

CENTRE DES CLASSES PRÉPARATOIRES

LYDEX-Benguerir/Maroc



ÉLECTRONIQUE - MÉCANIQUE -OPTIQUE

THERMODYNAMIQUE- ÉLECTROMAGNÉTISME

SAID EL FILALI

TABLE DES MATIÈRES

I ÉLECTRONIQUE	19
1 LOIS GÉNÉRALES DANS LE CADRE DE L'A.R.Q.P	21
1.1 INTRODUCTION	21
1.2 Courant électrique	22
1.2.1 Définition	22
1.2.2 Bilan de charges	22
1.2.3 Loi des nœuds	22
1.3 Tension électrique, loi des mailles	23
1.4 La puissance électromagnétique reçue par un dipôle	23
1.5 Caractère générateur et récepteur	24
2 ÉLÉMENTS DE CIRCUITS LINÉAIRES EN RÉGIME CONTINU OU QUASI-PERMANENT	
2.1 Définition	25
2.2 Modélisation de dipôles passifs linéaires R, C et L	25
2.2.1 Le conducteur ohmique	25
2.2.1.1 Modélisation	25
2.2.1.2 Association des conducteurs ohmiques	26
2.2.1.3 Effet JOULE	26
2.2.2 Le condensateur	27
2.2.2.1 Modélisation	27
2.2.2.2 Association des condensateurs	27
2.2.2.3 Aspect énergétique	28
2.2.3 La bobine	28
2.2.3.1 Modélisation	28
2.2.3.2 Aspect énergétique	29
2.3 Diviseurs de tension et de courant.	29
2.3.1 Diviseurs de courant	29
2.3.2 Diviseurs de tension	30
2.4 Modélisations linéaires d'un dipôle actif	30
2.4.1 Générateur de courant (représentation de Norton)	31
2.4.2 Générateur de tension (représentation de Thevenin)	31
2.4.3 Équivalence entre les deux modélisations	31
2.5 Sources libres. Sources liées	32

2.6 Théorème de Millman	32
3 Régime transitoire	33
3.1 Cas du circuit (R-C) :	33
3.1.1 Charge du condensateur (régime forcé) :	34
3.1.1.1 L'équation différentielle :	34
3.1.1.2 Détermination expérimentale de la constante de temps τ :	34
3.1.1.2.1 La pente à l'origine	34
3.1.1.2.2 la valeur de $u(\tau)$	35
3.1.1.2.3 Temps de montée	36
3.1.1.3 Le portrait de phase :	37
3.1.1.3.1 Définitions	37
3.1.1.3.2 Représentation dans le plan de phase	37
3.1.1.4 Aspect énergétique :	37
3.1.2 Décharge du condensateur (régime libre) :	38
3.1.2.1 Équation différentielle et solution :	38
3.1.2.2 L'équation de la trajectoire de phase :	38
3.2 Cas du circuit (R-L) :	39
3.2.1 Régime forcé :	39
3.2.1.1 L'équation différentielle et solution	39
3.2.1.2 Portrait de phase	41
3.2.1.3 Aspect énergétique	41
3.2.2 Régime libre :	42
3.3 Circuit (RLC) série :	42
3.3.1 Régime libre :	42
3.3.1.1 Régime apériodique $\Delta' > 0$:	43
3.3.1.2 Régime critique $\Delta' = 0$:	44
3.3.1.3 Régime pseudopériodique $\Delta' < 0$:	47
3.3.2 Régime forcé :	51
4 Régime alternatif sinusoïdal	57
4.1 Amplitude complexe ,Impédance et admittance complexes	57
4.1.1 Amplitude complexe	57
4.1.2 Impédance complexe et admittance complexe :	59
4.1.2.1 Définitions :	59
4.1.2.2 Applications :	60
4.1.2.2.1 Impédance d'un resistor	60
4.1.2.2.2 Impédance d'une bobine idéale	60
4.1.2.2.3 Impédance d'un condensateur	61
4.2 Étude du circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé	61
4.2.1 Régime transitoire et régime permanent	61
4.2.2 Étude de l'impédance	62
4.2.3 Résonance en tension aux bornes du condensateur (Charge)	63
4.2.3.1 Équation différentielle et solution	63
4.2.3.2 Étude de l'amplitude U_c	64
4.2.3.3 La bande passante à -3dB pour la charge	65
4.2.3.4 Étude du déphasage $\phi = \varphi_c - \varphi_e$	66

4.2.4 Résonance en intensité	67
4.2.4.1 Étude de l'amplitude I_m	67
4.2.4.2 La bande passante à -3dB	68
4.2.4.3 Étude du déphasage $\varphi = \varphi_i - \varphi_e$	69
4.3 La puissance :	70
4.3.1 Facteur de puissance :	70
4.3.2 Adaptation d'impédance :	72
5 Diagrammes de BODE des filtres du premier et second ordre	73
5.1 Fonction de transfert	73
5.1.1 Définitions	73
5.1.2 Exemples	73
5.1.3 Lien entre la fonction de transfert et l'équation différentielle	74
5.1.4 Diagrammes de BODE	74
5.2 Filtrage	75
5.2.1 Introduction	75
5.2.2 Principaux types de filtres	76
5.3 Filtres du premier ordre	76
5.3.1 Filtre passe-bas du premier ordre	76
5.3.1.1 L'étude d'un exemple :	77
5.3.1.2 Diagramme de Bode pour le gain :	77
5.3.1.3 Diagramme de Bode pour la phase :	78
5.3.2 Filtre passe-haut du premier ordre	79
5.3.2.1 L'étude d'un exemple :	79
5.3.2.2 Diagramme de Bode pour le gain :	79
5.3.2.3 Diagramme de Bode pour la phase :	80
5.4 Filtres du deuxième ordre	81
5.4.1 Filtre passe-bas	81
5.4.1.1 L'étude d'un exemple	81
5.4.1.2 Diagramme de Bode pour le gain	81
5.4.1.3 Diagramme de Bode pour la phase	82
5.4.2 Filtre passe-haut	83
5.4.2.1 L'étude d'un exemple	83
5.4.2.2 Diagramme de Bode pour le gain	84
5.4.2.3 Diagramme de Bode pour la phase	84
5.4.3 Filtre passe-bande	85
5.4.3.1 L'étude d'un exemple	85
5.4.3.2 Diagramme de Bode pour le gain	86
5.4.3.3 Diagramme de Bode pour la phase	88
5.4.4 Filtre coupe (ou réjecteur) de bande	88
5.4.4.1 L'étude d'un exemple	88
5.4.4.2 Diagramme de Bode pour le gain	89
5.4.4.2.1 Comportement asymptotique	89
5.4.4.2.2 Représentation graphique du gain pour quelques valeurs de	89
5.4.4.2.3 La bande passante	89
5.4.4.3 Diagramme de Bode pour la phase	90

6 Filtrage linéaire des signaux périodiques	93
6.1 Composition en fréquence d'un signal	93
6.1.1 Représentation temporelle et fréquentielle	93
6.1.2 Exemples	96
6.1.2.1 Signal sinusoïdal	96
6.1.2.2 Signal carré impair	97
6.1.2.3 Signal carré pair	98
6.1.2.4 Signal triangulaire pair de pentes symétriques	98
6.1.2.5 Signal dent de scie	99
6.1.2.6 Signal sinusoïdal pair redressé monoalternance	99
6.1.2.7 Signal sinusoïdal pair redressé doublealternance	100
6.1.2.8 Signal rectangulaire pair de rapport cyclique α quelconque	100
6.1.3 L'aspect énergétique	100
6.2 Traitement d'un signal périodique par un système linéaire	101
6.2.1 Rappel	101
6.2.2 Application 1 : CNC 2009 Filière MP	102

II MÉCANIQUE DU POINT 107

1 DESCRIPTION DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL	109
1.1 Repères d'espace et du temps. Référentiel	109
1.1.1 Repérage dans l'espace	109
1.1.2 Repérage dans le temps	110
1.1.3 Référentiel	110
1.2 Cinématique du point matériel	110
1.2.1 Définition du point matériel	111
1.2.2 Vecteurs position,vitesse et accélération	111
1.2.3 Exemples de bases de projection	112
1.2.3.1 Coordonnées cartésiennes	112
1.2.3.1.1 Vecteur déplacement élémentaire	112
1.2.3.1.2 Vecteur vitesse	112
1.2.3.1.3 Vecteur accélération	113
1.2.3.2 Coordonnées cylindriques	113
1.2.3.2.1 Définitions	113
1.2.3.2.2 Vecteur déplacement élémentaire	114
1.2.3.2.3 Vecteur vitesse	115
1.2.3.2.4 Vecteur accélération	115
1.2.3.3 Coordonnées sphériques	115
1.2.3.3.1 Définitions	115
1.2.3.3.2 Vecteur déplacement élémentaire	117
1.2.3.3.3 Vecteur vitesse	117
1.2.3.4 Coordonnées curvilignes	117
1.2.3.4.1 Définitions	117
1.2.3.4.2 Expression du rayon de courbure	119
1.2.4 Exemples de mouvement	122
1.2.4.1 Mouvement rectiligne à accélération constante	122

1.2.4.2 Mouvement rectiligne sinusoidal	122
1.2.4.3 Mouvement circulaire	124
1.2.4.4 Mouvement helicoidal	127
1.2.4.5 Mouvement cycloide	129
2 DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL DANS UN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN 133	
2.1 Quelques forces usuelles	133
2.2 Lois de Newton	133
2.2.1 Principe d'inertie	133
2.2.2 La relation fondamentale de la dynamique	134
2.2.3 Principe des actions réciproques	134
2.3 Applications (énoncés voir TD)	135
2.3.1 Étude d'un projectile avec et sans frottement	135
2.3.2 Particule soumise à un frottement fluide de type : $f = -k.V^2$	138
2.3.3 Le pendule simple	139
2.3.4 Mouvement d'une particule chargé dans un champ uniforme	141
3 MOUVEMENT DE PARTICULES CHARGÉES DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE 143	
3.1 Force de Lorentz	145
3.1.1 Rappel	145
3.1.2 Propriété de la force magnétique	146
3.2 Applications	146
3.2.1 Mouvement dans un champ électrostatique uniforme dans le vide.	146
3.2.2 Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme dans le vide.	152
3.2.3 Mouvement d'un proton dans un cyclotron	154
3.2.4 Rayonnement d'une particule chargée	159
3.2.5 Mouvement dans un champ électromagnétique uniforme dans le vide.	163
3.3 Mouvement d'une particule chargée dans un métal	166
3.3.1 Modèle de DRUDE	166
3.3.2 Vecteur densité de courant électrique. Loi d'Ohm locale	167
3.3.3 Résistance électrique d'un conducteur cylindrique	169
3.4 Force de Laplace	170
4 THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE 175	
4.1 Le moment cinétique ,moment d'une force	175
4.1.1 Définition du moment cinétique	175
4.1.2 Propriété du moment cinétique	175
4.1.3 Définition du moment d'une force	177
4.1.4 Propriété du moment d'une force	177
4.1.5 Théorème du moment cinétique	177
4.2 Applications	178
4.2.1 Pendule simple	178
4.2.2 Propriétés de la trajectoire d'un satellite artificiel	179
4.2.3 Pendule de HOLWECK LEIAY	181
4.3 Les COUPLES	183
4.3.1 Couple de force	183
4.3.2 Couple de torsion	184

5 PUISSANCE ET TRAVAIL D'UNE FORCE. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE	187
5.1 Puissance et travail d'une force	187
5.1.1 Définitions	187
5.1.2 Exemples	187
5.1.2.1 Travail du poids	187
5.1.2.2 Travail de la tension d'un ressort	188
5.1.2.3 Travail de la force de Lorentz (Force magnétique)	188
5.1.2.4 Travail de la force newtonienne	189
5.2 Énergie cinétique. Théorème de l'énergie cinétique	190
5.3 Force conservatives. Énergie potentielle	192
5.3.1 Définition	192
5.3.2 Exemples	192
5.4 Énergie mécanique	193
5.4.1 Théorème de l'énergie mécanique	193
5.4.2 Cas particulier important	194
5.5 Applications :Équilibre d'un point matériel dans un champ de forces conservatives	194
5.5.1 Barrière d'énergie potentielle	194
5.5.2 Cuvette d'énergie potentielle	195
5.5.3 Cas de l'oscillateur harmonique	195
5.5.4 Exemple général	196
5.5.5 Équilibre d'un point matériel soumis à l'action des forces conservatives	196
5.5.5.1 Condition d'équilibre	196
5.5.5.2 Condition de stabilité	197
5.5.5.3 Critère de stabilité	197
6 OSCILLATEUR LINÉAIRE À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ	201
6.1 Rappel sur l'oscillateur harmonique	201
6.2 régime libre d'un oscillateur linéaire amorti	202
6.2.1 Forme canonique de l'équation différentielle	202
6.2.2 Différents régimes libres amortis	203
6.2.2.1 Régime apériodique	204
6.2.2.2 Régime critique	205
6.2.2.3 Régime pseudo-périodique	206
6.2.3 Décrément logarithmique	207
6.2.4 Interprétation physique	208
6.2.4.1 Facteur de qualité	208
6.2.4.2 Temps de relaxation	209
6.3 Oscillations forcées -Résonance	210
6.3.1 Détermination de l'amplitude X et la phase $\varphi = \varphi_x - \varphi_F$	210
6.3.2 Étude de la résonance d'amplitude :	211
6.3.3 Calcul énergétique :	212
6.3.3.1 Énergie perdue :	212
6.3.3.2 Énergie gagnée :	212
6.3.4 Résonance de vitesse	212
6.3.5 Bande passante	213
6.4 Analogie :Electrique/Mécanique	215

7 MOUVEMENTS DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRALES CONSERVATIVES, MOUVEMENTS DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN	221
7.1 Généralités sur les forces centrales	221
7.1.1 Définition	221
7.1.2 Moment cinétique, Loi des aires	222
7.1.2.1 Conservation du moment cinétique	222
7.1.2.2 Planéité de la trajectoire	222
7.1.2.3 Vitesse aréolaire , Loi des aires	223
7.1.3 Formules de Binet	223
7.2 Forces centrales conservatives	224
7.3 Cas du champ newtonien	226
7.3.1 L'approche énergétique	226
7.3.2 L'équation de la trajectoire	227
7.3.2.1 Relation fondamentale de la dynamique	227
7.3.2.2 Vecteur Range-Lenz	228
7.3.2.3 L'étude de quelques trajectoires	230
7.3.2.3.1 Trajectoire circulaire	230
7.3.2.3.2 Trajectoire elliptique	231
7.3.2.3.3 Vitesse de libération	232
7.3.2.3.4 Rayon de la trajectoire circulaire d'un satellite géostationnaire	232
8 MÉCANIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN	233
8.1 Introduction	233
8.2 L'étude cinématique	234
8.2.1 Axe instantané de rotation	234
8.2.1.1 L'étude d'un exemple	234
8.2.1.2 Relation fondamentale de la dérivation vectorielle	235
8.2.2 Composition des vitesses	236
8.2.3 Composition des accélérations	237
8.3 Dynamique dans un référentiel non galiléen	238
8.3.1 RFD dans un référentiel non galiléen : forces d'inertie	238
8.3.2 L'énergie potentielle d'entraînement	239
8.3.3 Applications	240
8.3.3.1 Préliminaire	240
8.3.3.2 Définition du poids	241
8.3.3.3 Effet de marée statique	243
8.3.3.3.1 Expression analytique	243
8.3.3.3.2 La marée océanique	244
8.3.3.4 Déviation vers l'est	246
8.3.3.5 Pendule de Foucault	246
9 SYSTÈME DE DEUX POINTS MATÉRIELS	247
9.1 Grandeurs cinématiques	247
9.1.1 Barycentre du système	247
9.1.2 Repère Barycentrique	248
9.1.3 Quantité de mouvement	249
9.1.3.1 Dans le repère \mathcal{R}	249
9.1.3.2 Dans le repère \mathcal{R}^* ;masse réduite	249

9.2 Grandeur cinétiques	250
9.2.1 Le moment cinétique du système	250
9.2.1.1 Dans le repère \mathcal{R}^*	250
9.2.1.2 Dans le repère \mathcal{R}	250
9.2.2 L'énergie cinétique du système	250
9.2.2.1 Dans le repère \mathcal{R}^*	250
9.2.2.2 Dans le repère \mathcal{R}	250
9.3 Dynamique du système	251
9.3.1 Relation fondamentale de la dynamique	251
9.3.2 Théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen	252
9.3.2.1 Moment des forces en un point O fixe dans \mathcal{R}	252
9.3.2.2 Moment des forces en G barycentre	252
9.3.2.3 Théorème du moment cinétique barycentrique	253
9.3.3 Puissance des forces intérieures	253
9.3.4 Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen	253
9.3.5 L'énergie potentielle d'interaction	253
9.3.6 Énergie mécanique	254
9.4 Cas d'un système isolé de deux points matériels	254
9.4.1 Conséquences	254
9.4.2 Réduction canonique :Mobile réduit équivalent	255
10 MÉCANIQUE DU SOLIDE	257
10.1 CINÉMATIQUE DU SOLIDE	257
10.1.1 Définition d'un solide	257
10.1.2 Barycentre d'un solide. Repère barycentrique	257
10.1.3 Cinématique du solide	260
10.1.4 Mouvement d'un solide	261
10.1.4.1 mouvement de translation	261
10.1.4.2 mouvement de rotation autour d'un axe fixe	261
10.1.4.3 Description du mouvement instantanée le plus général d'un solide	262
10.2 MODÉLISATION DES EFFORTS ENTRE SOLIDES EN CONTACT	262
10.2.1 Solide en contact	262
10.2.2 Vitesse de glissement	263
10.2.3 Vecteur rotation relative	263
10.2.4 Lois de Coulomb pour le frottement de glissement	264
10.2.5 La puissance totale des actions de contact	265
10.2.5.1 Expression de la puissance pour un solide	265
10.2.5.2 Puissance totale des actions de contact	266
10.2.5.3 Modèle des liaisons parfaites	266
10.2.5.4 Définition	266
10.2.5.5 Exemples	266
10.3 DYNAMIQUE D'UN SOLIDE	267
10.3.1 Théorème de la résultante cinétique	267
10.3.2 Le moment cinétique	267
10.3.2.1 Définition	267
10.3.2.2 Le torseur cinétique	268
10.3.2.3 Le théorème de KÖNIG relatif moment cinétique	269

10.3.3 L'énergie cinétique d'un solide	270
10.3.3.1 Définition l'énergie cinétique	270
10.3.3.2 Le théorème de KÖNIG relatif à l'énergie cinétique	270
10.3.4 Le moment d'une force	271
10.3.5 Mouvement d'un solide autour d'un axe de direction fixe	271
10.3.5.1 Cinétique d'un solide ayant un point de vitesse nulle	271
10.3.5.1.1 Le moment d'inertie. Théorème de Huygens	271
10.3.5.1.1.1 Le moment d'inertie d'un point matériel M	271
10.3.5.1.1.2 Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe	272
10.3.5.1.1.3 Théorème de Huygens	272
10.3.5.1.2 Le moment cinétique	272
10.3.5.1.3 L'énergie cinétique	274
10.3.5.2 Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel	
10.3.5.2.1 Théorème scalaire du moment cinétique	274
10.3.5.2.2 Théorème de l'énergie cinétique	275
10.3.5.2.3 Théorème de l'énergie mécanique	275
10.4 Application : le pendule pesant (CNC 2014 MP P1)	275
10.5 Autres Applications	279
10.5.1 MOUVEMENT D'UNE BARRE HOMOGÈNE	279
10.5.1.1 Étude cinématique du mouvement	279
10.5.1.2 Étude énergétique du mouvement , relation entre V et θ	280
10.5.1.3 Étude dynamique du mouvement, vérification de l'hypothèse initiale de conservation de l'énergie	280
10.5.2 OSCILLATIONS MÉCANIQUES	281
10.5.2.1 Étude dynamique : équation différentielle du mouvement	281
10.5.2.2 Petites oscillations	281
10.5.2.3 Aspect énergétique	282
10.5.2.4 Moment d'inertie du pendule composé	283
10.5.2.5 Étude dynamique : équation différentielle du mouvement	283
10.5.2.6 Simplification : retour au cas du pendule simple	283
10.5.3 ÉTUDE D'UN PENDULE	283
III OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE	287
1 APPROXIMATION DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE	289
1.1 Notion du rayon lumineux	289
1.1.1 Généralités	289
1.1.2 Limite du modèle	290
1.2 Réflexion et réfraction	290
1.2.1 Réflexion	290
1.2.2 Réfraction	291
1.2.3 Étude de la réfraction	292
1.2.3.1 Cas $n_1 < n_2$:	292
1.2.3.2 Cas $n_1 > n_2$	293
1.2.4 Étude du prisme	295
1.2.4.1 Formules générales	296
1.2.4.2 Conditions d'émergence	297

1.2.4.3 Minimum de déviation	297
2 FORMATION DE L'IMAGE DANS LES CONDITIONS DE GAUSS	299
2.1 Systèmes optiques centrés	299
2.1.1 Définition	299
2.1.2 Espace objet - Espace image :	299
2.1.2.1 Système dioptrique	299
2.1.2.2 Système catoptrique	300
2.2 Notion de stigmatisme et aplanitisme	300
2.3 Lentilles sphériques minces dans les conditions de GAUSS	300
2.3.1 Définitions :	300
2.3.2 Conditions de GAUSS :	301
2.3.3 Stigmatisme approché :	301
2.3.4 Lentilles minces :	301
2.3.5 Formation de l'image	302
2.3.6 Grandissement transversal-Formule de Newton :	307
2.3.7 Relation de conjugaison	308
2.4 Miroirs sphériques dans les C.G.	309
2.4.1 Définitions	309
2.4.2 Relation de conjugaison	309
2.4.3 Grandissement transversal	310
2.4.4 Formation de l'image	311
2.4.4.1 Miroirs concaves ou convergents	311
2.4.4.2 Miroirs convexes ou divergents	314
IV THERMODYNAMIQUE	327
1 MODÈLE DU GAZ PARFAIT	329
1.1 Modèle microscopique du gaz parfait	329
1.1.1 Définitions	329
1.1.2 La pression cinétique	331
1.1.3 Théorème d'équipartition :Température cinétique	334
1.1.4 Équation d'état :Notion de gaz réel	335
1.2 L'énergie interne	337
1.2.1 Définition	337
1.2.2 Applications	337
1.2.3 Capacités calorifiques à volume constant	338
2 STATIQUE DES FLUIDES	341
2.1 Équation fondamentale de la statique des fluides	341
2.2 Équilibre d'une atmosphère isotherme. Facteur de Boltzmann.	343
2.2.1 Variation de la pression avec l'altitude	343
2.2.2 Généralisation	352
2.3 Poussée d'ARCHIMÈDE.	352

3 SYSTÈMES THERMODYNAMIQUES	353
3.1 Définitions	353
3.2 Équilibre thermodynamique	354
3.3 Variables thermodynamiques	355
3.4 Transformations thermodynamiques	355
3.5 Coefficients thermo-élastiques	356
3.5.1 Définition	356
3.5.2 Relations aux dérivées partielles	357
3.5.3 Application	358
4 PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE	359
4.1 Introduction	359
4.1.1 Travail échangé par un système : travail des forces de pression	359
4.1.2 Applications	361
4.1.3 Transfert thermique	361
4.1.4 Divers formes de transfert d'énergie	362
4.2 Premier principe de la thermodynamique	362
4.3 Conséquences pratiques	363
4.4 Enthalpie d'un système	364
4.5 Capacités thermiques	364
4.5.1 Définitions	364
4.5.2 Interprétation en terme de chaleur	365
4.6 Détente de Joule-Gay Lussac	366
4.7 Détente de Joule-Thomson	367
4.8 Applications au gaz parfait	369
4.8.1 Loi de Joule	369
4.8.2 Relation de Mayer	370
4.8.3 Loi de Laplace	371
4.8.4 Formule de Reech	372
4.9 Enthalpie d'une phase condensée dans le modèle incompressible et indilatable	373
5 Second principe pour un système fermé	375
5.1 Énoncé du deuxième principe (ILYA PRÉGOGINE)	375
5.2 IDENTITÉS THERMODYNAMIQUES	377
5.2.1 Différentielle de l'énergie interne d'un système simple fermé	377
5.2.2 Pression et température thermodynamique	377
5.2.3 Première identité thermodynamique	378
5.2.4 Deuxième identité thermodynamique	378
5.3 TRANSFORMATIONS DU GAZ PARFAIT	379
5.3.1 Adiabatique réversible	379
5.3.2 Transformation quelconque : l'entropie d'un gaz parfait	379
5.3.3 Applications aux détentes	381
5.3.3.1 Détente de Joule Gay-Lussac	381
5.3.3.2 Détente de Joule Thomson	381
5.4 Entropie d'une phase condensée dans le modèle incompressible et indilatable	382
5.5 Énergie libre F ,Enthalpie libre G	384
5.5.1 Énergie libre F	384

5.5.2 Enthalpie libre G	384
5.6 Troisième principe de la thermodynamique	385
5.6.1 Facultatif	385
5.7 L'interprétation statistique de l'entropie	387
6 CHANGEMENT D'ÉTAT D'UN CORPS PUR	389
6.1 Notions générales sur la changement d'état d'un corps pur	389
6.2 Définitions	389
6.3 Isothermes d'ANDREWS	390
6.4 Changement d'état en diagramme (P,T)	392
6.5 Transfert thermique	393
6.6 Règles des moments	395
6.7 Formule de CLAPEYRON	395
7 MACHINES DITHERMES	399
7.1 Introduction	399
7.2 Les différentes machines dithermes	399
7.2.1 Moteur thermique	399
7.2.2 Machine frigorifique	400
7.2.3 Pompe à chaleur	401
7.3 MACHINES DE CARNOT	401
7.3.1 Définition	401
7.3.2 Représentation du cycle	402
7.3.2.1 En diagramme TS	402
7.3.2.2 En diagramme PV	403
7.4 Expressions des rendements	404
7.4.1 Machines de Carnot	404
7.4.2 Machines Réelle	405
7.5 Premier ppe de la thermo pour un système ouvert en écoulement permanent	406
7.5.1 Débit massique,débit convectif d'une grandeur extensive	406
7.5.1.1 Débit massique	406
7.5.1.2 Débit convectif d'une grandeur extensive	407
7.5.2 Bilan enthalpique pour un écoulement permanent	409
8 DIFFUSION DES PARTICULES	411
8.1 DÉFINITION	411
8.2 Étude macroscopique de la diffusion	412
8.2.1 Vecteur densité de courant de particules	412
8.2.2 Loi de conservation de particules	412
8.3 LOI DE FICK . ÉQUATION DE DIFFUSION	413
8.3.1 Loi de FICK	413
8.3.2 Equation de diffusion	414
8.3.3 Résolution de l'équation de diffusion	414
8.4 MODÈLE MICROSCOPIQUE DE LA DIFFUSION DANS LE GAZ	415

V ÉLECTROMAGNÉTISME	417
1 ÉLECTROSTATIQUE DANS LE VIDE	419
1.1 CHAMP ÉLECTROSTATIQUE	419
1.1.1 Notions générales	419
1.1.2 Répartition de charge	420
1.1.3 Complément mathématique	422
1.1.4 Loi de Coulomb	425
1.1.5 Le Champ électrostatique	426
1.1.5.1 Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle	426
1.1.5.2 Champ électrostatique crée par un ensemble de charges ponctuelles	428
1.1.5.3 Champ électrostatique crée par une distribution continue de charges	431
1.1.6 Lignes de champ	441
1.2 LE POTENTIEL ELECTROSTATIQUE	442
1.2.1 Définitions	442
1.2.2 Cas d'une charge ponctuelle	443
1.2.3 Relation locale entre le potentiel et le champ	444
1.2.3.1 L'opérateur gradient	444
1.2.3.2 L'expression du gradient	445
1.2.3.3 Relation entre le champ et le potentiel	446
1.2.3.4 Surfaces équipotentielles	446
1.2.4 Potentiel crée par une distribution de charges	447
1.3 ÉNERGIE POTENTIELLE D'INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE	448
1.3.1 Énergie potentielle d'une charge placée dans un champs électrostatique	448
1.3.2 Énergie potentielle d'interaction entre deux charges ponctuelles	448
1.4 SYMÉTRIE ET INVARIANCE	448
1.4.1 Symétrie	448
1.4.2 Invariance	449
1.5 THÉORÈME DE GAUSS	450
1.5.1 Flux du champ électrostatique	450
1.5.2 Énoncé du théorème de Gauss	451
1.6 APPLICATIONS	451
1.6.1 Fil infini chargé uniformément	451
1.6.2 Cylindre infini chargé uniformément en surface	454
1.6.3 Cylindre infini chargé uniformément en volume	456
1.6.4 Sphère uniformément chargée en volume	458
1.6.5 Sphère uniformément chargée en surface	461
1.6.6 Plan infini uniformément chargée	463
1.7 Analogie électromécanique	465
1.7.1 Analogie Electrique/mécanique	465
1.7.2 Théorème de Gauss en mécanique	465
1.7.3 Application	465
1.8 LE DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE	470
1.8.1 Définition	470
1.8.2 Le potentiel électrostatique crée par un dipôle dans le cadre de l'approximation dipolaire	474
1.8.2.1 Le potentiel électrostatique	474
1.8.2.2 Surfaces équipotentielles	476

1.8.3 Le champ électrostatique crée par un dipôle dans le cadre de l'approximation dipolaire	475
1.8.3.1 L'expression du champ	476
1.8.3.2 Les lignes de champ	478
1.8.4 Aspect énergétique	478
1.8.4.1 Actions subies par un dipôle électrostatique rigide	478
1.8.4.2 l'énergie potentielle d'un dipôle électrostatique rigide	479
1.9 LE CONDENSATEUR	480
1.9.1 Définition	480
1.9.2 Le condensateur plan	481
1.9.3 Application	482
1.9.3.1 Condensateur plan	482
1.9.3.2 Condensateur cylindrique	484
2 MAGNÉTOSTATIQUE	489
2.1 Champ et potentiel magnétostatique	489
2.1.1 Distribution de courant électrique	489
2.1.1.1 Vecteur densité de courant	489
2.1.1.2 Équation locale de la conservation de la charge	492
2.1.1.3 Formulation locale de la loi d'Ohm	493
2.1.2 Champ magnétostatique : loi de Biot et Savart	495
2.1.3 Applications	496
2.1.3.1 Segment traversé par un courant	496
2.1.3.2 Champ magnétique sur l'axe d'une spire circulaire	497
2.1.3.3 Champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde	499
2.1.4 Propriétés du champ magnétique	500
2.1.4.1 Conservation du flux du champ magnétique	500
2.1.4.2 Théorème d'Ampere	501
2.1.5 Autres Applications	502
2.1.5.1 Champ magnétique d'un fil infini traversé par un courant I	502
2.1.5.2 Solénoïde infini traversé par un courant I	502
2.1.5.3 Cylindre infini traversé par un courant I	504
2.1.5.4 Ruban infini traversé par un courant surfacique	505
2.1.5.5 Nappe infinie traversé par un courant surfacique	506
2.1.5.6 Bobines de Helmholtz	507
2.1.6 Relation de passage	510
2.1.6.1 La composante normale	510
2.1.6.2 La composante tangentielle	511
2.1.7 Potentiel vecteur. Forme locale du théorème d'Ampere	512
2.1.7.1 Définition	512
2.1.7.2 Forme locale du théorème d'Ampere	515
2.1.8 Équation de Poisson de la magnétostatique	516
2.1.9 Applications (énoncé voir TD)	518
2.2 Dipôle magnétique	520
2.2.1 Définition. Moment magnétique	520
2.2.2 L'expression du potentiel vecteur dans l'approximation dipolaire	523
2.2.3 Le champ magnétique dans l'approximation dipolaire	525
2.2.4 Actions d'un champ magnétique sur un dipôle	526

2.2.4.1 Résultante des forces	527
2.2.4.2 Le moment résultant des forces de Laplace	527
2.2.4.3 Énergie potentielle d'interaction d'un dipôle rigide placé dans un champ extérieur	529
2.2.4.4 Actions subies par un dipôle magnétique dans un champ extérieur	529
2.2.4.5 Comparaison entre les dipôles électrostatique et magnétique	529
2.3 Le champ magnétique terrestre	530

Première partie

ÉLECTRONIQUE

CHAPITRE 1

LOIS GÉNÉRALES DANS LE CADRE DE L'A.R.Q.P

LOIS GÉNÉRALES DANS LE CADRE DE L'APPROXIMATION DES RÉGIMES QUASI-PERMANENTS

1.1 INTRODUCTION

► L'électrocinétique :

Il s'agit de l'étude du transport d'information (courant électrique) dans des réseaux électriques.

► Cadre de l'étude :

L'étude de l'électrocinétique se fait dans le cadre de l'Approximation des états (ou régimes) quasi-stationnaires (quasi-permanent) noté ARQP ou AEQS (plus de détail voir MP). en effet :

L'approximation des états quasi-stationnaires consiste à limiter l'étude des réseaux électrocinétiques à des dimensions maximales ℓ_{max} et à des durées minimales τ_{min} vérifiant la condition suivante :

$$\frac{\ell_{max}}{\tau_{min}} \ll c_o \quad c_0 = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

c_o étant la célérité de la lumière .

Remarque

Dans ce cadre, on peut négliger tout phénomène de propagation dans le réseau électrocinétique ; en particulier, la modification d'une grandeur électrique en un point du circuit a pour conséquence des modifications instantanées des grandeurs analogues caractérisant les autres points du réseau.

Exemples

- ▶ Pour un circuit de dimension $\ell_{max} = 3 \text{ m}$, on trouve $\tau_{min} \gg 10^{-8} \text{ s}$; on pourra donc se placer dans le cadre de l'ARQP pour l'étude d'un signal de fréquence $f_{max} \ll 10^8 \text{ Hz} = 100 \text{ MHz}$, ce qui correspond à ce qu'on appelle électronique basse fréquence.
- ▶ Par contre, l'électronique de haute fréquence peut imposer la miniaturisation des circuits, sous peine de sortir du domaine de l'ARQP; ainsi à la fréquence de réception des signaux de téléphonie cellulaire ($f = 1800 \text{ MHz}$ donc $\tau_{min} = 5,6 \cdot 10^{-10} \text{ s}$), l'ARQP impose $\ell_{max} \ll 17 \text{ cm}$, ce qui est nettement plus restrictif.
- ▶ Pour le courant industriel, à la fréquence $f = 50 \text{ Hz}$, donc avec $\tau_{min} = 20 \text{ ms}$; la condition de l'ARQP impose donc $\ell_{max} \ll 6000 \text{ km}$: cette condition est aisément remplie pour un réseau domestique ou une installation industrielle. Par contre, dans un réseau d'alimentation de puissance à l'échelle continentale, il est indispensable de prendre en compte les effets de propagation.

1.2 Courant électrique

1.2.1 Définition

Définition**Courant électrique**

Une charge électrique dq qui traverse une surface S pendant un intervalle de temps dt crée un courant d'intensité i telle que :

$$i = \frac{dq}{dt} \iff q = \int i dt$$

Si $q(C)$ et $t(s)$ alors $i(A)$.

Remarque

Le sens du courant est le sens du déplacement des porteurs de charges positifs.

1.2.2 Bilan de charges

On admet que la charge (**q**) et la masse (**m**) d'un système isolé sont conservatives.

1.2.3 Loi des nœuds

Définition**Loi des nœud**

On appelle nœud un point de jonction entre au moins trois fils de connexion.

La loi des nœuds est une conséquence de la conservation de la charge électrique dans

le cadre de l'ARQP. La charge électrique ne peut pas s'accumuler au niveau des nœuds.

$$\sum i_e = \sum i_s \iff \sum_{k=0}^N \varepsilon_k i_k = 0$$

avec $\varepsilon^2 = 1$.

C'est la première loi de KIRCHHOFF .

1.3 Tension électrique, loi des mailles

- On appelle branche un ensemble de dipôles montés en série entre deux nœuds .
- On appelle maille un ensemble de branches formant un contour fermé .

Remarque

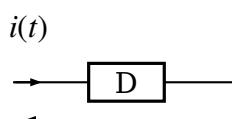
Une maille peut être orientée arbitrairement.

► On admet que la somme algébrique des tensions (ou différence de potentiel) dans une maille est nulle : c'est la deuxième loi de KIRCHHOFF .

$$\sum_{k=0}^N \varepsilon_k u_k = 0$$

1.4 La puissance électromagnétique reçue par un dipôle

Soit un dipôle D traversé par un courant électrique $i(t)$, maintenant entre ces bornes une tension u_{AB} .



La puissance électromagnétique reçue par le dipôle D est donnée par :

$$\mathcal{P} = u_{AB}(t)i(t)$$

Et par conséquent l'énergie reçue pendant la durée $t_f - t_i$ vaut :

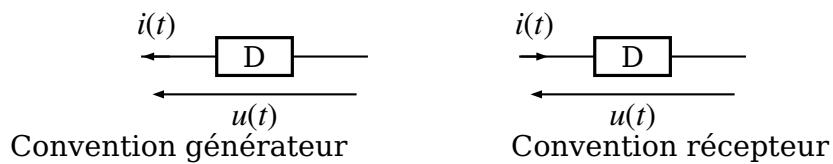
$$\mathcal{W} = \int_{t_i}^{t_f} u_{AB}(t)i(t) dt$$

Remarque

On adopte la convention thermodynamique :

- L'énergie reçue par un système sera comptée positive.
- L'énergie fournie par un système sera comptée négative.

1.5 Caractère générateur et récepteur



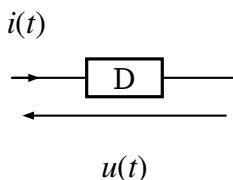
- En convention générateur les flèches représentant la tension et le courant sont dans le même sens La quantité $\mathcal{P} = ui$ représente la puissance électrique cédée par le dipôle au reste du circuit.
- En convention récepteur les flèches représentant la tension et le courant sont en sens inverses. La quantité $\mathcal{P} = ui$ représente la puissance électrique reçue par le dipôle .

CHAPITRE 2

ÉLÉMÉNTS DE CIRCUITS LINÉAIRES EN RÉGIME CONTINU OU QUASI-PERMANENT

2.1 Définition

Soit un dipôle D traversé par un courant $i(t)$ maintient entre ces bornes une tension $u(t)$



Le dipôle D est dit linéaire si le courant $i(t)$ et la tension $u(t)$ sont reliés par une équation linéaire

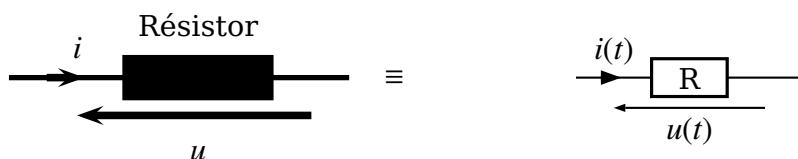
Exemples :

Le conducteur ohmique , le condensateur , la bobine , le générateur (dans le domaine de linéarité (voir TD))

2.2 Modélisation de dipoles passifs linéaires R, C et L

2.2.1 Le conducteur ohmique

2.2.1.1 Modélisation



On modélise un resistor par une résistance R tel que :

$$u = Ri$$

On conclut que le résistor est un dipôle linéaire.

Remarque

1. Pour un fil cylindrique de section S et de longueur ℓ et de résistivité ρ alors :

$$R = \frac{1}{G} = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S}$$

avec : G la conductivité (S (siemens)) , ρ la résistivité du conducteur ($\Omega.m$) et σ la conductivité du conducteur ($S.m^{-1}$)

2. ρ représente la résistance d'un fil de section $1 m^2$ et de longueur $1 m$; ainsi pour σ .
3. Un conducteur ohmique est dit parfait s'il ne présente pas de propriétés diélectiques ($\epsilon_r = 1$) et magnétiques ($\mu_r = 1$). (Voir cours d'électromagnétismes des milieux)

2.2.1.2 Association des conducteurs ohmiques

- Des résistances sont montées en série si elles sont traversées par le **même courant** et on a :

$$R_e = \sum_{i=1}^{i=N} R_i$$

- Des résistances sont montées en parallèle si elles sont maintenues par la **même tension** et on a :

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{R_i}$$

Application :

Deux résistances R_1 et R_2 en parallèle alors :

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\text{Produit}}{\text{Somme}}$$

2.2.1.3 Effet JOULE

Lorsque un courant i traverse une résistance R pendant la durée dt , on a dissipation de l'énergie

$$dE_J = dW_J = u_R i_R dt \implies W_J = \int_{t_i}^{t_f} u_R i_R dt$$

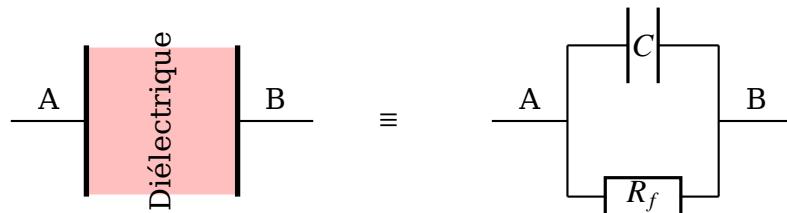
En continue :

$$W_J = RI^2 \Delta t \implies \mathcal{P}_J = RI^2$$

2.2.2 Le condensateur

2.2.2.1 Modélisation

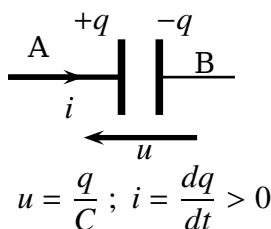
Constitué par deux conducteurs en influence totale ,séparés par un diélectrique (papier ,mica ,plastique,.....);on le modélise par une capacité C en parallèle avec une résistance de fuite R_f .



Pour les condensateurs électrochimiques (polarisés) la valeur de C varie de quelques mF à quelques F la résistance de fuite $R_f > 1M\Omega$

Un condensateur est dit idéal si $R_f \rightarrow \infty$

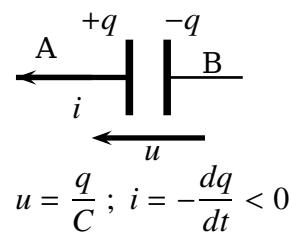
Convention récepteur



$$u = \frac{q}{C}; i = \frac{dq}{dt} > 0$$

Le condensateur se charge

Convention générateur



$$u = \frac{q}{C}; i = -\frac{dq}{dt} < 0$$

Le condensateur se décharge

Remarque

1. Pour un condensateur plan dont les armatures ont une section S et séparé par une distance e on a : $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$.
2. Si l'espace entre les armatures du condensateur est rempli par un diélectrique de permittivité diélectrique ϵ_r alors $C = \epsilon_r C_o$

2.2.2.2 Association des condensateurs

- Association série :

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{C_i}$$

- Association parallèle :

$$C_e = \sum_{i=1}^{i=N} C_i$$

2.2.2.3 Aspect énergétique

L'énergie d'un condensateur idéal est :

$$E_{pe} = \frac{q^2}{2C} \implies P(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta E_{pe}}{\Delta t} = \frac{1}{2C} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q^2}{\Delta t}$$

Remarque

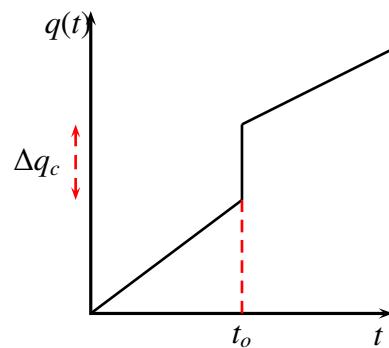
La tension aux bornes du condensateur ainsi sa charge sont des fonctions continues en fonction du temps.

En effet : on suppose q_c est discontinue ; c'est à dire $\Delta q_c \neq 0 \forall \Delta t < \varepsilon$

Si q_c est discontinue alors q_c^2 est discontinue ce qui donne :

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{2C} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q^2}{\Delta t} \rightarrow \infty \quad \text{impossible physiquement.}$$

Donc **La charge (la tension) du condensateur est continue**



Remarque

La valeur de C ; la tension U_{max} ainsi la polarité sont données par le constructeur.

2.2.3 La bobine

Une bobine est un fil conducteur enroulé sur un isolant

2.2.3.1 Modélisation

On modélise une bobine par une inductance **L** en série avec une résistance **r**.



On convention récepteur on donc :

$$u = L \frac{di}{dt} + ri$$

Remarque

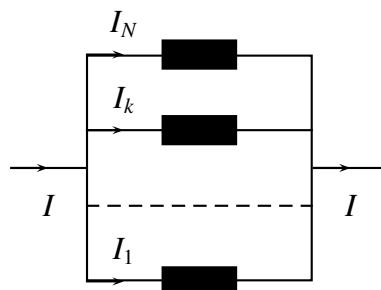
- Pour les bobines sans noyau de fer : $L = cte(i)$, L ne dépend pas de i . Par contre pour les bobines avec noyau de fer $L = L(i)$
- Mais pour i faible on peut considérer $L \approx cte$ (un DL à l'ordre 0 au voisinage de i)
- L'énergie d'une bobine parfaite ($r = 0$) : $E_{pm} = \frac{1}{2}Li^2$
- Association des bobines parfaites :
 - ★ Parallèle : $\frac{1}{L_e} = \sum \frac{1}{L_i}$
 - ★ Série : $L_e = \sum L_i$

2.2.3.2 Aspect énergétique

- L'intensité du courant qui traverse une bobine est une fonction continue de temps

2.3 Diviseurs de tension et de courant.**2.3.1 Diviseurs de courant**

Soit une association parallèle des résistances R_k :



Soit R_e la résistance équivalente ; c'est à dire $\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^{N=1} \frac{1}{R_k}$; on a donc : $U = R_k I_k = R_e I$ avec I le courant principal ; il en résulte que :

$$I_k = \frac{R_e}{R_k} I$$

C'est le diviseur de courant

Cas particulier important : $N = 2$

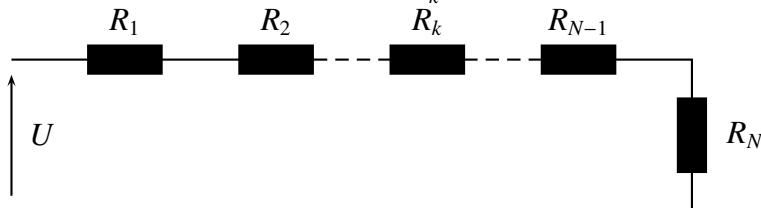
$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Remarque

Si $R_1 = R_2 \implies I_1 = I_2 = \frac{I}{2}$: méthode demi-courant utiliser pour déterminer les résistances de faibles valeurs (voir TP)

2.3.2 Diviseurs de tension

Soit une association série de N résistances R_k avec $k = 1 \rightarrow N$:



Soit U_k la tension aux bornes de la résistance R_k et R_e la résistance équivalente c'est à dire $R_e = \sum_{k=1}^{k=N} R_k$. On a : $I = \frac{U_k}{R_k} = \frac{U}{R_e}$; ce qui donne la loi du diviseur de tension :

$$U_k = \frac{R_k}{R_e} U = \frac{R_k}{\sum_{k=1}^{k=N} R_k} U$$

Cas particulier important : $N = 2$

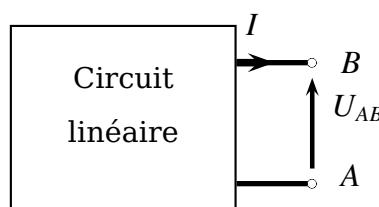
$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

Remarque

Si $R_1 = R_2 \implies U_1 = U_2 = \frac{U}{2}$: méthode demi-tension utiliser pour déterminer les résistances de grandes valeurs (voir TP)

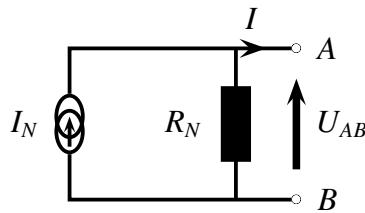
2.4 Modélisations linéaires d'un dipôle actif

Soit un circuit électrique linéaire (constitué des dipôles linéaires) contenant une source de puissance électrique ; A et B deux points de ce circuit.



2.4.1 Générateur de courant (représentation de Norton)

Vue entre les points A et B de la branche AB on peut modéliser le reste du circuit par un générateur de courant réel de courant électromoteur I_N et de résistance interne r_N (générateur de courant idéal en parallèle avec une résistance) : C'est la modélisation de NORTON .

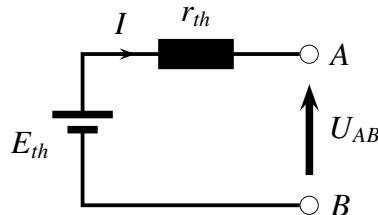


Dans cette modélisation on a :

$$I = I_N - \frac{U_{AB}}{R_N} = I_N - G_N U_{AB}$$

2.4.2 Générateur de tension (représentation de Thevenin)

Vue entre les points A et B de la branche AB on peut modéliser le reste du circuit par un générateur de tension réel de force électromotrice E_{th} et de résistance interne r_{th} (générateur de tension idéal en série avec une résistance) : C'est la modélisation de THEVENIN .



Dans cette modélisation on a :

$$U_{AB} = E_{th} - r_{th}I \implies I = \frac{E_{th}}{r_{th}} - \frac{U_{AB}}{r_{th}}$$

2.4.3 Équivalence entre les deux modélisations

Puisque dans les deux modèles de THEVENIN et NORTON le courant I et la tension U_{AB} sont les mêmes quelque soit le circuit linéaire alors on en déduit que :

$$I_N = \frac{E_{th}}{r_{th}} \quad \text{et} \quad r_N = r_{th}$$

2.5 Sources libres. Sources liées

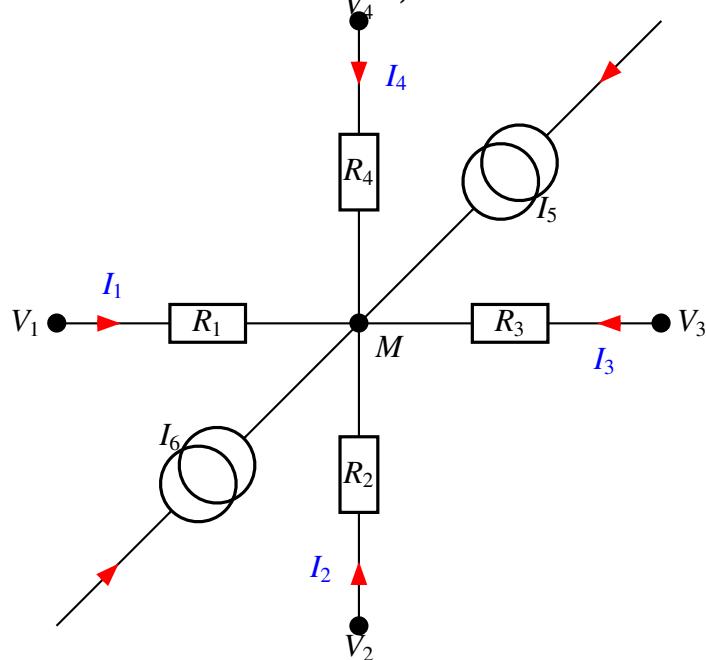
- Un générateur (de tension ou de courant) est une source de puissance qui fournit de l'énergie au circuit extérieur.
- Générateur indépendant : source de puissance électrique indépendante d'autre grandeur électrique du circuit.
- Générateur lié : si une des grandeurs physiques dépend d'une grandeur électrique du circuit.

Exemple :

Le transistor : c'est un générateur de courant en régime linéaire puisque $I_c = \beta I_B$ (générateur de courant lié).

2.6 Théorème de Millman

Le théorème de MILLMANN n'est rien d'autre que la loi des nœuds exprimé en terme de potentiel (référence commune est la masse).



On a :

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - I_5 + I_6 = 0$$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_M}{R_1} = G_1(V_1 - V_M)$$

$$I_2 = \frac{V_2 - V_M}{R_2} = G_2(V_2 - V_M)$$

$$I_3 = \frac{V_3 - V_M}{R_3} = G_3(V_3 - V_M)$$

$$I_4 = \frac{V_4 - V_M}{R_4} = G_4(V_4 - V_M) \quad G_1(V_1 - V_M) + G_2(V_2 - V_M) + G_3(V_3 - V_M) + G_4(V_4 - V_M) - I_5 + I_6 = 0$$

On tire que :

$$V_M = \frac{-I_5 + I_6 + G_1 V_1 + G_2 V_2 + G_3 V_3 + G_4 V_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} = \frac{\sum G_i V_i + \varepsilon I_i}{\sum G_i}$$

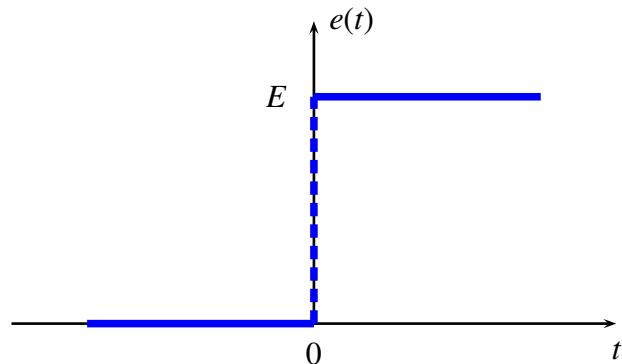
CHAPITRE 3

RÉGIME TRANSITOIRE

Le but est de déterminer la constante de temps τ caractéristique du régime transitoire.

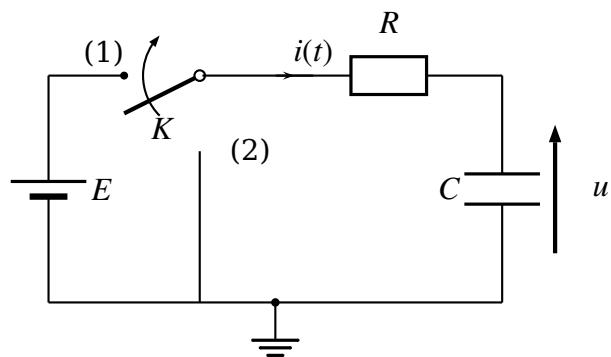
Pour cela excitons un système linéaire par une tension continue à $t = 0$.

On appelle échelon de tension $e(t)$ défini par : $e(t) \begin{cases} E & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$



3.1 Cas du circuit (R-C) :

Considérons le circuit suivant :



3.1.1 Charge du condensateur (régime forcé) :

Le condensateur est initialement déchargé : $q(0) = 0 \implies u_c(t=0) = 0$
 à $t = 0$ on bascule K vers (1) : C se charge .

3.1.1.1 L'équation différentielle :

Appliquons la loi des mailles au circuit on obtient :

$$E - RI - \frac{q}{C} = 0 \implies \boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}}$$

c'est l'équation différentielle du circuit

La solution de cette équation différentielle s'écrit : $q(t) = Ae^{-t/\tau} + CE$; avec $\tau = RC$ la constante du temps caractéristique du régime transitoire.

Or par continuité de la charge du condensateur , on a : $q(0) = 0 \implies A = -CE$

Donc : $q(t) = CE(1 - e^{-t/\tau})$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, $q(t) \rightarrow CE = Q_f$

$$\boxed{q(t) = CE(1 - e^{-t/\tau}) \implies u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})}$$

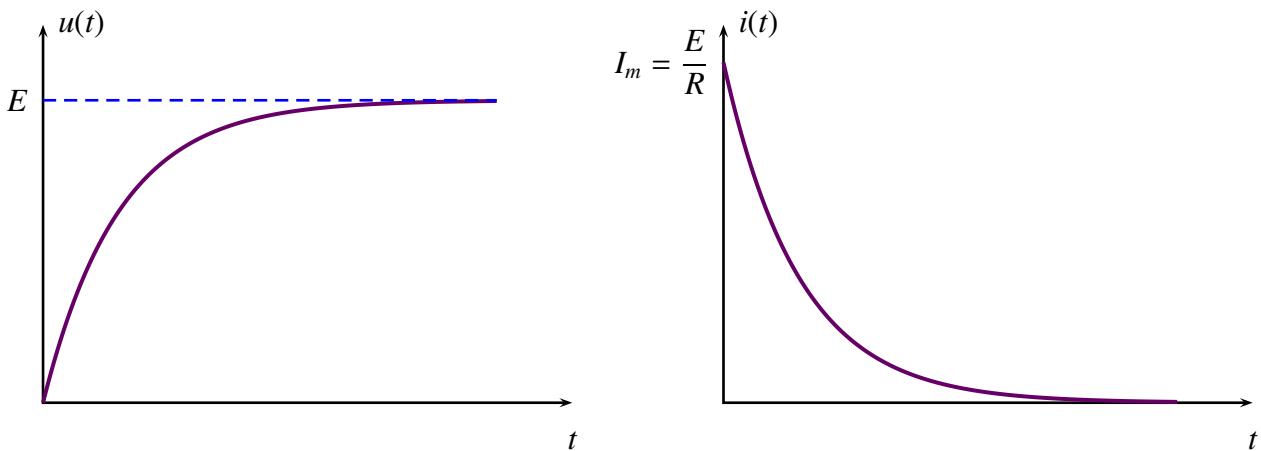
L'expression du courant électrique :

$$\boxed{i(t) = \frac{dq}{dt} = I_m e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad I_m = \frac{E}{R}}$$

Remarque

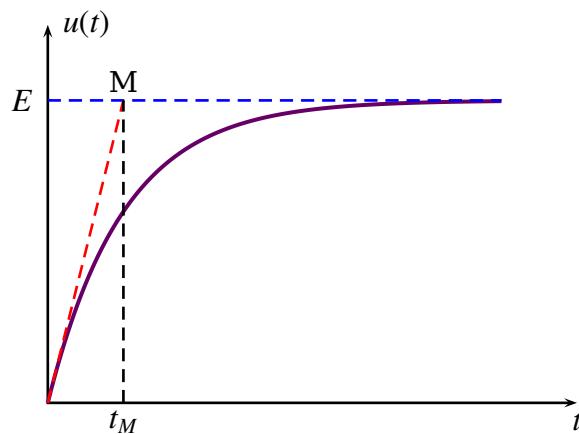
On a : $i(0^-) = 0$, $i(0^+) = I_m$ on tire que $i(t)$ est discontinu

Représentation graphique



3.1.1.2 Détermination expérimentale de la constante de temps τ :

3.1.1.2.1 La pente à l'origine



On a l'équation de la pente à l'origine (droite) \mathcal{D} s'écrit sous la forme $y = kt$ avec

$$k = \frac{du(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{E}{\tau}$$

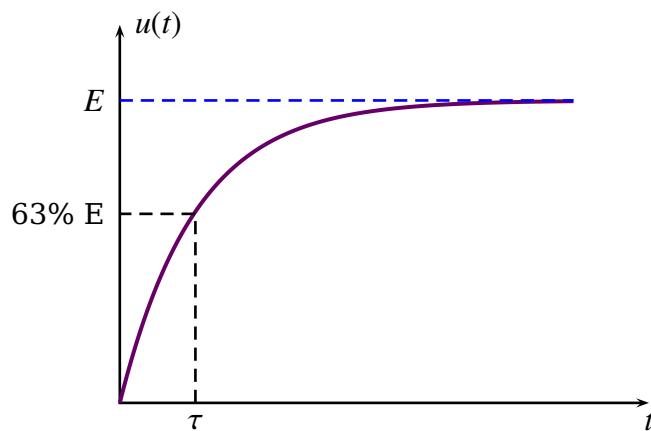
L'intersection des deux droites au point M en $t_M = \tau$

Propriété

L'intersection de la pente à l'origine avec le régime permanent se fait en

$$t = \tau = RC$$

3.1.1.2.2 la valeur de $u(\tau)$



Évaluons $u(\tau)$ avec $u(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))$

$$t = \tau \implies u(\tau) = E\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0,63 E = 63\%E$$

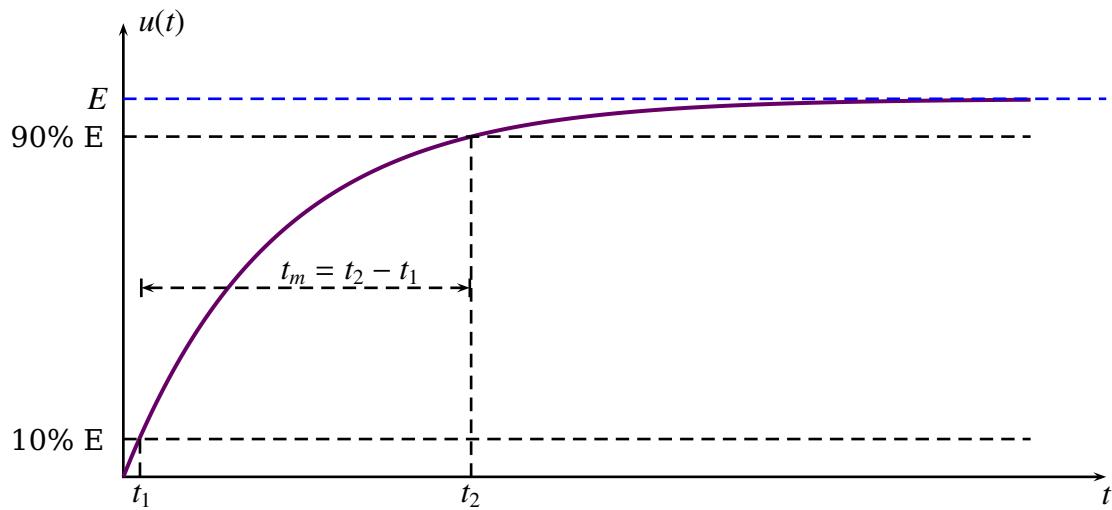
Propriété

On retient que lors de la charge, la valeur $0,63 E = 63\%E$ correspond à $t = \tau$

3.1.1.2.3 Temps de montée :

On définit deux instants t_1 et t_2 par $u(t_1) = 0,1E$ et $u(t_2) = 0,9E$

Et puisque $u(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))$ alors $t_1 = -\tau \ln 0,9$ et $t_2 = -\tau \ln 0,1$.



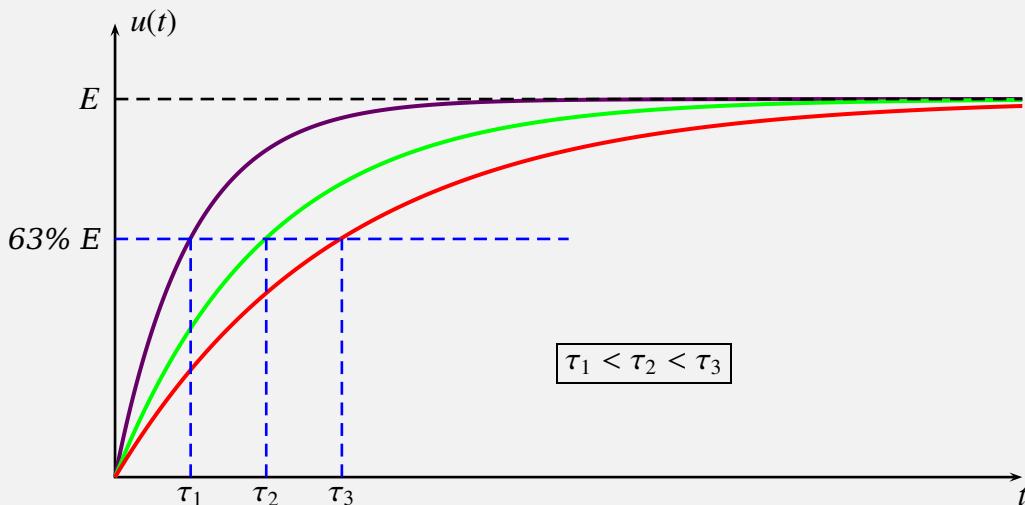
On définit le temps de montée t_m par

$$t_m = t_2 - t_1 = \tau \ln 9 \simeq 2,2\tau$$

Remarque

L'influence de la constante de temps τ sur la durée de la charge.

Pour cela traçons la charge pour différentes valeurs de τ



Si $\tau \rightarrow 0$ alors la charge est presque instantanée

Notation

La constante du temps $\tau = RC$ augmente avec la résistance du conducteur ohmique ainsi la capacité du condensateur.

3.1.1.3 Le portrait de phase :

3.1.1.3.1 Définitions :

- C'est la représentation dans le plan $(O, f(x), \frac{df}{dt})$ lorsque t varie.
- On appelle point de phase un point P figuratif dont les coordonnées à un instant donné t sont $(f(t), \frac{df(t)}{dt})$.
- Lorsque t varie, le point P décrit une courbe, cette courbe est appelé **trajectoire de phase**.
- On appelle portrait de phase l'ensemble des trajectoires de phase lorsque les conditions initiales varient.

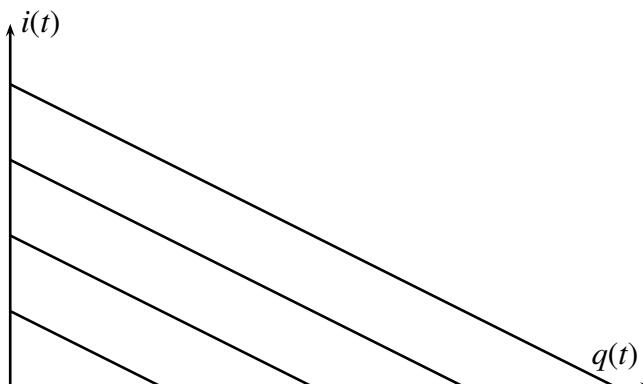
3.1.1.3.2 Représentation dans le plan de phase :

Dans notre cas $f(t) = q(t)$ et $\frac{df}{dt} = i(t)$.

On a $q(t) = CE(1 - \exp(-t/\tau))$ et $i(t) = \frac{E}{R} \exp(-t/\tau)$ alors :

$$i = \frac{E}{R} - \frac{1}{RC}q$$

C'est l'équation de la trajectoire de phase : droite de pente $-\frac{1}{RC}$
Lorsque E varie alors la trajectoire de phase décrit des droites parallèles.



3.1.1.4 Aspect énergétique :

$$\text{On a : } E = Ri + \frac{q}{C} \implies E dt = Ri^2 dt + \frac{1}{C} q dq$$

$$E dt = Ri^2 dt + d\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

On appelle :

$W_c = \frac{q^2}{2C}$: énergie totale emmagasinée dans le condensateur .

$\delta W_g = E dt$: énergie élémentaire fournie par le générateur .

$\delta W_J = Ri^2 dt$: énergie élémentaire dissipée par effet Joule dans le circuit .

$$\int_0^t E dt = \int_0^t Ri^2 dt + \int_0^q \frac{q}{C} dq$$

3.1.2 Décharge du condensateur (régime libre) :

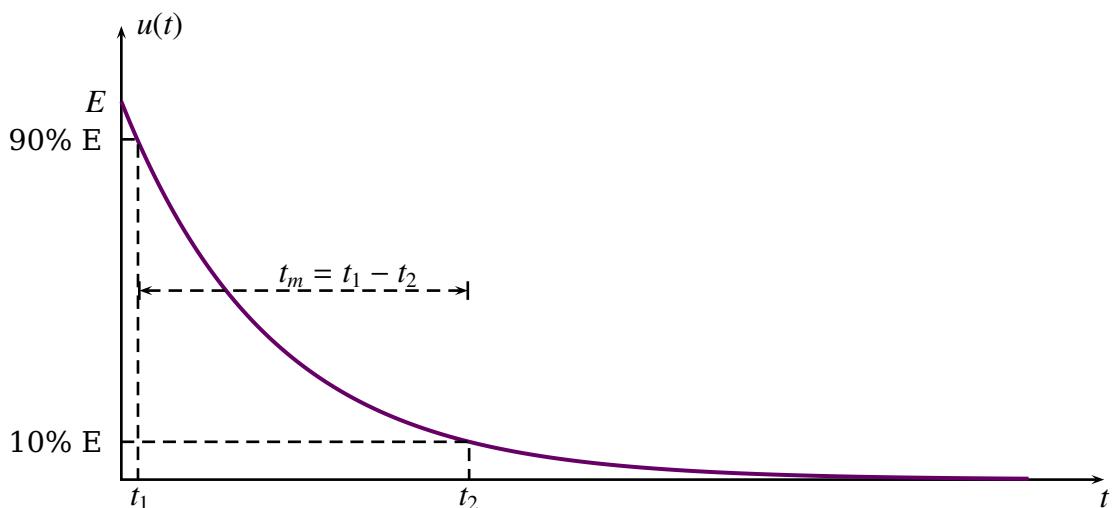
3.1.2.1 Équation différentielle et solution :

Quand le condensateur est chargé ($q = CE = Q_f$), on bascule l'interrupteur vers la position (2) : donc en prenant l'instant de basculement comme origine des temps, les conditions initiales seront : $q(0) = CE = Q_f; i(0) = 0$

$$Ri + \frac{1}{C}q = 0 \implies dq + \frac{1}{\tau}q = 0$$

La solution est : $q(t) = Ae^{-t/\tau}$ en utilisant les C.I on obtient :

$$q(t) = CEe^{-t/\tau} \implies u(t) = Ee^{-t/\tau} \quad \| \quad i(t) = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$



- Lors de la décharge on a :

$$t_d = t_{10\%} - t_{90\%}$$

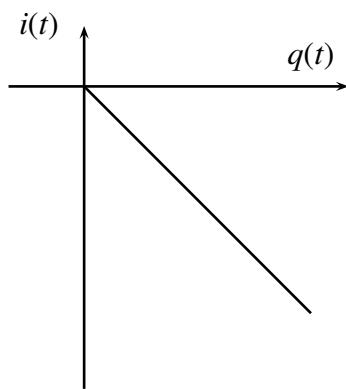
- $q(\tau) = 0,37CE$
- Le régime permanent est $q = 0$ ($q(t)$ est une fonction décroissante).

3.1.2.2 L'équation de la trajectoire de phase :

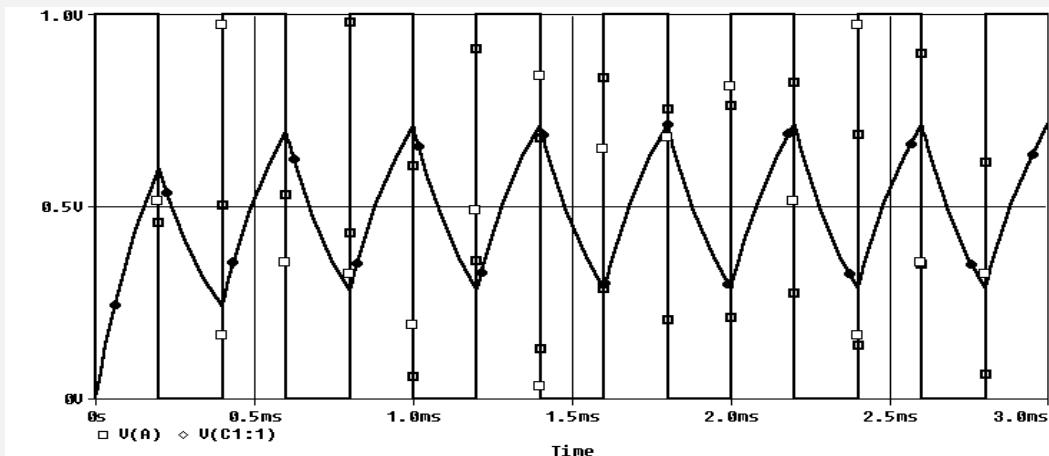
D'après ce qui précède on tire que :

$$i = -\frac{1}{RC}q$$

C'est une droite affine

**Remarque**

- Si on remplace le générateur E et l'interrupteur K par un générateur délivrant un signal rectangulaire ($E, 0$) on obtient le signal suivant :



La suite

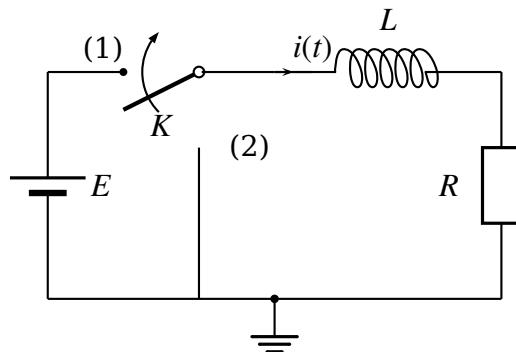
voir TP.

3.2 Cas du circuit (R-L) :

3.2.1 Régime forcé :

3.2.1.1 L'équation différentielle et solution

On remplace le condensateur par une **bobine idéale** dans le circuit précédent :



L'interrupteur k est en position (1) : $E = Ri + L \frac{di}{dt}$
donc :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

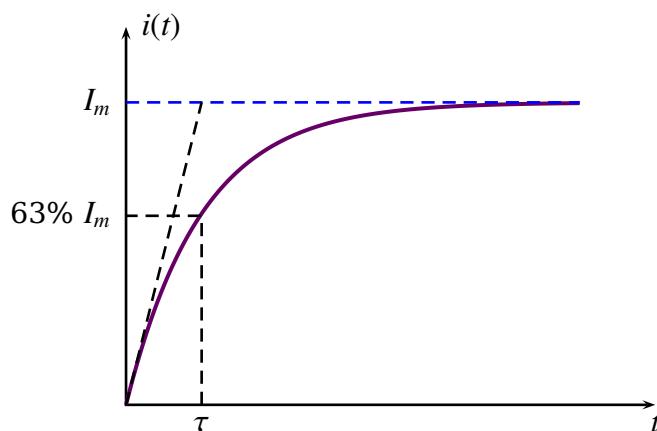
c'est l'équation différentielle du circuit

La solution de cette équation différentielle en posant

$$\tau = \frac{L}{R} : \text{constante du temps}$$

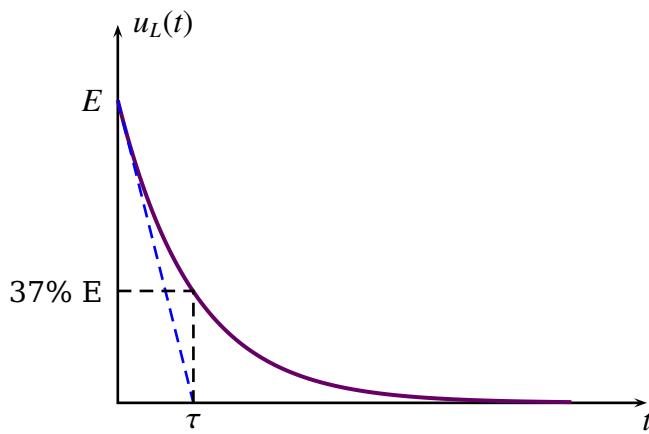
Et en tenant compte que le courant qui traverse une bobine est continu alors on trouve que :

$$i(t) = I_m(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec} \quad I_m = \frac{E}{R}$$



La tension aux bornes de la bobine idéale est :

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = E e^{-t/\tau}$$

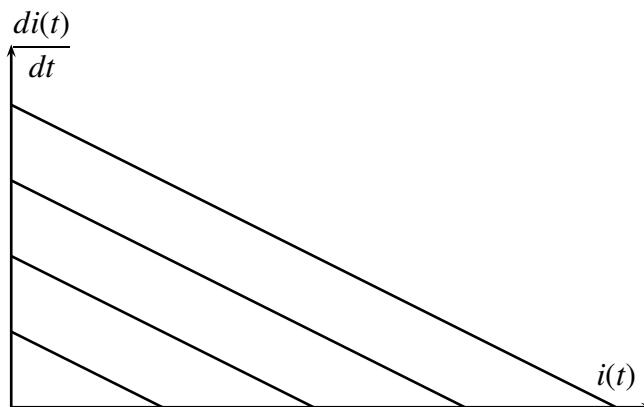


3.2.1.2 Portrait de phase

On a : $i = \frac{E}{R}(1 - \exp(-t/\tau))$ ainsi $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} \exp(-t/\tau)$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L}i$$

Le portrait des phase est l'ensemble des droites parallèle de pente $-\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$



3.2.1.3 Aspect énergétique

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} \implies Eidt = Ri^2 dt + d(\frac{1}{2} Li^2)$$

- $\delta W_g = Eidt$: l'énergie élémentaire fournie par le générateur.
- $\delta W_J = Ri^2 dt$: l'énergie élémentaire perdue par effet Joule.
- $\delta W_m = d(\frac{1}{2} Li^2)$: l'énergie élémentaire emmagasinée par la bobine.

Le bilan énergétique pour le circuit s'écrit

$$W_g = W_J + W_m$$

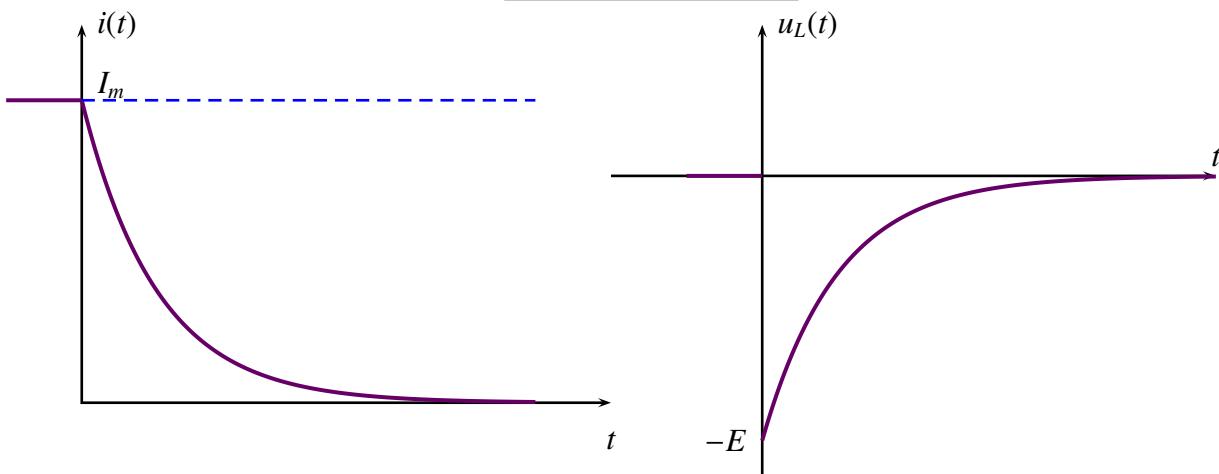
3.2.2 Régime libre :

L'interrupteur maintenant en position (2) ; l'équation différentielle sera donc :
 $Ri + L \frac{di}{dt} = 0$; les conditions initiales sont $i(0) = \frac{E}{R}$
 par changement d'origine des dates ,la solution s'écrit :

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

La tension au bornes de la bobine est :

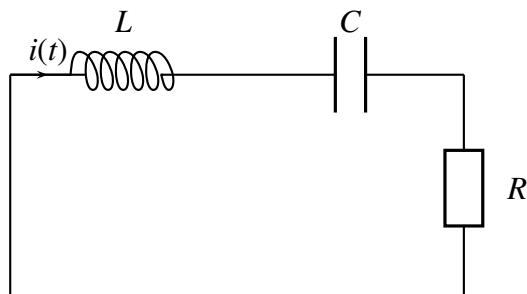
$$u_L(t) = -E e^{-t/\tau}$$



On vérifie bien que le courant qui traverse la bobine est continu par contre la tension pas forcément continue.

3.3 Circuit (RLC) série :

Soit le circuit (RLC) série :



3.3.1 Régime libre :

Soit q la charge du condensateur et u la tension entre ces bornes. L'équation différentielle est :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \implies LC\ddot{u} + RC\dot{u} + u = 0$$

On pose :

► $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$: pulsation propre

► $2\alpha = \frac{R}{L} = \frac{\omega_o}{Q}$; α coefficient d'amortissement et Q le facteur de qualité

La forme canonique de l'équation différentielle sera :

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega_o^2 q = 0 \implies \ddot{u} + 2\alpha\dot{u} + \omega_o^2 u = 0$$

L'équation caractéristique est : $r^2 + 2\alpha r + \omega_o^2 = 0$

On pose : $\Delta' = \alpha^2 - \omega_o^2 = (\alpha - \omega_o)(\alpha + \omega_o)$

3.3.1.1 Régime apériodique $\Delta' > 0$:

$$\Delta' > 0 \implies \alpha > \omega_o : Q < \frac{1}{2}$$

Deux racines réelles distinctes : $r_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$

$$q(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} \implies q(t) = e^{-\alpha t} [Ae^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} t} + Be^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} t}]$$

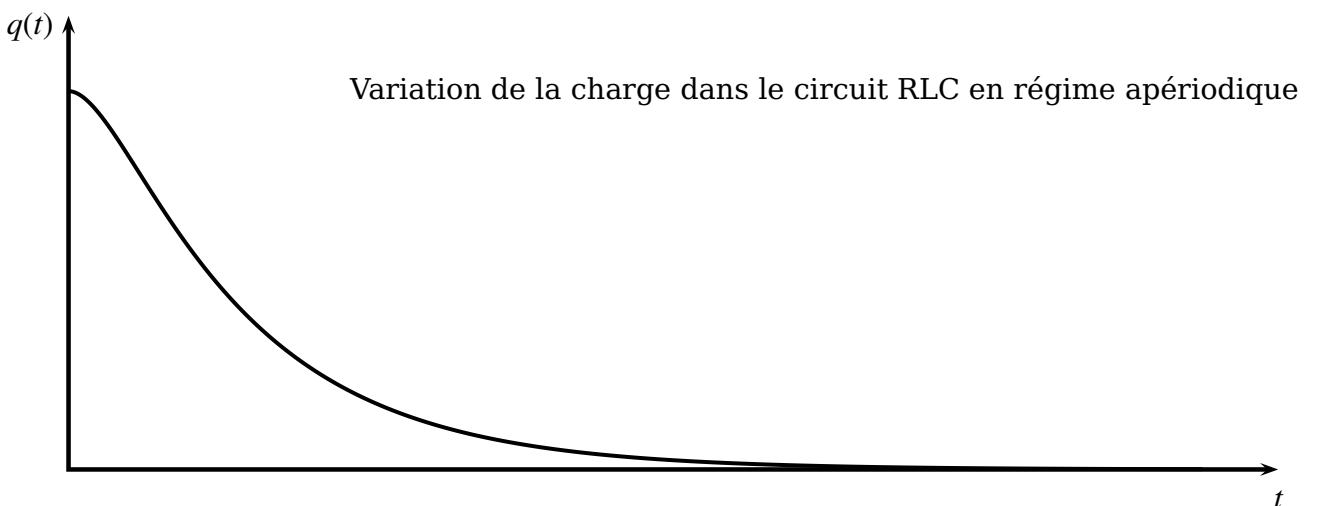
Lorsque $t \rightarrow \infty$, $e^{-\alpha t}$ l'emporte ; d'où $q \rightarrow 0$ sans osciller : C'est le régime apériodique.

Détermination des constantes A et B : Pour cela on suppose que $q(t=0) = q_0$ et $i(t=0) = i_0$

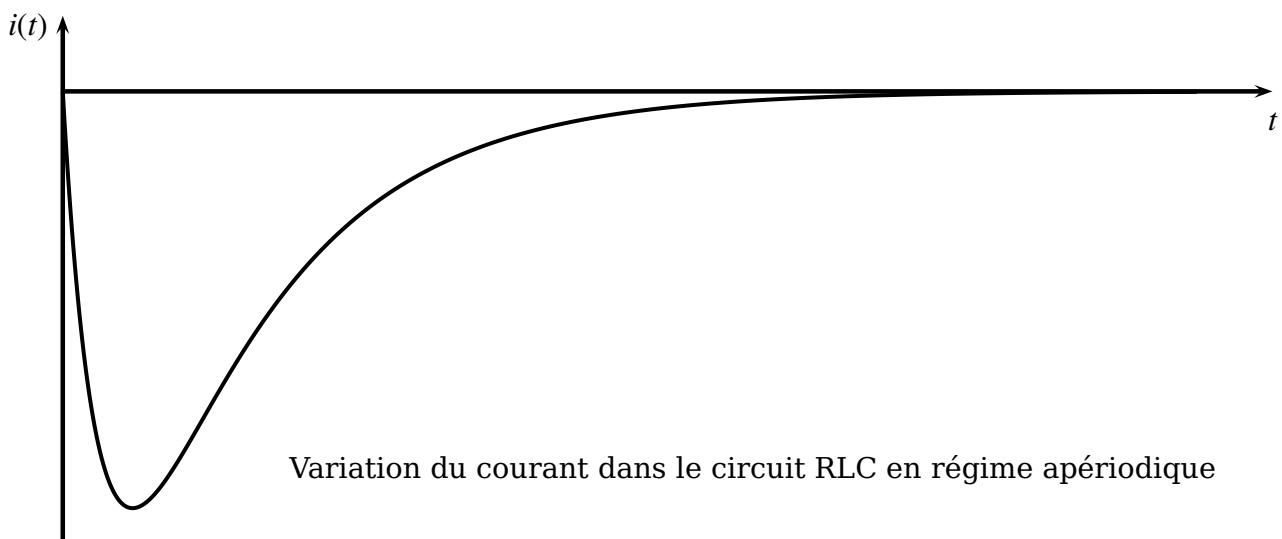
$$\begin{cases} A + B = q_0 \\ Ar_1 + Br_2 = i_0 \end{cases} \implies \begin{cases} B = \frac{i_0 + (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_o^2})q_0}{2\sqrt{\alpha^2 + \omega_o^2}} \\ A = \frac{-i_0 + (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_o^2})q_0}{2\sqrt{\alpha^2 + \omega_o^2}} \end{cases}$$

Representation graphique

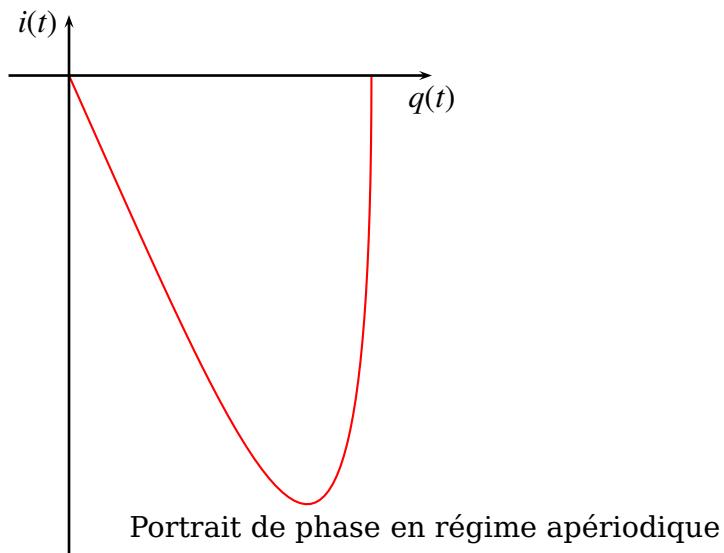
Avec : $\omega_o = 1$, $Q = 0,4$; $q(0) = 5$; $i(0) = 0 \implies q_{ap} = -1,6667e^{-2t} + 6,667e^{-0,5t}$



Le courant : $i(t) = -1.666666667e^{-2t} + 6.666666667e^{-0.5t}$



La trajectoire de phase est :



Trajectoire de phase est une courbe ouverte caractéristique d'un système apériodique

3.3.1.2 Régime critique $\Delta' = 0$:

$$\Delta' = 0 \implies \alpha = \omega_o : Q = \frac{1}{2}$$

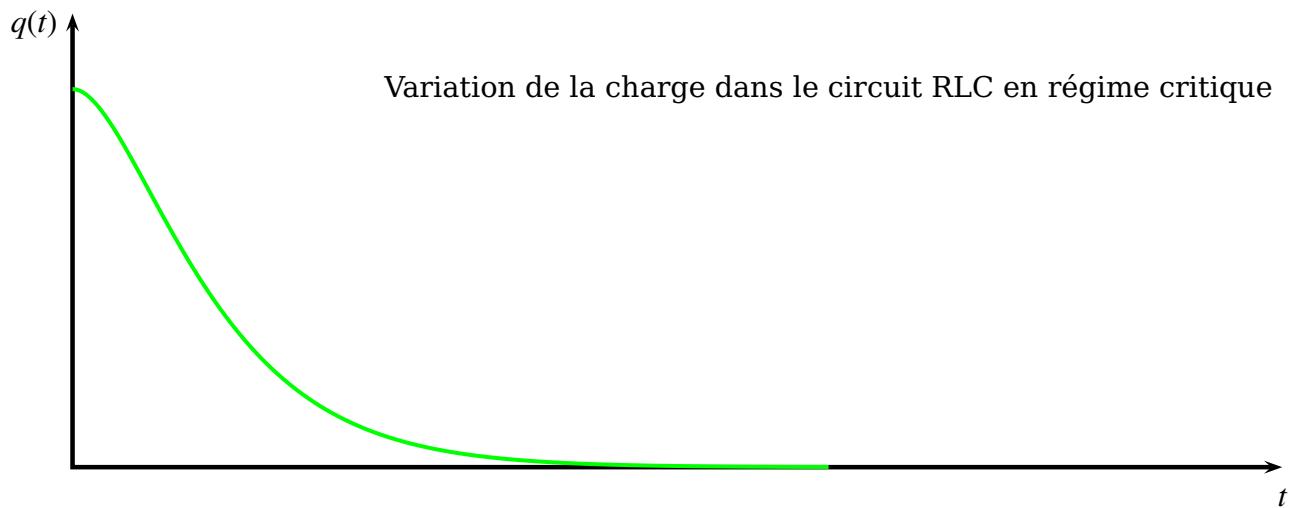
Deux racines réelles confondues : $r_+ = r_- = -\alpha = -\omega_o$

$$q = (c + dt)e^{-\alpha t}$$

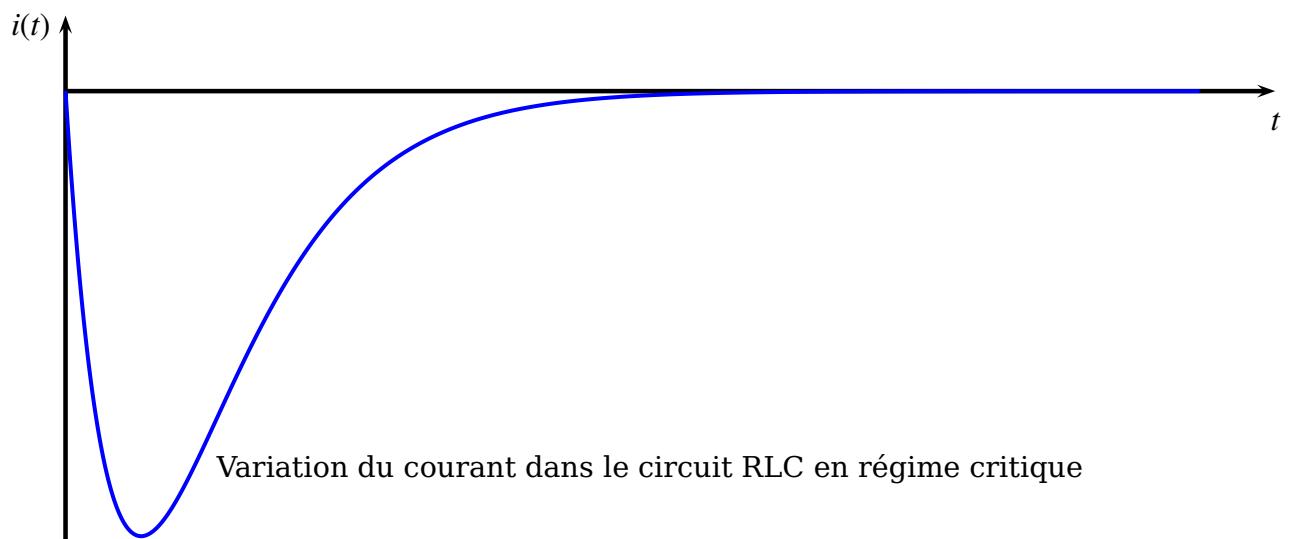
Quand $t \rightarrow \infty, q \rightarrow 0$ rapidement sans osciller : C'est le régime critique.

Representation graphique

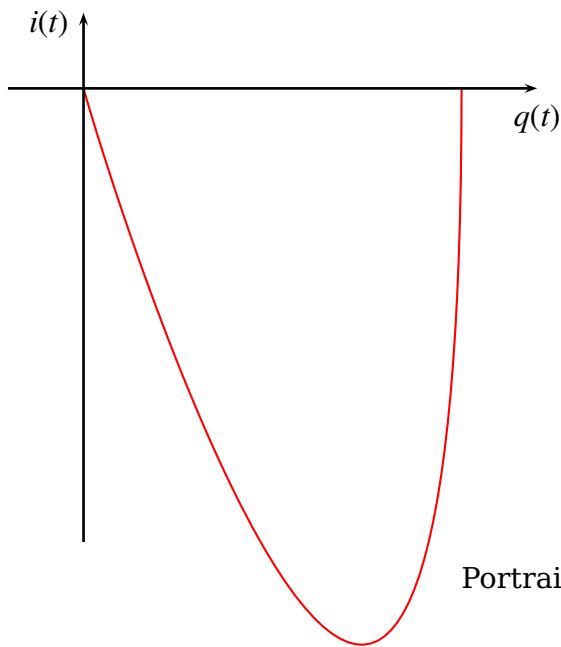
Conditions initiales : $\omega_o = 1$; $Q = 0.5$; $q(0) = 5$; $i(0) = 0 \implies q(t) = 5 \exp(-t) + 5t \exp(-t)$; $i(t) = -5t \exp(-t)$



De même :



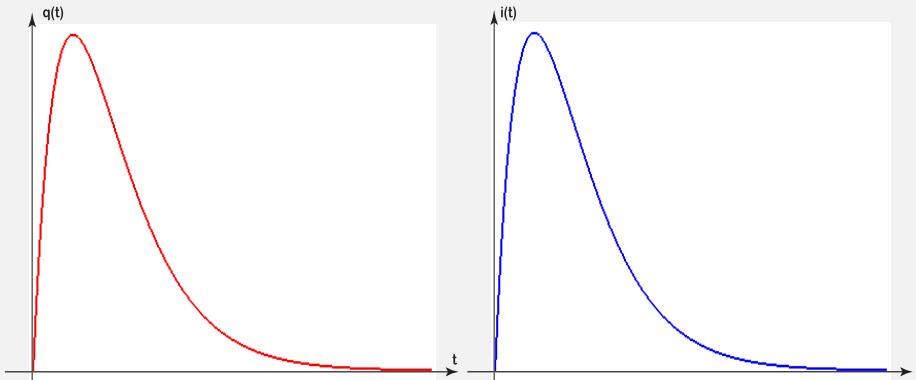
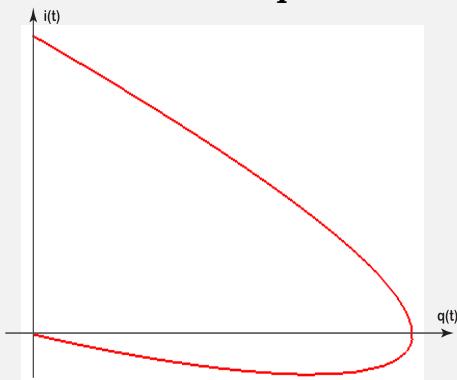
La trajectoire de phase est :



Portrait de phase en régime critique

Remarque

- Le régime critique est le régime le plus rapide qui tend vers le régime permanent ($q = 0$)
- Si $c = 0$ alors $q(t) = dt e^{-\alpha t}$

Représentation temporelle**Portrait de phase**

3.3.1.3 Régime pseudopériodique $\Delta' < 0$:

$$\Delta' < 0 \implies \alpha < \omega_o : Q > \frac{1}{2}$$

$$\Delta' = \alpha^2 - \omega_o^2 = i^2 \Omega^2 \quad \text{avec :} \Omega^2 = \omega_o^2 - \alpha^2$$

Deux racines complexes conjuguées : $r_1 = -\alpha + i\Omega$ et $r_2 = -\alpha - i\Omega$ donc la solution s'écrit :

$$q(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) = C e^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

C'est une fonction pseudopériodique d'amplitude $Q_m = C e^{-\alpha t}$ variable en fonction du temps $Q_m \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

La pseudopériode est :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T_o}{\sqrt{1 - (\frac{\alpha}{\omega_o})^2}} = \frac{T_o}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Representation graphique

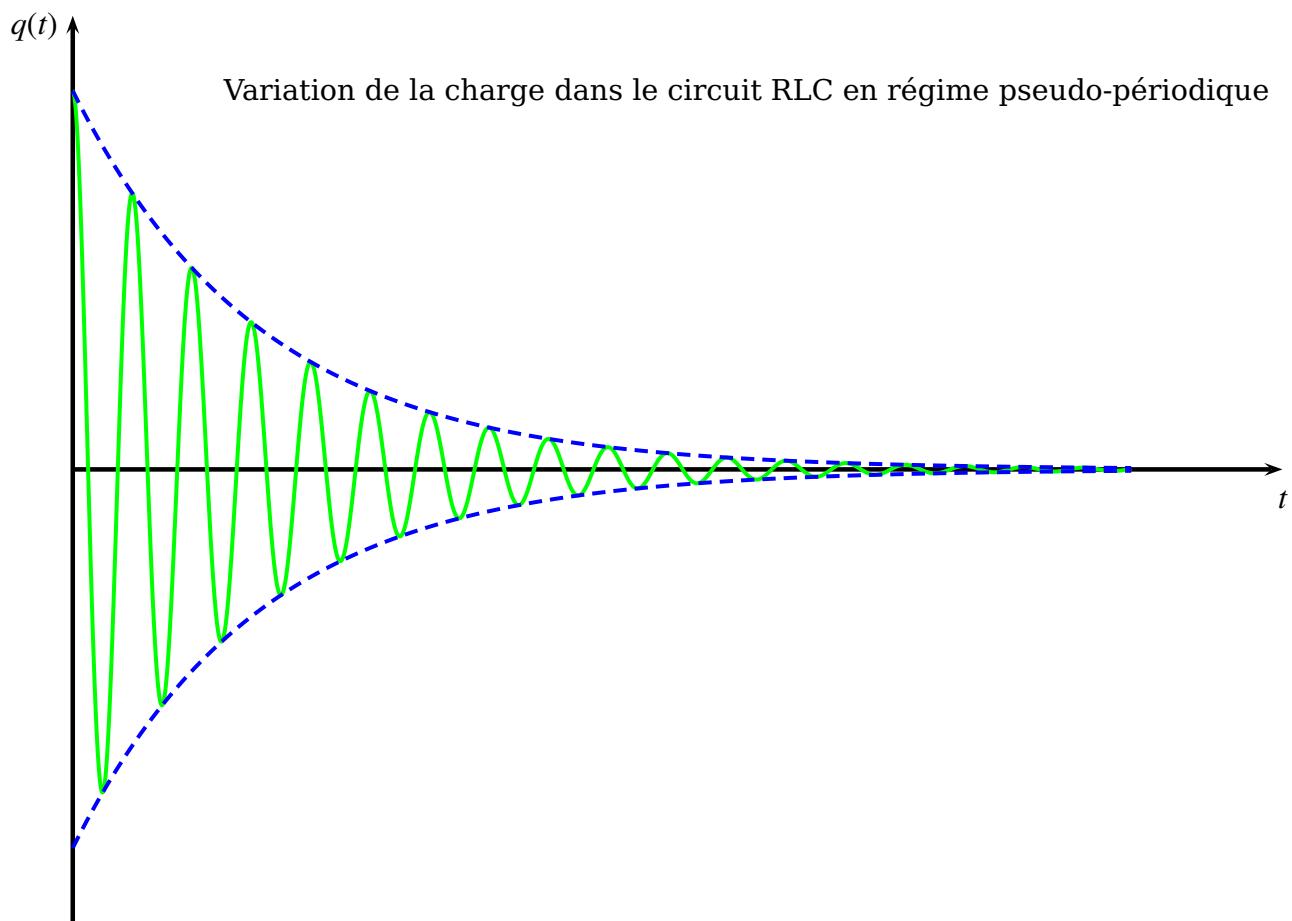
La fonction $q(t)$ est le produit d'une fonction périodique et une fonction non périodique (amplitude), et puisque

$$-C e^{-\alpha t} \leq q(t) \leq C e^{-\alpha t}$$

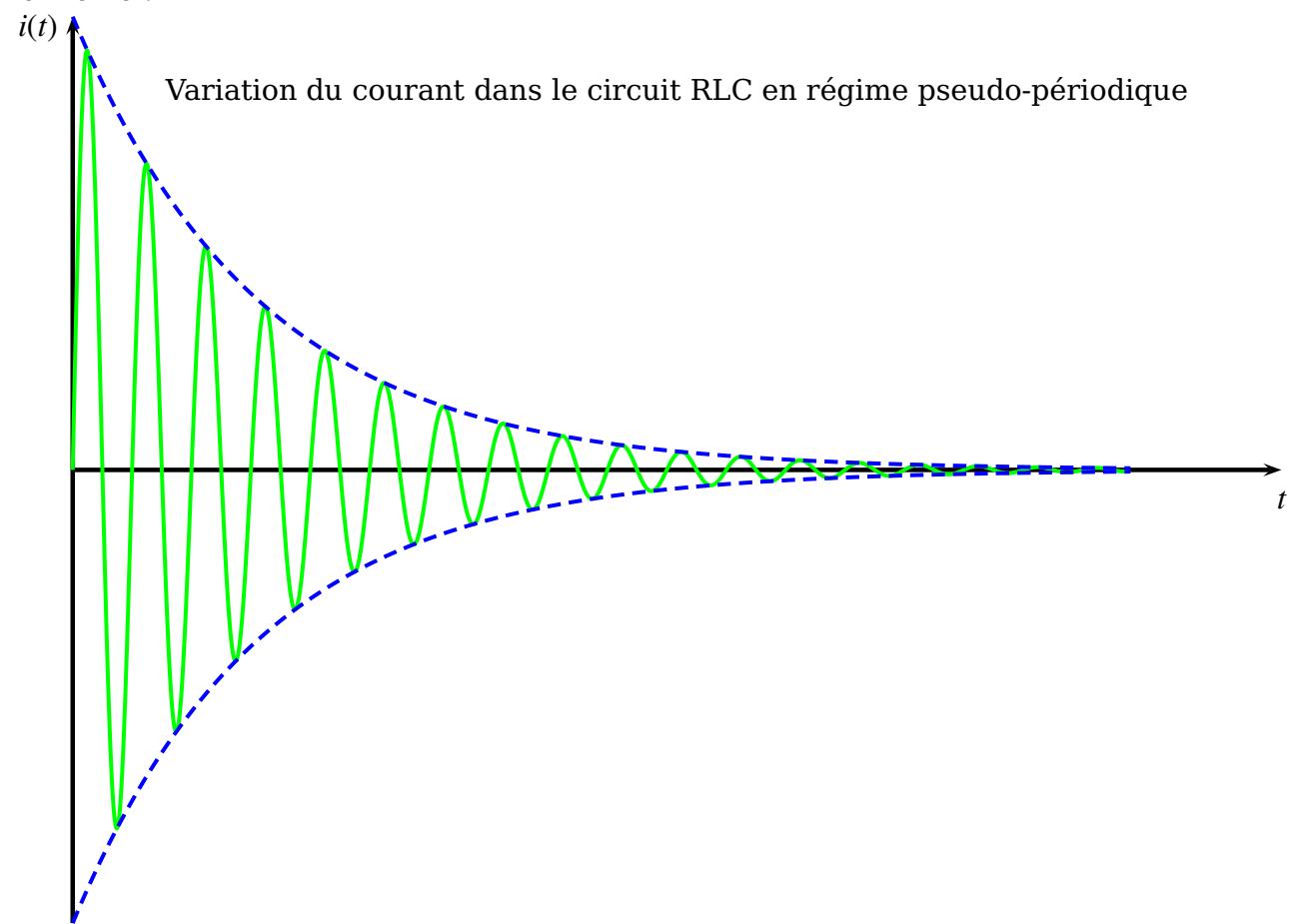
alors on représente les deux enveloppes puis la fonction $q(t)$ ($q(t)$ ne peut pas dépasser l'enveloppe) $\alpha = 0.5$, $\omega_o = \sqrt{9,25}$, $\Omega = 3$, $\varphi = 0$, $q_o = 1 \implies q_{pp} = e^{-0.5t} \cos 3t$

Representation graphique

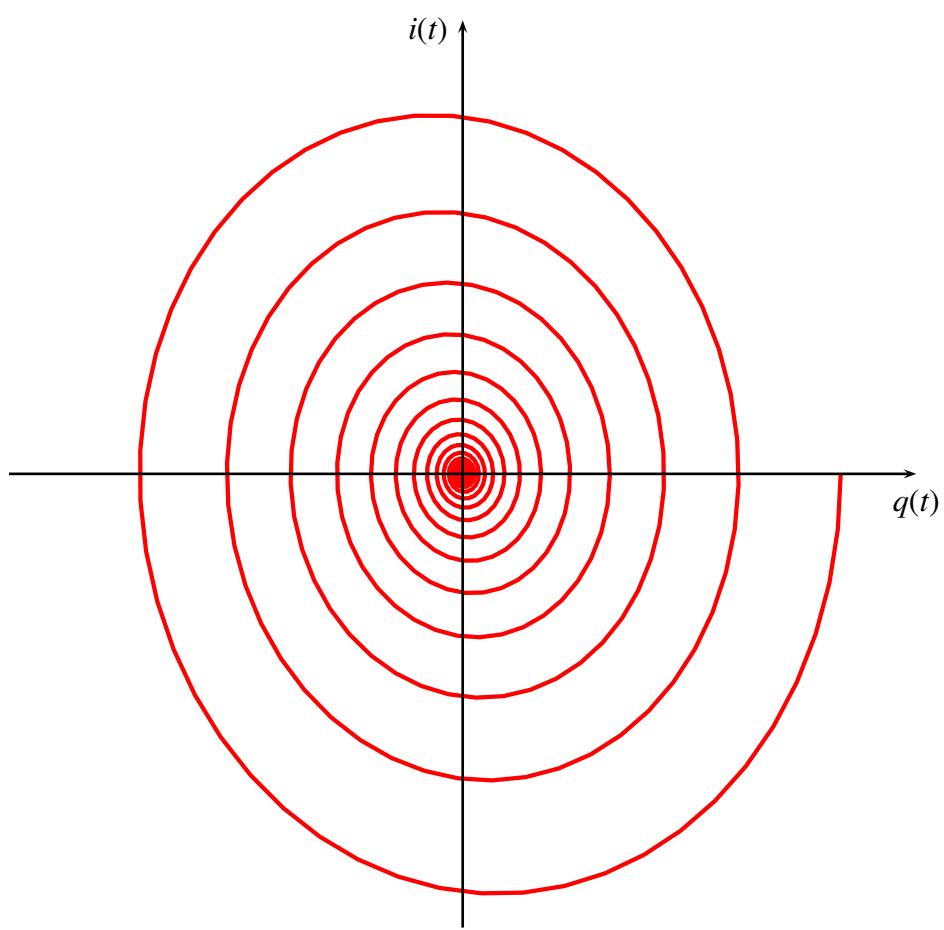
Conditions initiales : $\omega_o = 8$; $Q = 10$; $q(0) = 5$; $i(0) = 0 \implies q(t) = \exp(-0.4t)(5 \cos(7,99t) + 0,25 \sin(7,99t))$; $i(t) = \exp(-0,4t)[-40 \sin(7,99t) + 10^{-9} \cos(7,99t)]$



De même :



La trajectoire de phase est :



Portrait de phase en régime pseudo-périodique

Remarque

► On a $T = \frac{2\pi}{\Omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_o \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega_o}\right)^2}}$ et comme $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ ainsi $\frac{2\alpha}{\omega_o} = \frac{1}{Q}$ étant le facteur de qualité ; alors

$$T = \frac{T_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega_o}\right)^2}} = \frac{T_o}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Si $\alpha \ll \omega_o \Rightarrow Q \gg 1$; en effet R très faible ,alors $T \approx T_o$ oscillations synchrones.

► Comme e^{-at} est un nombre sans dimension alors α à la dimension d'un temps⁻¹ , on pose

$$\alpha = \frac{1}{\tau}$$

τ s'appelle le temps de relaxation ou temps d'amortissement.

Donc pour $t = \tau$ l'amplitude $Ce^{-at}(t = \tau) = \frac{C}{e}$

On conclut donc que :**Le temps de relaxation est le temps nécessaire pour que l'amplitude se divise par e**

► Pour $t = 10\tau$ alors l'amplitude $Ce^{-at}(t = 10\tau) = \frac{C}{22026.46579} = 0.0000454C \rightarrow 0$

On retient donc que pour $t \geq 10\tau$ le régime transitoire disparaît.

Aspect énergétique :

On a : $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \Rightarrow \boxed{(\frac{1}{2}Li^2) + Ri^2dt + d(\frac{1}{2C}q^2) = 0}$

- $\delta W_e = d(\frac{1}{2C}q^2)$:l'énergie électrostatique élémentaire emmagasinée par le condensateur .

- $\delta W_m = d(\frac{1}{2}Li^2)$:l'énergie magnétique élémentaire emmagasinée par la bobine .
- $\delta W_e = Ri^2dt$:l'énergie élémentaire dissipée par effet Joule dans la resistance .

$$\boxed{W_e + W_J + W_m = 0}$$

le bilan énergétique pour le circuit (RLC série) libre

Decrement logarithmique

on définit le décrément logarithmique par

$$\delta = \alpha T$$

coefficient sans unité

On a :

- $u(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \varphi)$
- $u(t + nT) = Ae^{-\alpha(t+nT)} \cos(\Omega t + n\Omega T + \varphi) = e^{-\alpha nT} u(t)$

D'où :

$$\frac{u(t)}{u(t + nT)} = e^{\alpha nT} \implies \alpha nT = \ln \frac{u(t)}{u(t + nT)}$$

On en déduit que

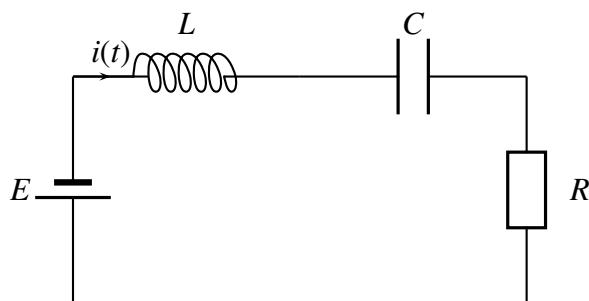
$$\delta = \alpha T = \frac{1}{n} \ln \frac{u(t)}{u(t + nT)}$$

Si $n = 1$ alors :

$$\delta = \alpha T = \ln \frac{u(t)}{u(t + T)}$$

3.3.2 Régime forcé :

On ajoute au circuit précédent un générateur délivrant une tension continue E .

**L'équation différentielle**

On a : $E = L \frac{di}{dt} + (R + r)i + \frac{1}{C}q$ et comme $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ convention récepteur et en posant $2\alpha = \frac{\alpha}{R+r}$ et $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$ alors la forme canonique de l'équation différentielle est :

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega_o^2 q = \frac{E}{L}$$

Solution de l'équation différentielle

La solution est la somme de deux solutions :

- $q_i(t)$ solution de l'équation homogène qui tend vers 0 après quelques périodes : elle

décrit donc un **régime transitoire**

- $q_p(t)$ solution particulière décrit le **régime permanent**.

On a :

- $q_p(t) = CE$

- L'expression de $q_t(t)$ dépend du signe de Δ' .

Pour la suite on suppose que $\Delta' < 0 \Rightarrow \alpha < \omega_o$: régime pseudo-périodique, donc

$$q_t(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

A l'amplitude (grandeur positive) et φ la phase à l'origine deux constantes déterminées par les conditions initiales ; on suppose que $q(t = 0) = 0$ condensateur initialement déchargé et $i(t = 0)$ bobine initialement déchargée.

$$q(t) = CE + Ae^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \varphi) \Rightarrow q(t = 0) = 0 = CE + A \cos \varphi \quad (I)$$

$$i(t) = -Ae^{-\alpha t}(\alpha \cos(\Omega t + \varphi) + \Omega \sin(\Omega t + \varphi))$$

$$i(t = 0) = 0 \Rightarrow \alpha \cos \varphi + \Omega \sin \varphi = 0 \quad (II)$$

D'après (II) :

$$\tan \varphi = -\frac{\alpha}{\Omega}$$

D'après (I) : $A = -\frac{CE}{\cos \varphi}$ et comme $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \pm \sqrt{1 + \tan^2 x}$

$$\text{alors } A = \pm CE \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\Omega^2}}$$

Puisque A est une amplitude alors le signe +, donc

$$A = CE \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\Omega^2}}$$

Cas particulier important $\alpha \ll \omega_o \Rightarrow Q \gg 1$

Dans ce cas

$$\alpha \ll \omega_o \Rightarrow \Omega = \omega_o; T = T_o; A = CE; \varphi = 0$$

Donc

$$q(t) = CE(1 + e^{-\alpha t} \cos(\omega_o t))$$

Ainsi

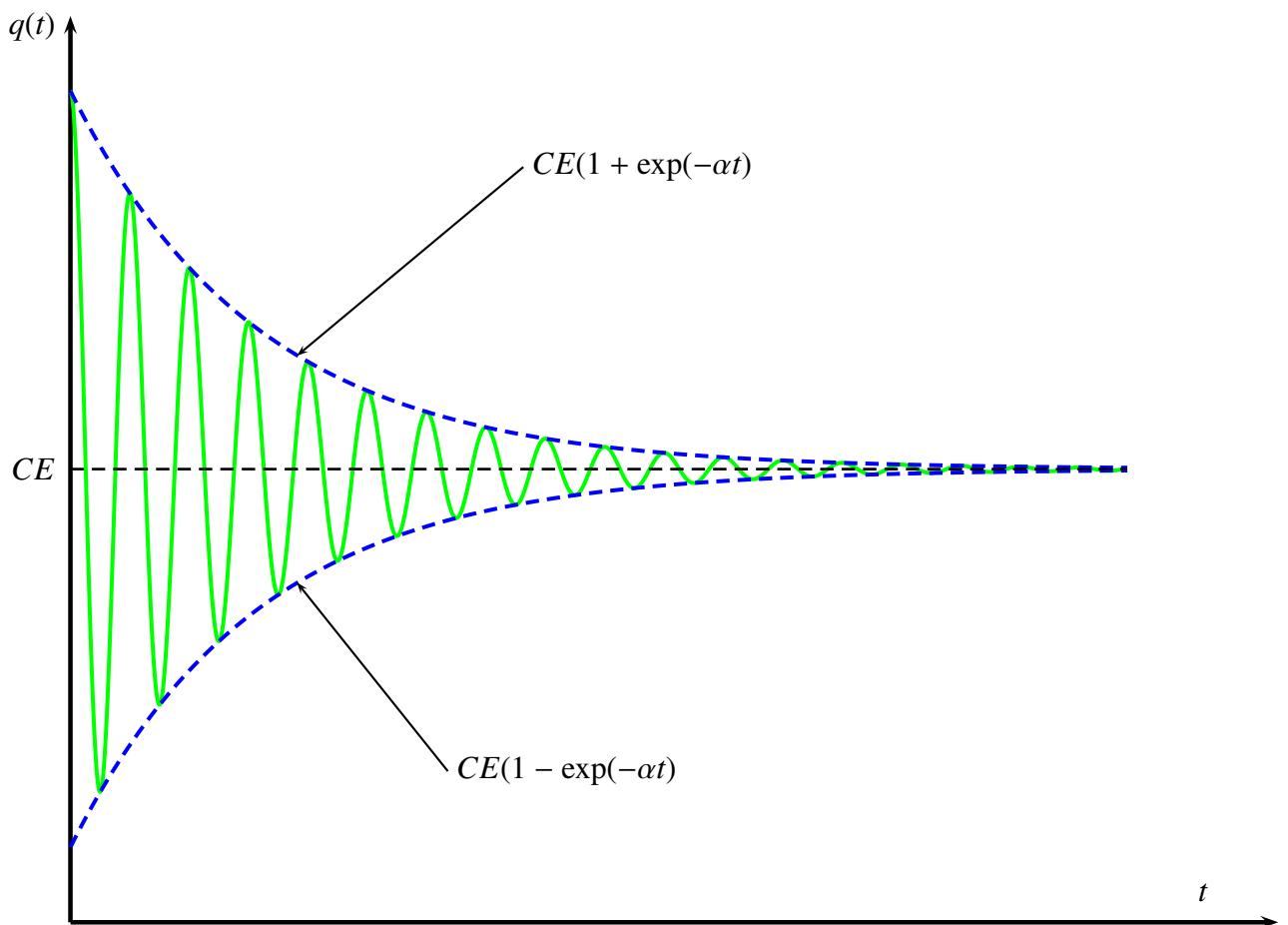
$$i(t) = -CEe^{-\alpha t}(\alpha \cos \omega_o t + \omega_o \sin \omega_o t)$$

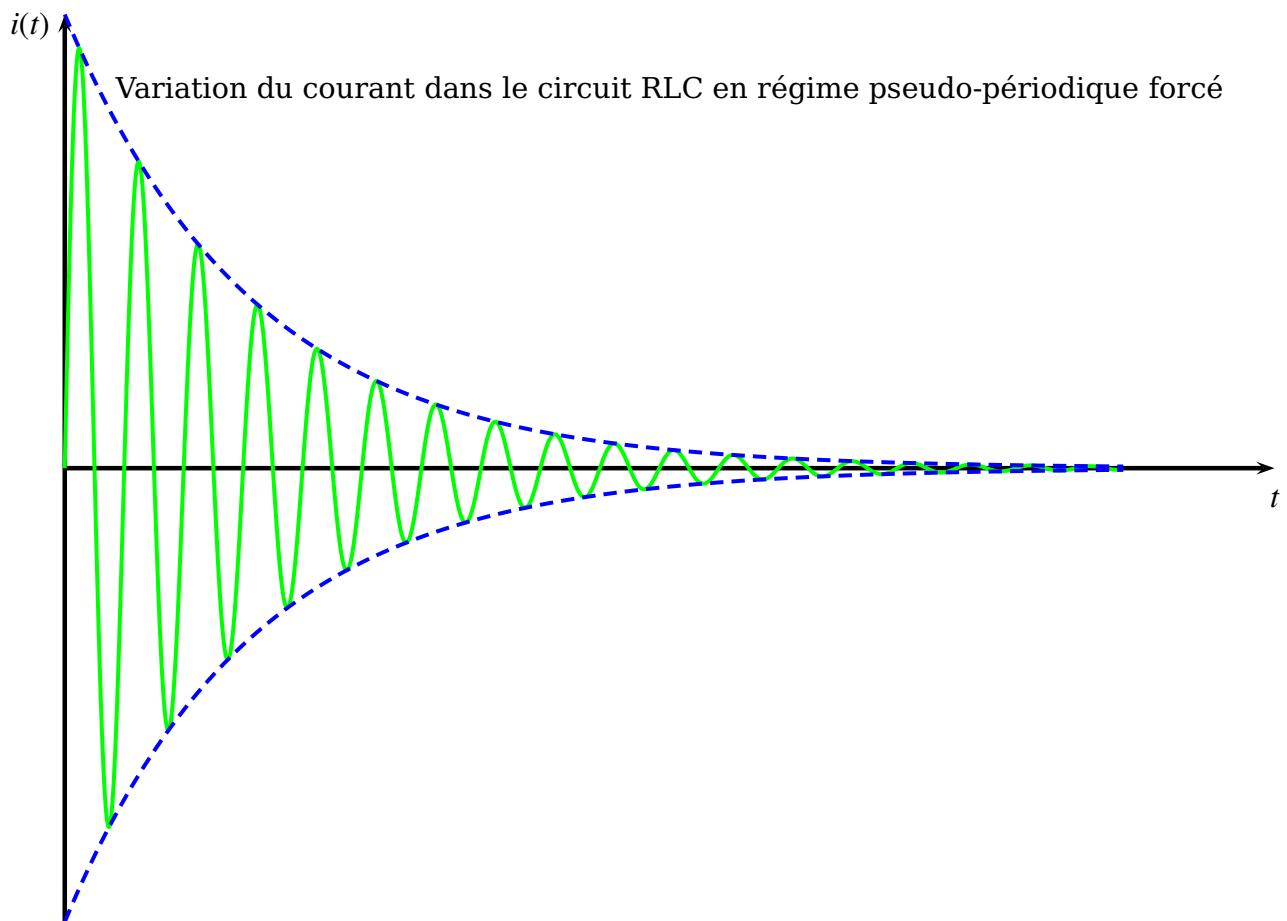
Puisque les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont bornées et $\alpha \ll \omega_o$ alors

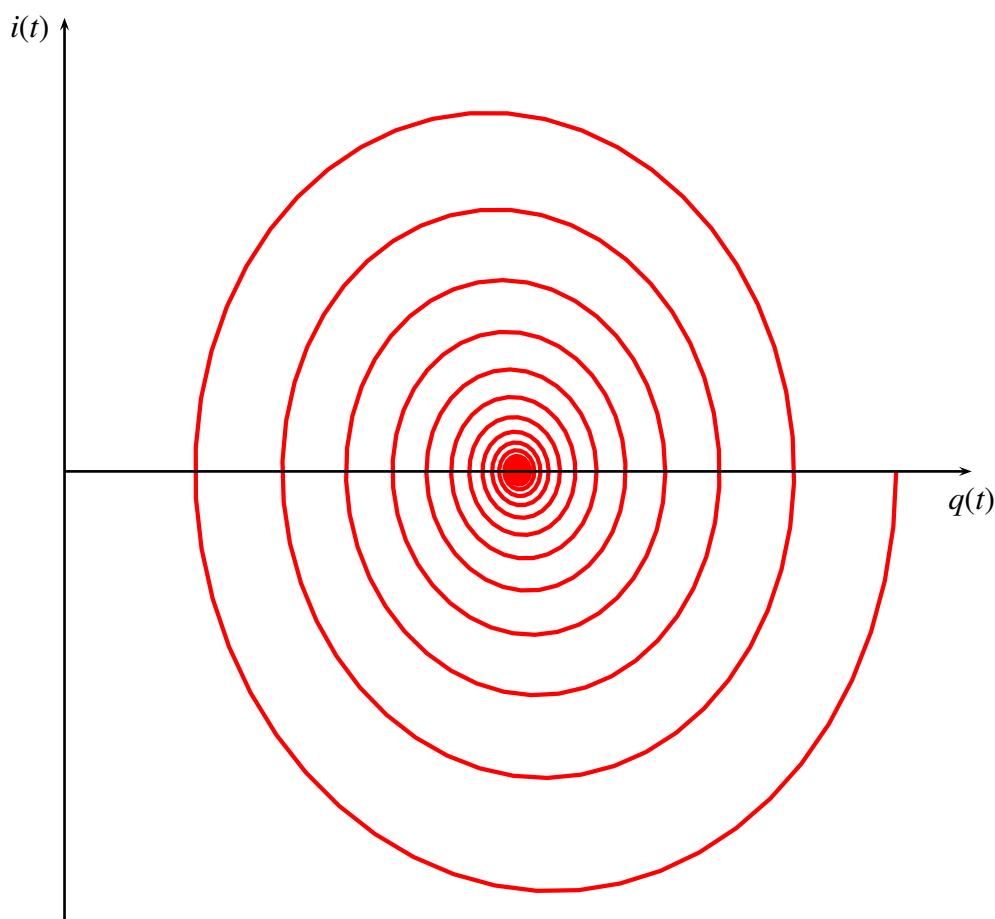
$$i(t) = -CE\omega_o e^{-\alpha t} \sin \omega_o t$$

Représentation graphique

Représentation de la charge



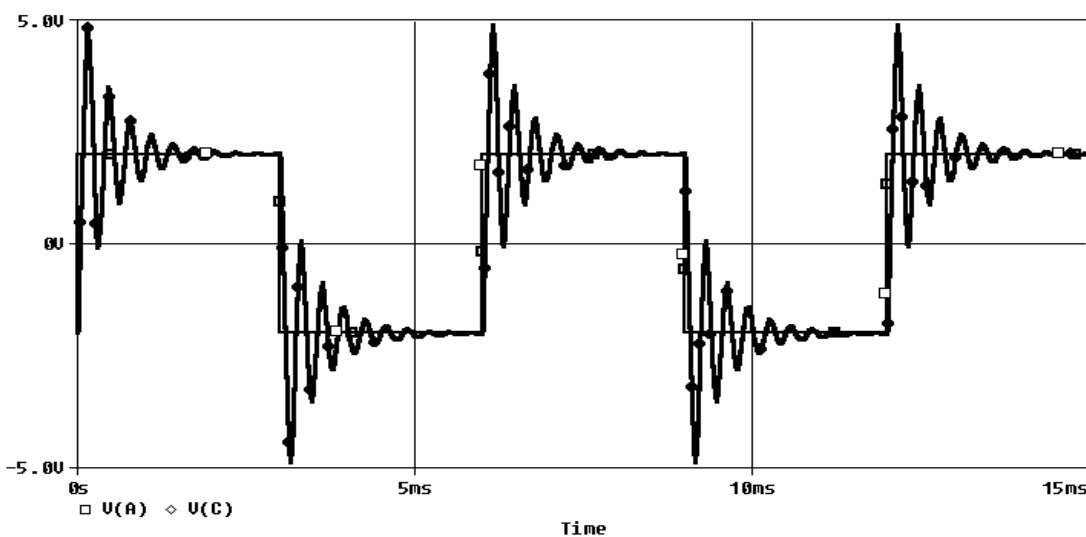




Remarque Portrait de phase en régime pseudo-périodique

Si on remplace la tension continue E par un générateur de tension carrée on obtient le schéma suivant :

Representation graphique



Pour toute les détails voir TP régime transitoire

CHAPITRE 4

RÉGIME ALTERNATIF SINUSOIDAL

Un signal alternatif est un signal qui n'admet pas de composante continue (sa valeur moyenne est nulle : $\langle u(t) \rangle = 0$) , en effet son expression s'écrit sous la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

avec :

- X_m : amplitude du signal (valeur positive).
- $\omega t + \varphi$: la phase à l'instant t .
- φ : La phase à l'origine, c'est à dire la phase pour $t = 0$
- ω : la pulsation .

4.1 Amplitude complexe ,Impedance et admittance complexes

4.1.1 Amplitude complexe

Soit un signal sinusoidal d'amplitude X_m et de pulsation ω , c'est à dire

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

A ce signal on peut lui associer :

- Un vecteur tournant de norme X_m et d'angle $\theta = \omega t + \varphi$: représentation de **Fresnel**.
- Un nombre complexe de module X_m et d'argument φ : représentation complexe.

Rappel :

- $|\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2| = |\underline{Z}_1| \times |\underline{Z}_2|$
- $\left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right| = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|}$
- $\arg(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2) = \arg \underline{Z}_1 + \arg \underline{Z}_2$ ► $\arg(\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2) = \arg \underline{Z}_1 - \arg \underline{Z}_2$
- $\arg(a > 0) = 0$ ► $\arg(a < 0) = \pi$ ► $\arg(ja)(a > 0) = \frac{\pi}{2}$
- $\arg(ja)(a < 0) = -\frac{\pi}{2}$ ► $= \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ► $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$

Si $\underline{Z} = a + jb = |\underline{Z}| e^{j\theta}$ alors :

$$\begin{aligned} \triangleright |\underline{Z}| &= \sqrt{a^2 + b^2} & \triangleright \sin \theta &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\Im(\underline{Z})}{|\underline{Z}|} \\ \triangleright \cos \theta &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\Re(\underline{Z})}{|\underline{Z}|} & \triangleright \tan \theta &= \frac{b}{a} = \frac{\Im(\underline{Z})}{\Re(\underline{Z})} \end{aligned}$$

La notation complexe consiste à associer à une fonction sinusoïdale un nombre complexe :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{x}(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) + jX_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\implies \underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} \text{ avec } : x(t) = \Re(\underline{x}(t))$$

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

On rappelle que pour un signal sinusoïdal : $X_e = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$: valeur efficace.

On pose :

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} \implies \underline{X}_e = X_e e^{j\varphi}$$

On conclut que :

$$X_e = |\underline{X}_e| \quad || \quad X_m = |\underline{X}_m| \quad || \quad \varphi = \arg \underline{X}_m = \arg \underline{X}_e$$

Intérêt de la notation complexe :

★ Linéarité :

Si $x_1 = X_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2 = X_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ alors pour :

$$x = x_1 + x_2 = X_m \cos(\omega t + \varphi) \implies X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = X_{1m} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} + X_{2m} e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}$$

$$\underline{X}_m = \underline{X}_{1m} + \underline{X}_{2m}$$

Propriété

Linéarité

L'addition de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω est équivalente à l'addition des amplitudes complexes en notation complexe.

