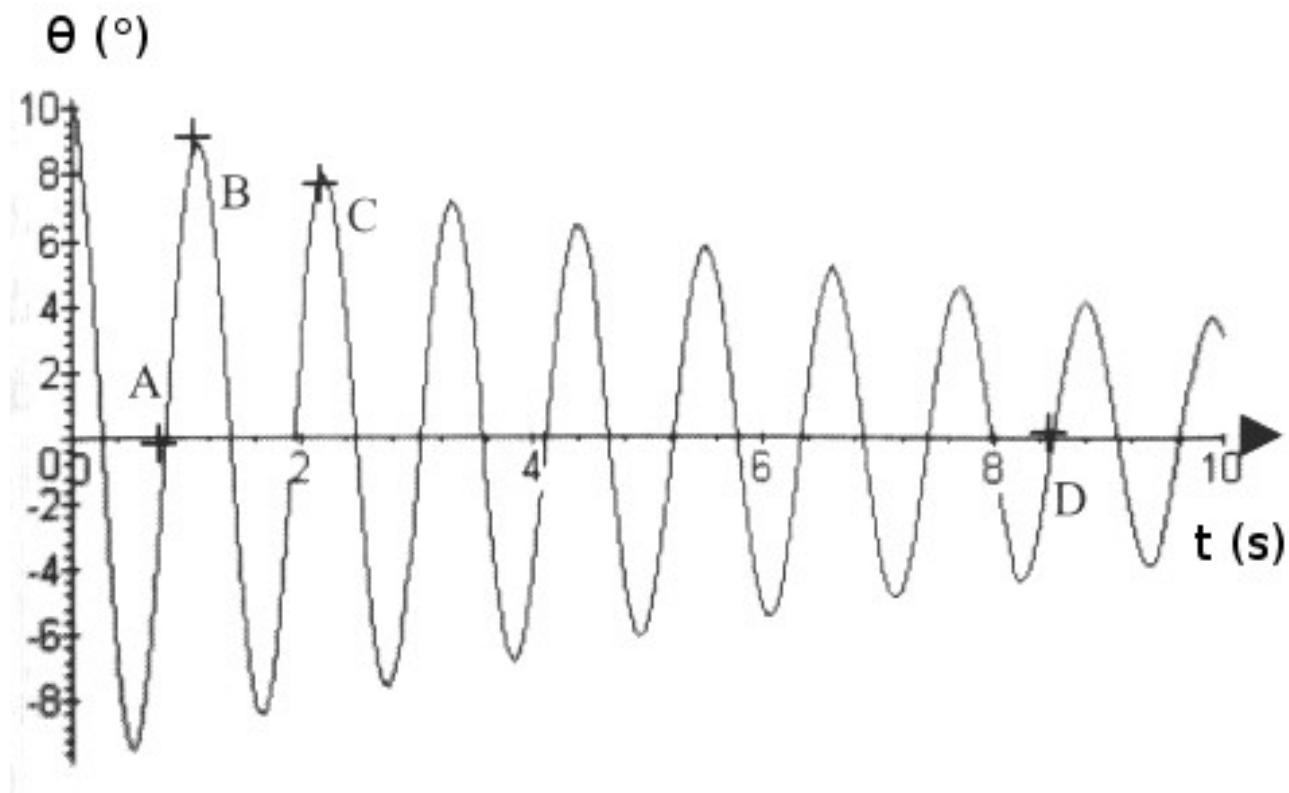
On précise les coordonnées de quatre points particuliers :

Points	A	B	C	D
t en secondes	0,53	1,10	2,20	8,25
θ en degrés	0,00	8,95	8,02	0,00

La masse vaut $m = 470 \text{ g}$.

Calculer numériquement, à partir des valeurs expérimentales :

- le décrément logarithmique
- la pseudo-période T
- le temps τ
- le coefficient de frottement fluide h



3) Temps de transit de gouttes d'eau dans l'atmosphère

Une goutte d'eau sphérique de rayon a , indéformable et de masse volumique ρ , tombe dans le champ de pesanteur uniforme \vec{g} suivant un axe vertical (Oz) dirigé vers le bas.

L'atmosphère exerce sur la goutte d'eau une force de traînée, opposée à la vitesse, et qui s'exprime selon la relation : $\vec{F} = -6\pi \cdot \eta \frac{a \vec{v}}{1 + l/a}$. On négligera la poussée d'Archimète de l'air.

1. Exprimer la vitesse limite de chute de la goutte que l'on notera \vec{v}_l

2. On donne $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $l = 0,07 \mu\text{m}$ et $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ N.s.m}^2$

Calculer v_l pour $a = a_1 = 0,01 \text{ mm}$ puis pour $a = a_2 = 0,1 \text{ mm}$.

3. L'atmosphère est modélisée par une couche uniforme de hauteur 8 km.

En utilisant les résultats précédents, calculer le temps de transit des gouttes partant du haut de l'atmosphère et de rayons respectifs a_1 et a_2

4) Glissade d'un enfant sur un igloo (*)

Un enfant de masse m glisse sans frottements sur un igloo sphérique de rayon R .

L'enfant commence à glisser à $t = 0$ à partir du sommet sans vitesse initiale.

On assimilera l'enfant à un point matériel repéré à l'instant t par l'angle polaire $\theta(t)$.

1. Projeter le PFD dans la base locale polaire.

2. Établir la relation entre la position angulaire $\theta(t)$ et la vitesse angulaire $\omega(t)$.

3. Donner l'expression de la réaction de l'igloo sur l'enfant en fonction de sa position angulaire $\theta(t)$.

4. L'enfant décolle-t-il ? Si oui, pour quel angle ? Effectuer l'application numérique.

5) Lancer d'une Brique sur un plan incliné

On considère un plan incliné d'un angle $\alpha = 20^\circ$ par rapport à l'horizontale.

Une brique de masse $m = 600 \text{ g}$ est lancée depuis le bas du plan avec une vitesse \vec{v}_0 de norme $2,4 \text{ m.s}^{-1}$.

On utilise, pour étudier le mouvement, un axe (Ox) parallèle au plan incliné et dirigé vers le haut tel que le point O coïncide avec le départ de la brique.

