Résumé des Formules de Mécanique du Point Matériel

D'après le cours de CPI1A

Octobre 2025

1 Chapitre 1: Cinématique classique du point

1.1 Systèmes de Coordonnées

1.1.1 Coordonnées Cartésiennes

Le vecteur position d'un point M est donné par ses coordonnées (x, y, z).

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad x, y, z \in]-\infty, +\infty[$$

1.1.2 Coordonnées Cylindriques

Les coordonnées d'un point M sont (r, θ, z).

- Relation avec les coordonnées cartésiennes:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

- Domaine de définition:

$$r \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad z \in]-\infty, +\infty[$$

- Vecteur position dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

- Dérivées des vecteurs de base par rapport à l'angle de rotation θ:

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$$

1.1.3 Coordonnées Sphériques

Les coordonnées d'un point M sont (r, θ, φ).

- Relation avec les coordonnées cartésiennes:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

- Domaine de définition:

$$r \in [0, +\infty[, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

- Vecteur position dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r$$

1.2 Grandeurs Cinématiques

1.2.1 Vitesse

Définition de la vitesse instantanée dans un référentiel $\mathcal{R}$:

$$\vec{v}_{(M/\mathcal{R})} = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big/\mathcal{R}$$

- Dans la base cartésienne:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

- Dans la base cylindrique:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

- Dans la base sphérique:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

- Dans la base de Frenet:

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{t}$$

1.2.2 Accélération

Définition de l'accélération instantanée dans un référentiel $\mathcal{R}$:

$$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \frac{d\vec{v}_{(M/\mathcal{R})}}{dt}\Big/\mathcal{R} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\Big/\mathcal{R}$$

- Dans la base cartésienne:

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

- Dans la base cylindrique:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

- Dans la base de Frenet:

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{R_c}\vec{n} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{R_c}\vec{n}$$

2 Chapitre 2: Changement de Référentiel

2.1 Composition des Vitesses

La loi de composition des vitesses relie la vitesse absolue, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement:

$$\vec{v}_{(M/R)} = \vec{v}_{(M/R')} + \vec{v}_e(M)$$

Avec la vitesse d'entraînement:

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{(O'/R)} + \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{O'M}$$

2.2 Composition des Accélérations

La loi de composition des accélérations s'exprime comme la somme de trois termes:

$$\vec{a}_{(M/R)} = \vec{a}_{(M/R')} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

- Accélération d'entraînement:

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{(O'/R)} + \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge [\vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{O'M}] + \frac{d\vec{\Omega}_{(R'/R)}}{dt}\Big/R \wedge \vec{O'M}$$

- Accélération de Coriolis:

$$\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{v}_{(M/R')}$$