★ Dérivation :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \implies \underline{x} = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$\implies \frac{dx}{dt} = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega X_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \rightarrow \omega X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x}(t)$$

Propriété

Dérivation

Dériver par rapport à t en notation réelle revient à multiplier par $(j\omega)$ en notation complexe

★ Intégration :

$$\int x(t)dt = \frac{1}{\omega} X_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{X_m}{\omega} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$\rightarrow \frac{X_m}{\omega} e^{j\varphi} e^{j\omega t} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{X_m}{j\omega} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

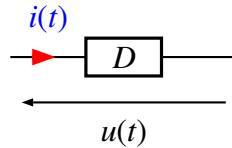
$$\int \underline{x}(t)dt = \frac{1}{j\omega} \underline{x}(t)$$

Propriété**Intégration**

Intégrer par rapport à t en notation réelle revient à multiplier par $(\frac{1}{j\omega})$ en notation complexe

4.1.2 Impédance complexe et admittance complexe :**4.1.2.1 Définitions :**

Soit un dipole linéaire AB ;



$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \underline{i} = \underline{I}_m e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$$

Puisque le dipole est linéaire alors la tension $u(t)$ est sinusoidal **de même pulsation ω**

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \rightarrow \underline{u} = \underline{U}_m e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$$

On appelle impedance complexe

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

$$\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi}$$

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} \quad \| \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arg \underline{Z}$$

φ étant le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$

On appelle admittance complexe :

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{I_m}{U_m} e^{-j\varphi}$$

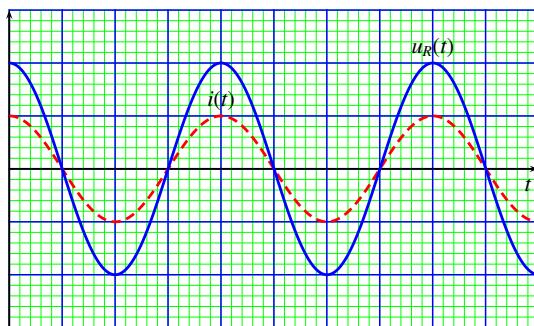
4.1.2.2 Applications :

4.1.2.2.1 Impédance d'un resistor :

$$u = Ri \implies U_m = RI_m$$

Conclusion:

$Z_R = R \implies \varphi_R = 0$: $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase



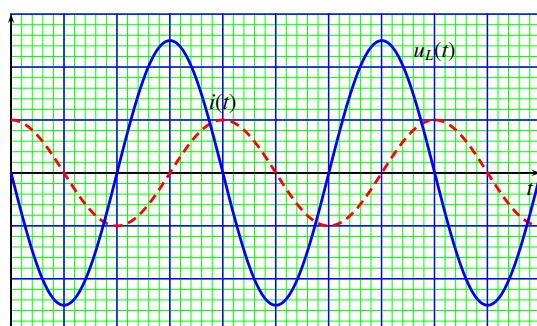
4.1.2.2.2 Impédance d'une bobine idéale :

$$u = L \frac{di}{dt} \implies U_m = jL\omega I_m \implies$$

$$Z_L = jL\omega$$

Conclusion:

- $Z_L = jL\omega$
- $\varphi_L = +\frac{\pi}{2}$
- $\varphi_L > 0 \implies u(t)$ est en quadrature avance par rapport à $i(t)$
- $\varphi_L = \frac{\pi}{2} \implies \Delta t = T/4$



4.1.2.2.3 Impédance d'un condensateur :

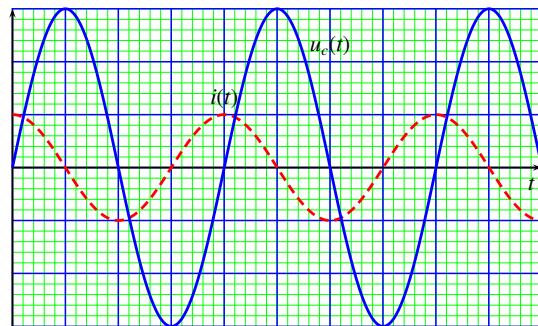
$$u = \frac{1}{C} \int i(t) dt \implies U_m = \frac{1}{jC\omega} I_m \implies$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

-

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} ; \quad \varphi_C = -\pi/2$$

- $\varphi_C < 0 \implies u(t)$ est en quadrature retard par rapport à $i(t)$
- $|\varphi_C| = \pi/2 \implies \Delta t = T/4$



Remarque

Conclusion

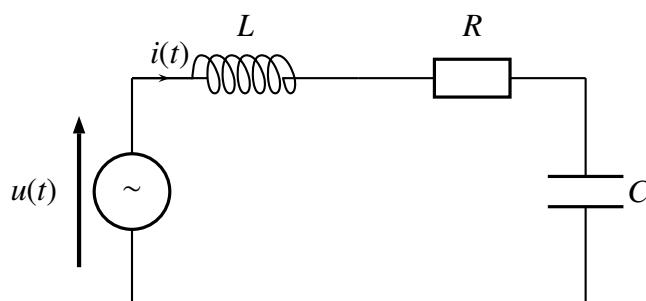
Tous les résultats trouvés en courant continu reste valable en régime sinusoidal forcé à condition de travailler avec les grandeurs complexes

Exemple : Voir TD 3 :

4.2 Étude du circuit RLC série en régime sinusoidal forcé

Soit un circuit RLC série alimenté par un GBF maintenant entre ses bornes une tension

$$e(t) = E \cos(\omega t + \varphi_e) \text{ avec } \omega = 2\pi f \text{ variable ; } f \text{ étant la fréquence}$$



4.2.1 Régime transitoire et régime permanent

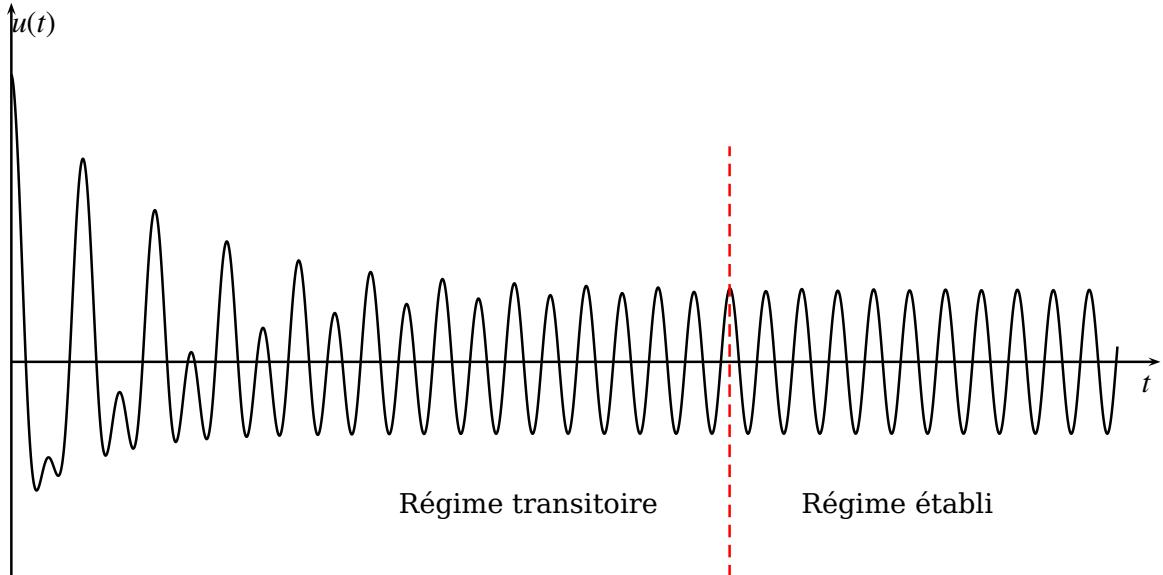
L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_o^2 q = \frac{E}{L} \cos(\omega t + \varphi_e)$$

La solution de cette équation différentielle est la somme de deux solutions :

- Une solution de l'équation homogène (sa forme dépend du signe de Δ'), cette solution tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$ ($t \geq 10\tau$).
- Une solution particulière qui s'écrit sous la forme $Q \cos(\omega t + \varphi_q)$ qui décrit le régime permanent.

Pour représenter les deux régimes on suppose que $\Delta' < 0$, ainsi : $q(t) = 1e^{-0.1t} \cos(2t) + 1 \cos(t)$



4.2.2 Étude de l'impédance

RLC en série donc $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L$ alors

$$\underline{Z} = (R + r) + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

On tire que :

$$Z = \sqrt{(R + r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} = R_e \sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}$$

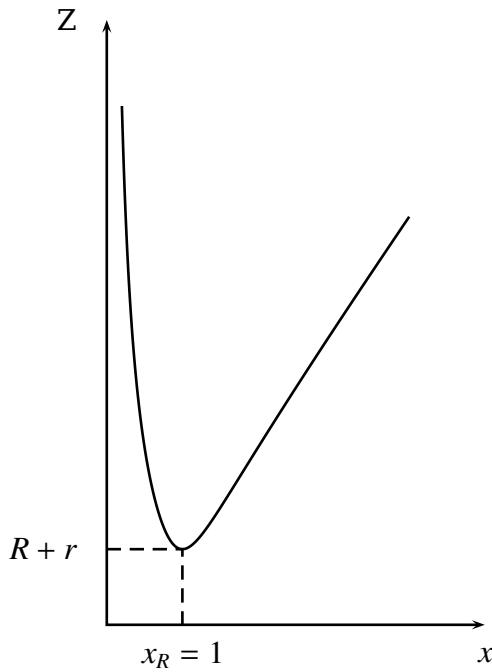
$$\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + r}$$

Cherchons si Z présente un extremum, pour cela calculons $\frac{dZ}{d\omega}$:

$$\frac{dZ}{d\omega} = \frac{(L\omega - \frac{1}{C\omega})(L + \frac{1}{C\omega^2})}{\sqrt{(R + r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$\frac{dZ}{d\omega} = 0 \implies L\omega = \frac{1}{C\omega}$ On retient que Z est minimale pour $\omega = \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et sa valeur minimale est

$$Z_{min} = R + r$$



4.2.3 Résonance en tension aux bornes du condensateur (Charge)

4.2.3.1 Équation différentielle et solution

On a : $e(t) = R_e i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$ et puisque $u_c = \frac{q}{C}$ et $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}$ alors

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{LC} e(t)$$

En posant $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$ et $2\alpha = \frac{R}{L} = \frac{\omega_o}{Q}$ la forme canonique

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_o^2 u_c = \omega_o^2 E \cos(\omega t + \varphi_e)$$

C'est une équation différentielle en u_c du second ordre linéaire avec second membre sinusoidal.

La solution de cette équation différentielle en **régime permanent** s'écrit $u_c(t) = U_c \cos(\omega t + \varphi_c)$.

Le problème est de déterminer U_c et φ_c .

On utilise la méthode complexe pour déterminer ces deux grandeurs, pour cela on utilise le diviseur de tension :

$$\underline{U}_c = \frac{1/jC\omega}{R_e + jL\omega + 1/jC\omega} E \Rightarrow \underline{U}_c = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_o}} E$$

Posons pour la suite $x = \frac{\omega}{\omega_o}$: pulsation réduite (sans dimension)

$$\underline{U}_c = \frac{1}{1 - x^2 + \frac{j}{Q}x} \underline{E}$$

Donc

$$U_c = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

$$\varphi_c = \varphi_e - \arg(1 - x^2 + \frac{j}{Q}x)$$

4.2.3.2 Étude de l'amplitude U_c

Cherchons si U_c présente un extremum ; pour cela calculons $\frac{dU_c}{dx}$:

$$\frac{dU_c}{dx} = -E \frac{x(2(x^2 - 1) + \frac{1}{Q^2})}{((x^2 - 1)^2 + \frac{x^2}{Q^2})^{3/2}}$$

On conclut donc que :

- U_c présente en $x = 0 \Rightarrow \omega = 0$ (Signal continu) un extremum (solution non importante)
- Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ U_c présente un deuxième extremum en

$$x_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \Rightarrow \omega_{R(\text{charge})} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Avec

$$U_{c(max)} = \frac{2EQ^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

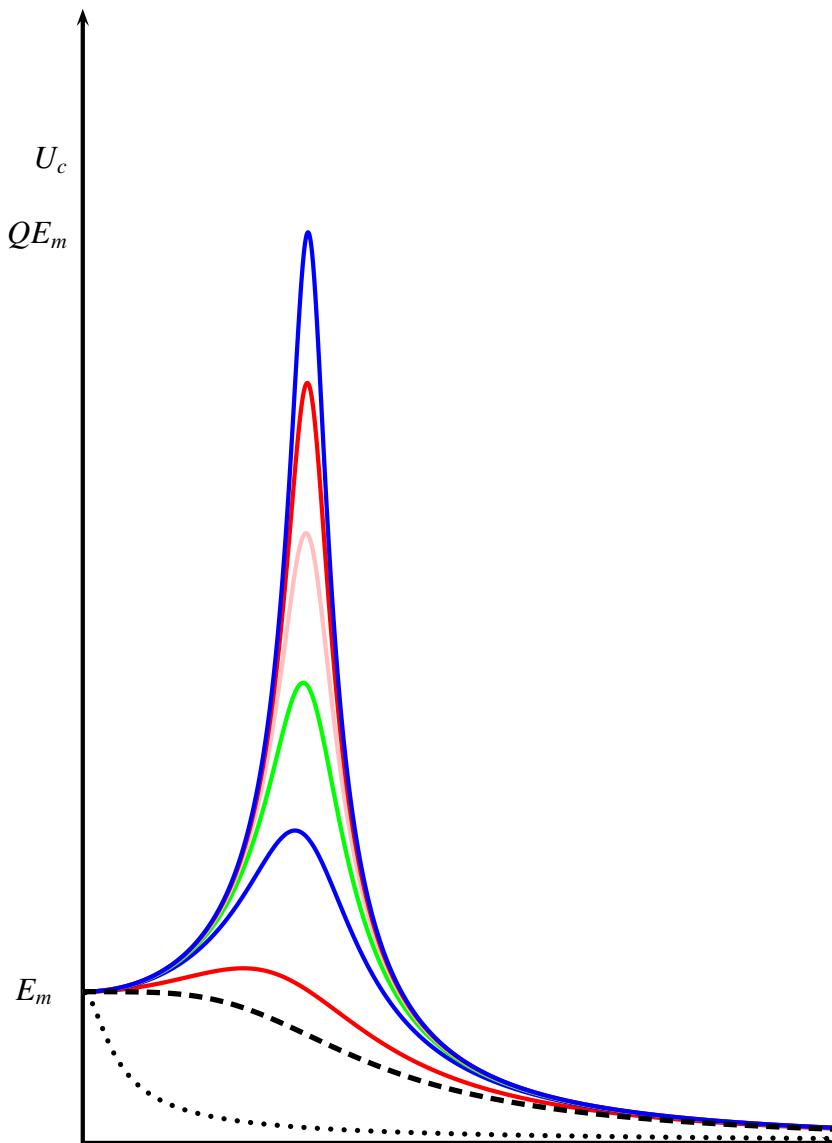
Si $Q \gg 1$ alors

$$U_{c(max)} = QE$$

c'est le phénomène de surtension

- Si $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ U_c ne présente pas un deuxième extremum : U_c une fonction décroissante

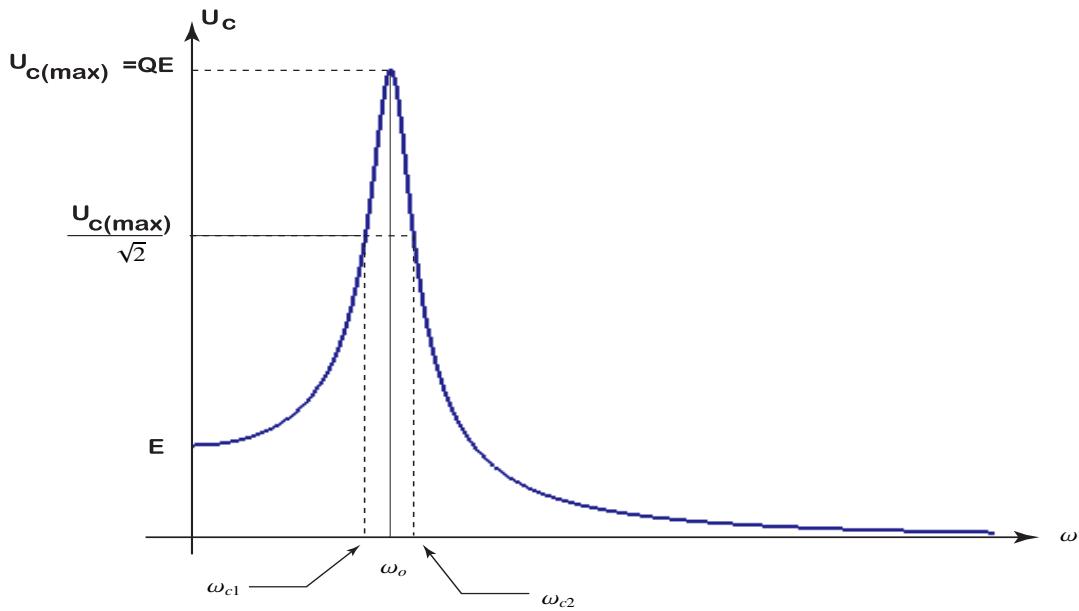
Représentation pour quelques valeurs de Q

**Remarque**

Pour $Q \geq 5 \implies \omega_R = 0,9899\omega_o \simeq \omega_o$

4.2.3.3 La bande passante à -3dB pour la charge

On suppose pour la suite que $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$
 On définit la bande passante à -3dB par l'intervalle des pulsations $[\omega_1, \omega_2]$ (ou fréquences $[f_1, f_2]$ ou $[x_1, x_2]$) tel que $U_c \geq \frac{U_{c(max)}}{\sqrt{2}}$



Vu la courbe de U_c en fonction de x on cherche les valeurs de x où on a l'égalité.
Tout calcul (avec maple) fait donne :

$$x_{c1} = \frac{\omega_{c1}}{\omega_o} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} - \frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad | \quad x_{c2} = \frac{\omega_{c2}}{\omega_o} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} + \frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Si $Q \gg 1$ alors

$$\omega_{c1} \approx \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{Q}} \approx \omega_o \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \quad \text{et} \quad \omega_{c2} \approx \omega_o \sqrt{1 + \frac{1}{Q}} \approx \omega_o \left(1 + \frac{1}{2Q}\right)$$

La largeur de la bande passante à -3dB est :

$$\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_o}{Q}$$

4.2.3.4 Étude du déphasage $\phi = \varphi_c - \varphi_e$

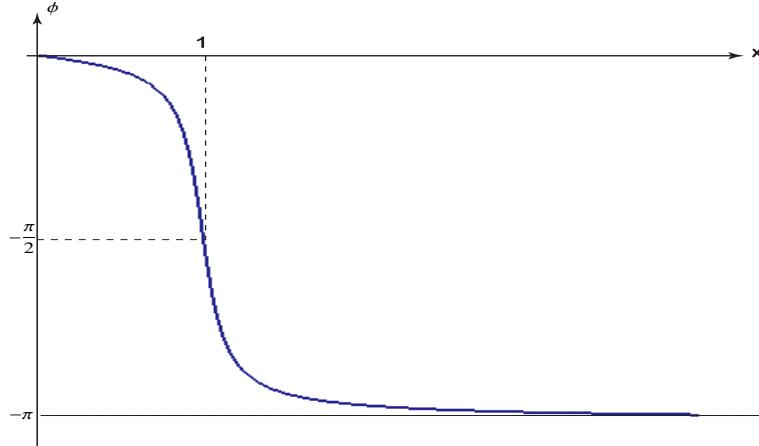
On a : $\varphi_c = \varphi_e - \arg(1 - x^2 + \frac{j}{Q}x)$ donc :

$$\sin \phi = -\frac{x/Q}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (x/Q)^2}} < 0$$

$$\sin \phi < 0 \implies \phi \in [-\pi, 0]$$

$$\phi = -\arg(1 - x^2 + \frac{j}{Q}x) \implies \tan \phi = -\frac{\frac{x}{Q}}{1 - x^2}$$

- $x \rightarrow 0 \implies \phi \rightarrow 0$
 - $x \rightarrow 1 \implies \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$
 - $x \rightarrow +\infty \implies \phi \rightarrow -\pi$ en effet :
- $\phi \in [-\pi, \pi] \implies \phi + \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $$\tan(\phi + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan \phi} = \frac{\mathbf{Q}(1-x^2)}{x} \implies \phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\mathbf{Q}(1-x^2)}{x}$$
- Pour $x \rightarrow \infty \implies \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$



4.2.4 Résonance en intensité

En régime permanent le courant à pour expression $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \implies \underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$

En appliquant la loi d'OHM en notation complexe, on obtient

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}}{R_e + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \implies \underline{I}_m = \frac{\underline{E}/R_e}{1 + j\mathbf{Q}(x - \frac{1}{x})}$$

4.2.4.1 Étude de l'amplitude I_m

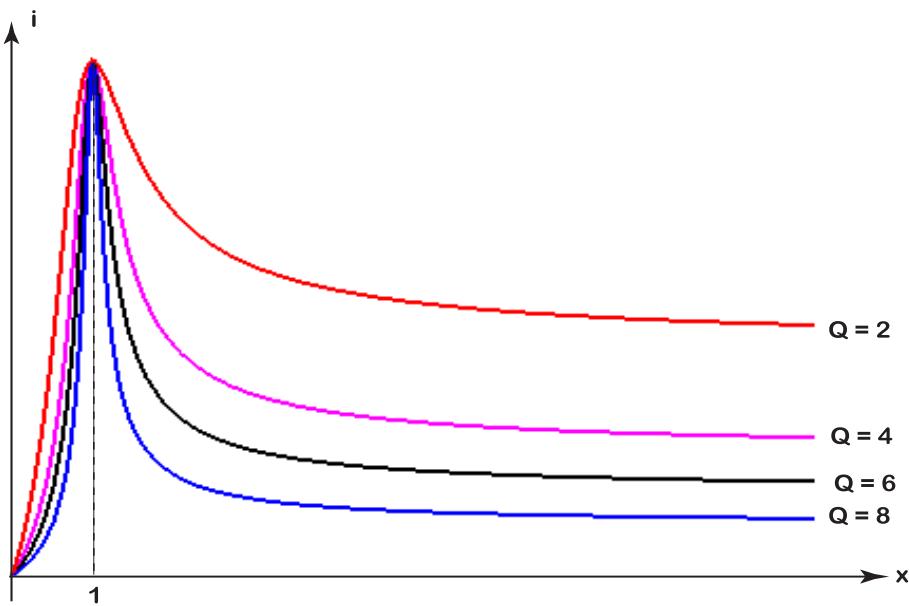
On a

$$I_m = \frac{E}{|\underline{Z}|} = \frac{E/R_e}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

- $x = 0 \implies I_m = 0$
- $x \rightarrow \infty \implies I_m \rightarrow 0$
- I_m est maximal si Z est minimal c'est à dire pour $\omega = \omega_o = \frac{1}{LC}$: **C'est la pulsation de résonance du courant**

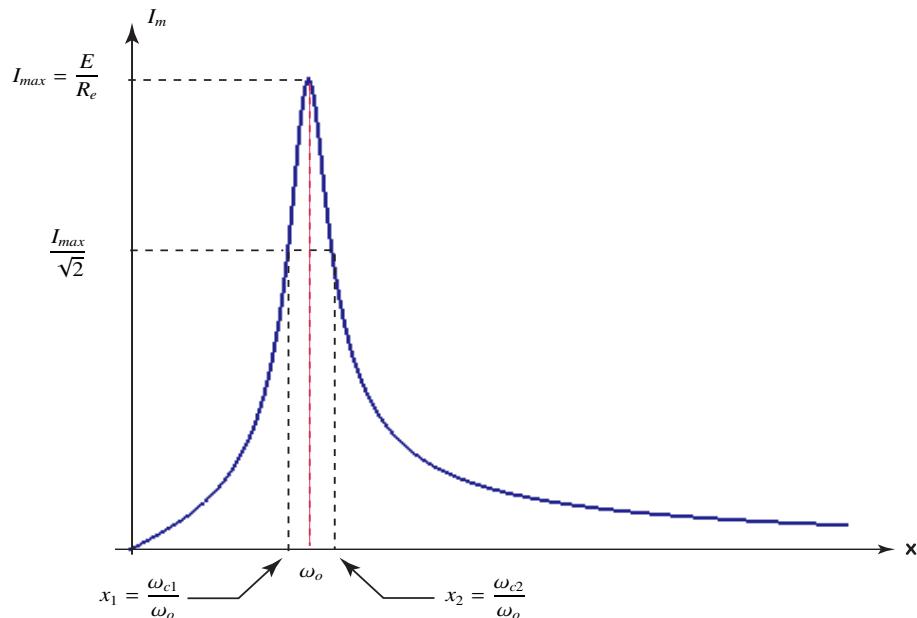
$$\triangleright I_m(\omega_o) = \frac{E}{R_e} = I_{max}$$

Representation graphique de I_m en fonction du facteur de qualité \mathbf{Q}



4.2.4.2 La bande passante à -3dB

On définit la bande passante à -3dB par l'intervalle des pulsations $[\omega_1, \omega_2]$ (ou fréquences $[f_1, f_2]$) tel que $I_m \geq \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ c'est à dire $1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \leq 2 \Rightarrow Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 - 1 \leq 0$



D'après le graphe de $I_m = I_m(x)$ on cherche les x où l'égalité est satisfaite :

$$Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1$$

$$Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1 \Rightarrow Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = \pm 1 \text{ c'est à dire que}$$

$$x^2 \pm \frac{1}{Q} x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{2Q^2} + 1}$$

$$x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_o} = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{2Q^2} + 1} ; \quad x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_o} = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{2Q^2} + 1}$$

La largeur de la bande passante à -3dB est :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_o}{Q} = \frac{R_e}{L}$$

La résonance est aiguë si la bande passante est étroite (R_e faible)

Remarque

On retrouve la définition du facteur de qualité

$$Q = \frac{\omega_o}{\Delta\omega} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_o}{R} = \frac{1}{RC\omega_o}$$

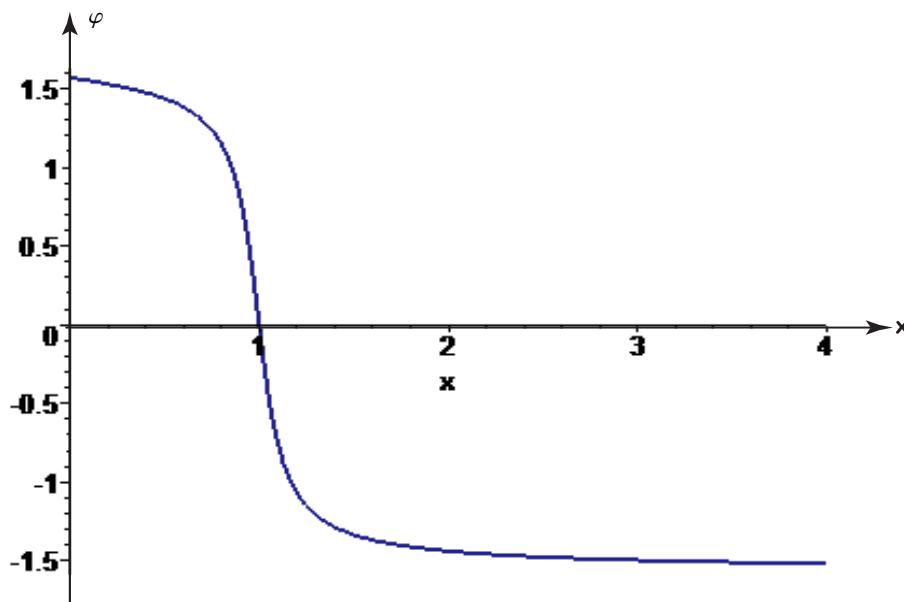
4.2.4.3 Étude du déphasage $\varphi = \varphi_i - \varphi_e$

On a $\varphi_i = \varphi_e - \arg(1 + jQ(x - \frac{1}{x}))$ en posant $\varphi = \varphi_i - \varphi_e$ alors

$$\varphi = -\arg(1 + jQ(x - \frac{1}{x})) \implies \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}} > 0 \implies \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

- Si $x \rightarrow 0$ alors $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$
- Si $x \rightarrow \infty$ alors $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$
- Si $x \rightarrow 1$ (à la résonance en courant) alors $\varphi \rightarrow 0$
- Si $x \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{2Q^2} + 1}$ alors $\varphi \rightarrow +\frac{\pi}{4}$
- Si $x \rightarrow x_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{2Q^2} + 1}$ alors $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{4}$

Representation graphique de φ en fonction x



4.3 La puissance :

4.3.1 Facteur de puissance :

★ La puissance instantanée :

$$p(t) = \frac{\delta W}{\delta t} = u(t).i(t)$$

★ La puissance moyenne :

$$P_m = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

sachant que

- $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$
- $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

Et en posant $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ le déphasage de la tension par rapport au courant alors :

$$P_m = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$P_m = \langle p(t) \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = U_e I_e \cos \varphi$$

- ▷ $\cos \varphi$: facteur de puissance.
- ▷ $P_m = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi$: puissance active ou puissance utile
- ▷ $Q = \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi$: puissance réactive
- ▷ $S = \frac{U_m I_m}{2}$: puissance apparente

$$S^2 = P_m^2 + Q^2$$

Remarque

$$\underline{ui}^* = \underline{U}\underline{I}^* = U_m I_m e^{j(\varphi+\varphi_i)} e^{-j\varphi_i} = U_m I_m \cos \varphi + j U_m I_m \sin \varphi$$

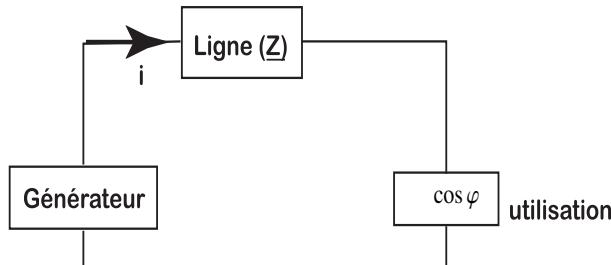
$$P_m = \frac{1}{2} \Re(\underline{ui}^*) = \frac{1}{2} \Re(\underline{U}_m \underline{I}_m^*) = \Re(\underline{U}_e \underline{I}_e^*)$$

Et puisque $\underline{U}_m = \underline{Z}\underline{I}_m$ alors

$$P_m = \frac{I^2}{2} \Re(\underline{Z}) = I_e^2 \Re(\underline{Z})$$

On conclut donc que la puissance moyenne est dissipée dans la partie réelle de l'impédance complexe

Intérêt : Soit un générateur alimentant une utilisation à travers une ligne de transport (cables) :



On pose :

- $P_u = UI \cos \varphi$: La puissance moyenne utile.
- $S = UI$: La puissance apparente.
- $P_J = RI^2$: La puissance moyenne consommée par la ligne ($\underline{Z} = R + jX$)
- P_g : la puissance moyenne délivrée par le générateur.

Le bilan énergétique s'écrit : $P_g = P_J + P_u$

Le rendement énergétique de l'ensemble est :

$$\eta = \frac{P_u}{P_g} = \frac{1}{1 + \frac{P_J}{P_u}}$$

η est une fonction décroissante de

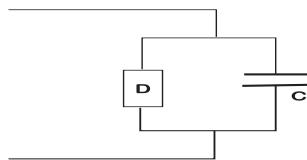
$$\frac{P_J}{P_u} = \frac{RI^2}{P_u} = \frac{RP_u}{U^2 \cos^2 \varphi}$$

Pour augmenter η , il faut minimiser $\frac{P_J}{P_u}$ donc soit :

- Diminuer R (augmenter la section des câbles)
- Augmenter U (haute tension)
- Augmenter $\cos \varphi$ (en pratique $\cos \varphi > 0,9$)

Exemple : Soit un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$

Pour augmenter $\cos \varphi$, on peut placer en parallèle sur le dipôle un condensateur



L'admittance équivalente est

$$\underline{Y}_e = jC\omega + \frac{1}{Z}$$

On veut que $\cos \varphi_{total} = 1 \implies \underline{Y}_e \in \mathbb{R}$ c'est à dire

$$C\omega - \frac{1}{Z} \sin \varphi = 0 \implies C = \frac{1}{Z\omega} \sin \varphi$$

4.3.2 Adaptation d'impédance :

Voir Exercice N°1 de la série II électrocinétique

$$1. \quad P_m = \frac{XE^2}{2[(X + X_G)^2 + (Y + Y_G)^2]}$$

2. P_m est maximale si sa dérivée est nulle :

- $\frac{\partial P_m}{\partial Y} = 0 \implies X = X_G$

- $\frac{\partial P_m}{\partial X} = 0 \implies Y = -Y_G$

Donc $\underline{Z} = \underline{Z}^*$

3. \underline{Z} est imaginaire pur $\implies X = 0$ d'où la puissance moyenne est nulle

4. la fréquence $f = 150 \text{ MHz}$

- $Z = R//C$ avec $R = 150 \Omega$ et $C = 100 \text{ pF}$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_G^* \implies \underline{Y} = \underline{Y}_G^* \text{ et comme } \underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega \implies \underline{Y}_G = \frac{1}{R} - jC\omega$$

$$\text{donc } \underline{Y}_G = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} \text{ avec } L\omega = \frac{1}{C\omega^2} \implies L = \frac{1}{C\omega^2}$$

$$\text{AN } L = \frac{1}{4\pi f^2 C} = 11,26 \text{ nH}$$

On conclut donc que

$$Z_G = R//L$$

- $Z = R//L \implies Z_G = R//C$ tel que $C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{4\pi^2 L f^2}$

$$\text{AN } C = 37,5 \text{ pF}$$

CHAPITRE 5

DIAGRAMMES DE BODE DES FILTRES DU PREMIER ET SECOND ORDRE

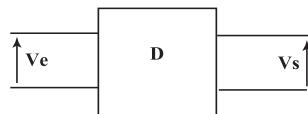
On admet le Théorème de FOURIER : toute fonction périodique peut être décomposable en une série de fonctions sinusoïdales.

C'est pour cela qu'on s'intéresse aux signaux sinusoïdaux appliqués aux systèmes linéaires.

5.1 Fonction de transfert

5.1.1 Définitions

Soit D un quadripôle constitué par un système linéaire possédant une entrée v_e et une sortie v_s :



Puisque on s'intéresse aux signaux sinusoïdaux , alors on pose :

- $v_e(t) = V_e \cos(\omega t + \varphi_e) \implies \underline{v}_e(t) = \underline{V}_e e^{j\omega t}$ avec $\underline{V}_e = V_e e^{j\varphi_e}$
- $v_s(t) = V_s \cos(\omega t + \varphi_s) \implies \underline{v}_s(t) = \underline{V}_s e^{j\omega t}$ avec $\underline{V}_s = V_s e^{j\varphi_s}$

On appelle fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)} = H e^{j\varphi}$$

avec $H = \frac{V_s}{V_e}$ le module de la fonction de transfert et $\varphi = \varphi_s - \varphi_e$ son argument (le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée).

5.1.2 Exemples

Déterminer la fonction de transfert pour les circuits suivants :

- circuit CR : $\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

- circuit RC : $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$
- circuit RLC : $\underline{H} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$
- circuit RCL : $\underline{H} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$
- circuit LCR : $\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

5.1.3 Lien entre la fonction de transfert et l'équation différentielle

Rappelons que en notation complexe multiplier par $(j\omega)^n$ c'est dérivé n fois par rapport au temps et diviser par $(j\omega)^n$ c'est intégrer n fois par rapport au temps.

Prenons l'exemple du circuit RC :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} \implies \underline{V}_e = \underline{V}_s + j\frac{\omega}{\omega_c}\underline{V}_s \text{ en passant à la notation réelle on a}$$

$$v_e(t) = v_s(t) + \frac{1}{\omega_c} \frac{dv_s(t)}{dt}$$

C'est l'équation différentielle du circuit

5.1.4 Diagrammes de BODE

En électronique , on couvre en général une large plage de fréquences ($10 \rightarrow 100$ kHz cadre de l'ARQP) ,la représentation linéaire est peu pratique et peu utilisée.

- Diagramme de Bode : c'est une représentation en échelle logarithmique en abscisse.
- On définit le gain G en décibels par :

$$G_{dB} = 20 \log H$$

On rappelle que H est sans dimension.

Le diagramme de Bode est le tracé des deux courbes :

- $G_{dB} = f(\log(\omega))$:diagramme de Bode pour H en décibels ;
- $\varphi = g(\log(\omega))$:diagramme de Bode pour la phase.

Remarque

1. On trace en général un diagramme de Bode sur un papier «semi-logarithmique» (avec une échelle logarithmique)
2. On a $\lim_{\omega \rightarrow 0} \log \omega \rightarrow -\infty$: un diagramme de Bode ne «s'arrête pas » à $\log \omega = 0$
3. Si $H = H_1 \times H_2 \implies \begin{cases} G_{dB} = G_{1dB} + G_{2dB} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$
On peut sommer les diagrammes de Bode
4. $\begin{cases} G_{dB} = 0 \iff H = 1 \\ G_{dB} < 0 \iff H < 1 \\ G_{dB} > 0 \iff H > 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} H = 10 \iff G_{dB} = 20 \\ H = 10^2 \iff G_{dB} = 40 \\ \vdots \\ H = 10^{-1} \iff G_{dB} = -20 \\ H = 10^{-2} \iff G_{dB} = -40 \\ \vdots \end{cases}$

- On appelle le décade l'intervalle des pulsations $[\omega_1, \omega_2]$ tel que $\omega_2 = 10\omega_1$

5.2 Filtrage

5.2.1 Introduction

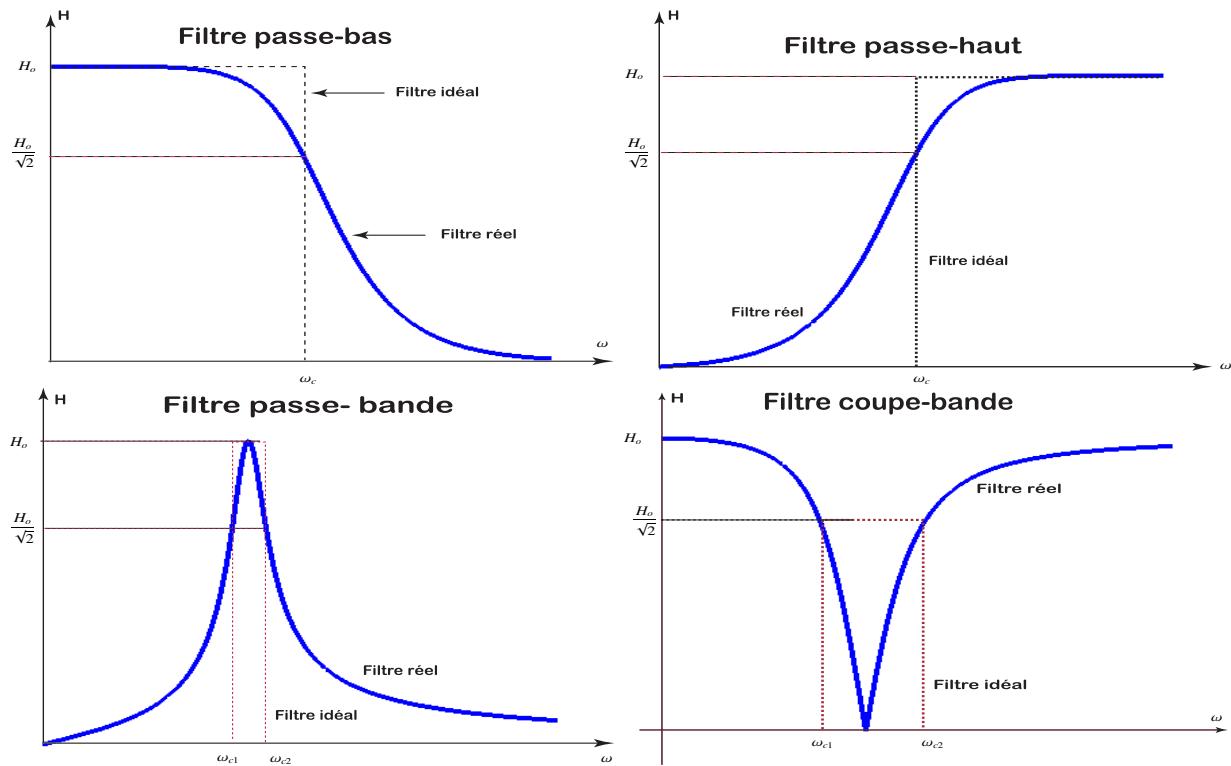
Un filtre est un système linéaire qui transmet (le plus parfaitement possible) certaines fréquences et atténue (le plus possible) les autres.

Il est caractérisé par sa bande passante $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$ ou $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ avec ω_{c1} et ω_{c2} les pulsations de coupure.

On définit la bande passante à -3dB par

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \implies G(\omega_c) = G_{max} - 3dB$$

5.2.2 Principaux types de filtres



Remarque

On pose

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(\omega)}{\underline{D}(\omega)}$$

avec $\deg \underline{N}(\omega) \leq \deg \underline{D}(\omega)$ (sinon le système est instable)

On dit qu'un filtre est d'ordre n si $\deg \underline{D}(\omega) = n$

5.3 Filtres du premier ordre

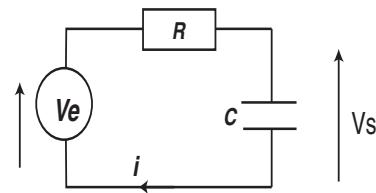
5.3.1 Filtre passe-bas du premier ordre

La forme canonique du filtre passe-bas d'ordre 1 est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_o}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{H_o}{1 + jx}$$

5.3.1.1 L'étude d'un exemple :

considérons le circuit (RC) suivant :



- En BF : $\omega(x) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{jC\omega} \rightarrow \infty$ (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert), donc le courant est nul et par conséquent $v_s(t) = v_e(t)$
- En HF : $\omega(x) \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{jC\omega} \rightarrow 0$ (le condensateur se comporte comme un fil), donc la tension entre ses bornes est nulle et par conséquent $v_s(t) = 0$

On conclut que ce filtre laisse passer les tensions sinusoïdales de faibles fréquences et élimine les tensions de hautes fréquences : **C'est un filtre passe-bas**

$$\text{La fonction de transfert s'écrit : } H(j\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Donc :

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad \| \quad H_o = 1$$

- ★ Si $\omega \gg \omega_c (x \rightarrow \infty) \Rightarrow H(j\omega) \rightarrow 0 (V_s \rightarrow 0)$
- ★ Si $\omega \ll \omega_c (x \rightarrow 0) \Rightarrow H(j\omega) \rightarrow H_o$
- ★ Le circuit est constitué des composants passifs alors le filtre est passif.
- ★ Puisque le degré du dénominateur est égal à 1 alors le filtre est passe-bas passif d'ordre 1.

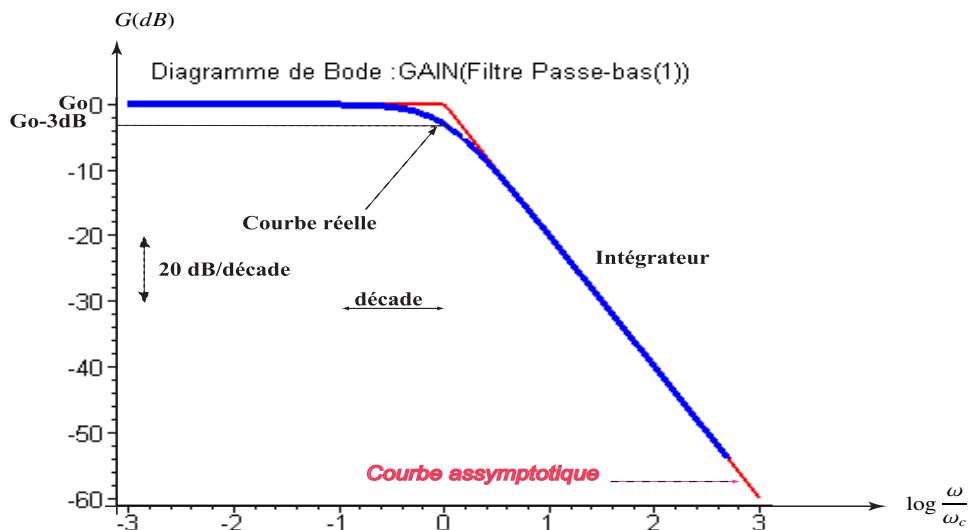
5.3.1.2 Diagramme de Bode pour le gain :

On a

$$H = \frac{|H_o|}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}} = \frac{|H_o|}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Comportement asymptotique :

- $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) = \lim_{\omega \gg \omega_c} [20 \log_{10} \frac{|H_o|}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}}] = 20 \log |H_o| - 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$
- $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) = G_o - 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$
- $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) \simeq 20 \log |H_o| = G_o$
- La courbe représentant le gain G_{dB} en fonction de $\log \frac{\omega}{\omega_c}$ est une droite de pente **-20dB/décade** et qui coupe la droite horizontale $G = G_o$ pour $\omega = \omega_c$

**Remarque**

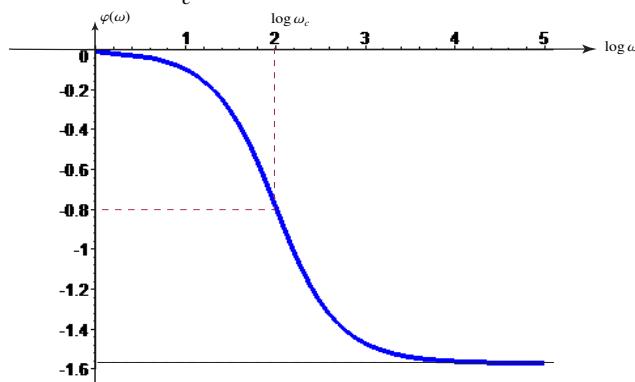
- Pour $\omega \ll \omega_o \Rightarrow x \rightarrow 0$ on a $\underline{H} = H_o \in \mathbb{R} \Rightarrow v_s(t) = H_o v_e(t)$: le circuit réalise l'opération «**multiplication par une constante**»
 - Pour $\omega \gg \omega_c \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{H_o \omega_c}{j\omega} \Rightarrow v_s = H_o \omega_c \int v_e dt$: c'est un intégrateur
- Le filtre passe bas d'ordre 1 joue le rôle d'intégrateur en hautes fréquences (pulsations $\omega \gg \omega_c$)**

5.3.1.3 Diagramme de Bode pour la phase :

- $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_o}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \Rightarrow \varphi(\omega) = \arg\left(\frac{H_o}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}\right)$

$$\varphi = \arg H_o - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Dans notre exemple $H_o = 1 \Rightarrow \sin \varphi = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 0$ et $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$ donc $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ d'où $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_c} < 0$



5.3.2 Filtre passe-haut du premier ordre

La forme canonique du filtre passe haut d'ordre 1 est :

$$\underline{H}(j\omega) = H_o \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = H_o \frac{jx}{1 + jx}$$

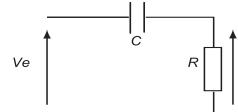
5.3.2.1 L'étude d'un exemple :

considérons le circuit (CR) suivant :

En BF : $Z_c \rightarrow +\infty \implies v_s(t) \rightarrow 0$

En HF : $Z_c \rightarrow +0 \implies v_s(t) \rightarrow v_e(t)$

Donc le filtre CR est un filtre passif passe-haut



L'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

Donc : $H_o = 1$ et $\omega_c = \frac{1}{RC}$

- L'ordre du filtre est égal à 1.
- Si $\omega \gg \omega_c \implies \underline{H}(j\omega) \rightarrow H_o$
- Si $\omega \ll \omega_c \implies \underline{H}(j\omega) \rightarrow 0$
- $\deg(D(j\omega)) = 1$

On conclut que c'est un filtre passif passe-haut d'ordre 1

5.3.2.2 Diagramme de Bode pour le gain :

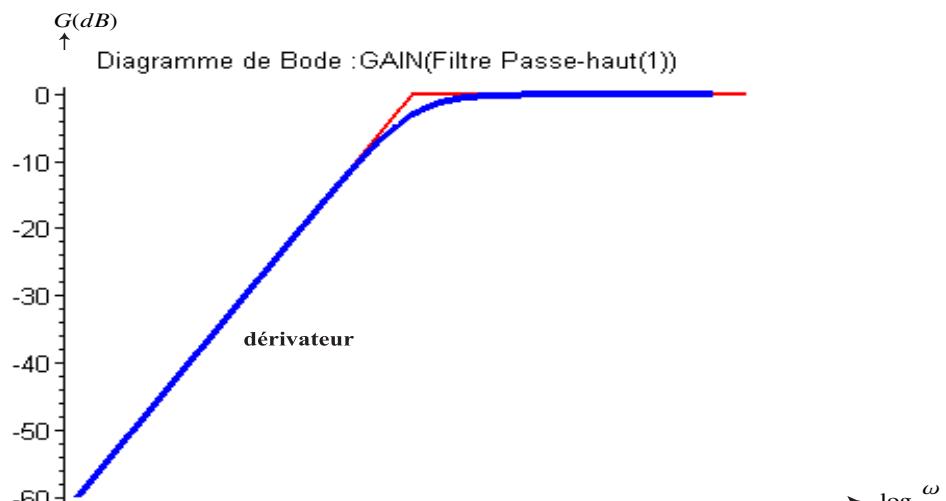
$$G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |\underline{H}(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{|H_o| \frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}}$$

Comportement asymptotique :

- $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) \simeq G_o$;
- $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) \simeq 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$

Remarque

- La courbe représentant le gain G_{dB} en fonction de $\log \frac{\omega}{\omega_c}$ est une droite de pente **20dB/décade** et qui coupe la droite horizontale $G = G_o$ pour $\omega = \omega_c$



$$G(\omega_c) = G_o - 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = G_o - 3dB$$

Remarque

Pour $\omega \ll \omega_c \Rightarrow H(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_c} \Rightarrow v_s = \frac{1}{\omega_c} \frac{v_e}{dt} : c'est un déivateur$

Le filtre passe haut d'ordre 1 joue le rôle d'un déivateur en faibles fréquences $f \ll f_c$

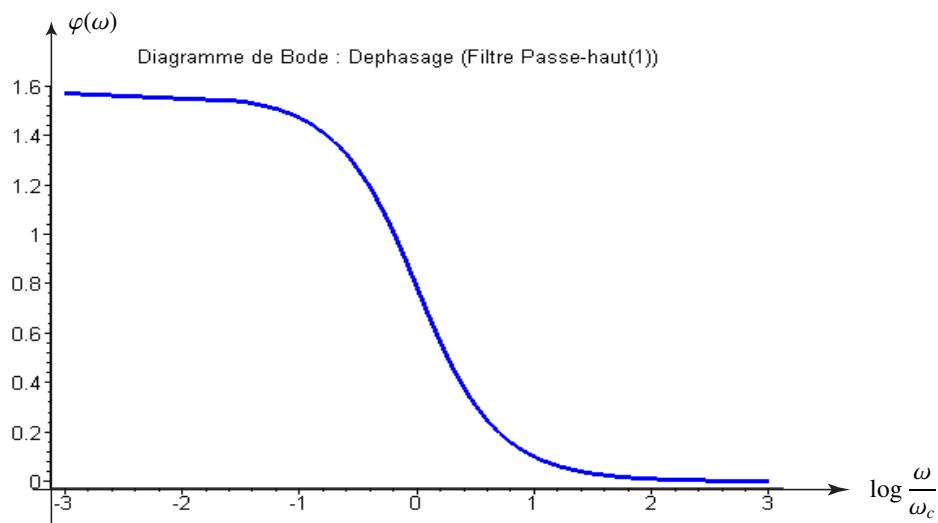
5.3.2.3 Diagramme de Bode pour la phase :

$$\text{On a } H = H_o \frac{jx}{1+jx} \Rightarrow \varphi = \arg(H_o) + \frac{\pi}{2} - \arg(1+jx)$$

Dans notre exemple $H_o = 1 \Rightarrow \arg(H_o) = 1$ et par conséquent $\varphi_{P.haut} = \frac{\pi}{2} + \varphi_{P.bas}$

Conclusion :

Le déphasage d'un filtre passe haut du premier ordre se déduit de celui du filtre passe bas d'ordre 1 par une translation de $\frac{\pi}{2}$



5.4 Filtres du deuxième ordre

L'ordre du filtre est égal à 2 donc le dénominateur $\underline{D}(\omega) = \underline{D}(x)$ est polynôme d'ordre 2.

5.4.1 Filtre passe-bas

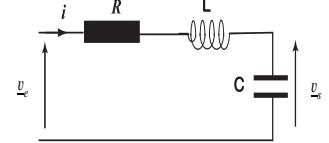
La fonction de transfert d'un filtre passe bas d'ordre 2 est :

$$\underline{H} = \frac{H_o}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

avec $\omega = x\omega_o$

5.4.1.1 L'étude d'un exemple

- En HF : $x \rightarrow \infty \implies \underline{Z}_c \rightarrow 0$ donc $V_s \rightarrow 0$
 - En BF : $x \rightarrow 0 \implies \underline{Z}_c \rightarrow \infty$ donc $V_s \rightarrow V_e$
- Donc : c'est un filtre passif passe bas



L'expression de la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On tire que :

- La pulsation propre $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- $H_o = 1$
- Le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

À partir de l'expression de la fonction de transfert on en déduit que :

- En BF $x \rightarrow 0 \implies \underline{H} \rightarrow H_o$ c'est à dire que $v_s(t) = H_o v_e(t)$
- En HF $x \rightarrow \infty \implies \underline{H} \rightarrow 0$ c'est à dire que $v_s(t) \rightarrow 0$
- $\deg(\underline{H}) = 2$

On conclut que le filtre est passif, passe-bas d'ordre 2

5.4.1.2 Diagramme de Bode pour le gain

On a :

$$\underline{H} = \frac{H_o}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \implies H = |\underline{H}| = \frac{|H_o|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

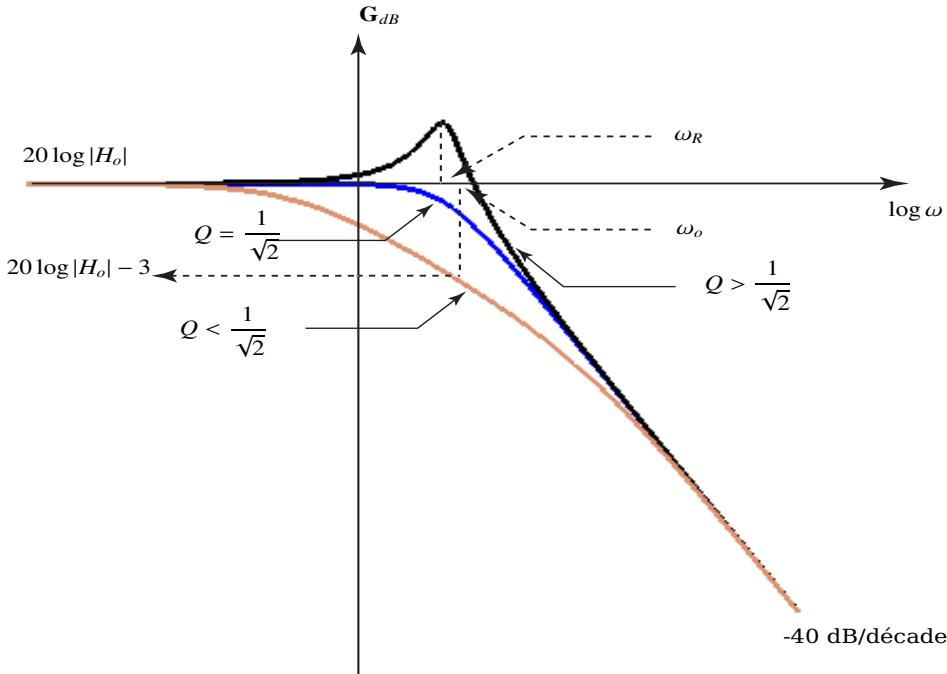
Le comportement asymptotique

- En BF : $x \rightarrow 0 \implies G_{dB} = G_o = 20 \log |H_o|$
- En HF : $x \rightarrow \infty \implies G_{dB} \approx 20 \log(|H_o|\omega_o^2) - 40 \log \omega$: C'est une droite de pente -40dB/décade, caractéristique du filtre du deuxième ordre.

On rappelle que la fonction $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$ présente un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc si :

- $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$: G_{dB} ne présente pas de maximum (courbe décroissante)
- $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: G_{dB} présente un maximum en $x_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ ainsi $H(x_R) = |H_o| \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$



1. En général $x_R \neq 1 \Rightarrow \omega_R \neq \omega_o$ sauf pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. Si $Q \gg 1$ alors $\omega_R = \omega_o$ ainsi on nomme x_1 et $x_2 > x_1$ les pôles du dénominateur c'est à dire que $\underline{H} = \frac{H_o}{(1+jx_1)(1+jx_2)}$; ainsi le diagramme asymptotique présente une asymptote intermédiaire entre x_1 et x_2 à -20 dB/décade

En effet si :

- $\omega \ll \omega_1 \Rightarrow \underline{H} = H_o$: multiplication par une constante
- $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2 \Rightarrow \underline{H} = \frac{H_o \omega_1}{j\omega}$ c'est à dire que $v_s(t) = \omega_1 H_o \int v_e(t) dt$: intégrateur
- $\omega_2 \ll \omega \Rightarrow \underline{H} = \frac{H_o \omega_o}{(j\omega)^2}$ c'est à dire que $v_s(t) = \int(\int v_e(t) dt) dt$: double intégrateur

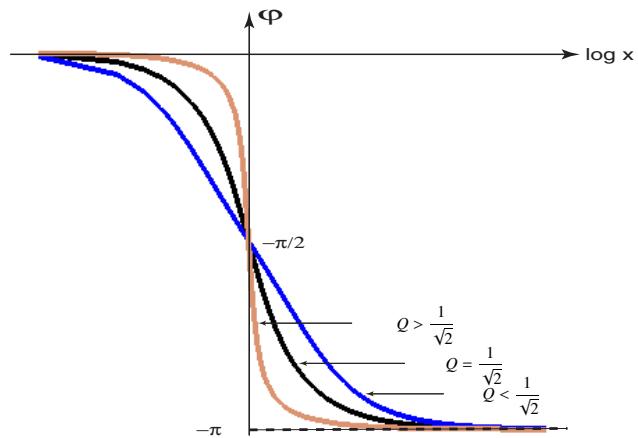
5.4.1.3 Diagramme de Bode pour la phase

On a :

$$\underline{H} = \frac{H_o}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \Rightarrow \varphi = \arg H_o - \arg(1 - x^2 + j\frac{x}{Q})$$

Pour $H_o = 1$ alors $\varphi = -\arg(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}) \Rightarrow \tan \varphi = -\frac{x}{Q(1 - x^2)}$

Représentation de la phase pour quelques valeurs de Q



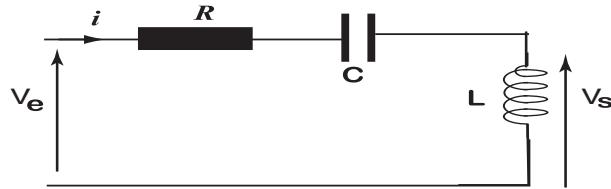
5.4.2 Filtre passe-haut

La fonction de transfert d'un filtre passe haut d'ordre 2 est de la forme

$$\underline{H} = -H_o \frac{x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

- En BF $x \rightarrow 0 \implies \underline{H} \rightarrow 0$ donc $v_s(t) \rightarrow 0$
- En HF $x \rightarrow \infty \implies \underline{H} \rightarrow H_o$ donc $v_s(t) \rightarrow H_o v_e(t)$
- $\deg D=2$
on conclut que le filtre est passe-haut d'ordre 2

5.4.2.1 L'étude d'un exemple



En utilisant le diviseur de tension en notation complexe on obtient :

$$\underline{H} = -\frac{LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = -\frac{x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

Avec $H_o = 1$, $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

5.4.2.2 Diagramme de Bode pour le gain

$$H = |H_o| \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}}$$

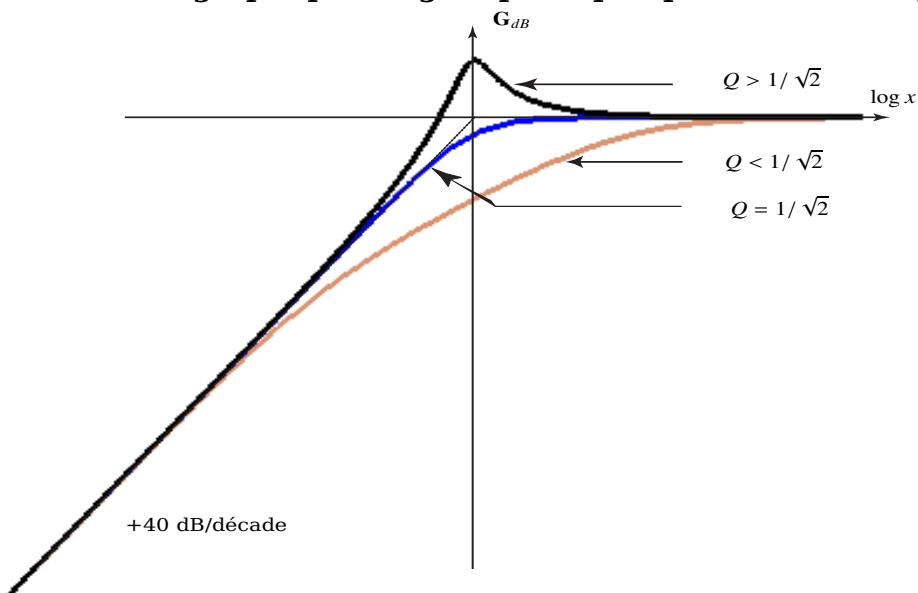
Comportement asymptotique :

- En HF : $H = |H_o| \Rightarrow G_{dB} = G_o = 20 \log |H_o|$
 - En BF $H = \frac{|H_o|}{x^2} \Rightarrow G_{dB} = G_o + 40 \log x$: c'est une droite de pente +40 dB/décade
- Cherchons si H ainsi G_{dB} présente un extremum (maximum), pour cela calculons :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{xQ(2Q^2 - x^2(2Q^2 - 1))}{(Q^2 - 2Q^2x^2 + Q^2x^4 + x^2)^{(3/2)}}$$

$$\frac{dH}{dx} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } Q < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ } H \text{ ne présente pas de maximum (de même pour } G_{dB}) \\ \text{Si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ } H \text{ présente un maximum (de même pour } G_{dB}) \text{ } x_R \text{ tel que} \\ x_R = \frac{\omega_R}{\omega} = \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 2}} > 1 \\ \text{ainsi } H(x_R) = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \text{ Si } Q \gg 1 \Rightarrow x_R = 1 \text{ donc } \omega_o = \omega_R \text{ et } H(x_R) = Q|H_o| \end{cases}$$

Représentation graphique du gain pour quelques valeurs de Q



5.4.2.3 Diagramme de Bode pour la phase

On a :

$$\varphi = \arg(-H_o x^2) - \arg(1 - x^2 + jx/Q) = \arg(-H_o) - \arg(1 - x^2 + jx/Q)$$

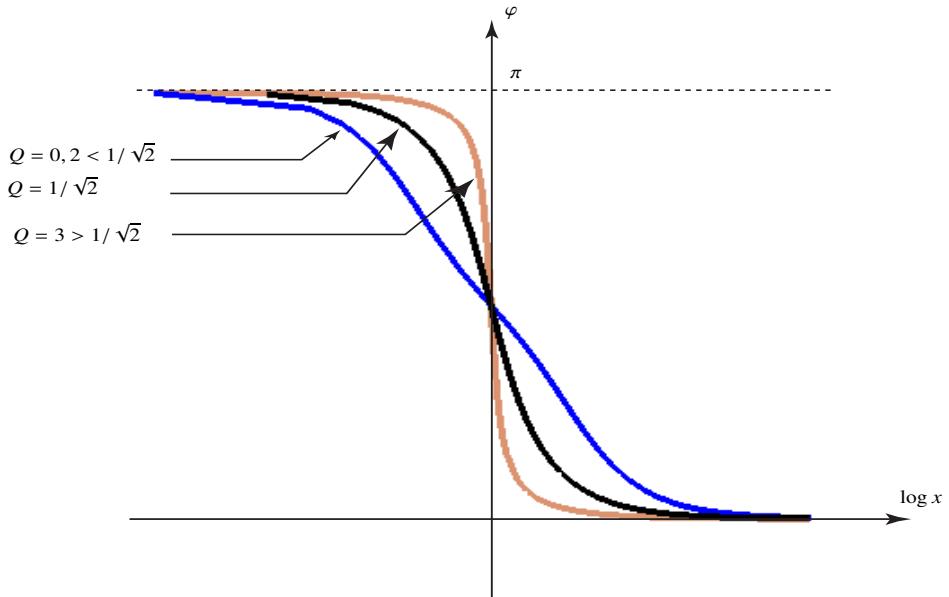
Pour $H_o = 1$ alors

$$\varphi = \pi - \arg(1 - x^2 + jx/Q) \Rightarrow \tan(\pi - \varphi) = -\tan \varphi = \frac{x}{Q(1 - x^2)}$$

Donc

$$\tan \varphi = \frac{x}{Q(x^2 - 1)}$$

Représentation graphique de la phase pour quelques valeurs de Q



Remarque

- En HF : $\underline{H} = H_o \Rightarrow v_s(t) = H_o v_e(t)$: multiplication par une constante
- En BF : $\underline{H} = -H_o x^2 = -\frac{H_o}{\omega_o^2} (j\omega)^2 \Rightarrow v_s(t) = \frac{H_o}{\omega_o^2} \frac{d^2 v_e(t)}{dt^2}$: la tension de sortie est proportionnelle à la dérivée seconde de la tension d'entrée

5.4.3 Filtre passe-bande

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre 2 est :

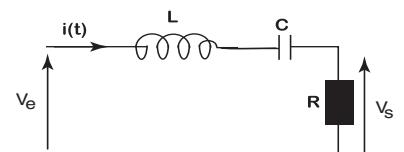
$$\underline{H} = H_o \frac{jx/Q}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} = \frac{H_o}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

- En BF : $\underline{H} \rightarrow 0 \Rightarrow v_s(t) \rightarrow 0$
- En HF : $\underline{H} \rightarrow 0 \Rightarrow v_s(t) \rightarrow 0$

On montre (après) que H présente un maximum, donc c'est un filtre passe-bande du second ordre

5.4.3.1 L'étude d'un exemple

- En HF : $x \rightarrow \infty \Rightarrow Z_L \rightarrow \infty$ donc $V_s \rightarrow 0$
 - En BF : $x \rightarrow 0 \Rightarrow Z_c \rightarrow \infty$ donc $V_s \rightarrow 0$
 - Pour $\omega = \omega_o$ on a V_s est maximale
- Donc : c'est filtre passif passe bas



L'expression de la fonction de transfert s'écrit :

$$H = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On tire que :

- La pulsation propre $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- $H_o = 1$
- Le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

5.4.3.2 Diagramme de Bode pour le gain

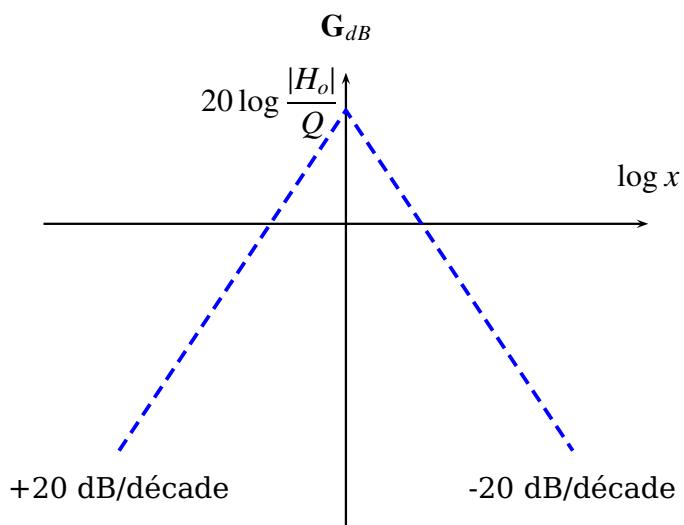
On a

$$H = \frac{|H_o|}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

Comportement asymptotique :

- En BF : $H = \frac{|H_o|}{Q}x \implies G_{BF} = G_o - 20 \log(Q\omega_o) + 20 \log \omega$: C'est une droite de pente +20 dB/décade
- En HF : $H = \frac{|H_o|}{Qx} \implies G_{HF} = G_o + 20 \log \frac{\omega_o}{Q} - 20 \log \omega$: C'est une droite de pente -20 dB/décade
- Pour $\omega = \omega_o \implies H = |H_o| = H_{max}$ donc $G_{dB}(\omega_o) = 20 \log |H_o| = G_o$
- L'intersection des deux pentes : $G_{HF} = G_{BF} \implies \omega = \omega_o$
- Pour $\omega = \omega_o$ on a : $G_{HF}(\omega_o) = G_{BF}(\omega_o) = 20 \log \frac{|H_o|}{Q}$

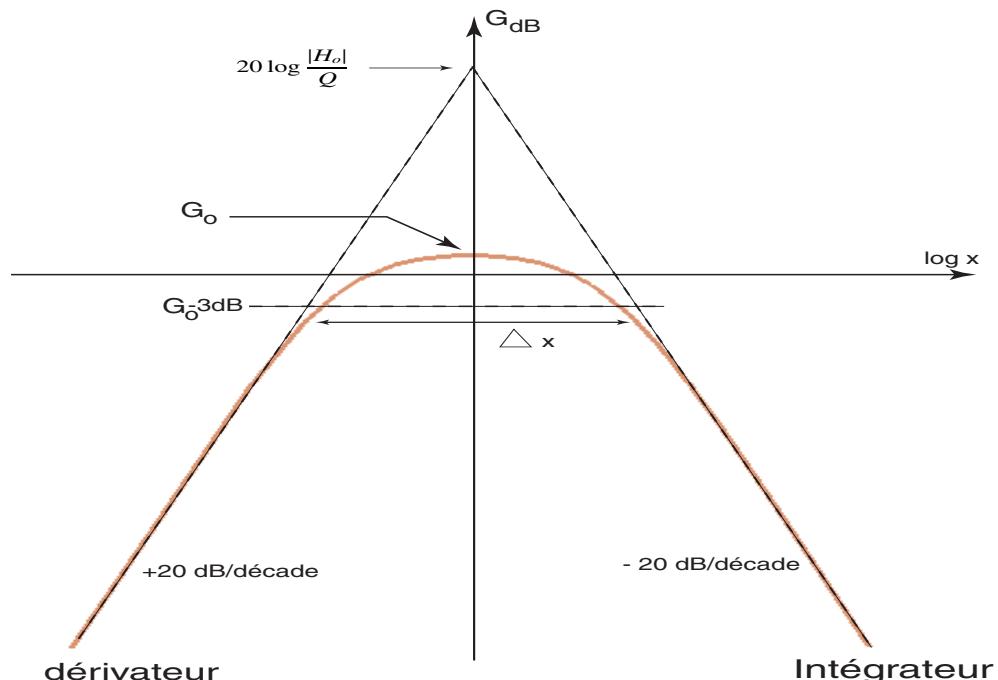
Représentation du diagramme asymptotique



Le diagramme de Bode dépend de la valeur du facteur de qualité Q , c'est à dire comparer $20 \log \frac{|H_o|}{Q}$ et $20 \log |H_o|$, autrement dit comparer Q et 1.

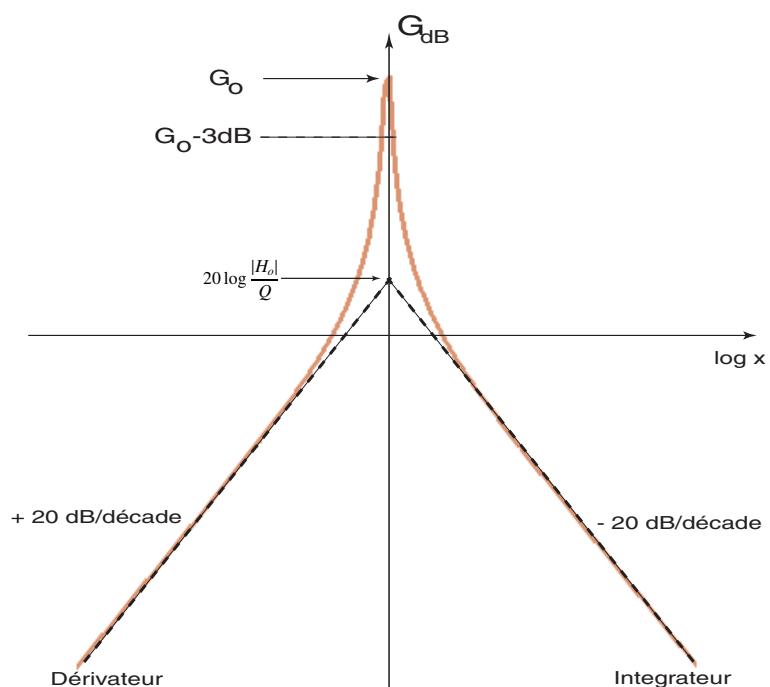
Premier cas $Q < 1$:

Dans ce cas $20 \log \frac{|H_o|}{Q} > 20 \log |H_o|$, le diagramme de bode est de la forme :



- En BF : $H = \frac{H_o}{Q\omega_o}(j\omega) \Rightarrow v_s(t) = \frac{H_o}{Q\omega_o} \frac{dv_e(t)}{dt}$ donc déivateur
- En HF : $H = \frac{H_o}{Q\omega_o} \frac{1}{j\omega} \Rightarrow v_s(t) = \frac{H_o\omega_o}{Q} \int v_e(t) dt$ donc intégrateur

Deuxième cas $Q > 1$ Dans ce cas $20 \log \frac{|H_o|}{Q} < 20 \log |H_o|$, le diagramme de bode est de la forme :

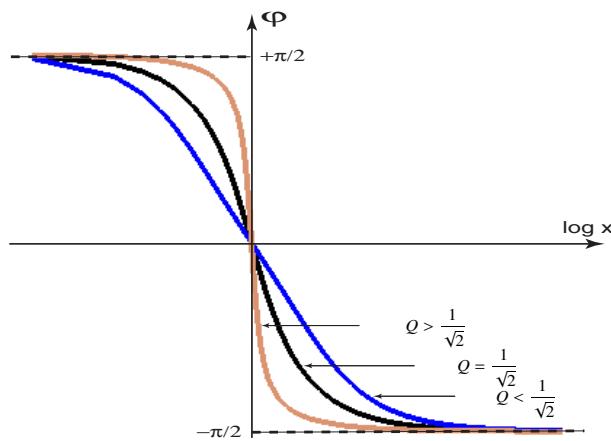


5.4.3.3 Diagramme de Bode pour la phase

$$\varphi = \arg H_o - \arg[1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)]$$

Pour le filtre passif $H_o = 1$ donc

$$\tan \varphi = -Q \frac{x^2 - 1}{x}$$



5.4.4 Filtre coupe (ou réjecteur) de bande

La fonction de transfert d'un filtre coupe (réjecteur de) bande du second ordre est de la forme

$$\underline{H} = H_o \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + jx/Q}$$

En effet :

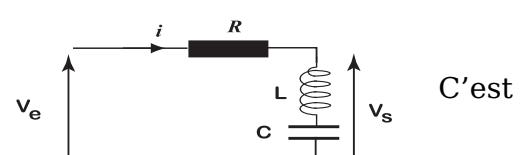
- $\underline{H}(x = 1) = 0 \implies v_s(t) = 0$
- $\underline{H}(x \rightarrow 0) = H_o \implies v_s(t) = H_o v_e(t)$
- $\underline{H}(x \rightarrow \infty) = H_o \implies v_s(t) = H_o v_e(t)$

Ce filtre laisse passer toutes les fréquences sauf aux voisinages de $x = 1$ c'est à dire aux voisinage de la pulsation propre

5.4.4.1 L'étude d'un exemple

- En BF : $Z_c \rightarrow \infty \implies i = 0$ donc $v_s(t) = v_e(t)$
- En BF : $Z_L \rightarrow \infty \implies i = 0$ donc $v_s(t) = v_e(t)$
- Pour $\omega \omega_o \gg 1$ $\implies v_s(t) = v_e(t)$

un coupe bande



L'expression de la fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Donc : $H_o = 1$, $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ et $x = \omega/\omega_o$

5.4.4.2 Diagramme de Bode pour le gain

On a :

$$H = |H_o| \frac{|1 - x^2|}{(1 - x^2)^2 + x^2/Q^2}$$

5.4.4.2.1 Comportement asymptotique ► En BF $x \rightarrow 0 \Rightarrow H = |H_o|$ ainsi $G_{dB} = G_o$

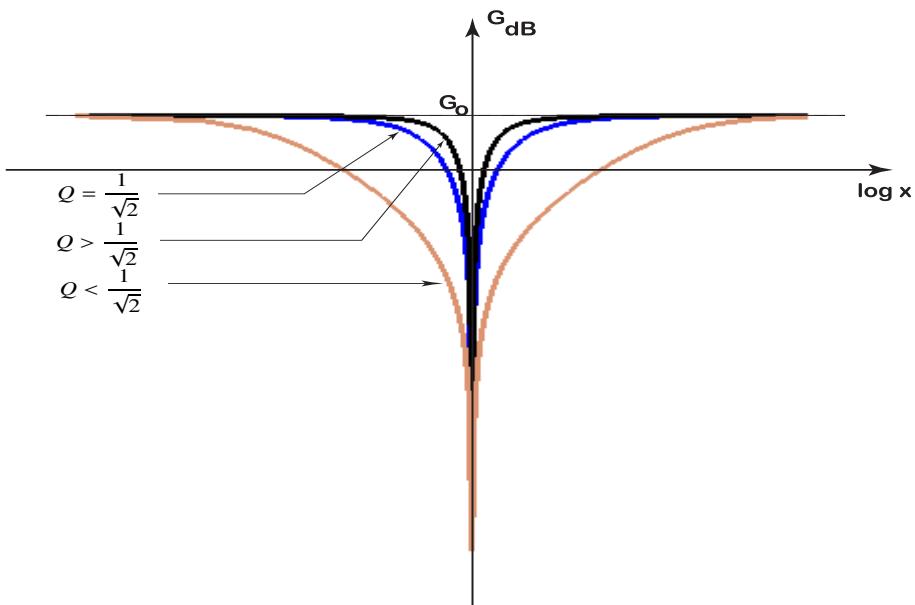
► En HF $x \rightarrow \infty \Rightarrow H = |H_o|$ ainsi $G_{dB} = G_o$

Le gain présente deux asymptotes horizontales confondues

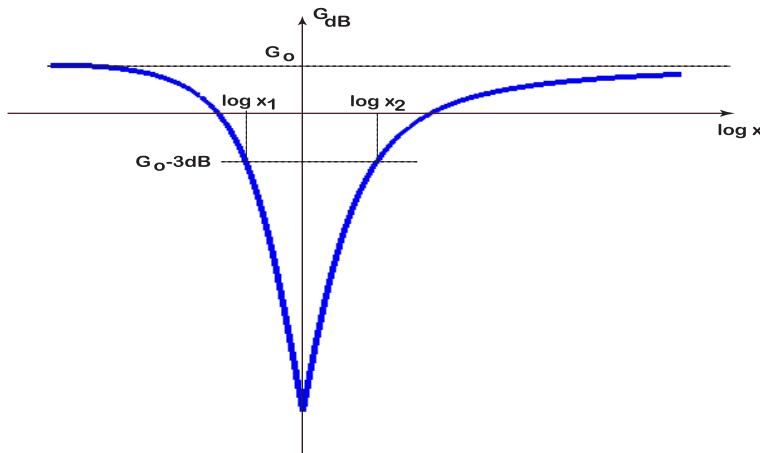
► Pour $x = 1 \Rightarrow \omega = \omega_o$ on a $H = 0^+ \Rightarrow G_{dB}(x = 1) \rightarrow -\infty$

G_{dB} présente une asymptote verticale en $x = 1$ c'est à dire en pulsation propre

5.4.4.2.2 Représentation graphique du gain pour quelques valeurs de Q



5.4.4.2.3 La bande passante



$$\begin{aligned}
 H = \frac{|H_o|}{\sqrt{2}} &\implies \frac{|1-x^2|}{\sqrt{(1-x^2) + x^2/Q^2}} \\
 &\implies 2(1-x^2)^2 = (1-x^2)^2 + x^2/Q^2 \\
 &\implies (1-x^2)^2 = x^2/Q^2 \\
 &\implies 1-x^2 = \pm x/Q
 \end{aligned}$$

La solution de cette équation sont :

$$x_1 = \frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} < 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{\omega_2}{\omega} = +\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} > 1$$

La largeur de la bande passante

$$\Delta x = \frac{1}{Q} \implies \Delta\omega = \frac{\omega_o}{Q}$$

5.4.4.3 Diagramme de Bode pour la phase

On a :

$$\underline{H} = H_o \frac{1-x^2}{1-x^2+jx/Q} \implies \underline{H} = \frac{H_o}{1+j\frac{x}{Q(1-x^2)}}$$

Donc

$$\varphi = \arg H_o - \arg\left(1 + j\frac{x}{Q(1-x^2)}\right)$$

Pour un filtre passif $H_o = 1$ donc : $\tan \varphi = -\frac{x}{Q(1-x^2)}$

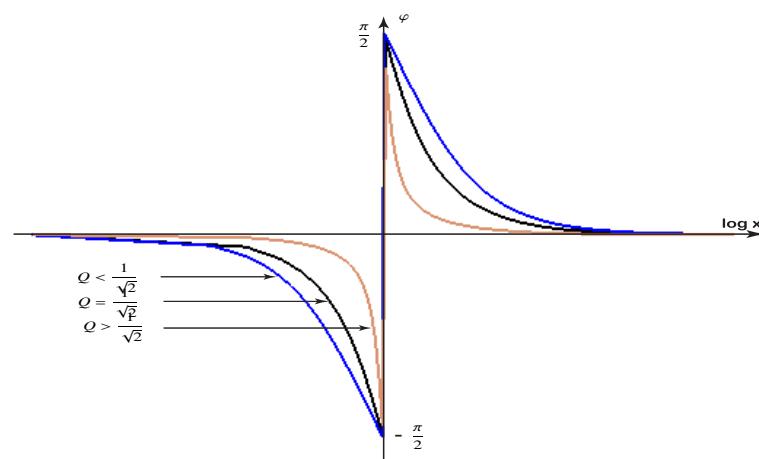
avec :

- ▷ $\cos \phi > 0 \implies \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- ▷ $\sin \varphi < 0 \implies \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ pour $x < 1$
- ▷ $\sin \varphi > 0 \implies \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour $x > 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi = 0^-$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi = 0^+$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi = +\frac{\pi}{2}$

On conclut que la phase d'un filtre coupe bande est présente une discontinuité en $x = 1$ c'est à dire en ω_o .

Représentation graphique de la phase pour quelques valeurs de Q



CHAPITRE 6

FILTRAGE LINÉAIRE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

6.1 Composition en fréquence d'un signal

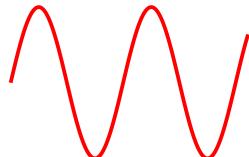
6.1.1 Représentation temporelle et fréquentielle

Soit $g(t)$ un signal T -périodique c'est à dire $g(t + kT) = g(t)$ avec :

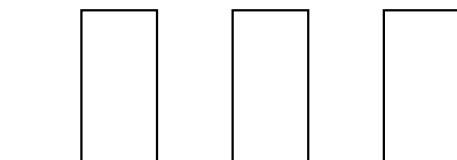
- $f = \frac{1}{T}$ la fréquence propre du signal.
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ la pulsation propre du signal.

Exemples

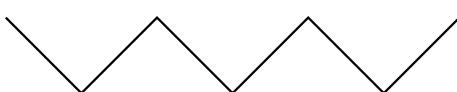
- Signal sinusoïdal :



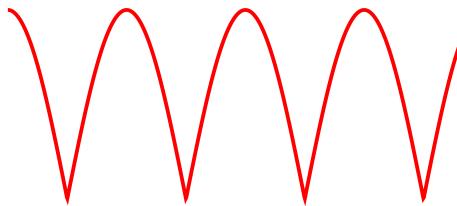
- Signal carrée :



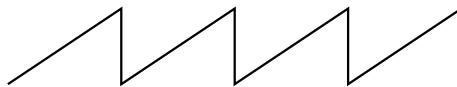
- Signal triangulaire :



- sinusoidal redressé double-alternance



-Signal dents de scie



On admet le théorème de FOURIER :

$$g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

C'est le développement en série de FOURIER (DSF)

Avec

$$a_o = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} g(t) dt = \langle g(t) \rangle = g_m$$

C'est la valeur moyenne (dite aussi composante continue ou offset) du signal $g(t)$.

Ainsi

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} g(t) \cos(n\omega t) dt ; b_n = \frac{2}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} g(t) \sin(n\omega t) dt$$

On retient que tout signal périodique de fréquence f est la somme des fonctions sinusoïdales de fréquence $0, f, 2f, 3f, \dots$

- On appelle le fondamental le terme correspond à la fréquence $f (\Rightarrow n = 1)$ c'est à dire le terme $a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$
- On appelle les harmoniques d'ordre n les termes correspondent aux fréquences nf avec $n > 1$.
- On peut écrire $g(t)$ sous la forme

$$g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

avec

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} ; \quad \tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

En effet :

$$A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = A_n \cos n\omega t \cos \varphi_n - A_n \sin n\omega t \sin \varphi_n \implies \begin{cases} A_n \cos \varphi_n = a_n \\ -A_n \sin \varphi_n = b_n \end{cases}$$

D'où le résultat

► La série de Fourier peut être écrite en utilisant les nombres complexes

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) e^{-jn\omega t} dt$$

En effet : On rappelle les formules d'EULER :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \implies g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t}$$

$$\text{On pose } \underline{c}_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \implies \underline{c}_n^* = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

Par conséquent $\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t)(\cos n\omega t - j \sin n\omega t) dt$ Donc

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) e^{-jn\omega t} dt$$

ainsi

$$\underline{c}_n^* = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) e^{jn\omega t} dt$$

Remarquons que

$$\underline{c}_n^* = \underline{c}_{-n} \implies |A_n| = 2|\underline{c}_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} g(t) &= a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t} + \underline{c}_n^* e^{-jn\omega t} \implies g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_{-n} e^{-jn\omega t} \\ &\implies g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t} + \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t} \end{aligned}$$

c'est à dire en posant $\underline{c}_o = a_o = \langle g(t) \rangle$ alors le résultat.

► Si le signal $g(t)$ est impair (symétrique par rapport à centre de symétrie) alors $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ et par conséquent

$$g(t) \text{ impair} \implies g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f t)$$

- Si le signal $g(t)$ est pair (symétrique par rapport à l'axe oy) alors $b_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ et par conséquent

$$g(t) \text{ pair} \implies g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f t)$$

► **Formule de BESSEL -PARSEVAL :**

Soit $g(t)$ une fonction T-périodique, developable en série de FOURIER. on admet que :
 $f_m^2 = \langle f^2 \rangle = \overline{f^2} = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f^2(t) dt \implies$

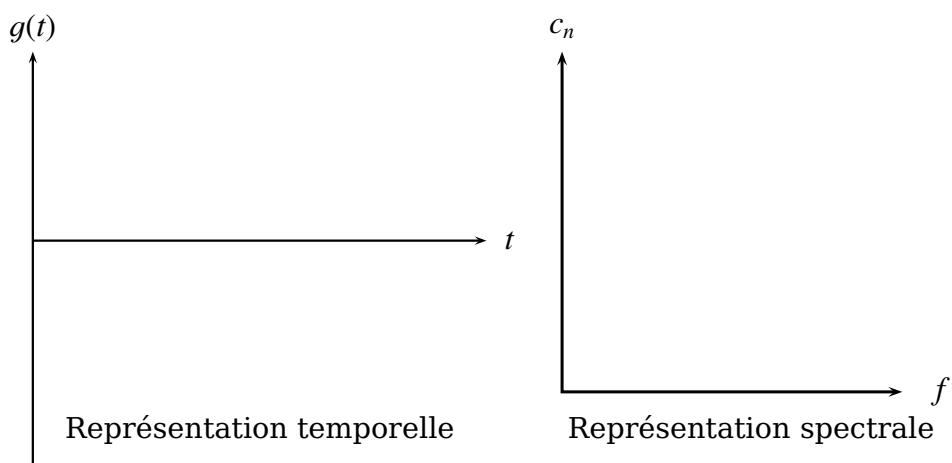
$$f_m^2 = \langle f^2 \rangle = \overline{f^2} = a_o^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = a_o^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

C'est la formule de BESSEL - PARSEVAL

- On rappelle valeur efficace g_{eff} du signal $g(t)$ la racine carrée de la valeur moyenne du carrée du signal

$$g_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} g^2(t) dt}$$

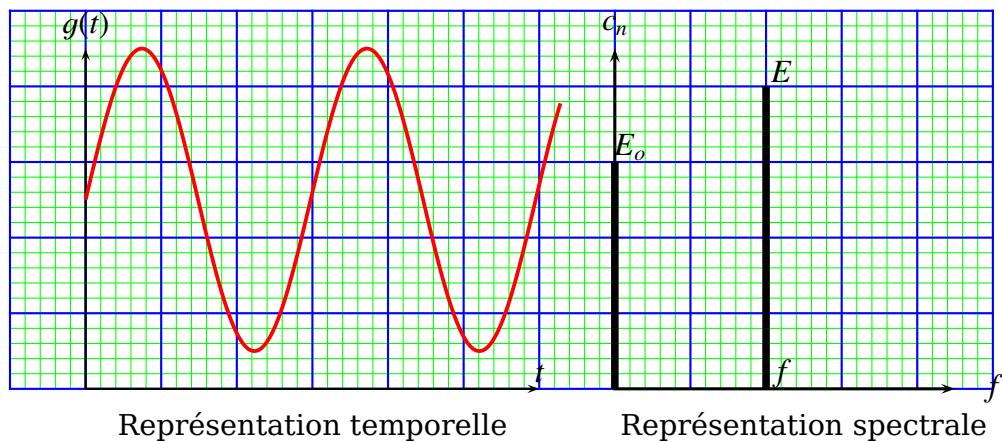
Donc pour toute fonction périodique présente deux représentations : temporelle et spectrale



6.1.2 Exemples

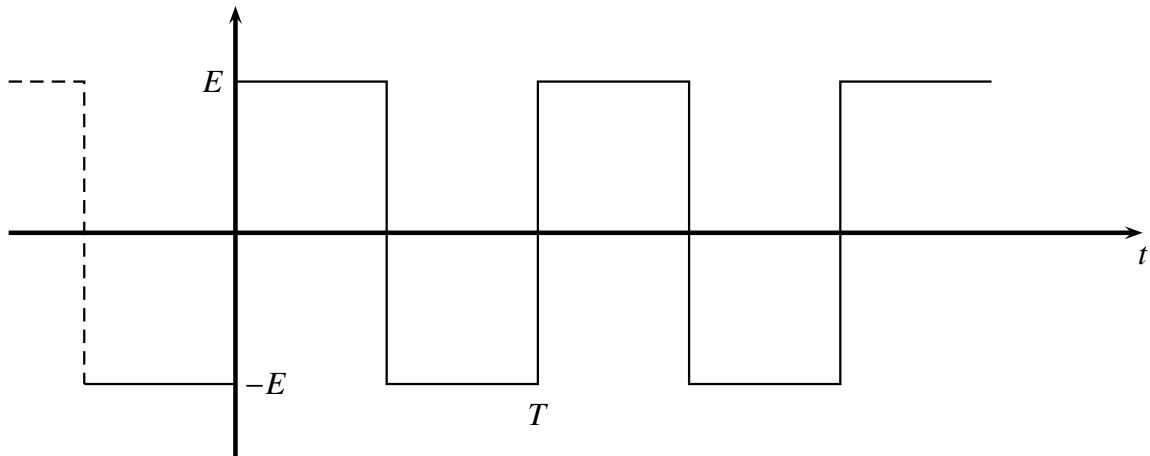
6.1.2.1 Signal sinusoidal

Considérons un signal sinusoidal d'amplitude E de fréquence f et de composante continue E_o ; Donc $g(t) = E_o + E \cos(2\pi f t)$



6.1.2.2 Signal carré impair

Soit $e(t)$ un signal carré impair $(-E, E)$



- Puisque $e(t)$ impair alors $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Calculons les coefficients b_n :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \sin(n\omega t) dt \implies b_n = \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T/2} e(t) \sin(n\omega t) dt \\
 &\implies b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} E \sin(n\omega t) dt \\
 &\implies b_n = \frac{4E}{n\omega T} [1 - \cos(n\omega T/2)] \\
 &\implies b_n = \frac{4E}{2\pi n} (1 - \cos(n\pi))
 \end{aligned}$$

Or $\cos n\pi = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{Si } n \text{ pair } (n = 2p) \\ -1 & \text{Si } n \text{ impair } (n = 2p + 1) \end{cases}$

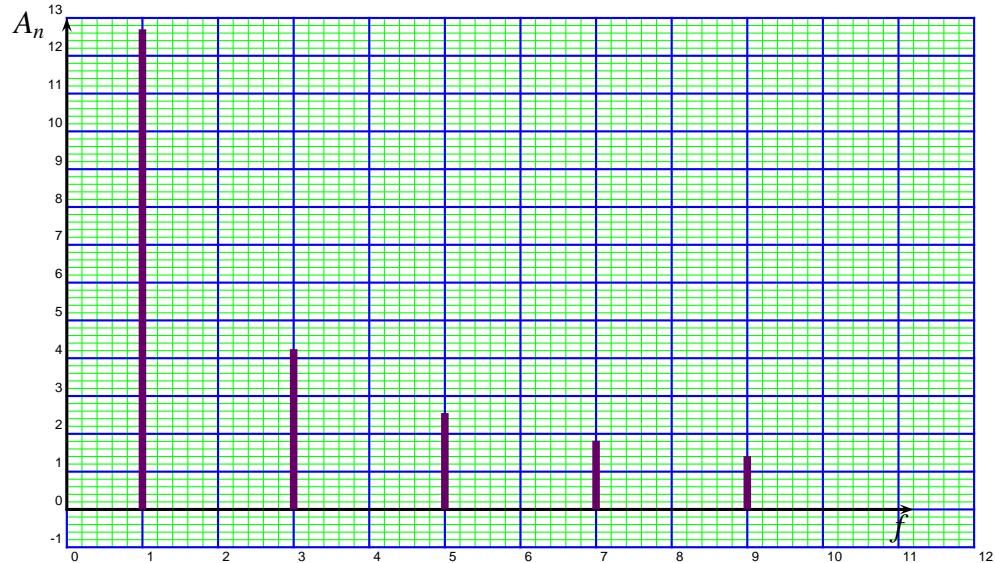
$$b_n(\text{carré impair}) = \frac{4E}{\pi(2p+1)}$$

Par conséquent :

$$e(t) = 4E \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin((2p+1)\omega t)}{(2p+1)\pi}$$

Representation spectrale :

p	0	1	2	3	4
n	1	3	5	7	9
$\frac{A_n}{E}$	1,273	0,424	0,255	0,182	0,141

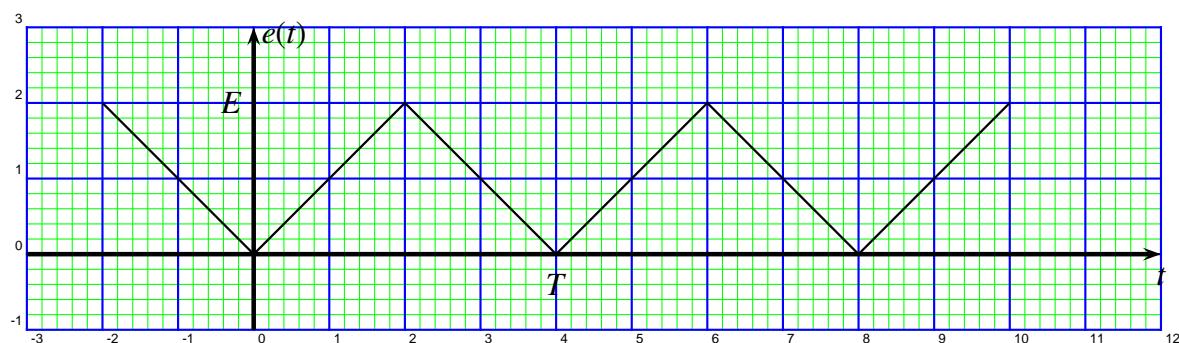


6.1.2.3 Signal carré pair

Conclusion:

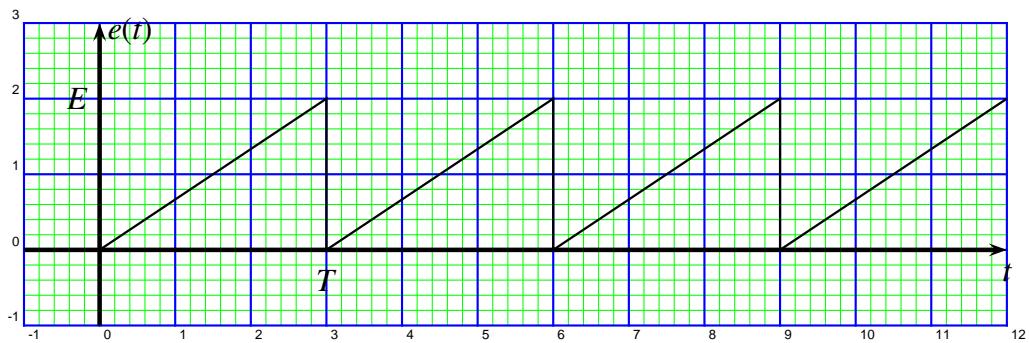
La parité du signal ne modifie pas le spectre de fréquence

6.1.2.4 Signal triangulaire pair de pentes symétriques



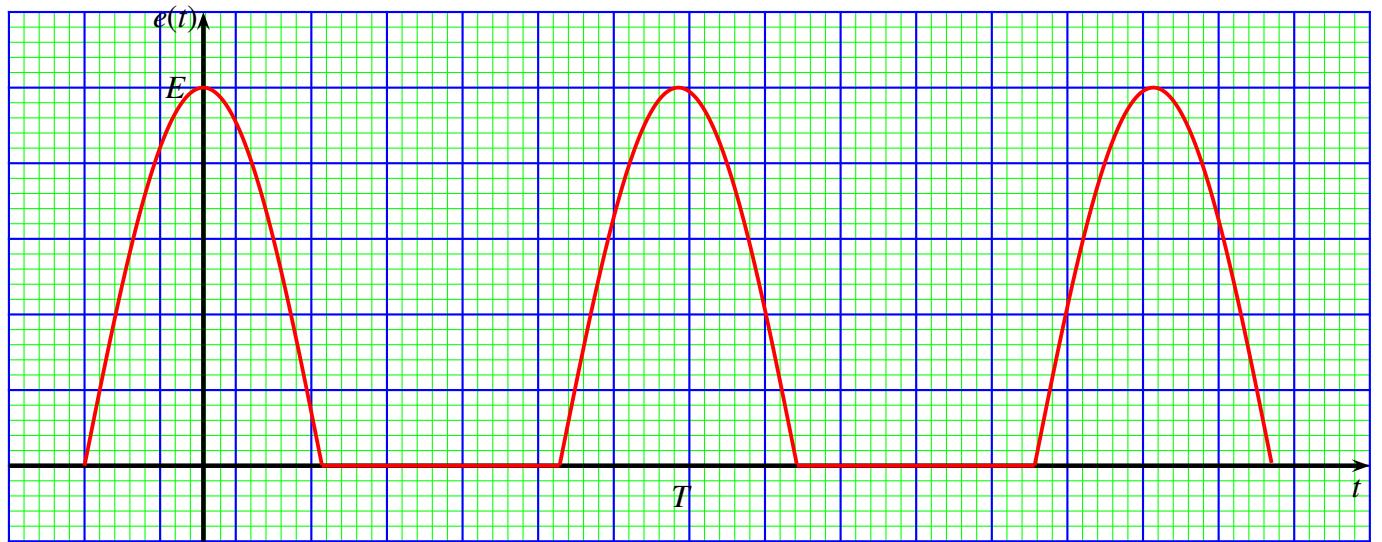
$$e(t) = E \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos[(2p+1)\omega t]}{(2p+1)^2} \right)$$

6.1.2.5 Signal dent de scie



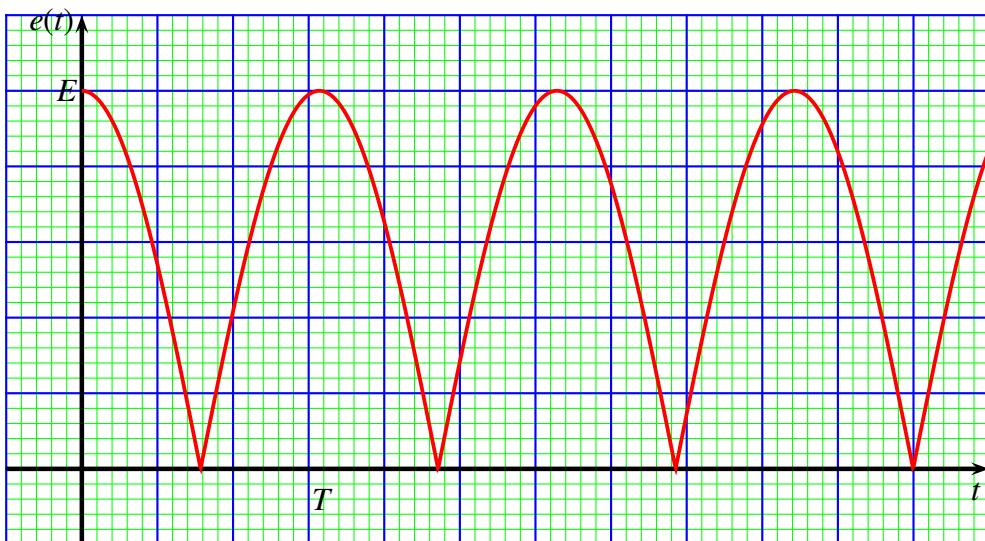
$$e(t) = E \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\omega t)}{n} \right)$$

6.1.2.6 Signal sinusoidal pair redressé monoalternance



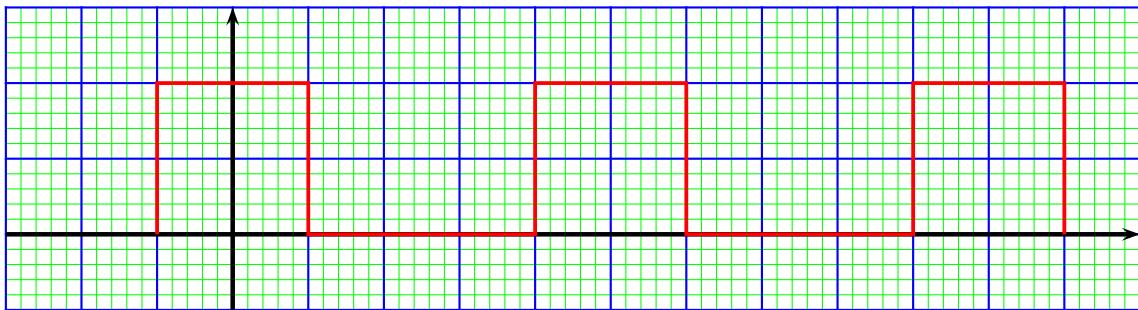
$$e(t) = E \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos(\omega t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(2n\omega t)}{4n^2 - 1} \right)$$

6.1.2.7 Signal sinusoidal pair redressé double alternance



$$e(t) = E \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n\omega t)}{4n^2 - 1} \right)$$

6.1.2.8 Signal rectangulaire pair de rapport cyclique α quelconque



$$e(t) = E\alpha \left(1 + 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha\pi)}{n\alpha\pi} \cos(n\omega t) \right)$$

6.1.3 L'aspect énergétique

En général les grandeurs énergétiques (énergie ou puissance) sont proportionnelle au carrée de la grandeur physique $g(t)$ ($\frac{1}{2}kx^2; \frac{1}{2}mv^2; \frac{1}{2}cU^2; R^2; \frac{1}{2}Li^2 \dots$) par conséquent

$$\langle g^2 \rangle = a_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad (\text{Parseval})$$

Donc chaque terme harmonique de rang n ($a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$) a une puissance $|c_n|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$.

Il en résulte que la puissance du signal est la somme des puissance de chaque harmonique

6.2 Traitement d'un signal périodique par un système linéaire

6.2.1 Rappel

- Un circuit est linéaire si les tensions d'entrée $u_e(t)$ et de sortie $u_s(t)$ sont reliées par une équation différentielle linéaire.

Autrement dit si la tension d'entrée $u_e(t)$ est sinusoïdale de période T alors la tension de sortie $u_s(t)$ est sinusoïdale de période T .

- Si on appelle $\underline{\mathbf{H}}$ la fonction de transfert du circuit alors

$$\underline{U}_e(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t} \Rightarrow \underline{U}_s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}(jn\omega) \underline{c}_n e^{jn\omega t}$$

- On rappelle les formes canoniques des fonctions de transferts des filtres usuelles :
- Filtre passe bas du premier ordre

$$\underline{H} = \frac{H_o}{1 + jx}$$

Intégrateur aux hautes fréquences.

- Filtre passe haut du premier ordre

$$\underline{H} = H_o \frac{jx}{1 + jx}$$

Déivateur aux basses fréquences.

- Filtre passe bas du deuxième ordre

$$\underline{H} = \frac{H_o}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

- Filtre passe haut du deuxième ordre

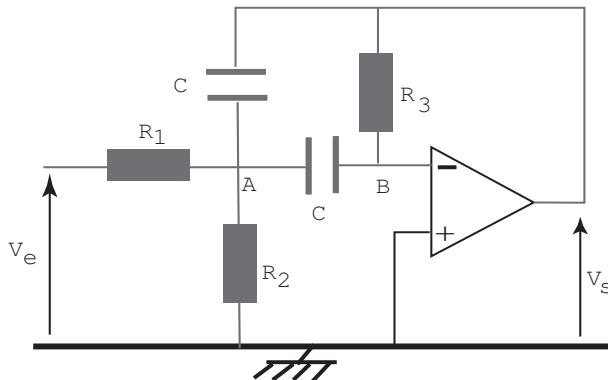
$$\underline{H} = H_o \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

- Filtre passe bande

$$\underline{H} = H_o \frac{jx/Q}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} = \frac{H_o}{1 + jQ(x - 1/x)}$$

6.2.2 Application 1 : CNC 2009 Filière MP

On considère le circuit à amplificateur opérationnel de la figure suivante.



L'amplificateur opérationnel est alimenté par une source de tension symétrique (non représentée) $\pm V_{cc} = \pm 15$ V. On suppose que l'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire.

On suppose ensuite que le signal v_e appliqué à l'entrée du circuit est sinusoïdal de pulsation ω .

1 Étudier le comportement asymptotique du montage aux basses fréquences, puis aux hautes fréquences et déduire la nature du filtre.

2 Appliquer le théorème de Millmann aux nœuds A et B et déduire deux relations entre v_s , v_A et v_e .

3 Montrer que la fonction de transfert du circuit s'écrit sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_o}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_o}$. Exprimer H_o , Q et ω_o en fonction de R_1 , R_3 , $R'_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ et C .

4 Dans quel domaine de fréquences ce circuit présente-t-il un caractère intégrateur? déivateur? Exprimer $v_s(t)$ en fonction de $v_e(t)$ dans chacun des deux cas.

5 Définir, puis calculer les pulsations de coupure à $-3dB$ en fonction de ω_o et Q . En déduire la largeur de la bande passante du filtre.

6 Application numérique : on donne $H_o = -1$, $Q = 20$ et $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = 3$ kHz. Calculer la largeur de la bande passante en **fréquence** du filtre.

7 On pose $\underline{H} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$.

7.1 Déterminer le module $H(\omega)$ et l'argument $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert H .

7.2 Montrer que $H(\omega)$ passe par un maximum pour une valeur ω'_o de ω que l'on exprimera. Tracer l'allure de $H(\omega)$.

On applique à l'entrée du montage de la figure précédente, un signal $v_e(t)$ de fréquence $f = \frac{1}{T} = 3$ kHz et d'amplitude $E = 5$ V.

8 Le signal appliqué est donné par $v_e(t) = E \sin(2\pi f t)$. En tenant compte des caractéristiques numériques du filtre, donner l'expression du signal $v_s(t)$ obtenu en sortie du circuit.

9▷ Le signal appliqué maintenant est un signal créneau dont on donne le DSF :

$$v_e(t) = \frac{E}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2E}{(2p+1)\pi} \sin(2\pi(2p+1)ft)$$

9.1▷ Donner la représentation temporelle de la tension d'entrée.

9.2▷ Donner l'allure du spectre en fréquence du signal $v_e(t)$?

9.3▷ En tenant compte des caractéristiques numériques du filtre, donner l'expression du signal $v_s(t)$ observé en sortie du circuit.

Correction

1▷ Le comportement asymptotique du montage :

- Aux basses fréquences : $v_s(t) = 0$ (la maille $(V_s; R_3; \varepsilon)$)
- Aux hautes fréquences : $v_s(t) = 0$ (la maille $(V_s; A; B; \varepsilon)$)
- La nature du filtre : Filtre actif passe-bande.

2▷ Le théorème de Millmann aux :

- Nœud A :

$$\underline{V}_A = \frac{\underline{V}_e + jC\omega R_1 \underline{V}_s}{\frac{R_1}{R'_3} + 2jC\omega R_1} \quad (a)$$

- Nœud B :

$$\underline{V}_B = 0 = \frac{\underline{V}_A}{Z_c} + \frac{\underline{V}_s}{R_3} \Rightarrow \underline{V}_A = -\frac{1}{jCR_3\omega} \underline{V}_s \quad (b)$$

3▷ La fonction de transfert : Dans (a) on remplace \underline{V}_A par son expression dans (2), on en déduit que :

$$\underline{H} = \frac{-\frac{R_3}{2R_1}}{1 + j\frac{CR_3\omega}{2} + \frac{1}{j2R'_3C\omega}} = \frac{-\frac{R_3}{2R_1}}{1 + j\frac{CR_3x\omega_o}{2} + \frac{1}{j2R'_3Cx\omega_o}}$$

On tire donc que :

- Le coefficient d'amplification statique

$$H_o = -\frac{R_3}{2R_1}$$

- La pulsation propre :

$$\omega_o = \frac{1}{C \sqrt{R_3 R'_3}}$$

- Le facteur de qualité :

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_3}{R'_3}}$$

4▷

- En H.F ($\omega \rightarrow \infty$ ou $x \rightarrow \infty$) :

$$\underline{H} \simeq \frac{H_o \omega_o}{Q} \frac{1}{j\omega} \implies v_s(t) \simeq \frac{H_o \omega_o}{Q} \int v_e(t) dt$$

Donc intégrateur en H.F.

- En B.F ($\omega \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow 0$) :

$$\underline{H} \simeq \frac{H_o}{Q \omega_o} j\omega \implies v_s(t) \simeq \frac{H_o}{\omega_o Q} \frac{dv_e(t)}{dt}$$

Donc déivateur en B.F.

5▷ Les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 sont définies par :

$$H(\omega = \omega_{1,2}) = \frac{|H_{max}|}{\sqrt{2}} \quad \text{ou bien} \quad G_{dB}(\omega = \omega_{1,2}) = G_{max} - 3dB$$

Les pulsations de coupure à $-3dB$ en fonction de ω_o et Q .

$$\omega_{min} = \frac{\omega_o}{2} \left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \right) ; \quad \omega_{max} = \frac{\omega_o}{2} \left(\frac{1}{Q} + \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \right)$$

On conclut que :

$$\omega_{max} - \omega_{min} = \Delta\omega = \frac{\omega_o}{Q}$$

La largeur de la bande passante du filtre : $\Delta\omega = \frac{\omega_o}{Q}$.

6▷ Application numérique :

$$\Delta f = \frac{f_o}{Q} \implies \Delta f = 150 \text{ Hz}$$

7▷ On pose $\underline{H} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$.

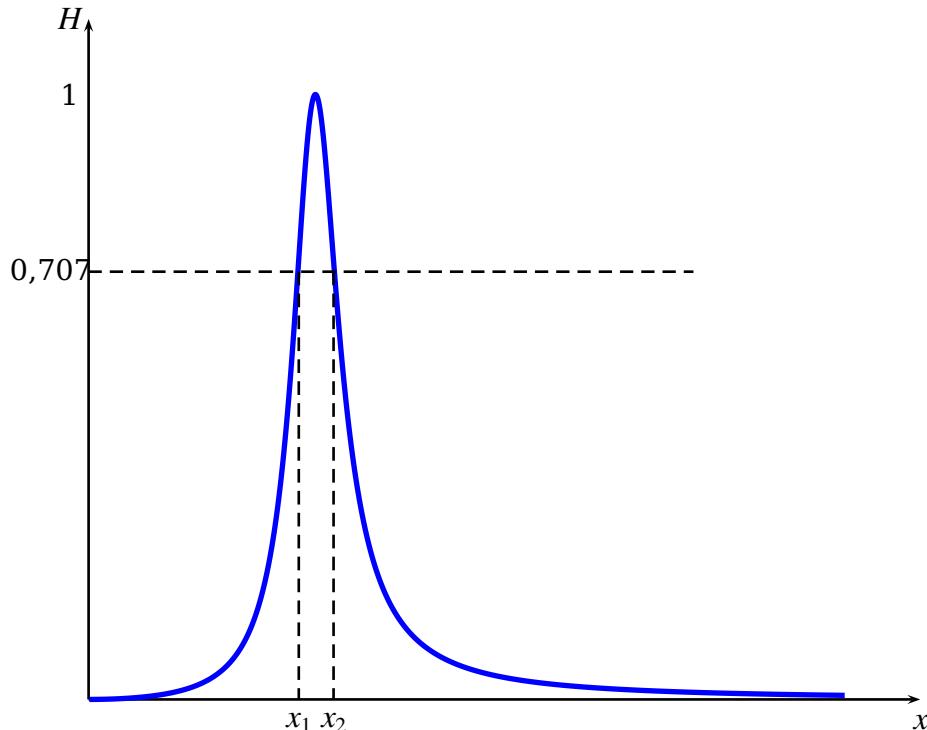
- 7.1▷
- Le module $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{|H_o|}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}}$$

- L'argument $\varphi(\omega)$:

$$\varphi = \pi - \arg(1 + jQ(x - 1/x))$$

- 7.2►** $H(\omega)$ passe par un maximum si $\frac{H(\omega)}{d\omega} = \frac{H(\omega)}{dx} \frac{d\omega}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{H(\omega)}{dx} = 0$
- $\frac{H(\omega)}{dx} = 0 \Rightarrow 2Q^2(x - 1/x)(1 + 1/x^2) = 0$ comme $x > 0$ alors H est maximal pour $x = 1 \Rightarrow \omega'_o = \omega_o$
 - L'allure de $H(x)$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_o}$.



8► Puisque le signal d'entrée est sinusoïdal alors le signal de sortie est aussi sinusoïdal et par conséquent $v_s(t) = V_s \sin(2\pi f t + \varphi)$. avec :

- $V_s = H(f = f_o)E \Rightarrow V_s = 5 V$
- $\varphi(f = f_o) = \pi - \arg(1) = \pi$

$$v_s(t) = 5 \sin(6000\pi t + \pi) = -5 \sin(6000\pi t)$$

9► La tension d'entrée est une combinaison linéaire des tensions de fréquences variables $f \in \{0, f_o, 3f_o, 5f_o\}$.

Puisque le filtre est un filtre passe-bande de fréquence centrale est $f = f_o = 3 \text{ kHz}$ et de bande passante $\Delta f = 150 \text{ Hz}$ alors ce filtre ne laisse passer que les tensions sinusoïdales de fréquence situé dans l'intervalle $[f_1, f_2]$ c'est à dire la tension dont la fréquence est f_o d'où avec $H(f = f_o) = 1$ et $\varphi(f = f_o) = \pi$

$$v_s(t) = \frac{2E}{\pi} \sin(2\pi f t + \pi)$$

Deuxième partie

MÉCANIQUE DU POINT

CHAPITRE 1

DESCRIPTION DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

La mécanique est la partie de la physique qui étudie les mouvement des corps en tenant compte des causes.

Dans notre programme on s'intéresse à la mécanique classique (ou Newtonienne) qui s'intéresse aux mouvements des corps ayant une vitesse très faible devant celle de la lumière .

On admet les postulats de la mécanique classique :

Les postulats de la mécanique classique

- ▷ Le temps est absolu : c'est à dire que le temps ne dépend pas du référentiel.
- ▷ L'existence des référentiels galiléens.
- ▷ La trajectoire est déterministe.

1.1 Repères d'espace et du temps. Référentiel

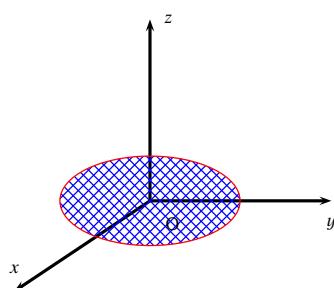
1.1.1 Repérage dans l'espace

Pour se repérer dans l'espace , il faut choisir un corps **solide** de référence S auquel on attache des axes de coordonnées Ox, Oy, Oz ; O étant l'origine des axes.

L'ensemble de tous les systèmes d'axes de coordonnées liés à un même solide de référence constitue le repère lié à S .

Remarque

*Dans notre cours de mécanique ,on utilise toujours des **repères orthonormés***



- $\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1$
- $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$
- \mathcal{R} est direct, en effet :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z ; \quad \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x ; \quad \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

1.1.2 Repérage dans le temps

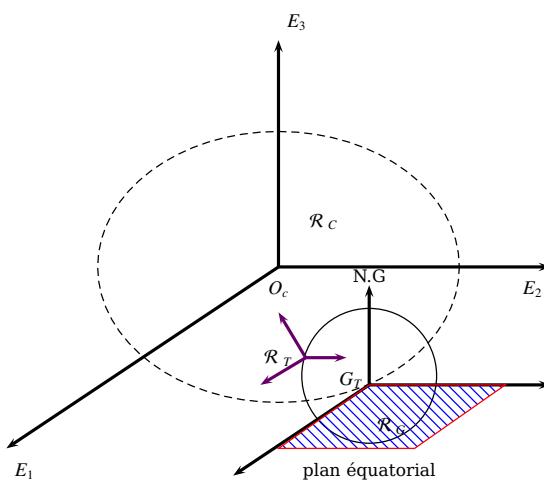
- La mesure du temps suppose une orientation conventionnel du temps : du passé vers le futur , du à l'irréversibilité de l'évolution.
- Le temps se mesure à l'aide d'une horloge, son unité est la seconde depuis 1967.
- Le repère du temps est constitué d'un instant considéré comme origine des dates et une unité des temps (la seconde).

1.1.3 Référentiel

L'ensemble d'un repère spatial lié à un solide de référence S et d'un repère de temps constituent un référentiel \mathcal{R} .

Exemples

- Référentiel de Copéric \mathcal{R}_C : centré au centre du système solaire et les trois axes se dirigent vers des étoiles fixes.
- Référentiel Géocentrique \mathcal{R}_G : centré au centre de la terre G le plan Gxy forme l'équateur et l'axe Gz se dirige vers nord géographique, en translation par rapport au référentiel de Copéric.
- Référentiel terrestre \mathcal{R} : centré au point O quelconque et les trois axes se dirigent vers trois directions .



1.2 Cinématique du point matériel

La cinématique est la partie de la mécanique qui s'intéresse aux mouvements des corps sans tenir compte des causes (Forces).

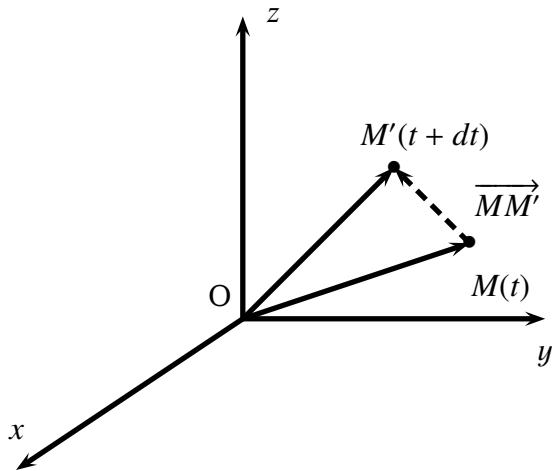
1.2.1 Définition du point matériel

Définition

On appelle *point matériel* tout corps solide de dimension négligeable devant une distance caractéristique (longueur d'un pendule ; distance terre-soleil,....)

1.2.2 Vecteurs position,vitesse et accélération

Soit un référentiel \mathcal{R} (O , \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z) un référentiel et M un point matériel se déplaçant dans \mathcal{R} :



On suppose que le mobile à l'instant t au point M et à l'instant $t + dt$ au point M' . On appelle :

Définitions

- Vecteur position : \overrightarrow{OM}
- Vecteur déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dOM} = \lim_{M \rightarrow M'} \overrightarrow{MM'} = \lim_{M \rightarrow M'} (\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM})$$

- Vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} / \mathcal{R}$$

- Accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} :

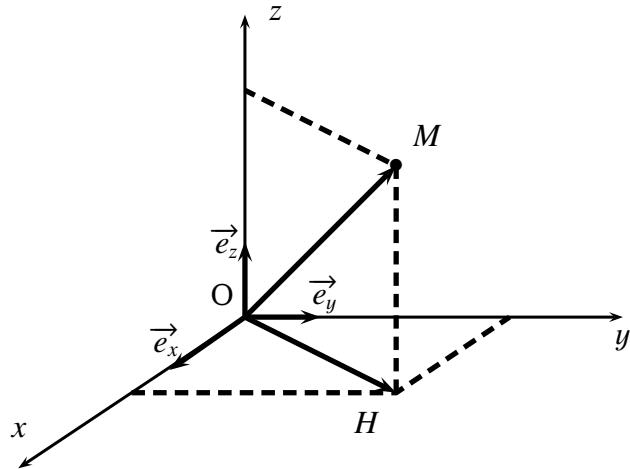
$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} / \mathcal{R} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} / \mathcal{R}$$

Remarque

Dériver dans \mathcal{R} par rapport au temps c'est à dire considérer les vecteurs de bases de \mathcal{R} comme des vecteurs constants dans le temps.

1.2.3 Exemples de bases de projection

1.2.3.1 Coordonnées cartésiennes



1.2.3.1.1 Vecteur déplacement élémentaire .

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} \implies$

$$\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{e_x} + y \overrightarrow{e_y} + z \overrightarrow{e_z}$$

(x, y, z) représentent les coordonnées cartésiennes du point M dans le référentiel \mathcal{R} .
Donc le vecteur déplacement élémentaire \overrightarrow{dOM} s'écrit :

$$\overrightarrow{dOM} = dx \overrightarrow{e_x} + dy \overrightarrow{e_y} + dz \overrightarrow{e_z}$$

1.2.3.1.2 Vecteur vitesse .

On a $\overrightarrow{dOM} = dx \overrightarrow{e_x} + dy \overrightarrow{e_y} + dz \overrightarrow{e_z} \implies \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{dx}{dt} \overrightarrow{e_x} + \frac{dy}{dt} \overrightarrow{e_y} + \frac{dz}{dt} \overrightarrow{e_z}$

On pose :

- ▷ $\frac{dx}{dt} = V_x = \dot{x}$: composante de la vitesse sur l'axe des x .
- ▷ $\frac{dy}{dt} = V_y = \dot{y}$: composante de la vitesse sur l'axe des y .
- ▷ $\frac{dz}{dt} = V_z = \dot{z}$: composante de la vitesse sur l'axe des z .

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = V_x \overrightarrow{e_x} + V_y \overrightarrow{e_y} + V_z \overrightarrow{e_z} = \dot{x} \overrightarrow{e_x} + \dot{y} \overrightarrow{e_y} + \dot{z} \overrightarrow{e_z}$$

1.2.3.1.3 Vecteur accélération .

On a : $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z$ donc

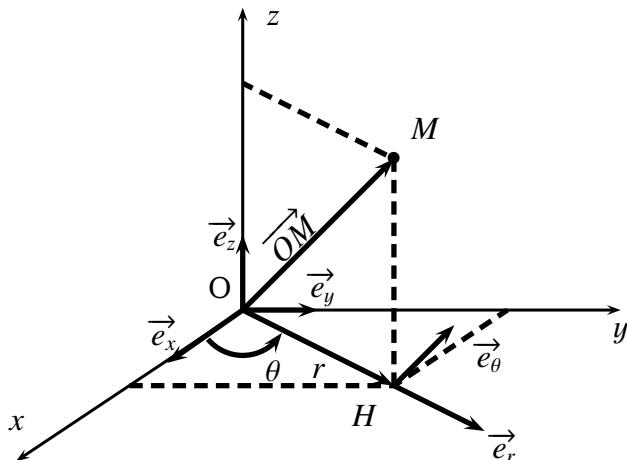
$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z$$

Avec :

- ▶ $\frac{d^2x}{dt^2} = a_x = \ddot{x}$: composante de l'accélération sur l'axe des x .
- ▶ $\frac{d^2y}{dt^2} = a_y = \ddot{y}$: composante de l'accélération sur l'axe des y .
- ▶ $\frac{d^2z}{dt^2} = a_z = \ddot{z}$: composante de l'accélération sur l'axe des z .

1.2.3.2 Coordonnées cylindriques

1.2.3.2.1 Définitions .



Les coordonnées cylindriques sont :

- ▶ $r = OH \quad r \geq 0$
- ▶ $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OH}) \in [0, 2\pi]$
- ▶ $z \in \mathbb{R}$: la côte du point M .

(r, θ, z) : sont les coordonnées cylindriques.
On définit le vecteur \vec{e}_r par :

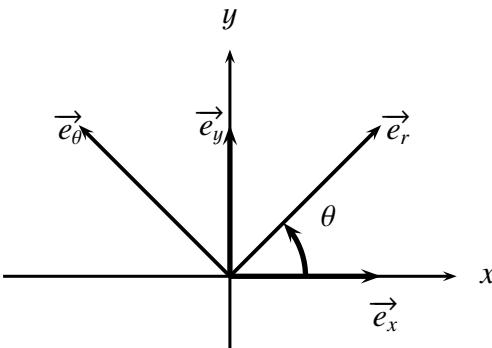
$$\vec{e}_r = \frac{\vec{OH}}{r} = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \in (Oxy)$$

$\|\vec{e}_r\| = 1 \implies \vec{e}_r$ est un vecteur unitaire, on tire donc que $\overrightarrow{OH} = r \vec{e}_r$ et par conséquent :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

On définit le vecteur \vec{e}_θ par rotation de \vec{e}_r de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens de θ c'est à dire :

$$\vec{e}_\theta = \cos(\theta + \pi/2) \vec{e}_x + \sin(\theta + \pi/2) \vec{e}_y = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$



Dérivons \vec{e}_r par rapport à θ dans le repère \mathcal{R} :

$\frac{d \vec{e}_r}{d\theta}_{/\mathcal{R}}$: c'est à dire dériver \vec{e}_r en considérant les vecteurs de bases de \mathcal{R} (\vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z) comme des vecteurs constants.

$$\frac{d \vec{e}_r}{d\theta}_{/\mathcal{R}} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y = \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d \vec{e}_r}{d\theta}_{/\mathcal{R}} = \vec{e}_\theta \quad ; \quad \frac{d \vec{e}_\theta}{d\theta}_{/\mathcal{R}} = -\vec{e}_r \quad ; \quad \frac{d \vec{e}_r}{dt}_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad ; \quad \frac{d \vec{e}_\theta}{dt}_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

Remarque

Dériver un vecteur de module constant dans le repère par rapport à l'angle de rotation θ revient à le faire tourner de $\frac{\pi}{2}$ dans le même sens que θ

En effet : soit \vec{A} un vecteur dont le module est constant c'est à dire $\|\vec{A}\| = cte \implies \vec{A} \cdot \vec{A} = cste$.

Dérivons par rapport à θ ; on trouve $\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{d\theta} = 0$ c'est à dire \vec{A} et $\frac{d\vec{A}}{d\theta}$ sont perpendiculaire.

La base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est dite base locale en coordonnées cylindriques .
 $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est un trièdre direct.

1.2.3.2.2 Vecteur déplacement élémentaire :

On a : $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \implies \overrightarrow{dOM}_{/\mathcal{R}} = dr \vec{e}_r + rd \vec{e}_r + dz \vec{e}_z$

Or $d \vec{e}_r = d\theta \vec{e}_\theta$ donc

$$\overrightarrow{dOM} = dr \vec{e}_r + rd\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z \quad \text{Formule à connaître}$$

Remarque

Si $z = cte (= 0)$ le mouvement est plan (r, θ) : dites coordonnées polaires

1.2.3.2.3 Vecteur vitesse .

$$\text{On a : } \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{/\mathcal{R}} \implies \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z)$$

$$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z}$$

Remarque

Il faut bien faire la différence entre le repère d'étude et celui de projection.

1.2.3.2.4 Vecteur accélération .

$$\text{On a } \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} \Big|_{/\mathcal{R}} \text{ donc :}$$

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z}$$

On pose :

- $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$: accélération radiale.
- $a_t = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$: accélération orthoradiale.

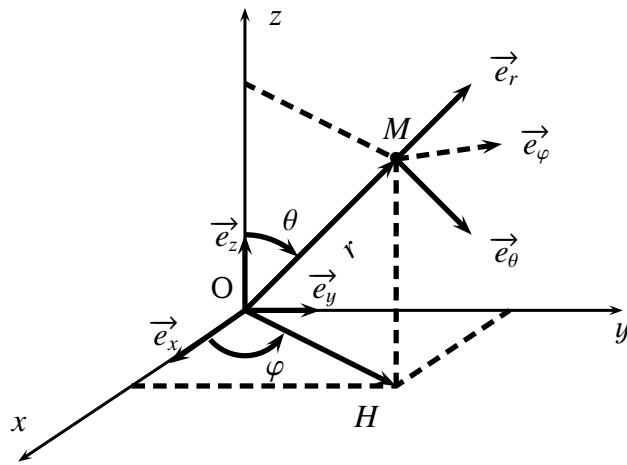
Remarque

On peut écrire l'accélération orthoradiale a_t comme

$$\boxed{a_t = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}}$$

On appelle les coordonnées polaires la restriction des coordonnées cylindriques dans le plan (Oxy) nommé le plan polaire (cad $z = cte = 0$)

1.2.3.3 Coordonnées sphériques**1.2.3.3.1 Définitions .**



Les coordonnées sphériques sont :

- $r = OM \quad r \geq 0$:rayon vecteur
- $\theta = (\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{OM}) \in [0, \pi]$:colatitude
- azimut ; $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

On définit le vecteur \vec{e}_r par :

$$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z$$

$\|\vec{e}_r\| = 1 \implies \vec{e}_r$ est un vecteur unitaire, on tire donc que

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

On a : $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$ et \vec{e}_θ se déduit de \vec{e}_r par simple rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le plan meridien (OMH).

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} / \mathcal{R} = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z$$

On définit

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \sin \theta (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y)$$

On conclut que

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} / \mathcal{R} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \in (Oxy)$$

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:trièdre local en coordonnées sphériques .

1.2.3.3.2 Vecteur déplacement élémentaire .

On a : $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \implies d\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = d(r \vec{e}_r)_{/\mathcal{R}} = dr \vec{e}_r + r d\vec{e}_r$
 Or $\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta, \varphi)$, donc :

$$d\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} d\varphi = d\theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \vec{e}_\varphi d\varphi$$

$d\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta \vec{e}_\varphi$

Formule à connaître

1.2.3.3.3 Vecteur vitesse .

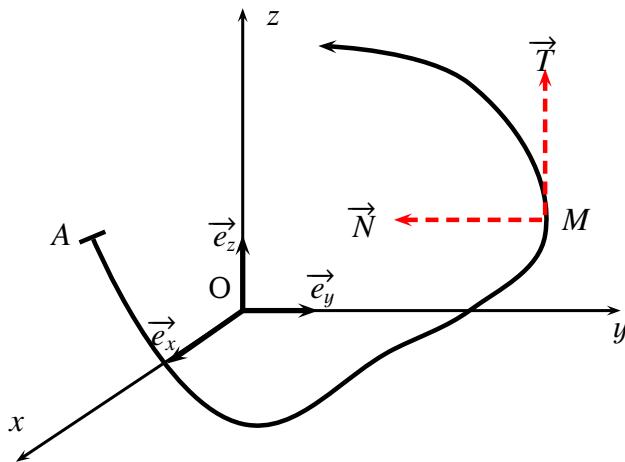
On a : $d\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta \vec{e}_\varphi \implies$

$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi$

1.2.3.4 Coordonnées curvilignes

1.2.3.4.1 Définitions .

Soit (C) une courbe d'origine A et $M \in (C)$.



On appelle coordonnées curviligne la mesure algébrique de l'arc \widehat{AM} ; on la note

$$S(M) = \widehat{AM} \in \mathbb{R}$$

Pour un déplacement élémentaire on a :

$d\overrightarrow{OM} = ds \vec{T}(M)$

avec : $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$; et $\vec{T}(M)$: le vecteur unitaire tangent à (C) au point M ;
Puisque :

$$\| d\vec{OM} \| = |ds| \quad \|\vec{T}(M)\| \Rightarrow \|\vec{T}(M)\| = 1$$

$$\text{On a : } \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{ds}{dt} \vec{T}(M)$$

$$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}) = v\vec{T}(M)}$$

ce qui en déduit que :

$$\boxed{\vec{T}(M) = \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R})}{v} = \frac{d\vec{OM}}{ds}}$$

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} = \frac{d(v\vec{T}(M))}{dt} \Rightarrow \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{dv}{dt}\vec{T}(M) + v\frac{d\vec{T}(M)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$$

$$\text{Or : } \frac{d\vec{T}(M)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{T}(M)}{ds} \Big|_{\mathcal{R}} \frac{ds}{dt}$$

Comme :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{et : } \frac{d\vec{T}(M)}{ds} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = \vec{N} \cdot \frac{1}{\rho_c}$$

avec : \vec{N} : vecteur unitaire qui se déduit de \vec{T} par rotation de $\frac{\pi}{2}$ qui se toujours vers la concavité de la trajectoire si $\rho_c > 0$: rayon de courbure au point M . D'où :

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{dv}{dt}\vec{T}(M) + \frac{v^2}{\rho_c}\vec{N}}$$

Le plan (\vec{T}, \vec{N}) : plan osculateur .

On pose : $\vec{B}(M) = \vec{T} \wedge \vec{N}$: La binormale .

Définition

$(M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$: La base intrinsèque ou base de Frenet.

On pose :

► $\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \vec{T}(M)$: accélération tangentielle .