1. On suppose que le contact entre la brique et le plan incliné se fait sans frottements secs.

a. Établir l'équation horaire du mouvement de la brique lors de la montée.

b. Déterminer la date à laquelle la brique s'arrête ainsi que la distance qu'elle aura parcourue.

2. On prend en compte les frottements secs tel que $f = 0,2$ soit le coefficient de frottement dynamique.

Répondre aux mêmes questions dans ce cas.

6) Tout schuss !! (*)

On étudie le mouvement d'un skieur descendant une piste selon la ligne de plus grande pente, faisant l'angle α avec l'horizontale. L'air exerce une traînée aérodynamique supposée linéaire.

On choisit comme origine de l'axe (Ox) de la ligne de plus grande pente la position initiale du skieur, supposé partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable.

On note (Oy) la normale à la piste dirigée vers le haut.

1. Déterminer les expressions des composantes tangentielle et normale de la réaction du support.

2. Exprimer la vitesse instantanée \vec{v} et la position instantanée $x(t)$ du skieur.

3. a. Montrer que le skieur atteint une vitesse limite \vec{v}_l et exprimer \vec{v} en fonction de \vec{v}_l

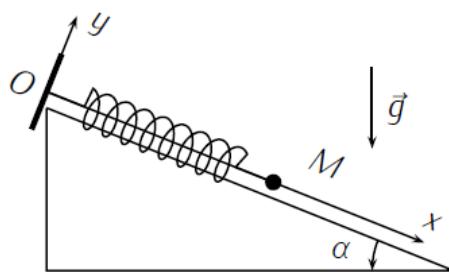
b. Application numérique : calculer v_l avec $\lambda = 1 \text{ S.I.}$; $f = 0,9$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; $m = 80 \text{ kg}$ et $\alpha = 45^\circ$.

4. Exprimer puis calculer la date t_l où le skieur possède une vitesse égale à $v_l/2$.

7) Système Masse-ressort sur plan incliné

On considère un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k , dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et à un point matériel M de masse m . On néglige dans ce problème tout frottement sec et fluide.

Soit un axe (Ox) dirigé selon le plan incliné (voir figure).



1. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre l_{eq} en fonction de l_0 , m , g , k et α .

2. À partir de la position d'équilibre l_{eq} , le point M est déplacé d'une distance $d < l_{eq}$ comptée positivement selon (Ox) et lâché sans vitesse initiale à $t = 0$.

Établir, pour $t \geq 0$, l'équation horaire du mouvement de M en fonction de d , k , m et l_{eq} .

8) Atterrissage en catastrophe d'un « Rafale » (*)

Un avion de chasse « Rafale » de masse $m = 9 \text{ t}$ en panne de freins atterrit à une vitesse $v_a = 241 \text{ km.h}^{-1}$.

Une fois au sol, il est freiné en secours par un parachute de diamètre $D = 3 \text{ m}$ déployé instantanément par le pilote au moment où les roues de l'avion touchent le sol.

On néglige les forces de frottement des roues sur le sol par rapport à la force de traînée (frottement fluide) du parachute s'écrit en norme $F = C_x \rho S \frac{v^2}{2}$ avec :

- v la vitesse de l'avion
- S la surface projetée du parachute sur un plan perpendiculaire à la vitesse
- C_x le coefficient de traînée supposé constant et égal à 1,5
- $\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ la masse volumique de l'air à Température et pression ambiantes.

1. On considère que le réacteur ne délivre plus aucune poussée.

a. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse v de l'avion.

b. En déduire l'expression de v en fonction de la date t . On prendra comme origine des temps la date à laquelle les roues de l'avion touchent le sol.

c. Montrer que la force de traînée n'est pas suffisante pour stopper complètement l'avion.

2. Dans le cas où les freins fonctionnent, la distance d'atterrissage de l'avion est de l'ordre de $d = 1400 \text{ m}$.

Déterminer la vitesse atteinte par l'avion après avoir été freiné uniquement par le parachute sur cette distance.

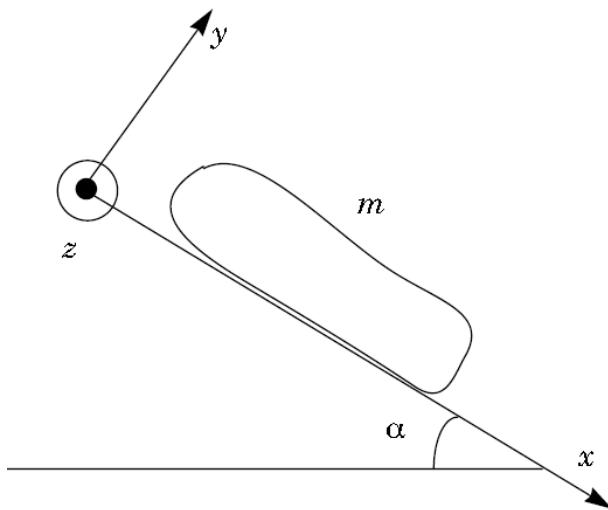
Effectuer l'application numérique.



9) Modélisation d'une avalanche (*)

Dans une avalanche, une masse de neige se détache sur une pente et la dévale en entraînant avec elle de la matière supplémentaire. Il en résulte une amplification qui conduit à un phénomène violent même à partir d'un déséquilibre faible.

On considère un bloc de neige de masse m reposant sur un plan incliné dont la pente est repérée par l'angle α . Le contact entre la neige et ce plan, décrit par les lois de Coulomb sur le frottement, est caractérisé par des coefficients de frottement statique f_s et dynamique f_d .



1. Montrer que l'équilibre est possible tant que $\alpha \leq \alpha_c$ et exprimer l'angle critique α_c
2. La masse de neige en équilibre sur une pente d'angle α_c subit une légère perturbation qui lui donne une vitesse initiale $v_0 \vec{e}_x$. Exprimer sa vitesse ultérieure $v(t)$.
3. L'énergie acquise sert en fait à mettre en mouvement de nouveaux blocs de neige, conduisant à l'amplification de l'avalanche. Les valeurs approximatives de f_s et f_d sont données dans le tableau ci-dessous pour différents types de neige.