► $\vec{a}_N = \frac{v^2}{\rho_c} \vec{N}(M)$: accélération normale

Remarques

1-Le repère de Frenet est un repère de projection et non pas un repère d'étude.

$$2 - \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{\rho_c}$$

1.2.3.4.2 Expression du rayon de courbure .

Sachant que : $\vec{B}(M) = \vec{T} \wedge \vec{N}$, le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{a}$ permet d'établir l'expression générale de ρ_c :

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = v \vec{T} \wedge \left(\frac{dv}{dt} \vec{T}(M) + \frac{v^2}{\rho_c} \vec{N} \right) = \frac{v^3}{\rho_c} \vec{B}$$

$$\rho_c = \frac{v^3}{\| \vec{v} \wedge \vec{a} \|}$$

Activité

Rayon de courbure du mouvement parabolique.

Le vecteur position d'un point M en coordonnées cartésiennes est :

$$\overrightarrow{OM} = (V_o t) \vec{e}_x + \left(\frac{1}{2} g t^2 \right) \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z$$

Déterminer le rayon de courbure au point O(0,0,0).

Correction

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} V_o t \\ \frac{1}{2} g t^2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{V}(M/R) = \begin{vmatrix} V_o \\ gt \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{a}(M/R) = \begin{vmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{vmatrix}$$

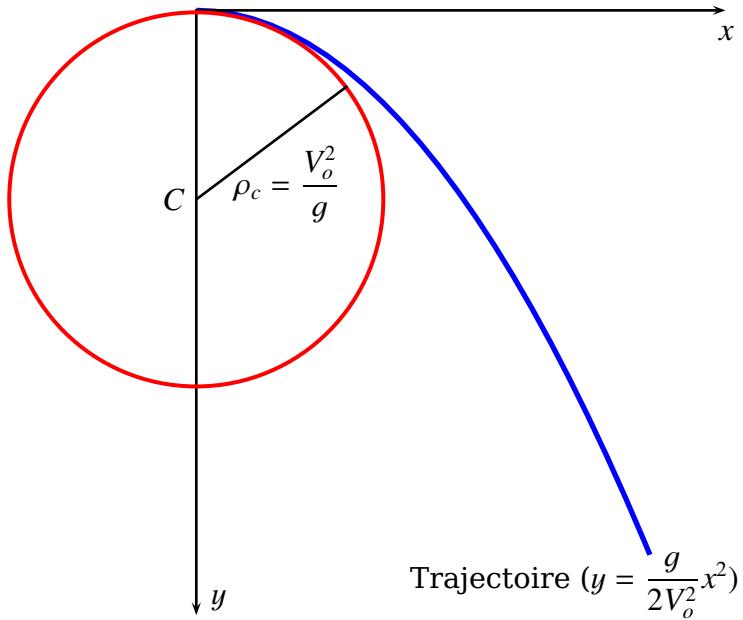
Donc : $\| \overrightarrow{V}(M/R) \| = \sqrt{V_o^2 + (gt)^2}$ et $\| \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{a} \| = V_o g$ donc $\rho_c = \frac{V^3}{\| \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{a} \|}$ ce qui donne :

$$\rho_c = \frac{(\sqrt{V_o^2 + (gt)^2})^3}{V_o g}$$

Au point O on a $t = 0$ donc

$$\rho_c(O) = \frac{V_o^2}{g}$$

Représentation graphique



Activité

Rayon de courbure du mouvement elliptique.

Considérons une ellipse droite , situé dans le plan xOy , d'équations paramétriques :

$x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$; a et b le grand et petit axe et ω la pulsation .

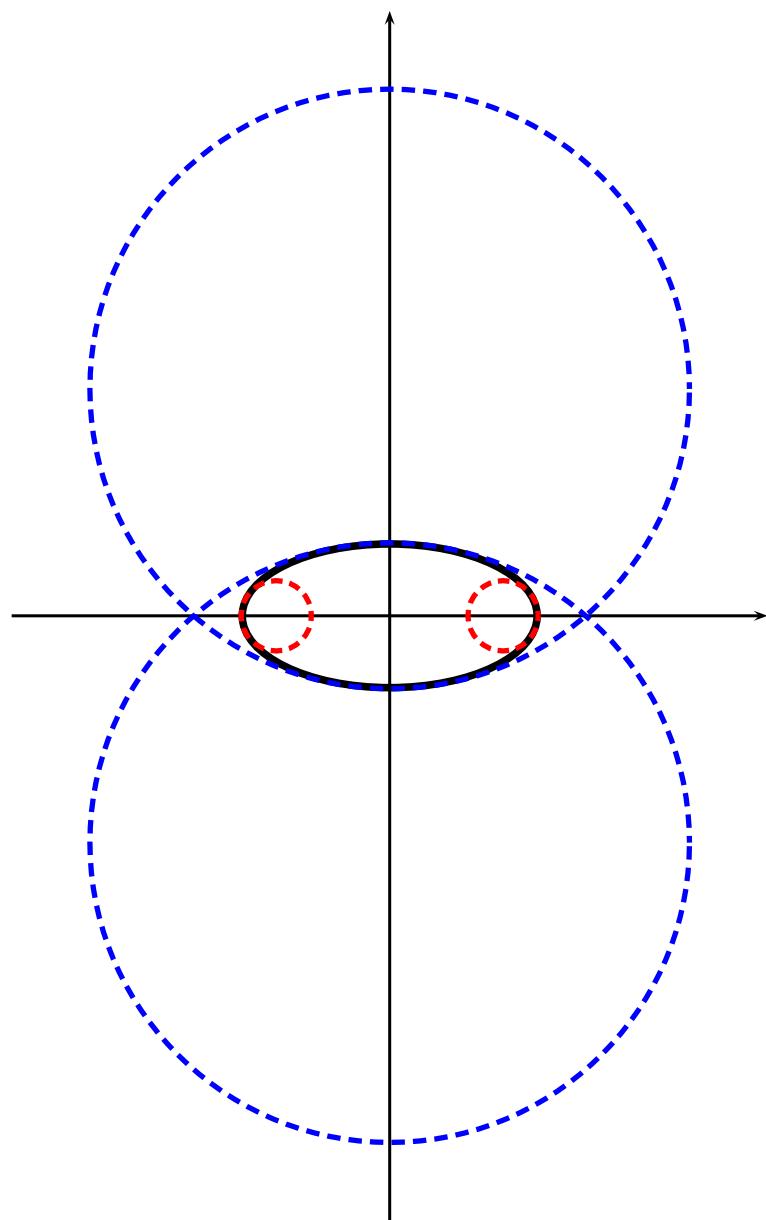
Déterminer l'expression du rayon de courbure aux points remarquables de l'ellipse. Faire une représentation graphique.

Correction

- $\dot{x} = -a\omega \sin \omega t \Rightarrow \ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t$
- $\dot{y} = b\omega \cos \omega t \Rightarrow \ddot{y} = -b\omega^2 \sin \omega t$

$$\rho_C = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}|} = \frac{(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{3/2}}{ab}$$

$$R_A = \frac{b^2}{a} \quad [\text{au point } A(t = 0)], \quad R_B = \frac{a^2}{b} \quad [\text{au point } B(t = \frac{\pi}{2\omega})]$$



1.2.4 Exemples de mouvement

1.2.4.1 Mouvement rectiligne à accélération constante

Un point matériel M se déplace sur un axe ox avec une accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = a \vec{e}_x$ avec $a > 0$.

- 1- Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ sachant que $V(t=0) = V_o > 0$.
- 2- Déterminer le vecteur position \vec{OM} sachant que $x(t=0) = x_o$
- 3- Montrer que : $V^2 - V_o^2 = 2a(x - x_o)$ (Relation indépendante du temps)
- 4- Quelle est la condition que doit vérifier $\vec{a} \cdot \vec{V}$ pour que le mouvement soit uniformément accéléré ? retardé ?

Correction

- 1- Le vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = (at + V_o) \vec{e}_x$
- 2- Le vecteur position $\vec{OM} = (\frac{1}{2}at^2 + V_o t + x_o) \vec{e}_x$
- 3- Montrons que : $V^2 - V_o^2 = 2a(x - x_o)$ (Relation indépendante du temps)
On a $t = \frac{V - V_o}{a} \Rightarrow x - x_o = \frac{1}{2}a(\frac{V - V_o}{a})^2 + V_o(\frac{V - V_o}{a})$ après simplification on obtient le résultat.

Remarque : Cette relation valable uniquement lorsque le mouvement est rectiligne avec $a = cte$.

4- Le mouvement est uniformément :

- accéléré si $\vec{V} \cdot \vec{a} > 0$
- retardé si $\vec{V} \cdot \vec{a} < 0$

1.2.4.2 Mouvement rectiligne sinusoidal

L'équation horaire du mouvement d'un point matériel sur un axe ox s'écrit sous la forme :

$$X(t) = X_o + X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- 1- Donner l'interprétation de chaque termes.
- 2- On pose $x = X - X_o$ que représente x .
- 3- Si on appelle T la période du mouvement , montrer que $T\omega = 2\pi$.
- 4- Déterminer les composantes du vecteur vitesse et accélération du point M.
- 5- Tracer dans le même graphes les courbes représentatives de l'elongation $x(t)$, vitesse $v_x(t)$ et accélération $a_x(t)$ dans le cas où $\omega > 1$; conclure.
- 6- Déterminer l'équation entre $x(t)$ et $v_x(t)$ indépendante du temps et la représenter dans le plan (x, v) (une telle courbe s'appelle trajectoire de phase)

Correction

1- L'interprétation de chaque termes.

- $X(t)$: l'élongation
- X_o : L'abscisse de la position d'équilibre
- X_m : L'amplitude (>0)
- ω : pulsation
- $\omega t + \varphi$: La phase
- φ : la phase à l'origine

2- $x = X - X_o$ représente l'élongation du point M repéré à partir de la position d'équilibre

3- T est la période du mouvement donc

$$x = X_m \cos(\omega t + \omega T + \varphi) = X_m \cos(\omega t + \varphi + 2\pi)$$

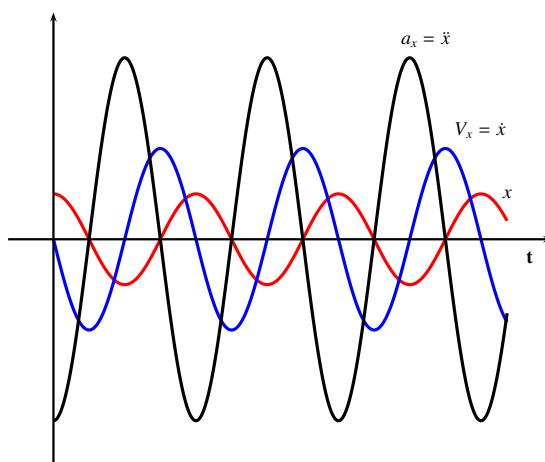
Donc $T\omega = 2\pi$ c'est à dire

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

4- Les composantes du vecteur vitesse et accélération du point M

- $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$
- $V_x = \dot{x} = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$
- $a_x = \ddot{x} = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi)$

5- Les courbes représentatives de l'élongation $x(t)$, vitesse $v_x(t)$ et accélération $a_x(t)$ dans le cas où $\omega = 2 > 1$ et $X_m = 1$

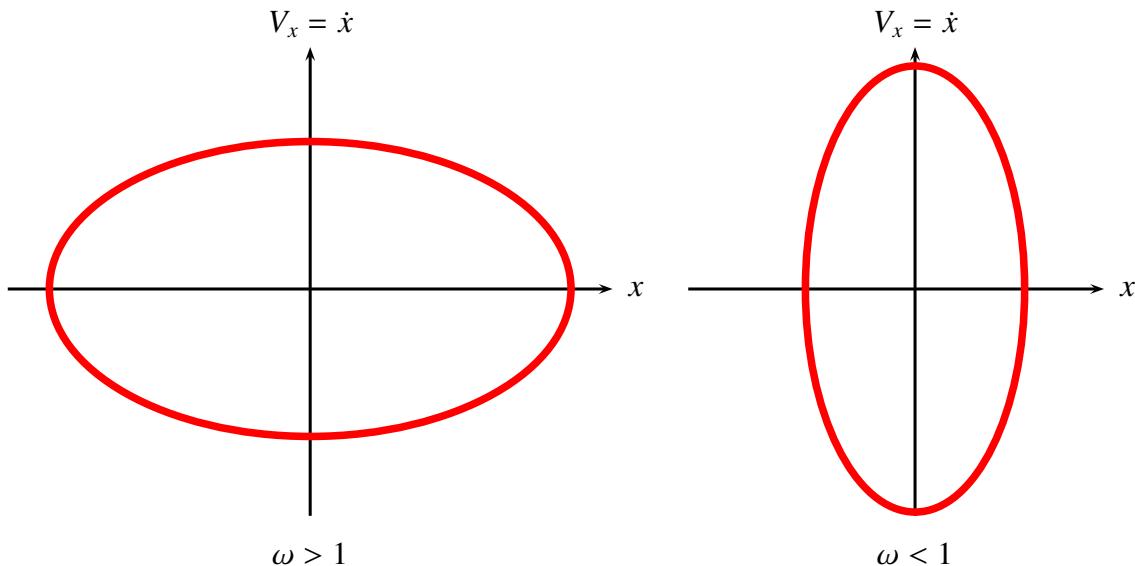


6- L'équation entre $x(t)$ et $v_x(t)$ indépendante du temps

$$\frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\dot{x}^2}{(X_m\omega)^2} = 1$$

C'est l'équation d'un ellipse.

Représentation dans le plan (x, v) :



1.2.4.3 Mouvement circulaire

Un point matériel se déplace sur une trajectoire circulaire de rayon r et de centre O dans un référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z, t)$, le cercle est situé dans le plan (Oxy)

On utilise les coordonnées polaires (r, θ) pour décrire le mouvement de M.

1- Rappeler les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OM}, \vec{V}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ en coordonnées polaires ,puis les simplifier si le rayon est constant $r = R$.

2- On suppose que le mouvement est circulaire uniforme

Le mouvement est circulaire uniforme si la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega_o = cte$.

2.1- Établir l'expression de $\theta(t)$ ainsi l'abscisse curviligne s avec $s(\theta = 0) = 0$

2.2- Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$.

2.3- Représenter les vecteurs vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ pour $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$. Conclure.

3- On suppose que le mouvement est circulaire uniformément varié

Le mouvement est uniformément varié si $\ddot{\theta} = \alpha = cte$.

3.1- Déterminer les lois horaires $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$

3.2- En déduire la relation indépendante du temps.

3.3- Représenter le vecteurs vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ pour $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$.

On prend les constantes d'intégrations nulles

Correction

1- L'expression de :

► Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$$

- Vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

- Vecteur accélération :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

- Pour $\rho = R = cte$ alors $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ ce qui donne :
- Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_\rho$$

- Vecteur vitesse :

$$\vec{V} = R \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

- Vecteur accélération :

$$\vec{a} = -R \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho + R \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

2- Mouvement circulaire uniforme

2.1- $\dot{\varphi} = \omega = cte \implies \varphi = \omega t + \varphi_0$ et $s = R\varphi = R(\omega t + \varphi_0)$
 Comme $s(t=0) = 0 \implies s_0 = R\varphi_0 = 0$ ce qui donne :

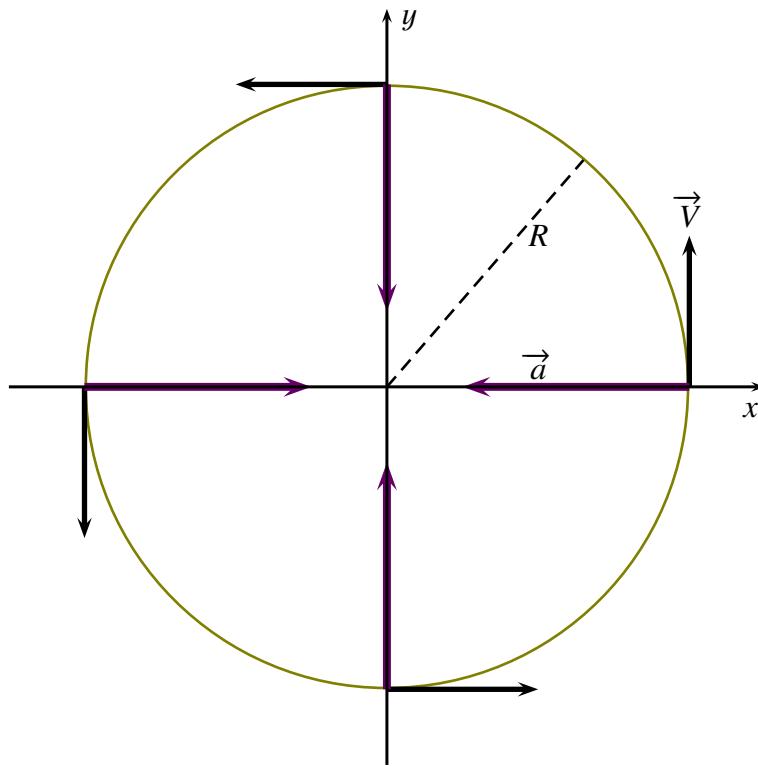
$$\varphi = \omega t \quad \text{et} \quad s = (R\omega)t$$

2.2- L'expression du vecteur :

- vitesse : $\vec{V}(M/R) = R\omega \vec{e}_\varphi = R\omega \vec{T} \implies V = R\omega$
- accélération : $\vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_\rho = R\omega^2 \vec{N}$

2.3-

Représentation graphique



3- Mouvement circulaire uniformément varié

3.1- Les lois horaires de :

- accélération angulaire : $\ddot{\theta} = \alpha = cte$
- vitesse angulaire : $\dot{\theta} = \alpha t + \dot{\theta}_o$
- abscisse angulaire : $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \dot{\theta}_o t + \theta_o$
- abscisse curvilligne : $s(M) = R\theta \implies s(M) = R(\frac{1}{2}\alpha t^2 + \dot{\theta}_o t + \theta_o)$

3.2- La relation indépendante du temps :

$$\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_o^2 = 2\alpha(\varphi - \varphi_o)$$

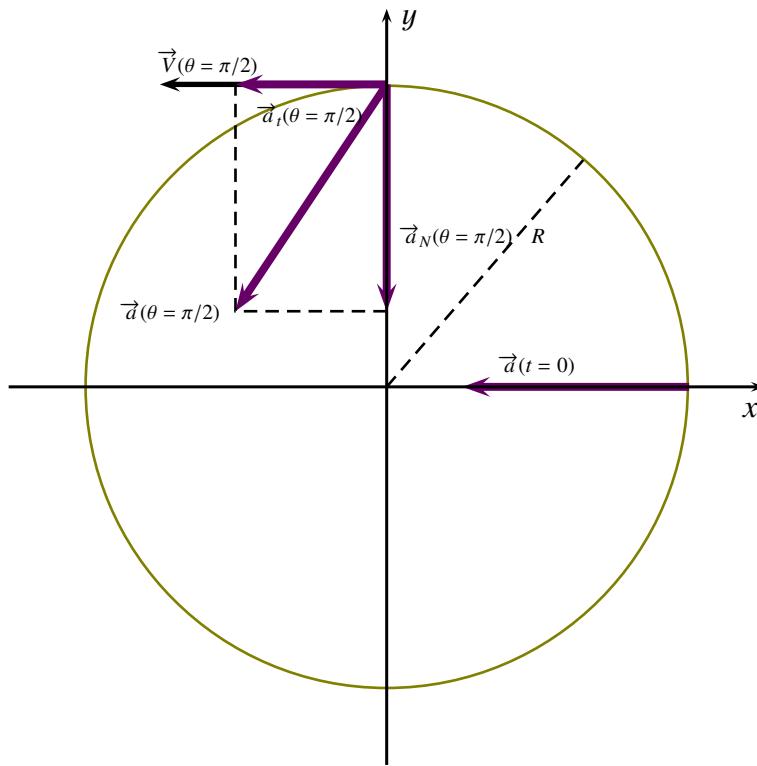
3.3- Conditions initiales nulles, donc :

$$\vec{V} = R\alpha t \vec{e}_\theta \quad ; \quad \vec{a} = R\alpha \vec{e}_\theta - R\alpha^2 t^2 \vec{e}_r$$

3.4-

Représentation graphique

- Pour $\theta = 0 \implies t = 0$ on a : $\vec{V} = \vec{0}$ et $\vec{a} = R\alpha \vec{e}_\theta$
- Pour $\theta = \pi/2 \implies t = \frac{\pi}{\alpha}$ donc : $\vec{V} = R\sqrt{\pi\alpha} \vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = R\alpha \vec{e}_\theta - R\pi\alpha \vec{e}_r$



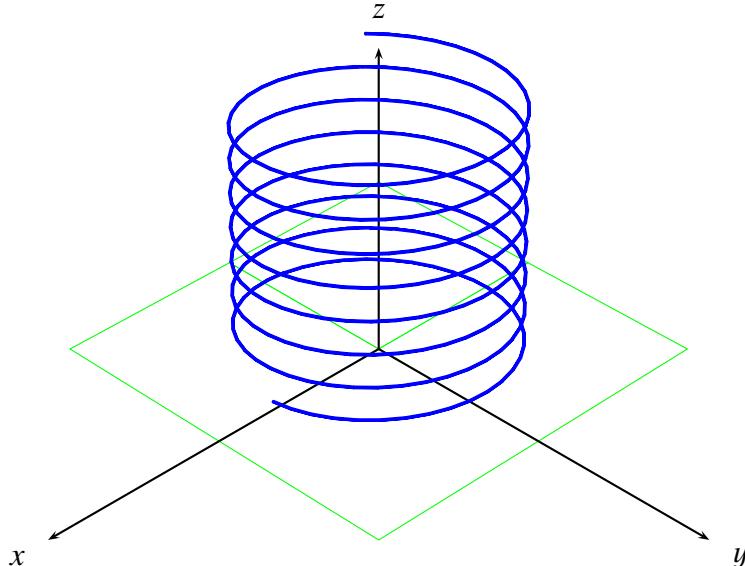
1.2.4.4 Mouvement helicoidal

Un mobile est repéré dans la base cylindrique associée à un référentiel donné \mathcal{R} par : $\rho = R$, $\varphi = \omega t$ et $z = a.t$; où a , ω et R sont des constantes positives. La trajectoire est une hélice enroulée sur un cylindre à base circulaire. Le pas h de l'hélice est, par définition, la distance qui sépare deux positions successives du mobile sur une même génératrice de l'hélice.

- 1- Faire une représentation graphique de la trajectoire de M dans \mathcal{R} .
- 2- Quelles sont les unités, dans le système international (S.I.), de ω et a ? Quelle relation lie a à h ainsi ω .
- 3- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération en un point quelconque de la trajectoire :
 - 3.1- Dans la base de coordonnées cartésiennes.
 - 3.2- Dans la base de coordonnées cylindriques.
 - 3.3- Déterminer le rayon de courbure ρ_c en fonction de R , a et ω .
- 4- Déterminer les vecteurs unitaires de la base de coordonnées curvilignes, puis en déduire le rayon de courbure de la trajectoire dans \mathcal{R} ; Le comparer avec R .

Correction

1- Représentation graphique:



2- Les unités de :

- ω : rad s⁻¹
- a : m s⁻¹
- On a : $h = z(t + T) - z(t) \implies h = aT = \frac{2\pi a}{\omega}$

3-

- L'expression de la vitesse :

$$\vec{V} = R\omega \vec{e}_\varphi + a \vec{e}_z = R\omega(-\sin(\omega t) \vec{e}_x + \cos(\omega t) \vec{e}_y) + a \vec{e}_z \implies V = \sqrt{R^2\omega^2 + a^2}$$

- L'expression de l'accélération :

$$\vec{\gamma} = -R\omega^2 \vec{e}_\rho = -R\omega^2(\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y) \implies \gamma = R\omega^2$$

3.1- Le rayon de courbure :

On a : $\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_r + at \vec{e}_z \implies \vec{V} = R\omega \vec{e}_\theta + a \vec{e}_z$ ainsi $\vec{\gamma} = -R\omega^2 \vec{e}_r$

Donc :

$$V = \sqrt{R^2\omega^2 + a^2} \quad \text{et} \quad \|\vec{V} \wedge \vec{\gamma}\| = (R^2\omega^2 + a^2) \sqrt{R^2\omega^2 + a^2}$$

Il en résulte que

$$\rho_c = \frac{V^3}{\|\vec{V} \wedge \vec{\gamma}\|} \implies \rho_c = R + \frac{a^2}{R\omega^2} > R$$

4- La base de Fresnet :

- Le vecteur tangent :

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}}{V} \implies \vec{T} = \frac{R\omega \vec{e}_\theta + a \vec{e}_z}{\sqrt{R^2\omega^2 + a^2}}$$

- Le vecteur normal :

On a : $\vec{\gamma} = -R\omega^2 \vec{e}_r = \frac{dV}{dt} \vec{T} + \frac{V^2}{\rho_c} \vec{N}$ ce qui donne :

Comme $V = \sqrt{R^2\omega^2 + a^2} = cte \implies \frac{dV}{dt} = 0$, alors

$$-R\omega^2 \vec{e}_r = \frac{V^2}{\rho_c} \vec{N}$$

- La norme donne :

$$R\omega^2 = \frac{V^2}{\rho_c} \implies \rho_c = R + \frac{a^2}{R\omega^2}$$

- Conséquence

$$\vec{N} = -\vec{e}_r$$

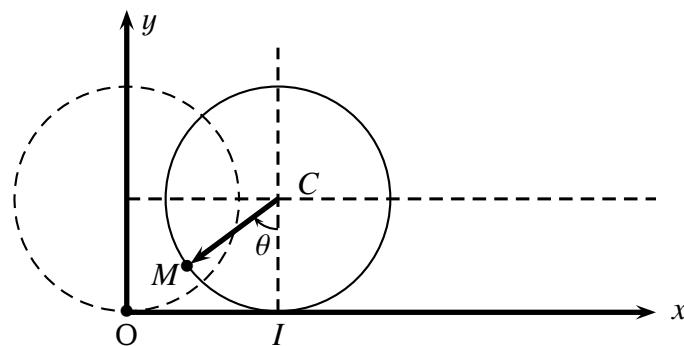
- La binormale \vec{B} :

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} \implies \vec{B} = \frac{-a \vec{e}_\varphi + R\omega \vec{e}_z}{\sqrt{R^2\omega^2 + a^2}}$$

On vérifie bien que : $\|\vec{B}\| = 1$

1.2.4.5 Mouvement cycloïde

Dans un référentiel $\mathcal{R} = (O, x, y, z, t)$ un point M d'un cercle de rayon R se déplace dans le plan (oxy) sans frottement comme l'indique la figure suivante :



On admet que le mouvement se fait avec roulement sans glissement ce qui impose que la mesure de l'arc $\widehat{IM} = R\theta = OI$, et on suppose que le mouvement du centre est uniforme ainsi on pose $\omega = \dot{\theta} = cte$.

1- En utilisant la relation de Châles, Déterminer les composantes du vecteur \vec{OM} dans la base des coordonnées cartésiennes en fonction de R, θ .

2- Exprimer dans la base de coordonnées cartésiennes de \mathcal{R} les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et celles du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ en fonction de R, ω et t .

3- Donner l'allure de la trajectoire de M par rapport à \mathcal{R} (dite cycloïde).

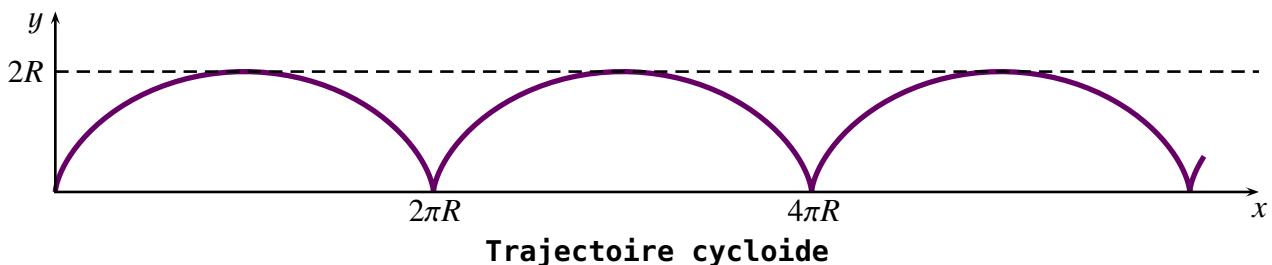
4- Montrer que le rayon de courbure ρ_c de la trajectoire décrite par le point M dans \mathcal{R} s'écrit sous la forme : $\rho_c = 4R \left| \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right|$

Correction

1- Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM} \implies \overrightarrow{OM} = R(\theta - \sin \theta) \vec{e}_x + R(1 - \cos \theta) \vec{e}_y$$

2- la trajectoire du point M :



Remarque

On a : $x = R(\omega t - \sin(\omega t))$ et $y = R(1 - \cos(\omega t))$ donc

$$(x - R\omega t)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

Une cycloïde est un cercle de rayon R et de centre O animé d'un mouvement rectiligne uniforme suivant l'axe Ox

3- L'expression du vecteur :

► vitesse :

$$\vec{V} = R\omega(1 - \cos \omega t) \vec{e}_x + R\omega \sin \omega t \vec{e}_y$$

► accélération :

$$\vec{a} = R\omega^2(\sin(\omega t) \vec{e}_x + \cos(\omega t) \vec{e}_y)$$

4- le rayon de courbure :

On rappelle que : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

Puisque : $\vec{V} = R\omega(1 - \cos \omega t) \vec{e}_x + R\omega \sin \omega t \vec{e}_y \implies V = 2R\omega \left| \sin \frac{\omega t}{2} \right|$

Ainsi : $\vec{a} \wedge \vec{V} = 2R^2\omega^3 \sin^2 \frac{\omega t}{2} \vec{e}_z$

Il en résulte que :

$$\rho_c = 4R \left| \sin \frac{\omega t}{2} \right|$$

CHAPITRE 2

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL DANS UN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN

La dynamique a pour objet de prévoir le mouvement d'un corps dans son environnement.

2.1 Quelques forces usuelles

On rappelle que :

- Force gravitationnelle : $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$
- Force de Coulomb : $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$
- Poids d'un corps : $\vec{P} = m\vec{g}$
- Tension du ressort : $\vec{F} = (L - L_o) \vec{u}_L$
- Poussée d'Archimède : $\vec{F}_A = \rho g V \vec{e}_z$
- Force de frottement fluide visqueux : $\vec{F} = -\lambda \vec{V}$
- Force de frottement fluide : $\vec{F} = -\lambda \vec{V}^2 \vec{u}_V$
- Force de Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$

2.2 Lois de Newton

2.2.1 Principe d'inertie

Dite aussi première loi de Newton.

Principe d'inertie

Dans un référentiel \mathcal{R} si un point matériel isolé ou pseudo-isolé et son mouvement par rapport à ce référentiel est rectiligne uniforme alors le référentiel \mathcal{R} est galiléen.

Remarques

- Le mouvement rectiligne est uniforme donc le vecteur vitesse est constant :

$$\vec{V} = \text{cte}$$

mouvement de translation rectiligne uniforme ou équilibre .

- Le référentiel de **Copérnic** est un référentiel galiléen si on néglige les actions extérieures autrement dit si le système solaire est supposé isolé.
- Les référentiels Géocentrique et terrestre ne sont pas galiléens;mais on peut les considérer comme galiléens si la durée de l'expérience est très faible par rapport à la période de la terre.

2.2.2 La relation fondamentale de la dynamique

dite aussi la 2^{ème} loi de Newton.

Relation fondamentale de la dynamique

Par rapport à un **référentiel galiléen** \mathcal{R} , le mouvement d'un point matériel M de masse m soumis à plusieurs forces dont la résultante ($\Sigma\vec{F}$) satisfait à la relation :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}(M/\mathcal{R})$$

2.2.3 Principe des actions réciproques

Dite aussi 3^{ème} loi de Newton.

Principe de l'action et la réaction

Si un point matériel A exerce sur un autre point matériel B une force $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ alors le corps B exerce sur A une force $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ tel que :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

2.3 Applications (énoncés voir TD)

2.3.1 Étude d'un projectile avec et sans frottement

Un trièdre orthonormé (Ox, Oy, Oz) est lié au sol terrestre d'axe Oz vertical ascendant. Le champ de pesanteur, supposé uniforme, est noté : $\vec{g} = -g \vec{e}_y$. A l'origine des temps ($t = 0$), un projectile supposé ponctuel, de masse $m = 1\text{kg}$, est lancé du point O avec une vitesse initiale \vec{V}_o située dans le plan xOy , faisant un angle α avec l'horizontale : $V_o = 10 \text{ m/s}$.

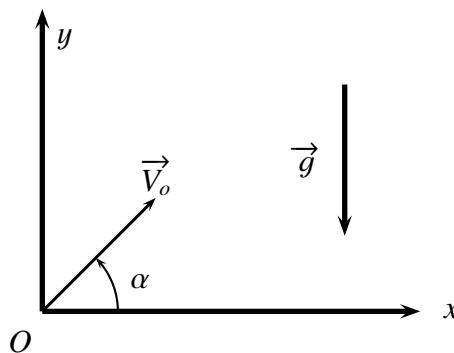
1▷ En projetant la RFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen, déterminer les composantes du vecteur \overrightarrow{OM} .

2▷ Exprimer, en fonction de V_o , g et α le temps nécessaire pour que le projectile atteigne sa plus haute altitude S , et les coordonnées de ce point S .

3▷ Pour quelle valeur de l'angle α la portée du lancement est-elle maximale ? Calculer cette portée.

4▷ En supposant le module V_o , de la vitesse initiale, constant, mais α variable ; Donner l'équation de la courbe (dite de sûreté) séparant les points du plan xOy pouvant être atteints par le projectile, de ceux qui ne seront jamais atteints.

5▷ Le sol fait un angle $\theta_o < \alpha$ avec l'horizontale Ox . Déterminer α pour que la portée soit maximale. Puis calculer la valeur de cette portée pour $\theta_o = 50^\circ$.



6▷ Dans cette partie, on suppose que la résistance de l'air est modélisable par une force de type $\vec{F} = -k\vec{V}$.

6.1▷ Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(M)$.

6.2▷ En déduire celles du vecteur position \overrightarrow{OM}

Correction

1▷ Les composantes du vecteur \overrightarrow{OM}

On a :

$$\vec{a}(M) = \vec{g} \implies \begin{vmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{vmatrix} \implies \vec{V}(M) \begin{vmatrix} V_o \cos \alpha \\ -gt + V_o \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix} \implies \overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x = V_o \cos \alpha t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_o \sin \alpha t \\ z = 0 \end{vmatrix}$$

On tire L'équation de la trajectoire

$$y = -\frac{g}{2V_o^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x$$

2▷ Le temps nécessaire pour que le projectile atteigne sa plus haute altitude S, et les coordonnées de ce point S.

► Sachant que au point S la vitesse $v_y = 0$ on tire que

$$t_S = \frac{V_o}{g} \sin \alpha$$

► En utilisant les équations horaires du mouvement on obtient :

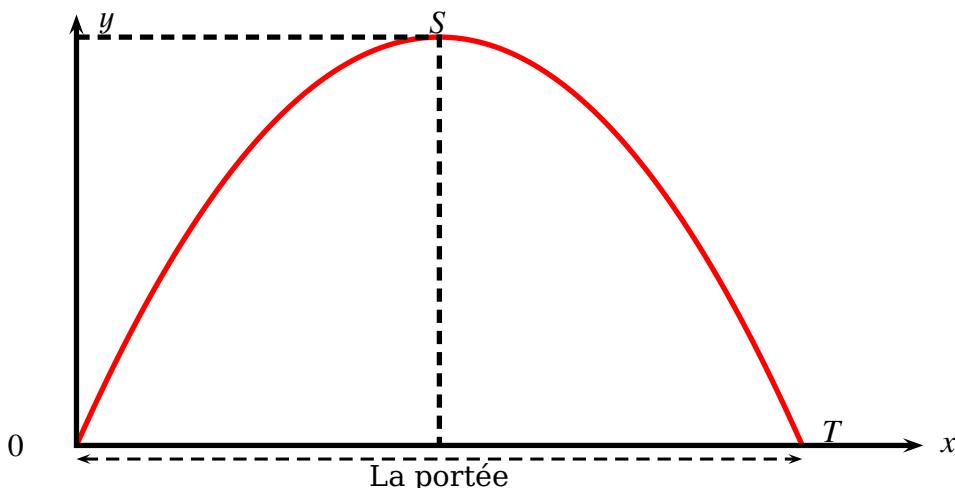
$$x_S = \frac{V_o^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad \text{et} \quad y_S = \frac{V_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

3▷ La valeur de l'angle α pour que la portée du lancement est maximale est :

On définit la portée par la distance $p = OT$ avec T le point défini par $y(T) = 0$

$p = 2x_S = \frac{V_o^2 \sin 2\alpha}{g}$ est maximale si

$$\sin 2\alpha = 1 \implies \alpha(p_{max}) = \frac{\pi}{4}$$



Calcul de la portée portée. $p(\alpha = \frac{\pi}{4}) = 10,2 \text{ m}$

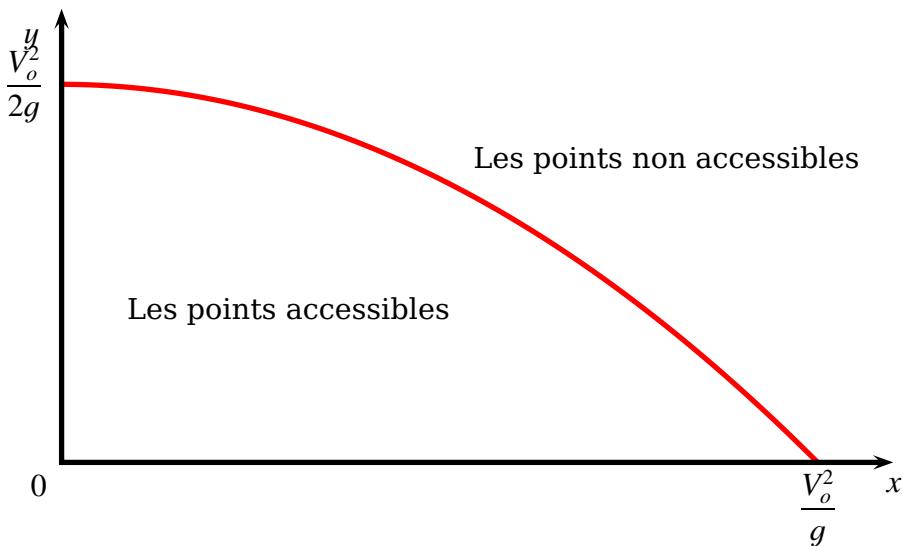
4▷ L'équation de la courbe :

On a à partir de l'équation de la trajectoire : $y = -\frac{g}{2V_o^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x$ et connaissant que $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$ on obtient que

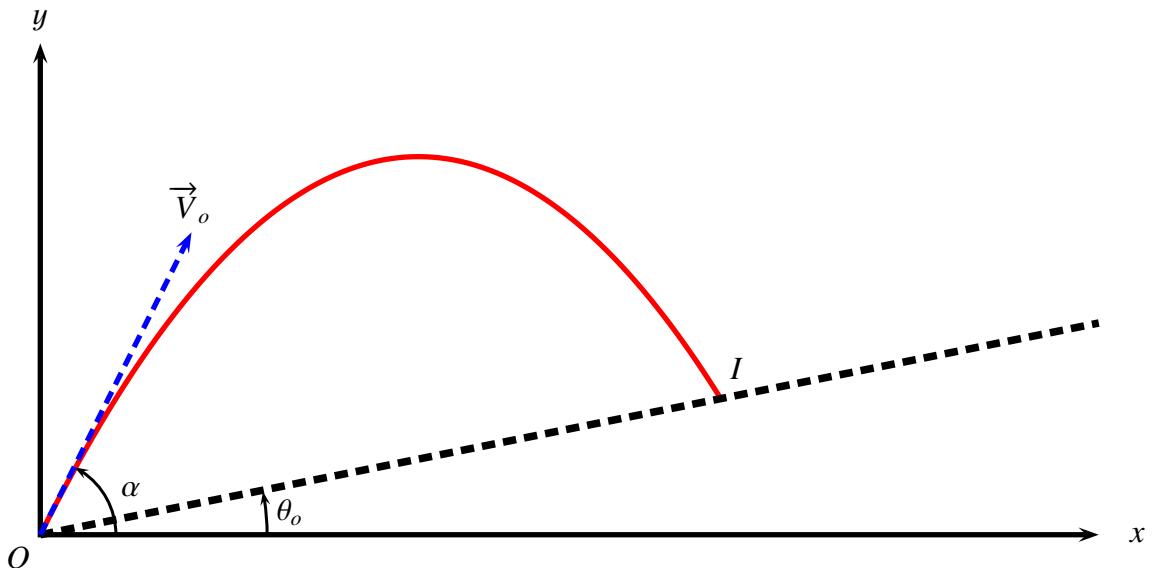
$$\frac{gx^2}{2V_o^2} \tan^2 \alpha + x \tan \alpha - \left(y + \frac{gx^2}{2V_o^2}\right) = 0$$

C'est une équation du second ordre en $u = \tan \alpha$ possède des solutions réelles si

$$\Delta' > 0 \implies y < \frac{V_o^2}{2g} - \frac{g}{2V_o^2} x^2$$



5 Le sol fait un angle $\theta_o < \alpha$ avec l'horizontale Ox. Détermination de α pour que la portée soit maximale.



On a $p = OI$ et on I, $y = x \tan \theta_o = -\frac{g}{2V_o^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x$ donc :

$$\tan \alpha - \tan \theta_o = \frac{g}{2V_o^2} (1 + \tan^2 \alpha) x$$

$$\text{Or } p = \frac{x}{\cos \theta_o} \implies p = \frac{2V_o^2 \cos^2 \alpha}{g \cos \theta_o} (\tan \alpha - \tan \theta_o)$$

$$p = \frac{2V_o^2}{g \cos \theta_o} \left(\frac{\tan \alpha - \tan \theta_o}{1 + \tan^2 \alpha} \right) = \frac{2V_o^2}{g \cos \theta_o} \left(\frac{u - u_o}{1 + u^2} \right)$$

avec $u = \tan \alpha$ et $u_o = \tan \theta_o$

Cette portée est maximale si $\frac{dp}{d\alpha} = 0$ ou bien $\frac{dp}{du} = 0$.

$$\frac{dp}{du} = 0 \implies -\frac{u^2 - 2uu_o - 1}{(1 + u^2)^2} = 0 \text{ c'est à dire } u^2 - 2uu_o - 1$$

$$u = \tan \alpha = u_o + \sqrt{1 + u_o^2}$$

A.N

$$\alpha = 70^\circ \implies p_{max} = 8,96 \text{ m}$$

La valeur de la portée pour $\theta_o = 50^\circ$.

$$\alpha = 70^\circ \implies p_{max} = 8,96 \text{ m}$$

6▷ Dans cette partie , on suppose que la résistance de l'air est modélisable par une force de type $\vec{f} = -k\vec{V}$

6.1▷ Les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(M)$

La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k\dot{x} = 0 & (A) \\ m\ddot{y} + k\dot{y} + mg = 0 & (B) \end{cases}$$

Par intégration on obtient

$$V_x = \dot{x} = V_o \cos \alpha e^{-\frac{k}{m}t}$$

ainsi

$$V_y = \dot{y} = -\frac{g}{k} + (V_o \sin \alpha + \frac{g}{k})e^{-\frac{k}{m}t}$$

Remarque

Lorsque $t \rightarrow \infty$ les composantes du vecteur vitesse ,tend vers des valeurs limites

$$V_{x\text{limite}} = V_o \cos \alpha$$

$$V_{y\text{limite}} = V_o \sin \alpha$$

6.2▷ Les composantes du vecteur position \vec{OM} Par intégration on obtient :

$$x(t) = \frac{mV_o \cos \alpha}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

Par un DL au voisinage de $k = 0$ on trouve $x(t) = V_o \cos \alpha t$

$$y(t) = -\frac{m}{k^2} + (kV_o \sin \alpha e^{-\frac{k}{m}t} + mge^{-\frac{k}{m}t} + gkt - V_0 k \sin \alpha - gm)$$

2.3.2 Particule soumise à un frottement fluide de type : $f = -k \cdot V^2$

Une particule matérielle est lâchée sans vitesse initiale en un lieu où règne un champ de pesanteur uniforme. La particule est soumise, en plus de la pesanteur, à une force de frottement de l'air proportionnelle au carré de sa vitesse, d'intensité $f = kV^2$ ($k > 0$)

) et de **sens opposé** au mouvement. Le référentiel d'étude est un référentiel terrestre considéré galiléen. Le mouvement de la particule est repéré sur un axe Oz descendant, d'origine O (position initiale de la particule) et de vecteur unitaire \vec{e}_z .

1▷ Écrire l'équation du mouvement de chute. Quelle est la vitesse limite V_∞ atteinte par la particule ?

2▷ Exprimer la vitesse de la particule à l'instant t , en fonction de t , V_∞ et g .

3▷ Quelle est l'expression de la distance parcourue à l'instant t en fonction de g , V_∞ et V

On rappelle que : $\frac{2a}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}$

Correction

1▷

- L'équation du mouvement de chute.

$$m \frac{dV}{dt} = mg - kV^2$$

- La vitesse limite V_∞ atteinte par la particule

$$V_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

2▷ L'Expression de la vitesse de la particule à l'instant t , en fonction de t , V_∞ et g .

On a : $\frac{m dV}{k dt} = V_\infty^2 - V^2 \implies \frac{dV}{V_\infty^2 - V^2} = \frac{k}{m} dt$

Par décomposition en éléments simples et sachant que $V(0) = 0$ on obtient

$$V(t) = V_\infty \frac{e^{\frac{2kV_\infty t}{m}} - 1}{e^{\frac{2kV_\infty t}{m}} + 1} = V_\infty \tanh \frac{2kV_\infty}{m} t$$

3▷ L'expression de la distance parcourue à l'instant t en fonction de g , V_∞ et V

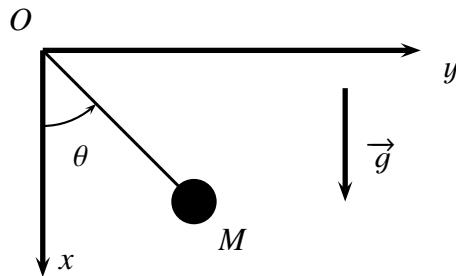
On a : $V = \frac{dz}{dt} = V_\infty \tanh \frac{2kV_\infty}{m} t$ et sachant que $z(t=0) = 0$ alors

$$z = \frac{m}{2k} \ln \left[\cosh \frac{2kV_\infty t}{m} \right] = \frac{V_\infty^2}{2g} \ln \frac{V_\infty}{V_\infty - V}$$

2.3.3 Le pendule simple

On considère le mouvement d'un pendule simple qui oscille dans un milieu où les forces de frottement sont inexistantes. Le pendule est constitué d'un objet ponctuel M de masse m , accroché par l'intermédiaire d'un fil rigide à un point O fixe.

On suppose le fil rigide sans masse, sa longueur est $\ell = 1m$, On note l'angle du fil OM avec la verticale. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre \vec{g} considéré comme uniforme.



On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\theta(t = 0) = \omega_0$ et le lâche sans vitesse initiale.

1▷ En utilisant la R.F.D établir :

1.1▷ L'équation différentielle du mouvement.

1.2▷ L'expression de la tension \vec{T} du fil.

1.3▷ L'expression de la pulsation propre ω_0 du mouvement.

2▷ Résoudre l'équation différentielle du mouvement.

3▷ Établir et tracer l'équation de la trajectoire de phase dans le plan ($u = \frac{\theta}{\omega_0}$), puis conclure.

4▷ On a mesuré pour 20 périodes une durée de 40,12s , Déduire de cette expérience une valeur de g .

Correction

1▷

$$\begin{aligned} m\vec{a} & \left| \begin{array}{l} -m\ell\dot{\theta}^2 \vec{e}_r \\ m\ell\ddot{\theta} \vec{e}_\theta \end{array} \right. & \vec{P} & \left| \begin{array}{l} mg \cos \theta \vec{e}_r \\ -mg \sin \theta \vec{e}_\theta \end{array} \right. & \vec{T} & \left| \begin{array}{l} -T \vec{e}_r \\ 0 \vec{e}_\theta \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta & (1) \\ -m\ell\dot{\theta}^2 = -T + mg \cos \theta & (2) \end{cases}$$

1.1▷ L'équation différentielle du mouvement : (1) \Rightarrow

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

1.2▷ L'expression de la tension du fil : (2) \Rightarrow

$$T = mg \cos \theta + m\ell\dot{\theta}^2$$

1.3▷ L'expression de la pulsation propre :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

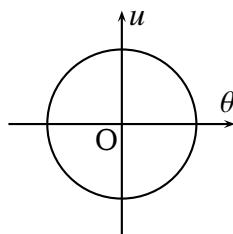
1.4► Résolution de l'équation différentielle :

$$\theta(t) = \theta_o \cos(\omega t)$$

2▷ L'équation de la trajectoire de phase

$$\theta^2 + u^2 = \theta_o^2$$

Trajectoire de phase est une courbe fermée(cercle) : mouvement périodique (Oscillateur harmonique)



3▷ La valeur de g :

$$g = 4\pi^2 \ell \left(\frac{20}{\Delta t} \right)^2 \implies g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

2.3.4 Mouvement d'une particule chargé dans un champ uniforme

Une particule électrique ponctuelle M de masse m et portant une charge $q > 0$ mobile dans une région d'espace où règne un champ :

- Électrique uniforme $\vec{E} = E \vec{e}_y$, $E > 0$
- Magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$, $B > 0$

La charge est émise sans vitesse initiale au point O à $t = 0$.

1▷

1.1► Par application de la RFD trouver un système de trois équations différentielles scalaires vérifiées par x, y et z .

1.2► Résoudre ce système et en déduire $x(t), y(t)$ et $z(t)$ on posera : $\omega = \frac{qB}{m}$

1.3► Représenter la trajectoire .

1.4► En déduire le rayon de courbure en fonction des données.

2▷ On suppose maintenant que la particule possède une vitesse initiale : $\vec{V}_o = V_o \vec{e}_x$

2.1► Retrouver : $x(t), y(t)$.

2.2► Pour quelle valeur particulière v_{oc} de v_o , la charge décrit un mouvement rectiligne confondu avec Ox . Exprimer v_{oc} en fonction de E et B .

2.3► Que peut-on dire dans ce cas sur la force exercée sur la charge.

2.4► Représenter la trajectoire de la particule dans le cas où $v_o = 2v_{oc}$

Correction

1▷

$$\mathbf{1.1} \triangleright m\vec{a}(M) = q(\vec{E} + \vec{V}_i \wedge \vec{B}) \implies \begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B & (1) \\ m\ddot{y} = q(E - \dot{x}B) & (2) \\ m\ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$$

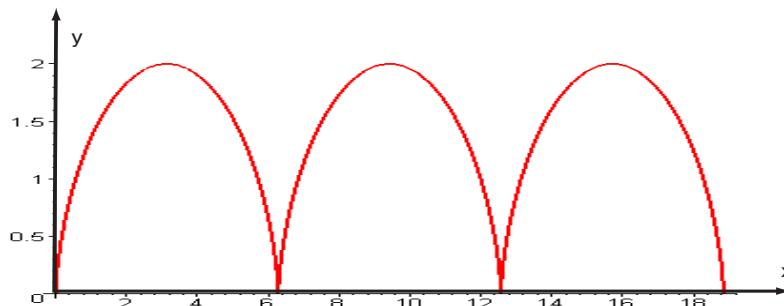
1.2▷ Par intégration on trouve :

$$x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin \omega t)$$

$$y = \frac{E}{B\omega}(1 - \cos \omega t)$$

$z = 0$ mouvement plan

1.3▷ Représentation graphique (on prend $\frac{E}{B\omega} = 1$)



1.4▷ Le rayon de courbure est

$$\rho_c = \frac{4E}{B\omega} |\sin(\frac{\omega t}{2})|$$

2▷

$$\mathbf{2.1} \triangleright \vec{V}_i = v_o \vec{e}_x$$

2.1.1 ◇

$$x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin \omega t) + \frac{v_o}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$y = (\frac{E}{B} - v_o) \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$

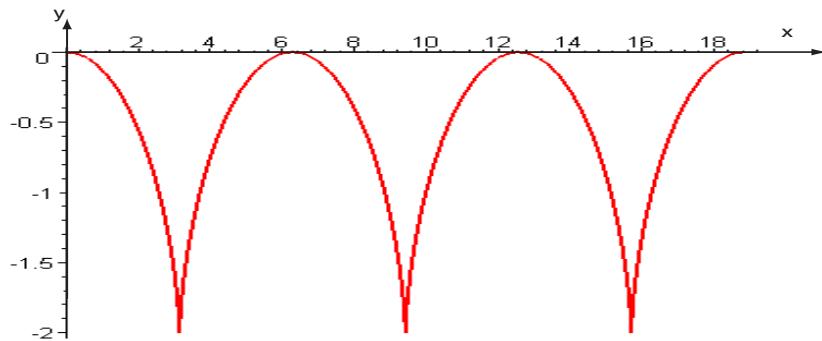
2.1.2 ◇ Le mouvement est rectiligne confondu avec ox : $\forall t \implies$

$$v_{oc} = \frac{E}{B}$$

2.1.3 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V}_i \wedge \vec{B}) = \vec{0}$ la force magnétique compense la force électrique

2.1.4 Représentation graphique avec $v = 2v_{oc}$

On rappelle que dans ce cas , on a :
$$\begin{cases} x = \frac{E}{B\omega}(\omega t + \sin \omega t) \\ y = -\frac{E}{B\omega}(1 - \cos \omega t) \end{cases}$$



CHAPITRE 3

MOUVEMENT DE PARTICULES CHARGÉES DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE, UNIFORME ET STATIONNAIRE

3.1 Force de Lorentz

3.1.1 Rappel

Définition

Dans un référentiel \mathcal{R} , lorsque une particule de charge q animé par rapport à ce référentiel \mathcal{R} de la vitesse $\vec{V}(M/R) = \vec{V}$, règne un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , elle acquière une force dite de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

On décompose la force de Lorentz en :

- Force électrique : $\vec{F}_e = q\vec{E}$.
- Force magnétique : $\vec{F}_m = q\vec{V} \wedge \vec{B}$

Activité

Comparer le poids et la force électrique ressentie par l'électron dans l'atome d'hydrogène à l'état fondamental. Conclure.

On donne :

- $m_e = 1,602 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- $e = 9,11 \times 10^{-19} \text{ C}$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,10^9 \text{ (S.I)}$
- $g = 10 \text{ m s}^{-2}$
- $a_o = 0,529 \text{ \AA}$

Correction

On a :

- $P = mg \xrightarrow{\text{A.N}} P \approx 9.10^{-31} \text{ N}$
- $F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_o^2} \xrightarrow{\text{A.N}} F_e \approx 8.10^{-8} \text{ N}$

Donc :

$$\frac{F}{P} \approx 10^{22}$$

Conclusion:

Comme $P \ll F$ alors on retient:

Le poids est très négligeable devant la force de Lorentz

3.1.2 Propriété de la force magnétique

Calculons la puissance de la force magnétique :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_m) = \vec{F}_m \cdot \vec{V} \Rightarrow \mathcal{P}(\vec{F}_m) = q(\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V} = 0$$

Si la particule chargée n'est soumise qu'à cette force magnétique , alors d'après le T.E.C :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \mathcal{P}(\vec{F}_m) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_c = \text{cte}$$

C'est à dire qu'il y a conservation de l'énergie cinétique (i;e conservation de la norme du vecteur vitesse)

Conclusion:

L'action du champ magnétique sur une particule chargée est de dévier sa trajectoire.

3.2 Applications

3.2.1 Mouvement dans un champ électrostatique uniforme dans le vide.

Activité

L'oscilloscope cathodique
D'après CCP/TSI/2014

Première partie :Création et accélération d'un faisceau d'électrons

Un oscilloscope cathodique est constitué d'un canon à électrons dans lequel un faisceau d'électrons est créé et les électrons sont accélérés .

Une cathode, notée C, émet des électrons de vitesse initiale négligeable. Il est rappelé que les électrons ont une charge électrique négative égale à $-e$.

On établit entre la cathode C et une anode, notée A, une différence de potentiel notée $U_{AC} = V_A - V_C > 0$. Les électrons sont ainsi accélérés lors de leur parcours entre C et A. L'anode est constituée d'une plaque métallique percée d'un trou centré en O permettant à une partie du faisceau d'électrons de s'échapper dans la direction horizontale Oz comme le montrent les figures 1 et 2 suivantes.

La distance entre C et A est notée d .

L'espace est rapporté au repère cartésien orthonormé direct ($Oxyz$) associé à la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le point O correspond au centre de l'anode A.

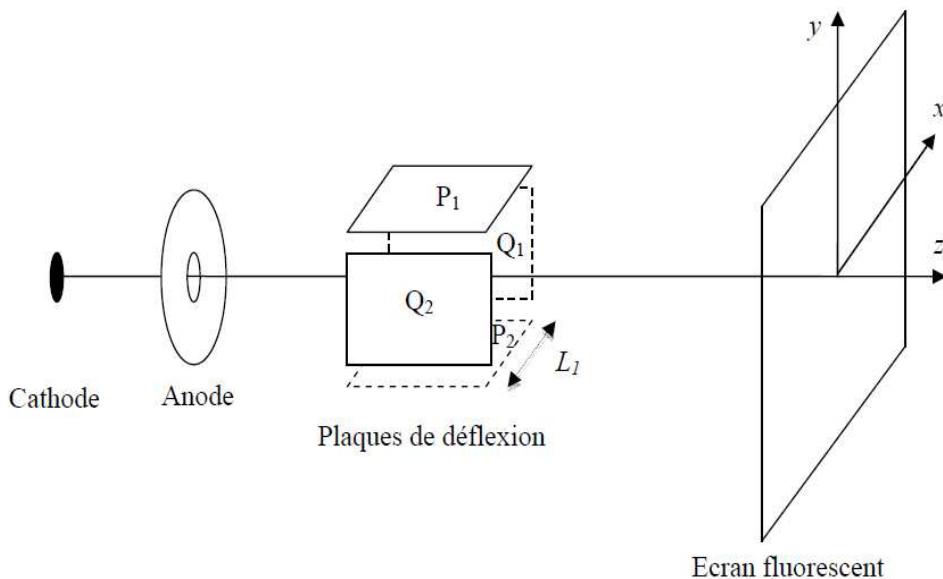


Figure 1 : schéma de l'oscilloscope en perspective

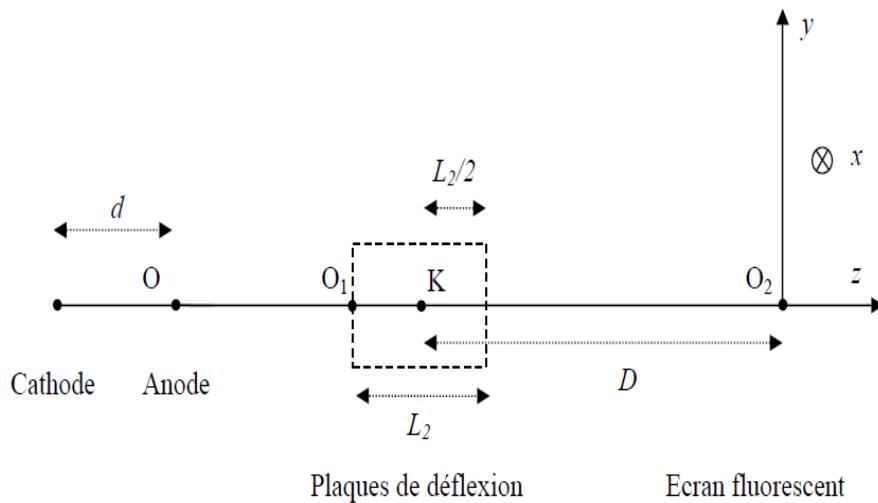


Figure 2 : schéma de l'oscilloscope en coupe dans le plan (yOz)

1 Déterminer, en un point de l'axe des z situé entre la cathode et l'anode, la direction et le sens du champ électrique \vec{E} créé par la tension U_{AC} . On admet que $\|\vec{E}\| = \frac{U_{AC}}{d}$.

2 Déterminer l'expression de la force électrostatique \vec{f} subie par un électron entre C et A en fonction de U_{AC}, d, e et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

3▷ La tension U_{AC} appliquée est de l'ordre de 1kV. La distance d est de l'ordre de 0,1 m.

Le poids des électrons peut-il être négligé devant la force électrostatique précédente ? Justifier quantitativement la réponse.

4▷ En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'expression de la vitesse v_o avec laquelle les électrons atteignent l'anode. Exprimer v_o en fonction de U_{AC} , m et e .

Donner l'ordre de grandeur de la valeur numérique de la vitesse v_o .

Deuxième partie : Dispositif de défexion du faisceau d'électrons

Les électrons produits et accélérés dans le canon à électrons pénètrent en O_1 , avec une vitesse v_o parallèlement à l'axe (O_1z), dans le dispositif de défexion composé de deux paires de plaques parallèles. Les deux plaques P_1 et P_2 sont horizontales et sont soumises à une différence de potentiel $U_Y = V_{P1} - V_{P2}$ et les deux plaques Q_1 et Q_2 sont verticales et soumises à une différence de potentiel $U_X = V_{Q1} - V_{Q2}$.

Les électrons, après passage dans ce système de défexion, poursuivent leur trajectoire jusqu'à frapper un écran fluorescent sur lequel le point d'impact est matérialisé par un spot lumineux.

Les plaques P_1 et P_2 d'une part, et les plaques Q_1 et Q_2 d'autre part, sont symétriques par rapport à l'axe Oz . L'écartement entre les paires de plaques est le même et noté L_1 . Les longueurs des plaques parallèlement à l'axe O_1z sont identiques et égales à la longueur L_2 .

Le mouvement des électrons dans le système de défexion sera étudié dans le repère (O_1xyz), associé à la base orthonormée cartésienne (\vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z).

Remarque : on admet que le champ électrique est nul à l'extérieur du volume délimité par les plaques et que le champ électrique produit par chaque paire de plaques est uniforme et perpendiculaire aux plaques qui le produisent.

Le dispositif est enfermé dans une ampoule scellée, dans laquelle règne un vide poussé.

On néglige le poids des électrons dans cette partie.

Soit K, le centre du système de défexion. Le point K appartient ainsi à l'axe Oz et est situé à la distance $\frac{L_2}{2}$ du point O_1 .

Soit D , la distance entre le centre K du système de défexion et le point O_2 qui correspond au centre de l'écran fluorescent.

Les points et les distances définis dans cette partie sont représentés sur les figures 1 et 2.

5▷ On établit entre les plaques horizontales P_1 et P_2 une différence de potentiel $U_Y = V_{P1} - V_{P2}$ constante et positive, et on applique une différence de potentiel nulle entre les plaques Q_1 et Q_2 .

Quel est l'effet de la différence de potentiel U_Y sur le mouvement des électrons ?

Établir l'expression vectorielle de la force \vec{f}' qui agit sur un électron situé entre les plaques P_1 et P_2 en fonction de e, L_1, U_Y et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

6▷ Par application du principe fondamental de la dynamique, établir l'expression vectorielle de l'accélération \vec{a} d'un électron dans le repère (O_1xyz) en fonction de m_e, e, L_1, U_Y et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

7▷ En projetant la relation vectorielle précédente, déterminer les équations différentielles vérifiées par les coordonnées d'un électron.

En déduire, par intégration, les équations horaires relatives au mouvement d'un électron dans le repère (O_1xyz) .

Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire d'un électron dans le repère (O_1xyz) a pour expression :

$$y = \frac{eU_Y}{2L_1m_e v_o^2}$$

8▷ Trajectoire d'un électron

8.1▷ Déterminer les coordonnées X_E et Y_E d'un électron lorsqu'il sort du système de déflexion, c'est -à-dire, lorsque son abscisse z est égale à L_2 dans le repère (O_1xyz) .

8.2▷ Calculer la pente p de la tangente à la courbe, à la sortie du système de déflexion.

8.3▷ Justifier le fait qu'après être sorti du système de déflexion, la trajectoire d'un électron est une droite.

8.4▷ Sachant que la trajectoire d'un électron entre la sortie du système de déflexion et l'écran fluorescent est une droite de pente p passant le point E , déterminer l'équation de cette droite.

8.5▷ Montrer que les coordonnées du point d'impact S (spot) des électrons sur l'écran sont données par les expressions :

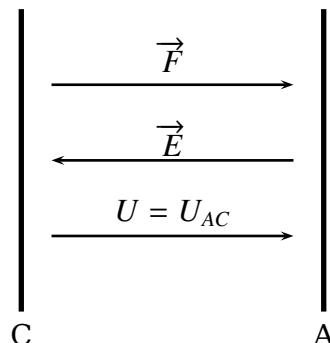
$$X_s = 0 \quad \text{et} \quad Y_s = \frac{eDL_2U_Y}{L_1m_e v_o^2}$$

8.6▷ Quel type de relation mathématique a-t-on entre Y_s et U_Y ? Commenter ce résultat.

Correction

Première partie :Création et accélération d'un faisceau d'électrons

1▷ Le champ \vec{E} entre la cathode et l'anode :



On a $U = U_{AC} > 0$ et puisque le champ \vec{E} se dirige toujours vers les potentiels décroissant alors \vec{E} se dirige de A → C c'est à dire

$$\vec{E} = E_z \vec{e}_z \implies \vec{E} = -\frac{U_{AC}}{d} \vec{e}_z$$

2▷ La force

$$\vec{f} = q\vec{E} \implies \vec{f} = -e\vec{E} = e\frac{U_{AC}}{d} \vec{e}_z$$

3▷ l'influence du poids :

- $P = m_e g \xrightarrow{\text{A.N}} P = 9,1 \times 10^{-30} \text{ N}$
- $f = e\frac{U_{AC}}{d} \xrightarrow{\text{A.N}} f = 1,610^{-15} \text{ N}$

On conclut que le poids est négligeable puisque $\frac{f}{P} \simeq 10^{15}$

4▷ L'expression de la vitesse v_o

D'après le TEC on a : $\Delta E_c = W(\vec{f})$ donc

$$\frac{1}{2}m_e v_o^2 = eU_{AC} \implies v_o = \sqrt{\frac{2eU_{AC}}{m_e}} \xrightarrow{\text{A.N}} v_o = 1,87 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$$

Deuxième partie : Dispositif de déflexion du faisceau d'électrons

5▷ Comme $U_y > 0$ alors l'effet de cette différence de potentiel est la déviation du faisceau dans le plan (yOz).

La force exercée

$$\vec{f}_y = e\frac{U}{L_1} \vec{e}_y$$

6▷ La R.F.D donne :

$$\vec{f}_y = m\vec{a} \implies \vec{a} = \frac{eU_y}{mL_1} \vec{e}_y$$

7▷ L'équation de la trajectoire :

- Les composantes de l'accélération et de la vitesse :

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{eU_y}{mL_1} \\ a_z = 0 \end{cases} \implies \vec{V} = \begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = \frac{eU_y}{mL_1} t \\ V_z = v_o t \end{cases}$$

- les composantes du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{eU_y}{2mL_1} t^2 \\ z = v_o t \end{cases}$$

► En éliminant le temps entre y et z on obtient

$$y = \frac{eU_y}{mL_1v_o^2} z^2$$

C'est l'équation d'une parabole

8▷ Trajectoire de l'électron :

8.1▷ A la sortie au point E on a : $z_E = L_2$ donc

$$\overrightarrow{OE} = \begin{cases} X_E = 0 \\ Y_E = \frac{eU_y}{2mL_1v_o^2} L_2^2 \\ Z_E = L_2 \end{cases}$$

8.2▷ La pente p de la tangente au point E :

$$p = \left. \frac{dy}{dz} \right|_E \implies p = \frac{eU_y L_2}{L_1 m v_o^2}$$

8.3▷ Le poids est négligeable ainsi $\vec{E} = \vec{0}$ donc la résultante de force est nulle ce qui donne (principe d'inertie) que la vitesse est constante $\vec{V} = \vec{cte}$

8.4▷ On pose $y = pz + y_o$ l'équation de la tangente au point E.
Puisque E appartient à cette droite alors $y_E = pz_E + y_o$ donc

$$y_o = -\frac{eU_y L_2^2}{2L_1 m v_o^2}$$

ce qui donne

$$y = \frac{eU_y L_2}{L_1 m v_o^2} \left(z - \frac{L_2}{2} \right)$$

8.5▷ Les coordonnées du point S.

Au point S on a $z_S = D + \frac{L_2}{2}$ donc

$$\overrightarrow{O_1S} = \begin{cases} X_S = 0 \\ Y_S = \frac{eU_y L_2 D}{mL_1 v_o^2} \\ Z_S = D + \frac{L_2}{2} \end{cases}$$

9▷ Puisque $Y_S = \alpha U_y$ les deux grandeurs sont proportionnelles donc par étalonnage si on mesure Y_S on peut remonter à la valeur U_y . Si on pose $S_v = \frac{1}{\alpha}$; S_v représente la sensibilité verticale de l'oscilloscope.

3.2.2 Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme dans le vide.

D'après concours centrale TSI 2010

On s'intéresse à l'étude du confinement d'un électron [de masse (m) et de charge ($-e$)] dans une petite région de l'espace à l'aide d'un champ électromagnétique. L'électron se déplace dans le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$, supposé galiléen ; on appelle respectivement \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z les vecteurs unitaires des axes Ox , Oy et Oz .

L'électron, se déplaçant dans le vide, est soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme et permanent (indépendant du temps). Le champ magnétique \vec{B} est colinéaire à Oz : $\vec{B} = B \vec{e}_z$ ($B > 0$). On pose $\omega_c = \frac{eB}{m}$

À l'instant initial, l'électron se trouve en O avec la vitesse $\vec{v}_o = v_{ox} \vec{e}_x + v_{oz} \vec{e}_z$ (v_{ox} et v_{oz} désignent des constantes positives).

1 Déterminer la coordonnée $z(t)$ de l'électron à l'instant t .

2 On étudie la projection du mouvement de l'électron dans le plan Oxy.

2.1 Déterminer les composantes v_x et v_y de la vitesse de l'électron en fonction de v_{ox} , ω_c et du temps t .

2.2 En déduire les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de l'électron à l'instant t .

2.3 Montrer que la projection de la trajectoire de l'électron dans le plan est un cercle Γ de centre H et de rayon r_H . Déterminer les coordonnées x_H et y_H de H, le rayon r_H et la fréquence de révolution f_c de l'électron sur ce cercle en fonction de v_{ox} et ω_c . Tracer, avec soin, le cercle Γ dans le plan Oxy. Préciser en particulier le sens de parcours de l'électron sur Γ .

3 Application numérique : calculer la fréquence f_c pour $B = 1,0\text{ T}$.

4 Tracer l'allure de la trajectoire de l'électron dans l'espace. L'électron est-il confiné au voisinage de O ?

Correction

1 La coordonnée $z(t)$ de l'électron à l'instant t :

Par application de la R.F.D qu'on projette sur \vec{e}_z on obtient :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -e(\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = 0$$

par conséquent

$$z(t) = V_{oz}t$$

2 Le mouvement de l'électron dans le plan Oxy :

2.1 Les composantes v_x et v_y de la vitesse de l'électron :

Projetons la R.F.D :

$$m \vec{a} = -e \vec{V} \wedge \vec{B} \implies \begin{cases} \ddot{x} + \omega_c \dot{y} = 0 & (E1) \\ \ddot{y} - \omega_c \dot{x} = 0 & (E2) \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

L'équation (E1) s'écrit $\dot{V}_x + \omega_c V_y = 0$ ainsi (E2) s'écrit $\dot{V}_y - \omega_c V_x = 0$ Ce qui donne

$$\ddot{V}_x + \omega_c^2 V_x = 0 \quad (E'1) \quad ; \quad \ddot{V}_y + \omega_c^2 V_y = 0 \quad (E'2)$$

- 2.2▷** Les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de l'électron à l'instant t :
- par intégration des équations (E'1) et (E'2) on obtient :

$$V_x = V_{ox} \cos \omega_c t \quad ; \quad V_y = V_{ox} \sin \omega_c t$$

- par intégration on obtient

$$x = \frac{V_{ox}}{\omega_c} \sin \omega_c t \quad ; \quad y = \frac{V_{ox}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t)$$

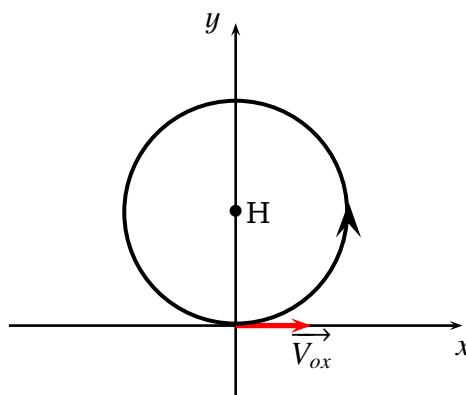
- 2.3▷** La projection de la trajectoire de l'électron dans le plan est un cercle puisque

$$x^2 + \left(y - \frac{V_{ox}}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{V_{ox}}{\omega_c}\right)^2$$

- Les coordonnées de H : $(x_H = 0, y_H = \frac{V_{ox}}{\omega_c})$
- Le rayon $r_H = \frac{V_{ox}}{\omega_c}$
- La fréquence de révolution f_c de l'électron :

$$f_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

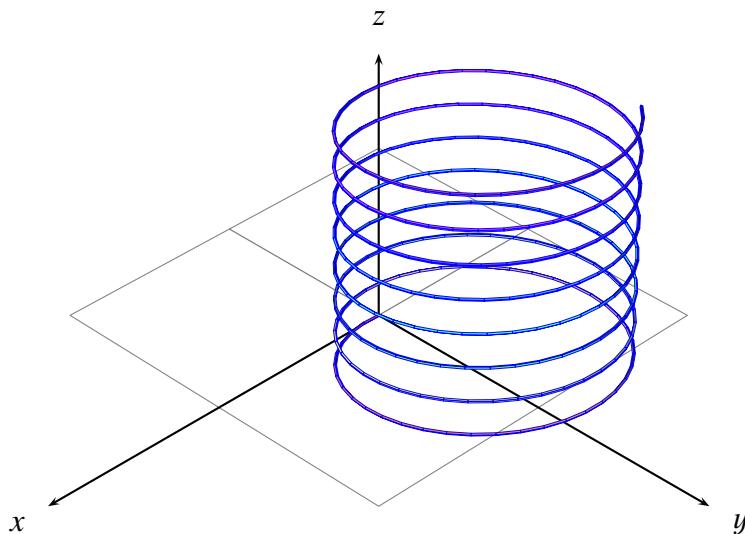
- Le tracé du cercle Γ dans le plan Oxy et le sens de parcours de l'électron sur Γ .



3▷ Application numérique :

$$f_c = \frac{2\pi}{\omega_c} \longrightarrow f_c = 2.80 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

4▷ L'allure de la trajectoire de l'électron dans l'espace :



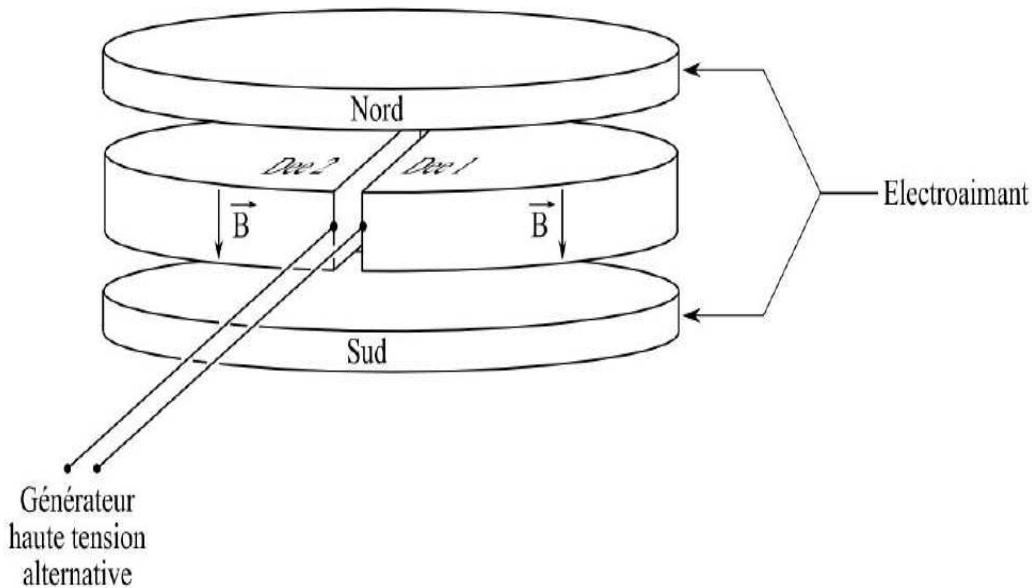
L'électron n'est pas confiné au voisinage de O puisque $z(t)$ diverge.

3.2.3 Mouvement d'un proton dans un cyclotron

D'après CONCOURS COMMUN 2010
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Un cyclotron est un accélérateur de particules qui utilise l'action combinée d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{B} afin d'accélérer des particules chargées. Dans le cadre du traitement de certains cancers crâniens et oculaires, notamment chez les enfants, la radiothérapie classique est avantageusement remplacée par la protonthérapie (envoi de protons rapides sur les cellules cancéreuses en vue de les détruire) qui minimise les dégâts occasionnés aux tissus biologiques entourant la tumeur. Les protons à envoyer dans la tumeur sont accélérés à l'aide d'un cyclotron. En France, il existe deux principaux centres utilisant cette technique : Nice (protons de 65 MeV) et Orsay (protons de 200 MeV). On va ici s'intéresser au principe d'un cyclotron qui pourrait être utilisé dans ce cadre.

Le cyclotron est constitué de deux demi-cylindres horizontaux de rayon R très légèrement écartés et creux, les « Dees », au sein desquels règne un champ magnétique \vec{B} uniforme et constant d'intensité $B = 1,67$ T. À l'intérieur des Dees, il règne un vide poussé. Entre ces deux Dees une tension haute fréquence de valeur maximale $U = 100$ kV crée un champ E perpendiculaire aux faces en regard des Dees.



Des protons de masse $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg et de charge $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C, animés d'une vitesse horizontale négligeable, sont injectés au point A_o de l'espace séparant les deux Dees. (Voir Annexe)

On rappelle l'expression de la force de Lorentz \vec{F}_L que subit une particule de charge q , animée d'une vitesse \vec{v} lorsqu'elle est placée dans une zone où règne un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Dans toute la suite, la force de Lorentz sera la seule force prise en compte.

A/ Étude du mouvement dans les Dees

1▷ Montrer que le mouvement du proton dans un Dee est uniforme.

2▷ Représenter sur document annexe les vecteurs champ magnétique dans chacun des Dees, les vecteurs vitesse et force de Lorentz aux points M_1 et M_2 .

3▷ Par application de la relation fondamentale de la dynamique, établir le système d'équations différentielles couplées auxquelles satisfont les composantes V_x et V_y de son vecteur vitesse $\vec{v}(t)$. On introduira la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{eB}{m}$.

4▷ Montrer que la trajectoire du proton dans le Dee 1 est un cercle de rayon $R_1 = \frac{V_1}{\omega_c}$

On admet que ce résultat se généralise et que la trajectoire lors de la $n^{\text{ième}}$ traversée d'un Dee sera circulaire uniforme de rayon $R_n = \frac{V_n}{\omega_c}$

5▷ Exprimer, en fonction de R_n la distance d parcourue dans un Dee lors du $n^{\text{ième}}$ demi-tour.

6▷ Montrer que la durée Δt de parcours de la trajectoire dans un Dee est indépendante de la vitesse du proton et donner son expression en fonction de m, e et B .

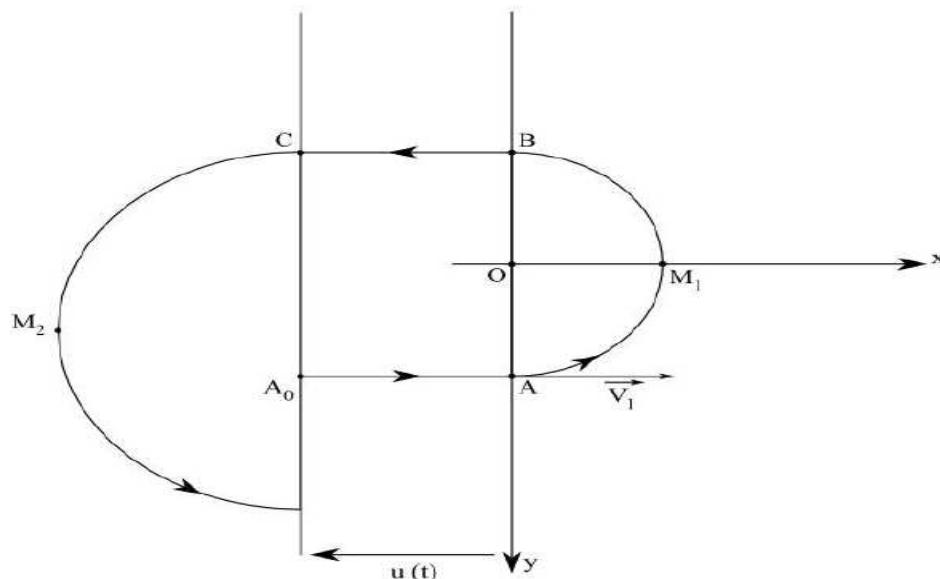
B/ Étude du mouvement entre les Dees

Entre les Dees, qui sont très faiblement écartés, le proton décrit une trajectoire rectiligne et est accéléré.

7 Préciser la direction et le sens que doit avoir le champ électrique \vec{E} entre les Dees quand le proton décrit A_oA , puis BC . Dans chaque cas, quel doit être le signe de la tension u (définie dans l'annexe) pour que les protons soient toujours accélérées quand ils passent entre les Dees ?

8 Le schéma de l'annexe fournit le graphe de la tension $u(t)$. Noter sur ce graphe :
 - le moment où le proton passe de A_o à A , puis lorsqu'il passe de B à C ;
 - la durée δt de parcours de la trajectoire dans chacun des Dees.

9 Donner la relation entre la période T de la tension $u(t)$ et la durée Δt ; en déduire l'expression de la fréquence f de $u(t)$ en fonction de m, e et B .



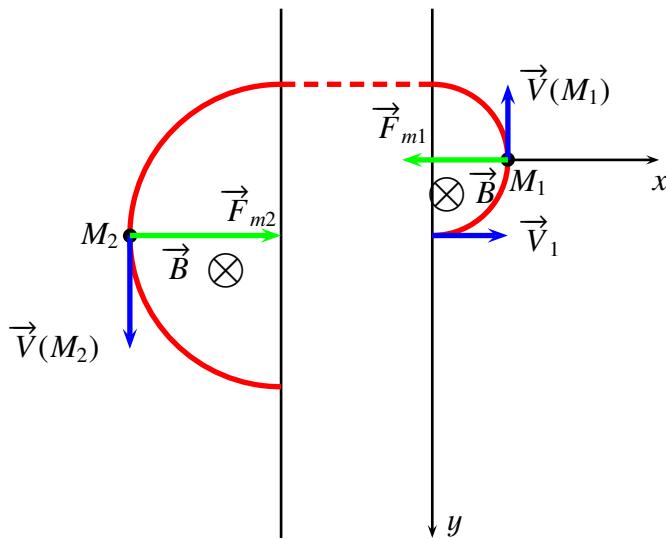
Correction

A/ Étude du mouvement dans les Dees

1 Montrons que le mouvement du proton dans un Dee est uniforme.
 dans un Dee on a : $\vec{E} = \vec{0} \implies \vec{F} = \vec{F}_m = q\vec{V} \wedge \vec{B}$

Et comme $\mathcal{P}(\vec{F}_m) = 0 \implies \mathcal{E}_c = cte$ et par conséquent $\|\vec{V}\| = V = cte$
 D'où le mouvement de la particule se fait à vitesse constante donc le mouvement est uniforme dans le Dee.

2 Représentation des vecteurs :



3▷ Le système d'équations différentielles couplées :
On applique la R.F.D dans \mathcal{R} galiléen on obtient :

$$m\vec{a} = \vec{F}_m = q\vec{V} \wedge \vec{B} \implies \begin{cases} m\frac{dV_x}{dt} = qBV_y \\ m\frac{dV_y}{dt} = -qBV_x \\ m\frac{dV_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

En posant $\omega_c = \frac{eB}{m}$ ($q=e$) on obtient :

$$\frac{dV_x}{dt} - \omega_c V_y = 0(1) \quad ; \quad \frac{dV_y}{dt} + \omega_c V_x = 0(2)$$

4▷ La trajectoire du proton :

Par intégration :

(2) $\implies V_y = -\omega_c x + cte$ Avec les C.I $cte = 0$ donc

$$V_y = -\omega_c x \quad (3)$$

Les équations (1) et (3) donnent

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \implies x(t) = a \cos(\omega_c t) + b \sin(\omega_c t)$$

Les C.I $x(t=0) = 0$ et $V_x(t=0) = V_1$ donne $a = 0$ et $b = \frac{V_1}{\omega_c}$

Il en résulte que

$$x(t) = R_1 \sin(\omega_c t) \quad \text{avec} \quad R_1 = \frac{V_1}{\omega_c}$$

L'intégration de l'équation (3) avec $y(t=0) = R_1$ donne

$$y(t) = R_1 \cos(\omega_c t)$$

Il en résulte que

$$x^2 + y^2 = R_1^2$$

D'où la trajectoire est circulaire de rayon R_1 .

5▷ La distance parcourue

$$d = \pi R_n \implies d = \pi \frac{V_n}{\omega_c}$$

6▷ La durée Δt :

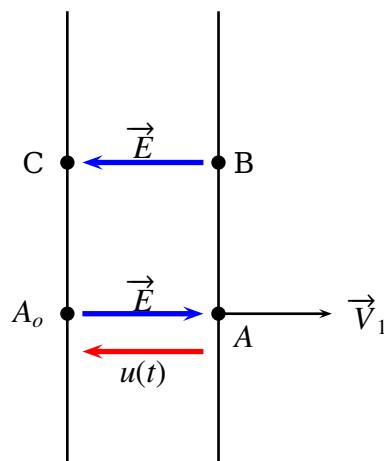
Comme $\Delta t = \frac{1}{2}T \implies \Delta t = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega_c}\right)$ alors

$$\Delta t = \frac{\pi m}{eB}$$

Δt ne dépend pas de la vitesse V_n (mouvement uniforme).

B/ Étude du mouvement entre les Dees

7▷ La direction et le sens que doit avoir le champ électrique \vec{E} :



Puisque la charge est positive donc pour qu'elle s'accélère il faut que :

- Entre A_o et A ; $\vec{E} = E \vec{e}_x \implies u(t) > 0$.
- Entre B et C ; $\vec{E} = -E \vec{e}_x \implies u(t) < 0$.

8▷ Les moments où le proton passe de :

$$A_o(t=0) \longrightarrow A(\delta t) \longrightarrow B(\delta t + \Delta t) \longrightarrow C(2\delta t + \Delta t)$$

9▷ La relation entre la période T de la tension $u(t)$ et la durée Δt :

Comme : $\frac{T}{2} = \delta t + \Delta t$ et puisque les Dees sont très faiblement écartés alors $\delta t \ll \Delta t$ donc

$$T = 2\Delta t \implies T = \frac{2\pi m}{eB}$$

L'expression de la fréquence f de $u(t)$:

$$f = \frac{1}{T} \implies f = \frac{eB}{2\pi m}$$

3.2.4 Rayonnement d'une particule chargée

D'après CCP PC SESSION 2014

On suppose que la vitesse des particules chargées est très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide, ce qui revient à négliger toute correction relativiste. Les effets de la gravitation seront négligés.

Données :

- La charge électrique élémentaire vaut $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$.
- La vitesse de la lumière dans le vide vaut $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
- La perméabilité et la permittivité du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ F m}^{-1}$.

A/ Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

1 On considère un référentiel \mathcal{R} galiléen muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Une particule chargée de charge q positive et de masse m pénètre avec un vecteur vitesse $\vec{V}_o = V_o \vec{e}_x$ au point O de coordonnées $(0,0,0)$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$ perpendiculaire à \vec{V}_o (Figure 1). Montrer que cette particule décrit, à vitesse constante, une trajectoire plane et circulaire de rayon $R = \frac{mV_o}{qB}$. Pour cela, vous pourrez, notamment, introduire la quantité complexe $\underline{u}(t) = x(t) + jy(t)$.

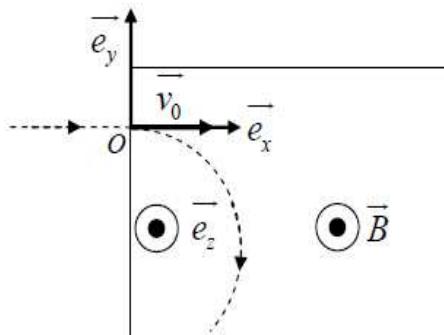


Figure 1 : trajectoire d'une particule de charge q positive dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme

2 pour séparer les deux isotopes naturels de l'Uranium 238 et l'Uranium 235, il avait été envisagé d'utiliser un spectrographe de masse. Cet appareil comporte trois parties, représentées en figure 2, où règne un vide poussé. les atomes d'uranium sont ionisés dans une chambre d'ionisation en ion U^+ (de charge électrique $q(U^+) = e$) d'où ils sortent par la fente F_1 avec une vitesse négligeable. Ces ions sont accélérés par un champ électrostatique uniforme imposé par une tension $W = V_{p_2} - V_{p_1}$ entre deux plaques P_1 et P_2 . Enfin, les ions pénètrent dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique \vec{B} ($B=0,1 \text{ T}$) perpendiculaire au plan de la figure. Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayon R_1 et R_2 et parviennent dans deux collecteurs C_1 et C_2 . Calculer la tension W pour que la distance entre les collecteurs soit égale à $d = 2 \text{ cm}$. Les masses de l'uranium 235 et de l'uranium 238 sont $m_{^{235}U} = 235 \text{ u.m.a}$ et $m_{^{238}U} = 238 \text{ u.m.a}$.

Une unité de masse atomique (u.m.a) vaut : $1 \text{ u.m.a} \simeq 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

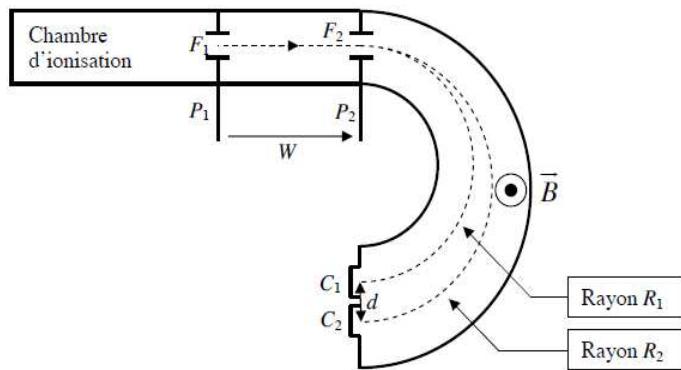


Figure 2 : schéma de principe du spectrographe de masse

B/ Le cyclotron

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 dénommés dees et séparés par un intervalle étroit. Un champ magnétique \vec{B} ($B=0,1$ T) règne à l'intérieur des dees, sa direction est parallèle à l'axe de ces demi-cylindres. Un champ électrostatique variable \vec{E} peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les dees en appliquant entre les dees une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ qui atteint sa valeur maximale $U_m = 10^5$ V lorsque le proton traverse cet espace. Les protons de masse $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg et de charge $q_p = e$, sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. Dans chaque dee, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon croissant. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est $R_s = 50$ cm.

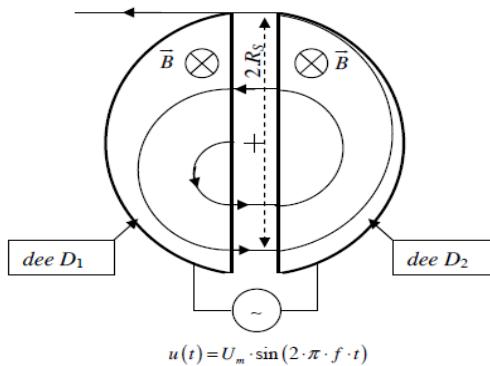


Figure 3 : schéma de principe du cyclotron

3▷ Donner l'expression littérale de la durée $T_{1/2}$ mise par un proton pour effectuer un demi-tour en fonction de m_p , e et B . Qu'en déduisez-vous ?

4▷ Justifier le choix d'une tension $u(t)$ alternative sinusoïdale.

5▷ En déduire l'expression, puis la valeur de la fréquence f de la tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi f t)$ pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée. On néglige le temps de parcours d'un dee à l'autre.

6▷ Déterminer l'expression, puis la valeur de l'énergie cinétique E_{CS} des protons à la sortie du cyclotron.

7▷ déterminer l'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de : e, R_s, B, m_p et U_m . Effectuer l'application numérique.

8▷ Puissance rayonnée.

Pour une particule non relativiste, toute particule chargée de charge q et d'accélération a rayonne une puissance P_r , donnée par la formule de Larmor : $P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$. On rappelle que c est la vitesse de la lumière dans le vide.

8.1▷ Montrer qu'une particule chargée de charge q , de vitesse v , qui décrit une trajectoire circulaire de rayon R , rayonne une puissance P_r , de la forme : $P_r = \alpha v^4$. Exprimer le coefficient α en fonction de q, c, μ_0 et R .

8.2▷ Calculer l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon $R_s = 50$ cm. Conclure.

Correction**A/ Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme**

1▷ Montrons que la trajectoire est plane et circulaire :

R.F.D donne :

$$\vec{m}\vec{a} = \vec{F}_m = q\vec{V} \wedge \vec{B} \implies \begin{cases} \ddot{x} - \omega_c \dot{y} = 0 & (1) \\ \ddot{y} + \omega_c \dot{x} = 0 & (2) \\ \frac{dV_z}{dt} = 0 & (3) \end{cases}$$

- L'équation (3) vu les C.I : $z(t) = 0$ donc le mouvement est plan.
- (1)+j(2) donne

$$\ddot{u} - j\omega_c \dot{u} = 0$$

C'est l'équation différentielle vérifiée par la variable complexe u .

Par intégration on obtient

$$\dot{u} - j\omega_c u = cte$$

Vu les C.I : $cte = V_o$ donc

$$\dot{u} - j\omega_c u = V_o$$

La solution de cette équation différentielle est

$$u(t) = ae^{j\omega_c t} + j\frac{V_o}{\omega_c}$$

Les C.I : $(u(t=0) = x(t=0) + jy(t=0) = 0)$ donnent $a = -j\frac{V_o}{\omega_c}$ et par conséquent :

$$x(t) = \Re(u) \implies x(t) = \frac{V_o}{\omega_c} \sin \omega_c t \quad ; \quad y(t) = \Im(u) \implies y(t) = \frac{V_o}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t)$$

Donc la trajectoire est un cercle de rayon $R = \frac{V_o}{\omega_c}$ et de centre O(0,R) puisque

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

avec $R = \frac{V_o}{\omega_c} = \frac{mV_o}{qB}$

2▷ Puisque le rayon de la trajectoire augmente lorsque la masse augmente alors ; on a :

$$d = 2(R_2 - R_1)$$

Avec $R_2 = R(U(238))$ et $R_1 = R(U(235))$ donc

$$d = 2\left(\frac{m_2 V_{o2}}{q_2 B} - \frac{m_1 V_{o1}}{q_1 B}\right)$$

Et puisque $q_1 = q_2 = e$ et d'après le T.E.C (théorème de l'énergie cinétique) entre F_1 et F_2 (phase d'accélération) on a :

$$m_2 V_{o2} = 2eW \quad (\text{et}) \quad m_1 V_{o1} = 2eW$$

N.B : la vitesse dépend de la masse dans la phase d'accélération.

Il en résulte que

$$W = \frac{eB^2 d^2}{8(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})^2} \xrightarrow{\text{A.N}} W = 5065 \text{ V}$$

B/ Le cyclotron

3▷ L'expression littérale de la durée $T_{1/2}$:

On a : $T_{1/2} = \frac{2\pi}{\omega_c}$ comme $\omega_c = \frac{eB}{m}$ donc

$$T_{1/2} = \frac{2\pi m}{eB}$$

Conclusion :

- $T_{1/2}$ est proportionnelle à la masse.
- $T_{1/2}$ est indépendante de la vitesse.

4▷ Justification du choix d'une tension $u(t)$ alternative sinusoïdale :

Pour accélérer le proton à chaque fois qu'il traverse l'espace entre les deux Dee, il faut que le champ \vec{E} change de sens donc la tension doit être alternative périodique.

Grâce au théorème de Fourier alors le choix d'une tension alternative sinusoïdale .

5▷ L'expression de la fréquence f de la tension alternative sinusoïdale :

Le temps de parcours d'un dee à l'autre est négligeable donc :

$$T = 2T_{1/2} \implies f = \frac{1}{T} = \frac{eB}{4\pi m}$$

6▷ L'expression de la valeur de l'énergie cinétique E_{CS} des protons à la sortie du cyclotron.

On a : $\mathcal{E}_c(s) = \frac{1}{2}m_p V^2$ et comme $V = R\omega_c$ alors

$$\mathcal{E}_c(s) = \frac{1}{2}m_p(R_s\omega_c)^2$$

Sachant que $\omega_c = \frac{eB}{m_p}$ alors

$$\mathcal{E}_c(s) = \frac{1}{2} \frac{(R_s e B)^2}{m_p} \xrightarrow{\text{A.N}} \mathcal{E}_c(s) = 1,916 * 10^{-14} \text{ J}$$

7▷ L'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie.

Par application du T.E.C on a :

- $V_1^2 = \frac{2eU}{m}$
- $V_2^2 = V_1^2 + \frac{2eU}{m} \implies V_2^2 = 2(\frac{2eU}{m})$

Donc : $V_n^2 = n(\frac{2eU}{m})$ avec n le nombre de passage du proton entre les deux Dees.

Comme le nombre de tours N représente $\frac{n}{2}$ alors

$$N = \frac{R_s^2 e B^2}{4m_p U_m} \xrightarrow{\text{A.N}} N = 0,5$$

8▷ Puissance rayonnée.

8.1▷ La puissance P_r rayonnée :

On a : $P_r = \frac{\mu_o e^2}{6\pi c} a^2$ et puisque le mouvement circulaire et uniforme alors $\vec{a} = \frac{V^2}{R} \vec{N}$ ce qui permet d'écrire

$$P_r = \frac{\mu_o q^2}{6\pi c} \left(\frac{V^2}{R} \right)^2 \implies P_r = \frac{\mu_o e^2}{6\pi c R^2} V^4 \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{\mu_o e^2}{6\pi c R^2}$$

8.2▷ L'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire :

On a : $E_r = P_r \frac{T}{2}$ donc

$$E_r = \frac{m \mu_o e}{6BcR^2} V^4 \implies E_r = \frac{2\mu_o e}{3cBmR_s^2} \mathcal{E}_c^2(s) \xrightarrow{\text{A.N}} E_r = 3,927 \times 10^{-26} \text{ J}$$

Conclusion:

$$\frac{E_r}{\mathcal{E}_c(s)} = 2 * 10^{-12} \implies E_r \ll \mathcal{E}_c(s)$$

L'énergie rayonnée est très négligeable devant l'énergie cinétique

3.2.5 Mouvement dans un champ électromagnétique uniforme dans le vide.

Une particule électrique ponctuelle M de masse m et portant une charge q > 0 mobile dans une région d'espace où règne un champ :

- Électrique uniforme $\vec{E} = E \vec{e}_y$, $E > 0$
- Magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$, $B > 0$

La charge est émise sans vitesse initiale au point O à $t = 0$.

1▷ Vérifier que le poids est négligeable. Pour cela comparer la norme du poids d'un électron de masse $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg et de charge $e = -6,11 \cdot 10^{-19}$ C et la force de Coulomb. On donne $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $E = 10 \text{ V.m}^{-1}$

2▷

2.1▷ Par application de la RFD trouver un système de trois équations différentielles scalaires vérifiées par x, y et z .

2.2▷ Résoudre ce système et en déduire $x(t), y(t)$ et $z(t)$ on posera : $\omega = \frac{qB}{m}$

2.3▷ Représenter la trajectoire .

2.4▷ En déduire le rayon de courbure en fonction des données.

3▷ On suppose maintenant que la particule possède une vitesse initiale : $\vec{V}_o = V_o \vec{e}_x$.

3.1▷ Retrouver : $x(t), y(t)$.

3.2▷ Pour quelle valeur particulière v_{oc} de v_o , la charge décrit un mouvement rectiligne confondu avec Ox . Exprimer v_{oc} en fonction de E et B .

3.3▷ Que peut-on dire dans ce cas sur la force exercée sur la charge.

3.4▷ Représenter la trajectoire de la particule dans le cas où $v_o = 2v_{oc}$.

Correction

1▷

$$\begin{aligned} \mathbf{1.1} \triangleright m\vec{a} &= q(\vec{E} + \vec{V}_i \wedge \vec{B}) \implies \begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = q(E - \dot{x}B) \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

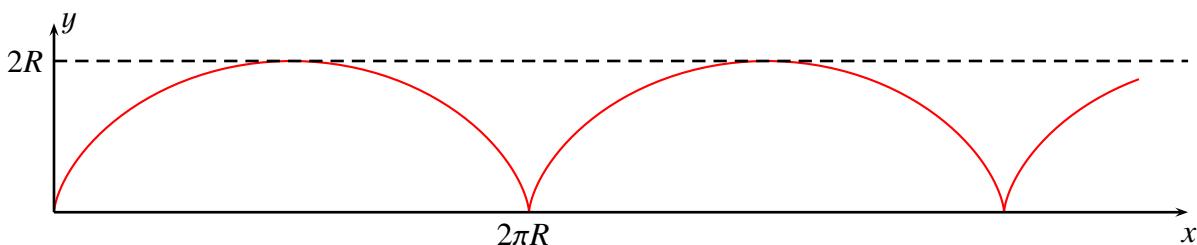
1.2▷ Par intégration on trouve :

$$x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin \omega t)$$

$$y = \frac{E}{B\omega}(1 - \cos \omega t)$$

$$z = 0 \quad \text{mouvement plan}$$

1.3▷ Représentation graphique (on prend $\frac{E}{B\omega} = 1$)



1.4▷ Le rayon de courbure est

$$\rho_c = \frac{4E}{B\omega} |\sin(\frac{\omega t}{2})|$$

2▷

2.1▷ $\vec{V}_i = v_o \vec{e}_x$

2.1.1△

$$x = \frac{E}{B\omega} (\omega t - \sin \omega t) + \frac{v_o}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$y = \left(\frac{E}{B} - v_o \right) \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$

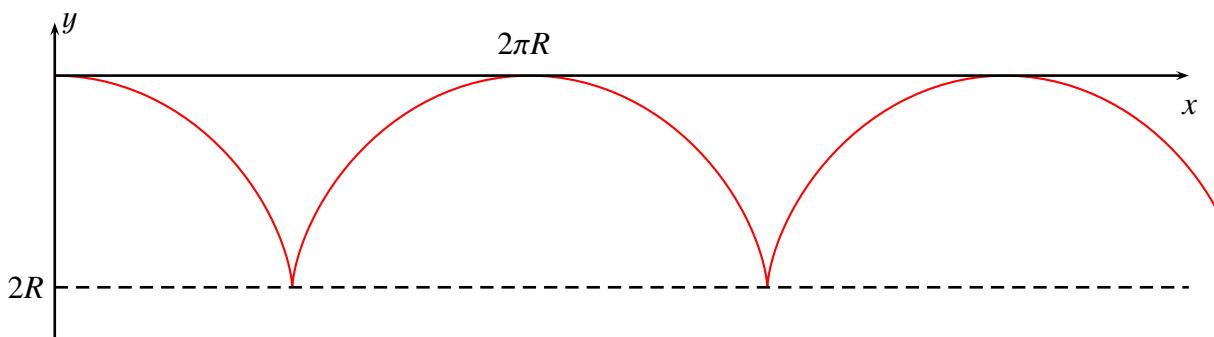
2.1.2△ Le mouvement est rectiligne confondu avec ox : $\forall t \implies$

$$v_{oc} = \frac{E}{B}$$

2.1.3△ $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V}_i \wedge \vec{B}) = \vec{0}$ la force magnétique compense la force électrique

2.1.4△ Représentation graphique avec $v = 2v_{oc}$

On rappelle que dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} x = \frac{E}{B\omega} (\omega t + \sin \omega t) \\ y = -\frac{E}{B\omega} (1 - \cos \omega t) \end{cases}$$


Remarque

Lorsque la vitesse de la particule chargée n'est plus négligeable devant la célérité de la lumière alors la mécanique relativiste montre que :

- l'énergie cinétique de la particule chargée s'écrit :

$$\mathcal{E}_c = (\gamma - 1)mc^2$$

- la quantité de mouvement :

$$P = \gamma mv$$

Avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ (facteur de Lorentz) et $\beta = \frac{v}{c}$

3.3 Mouvement d'une particule chargée dans un métal

3.3.1 Modèle de DRUDE

On rappelle que les électrons dans un atome se répartissent en :

- des électrons du cœur fortement liés au noyau.
- des électrons de valence libre à se déplacer dans un métal (nommés les électrons de conduction)

Hypothèses de Drude:

► Le noyau de l'atome ainsi les électrons du cœur sont fixes dans le référentiel lié au conducteur.

► Les électrons de conduction (formant un gaz d'électrons) se déplacent librement dans le conducteur d'une façon isotrope.

► Les collisions des électrons de conduction avec les ions sont instantanées, par contre les électrons de conduction sont indépendants.

Soit τ la durée moyenne entre deux collisions consécutives d'un porteur de charge.

Entre l'instant t et $t + dt$ la probabilité pour qu'une particule entre en collision est $\frac{dt}{\tau}$
 τ est dit temps de collision ou temps de relaxation.

Soient $\vec{p}_i = m_i \vec{V}_i$ la quantité de mouvement de la particule i et

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

la quantité de mouvement totale ; donc

$$\vec{p}_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

La quantité de mouvement moyenne d'une particule.

Sachant que :

$$\overrightarrow{p_m}(t + dt) = \frac{dt}{\tau} \overrightarrow{p_{mc}}(t) + (1 - \frac{dt}{\tau}) \overrightarrow{p_m}(t)$$

Et comme après collision le champs des vitesses est isotropes alors $\overrightarrow{p_{mc}} = \overrightarrow{0}$ (après collision le champ des vitesses est isotrope).

Il en résulte que

$$\overrightarrow{p_m}(t + dt) - \overrightarrow{p_m}(t) = -\frac{dt}{\tau} \overrightarrow{p_m}(t) \implies \frac{\overrightarrow{p_m}(t + dt) - \overrightarrow{p_m}(t)}{dt} = \vec{f} = -\frac{\overrightarrow{p_m}}{\tau}$$

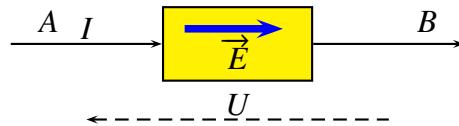
Conclusion

La force de collision des électrons de conduction dans un conducteur est de type frottement visqueux

$$\vec{f}_c = -\frac{m}{\tau} \vec{V}$$

3.3.2 Vecteur densité de courant électrique. Loi d'Ohm locale

Considérons un conducteur AB traversé par un courant continu I du à une différence de potentielle $U = V_A - V_B > 0$



On applique la relation fondamentale de la dynamique sur un porteur de charge de masse m et de charge q dans un référentiel lié au conducteur supposé galiléen :

$$q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{V} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Avec $\frac{m}{\tau} \vec{V}$ la force de collision.

Ce qui donne

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{V} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

La solution de cette équation différentielle est

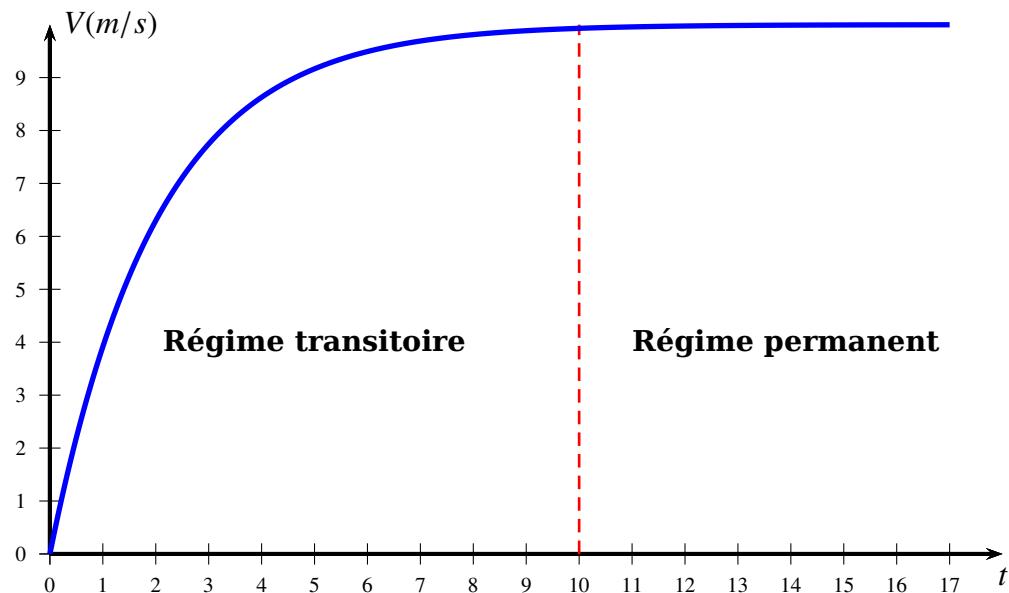
$$\vec{V}(t) = \vec{A} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{q\tau}{m} \vec{E}$$

Supposons qu'à $t = 0$ on a $\vec{V} = \vec{0}$ ce qui donne $\vec{A} = -\frac{q\tau}{m} \vec{E}$.

Il en résulte que

$$\vec{V} = \frac{q}{\lambda} \vec{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

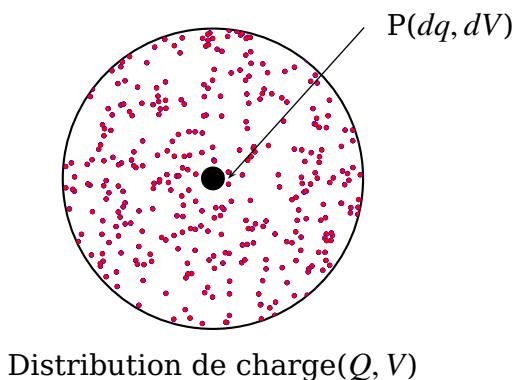
Représentons la norme de la vitesse



En régime permanent on a :

$$\vec{V} = \frac{q\tau}{m} \vec{E}$$

Soit une distribution de charges (D) telle que Q la charge totale et V le volume occupé.



Soit P un point du domaine D délimité par le volume élémentaire dV et contenant la charge élémentaire dq . On définit la densité volumique volumique de charge au point P par

$$\rho_q = \frac{dQ}{dV} = \frac{d(Nq)}{dV} = nq$$

Avec $n = \frac{dN}{dV}$ la densité particulaire de particulaire (nombre de particules par unité de volume) et N le nombre de particules de charges dans le volume V .

On appelle vecteur densité de courant le vecteur

$$\vec{j} = \rho_q \vec{V}$$

Ce qui donne

$$\vec{j} = \frac{\rho_q q \tau}{m} \vec{E} \implies \vec{j} = \frac{nq^2 \tau}{m} \vec{E}$$

On pose

$$\sigma = \gamma = \frac{nq^2 \tau}{m} \quad (\text{S.m}^{-1})$$

conductivité du conducteur

$$\rho_r = \frac{1}{\sigma} \quad (\Omega \cdot \text{m})$$

résistivité du conducteur

Il en résulte que en régime permanent

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

C'est la loi d'Ohm locale

Tableau des valeurs :

Métal	Ag	Cu	Au	Zn	Fe	Pb	Ti	Hg
$\sigma(\text{MS.m}^{-1})$	62,1	58,5	44,2	16,6	10,1	4,7	2,4	1,1

Activité

Quelle est l'ordre de grandeur de τ pour le cuivre.

- On suppose que chaque atome contribue par un seul électron.
- $M(\text{Cu})=63 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$.
- $\rho(\text{Cu})= 8,92 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.
- La constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Correction

$$\tau = \frac{\sigma m M(\text{Cu})}{e^2 \rho(\text{Cu}) N_A} \xrightarrow{\text{A.N}} \tau = 2,5 \times 10^{-14} \text{ s}$$

3.3.3 Résistance électrique d'un conducteur cylindrique

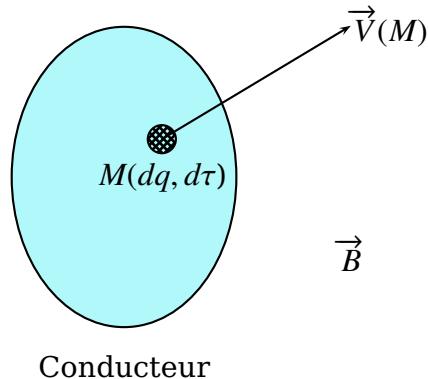
On rappelle que pour un conducteur cylindrique de section S et de longueur L on a la résistance R vaut

$$R = \rho_{res} \frac{L}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}$$

Plus de détail voir cours électromagnétisme

3.4 Force de Laplace

La force de Laplace est la force magnétique qui s'exerce sur un conducteur traversé par un courant dans une région de l'espace où règne un champ magnétique \vec{B} .



L'élément de volume $d\tau$ d'un conducteur subit la force élémentaire de Lorentz :

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B} \implies d\vec{F} = d\vec{C} \wedge \vec{B}$$

La densité volumique des forces de Laplace

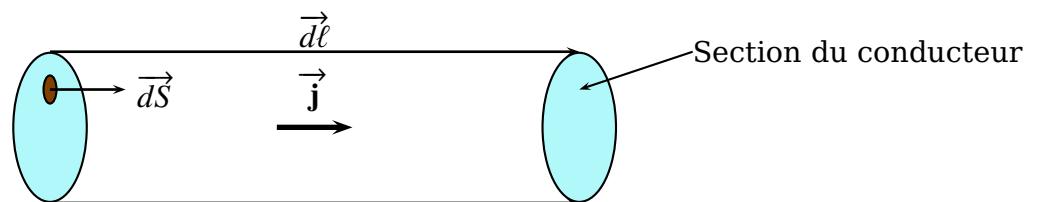
Notations

Élément de courant

$$d\vec{C} = \vec{j} d\tau = \vec{j}_s dS = I d\ell$$

Remarque

1. Cas d'un circuit filiforme traversé par un courant permanent : $d\vec{C} = I d\ell$



Ce qui donne

$$d\vec{F} = \int_{\text{circuit}} I d\ell \wedge \vec{B}$$

Donc pour un conducteur fermé, parcouru par un courant permanent I , la force de Laplace s'écrit

$$\vec{F} = I \oint_{\text{circuit}} d\ell \wedge \vec{B}$$

2. Si ce circuit est parcouru par un courant permanent I et plongé dans un champ magnétique \vec{B} , alors chaque élément de circuit $d\ell = d\vec{OP}$, situé autour de P, subit une force de Laplace : $d\vec{F} = Id\ell \wedge \vec{B}$.

Le moment par rapport à un point A quelconque de la force de Laplace sur l'ensemble du circuit est alors

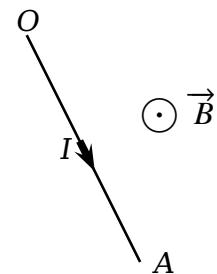
$$\vec{\mathcal{M}}_A = \oint_{\text{circuit}} \vec{AP} \wedge d\vec{F} = \oint_{\text{circuit}} \vec{AP} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau = \oint_{\text{circuit}} \vec{AP} \wedge (Id\ell \wedge \vec{B})$$

Application 1 :

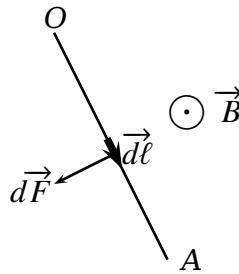
Force de Laplace appliquées à une tige

Une tige OA est parcourue par un courant d'intensité I; elle baigne dans un champ magnétique uniforme \vec{B}_o qui lui est orthogonal (voir figure ci-contre)

1. Déterminer la résultante des forces de Laplace appliquée sur la tige.
2. Calculer le moment en O de ces forces.



Correction



1. Puisque le circuit est filiforme alors $d\vec{F} = \int_O^A Id\ell \wedge \vec{B}$. Sachant que I est permanent et \vec{B}_o uniforme alors

$$\vec{F} = I\vec{OA} \wedge \vec{B}_o$$

2. On a pour tout point M ∈ [O, A] tel que $\vec{OM} = r \vec{u}$:

$$d\vec{\mathcal{M}}_o = \vec{OM} \wedge (Id\vec{OM} \wedge \vec{B}_o)$$

On rappelle que

$$1 \wedge (2 \wedge 3) = 2(1.3) - 3(1.2)$$

Donc : $d\vec{\mathcal{M}}_o = Id\vec{OM}(\vec{OM} \cdot \vec{B}_o) - I\vec{B}_o(\vec{OM} \cdot d\vec{OM})$

Puisque \vec{OM} et \vec{B}_o sont perpendiculaires alors $\vec{OM} \cdot \vec{B}_o = 0$ ainsi

$$\vec{OM} \cdot d\vec{OM} = d\left(\frac{1}{2}\vec{OM}^2 + \text{cte}\right)$$

Ce qui donne que

$$\vec{\mathcal{M}}_o = -\frac{1}{2}I(OA)^2\vec{B}_o$$

Activité

Modèle de Drude

d'après CONCOURS G2E SESSION 2012

Le modèle de Drude (du nom du physicien Paul Drude) est une adaptation effectuée en 1900 de la théorie cinétique des gaz aux électrons des métaux (découvertes 3 ans plus tôt, en 1897 par J.J. Thomson).

Bien que se fondant sur des hypothèses démenties depuis (description purement classique du mouvement des électrons), le modèle permet de rendre compte de plusieurs propriétés des métaux, notamment de leur conductivité électrique et thermique.

Les électrons libres du métal qui contribuent à la conduction sont uniformément répartis et sont animés d'un mouvement d'ensemble par des champs électriques ou magnétiques et freinés dans ce mouvement par des collisions.

On donne pour les électrons :

- masse : $m = 9 \times 10^{-31}$ kg.
- charge : $-e$ avec $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.
- densité volumique : n en électrons par m^3 .

Les électrons sont ici soumis à l'action d'un champ électrique uniforme $\vec{E} = E \vec{e}_x$ et à une force de frottement traduisant les chocs dans le réseau cristallin $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ où τ est la durée moyenne entre deux chocs et $\vec{v} = v \vec{e}_x$ la vitesse d'un électron dans le référentiel lié au métal, suppose galiléen et rapporté au repère cartésien (O, \vec{e}_x).

1 ▷ En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à un électron, montrer que la vitesse de l'électron tend, en régime permanent, vers une constante notée \vec{v}_∞ que l'on précisera.

2 ▷ En déduire le vecteur densité volumique de courant $\vec{j} = j \vec{e}_x$ en fonction de e, n, m, τ et \vec{E} , et montrer que la conductivité électrique du métal s'écrit alors : $\sigma = \frac{n\tau e^2}{m}$.

3 ▷ Le métal considéré est du cuivre de masse volumique $\mu = 8900 \text{ kg.m}^{-3}$ et de masse molaire $M = 63,54 \text{ g mol}^{-1}$. Chaque atome de cuivre libère un électron de conduction.

On donne : $\tau = 2,5 \times 10^{-16} \text{ s}$ et le nombre d'Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23}$.

Calculer la valeur de la conductivité σ du cuivre.

4 ▷ Exprimer, en régime permanent, la puissance par unité de volume de la force électrique, ainsi que celle de la force de frottement, et comparer ces deux puissances.

5 ▷ Exprimer cette puissance volumique dissipée en fonction de σ et E .

6 ▷ On considère un conducteur cylindrique de section droite S et de longueur L , parcouru par un courant d'intensité I circulant le long de l'axe du cylindre.

6.1 ▷ Exprimer j et E en fonction de I, S et σ .

6.2 ▷ Exprimer la puissance dissipée dans ce conducteur par effet Joule et en déduire l'expression de la résistance R du conducteur cylindrique en fonction de L, S et σ .

Correction

1 ► Dans \mathcal{R} galiléen et puisque le poids est négligeable alors :

$$\vec{F} + \vec{f} = m_e \vec{a} \implies m_e \frac{d\vec{V}}{dt} = -e \vec{E} - \frac{m_e}{\tau} \vec{V}$$

Par projection suivant l'axe Ox , on obtient :

$$\boxed{\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau} V = -\frac{e}{m_e} E}$$

En régime permanent $V \rightarrow V_\infty = cte \implies \frac{dV_\infty}{dt} = 0$ ce qui donne

$$\boxed{\vec{V}_\infty = -\frac{e\tau}{m_e} \vec{E}}$$

2 ► Le vecteur densité de courant :

Sachant que $\rho = -ne$ alors

$$\boxed{\vec{j} = \rho \vec{V} \implies \vec{j} = \frac{ne^2 \tau}{m_e} \vec{E}}$$

Par conséquent la conductivité :

$$\boxed{\sigma = \frac{ne^2 \tau}{m_e}}$$

3 ► La valeur numérique de la conductivité du cuivre :

Comme : $n = \frac{N}{V}$ et $\frac{N}{\mathcal{N}_A} = \frac{m(Cu)}{M(Cu)} \implies n = \frac{N}{V} = \mu(Cu) \frac{\mathcal{N}_A}{M(Cu)}$ alors :

$$\boxed{\sigma = \frac{\mu(Cu) \mathcal{N}_A e^2 \tau}{m_e M(Cu)} \quad \xrightarrow{\text{A.N}} \quad \sigma = 6 \times 10^6 \text{ S m}^{-1}}$$

4 ► La puissance par unite de volume de :

► la force électrique :

On a : $d\mathcal{P}_e = d\vec{F}_e \cdot \vec{V}$ et comme $d\vec{F}_e = dq \vec{E}$ et $dq = \rho d\tau \implies dq = -ned\tau$ alors :

$$\frac{d\mathcal{P}_e}{d\tau} = -ne \vec{E} \cdot \vec{V}$$

Or : $\vec{V} = -\frac{e\tau}{m_e} \vec{E}$

Il en résulte que :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{P}_e}{d\tau} = \frac{ne^2 \tau}{m_e} \vec{E}^2}$$

► la force de frottement :

On a : $d\mathcal{P}_J = (\vec{f} \cdot \vec{V}) dN$ et comme $dN = nd\tau$ alors

$$\frac{d\mathcal{P}_J}{d\tau} = -\frac{ne^2\tau}{m_e} \vec{E}^2$$

On remarque que

$$\frac{d\mathcal{P}_e}{d\tau} = -\frac{d\mathcal{P}_J}{d\tau}$$

Conclusion :

En régime permanent la puissance dissipée par effet Joule est compensée par la force électrique

5 ► On a :

$$\frac{d\mathcal{P}_J}{d\tau} = -\frac{ne^2\tau}{m_e} \vec{E}^2 \implies \frac{d\mathcal{P}_J}{d\tau} = -\sigma \vec{E}^2$$

6 ►

6.1 ► Comme $I = jS \implies j = \frac{I}{S}$ et puisque $j = \sigma E$ alors

$$E = \frac{1}{\sigma} \frac{I}{S}$$

6.2 ► On a : $\frac{d\mathcal{P}_J}{d\tau} = -\sigma \vec{E}^2 \implies \frac{d\mathcal{P}_J}{d\tau} = -\frac{1}{\sigma} \frac{I^2}{S^2}$
par intégration, on obtient :

$$\mathcal{P}_J = -\left(\frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}\right) I^2 = -RI^2 < 0$$

donc

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}$$

CHAPITRE 4

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE

4.1 Le moment cinétique ,moment d'une force

4.1.1 Définition du moment cinétique

Définition

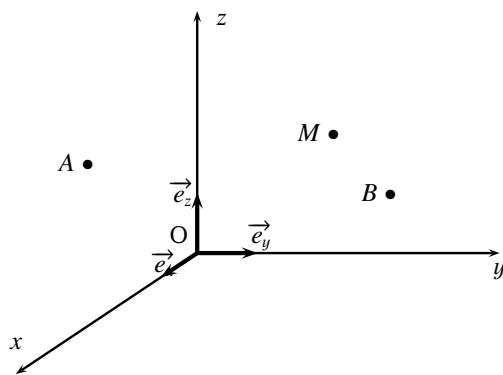
- On appelle moment cinétique d'un point matériel M de masse m animé de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ par rapport à un référentiel \mathcal{R} , en un point A , le vecteur :

$$\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \vec{L}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \quad (\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})$$

N.B Le moment cinétique est un vecteur lié.

4.1.2 Propriété du moment cinétique

Soit \mathcal{R} un référentiel , A et B deux points quelconques et M un point matériel de masse m , de vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$.



On a :

- Le moment cinétique en A : $\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \quad (1).$
- Le moment cinétique en B : $\vec{\sigma}_B(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{BM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \quad (2).$

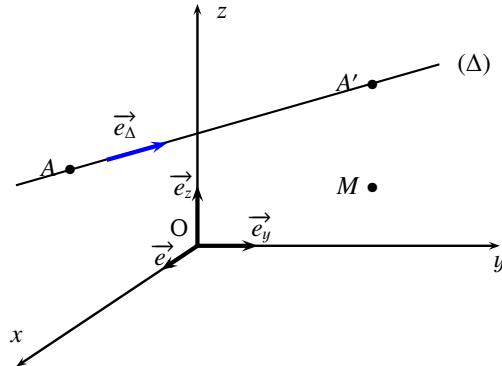
► (2)-(1) donne :

$$\vec{\sigma}_B(M/\mathbf{R}) = \vec{\sigma}_A(M/\mathbf{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R})$$

Conclusion:

On dit que le moment cinétique est un torseur appelé torseur cinétique dont les éléments de réduction sont $\vec{\sigma}_A(M/\mathbf{R})$ et la quantité de mouvement $\vec{P}(M/\mathcal{R}) = m\vec{V}(M/\mathcal{R})$.

Soit Δ une droite et \vec{e}_Δ un vecteur unitaire sur (Δ) .



Définition

On appelle *moment cinétique par rapport à l'axe Δ* la projection du moment cinétique par rapport à l'axe Δ , on le note $\sigma_\Delta = \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_\Delta$

Soit A et A' deux points quelconque sur l'axe (Δ) .

Comme : $\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_{A'} + \overrightarrow{AA'} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R})$

par projection suivant \vec{e}_Δ on obtient :

$$\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_A \cdot \vec{e}_\Delta = \vec{\sigma}_{A'} \cdot \vec{e}_\Delta$$

Conclusion:

Le moment cinétique par rapport à l'axe (Δ) ne dépend pas du point A (sur (Δ))

4.1.3 Définition du moment d'une force

Définition

On appelle moment d'une force en un point A , d'une force \vec{F} appliquée en un point M le vecteur :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{AM} \wedge \vec{F} \quad (m.N)$$

N.B : Le moment d'une force est un vecteur lié.

4.1.4 Propriété du moment d'une force

Soient A et B deux points quelconques de l'espace.
Sachant que :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{AM} \wedge \vec{F} \quad (4.1)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{BM} \wedge \vec{F} \quad (4.2)$$

(1.2)-(1.1) donne

$$\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{BA} \wedge \vec{F}$$

Conclusion:

le moment d'une force est un torseur appelé torseur cinétique dont les éléments de réduction sont $\vec{\mathcal{M}}_A$ et \vec{F}

4.1.5 Théorème du moment cinétique

Soit A un point fixe d'un référentiel \mathcal{R} .
Calculons la dérivée temporelle par rapport au référentiel \mathcal{R} du moment cinétique.

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \frac{d\vec{AM}}{dt} \wedge m\vec{V}(M) + \vec{AM} \wedge m \frac{d\vec{V}(M)}{dt}$$

$$\implies \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \vec{AM} \wedge m\vec{a}(M/\mathcal{R})$$

$$\implies \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \vec{AM} \wedge \Sigma \vec{F}$$

$$\implies \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \Sigma \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$$

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} = \Sigma \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$$

c'est le théorème du moment cinétique avec A un point fixe

Propriété

Théorème du moment cinétique

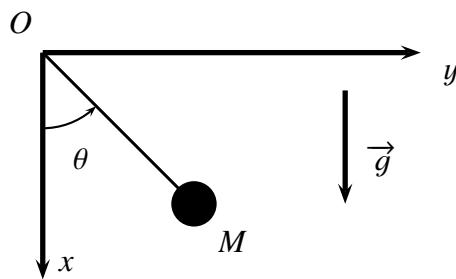
Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , la dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à un point fixe A est égale à la somme des moments des forces extérieures calculés par rapport à A.

Remarque

Souvent on prend A \equiv O origine du repère

4.2 Applications

4.2.1 Pendule simple



On a :

- $\overrightarrow{OM} = l \vec{e}_r \implies \vec{V}(M/\mathcal{R}) = l\dot{\theta} \vec{e}_\theta$
- $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \implies \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = ml^2\dot{\theta} \vec{e}_z$ donc

$$\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}} = ml^2\ddot{\theta} \vec{e}_z$$

- $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{T}) = \vec{0}$
- $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) = -mgl \sin \theta \vec{e}_z$

On tire donc que

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

C'est l'équation pendulaire

Remarque

L'équation pendulaire est une équation différentielle **non linéaire** puisque la fonction $\sin(x)$ est non linéaire ($\sin(a + b) \neq \sin a + \sin b$)

pour les faibles oscillations ($\theta_{max} \leq 15^\circ$) on a : $\sin \theta \approx \theta$ donc l'équation différentielle devient

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Dans ce cas l'équation différentielle devient linéaire, dont la solution s'écrit :

$$\theta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Si on suppose que (Les conditions initiales) : $\theta(t = 0) = \theta_0$ et $V(t = 0) = V_0$ alors :

$$A = \theta_0 \quad \text{et} \quad B = \frac{V_0}{\omega l}$$

Il en résulte que

$$\theta(t) = \theta_o \cos(\omega t) + \frac{V_o}{\omega l} \sin(\omega t)$$

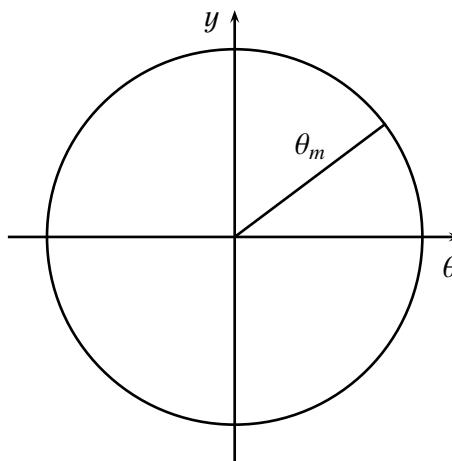
Qu'on peut écrire

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \theta_m = \sqrt{\theta_o^2 + \left(\frac{V_o}{\omega l}\right)^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = -\frac{V_o}{\omega l \theta_o}$$

Si on pose $y = \frac{\dot{\theta}}{\omega}$ alors

$$\theta^2 + y^2 = \theta_m^2$$

C'est l'équation de la trajectoire de phase : cercle de centre l'origine et de rayon θ_m .



4.2.2 Propriétés de la trajectoire d'un satellite artificiel

Un satellite artificiel, S , assimilable à point matériel de masse m , évolue librement à grande distance de la Terre. La Terre est considérée comme un corps immobile, rigoureusement sphérique et homogène, de rayon R , de masse M et de centre O . On désigne par $\vec{r}(t) = \vec{OS}$, le vecteur position du satellite et par \vec{V} son vecteur vitesse. A l'instant initial $t = 0$, le satellite se trouve dans la position \vec{r}_o , animé de la vitesse \vec{V}_o , non radiale. L'influence de la Lune, du Soleil, des autres planètes, ainsi que celle de l'atmosphère sont ignorées.