	<i>Neige fraîche</i>	<i>Neige en gobelets</i>	<i>Neige à grains ronds</i>
f_s	Jusqu'à 10	1,2	1,2
f_d	0,3	0,7	0,4

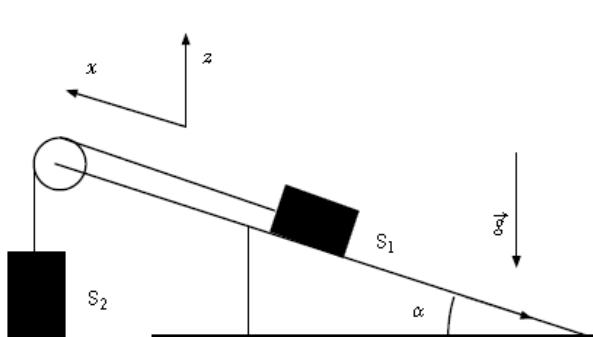
D'après la question précédente, quel type de neige conduit aux avalanches les plus violentes ?

On justifiera la réponse.

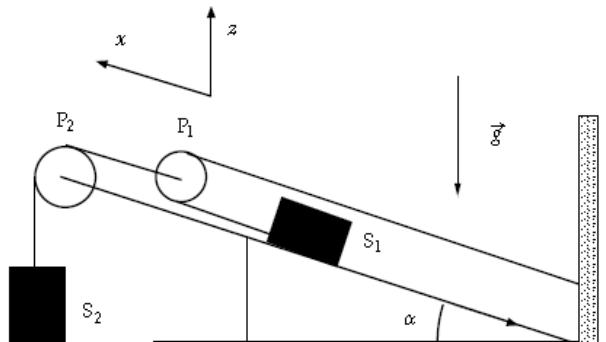
4. Animée d'une vitesse v_i , la masse de neige arrive dans une région où l'angle α prend une valeur plus faible, constante. À quelle condition portant sur α le mouvement est-il ralenti puis stoppé ?
5. Expliquer comment l'observation de nombreuses avalanches permet de déduire des valeurs numériques pour les coefficients de frottements telles que celles données dans le tableau.

10) Plan incliné et poulies (*)

Le solide S_1 (de masse m_1) glisse sans frottements sur le plan incliné et S_2 (de masse m_2) se déplace verticalement. Ces solides en translation sont considérés comme des points matériels, les poulies idéales (*i.e* de masse nulle) et le fil inextensible.



(a)



(b)

1. On cherche à déterminer l'accélération du solide S_2 (*figure a*).

1.1. Déterminer l'accélération $\ddot{z}(t)$ de S_2 et l'accélération $\ddot{x}(t)$ de S_1 en fonction de leur poids et de la tension T du fil.

1.2. Quelle relation lie $\ddot{z}(t)$ et $\ddot{x}(t)$? En déduire l'accélération $\ddot{z}(t)$ de S_2 et la tension T du fil.

2. On rajoute maintenant une poulie. La poulie P_2 reste fixée à l'extrémité du plan incliné, la poulie P_1 a son centre lié par un fil au solide S_2 et se déplace parallèlement au plan incliné.

2.1. Faire apparaître sur un schéma les forces s'exerçant sur la poulie P_1 .

2.2. Déterminer l'accélération du solide S_2 et les tensions des fils (*figure b*).

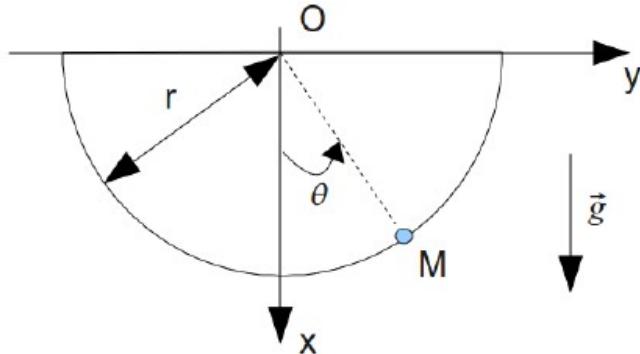
On réfléchira à l'application du principe fondamental de la dynamique à la poulie P_1 .

11) Oscillations d'un anneau sur un support circulaire (*)

Un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m , est astreint à coulisser sans frottement le long d'une tige circulaire de centre O et de rayon r , située dans le plan vertical (Oxy).

La position de M sera repérée par l'angle polaire $\theta(t)$.

A la date $t = 0$, on lâche M sans vitesse initiale d'un angle θ_0 .



1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique et le projeter dans la base locale cylindrique.
2. Proposer un programme PYTHON permettant d'implémenter la méthode d'Euler vectorielle, à savoir résoudre numériquement l'EDNL₂ $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{r} \sin \theta(t) = 0$ sur l'intervalle $[0 ; 50s]$ compte tenu des conditions initiales $\theta_0 = 0,5 \text{ rad}$ et $\dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$
- 3.1. Établir une expression de $\dot{\theta}^2(t)$ en fonction de $\theta(t)$, en intégrant l'une de ces projections.
- 3.2. En déduire l'expression de la réaction du support en fonction de $\theta(t)$ et des données du problème.
- 3.3. A quel endroit la norme de cette réaction est-elle maximale ?

On suppose que l'angle $\theta(t)$ reste petit au cours du mouvement.

- 4.1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
- 4.2. Donner l'expression de l'angle $\theta(t)$.

12) Coulissement d'un point M sur une tige en rotation (*)

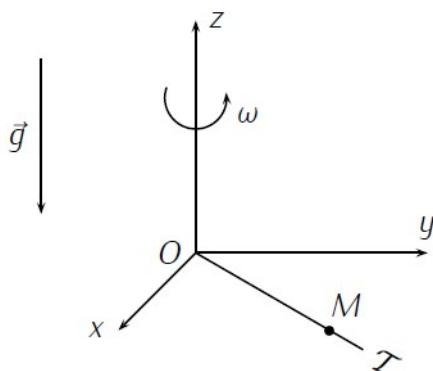
Une tige T horizontale passant par O tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω constante.

Un point matériel M de masse m peut coulisser sans frottements sur la tige.

Il est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan (Oxy).

À l'instant $t = 0$, le point M est abandonné sans vitesse initiale par rapport à la tige à la distance r_0 de l'origine O du repère.