On étudie la situation pour $t > 0$.

1▷ Donner l'expression vectorielle du champ de force $\vec{F}(r)$ auquel est soumis le satellite.

- On désignera par G la constante de gravitation universelle et par \vec{e}_r le vecteur unitaire radial.

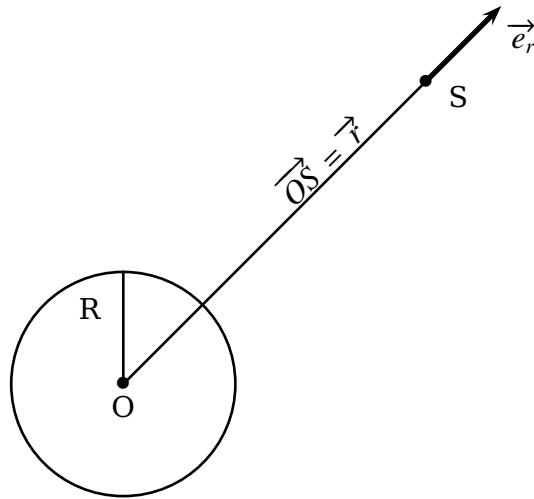
S'agit il d'un champ de force central ?

2▷ Définir le vecteur moment cinétique $\vec{\sigma}_o$ du satellite, par rapport au centre O .

3▷ Montrer que, quel que soit $t \geq 0$, le moment cinétique $\vec{\sigma}_o$ du satellite est constant, égal à une valeur σ_o . Expliciter σ_o .

4▷ Justifier le fait que la trajectoire suivie par le satellite, pour $t \geq 0$, est entièrement contenue dans un plan fixe Π , que l'on précisera.

Correction



1▷ L'expression de la force :

$$\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2} \vec{e}_r$$

Puisque la direction de la force \vec{F} passe toujours par le point O (centre de la terre) alors elle est centrale.

2▷ Le vecteur moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_o = \overrightarrow{OS} \wedge m\vec{V}(S/\mathcal{R})$$

3▷ Appliquons le T.M.C en O centre de la terre (point fixe) :

$$\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) = \overrightarrow{OS} \wedge \vec{F} = \vec{0} \implies \vec{\sigma}_o = \text{cte}$$

4▷ L'expression de σ_o :

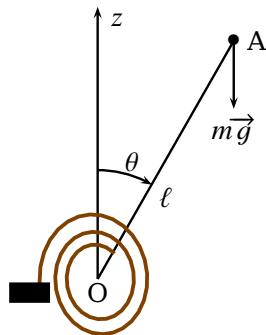
$$\sigma_o = mr_o V_o \sin(\widehat{\vec{r}_o, \vec{V}_o})$$

5▷ Puisque le moment cinétique est constant alors la trajectoire est plane , déterminé par les conditions initiales :

$$\Pi = (\overrightarrow{OS}_o, \vec{V}_o)$$

4.2.3 Pendule de HOLWECK LEIAY

Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable, de longueur $\ell = OA$, articulée en un point fixe O et mobile dans un plan vertical; un ressort spiral exerce sur cette tige un couple de rappel $-C\theta$, où θ désigne l'angle que fait la tige avec la verticale ascendante Oz. On désigne par g l'intensité du champ de pesanteur.



1▷ Le système étant conservatif et à un degré de liberté , former l'expression de l'énergie mécanique totale du système.

L'expression précédente est une constante du mouvement ou intégrale première.

2▷ En déduire l'équation du mouvement.

3▷ Retrouver l'équation différentielle en utilisant le TMC.

4▷ En considérant θ comme petit, à quelle condition la position $\theta = 0$ correspond elle à un équilibre stable d'un oscillateur harmonique ?

5▷ Cette condition étant supposée réalisée, calculer la période T des petites oscillations que l'on écrira sous la forme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{A - g}}$$

en donnant l'expression de A.

6▷ Calculer la variation relative de la période $\frac{\Delta T}{T}$ correspondant à une petite variation g de l'intensité du champ de pesanteur. Montrer que cet appareil peut être rendu plus sensible qu'un pendule simple, dont on appellera $\frac{\Delta T_0}{T_0}$ la précision sur la mesure de la période T_0 des petites oscillations.

Correction

1▷ L'énergie mécanique \mathcal{E}_m :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \implies \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + mgl\cos\theta + cte$$

2▷ L'équation différentielle du mouvement :

Absence de force non conservative donc $\mathcal{E}_m = cte$ d'où $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$ par conséquent

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{m\ell^2}\theta - \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

pour θ faible on a : $\sin\theta \approx \theta$ ce qui donne :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{C}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}\right)\theta = 0$$

3▷ D'après le T.M.C on a :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_{\text{torsion}} + \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{R})$$

- $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{V}(A) \implies \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = -m\ell^2\ddot{\theta} \vec{e}_x$
- $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{R}) = \vec{0}$
- $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P} \implies \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) = -mg\ell \sin\theta \vec{e}_x$
- $\vec{\mathcal{M}}_o(\text{torsion}) = C\theta \vec{e}_x$ (moment de rappel)

Par conséquent :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{m\ell^2}\theta - \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

4▷ Pour avoir $\theta = 0$ position d'équilibre stable (avoir un mouvement oscillatoire autour de $\theta = 0$) , il faut que :

$$\left(\frac{C}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}\right) > 0 \implies C > mg\ell$$

5▷ La période T des petites oscillations :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{\frac{C}{m\ell} - g}} \implies A = \frac{C}{m\ell}$$

6▷ La sensibilité :

- pour un pendule simple :

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \implies \frac{\Delta T_o}{T_o} = \frac{\Delta g}{2g}$$

- Pour le pendule de HOLWECK LEIAY :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{A - g}} \implies \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta g}{2(A - g)}$$

Le pendule de HOLWECK LEIAY est plus sensible si

$$\frac{\Delta T}{T} > \frac{\Delta T_o}{T_o} \implies A > 2g$$

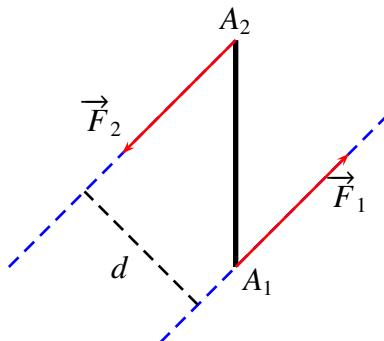
4.3 Les COUPLES

4.3.1 Couple de force

Définition

Deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 forment un couple de forces si :

- $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$: les deux forces ont même direction et norme par contre de sens opposées.
- $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_1) + \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_2) \neq \vec{0}$



On appelle moment du couple qu'on note $\vec{\mathcal{M}}_c = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_1) + \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_2)$ avec O un point quelconque

$$\vec{\mathcal{M}}_c = \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA}_2 \wedge \vec{F}_2 = Fd \vec{u}$$

Avec \vec{u} vecteur unitaire déterminé par la règle de la main droite.

Remarque

En général des forces \vec{F}_i forment un couple si :

$$\blacktriangleright \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_i) \neq \vec{0} \quad (O \text{ un point quelconque})$$

N.B : L'action d'un couple sur un corps est de le faire tourner .

4.3.2 Couple de torsion

- Lorsqu'on tord un fil d'un angle θ alors il exerce un couple de rappel tel que

$$\vec{\mathcal{M}} = -C\theta \vec{u}$$

- L'énergie potentielle de torsion est

$$E_{p,t} = \frac{1}{2}C\theta^2$$

- Pour un fil métallique cylindrique de longueur ℓ de diamètre d la constante de torsion C est donné par la loi de Coulomb

$$C = \chi \frac{d^4}{\ell}$$

Avec χ une constante caractéristique du métal.

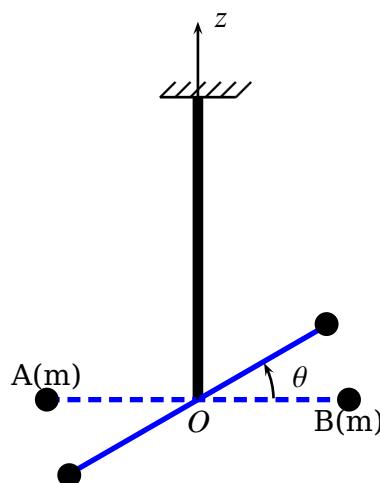
Activité

Pendule de torsion

Une barre AB de longueur ℓ et de masse négligeable porte à ses extrémités deux masses ponctuelles identiques (m), suspendue en son milieu O par un fil métallique de constante de torsion C .

On tourne la barre AB dans un plan horizontal d'un angle θ_0 , et on la lâche sans vitesse initiale.

Établir la période des oscillations



Correction

Le TMC donne : $\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}}_o(\text{torsion})$
 Sachant que :

- $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})(A) + \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})(B) \implies \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \vec{e}_z$
- $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OB} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$
- $\vec{\mathcal{M}}_c = -C\theta \vec{e}_z$ couple de torsion.

Alors l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \frac{2C}{m\ell^2}\theta = 0$$

- C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.
- La pulsation propre :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2C}{m\ell^2}}$$

- La période propre des oscillations :

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2}{2C}}$$

- La solution est :

$$\theta(t) = A \cos \omega_o t + B \sin \omega_o t$$

Si les C.I sont $\theta(t=0) = \theta_o$ et $V=0$ (sans vitesse initiale) alors

$$\theta(t) = \theta_o \cos \omega_o t$$

CHAPITRE 5

PUISANCE ET TRAVAIL D'UNE FORCE. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

5.1 Puissance et travail d'une force

5.1.1 Définitions

- On appelle la puissance d'une force \vec{F} appliquée sur un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ par rapport à un référentiel \mathcal{R} la quantité :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) \quad (\text{watt})$$

- Lorsque le point M effectue un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ pendant la durée dt sous l'action d'une force \vec{F} , on définit le travail élémentaire par :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} \quad (\text{Joule})$$

On remarque que :

$$\frac{\delta W}{dt} = \mathcal{P}$$

5.1.2 Exemples

5.1.2.1 Travail du poids

On suppose que l'axe Oz orienté vers le haut On a : $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$ et $d\overrightarrow{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$ donc :

$$\delta W = -mgdz \implies W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A) = \pm mgh$$

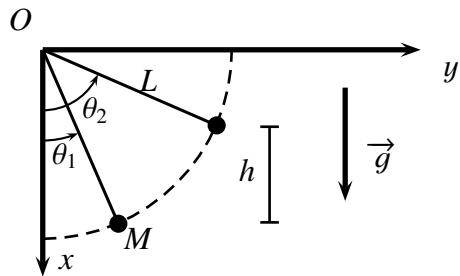
Avec h la hauteur (toujours positive).

- (+) si le travail moteur (le point M se déplace vers le bas (descend)).
- (-) si le travail résistif (le point M se déplace vers le haut (monte)).

Activité

Déterminer le travail du poids lorsqu'un pendule simple passe de $\theta_1 \rightarrow \theta_2$ avec $\theta_1 < \theta_2$

Correction



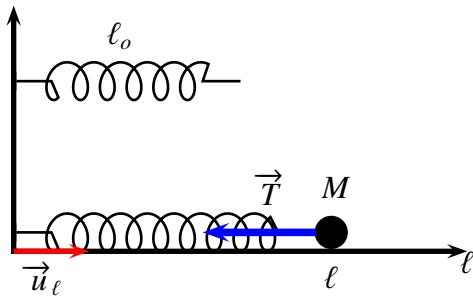
Puisque le point M monte vers le haut alors le signe (-).
Et comme $h = L(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$ alors :

$$\mathbf{W}_{\theta_1 \rightarrow \theta_2}(\vec{P}) = -mgL(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

Cas particulier : $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \theta$ donc :

$$\mathbf{W} = -mgL(1 - \cos \theta)$$

5.1.2.2 Travail de la tension d'un ressort



On a : $\vec{T} = -k(l - l_o) \vec{u}_l$ et $d\overrightarrow{OM} = dl \vec{u}_l$ donc :

$$\delta \mathbf{W} = -k(l - l_o)dl \Rightarrow \mathbf{W}_{\ell_A \rightarrow \ell_B}(\vec{T}) = -\frac{1}{2}k[(\ell_B - l_o)^2 - (\ell_A - l_o)^2]$$

Qu'on peut écrire autrement :

$$\mathbf{W}(\vec{T}) = -\frac{1}{2}k(l - l_o)^2 + cte$$

5.1.2.3 Travail de la force de Lorentz (Force magnétique)

On a : $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$ et $d\overrightarrow{OM} = \vec{V}dt$ donc

$$\mathbf{W}(\vec{F}) = 0$$

5.1.2.4 Travail de la force newtonienne

Définition

On appelle force newtonienne une force de type

$$\vec{F}_N = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$$

Exemples

- Force gravitationnelle :

$$\vec{F}_G = -\frac{\vec{G}m_1m_2}{r^2} \vec{e}_r \implies \alpha = -\vec{G}m_1m_2$$

- Force coulombienne(électrostatique) :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \vec{e}_r \implies \alpha = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$$

On a : $\delta W(\vec{F}_N) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} \implies \delta W(\vec{F}_N) = \alpha \frac{dr}{r^2}$.

Par intégration entre les points A et B on obtient :

$$W(\vec{F}_N) = \alpha \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Activité

Travail d'une force donnée sur différents trajets

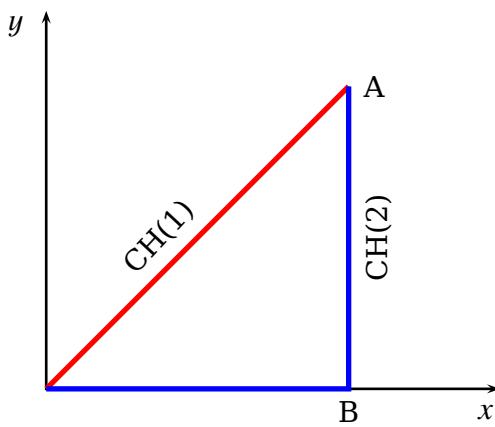
On considère le champ de forces de composantes cartésiennes :

$$F_x = y^2 - x^2 \quad \text{et} \quad F_y = 4xy$$

Calculer le travail de cette force pour aller de O (0,0) à A (1,1) :

1. suivant la droite OA.
2. suivant Ox [jusqu'en B (1,0)] puis OY [jusqu'en A(1,1)].
3. conclure

Correction



1/ Suivant le chemin (1) OA on a : $x = y$ donc $dx = dy$, $F_x = 0$ et $F_y = 4x^2$ par conséquent :

$$\delta \mathbf{W}_1 = 4x^2 dx \implies \mathbf{W}_1 = \frac{4}{3} J$$

2/ Suivant le chemin (2) OBA :

$$\delta \mathbf{W}_2 = -x^2 dx + 4y dy \implies \mathbf{W}_2 = \frac{5}{3} J$$

Conclusion:

En général le travail d'une force dépend du chemin suivi.

5.2 Énergie cinétique. Théorème de l'énergie cinétique

► Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} on a : $\vec{F} = m \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$; et comme : $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R})$ alors :

$$\mathcal{P} = m \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \implies \mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{V}^2 \right)$$

Définition

On appelle l'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m animé de la vitesse par rapport au référentiel \mathcal{R} ; qu'on note \mathcal{E}_c la quantité :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \vec{V}^2$$

Remarque

L'énergie cinétique est grandeur positive qui dépend du référentiel.

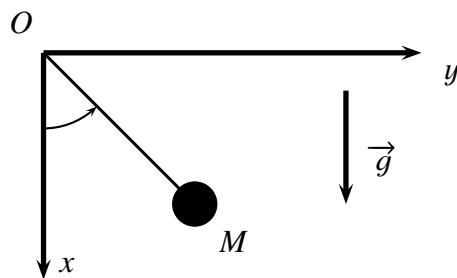
► On a : $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt}$ donc :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \mathbf{W}_{A \rightarrow B}(\vec{F})$$

T.E.C

Théorème**Théorème de l'énergie cinétique**

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail entre ces instants des forces qui lui sont appliquées

Activité**Pendule simple**

On a : $d\mathcal{E}_c = \delta\mathbf{W} \implies \Delta\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_o^2 = \mathbf{W}(\vec{P}) + \mathbf{W}(\vec{T})$

- $\mathbf{W}(\vec{P}) = -mgh = -mgl(\cos\theta_o - \cos\theta)$
- $\mathbf{W}(\vec{T}) = \vec{0} (\vec{T} \perp \vec{e}_\theta)$

Par égalité on tire que :

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_o) \quad (E)$$

Par simple dérivation temporelle de (E) on obtient : $\dot{\theta}(\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta) = 0$

Puisque $\dot{\theta} \neq 0$ (car sinon alors pas de mouvement) on aura :

$$\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

Remarque

Dans le cas d'une charge ponctuelle soumise seulement à une force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{V} \wedge \vec{B}$ alors : $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \vec{F}_m \cdot \vec{V} = 0$ Ce qui justifie que : $\mathcal{E}_c = cte \implies V = cte = V_0$

5.3 Force conservatives. Énergie potentielle

5.3.1 Définition

Définition

Une force \vec{F} est dite conservative si on peut écrire

$$\delta \mathbf{W} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{OM} = -d\mathcal{E}_p$$

\mathcal{E}_p est appelée énergie potentielle.

5.3.2 Exemples

► Énergie potentielle de pesanteur

- On suppose que l'axe Oz orienté vers le haut :

Dans ce cas : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \vec{e}_z$

On suppose que $\vec{g} = cte$; c'est à dire \vec{g} est uniforme, on obtient :

$$\vec{P} \cdot \overrightarrow{OM} = -mg \vec{e}_z \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z) = -mgdz$$

$$\mathbf{E}_{pp} = mgz + cte$$

- On suppose que l'axe Oz orienté vers le bas :

Dans ce cas : $\vec{P} = m\vec{g} = mg \vec{e}_z$

$$\text{Donc } \vec{P} \cdot \overrightarrow{OM} = mg \vec{e}_z \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z) = mgdz$$

$$\mathbf{E}_{pp} = -mgz + cte$$

Par conséquent

Conclusion:

$$\mathbf{E}_{pp} = \pm mgz + cte$$

- (+) Si Oz orienté vers le haut.
- (-) Si Oz orienté vers le bas.

On conclut que si \vec{g} est uniforme alors le poids \vec{P} est conservatif.

► Énergie potentielle élastique d'un ressort :

On rappelle que : $\vec{T} = -k\overrightarrow{OM}$, avec O position d'équilibre .

Si on pose : $\overrightarrow{OM} = (\ell - \ell_0) \vec{e}_x = x \vec{e}_x$

$$\text{alors : } \vec{T} \cdot \overrightarrow{OM} = -kx \vec{e}_x \cdot x \vec{e}_x \Rightarrow \vec{T} \cdot \overrightarrow{OM} = d(-\frac{1}{2}kx^2 + cte)$$

d'où :

$$\mathbf{E}_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + cte = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + cte$$

On conclut que la tension d'un ressort est une force conservative.

► **Énergie potentielle gravitationnelle**

On rappelle que : $\vec{F} = -\frac{Gm_A m_B}{r^2} \vec{e}_r = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$ avec ($\alpha < 0$).

En coordonnées sphériques on a : $\vec{F} \cdot d\vec{OM} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + rd\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi) = \alpha \frac{dr}{r^2}$

D'où :

$$\mathbf{E}_{pp} = \frac{\alpha}{r} + cte$$

On conclut que la force gravitationnelle est une force conservative.

► **Énergie potentielle électrostatique**

La force électrostatique (ou coulombienne) : $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r = \frac{\beta}{r^2} \vec{e}_r$ est une force conservatrice

$$\mathbf{E}_{pe} = \frac{\beta}{r} + cte$$

5.4 Énergie mécanique

Définition

On appelle énergie mécanique d'un point matériel $M(m)$ la somme de son énergie cinétique et son énergie potentielle.

$$E_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

N.B : L'énergie mécanique \mathcal{E}_m dépend du référentiel.

5.4.1 Théorème de l'énergie mécanique

On pose : $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$ avec :

$-\vec{F}_c$: la résultante des forces conservatives.

$-\vec{F}_{nc}$: la résultante des forces non conservatives.

Théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \mathbf{W}(\vec{F}_c) + \mathbf{W}(\vec{F}_{nc}) \implies \Delta(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) = \mathbf{W}(\vec{F}_{nc})$$

On tire le théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = \mathbf{W}(\vec{F}_{nc})$$

Théorème**Théorème de l'énergie mécanique**

Dans un référentiel galiléen , la variation de l'énergie mécanique d'un point matériel dans un champ de forces conservatives entre deux instants est égale au travail entre ces instants des forces non conservatives qui lui sont appliquées .

$$\Delta E_m = \mathbf{W}(\vec{F}_{nc})$$

5.4.2 Cas particulier important

Si $\mathbf{W}(\vec{F}_{nc}) = 0$ alors $\Delta E_m = 0$

Donc l'énergie mécanique est constante c'est à dire que l'énergie mécanique se conserve :l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle et vice versa ;c'est l'intégrale première de l'énergie.

Remarques

1. On a $E_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ et comme $\mathcal{E}_c \geq 0$ alors

$$E_m \geq \mathcal{E}_p$$

2. Le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U + \Delta E_m = \mathbf{W} + \mathbf{Q} \implies \Delta U + \mathbf{W}(\vec{F}_{NC}) = \mathbf{W} + \mathbf{Q}$$

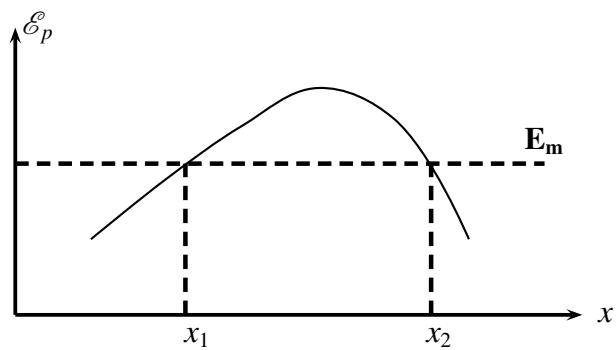
5.5 Applications :Équilibre d'un point matériel dans un champ de forces conservatives

Hypothèse de travail : système unidimensionnel : $\mathcal{E}_p(M) = \mathcal{E}_p(x)$.

5.5.1 Barrière d'énergie potentielle

On a : $E_m = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c$ et comme $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\vec{V}^2 \geq 0$,alors :

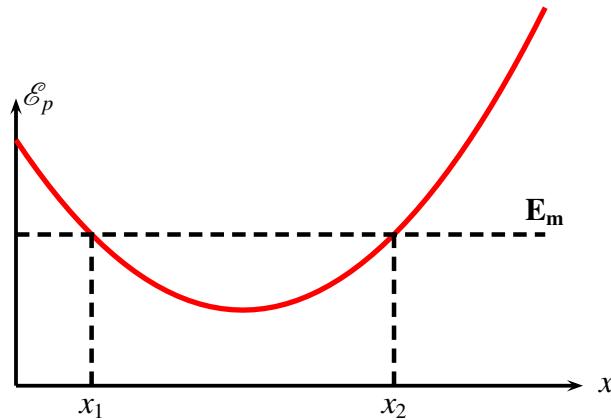
$$E_m = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c \geq \mathcal{E}_p$$



Domaine permis à la particule : $x \leq x_1$ ou $x \geq x_2$

- Si à $t = 0$, $x_0 < x_1$: le point matériel ne peut franchir la barrière potentielle.
- Si à $t = 0$, $x_0 > x_2$: le point matériel peut s'éloigner à l'infini , on dit qu'on a un état de diffusion.

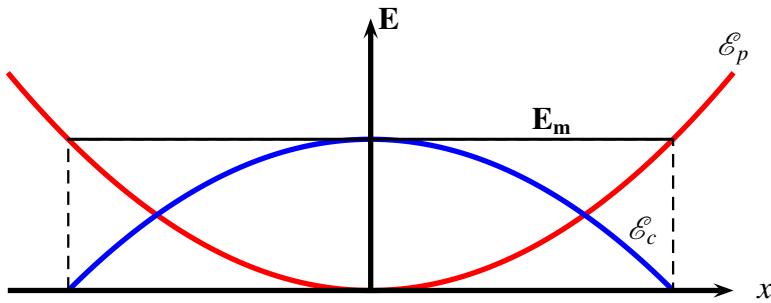
5.5.2 Cuvette d'énergie potentielle



Domaine permis est $[x_1, x_2]$; on dit que la particule est dans un état lié :**La particule effectue un mouvement périodique**

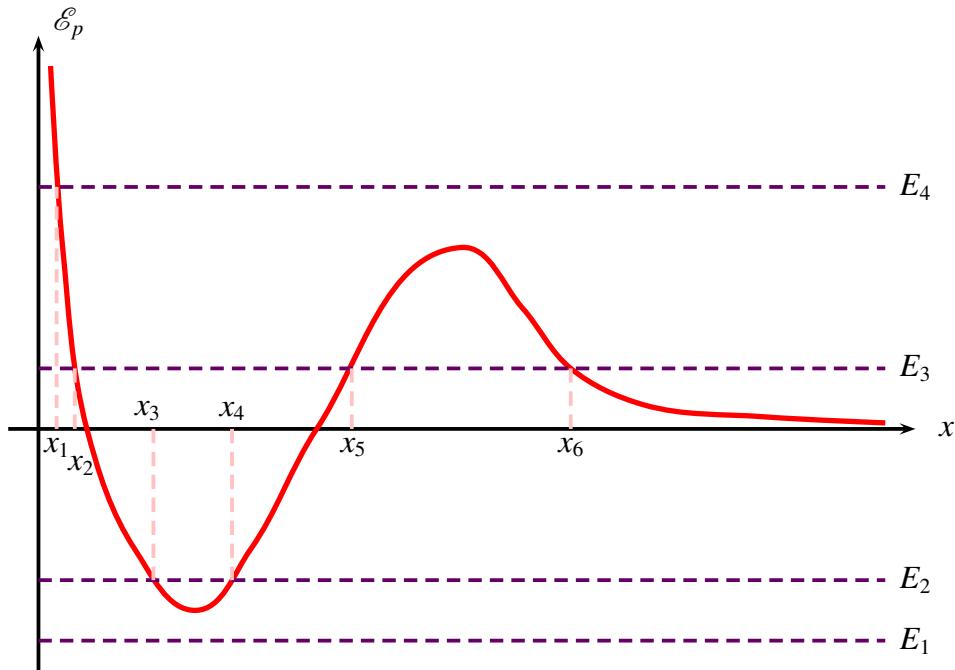
5.5.3 Cas de l'oscillateur harmonique

$\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + c$, on prend la position d'équilibre comme origine des énergie potentielle



5.5.4 Exemple général

Soit un point matériel qui se déplace dans un champ de forces conservatives dont l'énergie potentielle à l'allure suivante.



Suivant les conditions initiales on peut avoir :

- $E_m = E_1$ mouvement impossible ($\mathcal{E}_c < 0$)
- $E_m = E_2 \implies x \in [x_3, x_4]$: état lié; on a un mouvement elliptique (par conséquent périodique) ,la trajectoire de phase est une courbe fermé.
- $E_m = E_3 \implies x \in [x_2, x_5] \cup [x_6, \infty]$: Si :
 - $x \in [x_2, x_5]$ état lié ; on a un mouvement elliptique ,la trajectoire de phase est une courbe fermé.
 - $x \in [x_6, \infty]$ état de diffusion ; on a un mouvement rectiligne ou parabolique ou hyperbolique ,la trajectoire de phase est une courbe ouverte.
- $E_m = E_4 \implies x \in [x_1, \infty]$: état de diffusion ; on a un mouvement rectiligne ou parabolique ou hyperbolique ,la trajectoire de phase est une courbe ouverte.

5.5.5 Équilibre d'un point matériel soumis à l'action des forces conservatives

5.5.5.1 Condition d'équilibre

On a : $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc} = \vec{F}_c$ ainsi

$$\delta W = -d\mathcal{E}_p = F(x)dx \implies F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$$

À l'équilibre en $x = x_e$, $\vec{F} = \vec{0} \implies F(x_e) = 0$

Soit :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\right)_{x=x_e} = 0$$

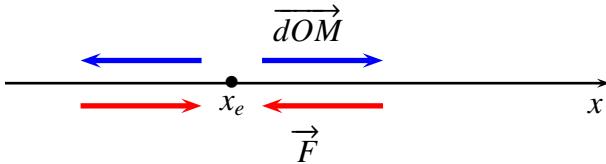
Condition nécessaire mais insuffisante,(ajouter $\vec{V}_o = \vec{0}$)

Conclusion:

À l'équilibre ,l'énergie potentielle est extrémale

5.5.5.2 Condition de stabilité

- Si x_e est une position d'équilibre **stable** alors si on écarte M de sa position ,la force tend à le faire revenir à sa position d'équilibre stable :

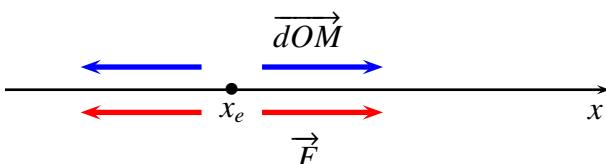


La force \vec{F} s'oppose au déplacement \overrightarrow{dOM} : \vec{F} est dite force de rappel.

Autrement dit

$$(\vec{F} \cdot \overrightarrow{dOM})_{x=x_e} < 0$$

- Si x_e est une position d'équilibre **instable** alors si on écarte M de sa position d'équilibre ,la force tend à le faire divergé de sa position d'équilibre :



Autrement dit

$$(\vec{F} \cdot \overrightarrow{dOM})_{x=x_e} > 0$$

5.5.5.3 Critère de stabilité

On fait un DL de \mathcal{E}_p au voisinage de la position d'équilibre x_e .

$$\mathcal{E}_p(x) \simeq \mathcal{E}_p(x_e) + (x - x_e) \left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right)_{x_e} + \frac{1}{2}(x - x_e)^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x_e} + \dots$$

x_e est une position d'équilibre alors $\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right)_{x=x_e} = 0$

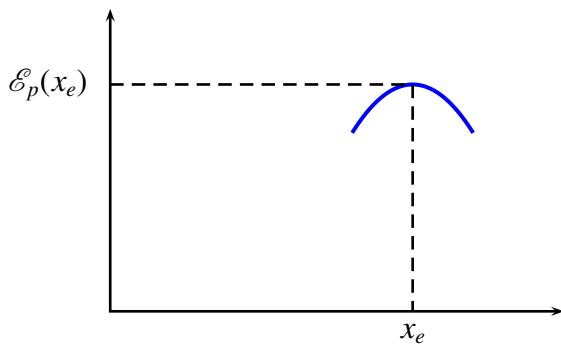
Par conséquent :

$$\mathcal{E}_p(x) \simeq \mathcal{E}_p(x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x_e} + \dots$$

d'où :

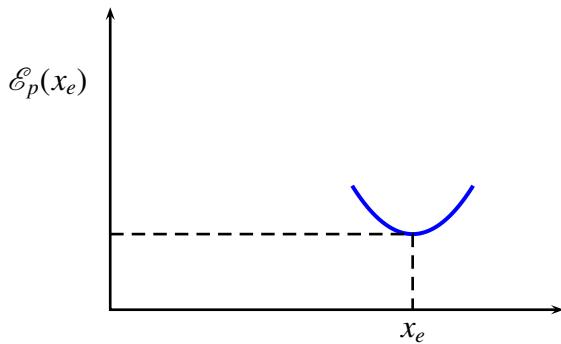
$$F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = -(x - x_e) \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}$$

- Si $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} < 0$, x_e est un maximum de \mathcal{E}_p (la concavité vers le bas) :



$$\left. \begin{array}{l} x > x_e \Rightarrow F(x) > 0 \\ x < x_e \Rightarrow F(x) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_e \text{ est une position d'équilibre instable}$$

- Si $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} > 0, x_e$ est un minimum de \mathcal{E}_p (la concavité vers le haut) :



$$\left. \begin{array}{l} x > x_e \Rightarrow F(x) < 0 \\ x < x_e \Rightarrow F(x) > 0 \end{array} \right\} x_e \text{ est une position d'équilibre stable}$$

Conclusion:

équilibre stable $\Rightarrow \mathcal{E}_p$ minimale

Remarque

On a $\vec{F} = m\vec{a}(M/\mathcal{R}) \Rightarrow F(x) = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow m(\ddot{x} - \ddot{x}_e) = -(x - x_e)\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x=x_e}$$

$$\Rightarrow \ddot{X} + \frac{1}{m}\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} X = 0$$

c'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique avec :

$$\omega^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} = \frac{1}{m}\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dX^2}\right)_{X=0} \Rightarrow k_{\text{ressort équivalent}} = \left.\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right|_{x=x_e}$$

CHAPITRE 6

OSCILLATEUR LINÉAIRE À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

6.1 Rappel sur l'oscillateur harmonique

L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique au voisinage d'une position d'équilibre stable est

$$a\ddot{X} + bX = c$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ et $c \in \mathbb{R}$ Qu'on peut écrire

$$a\ddot{X} + b(X - \frac{c}{b}) = 0$$

On pose

$$x = X - \frac{c}{b} ; \quad \omega_o^2 = \frac{b}{a}$$

- x : l'élargissement repéré à partir de la position d'équilibre stable ($x_e = 0 \implies X_e = \frac{c}{b}$)
- $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$ pulsation propre .

Ce qui permet d'écrire la **forme canonique** de l'oscillateur

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

La solution de cette équation donne :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_o t + \varphi) \implies \dot{x} = -X_m \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi)$$

Dans le cas de l'oscillateur élastique (masse + ressort) $k = m\omega_o^2$ on obtient pour :

- $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2 (+cte = 0) \implies \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kX_m^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi)$
- $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \implies \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\omega_o^2 X_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi) = \frac{1}{2}kX_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi)$
- $E_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kX_m^2 = cte$ caractéristique d'un système conservatif.

Calculons la valeur moyenne des énergies sur une période T ; On rappelle que

$$\langle \cos^2 x \rangle = \langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2}$$

- $\langle \mathcal{E}_p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}_p dt$

$$\langle \mathcal{E}_p \rangle = \frac{1}{4} k X_m^2$$

- $\langle \mathcal{E}_c \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}_c dt$

$$\langle \mathcal{E}_c \rangle = \frac{1}{4} k X_m^2$$

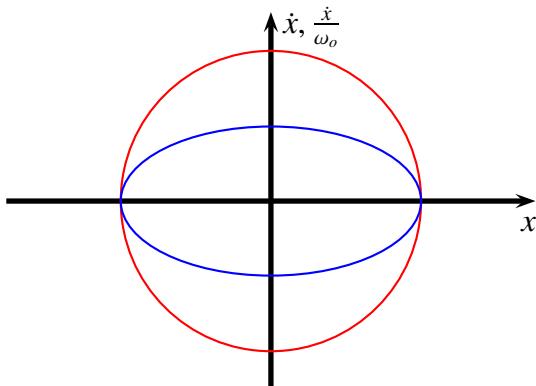
- $\langle E_m \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_m dt$

$$\langle E_m \rangle = \frac{1}{2} k X_m^2$$

On retient que

$$\langle \mathcal{E}_c \rangle = \langle \mathcal{E}_p \rangle = \frac{\langle E_m \rangle}{2}$$

Ainsi la trajectoire de phase est une ellipse dans le plan (x, \dot{x}) ou un cercle dans le plan $(x, \frac{\dot{x}}{\omega_o})$



6.2 régime libre d'un oscillateur linéaire amorti

6.2.1 Forme canonique de l'équation différentielle

On s'intéresse à un oscillateur linéaire amorti par un frottement fluide visqueux (du à l'action d'un fluide et proportionnel à la vitesse).
L'équation différentielle d'un tel oscillateur s'écrit :

$$a\ddot{X} + h\dot{X} + bX = c$$

avec $(a, h, b) \in \mathbb{R}_+^3$ et $c \in \mathbb{R}$.
On pose dans la suite :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

La pulsation propre de l'oscillateur

$$\frac{h}{a} = 2\alpha = \frac{\omega_o}{Q} = \frac{1}{\tau}$$

- α : la constante d'amortissement .
- τ : le temps de relaxation (c'est le temps nécessaire pour que l'amplitude se divise par e .
- Q : le facteur de qualité .

$$x = X - \frac{c}{b}$$

l'élongation repéré à partir de la position d'équilibre

La forme canonique de l'équation différentielle d'un oscillateur linéaire amorti par un frottement fluide visqueux s'écrit donc :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

Remarque

Dans ce cas l'énergie mécanique est fonction décroissante du temps, en effet :

$$\frac{\delta \mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_f) = -h\vec{V}^2 < 0$$

6.2.2 Différents régimes libres amortis

On a :

- l'équation différentielle : $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$
- Le polynôme caractéristique : $r^2 + 2\alpha r + \omega_o^2 = 0$
- Le discriminant : $\Delta' = \alpha^2 - \omega_o^2 = (\alpha + \omega_o)(\alpha - \omega_o) = \omega_o^2(\frac{1}{4Q^2} - 1)$

6.2.2.1 Régime apériodique

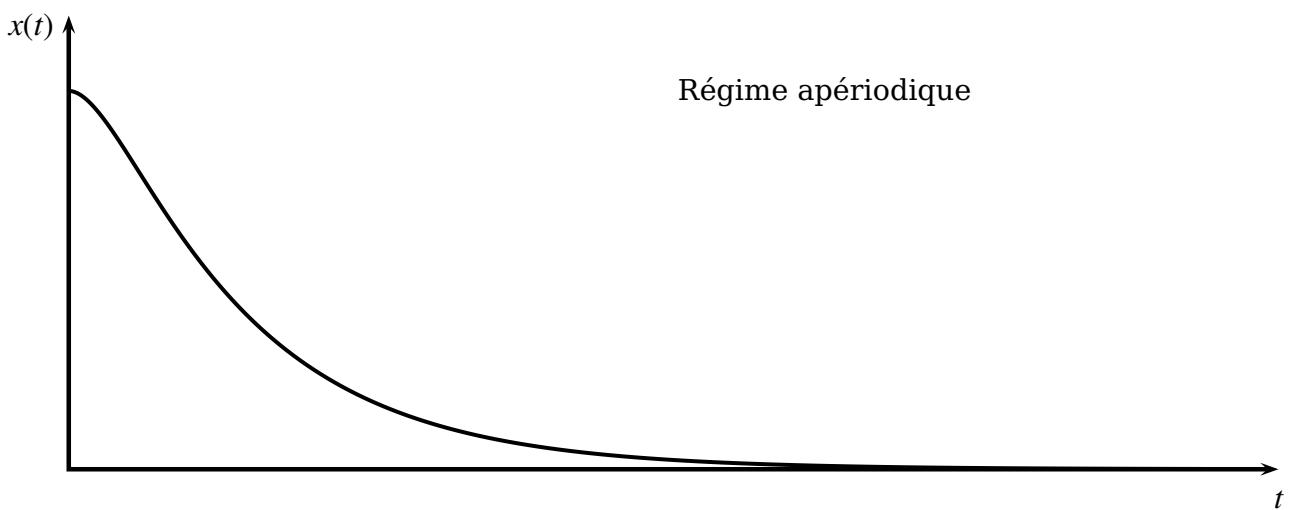
$$\Delta' > 0 \implies \alpha > \omega_o \implies Q < \frac{1}{2}$$

Deux racines réelles distinctes : $r_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$

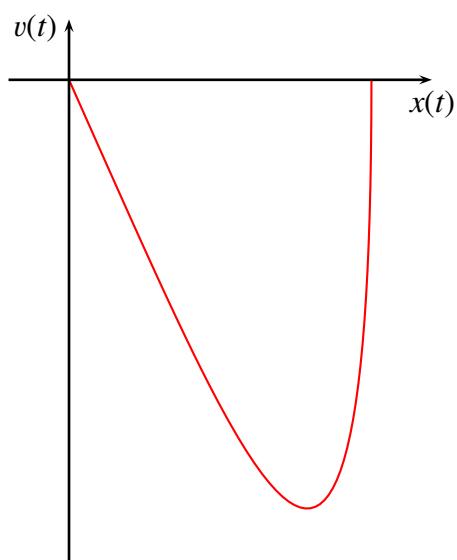
$$x(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} \implies x(t) = e^{-\alpha t} [Ae^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} t} + Be^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} t}]$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, $e^{-\alpha t}$ l'emporte ; d'où $x \rightarrow 0$ sans osciller : C'est le régime apériodique.

Représentation graphique



Le portrait de phase du régime apériodique



régime apériodique : trajectoire dans le plan de phase est ouverte

6.2.2.2 Régime critique

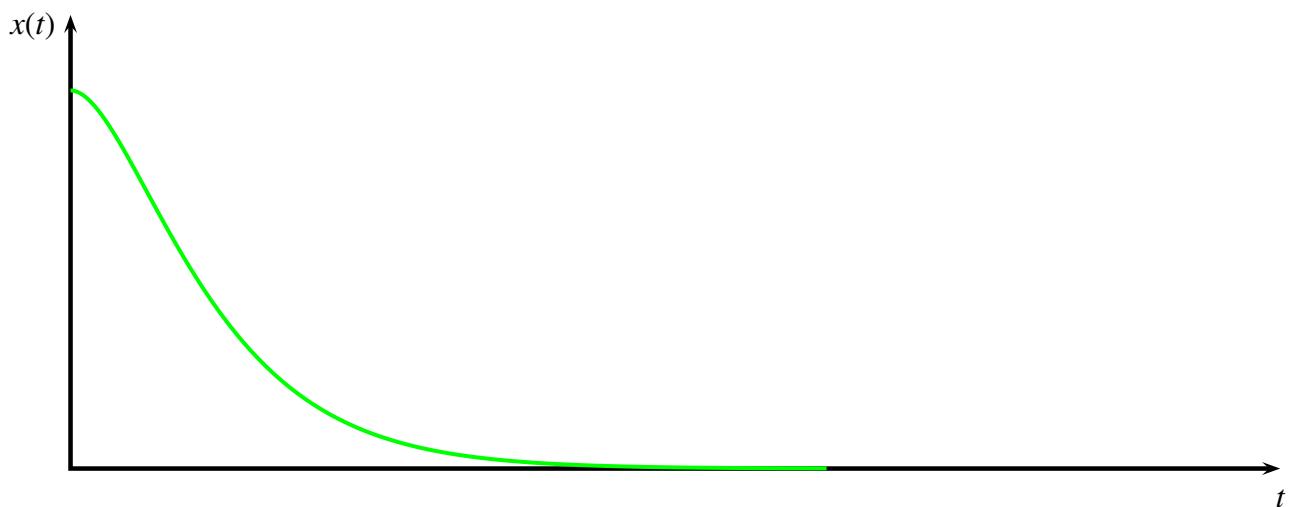
$$\Delta' = 0 \implies \alpha = \omega_o \implies Q = \frac{1}{2}$$

Deux racines réelles confondues : $r_+ = r_- = -\alpha$

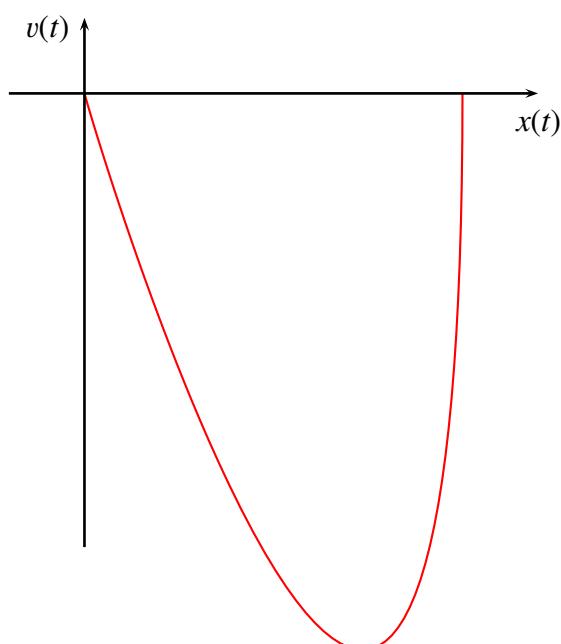
$$x = (A_c + B_c t)e^{-\alpha t}$$

Quand $t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$ rapidement sans osciller : C'est le régime critique.

Représentation graphique



Le portrait de phase du régime critique



régime critique : trajectoire dans le plan de phase est ouverte

6.2.2.3 Régime pseudo-périodique

$$\Delta' < 0 \implies \alpha < \omega_o \implies Q > \frac{1}{2}$$

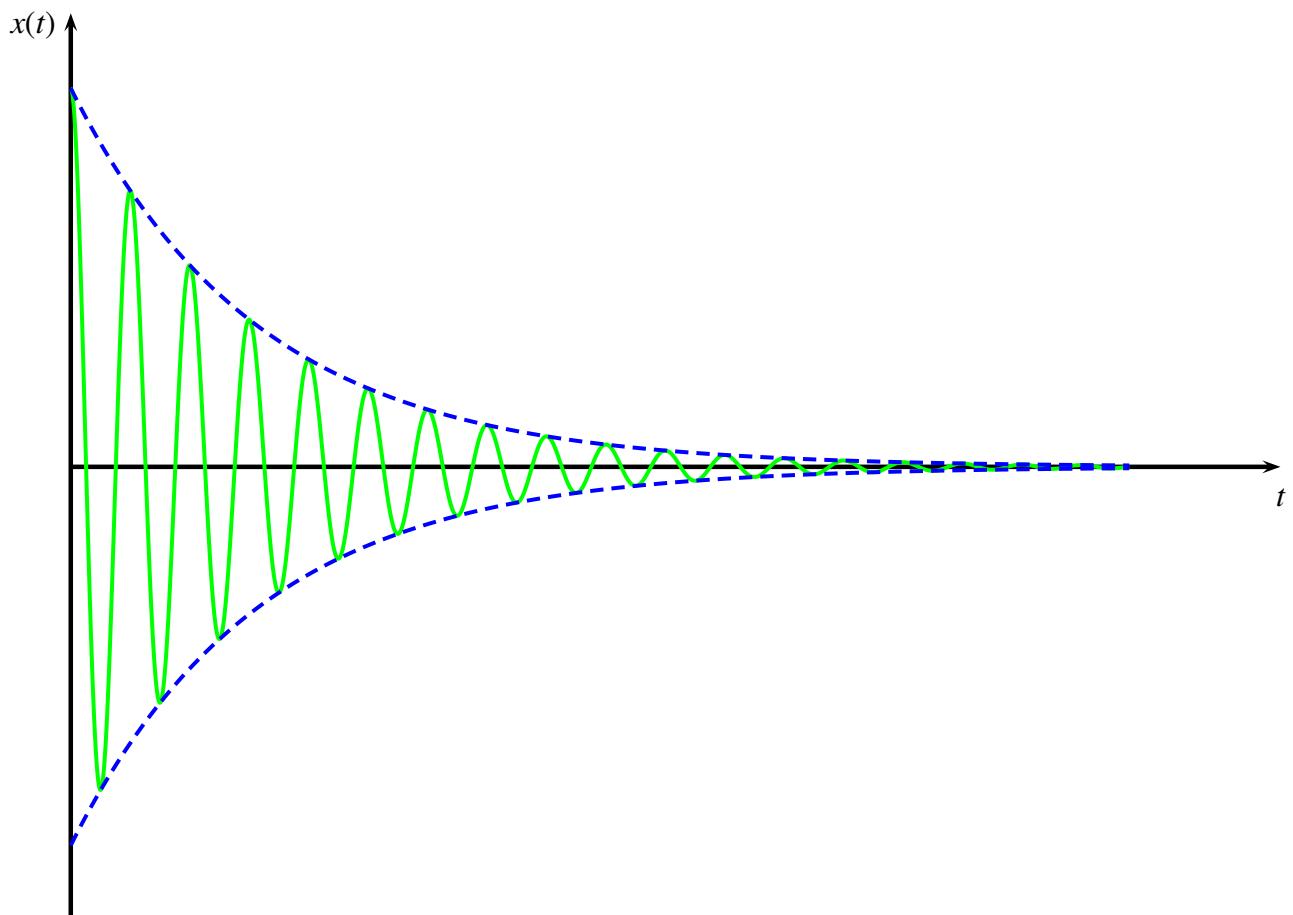
$$\Delta' = \alpha^2 - \omega_o^2 = i^2 \Omega^2 \quad \text{avec :} \Omega^2 = \omega_o^2 - \alpha^2$$

Deux racines complexes conjuguées : $r_1 = -\alpha + i\Omega$ et $r_2 = -\alpha - i\Omega$ donc la solution s'écrit :

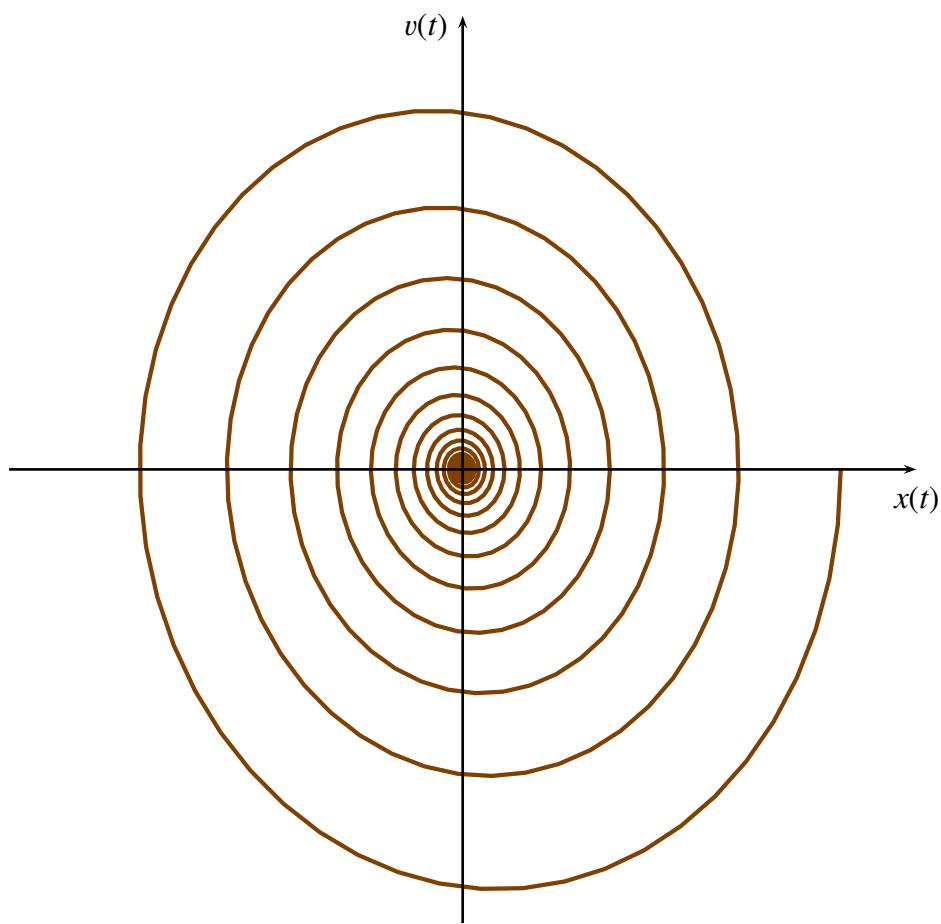
$$x(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) = x_o e^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

C'est une fonction pseudo-périodique d'amplitude $X_m = x_o e^{-\alpha t}$ variable en fonction du temps $X_m \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

Representation graphique



Le portrait de phase du régime pseudopériodique



Portrait de phase en régime pseudo-périodique

Le point O attire toutes les trajectoires dans le plan de phase qui correspond à la position d'équilibre stable

La pseudo-période est :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T_o}{\sqrt{1 - (\frac{\alpha}{\omega_o})^2}} = \frac{T_o}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > T_o$$

6.2.3 Décrément logarithmique

on définit le décrément logarithmique par

$$\delta = \alpha T$$

coefficient sans unité

On a :

- $x(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \varphi)$
- $x(t + nT) = Ae^{-\alpha(t+nT)} \cos(\Omega t + n\Omega T + \varphi) = e^{-\alpha nT} x(t)$

D'où : $\frac{x(t)}{x(t+nT)} = e^{\alpha nT} \implies \alpha nT = \ln \frac{x(t)}{x(t+nT)}$

On en déduit que

$$\delta = \alpha T = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t+nT)}$$

Si $n = 1$ alors :

$$\delta = \alpha T = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$$

6.2.4 Interprétation physique

6.2.4.1 Facteur de qualité

Hypothèse : L'amortissement très faible $(\alpha \rightarrow 0 \implies Q \gg 1 \implies \omega_o \gg \alpha)$

- $x(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \varphi)$
- $\Omega = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_o$
- $T = T_o$

D'où : $x(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_o t + \varphi)$

- $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\alpha t} \cos^2(\omega_o t + \varphi)$
- $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}A^2m[-\omega_o e^{-\alpha t} \sin(\omega_o t + \varphi) - \alpha e^{-\alpha t} \cos(\omega_o t + \varphi)]^2$

Or les fonctions cos et sin sont bornées ainsi $\alpha \ll \omega_o$ donc :

$$\mathcal{E}_c \approx \frac{1}{2}mA^2\omega_o^2e^{-2\alpha t} \sin^2(\omega_o t + \varphi)$$

•

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\alpha t}$$

Question : Que vaut la diminution relative de l'énergie mécanique au cours d'une pseudo-période , c'est à dire : $\frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)}$?

$$\bullet E_m(t) = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\alpha t} \quad \bullet E_m(t+T) = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\alpha(t+T)}$$

$$\frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)} = 1 - e^{-2\alpha T_o}$$

Or $\alpha T \approx \alpha \frac{2\pi}{\omega_o} = \alpha T_o \ll 1 \implies 1 - e^{-2\alpha T_o} \approx 2\alpha T_o$

D'où :

$$\frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)} \approx 2\alpha T_o = \frac{2\alpha 2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{Q}$$

Donc :

$$Q = 2\pi \frac{E_m(t)}{E_m(t) - E_m(t+T)}$$

c'est à dire :

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie del'oscillateur}}{\text{énergie perdue pendant une pseudo-période}}$$

6.2.4.2 Temps de relaxation

(Énoncé voir TD)

Activité

Un point matériel M de masse m est mobile sur un axe horizontal Ox , et il est soumis à une force de frottement visqueux de type : $\vec{R} = -\lambda \vec{x}$. ce point est relié par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k à un point A d'abscisse x_A . on pose $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\alpha = \frac{\lambda}{2m}$, et on supposera $\alpha \ll \omega_o$

1. a quoi correspond cette hypothèse ?
2. le point A étant supposé fixe, on écarte M de sa position d'équilibre, et on l'abandonne sans vitesse initiale. Calculer l'intervalle de temps τ au bout duquel l'amplitude du mouvement est divisée par $e = 2,718$.

Correction

1. On a : $\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_o^2 x = 0$. $\alpha \ll \omega_o$ (amortissement trop faible : oscillations isochrones ($T=cte$)).
2. $v(0) = 0$

On a : $x = x_o \cos(\Omega t + \varphi)$ avec $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \simeq \omega_o$

Donc : $x = x_o \cos(\omega_o t + \varphi)$

- à $t = 0$ on a $X_m = x_o \cos \varphi$.
- $\dot{x} = x_o e^{-\alpha t} [-\alpha \cos(\omega_o t + \varphi) - \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi)]$
- $v(0) = 0 \implies \tan \varphi = -\frac{\alpha}{\omega_o} \ll 1 \implies \varphi \rightarrow 0$
- $\varphi \rightarrow 0 \implies x_o = X_m$

On conclut que : $X_m(t) = x_o e^{-\alpha t} \implies X_m(t + \tau) = x_o e^{-\tau \alpha} e^{-\alpha t}$

Si le rapport des amplitudes est e alors : $\frac{x_o e^{-\alpha t}}{x_o e^{-\tau \alpha} e^{-\alpha t}} = e$ alors :

$$\tau = \frac{1}{\alpha}$$

Définition

Le temps d'amortissement τ correspond au temps nécessaire pour que l'amplitude se divise par e

6.3 Oscillations forcées -Résonance

Pour maintenir l'amplitude des oscillations constante, il faut fournir une énergie égale à celle perdue par les frottements à l'aide d'une force excitatrice qui impose une fréquence d'où la naissance des oscillations forcées.

Prenons l'exemple (masse-ressort) et appliquons la R.F.D

$$\vec{F}(t) + \vec{f} + \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}(M/\mathcal{R})$$

avec : $\vec{P} + \vec{T} = -kx \vec{e}_x$

donc : $-kx - \lambda \dot{x} + F(t) = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = F(t)$$

l'équation canonique est : $\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{1}{m} F(t)$

avec :

► $2\alpha = \frac{\lambda}{m} = \frac{\omega_o}{Q} = \frac{1}{\tau}$: constante d'amortissement

► $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$: la pulsation propre

La solution de cette équation différentielle est la somme de deux fonctions :

- solution de l'équation homogène $x_t(t)$ qui décrit le régime transitoire (disparaît après quelques τ).
- solution particulière $x_p(t)$ qui décrit le régime permanent .

donc $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$ avec :

- $x_t(t)$ dépend du signe de Δ'
- $x_p(t) = X \cos(\omega_p t + \varphi_p)$

Si $F(t) = F_o \cos(\omega t + \varphi_F)$ alors la solution est **en régime permanent** est : $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi_x)$

6.3.1 Détermination de l'amplitude X et la phase $\varphi = \varphi_x - \varphi_F$

Pour

- $x = X \cos(\omega t + \varphi)$ on associe $x(t) = X e^{i(\omega t + \varphi)} = \underline{X} e^{i\omega t}$ avec $\underline{X} = X e^{i\varphi}$

Pour $F = F_o \cos(\omega t + \varphi_F)$ on associe $\underline{F} = \underline{F}_o e^{i\omega t}$

- Pour $\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{F(t)}{m}$ on associe $\ddot{\underline{x}} + 2\alpha \dot{\underline{x}} + \omega_o^2 \underline{x} = \frac{\underline{F}(t)}{m}$

Ce qui donne : $-\omega^2 \underline{X} + 2\alpha i\omega \underline{X} + \omega_o^2 \underline{X} = \frac{\underline{F}_o}{m}$

$$\underline{X} = X e^{i\varphi_x} = \frac{F_o e^{i\varphi_F}/m}{(\omega_o^2 - \omega^2) + 2i\alpha\omega} = f(\omega)$$

Donc :

- X représente le module de $f(\omega)$; $X = |f(\omega)|$
- φ_x représente l'argument de $f(\omega)$

$$X = \frac{F_o}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

$$\tan \varphi = \tan(\varphi_x - \varphi_F) = -\frac{2\alpha\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

6.3.2 Étude de la résonance d'amplitude :

On pose :

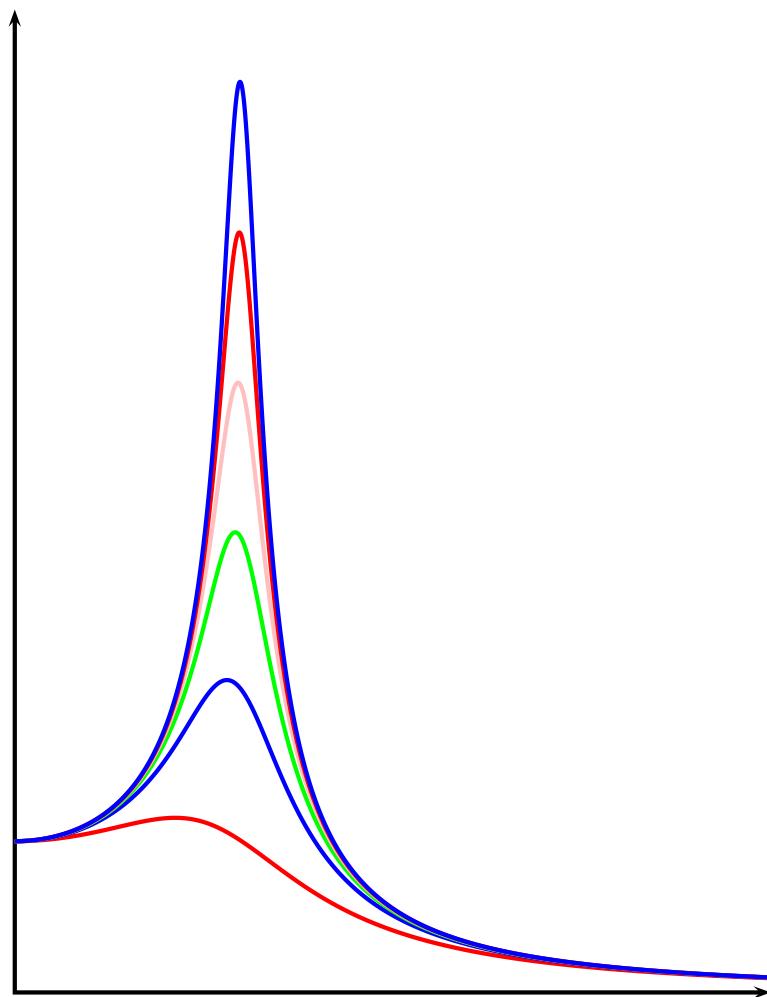
- $r = \frac{\omega}{\omega_o} > 0 \implies \omega = r\omega_o$
- $X_o = \frac{F_o}{m}$

On en déduit que :

$$X = \frac{X_o}{\omega_o^2 \sqrt{(1 - r^2)^2 + \frac{r^2}{Q^2}}} = X(r)$$

- Si $1 - \frac{1}{2Q^2} \leq 0 \implies Q \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$: pas de résonance d'amplitude
- Si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \implies Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$: on a résonance d'amplitude

Représentation graphique de la fonction $X(r)$ pour quelques valeurs de Q



6.3.3 Calcul énergétique :

Pour simplifier on choisit $\varphi_F = 0$ donc $\varphi = \varphi_x$

6.3.3.1 Énergie perdue :

En régime permanent on a : $\Delta \mathbf{W}_p = -\lambda \dot{x} dx = -\lambda x^2 dt$

$$\Delta \mathbf{W}_p = -\frac{\lambda^2 X^2 \omega^2}{2} [1 - \cos(2(\omega t + \varphi))] dt$$

Au cours d'une période on a :

$$\mathbf{W}_p = \int_0^T \Delta \mathbf{W}_p \Rightarrow$$

$$\mathbf{W}_p = -\frac{\lambda X^2 \omega^2 T}{2} = -\lambda X^2 \pi \omega < 0$$

6.3.3.2 Énergie gagnée :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{W}_g = F(t)dx = F(t)\dot{x}dt &\Rightarrow \Delta \mathbf{W}_g = -F_o \cos \omega t X \omega \sin(\omega t + \varphi) dt \\ &\Rightarrow \Delta \mathbf{W}_g = -F_o \omega X [\cos \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi)] \\ &\Rightarrow \Delta \mathbf{W}_g = -\frac{F_o \omega X dt}{2} [\sin(2(\omega t + \varphi)) - \sin(-\varphi)] \\ &\Rightarrow \mathbf{W}_g = -\frac{F_o \omega X}{2} [(\sin \varphi)t - \frac{1}{2\omega} \cos(2(\omega t + \varphi))]_0^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{W}_g = -F_o \pi X \sin \varphi$$

$$\text{Or : } \underline{X} = X e^{i\varphi} = \frac{X_o}{(\omega^2 - \omega^2) + 2i\alpha\omega} = \frac{X}{e^{-i\varphi}} \Rightarrow -\frac{\sin \varphi}{X} = \frac{2\alpha\omega}{X_o}$$

Donc

$$\mathbf{W}_g = 2\pi X^2 \omega m \alpha = \pi X^2 \omega \lambda > 0$$

D'où :

$$\mathbf{W}_g = |\mathbf{W}_p|$$

ce qui montre que l'énergie perdue par frottement est totalement fournie par la force excitatrice $F(t)$.

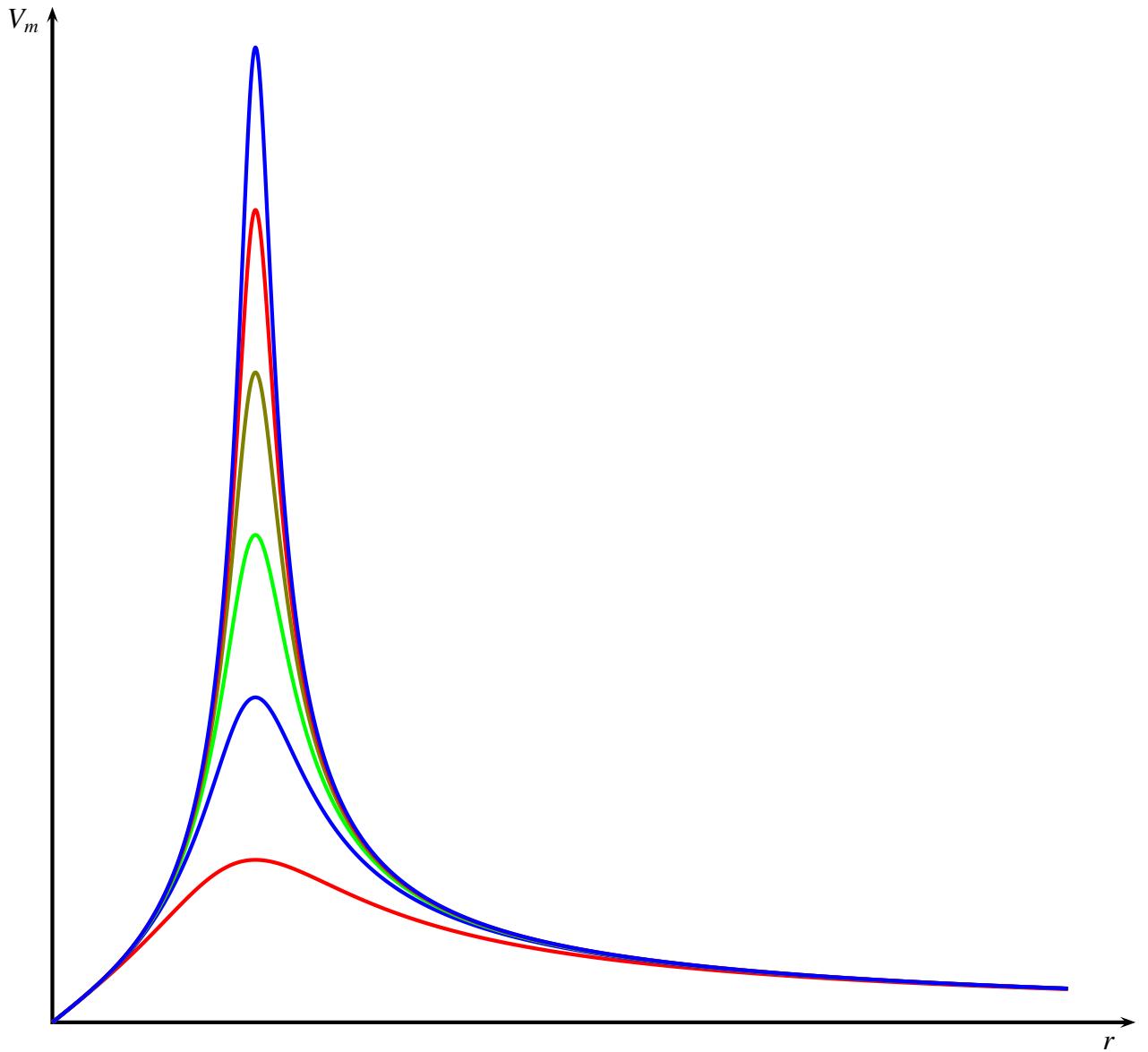
6.3.4 Résonance de vitesse

En régime établi (permanent) on pose $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$ Avec

$$V_m = \omega X = \frac{X_o r / \omega_o}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + \frac{r^2}{Q^2}}}$$

$$\frac{dV_m}{dr} = 0 \Rightarrow r = 1$$

Représentation graphique



6.3.5 Bande passante

énoncé voir TD

$x_A = a \cos \omega t$, l'équation différentielle sera donc : $\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{a}{m} \cos \omega t$

La solution du régime permanent s'écrit : $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

En notation complexe : $(-\omega^2 + \omega_o^2) + 2i\alpha\omega_o = a/m$

$$A = \frac{a/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} = \frac{a}{m\omega_o^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + \frac{r^2}{Q^2}}} \text{ avec } Q = \omega_o/2\alpha$$

$\alpha \ll \omega_o \Rightarrow Q \rightarrow \infty$ donc

$$A = \frac{a}{m\omega_o^2} \sqrt{\frac{1}{(1-r^2)^2 + \frac{r^2}{Q^2}}} : \text{ la résonance aura lieu pour } r = 1 \text{ et par conséquent :}$$

$$A_m = \frac{a}{m\omega_o^2} Q = \frac{a\omega_o}{2m\omega_o^2 \alpha} \implies \boxed{A_m = \frac{a}{2m\alpha\omega_o}}$$

La bande passante $[\omega_1, \omega_2]$ est telle que : $A > \frac{A_m}{\sqrt{2}} \implies A^2 > \frac{A_m^2}{2}$

- $\omega^4 - 2\omega^2(\omega_o^2 - 2\alpha^2) + \omega_o^4 - 8\alpha^2\omega_o^2 = 0$
- $\Delta' = 4\alpha^2\omega_o^2$
- $\omega^2 = (\omega_o^2 - 2\alpha^2) \pm 2\alpha\omega_o \simeq \omega_o^2 \pm 2\alpha\omega_o = \omega_o^2(1 \pm \frac{1}{Q})$
- $\omega_2 = \omega_o(1 + \frac{1}{Q})^{1/2} = \omega_o(1 + \frac{1}{2Q})$
- $\omega_1 = \omega_o(1 - \frac{1}{Q})^{1/2} = \omega_o(1 - \frac{1}{2Q})$
- $\Delta\omega = \frac{\omega_o}{Q} = 2\alpha = \frac{2}{\tau}$

Donc le résultat fondamental

$$\Delta\omega \cdot \tau = 2$$

$$\boxed{Q = \frac{\omega_o}{\Delta\omega}}$$

6.4 Analogie :Electrique/Mécanique

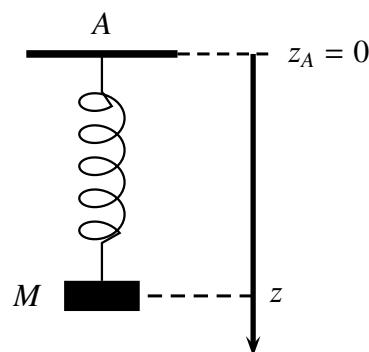
Grandeur électrique	Grandeur mécanique
$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$	$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$
L	m
λ	R
C	$1/k$
q	x
i	v
$e(t)$	$F(t)$
$\frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2$
$\frac{1}{2C}q^2$	$\frac{1}{2}kx^2$
$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$
$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$	$Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$

Activité

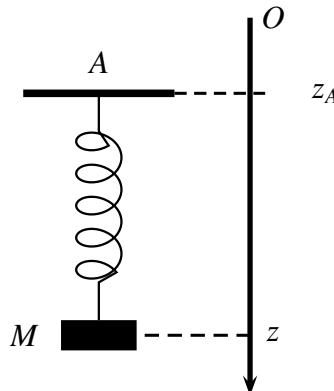
Le pendule élastique

On considère une masse M homogène de masse volumique ρ et de volume V , plongée dans l'eau (masse volumique ρ_e). Cette masse est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , accroché en un point A.

Soit (Oz) un axe vertical orienté vers le bas, le point A est fixe à la cote $z_A = 0$. On s'intéresse au mouvement suivant (Oz) de la masse et on note z la cote du centre de gravité G de la masse. À l'équilibre la masse est située en $z = h$. On négligera la hauteur de la masse M devant h . Soit \mathcal{R} le référentiel terrestre supposé galiléen.



- 1-** Écrire la condition d'équilibre de la masse M dans \mathcal{R} .
- 2-** En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'oscillation de M. On écrira une équation reliant z et ses dérivées, M, k et h. Donner la pulsation propre ω_o de cet oscillateur. On négligera les frottements dans cette question.
- 3-** Commenter le fait que ω_o ne dépende pas de l'intensité de la poussée d'Archimède. Y a-t-il un terme de l'équation différentielle précédente qui en dépend?
- 4-** On tient compte d'une force de frottement visqueux, colinéaire à la vitesse et d'intensité $\vec{F} = -\alpha \vec{V}$ (identique dans tous les référentiels) de l'eau sur la masse M. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par z. En se plaçant dans le cas d'un amortissement faible, donner sans calcul l'allure de la fonction z(t) avec les conditions initiales suivantes : à $t = 0$, $z = h_1 > h$ et la vitesse initiale est nulle.
- 5-** A l'aide d'un piston, on impose à l'extrémité A du ressort, un mouvement vertical sinusoidal d'amplitude z_{Am} ; donc $z_A(t) = z_{Am} \cos(\omega t)$. Écrire dans le référentiel \mathcal{R}' , lié à A, l'équation différentielle vérifiée par z' cote de G dans \mathcal{R}' .
- 6-** Calculer l'amplitude des oscillations de la masse M dans \mathcal{R}' . On utilisera la notation complexe et on fera apparaître les constantes $\omega_o, \tau = \frac{M}{\alpha}$ et la variable $x = \frac{\omega}{\omega_o}$
- 7-** Dans ce dispositif, l'intérêt du ressort est de permettre d'obtenir des oscillations de la masse d'amplitude supérieure à celle de l'excitation. Chercher un intervalle de pulsations pour lequel cette condition est vérifiée. Vous montrerez que cet intervalle existe si la masse M est supérieure à une certaine valeur que vous préciserez.
- 8-** Si la condition précédente est vérifiée, pour quelle pulsation l'amplitude d'oscillation de la masse M est-elle maximale?



Correction

- 1-** La condition d'équilibre de la masse M dans \mathcal{R} .

$$Mg = F_A + k(h - l_o)$$

- 2-** L'équation différentielle du mouvement de l'oscillation de M.

On projette la RFD sur l'axe Oz on obtient :

$$M\ddot{z} = Mg - \alpha\dot{z} - F_A - k(z - l_o) = Mg - \alpha\dot{z} - F_A - k(z - h) - k(h - l_o)$$

La condition d'équilibre donne

$$M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z - h) = 0$$

La pulsation propre $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

3- ω_o ne dépend que des paramètres intrinsèques du système

Le terme de l'équation différentielle précédente qui en dépend est h la position d'équilibre

En général toute forces constantes n'apparaissent pas dans l'équation différentielle, son rôle est de modifier la position d'équilibre

4- La nouvelle équation différentielle vérifiée par z .

$$M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z - h) = 0 \implies \ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_o^2(z - h) = 0$$

Avec $\lambda = \frac{\alpha}{2M} \ll \omega_o$ amortissement faible
dans ce cas la solution est de la forme :

$$z(t) = h + Ae^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi) \quad \Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$$

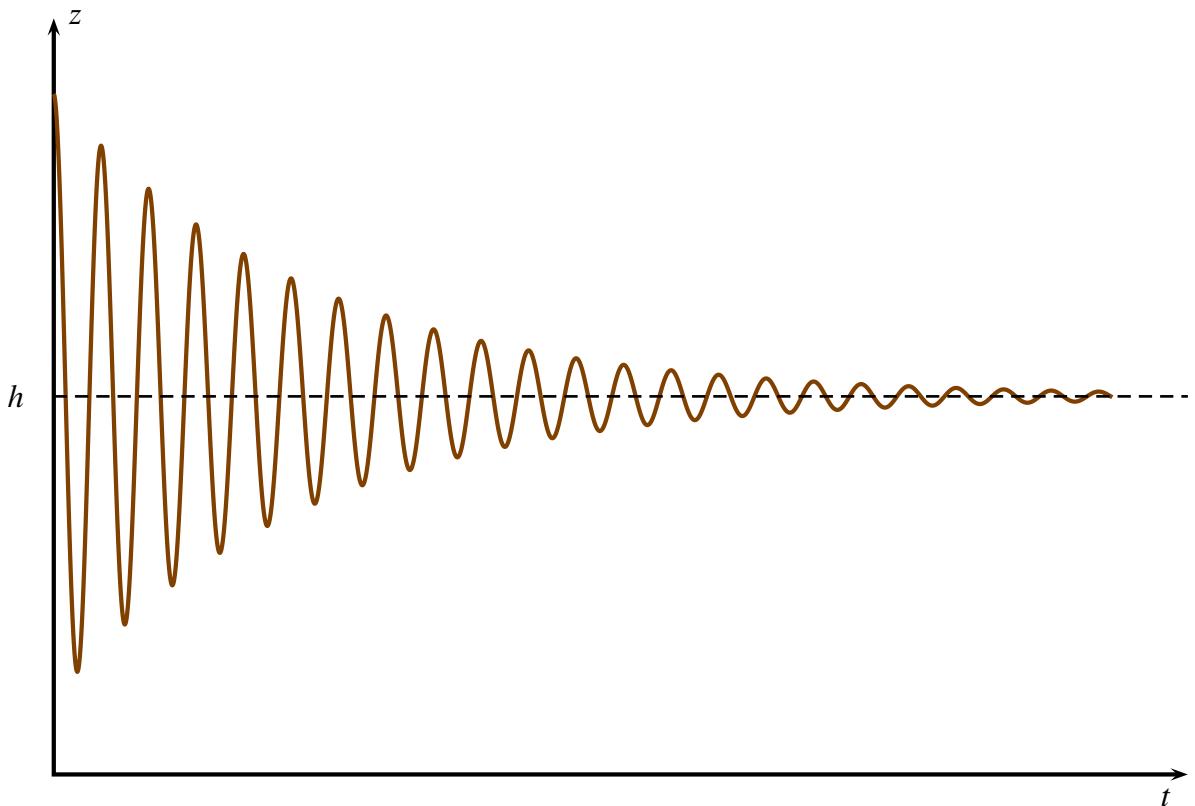
A et φ deux constantes d'intégration à déterminer par les C.I.

Comme $\lambda \ll \omega_o \implies \Omega \approx \omega_o$ ainsi :

- $z(t=0) = h_1 \implies h_1 = h + A \cos \varphi$
- $\dot{z}(t=0) = 0 \implies \tan \varphi = -\frac{\lambda}{\omega_o} \rightarrow 0$ c'est à dire $\varphi \rightarrow 0$ On en déduit que

$$z(t) = h + (h_1 - h)e^{-\lambda t} \cos \omega_o t$$

Représentation graphique de $z(t)$ pour $h = 5$, $h_1 = 6$, $\lambda = 0.2$ et $\omega_o = 10$



5- L'équation différentielle.

$$M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z - h) = kz_A$$

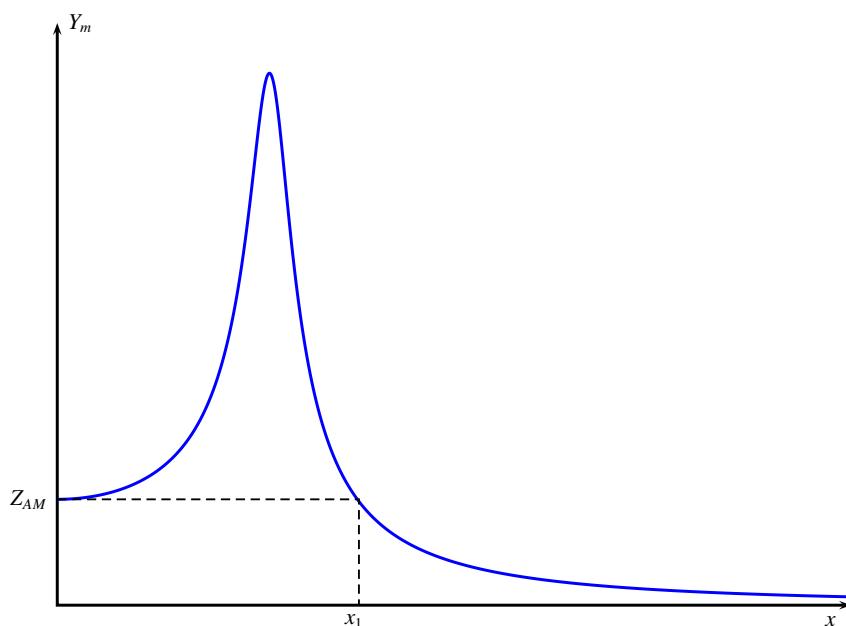
En posant $y = z - h$ on obtient

$$\ddot{y} + \frac{1}{\tau}\dot{y} + \omega_o^2 y = \omega_o^2 Z_{AM} \cos \omega t$$

6- On cherche une solution qui décrit le régime permanent sous la forme $y(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$ et en notation complexe on trouve

$$Y_m = \frac{Z_{AM}}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{\tau^2 \omega_o^2}}}$$

La représentation graphique de Y_M en fonction de la pulsation réduite x



7- L' intervalle de pulsations est $[0, \omega_1 = x_1 \omega_o]$. telle que $Z_{AM} = Y_M$ c'est à dire x_1 solution de

$$(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{\tau^2 \omega_o^2} = 1$$

La solution est

$$x_1^2 = 2 - \frac{1}{\tau^2 \omega_o^2}$$

Si $2 - \frac{1}{\tau^2 \omega_o^2} > 0 \implies M > \frac{\alpha^2}{2k} = M_c$ alors

$$\omega_1 = \omega_o \sqrt{2 - \frac{1}{\tau^2 \omega_o^2}}$$

8-L'amplitude d'oscillation de la masse M est maximale si $\frac{dY_M}{dx} = 0$

$$\omega_R = \omega_o \sqrt{1 + \frac{1}{2\tau^2 \omega_o^2}}$$

CHAPITRE 7

MOUVEMENTS DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRALES CONSERVATIVES, MOUVEMENT NEWTONIEN

7.1 Généralités sur les forces centrales

7.1.1 Définition

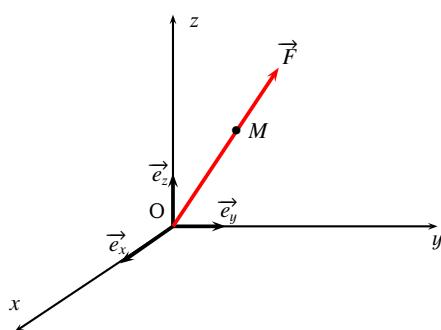
Définition

On appelle force centrale une force \vec{F} dont la direction passe toujours par un point fixe O .

Exemple

- Tension du ressort.
- Force gravitationnelle : $\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2} \vec{e}_r$
- Force coulombienne : $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \vec{e}_r$
- La tension du fil dans le pendule simple.

Son expression en coordonnées sphériques s'écrit $\vec{F} = F(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$ avec $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$



7.1.2 Moment cinétique, Loi des aires

7.1.2.1 Conservation du moment cinétique

Appliquons le TMC en O point fixe dans \mathcal{R} **supposé galiléen**

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}} &= \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) \implies \frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{F} \\ &\implies \frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}} = r \vec{e}_r \wedge F \vec{e}_r \\ &\implies \frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}} = \vec{O} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = cte}$$

Conclusion :

Le moment cinétique d'une force centrale est conservatif

7.1.2.2 Planéité de la trajectoire

On a : $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) = cte$ donc le mouvement est plan : **C'est la première loi de Kepler**

On choisit les coordonnées cylindriques avec

$$\boxed{\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \sigma_o \vec{e}_z}$$

Par conséquent :

- Le vecteur position : $\vec{OM} = r \vec{e}_r$
- La vitesse : $\vec{V}(M/R) = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$
- L'accélération : $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$
- Le moment cinétique : $\sigma_o = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/R) \implies \sigma_o = mr^2\dot{\theta} \vec{e}_z$

D'où :

$$\boxed{\sigma_o = mr^2\dot{\theta} = mC}$$

Avec :

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta} = \frac{\sigma_o}{m}}$$

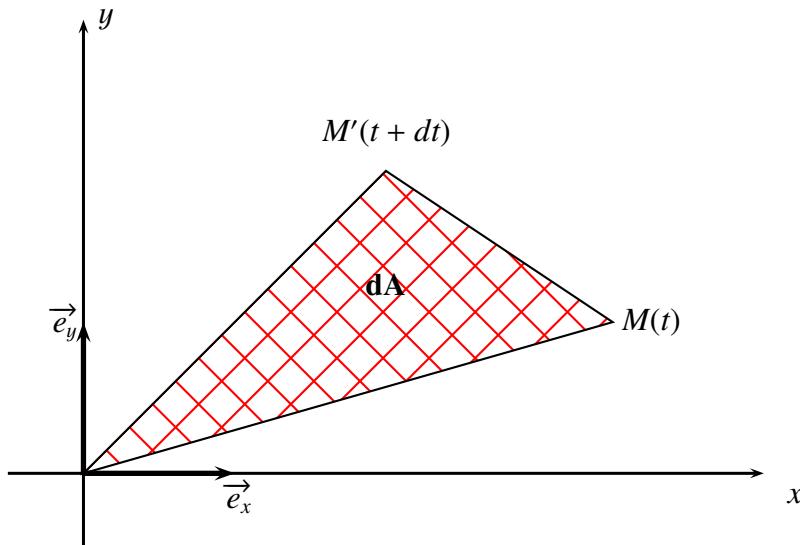
Constante des aires

Remarque

Si $\vec{\sigma}_o = \vec{0} \implies \dot{\theta} = 0$ c'est à dire que le mouvement se fait dans la direction de \vec{e}_r : C'est un mouvement rectiligne

7.1.2.3 Vitesse aréolaire , Loi des aires

Déterminons dA l'aire (surface) élémentaire balayée par le vecteur \overrightarrow{OM} entre les instants t et $t + dt$



On a :

$$dA = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM} \| \implies dA = \frac{1}{2} \| r \overrightarrow{e}_r \wedge (dr \overrightarrow{e}_r + rd\theta \overrightarrow{e}_\theta) \|$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

On définit la **vitesse aréolaire** $\frac{dA}{dt}$ comme la surface balayée par le vecteur \overrightarrow{OM} pendant l'unité de temps

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2} = \frac{\sigma_o}{2m} = cte$$

Conclusion:

Loi des aires (deuxième loi de Kepler):

Le vecteur \overrightarrow{OM} balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux.

7.1.3 Formules de Binet

On a :

- $\vec{V}(M/R) = \dot{r} \overrightarrow{e}_r + r\dot{\theta} \overrightarrow{e}_\theta \implies V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$.
- On pose : $u = \frac{1}{r} \implies \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt}$
- $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \left(\frac{dr}{du}\right)\left(\frac{du}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}$

$$\frac{dr}{dt} = -C \frac{du}{d\theta}$$

Donc

$$V^2 = C^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$$

C'est la première loi de Binet

De même on a : $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$

Or :

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dC}{dt} = 0$$

- $\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left[-C \frac{du}{d\theta} \right] = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$
- $r\dot{\theta}^2 = r \frac{C^2}{r^4} = C^2 u^3$

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r$$

C'est la deuxième loi de Binet

Activité

Déterminer la loi de forces centrales $F(r)$ lorsque :

- $r = k \exp \theta$
- $r = k\theta$

7.2 Forces centrales conservatives

On suppose que la force centrale \vec{F} est conservative c'est à dire qu'il existe une énergie potentielle \mathcal{E}_p tel que

$$d\mathcal{E}_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OM} \implies d\mathcal{E}_p = -F_r dr$$

On en déduit que l'énergie potentielle ne dépend que de la distance r elle ne dépend ni de θ ni de φ

$$\mathcal{E}_p(r) = \int F(r) dr + cte$$

Par conséquent : $E_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \implies E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \mathcal{E}_p(r)$

Or : $\dot{\theta} = \frac{\sigma_o}{m} = \frac{C}{r^2}$ par conséquent :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\sigma_o^2}{2m} \frac{1}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)$$

On pose :

► $\mathcal{E}_{c,r} = \frac{1}{2}mr^2$: l'énergie cinétique radiale.

► $\mathcal{E}_{p,eff}(r) = \frac{\sigma_o^2}{2m} \frac{1}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)$: l'énergie potentielle effective (ou efficace).

Puisque le système est conservatif alors :

$$E_m = cte = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{\sigma_o^2}{2m} \frac{1}{r^2} + \mathcal{E}_p(r) = E^o$$

C'est l'intégrale première de l'énergie

Remarques



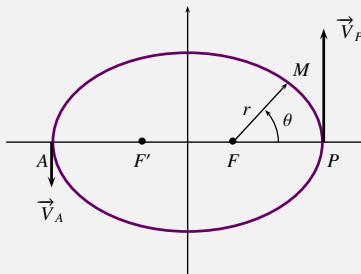
$$\mathcal{E}_{c,r} = \frac{1}{2}mr^2 \geq 0 \implies E_m \geq \mathcal{E}_{p,eff}$$

► $\mathcal{E}_{c,r} = \frac{1}{2}mr^2 = 0 \implies \dot{r} = 0$ c'est à dire que r est extremum.

- Pour une trajectoire circulaire $r = R \implies \mathcal{E}_{c,r} = 0$ c'est à dire

$$E_m(\text{circulaire}) = \mathcal{E}_{p,eff} = E^o$$

- Pour une trajectoire elliptique avec origine au foyer



On a au points :

- P appelé périgée (le point le plus proche au foyer origine) :

$$r_P = r_{min} \implies \dot{r}_P = 0$$

- A appelé apogée (le point le plus éloigné du foyer origine) :

$$r_A = r_{max} \implies \dot{r}_A = 0$$

Comme $\vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ alors

$$V_A = r_A \dot{\theta}_A \quad ; \quad V_P = r_P \dot{\theta}_P$$

Relation entre V_A et V_P

Comme $C = r^2\dot{\theta} = r(r\dot{\theta})$ alors

$$r_A V_A = r_P V_P$$

7.3 Cas du champ newtonien

7.3.1 L'approche énergétique

On suppose que la force est newtonnienne c'est à dire :

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$$

- Si \vec{F} est attractive (interactions gravitationnelle ou coulombienne entre deux charges de signe contraire) alors $\alpha > 0$
- Si \vec{F} est repulsive (interactions coulombienne entre deux charges de même signe) alors $\alpha < 0$

L'énergie potentielle est donc avec référence à l'infini

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r \implies \mathcal{E}_p(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

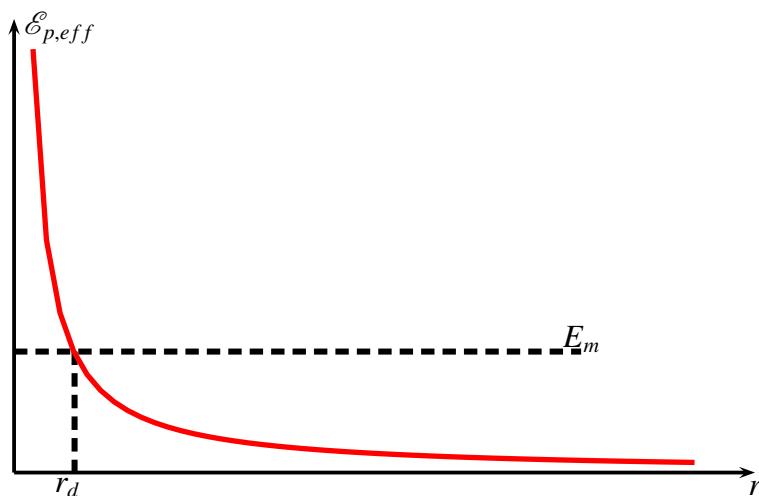
Remarque

Le signe de l'énergie potentielle :

- Si \vec{F} est attractive alors $\mathcal{E}_p(r) < 0$
- Si \vec{F} est repulsive alors $\mathcal{E}_p(r) > 0$

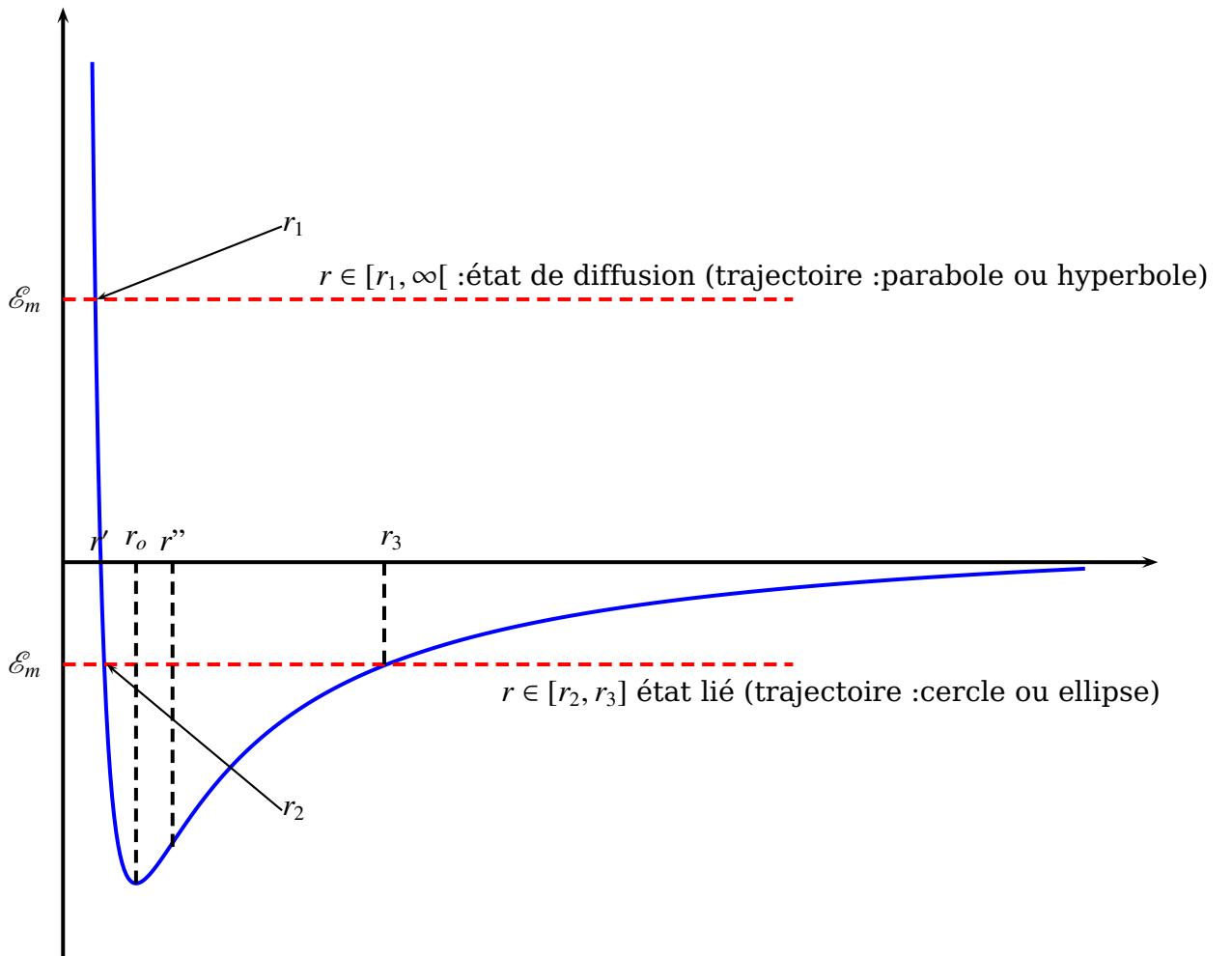
Représentation de l'énergie potentielle effective

Cas où \vec{F} est repulsive



$$r \geq r_d \implies \text{état de diffusion}$$

Cas où \vec{F} est attractive



- $\mathcal{E}_{p,eff} = 0 \implies r' = \frac{\sigma_o^2 m}{2\alpha}$
- $\frac{d\mathcal{E}_{p,eff}}{dr} = 0 \implies r_o = \frac{\sigma_o^2 m}{\alpha} = 2r'$
- $\frac{d^2\mathcal{E}_{p,eff}}{dr^2} = 0 \implies r'' = \frac{3\sigma_o^2 m}{2\alpha} = 3r'$

7.3.2 L'équation de la trajectoire

7.3.2.1 Relation fondamentale de la dynamique

On a : $\vec{F} = m\vec{a}(M)$ or :

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- $\alpha < 0 \implies$ repulsion ($q_1 \cdot q_2 > 0$)
- $\alpha > 0 \implies$ attraction : soit ($q_1 \cdot q_2 < 0$) soit gravitation.

On sait que : $C = r^2\dot{\theta} = \frac{\sigma_o}{m}$ ainsi : $\vec{a}(M) = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r$
 donc : $-mC^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{\alpha}{r^2} = -\alpha u^2$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = + \frac{\alpha}{mC^2} = \frac{\alpha m}{\sigma_o^2}$$

La solution de cette équation est :

$u = A \cos(\theta - \theta_o) + \frac{\alpha m}{\sigma_o^2}$ avec A et θ_o sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

Cette solution peut s'écrire :

$$\frac{1}{r} = u = \frac{\alpha m}{\sigma_0^2} \left(1 + \frac{A\sigma_0^2}{\alpha m} \cos(\theta - \theta_o) \right)$$

On pose :

$$p = \left| \frac{\sigma_0^2}{\alpha m} \right| \quad \| \quad e = \left| \frac{A\sigma_0^2}{\alpha m} \right|$$

C'est l'équation d'une **conique** avec :

- $a = \frac{p}{|1 - e^2|}$
- $b = \sqrt{ap}$
- $c = ea$

7.3.2.2 Vecteur Range-Lenz

On définit le vecteur de Range-Lenz par pour une force centrale de forme $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}$ par

$$\vec{A} = \frac{1}{\alpha} (\vec{V} \wedge \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})) - \vec{e}_r$$

Montrons que ce vecteur est constant au cours du temps ,pour cela calculons $\frac{d\vec{A}}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{1}{\alpha} [\vec{V} \wedge \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})] - \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ &\Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{\alpha}{mr^2} \vec{e}_r \wedge mC \vec{e}_z \right] - \frac{C}{r^2} \vec{e}_\theta \\ &\Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{C}{r^2} \vec{e}_\theta - \frac{C}{r^2} \vec{e}_\theta = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{\alpha} (\vec{V} \wedge \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})) - \vec{e}_r = \vec{cte}$$

La constante est déterminée par les conditions initiales ou des conditions particulières.

Sachant que :

- $\vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = mC \vec{e}_z$ alors

$$\vec{A} = \left(\frac{mC^2}{\alpha r} - 1 \right) \vec{e}_r - \frac{mC}{\alpha} \dot{r} \vec{e}_\theta = \vec{cte}$$

Remarque

les conditions particulières

Si $\dot{r} = 0$ c'est à dire r est extrémale alors $\vec{A} \parallel \vec{e}_r$

On pose

$$e = \|\vec{A}\| \geq 0$$

Donc calculons e^2 au lieu de e :

$$\begin{aligned} e^2 &= \left(\frac{mC^2}{\alpha r} - 1\right)^2 + \left(\frac{mC}{\alpha} \dot{r}\right)^2 \\ \implies e^2 &= \frac{2mC^2}{\alpha^2} \left[\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r} \right] + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Or : } E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

on tire que :

$$e^2 - 1 = \frac{2mC^2}{\alpha^2} E_m \implies E_m = \frac{\alpha^2}{2mC^2} (e^2 - 1) = \frac{m\alpha^2}{2\sigma_o^2} (e^2 - 1)$$

Calculons la quantité $\vec{A} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{A} \cdot \vec{r}$:

$$\vec{A} \cdot \overrightarrow{OM} = \left(\frac{mC^2}{\alpha r} - 1\right) r = er \cos \theta \implies r = \frac{mC^2}{\alpha} + er \cos \theta$$

$$r = \frac{\frac{mC^2}{\alpha}}{1 + e \cos \theta}$$

C'est l'équation d'une conique de paramètre

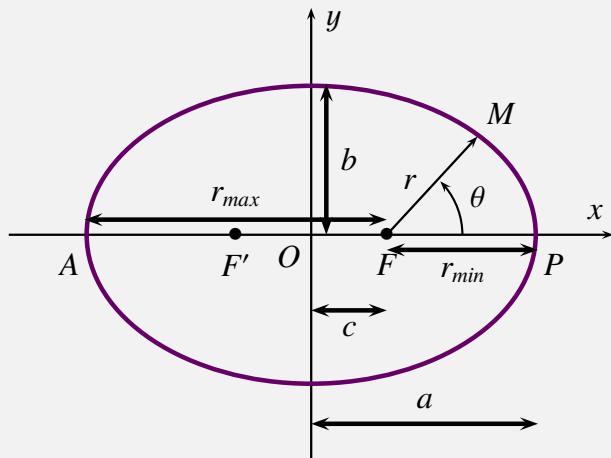
$$p = \frac{mC^2}{|\alpha|}$$

Et d'excentricité

$$e = \|\vec{A}\|$$

Discussion

- Si $e = 0 \implies A = cte = 0 \implies E_m < 0$: trajectoire circulaire
- Si $0 < e < 1 \implies E_m < 0$: trajectoire elliptique
- Si $e = 1 \implies E_m = 0$: trajectoire parabolique
- Si $e > 1 \implies E_m > 0$: trajectoire hyperbolique

Remarque**Pour une trajectoire elliptique**

- En coordonnées cartésiennes son équation (avec) est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Avec si $a > b$:

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad ; \quad c = ea \quad ; \quad p = \frac{b^2}{a} \implies b = \sqrt{ap}$$

- En coordonnées polaires son équation **avec origine au foyer F** est :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Avec

$$0 < e < 1$$

- Apogée ($\dot{r} = 0$) : $r_{max} = \frac{p}{1 - e}$
- Périgée ($\dot{r} = 0$) : $r_{min} = \frac{p}{1 + e}$
- Grand axe a : $r_{min} + r_{max} = 2a \implies a = \frac{p}{1 - e^2}$
- Petit axe b : $b = \sqrt{ap} \implies b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$

7.3.2.3 L'étude de quelques trajectoires

7.3.2.3.1 Trajectoire circulaire .

C'est l'exemple des satellites autour de la terre.

La R.F.D dans le repère de Fresnet donne : $\frac{GM_T m_s}{r^2} = m_s \frac{V^2}{r}$ donc :

- La vitesse :

$$V = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

- La période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \implies T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$$

- L'énergie mécanique : $E_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \implies E_m = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GmM_T}{r}$ ce qui donne

$$E_m = -\frac{GmM_T}{2r} = -\frac{\alpha}{2r}$$

7.3.2.3.2 Trajectoire elliptique .

C'est l'exemple des planètes autour du soleil.

- L'énergie mécanique : $E_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \implies E_m = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{mC^2}{2} \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$ Pour $r = 0$ on a deux solutions r_{min} et r_{max} qui sont solutions de l'équation

$$E_m = \frac{mC^2}{2} \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha}{r} \implies E_m r^2 + \alpha r - \frac{mC^2}{2} = 0$$

La somme des solutions de cette équation du second ordre donne

$$r_{min} + r_{max} = 2a = -\frac{\alpha}{E_m}$$

Donc

$$E_m = -\frac{\alpha}{2a} = -\frac{GmM}{2a}$$

L'énergie mécanique est inversement proportionnel au grand axe de l'ellipse

- La période du mouvement :

On rappelle que $p = \frac{mC^2}{\alpha}$ et $b = \sqrt{ap}$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} \implies A = \frac{C}{2}T = \pi ab$$

donc :

$$\frac{C^2}{4}T^2 = \pi^2 a^2 b^2 \implies T^2 = \frac{4}{C^2} \pi^2 a^3 p$$

Or $\alpha = GmM$ on tire que

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \implies \frac{T^2}{a^3} = cte$$

C'est la troisième loi de Kepler

Remarque

On trouvé que :

	<i>Orbite circulaire</i>	<i>Orbite elliptique</i>
<i>L'énergie mécanique</i>	$-\frac{GmM}{2R}$	$-\frac{GmM}{2a}$
<i>La période</i>	$\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R^3}$	$\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a^3}$

Donc pour retrouver les expressions de l'énergie mécanique et la période du mouvement elliptique à partir du mouvement circulaire , il suffit de remplacer le rayon R par le grand axe de l'ellipse a

7.3.2.3.3 Vitesse de libération .

C'est la vitesse qu'il faut fournir à un objet depuis la terre pour qu'il s'échappe de l'attraction terrestre.

Son orbite doit être parabolique ou hyperbolique c'est dire son $E_m \geq 0$

$$\text{Or } E_m = \frac{1}{2}mV_o^2 - \frac{GmM_T}{R_T} \geq 0 \Rightarrow V_o \geq \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_oR_T}$$

$$V_\ell = \sqrt{2g_oR_T} = 11,3 \text{ km/s} = 40,7 \cdot 10^3 \text{ km/h}$$

7.3.2.3.4 Rayon de la trajectoire circulaire d'un satellite géostationnaire .

Un satellite est dit géostationnaire s'il a la même période de rotation T que la terre sur elle même $T = 24.h = 86400 \text{ s}$

$$\text{On a } V = R\omega = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

$$R = \left[\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2} \right]^{1/3}$$

$$\text{A.N : } R = 42300 \text{ km} = 6,6 R_T$$

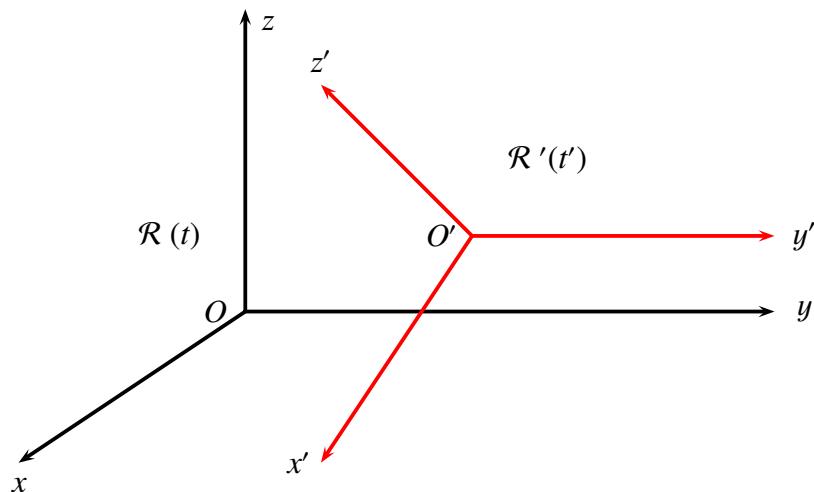
$$\text{Donc sa hauteur } h = R - R_T = 36000 \text{ km} = 5,6 R_T$$

CHAPITRE 8

MÉCANIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

8.1 Introduction

Soient \mathcal{R} ($Oxyzt$) un référentiel galiléen et \mathcal{R}' ($O'x'y'z't'$) un autre référentiel en mouvement par rapport à \mathcal{R} .



- \mathcal{R} = repère fixe dit repère absolu.

- \mathcal{R}' = repère en mouvement dit repère relatif.

On rappelle que en mécanique classique ,le temps est absolu c'est à dire ne dépend pas du référentiel et par conséquent

$$t_{\mathcal{R}} = t_{\mathcal{R}'} = t \implies dt_{\mathcal{R}} = dt_{\mathcal{R}'} = dt$$

Dans la suite on s'intéresse aux mouvements relatifs :

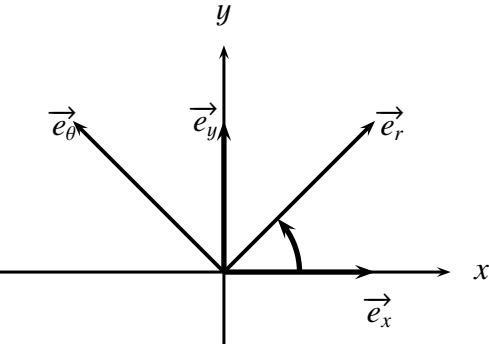
- **Translation** : Les axes de \mathcal{R}' restent constamment parallèle à ceux de \mathcal{R} .
- **Rotation uniforme** : autour d'un axe.

8.2 L'étude cinématique

8.2.1 Axe instantané de rotation

8.2.1.1 L'étude d'un exemple

En coordonnées cylindriques le vecteur \vec{e}_r ainsi \vec{e}_θ tourne autour de l'axe oz d'un angle dans le sens direct



Que vaut $\frac{d\vec{e}_r}{dt}_{/\mathcal{R}'}$ et $\frac{d\vec{e}_r}{dt}_{/\mathcal{R}}$ ainsi $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}_{/\mathcal{R}'}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}_{/\mathcal{R}}$?

- $\frac{d\vec{e}_r}{dt}_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$; car \vec{e}_r est un vecteur lié à \mathcal{R}' .
- $\frac{d\vec{e}_r}{dt}_{/\mathcal{R}} = \cdot \vec{e}_\theta$

Or : $\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$ d'où : $\frac{d\vec{e}_r}{dt}_{/\mathcal{R}} = \cdot \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$.

Ainsi

- $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$; car \vec{e}_θ est un vecteur lié à \mathcal{R}' .
- $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}_{/\mathcal{R}} = -\cdot \vec{e}_r$

Or : $\vec{e}_r = -\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta$ d'où : $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}_{/\mathcal{R}} = \cdot \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta$.

On pose :

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z = \Omega \vec{e}_z$$

$\vec{\Omega}$ est appelé le **vecteur instantanée de rotation** du repère relatif \mathcal{R}' par rapport au repère absolu \mathcal{R} ; il caractérise la rotation du repère relatif \mathcal{R}' par rapport au repère absolu \mathcal{R}

Par conséquent

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt}_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta$$

Conclusion:

Si \vec{A} un vecteur lié au repère relatif \mathcal{R}' alors

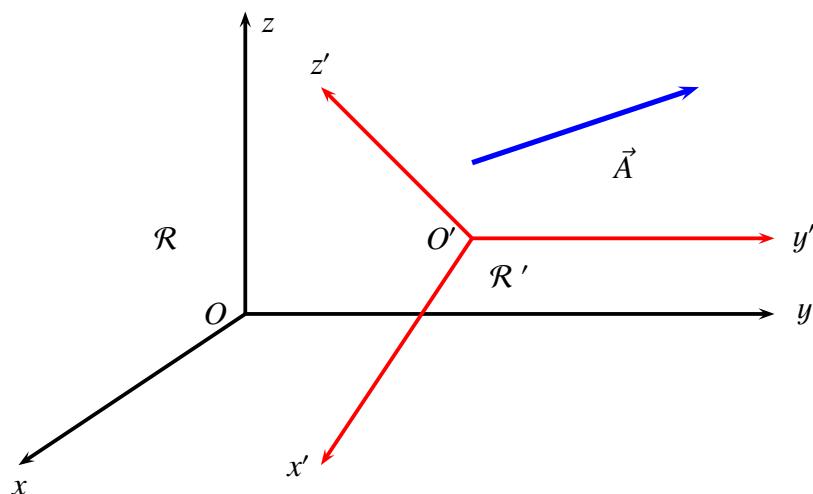
$$\frac{d\vec{A}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A}$$

Remarques

- $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}') = -\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$
- $\vec{\Omega}$ est porté par l'axe de rotation.
- $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_3) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3)$: relation de **châles**.

8.2.1.2 Relation fondamentale de la dérivation vectorielle

Soit \vec{A} un vecteur libre non lié à \mathcal{R}' qu'on connaît ses composantes dans \mathcal{R}' et on désire le dériver par rapport à \mathcal{R} .



on admet le résultat suivant :

$$\frac{d\vec{A}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{A}}{dt}_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A}$$

Remarque

1. Si \vec{A} est lié à \mathcal{R}' alors on retrouve le résultat précédent.
2. Pour un mouvement de translation : $\vec{\Omega} = \vec{0}$ d'où :

$$\frac{d\vec{A}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{A}}{dt}_{/\mathcal{R}'}$$

C'est à dire dériver par rapport à \mathcal{R} ou \mathcal{R}' c'est la même chose : autrement dit la dérivation ne dépend pas du repère.

8.2.2 Composition des vitesses

Soit un point M mobile dans un référentiel relatif \mathcal{R}' en mouvement par rapport à un référentiel absolu \mathcal{R} galiléen .

On appelle :

- **La vitesse relative** $\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M/\mathcal{R}')$ la vitesse du point M dans le référentiel relatif \mathcal{R}'
- **La vitesse absolue** $\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M/\mathcal{R})$ la vitesse du point M dans le référentiel absolu \mathcal{R}

Quelle relation entre $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{V}(M/\mathcal{R}')$?

$$\text{On a : } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \implies \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}_{/\mathcal{R}} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/\mathcal{R}}$$

$$\text{d'où : } \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(O'/\mathcal{R}) + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}') + \vec{V}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

- On pose :

$$\boxed{\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

vitesse d'entraînement de M

Par conséquent :

$$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}_e + \vec{V}_r}$$

Si $M \equiv A$ lié à \mathcal{R}' alors $\vec{V}(A/\mathcal{R}') = \vec{0}$ donc :

$$\boxed{\vec{V}(A/\mathcal{R}) = \vec{V}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'A} = \vec{V}_e}$$

La vitesse d'entraînement c'est la vitesse d'un point lié à \mathcal{R}' et qui coïncide à l'instant t avec le point M .

Le point A est dit point coïncidant.

Remarques

- Dans le cas de la translation $\vec{\Omega} = \vec{0}$ donc :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}_r + \vec{V}(O'/\mathcal{R})$$

- si $O \equiv O'$ alors $\vec{V}_e = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$:

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

- si $O \equiv O'$ et M lié à \mathcal{R} alors :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

C'est une rotation pure autour de l'axe $\vec{\Omega}$

8.2.3 Composition des accélérations

On a :

- $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(O'/\mathcal{R}) + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$
- $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}}$
- $\frac{d\vec{V}(O'/\mathcal{R})}{dt} = \vec{a}(O'/\mathcal{R})$
- $\frac{d}{dt}_{/\mathcal{R}} \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{/\mathcal{R}'} \right) = \frac{d}{dt}_{/\mathcal{R}'} \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{/\mathcal{R}'} \right) + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{/\mathcal{R}'} \right) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$
- $\frac{d}{dt}_{/\mathcal{R}} (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}_{/\mathcal{R}} \right) \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{/\mathcal{R}}$
 $= \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \right]$
 $= \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$

d'où :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \vec{a}(M/\mathcal{R}') + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

On pose :

$$\vec{a}_e(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

accélération d'entraînement.

$$\vec{a}_c(M/\mathcal{R}) = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$$

accélération de Coriolis.

CAS PARTICULIERS :

1. $\vec{\Omega} = \vec{0}$ mouvement de translation alors : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ et par conséquent :

- $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(O'/\mathcal{R}) + \vec{V}(M/\mathcal{R}')$
- $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \vec{a}(M/\mathcal{R}')$.

2. $\vec{\Omega} = \vec{cte}$

$$\vec{a}_e(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}).$$

3. M lié à $\mathcal{R}' \Rightarrow$

$$\vec{a}_c(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$$

4. $\vec{\Omega} = \vec{cte}$ et $O \equiv O'$ le point M décrit un cercle

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\Omega} \wedge (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OH} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}.$$

H étant la projection de M sur l'axe $\vec{\Omega}$.

Or : $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OH} = \vec{0}$; et $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM} = -\Omega HM \vec{e}_\theta$.

donc :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}] = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

accélération centripète

5.

$$\vec{a}_e(M) \neq \frac{d\vec{V}_e(M)}{dt}$$

8.3 Dynamique dans un référentiel non galiléen

8.3.1 RFD dans un référentiel non galiléen : forces d'inertie

Soit \mathcal{R} un référentiel galiléen et \mathcal{R}' un référentiel non galiléen en mouvement quelconque par rapport à \mathcal{R} ; en général \mathcal{R}' non galiléen.

La relation fondamentale de la dynamique dans \mathcal{R} donne :

$$\sum \vec{F}_e = m \vec{a}(M/\mathcal{R})$$

$$\text{Or : } \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

$$\text{donc : } \sum \vec{F}_e - m \vec{a}_e(M) - m \vec{a}_c(M) = m \vec{a}(M/\mathcal{R}')$$

On pose :

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e(M)$$

force d'inertie d'entrainement

$$\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_c(M)$$

force d'inertie de Coriolis

D'où dans un référentiel non galiléen la R.F.D s'écrit :

$$\sum \vec{F}_e + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}')$$

Remarques

- Si le corps est en équilibre dans le référentiel relatif \mathcal{R}' alors $\vec{V}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$, $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega}$ et $\vec{V}_r = \vec{0}$ donc

$$\sum \vec{F}_e + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$$

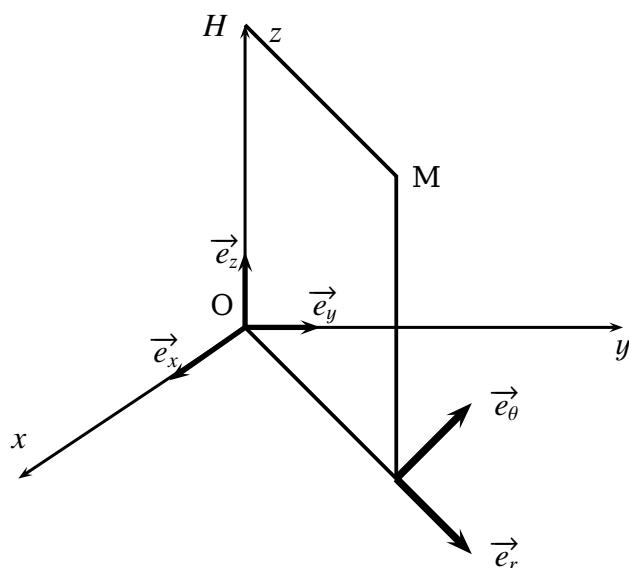
- Si $O \equiv O'$ et $\vec{\Omega} = cte$ alors

$$\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 \vec{HM}$$

- Les forces d'inertie \vec{F}_{ie} et \vec{F}_{ic} n'apparaissent que si le référentiel est non galiléen : Ce sont des pseudo-forces

8.3.2 L'énergie potentielle d'entrainement

On rappelle que si $O \equiv O'$ et $\Omega = cte$ alors la force \vec{F}_{ie} s'écrit : $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 \vec{HM}$.



Donc : $\vec{F}_{ie} \cdot d\vec{OM} = m\Omega^2 \vec{HM} \cdot d\vec{OM}$ et comme
 $\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} \implies d\vec{OM} = d\vec{OH} + d\vec{HM}$
Or : $\vec{HM} \cdot d\vec{OH} = 0$

D'où : $\vec{F}_{ie} \cdot d\overrightarrow{OM} = m\Omega^2 d(\frac{\overrightarrow{HM}^2}{2} + cte)$

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2}m\Omega^2\overrightarrow{HM}^2 + cte$$

On conclut que dans les conditions précédentes la force d'entraînement est conservative.

Remarques

1. Le travail élémentaire de la force de Coriolis :

$$\delta \mathbf{W}(\vec{F}_{ic}) = \vec{F}_{ic} \cdot d\overrightarrow{OM} \implies \delta \mathbf{W}(\vec{F}_{ic}) = -2m(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r) \cdot \vec{V}_r dt = 0$$

Donc la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas et par conséquent elle dérive d'une énergie potentielle constante.

2. Dans \mathcal{R}' non galiléen :

(a) Le T.E.C s'écrit :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \mathbf{W}(\vec{F}_{ext}) + \mathbf{W}(\vec{F}_{ie})$$

(b) Le T.M.C s'écrit : avec

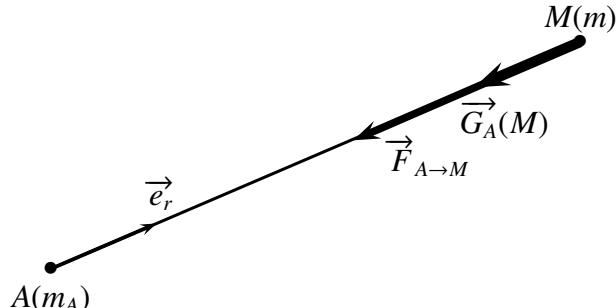
$$\overrightarrow{\sigma}_{O'}(M/\mathcal{R}') = \overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{V}_r(M)$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma}_{O'}(M/\mathcal{R}')}{dt}_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{M_{o'}}(\vec{F}_{ext}) + \overrightarrow{M_{o'}}(\vec{F}_{ie}) + \overrightarrow{M_{o'}}(\vec{F}_{ic})$$

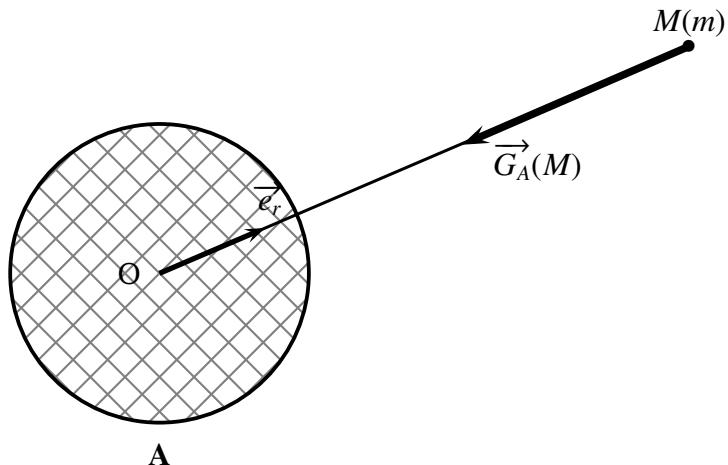
8.3.3 Applications

8.3.3.1 Préliminaire

- Tout corps A de masse m_A crée en tout point M de l'espace un champ gravitationnel centripète $\vec{G}_A(M)$.
- La force exercée par A sur un point M de masse m est : $\vec{F}_{A \rightarrow M} = m\vec{G}_A(M)$



- Si le corps A est de forme sphérique alors : $\vec{G}_A(M) = -G \frac{m_A}{r^2} \vec{e}_r$



Remarque

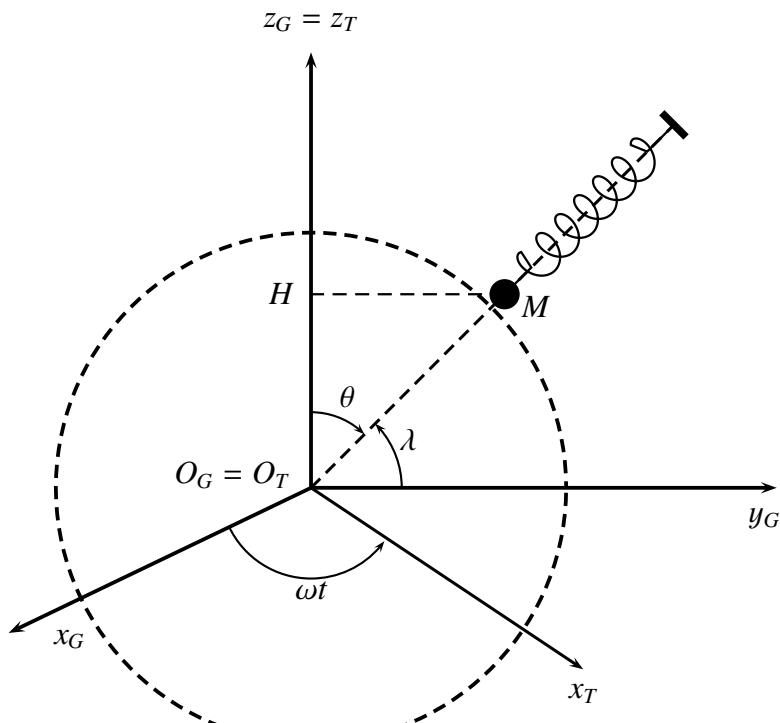
Dans l'expression de la force :

- ▶ Gravitationnelle $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$: la masse est dite masse gravitationnelle.
- ▶ RFD $\vec{F} = m \vec{a}$: la masse est dite inertielle.

On admet que les deux masses sont identiques

8.3.3.2 Définition du poids

Soit un corps accroché à un ressort en équilibre dans le référentiel terrestre non galiléen en rotation uniforme autour de $O_G z$.



On a Dans $\mathcal{R}_T : \vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \implies \vec{T} = -\vec{P}$. avec

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}(M)}$$

$\vec{g}(M)$: Champ de pesanteur.

La relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel \mathcal{R}_T non galiléen donne :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt}_{/\mathcal{R}_T} = \sum \vec{F}_e + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Or $\vec{V}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{0} \implies \vec{F}_{ic} = \vec{0}$ (équilibre relatif)

De même : $\sum \vec{F}_e = m\vec{G}_T(M) + \vec{T}$ (On néglige l'effet des autres astres autre que la terre)

Et $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = m\Omega^2 \vec{HM}$

avec Ω la pulsation propre du référentiel terrestre dans le référentiel Géocentrique.

on conclut que : $\vec{T} + m\Omega^2 \vec{HM} + m\vec{G}_T(M) = \vec{0}$.

L'équilibre donne : $\vec{T} = -\vec{P} = -m(\vec{G}_T(M) + \Omega^2 \vec{HM})$.

On tire que :

$$\boxed{\vec{g}(M) = \vec{G}_T(M) + \Omega^2 \vec{HM}}$$

Remarque

$\vec{g}(M)$ n'est pas centripète que si on néglige la rotation propre de la terre dans le référentiel Géocentrique ou aux pôles $HM = 0$.

Quelques ordre de grandeur à Béni Mellal :

- Le rayon terrestre : $R_T = 6380 \text{ km}$

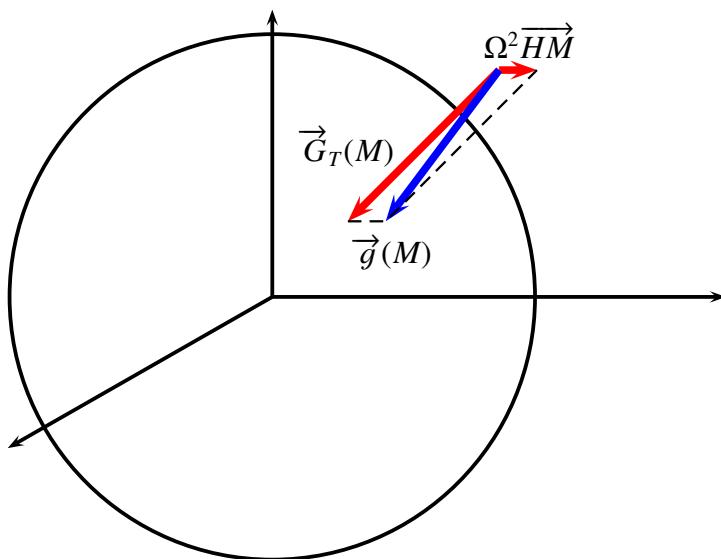
- La latitude $\lambda = 34^\circ 30'$
- La masse de la terre $m_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- La constante d'attraction universelle $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$

Tout calcul donne :

$$G_T = 9,72 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\Omega^2 HM = \frac{4\pi^2}{T^2} R_T \cos \lambda \implies \Omega^2 HM = 0,0279 \text{ m.s}^{-2}$$

On conclut que le terme $\Omega^2 \overrightarrow{HM}$ est un terme correctif



8.3.3.3 Effet de marée statique

8.3.3.3.1 Expression analytique .

Dans le référentiel de Copérnic supposé galiléen ; soit un point $M(m)$ lié au repère terrestre : $\vec{V}(M/T) = \vec{0} \implies \vec{F}_{ic} = \vec{0}$.

\vec{G}_T : le champ gravitationnel terrestre .

\vec{G}_A : le champ gravitationnel de tous les astres sauf la terre (soleil, lune,...).

\mathcal{R}_T : référentiel terrestre non galiléen en rotation par rapport à \mathcal{R}_G : $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G)$.

\mathcal{R}_G : référentiel géocentrique en translation circulaire (l'excentricité de l'ellipse terrestre est $e = 0,01671022$) par rapport référentiel de Copérnic \mathcal{R}_C , supposé galiléen.

R.F.D dans \mathcal{R}_T donne :

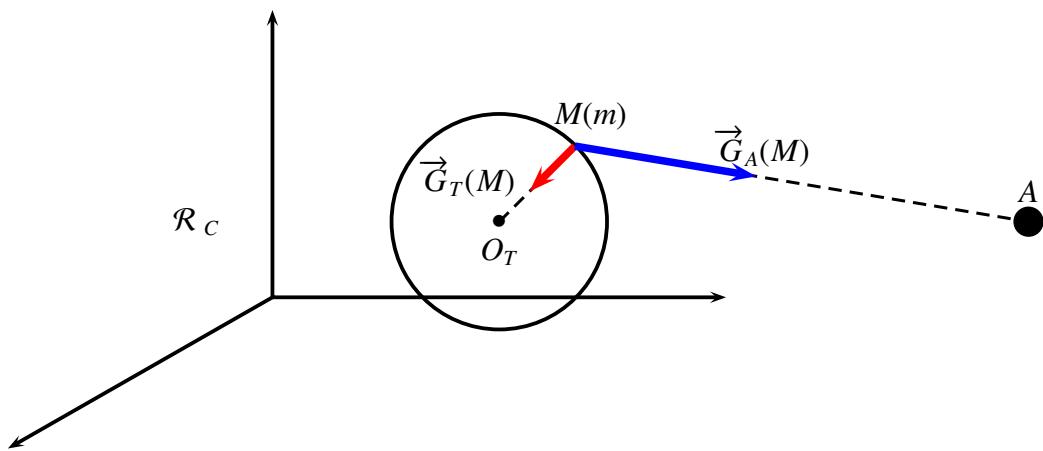
$$m\vec{d}(M/\mathcal{R}_T) = m\vec{G}_T(M) + m\vec{G}_a(M) - m\vec{d}_e(M)$$

$$\text{Or : } \vec{d}_e(M) = \vec{d}(O/\mathcal{R}_C) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

On néglige le terme (on suppose que la rotation est uniforme) : $\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$

$$\text{On tire que : } \vec{d}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{G}_T(M) + \vec{G}_a(M) - \vec{d}(O/\mathcal{R}_C) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$$

Appliquons la RFD à la terre dans le référentiel de Copérnic :



$$m_T \vec{a}(O/\mathcal{R}_C) = m_T \vec{G}_a(O) \implies \vec{a}(O/\mathcal{R}_C) = \vec{G}_a(O)$$

donc : $\vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{G}_T(M) + \vec{G}_a(M) - \vec{G}_a(O) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{G}_T(M) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + \vec{G}_a(M) - \vec{G}_a(O)}$$

On pose :

$$\vec{g}(M) = \vec{G}_T(M) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

le champ de pesanteur : terme statique

$$\boxed{\vec{e}(M) = \vec{G}_a(M) - \vec{G}_a(O)}$$

terme de marée : terme dépendant du temps

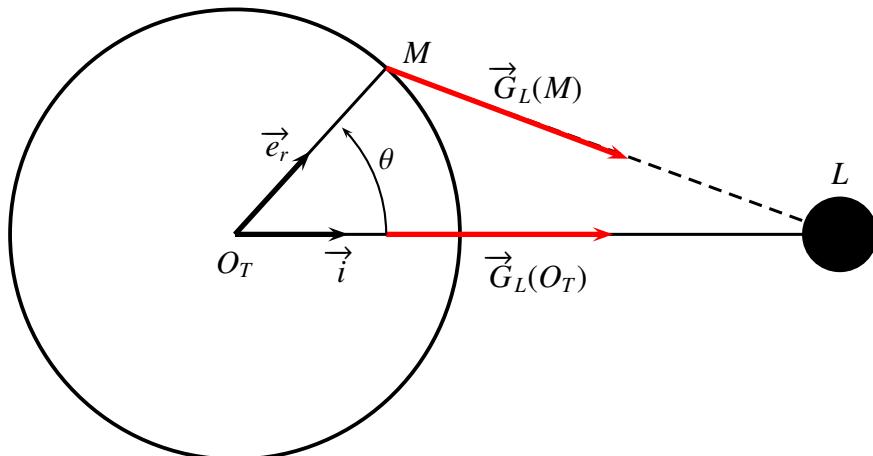
8.3.3.3.2 La marée océanique .