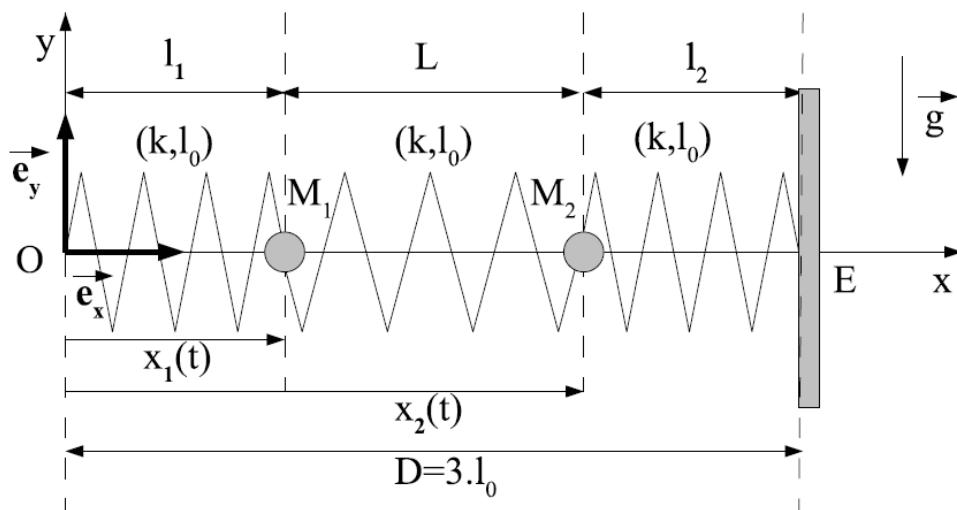
On suppose de plus qu'à ce même instant, la tige est confondue avec l'axe (Ox) : $\theta(t=0) = 0$.



1. Projeter le principe fondamental de la dynamique dans la BOND cylindrique.
2. En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $r(t)$.
3. Déterminer la loi horaire $r(t)$ en fonction de r_0 et ω . Tracer l'allure de $r(t)$ pour $t \geq 0$.
4. Établir l'équation de la trajectoire $r(\theta)$ puis tracer son allure.

13) Oscillateurs harmoniques couplés (*)

On considère un système constitué de deux oscillateurs reliés par un ressort central.



Les extrémités O et E sont fixes si bien que la distance $D = 3l_0$ est constante.

Les trois ressorts sont identiques. Les longueurs instantanées des ressorts, à un instant t quelconque, sont notées respectivement $l_1(t)$, $L(t)$ et $l_2(t)$.

Les deux masselottes (masse $m = 500 \text{ g}$) sont également identiques.

La position de M_1 , repérée par rapport à O , est notée $x_1(t)$, la position de M_2 , repérée par rapport à O , est notée $x_2(t)$.

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à M_1 , montrer que l'équation différentielle vérifiée par $x_1(t)$ est :

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2(2x_1 - x_2) = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2. De même, montrer que l'équation différentielle vérifiée par $x_2(t)$ est :

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2(2x_2 - x_1) = 3\omega_0^2 l_0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

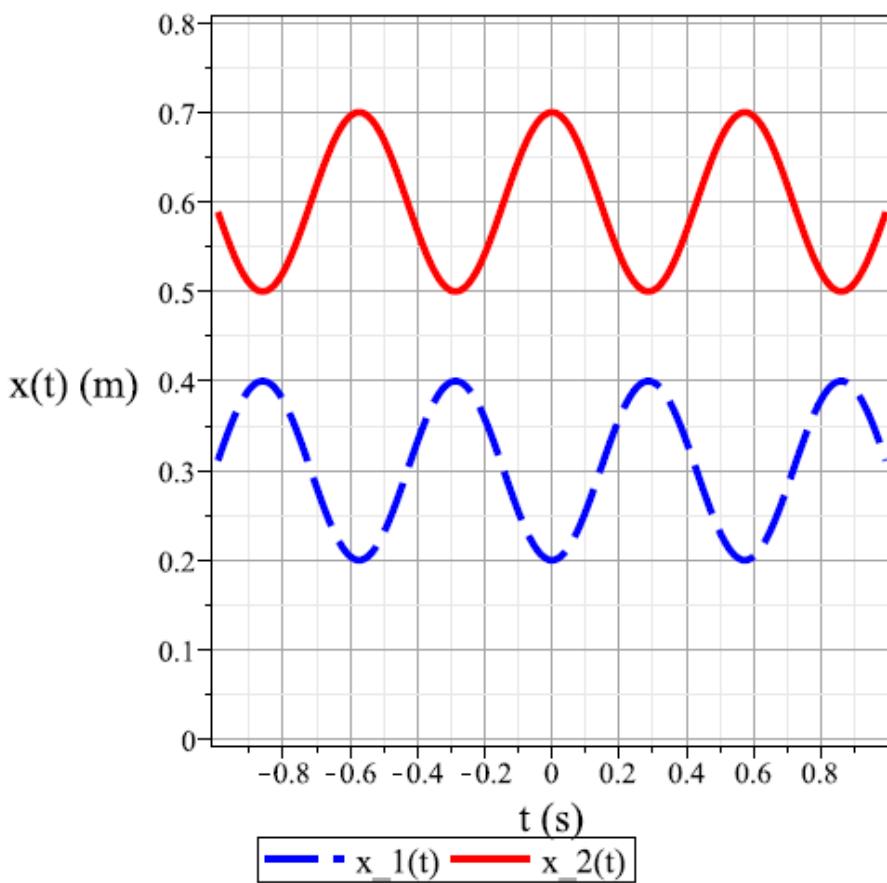
3. A partir des deux équations précédentes, déterminer les positions d'équilibre $x_{eq,1}$ et $x_{eq,2}$ de M_1 et M_2 .

Dans les conditions de l'expérience, la résolution des équations précédentes conduit aux solutions représentées sur le graphe suivant, qui montre que les mouvements de M_1 et M_2 sont sinusoïdaux.

4. Mesurer la période T des mouvements.

5. Mesurer l'amplitude A_1 et A_2 des mouvements.

6. Que vaut le déphasage $\Delta\Phi$ entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$? Justifier.



14) Propulsion d'une vedette hydroptère (*)

Un hydroptère est un type de bateau dont la coque s'élève et se maintient en équilibre hors de l'eau à partir d'une certaine vitesse grâce à la portance d'un ensemble d'ailes immergées qui fonctionnent selon le même principe qu'une aile d'avion.