En supposant que la terre et la lune sont de formes sphériques et on donne :

$$R_T = 6400 \text{ km} \text{ et } d = OL = 4 \cdot 10^5 \text{ km}$$

On néglige l'effet de tous les astres sauf l'effet de la lune.

$$\text{On a : } \vec{e}(M) = \vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(O)$$



$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{C}} = \vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(O) &\implies \vec{\mathcal{C}} = Gm_L \frac{\vec{LO}}{LO^3} - Gm_L \frac{\vec{LM}}{LM^3} \\
 &\implies \vec{\mathcal{C}} = Gm_L \left[\frac{-d\vec{i}}{d^3} + \frac{\vec{OL} - \vec{OM}}{LM^3} \right] \\
 &\implies \vec{\mathcal{C}} = Gm_L \left[\frac{-d\vec{i}}{d^3} + \frac{d\vec{i} - R\vec{e}_r}{LM^3} \right] \\
 &\implies \vec{\mathcal{C}} = Gm_L \left[\frac{-d\vec{i}}{d^3} + \frac{d\vec{i} - R\vec{e}_r}{(R^2 + d^2 - 2dR\cos\theta)^{3/2}} \right] \\
 &\implies \vec{\mathcal{C}} = \frac{Gm_L}{d^3} \left[-d\vec{i} + \frac{d\vec{i} - R\vec{e}_r}{(1 - 2\frac{R}{d}\cos\theta)^{3/2}} \right] \\
 &\implies \vec{\mathcal{C}} \approx \frac{Gm_L}{d^3} \left[-d\vec{i} + (d\vec{i} - R\vec{e}_r)(1 + 3\frac{R}{d}\cos\theta) \right] \\
 &\implies \vec{\mathcal{C}} \approx \frac{Gm_L}{d^3} [3R\cos\theta\vec{i} - R\vec{e}_r + 3\frac{R^2}{d}\cos\theta\vec{e}_r]
 \end{aligned}$$

$$\vec{\mathcal{C}} \approx \frac{GRm_L}{d^3} (3\cos\theta\vec{i} - \vec{e}_r)$$

force par unité de masse

- en A : $\theta = 0 \implies \vec{e}_r = \vec{i}$

$$\vec{\mathcal{C}}(\theta = 0) = \frac{2RGm_L}{d^3} \vec{i}$$

- en B : $\theta = \frac{\pi}{2} \implies \vec{e}_r = \vec{j}$

$$\vec{\mathcal{C}}(\theta = \frac{\pi}{2}) = -\frac{RGm_L}{d^3} \vec{j}$$

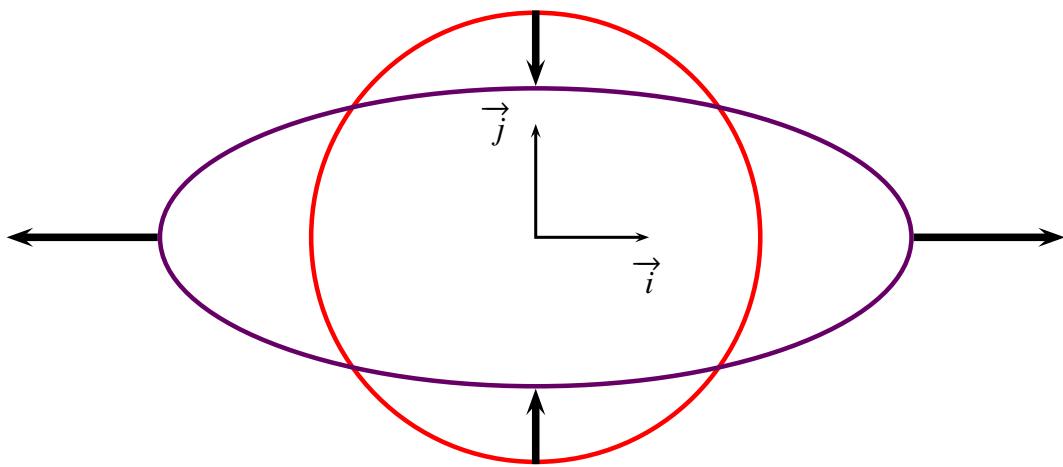
- en C : $\theta = \pi \implies \vec{e}_r = -\vec{i}$

$$\vec{\mathcal{C}}(\theta = \pi) = -\frac{2RGm_L}{d^3} \vec{i}$$

- en D : $\theta = -\frac{\pi}{2} \implies \vec{e}_r = -\vec{j}$

$$\vec{\mathcal{C}}(\theta = -\frac{\pi}{2}) = \frac{RGm_L}{d^3} \vec{j}$$

Donc les marées hautes en A et C et les marées basses en B et D.



D'où deux marées hautes et deux marées basses par jour décalé de 6H.

Remarque

Le coefficient de la marée haute est le double du coefficient de la marée basse.

— M.H

- - - N.M

— M.B

8.3.3.4 Déviation vers l'est

Voir TD

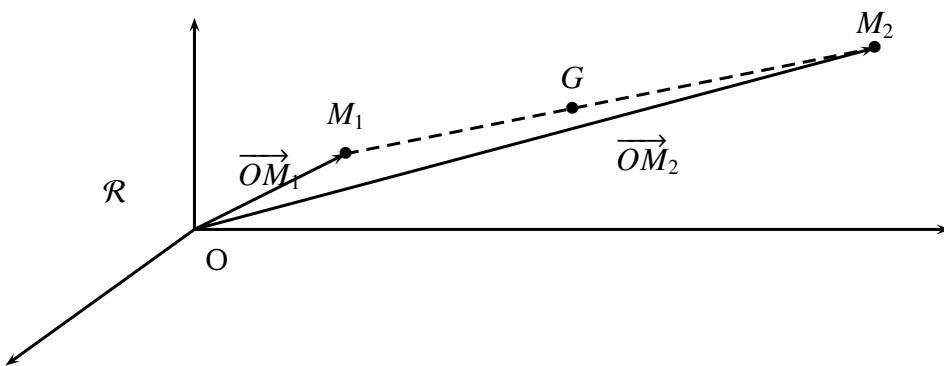
8.3.3.5 Pendule de Foucault

Voir CNC 99

CHAPITRE 9

SYSTÈME DE DEUX POINTS MATÉRIELS

Dans un **repère galiléen** \mathcal{R} , considérons un système de deux points matériels $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$



9.1 Grandeur cinématiques

9.1.1 Barycentre du système

Le barycentre G du système $\{M_1, M_2\}$ est donné par :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \implies \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

Soit O un point quelconque :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2} \implies \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1)$$

Dérivons (1) par rapport au temps on obtient :

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}) = \frac{m_1 \vec{V}(M_1/\mathcal{R}) + m_2 \vec{V}(M_2/\mathcal{R})}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{a}(G/\mathcal{R}) = \frac{m_1 \vec{a}(M_1/\mathcal{R}) + m_2 \vec{a}(M_2/\mathcal{R})}{m_1 + m_2}$$

Remarque

Puisque $m_1 \overrightarrow{GM}_1 + m_2 \overrightarrow{GM}_2 = \vec{0}$ alors les points M_1, G et M_2 sont alignés.

9.1.2 Repère Barycentrique

C'est le repère centré en G et dont les axes restent constamment parallèles à ceux de \mathcal{R} , on le note $\mathcal{R}_G, \mathcal{R}_B$ ou \mathcal{R}^*

Conséquence :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \vec{0} \implies \forall \vec{A} : \frac{d\vec{A}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{A}}{dt}_{/\mathcal{R}^*}$$

NOTATION

- $\vec{V}(M_1/\mathcal{R}) = \vec{V}_1$ • $\vec{V}(M_2/\mathcal{R}) = \vec{V}_2$
- $\vec{a}(M_1/\mathcal{R}) = \vec{a}_1$ • $\vec{a}(M_2/\mathcal{R}) = \vec{a}_2$
- $\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$: vitesse relative de M_2 par rapport à M_1 dans le repère \mathcal{R} .
- $\vec{V}_{1B} = \vec{V}(M_1/\mathcal{R}_B) = \frac{d\overrightarrow{GM}_1}{dt}_{/\mathcal{R}_B}$: vitesse de M_1 dans \mathcal{R}_B
- $\vec{V}_{2B} = \vec{V}(M_2/\mathcal{R}_B) = \frac{d\overrightarrow{GM}_2}{dt}_{/\mathcal{R}_B}$: vitesse de M_2 dans \mathcal{R}_B
- $\vec{V}_B = \vec{V}_{2B} - \vec{V}_{1B}$: vitesse relative de M_2 par rapport à M_1 dans le repère barycentrique \mathcal{R}^* .

On conclut que :

$$\vec{V}_{1B} = \vec{V}_1 - \vec{V}_G \quad ; \quad \vec{V}_{2B} = \vec{V}_2 - \vec{V}_G$$

Ainsi

$$\vec{V} = \vec{V}_B$$

c'est à dire la vitesse relative à la même valeur dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}^* .

- On a :
- $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{GM}_2 - \overrightarrow{GM}_1 = \vec{r}_{2B} - \vec{r}_{1B}$
- $m_1 \overrightarrow{GM}_1 + m_2 \overrightarrow{GM}_2 = \vec{0} \implies m_1 \vec{r}_{1B} + m_2 \vec{r}_{2B} = \vec{0}$

On conclut que :

$$\vec{r}_{1B} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \| \quad \vec{r}_{2B} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{V}_{1B} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{V} \quad \parallel \quad \vec{V}_{2B} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}$$

$$\vec{a}_{1B} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{a} \quad \parallel \quad \vec{a}_{2B} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{a}$$

9.1.3 Quantité de mouvement

9.1.3.1 Dans le repère \mathcal{R}

Dans le repère \mathcal{R} on a :

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_1 \text{ et } \vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_2$$

La quantité de mouvement totale du système est :

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \implies \vec{P} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}_G \text{ donc}$$

$$\vec{P} = (m_1 + m_2) \vec{V}_G = m_T \vec{V}(G/\mathcal{R})$$

9.1.3.2 Dans le repère \mathcal{R}^* ; masse réduite

On a :

$$\vec{P}_{1B} = m_1 \vec{V}_{1B} = m_1 (\vec{V}_1 - \vec{V}_G) = m_1 (\vec{V}_1 - \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2}) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$$

On pose :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \implies \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

masse réduite du système

On déduit que :

$$\vec{P}_{1B} = -\mu \vec{V} \quad \parallel \quad \vec{P}_{2B} = \mu \vec{V}$$

On tire que :

$$\vec{P}_B = \vec{P}_{1B} + \vec{P}_{2B} = \vec{0}$$

Conclusion:

La quantité de mouvement totale du système est nulle dans le repère barycentrique.

9.2 Grandeurs cinétiques

9.2.1 Le moment cinétique du système

9.2.1.1 Dans le repère \mathcal{R}^*

$$\vec{\sigma}^*(M_1/G) = \overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1 \vec{V}_1 = \overrightarrow{GM}_1 \wedge \vec{P}_{1B}$$

$$\vec{\sigma}^*(M_2/G) = \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2 \vec{V}_2 = \overrightarrow{GM}_2 \wedge \vec{P}_{2B}$$

Le moment cinétique total du système est donné par :

$$\vec{\sigma}^*(S) = \vec{\sigma}^*(M_1/G) + \vec{\sigma}^*(M_2/G)$$

$$\implies \vec{\sigma}^* = \overrightarrow{GM}_1 \wedge \vec{P}_{1B} + \overrightarrow{GM}_2 \wedge \vec{P}_{2B} = (\overrightarrow{GM}_2 - \overrightarrow{GM}_1) \wedge \vec{P}_{2B}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}^*(S) = \vec{r} \wedge \mu \vec{V}}$$

9.2.1.2 Dans le repère \mathcal{R}

$$\text{On a : } \vec{\sigma}(M_1/O) = \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1 \vec{V}_1 \quad \text{ainsi} \quad \vec{\sigma}(M_2/O) = \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2 \vec{V}_2$$

$$\implies \vec{\sigma}(S/O) = \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1 \vec{V}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2 \vec{V}_2$$

$$\implies \vec{\sigma}(S/O) = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_1) \wedge m_1(\vec{V}_G + \vec{V}_{1B}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_2) \wedge m_2(\vec{V}_G + \vec{V}_{2B})$$

$$\implies \vec{\sigma}(S/O) = \overrightarrow{OG} \wedge m_1 \vec{V}_G + \overrightarrow{OG} \wedge m_1 \vec{V}_{1B} + \overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1 \vec{V}_G + \overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1 \vec{V}_{1B} + \overrightarrow{OG} \wedge m_2 \vec{V}_G + \overrightarrow{OG} \wedge m_2 \vec{V}_{2B} + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2 \vec{V}_G + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2 \vec{V}_{2B}$$

$$\implies \vec{\sigma}(S/O) = \overrightarrow{OG} \wedge (m_1 + m_2) \vec{V}_G + \overrightarrow{OG} \wedge (m_1 \vec{V}_{1B} + m_2 \vec{V}_{2B}) + (m_1 \overrightarrow{GM}_1 + m_2 \overrightarrow{GM}_2) \wedge \vec{V}_G + \overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1 \vec{V}_{1B} + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2 \vec{V}_{2B}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(S/O) = \vec{\sigma}^*(S) + \overrightarrow{OG} \wedge M_T \vec{V}_G}$$

c'est le premier théorème de Koenig

9.2.2 L'énergie cinétique du système

9.2.2.1 Dans le repère \mathcal{R}^*

$$\text{On a : } \mathcal{E}_{CB1} = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_{1B}^2 = \frac{P_{1B}^2}{2m_1}, \quad \mathcal{E}_{CB2} = \frac{1}{2} m_2 \vec{V}_{2B}^2 = \frac{P_{2B}^2}{2m_2}$$

L'énergie totale du système est donnée par :

$$\mathcal{E}_{CB} = \frac{P_{1B}^2}{2m_1} + \frac{P_{2B}^2}{2m_2} = \frac{P_{2B}^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{P_{2B}^2}{2\mu}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{CB} = \mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2} \mu \vec{V}^2}$$

μ : masse réduite du système.

\vec{V} : la vitesse relative de M_2 par rapport à M_1

9.2.2.2 Dans le repère \mathcal{R}

$$\text{On a : } \mathcal{E}_{C_1} = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (\vec{V}_G + \vec{V}_{1B})^2 = \frac{1}{2} m_1 (\vec{V}_G^2 + \vec{V}_{1B}^2 + 2 \vec{V}_G \cdot \vec{V}_{1B})$$

De même :

$$E_{C_2} = \frac{1}{2}m_2\vec{V}_2^2 = \frac{1}{2}m_2(\vec{V}_G + \vec{V}_{2B})^2 = \frac{1}{2}m_2(\vec{V}_G^2 + \vec{V}_{2B}^2 + 2\vec{V}_G \cdot \vec{V}_{2B})$$

l'énergie cinétique totale du système s'écrit :

$$\mathcal{E}_C(S) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{V}_G^2 + \frac{1}{2}(m_1\vec{V}_{1B}^2 + m_2\vec{V}_{2B}^2) + \vec{V}_G \cdot (m_1\vec{V}_{1B} + m_2\vec{V}_{2B})$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{E}_C(S) = \mathcal{E}_{CB} + \frac{1}{2}M_T\vec{V}_G^2}$$

le deuxième théorème de Koenig

Remarque

Dans \mathcal{R}^* toutes les quantités s'expriment en fonction de :

- la masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
- la vitesse relative $\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}^*$ de M_2 par rapport à M_1 .

9.3 Dynamique du système

Supposons que les deux points sont soumis à :

► M_1 :

- \vec{F}_{i1} : force exercée par M_2
- \vec{F}_{e1} : force exercée par le milieu extérieur du système sur M_1

► M_2 :

- \vec{F}_{i2} : force exercée par M_1
- \vec{F}_{e2} : force exercée par le milieu extérieur du système sur M_2

Les forces \vec{F}_{e1} et \vec{F}_{e2} sont des forces extérieures et les deux forces \vec{F}_{i1} et \vec{F}_{i2} sont des forces intérieures qui obéissent au principe de l'action et la réaction (troisième loi de Newton) c'est à dire

$$\boxed{\vec{F}_{i1} = -\vec{F}_{i2}}$$

9.3.1 Relation fondamentale de la dynamique

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel galiléen \mathcal{R} pour chaque point du système :

► Pour M_1 : $m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{e1}$ (E1)

► Pour M_2 : $m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{e2}$ (E2)

(E1) + (E2) donne $m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2}$ donc la RFD pour le système s'écrit

$$\boxed{m_T\vec{a}(G/\mathcal{R}) = \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2}}$$

Théorème de la résultante cinétique

Conclusion:

Le mouvement du barycentre est identique à celui d'un point matériel de masse m_T soumis à une force égale à la résultante des forces extérieures

$$m_T \vec{a}(G/\mathcal{R}) = \vec{F}_{ext}$$

Remarque

- Le Théorème de la résultante cinétique ne fait apparaître que les forces extérieures.
- (E2)-(E1) donne :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}^*}{dt} = \frac{\vec{F}_{i2}}{\mu} + \frac{\vec{F}_{e2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{e1}}{m_1}$$

9.3.2 Théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen

9.3.2.1 Moment des forces en un point O fixe dans \mathcal{R} .

Calculons les moments de tous les forces appliquées en un point O fixe dans \mathcal{R} .

- $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{i1}) = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_{i1}$; • $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{i2}) = \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_{i2}$ donc :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) = \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{F}_{i2} = \vec{\mathcal{M}}_O(int) = \vec{0}$$

puisque \vec{F}_{i2} est colinéaire avec $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

On retient que pour un système de deux points

$$\sum_{i=1}^N \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{\mathcal{M}}_O(ext)$$

9.3.2.2 Moment des forces en G barycentre

Calculons les moments de tous les forces appliquées en G barycentre du système :

- $\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{i1}) = \overrightarrow{GM}_1 \wedge \vec{F}_{i1}$; • $\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{i2}) = \overrightarrow{GM}_2 \wedge \vec{F}_{i2}$ donc :

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_i) = \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{F}_{i2} = \vec{0}$$

puisque \vec{F}_{i2} est colinéaire avec $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

On retient que pour un système de deux points

$$\sum_{i=1}^N \vec{\mathcal{M}}_G = \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{ext})$$

9.3.2.3 Théorème du moment cinétique barycentrique

On a d'après le théorème de Koenig $\vec{\sigma}(S/O) = \overrightarrow{OG} \wedge M_T \vec{V}_G + \vec{\sigma}^*(S)$ donc :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(ext) = \frac{d\vec{\sigma}^*(S/O)}{dt} / \mathcal{R} = \frac{d\vec{\sigma}^*(S)}{dt} / \mathcal{R} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}_e$$

Sachant que :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \implies \vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{GM} \wedge \vec{F}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}}$$

On en déduit le théorème du moment cinétique barycentrique

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}^*(S)}{dt} / \mathcal{R}^* = \vec{\mathcal{M}}_G(ext)}$$

9.3.3 Puissance des forces intérieures

► Puissance des forces extérieures :

$$\mathcal{P}(ext) = \vec{F}_{e1} \cdot \vec{V}_1 + \vec{F}_{e2} \cdot \vec{V}_2 = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{V}_G$$

► Puissance des forces intérieures :

$$\mathcal{P}(int) = \vec{F}_{i1} \cdot \vec{V}_1 + \vec{F}_{i2} \cdot \vec{V}_2 = \vec{F}_{i2} \cdot \vec{V} = \vec{F}_{i2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}_{i2} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt}$$

Conclusion:

La puissance des forces intérieures est en générale non nulle pour un système déformable , par contre nulle pour un système indéformable $M_1 M_2 = cte$

9.3.4 Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen

D'après ce qui précède on tire que :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \mathbf{W}(\vec{F}(ext)) + \mathbf{W}(\vec{F}(int))$$

9.3.5 L'énergie potentielle d'interaction

- Dans le repère \mathcal{R}
- $$\delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{i1} \cdot d\overrightarrow{OM}_1 + \vec{F}_{i2} \cdot d\overrightarrow{OM}_2 = \vec{F}_{i2} \cdot (d\overrightarrow{OM}_2 - d\overrightarrow{OM}_1)$$

$$\boxed{\delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{i2} \cdot d\overrightarrow{M_1 M_2}}$$

- Dans \mathcal{R}_B

$$\delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}_B} = \vec{F}_{i1} \cdot d\overrightarrow{GM_1} + \vec{F}_{i2} \cdot d\overrightarrow{GM_2} = \vec{F}_{i2} \cdot (d\overrightarrow{GM_2} - d\overrightarrow{GM_1})$$

$$\delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}_B} = \vec{F}_{i2} \cdot d\overrightarrow{M_1 M_2}$$

Conclusion:

Pour un système de deux points matériels le travail des forces intérieures ne dépend pas du référentiel et non nul pour un système déformable

Si on pose : $\vec{F}_{i1} = -f(r) \vec{e}_r$ et $\vec{F}_{i2} = f(r) \vec{e}_r$, ainsi $\overrightarrow{M_1 M_2} = r \vec{e}_r$
 Donc : $\delta \mathbf{W} = f(r) \vec{e}_r \cdot d(r \vec{e}_r) = f(r) \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + rd\theta \vec{e}_\theta)$
 $\Rightarrow \delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}_B} = f(r) dr (= -d\mathcal{E}_p)$ si \vec{F}_{i2} est conservative.

$$\mathcal{E}_p(int) = - \int f(r) dr$$

l'énergie potentielle d'interaction

9.3.6 Énergie mécanique

Dans le référentiel \mathcal{R} on a :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p(ext) + \mathcal{E}_p(int)$$

et par conséquent :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \mathbf{W}(\vec{F}_{NC})$$

Pour un système保守的 l'énergie mécanique est constante (l'intégrale première de l'énergie)

9.4 Cas d'un système isolé de deux points matériels

Le système est isolé si

$$\vec{F}_{e1} = \vec{F}_{e2} = \vec{0}$$

9.4.1 Conséquences

- Conservation de la quantité de mouvement dans \mathcal{R} .

$$\vec{F}(ext) = \vec{0} \implies \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{V}_G = \vec{cte}$$

- $\vec{V}_G = \vec{Cte}$ donc le référentiel barycentrique est **galiléen**.
- Conservation de l'énergie mécanique barycentrique

$$\mathcal{E}_m^* = \mathcal{E}_c^* + \mathcal{E}_p(int) = cte$$

- Le moment cinétique barycentrique est conservé :

$$\vec{\mathcal{M}}_G(int) = \vec{0} \implies \vec{\sigma}^* = \vec{cte}$$

Dans le repère barycentrique le mouvement est plan.

9.4.2 Réduction canonique :Mobile réduit équivalent

On a établit que dans **le repère barycentrique \mathcal{R}^*** que :

- $\vec{\sigma}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{V}^*$
- $\mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2}\mu \vec{V}^{*2}$
- $\frac{d\vec{V}^*}{dt} = \frac{\vec{F}_{i2}}{\mu} + \frac{\vec{F}_{e2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{e1}}{m_1} = \frac{\vec{F}_{i2}}{\mu} \implies$

$$\mu \frac{d\vec{V}^*}{dt} = \vec{F}_{i2}$$

Conclusion:

Dans le repère barycentrique le système isolé de deux points est équivalent à un seul point P fictif (nommée mobile équivalent)tel que $GP = r = M_1M_2$ et animé de la vitesse $\vec{V}^* = \vec{V}$ soumis à la force \vec{F}_{i2} :c'est la réduction canonique.

Remarque

Connaissant le mouvement du barycentre G du système dans le référentiel \mathcal{R} (c'est à dire $\vec{OG}(t)$) et le mouvement du mobile équivalent dans le repère barycentrique \mathcal{R}^* (c'est à dire $\vec{r}(t)$) on peut déduire le mouvement des deux points M_1 et M_2 :

$$\vec{OM}_1(t) = \vec{OG}(t) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}(t)$$

$$\vec{OM}_2(t) = \vec{OG}(t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}(t)$$

Conclusion:

La trajectoire du mobile équivalent (ou réduit) dans le référentiel barycentrique donne, par homothétie, celles des deux particules dans ce référentiel

CHAPITRE 10

MÉCANIQUE DU SOLIDE

10.1 CINÉMATIQUE DU SOLIDE

10.1.1 Définition d'un solide

On appelle un corps solide (S) si la distance entre deux points quelconque du solide A et B est constante

$$(S) = \text{solide} \implies \forall (A, B) \in S; \| \vec{AB} \| = \text{cte}$$

Remarque

Si la distance entre les deux points A et B est variable on dit que le système est déformable.

10.1.2 Barycentre d'un solide. Repère barycentrique

On définit le centre de masse ou barycentre d'un solide (S) par :

$$\iiint_{(S)} \vec{GM} dm = \vec{0}$$

Soit O un point quelconque de \mathcal{R} et sachant que : $\vec{GM} = \vec{OM} - \vec{OG}$ alors en posant m la masse totale du solide on obtient :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \iiint \vec{OM} dm$$

En dérivant la relation obtenue par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} on obtient

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}) = \frac{1}{m} \iiint \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm$$

De même

$$\vec{a}(G/\mathcal{R}) = \frac{1}{m} \iiint \vec{a}(M/\mathcal{R}) dm$$

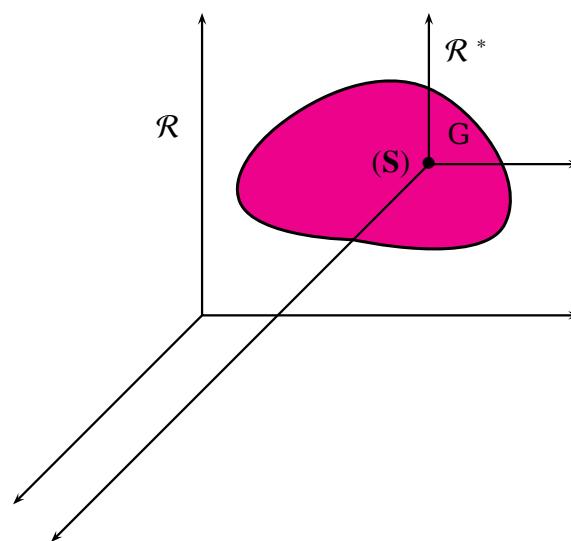
On en déduit que la quantité de mouvement totale du solide est

$$\vec{P}(S/\mathcal{R}) = \iiint \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm \implies \vec{P}(S/\mathcal{R}) = m \vec{V}(G/\mathcal{R})$$

On retient que : La quantité du mouvement du solide est équivalent à la quantité d'un point matériel G (centre de masse) affecté de la masse totale du solide.

On définit le repère barycentrique $\mathcal{R}_B = R^* = \mathcal{R}_G$ le repère d'origine le centre de masse G et dont les axes restent constamment parallèle à ceux de \mathcal{R} c'est à dire

$$\vec{\Omega}(R_G/\mathcal{R}) = \vec{O}$$



Remarque

- Le centre de masse appartient à l'intersection des plans de symétrie.
- Le centre de masse est confondu avec le centre de symétrie.
- Pour un système discret

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Activité

1. Déterminer la position du centre de masse G des courbes homogènes suivantes :
 - Fil linéique homogène de masse m et de longueur l
 - Demi-cercle de rayon R .
 - Quart de cercle de rayon R .
 - Demi disque de masse m et de rayon R
 - Cône de révolution homogène, de masse M , de hauteur h , dont la base est un disque de rayon R . (On commence par la détermination du volume)
 - Plaque rectangulaire homogène de masse m et de longueur a et de largeur b .
2. Déterminer les vecteurs \overrightarrow{GA} et \overrightarrow{GB} d'un bipoint $A(m_A)$ et $B(m_B)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{r}$. Discuter le cas où $m_A \gg m_B$.

Correction

1. Détermination de la position du centre de masse G des courbes homogènes suivantes :

- Fil linéique homogène de masse m et de longueur l

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} l \overrightarrow{e_x}$$

- Demi-cercle de rayon R d'axe de symétrie $\overrightarrow{e_y}$.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2R}{\pi} \overrightarrow{e_y}$$

- Quart de cercle de rayon R .

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2R}{\pi} (\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y})$$

(d) Demi disque de masse m et de rayon R d'axe de symétrie \vec{e}_y .

$$\overrightarrow{OG} = \frac{4R}{3\pi} \vec{e}_y$$

(e) Plaque rectangulaire homogène de masse m et de longueur a et de largeur b .

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(a \vec{e}_x + b \vec{e}_y)$$

(f) Cône de révolution homogène, de masse M, de hauteur h, dont la base est un disque de rayon R.(On commence par la détermination du volume)

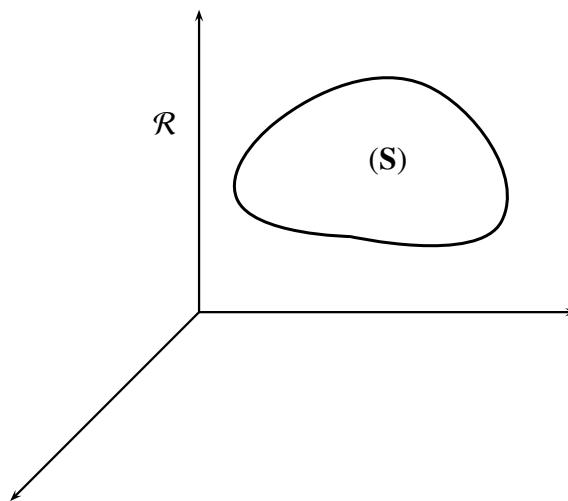
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \implies \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}h \vec{e}_z$$

2. Déterminer les vecteurs \overrightarrow{GA} et \overrightarrow{GB} d'un bipoint $A(m_A)$ et $B(m_B)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{r}$.
Discuter le cas où $m_A \gg m_B$.

10.1.3 Cinématique du solide

Soit (S) un solide et \mathcal{R} un référentiel.

Puisque (S) est indéformable alors $\forall (A, B) \in S \implies \|\overrightarrow{AB}\| = cte$
c'est à dire $\overrightarrow{AB}^2 = cte \implies \frac{d\overrightarrow{AB}^2}{dt/\mathcal{R}} = 0$



Sachant que $\frac{d\overrightarrow{AB}^2}{dt/\mathcal{R}} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt/\mathcal{R}}$

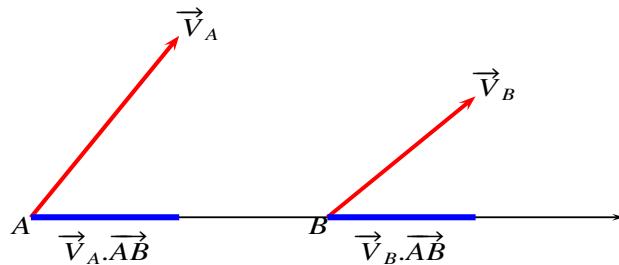
Or $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt/\mathcal{R}} = \vec{V}(B/\mathcal{R}) - \vec{V}(A/\mathcal{R})$.

Il en résulte que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}(B/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}(A/\mathcal{R})$$

le champs des vitesses d'un solide est équiprojectif

Et par conséquent le champ des vitesses d'un solide est un torseur.



En effet :

Appliquons la relation de dérivation vectorielle d'un vecteur avec \mathcal{R}' le référentiel lié au solide S :

$$\frac{d \overrightarrow{AB}}{dt/\mathcal{R}} = \frac{d \overrightarrow{AB}}{dt/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{V}(B/\mathcal{R}) - \overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

C'est à dire

$$\boxed{\overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(B/\mathcal{R}) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})}$$

10.1.4 Mouvement d'un solide

10.1.4.1 mouvement de translation

On dit que le mouvement du solide S est une translation si tous les points ont même vitesse quelque soit le temps t , c'est à dire

$$(S) \text{ en translation} \implies \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

C'est à dire que $\overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(B/\mathcal{R}) \implies \overrightarrow{a}(A/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}(B/\mathcal{R}) \forall t$

Exemple

- Translation rectiligne.
- Translation circulaire.

10.1.4.2 mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Δ est l'axe de rotation ; posons $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_\Delta$.

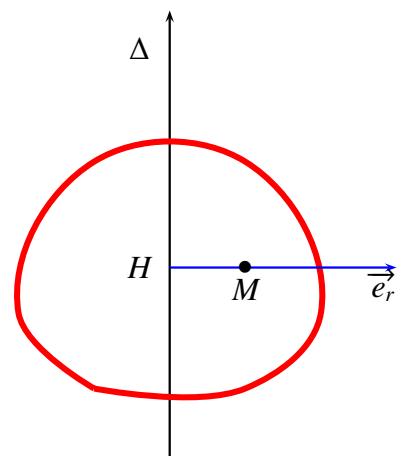
On en déduit que $\forall O \in \Delta, \overrightarrow{V}(O) = \vec{0}$

Pour tout point M de S , il existe un point H projection de M sur Δ .

Posons $HM = r$; le mouvement de M est une rotation pure autour de Δ , et donc sa trajectoire est circulaire (de centre H et de rayon r) :

$$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(O/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM} = r\omega \vec{e}_\theta}$$



10.1.4.3 Description du mouvement instantanée le plus général d'un solide

Soit Δ une droite telle que à l'instant t ; Δ représente l'axe de rotation $\Delta = \Delta(t)$ (l'axe de viration) et H la projection de M sur Δ

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(H) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}$$

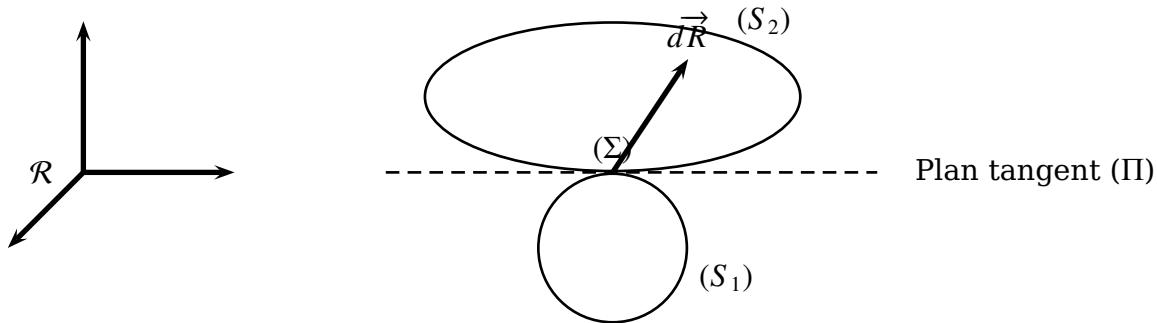
Donc le mouvement est une rotation autour de $\Delta(H, HM)$ et le point H est animé d'un mouvement suivant Δ .

on conclut que le mouvement général est helicoidal.

10.2 MODÉLISATION DES EFFORTS ENTRE SOLIDES EN CONTACT

10.2.1 Solide en contact

Considérons deux solides S_1 et S_2 en contact sur une petite surface plane (Σ) et en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} , et I un point quelconque de (Σ).



Soit I un point de Σ ; On peut décomposer la force élémentaire $d\vec{R}$ exercé par S_1 sur S_2 en deux forces de contact tel que

$$\vec{R} = \iint_{\Sigma} d\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$

\vec{T} : force de frottement de glissement. Elle appartient au plan tangent Π .

\vec{N} : réaction normale à Π .

Le moment de cette force en I est :

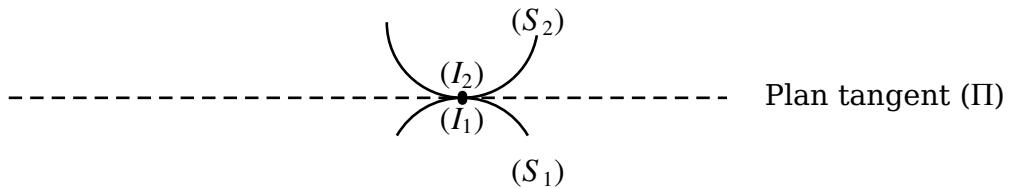
$$\vec{M}_{I,contact} = \iiint \vec{IM} \wedge d\vec{R}(M) = \vec{M}_{I,t} + \vec{M}_{I,n}$$

Avec :

- $\vec{M}_{I,t}$ moment de frottement de roulement. $\vec{M}_{I,t} \in$ au plan tangent Π .
- $\vec{M}_{I,n}$ moment de frottement de pivotement. $\vec{M}_{I,n} \perp \Pi$.

10.2.2 Vitesse de glissement

On suppose pour la suite que le contact est ponctuel c'est à dire que $\Sigma \rightarrow I$ appelé point géométrique



- Soit I_2 un point du solide S_2 qui coïncide à l'instant t avec le point géométrique I .
 - Soit I_1 un point du solide S_1 qui coïncide à l'instant t avec le point géométrique I .
- On appelle vitesse de glissement de solide S_2 par rapport à S_1

$$\vec{V}_g(I) = \vec{V}(I_2) - \vec{V}(I_1)$$

Remarque

- La vitesse de glissement est vitesse relative.
- La vitesse de glissement ne dépend pas du référentiel. En effet :

Soit \mathcal{R}' un autre référentiel et d'après la loi de composition des vitesses on :

- $\vec{V}(I_2/R) = \vec{V}(I_2/\mathcal{R}') + \vec{V}(O'/\mathcal{R}') + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'I_2}$
- $\vec{V}(I_1/R) = \vec{V}(I_1/\mathcal{R}') + \vec{V}(O'/\mathcal{R}') + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'I_1}$
- ce qui donne puisque $\overrightarrow{I_1I_2} = \vec{0}$

$$\vec{V}(I_2/R) - \vec{V}(I_1/R) = \vec{V}(I_2/\mathcal{R}') - \vec{V}(I_1/\mathcal{R}') \implies \vec{V}_g(\mathcal{R}') = \vec{V}_g(\mathcal{R})$$

- la vitesse de glissement appartient au plan tangent Π .
- On peut écrire la vitesse de glissement $\vec{V}_g = \vec{V}(I_2/S_1)$

On dit

que le mouvement de (S_2) est sans glissement si la vitesse de glissement est nulle

$$\vec{V}_g = \vec{0} \implies \vec{V}(I_2) = \vec{V}(I_1)$$

Si le solide (S_1) est fixe dans \mathcal{R} alors $\vec{V}_g = \vec{V}(I_2/S_1) = \vec{0}$ cad que la vitesse du point I_2 est nulle par rapport au solide (S_1)

10.2.3 Vecteur rotation relative

Soient deux solides en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} .
On définit le vecteur rotation relative du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) par

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}) - \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R})$$

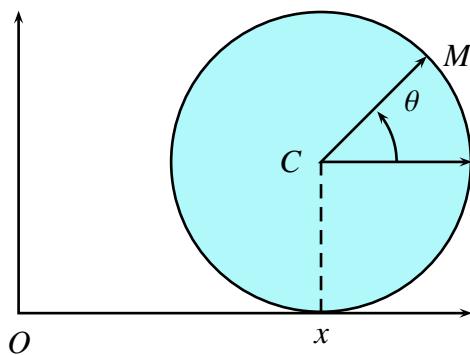
On décompose le vecteur rotation relative dans le plan tangent en

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}_T + \vec{\Omega}_N$$

- $\vec{\Omega}_T$ Vecteur rotation de roulement.
- $\vec{\Omega}_N$ Vecteur rotation de pivotement.

Application 2 :

On considère un disque de rayon R dont le centre C est repéré par la coordonnée cartésienne x . La position d'un point M à la périphérie du disque est repérée par un angle θ par rapport à un axe de direction fixe. Le disque roule sans glisser sur un plan horizontal. Déterminer la relation entre x et θ .



Que devient la relation précédente si le sol horizontal est remplacé par un tapis roulant se déplaçant à la vitesse $v_o \vec{e}_x$

Correction

$$1- \vec{OM} = x \vec{e}_x + R \vec{e}_y + R \vec{e}_r \implies \vec{V} = \dot{x} \vec{e}_x + R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{V}_g = \vec{0} \implies \dot{x} + R\dot{\theta} = 0$$

$\Delta x = -R\Delta\theta$ le signe (-) traduit le fait que x et θ ont des sens opposés

$$2- \dot{x} + R\dot{\theta} = V_o \implies \Delta x + R\Delta\theta = V_o\Delta t$$

10.2.4 Lois de Coulomb pour le frottement de glissement

On admet les lois empiriques de Coulomb

1. Loi de frottement « cinétique » : $\vec{V}_g \neq \vec{0}$ (présence de glissement)

La force de frottement \vec{T} possède les propriétés suivantes :

- $\vec{T} \wedge \vec{V}_g = \vec{0}$ cad $\vec{T} // \vec{V}_g$

- $\vec{T} \cdot \vec{V}_g = 0$ cad \vec{T} et \vec{V}_g ont des sens opposés

$$T = fN$$

f ou μ coefficient de frottement de glissement caractérise la nature des surfaces en contact.

2. Loi de frottement « statique » : $\vec{V}_g = \vec{0}$ (absence de glissement)

$$T \leq fN$$

10.2.5 La puissance totale des actions de contact

10.2.5.1 Expression de la puissance pour un solide

On rappelle que la puissance d'un point matériel animé par rapport à un référentiel d'une vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ soumis à la force \vec{F} est

$$\mathcal{P}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{F}$$

Pour un solide, on le décompose en des masses élémentaires (dm) centré en M dont la résultante des forces est $d\vec{F}$ donc

$$d\mathcal{P} = \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot d\vec{F}$$

Soit A un autre point du solide ; le torseur cinématique donne :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AM}$$

ce qui donne :

$$d\mathcal{P} = \vec{V}(A) \cdot d\vec{F} + (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM}) \cdot d\vec{F} \implies \mathcal{P}(S/\mathcal{R}) = \vec{V}(A/\mathcal{R}) \cdot \vec{F} + \iiint (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM}) \cdot d\vec{F}$$

Or $(\vec{\Omega} \wedge \vec{AM}) \cdot d\vec{F} = (\vec{AM} \wedge d\vec{F}) \cdot \vec{\Omega}$ Rappelons que

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{dF}$$

Le moment résultant

Il en résulte que la puissance du solide dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{V}(A/\mathcal{R}) \cdot \vec{F} + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) \cdot \vec{\Omega}}$$

Deux cas importants à discuter :

1. Mouvement de translation : Tous les points du solide ont même vitesse donc

$$\vec{\Omega} = \vec{0} \implies \mathcal{P}(S/\mathcal{R}) = \vec{V}(A) \cdot \vec{F} = \vec{V}(M) \cdot \vec{F}$$

2. Mouvement de rotation pure autour d'un axe (Δ) : On choisit $A \in \Delta \implies \vec{V}(A) = \vec{0}$ donc

$$\boxed{\mathcal{P}(S/\mathcal{R}) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) \cdot \vec{\Omega}}$$

10.2.5.2 Puissance totale des actions de contact

Soient deux solides en contact ponctuel avec $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ la résultante des forces de contact exercé par le solide (S_1) sur le solide (S_2).

La puissance de contact reçue par le solide (S_2) est :

$$\mathcal{P}_2 = \vec{R} \cdot \vec{V}(I_2) + \vec{\mathcal{M}}_{I_2} \vec{\Omega}_2$$

De même pour le solide (S_1) et d'après le principe de l'action et la réaction :

$$\mathcal{P}_1 = -\vec{R} \cdot \vec{V}(I_1) + (-\vec{\mathcal{M}}_{I_1}) \cdot \vec{\Omega}_1$$

La puissance de contact totale est

$$\mathcal{P}_{T,contact} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \implies \mathcal{P}_{T,contact} = \vec{R} \cdot (\vec{V}(I_2) - \vec{V}(I_1)) + \vec{\mathcal{M}}_I \cdot (\vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1)$$

Or :

- $\vec{V}(I_2) - \vec{V}(I_1) = \vec{V}_g$

- $\vec{\mathcal{M}}_I = \vec{0}$ contact ponctuel

Il en résulte que

$$\mathcal{P}_{T,contact} = \vec{R} \cdot \vec{V}_g = \vec{T} \cdot \vec{V}_g \quad (< 0)$$

Remarque

Cas du roulement sans glissement

Dans le modèle du contact ponctuel, s'il y a roulement sans glissement, alors $\vec{V}_g = \vec{0}$ ainsi $\vec{\mathcal{M}}_I = \vec{0}$ donc

$$\text{Roulement sans glissement} \implies \mathcal{P}_{(T,contact)} = 0$$

10.2.5.3 Modèle des liaisons parfaites

10.2.5.4 Définition

Une liaison est parfaite si la puissance de contact de cette liaison est nulle

10.2.5.5 Exemples

► Liaison glissière : C'est une liaison lors d'un mouvement de translation d'un solide par rapport à l'autre.

Si oz est l'axe de translation alors

$$\text{Liaison glissière} \implies R_z = \vec{R} \cdot \vec{e}_z = 0$$

- Liaison pivot : C'est une liaison lors d'un mouvement de rotation par rapport à un axe d'un solide par rapport à l'autre.

Si oz est l'axe de rotation alors :

$$\mathcal{P}_c = \vec{R} \cdot \vec{V}_g + \vec{\mathcal{M}}_I \wedge \vec{\Omega} = \vec{\mathcal{M}}_I \cdot \vec{\Omega} \vec{e}_z \implies M_z = 0$$

Liaison pivot $\implies M_z = 0$

- Liaison rotule : C'est une liaison lors d'un mouvement de rotation par rapport à un point O d'un solide par rapport à l'autre.

Dans ce cas $\mathcal{P}_c = \vec{\mathcal{M}}_o \cdot \vec{\Omega} = 0$ quelque soit le vecteur $\vec{\Omega}$ donc

Liaison rotule $\implies \vec{\mathcal{M}}_o = \vec{0}$

10.3 DYNAMIQUE D'UN SOLIDE

10.3.1 Théorème de la résultante cinétique

Soit un point M d'un solide de masse dm animé de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ avec \mathcal{R} un référentiel galiléen soumis à la force élémentaire $d\vec{F}$.

Appliquons la RFD dans \mathcal{R} galiléen :

$$dm \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} = d\vec{F} \implies \frac{d}{dt} (\iiint_{(S)} \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm) = \iiint_{(S)} d\vec{F}$$

Si on pose : $\vec{F} = \iiint_{(S)} d\vec{F}$ la résultante des forces exercé sur le solide et sachant que : $\iiint_{(S)} \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm = m\vec{V}(G/\mathcal{R})$ la quantité du mouvement du solide alors on obtient

$$\frac{d\vec{P}(S)}{dt} = m\vec{a}(G/\mathcal{R}) = \vec{F}$$

C'est le théorème de la résultante cinétique

Remarque

Pour un solide isolé ou pseudo-isolé dans un référentiel galiléen alors le mouvement du centre de masse est rectiligne uniforme.

10.3.2 Le moment cinétique

10.3.2.1 Définition

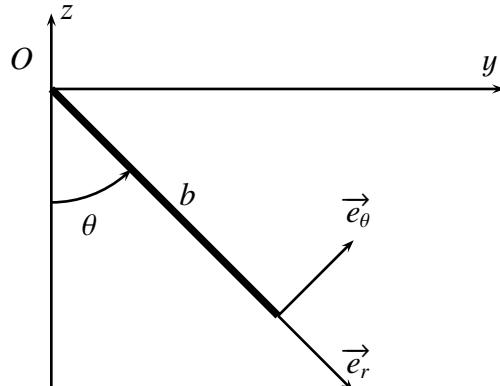
On décompose le solide en des points matériels ; chaque point M de masse dm est animé par rapport à un référentiel \mathcal{R} de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$.

Donc le moment cinétique du point M par rapport à un point A quelconque est : $d\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \vec{AM} \wedge (dm\vec{V}(M/\mathcal{R}))$ ce qui donne pour le solide

$$\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \iiint_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm$$

Activité

On considère une plaque rectangulaire a sur b , homogène, de masse M , d'épaisseur négligeable, qui oscille autour d'un axe horizontal Ox . Elle est attachée à cet axe par un de ses côtés de longueur a . La rotation de la plaque autour de Ox est repérée par l'angle $\theta(t)$. Le point O est au milieu du côté de longueur a . On utilisera la base cartésienne ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) ainsi que la base locale ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x$).



1. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(P)$ d'un point P de la plaque en fonction de r (distance de P à Ox), θ et \vec{e}_θ .
2. En déduire le vecteur quantité de mouvement \vec{P} de la plaque.
3. Déterminer la position du centre de masse G de la plaque. Vérifier que $\vec{P} = M\vec{V}(G)$
4. Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}_o$ en fonction de M, a, b , et des vecteurs de base.
5. En déduire $\vec{\sigma}^*$. Vérifier l'homogénéité de son expression.

Correction

$$\begin{aligned}
 1- \overrightarrow{OP} &= x \vec{e}_x + r \vec{e}_r \implies \vec{V}(P/\mathcal{R}) = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta \\
 2- \vec{P}(S/\mathcal{R}) &= \iint_S \overrightarrow{OP} dm \implies \vec{P}(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} Mb\dot{\theta} \vec{e}_\theta \\
 3- \vec{V}(G/\mathcal{R}) &= \frac{1}{2} b\dot{\theta} \vec{e}_\theta \implies \vec{P}(S/\mathcal{R}) = M\vec{V}(G/\mathcal{R}) \\
 4- \vec{\sigma}_o &= \iint \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}(P/\mathcal{R}) dm \implies \vec{\sigma}_o = \frac{1}{3} Mb^2 \dot{\theta} \vec{e}_x \\
 5- \vec{\sigma}_o &= \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{V}(G/\mathcal{R}) \implies \vec{\sigma}^* = \frac{1}{12} Mb^2 \dot{\theta} \vec{e}_x
 \end{aligned}$$

10.3.2.2 Le torseur cinétique

Soit B un autre point quelconque donc :

► $\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \iiint_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm$.

► $\vec{\sigma}_B(M/\mathcal{R}) = \iiint_{(S)} \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm$.

► $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ ce qui donne

$$\boxed{\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P}(S) = \vec{\sigma}_B + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{V}(G/\mathcal{R})}$$

Remarque

1. Dans le repère barycentrique \mathcal{R}^* on a :

$$\vec{\sigma}_A^* = \vec{\sigma}_B^* + \vec{AB} \wedge \vec{P^*(S)} \implies \vec{\sigma}_A^* = \vec{\sigma}_B^* = \vec{\sigma}_G^* = \vec{\sigma}^*$$

On retient que le moment cinétique barycentrique ne dépend pas du point où on le calcule (vecteur libre)

2. De même on a si $B \equiv G$

$$\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_G + \vec{AG} \wedge \vec{P(S)}$$

10.3.2.3 Le théorème de KŒNIG relatif moment cinétique

On a : $\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \iiint_S \vec{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm$.

D'après la loi de composition des vitesses entre \mathcal{R} et \mathcal{R}^* on a :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \implies \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}^* + \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}$$

Sachant que : $\vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \vec{\Omega} = \vec{0}$ alors

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{V}^*$$

Il en résulte que

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \iiint_S \vec{AM} \wedge \vec{V}(G) dm + \iiint_S \vec{AM} \wedge \vec{V}^* dm$$

Puisque :

$$- \iiint_S \vec{AM} \wedge \vec{V}^* dm = \vec{\sigma}_A^*$$

$$- \iiint_S \vec{AM} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) dm = \iiint_S \vec{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) dm + \underbrace{\iiint_S \vec{GM} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) dm}_{\vec{0}}$$

Il en résulte que :(Théorème de KŒNIG relatif au moment cinétique

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}^* + \vec{AG} \wedge m \vec{V}(G/\mathcal{R})$$

Remarque

$$A \equiv G \implies \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}^*$$

Relation importante à retenir

10.3.3 L'énergie cinétique d'un solide

10.3.3.1 Définition l'énergie cinétique

On a $dE_c = \frac{1}{2} \vec{V}^2(M) dm$ donc

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}^2(M) dm$$

Application 3 :

Calculer l'énergie cinétique d'une barre (m, l) en rotation autour de son extrémité.

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{J}_\Delta \vec{\Omega}^2$$

Soit A un point quelconque du solide

Le torseur cinématique donne $\vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AM}$ ce qui donne

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}(M) \cdot (\vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AM}) dm$$

Ce qui donne

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \vec{V}(A) \cdot \iiint_S \vec{V}(M) dm + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \iiint_S \vec{AM} \wedge \vec{V}(M) dm$$

Il en résulte que

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} [\vec{V}(A) \cdot \vec{P}(S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_A]$$

Cas particulier important : $A \equiv G$

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} [m \vec{V}^2(G) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_G] = \frac{1}{2} [m \vec{V}^2(G) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}^*]$$

10.3.3.2 Le théorème de KÖENIG relatif à l'énergie cinétique

Soit :

- $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ la vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} .
- $\vec{V}^*(M)$ la vitesse du point M dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* .

Sachant que $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{V}^*(M)$ puisque $(\vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \vec{0})$

Donc $\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}^2(G/\mathcal{R}) dm + \frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}^{*2}(M) dm + \iiint_S \vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}^*(M) dm$

Comme :

- $\frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}^2(G/\mathcal{R}) dm = \mathcal{E}_c(G)$ l'énergie cinétique du barycentre affecté de la masse totale.
- $\frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}^{*2}(M) dm = \mathcal{E}_c^*$ l'énergie cinétique barycentrique.
- $\iiint_S \vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}^*(M) dm = \vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \iiint_S \vec{V}^*(M) dm = \vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot m \vec{V}(G/\mathcal{R}^*) = \vec{0}$

D'où le théorème

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}) = \mathcal{E}_c(G/\mathcal{R}) + \mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}^*) = \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G/\mathcal{R})$$

10.3.4 Le moment d'une force

On rappelle que le moment d'une force \vec{F} appliquée sur un point matériel (M, m) est

$$\vec{\mathcal{M}}_o(F) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Pour un solide S soumis à la résultante des forces \vec{F}

$$\vec{\mathcal{M}}_o(F) = \iiint_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}$$

Avec $d\vec{F}$ la force élémentaire exercée sur le point M . On montre de même que

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

Si la résultante des forces \vec{F} est nulle ; alors le système de forces est équivalent à un **couple**.

On appelle couple de forces un système de forces dont la résultante est nulle et le moment est non nul (indépendant du point).

Exemple

Calculer le moment de la résultante des forces exercée sur un dipôle électrostatique rigide par un champ extérieur uniforme .

Remarque

Dans une liaison pivot (rotation autour d'un axe) :

- Si le couple présente le sens du mouvement : Couple moteur.
- Si le couple présente le sens contraire du mouvement : Couple frein.

10.3.5 Mouvement d'un solide autour d'un axe de direction fixe

10.3.5.1 Cinétique d'un solide ayant un point de vitesse nulle

On suppose que le solide (S) possède un point A tel que $\vec{V}(A/\mathcal{R}) = \vec{0}$; si non on fait l'étude dans le référentiel barycentrique et $A \equiv G$ et donc $\vec{V}(G/\mathcal{R}^*) = \vec{0}$

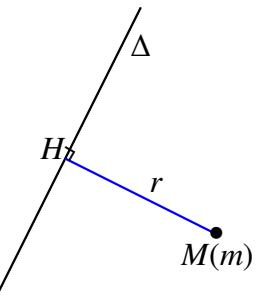
10.3.5.1.1 Le moment d'inertie. Théorème de Huygens .

10.3.5.1.1.1 Le moment d'inertie d'un point matériel M .

Soit Δ une droite et M un point matériel de masse m distant de $r = HM$ avec H la projection perpendiculaire de M sur Δ .

On appelle le moment d'inertie J_Δ du point M par rapport à Δ l'expression

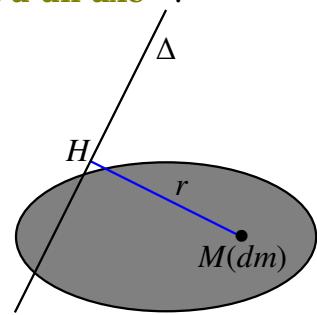
$$J_\Delta = mr^2 (kg.m^2)$$



10.3.5.1.1.2 Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe .

On subdivise le solide en des points matériels élémentaire de masse dm et par conséquent

$$\mathbf{J}_\Delta = \iiint_{(S)} r^2 dm$$



Exemples : Voir photocopie

10.3.5.1.1.3 Théorème de Huygens .

On a :

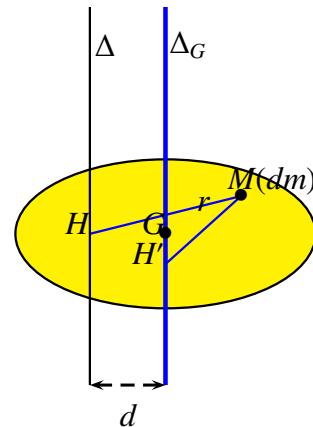
$$\mathbf{J}_\Delta = \iiint r^2 dm \implies \mathbf{J}_\Delta = \iiint \overrightarrow{HM}^2 dm$$

Or $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M}$

$$\text{Donc } \mathbf{J}_\Delta = \iiint (\overrightarrow{HH'}^2 + \overrightarrow{H'M}^2) dm$$

$$\implies \mathbf{J}_\Delta = \underbrace{\iiint \overrightarrow{HH'}^2 dm}_{md^2} + \underbrace{\iiint \overrightarrow{H'M}^2 dm}_{\mathbf{J}_{\Delta G}} + 2 \iiint \overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{H'M} dm$$

Puisque : $\overrightarrow{H'M} = \overrightarrow{H'G} + \overrightarrow{GM}$ alors



$$\iiint \overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{H'M} dm = \iiint \underbrace{\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{H'G}}_{\perp} dm + \overrightarrow{HH'} \cdot \underbrace{\iiint \overrightarrow{GM} dm}_{= \vec{0} \text{ (déf de G)}} = 0$$

Il en résulte le théorème de HUYGENS :

$$\mathbf{J}_\Delta = \mathbf{J}_{\Delta G} + md^2$$

10.3.5.1.2 Le moment cinétique .

$$\text{On a : } \vec{\sigma}_A(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \iiint \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) dm$$

Puisque le solide est en rotation autour d'un axe Δ fixe alors A est un point de Δ d'où :

$$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} \implies \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$$

$$\text{Donc : } \vec{\sigma}_A(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \iiint \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) dm$$

Sachant que $1 \wedge (2 \wedge 3) = 2(1.3) - 3(1.2)$ alors :

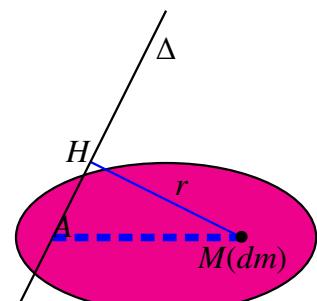
$$\vec{\sigma}_A(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \iiint (\overrightarrow{AM}^2 dm) \vec{\Omega} - \iiint \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{\Omega}) dm$$

Or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$ avec $\overrightarrow{AH} \parallel \vec{\Omega} = \omega \vec{e}_\Delta$ et $\overrightarrow{HM} \perp \vec{\Omega}$ ainsi

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH} \vec{e}_\Delta$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_A &= \left[\iiint \overrightarrow{AH}^2 \vec{\Omega} dm + \iiint \overrightarrow{HM}^2 \vec{\Omega} dm + 2 \iiint \underbrace{(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HM}) \vec{\Omega}}_{\perp} dm \right] - \left[\iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{AH} dm + \iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} dm + \right. \\ &\quad \left. \iiint \underbrace{(\overrightarrow{HM} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{AM}}_{\perp} dm \right] \end{aligned}$$

$$\implies \vec{\sigma}_A = \iiint \overrightarrow{HM}^2 \vec{\Omega} dm + \iiint \overrightarrow{AH}^2 \omega \vec{e}_\Delta dm - \iiint \overrightarrow{AH}^2 \omega \vec{e}_\Delta dm - \iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} dm$$



$$\Rightarrow \vec{\sigma}_A(S/R) = (\iiint \overrightarrow{HM}^2 dm) \vec{\Omega} - \iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} dm$$

On pose

$$\mathbf{J}_\Delta = \iiint \overrightarrow{HM}^2 dm = \iiint r^2 dm \quad (m^2 kg)$$

Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe de rotation Δ

avec r la distance de M à l'axe Δ .

Donc

$$\iiint \overrightarrow{HM}^2 \vec{\Omega} dm = \mathbf{J}_\Delta \vec{\Omega}(S/R)$$

Ainsi

$$\iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} dm = \iiint (\overrightarrow{AH} \omega) \overrightarrow{HM} dm = \vec{\sigma}_{A\perp\Delta}$$

Il en résulte que

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \mathbf{J}_\Delta \vec{\Omega} - \vec{\sigma}_{A\perp\Delta} = \mathbf{J}_\Delta \vec{\Omega} - \iiint (\overrightarrow{AH} \omega) \overrightarrow{HM} dm$$

On retient que : **Pour un solide en général le moment cinétique d'un solide par rapport à un point fixe A n'est pas colinéaire avec le vecteur instantanée de rotation.**

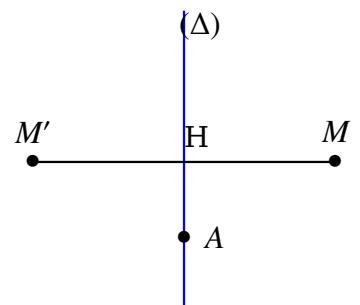
Cas particuliers importants :

1. Solide plan perpendiculaire à $\Delta \Rightarrow A \equiv H$ donc

$$\vec{\sigma}_A = \mathbf{J}_\Delta \vec{\Omega}$$

2. Δ est un axe de symétrie matériel

$$\iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} dm = \vec{0}$$



2 à 2 s'annulent
On appelle σ_Δ la projection du moment cinétique en A sur l'axe Δ

$$\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_A \cdot \vec{e}_\Delta$$

Donc

$$\vec{\sigma}_A = \mathbf{J}_\Delta \vec{\Omega} - \iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} dm \Rightarrow \sigma_\Delta = \vec{\sigma}_A \cdot \vec{e}_\Delta = \mathbf{J}_\Delta \Omega$$

10.3.5.1.3 L'énergie cinétique .

On a : $E_c = \frac{1}{2} \iiint \vec{V}^2(M) dm$

$$\text{Or } \vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \vec{MA} = \vec{MA} \wedge \vec{\Omega}$$

$$\text{Ainsi : } \vec{MA} = \vec{MH} + \vec{HA} \text{ ce qui donne } E_c = \frac{1}{2} \iiint (\vec{MH} + \vec{HA}) \wedge \vec{\Omega}^2 dm$$

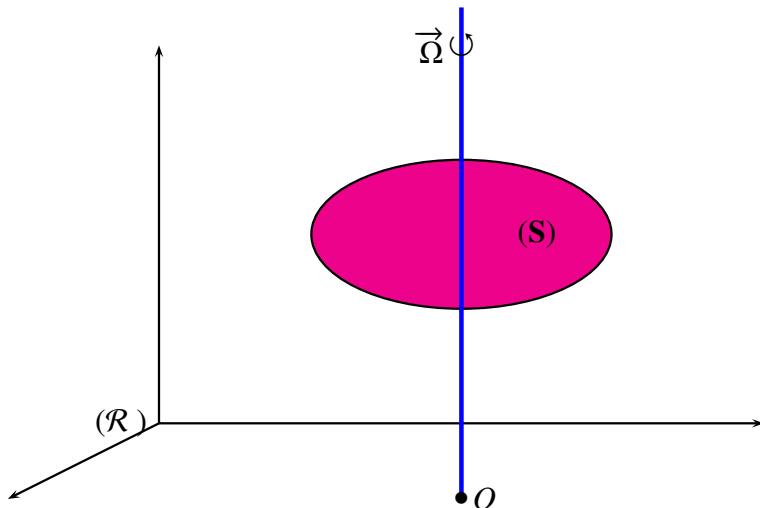
Et puisque $\vec{HA} // \vec{\Omega}$ alors

$$E_c = \frac{1}{2} \mathbf{J}_\Delta \omega^2$$

C'est l'énergie cinétique de rotation autour de l'axe Δ

10.3.5.2 Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen

Considérons un solide (S) en rotation **sans frottement**

10.3.5.2.1 Théorème scalaire du moment cinétique .

Soit O un point de Δ .

- ✓ $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{R}) = \vec{0}$
- ✓ $\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R}) = \mathbf{J}_\Delta \vec{\Omega} = \mathbf{J}_\Delta \omega \vec{e}_z$
- ✓ Le théorème du moment cinétique donne

$$\frac{d\vec{\sigma}_{o_\perp}}{dt/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\sigma}_o}{dt/\mathcal{R}} = \sum \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_{ext})$$

Ce qui donne l'équation différentielle

$$\mathbf{J}_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum \mathcal{M}_{o_z}$$

10.3.5.2.2 Théorème de l'énergie cinétique .

Calculons : $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt}$

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \frac{1}{2} \iiint_S \frac{d\vec{V}^2}{dt} dm \implies \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \iiint_S \vec{V}(M) \cdot \vec{a}(M) dm$$

Or \mathcal{R} est galiléen donc $\vec{a}(M)dm = d\vec{F}(M) = d\vec{F}_{ext} + d\vec{F}_{int}$ ce qui donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \iiint_S \vec{V}(M) \cdot (d\vec{F}_{ext} + d\vec{F}_{int})$$

Puisque $\mathcal{P}_{int} = \iiint_S \vec{V}(M) \cdot d\vec{F}_{int} = 0$ d'après le principe des actions réciproques d'où

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext}$$

Théorème de la puissance cinétique

Par intégration on obtient le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta\mathcal{E}_c = \mathbf{W}_{ext}$$

10.3.5.2.3 Théorème de l'énergie mécanique .

si on pose $\mathbf{W}_{ext} = \mathbf{W}_{ext}^C + \mathbf{W}_{ext}^{NC}$

Avec :

- \mathbf{W}_{ext}^C le travail des forces conservatives.

- \mathbf{W}_{ext}^{NC} le travail des forces non conservatives.

et puisque $\mathbf{W}_{ext}^C = -\Delta\mathbf{E}_p$ alors

$$\Delta\mathbf{E}_m = \Delta(\mathcal{E}_c + \mathbf{E}_p) = \mathbf{W}_{ext}^{NC}$$

C'est le théorème de l'énergie mécanique

Remarque

Si le système est conservatif alors $\mathbf{W}_{ext}^{NC} = 0$ alors l'énergie mécanique se conserve

$$\mathbf{W}_{ext}^{NC} = 0 \implies \mathbf{E}_m = cte$$

10.4 Application : le pendule pesant (CNC 2014 MP P1)

Étude d'un pendule : CNC P1-2014

1- Un référentiel R est dit galiléen s'il vérifie la première loi de Newton(principe d'inertie) :

Dans un référentiel R si un point matériel isolé ou pseudo-isolé et son mouvement par rapport à ce référentiel est rectiligne uniforme alors le référentiel R est galiléen

2- Le référentiel terrestre est un référentiel lié à la terre.

- L'expérience de pendule de Foucault.
- Si la durée de l'expérience est très négligeable devant la période de rotation de la terre autour d'elle même (un jour) alors on peut approximer le mouvement par une droite et par conséquent le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.

3- Liaison pivot parfaite de centre O est une liaison qui provoque un mouvement de rotation autour d'un axe passant par O sans frottement.

Conséquences :

- la vitesse de O est nulle $\vec{V}(O/R) = \vec{0}$.
- Le moment des forces projeté suivant oy est nul $M_{oy} = 0$.
- La puissance des forces de contact est nulle $P_{contact} = 0$
- Le système est conservatif et l'énergie mécanique est constante

4- Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation (Oy)

$$J_p = \frac{1}{3}m_T\ell^2 + \frac{1}{2}m_D(a^2 + 2\ell^2)$$

5- ► Le vecteur instantanée de rotation :

$$\vec{\Omega}(P/R) = \dot{\theta} \vec{e}_r$$

► Le vecteur position du barycentre

$$\vec{OG} = \frac{\ell}{2} \left(\frac{m_T + 2m_D}{m_T + m_D} \right) \vec{e}_r$$

► La vitesse du barycentre

$$\vec{V}(G/R) = \frac{\ell}{2} \left(\frac{m_T + 2m_D}{m_T + m_D} \right) \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

6-

► Les caractéristiques de la poussée d'Archimède :

- Point d'application : barycentre C :
- Sens : vers le haut.
- Direction : verticale.
- Module $F_A = \rho_{air}gV_D$

► Comparons F_A et le poids P

$$\frac{F_A}{P} = \frac{\rho_{air}gV_D}{\rho_{pendule}gV_D} = \frac{\rho_{air}}{\rho_{pendule}} \ll 1 \implies F_A \ll P$$

C'est à dire que la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids du disque.

7-

- Bilan des forces :
- \vec{P} le poids du pendule.
- \vec{R} réaction de l'axe.

- Le travail de chaque force :
- $W(\vec{R}) = 0$: liaison pivot parfaite.
- $W(\vec{P}) = \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(\cos \theta - \cos \theta_0)$

► T.E.C donne

$$\Delta E_c = W(\vec{R}) + W(\vec{P}) = -\Delta E_p \implies \Delta E_m = 0$$

Donc le système est conservatif.

► L'énergie potentielle

$$E_p = \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(1 - \cos \theta)$$

8-

► L'énergie cinétique(rotation autour de O)

$$E_c = \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2$$

► L'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(1 - \cos \theta)$$

9- L'équation différentielle : Puisque le système est conservatif; donc par dérivation de l' énergie mécanique on obtient

$$J_p\ddot{\theta} + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)\sin \theta = 0$$

L'existence du terme $\sin \theta$ dans l'équation différentielle rend le système non linéaire.

10- TMC en O point fixe donne par projection oy :

- $\vec{\sigma}_o = J_p\dot{\theta}\vec{e}_y = \vec{\sigma}_{o\parallel}$
 - $\vec{M}_o(\vec{P}) = -(m_T + m_D)gOG \sin \theta \vec{e}_y$
- ce qui donne

$$\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \vec{M}_o(\vec{P}) + \vec{M}_o(\vec{R}) \implies J_p\ddot{\theta} + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)\sin \theta = 0$$

11- Le mouvement du pendule est oscillatoire si le système est dans un état lié

$$E_{pmin} = E_p(0) < E_m < E_{pmax} = E_p(\pi) \implies E_o = E_{pmax} = E_p(\pi) = g\ell(m_D + \frac{1}{2}m_T)$$

- ▶ Pour $E_m < E_o$ et puisque E_p est paire en fonction de θ alors il existe deux valeurs (dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$) θ_m et $-\theta_m$ telle que $0 < E_m < E_o$

▶ Expression de la période T :

On a : $E_m = E_c + E_p \implies E_m = \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(1 - \cos \theta)$ et puisque $E_m = cte = E_m(t=0)$ donc

$$\frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(1 - \cos \theta_o)$$

Ce qui donne

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{g\ell}{J_p}(m_T + 2m_D)[\cos \theta - \cos \theta_o]}$$

12- ▶ Portrait de phase :

- ▶ Pour $E_m > E_o$ on a un mouvement de révolution autour de O.
- ▶ Position d'équilibre stable correspond au centre des courbes fermées.
- ▶ Position d'équilibre instable correspond à l'intersection des trajectoires de phases (croisement des courbes).

13- L'énergie potentielle est harmonique si $\theta(t)$ est harmonique (faibles oscillations)

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega_o t + \varphi)$$

Avec

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g\ell(m_T + 2m_D)}{2J_p}}$$

- ▶ La longueur du pendule synchrone L

Les deux pendules ont même périodes donc même pulsations propres et par conséquent

$$\frac{g}{L} = \frac{g\ell(m_T + 2m_D)}{2J_p} \implies L = \frac{2J_p}{\ell(m_T + 2m_D)}$$

14-

- 15- Courbe sinusoïdale dont l'amplitude décroît légèrement d'une façon exponentielle (et non linéaire) du à l'existence du frottement visqueux du à l'action de l'air sur le disque .

- ▶ Régime d'évolution : Pseudo-périodique.

16-

- 16.1- Le T.M.C projeté suivant \vec{e}_y :
 sachant que $\vec{M}_o(\vec{F}) = -\alpha\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_y$ alors

$$J_p\ddot{\theta} + \alpha\ell^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)\theta = 0 \implies \ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \gamma\theta = 0$$

Ce qui donne

$$\beta = \frac{\alpha\ell^2}{J_p} [T^{-1}] \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{2J_p}g\ell(m_T + 2m_D) [T^{-2}]$$

16.2- La polynôme caractéristique est $r^2 + \beta r + \gamma = 0$ donc les solutions sont :

$$r_{1/2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

avec $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$ ce qui donne

$$\theta(t) = \exp(-\beta t/2) \left(A \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + B \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) \right)$$

Il en résulte que

$$\tau = \frac{2}{\beta}$$

► Les différents régimes :

- Si $\Delta > 0$ Régime apériodique, $\theta(t)$ décroît d'une façon exponentielle sans osciller.
- Si $\Delta = 0$ Régime critique , $\theta(t)$ décroît rapidement vers la position d'équilibre sans osciller.
- Si $\Delta < 0$ Régime pseudo-périodique $\theta(t)$ oscille avec une amplitude qui décroît d'une façon exponentielle

10.5 Autres Applications

Correction du concours CCP TSI 2009

10.5.1 MOUVEMENT D'UNE BARRE HOMOGENE

10.5.1.1 Étude cinématique du mouvement

1-

1.1- $\overrightarrow{OA} = 2L \sin \theta \overrightarrow{e_x}$

1.2- $\overrightarrow{OB} = 2L \cos \theta \overrightarrow{e_y}$

1.3- $\overrightarrow{AB} = 2L(-\sin \theta \overrightarrow{e_x} + \cos \theta \overrightarrow{e_y})$

2-

2.1- Relation de Chasles donne le résultat

2.2- $\overrightarrow{OG} = L(\sin \theta \overrightarrow{e_x} + \cos \theta \overrightarrow{e_y})$

3-

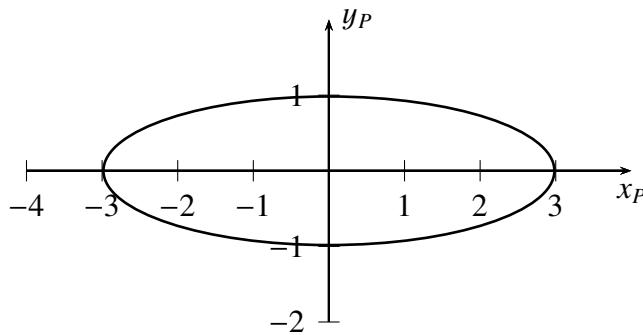
3.1- $\overrightarrow{OP} = (2L - r) \sin \theta \overrightarrow{e_x} + r \cos \theta \overrightarrow{e_y}$

3.2- On a : $x_P = (2L - r) \sin \theta$ et $y_P = r \cos \theta$ ce qui donne

$$\frac{x_P^2}{(2L - r)^2} + \frac{y_P^2}{r^2} = 1$$

Donc la trajectoire du point P est une ellipse.

3.3- On a : $r = L/2 \implies a = 3L/2$ et $b = L/2$

**4-**

$$4.1- \vec{V}_B = (V_A - 2L\dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_x - 2L\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y$$

$$4.2- \vec{V}_B \cdot \vec{e}_x = 0 \implies \dot{\theta} = \frac{V}{2L \cos \theta}$$

$$4.3- \vec{V}_B = -V \tan \theta \vec{e}_y$$

5-

$$5.1- \vec{V}_G = L\dot{\theta}(\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y)$$

$$5.2- \vec{V}_G = \frac{V}{2}(\vec{e}_x - \tan \theta \vec{e}_y)$$

$$5.3- \vec{d}_G = L[(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \vec{e}_x - (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \vec{e}_y]$$

6-

$$6.1- \vec{V}_P = \dot{\theta}[(2L - r) \cos \theta \vec{e}_x - r \sin \theta \vec{e}_y]$$

$$6.2- \vec{V}_P = \frac{V}{2L}[(2L - r) \vec{e}_x - r \tan \theta \vec{e}_y]$$

6.3-

► Pour $r = L \implies \vec{V}_P = \frac{V}{2}(\vec{e}_x - \tan \theta \vec{e}_y) = \vec{V}_G$

► Pour $r = 2L \implies \vec{V}_P = -V \tan \theta \vec{e}_y = \vec{V}_B$

10.5.1.2 Étude énergétique du mouvement , relation entre V et θ

1- On a : $\vec{R}_A \cdot \vec{V}_A = 0$ et $\vec{R}_B \cdot \vec{V}_B = 0$

2-

$$2.1- E_p = +Mgy_G$$

$$2.2- dE_p = M\vec{g} \cdot d\vec{OG} \implies E_p = Mgy_G (+cte = 0 =$$

$$2.3- E_p = MgL \cos \theta$$

3-

$$3.1- E_m = E_c + E_p \implies E_m = MgL \cos \theta + \frac{MV^2}{6 \cos^2 \theta}$$

3.2- Absence de forces non conservatives alors $E_m = cte$

$$3.3- E_m = cte = E_m(t=0) = MgL$$

4-

$$4.1- V^2 = 6gL \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)$$

$$4.2- \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2L} (1 - \cos \theta)$$

$$4.3- \ddot{\theta} = \frac{3g}{4L} \sin \theta$$

10.5.1.3 Étude dynamique du mouvement, vérification de l'hypothèse initiale de contact de la barre avec le sol et le mur

1- $\vec{a}_G = \frac{3g}{4}[\sin \theta(3 \cos \theta - 2) \vec{e}_x - (1 - 3 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta) \vec{e}_y]$

2-

2.1- $M\vec{a}_G = M\vec{g} + \vec{R}_A + \vec{R}_B$

2.2- $\vec{R}_B = \frac{3Mg}{4} \sin \theta(3 \cos \theta - 2) \vec{e}_x$

2.3- $\vec{R}_A = \frac{Mg}{4}(1 - 3 \cos \theta)^2 \vec{e}_y$

2.4- Il faut tenir compte du frottement.

10.5.2 OSCILLATIONS MÉCANIQUES

Correction du concours CCP TSI 2005

Première Partie :Oscillations d'un pendule simple

10.5.2.1 Étude dynamique : équation différentielle du mouvement

1- Bilan des forces : \vec{P} et \vec{T}

2- $\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt/\mathcal{R}} = mL^2\ddot{\theta} \vec{e}_z = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{T}) = -mgL \sin \theta \vec{e}_z$ et par conséquent

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

3- θ est une position d'équilibre $\Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ ce qui donne $\sin \theta = 0$ donc les positions d'équilibre sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

► Au voisinage de $\theta = 0 \Rightarrow \sin \theta \simeq \theta$ donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$ équation diff caractéristique d'un oscillateur harmonique et par conséquent $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.

► Au voisinage de $\theta = \pi$ on pose $\theta = \varphi + \pi \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varphi}$ ainsi $\sin \theta = -\sin \varphi$ donc $\ddot{\varphi} - \frac{g}{L}\varphi = 0$ équation diff dont la solution est exponentielle qui diverge et par conséquent $\theta = \pi$ est une position d'équilibre instable.

10.5.2.2 Petites oscillations

1- petites oscillations donc $\sin \theta \simeq \theta$ ce qui donne $\ddot{\theta} + \omega_o^2\theta = 0$ donc oscillateur harmonique.

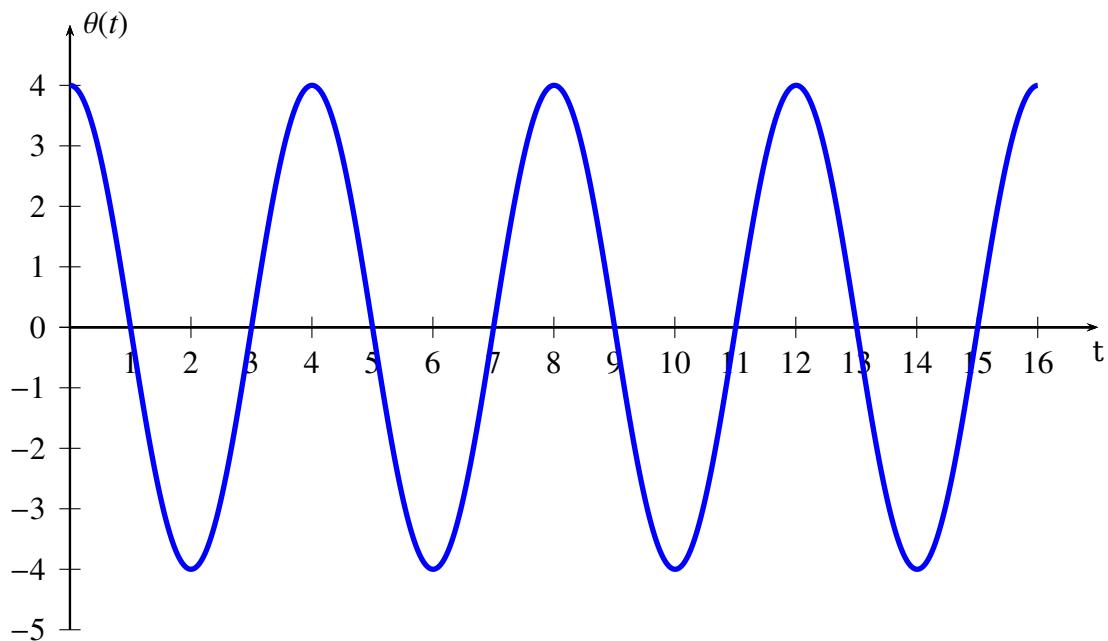
► la pulsation propre $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}}$

► la période propre $T_o = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

2- $\theta(t) = \theta_o \cos \omega_o t$

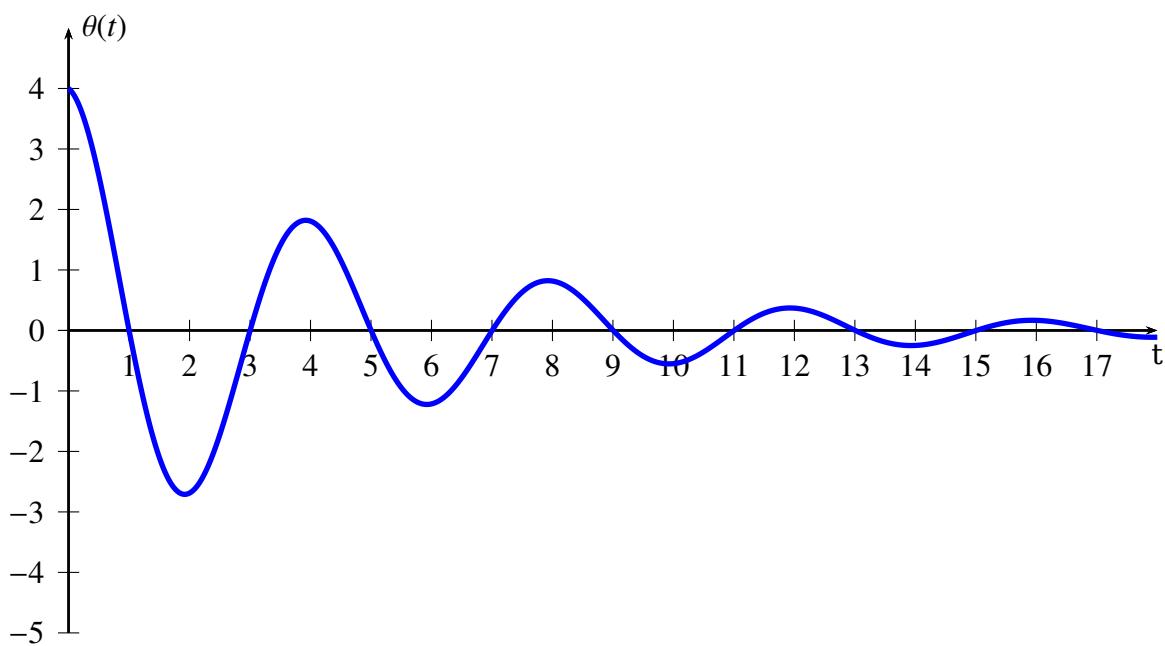
3- La valeur maximale de la vitesse $v_{max} = L\omega_o \theta_o = \theta_o \sqrt{gL}$

4- Représentation graphique



5- Amortissement par frottement fluide

- $\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$
- $\theta(t) = Ce^{-\lambda t} \cos[\Omega t + \varphi]$ avec :
- $\lambda = \frac{h}{2m}$
- $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$
- $C = \theta_o \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\Omega^2}}$
- $\tan \varphi = -\frac{\lambda}{\Omega} \implies \varphi = -\arctan \frac{\lambda}{\Omega}$
- Representation graphique



10.5.2.3 Aspect énergétique

1- $E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$

2- $E_p = -mgL \cos \theta$

3- $\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$

4- Sachant que $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t))$ alors $T'_o = \frac{1}{2}T_o$

5- On a : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}) \Rightarrow mL^2\dot{\theta}(\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta) = -hL^2\dot{\theta}^2$ ce qui donne

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Deuxième Partie : Rotation d'un pendule composé autour d'un axe fixe

10.5.2.4 Moment d'inertie du pendule composé

$$J = I_1 + J_1 = \frac{1}{2}mR^2 + L^2(m + m'/3)$$

10.5.2.5 Étude dynamique : équation différentielle du mouvement

1- Bilan des forces : \vec{P} et \vec{R}

2- L'équation diff

$$\ddot{\theta} + \frac{gL(2m + m')}{2J} \sin \theta = 0$$

3- On a θ faible donc $\sin \theta \simeq \theta$ ce qui donne

$$\ddot{\theta} + \frac{gL(2m + m')}{2J}\theta = 0$$

équation diff d'un oscillateur harmonique

- La pulsation propre : $\omega_1 = \sqrt{\frac{gL(2m + m')}{2J}}$
- La période propre : $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{2J}{gL(2m + m')}}$

10.5.2.6 Simplification : retour au cas du pendule simple

Si $m' \rightarrow 0$ et $R \rightarrow 0$ alors $J \simeq mL^2 \Rightarrow T' \simeq T_o$ On retrouve le pendule simple

10.5.3 ÉTUDE D'UN PENDULE

CORRECTION DU CONCOURS NATIONAL DEUG 2003

MÉCANIQUE

1▷ Les coordonnées du centre de gravité G du pendule (S) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{4r}{3\pi} \vec{x}_1$$

2▷ La masse M du pendule (S) :

$$M = \frac{1}{2}\mu\pi er^2$$

3▷ La vitesse du point G lié au pendule (S) :

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_o) = \frac{4r}{3\pi}\dot{\theta}\vec{y}_1$$

4▷ l'accélération du point G lié au pendule (S) :

$$\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_o) = \frac{4r}{3\pi}(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1)$$

5▷ La résultante dynamique du pendule (S) :

$$\frac{d\vec{P}}{dt/\mathcal{R}} = M\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}) = \frac{4r}{3\pi}(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1)$$

6▷ L'action de la pesanteur sur le pendule (S) :

$$\vec{p} = Mg(\cos\theta\vec{x}_1 - \sin\theta\vec{y}_1)$$

7▷ Le théorème de la résultante dynamique et l'appliquer au pendule (S).

$$\frac{d\vec{P}}{dt/\mathcal{R}} = \vec{p} + \vec{R}$$

8▷ Les coordonnées X et Y de la réaction :

$$\begin{aligned} X &= -M(g \cos\theta + \frac{4r}{3\pi}\dot{\theta}^2) \\ Y &= M(g \sin\theta + \frac{4r}{3\pi}\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

9▷ Le moment de l'action de pesanteur au point O.

$$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{p} = -\frac{4r}{3\pi}Mg \sin\theta \vec{z}_o$$

10▷ Le moment cinétique du pendule (S) par rapport au point O :

$$\vec{L}_o(S/\mathcal{R}_o) = \vec{L}_{o//} = I\vec{\Omega} = I\dot{\theta}\vec{z}_o$$

11▷ Le théorème du moment cinétique appliqué au pendule (S) au point O.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt/\mathcal{R}} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_i) \implies I\ddot{\theta} = -\frac{4r}{3\pi}Mg \sin\theta$$

12▷ L'équation du mouvement du pendule (S).

$$\ddot{\theta} + \frac{4Mgr}{3\pi I} \sin \theta = 0$$

13▷ L'énergie cinétique T du pendule (S) dans son mouvement

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

14▷ Le travail W_e des forces extérieures appliquées au pendule (S)

$$W_e = W(\vec{p}) = +Mgh = MgOG(1 - \cos \theta)$$

15▷ Le théorème de la variation d'énergie cinétique dans le cas d'un solide

$$\Delta T = \sum_i W(\vec{F}_i)$$

16▷ L'équation du mouvement du pendule (S).

$$E_m = cte \implies I\ddot{\theta} + \frac{4Mgr}{3\pi} \sin \theta = 0$$

17▷ Intégration de l'équation dans le cas où l'angle θ assez petit au cours du temps.

$$\theta(t) = \theta_o \cos \sqrt{\frac{4Mgr}{3\pi I}} t$$

18▷ La période T des oscillations ;

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3\pi I}{4Mgr}}$$

19▷ Application numérique :

$$T = 0,243 \text{ (s)}$$

20▷ La longueur L du pendule simple synchrone

$$l = \frac{3\pi I}{4Mr} \xrightarrow{\text{A.N.}} l = 12 \text{ cm}$$

Troisième partie

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

CHAPITRE 1

APPROXIMATION DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

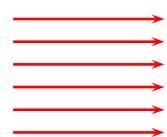
1.1 Notion du rayon lumineux

1.1.1 Généralités

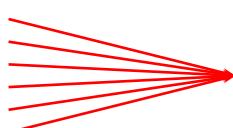
- Les phénomènes de diffraction et les interférences montrent que la lumière est une onde électromagnétique de longueur d'onde $\lambda \in [400 \text{ nm}, 700 \text{ nm}]$ (spectre visible) se propage dans le vide à la vitesse $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
- L'approximation de l'optique géométrique consiste à tendre la longueur d'onde λ vers zéro ($\lambda \rightarrow 0$) ; c'est à dire négliger les variations de l'amplitude de l'onde électromagnétique sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde λ , afin de négliger le phénomène de diffraction.
- L'optique géométrique s'intéresse à la **formation de l'image** par les instruments optiques qui suggère l'existence du notion du rayon lumineux .
 - Un milieu est dit transparent s'il laisse passer la lumière (eau , air, verre,...)
 - Un milieu est dit homogène si toutes les propriétés physiques (la masse volumique , l'indice de réfraction,...) sont les mêmes quels que soit le point M du milieu.
 - Un milieu est dit isotrope si les propriétés physiques ne dépendent pas de la direction (possède au moins localement une symétrie sphérique)
 - **Principe de propagation rectiligne de la lumière**

Dans un milieu **transparent linéaire homogène et isotrope** la lumière se propage en ligne droite.

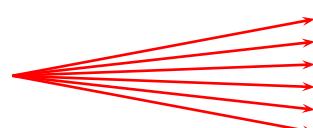
- L'ensemble des rayons lumineux constitue un faisceau lumineux qui peut avoir un faisceau :



Cylindrique



convergent



divergent

1.1.2 Limite du modèle

La notion du rayon lumineux perd sa signification si les dimensions des ouvertures des diaphragmes sont inférieures devant la longueur d'onde λ .(voir TP-COURS)

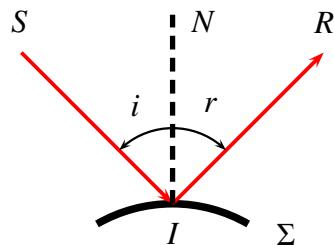
1.2 Réflexion et réfraction

La réflexion et la réfraction sont régies par les lois de **DESCARTES-SNELL**

1.2.1 Réflexion

Soit Σ une surface réfléchissante et SI un rayon incident.

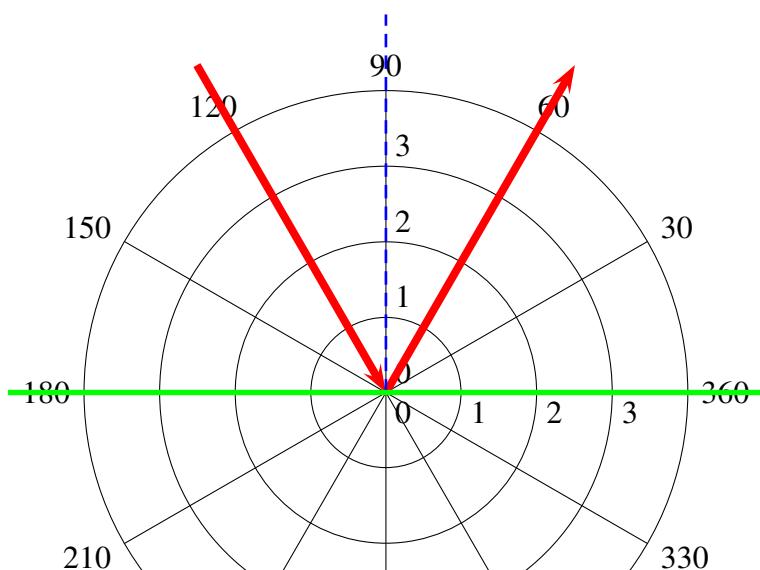
- SI : rayon incident
- IR : rayon réfléchi
- i : angle d'incidence
- r : angle de réflexion
- I : point d'incidence
- IN : la normale
- SIN : plan d'incidence



♠ Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence.

♠ L'angle d'incidence i est opposé à l'angle de réflexion r :

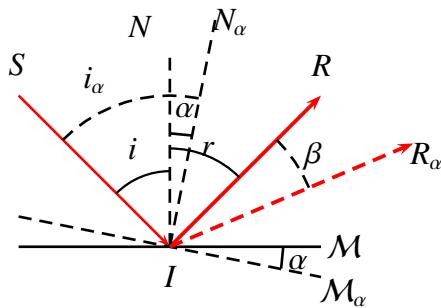
$$i = -r \implies |i| = |r|$$



Remarque

Lorsque on tourne le miroir d'un angle α , le rayon réfléchi tourne d'un angle de 2α

En effet :



Comme $i_\alpha = i + \alpha = \beta + r - \alpha$ et puisque $i = r$ alors le résultat :

$$\boxed{\beta = 2\alpha}$$

Définition

On appelle l'angle de déviation D l'angle entre la direction du rayon incident et la direction du rayon réfléchi .

Dans le cas de réflexion on a :

$$\boxed{D = \pi - 2i}$$

1.2.2 Réfraction

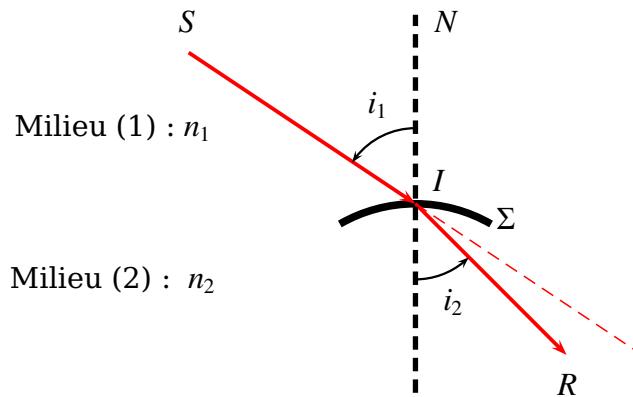
Soit Σ un dioptre (surface) qui sépare deux milieux différents. On caractérise chaque milieu par son indice de réfraction n définie par :

$$\boxed{n = \frac{c}{v} > 1}$$

avec c la vitesse de propagation de la lumière dans le vide et v la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu.

Exemple

Milieu	vide	air(CNTP)	eau	Verre	Verre à fort indice
n	1	1,00027	1,33	$\simeq 1,5$	$1,6 \leq n \leq 1,8$



Les lois de **DESCARTES-SNELL** pour la réfraction sont :

- ♠ Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence.
- ♠ L'angle d'incidence i_1 est égal à l'angle de réfraction i_2 vérifie :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \implies \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2/1}$$

$n_{2/1}$ l'indice de réfraction relatif du milieu 2 par rapport au milieu 1.

Remarques

- Si i_1 et i_2 sont faibles alors la loi de **DESCARTES-SNELL** devient

$$n_1 i_1 = n_2 i_2$$

c'est la loi de **Kepler**

- L'angle de déviation

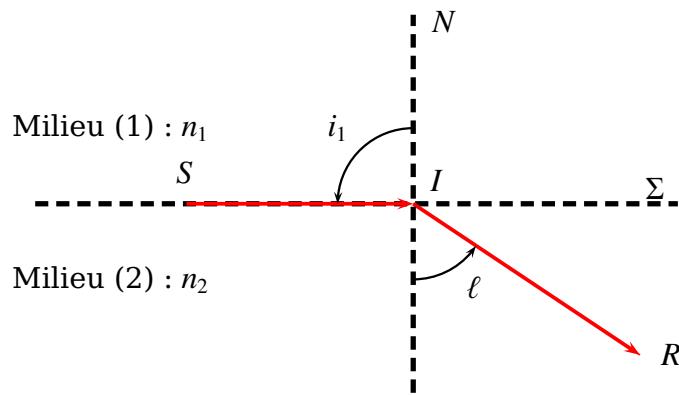
$$D = |i_2 - i_1|$$

1.2.3 Étude de la réfraction

On a $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \implies n_1 \cos i_1 di_1 = n_2 \cos i_2 di_2$
 Donc $\frac{di_2}{di_1} = \frac{n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_2} > 0$
 on conclut que i_2 est une fonction croissante de i_1 .

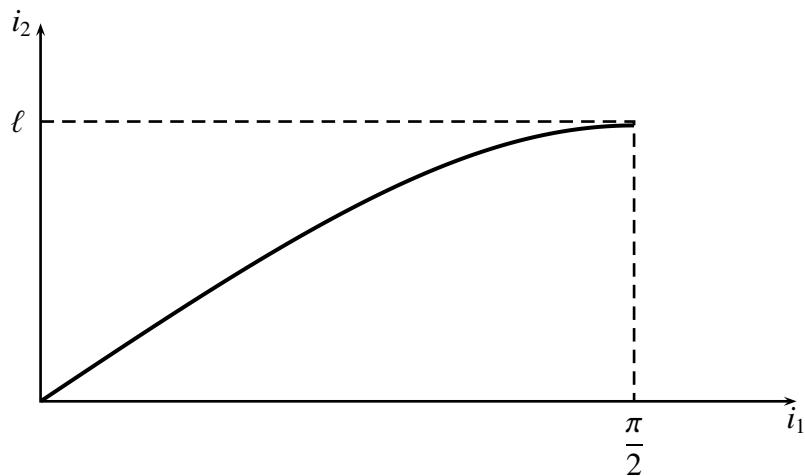
1.2.3.1 Cas $n_1 < n_2$:

On dit dans ce cas que le milieu (2) est plus réfringeant que le milieu (1).
 On a $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ et puisque $\frac{n_1}{n_2} < 1$ alors $\sin i_2 < \sin i_1 \implies i_2 < i_1$
 • Le rayon réfracté se rapproche de la normale.



- Lorsque i_1 croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, i_2 croît de 0 à ℓ : angle limite de réfraction ; avec

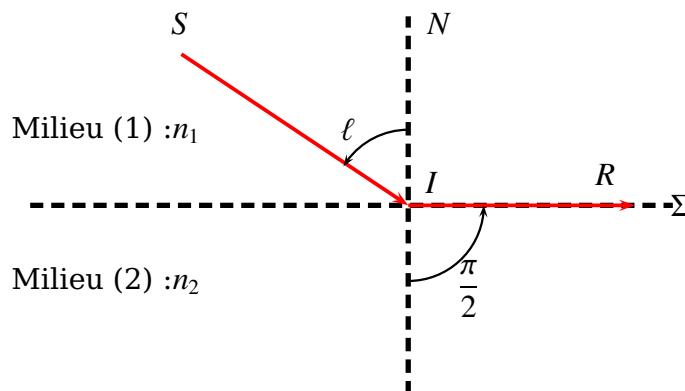
$$\sin \ell = \frac{n_1}{n_2} \implies \ell = \arcsin \frac{n_1}{n_2}$$



1.2.3.2 Cas $n_1 > n_2$

On dit dans ce cas que le milieu (1) est plus réfringeant que le milieu (2).
On a $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ et puisque $\frac{n_1}{n_2} > 1$ alors $\sin i_2 > \sin i_1 \implies i_2 > i_1$

- Le rayon réfracté s'éloigne de la normale.



- Lorsque i_2 croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, i_1 croît de 0 à ℓ : angle limite de réfraction ; avec

$$\sin \ell = \frac{n_2}{n_1} \implies \ell = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

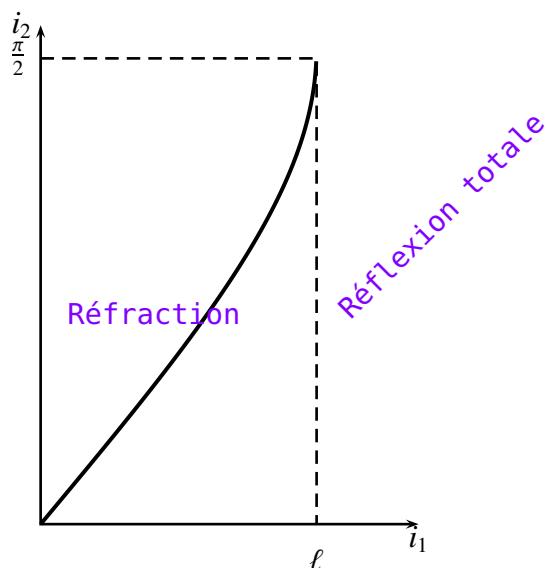
A.N : $n_2 = 1$ $n_1 = 1,5^\circ$ ce qui donne $\ell = 42^\circ$

Remarque

Si $i_1 > \ell$ la loi de **DESCARTES-SNELL** donne :

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 > \frac{n_1}{n_2} \sin \ell = \frac{n_1}{n_2} \times \frac{n_2}{n_1} = 1 \implies \sin i_2 > 1 \text{ Impossible dans } \mathbb{R}$$

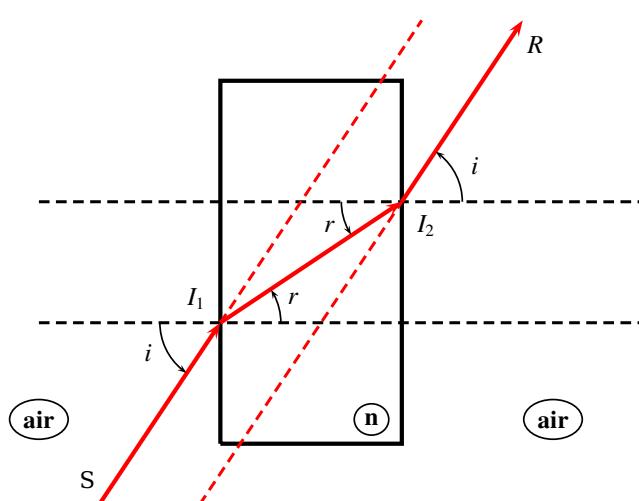
L'expérience montre que le rayon incident se réfléchit totalement : C'est la réflexion totale



Activité

Lame à faces parallèles

Soit une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice de réfraction n plongé dans l'air.



► Les rayons SI_1 et I_2R ont même pente ($\tan i$) donc les rayons incident et émergent sont parallèles. Par conséquent les deux rayons sont translatés d'une distance d

$$\blacktriangleright \sin i = n \sin r \implies r = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin i\right)$$

$$\blacktriangleright \text{On a } \cos r = \frac{e}{I_1 I_2} \implies I_1 I_2 = \frac{e}{\cos r}$$

$$\text{De même : } \sin(i - r) = \frac{d}{I_1 I_2} \implies d = \frac{e}{\cos r} \sin(i - r)$$

$$d = e \frac{\sin(i - \arcsin(\frac{1}{n} \sin i))}{\cos(\arcsin(\frac{1}{n} \sin i))}$$

► Pour i faible alors

$$d = \frac{n-1}{n} ei$$

Conclusion:

- Si $e \rightarrow 0$ et $i \rightarrow 0$ alors $d \rightarrow 0$: C'est à dire les rayons I_2R et SI_2 sont confondus (autrement dit $I_1 \equiv I_2$): Le rayon incident n'est pas dévié (voir les lentilles).
- On peut déterminer l'indice de réfraction n de la lame connaissant e, d et l'angle d'incidence i par la relation

$$n = \frac{ei}{ei - d}$$

(suite voir TP)

1.2.4 Étude du prisme

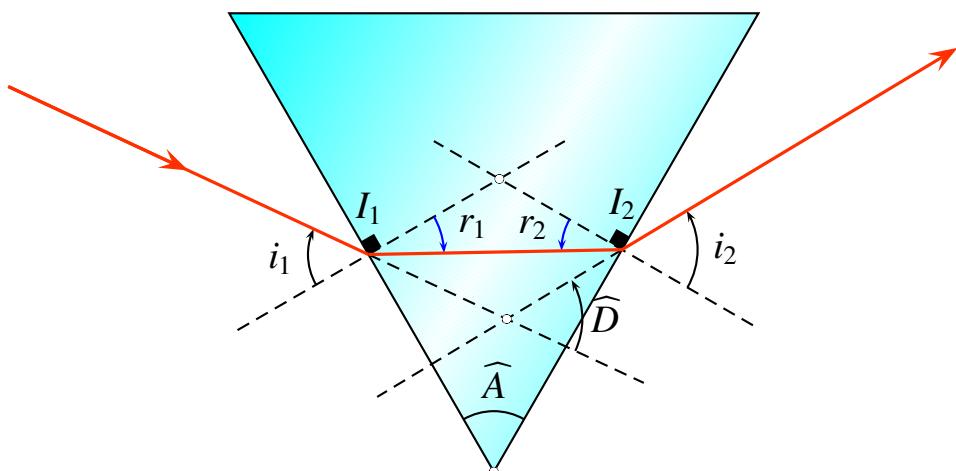
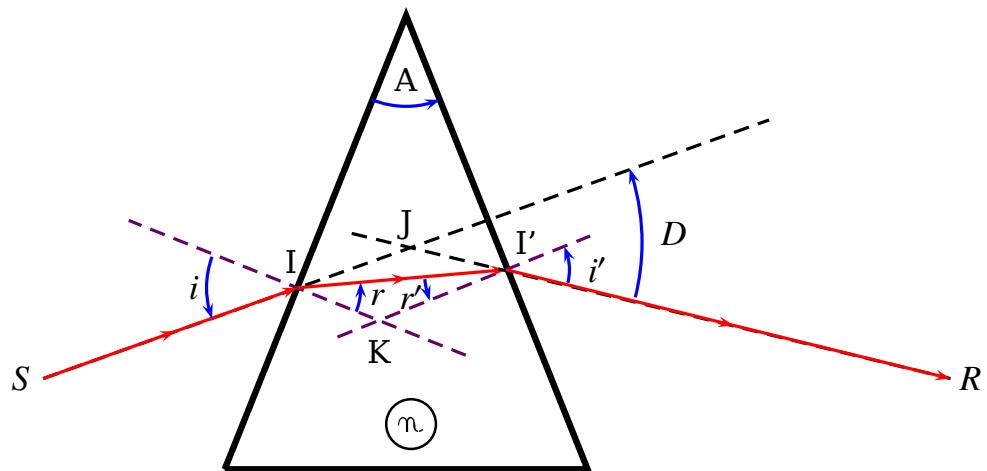
On assimile la valeur de l'indice de l'air à 1

On considère un prisme isocèle, réalisé dans un milieu solide transparent d'indice de réfraction n à mesurer, d'arête P et d'angle au sommet A . Ce prisme est plongé dans l'air dont l'indice de réfraction est assimilé à l'unité. Un rayon du «faisceau parallèle» incident contenu dans le plan de figure perpendiculaire à l'arête P passant par un point B , arrivé au point I sur la face d'entrée du prisme sous l'angle d'incidence i ; on s'intéresse, dans la suite, au cas où le rayon émergent en I' existe; C est un point situé sur cet émergent.

Tous les angles sont définis sur la figure 1 ci-après. La convention de signe, commune à tous ces angles, est la convention trigonométrique.

On notera que dans le cas particulier de figure proposée ci-dessous, les valeurs des six angles A , i , i' , r , r' et D sont toutes comprises entre 0 et $\pi/2$ rad.

1.2.4.1 Formules générales



- La loi de réfraction aux points :
- $I : \sin i = n \sin r$
- $I' : n \sin r' = \sin i'$

- Relation entre les angles A, r et r' :

$$A = r + r'$$

- La relation entre les angles D, i, i' et A

$$D = i + i' - A$$

Remarque

A est faible $\Rightarrow r$ et r' de même i et i' sont faibles ce qui simplifie les lois de D.S (lois de Kepler) $i = nr$ et $nr' = i'$ qu'on remplace dans l'expression de D on trouve $D = (n - 1)A$

Commentaire :

- D ne dépend pas de l'angle d'incidence
- Le rayon incident émerge en I' $\forall i$ (pas de limite inférieure)

1.2.4.2 Conditions d'émergence

Dans toute la suite , les angles ne sont pas nécessairement petits devant 1rad

Pour que le rayon émergent existe , il est nécessaire que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

a) $A < 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$

b) $i_m < i < \frac{\pi}{2}$ avec $\sin i_m = n \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

En effet :

Conditions d'émergence avec ℓ l'angle limite c'est à dire $\sin \ell = 1/n$:

a) comme $r < \ell$ ainsi $r' < \ell$ alors $A = r + r' < 2\ell = 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$

b) On a : $\sin i = n \sin r$

- Réfraction en $I \Rightarrow r < \ell$ donc $i < \pi/2$

- Réfraction en $I' \Rightarrow r' < \ell$ et comme $r' = A - \ell$ alors :

$$\sin i_m = n \sin(A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right))$$

1.2.4.3 Minimum de déviation

Dans toute la suite, nous considérons que ces deux conditions sont satisfaites et que par conséquent le rayon émergent existe

toujours.

Montrons que :

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r}$$

En effet :

$$D = i + i' - A \implies \frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} - \frac{dA}{di}; \text{ or } \frac{di'}{di} = \frac{di' dr' dr}{dr' dr di}$$

$$\text{de même } \frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r}, \frac{dA}{di} = 0 \implies \frac{dr}{di} = -\frac{dr'}{di}; \frac{dr'}{di'} = \frac{\cos i'}{n \cos r'}$$

$$\text{on tire le résultat : } \frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r}$$

$$\text{Déduisons que : } \frac{dD}{di} = 0 \implies (n^2 - 1)(\sin^2 i - \sin^2 i') = 0$$

On enlève au carré et on remplace $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$ et on utilisant les lois de D.S en trouve le résultat.

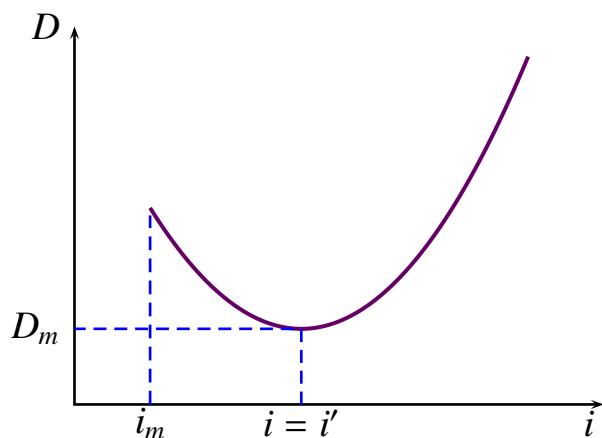
La déviation D est minimale si $\frac{dD}{di} = 0$ comme les angles sont tous positifs et $n > 1$ alors $\sin^2 i = \sin^2 i' \implies i = i'$

L'expression de n en fonction de A et D_m

Loi de D.S en i donne

$$n = \frac{\sin(\frac{A + D_m}{2})}{\sin \frac{A}{2}}$$

L'allure de la courbe $D = D(i)$



CHAPITRE 2

FORMATION DE L'IMAGE DANS LES CONDITIONS DE GAUSS

2.1 Systèmes optiques centrés

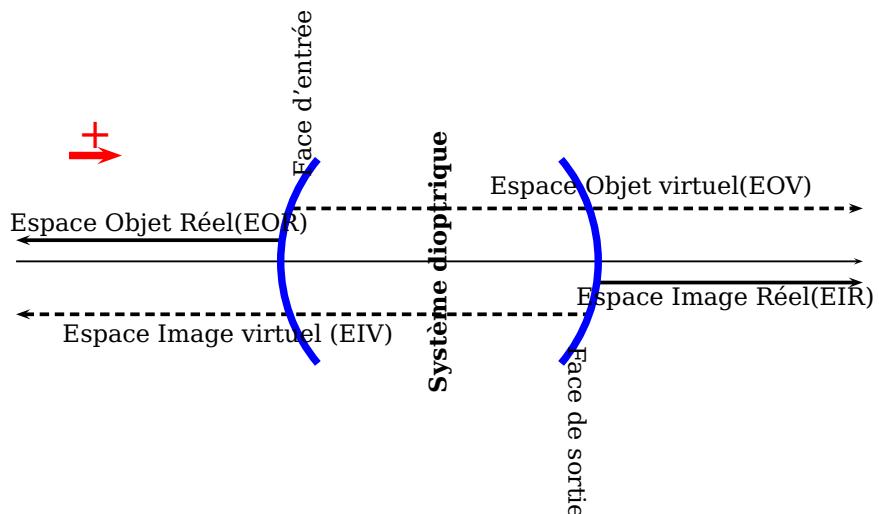
2.1.1 Définition

Définition

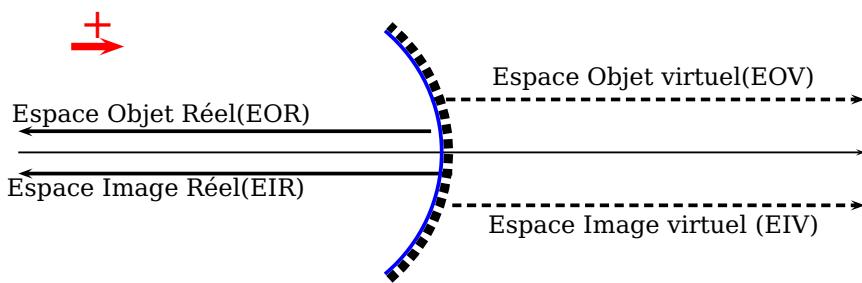
*Un système optique centré est une suite de dioptres et de miroirs dont les centres sont situés sur un même axe (axe principal) et qui sont séparés par des milieux transparents et homogènes :**système possédant un axe de révolution = axe optique***

2.1.2 Espace objet - Espace image :

2.1.2.1 Système dioptrique



2.1.2.2 Système catoptrique



2.2 Notion de stigmatisme et applanitisme

- On rappelle qu'un système optique est stigmatique pour deux points A et A' si tout rayon lumineux passant par A passe par A' après avoir traversé le système optique.

On dit que A et A' sont deux points conjugués.

Remarque

On distingue deux types de stigmatismes :

- **Stigmatisme rigoureux** : Tous les rayons incidents de A passent par A' (image d'un point est un point)

Exemple : Miroir plan ; Miroir parabolique (∞ , Foyer)

- **Stigmatisme approché** : Tous les rayons incidents de A passent au voisinage de A' (image d'un point est une tache centré en A')

Exemple : lentilles ; Miroirs sphériques.

- On rappelle qu'un système optique présentant un axe de révolution Δ (axe optique) est aplanétique s'il donne d'un objet AB perpendiculaire à Δ une image perpendiculaire à Δ .

2.3 Lentilles sphériques minces dans les conditions de GAUSS

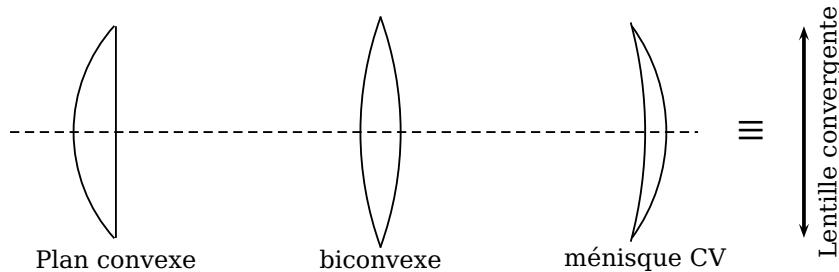
2.3.1 Définitions :

Une lentille sphérique est l'association de deux dioptres dont l'un au moins est sphérique.

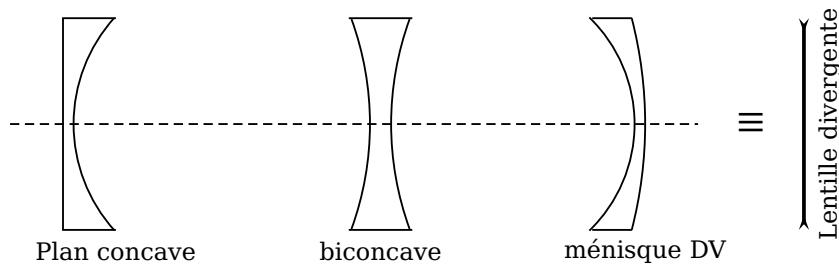
Elles sont très utilisées en appareils photos , microscope , lunettes astronomiques , jumelles,.....

On distingue deux catégories :

► **Lentilles à bords minces : Lentilles Convergentes**



► **Lentilles à bords épais : Lentilles divergentes**



2.3.2 Conditions de GAUSS :

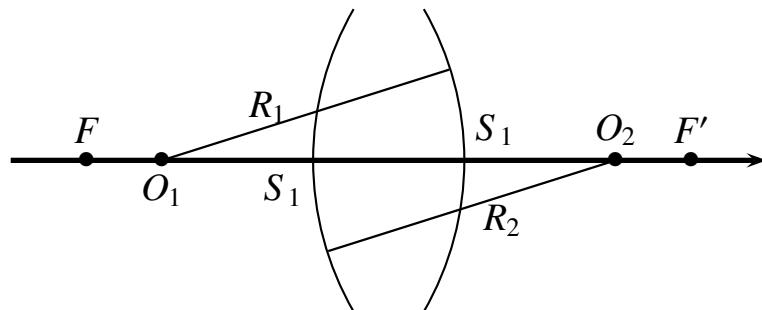
Un Système centré est utilisé dans les conditions de Gauss si :

- **Les rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique.**
- **Les rayons passent au voisinage du centre du système.**

2.3.3 Stigmatisme approché :

Réalisé dans les conditions de l'approximation de Gauss.

2.3.4 Lentilles minces :



Une lentille est mince si son épaisseur $e = S_1 S_2$ est très négligeable devant R_1, R_2 et $|R_2 - R_1|$

Dans ce cas $S_1 \equiv S_2 \equiv O$: **centre optique de la lentille**

$$\overline{OF} = f$$

distance focale objet .

$$\overline{OF'} = f'$$

distance focale image .

On appelle **vergence** d'une lentille :

$$V = \frac{n_i}{f'} = \frac{n_o}{f}$$

n_o et n_i indice de réfraction des milieux objet et image.

Si les milieux (O et I) = air ($n \approx 1$) alors

$$f' = -f = 1/V$$

Remarque

- **Lentille Convergente** $\Rightarrow V > 0, f' > 0, f < 0.$
- **Lentille divergente** $\Rightarrow V < 0, f' < 0, f > 0.$

2.3.5 Formation de l'image

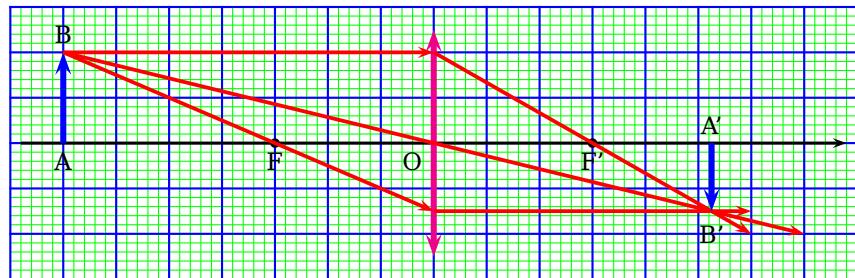
On rappelle que :

- Tout rayon parallèle à l'axe optique passe par le foyer image F' de la lentille.
- Tout rayon passant par le foyer objet F sort parallèle à l'axe optique.
- Tout rayon passant par le centre optique O ne sera pas dévié.
- Tous les rayons parallèles convergent vers un foyer secondaire (appartiennent au plan focal).

Activité

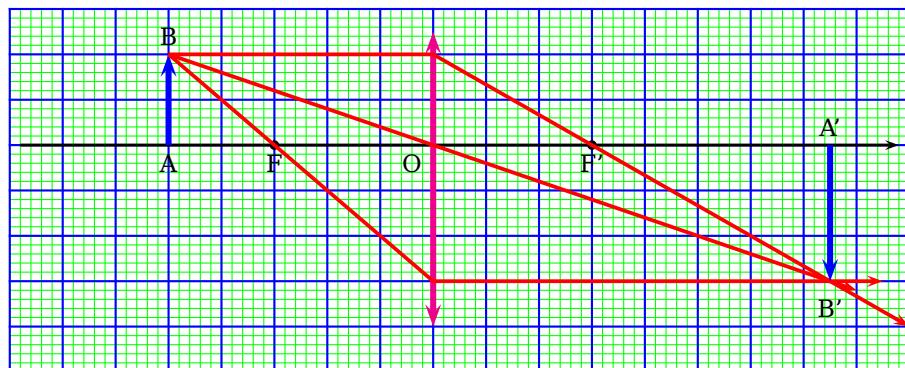
Lentille mince convergente

1. Objet réel ($-\infty < \overline{OA} < 2f$)



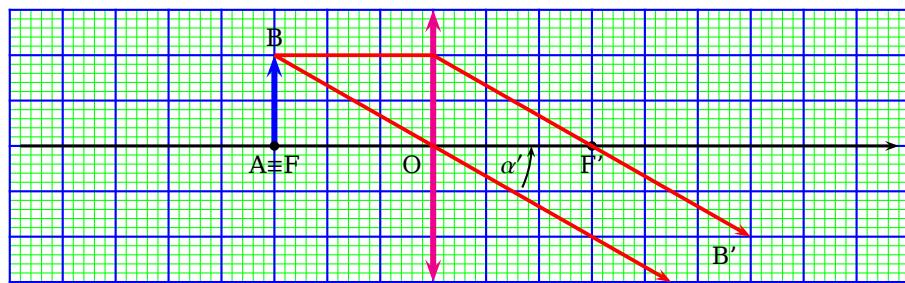
L'image est réelle ,renversée et plus petite que l'objet ($-1 < \gamma < 0$)

2. Objet réel ($2f < \overline{OA} < f$)



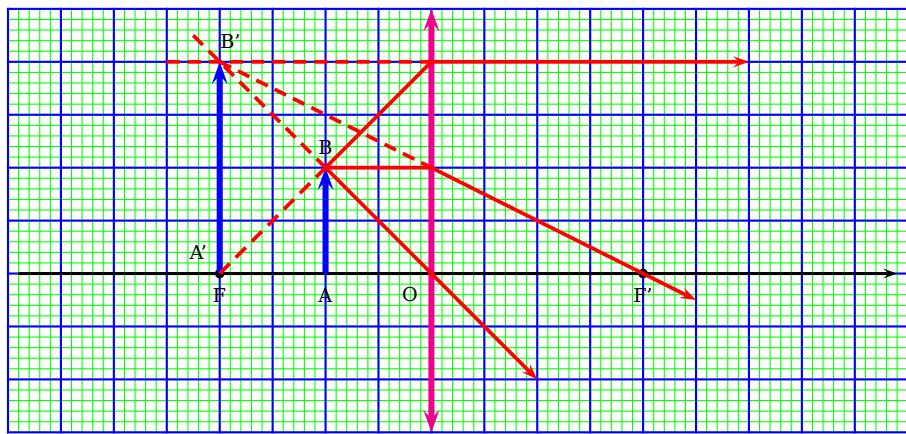
L'image est réelle ,renversée et agrandie ($-\infty < \gamma < -1$)

3. Objet réel dans le plan focal objet ($\overline{OA} = f$)



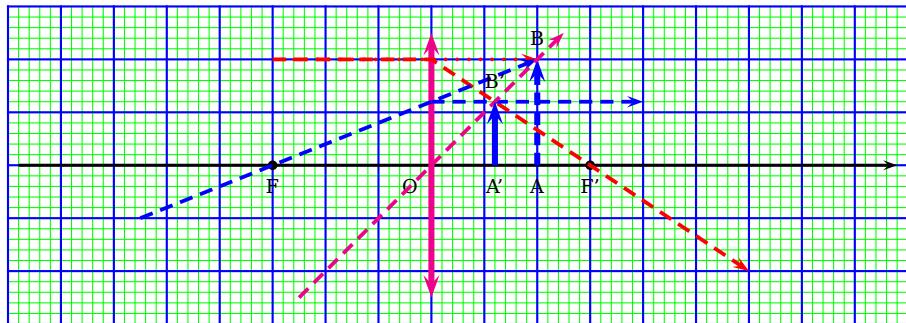
$$\text{L'image à l'infini : } \alpha' = \frac{AB}{f'}$$

4. Objet réel entre le plan focal objet et la lentille ($f < \overline{OA} < 0$)



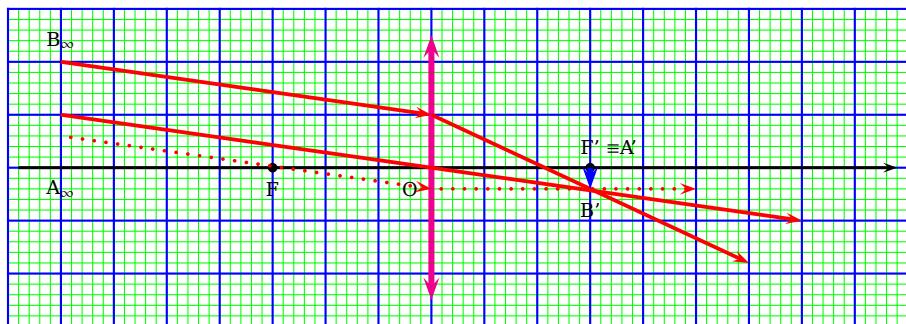
L'image est virtuelle , droite et agrandie

5. Objet virtuel ($0 < \overline{OA} < +\infty$)



L'image est réelle , droite et plus petite que l'objet

6. Objet réel à l'infini ($\overline{OA} \rightarrow -\infty$)



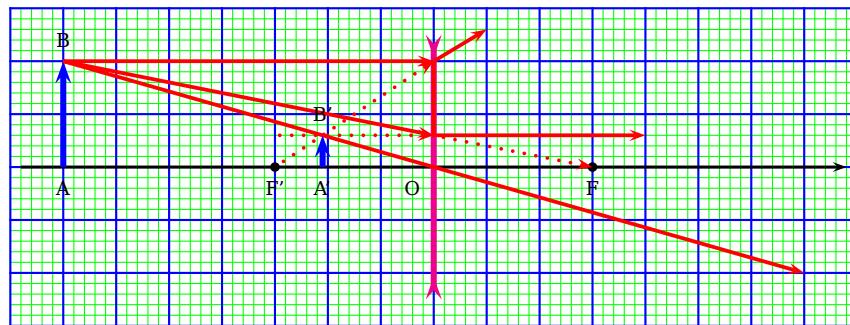
L'image est réelle dans le plan focal image $A' \equiv F'$

Remarque

Seul un objet situé entre le plan focal objet et la lentille donne une image virtuelle.

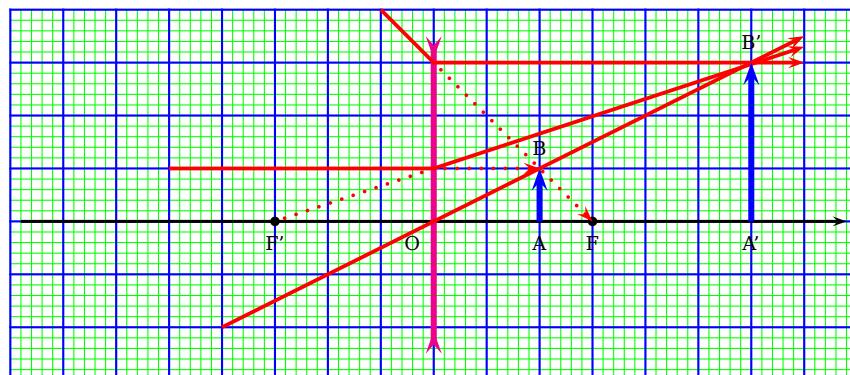
Activité**Lentille mince divergente**

1. L'objet est réel $\overline{OA} < 0$



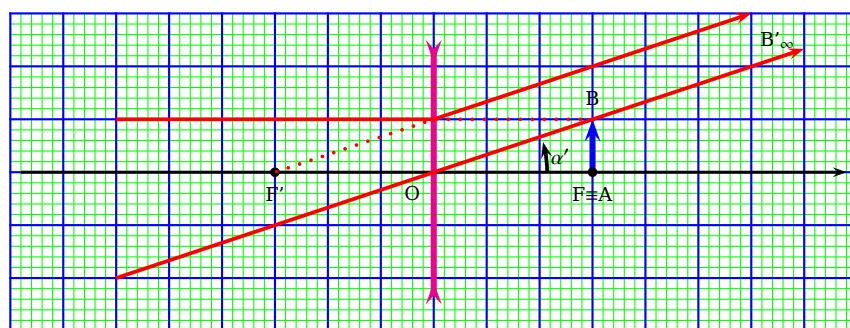
L'image est virtuelle droite et plus petite que l'objet

2. L'objet est virtuel entre le plan focal objet et la lentille $0 < \overline{OA} < f$



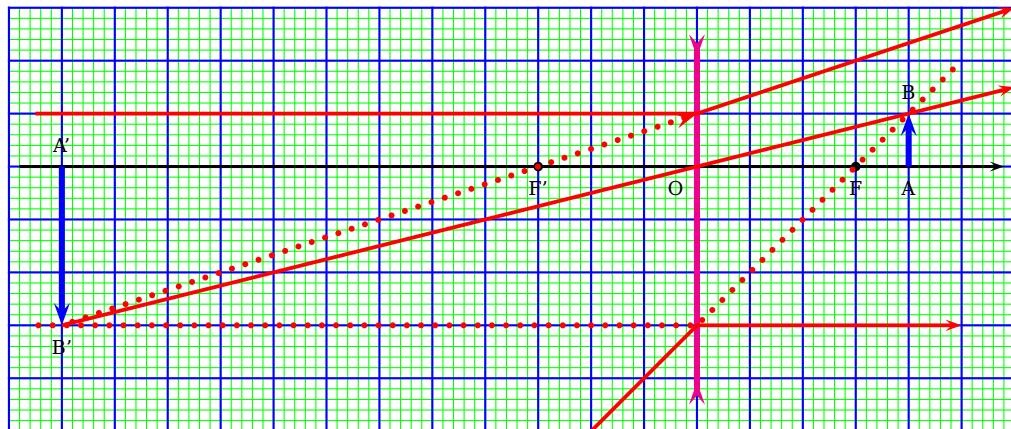
L'image est réelle droite et plus grande que l'objet.

3. L'objet est virtuel dans le plan focal objet $\overline{OA} = f$



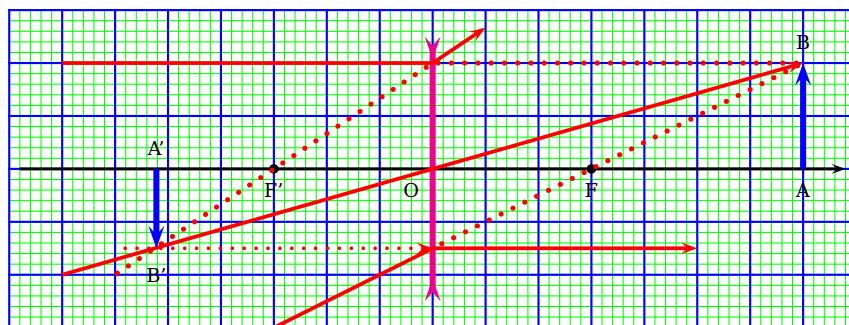
L'image est rejetée à l'infini $\alpha' = \frac{AB}{f}$

4. L'objet est virtuel $f < \overline{OA} < 2f$



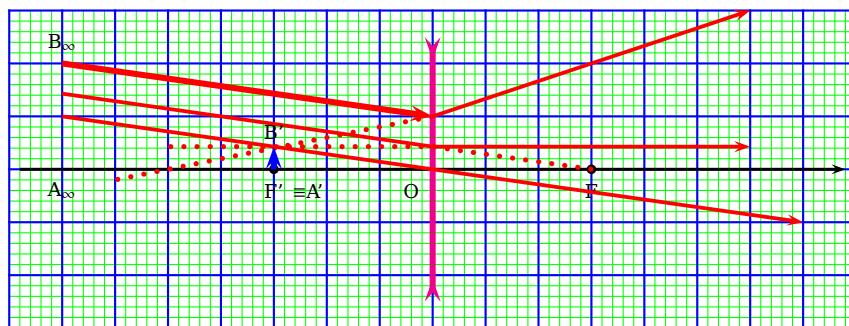
L'image est virtuelle renversée et plus grande que l'objet

5. L'objet est virtuel $2f < \overline{OA} < +\infty$



L'image est virtuelle renversée et plus petite que l'objet

6. L'objet est réel à l'infini $\overline{OA} = -\infty$



L'image est virtuelle dans le plan focal image

Remarque

Seul un objet virtuel placé entre la lentille divergente et le plan focal objet donne une image réelle.