On veut propulser à la vitesse de $v = 72 \text{ km.h}^{-1}$ une vedette de masse égale à 10 tonnes en la faisant supporter simplement par une aile sous-marine dont le coefficient de portance vaut 0,7 et le coefficient de traînée 0,06.



1. Exprimer l'équilibre vertical de la vedette et en déduire la surface S de l'aile.
2. Déterminer alors la puissance nécessaire à la propulsion.

15) Traînée d'une balle de ping pong (*)

Une balle de ping-pong, de masse $m = 2,7 \text{ g}$, de diamètre $D = 40 \text{ mm}$ est couramment envoyé à la vitesse $v = 100 \text{ km.h}^{-1}$.

1. Calculer le nombre de Reynolds $R_e = \frac{\rho v D}{\eta}$ associé à cette étude.

2. Adopter le modèle non linéaire de la force de traînée et la comparer au poids de la balle.

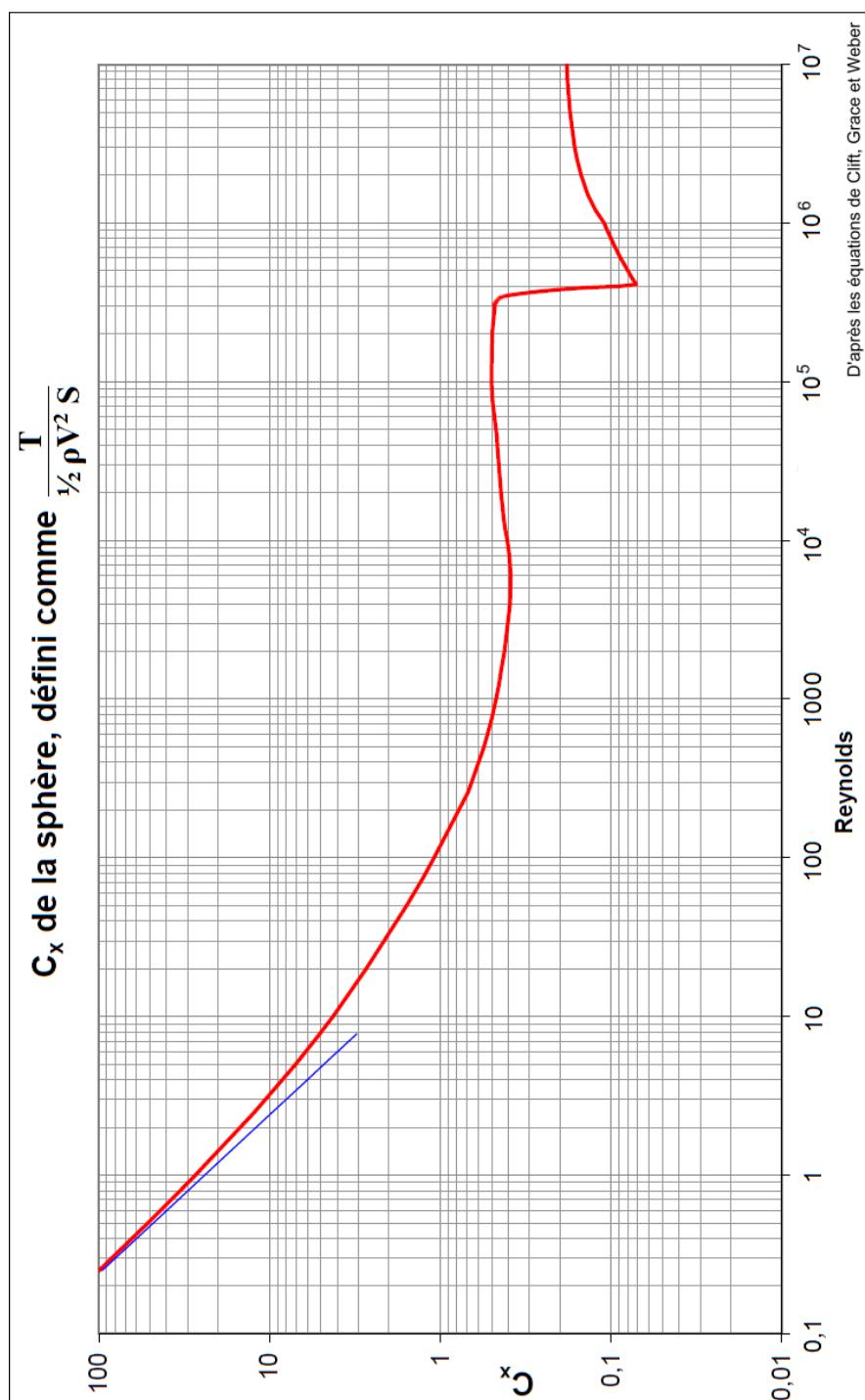
3. En 2000, le diamètre des balles est passé de 38 mm à 40 mm. Quelles peuvent être les raisons ?

4. Établir puis résoudre l'EDNL vérifiée par le vecteur vitesse.

En déduire l'expression de la loi horaire $x(t)$.

5. En supposant que le mouvement de la balle est horizontal, quelle est la vitesse de la balle après $d = 3 \text{ m}$?

La masse volumique de l'air est $\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ et sa viscosité dynamique $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$.



16) Mouvement d'un palet (*)

Un palet de masse m repéré par son centre de masse M est inséré en A dans un tambour tournant à la vitesse angulaire constante $\Omega = 70 \text{ tr}.\text{min}^{-1}$.

En contact avec le cylindre, son mouvement est circulaire de rayon $R = 0,35 \text{ m}$, repéré par l'angle polaire $\theta(t)$.

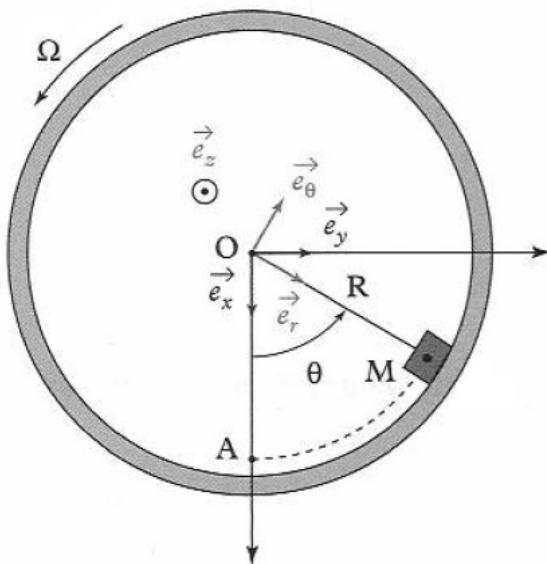
En A , le palet est supposé animé d'une vitesse $\vec{v} = R\Omega \vec{e}_\theta$ de sorte qu'il ne glisse pas sur le cylindre.

Le coefficient de frottement entre le palet et le tambour est noté f .

On s'intéresse ici à l'influence du coefficient de frottement sur le mouvement du palet.

Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.

On note g l'intensité du champ de pesanteur, avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.



1. Faire le bilan des forces appliquées au palet et établir les relations scalaires issues du principe fondamental de la dynamique.

2. En supposant un mouvement sans glissement, établir la condition sur Ω pour que le palet effectue un tour complet. D'après les valeurs proposées, est-elle vérifiée ici ?

3. On suppose que le palet se met à glisser sur le tambour.

Déterminer le coefficient de frottement f_0 qui correspondrait à une stabilisation du palet M à la position $\theta = \theta_0$

Représenter graphiquement la dépendance de f_0 en fonction de θ_0 pour $\theta_0 \in [0, \pi/2[$.

Que se passe-t-il pour θ_0 pour $\theta_0 \geq \pi/2$?

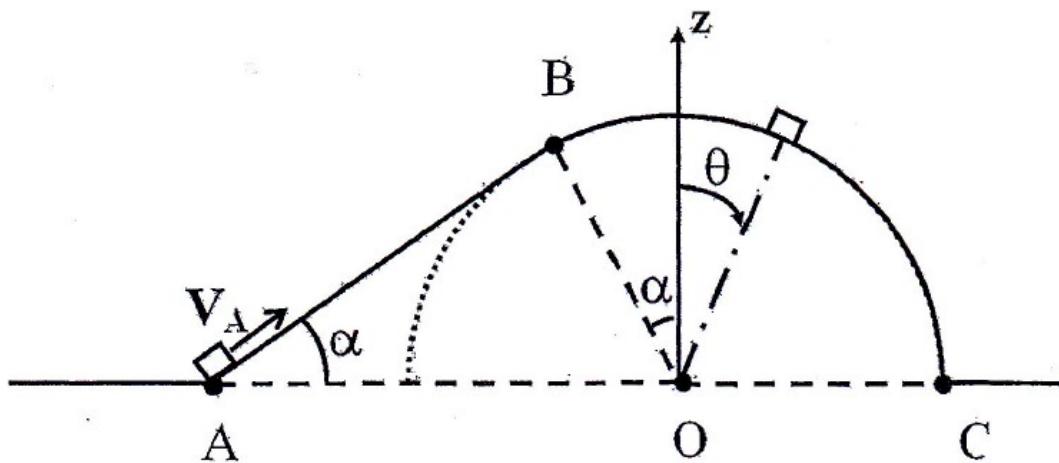
4. Déterminer le coefficient de frottement f_l qui correspondrait à un début de glissement à la position $\theta = \theta_l$ (quand M s'éloigne de A).

Représenter graphiquement la dépendance de f_l en fonction de θ_l pour $\theta_l \in [0, \pi[$.

5. En déduire le coefficient de frottement minimal $f = f_{\min}$ qui permet au palet de faire un tour sans qu'il y ait glissement.

17) ENAC 1

1. Un palet M de masse $m = 5,0 \text{ kg}$, assimilé à un point matériel, est lancé sur une piste composée d'une portion rectiligne AB et inclinée d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, de rayon $R = 2 \text{ m}$ et d'angle $B\hat{O}C = \pi/2 + \alpha$ (cf figure ci-dessous). Le palet initialement lancé depuis A avec la vitesse V_A glisse sans frottement sur la piste. On désigne par $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ l'intensité du champ de pesanteur.



Déterminer la vitesse V_B au point B en supposant que ce point est atteint.

A) $V_B = (V_A^2 - 2gR \cos \alpha)^{1/2}$

C) $V_B = V_A - \frac{gR \cos \alpha}{V_A}$

B) $V_B = (V_A^2 + gR \sin \alpha)^{1/2}$

D) $V_B = V_A - \frac{gR \tan \alpha}{V_A}$

2. Afin que B soit effectivement atteint par le palet, il est nécessaire que $V_A > V_{A,l}$. Evaluer $V_{A,l}$.

A) $V_{A,l} \approx 0,1 \text{ m.s}^{-1}$

B) $V_{A,l} \approx 1 \text{ m.s}^{-1}$

C) $V_{A,l} \approx 6 \text{ m.s}^{-1}$

D) $V_{A,l} \approx 30 \text{ m.s}^{-1}$

Pour les questions suivantes on suppose la condition précédente vérifiée.

3. Calculer la durée τ de parcours de la portion AB.

A) $\tau = \frac{V_A - (V_A^2 - 2gR \cos \alpha)^{1/2}}{g \sin \alpha}$

C) $\tau = \frac{V_A - (2gR \sin \alpha)^{1/2}}{g \cos \alpha}$

B) $\tau = \frac{(V_A^2 - 3gR \cos \alpha)^{1/2}}{g \sin \alpha}$

D) $\tau = \frac{V_A + (V_A^2 + 2gR \sin \alpha)^{1/2}}{g \cos \alpha}$

4. Déterminer l'expression de la réaction normale R_N du support sur M lors de la phase du mouvement sur l'arc BC en fonction de θ qui est l'angle entre OM et la verticale.