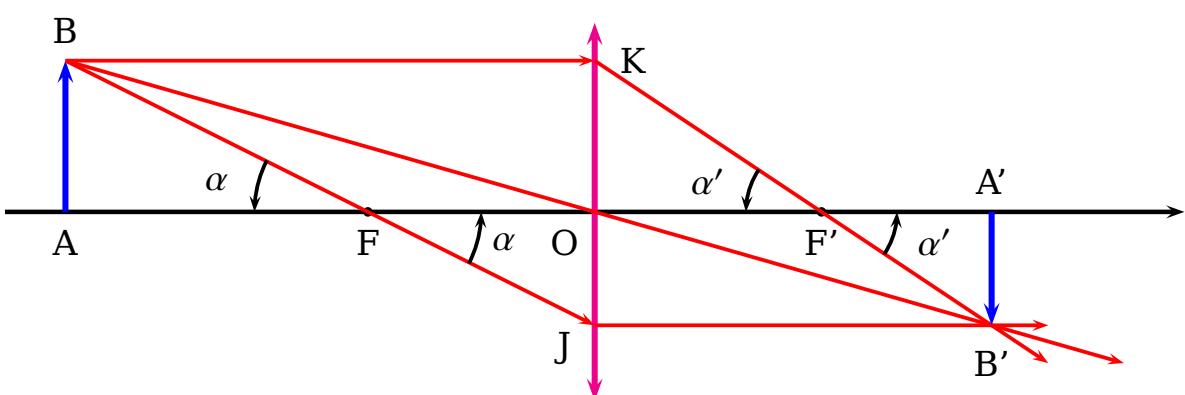
2.3.6 Grandissement transversal-Formule de Newton :

Soit (A,B) un objet et (A',B') son image à travers un système optique.
On définit le grandissement transversal de l'instrument optique par :

$$\mathcal{G}_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Remarque

- ▶ $\mathcal{G}_t > 0 \Rightarrow$ l'image est droite (l'objet et l'image ont même sens).
- ▶ $\mathcal{G}_t < 0 \Rightarrow$ l'image est renversée (l'objet et l'image ont des sens opposés).
- ▶ $|\mathcal{G}_t| > 1 \Rightarrow$ l'image est plus grande que l'objet .
- ▶ $|\mathcal{G}_t| < 1 \Rightarrow$ l'image est plus petite que l'objet .



On a : $\tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OF}} \Rightarrow \mathbb{G}_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{f}}{\overline{AF}} \quad (1)$

$$\tan \alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'F'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OF'}} \Rightarrow \mathbb{G}_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{f}}{\overline{f'}} \quad (2)$$

(1) = (2) \Rightarrow la formule de Newton

$$\overline{AF} \cdot \overline{A'F'} = \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = ff' = -f^2 = -f'^2$$

Conséquences

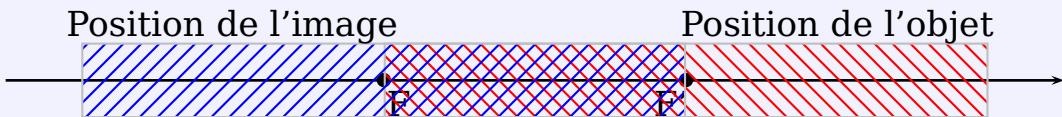
On a :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f^2 < 0$$

- Si $\overline{FA} < 0$ (l'objet est situé avant le foyer objet) alors $\overline{F'A'} > 0$ (l'image se forme après le foyer image).



- Si $\overline{FA} > 0$ (l'objet est situé après le foyer objet) alors $\overline{F'A'} < 0$ (l'image se forme avant le foyer image).



2.3.7 Relation de conjugaison

Dans l'air on a :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \overline{F'A'} &= \overline{OA'} - \overline{OF'} = \overline{OA'} - f' \implies \overline{OA'} = \overline{F'A'} + f' \\ \overline{FA} &= \overline{OA} - \overline{OF} = \overline{OA} - f \implies \overline{OA} = \overline{FA} - f' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} &= \frac{1}{\overline{F'A'} + f'} - \frac{1}{\overline{FA} - f'} \\ &= \frac{\overline{FA} - f' - \overline{F'A'} - f'}{\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} + f'(\overline{FA} - \overline{F'A'}) - f'^2} \\ &= \frac{1}{f'} \end{aligned}$$

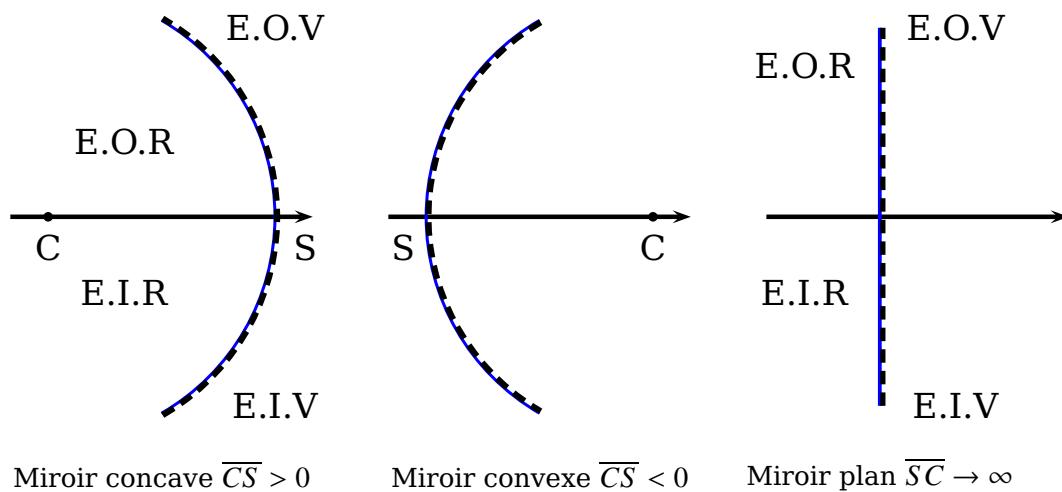
2.4 Miroirs sphériques dans les C.G.

2.4.1 Définitions

Définition

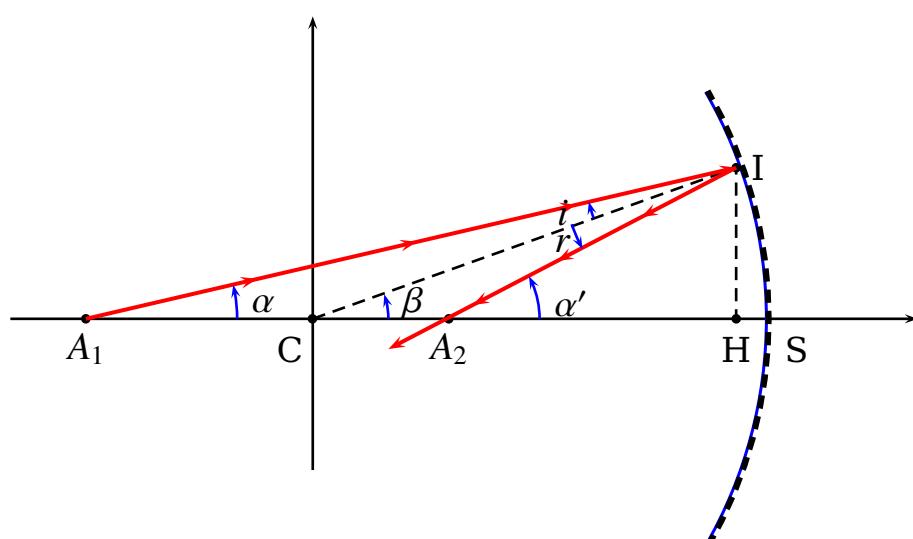
Une surface réfléchissante de forme sphérique

On distingue :



2.4.2 Relation de conjugaison

La relation de conjugaison pour le miroir sphérique est :



Condition de Gauss entraîne que H et S sont presque confondu et on a donc :

$$\alpha = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SA_1}} > 0, \alpha' = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SA_2}} > 0 \text{ et } \beta = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SC}} > 0$$

Ainsi :

$$\alpha + \pi - \beta - i = \pi \implies i = \alpha - \beta$$

De même :

$$\beta + i' + \pi - \alpha' = \pi \implies i' = \alpha' - \beta$$

Or d'après la relation de D.S pour la réflexion on a $i = -i'$ donc

$$2\beta = \alpha + \alpha'$$

► Origine au sommet S :

$$\frac{1}{\overline{SA_1}} + \frac{1}{\overline{SA_2}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

C'est la relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au sommet.

Remarque

Origine au centre C

$$\frac{1}{\overline{CA_1}} + \frac{1}{\overline{CA_2}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

2.4.3 Grandissement transversal

$$\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}$$

► Foyers :

- ▶ Foyer principal image F_2 :

$$A_1 \rightarrow \infty \implies A_2 \rightarrow F_2$$

$$\overline{SF_2} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

- Foyer principal objet F_1 :
- $A_2 \rightarrow \infty \implies A_1 \rightarrow F_1$

$$\overline{SF_1} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Conclusion:

Pour un miroir sphérique et dans les conditions de Gauss , on a:

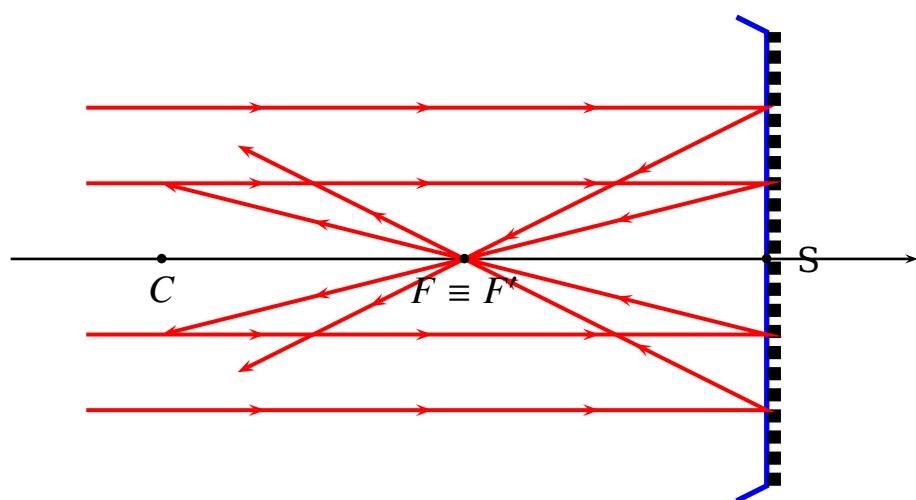
$$F_1 \equiv F_2 \equiv F$$

2.4.4 Formation de l'image

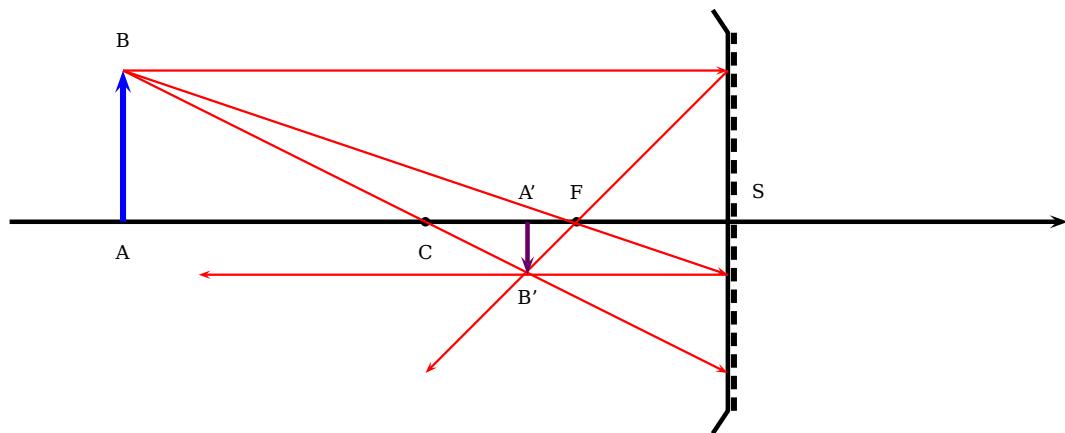
2.4.4.1 Miroirs concaves ou convergents

Dans ce cas $\overline{SC} < 0$ et la distance focal $f = \overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} < 0$ ainsi le foyer F est réel.

Le miroir concave est convergent en effet :

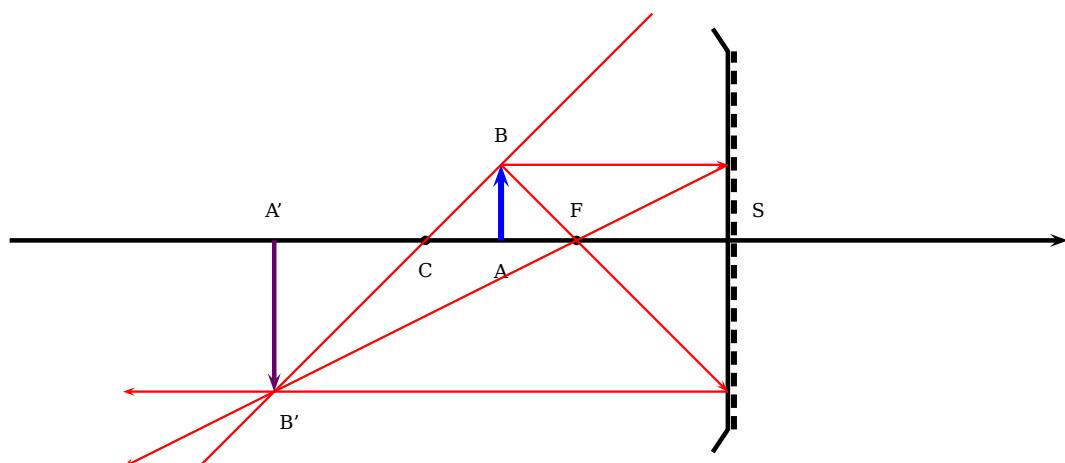


1. L'objet est réel avec $-\infty < \overline{SA} < 2f$



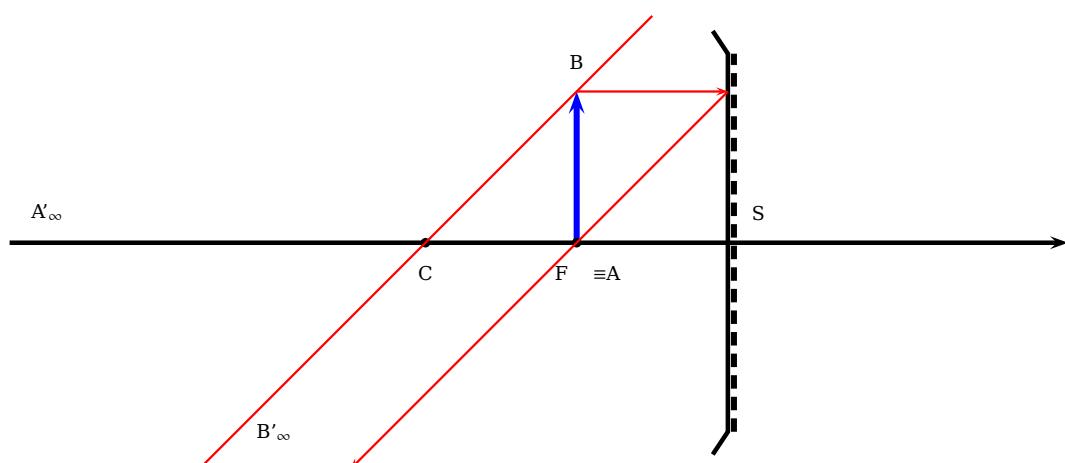
L'image est réelle renversée et plus petite que l'objet

2. L'objet est réel avec $2f < \overline{SA} < f$



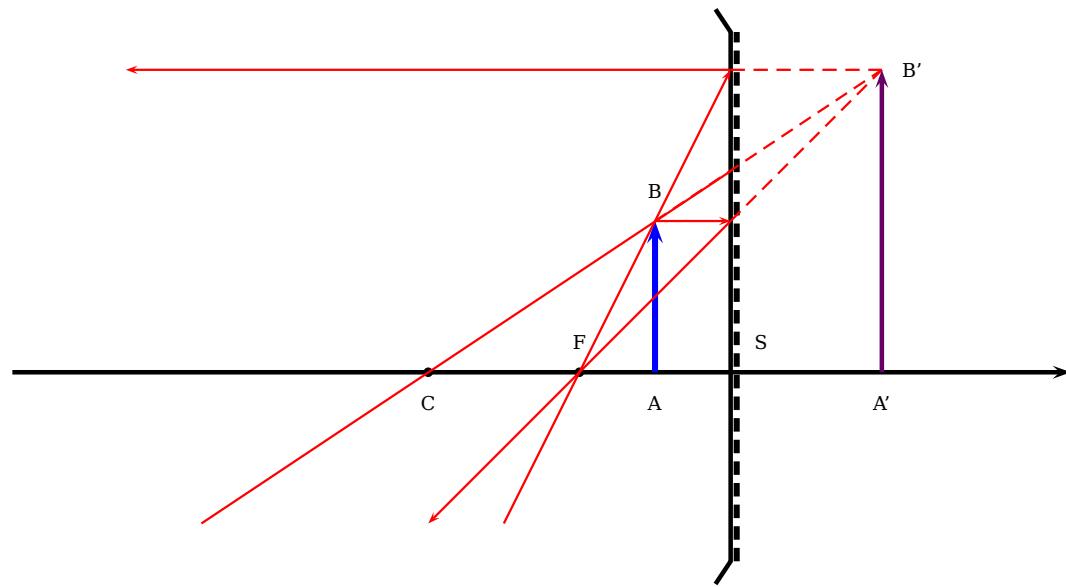
L'image est réelle renversée et plus grande que l'objet

3. L'objet est réel dans le plan focal objet $\overline{SA} = f$



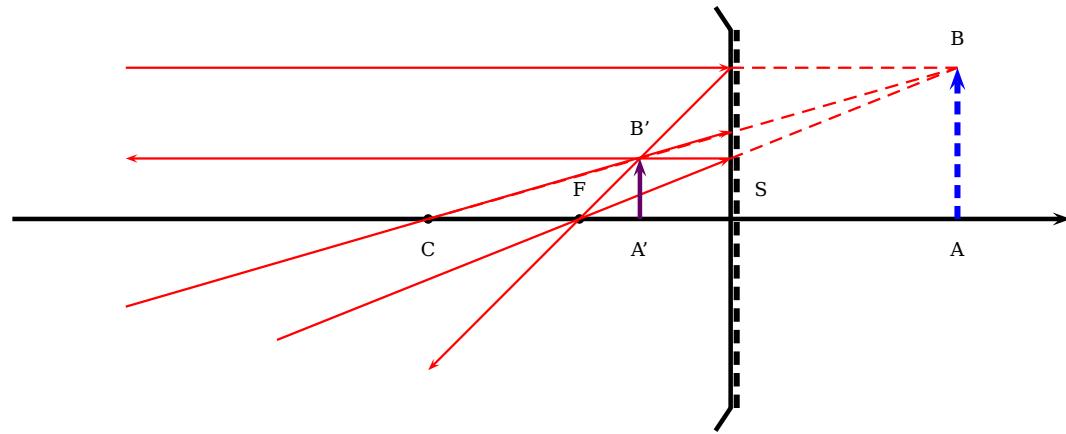
$$\text{L'image est rejetée à l'infini } \alpha' = \frac{AB}{f}$$

4. L'objet est réel entre le plan focal objet et le miroir $f < \overline{SA} < 0$



L'image est virtuelle droite et plus grande que l'objet

5. L'objet est virtuel $0 < \overline{SA} < \infty$



L'image est réelle droite et plus petite que l'objet

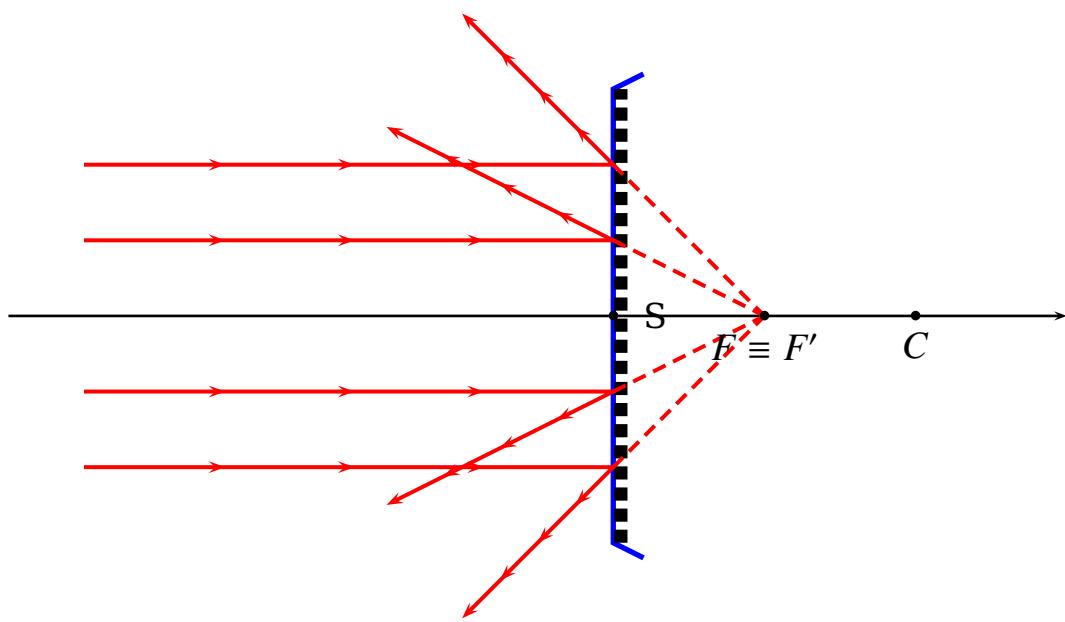
Remarque

Le seul cas où l'image est virtuelle correspond à un objet réel entre le plan focal est le miroir sphérique convergent.

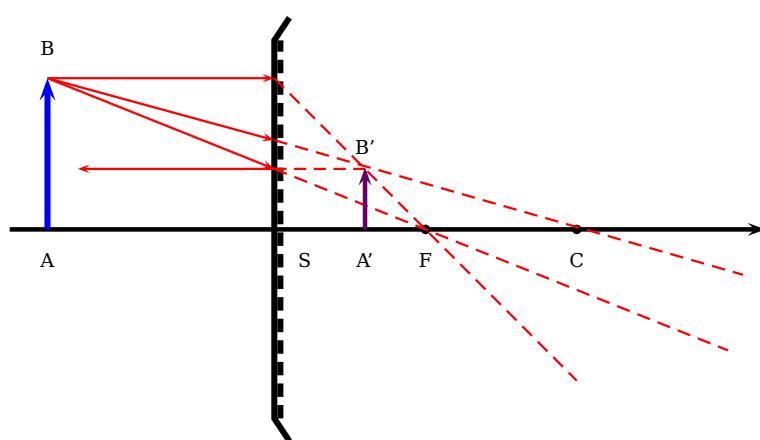
2.4.4.2 Miroirs convexes ou divergents

Dans ce cas $\overline{SC} > 0$ et la distance focal $f = \overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} > 0$ ainsi le foyer F est virtuel.

Le miroir convexe est divergent en effet :

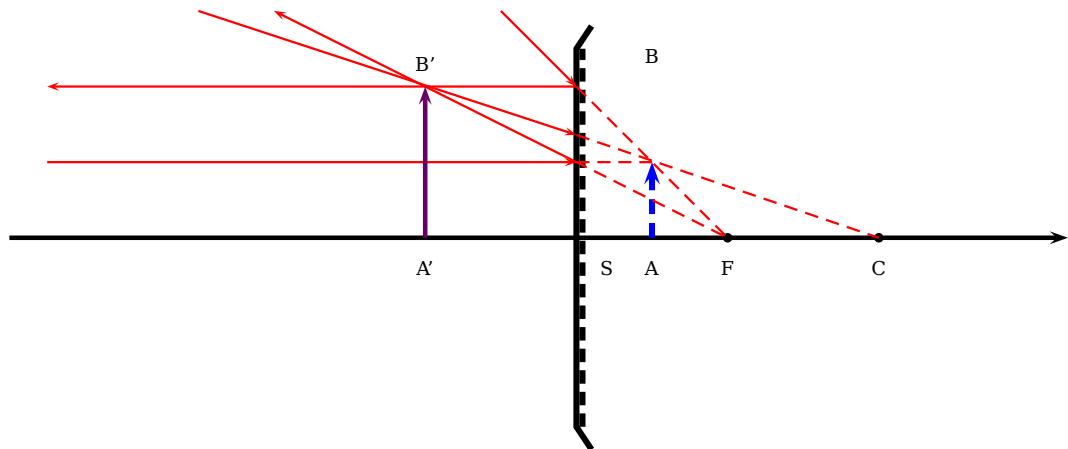


1. L'objet est réel avec $\overline{SA} < 0$



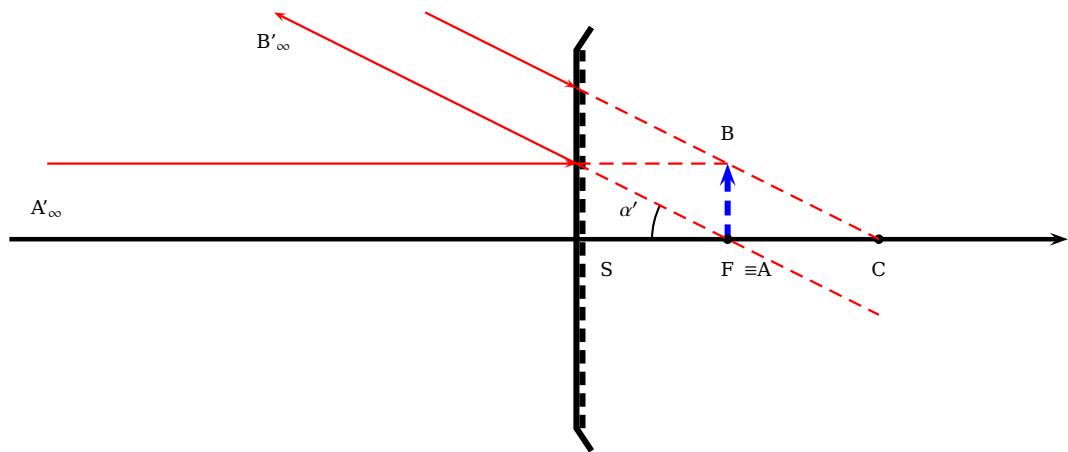
L'image est virtuelle droite et plus petite que l'objet

2. L'objet est virtuel entre le plan focal et le miroir $0 < \overline{SA} < f$



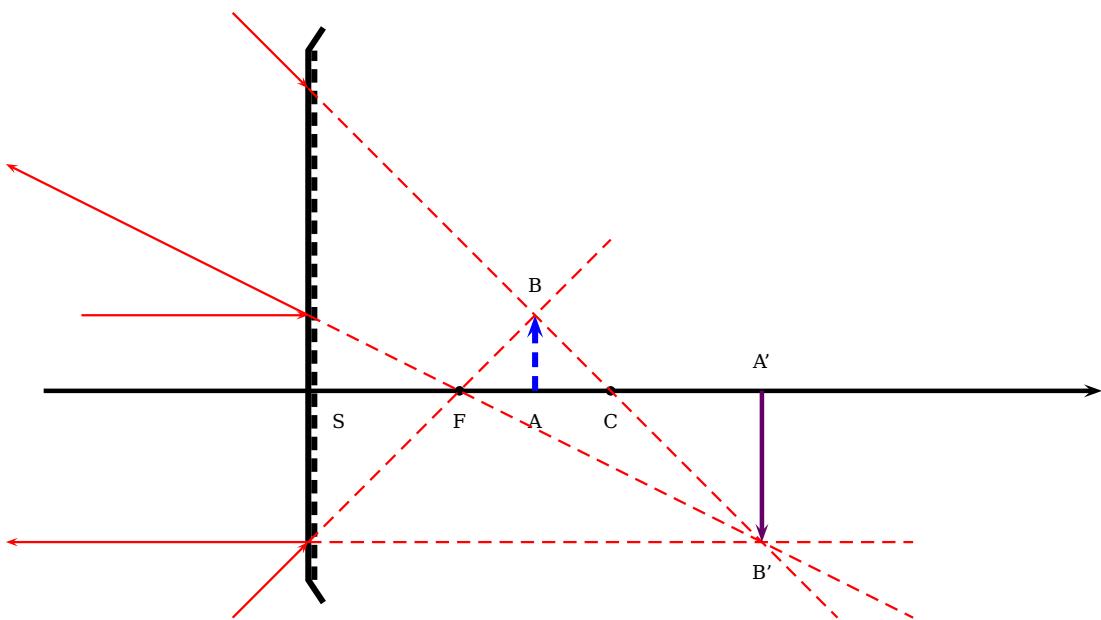
L'image est réelle droite et plus grande que l'objet

3. L'objet est virtuel dans le plan focal $\overline{SA} = f$



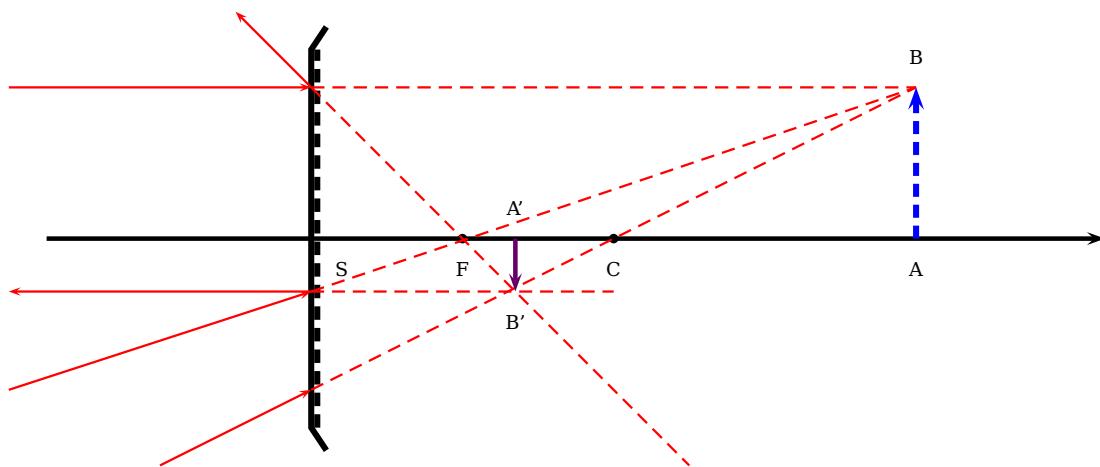
L'image est rejeté à l'infini $a' = \frac{AB}{f}$

4. L'objet est virtuel dans le plan focal $f < \overline{SA} < 2f$



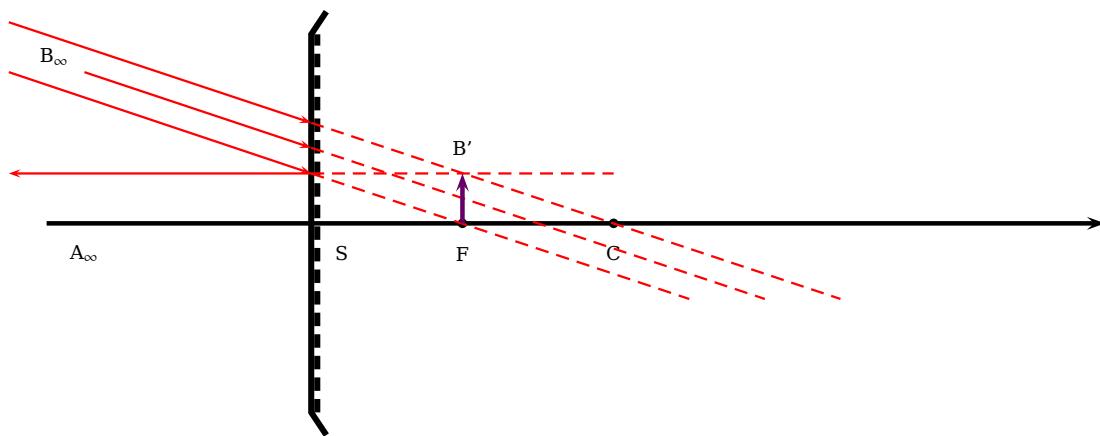
L'image est virtuelle inversée et plus grande que l'objet

5. L'objet est virtuel $2f < \overline{SA} < \infty$



L'image est virtuelle inversée et plus petite que l'objet

6. L'objet est réel rejeté à l'infini $\overline{SA} = -\infty$



L'image est virtuelle dans le plan focal $\overline{SA} = f$

Remarque

Le miroir plan :

La relation de conjugaison s'écrit :

$$\overline{SA'} = -\overline{SA}$$

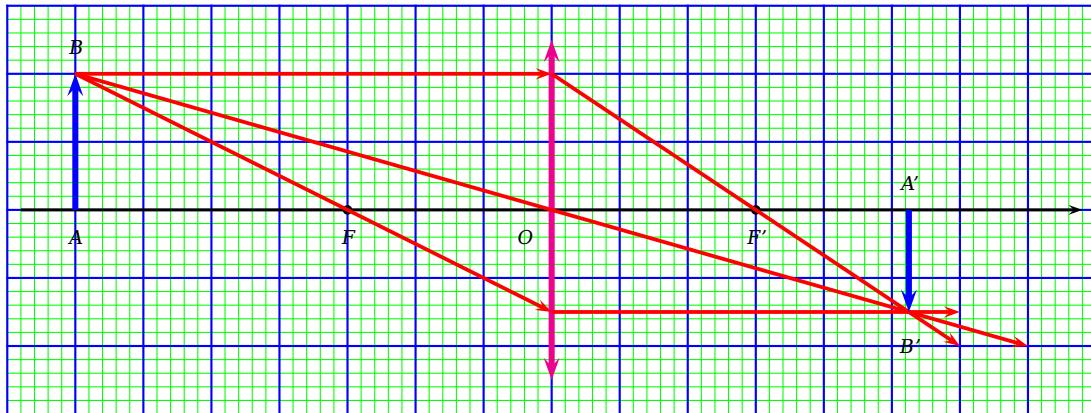
C'est

à dire :

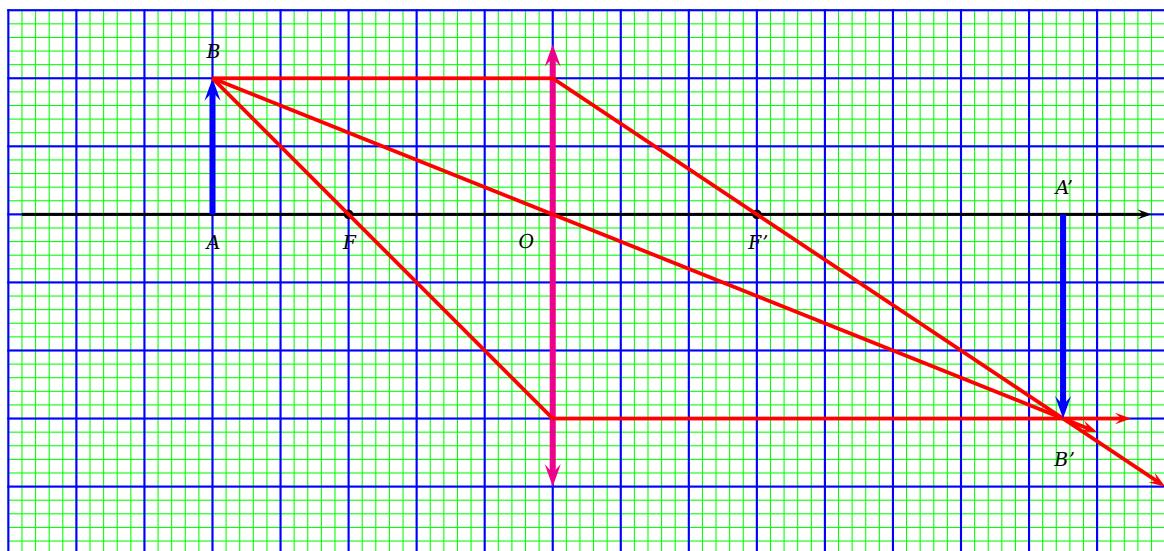
- ▶ S,A et A' sont alignés
- ▶ S milieu du segment [A,A']
- ▶ L'objet et l'image sont de nature différente

Application 4 Lentille mince convergente

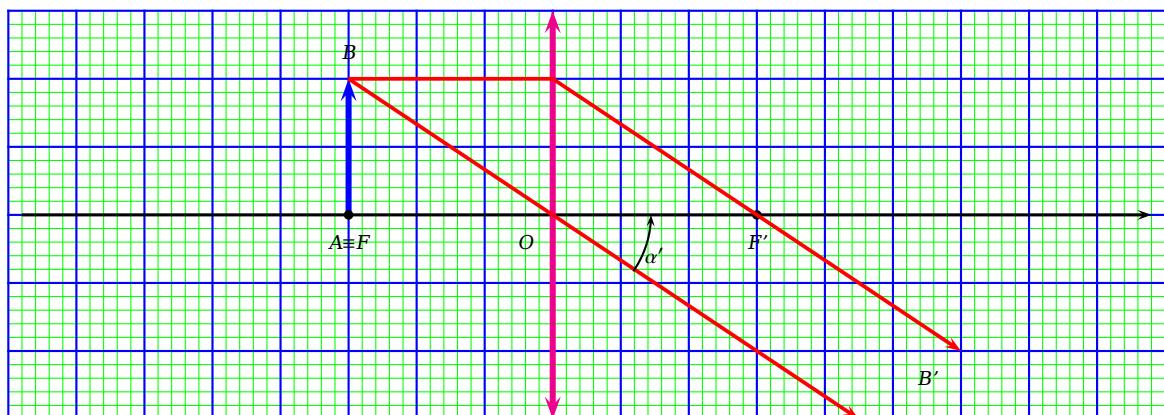
1. *Objet réel ($-\infty < \overline{OA} < 2f$)*



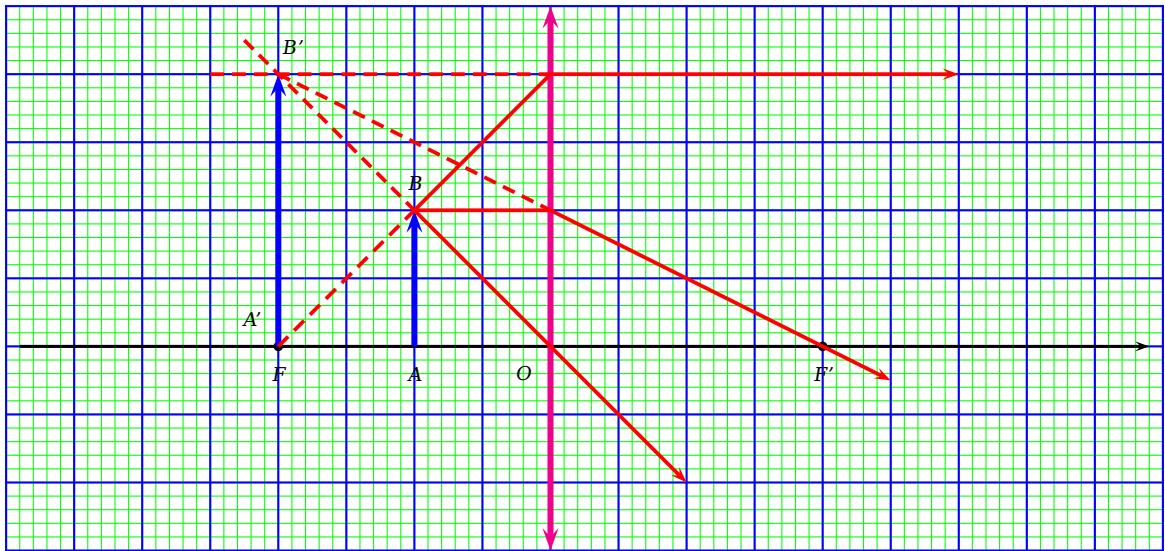
2. *Objet réel ($2f < \overline{OA} < f$)*



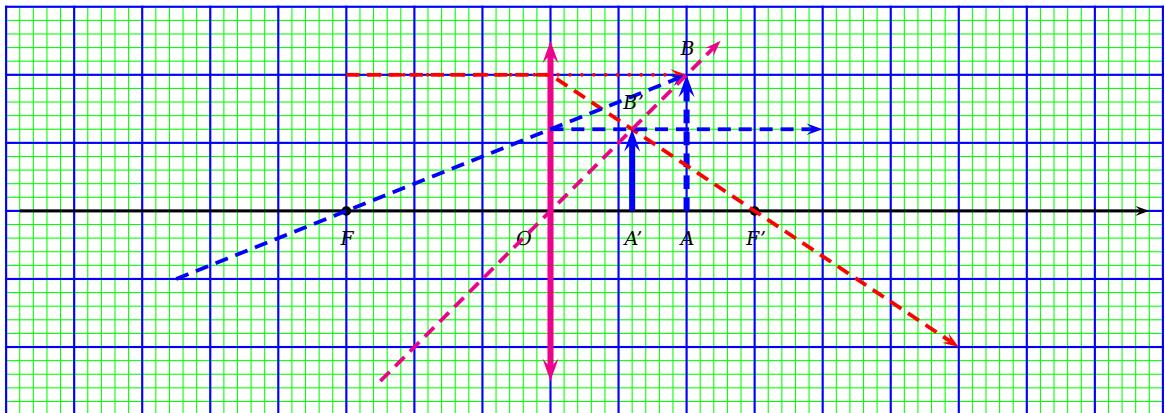
3. *Objet réel dans le plan focal objet ($\overline{OA} = f$)*



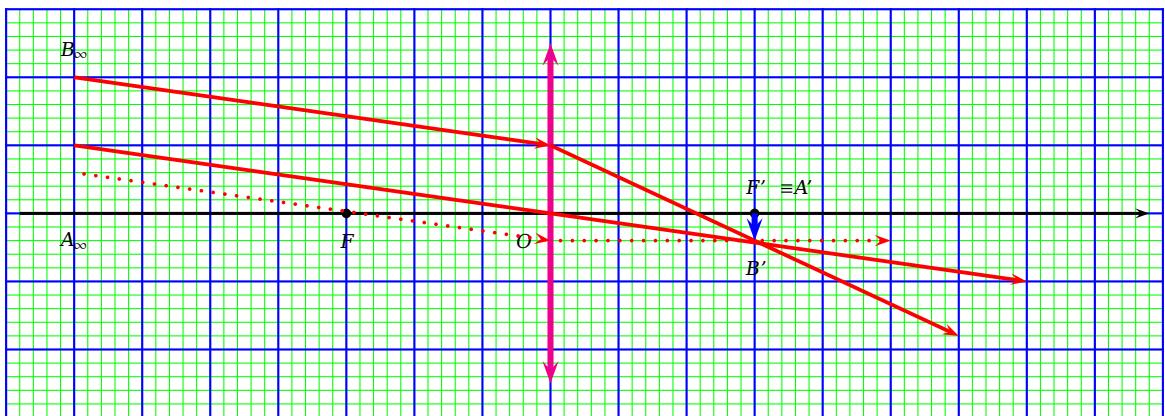
4. *Objet réel entre le plan focal objet et la lentille ($-\infty < \overline{OA} < 2f$)*



5. *Objet virtuel ($0 < \overline{OA} < +\infty$)*

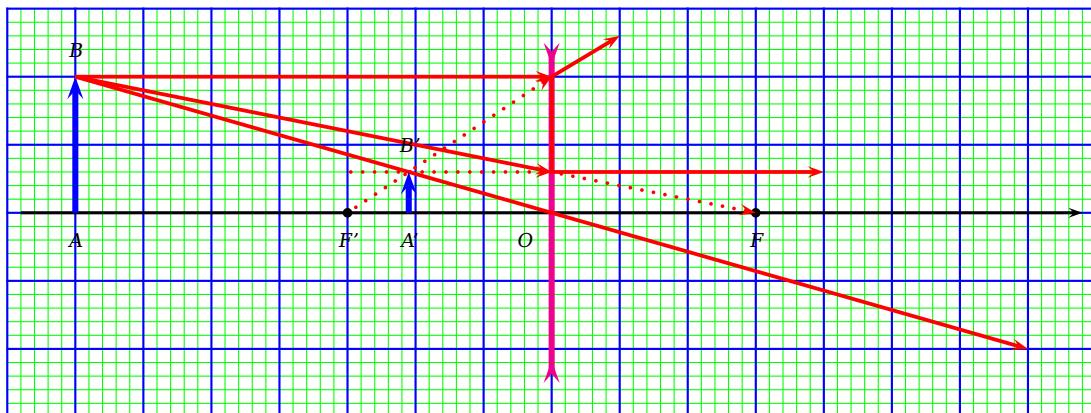


6. *Objet réel à l'infini ($\overline{OA} \rightarrow -\infty$)*



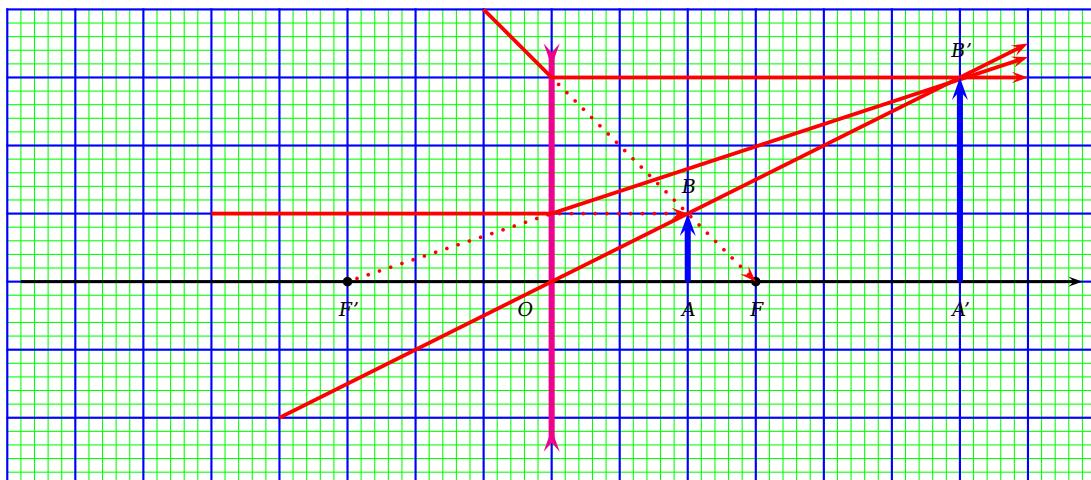
Application 5 Lentille mince divergente

1. L'objet est réel $\overline{OA} < 0$



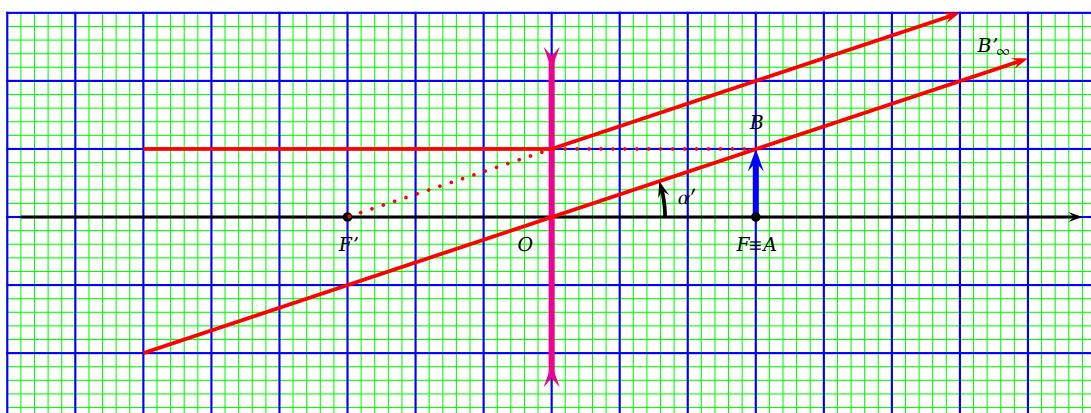
L'image est virtuelle droite et plus petite que l'objet

2. L'objet est virtuel entre le plan focal objet et la lentille $0 < \overline{OA} < f$



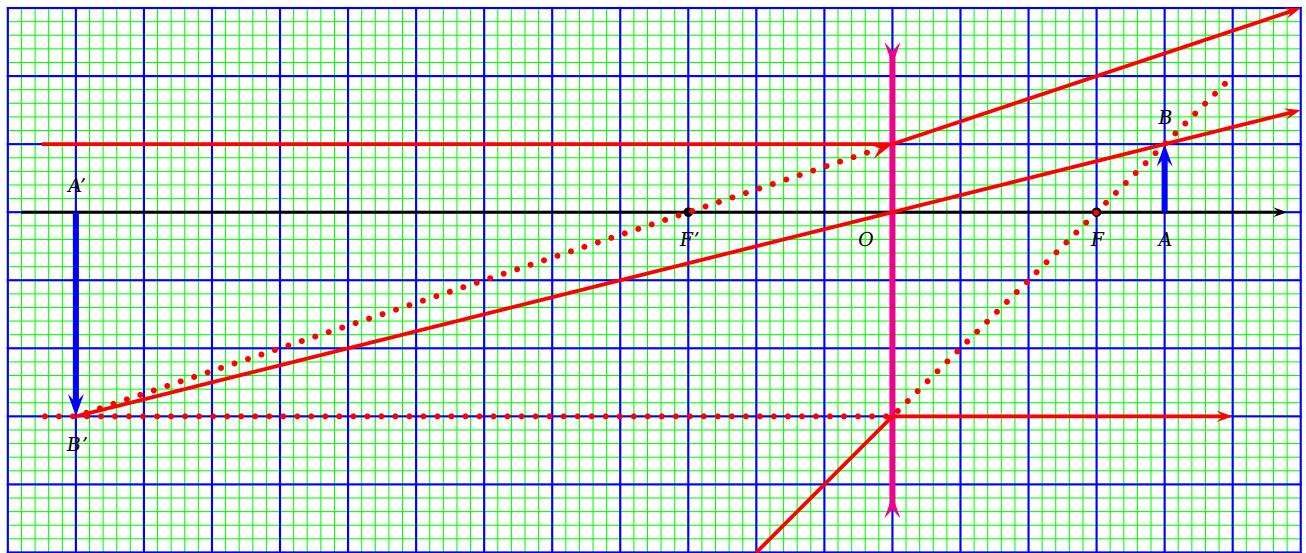
L'image est réelle droite et plus grande que l'objet.

3. L'objet est virtuel dans le plan focal objet $\overline{OA} = f$



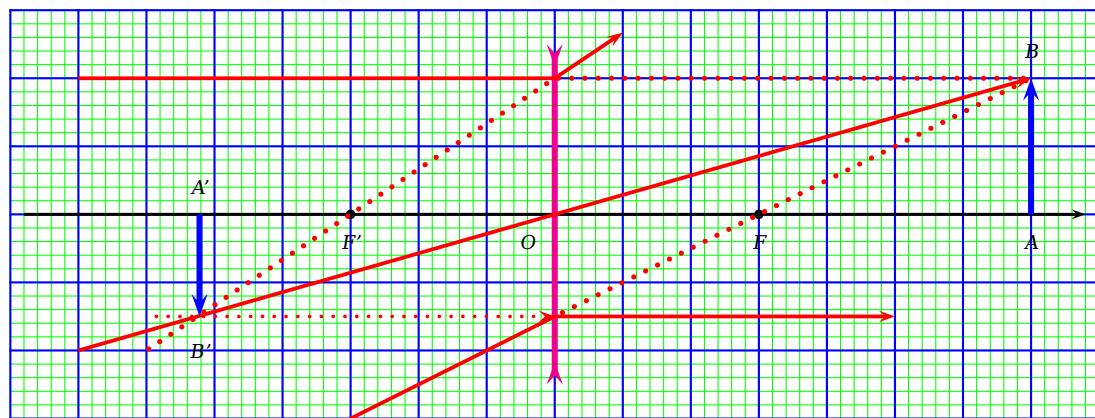
L'image est rejetée à l'infini $a' = \frac{AB}{f}$

4. L'objet est virtuel $f < \overline{OA} < 2f$



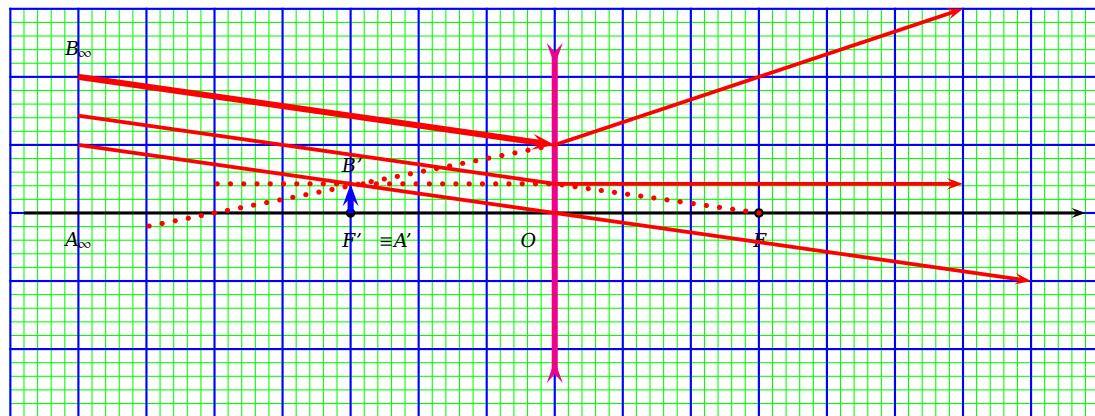
L'image est virtuelle renversée et plus grande que l'objet

5. L'objet est virtuel $2f < \overline{OA} < +\infty$



L'image est virtuelle renversée et plus petite que l'objet

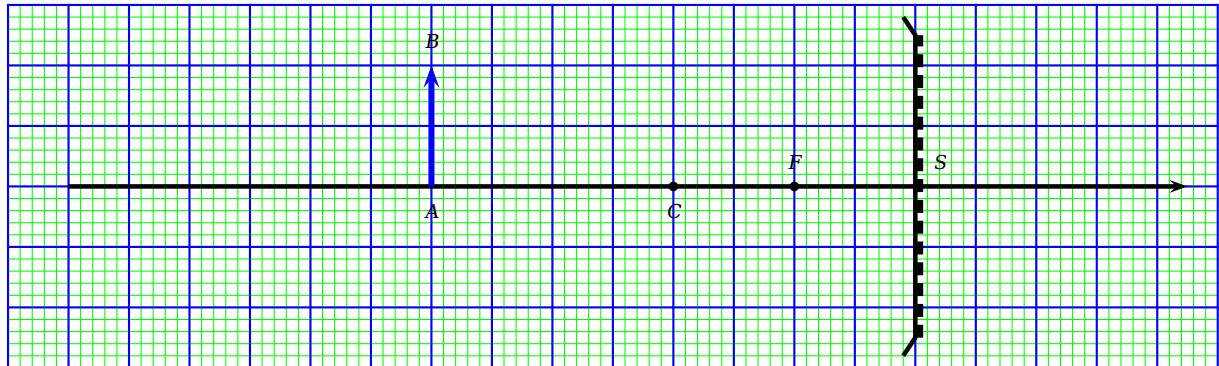
6. L'objet est réel à l'infini $\overline{OA} = -\infty$



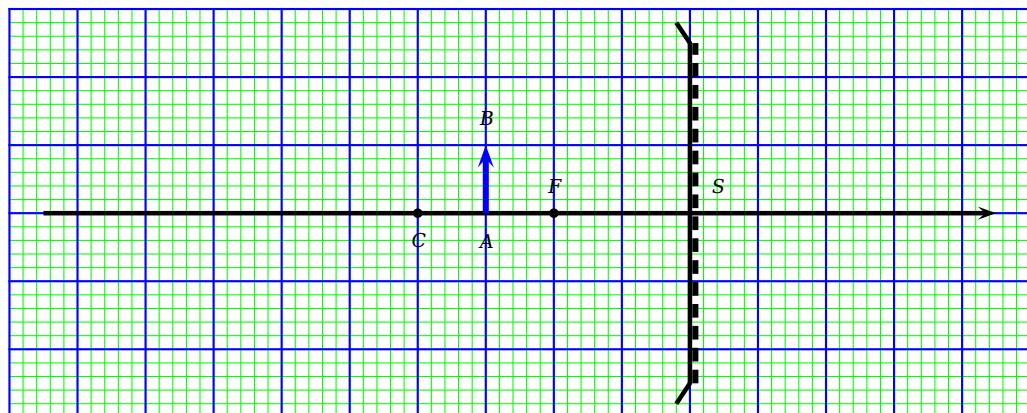
L'image est virtuelle dans le plan focal image

Application 6 Miroirs concave ou convergents

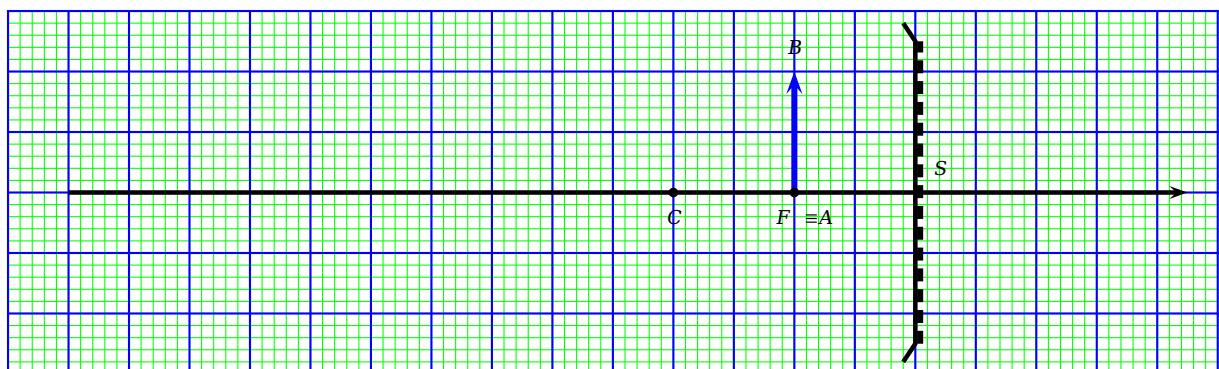
1. L'objet est réel avec $-\infty < \overline{SA} < 2f$



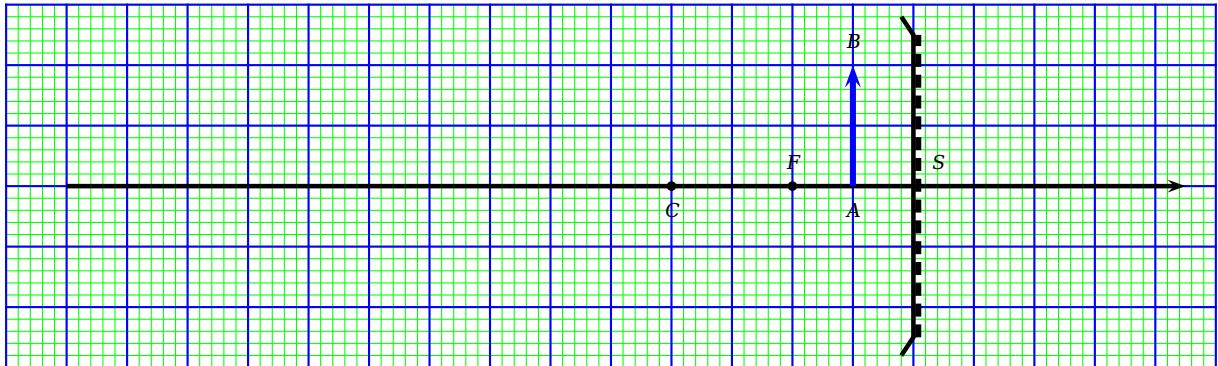
2. L'objet est réel avec $2f < \overline{SA} < f$



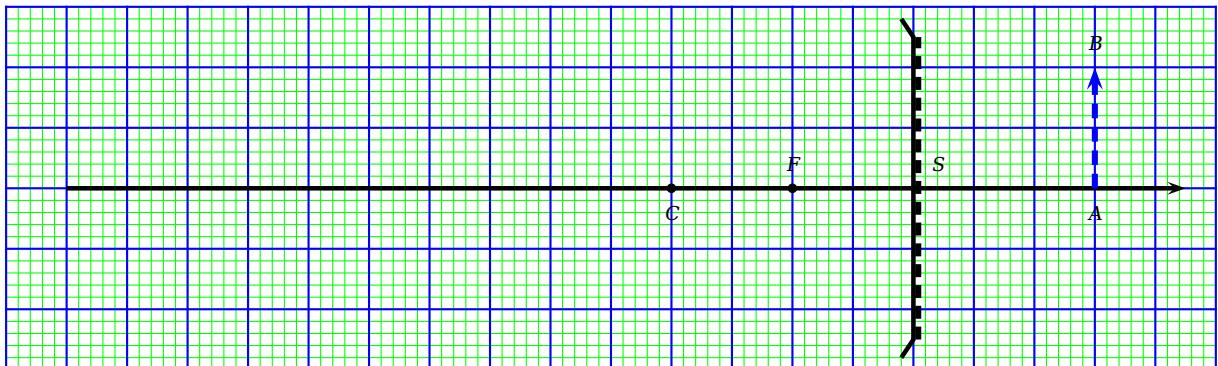
3. L'objet est réel dans le plan focal objet $\overline{SA} = f$



4. L'objet est réel entre le plan focal objet et le miroir $-\infty < \overline{SA} < 2f$

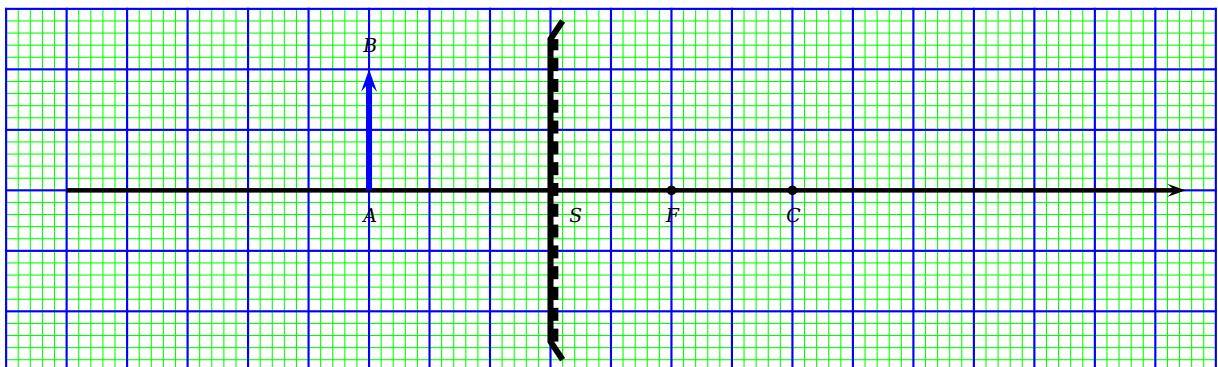


5. L'objet est virtuel $0 < \overline{SA} < \infty$

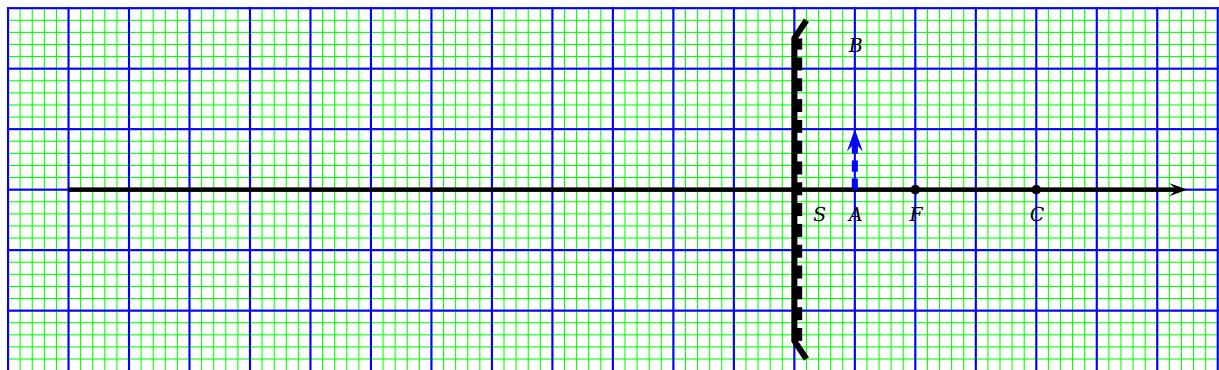


Application 7 Miroirs convexes ou divergents

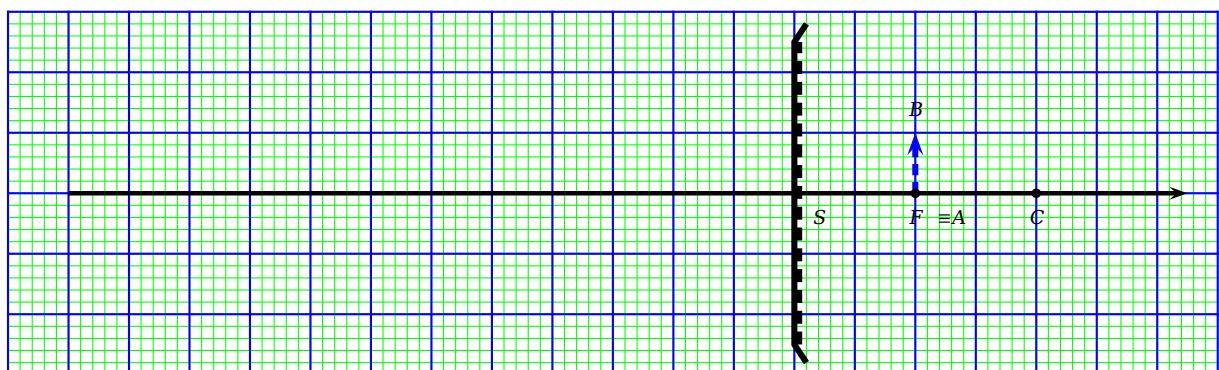
1. L'objet est réel avec $\overline{SA} < 0$



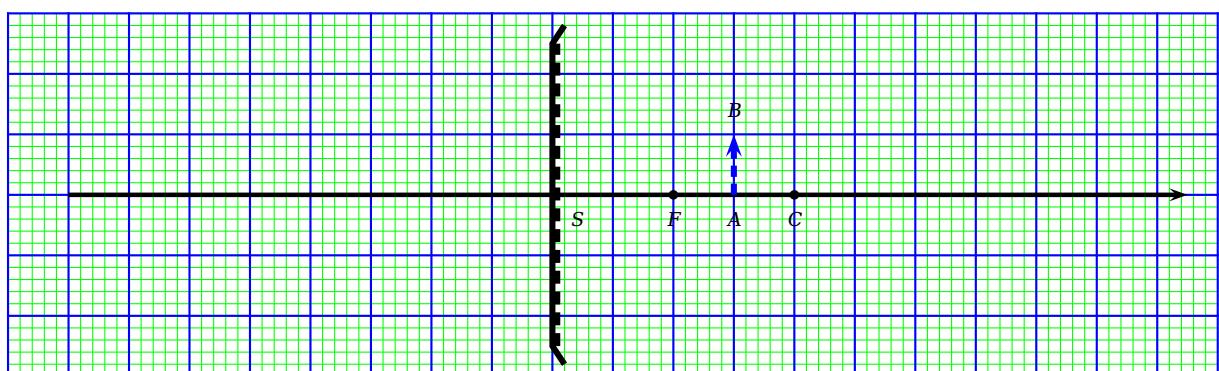
2. L'objet est virtuel entre le plan focal et le miroir $0 < \overline{SA} < f$



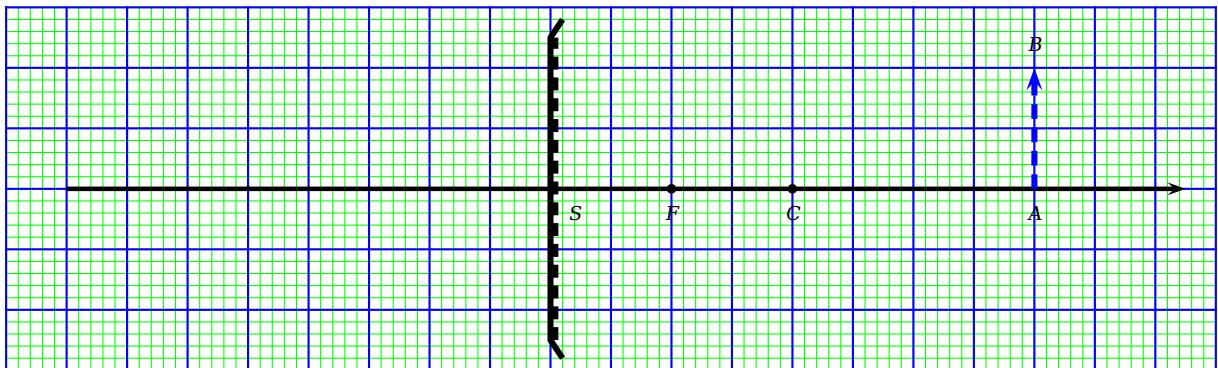
3. L'objet est virtuel dans le plan focal $\overline{SA} = f$



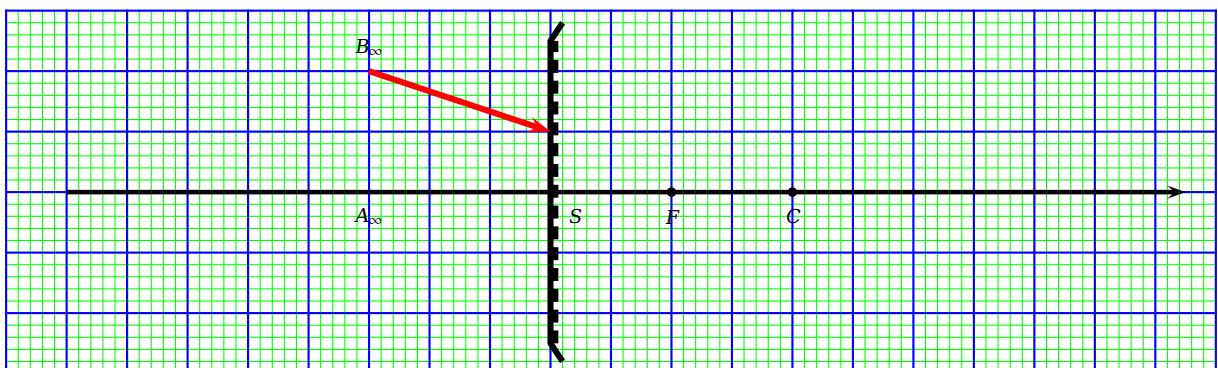
4. L'objet est virtuel dans le plan focal $f < \overline{SA} < 2f$



5. L'objet est virtuel $2f < \overline{SA} < \infty$



6. L'objet est réel rejeté à l'infini $\overline{SA} = -\infty$



Quatrième partie

THERMODYNAMIQUE

CHAPITRE 1

MODÈLE DU GAZ PARFAIT

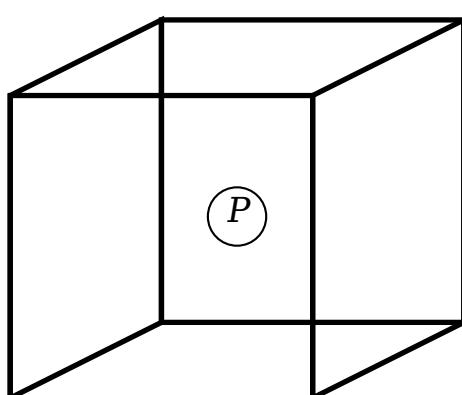
Définition

La thermodynamique est la partie de la physique qui s'intéresse à l'étude des bilans d'énergie entre un système et le milieu extérieur, autrement dit c'est l'étude des propriétés physiques des corps en fonction de la température.

1.1 Modèle microscopique du gaz parfait

1.1.1 Définitions

- ▶ Un gaz est **monoatomique** s'il est constitué d'un seul type d'atome célibataire.(gaz rares et vapeur des métaux)
- ▶ Un gaz est **diatomique** s'il est constitué de deux atomes (O_2 , N_2 , CO , HCl , NO)
Considérons un gaz dans une enceinte :



Définition

Le gaz est considéré parfait si :

- *Les particules du gaz sont ponctuelles (a).*
- *Pas d'interaction entre les particules (b).*
- *Le choc des particules avec la paroi est élastique(c).*

En effet :

(a) : Soit v_p le volume propre d'une particule (modèle des sphères dures).

Soit N le nombre de particules que renferme l'enceinte.

Si on pose V_p le volume propre du gaz alors

$$V_p = Nv_p$$

la condition (a) est équivalente à

$$V_p = Nv_p \ll V = L \times l \times h$$

$V = L \times l \times h$ le volume macroscopique.

Particules ponctuelles

Si $V_p \ll V$ alors les particules du gaz seront considérées comme ponctuelles (i.e pas de volume propre)

(b) :Pas d'interactions entre les particules c'est à dire :

$$\mathcal{E}_p(\text{microscopique}) = E_{p,\mu} = 0$$

Par conséquent l'énergie mécanique du gaz est purement cinétique.

$$E_{m,\mu} = E_{c,\mu} + E_{p,\mu} \implies E_{m,\mu} = E_{c,\mu}$$

(c) :Choc élastique c'est à dire

$$\mathcal{E}_c(av) = \mathcal{E}_c(ap) \implies V'^2 = V^2$$

Choc élastique

Si le choc est élastique alors la norme du vecteur vitesse est conservée avant et après choc

1.1.2 La pression cinétique

On rappelle que la pression $P(M)$ au point M est définie par

$$P(M) = \frac{dF}{dS}$$

avec : dF l'intensité de la force moyenne exercée au point M et dS une surface élémentaire entourant le point M .

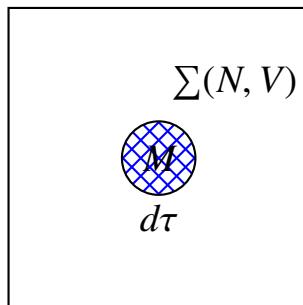
Remarques

- La pression est un scalaire positif, son unité dans le système international est la pascal tel que $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$.
- $1\text{Bar} = 10^5 \text{ Pascal}$.
- $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pascal}$.
- $1 \text{ atm} = 76 \text{ cm Hg}$.
- Dans le cas général La pression $P(M)$ en un point quelconque M d'un fluide est définie par :

$$d\vec{F} = -P(M)d\vec{S} = -P(M)dS\vec{n}$$

où dS est un élément de surface quelconque entourant le point M , et \vec{n} un vecteur unitaire normale à la surface dS **orienté vers l'extérieur**

Soit un gaz parfait en équilibre dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , enfermé dans une enceinte de volume macroscopique V ; à la température T . Ce gaz contient N particules ponctuelles .



On appelle la densité particulaire au point M qu'on note n^* le nombre de particules par unité de volume

$$n^* = \frac{dN}{d\tau} \implies N = \iiint_V n^* d\tau$$

Cas particulier : Si le système Σ est homogène alors la densité particulaire n^* est constante et par conséquent $N = n^*V$

$$n^* = \text{cte} \implies N = n^*V$$

On suppose que le système est isotrope c'est à dire que toutes les directions sont possibles et équiprobables c'est à dire que le vecteur vitesse peut prendre : $\pm v_x \vec{e}_x; \pm v_y \vec{e}_y; \pm v_z \vec{e}_z$ et par conséquent la probabilité de

$$\mathcal{P}(+v_x) = \mathcal{P}(-v_x) = \mathcal{P}(+v_y) = \mathcal{P}(-v_y) = \mathcal{P}(+v_z) = \mathcal{P}(-v_z) = \frac{1}{6}$$

On appelle vitesse quadratique moyenne \bar{u} la racine carré de la valeur moyenne du carré de la vitesse :

$$\bar{u}^2 = \langle \vec{v}^2 \rangle = \langle \vec{v}_x^2 \rangle + \langle \vec{v}_y^2 \rangle + \langle \vec{v}_z^2 \rangle \implies \langle \vec{v}_x^2 \rangle = \langle \vec{v}_y^2 \rangle = \langle \vec{v}_z^2 \rangle = \frac{\bar{u}^2}{3}$$

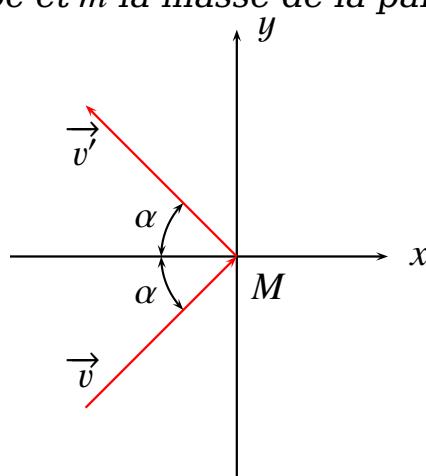
On suppose pour la suite que tous les particules du gaz se déplacent avec la **même vitesse égale à la vitesse quadratique \bar{u}** .

Déterminons la force que subit une particule lors du son choc avec la paroi de Σ .

Pour cela appliquons la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel \mathcal{R} galiléen

$$\vec{f}_{\Sigma \rightarrow P} = m \vec{a} \implies \vec{f}_{\Sigma \rightarrow P} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

avec Δt la durée du choc et m la masse de la particule



Puisque le choc est élastique alors il y a conservation de l'énergie cinétique de la particule avant et après le choc

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 \implies v = v'$$

Par conséquent il y a conservation de la norme de la vitesse avant et après le choc .

Évaluons $\Delta \vec{v}$

$$\Delta \vec{v} = \begin{vmatrix} -v' \cos \alpha \\ v' \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2v \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

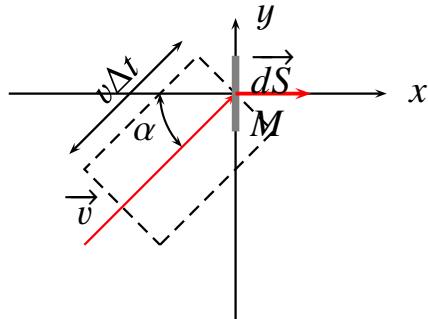
Donc :

$$\vec{f}_{\Sigma \rightarrow P} = -\frac{2mv \cos \alpha}{\Delta t} \vec{e}_x = -\vec{f}_{P \rightarrow \Sigma}$$

C'est une force normale à la surface Σ au point M .

Question : Quelle est le nombre dN de particules qui vont heurter une surface élémentaire dS entourant le point M pendant la durée Δt du choc ? Les dN particules ayant choc pendant Δt avec dS sont contenu dans un cylindre de volume élémentaire

$$d\tau = \vec{dS} \cdot \vec{v} \Delta t = v dS \cos \alpha \Delta t$$



Donc le nombre de particules est

:

$$dN = \frac{1}{2} n^* v dS \cos \alpha \Delta t$$

Le $\frac{1}{2}$ parce que les vitesses \vec{v} et $-\vec{v}$ ont la même probabilité ($\frac{1}{2}$) et par conséquent la force pressante moyenne $d\vec{F}$ au point M du au choc à pour expression

$$d\vec{F} = dN \vec{f}_{P \rightarrow \Sigma} = \frac{1}{2} n^* v dS \cos \alpha \Delta t \frac{2mv \cos \alpha}{\Delta t} \vec{e}_x$$

Sachant que $v_x = v \cos \alpha \implies \langle v_x^2 \rangle = \frac{\vec{u}^2}{3}$ On conclut donc que

$$d\vec{F} = \frac{1}{3} mn^* \vec{u}^2 dS \vec{e}_x$$

On tire que la pression au point M est

$$P(M) = \frac{1}{3} mn^* \vec{u}^2$$

On remarque que cette pression est proportionnelle à l'énergie cinétique , elle est nommée **pression cinétique**

Comme

$$n^* = \frac{N}{V} \implies PV = \frac{1}{3} mN \vec{u}^2 = n \frac{1}{3} m \mathcal{N}_A \vec{u}^2$$

1.1.3 Théorème d'équipartition :Température cinétique

On admet le théorème suivant :

Théorème

Théorème d'équipartition

À chaque terme quadratique dans l'expression de l'énergie totale d'une particule on fait associer $\frac{1}{2}k_B T$

avec $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$:constante de Boltzmann

T est dite **température cinétique**.

Remarques

$$1. k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A} \implies R = \mathcal{N}_A k_B$$

2. Est-ce que les termes suivants sont quadratiques ou non ?

Terme	mgz	$\frac{1}{2}kx^2$	$mgl(1 - \cos \theta)$	$\frac{1}{2}mgl\theta^2$
Quadratique	Non	oui	non	oui

Activité

► **Gaz parfait monoatomique**

$$\text{On a : } e_m = \overline{e_c} = \frac{1}{2}m\overline{u^2} = \frac{1}{2}m(\overline{V_x^2} + \overline{V_y^2} + \overline{V_z^2})$$

Par conséquent :

$$e_m = \overline{e_c} = \frac{3}{2}KT$$

► **Gaz parfait diatomique**

Pour un gaz parfait diatomique la distance entre les atomes est constante (modèle classique), chaque particule possède cinq degrés de liberté (x_G, y_G, z_G) les coordonnées du barycentre G et deux de rotations φ, θ autour de G et par conséquent :

$$e_c = \frac{1}{2}mv_{Gx}^2 + \frac{1}{2}mv_{Gy}^2 + \frac{1}{2}mv_{Gz}^2 + \frac{1}{2}J_\varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_\theta \dot{\theta}^2 \text{ et } e_p = 0 \text{ donc}$$

$$e_m = \frac{5}{2}k_B T$$

1.1.4 Équation d'état :Notion de gaz réel

► On appelle paramètre d'état ou variable d'état d'un système thermodynamique une variable qui décrit l'état macroscopique du système .

Exemple

température , volume, nombre de particule , pression

► On appelle équation d'état une équation entre les variables d'état; pour les gaz elle est de la forme $f(P, T, V, N) = 0$

► L'équation d'état d'un gaz parfait est

$$PV = nRT = Nk_B T$$

Avec n le nombre de mole du gaz , R la constante des gaz parfaits et k_B la constante de Boltzmann

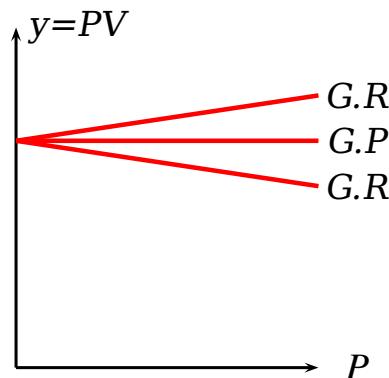
$$R = \mathcal{N}_A k_B = 8,314 \text{ JK}^{-1}$$

Remarque

On peut définir la température cinétique d'un gaz parfait monoatomique par

$$PV = NKT = \frac{1}{3}mN\vec{u}^2 \implies T = \frac{m\vec{u}^2}{3K}$$

On trace dans le diagramme d'amagat $y = PV = f(P)$ à $T = cte$



Dans le diagramme d'amagat $y = PV = f(P)$ est une droite horizontale.
Pour un gaz réel $y = PV = f(P)$ est une courbe qui coïncide avec celle du gaz parfait en faible pression ($P \rightarrow 0$) (ou à volume infini ($V \rightarrow \infty$))

Conclusion:

Tout gaz réel tend vers un gaz parfait à pression faible ou à volume infini

$$\lim_{\begin{cases} P \rightarrow 0 \\ \text{ou} \\ V \rightarrow \infty \end{cases}} GR = GP$$

Un gaz est dit réel lorsque il n'est pas parfait c'est à dire au moins si :

- ▷ Les particules ne sont pas ponctuelles : possèdent un volume propre pas négligeable.
- ▷ Le choc avec la paroi n'est pas élastique.
- ▷ L'interaction entre les particules n'est pas négligeable : le système admet une énergie potentielle microscopique.

Il existe plusieurs équation d'état pour les gaz réel ,la plus utilisée est celle du Van Dear Waals :

$$(P + \frac{n^2a}{V^2})(V - nb) = nRT$$

- b représente le volume propre d'une mole de particules , nommé **le covolume**
- $\frac{n^2a}{V^2}$ traduit la pression due aux chocs entre les particules , nommé **la pression interne**

Remarque

Dans l'équation d'état du gaz de Van Dear Waals si $a = b = 0$ alors on retrouve l'équation d'état du gaz parfait

1.2 L'énergie interne

1.2.1 Définition

L'énergie interne U d'un système est l'énergie mécanique moyenne dans un référentiel galiléen R' ou le système est au repos, sans interaction avec aucun champ extérieur :

$$U = \overline{E_{c/R'}} + \overline{E_{pint}}$$

- $\overline{E_{c/R'}}$: l' énergie cinétique microscopique moyenne du gaz
- $\overline{E_{pint}}$: énergie potentielle d'interaction entre les différents particules du système.

1.2.2 Applications

- Pour un gaz parfait monoatomique on a les particules sont ponctuelles , chaque particule possède trois degrés de liberté (x, y, z) et par conséquent :

$e_c = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$ et $e_p = 0$ donc $e_m = e_c + e_p = e_c$ d'où :

$$\mathbf{U} = \overline{E_m} = \frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}nRT$$

► Pour un gaz parfait diatomique la distance entre les atomes est constante (modèle classique), chaque particule possède cinq degrés de liberté (x_G, y_G, z_G) les coordonnées du barycentre G et deux de rotations φ, θ autour de G et par conséquent :

$e_c = \frac{1}{2}mv_{Gx}^2 + \frac{1}{2}mv_{Gy}^2 + \frac{1}{2}mv_{Gz}^2 + \frac{1}{2}J_\varphi\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_\theta\dot{\theta}^2$ et $e_p = 0$ donc $e_m = e_c + e_p = e_c$ d'où :

$$\mathbf{U} = \overline{E_m} = \frac{5}{2}Nk_B T = \frac{5}{2}nRT$$

Remarque

Pour un gaz parfait l'énergie interne ne dépend que de la température (première loi de Joule), par contre pour un gaz réel son énergie interne dépend de la température et du volume c'est à dire $\mathbf{U} = \mathbf{U}(T, V)$

1.2.3 Capacités calorifiques à volume constant

On définit la capacité calorifique à volume constant d'un gaz par :

$$C_v = \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial T} \right|_{V=ct} \quad (J.K^{-1})$$

Pour un gaz parfait :

► monoatomique

$$C_v(GPM) = \frac{3}{2}nR$$

► diatomique

$$C_v(GPD) = \frac{5}{2}nR$$

On définit aussi les capacités calorifiques

- molaires à volume constant par

$$C_{vm} = \frac{C_v}{n} \quad (J.K^{-1}.mol^{-1})$$

- massiques à volume constant

$$c_v = \frac{C_v}{m} \quad (J.K^{-1}g^{-1})$$

Pour un gaz parfait :

- monoatomique

$$C_{vm}(GPM) = \frac{3}{2}R \quad , \quad c_v(GPM) = \frac{3}{2}\frac{R}{M}$$

- diatomique

$$C_v(GPD) = \frac{5}{2}R \quad , \quad c_v(GPD) = \frac{5}{2}\frac{R}{M}$$

Avec M la masse molaire du gaz parfait.

On récapitule

	G.P.M	G.P.D
U(J)	$\frac{3}{2}nRT$	$\frac{5}{2}nRT$
$C_v(J.K^{-1})$	$\frac{3}{2}nR$	$\frac{5}{2}nR$
$C_{v,m}(J.K^{-1}.mol^{-1})$	$\frac{3}{2}R = 12,47$	$\frac{5}{2}R = 20,8$
$c_v(J.K^{-1}.kg^{-1})$	$\frac{3R}{2M}$	$\frac{5R}{2M}$

CHAPITRE 2

STATIQUE DES FLUIDES

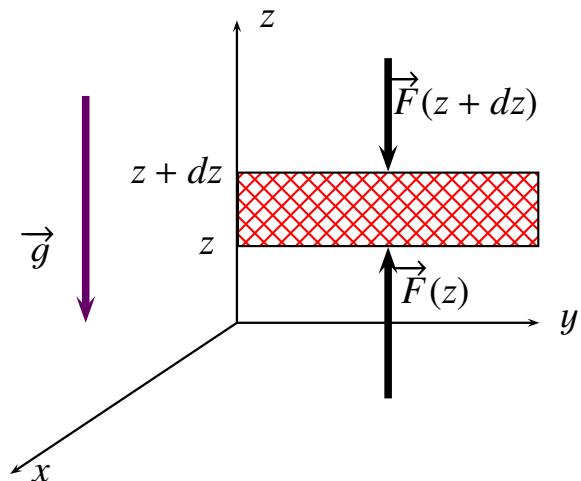
2.1 Équation fondamentale de la statique des fluides

Soit un fluide (liquide ou gaz) :

Homogène : Sa masse volumique $\rho(M)$ est la même en tout point M du fluide.

On suppose que le fluide est soumis à l'action du champ de pesanteur \vec{g} supposé uniforme, en **équilibre** dans un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen .

Considérons une tranche du fluide horizontale comprise entre les altitudes z et $z + dz$ possédant une surface S



Inventaire des forces appliquées sur cette tranche de hauteur dz

- Le poids $d\vec{P} = -dm\vec{g} = -\rho S dz g \vec{e}_z$
- La force pressante à la hauteur $z + dz$: $\vec{F}(z + dz) = -P(z + dz)S \vec{e}_z$

► La force pressante à la hauteur z : $\vec{F}(z) = P(z)S \vec{e}_z$

La condition d'équilibre s'écrit : $-\rho S dz g \vec{e}_z - P(z + dz)S \vec{e}_z + P(z)S \vec{e}_z = \vec{0}$

On tire que

$$\frac{dP}{dz} + \rho g = 0$$

C'est l'équation fondamentale de la statique des fluides projeté sur l'axe des z orienté vers le haut

On suppose que le fluide est incompressible : sa masse volumique est constante.

Par intégration on trouve :

$$P(z) + \rho g z = cte$$

C'est à dire que si $z \nearrow \Rightarrow P(z) \searrow$ et vice versa.

Pour déterminer la constante on fixe un niveau de référence : la surface libre ou la pression vaut la pression atmosphérique. Et suivant le choix de l'origine du point O c'est à dire $z = 0$ soit en surface soit au fond du fluide.

Remarque

1. A $z = h$ on a $P = P_{atm} \Leftrightarrow P_{atm} + \rho gh = cte$

d'où $P(M) - P_{atm} = \rho g(h - z) = P_e(M)$ avec $P_e(M)$ la pression effective.

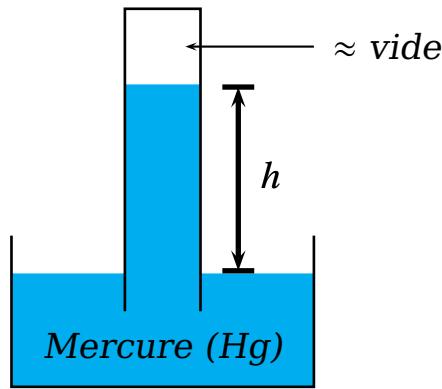
2.

$$P(B) - P(A) = \rho g(z_A - z_B)$$

3. Les isobares (l'ensembles des points M tel que $P(M) = cte$) sont des plans horizontaux ($\perp \vec{e}_z$)

Activité

Baromètre de Torricelli



$$P_{atm} - 0 = \rho gh \text{ avec } h=76 \text{ cm Hg}$$

2.2 Équilibre d'une atmosphère isotherme. Facteur de Boltzmann.

2.2.1 Variation de la pression avec l'altitude

On suppose que :

1. L'atmosphère est un gaz parfait
2. $T = cte$ dans toute l'atmosphère (atmosphère isotherme)
3. \vec{g} uniforme
4. L'atmosphère est en équilibre hydrostatique : les particules de l'atmosphère ne bougent pas (pas d'énergie cinétique microscopique)

$$\text{On a : } \frac{dP}{dz} = -\rho g$$

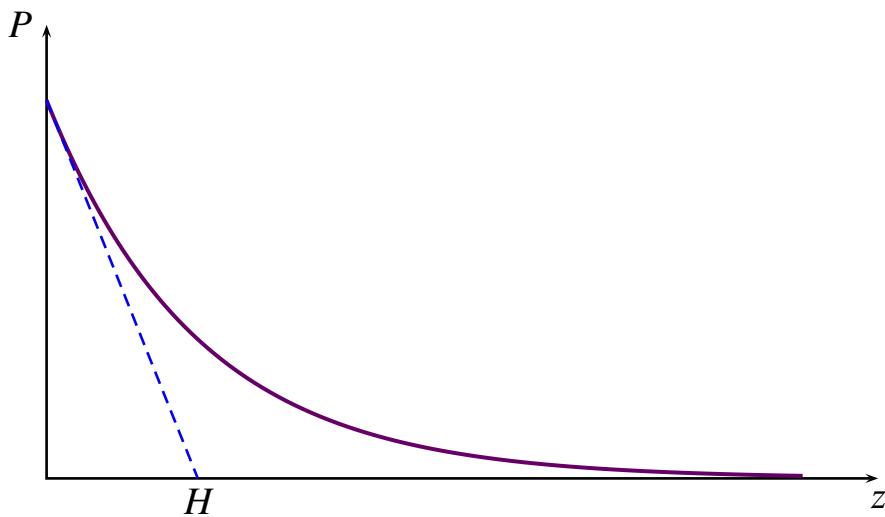
$$\text{et comme } \rho = \frac{dm}{dV}; \text{ ainsi } PV = \frac{m}{M}RT \Leftrightarrow \frac{dm}{dV} = \frac{PM}{RT}$$

$$\boxed{\rho = \frac{MP}{RT}}$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PMg}{RT} \Leftrightarrow \ln P = -\frac{Mg}{RT}z + cte$$

On tire que :

$$\boxed{P = P_0 e^{-\frac{Mg}{RT}z}}$$



Avec

$$H = \frac{RT}{Mg} \xrightarrow{\text{A.N}} H(298K) = 7978 \text{ m}$$

De même

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{Mg}{RT}z}$$

avec $\rho_o = \frac{MP_o}{RT_o}$

Sachant que $R = k_B \mathcal{N}_A$ alors $\frac{M}{R} = \frac{M}{k_B \mathcal{N}_A} = \frac{m}{k_B}$; Avec m **la masse d'une seule particule**

Sachant que ep est l'énergie potentielle d'une particule alors

$$P = P_0 e^{-\frac{ep}{kT}}$$

Remarque

Pour un gaz parfait et à $T = cte$ on a : $\frac{dN}{dV} = \frac{P}{KT} = n^*$: avec n^* **la densité particulaire**

Donc :

$$n^* = n_0^* e^{-\frac{ep}{k_B T}}$$

avec $n_0^* = \frac{P_0}{k_B T}$

Conclusion:

Les niveaux les plus bas ($z \rightsquigarrow 0$) sont les plus peuplés

Remarques

1. Si on pose $H_a = \frac{RT}{Mg}$: possède la dimension d'une longueur , elle est dite échelle des profondeurs, sa valeur numérique pour $T = 17^{\circ}C = 290\text{ K}$ est $H_a = 8,48 \cdot 10^3\text{ m}$
2. La hauteur pour que la pression diminue de 1% est $z_1 = 0,01H_a = 84,8\text{ m}$
On conclut que pour les systèmes gazeux usuels, (l'ordre de quelques mètres) on peut considérer que **la pression est constante au sein du gaz**

APPLICATION**ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE DE L'ATMOSPHÈRE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR(CNC 2009)**

L'atmosphère terrestre s'étend sur quelques dizaines de kilomètres et permet à toutes les espèces vivantes terriennes de respirer pour vivre. Les phénomènes physiques intervenant dans l'atmosphère sont nombreux et caractérisent en fait différentes couches en fonction de l'altitude : de la troposphère au niveau du sol jusqu'à l'ionosphère couche d'atmosphère la plus haute avant l'Espace.

On se propose d'étudier quelques modèles de variation de la pression dans l'atmosphère terrestre. Dans tout le problème, on ne tiendra pas compte des effets liés à la rotation de la Terre. Le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ est supposé uniforme, d'intensité égale à sa valeur au niveau du sol. \vec{u}_z étant le vecteur unitaire de la direction ascendante Oz .

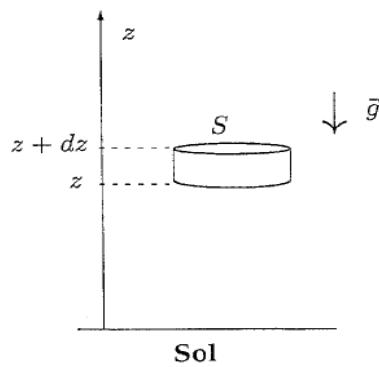


Figure 1 : tranche de fluide dans le champ de pesanteur.

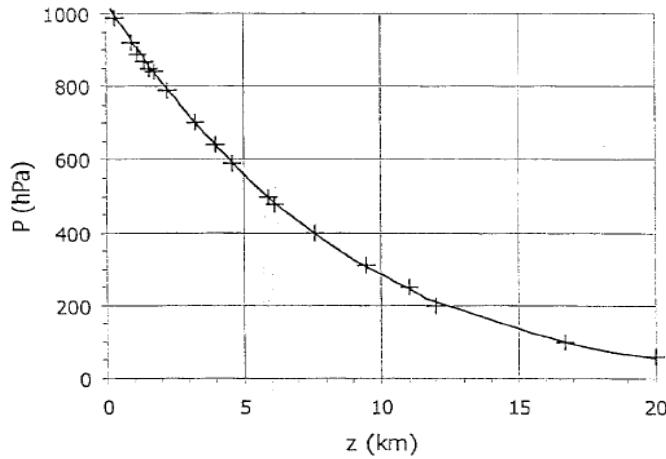


Figure 2 : Profil de pression dans les premières couches de l'atmosphère.

1-Pression dans un fluide au repos dans le champ de pesanteur

On considère un fluide au repos dans le champ de pesanteur. On suppose que la pression et la masse volumique du fluide ne dépendent que de l'altitude z . On appelle $P(z)$ cette pression et $\rho(z)$ la masse volumique du fluide. La pression au niveau du sol, pris comme origine des altitudes $z = 0$, vaut $P_0 = 1,0 \text{ bar} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

1.1- Déterminer la résultante $d\vec{F}_p$ des forces de pression s'exerçant sur une tranche de fluide de base S , située entre les altitudes z et $z + dz$ (figure 1). En déduire l'expression de la densité volumique des forces de pression.

1.2- Écrire l'équation qui traduit l'équilibre mécanique de la tranche de fluide dans le champ de pesanteur. Montrer que la pression est liée à la masse volumique du fluide par l'équation :

$$\frac{dP}{dz} + \rho g = 0 \quad (2.1)$$

1.3- On suppose dans cette question que la masse volumique du fluide est quasi-indépendante de l'altitude. Déterminer l'expression de la pression $P(z)$ qui règne dans le fluide à l'altitude z .

1.4- Ordres de grandeurs

1.4.1- Déterminer la différence de pression entre le sol et le toit d'une salle, situé à une altitude de 3 m, en assimilant l'air à un gaz parfait à la température ambiante $T = 300 \text{ K}$. Commenter.

1.4.2- Déterminer la différence de pression entre la surface libre et un point à une profondeur de 3 m d'un océan. Commenter.

2- Modèle de l'atmosphère isotherme

On assimile l'atmosphère à un gaz parfait de masse molaire M_a au repos dans le référentiel terrestre supposé galiléen et soumis au champ de pesanteur uniforme \vec{g} .

On suppose dans ce paragraphe, que l'atmosphère est isotherme dans laquelle la température est uniforme et vaut $T_0 = 273\text{ K}$. La pression au niveau du sol vaut $P_0 = 1,0\text{ bar} = 1,0 \cdot 10^5\text{ Pa}$. On appelle $P(z)$ la pression qui règne à l'altitude z .

2.1- A partir de l'équation d'état des gaz parfaits, déterminer l'expression de la masse volumique de l'air en fonction de M_a , T_0 , de la pression P et de la constante des gaz parfaits R .

2.2- En déduire, en utilisant l'équation (2.1), l'expression de la pression $P(z)$.

2.3- Interpréter le résultat obtenu en termes énergétiques et mettre en évidence le facteur de Boltzmann.

2.4- En déduire une hauteur caractéristique h des variations de la pression $P(z)$. Déterminer la valeur numérique de h . Commenter.

3- Modèle de l'atmosphère polytropique

Le modèle de l'atmosphère isotherme ne s'applique qu'à la haute atmosphère appelée stratosphère, pour des couches d'air dont l'altitude est comprise entre 10 km et 30 km , et avec une température de l'ordre de 223 K .

Entre les altitudes $z = 0$ et $z = 10\text{ km}$, l'air est constamment brassé par les courants que constituent les vents dont l'origine est en partie due aux variations journalières de la température au niveau du sol. La partie de l'atmosphère correspondante s'appelle la troposphère.

Les données expérimentales transmises par un ballon-sonde, utilisé par une station météorologique, au cours de la traversée de la troposphère et de la basse stratosphère montrent que le modèle le mieux adapté est celui d'un gradient uniforme de température. Ces données permettent de tracer le profil réel de la pression régnant à la verticale de la station. Les résultats sont rassemblés sur la figure 2. On cherche à modéliser ces résultats en considérant un profil de température de la forme :

$$T(z) = T_0 - a.z$$

T_0 et a étant des paramètres constants.

3.1- Donner l'expression de la masse volumique $\rho(z)$ de l'air en fonction de M_a , T_0 , a , z , $P(z)$ et R .

La pression et la masse volumique sont toujours liées par l'équation (2.1).

3.2- Déterminer l'expression de la pression $P(z)$. Montrer qu'elle s'écrit sous la forme :

$$P(z) = P_0(1 - b.z)^\alpha$$

où b et α sont deux paramètres constants à déterminer.

3.3- Comparer ce champ de pression avec celui obtenu pour l'atmosphère isotherme lorsque l'on se place à faible altitude ($b.z \ll 1$).

3.4- Montrer que la pression est liée à la masse volumique par la relation :

$$\frac{P(z)}{\rho(z)^k} = cste$$

appelée relation polytropique d'indice k . Donner l'expression de k en fonction de α .

Le traitement des données expérimentales, indiquées par des croix sur la figure 2, permet d'ajuster les valeurs de P_0 , b et α pour que le modèle décrive correctement les points expérimentaux. On obtient ainsi : $P_0 = 1,03 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $b = 1,95 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ et $\alpha = 5,91$. La courbe correspondante est tracée en trait plein sur la figure 2.

3.5- Déduire de ces résultats les valeurs de T_0 et de a . En déduire la valeur de la température T à une altitude de 10 km. Conclure quant à la validité de ce modèle pour décrire la troposphère.

3.6- Déduire de ce qui précède l'ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère dans le cadre de ce modèle.

Correction

1-Pression dans un fluide au repos dans le champ de pesanteur

1.1- La résultante des forces de pression :

$$d\vec{F}_p = P(z)S \vec{e}_z - P(z + dz)S \vec{e}_z \implies d\vec{F}_p = -S dP \vec{e}_z$$

- L'expression de la densité volumique des forces pressante

$$\vec{f}_V = \frac{d\vec{F}_P}{d\tau} = -\frac{dP}{dz} \vec{e}_z$$

1.2- L'équilibre mécanique, donc la résultante des forces extérieures est nulle, ce qui donne

$$d\vec{F}_p - \rho g S dz \vec{e}_z = \vec{0} \implies \frac{dP}{dz} + \rho g = 0$$

L'expression de la pression : L'intégration donne

$$P(z) = P_o - \rho g z$$

2- Ordres de grandeur :

2.1- Dans une salle de hauteur $H = 3m$ on a :

$$\Delta P = P_o - P_H = \rho g H \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta P = 34,2 \text{ Pa}$$

Comme $\frac{\Delta P}{P_o} \ll 1$ Donc la pression dans la salle est constante.

2.2- Dans l'océan

$$\Delta P = P_H - P_o = \rho g H \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta P = 329430 \text{ Pa}$$

Comme $\frac{\Delta P}{P_o} \simeq 0,291$ alors on ne peut pas considérer que la pression dans l'océan est constante.

3- Modèle de l'atmosphère isotherme

3.1- On a gaz parfait :

$$PV = nRT \implies \rho = \frac{m}{V} = \frac{P_o M_a}{R T_o}$$

3.2- L'équation (1) donne

$$\frac{dP}{dz} + \rho g = 0 \implies \frac{dP}{dz} + \frac{M_a g}{R T_o} P = 0$$

On pose

$$h = \frac{R T_o}{M_a g}$$

alors

$$P(z) = P_o \exp\left(\frac{-z}{h}\right)$$

3.3- En remplaçant R par $N_A K$ et connaissant que $m = \frac{M_a}{N_A}$ la masse d'une particule ainsi puisque l'axe oz orienté vers le haut donc $e_p = +mgz (+cte = 0)$ alors

$$P(z) = P_o \exp\left(-\frac{e_p}{KT_o}\right)$$

Et puisque par hypothèse l'atmosphère est en équilibre alors $e_m = e_p + e_c = e_p$ et donc

$$P(z) = P_o \exp\left(-\frac{e_m}{KT_o}\right)$$

$\exp(-\frac{e_m}{KT_o})$: c'est le facteur de Boltzmann

3.4- La hauteur caractéristique est

$$h = \frac{RT_o}{M_a g} \xrightarrow{\text{A.N}} h = 7978,2 \text{ m}$$

Remarquons que h représente la hauteur telle que $P(z = h) = \frac{P(z = 0)}{e}$

Commentaire : la valeur de h est très supérieur aux valeurs habituelles, par conséquent on peut considérer la pression constante.

4- Modèle de l'atmosphère polytropique

4.1- L'expression de la masse volumique

$$\rho = \frac{M_a P}{R T} \implies \rho = \frac{M_a P}{R(T_o - az)}$$

5-

5.1- L'intégration de la statique des fluides donne :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M_a g}{R(T_o - az)} P \implies \frac{dP}{P} = \frac{M_a g}{a R} \left(-\frac{az}{T_o - az}\right)$$

ce qui donne en intégrant

$$\ln \frac{P}{P_o} = \frac{M_a g}{a R} \ln \frac{T_o - az}{T_o}$$

Donc

$$P(z) = P_o \left(1 - \frac{a}{T_o} z\right)^{\frac{M_a g}{a R}}$$

Il en résulte que

$$b = \frac{a}{T_o} ; \quad \alpha = \frac{M_a g}{aR}$$

5.2- Comparaison des résultats pour $bz \ll 1 \Rightarrow z \ll 1$

► Atmosphère isotherme : $P = P_o \exp -z/h \rightarrow P_o(1 - \frac{M_a g}{RT_o} z)$

► Atmosphère polytropique : $P = P_o(1 - bz)^\alpha \rightarrow P_o(1 - \frac{M_a g}{RT_o} z)$

Donc Au voisinage de la terre ($z \rightarrow 0$) les deux modèles coïncident.

5.3- Montrons la relation :

On a :

$$P(z) = P_o \left(1 - \frac{a}{T_o} z\right)^\alpha$$

Ainsi :

$$\rho = \frac{M_a}{RT_o(1 - bz)} P \Rightarrow \rho = \frac{M_a P_o}{RT_o} (1 - bz)^{\alpha-1}$$

Ce qui donne

$$\frac{P}{\rho^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} = cte \Rightarrow k = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

6-

6.1- Application Numérique :

$$\alpha = \frac{M_a g}{Ra} \Rightarrow a = \frac{M_a g}{Ra} \xrightarrow{\text{A.N}} a = 5,79 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}^{-1}$$

$$b = \frac{a}{T_o} \Rightarrow T_o = \frac{a}{b} \xrightarrow{\text{A.N}} T_o = 297 \text{ K}$$

Pour l'altitude de 10 km on a :

$$T(10 \text{ km}) = 239 \text{ K}$$

Commentaire : Entre la température donnée à 10 km (223 K) est la température calculée par le modèle est de l'ordre de 16 K ce qui prouve que le modèle convient avec une légère variation de température, et par conséquent si on veux améliorer mieux le modèle il faut tenir compte de l'action du vent donc l'atmosphère n'est plus en équilibre mécanique (équilibre hydrostatique).

6.2- La hauteur de l'atmosphère dans le modèle :
 SI H est la hauteur de l'atmosphère alors $P(z = H^+) = 0$ (au delà de l'atmosphère il n'y a que le vide) d'où :

$$P(H) = 0 \implies H = \frac{1}{b} \xrightarrow{\text{A.N}} H = 51,28 \text{ km}$$

2.2.2 Généralisation

Lorsque un système thermodynamique en équilibre à la température T , constitué de particules dont l'énergie ε peut prendre différentes valeurs, les particules se répartissent sur les différents niveaux énergétiques proportionnellement au facteur de **BOLTZMANN** : $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$

$$\varepsilon = e_c + e_p + \dots$$

2.3 Poussée d'ARCHIMÈDE.

Tout corps plongé dans un fluide subit une force dirigée vers le haut égale en norme au poids du volume du fluide déplacé

$$\vec{F}_A = \rho g V \vec{k} = -\rho V \vec{g} = -m_d \vec{g}$$

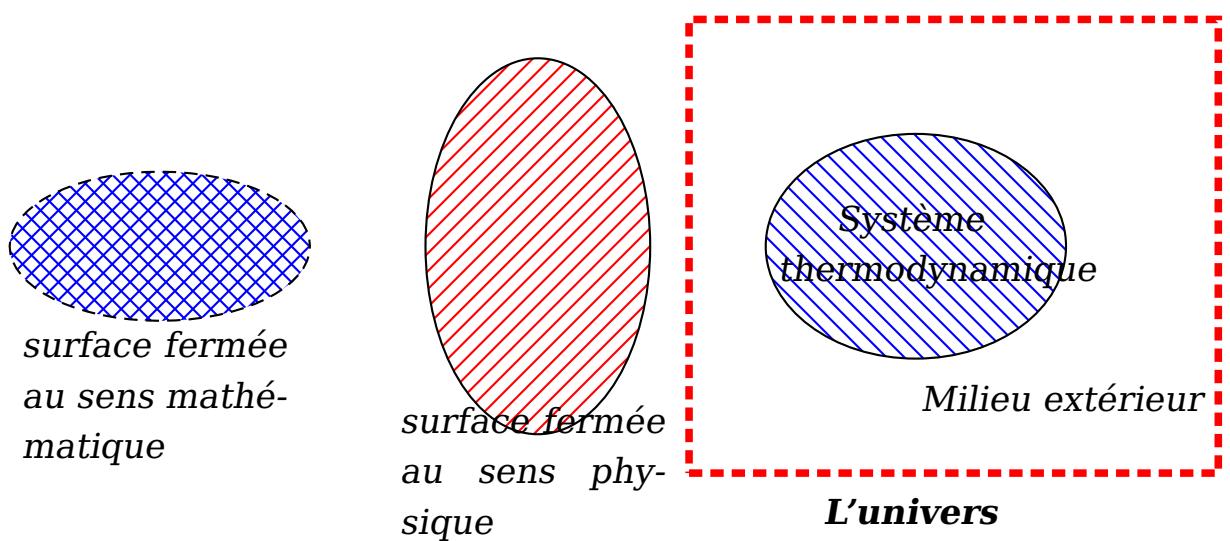
CHAPITRE 3

SYSTÈMES THERMODYNAMIQUES

3.1 Définitions

Définition

Un système thermodynamique est une partie matérielle de l'univers délimité par une surface fermé au sens mathématique et non au sens physique soumise à l'observation.



On rappelle qu'une surface fermée au sens mathématique est une surface qui délimite un volume, par contre une surface fermée au sens physique qui ne se laisse pas traversée par la matière.

Remarque

La surface peut être réelle ou fictive.

Définitions

Un système thermodynamique est dit :

- ▷ **Isolé** : *s'il n'échange avec le milieu extérieur ni énergie ni matière.*
- ▷ **Fermé** : *s'il ne peut échanger avec le milieu extérieur que de l'énergie.*
- ▷ **Ouvert** : *s'il échange de la matière avec le milieu extérieur .*
- ▷ **Homogène** : *si toutes les variables thermodynamiques varient de manière continues (eau + sel avant la saturation).*
- ▷ **Hétérogène** : *certaines propriétés physiques ne dépendent pas de la direction (localement le système présente une symétrie sphérique).*
- ▷ **Isotrope** : *aucunes propriétés physiques ne dépendent de la direction (localement le système présente une symétrie sphérique).*
- ▷ **Simple** : *ne possède pas de propriétés magnétiques et diélectrique.*

3.2 Équilibre thermodynamique

Un système est en équilibre thermodynamique si on a :

- ▷ **Équilibre mécanique** : $(\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}) \implies P = cte$
- ▷ **Équilibre thermique** : $(T = cte)$
- ▷ **Équilibre chimique** : *la composition chimique du système ne varie pas (le potentiel chimique $\mu = cte$)*

Remarque

*L'équilibre thermodynamique est un état dans lequel toutes les variables d'état sont constantes dans le temps :**L'équilibre thermodynamique est un état stationnaire.***

3.3 Variables thermodynamiques

- On appelle variable d'état toute grandeur (scalaire ou vectorielle) qui caractérise une propriété macroscopique du système. (P, V, T, N, \dots)
- Une variable d'état est dite extensive s'elle peut être définie pour le système entier ou une partie et qui dépend des dimensions du système, elles sont en général additives.

Exemples

masse, volume, charge, le courant électrique nombre de particule, longueur, surface, l'énergie, $\vec{P}, \vec{\sigma}_o, \dots$

- Une variable intensive est définie en chaque point du système (déduite d'une valeur moyenne) et elles ne sont pas additives.

Exemples

T, P, σ, ρ , l'indice de réfraction, concentration, pH, ...

3.4 Transformations thermodynamiques

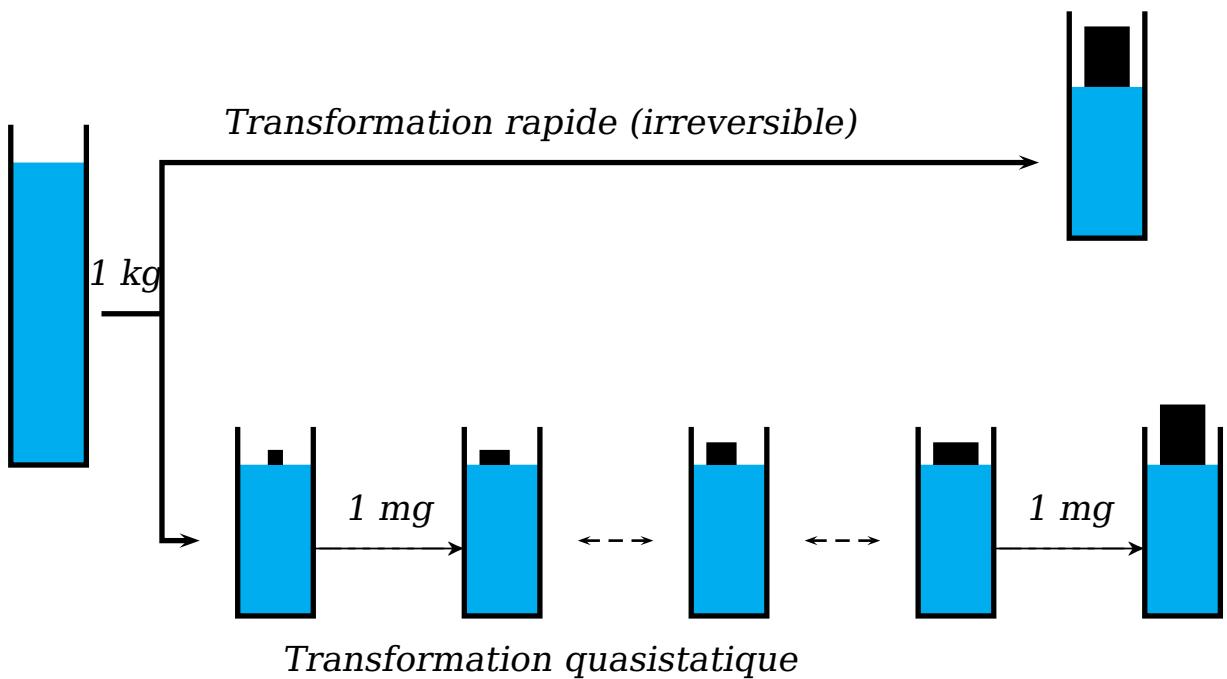
On dit qu'un système subit une transformation lorsque il passe d'un état d'équilibre initial à un état d'équilibre final.

On dit qu'une transformation est :

- isotherme si au cours de laquelle la température reste constante ($T = cte$)
- isobare si la pression $P = cte$.
- isochore si le volume $V = cte$
- Une transformation quasi-statique est une transformation suffisamment lente pour qu'elle soit considérée comme une suite continue d'états d'équilibre infiniment voisins .

Exemple

On comprime un gaz dans une enceinte , par addition des masses :



- Une transformation est dite réversible s'elle est quasi-statique ,ainsi on peut changer le sens des échanges d'énergie à chaque instant.
- une transformation est dite adiabatique s'elle se fait sans échange d'énergie thermique (sans échange de chaleur).

Remarque

- Une transformation réversible est forcement quasistatique (l'inverse est faux).
- Toute transformation qui n'est pas réversible est dite irréversible.
- Toute transformation rapide ou accompagné de frottement est irréversible.

3.5 Cœfficients thermo-élastiques

3.5.1 Définition

- ▷ Cœfficient de dilatation isobare :

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \Big)_P : (K^{-1})$$

- Cœfficient de variation de pression isochore :

$$\beta = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_V : (K^{-1})$$

- Cœfficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T : (Bar^{-1})$$

Activité

Pour un gaz parfait on a : $PV = nRT$ donc :

$$\alpha = \beta = \frac{1}{T} ; \quad \chi_T = \frac{1}{P}$$

3.5.2 Relations aux dérivées partielles

On a : $f(P, V, T) = 0 \Rightarrow V = V(T, P)$ et $T = T(V, P)$ donc :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP \quad (1)$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow dV = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P} dT - \left[\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \right] dP$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = - \left[\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \right]$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -1 \quad (A)$$

Relation importante à connaître.

On peut généraliser la relation précédente comme suit.
Si l'équation d'état s'écrit sous la forme $f(X, Y, Z) = 0$ alors :

$$\left[\frac{\partial X}{\partial Y} \right]_Z \times \left[\frac{\partial Y}{\partial Z} \right]_X \times \left[\frac{\partial Z}{\partial X} \right]_Y = -1$$

3.5.3 Application

1. Relation entre les coefficients thermoélastiques

$$(A) \Rightarrow (-\chi_T V)(P\beta) \frac{1}{\alpha V} = -1$$

$$\beta\chi_T P = \alpha$$

Relation importante à connaître

2. Loi de dilatation

On a :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP = \alpha V dT - \chi_T V dP$$

$$\frac{dV}{V} = \alpha dT - \chi_T dP$$

On suppose que α et χ_T sont constantes ; donc :

$$\ln \frac{V}{V_0} = \alpha T - \chi_T P.$$

► Si $\alpha T - \chi_T P \ll 1$ alors :

$$V = V_0(1 + \alpha T - \chi_T P)$$

► Si $\alpha T \gg \chi_T P$ alors :

$$V = V_0(1 + \alpha T)$$

C'est la loi des dilatations des volumes en fonction de la température

CHAPITRE 4

PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

4.1 Introduction

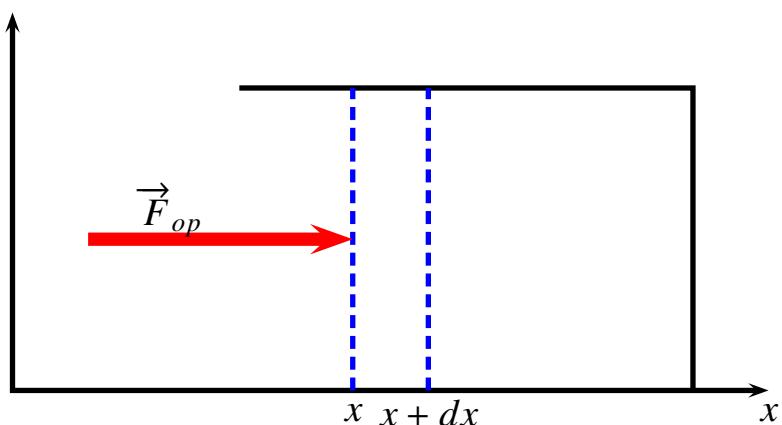
4.1.1 Travail échangé par un système :travail des forces de pression

C'est un échange d'énergie **d'origine macroscopique**, résulte du déplacement macroscopique du point d'application d'une force macroscopique.

1. On définit le travail élémentaire d'une force :

$$\delta \mathbf{W} = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

2. Travail des forces de pression :Soit un fluide qui subit une transformation élémentaire qui mène son volume de v à $v+dv$.



$$\delta \mathbf{W}^{ext} = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} > 0.$$

$\Rightarrow \delta \mathbf{W}^{ext} = P_{ext} S dx = -P_{ext} dv$: le volume diminue ($dv < 0$).

$$\boxed{\delta \mathbf{W}^{ext} = -P_{ext} dv}$$

- Si $dv < 0 \Rightarrow \delta \mathbf{W}^{ext} > 0$: (compression).
- Si $dv > 0 \Rightarrow \delta \mathbf{W}^{ext} < 0$: (détente).

Remarques

1. Si la transformation est quasi-statique alors $P = P_{ext}$ et on aura :

$$\boxed{\delta \mathbf{W}^{ext} = -P dv}$$

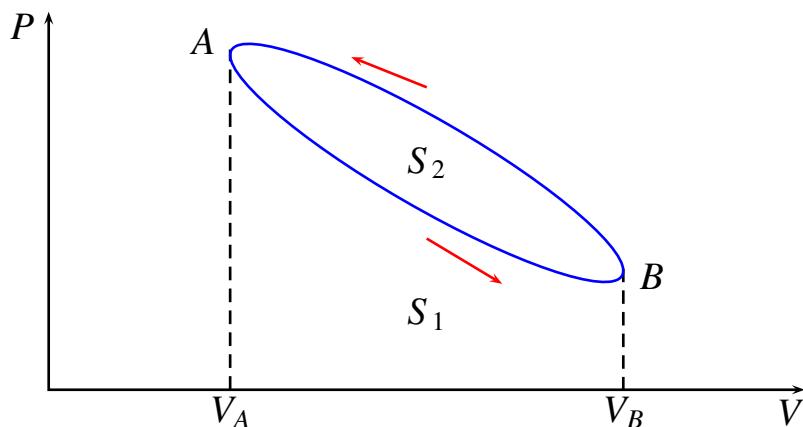
2. Si la transformation est isochore alors : $dv = 0 \Rightarrow \delta \mathbf{W}^{ext} = 0$

3. **Généralisation** : Pour une transformation quasi-statique le travail s'écrit :

$$\boxed{\delta \mathbf{W}^{ext} = X dY}$$

X une grandeur intensive et Y une grandeur extensive.

Dans le diagramme de Clapeyron $P = f(V)$ on a :



$$\mathbf{W}_{A \rightarrow B} = - \int_A^B P dv = -S_1$$

$$\mathbf{W}_{B \rightarrow A} = - \int_B^A P dv = + (S_1 + S_2)$$

Pour le cycle ABA on a donc :

$$|\mathbf{W}_{cycle}| = \mathbf{W}_{A \rightarrow B} + \mathbf{W}_{B \rightarrow A} = S_2$$

Conclusion:

Le travail est positif si le cycle est décrit dans le sens trigonométrique

4.1.2 Applications

Déterminons pour un gaz parfait le travail des forces pressantes dans les transformations suivantes :

► **Isochore**

$$\mathbf{W}_{\text{isochore}} = 0$$

► **Isobare**

C'est le cas par exemple d'une transformation rapide

$$\mathbf{W}_{\text{isobare}} = -P_{\text{ext}}(V_f - V_i)$$

► **quasi-statique isotherme**

la transformation étant quasi-élastique alors le système passe par une infinité d'état d'équilibre d'où

$$P(Q.S) = P_{\text{ext}} = P_{\text{gaz}} = P$$

$$\mathbf{W}_T(Q.S) = n\mathcal{R} T \ln \frac{V_i}{V_f} = P_i V_i \ln \frac{V_i}{V_f} = P_f V_f \ln \frac{V_i}{V_f}$$

► **adiabatique**

On admet pour le moment qu'une transformation est adiabatique (pas d'échange de chaleur) que $PV^\gamma = cte$

$$\mathbf{W}_{ad} = \frac{1}{\gamma - 1} (P_f V_f - P_i V_i) = \frac{n\mathcal{R}}{\gamma - 1} (T_f - T_i) = C_v (T_f - T_i)$$

4.1.3 Transfert thermique

C'est un échange d'énergie qu'on note **Q** qui se fait **au niveau microscopique**. Il n'y a pas de déplacement macroscopique.

Il résulte, par exemple, d'une inégalité de température entre le système et le milieu extérieur avec lequel il est en contact

4.1.4 Divers formes de transfert d'énergie

Un système peut recevoir de l'énergie par :

- ▶ Travail mécanique : $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = M d\theta$.
- ▶ Travail électrique : $\delta W = uidt = udq$.
- ▶ Travail des forces pressantes : $\delta W = -PdV = -P_{ext}dV$.
- ▶ Transfert thermique ou chaleur Q

4.2 Premier principe de la thermodynamique

énoncé du premier principe de la thermodynamique

Pour tout système fermé , on peut définir une fonction de variables d'état, extensive, conservative , appelée énergie interne **U** tel que au cours d'une transformation d'un système thermodynamique d'un état initial vers un état final , la somme des transferts thermiques et du travail des forces échangés avec l'extérieur au cours de la transformation est vérifie

$$\Delta(U + E_c + E_p) = Q + W$$

Remarque

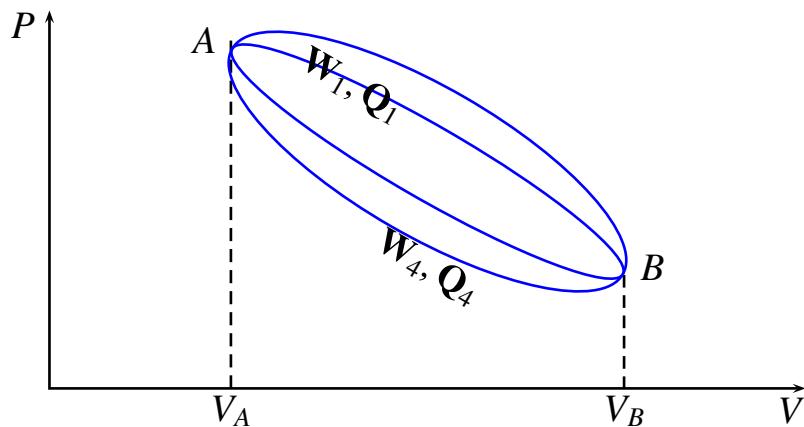
Le premier principe traduit la conservation totale de l'énergie macroscopique et microscopique

Cas particulier important :

Dans un référentiel galiléen R si le système est au repos alors

- ▶ $E_c = 0$ pas d'énergie cinétique macroscopique
 - ▶ $E_p = Cte$ pas de variation de l'énergie potentielle macroscopique
- le premier principe se réduit

$$\Delta U = Q + W$$



$$\Delta U = W_1 + Q_1 = W_2 + Q_2 = \dots = W_4 + Q_4.$$

L'énergie interne ne dépend pas du chemin suivi :

Conclusion:

l'énergie interne U est une fonction d'état

Remarque

1. Pour une variation élémentaire

$$dU = \delta W + \delta Q$$

2. Pour une transformation cyclique

$$\Delta U_{cycle} = 0$$

3. Une transformation telle que $U = cte$ est dite **transformation isoénergétique**

4.3 Conséquences pratiques

► U est une fonction d'état donc dU est une différentielle totale exacte c'est à dire : $dU = Adx + Bdy$ avec $A = (\frac{\partial U}{\partial x})_y$ et $B = (\frac{\partial U}{\partial y})_x$ alors **le théorème de Schwartz**

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

- ▶ Pour une transformation cyclique

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q_{cycle} = -W_{cycle}$$

- ▶ Pour une transformation adiabatique $Q = 0$ pas d'échange thermique avec l'extérieur alors :

$$\Delta U = W_{adiabatique}$$

4.4 Enthalpie d'un système

On définit l'enthalpie H d'un système la fonction d'état extensive conservative définie par :

$$H = U - \sum_i X_i Y_i$$

tel que X_i une grandeur intensive et Y_i une grandeur extensive relié par $\delta W = X dY$

Lorsque les seules forces qui travaillent sont les forces pressantes alors $\delta W = -PdV$ et par conséquent :

$$H = U + PV$$

On définit aussi :

- $H_m = \frac{H}{n}$ l'enthalpie molaire ($J \text{ mol}^{-1}$).
- $h_m = \frac{H}{m}$ l'enthalpie massique ($J \text{ kg}^{-1}$).

Remarques

- ▶ dH est une différentielle exacte (vérifie le théorème de Schwartz).
- ▶ ΔH ne dépend pas du chemin suivi.
- ▶ $\Delta H_{cycle} = 0$

4.5 Capacités thermiques

4.5.1 Définitions

Hypothèses :

- Fluide homogène.
- Seules les forces de pression travaillent.

Dans ce cas :

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{U}(V, T) = \mathbf{U}(V, P) = \mathbf{U}(P, T) \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}(V, T) = \mathbf{H}(V, P) = \mathbf{H}(P, T) \\ d\mathbf{U} = \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial V}\right)_T dV ; \quad d\mathbf{H} = \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial P}\right)_T dP \end{cases}$$

On définit :

- la capacité calorifique (ou thermique) à pression constante par :

$$C_P = \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T}\right)_P \quad (\text{J K}^{-1})$$

- capacité thermique molaire à pression constante

$$C_{P,m} = \frac{C_P}{n} \quad (\text{J K}^{-1} \text{ mol}^{-1})$$

- capacité thermique massique à pression constante.

$$c_m = \frac{C_P}{m} \quad (\text{J K}^{-1} \text{ kg}^{-1})$$

Remarques

- C_V et C_P dépendent à priori de la température.
- Application du théorème de Schwartz :

$$d\mathbf{U} = C_v dT + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial V}\right)_T dV \implies \left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial V}\right)_T$$

$$d\mathbf{H} = C_p dT + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial P}\right)_T dP \implies \left(\frac{\partial C_p}{\partial P}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial P}\right)_T$$

4.5.2 Interprétation en terme de chaleur

On a : $d\mathbf{U} = \delta\mathbf{W} + \delta\mathbf{Q} = -P_{ext}dV + \delta\mathbf{Q}$ (seules les forces pressantes travaillent)

à volume constant on a :

$$d\mathbf{U} = \delta\mathbf{Q}$$

$$\text{donc : } C_V = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial T} \Big|_V = \frac{\delta \mathbf{Q}_V}{dT}$$

Il en résulte :

$$C_V = \frac{\delta \mathbf{Q}_V}{dT} \Leftrightarrow \mathbf{Q}_V = \Delta \mathbf{U} = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT$$

Définition

C_V est la quantité de chaleur à fournir au système thermodynamique à volume constant pour éléver sa température de 1K.