A) $R_N = mg \cos \theta$

C) $R_N = m(g \cos \theta - R \dot{\theta}^2)$

B) $R_N = m(g \sin \theta + R \ddot{\theta})$

D) $R_N = mg \sin \theta$

5. A quelle condition sur V_A n'y aura-t-il pas de décollage avant le sommet ?

A) $V_A < (3Rg \cos \alpha)^{1/2}$

B) $V_A < (Rg \tan \alpha)^{1/2}$

C) $V_A < (3Rg)^{1/2}$

D) $V_A < (2Rg \sin \alpha)^{1/2}$

6. Déterminer la valeur θ_d de θ pour laquelle le palet quitte la piste.

A) $\theta_d = \arccos \left(\frac{2}{3} \right)$

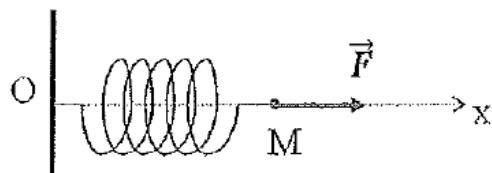
B) $\theta_d = \arccos \left(\frac{V_A^2}{3gR} \right)$

C) $\theta_d = \arcsin \left(\frac{V_A R}{2g} \right)$

D) $\theta_d = \arcsin \left(\frac{2}{3} \right)$

18) ENAC 2

1. Une perle de masse $m = 200\text{ g}$, supposée ponctuelle, peut coulisser sans frottement sur une tige horizontale. Cette perle est accrochée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur $k = 12\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ dont l'autre extrémité, notée O est fixe et sert d'origine à l'axe Ox . La perle est initialement au repos et on applique à partir d'un instant pris comme origine des temps une force \vec{F} constante.

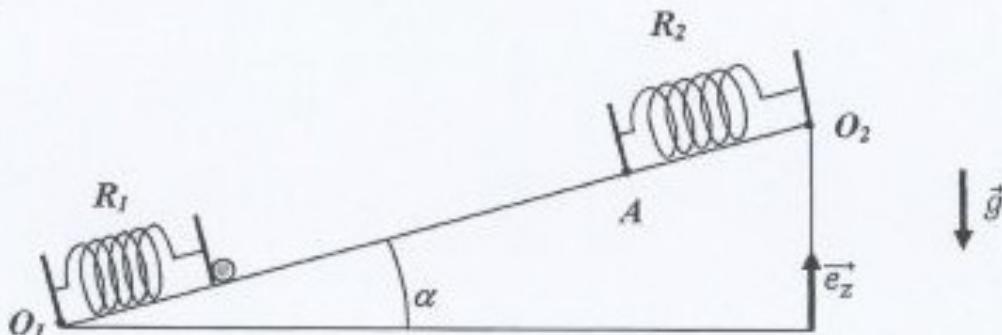


Déterminer l'expression de la pulsation ω_0 des oscillations et de $x(t)$ pour $t > 0$.

- A) $\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$
- B) $\omega_0 = \left(\frac{F}{ml_0}\right)^{1/2}$
- C) $x(t) = l_0 + \frac{F}{k} \cos(\omega_0 t)$
- D) $x(t) = l_0 + \frac{F}{k} - \frac{F}{k} \cos(\omega_0 t)$
2. L'énergie mécanique E_m de la perle au cours de ce mouvement est définie par la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle élastique. En appellant ω_0 la pulsation des oscillations, l'expression de E_m au cours du temps est :
- A) $E_m = \frac{1}{2}kl_0^2$
- B) $E_m = \frac{F^2}{k}(1 - \cos \omega_0 t)$
- C) $E_m = \frac{F^2}{m} \frac{t^2}{2}$
- D) $E_m = \frac{k}{2} \frac{F}{k} \cos(\omega_0 t)^2$
3. A l'instant $t = \tau$, on cesse d'appliquer la force \vec{F} . Déterminer l'amplitude x_m des oscillations ultérieures en fonction de τ .
- A) $x_m = \frac{F}{k} \sin\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right)$
- B) $x_m = l_0 + \frac{F}{k} \cos\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right)$
- C) $x_m = 2 \frac{F}{k} \sin(\omega_0 \tau)$
- D) $x_m = \frac{F}{k} \cos(\omega_0 \tau)$
4. Calculer la valeur numérique minimale de τ qui assure des oscillations d'amplitude maximale.
- A) $\tau \approx 0,4\text{ s}$
- B) $\tau \approx 15\text{ s}$
- C) $\tau \approx 0,08\text{ s}$
- D) $\tau \approx 2\text{ s}$
5. Calculer alors le travail W_F fourni par la force \vec{F} entre $t = 0$ et $t = \tau$.
- A) $W = Fl_0$
- B) $W = 2Fl_0$
- C) $W = \frac{2F^2}{k}$
- D) $W = \frac{F^2}{k}$
6. Lors de l'expérience, on constate que l'amplitude des oscillations dans la deuxième phase du mouvement est divisée par 2 après 25 oscillations. En supposant que le frottement est de type fluide (force proportionnelle à la vitesse), évaluer le facteur de qualité Q de cet oscillateur. On donne $\ln 2 \approx 0,7$.
- A) $Q \approx 0,7$
- B) $Q \approx 5$
- C) $Q \approx 25$
- D) $Q \approx 100$

19) ENAC 3

25. Une bille M de masse m , peut se déplacer sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (cf. figure). Elle est mise en mouvement à l'aide d'un ressort R_1 de constante de raideur k_1 et de longueur à vide l_0 . En haut du plan incliné se trouve un autre ressort R_2 de constante de raideur k_2 et de même longueur à vide $O_2A = l_0$. On donne la longueur $O_1O_2 = 4l_0$ et on désigne par $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ le champ de pesanteur terrestre. L'origine des énergies potentielles de pesanteur est prise en O_1 . Les ressorts sont de masse négligeable.



Déterminer la longueur du ressort R_1 , notée l_{eq} , correspondant à un équilibre de la bille.