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{U} + PV \Rightarrow d\mathbf{H} = d\mathbf{U} + PdV + VdP \\ &\Rightarrow d\mathbf{H} = \delta \mathbf{W} + \delta \mathbf{Q} + PdV + VdP \\ &\Rightarrow d\mathbf{H} = (P - P_{ext})dV + \delta \mathbf{Q} + VdP \end{aligned}$$

On maintient $P = cte = P_{ext}$ (où à $P = cte$ et de manière quasi-statique)
 $d\mathbf{H} = \delta \mathbf{Q}_P = C_p dT$

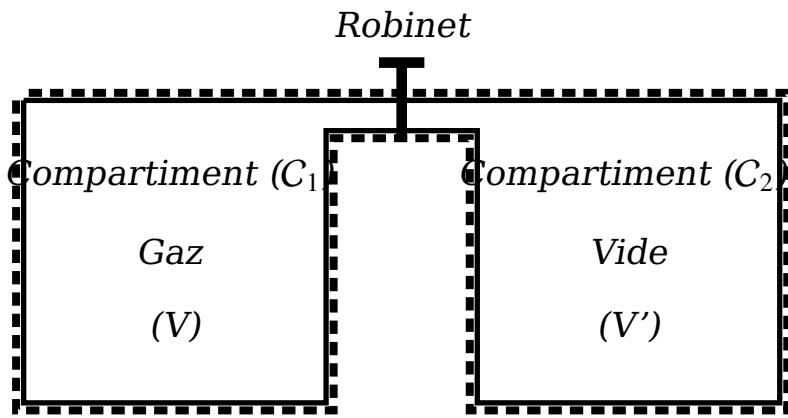
$$C_p = \frac{\delta \mathbf{Q}_p}{dT} \Leftrightarrow \mathbf{Q}_p = \Delta \mathbf{H} = \int_{T_1}^{T_2} C_p dT$$

Remarques

1. Si $C_p = cte$ alors $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{Q}_p = C_p(T_f - T_i)$.
2. C_p est la quantité d'énergie thermique à fournir au système thermodynamique à pression constante pour éléver sa température de 1°C

4.6 Déntente de Joule-Gay Lussac

On appelle détente de Joule-Gay-Lussac une détente d'un gaz dans le vide



Détente de Joule Gay-Lussac

Les parois sont calorifugées (adiabatiques).

On ouvre le robinet R ; le gaz se détend et occupe le volume total $(V + V')$.

Considérons le système $\Sigma = \{\text{gaz} + \text{vide}\}$ contenu dans $C_1 \cup C_2$

Le volume est constant (parois rigides) $\Rightarrow \mathbf{W}^{ext} = 0$

La transformation est adiabatique alors $Q=0$

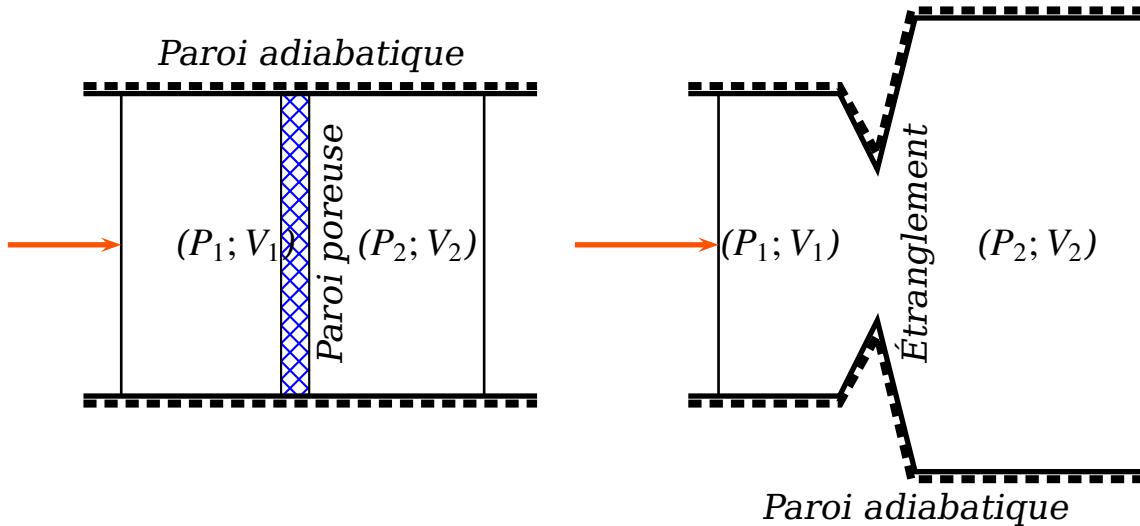
Le premier principe donne :

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{W}^{ext} + \mathbf{Q} = 0 \Rightarrow \mathbf{U} = cte$$

Conclusion:

La détente de Joule-Gay-Lussac est isoénergétique

4.7 Détente de Joule-Thomson



Hypothèses :

- ▷ *Parois adiabatique.*
- ▷ *$E_{cmac} \approx 0$ (On néglige la variation de la vitesse)*
- ▷ *$E_{pext} \approx cte$ (On néglige la variation de l'altitude)*

On a : $\Delta\mathbf{U} + \Delta E_{c,mac} + \Delta E_{p,ext} = \mathbf{W}^{ext} + \mathbf{Q} = \mathbf{W}^{ext}$ (adiabatique)

$\mathbf{W}^{ext} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ avec : $\mathbf{W}_1 > 0$ car compression ($V : V_1 \rightsquigarrow 0$) et $\mathbf{W}_2 < 0$ car détente ($V : 0 \rightsquigarrow V_2$)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{W}_1 = \int_{V_1}^0 -PdV = P_1 V_1 \\ \mathbf{W}_2 = \int_0^{V_2} -PdV = -P_2 V_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = P_1 V_1 - P_2 V_2$$

*Le premier principe $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{W}^{ext} = P_1 V_1 - P_2 V_2 = \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1$
 $\Rightarrow P_1 V_1 + \mathbf{U}_1 = P_2 V_2 + \mathbf{U}_2$ On tire que :*

$$H_1 = H_2$$

Conclusion:

La détente de Joule-Thomson est isenthalpique

Résultats expérimentaux avec $P_1 = 2atm$ et $P_2 = 1atm$

- ▷ *L'air : $\Delta T = -0.26K$*
- ▷ *gaz carbonique CO_2 : $\Delta T = 1.15K$*
- ▷ *L'hydrogène H_2 : $\Delta T = 0K$*

Remarque

Détente dans une tuyère inclinée :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{U} + \Delta E_c^{mac} + \Delta E_{Pext} &= P_1 V_1 - P_2 V_2 \\ \Rightarrow \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1 + \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 + mgz_2 - mgz_1 &= P_1 V_1 - P_2 V_2 \\ \Rightarrow \mathbf{U}_2 + \frac{1}{2} m V_2^2 + mgz_2 + P_2 V_2 &= U_1 + \frac{1}{2} m V_1^2 + mgz_1 + P_1 V_1 \\ \Rightarrow \mathbf{H}_2 + \frac{1}{2} m V_2^2 + mgz_2 &= \mathbf{H}_1 + \frac{1}{2} m V_1^2 + mgz_1\end{aligned}$$

Par unité de masse :

$$h_m + \frac{1}{2} V^2 + gz = cte$$

(valable en régime permanent)

4.8 Applications au gaz parfait

4.8.1 Loi de Joule

1. 1^{ere} loi de joule :

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température

c'est à dire $\mathbf{U}(T, V) = \mathbf{U}(T)$.

$d\mathbf{U} = C_V dT$ donc :

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT$$

2. 2^{eme} loi de joule :

On a : $\mathbf{H} = \mathbf{U} + PV$ et $PV = nRT$ donc $\mathbf{H} = \mathbf{U}(T) + nRT = \mathbf{H}(T)$

enthalpie d'un gaz parfait ne dépend que de la température

$d\mathbf{H} = C_P dT$ donc :

$$\Delta \mathbf{H} = \int_{T_1}^{T_2} C_P dT$$

4.8.2 Relation de Mayer

On a : $\mathbf{H} = \mathbf{U} + PV = \mathbf{U} + nRT$ par conséquent : $d\mathbf{H} = d\mathbf{U} + nRdT$
 $\Rightarrow C_P dT = C_V dT + nRdT$.

$$C_P - C_V = nR$$

relation de Mayer

conséquences :

- $C_P > C_V > 0$.
- Si on pose $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ coefficient de Laplace alors :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 1$$

- Pour un gaz parfait monoatomique on a : $U = \frac{3}{2}nRT$ donc :

$$C_V = \frac{3}{2}nR ; \quad C_P = \frac{5}{2}nR ; \quad \gamma = \frac{5}{3} = 1.67$$

- Pour un gaz parfait diatomique on a : $\mathbf{U} = \frac{5}{2}nRT$ donc :

$$C_V = \frac{5}{2}nR ; \quad C_P = \frac{7}{2}nR ; \quad \gamma = \frac{7}{5} = 1.4$$

Remarque

On a $C_P - C_V = nR$ et $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ il en résulte :

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} ; \quad C_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1}nR$$

à retenir

4.8.3 Loi de Laplace

Pour une transformation adiabatique :

$$\left. \begin{array}{l} d\mathbf{U} = C_V dT = \frac{nR}{\gamma - 1} dT \\ nRdT = d(PV) \end{array} \right\} \Rightarrow d\mathbf{U} = \frac{1}{\gamma - 1} d(PV)$$

$$d\mathbf{U} = \delta\mathbf{Q} + \delta\mathbf{W} \Rightarrow \delta\mathbf{Q} = d\mathbf{U} - \delta\mathbf{W}$$

$$\delta\mathbf{Q} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} d(PV) + PdV$$

On tire que :

$$\delta\mathbf{Q} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} PdV + \frac{1}{\gamma - 1} VdP$$

Pour une transformation adiabatique d'un gaz parfait ($\delta\mathbf{Q} = 0$) on a donc :

$$\gamma PdV + VdP = 0 \Rightarrow \gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

$$PV^\gamma = cte \Rightarrow TV^{\gamma-1} = cte \Rightarrow P^{1-\gamma}T^\gamma = cte$$

En effet :

$$\begin{aligned} PV^\gamma = cte &\implies PV \cdot V^{\gamma-1} = cte \\ &\implies nRTV^{\gamma-1} = cte \\ &\implies TV^{\gamma-1} = cte \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} PV^\gamma = cte &\implies P \left(\frac{nRT}{P} \right)^\gamma = cte \\ &\implies P^{\gamma-1} T^\gamma = cte \end{aligned}$$

Remarque

Le travail d'une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait :

$$\Delta\mathbf{U} = \mathbf{W}_{ad} = C_v(T_f - T_i) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_i)$$

4.8.4 Formule de Reech

- ▷ Pour une transformation adiabatique : $\gamma PdV + VdP = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{V}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{adiabatique}$
- ▷ Pour une transformation isotherme : $PV = nRT = cte \Rightarrow \frac{V}{P} = -\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

D'où $\gamma = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \times \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{adiabatique}$

$$\gamma = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{ad}} = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{ad}}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T} > 1$$

Il en résulte que dans le diagramme (P, V) la pente d'une adiabatique est plus grande que la pente d'une isotherme.

On sait que :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\chi_T V$$

$$\text{et } \chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{ad} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{ad} = -\chi_s V$$

On tire la formule de Reech :

$$\boxed{\gamma = \frac{\chi_T}{\chi_s}}$$

formule de Reech

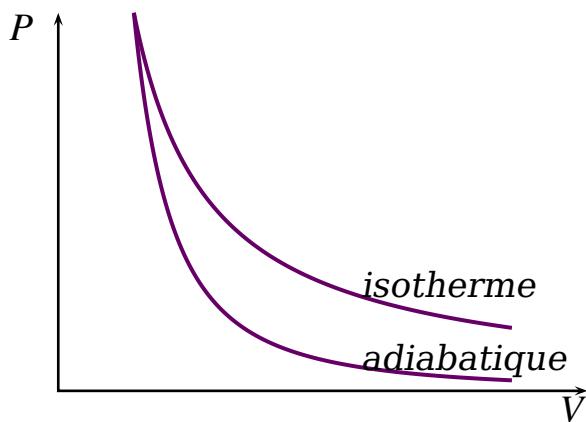
Autre écriture de la formule de Reech

$$\boxed{C_{P,m} - C_{V,m} = R \quad ; \quad \mathbf{c}_p - \mathbf{c}_v = \frac{R}{M}}$$

conséquences :

- $\gamma > 1 \Rightarrow \chi_s < \chi_T$
- De même : $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{ad} < \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ car $\frac{\partial P}{\partial V} < 0$

Dans le diagramme de Clapeyron (représentation dans le plan (V, P))



En effet : Pour un gaz parfait :

- Transformation isotherme : $P_{\text{isotherme}} = \frac{C_1}{V}$
- Transformation adiabatique : $P_{\text{adiabatique}} = \frac{C_2}{V^\gamma}$

Puisque $\gamma > 1$ alors :

Conclusion :

La pression d'une transformation adiabatique décroît plus vite que la pression d'une transformation isotherme

4.9 Enthalpie d'une phase condensée dans le modèle incompressible et indilatable

Pour la phase condensé (solide, liquide) $V \approx \text{cte} \Rightarrow dV = 0$; par conséquent $\mathbf{U} = \mathbf{U}(T)$.

De même on admet que : $PV \ll \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{H} \approx \mathbf{U}$ c'est à dire que $\mathbf{H} = \mathbf{H}(T)$ donc : $d\mathbf{H} = C_P dT \approx d\mathbf{U} = C_V dT \Rightarrow$

$$C_P \approx C_V \approx C$$

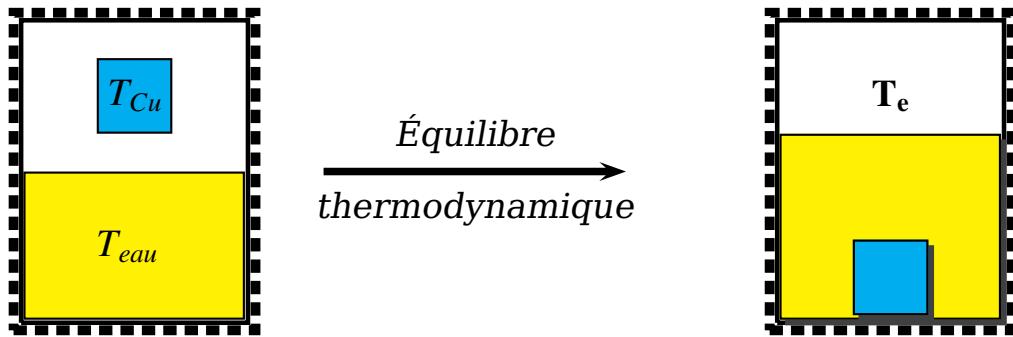
Avec C la capacité thermique de la phase condensée.

CHAPITRE 5

SECOND PRINCIPE POUR UN SYSTÈME FERMÉ

Question : Pourquoi un 2^eme principe ?

Soit l'exemple suivant constitué d'un morceau de cuivre (système A) à la température T_{Cu} plongé dans une quantité d'eau (système B) à la température T_{eau} , le système dans un calorimètre (Système a parois indéformable et calorifugé (adiabatique)), avec $T_{Cu} > T_{eau}$



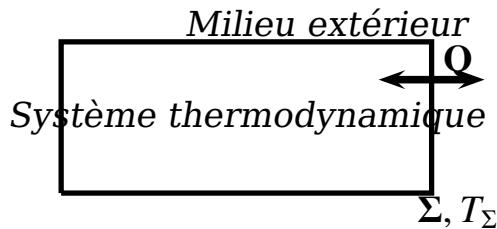
Le système ($A+B$) étant isolé : $U_{A+B} = \text{Cte}$ Conservation de l'énergie. et pourtant le système a évolué : une quantité d'énergie passe du système (A) vers le système (B).

d'où il faut un deuxième principe pour décrire l'évolution des transformations.

5.1 Énoncé du deuxième principe (ILYA PRÉGOGINE)

Il existe plusieurs énoncé du deuxième principe (Carnot, Clausius, Thomson ...)

Soit un système thermodynamique délimité par une surface Σ dont la température de l'interface est T_Σ échange avec le milieu extérieur la quantité d'énergie thermique \mathbf{Q} .



Lors de l'évolution infinitésimale d'un système physique fermé , la variation d'une fonction d'état appelée entropie S du système est donnée par :

$$d\mathbf{S} = \frac{\delta \mathbf{Q}^e}{T_\Sigma} + \delta \mathbf{S}^i$$

- $\delta \mathbf{Q}^e$: la quantité de chaleur élémentaire échangée avec le milieu extérieur .
 - T_Σ : température du système à l'interface Σ .
 - $\delta \mathbf{S}^e = \frac{\delta \mathbf{Q}^e}{T_\Sigma}$: l'entropie élémentaire échangée .
 - $\delta \mathbf{S}^i$: entropie élémentaire créée due à toutes modifications internes au système (réactions chimiques , transfert thermique,...). **tous les phénomènes irréversibles à l'intérieur du système .**
- ◊ \mathbf{S} est une fonction d'état alors :
 1. $\Delta \mathbf{S}$ ne dépend pas du chemin suivi .
 2. \mathbf{S} vérifie le théorème de Schwartz (d.t.e).
 3. $\Delta \mathbf{S}_{cycle} = 0$
- ◊ \mathbf{S} est une grandeur extensive (additive).

SIGNE DE $\delta \mathbf{S}^i$:

1. Si la transformation est irréversible alors $\delta \mathbf{S}^i > 0$
2. Si la transformation est réversible alors $\delta \mathbf{S}^i = 0$

Conclusion:

$$\delta \mathbf{S}^i \geq 0$$

important

Remarques

1. δS^e et δS^i ne sont pas des différentielles totales exactes .
 2. Pour une transformation réversible on a : $\delta Q^e = 0$ et $\delta S^i = 0$ donc $S = cte$; c'est à dire :
- adiabatique + réversible = isentropique**
3. S augmente avec le désordre interne.

5.2 IDENTITÉS THERMODYNAMIQUES

5.2.1 Différentielle de l'énergie interne d'un système simple fermé

Pour un système simple fermé il y a deux variables thermodynamiques indépendantes à choisir ; parmi T, P, V, U, S, H, \dots .

Toutes les fonctions thermodynamique peuvent s'exprimer de deux variables indépendantes, pour l'énergie interne les variables naturelles sont S et V ; c'est à dire $U = U(S, V)$ et par conséquent :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S} \Big)_V dS + \frac{\partial U}{\partial V} \Big)_S dV$$

5.2.2 Pression et température thermodynamique

On définit la pression et la température thermodynamique par les relations suivantes :

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \Big)_V \quad ; \quad P = -\frac{\partial U}{\partial V} \Big)_S$$

On admet que :

La température thermodynamique est égale à la température cinétique et la pression thermodynamique est égale à la pression cinétique

5.2.3 Première identité thermodynamique

Le premier principe donne : $d\mathbf{U} = \delta\mathbf{Q}^e + \delta\mathbf{W}^e$.

Or $\delta\mathbf{W}^e = -PdV$ et pour une transformation quasi-statique : $\delta\mathbf{Q}^e = TdS - T\delta\mathbf{S}^i$

On imagine une transformation réversible entre les mêmes états initial et final (l'énergie interne est une fonction d'état) ($\delta\mathbf{S}^i = 0$) ; d'où :

$$d\mathbf{U} = TdS - PdV$$

C'est la première identité thermodynamique fondamentale du **système simple fermé**, elle est applicable pour une transformation **quelconque, réversible, irréversible, quasi-statique, non quasi-statique** car U est une fonction d'état à condition que les états initial et final soient des états d'équilibre.

Remarque

Le théorème de Schwartz s'écrit pour la première identité thermodynamique

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$$

C'est la première égalité thermodynamique de Maxwell

5.2.4 Deuxième identité thermodynamique

On a de même pour un système fermé et lorsque les seules forces qui travaillent sont les forces pressantes que : $\mathbf{H} = \mathbf{U} + PV$

$$\Rightarrow d\mathbf{H} = d\mathbf{U} + PdV + VdP$$

$$\Rightarrow d\mathbf{H} = TdS - PdV + PdV + VdP$$

$$\Rightarrow d\mathbf{H} = TdS + VdP$$

$$d\mathbf{H} = TdS + VdP$$

C'est la deuxième identité thermodynamique

Remarque

Le théorème de Schwartz s'écrit pour la deuxième identité thermodynamique

$$\frac{\partial T}{\partial P}_S = \frac{\partial V}{\partial S}_P$$

C'est la deuxième égalité thermodynamique de Maxwell

5.3 TRANSFORMATIONS DU GAZ PARFAIT

5.3.1 Adiabatique réversible

$$\text{On a } \delta \mathbf{Q}^e = Td\mathbf{S} = 0 \text{ et : } \left. \begin{array}{l} d\mathbf{U} = Td\mathbf{S} - PdV \\ d\mathbf{H} = Td\mathbf{S} + VdP \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d\mathbf{U} = -PdV \\ d\mathbf{H} = VdP \end{array} \right.$$

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{U}} = -\frac{VdP}{PdV} = \frac{C_PdT}{C_VdT} = \gamma$$

On suppose que C_P et C_V sont constantes alors :

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} \Rightarrow d(PV^\gamma) = 0$$

Conclusion:

Les lois de Laplace pour une transformation isentropique:

$$PV^\gamma = cte \quad || \quad TV^{\gamma-1} = cte \quad || \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = cte$$

5.3.2 Transformation quelconque : l'entropie d'un gaz parfait

La première identité thermodynamique $d\mathbf{U} = Td\mathbf{S} - PdV$ donne

$$\Rightarrow d\mathbf{S} = \frac{d\mathbf{U}}{T} + \frac{P}{T}dV$$

$$\Rightarrow d\mathbf{S} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{P}{T}dV$$

$$G.P \Rightarrow d\mathbf{S} = C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

$$\Delta\mathbf{S} = C_V \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{V_0}$$

Autre écriture :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + C_V \ln T + nR \ln V$$

Remarque

Pour une transformation isentropique ($S = cte$) et sachant que $C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$ alors on retrouve

$$TV^{\gamma-1} = cte$$

Autre expression de l'entropie d'un gaz parfait :

La deuxième identité thermodynamique $d\mathbf{H} = Td\mathbf{S} + VdP$ donne

$$\Rightarrow d\mathbf{S} = \frac{d\mathbf{H}}{T} - \frac{V}{T}dP$$

$$\Rightarrow d\mathbf{S} = C_P \frac{dT}{T} - \frac{V}{T}dP$$

$$G.P \Rightarrow d\mathbf{S} = C_P \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}$$

$$\Delta\mathbf{S} = C_P \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{P}{P_0}$$

Autre écriture :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}'_0 + C_P \ln T - nR \ln P$$

Remarque

Pour une transformation isentropique ($S = cte$) et sachant que $C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$ alors on retrouve

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = cte$$

5.3.3 Applications aux détentes

5.3.3.1 Détente de Joule Gay-Lussac

Détente dans le vide d'un fluide calorifugé et sans pièce mobile (transformation irréversible); Que vaut ΔS ?

★ Bilan d'énergie

Appliquons le premier principe : $\Delta U = \delta W^e + \delta Q^e = 0$

La détente de Joule Gay-Lussac est isoénergétique $U = cte$. Pour un gaz parfait :

$$dU = C_V dT = 0 \Rightarrow T = cte$$

On conclut pour un gaz parfait la détente de Joule Gay-Lussac est isotherme (1^{ère} loi de Joule)

★ Bilan entropique

Appliquons le deuxième principe :

$$\Delta S = C_V \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{2V_0}$$

comme $T = T_0$ et $V = 2V_0$

alors :

$$\boxed{\Delta S = \Delta S^i = nR \ln 2}$$

et puisque $\Delta S = \Delta S^e + \Delta S^i$ alors $\Delta S^i > 0$: transformation irréversible (naturelle).

5.3.3.2 Détente de Joule Thomson

En régime stationnaire :

★ Bilan énergétique

Le premier principe : $dU = \delta Q^e + \delta W^e = -PdV \Rightarrow dU + PdV = 0$

Dans un compartiment On peut écrire : $d(U + PV) = dH = 0$

On tire que : $\Delta H = 0 \Rightarrow H = cte$

La détente de Joule Thomson est isenthalpique $H = cte$. Pour un gaz parfait :

$$dH = C_P dT = 0 \Rightarrow T = cte$$

On conclut pour un gaz parfait la détente de Joule Thomson est isotherme (2^eme loi de Joule) ★ **Bilan entropique**

Appliquons le deuxième principe :

$$\Delta S = C_P \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{P_2}{P_1}$$

comme $T_2 = T_1$ et $P_1 > P_2$

alors :

$$\Delta S = \Delta S^i = -nR \ln \frac{P_2}{P_1} > 0 \quad (P_2 < P_1)$$

et puisque : $\Delta S = \Delta S^e + \Delta S^i$ alors $\Delta S^i > 0$: transformation irréversible (naturelle).

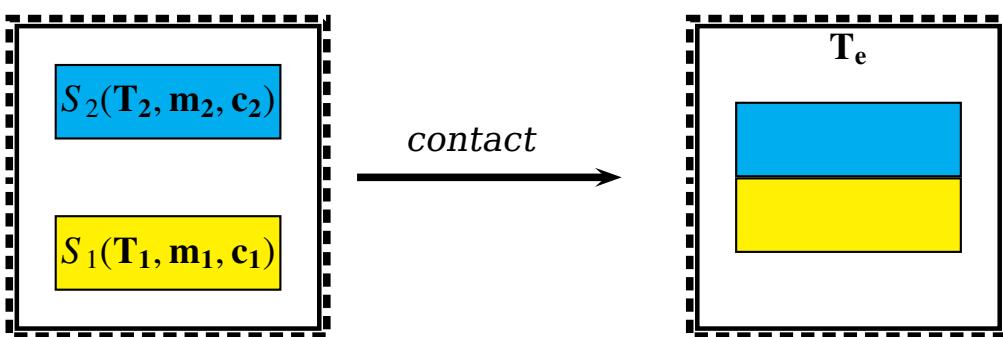
5.4 Entropie d'une phase condensée dans le modèle incompressible et indilatable

On suppose que le volume du fluide ne varie presque pas $V \approx cte \Rightarrow dV = 0$

D'après les identités thermodynamiques $dU = dH = CdT = TdS$ donc pour la phase condensée

$$dS = \frac{CdT}{T} \implies \Delta S = C \ln \frac{T_F}{T_I}$$

Application 8 : Contact thermique entre deux corps



Le système $\Sigma = \{S_1 \cup S_2\}$ étant isolé et puisque l'énergie interne est une fonction d'état alors :

$dU = dU_1 + dU_2 = 0 \Rightarrow C_1dT + C_2dT = 0$ avec $C_i = m_i c_i$; c_i étant la capacité calorifique massique donc :

$$m_1 c_1 dT + m_2 c_2 dT = 0.$$

On suppose que c_i ne dépend pas de la température et notons T_e la température d'équilibre :

$$m_1 c_1 (T_e - T_1) + m_2 c_2 (T_e - T_2) = 0 \implies T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

$$\text{Si } m_1 = m_2 \text{ et } c_1 = c_2 \text{ alors } T_e = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Question : Que vaut ΔS ? :

$$\text{On a : } d\mathbf{U} = Td\mathbf{S} - PdV (\approx 0) = mc dT \Rightarrow d\mathbf{S} = mc \frac{dT}{T}$$

Par conséquent :

$$\Delta S_1 = m_1 c_1 \ln \frac{T_e}{T_1}$$

et

$$\Delta S_2 = m_2 c_2 \ln \frac{T_e}{T_2}$$

Si on suppose que : $m_1 c_1 = m_2 c_2$ alors :

$$\Delta S_{\Sigma} = mc \ln \frac{T_e^2}{T_1 T_2} = mc \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2}$$

Comme $(T_1 + T_2)^2 > 4 T_1 T_2$ en effet : $(T_1 + T_2)^2 - 4 T_1 T_2 = (T_1 - T_2)^2 > 0$

On conclut que : $\Delta S_{\Sigma} > 0$ transformation naturelle.

Remarque : énoncé du deuxième principe selon kelvin

Soit un moteur monotherme (en contact avec une seule source de chaleur à la température T_0) qui décrit **un cycle**

- Le premier principe : $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{W} + \mathbf{Q} = 0 \Rightarrow \mathbf{W} = -\mathbf{Q}$

- Le deuxième principe : $\Delta S = \frac{\mathbf{Q}}{T_0} + \Delta S^i = 0 \Rightarrow \mathbf{Q} = -T_0 \Delta S^i < 0$

$\Rightarrow \mathbf{W} > 0$: travail reçu par le moteur.

d'où énoncé de KELVIN :

Transformer intégralement en travail la chaleur d'une source unique au cours d'une transformation cyclique est impossible

.

D'où il faut au moins deux sources de chaleur donc machine diatherme.

5.5 Énergie libre F ,Enthalpie libre G

5.5.1 Énergie libre F

On appelle fonction énergie libre ou fonction de Helmholtz la **fonction d'état** définie par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} - TS$$

Dans le cas d'un fluide homogène , la différentielle $d\mathbf{F}$ a pour expression : $d\mathbf{F} = d\mathbf{U} - d(TS) \implies d\mathbf{F} = Td\mathbf{S} - PdV - Td\mathbf{S} - \mathbf{SdT}$

$$d\mathbf{F} = -\mathbf{SdT} - pdV$$

On conclut donc que :

$$\mathbf{S} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial T}\Big)_V \quad ; \quad P = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial V}\Big)_T$$

Ainsi

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial V}\Big)_T = \frac{\partial P}{\partial T}\Big)_V$$

C'est la troisième égalité thermodynamique de Maxwell

Remarque

On peut définir l'énergie interne par :

$$\mathbf{U} = \mathbf{F} + TS \implies \mathbf{U} = \mathbf{F} - T\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial T}\Big)_V$$

5.5.2 Enthalpie libre G

On appelle fonction enthalpie libre ou fonction de Gibbs la **fonction d'état** définie par :

$$\mathbf{G} = \mathbf{H} - TS$$

Dans le cas d'un fluide homogène , la différentielle $d\mathbf{G}$ a pour expression : $d\mathbf{G} = d\mathbf{H} - d(TS) \implies d\mathbf{G} = Td\mathbf{S} + VdP - Td\mathbf{S} - \mathbf{SdT}$

$$d\mathbf{G} = -\mathbf{SdT} + VdP$$

On conclut donc que

$$\mathbf{S} = -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial T}\Big)_P ; \quad V = -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial P}\Big)_T$$

Ainsi

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial P}\Big)_T = -\frac{\partial V}{\partial T}\Big)_P$$

C'est la quatrième égalité thermodynamique de Maxwell

Remarque

On peut définir l'enthalpie par :

$$\mathbf{H} = \mathbf{G} + TS \implies \mathbf{H} = \mathbf{G} - T\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial T}\Big)_P$$

5.6 Troisième principe de la thermodynamique

Il a été énoncé par Nerst en 1906, puis complété par Planck en 1911

Troisième principe de la thermodynamique

Lorsque la température d'un corps pur tend vers 0K , son entropie tend vers une valeur limite qui est nulle si l'état est stable . Si l'état du corps n'est pas stable, son entropie est une constante qu'on peut prendre nulle par convention

On retient que le troisième principe est un principe de référence.

5.6.1 Facultatif

Si on pose le transfert thermique réversible

$$\delta \mathbf{Q} = C_v dT + \ell dV = C_p dT + k dP \implies d\mathbf{S} = \frac{C_v}{T} dT + \frac{\ell}{T} dV = \frac{C_p}{T} dT + \frac{k}{T} dV$$

Montrons que :

$$\ell = T \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_V ; \quad k = -T \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_P$$

Ainsi :

$$\frac{\partial C_v}{\partial V} \Big|_T = T \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \Big|_V ; \quad \frac{\partial C_p}{\partial P} \Big|_T = -T \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \Big|_P$$

On a :

$$d\mathbf{U} = C_v dT + (\ell - P) dV$$

Pour un gaz parfait et puisque \mathbf{U} ne dépend que de la température (Première loi de Joule) alors

$$\ell(G.P) = P$$

De même

$$d\mathbf{H} = \delta\mathbf{Q} + V dP \implies d\mathbf{H} = C_p dT + (V + k) dP$$

Pour un gaz parfait et puisque \mathbf{H} ne dépend que de la température (Première loi de Joule) alors

$$k(G.P) = -V$$

Démontrons les équations de Maxwell pour la thermodynamique.

Appliquons le théorème de Schwartz pour les quatres fonctions d'état ($\mathbf{U}, \mathbf{H}, \mathbf{F}$ et \mathbf{G})

► Pour l'énergie interne :

$$d\mathbf{U} = T dS - P dV \implies \frac{\partial T}{\partial V} \Big|_S = -\frac{\partial P}{\partial S} \Big|_V$$

► Pour l'enthalpie :

$$d\mathbf{H} = T dS + V dP \implies \frac{\partial T}{\partial P} \Big|_S = \frac{\partial V}{\partial S} \Big|_P$$

► Pour l'énergie libre :

$$d\mathbf{F} = -S dT - P dV \implies \frac{\partial S}{\partial V} \Big|_T = \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_V$$

► Pour l'enthalpie libre :

$$d\mathbf{G} = -S dT + V dP \implies \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_P = -\frac{\partial S}{\partial P} \Big|_T$$

5.7 Notions élémentaires sur l'interprétation statistique de l'entropie : formule de BOLTZMANN

On définit L'entropie d'un système par :

$$S = k_B \ln \Omega$$

Avec Ω le nombre de micro-états que peut prendre le système.

Remarque

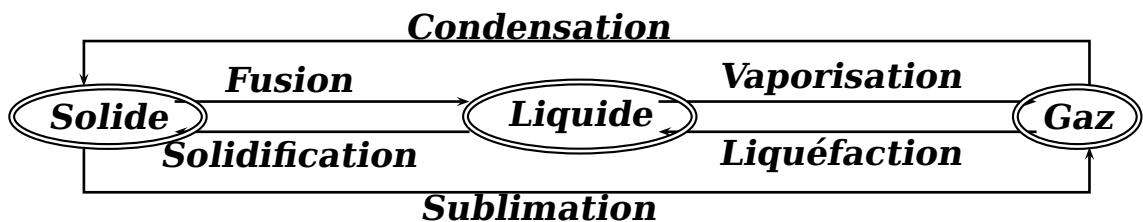
A 0K , tous les corps sont à l'état solide (pas de vibration des particules) donc $\Omega = 1$ et par conséquent $S = 0$ (On retrouve le troisième principe de la thermodynamique)

CHAPITRE 6

CHANGEMENT D'ÉTAT D'UN CORPS PUR

6.1 Notions générales sur la changement d'état d'un corps pur

- On rappelle que :

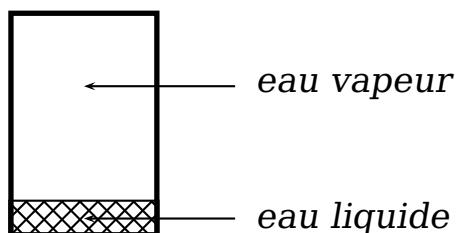
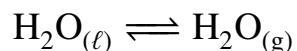


Exemple : La sublimation de l'iode.

6.2 Définitions

Soit un corps pur fermé ($m = cte \implies N = cte$) en équilibre entre deux phases par exemple (L-G).

Par exemple :



On pose :

- ▷ $m = m_\ell + m_g$
- ▷ $x_\ell = \frac{m_\ell}{m}$ titre massique de la phase liquide .
- ▷ $x_g = \frac{m_g}{m}$ titre massique de la phase gazeuse ; d'où :

$$x_\ell + x_g = 1$$

- ▷ $v = \frac{V}{m}$ le volume massique .
- ▷ $v_\ell = \frac{V_\ell}{m_\ell}$ volume massique de la phase liquide .
- ▷ $v_g = \frac{V_g}{m_g}$ volume massique de la phase gazeuse.

d'où :

$$v = \frac{V_g + V_\ell}{m} = \frac{m_g v_g}{m} + \frac{m_\ell v_\ell}{m}$$

$$v = x_\ell v_\ell + x_g v_g = x_\ell v_\ell + (1 - x_\ell) v_g = x_g v_g + (1 - x_g) v_\ell$$

De la même façon pour **les grandeurs extensives** on trouve :

$$u = \frac{\mathbf{U}}{m} = x_\ell u_\ell + x_g u_g$$

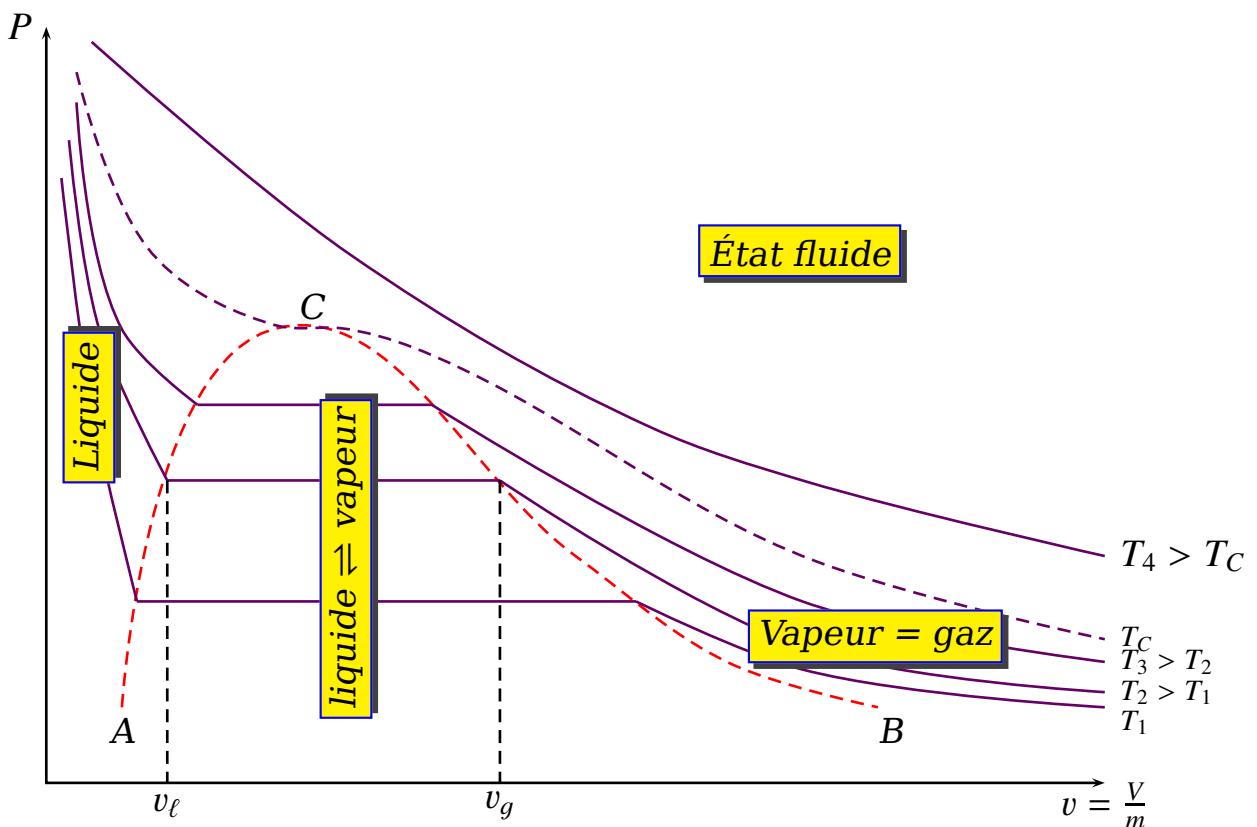
$$h = \frac{\mathbf{H}}{m} = x_\ell h_\ell + x_g h_g$$

$$s = \frac{\mathbf{S}}{m} = x_\ell s_\ell + x_g s_g$$

$$g = \frac{\mathbf{G}}{m} = x_\ell g_\ell + x_g g_g$$

6.3 Isothermes d'ANDREWS

On comprime un gaz de masse m constante à différentes températures , dans le diagramme (P, v) on obtient :



Avec :

- ▶ C : Point critique.
- ▶ T_c : température critique .
- ▶ AC : la courbe d'ébullition (apparition des premières bulles gazeuses).
- ▶ CB : courbe de rosé (disparition de la dernière goutte liquide).
- ▶ Pour $T < T_c$ on a $v_\ell \neq v_g$: changement d'état de première espèce.
- ▶ Dans la zone de coexistence des deux phases ($L+G$) la pression reste constante : c'est la pression de vapeur saturante $P_s = P_s(T)$.
- ▶ Pour $T = T_c$ on a $v_\ell = v_g$: changement d'état de deuxième espèce.

Remarques

- ▶ Pour $T > T_c$, on ne peut pas distinguer la phase liquide de celle du gaz : on parle de l'état fluide.
- ▶ Au point C on a :

$$\left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_{T=T_c} = 0 \quad (\text{asymptote horizontale})$$

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right|_{T=T_c} = 0 \quad (\text{point d'inflexion})$$

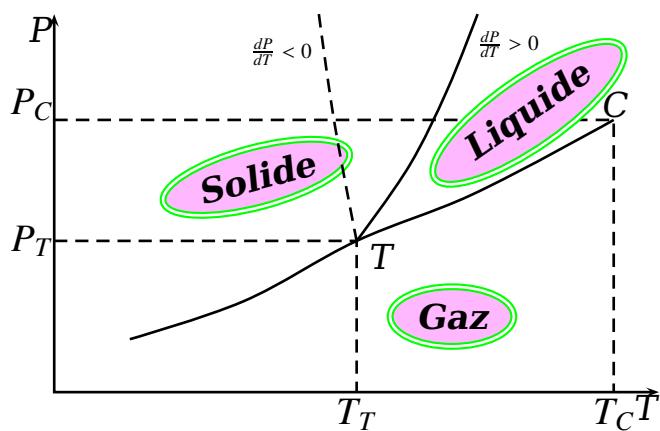
- ▶ Sur le palier de changement d'état on $T = cte$ et $P = cte$ et comme $d\vec{G} = -SdT + VdP \implies dG = 0$

On retient que :

Conclusion:

le changement d'état d'un corps pur fermé se fait à enthalpie libre constante.

6.4 Changement d'état en diagramme (P,T)



- T : point triple : coexistence des trois phases.
- C : Point critique, Au delà de T_c on ne peut pas distinguer les phases liquide et vapeur; on parle de l'état fluide.

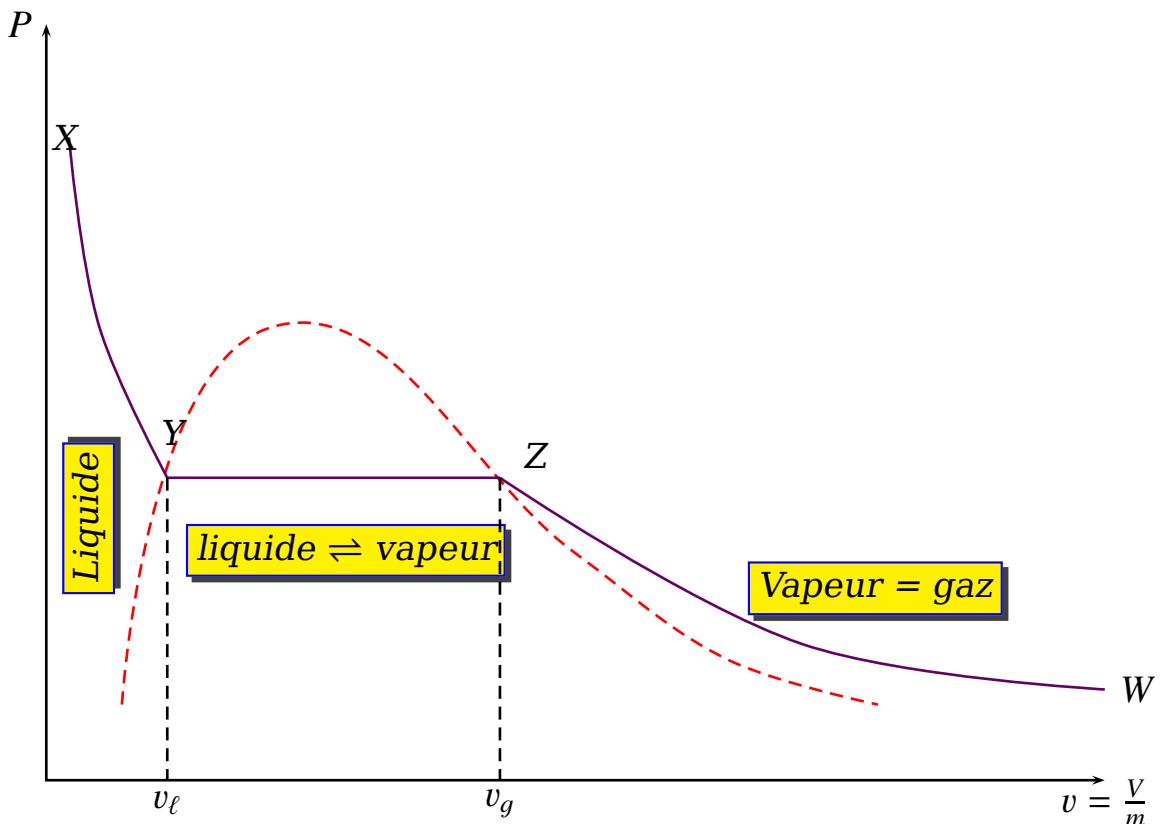
Exemple

Pour l'eau :

$$\left. \begin{array}{l} T_T = 273,16 \text{ K} \\ P_T = 613 \text{ Pa} \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} T_C = 647,3 \text{ K} \\ P_C = 22,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \end{array} \right|$$

Pour tout changement d'état en diagramme (P, T) on a $\frac{dP}{dT} > 0$ sauf pour l'eau, germanium, silicium, bismuth et l'antimoine où pour l'équilibre (S-L) on a $\frac{dP}{dT} < 0$ (Voir courbe précédente)

6.5 Transfert thermique



N.B : Courbes d'analyse thermique :

De $W \rightarrow X$

- $W \rightarrow Z$: compression isotherme de la phase vapeur
- Z apparition de la première goutte liquide

- $Z \rightarrow Y$ déplacement de l'équilibre vers la phase liquide
- Y disparition de la dernière bulle gaz
- $Y \rightarrow X$ compression de la phase vapeur.

De $X \rightarrow W$

- $X \rightarrow Y$ dilatation de la phase vapeur.
 - Y apparition de la première bulle gaz
 - $Y \rightarrow Z$ déplacement de l'équilibre vers la phase vapeur
 - Z disparition de la dernière goutte liquide
 - $Z \rightarrow W$: dilatation isotherme de la phase vapeur
- ◊ Le premier principe : puisque la pression est constante dans un changement d'état alors on préfère utiliser \mathbf{H} au lieu de \mathbf{U} .
- ◊ sur le palier : $P = cte \implies d\mathbf{H} = \delta\mathbf{Q}_P^e = dL$

$$\Delta\mathbf{H} = \mathbf{Q}_P = L_{\ell \rightarrow g}$$

$L_{\ell \rightarrow g}$: chaleur latente de changement d'état.

◊ ainsi la chaleur latente massique par :

$$\Delta h_{\ell \rightarrow g} = \frac{\Delta\mathbf{H}_{\ell \rightarrow g}}{m} = \frac{L_{\ell \rightarrow g}}{m} = \ell_{\ell \rightarrow g}$$

◊ De même on a $d\mathbf{S} = \frac{\delta\mathbf{Q}}{T}$ on définit l'entropie de changement d'état puisque la transformation se fait à température constante par :

$$\Delta\mathbf{S} = \frac{\mathbf{Q}_P}{T} = \frac{\Delta\mathbf{H}_{\ell \rightarrow g}}{T} = \frac{L_{\ell \rightarrow g}}{T}$$

◊ ainsi l'entropie massique de changement d'état par :

$$\Delta s_{\ell \rightarrow g} = \frac{\Delta h_{\ell \rightarrow g}}{T} = \frac{\ell_{\ell \rightarrow g}}{T}$$

remarque :

$$S_g \gg S_\ell > S_s$$

Conclusion:

Lors d'un changement d'état on a :

- $\Delta\mathbf{H} = L = mh$
- $\Delta\mathbf{S} = \frac{\Delta\mathbf{H}}{T_{chgt\ d'état}}$

6.6 Règles des moments

On a : $v = x_\ell v_\ell + x_g v_g$ et $x_\ell + x_g = 1$ donc :
 $v = x_\ell(v_\ell - v_g) + v_g$ donc :

$$x_\ell = \frac{v_g - v}{v_g - v_\ell} = \frac{MP}{NP}$$

De même :

$$x_g = \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell} = \frac{MN}{NP}$$

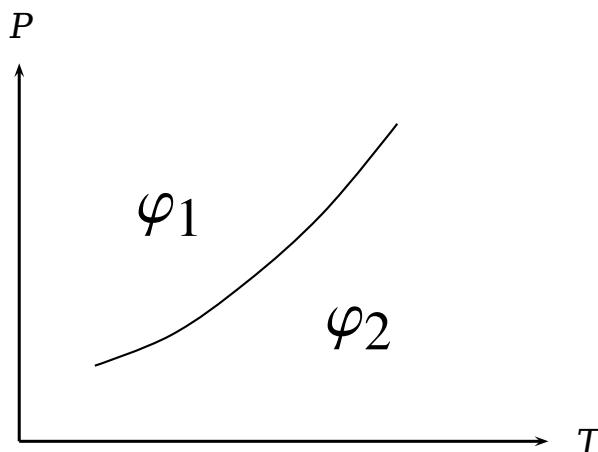
On conclut que : $NP = \frac{MN}{x_g} = \frac{MP}{x_\ell}$ donc :

$$x_\ell MN = x_g MP$$

c'est la règle des moments

6.7 Formule de CLAPEYRON

Soit un corps pur en équilibre sous deux phases φ_1 et φ_2



On rappelle que $d\mathbf{G} = -\mathbf{S}dT + \mathbf{V}dP$. Sur la courbe de changement d'état on a la pression ainsi la température sont constantes et par conséquent l'enthalpie libre est constante c'est à dire que $\mathbf{G}_1(T, P) = \mathbf{G}_2(T, P)$ et $\mathbf{G}_1(T + dT, P + dP) = \mathbf{G}_2(T + dT, P + dP)$

Or $\mathbf{G}(T + dT, P + dP) = \mathbf{G}(T, P) + d\mathbf{G}(T, P)$ et par suite

$$d\mathbf{G}_1(T, P) = d\mathbf{G}_2(T, P)$$

On déduit que $\left(\frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial T}\right)_P dT = \left(\frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial T}\right)_P dT$

On rappelle aussi que : $V = \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial P}\right)_T$ et $\mathbf{S} = -\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial T}\right)_P$ on tire que

$$\boxed{\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta V} = \frac{L_{1 \rightarrow 2}}{T \Delta V}}$$

C'est la formule de Clapeyron de changement d'état

Exemple

Le changement d'état : $L_{\ell \rightarrow g} : \frac{dP}{dT} = \frac{L_{\ell \rightarrow g}}{T(V_g - V_\ell)}$

On suppose que :

- L est constante.
- $V_g \gg V_\ell$ (toujours vérifié si on est loin du point critique).
- la vapeur se comporte comme un gaz parfait (approximation grossière).

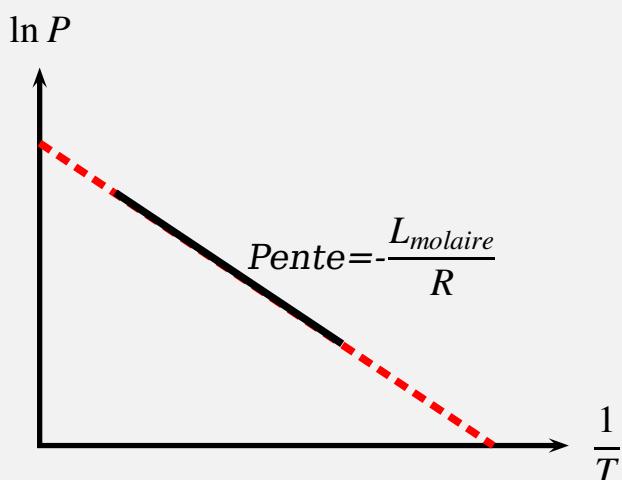
$$\begin{aligned}\frac{dP}{dT} = \frac{L_{\ell \rightarrow g}}{TV_g} &\Rightarrow \frac{dP}{dT} = \frac{LP}{nRT^2} \\ &\Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{L_{molaire}}{R} \frac{dT}{T^2} \\ &\Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{L_{molaire}}{R} \frac{dT}{T^2} \\ &\Rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{L_{molaire}}{RT}\end{aligned}$$

$$P_s = P_0 e^{-\frac{L_{molaire}}{RT}}$$

Ceci donne la pression de vapeur saturante en fonction de la température.

Remarque

Pour déterminer la chaleur latente molaire expérimentalement on trace $\ln P = f(\frac{1}{T})$: c'est une droite de pente $-\frac{L_{molaire}}{R}$



CHAPITRE 7

MACHINES DITHERMES

7.1 Introduction

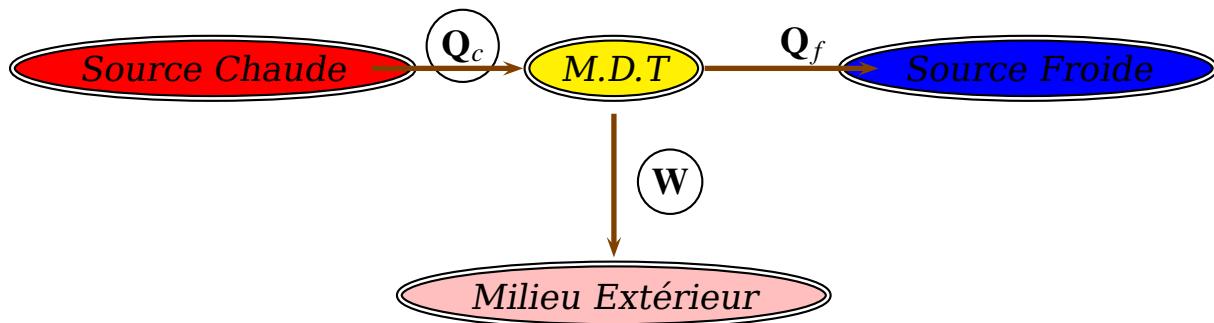
- Une machine thermique est un convertisseur d'énergie ,pour fonctionner continuellement en régime permanent,elle effectue des cycles qui peuvent être :
 - ▷ réversible : machine idéale (machine de Carnot).
 - ▷ irréversible : machine réelle.
- Pour décrire un cycle la machine à besoin d'un agent thermique par exemple le fréon CCl_2F_2 pour les réfrigérateurs ,l'azote,eau vapeur …
- On appelle thermostat ou source de chaleur un système thermodynamique de grande capacité calorifique ($C \rightarrow \infty$) ,c'est à dire sa température reste constamment constante.

7.2 Les différentes machines dithermes

Les machines dithermes fonctionnent entre deux sources thermodynamiques de température différentes T_c pour la source chaude et T_f pour la source froide , avec $T_c > T_f$.

7.2.1 Moteur thermique

Il fournit un travail **W** au milieu extérieur en empruntant une quantité de chaleur **Q_c** de la source chaude et en restituant obligatoirement une quantité de chaleur **Q_f** à la source froide



Exemple : La locomotive à vapeur :

- Q_c reçue par la machine $\Rightarrow Q_c > 0$.
 - Q_f, W fournit par la machine ditherme donc $Q_f < 0$ ainsi $W < 0$.
- On définit le rendement ρ d'un moteur par :

$$\rho = \left| \frac{\text{ce qu'on veut}}{\text{ce qu'on paye}} \right| < 1$$

$\rho = -\frac{W}{Q_c}$ Si $\rho = 1$ alors $Q_f = 0$ Impossible par Kelvin .

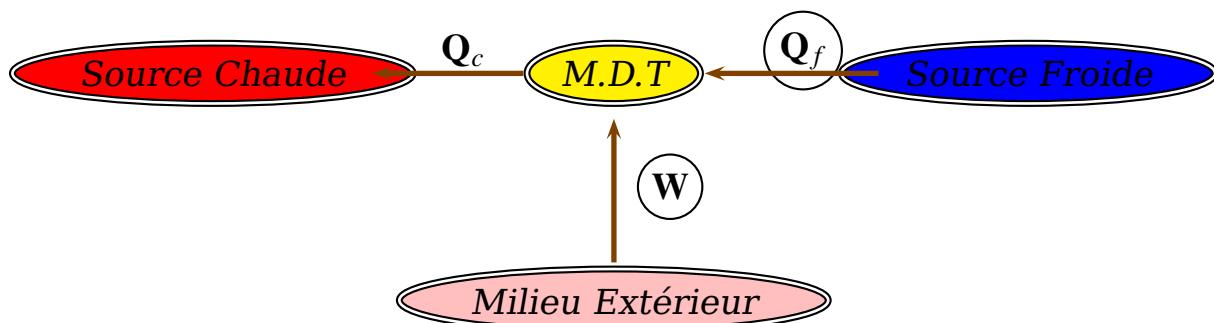
Le premier principe pendant un cycle $\Delta U = Q_c + Q_f + W = 0 \Rightarrow W = -(Q_c + Q_f)$

donc $\rho = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} \Rightarrow$

$$\rho = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} < 1 \quad (Q_f < 0)$$

7.2.2 Machine frigorifique

Son rôle est d'extraire une quantité de chaleur Q_f à la source froide en recevant un travail W du milieu extérieur et en fournissant une quantité de chaleur Q_c à la source chaude .



On a $Q_c < 0$; $Q_f > 0$ et $W > 0$.

Exemple : réfrigérateur , climatiseur .

On définit l'efficacité de la machine frigorifique :

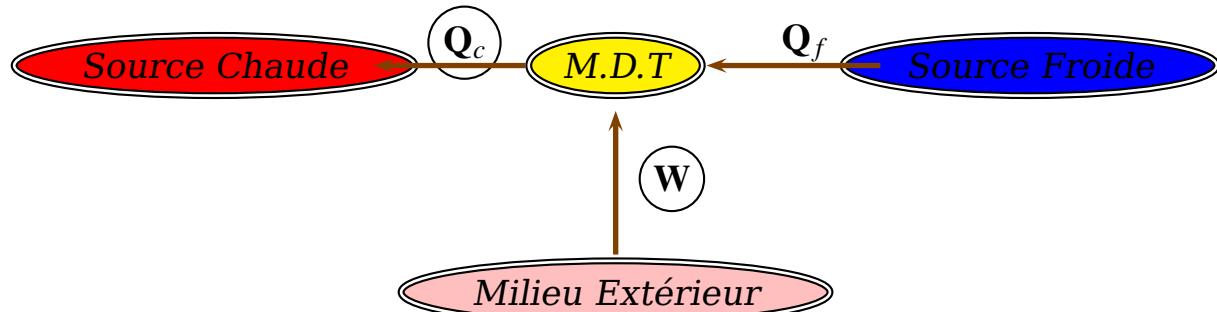
$$e = \frac{Q_f}{W} > 1 \quad (\text{par but de la machine})$$

Or le premier principe $Q_c + Q_f + W = 0 \Rightarrow W = -(Q_c + Q_f)$

$$e = \frac{-1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} \quad (> 1)$$

7.2.3 Pompe à chaleur

Son rôle est de fournir une quantité de chaleur Q_c à la source chaude , en recevant un travail W du milieu extérieur et une quantité de chaleur Q_f de la source froide .



On a $Q_c < 0$; $Q_f > 0$ et $W > 0$.

$$e = -\frac{Q_c}{W} > 1 \quad (\text{par but de la machine})$$

Or le premier principe $Q_c + Q_f + W = 0 \Rightarrow W = -(Q_c + Q_f)$

$$e = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} \quad (> 1)$$

7.3 MACHINES DE CARNOT

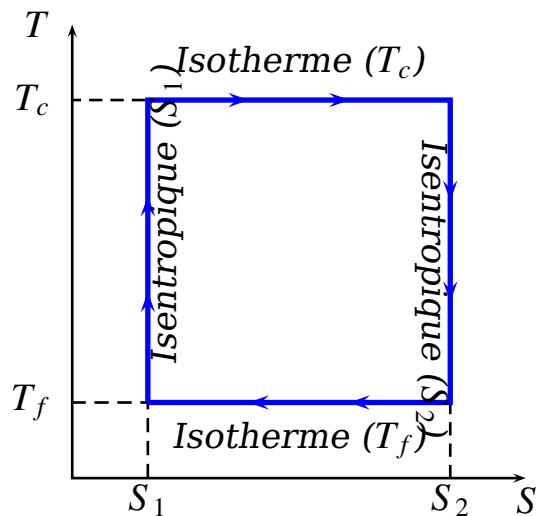
7.3.1 Définition

Définition

Une machine qui fonctionne sur un cycle réversible di-therme, composé de deux isothermes et de deux isentropiques

7.3.2 Représentation du cycle

7.3.2.1 En diagramme TS



On a :

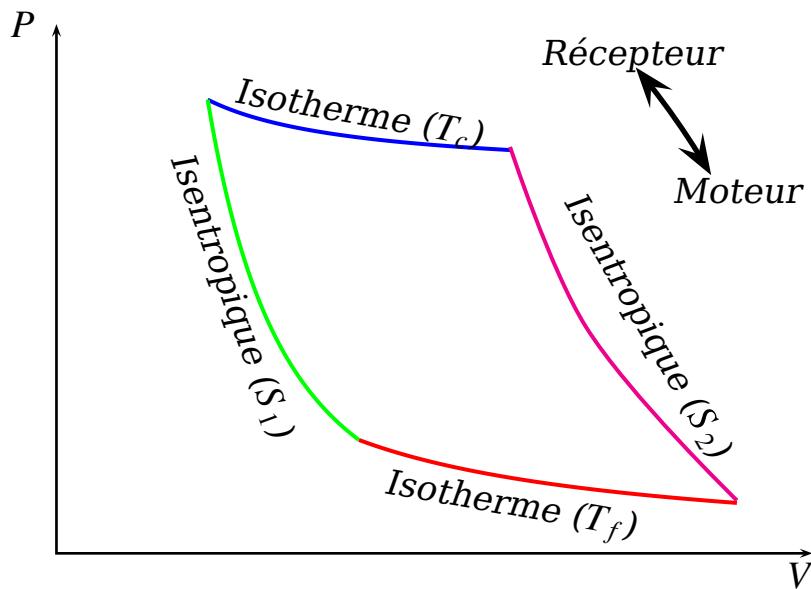
$$\left. \begin{aligned} Q_c &= T_c \Delta S = \int_{S_1}^{S_2} T_c dS > 0 \\ Q_f &= -T_f \Delta S = \int_{S_2}^{S_1} T_f dS < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_c + Q_f > 0 \Rightarrow W < 0$$

Conclusion:

Si le cycle est décrit dans le sens horaire alors il est moteur

- ↗ moteur (sens horaire)
- ↙ récepteur (sens trigonométrique).

7.3.2.2 En diagramme PV



Rappel :

$$\gamma = \frac{\chi_T}{\chi_S} > 1$$

de même : $\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}_T$ et $\chi_S = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}_S$
et puisque χ_T et χ_S sont positifs alors :

$$\frac{\partial P}{\partial V} < 0$$

ainsi :

$$(\frac{\partial P}{\partial V})_S < (\frac{\partial P}{\partial V})_T$$

La pente d'une isentropique est plus forte que celle d'une isotherme .

Remarques

- ▶ Une isentropique ne peut pas couper une isotherme deux fois, en effet on aura du travail avec une seule source de chaleur (impossible par Kelvin).
- ▶ De même une isotherme ne peut pas couper une isentropique deux fois car en aura un travail moteur (impossible par Kelvin).
- ▶ En un point donné en diagramme (PV) il ne passe qu'une seule isotherme et une seule isentropique car la pente est unique.

$$\mathbf{W} = - \oint PdV \Rightarrow \begin{cases} < 0 & \text{si sens horaire} \\ > 0 & \text{si sens trigonométrique} \end{cases}$$

Conclusion:

La machine de Carnot est motrice si le cycle est décrit dans le sens horaire en diagramme (PV) .

7.4 Expressions des rendements

7.4.1 Machines de Carnot

1. Moteur de Carnot :

$$\rho = \frac{\mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_f}{\mathbf{Q}_c} = 1 + \frac{\mathbf{Q}_f}{\mathbf{Q}_c}$$

Or : $\mathbf{Q}_c = T_c(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1)$ et $\mathbf{Q}_f = T_f(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2)$

d'où le théorème de Carnot :

$$\rho_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} < 1$$

Théorème

Théorème de Carnot

Toutes les machines thermiques fonctionnant de manière reversible en échangeant de la chaleur avec deux sources de températures T_c et T_f ont le même rendement $\rho_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$

Remarques

(a) On a le cycle est réversible donc : $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \implies \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$

(b) Le rendement de Carnot est indépendant de la nature de l'agent thermique , il ne dépend que de la température des deux sources.

(c) De la même façon on trouve pour :

(d) La machine frigorifique

$$e = \frac{-1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} \text{ on tire que :}$$

$$e_c = \frac{1}{\frac{T_c}{T_f} - 1} = \frac{T_f}{T_c - T_f} > 1$$

(e) La pompe à chaleur

$$e = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} \text{ on tire que :}$$

$$e_c = \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}} = \frac{T_c}{T_c - T_f} > 1$$

7.4.2 Machines Réelle

$$\rho' = -\frac{W'}{Q'_c} = \frac{Q'_c + Q'_f}{Q'_c} = 1 + \frac{Q'_f}{Q'_c}$$

Or le deuxième principe $\frac{Q'_c}{T_c} + \frac{Q'_f}{T_f} + S^c = 0$ (cycle)

$$\implies \frac{Q'_f}{T_f} = -\frac{Q'_c}{T_c} - S^c$$

En effet : $\sum \frac{Q_i}{T_i} = -S^c < 0$: énoncé du deuxième principe selon Clausius (inégalité de Clausius)

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\mathbf{Q}'_f}{\mathbf{Q}'_c} &= -\frac{T_f \mathbf{S}^c}{\mathbf{Q}'_c} - \frac{T_f}{T_c} \\ \Rightarrow \rho' &= 1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f \mathbf{S}^c}{\mathbf{Q}'_c} \\ \Rightarrow \rho' &= \rho_c - \frac{T_f \mathbf{S}^c}{\mathbf{Q}'_c} \\ \Rightarrow -\rho' + \rho_c &= \frac{T_f \mathbf{S}^c}{\mathbf{Q}'_c} > 0\end{aligned}$$

Conclusion:

Le rendement ou l'efficacité du cycle de Carnot est une limite pour toutes les machines thermiques réelles

$$\rho \leq \rho_c \quad \| \quad e \leq e_c$$

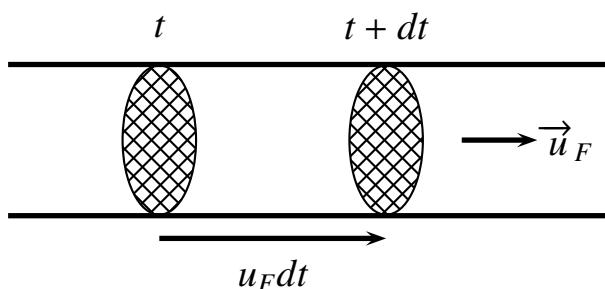
7.5 Premier ppe de la thermo pour un système ouvert en écoulement permanent

- On rappelle qu'un système ouvert est un système qui peut échanger de la matière avec le milieu extérieur.
- On appelle écoulement permanent ou stationnaire le déplacement d'un fluide avec toutes les grandeurs ne dépendent pas du temps.

7.5.1 Débit massique,débit convectif d'une grandeur extensive

7.5.1.1 Débit massique

Soit une conduite de section S ou un fluide s'écoule à la vitesse \vec{u}_F :



Entre les instant t et $t + dt$ la section S est traversée par la masse élémentaire $dm = \rho d\tau = \rho S u_F dt$

On appelle débit massique qu'on note D_m d'un fluide en écoulement à travers une surface S

$$D_m = \frac{dm}{dt} = \rho S u_F \quad kg^{-1}.s^{-1}$$

Remarques

1. Le débit massique représente la masse du fluide qui traverse la section S par unité de temps (une seconde)
2. La définition générale du débit massique est :

$$D_m = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{ds}$$

Avec

$$\vec{j} = \rho \vec{u}_F$$

7.5.1.2 Débit convectif d'une grandeur extensive

Soit X une grandeur extensive ($V, U, S, H, G, E_m, C_v, C_p, \dots$)
On appelle grandeur massique de la grandeur X la quantité

$$x = \frac{dX}{dm} \quad \text{unité de } X.kg^{-1}$$

Exemple

X	x	grandeur massique
V	$v = \frac{dV}{dm} = \frac{1}{\rho}$	volume massique
U	$u = \frac{dU}{dm}$	énergie interne massique
H	$h = \frac{dH}{dm}$	enthalpie massique
C	$c = \frac{dC}{dm}$	capacité thermique massique
G	$g = \frac{dG}{dm}$	enthalpie libre massique

On en déduit que :

$$\frac{dX}{dt} = xD_m = D_X$$

D_X débit de la grandeur X

Cas particulier : $X = V \implies v = \frac{1}{\rho}$

$$D_V = \frac{1}{\rho} D_m \implies D_m = \rho D_V$$

D_V : débit volumique

Remarques

1. Dans une conduite de section variable et en régime permanent on a

$$D_V = S_1 u_1 = S_2 u_2$$

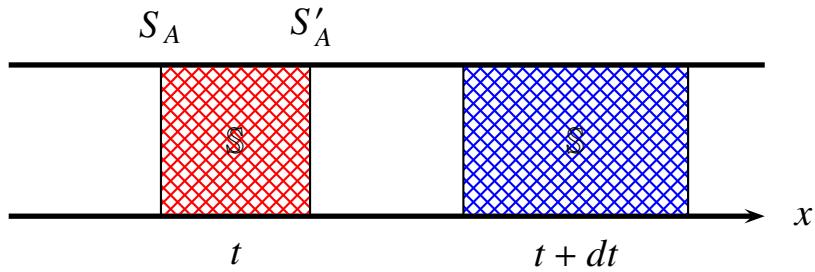
2. Dans une conduite contenant des ramifications et en régime permanent on a

$$D = \sum D_i$$

Analogie avec la loi de nœuds en électrocinétique

7.5.2 Bilan enthalpique pour un écoulement permanent

On s'intéresse à un écoulement **unidimensionnel** en régime permanent, c'est à dire pour toute grandeur G on a $G(M) = G(x)$



Soit \mathbb{S} le système délimité par les surfaces S_A et S'_A .

Entre les instants t et $t + dt$, le système peut échanger avec l'extérieur :

- L'énergie thermique

$$\mathbf{Q} = \int \mathcal{P}_{th} dt = \int \dot{\mathbf{Q}} dt$$

- Travail des forces pressantes

$$\mathbf{W}_{FP} = - \int P dV$$

- Travail des forces conservatives (le poids par exemple)

$$\delta W = -dE_p$$

- Travail utile (autre que le travail des forces pressantes et conservatives) :

$$\mathbf{W}_u = \int \mathcal{P}_u dt$$

On rappelle que :

$$\vec{F}_p = PS \vec{e}_x \implies \mathbf{W}_{FP} = \int PS dx \quad \text{donc}$$

$$\mathcal{P}_{FP} = \frac{\delta \mathbf{W}_{FP}}{\delta t} = PS u = \frac{PD_m}{\rho}$$

Pour le système \mathbb{S} délimité par deux surfaces S_A dont la force pressante est \vec{F}_A et S'_A dont la force pressante est \vec{F}'_A on a :

$$\mathcal{P}_{FP} = P_A S_A u_A - P'_A S'_A u'_A = (P_A v_A - P'_A v'_A) D_m = -\Delta(PvD_m)$$

Appliquons le premier principe pour le système **fermé** \mathbb{S} de masse $dm = D_m dt$ pour cela dressons un bilan de l'énergie totale du système :

- L'énergie totale à l'instant t :

$$\mathcal{E}_T(t) = \mathbf{U}(t) + E_m(t) = (u(t) + e_p(t) + e_c(t))D_m dt$$

- L'énergie totale à l'instant $t + dt$:

$$\mathcal{E}_T(t + dt) = \mathbf{U}(t + dt) + E_m(t + dt) = (u(t + dt) + e_p(t + dt) + e_c(t + dt))D_m dt$$

Donc

$$\mathcal{E}_T(t + dt) - \mathcal{E}_T(t) = \delta \mathbf{W} + \delta \mathbf{Q} \implies D_m dt [\Delta(u + e_c + e_p)] = \mathcal{P}_{th} dt + \mathcal{P}_u dt - \Delta(PvD_m) dt$$

$$\implies D_m \Delta(u + Pv + e_c + e_p) = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_u$$

$$D_m \Delta(h + e_c + e_p) = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_u$$

C'est l'expression du premier principe pour un système ouvert en écoulement permanent unidimensionnel

Remarques

1. Si le poids est la seule force conservatives (avec Oz orienté vers le haut) alors

$$D_m \Delta(h + \frac{1}{2} \vec{V}^2 + gz) = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_u$$

2. Si on néglige l'énergie cinétique massique ($\vec{V} \approx \vec{0}$) ainsi la variation de l'énergie potentielle , alors l'expression devient

$$D_m \Delta h = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_u$$

CHAPITRE 8

DIFFUSION DES PARTICULES

8.1 DÉFINITION

La diffusion est un phénomène de transport de particules sans mouvement macroscopique de support.

La diffusion tend à uniformiser la répartition des particules qui se déplacent des zones où la concentration est forte vers les zones où la concentration est faible. Ce phénomène se produit dans des systèmes hors d'équilibre(c'est un phénomène irréversible).

Exemples

- ▶ Diffusion des ions dans une solution aqueuse.
- ▶ Diffusion des molécules d'un gaz.

Ce phénomène de diffusion est du aux chocs entre particules diffusées et particules du support en effet, expérimentalement si on augmente la densité des particules du support la diffusion devient lente.

On s'intéresse à la diffusion unidimensionnelle c'est à dire on suppose que le transport des particules se fait selon une seule direction.

Remarque

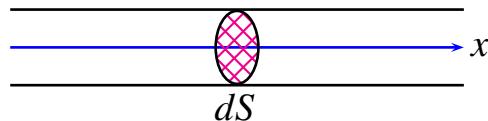
Si le transport se fait avec un mouvement macroscopique, on parle alors de convection.

8.2 Étude macroscopique de la diffusion

8.2.1 Vecteur densité de courant de particules

Considérons un milieu dans lequel peuvent diffuser des particules dans la direction (Ox).

Soit $n(x, t)$ nombre de particules par unité de volume à l'abscisse x et à l'instant t .



Le nombre de particules δN qui traverse la surface élémentaire dS pendant la durée dt est proportionnel à dt et à dS .

On pose (analogie avec l'électricité)

$$\delta N = \vec{j} \cdot \vec{dS} dt \implies \delta N = j dS dt$$

$\vec{j} = j \vec{e}_x$ exprimé en $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$ est appelé vecteur densité de courant de particules ou vecteur densité de flux de particules.

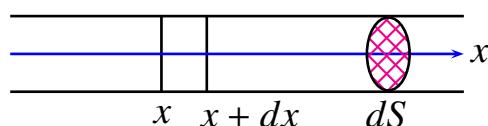
On rappelle que : $\delta q = dI dt$ avec $dI = \vec{j} \cdot \vec{dS}$

On définit le flux de particules diffusé par :

$$\delta\varphi = \vec{j} \cdot \vec{dS} \implies \delta\varphi = j dS$$

8.2.2 Loi de conservation de particules

Considérons un milieu dans lequel peuvent diffuser des particules dans la direction (Ox).



Soit :

- ▷ $N(x, t)$ le nombre de particules contenues dans ce volume à l'instant

t.

- $N(x, t + dt)$ le nombre de particules contenues dans ce volume à l'instant $t + dt$.

La variation de ce nombre est :

$$\delta N = N(x, t + dt) - N(x, t) = [n(x, t + dt) - n(x, t)]S dx \implies \delta N = \frac{\partial n}{\partial t} S dx dt$$

Calculons le nombre de particules échangées :

$$\delta N_e = j(x, t)S dt - j(x + dx, t)S dt \implies \delta N_e = -\frac{\partial j}{\partial x} S dx dt$$

En supposant qu'il n'y a ni création, ni absorption de particules, on aura

$$\delta N = \delta N_e$$

Donc :

$$-\frac{\partial j}{\partial x} S dx dt = \frac{\partial n}{\partial t} S dx dt$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

C'est la relation traduisant la conservation des particules

8.3 LOI DE FICK . ÉQUATION DE DIFFUSION

8.3.1 Loi de FICK

La densité de courant de particules \vec{j} est liée à la densité de particule n par la loi de FICK :

$$\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}} n \implies j = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

D : coefficient de diffusion ou diffusivité qui dépend de la nature des particules et du support. D s'exprime en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

Exemples

Pour la molécule d'oxygène dans les conditions normales de température et de pression :

- Dans l'air : $D = 2.06 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$.
- Dans l'eau : $D = 1.8 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$.

8.3.2 Equation de diffusion

En absence d'apparition et de disparition de particules on a :

$$\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

Et comme

$$j = -D \frac{\partial n}{\partial x} \implies \frac{\partial n}{\partial t} = +D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

Remarque

Dans le cas général , avec σ_a le nombre de particules crée par unité de temps et par unité de volume(ou absorbée = terme de source) l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = +D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \sigma_a$$

8.3.3 Résolution de l'équation de diffusion

La résolution de l'équation de diffusion dépend des conditions initiales et des conditions aux limites.

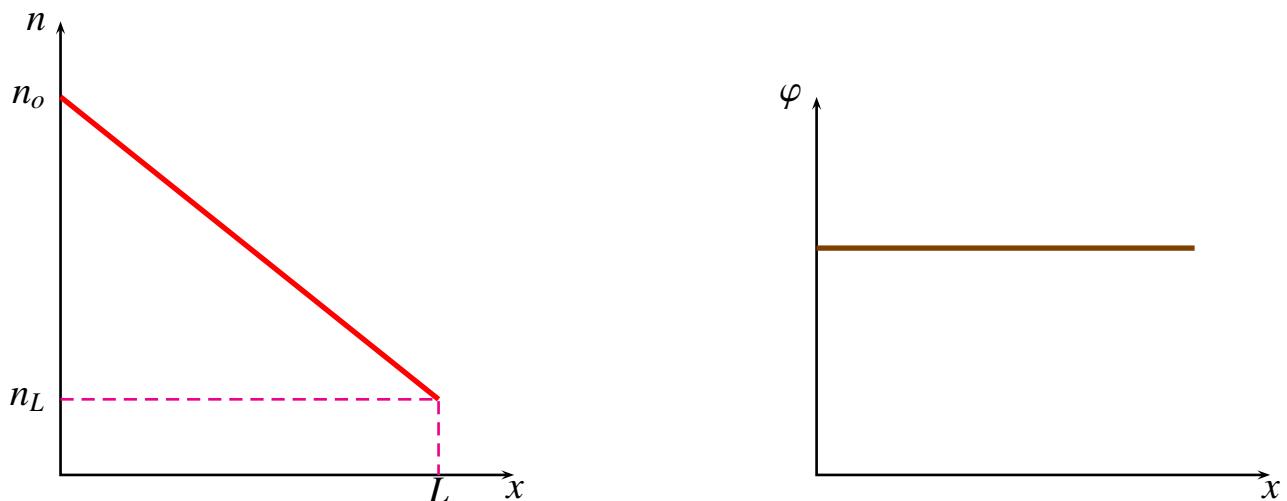
En régime permanent (stationnaire) et en absence de terme de source, l'équation de diffusion devient

$$\frac{d^2 n}{dx^2} = 0 \implies n = Ax + B$$

Supposons que en $x = 0$ on a n_o et en $x = L$ on a n_L alors

$$n = n_o - \frac{n_o - n_L}{L}x \implies \varphi = -D \frac{dn}{dx} = \frac{n_o - n_L}{L}DS$$

Représentation graphique :



8.4 MODÈLE MICROSCOPIQUE DE LA DIFFUSION DANS LE GAZ

Pour l'étude microscopique, on adopte le modèle des sphères dures. Dans ce modèle les molécules du gaz diffusé et celle du support sont des boules de rayons r_d et r_s . On suppose aussi que les molécules du support sont immobiles et réparties avec une densité uniforme n_s . Considérons une molécule du gaz diffusé, de barycentre A , arrivant dans la direction (Ox) sur une molécule du support de barycentre S . Il y aura choc si A est contenu dans le cylindre de centre S et de rayon $r_s + r_d$.



L'aire $\sigma = \pi(r_s + r_d)^2$ est appelée section efficace du choc. Le libre parcours moyen est la distance moyenne L^* entre 2 chocs successifs avec les molécules du support. A subit un choc si le cylindre de section σ et de longueur L^* contient une

molécule du gaz du support, soit

$$n_s L^* \sigma = 1 \implies L^* = \frac{1}{n_s \sigma}$$

Cinquième partie

ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE 1

ÉLECTROSTATIQUE DANS LE VIDE

On s'interesse aux propriétés physiques des charges immobiles dans un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen, placées dans le vide.

1.1 CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

1.1.1 Notions générales

- On classe les corps en deux catégories :
 - **Conducteurs** : présentent des électrons (de valence) libres qui peuvent se déplacer d'un atome à un autre.

Exemple

les métaux, les électrolytes, ...

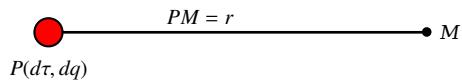
- **Isolants** : corps dépourvu d'électrons libres (les électrons de valence sont liés).

Exemple

le bois, le verre, le papier, le plastique ...

- L'électron est une particule «élémentaire» de charge $q = -e = -1.6 \times 10^{-19}$ coul
- Toute charge q est un multiple entier de la charge de l'électron : On dit que la charge est quantifiée $|q| = Ne$
- La charge est une grandeur extensive, ne dépend pas du référentiel, pour un système isolé, la charge est conservée.
- Une charge élémentaire dq occupant dans l'espace un volume élémentaire $d\tau$ sera considérée comme ponctuelle si les dimensions de $d\tau$

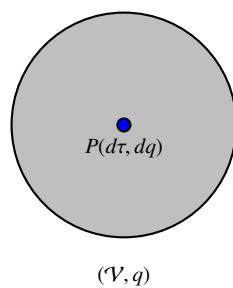
sont très négligeables devant une distance caractéristique du système, autrement dit le point P où se situe la charge dq est vu du point M situé à grande distance. ($(d\tau)^{1/3} \ll PM$)



$$dq \text{ ponctuelle} \implies \sqrt[3]{d\tau} \ll r$$

1.1.2 Répartition de charge

Soit q une charge occupant un volume (\mathcal{V}) :



Soit dq une charge élémentaire occupant le volume $d\tau$ centré en P

Définition

On appelle densité volumique de charge exprimé en ($C m^{-3}$) la grandeur

$$\rho(P) = \frac{dq(P)}{d\tau(P)} \implies q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(P) d\tau$$



Exemples

- Sphère de rayon R chargée uniformément en volume ($\rho = \text{cte}$)

$$dq = \rho d\tau \implies q = \frac{4}{3} \rho \pi R^3$$

- cylindre de rayon R et de hauteur h chargée uniformément en volume ($\rho = \text{cte}$)

$$dq = \rho d\tau \implies q = \rho \pi R^2 h$$

- Cube d'arrête a chargée uniformément en volume ($\rho = \text{cte}$)

$$dq = \rho d\tau \implies q = \rho a^3$$

Lorsque une dimension est très négligeable devant les deux autres, on définit la densité surfacique de charge (σ)

Définition

Densité surfacique de charge

On appelle densité surfacique de charge exprimé en (C m^{-2}) la grandeur

$$\sigma(P) = \frac{dq(P)}{dS(P)} \implies q = \iint_{\Sigma} \sigma(P) dS$$



Exemples

- Sphère de rayon R chargée uniformément en surface ($\sigma = \text{cte}$)

$$dq = \sigma dS \implies q = 4\pi\sigma R^2$$

- cylindre de rayon R et de hauteur h chargée uniformément en en surface latérale ($\sigma = \text{cte}$)

$$dq = \sigma dS \implies q = 2\sigma\pi Rh$$

- Disque de rayon R chargé uniformément

$$dq = \sigma dS \implies q = \sigma\pi R^2$$

Si deux dimensions sont négligeables devant la troisième alors on définit la densité linéique

Définition**Densité linéique de charge**

On appelle densité linéique de charge exprimé en ($C\ m^{-1}$) la grandeur

$$\lambda(P) = \frac{dq(P)}{d\ell(P)} \implies q = \int_{\Gamma} \lambda(P)d\ell \quad \text{⚠️}$$

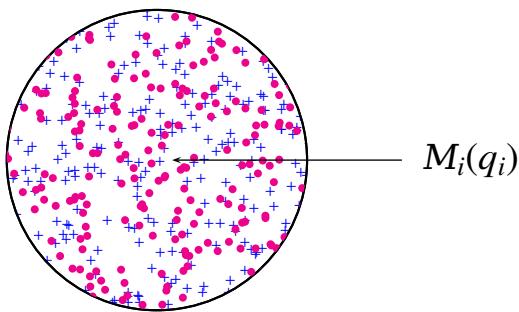
Exemple

- segment AB de longueur ℓ

$$dq = \lambda d\ell \implies q = \lambda \ell$$

Remarque

Pour une distribution discrète de charge différentes; Avec q_i la charge d'une espèce et N_i son nombre, occupant un volume \mathcal{V}



Soit q la charge totale du système, donc :

$$q = \sum_{i=1}^n q_i N_i \implies \rho = \frac{q}{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^n n_i^* q_i$$

Avec n^* la densité particulaire , qui représente le nombre de particules par unité de volume

$$n^* = \frac{N}{\mathcal{V}}$$

1.1.3 Complément mathématique

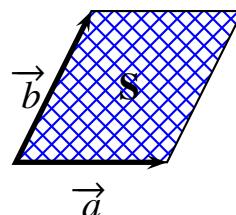
On rappelle que :

- Vecteur position et déplacement élémentaire :

	\vec{OM}	$d\vec{OM}$
Coordonnées cartésiennes	$x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$	$dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$
Coordonnées Cylindriques	$r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$	$r \vec{e}_r + rd\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$
Coordonnées sphériques	$r \vec{e}_r$	$dr \vec{e}_r + rd\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$

► Surface élémentaire :

Soit \vec{a} et \vec{b} deux vecteurs :



la surface S délimitée par le parallélogramme formé par \vec{a} et \vec{b} est

$$S = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$$

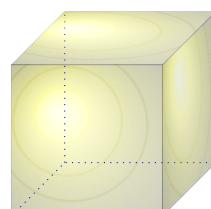
On oriente la surface S par un vecteur unitaire \vec{n} défini par

$$\vec{n} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$$

Il en résulte que

$$\vec{S} = S \vec{n} \implies \vec{S} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

- **Surface élémentaire en coordonnées cartésiennes :**

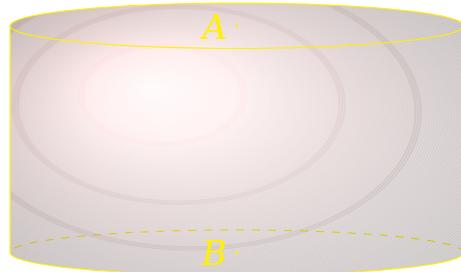


$$\begin{aligned} - d\vec{S}_z &= dx \vec{e}_x \wedge dy \vec{e}_y \implies d\vec{S}_z = dx dy \vec{e}_z \\ - d\vec{S}_y &= dz \vec{e}_z \wedge dx \vec{e}_x \implies d\vec{S}_y = dx dz \vec{e}_y \end{aligned}$$

- $d\vec{S}_x = dy \vec{e}_y \wedge dz \vec{e}_z \implies d\vec{S}_x = dydz \vec{e}_x$

- **Surface élémentaire en coordonnées cylindriques :**

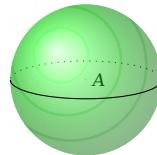
Le cylindre présente deux surfaces de bases (A et B) et une surface latérale



- Surface de base : $d\vec{S}_{base} = \pm r dr d\theta \vec{e}_z$

- Surface latérale : $d\vec{S}_L = rd\theta \vec{e}_\theta \wedge dz \vec{e}_z \implies d\vec{S}_L = rd\theta dz \vec{e}_r$

- **Surface élémentaire en coordonnées sphériques :**



Pour une sphère $r = cte$ donc

$$\vec{dS} = rd\theta \vec{e}_\theta \wedge r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi \implies \vec{dS} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$$

Remarque

Pour les surfaces fermées (en 3D : délimitant un volume) on oriente toujours la normale \vec{n} vers l'extérieur

► On rappelle que la surface :

- de base d'un cylindre de rayon R est $S_B = \pi R^2$
- latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est $S_L = 2\pi Rh$
- d'une sphère de rayon R est $S = 4\pi R^2$

► Volume élémentaire :

On rappelle que le volume délimité par trois vecteurs vaut

$$\mathcal{V} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- **volume élémentaire en coordonnées cartésiennes :**

$$d\tau = dx dy dz$$

- **volume élémentaire en coordonnées cylindriques :**

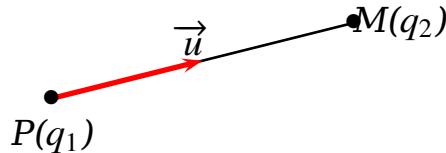
$$d\tau = r dr d\theta dz \implies V(\text{cylindre}) = \pi R^2 h$$

- **volume élémentaire en coordonnées sphériques :**

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \implies V(\text{sphère}) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

1.1.4 Loi de Coulomb

Soit deux charges **ponctuelles** placées dans le vide q_1 au point P et q_2 au point M distant de r .



Chacune des deux charges exerce sur l'autre une force électrostatique donnée par la **loi de Coulomb** :

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{PM^3} \vec{PM}$$

Si on pose

$$\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM} \quad \text{et} \quad r = \| \vec{PM} \|$$

alors la loi de Coulomb devient

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{PM^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$$

Avec :

- ϵ_0 : permittivité diélectrique du vide sa valeur est

$$\epsilon_0 = 8.854\ 187\ 817 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 (\text{S.I})$
- Si $q_1 q_2 > 0 \implies$ force repulsive.

- Si $q_1 q_2 < 0 \Rightarrow$ force attractive.

Remarques

► Dans un milieu linéaire homogène et isotrope la loi de Coulomb reste valable à condition de remplacer ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, ϵ_r est dite permittivité diélectrique relative.

► Analogie entre les interactions coulombienne et gravitationnelle :

<i>interactions coulombienne</i>	<i>interactions gravitationnelle</i>
Répulsive/attractive	attractive
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$	$-G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}$
q	m
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$

► Comparaison entre les forces gravitationnelle et électrostatique dans l'atome d'hydrogène :

On donne : $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$; $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$; $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

$$\frac{F_e}{F_g} \simeq 4.10^{42}$$

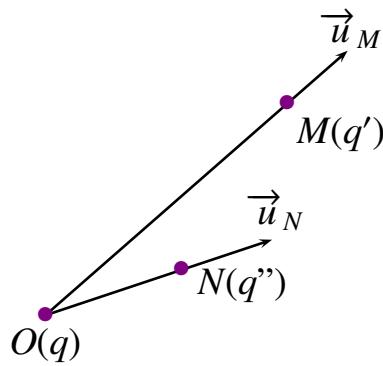
On retient que la force gravitationnelle est très négligeable devant la force électrostatique.

1.1.5 Le Champ électrostatique

1.1.5.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Soit une charge q placée en O et M un point quelconque de l'espace différent de O .

Plaçons une charge q' en M



La loi de Coulomb s'écrit :

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r_M^2} \vec{u}_M = q' \vec{E}(M)$$

de même entre q et q'' la loi de Coulomb

$$\vec{F}_{O \rightarrow N} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq''}{r_N^2} \vec{u}_N = q'' \vec{E}(N)$$

\vec{E} est appelé le champ électrostatique créé par la charge ponctuelle q placé au point O au point considéré

Définition

Champ électrostatique

On appelle champ électrostatique une région de l'espace où une particule chargée est soumise à la force de Coulomb

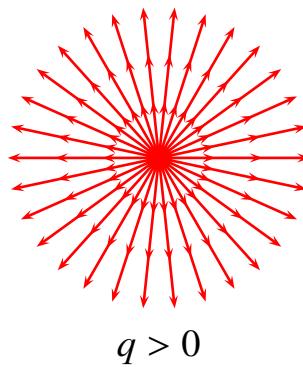
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{OM^3} \vec{OM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

Et Par Suite Si Une Charge Q est placée en M , elle subit la force \vec{F} telle que

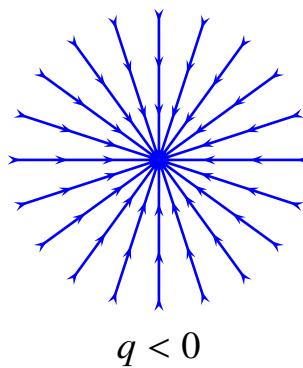
$$\vec{F} = Q \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r$$

Remarques

- Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par une charge ponctuelle n'est pas défini à l'origine c'est à dire pour $r = 0$
- Le sens du champ $\vec{E}(M)$ dépend du signe de la charge q source de \vec{E} :
- Pour $q > 0$, \vec{E} présente le sens de \vec{e}_r : $\vec{E}(M)$ est un champ divergent.



- Pour $q < 0$, \vec{E} présente le sens opposé de \vec{e}_r : $\vec{E}(M)$ est un champ convergent.



1.1.5.2 Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Soit une distribution de charges ponctuelle q_i placées aux points O_i , et q une charge ponctuelle placé au point M

La loi de Coulomb entre la charge q_i placé en O_i et q placé en M s'écrit :

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q}{r_i^2} \vec{u}_i = q \vec{E}_i(M)$$

La résultante des forces appliquées sur la charge q vaut

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \implies \vec{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

Si on pose $\vec{F} = q \vec{E}(M)$ alors le champ résultant est

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i(M) \implies \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

On dit que le champ résultant $\vec{E}(M)$ vérifie le principe de superposition .

Activités

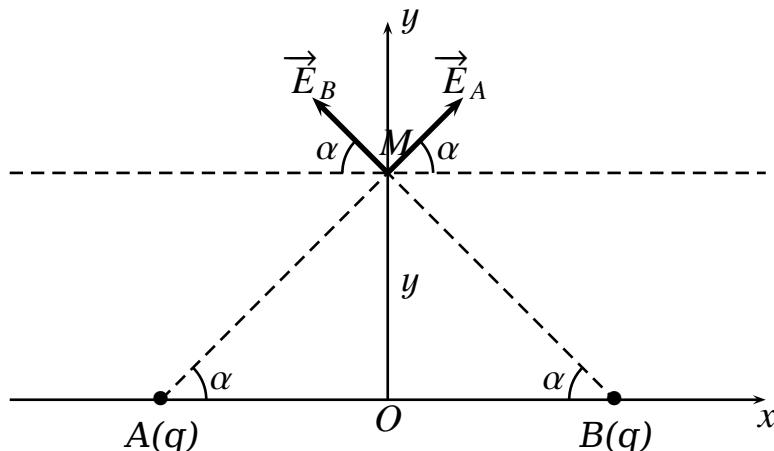
Champ d'un doublet

Déterminer le champ électrostatique créé par un doublet(q_A, q_B) placé en $A(-a, 0, 0)$ et $B(a, 0, 0)$ au point $M(0, y, 0)$ dans les deux cas suivants :

1. $q_A = q_B = q > 0$
2. $q_A = -q_B = q > 0$
3. Conclure

Correction

1. Champ créé par le doublet (q, q)



On a : $\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$ ainsi :

$$\vec{E}_A \begin{vmatrix} E_A \cos \alpha \\ E_A \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{E}_B \begin{vmatrix} -E_B \cos \alpha \\ E_B \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix} \implies \vec{E} \begin{vmatrix} 0 \\ (E_B + E_A) \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

Comme (ABM) triangle isocèle alors $AM = BM = \sqrt{a^2 + y^2}$ ce qui donne

$$E_A = E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qy}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

Par conséquent

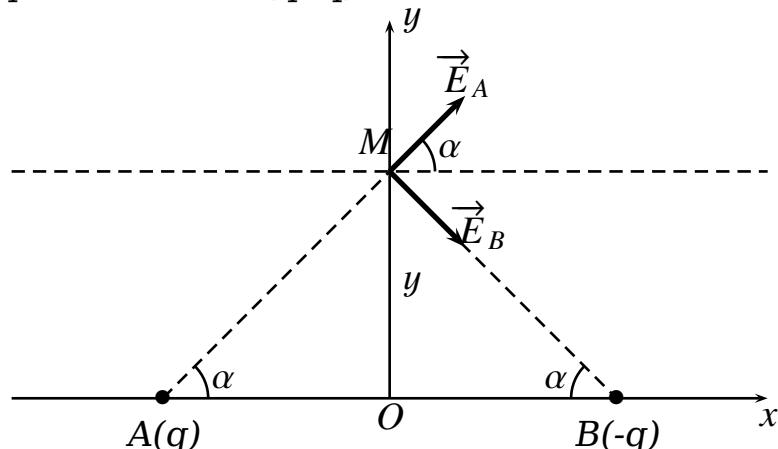
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \vec{e}_y$$

Remarque \vec{E} et les plans de symétrie*Soit le système formé par la distribution de charge et le point M*

- *Le plan (xoy) est un plan de symétrie passant par le point M.*
- *Le plan (xoz) est un plan de symétrie passant par le point M.*

Il en résulte que le champ électrostatique appartient à l'intersection des plans de symétrie 

$$\vec{E}(M) \in \cap \Pi_s$$

2. Champ créé par le doublet ($q, -q$)

On a : $\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$ ainsi :

$$\vec{E}_A \begin{vmatrix} E_A \cos \alpha \\ E_A \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{E}_B \begin{vmatrix} E_B \cos \alpha \\ -E_B \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix} \implies \vec{E} \begin{vmatrix} (E_B + E_A) \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Comme (ABM) triangle isocèle alors $AM = BM = \sqrt{a^2 + y^2}$ ce qui donne

$$E_A = E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

Par conséquent

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \vec{e}_x}$$

Remarque \vec{E} et les plans de symétrie

Soit le système formé par la distribution de charge et le point M

- Le plan (xoy) est un plan de symétrie passant par le point M .
- Le plan (xoz) est un plan d'anti-symétrie passant par le point M .

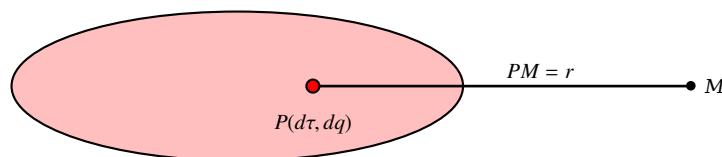
Il en résulte que le champ électrostatique appartient à l'intersection des plans de symétrie perpendiculaire au plan d'antisymétrie

$$\vec{E}(M) \in \cap \Pi_s \quad \vec{E}(M) \perp \Pi_A \quad \text{⚠}$$

- Si M est un centre de symétrie alors $\vec{E}(M) = \vec{0}$

1.1.5.3 Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

Pour une distribution continue de charge, on subdivise le volume \mathcal{V} en des volumes élémentaires $d\tau$ centré en P , portant la charge élémentaire dq avec $\sqrt[3]{d\tau} \gg PM$ et par conséquent la charge dq sera considérée comme ponctuelle.



Le champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}$ créé par la charge élémentaire dq (ponctuelle) placé en P au point M est

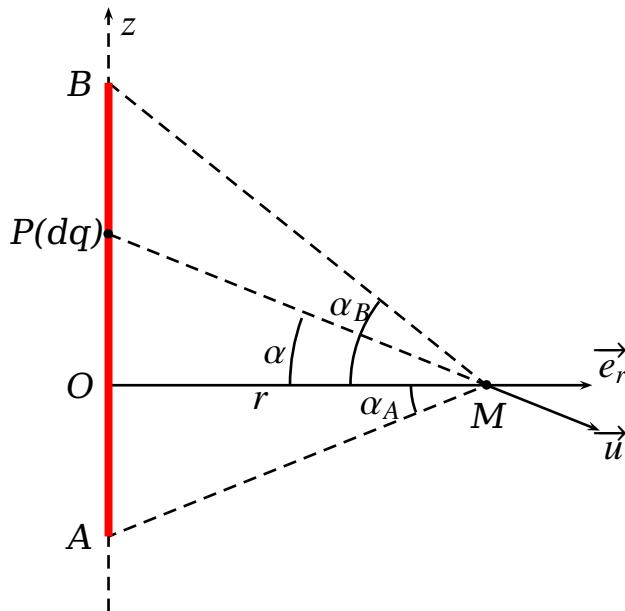
$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PM^2} \vec{u} \implies \vec{E}(M) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PM^2} \vec{u} \quad \text{⚠}$$

Avec

$$dq = \rho d\tau = \sigma dS = \lambda d\ell \quad \text{⚠}$$

Activité

7- Champ électrostatique créé par un segment AB chargé uniformément ($\lambda > 0$) en un point M distant de r (voir figure suivante)



Puisque on a invariance par rotation autour de l'axe Oz alors on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z)

Symétrie et invariances :

- Le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_z) = \Pi_s \Rightarrow \vec{E}_\theta = \vec{0}$
- Le système $\{AB, M\}$ est invariant par rotation autour de l'axe Oz , donc $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de θ .

Par conséquent

$$\vec{E}(M) = E_r(r, z) \vec{e}_r + E_z(r, z) \vec{e}_z$$

Au point P on a la charge $dq = \lambda d\ell \Rightarrow dq = \lambda dz$ crée au point M un champ élémentaire $d\vec{E}$ donnée par :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PM^2} \vec{u} \Rightarrow d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{PM^2} \vec{u}$$

Or :

- $\vec{u} = \cos \alpha \vec{e}_r - \sin \alpha \vec{e}_z$
- $\tan \alpha = \frac{z}{r} \Rightarrow dz = r \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$
- $PM = \frac{r}{\cos \alpha}$

N.B : On a choisi α comme variable d'intégration (très utile en physique de choisir des angles comme variables d'intégration) et remarquons que $r = cte$ lorsque le point P décrit la distribution AB.

Ce qui donne

$$d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\cos \alpha d\alpha \vec{e}_r - \sin \alpha d\alpha \vec{e}_z] \implies \begin{cases} dE_r = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha d\alpha \\ dE_z = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \sin \alpha d\alpha \end{cases}$$

Par intégration on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} E_r = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin \alpha_B - \sin \alpha_A) \\ E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \alpha_B - \cos \alpha_A) \end{array} \right\} \implies \vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} ((\sin \alpha_B - \sin \alpha_A) \vec{e}_r + (\cos \alpha_B - \cos \alpha_A) \vec{e}_z)$$

Remarques

1/ Si O est le milieu du segment [AB] alors le plan ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) = $\Pi_s \implies E_z = 0$ qu'on peut retrouver par

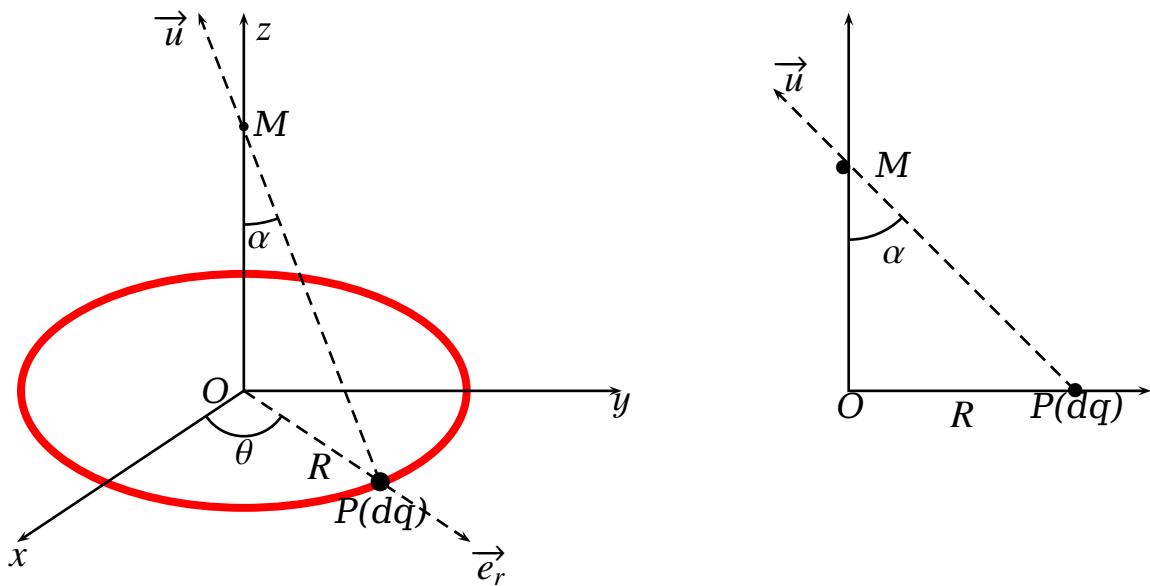
$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \alpha_B - \cos \alpha_A) \xrightarrow{\alpha_A = \alpha_B} E_z = 0$$

2/ Lorsque les angles $\alpha_A \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et $\alpha_B \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, le segment [AB] tend vers un fil infini et par conséquent.

$$\vec{E}(M)_{fil\;infini} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$



8-Champ électrostatique créé par une distribution circulaire (spire circulaire) chargée uniformément ($\lambda > 0$) en un point M de son axe d'angle au sommet α (voir figure suivante) :



Puisque on a invariance par rotation autour de l'axe Oz alors on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z)

Symétrie et invariances :

-

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{e}_x, \vec{e}_z) = \Pi_s \\ (\vec{e}_y, \vec{e}_z) = \Pi_s \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_z$$

Ou bien tout plan diamétral (contenant le diamètre) est un plan de symétrie donc $\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_z$

- M situé sur Oz donc $r = 0$
- Invariance par rotation autour de Oz donc

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$$

On a : $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PM^2} \vec{u}$ et comme $dq = \lambda R d\theta$

Puisque \vec{E} est porté par \vec{e}_z alors on projette suivant \vec{e}_z ce qui donne

$$dE = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \cos \alpha$$

Lorsque le point P décrit la distribution, seule l'angle θ varie de $0 \rightarrow 2\pi$ donc après intégration on obtient

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda R d\theta}{2\epsilon_0 PM^2} \cos \alpha \vec{e}_z$$

Puisque $\cos \alpha = \frac{z}{PM}$ et $PM = \sqrt{z^2 + R^2}$ alors

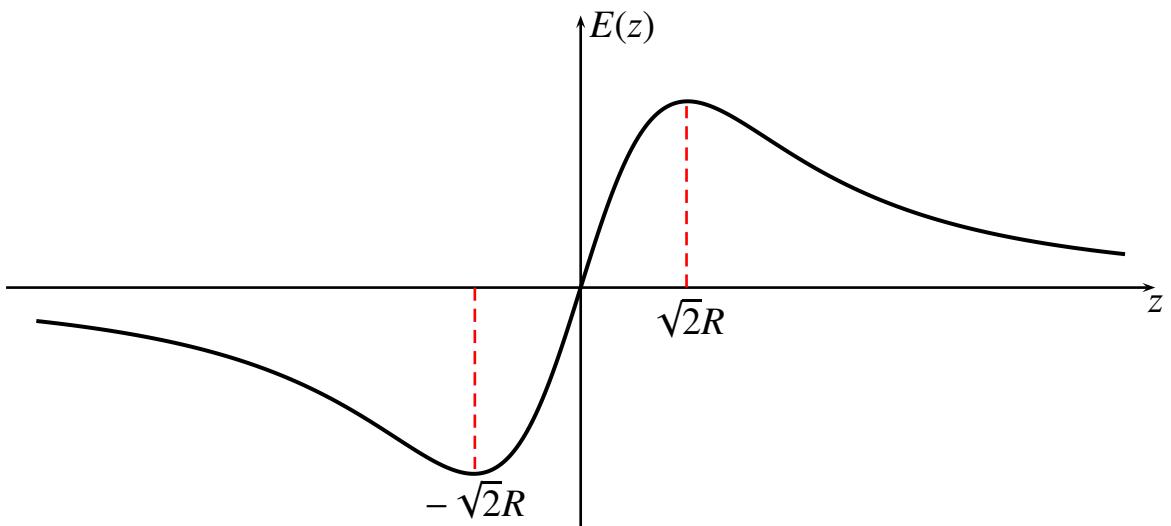
$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

Représentons $E(z)$:

- $E(z)$ est une fonction impaire.

- $\lim_{z \rightarrow +\infty} E(z) = 0$

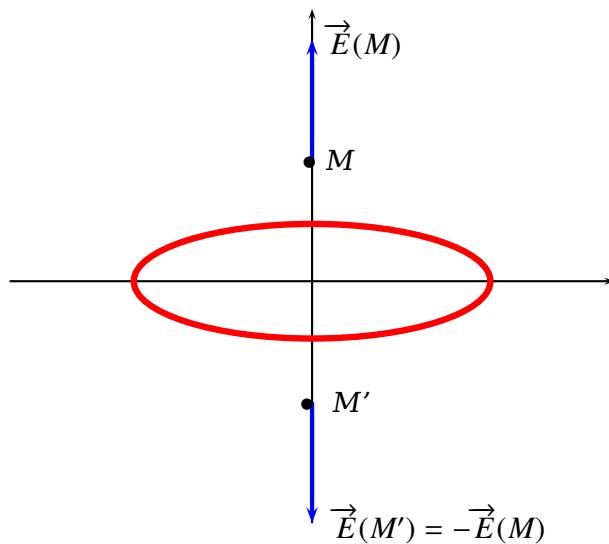
- $E(z)$ présente un extremum pour $\frac{dE(z)}{dz} = 0 \implies z = \pm \sqrt{2}R$



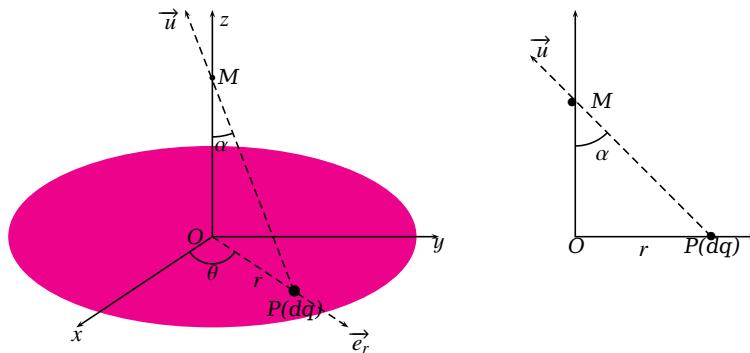
Remarque

Pour la distribution (\mathcal{D}) de charges seule (et non pour le système {charge+M} le plan xOy est un plan de symétrie ($xOy = \Pi_s$ (distribution seule)) et par conséquent pour le point M' symétrie de M on a :

$$\vec{E}(M') = -\vec{E}(M) \quad \text{si} \quad \vec{E}(M) \perp \Pi_s(\mathcal{D})$$



9- Champ électrostatique créé par un disque chargé uniformément en surface ($\sigma > 0$) en un point M de son axe (voir figure suivante)



Puisque on a invariance par rotation autour de l'axe Oz alors on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z)

Symétrie et invariances :

-

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{e}_x, \vec{e}_z) = \Pi_s \\ (\vec{e}_y, \vec{e}_z) = \Pi_s \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_z$$

Ou bien tout plan diamétral (contenant le diamètre) est un plan de symétrie donc $\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_z$

- M situé sur Oz donc $r = 0$
- Invariance par rotation autour de Oz donc

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$$

On a : $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PM^2} \vec{u}$ et comme $dq = \sigma dS \Rightarrow dq = \sigma r dr d\theta$

Puisque \vec{E} est porté par \vec{e}_z alors on projette suivant \vec{e}_z ce qui donne

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{PM^2} \cos \alpha$$

Lorsque le point P décrit le disque on a $z = cte$ donc on exprime r et PM en fonction de z et α choisit comme variable d'intégration :

$$- PM = \frac{z}{\cos \alpha}$$

$$- r = z \tan \alpha \Rightarrow dr = z \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Donc $dE = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha d\theta$ et par intégration on obtient

$$\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_m) \vec{e}_z$$

Remarques

- Soit $M'(z < 0)$ la symétrie de M ($z > 0$) par rapport au plan du disque (qui représente un plan de symétrie pour la distribution)

$$\vec{E}(M') = -\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_m) \vec{e}_z$$

- Pour un plan infini chargé en surface $\alpha_m \rightarrow \frac{\pi}{2}$ l'expression du champ est

$$\vec{E}_{plan\,infini} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

+ si $z > 0$ et - si $z < 0$.

- On pose :

- $\vec{E}(O^+) = \lim_{M \rightarrow O^+} \vec{E}(M) \Rightarrow \vec{E}(O^+) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$

- $\vec{E}(O^-) = \lim_{M \rightarrow O^-} \vec{E}(M) \Rightarrow \vec{E}(O^-) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$

Il en résulte que

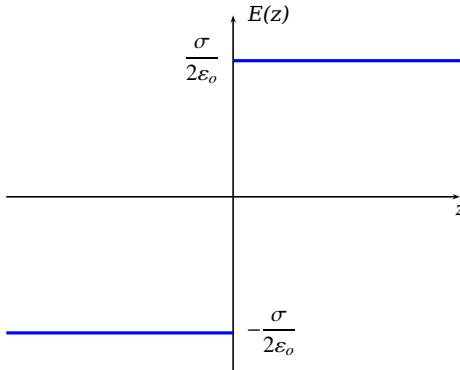
$$\vec{E}(O^+) - \vec{E}(O^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Si on pose $\vec{e}_z = \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{n}$ la normale au plan chargé dirigé du milieu (1)($z > 0$) vers le milieu (2)($z > 0$)

$$\vec{E}(O^+) - \vec{E}(O^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

C'est la relation de passage

Représentation graphique du champ $E(z)$ créé par un plan infini :

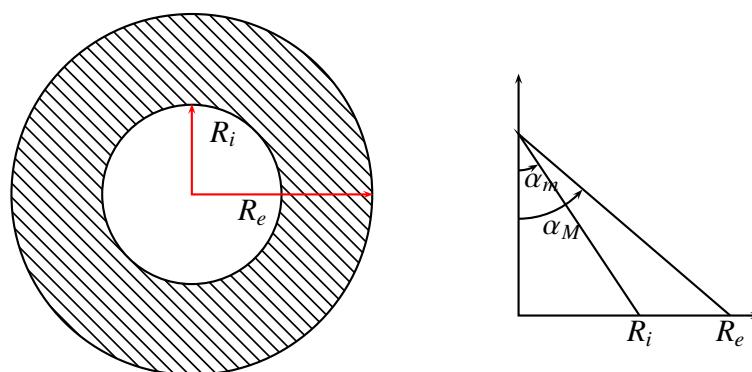


Propriété

A la traversée d'une surface chargée le champ subit une discontinuité de $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Relation de passage

10-Champ électrostatique créé par une couronne de rayon interne R_i et de rayon externe R_e



Première méthode :

On utilise le résultat précédent du disque et on change les bornes d'intégration

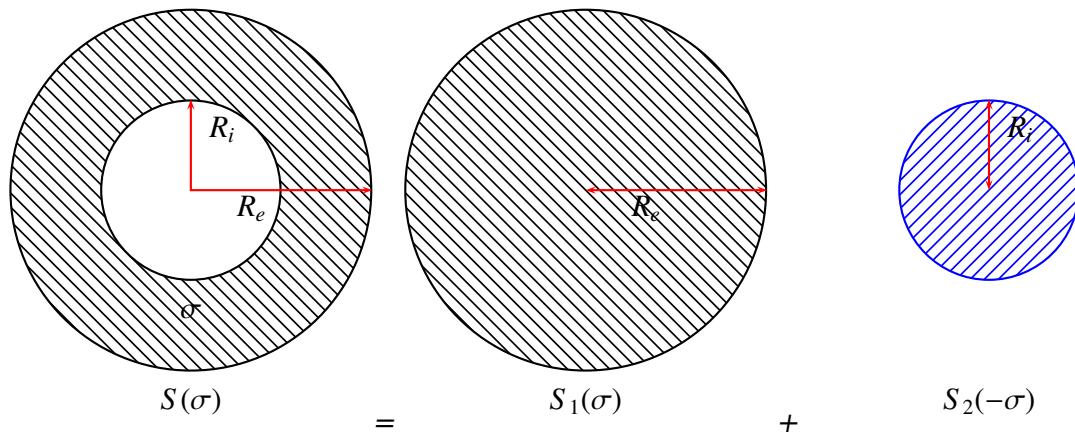
$$dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha d\theta \implies E_z = \int_{\alpha=\alpha_m}^{\alpha_M} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha d\theta$$

Ce qui donne

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\cos \alpha_m - \cos \alpha_M] \vec{e}_z$$

Deuxième méthode :

On peut remarquer que la distribution est équivalente à



Puisque $S = S_1(\sigma) + S_2(-\sigma)$ alors $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$

Avec :

- $\vec{E}_1(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [1 - \cos \alpha_M] \vec{e}_z$
- $\vec{E}_2(M) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} [1 - \cos \alpha_m] \vec{e}_z$

Donc

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\cos \alpha_m - \cos \alpha_M] \vec{e}_z$$

On retrouve le résultat.

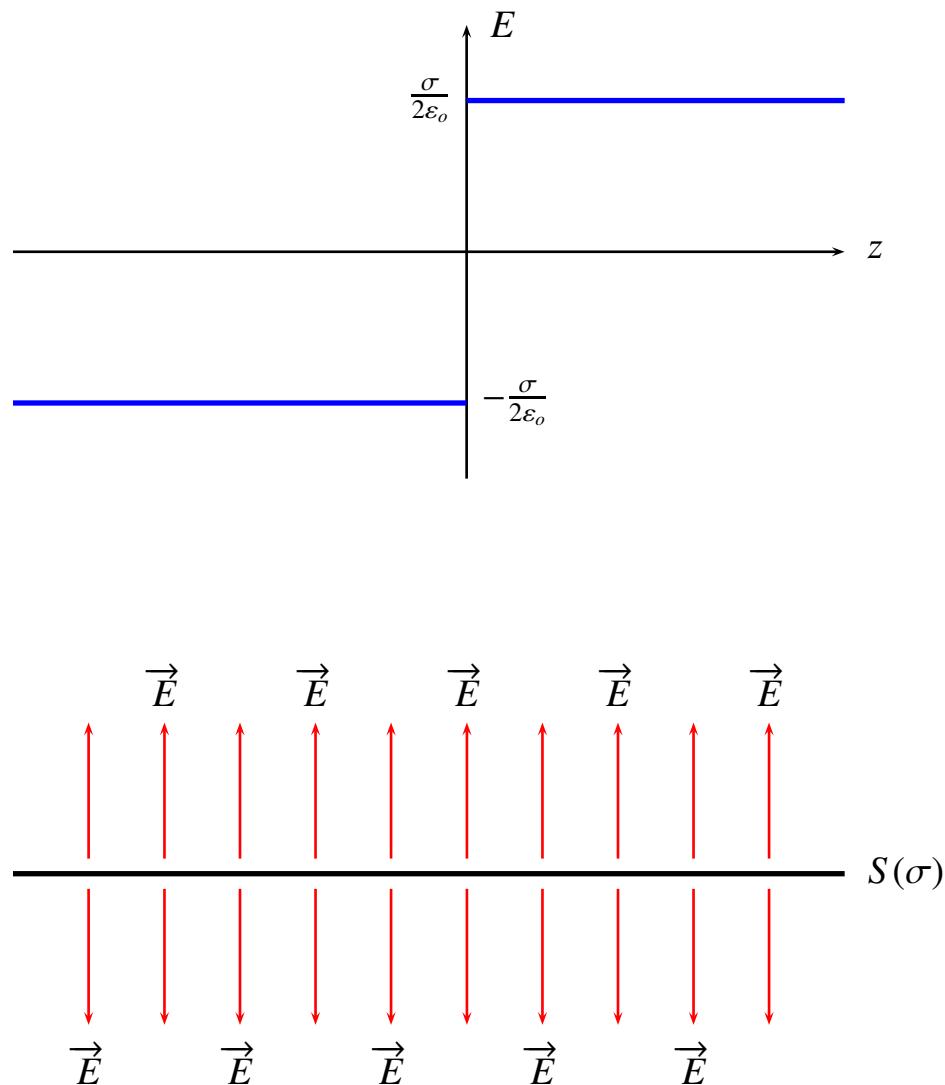
11- Champ électrostatique créé par un plan infini

On peut remarquer que le plan est un disque de rayon infini $R \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ce qui donne

$$\vec{E}(M)_{planinfinito} = signe(z) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$



C'est un champ uniforme perpendiculaire à la distribution Représentations graphiques :

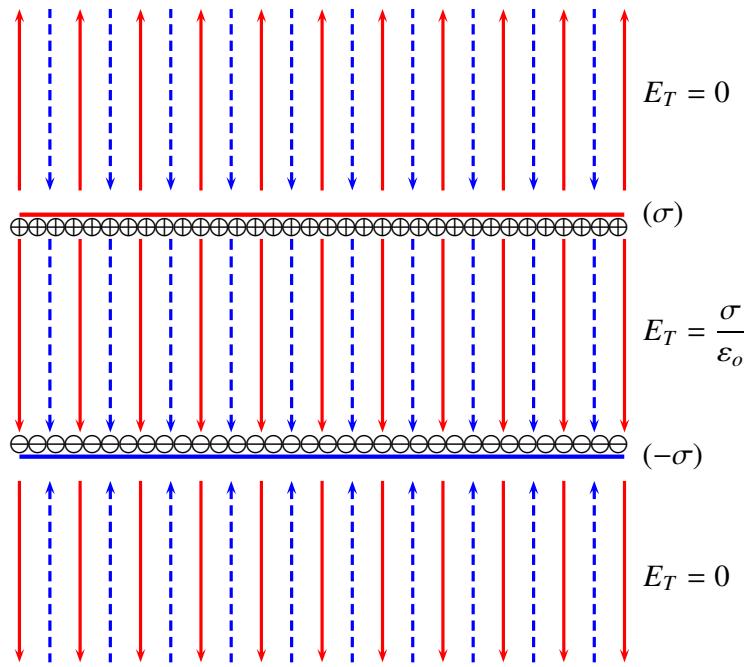


Remarques

1. A la traversée de la surface chargée, on retrouve la relation de passage :

$$\vec{E}(O^+) - \vec{E}(O^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

2. Pour deux plans infinis de charge surfaciques opposées on a :

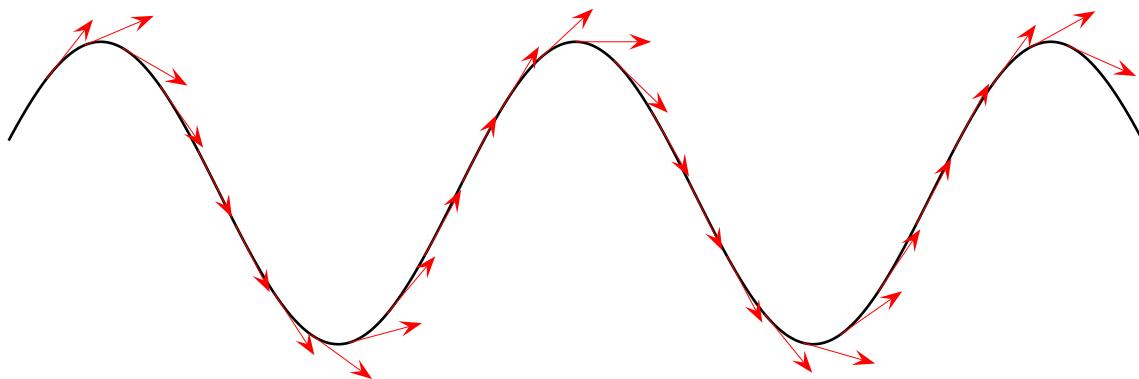


1.1.6 Lignes de champ

Définition

LDC

On appelle ligne de champ d'un champ de vecteur \vec{X} quelconque, une courbe (C) définie dans l'espace tel que en chacun de ses points le vecteur \vec{X} y tangent.



Le vecteur \vec{X} tangent à la courbe (C) donc

$$\vec{X} \wedge \overrightarrow{dOM} = \vec{0}$$

C'est l'équation différentielle des LDC

En électrostatique $\vec{X} = \vec{E}$ Ce qui donne :

- En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} \wedge \overrightarrow{dOM} = \vec{0} \implies \begin{vmatrix} E_x & dx \\ E_y & dy \\ E_z & dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_y dz - E_z dy \\ E_z dx - E_x dz \\ E_x dy - E_y dx \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$(1) \implies \frac{E_y}{dy} = \frac{E_z}{dz} \text{ de même } (2) \implies \frac{E_z}{dz} = \frac{E_x}{dx}$$

Il en résulte que

$$\vec{E} \wedge \overrightarrow{dOM} = \vec{0} \implies \frac{E_y}{dy} = \frac{E_z}{dz} = \frac{E_x}{dx}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\vec{E} \wedge \overrightarrow{dOM} = \vec{0} \implies \frac{E_r}{dr} = \frac{E_\theta}{rd\theta} = \frac{E_z}{dz}$$

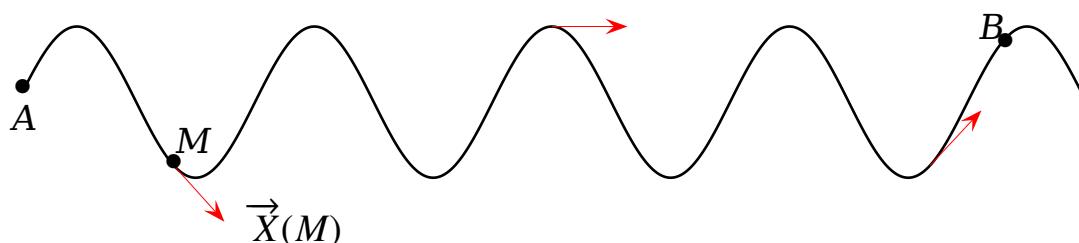
- En coordonnées sphériques :

$$\vec{E} \wedge \overrightarrow{dOM} = \vec{0} \implies \frac{E_r}{dr} = \frac{E_\theta}{rd\theta} = \frac{E_\varphi}{r \sin \theta d\varphi}$$

1.2 LE POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

1.2.1 Définitions

Soit (C) une LDC (d'origine A) du vecteur \vec{X}



Définition

On appelle circulation élémentaire du vecteur \vec{X} la grandeur

$$dC = \vec{X} \cdot d\vec{OM}$$

Donc la circulation entre deux points A et B on a :

$$C_A^B = \int_A^B \vec{X} \cdot d\vec{OM}$$

et sur un courbe fermée dite contour

$$C_\varnothing = \oint \vec{X} \cdot d\vec{OM} = 0$$

1.2.2 Cas d'une charge ponctuelle

Soit q une charge ponctuelle placée en O et M un point quelconque de l'espace différent de O :

On a : $dC = \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM}$ or $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$ et $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + rd\theta \vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$

Donc

$$dC = \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} \implies dC = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

Remarquons que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = -d\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + cte\right)$$

On pose pour la suite

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + cte$$



$V(M)$ est appelé le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

Remarques

1. Le potentiel électrostatique (**grandeur scalaire**) est toujours défini à une constante additive près.
2. Dans le cas d'une charge ponctuelle (**distribution finie dans l'espace**) on prend comme référence l'infini c'est à dire

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0 \implies \text{cte} = 0$$

Il en résulte que

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

3. On retient donc :

$$dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dOM} = -dC$$



1.2.3 Relation locale entre le potentiel et le champ

1.2.3.1 L'opérateur gradient

Soit une fonction scalaire $f(x, y, z)$.

On appelle **grad** l'opérateur qui transforme la fonction scalaire f en vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$



Exemple

Le gradient d'une fonction

Déterminer le gradient des fonctions suivantes :

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
2. $g(x, y, z) = \sin(ax + by + cz)$

1/ Sachant que :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \end{array} \right| \implies \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = 2(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)$$

2/ On a :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x} = a \cos(ax + by + cz) \\ \frac{\partial g}{\partial y} = b \cos(ax + by + cz) \\ \frac{\partial g}{\partial z} = c \cos(ax + by + cz) \end{array} \right| \implies \overrightarrow{\text{grad}} g(x, y, z) = \cos(ax + by + cz)(a \vec{e}_x + b \vec{e}_y + c \vec{e}_z)$$

On rappelle que :

- $\overrightarrow{dOM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$
- $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
- $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

Et par conséquent pour toute fonction scalaire f on a :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dOM}$$

N.B : $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est orienté toujours dans le sens croissant de f

1.2.3.2 L'expression du gradient

1/ Coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

2/ Coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

3/ Coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \overrightarrow{e_\varphi}$$

Propriété

Propriétés du gradient

L'opérateur gradient est un opérateur linéaire et par conséquent :

- $\overrightarrow{\text{grad}} (\lambda f) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} f$
- $\overrightarrow{\text{grad}} (f + g) = \overrightarrow{\text{grad}} f + \overrightarrow{\text{grad}} g$

1.2.3.3 Relation entre le champ et le potentiel

Puisque $dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM}$ et $dV = \overrightarrow{\text{grad}} V(M) \cdot d\vec{OM}$ alors :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$



C'est l'équation locale entre $\vec{E}(M)$ et $V(M)$ valable en régime stationnaire

N.B : $\vec{E}(M)$ s'oriente toujours dans le sens des potentiels décroissant.

1.2.3.4 Surfaces équipotentielles

On appelle surface équipotentielle (SEP) l'ensemble des point M de l'espace tel que le potentiel est constant.

$$M \in SEP \implies V(M) = V_o = cte$$

Conséquence : $V(M) = cte \implies dV = 0$ donc $\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = 0$ par conséquent $\vec{E}(M) \perp d\vec{OM}$

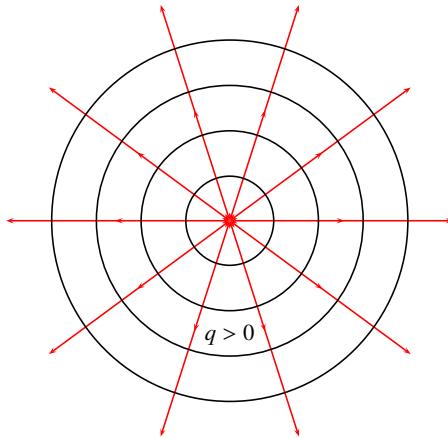
Propriété

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotielles

Exemple

Pour une charge ponctuelle

- $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \implies$ LDC sont des droites passant par O.
- $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = cte \implies r = Cte \text{ SEP sont des sphères concentriques :}$



1.2.4 Potentiel crée par une distribution de charges

- Pour une distribution discrète de charge :

Soit un ensemble de charges ponctuelles $q_1, \dots, q_i, \dots, q_N$, chaque charge est placée au point P_i .