- A) $l_{eq} = l_0 - \frac{mg \cos \alpha}{k_1}$ C) $l_{eq} = l_0 + \frac{mg \cos \alpha}{k_1}$
 B) $l_{eq} = l_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k_1}$ D) $l_{eq} = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k_1}$
26. On déplace la bille d'une distance a : $O_1M = l_{eq} - a$. Déterminer la période T_0 des petites oscillations qui ont alors lieu autour de la position d'équilibre précédente.
- A) $T_0 = \left(\frac{m}{k_1}\right)^{1/2}$ C) $T_0 = 2\pi \left(\frac{m}{k_1 \sin \alpha}\right)^{1/2}$
 B) $T_0 = 2\pi \left(\frac{m \sin \alpha}{k_1}\right)^{1/2}$ D) $T_0 = 2\pi \left(\frac{mg \sin \alpha}{k_1 a}\right)^{1/2}$
27. On comprime le ressort R_1 jusqu'à ce que sa longueur soit l_1 . Après avoir lâché la bille sans vitesse initiale, on constate qu'elle atteint le point A avec une vitesse nulle. On néglige les frottements entre la bille et le plan incliné. En déduire l'expression de k_1 .
- A) $k_1 = \frac{2mg \cos \alpha (3l_0 - l_{eq})^2}{l_0 - l_{eq}}$ C) $k_1 = \frac{2mg \sin \alpha (3l_0 - l_{eq})}{(l_{eq} - l_1)^2 - 4l_0^2}$
 B) $k_1 = \frac{2mg \cos \alpha (3l_0 - l_1)^2}{l_1 - 2l_0}$ D) $k_1 = \frac{2mg \sin \alpha (3l_0 - l_1)}{(l_0 - l_1)^2}$
28. Déterminer la longueur critique l_{cr} du ressort R_1 au moment où le contact entre la bille et R_1 cesse, puis la durée de contact entre la bille et le ressort R_1 .
- A) $l_{cr} = l_0$ C) $t_1 = \frac{mg \sin(\alpha)}{k_1(l_1 - l_{eq})}$
 B) $l_{cr} = 2l_0 - l_1$ D) $t_1 = \left(\frac{m}{k_1}\right)^{1/2} \arccos\left(\frac{l_0 - l_{eq}}{l_1 - l_{eq}}\right)$

20) ENAC 4

Une gouttelette d'eau sphérique, de masse m et de diamètre D , tombe dans l'air en étant soumise à trois forces de direction verticale : son poids, la poussée d'Archimède \mathbf{F}_A et une force de frottement visqueux due à l'air $\mathbf{F}_f = -\alpha \mathbf{v}$, où \mathbf{v} est le vecteur vitesse de la gouttelette, dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen, et $\alpha = 3\pi\eta D$, η étant un paramètre caractéristique de l'air appelé viscosité. On précise qu'il n'est pas nécessaire de connaître cette grandeur pour résoudre le problème posé. On note \mathbf{g} le vecteur champ de pesanteur terrestre supposé uniforme.

On donne la masse volumique de l'eau liquide, $\rho_e \approx 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, et celle de l'air, $\rho_a \approx 1 \text{ kg.m}^{-3}$.

1. À l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité SI (Système International) de η .

A) kg.m.s B) $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}$ C) kg.m.s^{-1} D) $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$

2. On néglige la poussée d'Archimède devant les deux autres forces. Quelle est, sous forme vectorielle, l'équation différentielle du premier ordre qui décrit le mouvement de la gouttelette dans \mathcal{R} ? Dans les expressions ci-dessous, t est le temps.

A) $\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} = \mathbf{g}$ où $\tau = \frac{\alpha}{m}$
 B) $\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{\mathbf{v}}{\tau} = \mathbf{g}$ où $\tau = \frac{m}{\alpha}$

C) $\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} = \mathbf{g}$ où $\tau = \frac{m}{\alpha}$
 D) $\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{\mathbf{v}}{\tau} = \mathbf{g}$ où $\tau = \frac{\alpha}{m}$

3. La poussée d'Archimède étant toujours négligée, quelle est, dans \mathcal{R} , l'expression de $\mathbf{v}(t)$ sachant que la vitesse initiale de la gouttelette est nulle?

A) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{g}\tau$
 B) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{g}\tau \left[1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$

C) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{g}\tau \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$
 D) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{g}\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

4. On s'intéresse maintenant au vecteur position \mathbf{r} de la gouttelette. La poussée d'Archimède étant toujours négligée, déterminer $\mathbf{r}(t)$ sachant que la position initiale de la gouttelette est nulle.

A) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{g}\tau t - \tau^2 \mathbf{g} \left[1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$
 B) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{g}\tau t + \tau^2 \mathbf{g} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$

C) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{g}\tau t - \tau^2 \mathbf{g} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$
 D) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{g}\tau t$

5. Exprimer, en fonction de D , η , ρ_e et g , la vitesse limite v_l de la gouttelette, puis calculer sa valeur approximative. On donne $D = 10 \mu\text{m}$, $\eta \approx 2 \times 10^{-5} \text{ SI}$ (SI = Système International des unités) et $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$ (g est la norme de \mathbf{g}).

A) $v_l = \frac{\rho_e g D^2}{18\eta}$ et $v_l \approx 2,5 \text{ mm.s}^{-1}$
 B) $v_l = \frac{18\eta}{\rho_e g D^2}$ et $v_l \approx 25 \text{ mm.s}^{-1}$

C) $v_l = \frac{\rho_e g D^2}{18\eta}$ et $v_l \approx 0,25 \text{ m.s}^{-1}$
 D) $v_l = \frac{\rho_e g D}{18\eta}$ et $v_l \approx 2,5 \text{ cm.s}^{-1}$

IV. Résolution de problème

Chute et matelas

Une personne chute du cinquième étage d'un immeuble.

Estimer l'épaisseur de matelas posés par terre afin qu'elle ne se blesse pas.

Comment éviter le mur !!

Une voiture suit une trajectoire rectiligne sur le sol horizontal à une vitesse constante \vec{v}_0 jusqu'à l'instant $t = 0$ où le conducteur aperçoit un mur perpendiculaire à \vec{v}_0 à la distance D .

On suppose pour simplifier que seulement deux choix s'offrent au conducteur :

- ✓ soit il freine brutalement en bloquant les roues (la voiture n'a pas d'ABS) tout en gardant une trajectoire rectiligne
- ✓ soit il tourne sans freiner et à la limite du dérapage sur une trajectoire circulaire pour essayer d'éviter le mur

Quel est le meilleur choix ?

Le sublime coup franc de Cristiano Ronaldo à la coupe du monde 2018

Alors que l'Espagne menait 3-2 face au Portugal à deux minutes de la fin du temps réglementaire...Cristiano Ronaldo inscrit un somptueux coup franc direct (à 33 m) qui a remis les deux équipes à égalité.

Le ballon passe au-dessus du mur (situé à 9,15 m du tireur) pour aller se retrouver dans la lucarne (sous la barre transversale du but, à 2,44 m de hauteur).

Évaluer la vitesse initiale du ballon lors du tir de CR7.