Le champ créé par cette distribution au point M vaut d'après le principe de superposition

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$$

et puisque l'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$ est linéaire alors

$$V(M) = \sum_{i=1}^N V_i(M) \implies V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M}$$

- Pour une distribution continue de charge :

On subdivise la distribution en des charges élémentaire dq occupant le volume élémentaire $d\tau$ tel que $\sqrt[3]{d\tau} \ll PM$, donc la charge dq se comporte comme ponctuelle et par conséquent

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PM} \implies V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{dq}{PM}$$

Avec $dq = \rho d\tau = \sigma dS = \lambda d\ell$

1.3 ÉNERGIE POTENTIELLE D'INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE

1.3.1 Énergie potentielle d'une charge placée dans un champs électrostatique

Le travail de la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ s'écrit : $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dOM}$ et par conséquent $\delta W = -q\vec{\text{grad}} V \cdot \vec{dOM} \implies \delta W = -d(qV)$ Donc

$$dE_p = d(qV) \implies E_p = qV + cte$$

Définition

L'énergie potentielle électrostatique d'une charge q placée dans un champ \vec{E} créé par une distribution créant le potentiel V s'exprime par

$$E_p = qV + cte \implies W_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B)$$

1.3.2 Énergie potentielle d'interaction entre deux charges ponctuelles

L'énergie potentielle d'interaction entre deux charges ponctuelles q_1, q_2 placées en M_1 et M_2 distant de $M_1M_2 = r$ s'exprime par

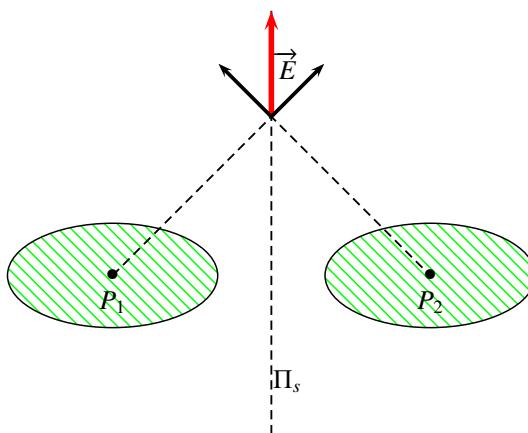
$$E_p = q_2 V_1 + cte \implies E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} + cte$$

1.4 SYMÉTRIE ET INVARIANCE

1.4.1 Symétrie

Rappelons que :

- Plan de symétrie $\Pi_s(M)$: c'est un plan miroir c'est à dire pour deux points P_1 et P_2 symétrique par rapport au plan Π_s on a : $q(P_1) = q(P_2)$



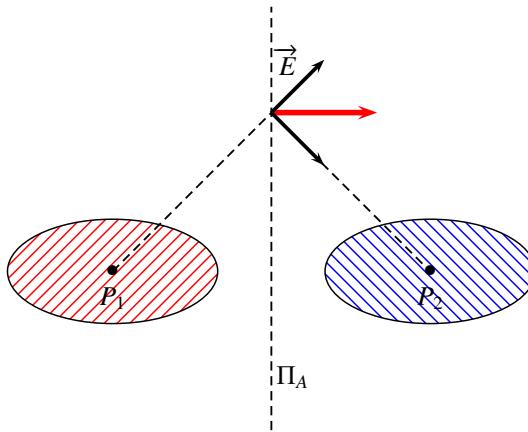
Conclusion:

Le champ électrostatique appartient à l'intersection des plans de symétries

$$\vec{E}(M) \in \cap \Pi_s(M)$$



- ▶ Plan d'antisymétrie $\Pi_A(M)$: c'est un plan miroir c'est à dire pour deux points P_1 et P_2 symétrique par rapport au plan $\Pi_A(M)$ on a : $q(P_1) = -q(P_2)$



Conclusion:

Le champ électrostatique perpendiculaire au plan d'antisymétrie

$$\vec{E}(M) \perp \Pi_A(M)$$



1.4.2 Invariance

► Invariance par translation:

Une distribution de charge est invariante par translation le long de l'axe

Oz si $\rho(x, y, z) = \rho(x, y, z + \Delta z)$ (c'est à dire une translation le long de Oz laisse le système invariant) et par conséquent le champ \vec{E} ne dépend pas de la variable z .

N.B : On a une invariance par translation si la direction est infinie

► **Invariance par rotation:**

On dit qu'on a invariance par rotation autour de l'axe Δ si la distribution de charge reste invariante par rotation autour de Δ .

Si θ est l'angle de rotation alors \vec{E} ne dépend pas de θ .

1.5 THÉORÈME DE GAUSS

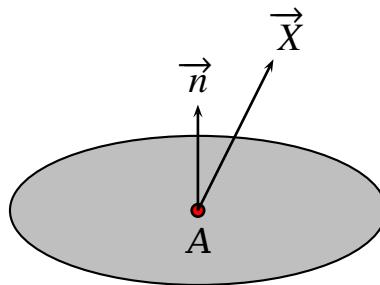
1.5.1 Flux du champ électrostatique

Soit S une surface et A un point de S

On pose

$$\vec{dS}(A) = dS \vec{n}$$

avec \vec{n} un vecteur unitaire à la surface S au point A



Soit \vec{X} un vecteur défini au point A ; on définit le flux élémentaire $d\Phi$ au point A par

$$d\Phi = \vec{X}(A) \cdot \vec{dS} = \vec{X}(A) dS \vec{n} \implies \Phi = \iint_S \vec{X}(A) \cdot \vec{dS}$$

Le flux Φ représente le nombre de vecteur \vec{X} qui traverse la surface S .

Remarque

On oriente une surface fermée qui délimite un volume (en 3D) par la normale dirigeant toujours vers l'extérieur

1.5.2 Énoncé du théorème de Gauss

Théorème

THÉORÈME DE GAUSS

Dans le vide, le flux du champ électrostatique d'une distribution de charges à travers une surface fermée Σ est égal à la charge intérieure divisé par ε_0

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$



Notation

Le théorème de Gauss constitue un outil de calcul rapide du champs électrostatique d'une distribution possédant une symétrie élevée.

Pour utiliser le théorème de Gauss, on suit les étapes suivantes :

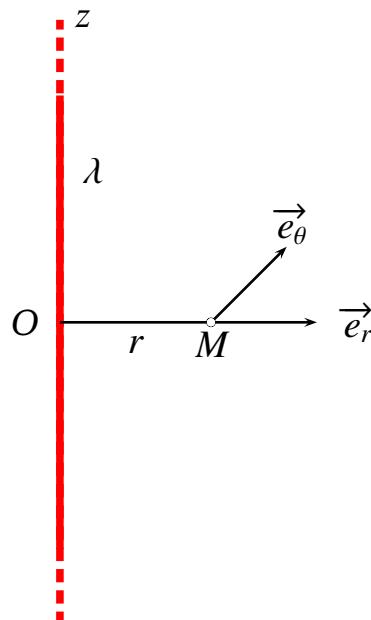
- Symétrie et invariance afin de déterminer la direction et la variable dont dépend le champs \vec{E}
- Choix de la surface de Gauss Σ
- Application du théorème de Gauss

1.6 APPLICATIONS

1.6.1 Fil infini chargé uniformément

Soit un fil infini (confondu avec l'axe Oz) chargé uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$.

*On détermine le champ \vec{E} et le potentiel V en tout point M de l'espace.
En coordonnées cylindriques on a :*



► **Symétrie :**

- Le plan ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) est un plan de symétrie (Π_s) passant par le point M donc $\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_z = 0$ puisque $\vec{e}_z \perp \Pi_s$
- Le plan (\vec{e}_r, \vec{e}_z) est un plan de symétrie (Π_s) passant par le point M donc $\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_\theta = 0$ puisque $\vec{e}_\theta \perp \Pi_s$

Donc

$$\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_z$$

► **Invariances :**

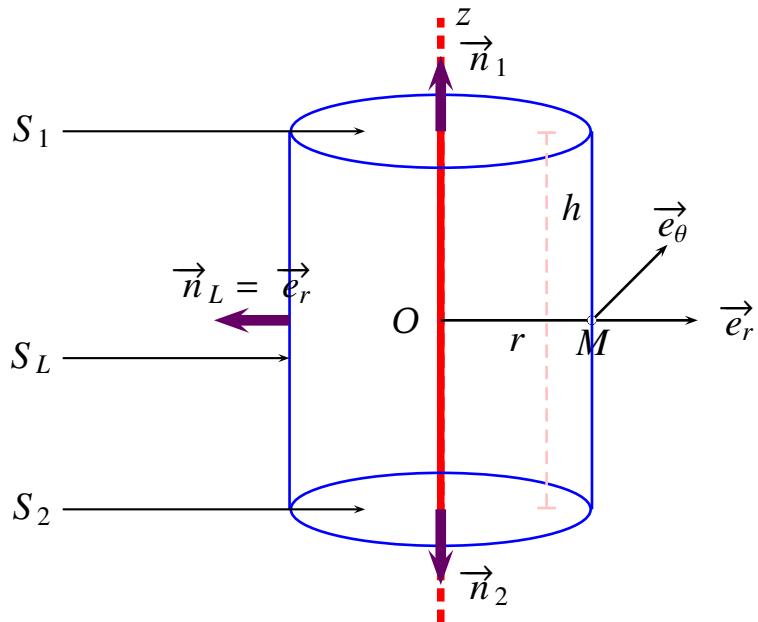
- le fil est infini donc on a invariance par translation le long de l'axe Oz donc $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de la variable z
- On a invariance par rotation autour de l'axe Oz donc $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de la variable θ

Conséquence

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r}$$

► **Choix de la surface de Gauss :**

Puisque le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend que de la variable r et afin de faire sortir le $E(r)$ de l'intégrale il faut que $E(r) = cte \implies r = Cte$ et puisque $r = Cte$ donne une surface en coordonnées cylindriques alors la surface de gauss est un cylindre d'axe Oz et de rayon r (passant par M)



La surface de Gauss $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_L$

Théorème de Gauss :

$$\text{On a } \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_L \implies \Phi = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}}_{=0 (\vec{E}(M) \perp \vec{n}_1)} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}}_{=0 (\vec{E}(M) \perp \vec{n}_2)} + \iint_{S_L} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

Donc

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = E(M) 2\pi r h$$

La charge intérieure

$$\mathbf{Q}_{int} = \int_0^h \lambda dz \implies \mathbf{Q}_{int} = \lambda h$$

Il en résulte que

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

Remarque

Le champ électrostatique d'une distribution linéaire n'est pas défini sur le fil c'est à dire en $r = 0$

L'expression du potentiel $V(M)$:

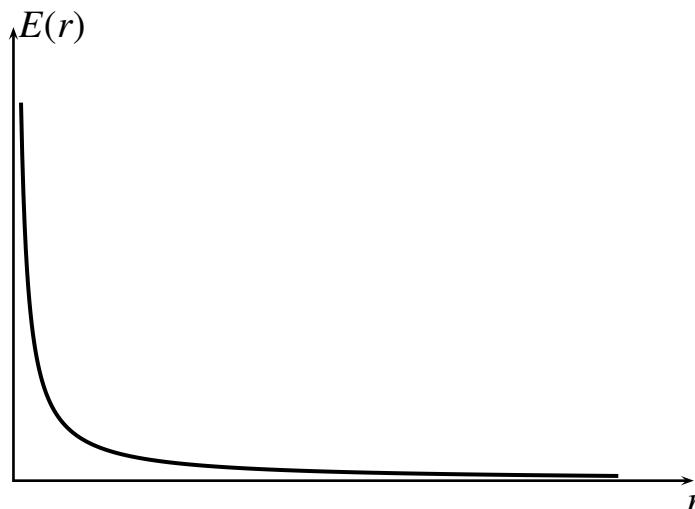
On a : $dV = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} \implies dV(M) = -E(M) \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + rd\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z)$ ce qui donne :

$$dV(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr \implies V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + cte$$

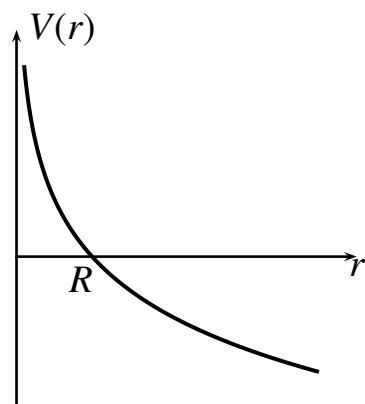
Puisque la fonction $\ln r$ diverge en $r = 0$ et $r \rightarrow \infty$ alors on choisit $V(r = R) = 0$ ce qui donne

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

Représentation graphique de $E(r)$:

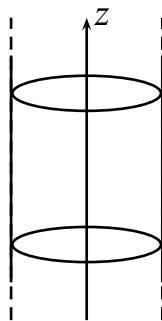


Représentation graphique de $V(r)$:



1.6.2 Cylindre infini chargé uniformément en surface

Considérons une distribution cylindrique infinie de rayon R d'axe Oz portant une charge surfacique constante $\sigma > 0$



Le champ $\vec{E}(M)$:

- Symétrie et invariance donne $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$
- Surface de Gauss : cylindre d'axe Oz passant par le point M
- Théorème de Gauss :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_L \implies \Phi = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}}_{=0(\vec{E}(M) \perp \vec{n}_1)} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}}_{=0(\vec{E}(M) \perp \vec{n}_2)} + \iint_{S_L} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

Donc

$$\boxed{\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = E(M) 2\pi r h}$$

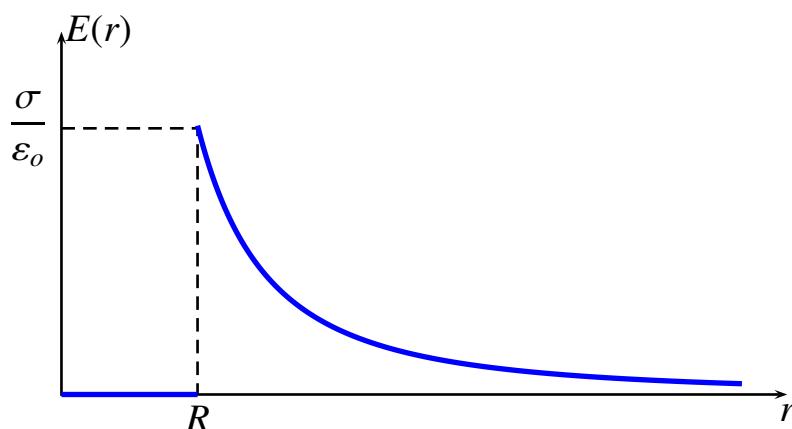
La charge intérieure :

- Pour M à l'intérieur ($r < R$)

$$\boxed{\mathbf{Q}_{int} = 0 \implies E(r < R) = 0}$$

- Pour M à l'extérieur ($r > R$)

$$\boxed{\mathbf{Q}_{int} = \sigma 2\pi r h \implies E(r > R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}}$$



Notation

On a une distribution surfacique en $r = R$ et par conséquent le champ est discontinu en $r = R$

$$\vec{E}(R^+) - \vec{E}(R^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

On retrouve la relation de passage

Le potentiel $V(M)$:

On a : $dV = -Edr$ et puisque la distribution n'est pas limité dans l'espace on prend $V(R) = 0$

- Pour $r \leq R$ on a : $E = 0 \implies V(r \leq R) = cte = 0$ puisque $V(r)$ est continu.

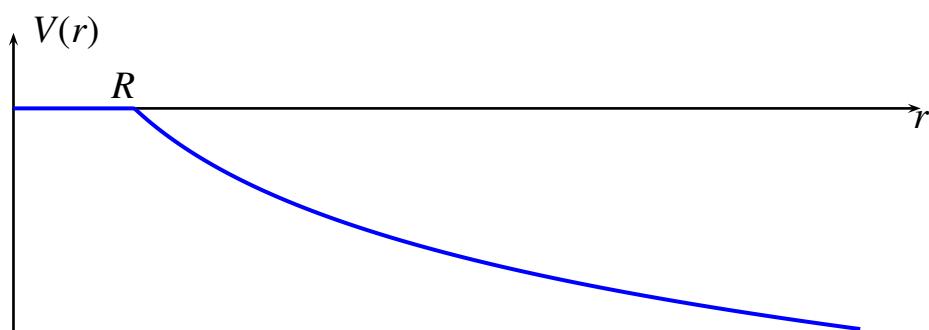
$$V(r \leq R) = 0$$

- Pour $r \geq R$ on a : $E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \implies V(r) = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln r + cte$

$$V(R) = 0 \implies cte = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln R \text{ donc}$$

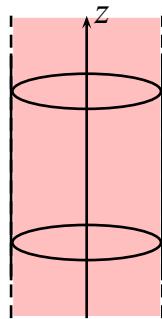
$$V(r \geq R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln(R/r)$$

Représentation graphique de $V(r)$:



1.6.3 Cylindre infini chargé uniformément en volume

Soit un cylindre infini de rayon R d'axe Oz uniformément chargé en volume avec $\rho > 0$.



Symétrie et invariances :

Symétrie cylindrique donc $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$

Par conséquent la surface de Gauss est un cylindre d'axe Oz , de rayon r et de hauteur h

Le champ $\vec{E}(M)$:

► Théorème de Gauss :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_L \implies \Phi = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}}_{=0(\vec{E}(M) \perp \vec{n}_1)} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}}_{=0(\vec{E}(M) \perp \vec{n}_2)} + \iint_{S_L} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

Donc

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = E(M) 2\pi r h$$

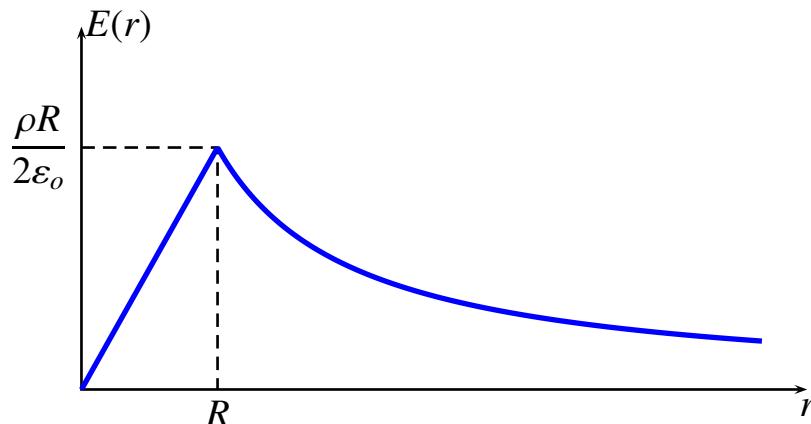
La charge intérieure :

- Pour M à l'intérieur ($r < R$)

$$\mathbf{Q}_{int} = \rho \pi r^2 h \implies E(r < R) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

- Pour M à l'extérieur ($r > R$)

$$\mathbf{Q}_{int} = \rho \pi R^2 h \implies E(r > R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$



Notation

Pour une distribution volumique , le champ est continu

$$\vec{E}(R^+) = \vec{E}(R^-)$$

Le potentiel $V(M)$:

On a : $dV = -Edr$ et puisque la distribution n'est pas limité dans l'espace on prend $V(R) = 0$

- Pour $r \leq R$ on a : $E = \frac{\rho}{2\epsilon_0}r \implies V(r \leq R) = \frac{\rho}{4\epsilon_0}(R^2 - r^2)$

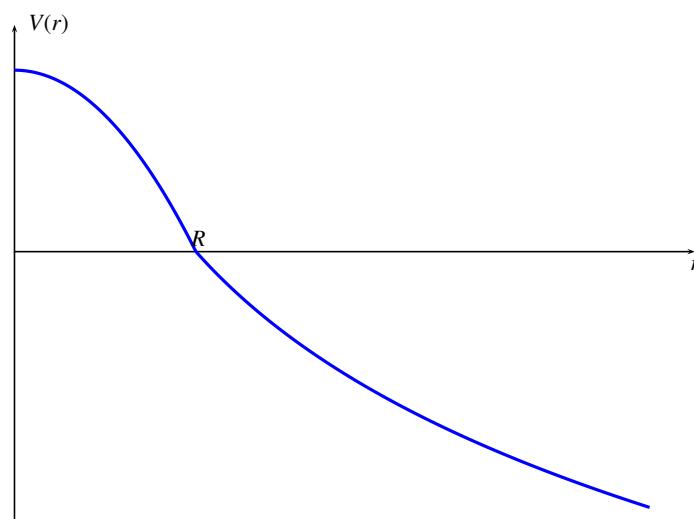
$$V(r \leq R) = \frac{\rho}{4\epsilon_0}(R^2 - r^2)$$

- Pour $r \geq R$ on a : $E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \implies V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + cte$

$$V(R) = 0 \implies cte = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R \text{ donc}$$

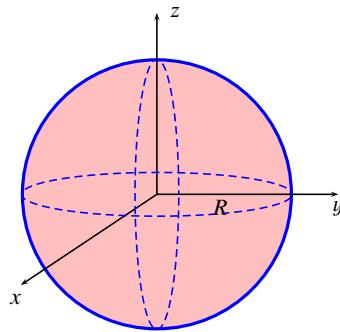
$$V(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

Représentation graphique de $V(r)$:



1.6.4 Sphère uniformément chargée en volume

Une sphère de centre O et de rayon r uniformément chargée en volume avec une densité volumique de charge $\rho > 0$



Symétrie et invariances

- Le système {charge ,M} est invariante par rotation autour du point O donc $\vec{E}(M)$ et $V(M)$ ne dépendent pas de θ et φ
- les plans (\vec{e}_r , \vec{e}_θ) et (\vec{e}_r , \vec{e}_φ) sont des plans de symétrie donc

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

Il en résulte que la surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r

Calcul du champ

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} \implies \Phi = E(r) 4\pi r^2$$

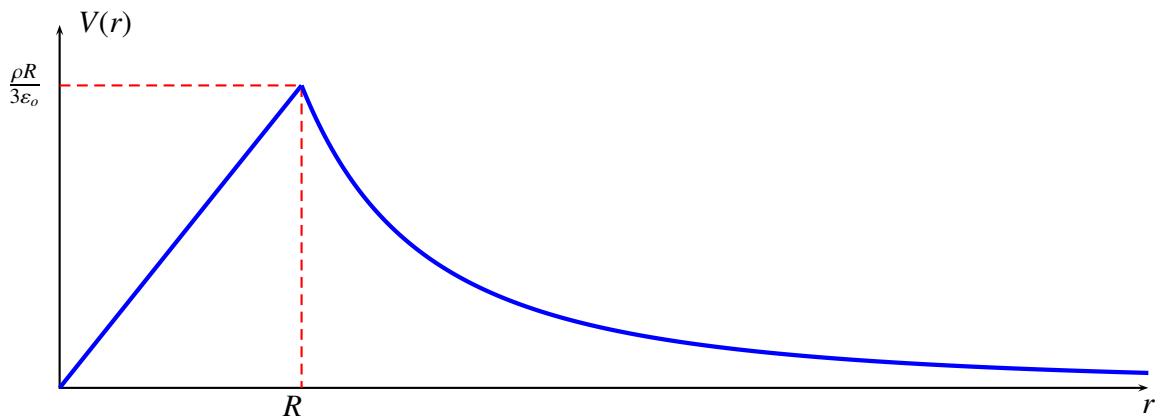
- La charge intérieur :
 - Pour M à l'extérieur ($r \geq R$)
- $$Q_{int} = \iiint \rho d\tau \implies Q_{int} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \text{ donc}$$

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

- Pour M à l'intérieur ($r \leq R$)
- $$Q_{int} = \iiint \rho d\tau \implies Q_{int} = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \text{ donc}$$

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$$

Représentation graphique de $E(r)$



Remarque

Pour une distribution volumique le champ est continu.

Calcul du potentiel

Puisque la distribution est limitée dans l'espace on prend $V(r \rightarrow \infty) = 0$
On a : $dV = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} \Rightarrow dV = -E(r)dr$

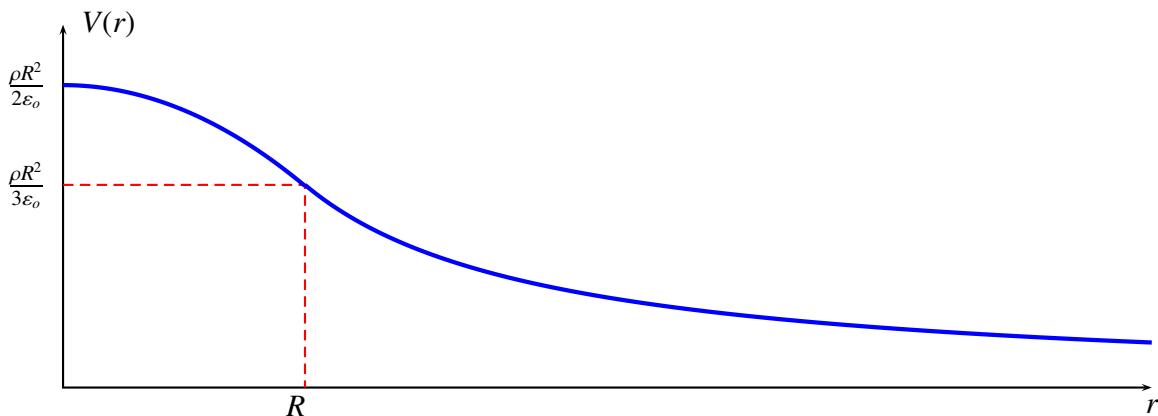
- Pour M à l'extérieur ($r \geq R$)

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

- Pour M à l'intérieur ($r \leq R$)

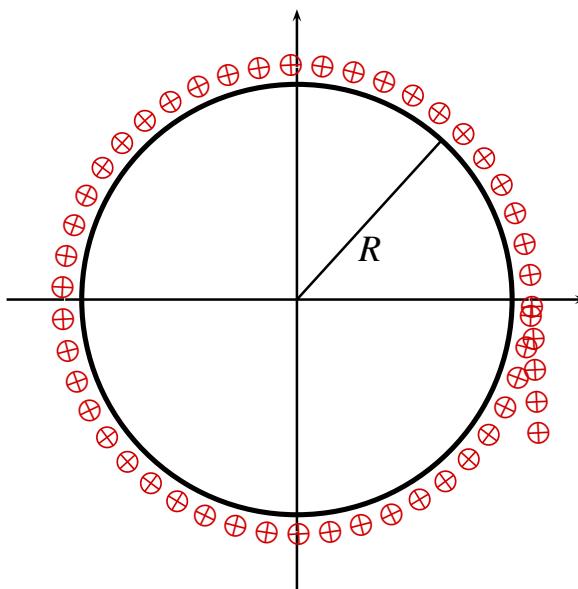
$$dV = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr \Rightarrow V(r \leq R) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

Représentation graphique de $V(r)$



1.6.5 Sphère uniformément chargée en surface

Soit une sphère de rayon R , chargée en surface avec la densité surfacique $\sigma > 0$



Symétrie et invariances

Symétrie sphérique donc $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$ et $V(M) = V(r)$

Il en résulte que la surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r

Calcul du champ

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} \implies \Phi = E(r) 4\pi r^2$$

► La charge intérieur :

- Pour M à l'intérieur ($r < R$)

$\mathbf{Q}_{int} = 0$ donc

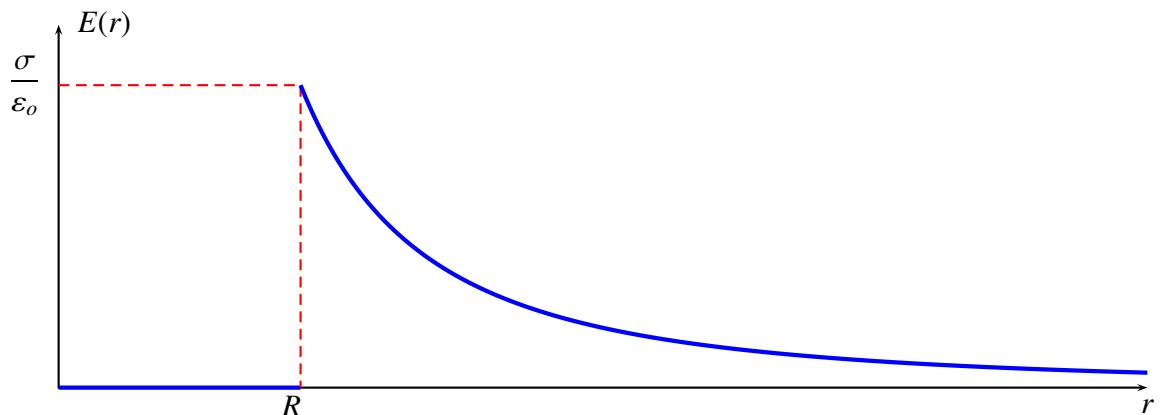
$$\vec{E}(r < R) = \vec{0}$$

- Pour M à l'extérieur ($r > R$)

$\mathbf{Q}_{int} = \iiint \rho d\tau \implies \mathbf{Q}_{int} = \sigma 4\pi R^2$ donc

$$\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Représentation graphique de $E(r)$



Remarque

Pour une distribution surfacique le champ est discontinu.

Calcul du potentiel

Puisque la distribution est limitée dans l'espace on prend $V(r \rightarrow \infty) = 0$

On a : $\vec{E}(M) - \overrightarrow{\text{grad}} V(M) \implies dV = -E(r)dr$

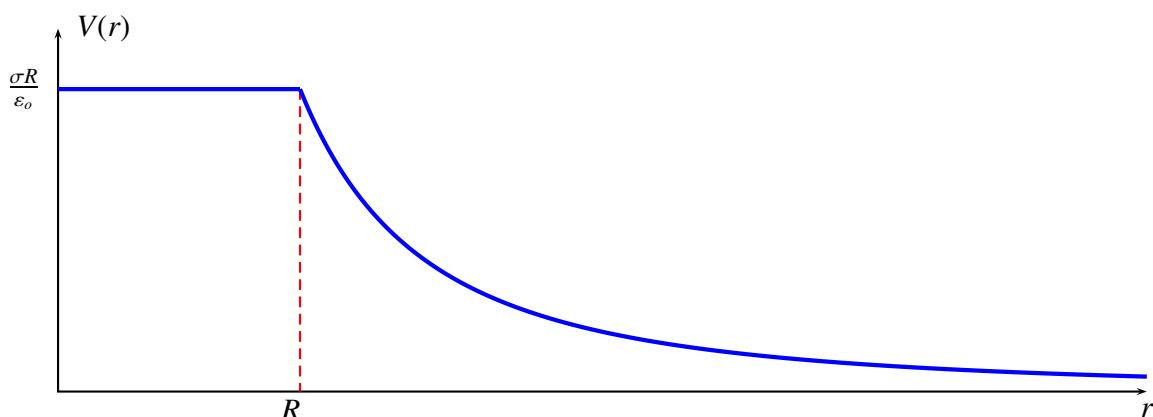
- Pour M à l'extérieur ($r > R$)

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \implies V(r \geq R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$$

- Pour M à l'intérieur ($r < R$)

$$dV = 0 \implies V(r < R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

Représentation graphique de $V(r)$



1.6.6 Plan infini uniformément chargée

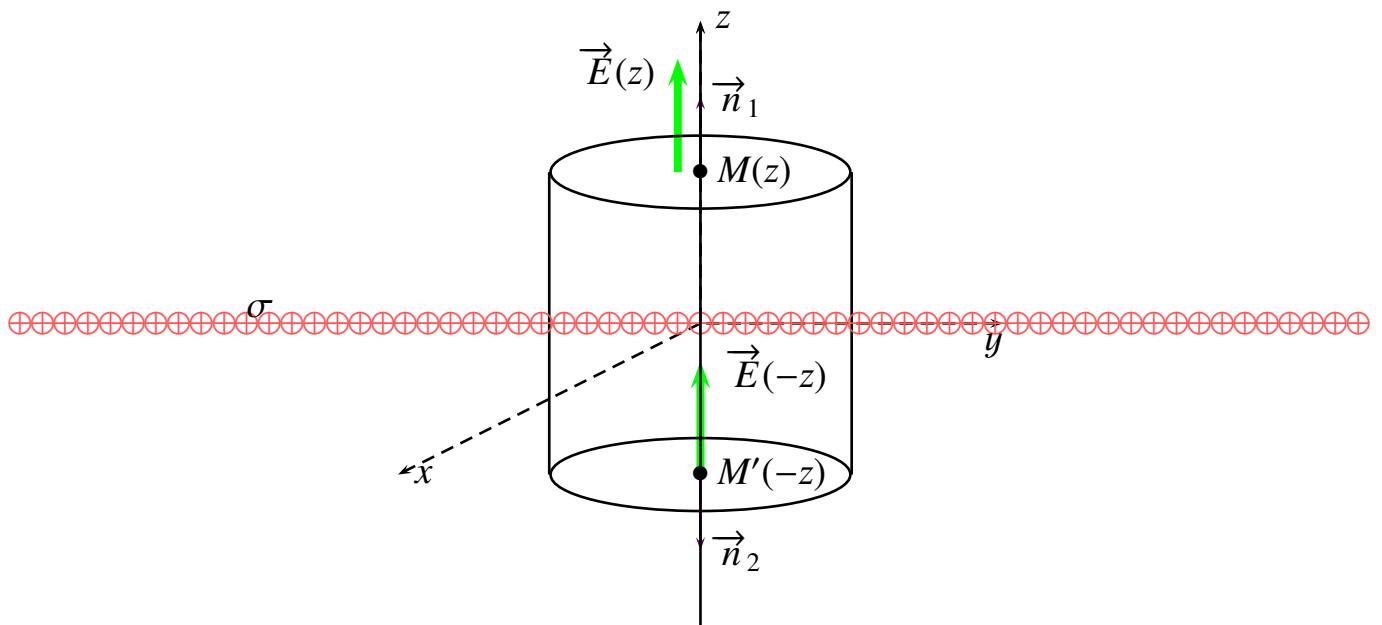
Soit un plan infini (xOy) portant une densité de charge $\sigma > 0$
Puisque le plan est infini donc on choisit M sur Oz .

Symétrie et invariances

- Tout plan contenant Oz est un plan de symétrie donc $\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_z$
- Puisque la distribution est infinie alors on a invariance par translation suivant les axe Ox et Oy et par conséquent

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$$

- Par conséquent la surface de Gauss est un cylindre



Calcul du champ

- Théorème de Gauss :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_L \implies \Phi = \iint_{S_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint_{S_L} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}}_{=0 (\vec{E}(M) \perp \vec{n} (= \vec{e}_r))}$$

Donc

$$\boxed{\Phi = E(z)\pi r^2 + E(-z)(-\pi r^2)}$$

et puisque $E(-z) = -E(z)$ alors

$$\boxed{\Phi = 2E(z)\pi r^2}$$

- La charge intérieure :

$$\boxed{Q_{int} = \sigma\pi r^2}$$

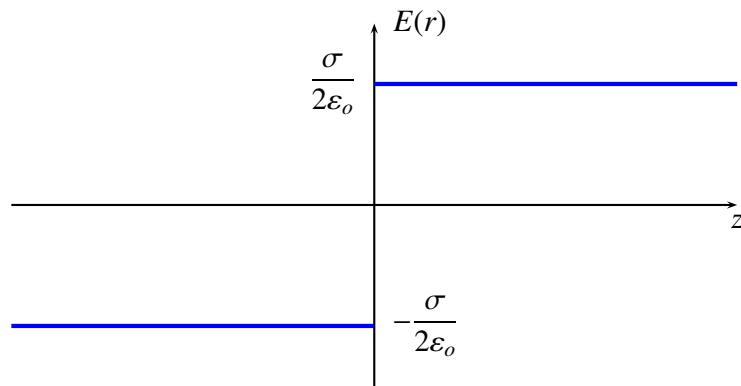
Donc

$$\vec{E}(M) = \text{signe}(z) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Avec

$$\text{signe}(z) = \begin{cases} +1 & \text{si } z > 0 \\ -1 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Représentation graphique de $E(r)$



Remarque

Pour une distribution surfacique le champ est discontinu, et on retrouve la relation de passage avec $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{e}_z$

$$\vec{E}(O^+) - \vec{E}(O^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

1.7 Analogie électromécanique

1.7.1 Analogie Electrique/mécanique

	<i>Électrique</i>	<i>Mécanique</i>
Force	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$	$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$
Source	La charge q	La masse m
	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$
Relation Force/Champ	$\vec{F} = q \vec{E}(M) =$	$\vec{F} = m \vec{g}(M)$
Champ	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{dq}{r^2} \vec{e}_r$	$\vec{g}(M) = -G \iiint_{\mathcal{D}} \frac{dm}{r^2} \vec{e}_r$
Le potentiel	$V_E(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{dq}{r}$	$V_G(M) = -G \iiint_{\mathcal{D}} \frac{dm}{r}$
relation locale	$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V_E(M)$	$\vec{g}(M) = -\vec{\text{grad}} V_G(M)$
L'énergie potentielle	$E_p = qV_E + cte = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} + cte$	$E_p = mV_G + cte = -G \frac{m_1 m_2}{r} + cte$
Théorème de Gauss	$\iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\iint_{\Sigma} \vec{g}(M) \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$

1.7.2 Théorème de Gauss en mécanique

D'après ce qui précède Le théorème de Gauss en mécanique s'écrit

$$\iint_{\Sigma} \vec{g}(M) \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$$

1.7.3 Application

Extrait du CNC Physique I 1999

Données utiles:

- Constante de gravitation universelle $G = 6.7 \times 10^{-11}$ (u.S.I)
- Masse de la terre $m_T \simeq 6.0 \times 10^{24}$ kg
- Rayon moyen de la terre $R_T \simeq 6.4 \times 10^6$ m

1/ Analogie électromécanique

1▷ On considère deux masses m_1 et m_2 ponctuelles situées respectivement aux points M_1 et M_2 de l'espace.

1.1► Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}_{g(1 \rightarrow 2)}$ exercée par m_1 sur m_2 en fonction de m_1 , m_2 , G et $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$. Cette force est-elle attractive ou répulsive ?

2► Avec quelle unité s'exprime la constante de gravitation universelle G dans le système international des unités (S.I) ?

3► On considère deux charges ponctuelles q_1 et q_2 situées respectivement aux points M_1 et M_2 de l'espace.

3.1► Donner l'expression de la force électrostatique $\vec{F}_{e(1 \rightarrow 2)}$ exercée par q_1 sur q_2 en fonction de q_1 , q_2 et $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ et de la permittivité électrique du vide ϵ_0 . Cette force est-elle attractive ou répulsive ? Avec quelle unité pratique exprime-t-on ϵ_0 dans le S.I.

3.2► Le champ électrostatique $\vec{E}_1(M_2)$ créé par la chargé q_1 au point M_2 est défini par $\vec{F}_{e(1 \rightarrow 2)} = q_2 \vec{E}_1(M_2)$.

Donner l'expression de $\vec{E}_1(M_2)$

3.3► Rappeler le théorème de Gauss .

4► En comparant les expressions de $\vec{F}_{g(1 \rightarrow 2)}$ et $\vec{F}_{e(1 \rightarrow 2)}$, dégager une analogie entre les grandeurs électriques et les grandeurs mécaniques. Quel est l'analogie mécanique du champ électrostatique \vec{E} ?

Le champ gravitationnel \vec{G} créé en un point M de l'espace par une distribution de masse \mathcal{D} donnée est défini par

$$\vec{F}_g(M) = m \vec{G}(M)$$

où $\vec{F}_g(M)$ est la force gravitationnelle exercée par la distribution \mathcal{D} sur une masse m placée au point M .

5► En s'inspirant de l'analogie , donner l'équivalent du théorème de Gauss pour le champ gravitationnel créé par une distribution de masse quelconque \mathcal{D} . On fera attention à la nature attractive ou répulsive de la force gravitationnelle.

2/ Champ gravitationnel terrestre

On assimile la Terre à une boule (sphère pleine) homogène de centre T , de rayon R et de masse m . On repère un point M quelconque de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) telles que $r = \|\overrightarrow{TM}\|$. On note $\vec{G}_T(M)$ le champ gravitationnel terrestre au point M .

6► En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de masse, montrer que $\vec{G}_T(M)$ peut s'écrire $\vec{G}_T(M) = G_T(r) \vec{e}_r$ dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ des coordonnées sphériques de centre T .

7▷ Montrer, sans faire de calcul, que $G_T(r)$ est nul au centre de la Terre.

8▷ En utilisant le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel, établir l'expression de $G_T(r)$ en tout point M de l'espace et représenter graphiquement $G_T(r)$. On donnera l'ordre de grandeur de G_T à la surface de la Terre.

9▷ Application

On imagine que l'on perce un tunnel le long d'un diamètre de la Terre. À l'une des extrémités du tunnel on abandonne sans vitesse initiale un objet de masse m que l'on pourra assimiler à un point matériel. On néglige toute force autre que la force gravitationnelle terrestre et on supposera que le référentiel terrestre est galiléen.

9.1▷ Établir l'équation différentielle du mouvement de l'objet. Quelle est la nature du mouvement ? Exprimer sa période T .

9.2▷ Calculer l'ordre de grandeur de T . Commenter.

9.3▷ La propriété précédente peut-elle donner lieu à une application pratique ? Laquelle ?

Correction

1/ Analogie électromécanique

-3▷

-3.1▷ L'expression de la force gravitationnelle

$$\vec{F}_{g(1 \rightarrow 2)} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \overrightarrow{M_1 M_2}$$

Cette force est attractive.

-3.2▷ L'unité dans le système international des unités (S.I) est

$$G : N \ kg^{-2} \ m^2$$

-2▷

-2.1▷ L'expression de la force électrostatique

$$\vec{F}_{e(1 \rightarrow 2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \overrightarrow{M_1 M_2}$$

. Cette force est

- attractive si $q_1 q_2 < 0$
- répulsive si $q_1 q_2 > 0$
- L'unité pratique de ϵ_0 dans le S.I est $F m^{-1}$.

-2.2▷ L'expression de

$$\vec{E}_1(M_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^3} \vec{M}_1 M_2$$

-2.3▷ Le théorème de Gauss .

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{\mathbf{Q}_{int}}{\epsilon_0}$$

-1▷ L'analogie entre les grandeurs électriques et les grandeurs mécaniques.

	Électrique	Mécanique
Force	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$	$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$
Source	La charge q	La masse m
	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$
Relation Force/Champ	$\vec{F} = q \vec{E}(M) =$	$\vec{F} = m \vec{G}(M)$

L'analogue mécanique du champ électrostatique \vec{E} est le champ \vec{G}

0▷ Le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel créé par une distribution de masse quelconque \mathcal{D} .

$$\iint_{\Sigma} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$$

2/ Champ gravitationnel terrestre

1▷ On a une symétrie sphérique donc

$$\vec{G}_T(M) = G_T(r) \vec{e}_r$$

2▷ Puisque le point T est un centre de symétrie alors

$$G_T(r = 0) = 0$$

3▷ L'expression de $G_T(r)$ en tout point M de l'espace :

La surface de Gauss est une sphère de centre T et de rayon $r \oint_{\Sigma} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$

Symétrie sphérique donc $\Phi = G(r)4\pi r^2$

► Pour $r < R \implies m_{int} = m_T \frac{r^3}{R_T^3}$

ce qui donne

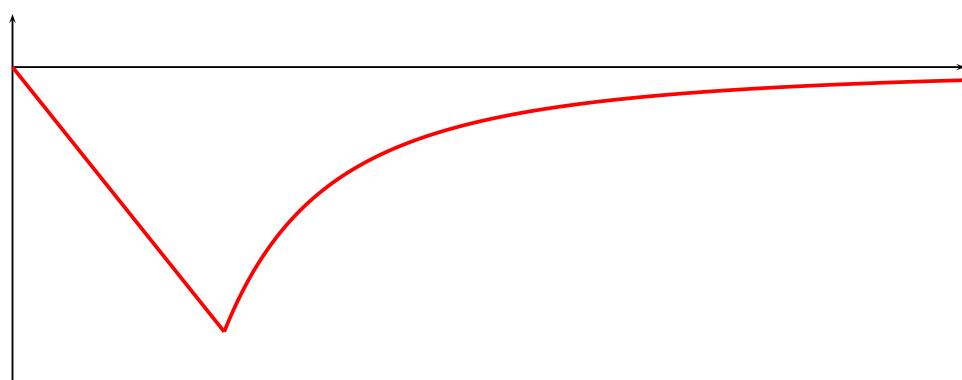
$$G_T(r \leq R_T) = -G \frac{m_T}{R_T^3} r$$

► Pour $r > R \implies m_{int} = m_T$

ce qui donne

$$G_T(r \leq R_T) = -G \frac{m_T}{r^2}$$

► Représenter graphiquement $G_T(r)$.



4▷ Application

4.1▷ L'équation différentielle du mouvement de l'objet :

La relation fondamentale de la dynamique projetée sur \vec{e}_r donne :

$$m\ddot{r} = mG_T \implies \ddot{r} + G \frac{m_T}{R_T^3} r = 0$$

- La nature du mouvement : mouvement rectiligne sinusoïdal
- L'expression de la période T :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T^3}{Gm_T}}$$

- 4.2»** L'ordre de grandeur de T .

$$T \simeq 5074(s) = 1 \text{ h } 24 \text{ min } 34 \text{ s}$$

Commentaire. : Au cours de la rotation de la terre autour d'elle même, le point matériel effectue 17 va et viens

- 4.3»** L'application pratique : horloge

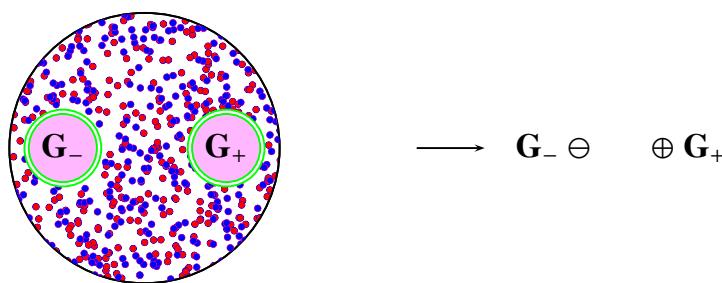
1.8 LE DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE

1.8.1 Définition

Définition

On appelle dipôle électrostatique un système globalement neutre ($Q_T = 0$) mais le barycentre des charges positives G_+ diffère du barycentre des charges négatives G_- c'est à dire

$$Q_T = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{G_- G_+} \neq \vec{0}$$

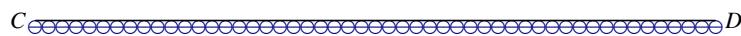


Exemples

- Doublet $[N(-q), P(+q)]$

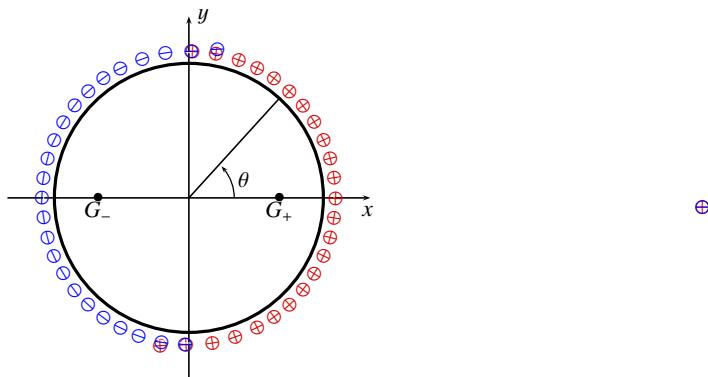
- Molécule HCl

- Deux segments AB et CD parallèles uniformément chargés avec une densité de charges opposée :



- Un cercle chargé avec une densité de charge exprimée en coordonnées polaires par

$$\lambda = \lambda_0 \cos \theta \quad \text{avec} \quad \lambda_0 > 0$$



Remarque

Dipôle rigide
Le dipôle électrostatique est dit rigide si la distance G_-G_+ est constante

- On modélise pour la suite un dipôle par un bipoint $[G_-(-q), G_+(+q)]$
- On caractérise un dipôle électrostatique par son moment dipolaire \vec{P} définie par

$$\vec{P} = +q\overrightarrow{G_-G_+} \quad (\text{C m}^{-1})$$

Remarque

Il existe une autre unité de \vec{P} c'est le Debye notée D tel que

$$1D = \frac{1}{3}10^{-29} \text{ C m}^{-1}$$

Activité**Moment dipolaire de la molécule d'eau**

La molécule d'eau est formée d'un atome d'oxygène et de deux atomes d'hydrogène; H_2O est une molécule coudée, l'angle entre les deux liaisons ($O-H$) est de l'ordre de $\alpha = 105^\circ$ l'atome d'oxygène semble prendre un excès de charge négative : $-2\delta = -2\eta e$ avec $e = 1.6 \times 10^{-19} C$; Chaque atome d'hydrogène porte un excès de charge positive : $+\delta = +\eta e$. De ce fait la molécule d'eau possède un moment dipolaire permanent $\vec{\mu}$ de norme $= 6.16 \times 10^{-30} C m^{-1}$.

Calculer η , sachant que la distance d ($O-H$) est égale à $0.98 \times 10^{-10} m$.

Correction

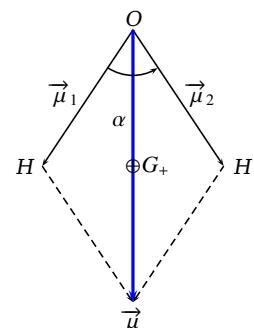
On a :

- La charge totale $Q_T = 2\delta - 2\delta \Rightarrow Q_T = 0$
- $G_- \neq G_+$ donc la molécule d'eau est une molécule polaire.
- l'expression du moment dipolaire :

On a :

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 \Rightarrow \mu = \eta e d \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}$$

Donc



$$\eta = \frac{\mu}{ed \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}} \xrightarrow{\text{A.N}} \eta = 0,32(32\%)$$

Notation**Liaison covalente/ionique**

- $\eta > 50\%$: Liaison à caractère ionique partiel
- $\eta < 50\%$: Liaison à caractère covalent partiel

Activité**Moment dipolaire d'une distribution linéique**

On considère une distribution linéique de charge repartie sur un cercle, de centre O et de rayon R , avec une densité linéique $\lambda = \lambda_o \sin \theta$.

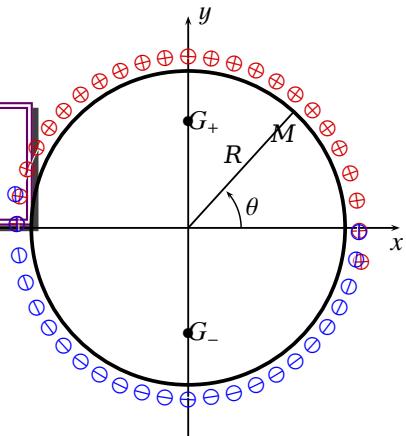
1. Quelle est l'unité de λ_o ?
2. Déterminer la charge totale portée par le cercle.
3. Déterminer l'expression du vecteur $\overrightarrow{OG_+}$
4. En déduire l'expression du moment dipolaire \vec{P}

Correction

1. L'unité de λ_o est $C m^{-1}$

2. La charge totale

$$Q_T = \int_0^{2\pi} \lambda d\ell \implies Q_T = \lambda_o R \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$



3. Puisque l'axe Oy est un axe de symétrie pour la distribution alors les barycentres G_- et G_+ sont situés sur l'axe Oy .

On rappelle que

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i q_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum_i q_i} = \frac{\int \overrightarrow{OM} dq}{\int dq}$$

Pour les charges positives On a :

$$Q_+ = \int_0^\pi \lambda d\ell \implies Q_+ = 2R\lambda_o = -Q_-$$

Sachant que $\overrightarrow{OG_+} = \frac{1}{Q_+} \int_0^\pi \overrightarrow{OM} dq$ qu'on projette suivant l'axe Oy

$$\overrightarrow{OG_+} = \frac{R^2 \lambda_o}{Q_+} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \implies \overrightarrow{OG_+} = \frac{\pi R}{4} \overrightarrow{e_y}$$

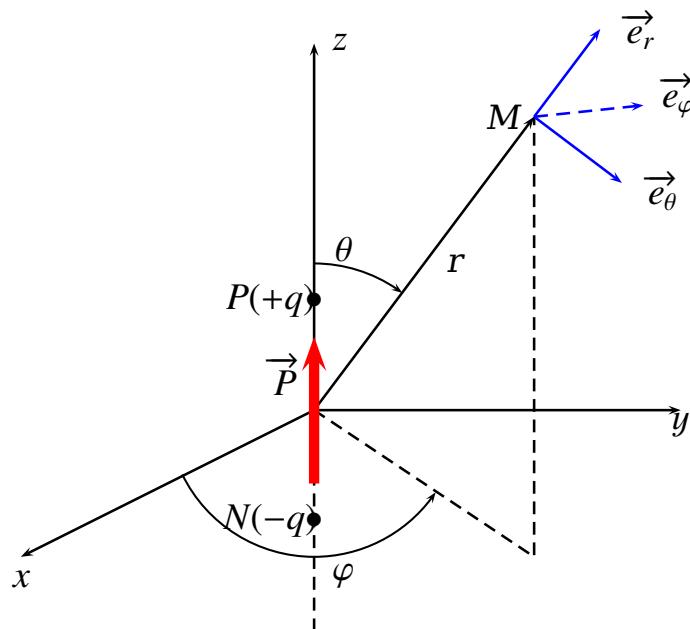
4. L'expression du moment dipolaire

$$\vec{P} = Q_+ \overrightarrow{G_- G_+} = 2Q_+ \overrightarrow{OG_+} \implies \vec{P} = \lambda_o \pi R^2 \vec{e}_y$$

1.8.2 Le potentiel électrostatique crée par un dipôle dans le cadre de l'approximation dipolaire. Surface équipotentielle

1.8.2.1 Le potentiel électrostatique

Soit un dipôle de moment dipolaire \vec{P} modélisé par un doublet $(-q, +q)$ situé respectivement au point N et P et M un point quelconque de l'espace à une distance r de O milieu de $[NP]$ comme indique la figure suivante



Le moment dipolaire du dipôle vaut

$$NP = 2a \implies \vec{P} = 2aq \vec{e}_z$$

En coordonnées sphériques on a :

- Le potentiel $V(M) = V(r, \theta, \varphi)$
 - Le champ $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi$
- Symétrie : Le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) = \Pi_s \implies \vec{E}_\varphi = \vec{0}$
- Invariance : On a invariance par rotation autour de \vec{P} (ici l'axe Oz) donc les grandeurs $\vec{E}(M)$ et $V(M)$ ne dépendent pas de la variable φ c'est à dire

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad V(M) = V(r, \theta)$$

Il en résulte l'utilisation des coordonnées polaires (r, θ)

On rappelle que :

- Le potentiel créé par une charge ponctuelle s'écrit avec référence à l'infini (puisque la distribution est limitée dans l'espace)

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

- Le potentiel vérifie le théorème de superposition

$$V(M) = V_p(M) + V_N(M) \implies V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_- - r_+}{r_- \times r_+} \right)$$

avec $r_+ = PM$ et $r_- = NM$

On s'intéresse au point M tel que $\|\overrightarrow{OM}\| = r \gg a$: c'est l'approximation dipolaire

Dans ce cadre on a :

$$\vec{r}_\pm = \vec{r} \mp a \vec{e}_z \implies r_\pm^2 = r^2 + a^2 \mp 2ar\cos\theta$$

$$\begin{aligned} &\implies r_\pm \simeq r \left(1 \mp \frac{2a}{r} \cos\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\implies r_\pm \simeq r \left(1 \mp \frac{a}{r} \cos\theta \right) \end{aligned}$$

D'où

$$r_- - r_+ \simeq 2a \cos\theta \quad ; \quad r_+ r_- \simeq r^2$$

approximation dipolaire

Donc :

$$V(M) = \frac{2aq \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



Remarque

Le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle présente une symétrie sphérique et inversement proportionnel à la distance r par contre pour le dipôle électrostatique et dans le cadre de l'approximation dipolaire, le potentiel dépend de r et θ et inversement proportionnel à r^2 .

1.8.2.2 Surfaces équipotentielles

On rappelle que la surface équipotentielle est l'ensemble des points M tel que $V(M) = cte = V_o$

Pour le dipôle électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire :

$$V(M) = \frac{2aq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = cte = V_o \text{ donc}$$

$$V(M) = V_o \implies r^2 = \frac{P}{4V_o\pi\epsilon_0} \cos \theta$$

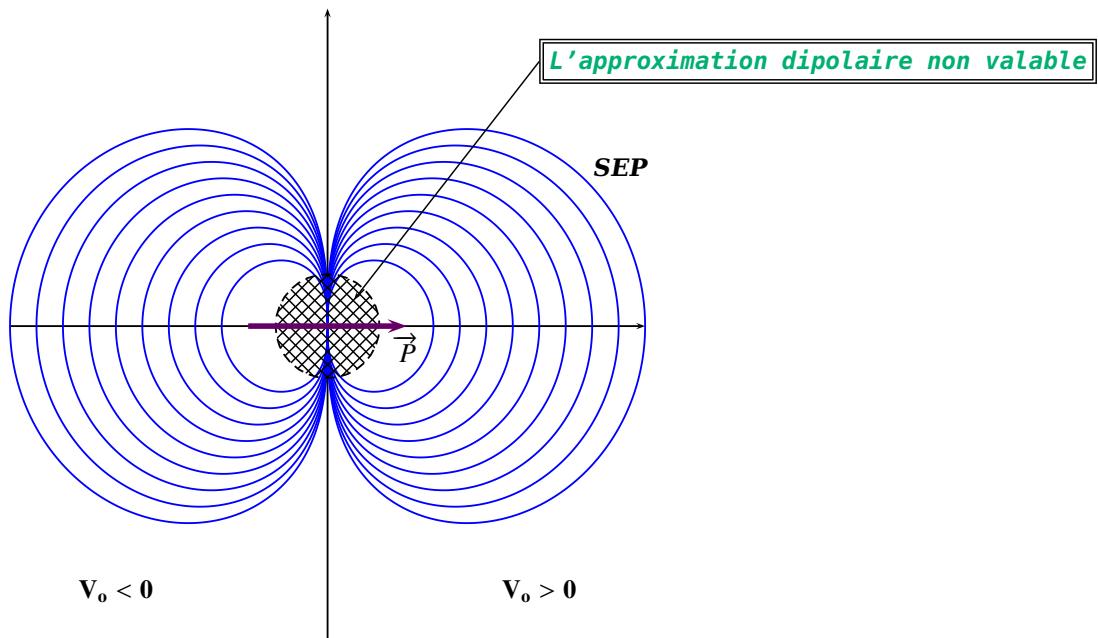


C'est l'équation des S.E.P

N.B : En coordonnées sphériques $\theta \in [0, \pi]$ donc pour

- ▶ Pour $\theta \in [0, \pi/2[\implies V_o > 0$
- ▶ Pour $\theta \in]\pi/2, \pi] \implies V_o < 0$
- ▶ Pour $\theta = \pi/2 \implies V_o = 0$

Représentation graphique des S.E.P



1.8.3 Le champ électrostatique créé par un dipôle dans le cadre de l'approximation dipolaire. Lignes de champ

1.8.3.1 L'expression du champ

On applique la relation locale $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(M)$ en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)}$$

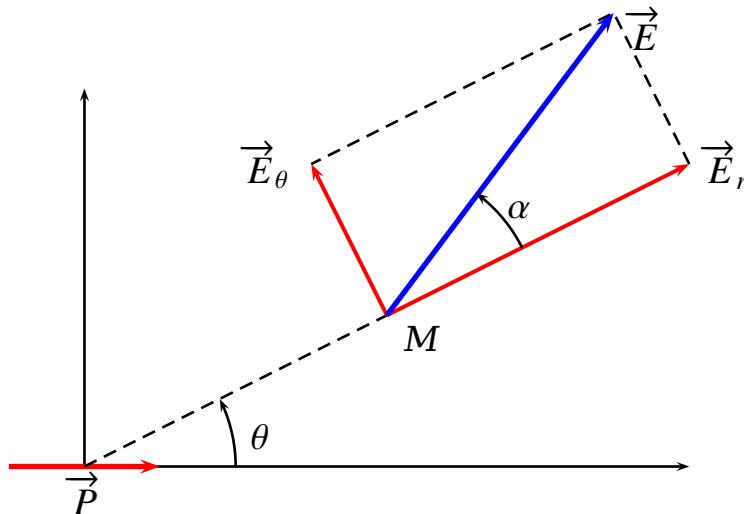
Remarques

Pour le dipôle électrostatique

- $\vec{E}(M) \propto \frac{1}{r^3}$
- $\vec{E}(M)$ peut s'écrire :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{P} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{P})}$$

- Le plan médiateur (yoz) est une surface équipotentielle ; ($\theta = \pi/2 \Rightarrow V = 0$)
- Si on pose $\alpha = (\vec{E}_r, \vec{E})$ l'angle d'inclinaison de \vec{E} par rapport à \vec{e}_r



Question : Quelle est la relation entre θ et α ?

On a : $E_r = \frac{2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ et $E_\theta = \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ donc

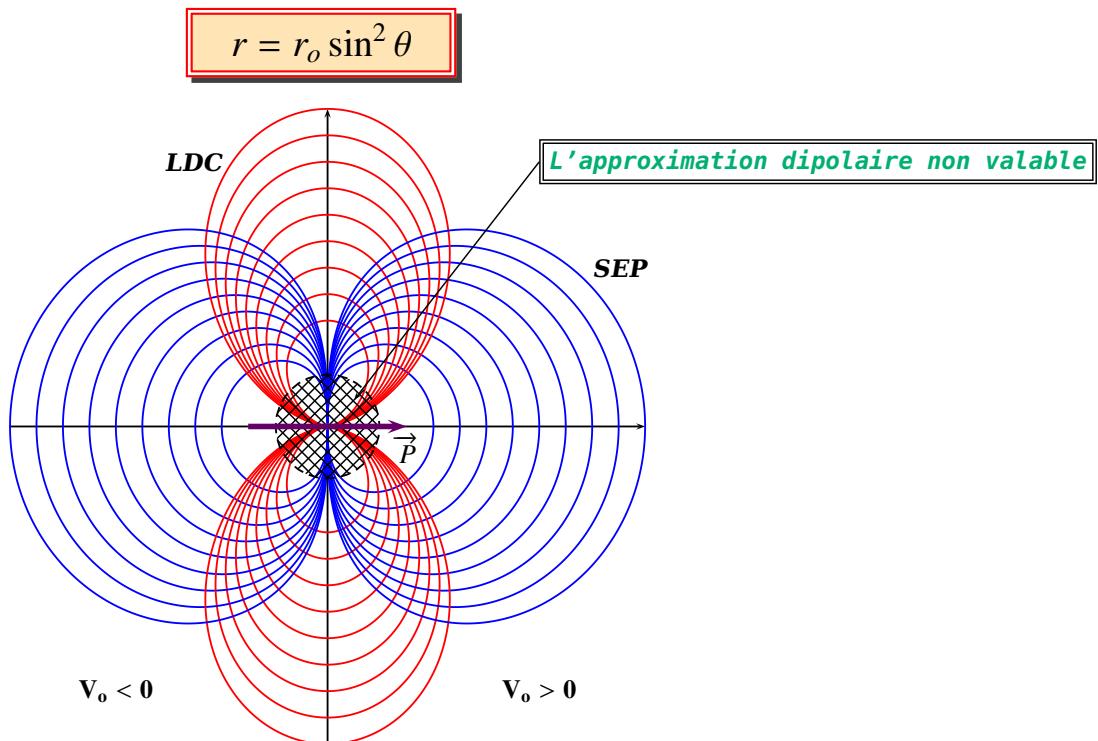
$$\boxed{\tan \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} \Rightarrow \tan \theta = 2 \tan \alpha}$$

1.8.3.2 Les lignes de champ

$M \in LDC \implies \vec{E}(M) \wedge \overrightarrow{dOM} = \vec{0}$ ce qui donne

$$\frac{E_r}{dr} = \frac{1}{r} \frac{E_\theta}{d\theta} \implies \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

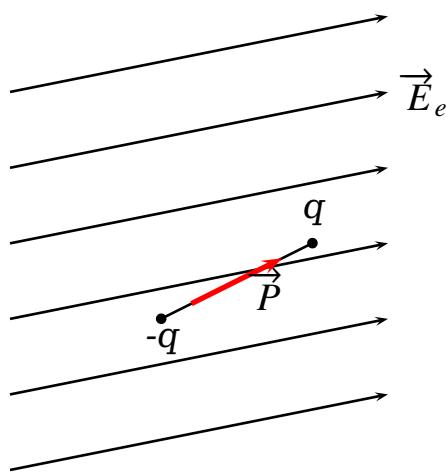
Par intégration on obtient



1.8.4 Aspect énergétique

1.8.4.1 Actions subies par un dipôle électrostatique rigide

Dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique extérieur **uniforme** \vec{E}_e créé par une source extérieure, on place un dipôle rigide de moment dipolaire \vec{P}



► La résultante des forces :

$$\vec{F} = q\vec{E}_e + (-q)\vec{E}_e \implies \vec{F} = \vec{0}$$

On retient que si le champ est uniforme, alors la résultante des forces est nulle.

► Le moment résultant : $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OG_-} \wedge (-q\vec{E}_e) + \overrightarrow{OG_+} \wedge (q\vec{E}_e)$ ce qui donne

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{P} \wedge \vec{E}_e$$

Conclusion:

L'action d'un champ extérieur uniforme \vec{E}_e sur un dipôle rigide de moment dipolaire \vec{P} se réduit à un couple de force de moment

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{P} \wedge \vec{E}_e$$

1.8.4.2 L'énergie potentielle d'un dipôle électrostatique rigide

On rappelle que la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$ est conservative donc pour le dipôle rigide dans \vec{E}_e extérieur uniforme on obtient :

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} \implies -dE_p = -q\vec{E}_e d\overrightarrow{OG_-} + q\vec{E}_e d\overrightarrow{OG_+} \\ &\implies -dE_p = q\vec{E}_e (d\overrightarrow{OG_+} - d\overrightarrow{OG_-}) \\ &\implies -dE_p = q\vec{E}_e d\overrightarrow{G_- G_+} \\ &\implies -dE_p = d(-\vec{P} \cdot \vec{E}_e) \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E}_e$$

Remarque

Si on pose $\alpha = (\widehat{\vec{P}, \vec{E}_e})$; déterminer les positions d'équilibre et discuter leur stabilité .

Correction

On a :

$$E_p = -PE_e \cos \alpha$$

► Positions d'équilibre :

$$\frac{dE_p}{d\alpha} = PE_e \sin \alpha = 0 \implies \sin \alpha = 0$$

Donc les positions d'équilibre sont $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$

► Stabilité :

On a :

$$\frac{d^2E_p}{d\alpha^2} = PE_e \cos \alpha$$

- Pour $\alpha = 0$ on a $\frac{d^2E_p}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} = PE_e > 0$ donc $\alpha = 0$ est une position d'équilibre stable.

- Pour $\alpha = \pi$ on a $\frac{d^2E_p}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=\pi} = -PE_e < 0$ donc $\alpha = \pi$ est une position d'équilibre instable.

On retient que l'action d'un champ extérieur sur dipôle rigide est de le faire tourner afin que le moment dipolaire s'oriente colinéairement au champ extérieur.

Remarque

Si le champ extérieur n'est pas uniforme, on admet le cas générale

- $E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E}_e$
- $\vec{\mathcal{M}} = \vec{P} \wedge \vec{E}_e$
- $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{P} \cdot \vec{E}_e) \neq \vec{0}$

1.9 LE CONDENSATEUR

1.9.1 Définition

Définition

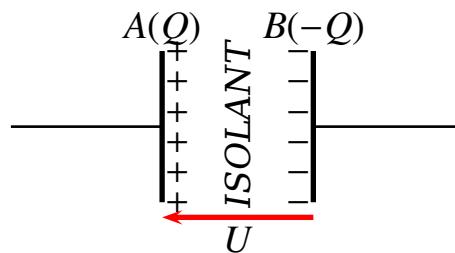
On appelle condensateur deux surfaces en regard portant deux charges opposées $+Q$ et $-Q$, séparée par un isolant

On caractérise un condensateur par sa capacité C définie par

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{V_{(+Q)} - V_{(-Q)}} \quad (F)$$

Avec :

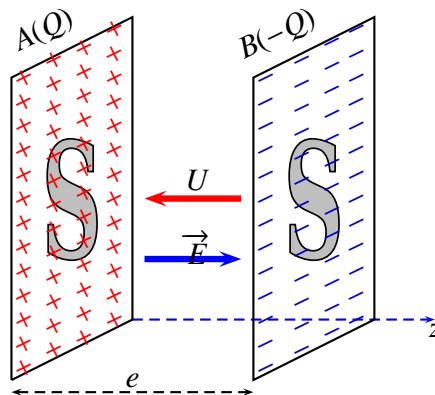
- $V_{(+Q)}$ le potentiel de la surface qui porte la charge $+Q$.
- $V_{(-Q)}$ le potentiel de la surface qui porte la charge $-Q$.



1.9.2 Le condensateur plan

On dit qu'un condensateur est plan si les deux surfaces dites armatures sont planes.

Soit un condensateur plan constitué de deux armatures de surface S séparées par un isolant d'épaisseur e



On suppose pour la suite que

$$e \ll \sqrt{S}$$

afin de considérer la surface S comme un plan infini (On dit qu'on néglige l'effet de bord) et par conséquent, le champ total entre les armatures du

condensateur plan vaut en posant $\sigma = \frac{Q}{S}$ la densité surfacique de charge

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \implies \vec{E} = \frac{Q}{S\epsilon_0} \vec{e}_z$$

On rappelle que : $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM} \implies dV = -Edx$ donc

$$V_- - V_+ = - \int_0^e Edx \implies U = V_+ - V_- = Ee$$

En remplaçant E par son expression on obtient :

$$U = \frac{Q}{S\epsilon_0} e \implies C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{S}{e}$$



On rappelle que l'énergie emmagasinée par le condensateur :

$$\mathbf{W}_c = E_c = \frac{1}{2} CU^2 \implies \mathbf{W}_c = E_c = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} E^2 e^2$$

ce qui donne

$$\frac{\mathbf{W}_c}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$$

par conséquent la densité volumique d'énergie électrique pour le champs \vec{E} s'écrit

$$w_e = \frac{d\mathbf{W}}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$$

1.9.3 Application

D'après CCP/TSI/2010

Dans tout le problème, ϵ_0 représente la permittivité diélectrique de l'air, égale à celle du vide.

1.9.3.1 Condensateur plan

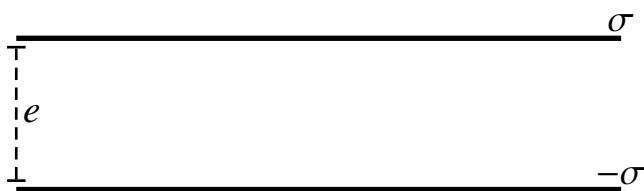
7- On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ positive.

7.1- En considérant les propriétés de symétrie de la distribution de charges, montrer que le champ électrostatique \vec{E} créé par un plan infini

uniformément chargé avec une densité surfacique σ est orthogonale au plan.

7.2- Démontrer que \vec{E} est tel que sa norme E vaut $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Représenter sur un schéma le vecteur \vec{E} de part et d'autre du plan. On indiquera avec précision la surface de Gauss choisie.

8- Soit un condensateur plan constitué par deux plans infinis, parallèles, uniformément chargés et séparés par une distance d . Le plan supérieur étant chargé avec une densité surfacique σ positive et le plan inférieur étant chargé avec une densité $-\sigma$.

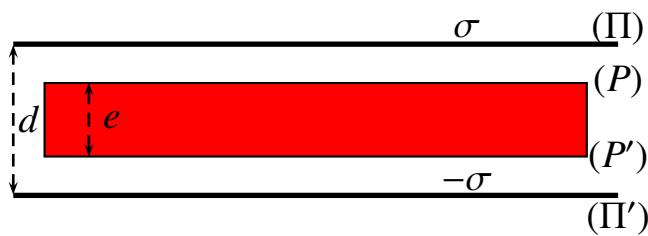


8.1- En utilisant le théorème de superposition, déduire de la question précédente le champ électrostatique en tout point de l'espace.

8.2- Déterminer la différence de potentiel U entre les deux plans du condensateur. On exprimera U en fonction de ϵ_0, σ et d . Identifier clairement, en le justifiant, le plan dont le potentiel est le plus élevé.

8.3- Définir et déterminer la capacité C du condensateur par unité de surface. On exprimera C en fonction de ϵ_0 et d .

9- On introduit entre les deux plaques du condensateur plan une plaque métallique parallélépipédique d'épaisseur $e < d$ parallèle aux armatures du condensateur. L'épaisseur e est donc une grandeur finie, mais on considère que les autres dimensions de la plaque métallique sont infinies.



On admet que le champ électrostatique est nul à l'intérieur du métal. Justifier le fait qu'il apparaîtra des charges électriques sur les surfaces

supérieure P et inférieure P' de la plaque métallique. Déterminer le signe de ces charges. On pourra s'aider d'un schéma succinct.

10- En utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, déterminer les densités surfaciques de charge σ_P et $\sigma_{P'}$ qui apparaissent sur les surfaces P et P' de la plaque métallique. Exprimer σ_P et $\sigma_{P'}$ en fonction de σ

11-

11.1- Déterminer la valeur du champ électrostatique en un point du condensateur extérieur à la plaque métallique (entre P et Π d'une part et entre P' et Π' d'autre part).

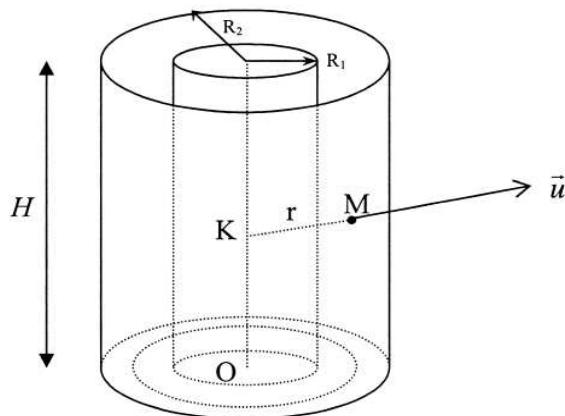
En déduire la différence de potentiel U' entre les deux armatures du condensateur. On exprimera U' en fonction de σ, e, d et ε_0 .

11.2- En déduire la capacité surfacique C' du condensateur ainsi obtenu. On exprimera C' en fonction de e, d et ε_0 . Conclure quant à l'influence de la plaque sur la capacité surfacique du condensateur.

1.9.3.2 Condensateur cylindrique

On considère un condensateur cylindrique composé de deux armatures coaxiales de hauteur H et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ et placées dans l'air. L'armature interne porte la charge électrique $Q > 0$. L'armature externe porte une charge totale $-Q$.

Les potentiels électriques des armatures sont respectivement V_1 et V_2 . Soit un point M situé à la distance $r = KM$ de l'axe : $R_1 < r < R_2$. K est la projection orthogonale du point M sur l'axe du condensateur. Soit \vec{u} le vecteur unitaire de la droite (KM) dirigé de K vers M .



On admettra que le champ électrostatique \vec{E} créé au point M est radial et sa norme ne dépend que de r . On peut donc écrire $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}$.

On néglige les effets de bord.

7- En appliquant le théorème de Gauss à une surface S que l'on précisera, déterminer l'expression de $E(r)$. On exprimera $E(r)$ en fonction de Q, ε_o, r et H . on distinguera les cas selon que $r < R_1, R_1 < r < R_2$ ou $r > R_2$.

8- En déduire le potentiel $V(r)$ à une distance r de l'axe lorsque $R_1 < r < R_2$. On exprimera $V(r)$ en fonction de $Q, H, V_1, R_1, \varepsilon_o$ et r . En déduire la différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ entre les deux armatures du condensateur en fonction de Q, ε_o, H, R_1 et R_2 .

9- Déterminer la capacité C du condensateur en fonction de ε_o, H, R_1 et R_2 .

10- On peut associer au champ électrostatique une densité volumique d'énergie u_e égale à $\frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$.

En utilisant l'expression de $E(r)$ déterminée précédemment et en intégrant l'expression de u_e déterminer l'énergie W_c accumulée par le condensateur. On exprimera W_c en fonction de Q, ε_o, H, R_1 et R_2 . En déduire l'expression de W_c en fonction de Q et C .

11- En effectuant un développement limité de l'expression de la capacité déterminée à la question précédente, montrer que si les rayons des armatures sont très proches, c'est à dire $R_2 - R_1 = e \ll R_1$, le condensateur cylindrique est équivalent à un condensateur plan dont on précisera les caractéristiques

Correction

7- Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée est égal au rapport de la charge intérieure à la surface sur ε_o :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$$

L'équation de Maxwell-Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$ permet de démontrer le théorème de Gauss.

Deuxième partie : Condensateur plan

8- Soit le plan infini chargé xOy .

$\vec{E}(M)$ est un vecteur donc il appartient aux plans de symétrie des charges $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

Ainsi invariance par translation donne

$$\vec{E}(M) = E(x, y, z) \vec{e}_z = E_z(z) \vec{e}_z$$

car les directions Ox et Oy sont infinies.

Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie des charges donc $E_z(z) = -E_z(-z)$

On considère un cylindre d'axe zz, de rayon R , se trouvant entre les plans z et $-z$ ($z > 0$).

Par application de Gauss :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_z \pi R^2 - E_z(-z) \pi R^2 = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0}$$

ce qui donne

$$\vec{E}(M) = \text{signe}(z) \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

9-

9.1- On prend le plan(1) ($-\sigma$) en $z = 0$ et le plan(2)(σ) en $z = d$.

D'après le théorème de superposition on a :

- Pour $z < 0$: $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = \vec{0}$
- Pour $0 < z < d$: $\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$
- Pour $d < z$: $\vec{E}(M) = \vec{0}$

9.2- Le potentiel le plus élevé est celui du plan (2) :

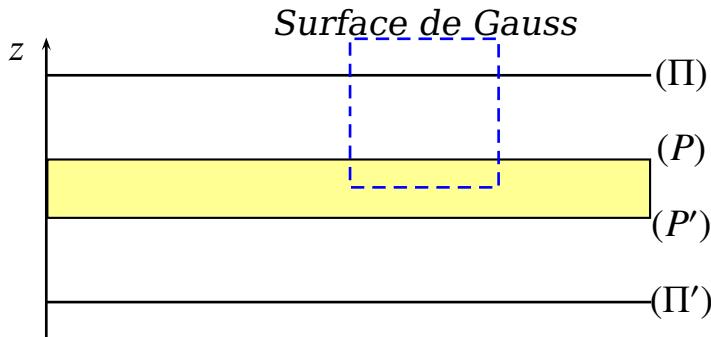
$$U = V_2(z = d) - V_1(z = 0) = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

9.3- On a, pour le plan2 (σ) :

$$Q = \sigma S = V(V_2 - V_1) = CU \implies \frac{C}{S} = \frac{\epsilon_0}{d}$$

10- Le champ électrostatique qui règne dans le condensateur déplace les électrons de la lame jusqu'à ce que le champ total régnant dans cette lame soit nul.

Il apparaît des charges négatives sur le plan (P) et des charges positives sur le plan (P').



On applique le théorème de Gauss à un cylindre de section S et d'axe $z'z$ (voir dessin), le champ entre les armatures est toujours de la forme $\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z$

Le champ électrique est nul sur les surfaces S et aucun flux ne sort par la surface latérale, donc

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma S + \sigma_p S) \Rightarrow \sigma_p = -\sigma$$

De même, on en déduit que

$$\sigma_{p'} = +\sigma$$

11-

11.1- On retrouve les mêmes condensateurs séparés de la distance $\frac{d-e}{2}$

Entre (P) et (Π) , $\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$; Entre (P') et (Π') ; $\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$.

D'où

$$U' = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\sigma(d-e)}{\epsilon_0}$$

11.2- On a, pour le plan (Π) : $Q = \sigma S = C' U'$

D'où

$$\frac{C'}{S} = \frac{\epsilon_0}{d-e} \Rightarrow \frac{C'}{S} = \left(\frac{C}{S}\right) \frac{d}{d-e} > \frac{C}{S}$$

La capacité en présence de la lame est plus grande que sans la lame.

Troisième partie : Condensateur cylindrique

7- On considère un cylindre de même axe que ceux de la distribution de rayon r et de hauteur H . Comme le champ est radial :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 2\pi r H$$

Le théorème de Gauss donne :

$$\oint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

- Pour $r < R_1$: $Q_{int} = 0 \implies \vec{E}(M) = \vec{0}$.
- Pour $r > R_2$: $Q_{int} = Q - Q = 0 \implies \vec{E}(M) = \vec{0}$.
- Pour $R_1 < r < R_2$: $Q_{int} = Q \implies \vec{E}(M) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r H} \vec{u}$.

8- On a : $E_r = -\frac{dV}{dr} \implies V(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln r + cte$

Comme pour $r = R_1$ on a $V = V_1$ alors $V(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln \frac{R_1}{r} + V_1$

Ce qui donne

$$U = V_2 - V_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

9-

$$Q = C(V_1 - V_2) \implies C = 2\pi\epsilon_0 H \frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

10- On a : $W = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \iiint_{\text{cond}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 r dr d\theta dz$

En intégrant

$$W_{\text{cond}} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 H} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2C} Q^2$$

11- Comme $C = 2\pi\epsilon_0 H / \ln(1 + e/R_1)$ et $\ln(1 + x) \simeq x$ on peut en déduire que

$$C = 2\pi\epsilon_0 H \frac{R_1}{e} = \epsilon_0 \frac{S_{\text{lat}}}{e}$$

C'est la capacité d'un condensateur plan dont les armatures sont séparées de e et ont une surface $S = 2\pi R_1 H$.

CHAPITRE 2

MAGNÉTOSTATIQUE

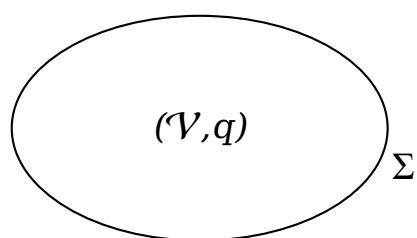
La magnétostatique est l'étude du champ magnétique créé par un courant continu.

2.1 Champ et potentiel magnétostatique

2.1.1 Distribution de courant électrique

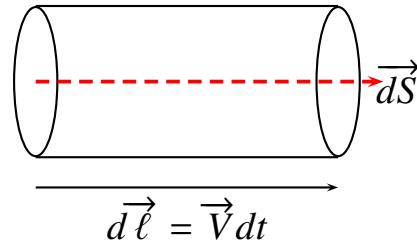
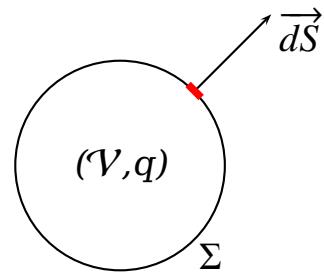
2.1.1.1 Vecteur densité de courant

Soit un volume \mathcal{V} délimité par une surface Σ contenant une charge q .



Déterminons la charge élémentaire dq qui quitte une surface élémentaire dS pendant la durée élémentaire dt , ainsi le courant élémentaire dI qui traverse dS .

Les charges dq qui quittent la surface élémentaire dS pendant la durée dt sont situées dans le cylindre élémentaire de génératrice la normale de section dS et de hauteur $d\ell$ tel que $d\ell = \vec{V}dt$ avec \vec{V} la vitesse moyenne des porteurs de charges



Donc le volume du cylindre élémentaire est :

$$\begin{aligned} d\tau &= \overrightarrow{dS} \cdot \overrightarrow{d\ell} \implies d\tau = \overrightarrow{dS} \cdot \vec{V} dt \\ &\implies dq = \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} dt \\ &\implies \frac{dq}{dt} = \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} = dI \end{aligned}$$

Avec dI le courant élémentaire qui traverse la surface dS .

On pose

$$\vec{j} = \rho \vec{V} \quad (\text{A.m}^{-2})$$

Vecteur densité de courant

Ce qui donne

$$dI = \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} \implies I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Conclusion:

Le courant électrique représente le flux du vecteur densité de courant à travers la surface Σ

Remarque

1. Pour un conducteur cylindrique plein de rayon R parcouru par un courant I continu on a

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{S} \implies I = j\pi R^2$$

2. Pour un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e parcouru par un courant I continu on a

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{S} \implies I = j\pi(R_e^2 - R_i^2)$$

3. Pour un conducteur rectangulaire, on a :

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{S} \implies I = \int_0^{\ell} \int_0^L j dx dz \implies I = j\ell L$$

Si $\ell \rightarrow 0$ c'est à dire $\ell \ll L$ alors

$$I = \int_0^L (\int_0^{\ell} \vec{\mathbf{j}} dy) dx \vec{n}$$

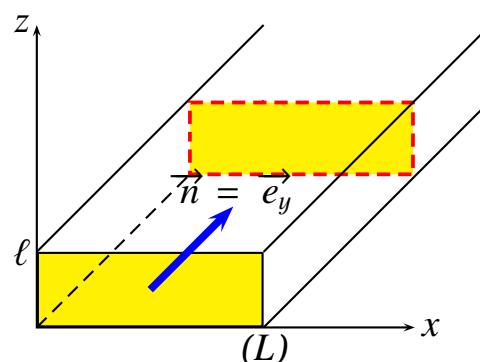
On pose

$$\vec{\mathbf{j}}_s = \lim_{\ell \rightarrow 0} \int_0^{\ell} \vec{\mathbf{j}} dy$$

Vecteur densité de courant surfacique

Et par conséquent

$$I = \int_0^L \vec{\mathbf{j}}_s \cdot \vec{n} dx$$



Si \vec{j}_s est uniforme alors $I = J_s L$

4. Pour un courant surfacique

$$\vec{j}_s = \sigma \vec{V}$$

Activité

Sphère chargée en volume en rotation uniforme autour de l'axe oz

Considérons une sphère de rayon R chargée uniformément en volume avec une densité volumique $\rho > 0$ en rotation uniforme autour de l'axe oz avec une vitesse angulaire ω .

On a $\vec{j} = \rho \vec{V}$ avec $\vec{V} = r\omega \sin \theta \vec{e}_\varphi$ ce qui donne

$$\vec{j} = \rho \omega r \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

Il en résulte que le courant I :

$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = r dr d\theta \vec{e}_\varphi$ ce qui donne

$$I = \int_0^R \int_0^\pi j dS \implies I = \frac{2}{3} \rho \omega R^3 = \frac{\rho \omega}{2\pi} V$$

Activité

Disque chargé en rotation uniforme autour de l'axe oz

On a $\vec{V} = r\omega \vec{e}_\theta \implies \vec{j}_s = \sigma r\omega \vec{e}_\theta$ ainsi $d\ell = dr \vec{e}_\theta$

donc

$$I = \int_0^R \vec{j}_s \cdot d\ell \implies I = \frac{1}{2} \sigma \omega R^2 = \frac{\sigma \omega}{2\pi} S$$

2.1.1.2 Équation locale de la conservation de la charge

Soit un volume \mathcal{V} délimité par la surface Σ contenant la charge q .

On note sa densité volumique de charge au point M à l'instant t par $\rho = \rho(M, t)$.

Par conséquent :

- à l'instant t on a : $q(t) = \iiint \rho(M, t) d\tau$

- à l'instant $t + dt$ on a : $q(t + dt) = \iiint \rho(M, t + dt) d\tau$
Lors de la durée dt le système a échangé la charge δq_e tel que

$$q(t) = q(t + dt) + \delta q_e \quad (E_1)$$

Remarquons que (E₁) traduit la conservation de la charge.

$$\text{Or } \frac{\delta q_e}{dt} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \implies \delta q_e = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$$

D'où (E₁) devient :

$$\iiint \rho(M, t) d\tau = \iiint \rho(M, t + dt) + \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} dt \implies \iiint [\rho(M, t + dt) - \rho(M, t)] d\tau = - \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$$

D'après le théorème Green-Ostrogradsky : $\iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint \mathbf{div} \vec{j} d\tau$ Il en résulte que

$$\mathbf{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

C'est l'équation locale de la conservation de la charge

Remarque

En régime stationnaire $\rho(M, t) = \rho(M)$ (ρ ne dépend pas du temps) on a

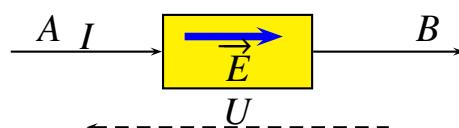
$$\mathbf{div} \vec{j} = 0 \implies \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

\vec{j} est à flux conservatif (c'est la loi des noeuds)

La charge entrante est égale à la charge sortante c'est à dire pas d'accumulation de charge dans un noeud.

2.1.1.3 Formulation locale de la loi d'Ohm

Considérons un conducteur AB traversé par un courant continu I du à une différence de potentielle $U = V_A - V_B > 0$



On applique la relation fondamentale de la dynamique sur un porteur de charge de masse m et de charge q dans un référentiel lié au conducteur supposé galiléen :

$$q\vec{E} - \lambda\vec{V} = m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

Avec $\lambda\vec{V}$ la force de frottement due aux chocs entre la particule chargée et les autres porteurs à l'intérieur du conducteur.

Ce qui donne

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{\lambda}{m}\vec{V} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

La solution de cette équation différentielle est

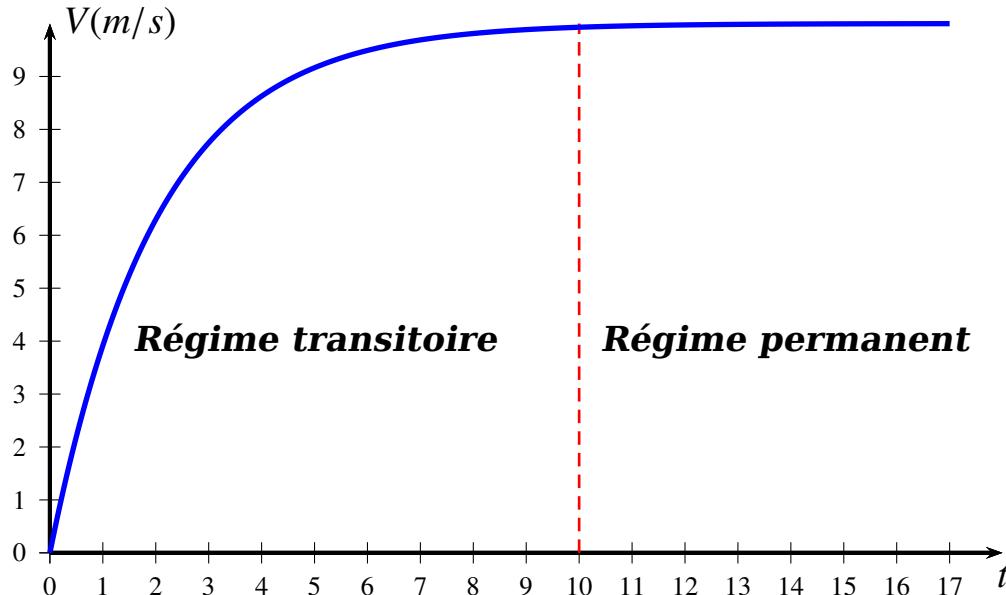
$$\vec{V}(t) = \vec{A} \exp(-\frac{\lambda}{m}t) + \frac{q}{\lambda}\vec{E}$$

Supposons qu'à $t = 0$ on a $\vec{V} = \vec{0}$ ce qui donne $\vec{A} = -\frac{q}{\lambda}\vec{E}$.

Il en résulte que

$$\boxed{\vec{V} = \frac{q}{\lambda}\vec{E}(1 - \exp(-\frac{\lambda}{m}t))}$$

Représentons la norme de la vitesse



En régime permanent on a : $\vec{V} = \frac{q}{\lambda}\vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \rho\vec{V}$ ce qui donne $\vec{j} = \frac{\rho q}{\lambda}\vec{E}$

On pose

$$\boxed{\gamma = \frac{\rho q}{\lambda} \quad (S.m^{-1})}$$

conductivité du conducteur

$$\rho_{res} = \frac{1}{\sigma} \quad (\Omega.m)$$

résistivité du conducteur

On rappelle que pour un conducteur cylindrique de section S et de longueur L on a la résistance R vaut

$$R = \rho_{res} \frac{L}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}$$

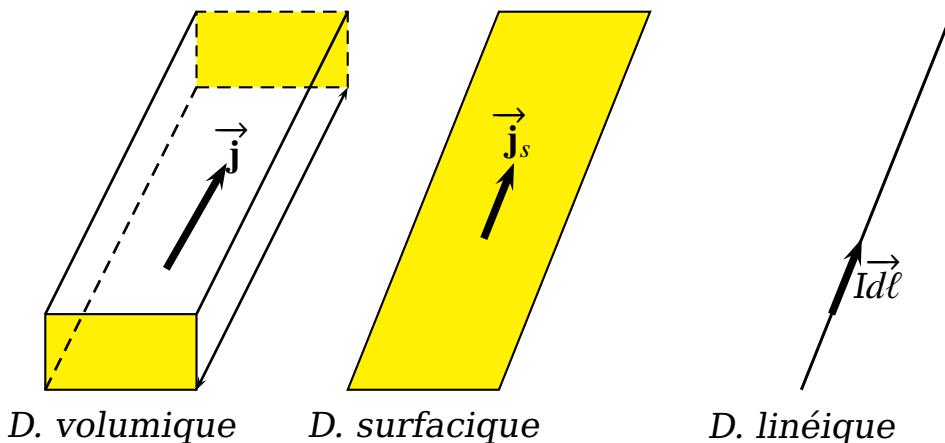
Il en résulte que en régime permanent

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

C'est la loi d'Ohm locale

2.1.2 Champ magnétostatique : loi de Biot et Savart

Soit (C) un circuit, parcouru par un courant continu I .
On appelle élément de courant la grandeur



$$d\vec{C} = I d\vec{\ell} = \vec{j}_s dS = \vec{j} d\tau$$

On admet que :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

C'est la loi de Biot et Savart

- Unité de B est le Tesla (T) ou le Gauss ($1T = 10^4 G$)
- μ_0 perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$
- Comme en électrostatique, le principe de superposition en magnétostatique reste valable :

$$\vec{B}_{Total} = \sum \vec{B}_i$$

- \vec{E} est un vrai vecteur par contre \vec{B} est un pseudo-vecteur (ou vecteur axial) puisque il découle d'un produit vectoriel (change de sens)

On rappelle que :

- Le champ électrostatique est un vrai vecteur (ou vecteur libre) appartenant au plan de symétrie et perpendiculaire au plan d'antisymétrie.
- le champ magnétique est un pseudo-vecteur (ou vecteur lié) **appartient au plan de d'antisymétrie et perpendiculaire au plan de symétrie**

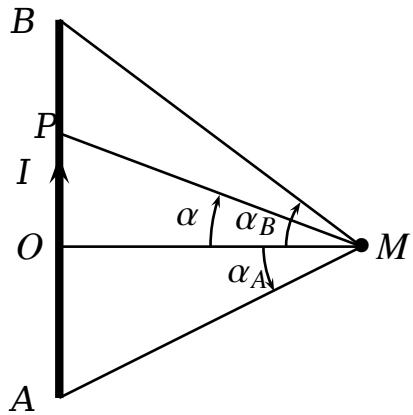
On récapitule que

	\vec{E}	\vec{B}
origine	charges fixes	charges mobiles
caractère vectoriel	vrai vecteur	pseudo-vecteur
plan de symétrie	appartient	perpendiculaire
plan d'antisymétrie	perpendiculaire	appartient

2.1.3 Applications

2.1.3.1 Segment traversé par un courant

Soit AB un segment parcourut par un courant électrique I , et M un point quelconque de l'espace



En coordonnées cylindriques (Oz est confondu avec AB) on a invariance par rotation autour de l'axe oz et par conséquent le champ magnétique ne dépend pas de l'angle et donc

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, z)$$

Puisque le plan ($ABM \equiv (\vec{e}_r, \vec{e}_z)$) est un plan de symétrie alors $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, z) = B(r, z) \vec{e}_\theta$

On applique la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Si on pose $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM} = \cos \alpha \vec{e}_r - \sin \alpha \vec{e}_z$ avec $d\vec{C} = Id\ell = Idz \vec{e}_z$ et $r = PM$ on obtient

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \vec{e}_z \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Sachant que $\vec{e}_z \wedge \vec{u} = \cos \alpha \vec{e}_\theta$ ainsi $z = r \tan \alpha \implies dz = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha$ ce qui donne :

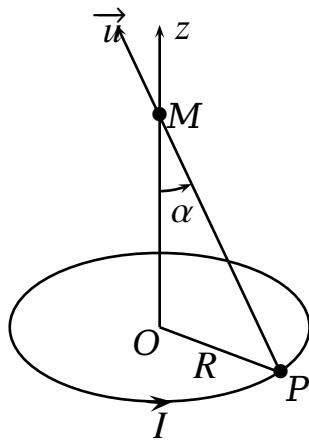
$$dB_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos \alpha d\alpha \implies \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_B - \sin \alpha_A) \vec{e}_\theta$$

Pour un fil infini ($\alpha_B \rightarrow \pi/2$ et $\alpha_A \rightarrow -\pi/2$) alors en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(\text{fil infini}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

2.1.3.2 Champ magnétique sur l'axe d'une spire circulaire

Soit une spire circulaire de rayon R traversée par un courant I et M un point de son axe Oz



En coordonnées cylindriques ; tout plan diamétral est un plan d'antisymétrie est par conséquent le champ magnétique est porté par oz .

Puisque on invariance par rotation autour de l'axe oz alors $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_z$ ainsi on a M sur l'axe $r = 0$ ce qui donne que $\vec{B}(M) = B(z) \vec{e}_z$.

La loi de Biot et Savart : $d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{u}}{PM^3}$

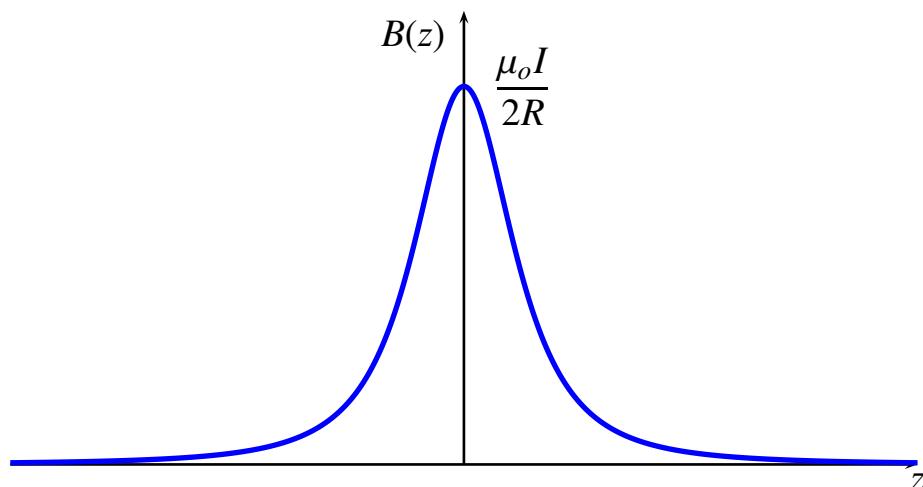
• $\vec{u} = \cos \alpha \vec{e}_z - \sin \alpha \vec{e}_r$ • $d\vec{C} = IRd\theta \vec{e}_\theta$ • $\sin \alpha = \frac{R}{PM}$ ce qui donne

$$dB(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \alpha d\theta \implies B(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Représentation graphique

On a :

- $B(z) = B(-z)$ fonction paire donc symétrique par rapport à l'axe oy
- $\lim_{z \rightarrow +\infty} B(z) = 0$
- $B(z = 0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$



Remarque

Si la spire contient N spires collées alors :

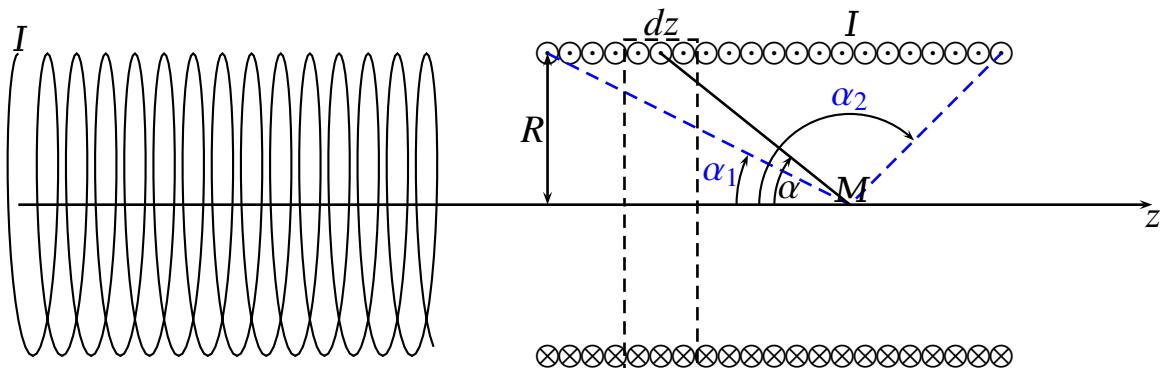
$$\vec{B}_T = N \vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

2.1.3.3 Champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde

Un solénoïde est constitué d'un enroulement d'un fil conducteur autour d'un cylindre. On suppose que ce fil est suffisamment mince pour pouvoir modéliser ce solénoïde comme une juxtaposition de spires coaxiales, avec n spires par unité de longueur. Chaque spire est alors parcourue par un courant permanent I . Comme pour la spire simple vue plus haut, les propriétés de symétrie du courant montrent que le champ magnétique du solénoïde, qui est la somme vectorielle du champ créé par chaque spire, est suivant z uniquement. Autour d'un point P situé en z , sur une épaisseur $dOP = dz$, il y a ndz spires

Avec $n = \frac{N}{L}$: nombre de spire par unité de longueur .

Ces spires créent donc un champ en un point M quelconque de l'axe.



$$\text{On a : } dB = \frac{\mu_0 Indz}{2R} \sin^3 \alpha \quad \text{Or } \tan \alpha = \frac{R}{z} \implies dz = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

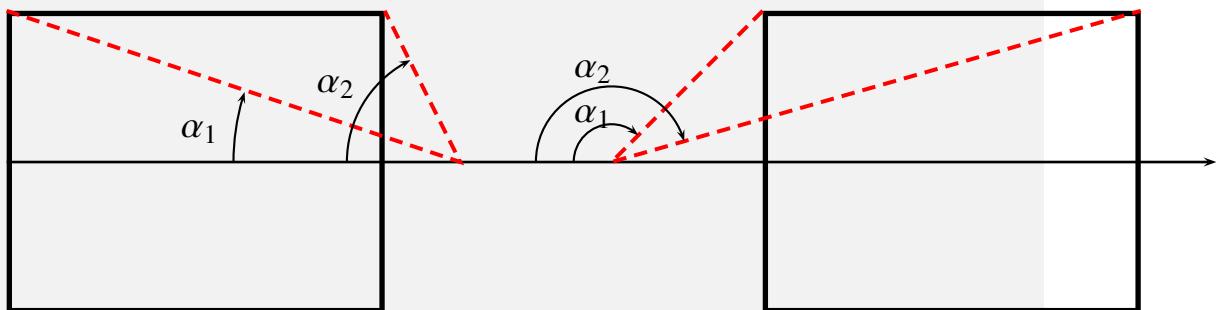
Attention au signe de dz qui doit être cohérent avec notre convention de signe. Ici $dz > 0$ pour un $d\alpha > 0$ le sens de α est opposé au sens trigonométrique.

le champ magnétique total s'écrit donc

$$dB = \frac{\mu_0 nI}{2} \sin \alpha \, d\alpha \implies \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 nI}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_z$$

Remarque

1. Si M à l'extérieur (à droite ou à gauche) du solénoïde alors les angles α_1 et α_2 sont déterminés à partir de l'axe oz ; en effet :



2. Solénoïde infini : $\alpha_1 \rightarrow 0$ et $\alpha_2 \rightarrow \pi$:

$$\vec{B}(M) = \mu_o n I \vec{e}_z$$

3. Au centre : $\alpha_1 = \pi - \alpha_2 = \alpha_c$:

$$\vec{B}(M_c) = \mu_o n I \cos \alpha_c \vec{e}_z$$

2.1.4 Propriétés du champ magnétique

2.1.4.1 Conservation du flux du champ magnétique

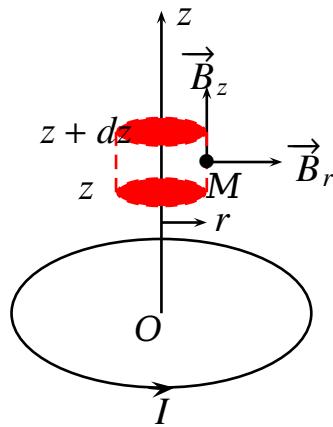
On admet que :

$$\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \implies \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

C'est à dire le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul (conservation du flux); autrement dit à travers une surface fermée le nombre de vecteur \vec{B} entrant est égal au nombre de vecteur \vec{B} sortant.

Activité

Déterminons le champ magnétique en un point M très proche de l'axe oz : $M(r, z)$



On a le plan (\vec{e}_r, \vec{e}_z) est un plan d'antisymétrie et par conséquent $\vec{B}(M) = \vec{B}_r(M) + \vec{B}_z(M)$
ainsi on a invariance par rotation autour de l'axe oz; ce qui donne

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z$$

Sachant que $\iint_{\Sigma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0$ on prend comme surface fermée Σ un cylindre de génératrice l'axe oz, de hauteur dz et de rayon r . Par conséquent :

$$\iint_{\Sigma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0 \implies \iint_{S_{inf}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{sup}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{lat}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Ce qui donne :

$$-B_z(z)\pi r^2 + B_z(z+dz)\pi r^2 + 2\pi r dz B_r = 0 \implies$$

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} \implies B_r(r, z) = \frac{3}{4} \frac{\mu_o I R^2 r z}{(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\text{Avec } B_z = \frac{\mu_o I}{2R} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_o I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

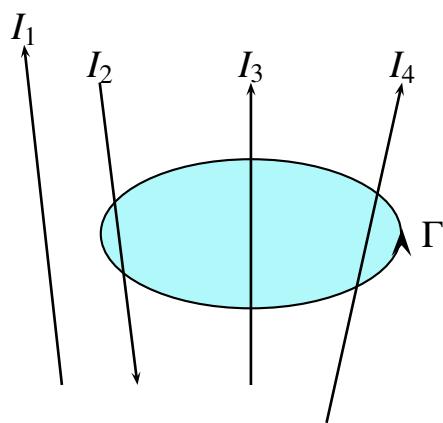
2.1.4.2 Théorème d'Ampère

On admet que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_o \sum I_i (\text{enlacé}) = \mu_o I_e$$

C'est le théorème d'Ampère

N.B : I_i est un courant enlacé s'il traverse la surface délimité par le contour Γ



Dans ce cas

$$I_e = -I_2 + I_3 + I_4$$

2.1.5 Autres Applications

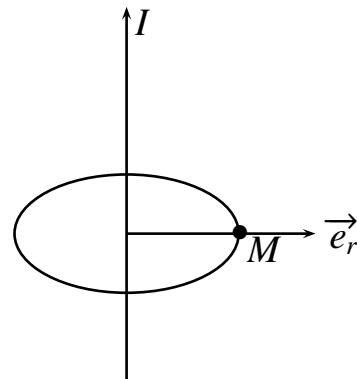
2.1.5.1 Champ magnétique d'un fil infini traversé par un courant I

En coordonnées cylindriques on a :

- Le plan (\vec{e}_r, \vec{e}_z) est un plan de symétrie et par conséquent $\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta$
- Symétrie cylindriques $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta$

Appliquons le théorème Ampère avec le contour (Γ) un cercle de rayon r .

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\ell = \mu_o I_e \implies B(r) 2\pi r = \mu_o I \quad \text{ce qui donne}$$

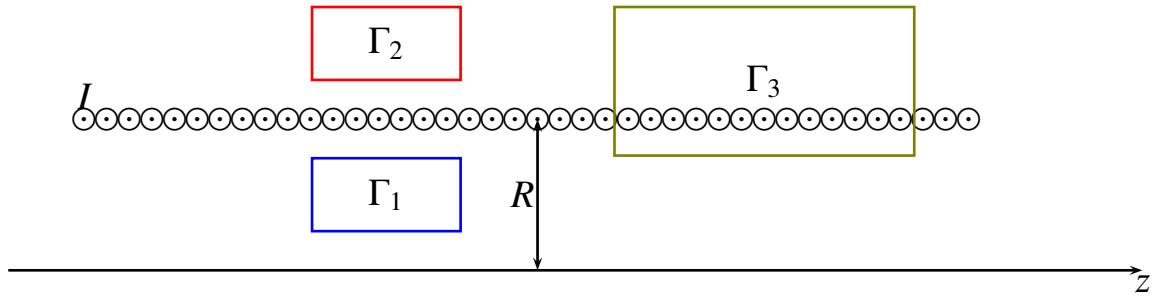


$$\vec{B}(M)_{fil\,infini} = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$



2.1.5.2 Solénoïde infini traversé par un courant I

Considérons un solénoïde infini, comportant N spires par unite de longueur, chacune parcourue par un courant I permanent. Étant donné la géométrie cylindrique du solénoïde, on se place en coordonnées cylindriques, l'axe z étant l'axe du solénoïde.



Symétrie et invariance donne : $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$

En utilisant le théorème d'Ampère pour les trois contours Γ_1, Γ_2 et Γ_3 :

► Pour le contour Γ_1 :

$$\underbrace{\int_{AB} \vec{B} \cdot d\ell}_{B(r_1)L} + \underbrace{\int_{BC} \vec{B} \cdot d\ell}_{0(\perp)} + \underbrace{\int_{CD} \vec{B} \cdot d\ell}_{-B(r_2)L} + \underbrace{\int_{DA} \vec{B} \cdot d\ell}_{0(\perp)} = 0 \text{ ce qui donne}$$

$$B(r_1) = B(r_2) \quad \forall (r_1, r_2) < R$$

Il en résulte qu'à l'intérieur du solénoïde le champ magnétique est uniforme.

► Pour le contour Γ_2 :

$$\underbrace{\int_{AB} \vec{B} \cdot d\ell}_{B(r_1)L} + \underbrace{\int_{BC} \vec{B} \cdot d\ell}_{0(\perp)} + \underbrace{\int_{CD} \vec{B} \cdot d\ell}_{-B(r_2)L} + \underbrace{\int_{DA} \vec{B} \cdot d\ell}_{0(\perp)} = 0 \text{ ce qui donne } B(r_1) = B(r_2)$$

comme le champ magnétique est nul pour $r \rightarrow \infty$ alors en dehors du solénoïde le champ magnétique est nul.

► Pour le contour Γ_3 :

$$\underbrace{\int_{AB} \vec{B} \cdot d\ell}_{BL} + \underbrace{\int_{BC} \vec{B} \cdot d\ell}_{0(\perp)} + \underbrace{\int_{CD} \vec{B} \cdot d\ell}_{0} + \underbrace{\int_{DA} \vec{B} \cdot d\ell}_{0} = \mu_o n L I \text{ ce qui donne}$$

$$B(r < R) = \mu_0 n I$$

Champ uniforme à l'intérieur du solénoïde

2.1.5.3 Cylindre infini traversé par un courant I

Soit un cylindre infini d'axe oz de rayon R traversé par un courant continu I .

Déterminons le champ magnétique en tout point M de l'espace.

Puisque on a :

- Invariances par translation et rotation autour de l'axe oz .
- $(\vec{e}_r, \vec{e}_z) = \Pi_S$

On conclut que $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta$

Puisque B ne dépend que de r alors on choisit comme contour d'Ampère un cercle de rayon r et d'axe oz .

► **M à l'intérieur ($r < R$)** $\oint \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 I_e$

Comme $\oint \vec{B} \cdot d\ell = B(r)2\pi r$ et $I_e = jS \implies I_e = \pi r^2 \frac{I}{\pi R^2}$ c'est à dire

$$B(r < R) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

► **M à l'extérieur ($r > R$)** $\oint \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 I_e$

Comme $\oint \vec{B} \cdot d\ell = B(r)2\pi r$ et $I_e = I$ c'est à dire

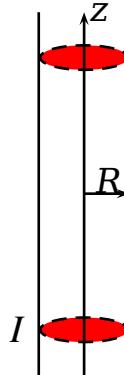
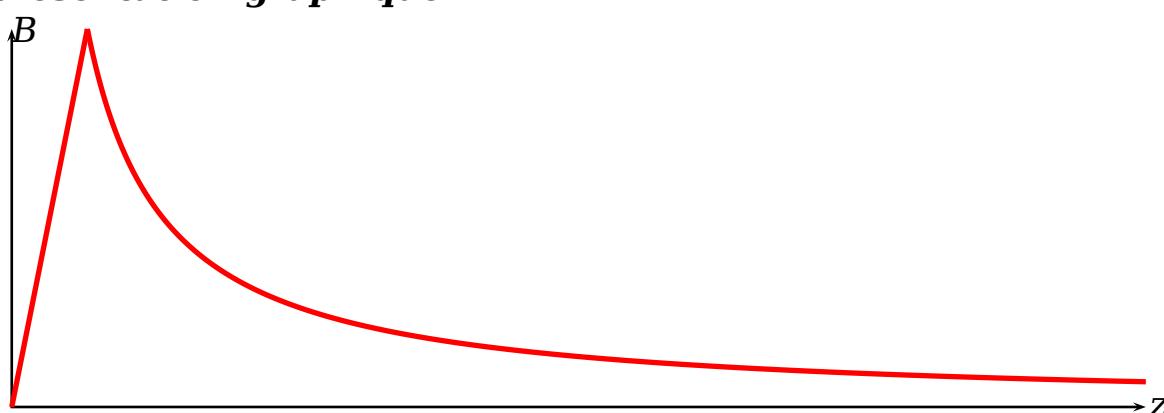
$$B(r > R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

On vérifie bien que

$$B(R^+) = B(R^-)$$

C'est à dire pour une distribution volumique le champ magnétique est bien continu.

Representation graphique



2.1.5.4 Ruban infini traversé par un courant surfacique

Le champ magnétostatique créé par le ruban de largeur dy , de longueur $L \gg h$ (assimilé à un fil infini) et parcouru par un courant $dI = j_s dy$, est, d'après le théorème d'Ampère :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j_s}{2\pi r} dy \vec{u} \quad \text{avec } r = (z^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Le plan (xOz) est un plan de symétrie, donc $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan :

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_y$$

d'où :

$$\begin{aligned} B(M) &= \vec{B}(M) \cdot \vec{e}_y = \frac{\mu_0 j_s}{2\pi} \int_{-h}^{+h} \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_y}{(z^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} dy \\ &= -\frac{\mu_0 j_s}{2\pi} \int_{-h}^{+h} \frac{\cos \alpha}{(z^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} dy = -\frac{\mu_0 j_s}{2\pi} \int_{-h}^{+h} \frac{z}{z^2 + y^2} dy \\ &= -\frac{\mu_0 j_s}{\pi} \arctan \frac{h}{z} \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 j_s}{\pi} \arctan \frac{h}{z} \vec{e}_y$$

Plan infini implique $h \rightarrow \infty$, d'où :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_y & \text{si } z > 0 \\ \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_y & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

La relation de passage du champ magnétique en $z = 0$ est :

$$\vec{B}(0^+) - \vec{B}(0^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z$$

On a d'après la question précédente :

$$\vec{B}(0^+) - \vec{B}(0^-) = -\mu_0 j_s \vec{e}_y$$

D'autre part :

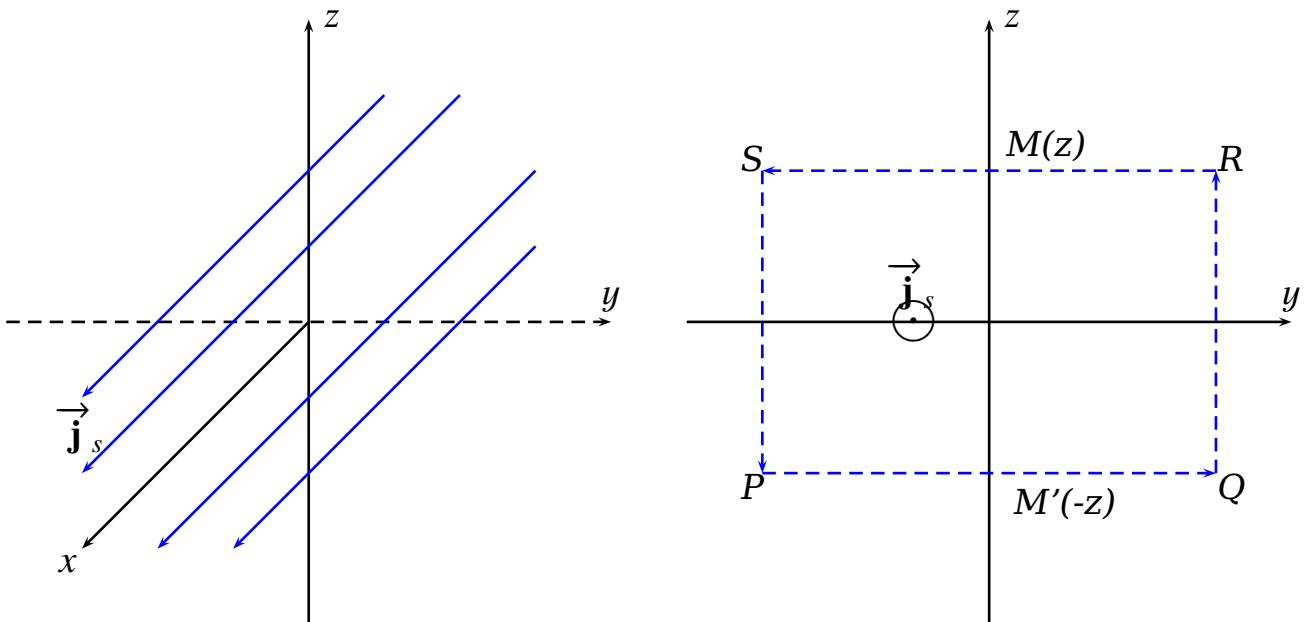
$$\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z = \mu_0 j_s \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = -\mu_0 j_s \vec{e}_y$$

d'où la relation de passage est vérifiée.

2.1.5.5 Nappe infinie traversé par un courant surfacique

Soit une nappe infinie confondue avec le plan xoy traversée par un courant surfacique $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_x$ avec $j_s > 0$.

Déterminons le champ magnétique en $M \in oz$



En coordonnées cartésiennes on a :

- Invariances par translation suivant les axes ox et oy ce qui donne $\vec{B}(M) = \vec{B}(x)$.
- Le plan xoz est un plan de symétrie, donc $\vec{B}(M) = B(z) \vec{e}_y$

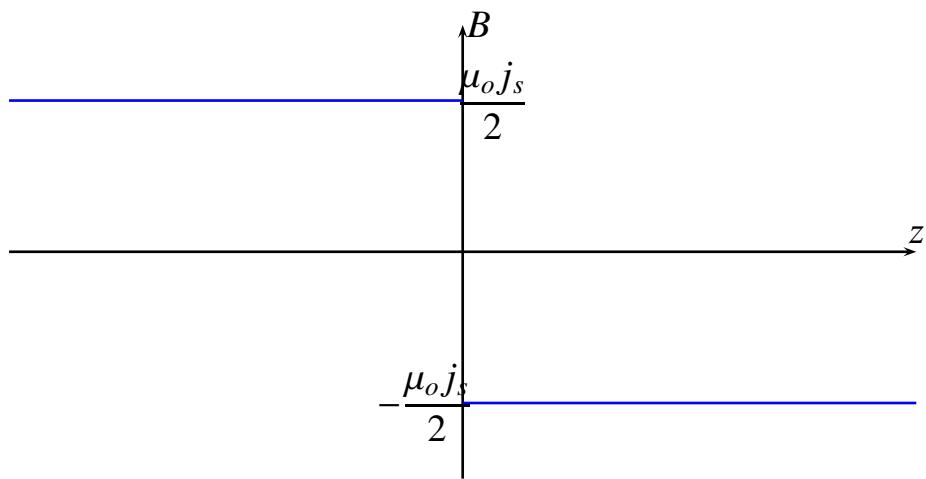
Soit le contour $\Gamma = PQRS P$:

- On a : $I_e = j_s L$ avec $PQ = L$
- $\oint \vec{B}(M) \cdot d\ell = [-B(z) + B(-z)]L$
- $B(-z) = -B(z)$

Le théorème d'Ampère donne

$$\vec{B}(z) = -\text{signe}(z) \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_y$$

C'est un champ uniforme



On vérifie bien que : $\vec{B}(z) - \vec{B}(-z) = -\mu_0 j_s \vec{e}_y$

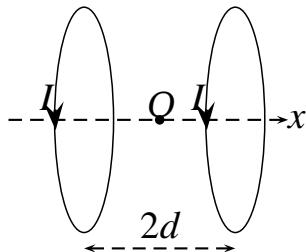
Or $\vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x$ ce qui donne $\vec{B}(z) - \vec{B}(-z) = \mu_0 j_s (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z)$

Sachant que : $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_x$ et $\vec{e}_z = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ alors

$$\boxed{\vec{B}(z) - \vec{B}(-z) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}}$$

C'est la relation de passage

2.1.5.6 Bobines de Helmholtz



Puisque $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ (théorème de superposition) ainsi $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{(R^2 + (x+d)^2)^{3/2}} \vec{e}_x$

et $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{(R^2 + (x-d)^2)^{3/2}} \vec{e}_x$

Ce qui donne que

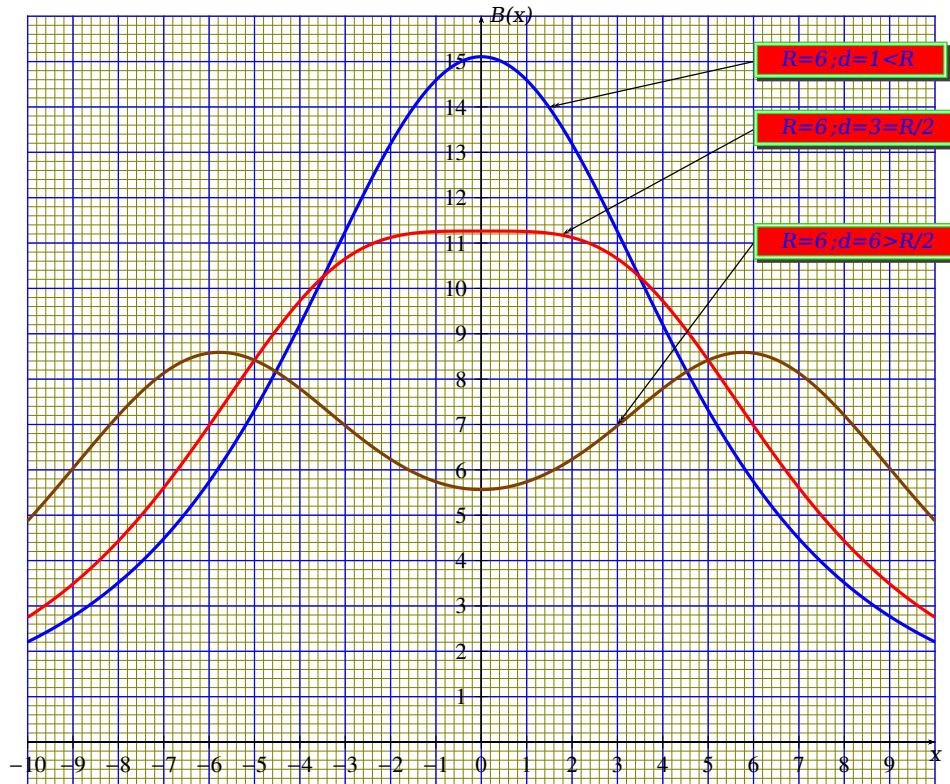
$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left(\frac{1}{(R^2 + (x+d)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (x-d)^2)^{3/2}} \right) \vec{e}_x}$$

On remarque que $B(x)$ est une fonction paire $B(-x) = B(x)$.

Faisons un DL au voisinage de $x = 0$ de $B(x)$

$$B(x) \simeq \frac{2}{(\frac{R^2 + d^2}{R^2})^{(3/2)}} - \frac{3(R^2 - 4d^2)}{(\frac{R^2 + d^2}{R^2})^{(3/2)} (R^2 + d^2)^2} x^2 + \frac{15(R^4 - 12R^2 d^2 + 8d^4)}{4(\frac{R^2 + d^2}{R^2})^{(3/2)} (R^2 + d^2)^4} x^4 + O(x^5)$$

$B(x)$ est uniforme à l'ordre 4 si $\diamond R = 2d \diamond$ C'est à dire la distance entre les deux bobines est égale au rayon de la bobine.



On peut donc considérer, avec une bonne approximation, que le champ magnétostatique est uniforme au milieu des deux bobines de Helmoltz lorsqu'elles sont distantes du rayon commune des bobines R .

Activité

Champ magnétique tournant

Considérons deux paires identiques de bobines de Helmholtz d'axes perpendiculaires ox et oy .

Donc : $\vec{B}_1 = \mu_0 n i_1 \vec{e}_x$ et $\vec{B}_2 = \mu_0 n i_2 \vec{e}_y$ avec $i_1 = I_o \cos \omega t$ et $i_2 = I_o \sin \omega t$.
Le champ magnétique résultant :

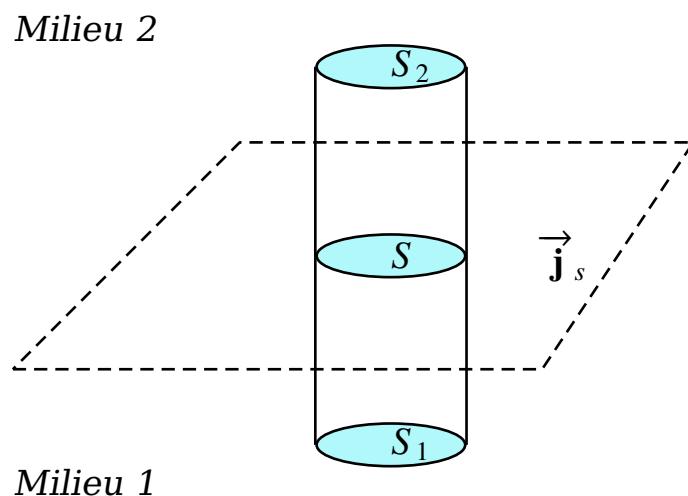
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \implies \vec{B} = \mu_0 n I_o \vec{e}_r$$

C'est un champ magnétique tournant

2.1.6 Relation de passage

2.1.6.1 La composante normale

Soit une distribution surfacique de courant \vec{j}_s séparant l'espace en deux régions 1 et 2. Considérons une surface fermée fictive Σ , traversant la nappe de courant.



La conservation du flux magnétique à travers cette surface s'écrit :

$$\oint_{\Sigma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_L} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Où S_L est la surface latérale et S_1 et S_2 les surfaces de bases inférieure et supérieure.

Lorsqu'on fait tendre la surface latérale vers zéro (S_1 tend vers S_2), on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \iint_{S_1=S_2} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot d\vec{S} &= 0 \end{aligned}$$

Puisque : $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2 = dS \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$

Dans cette limite. Ce résultat étant valable quelque soit la surface S choisie, il vient donc que :

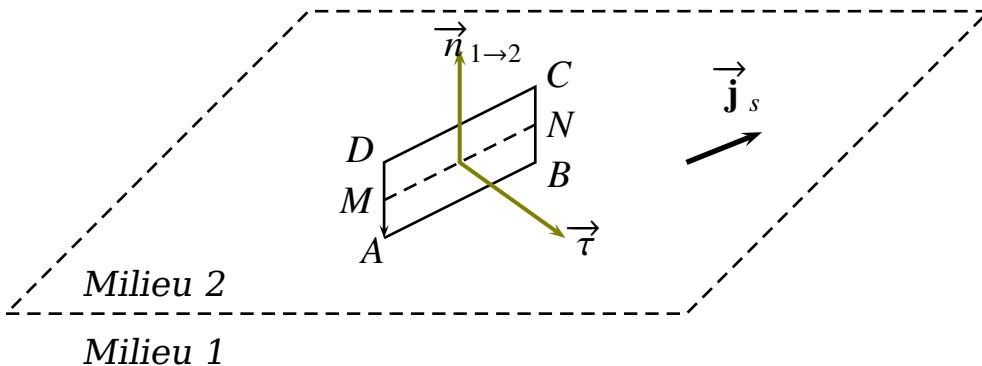
$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 \implies B_{2n} = B_{1n}$$

La composante normale du champ magnétostatique est continue

2.1.6.2 La composante tangentielle

Pour la composante tangentielle, nous allons utiliser le théorème d'Ampère.

Considérons le contour d'Ampère suivant :



Remarquons que :

- $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}, \vec{\tau}$ et $\vec{b} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN}$ est un trièdre direct.
- $\vec{j}_s \in (\vec{\tau}, \vec{b})$.

- $I_e = \iint_{ABCD} \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{S} \implies I_e = \int_{MN} (\vec{\mathbf{j}}_s \cdot \vec{\tau}) d\ell$

Le théorème d'Ampère s'écrit alors :

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_o I_e$$

Lorsque $DA \rightarrow 0$ alors on a :

$$\int_{MN} (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot d\vec{\ell} = \int_{MN} (\mu_o \vec{\mathbf{j}}_s \cdot \vec{\tau}) d\ell$$

Puisque MN est quelconque alors

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot d\vec{\ell} = (\mu_o \vec{\mathbf{j}}_s \cdot \vec{\tau}) d\ell$$

Or $d\vec{\ell} = d\ell \vec{b} \implies d\ell(\vec{\tau} \wedge -\vec{n}_{1 \rightarrow 2})$ ce qui donne

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot d\ell(\vec{\tau} \wedge -\vec{n}_{1 \rightarrow 2}) = \mu_o \vec{\mathbf{j}}_s \cdot (\vec{\tau} d\ell)$$

On rappelle que

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

Permutation circulaire

Il en résulte puisque MN est quelconque (la direction du vecteur $\vec{\tau}$ est quelconque) que

$$[(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}] \cdot \vec{\tau} d\ell = \mu_o \vec{\mathbf{j}}_s \cdot \vec{\tau} d\ell$$

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \mu_o \vec{\mathbf{j}}_s \implies (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_o \vec{\mathbf{j}}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue.

Puisque

$$[(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}] \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)$$

2.1.7 Potentiel vecteur. Forme locale du théorème d'Ampère

2.1.7.1 Définition

On rappelle que le champ magnétique est à flux conservatif c'est à dire

$$\iint_{\Sigma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0 \implies \mathbf{div} \vec{B}(M) = 0$$

Or pour tout vecteur \vec{V} quelconque

$$\operatorname{div} \vec{\text{rot}} \vec{V} = 0 \quad \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\wedge} \vec{V})}_{\perp} = 0$$

il en résulte que

$$\operatorname{div} \vec{B}(M) = 0 \iff \vec{B}(M) = \vec{\text{rot}} \vec{A}(M)$$

$\vec{A}(M)$ est appelé potentiel vecteur.

Remarque

1. \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire $V(M)$ par contre $\vec{B}(M)$ dérive d'un **potentiel vecteur** $\vec{A}(M)$.
2. Le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ présente les mêmes symétries que la source du champs (I ou \vec{j}).
3. Le potentiel vecteur \vec{A} n'est pas unique, en effet si on pose

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\text{grad}} f$$

avec f une fonction scalaire quelconque alors

$$\vec{\text{rot}} \vec{A}' = \vec{\text{rot}} \vec{A} + \vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} f(M) \implies \vec{\text{rot}} \vec{A}' = \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$$

On retient que :

Le champ magnétique \vec{B} est unique par contre le potentiel vecteur \vec{A} est défini à un $\vec{\text{grad}}$ près

4. **Relation intégrale entre \vec{A} et \vec{B} :**

On applique le théorème Stokes pour le potentiel vecteur

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\ell = \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Ce qui donne sachant que $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\ell = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Activité

Considérons un fil rectiligne infini traversé par un courant I constant.

Déterminons le potentiel vecteur \vec{A} avec $\vec{A}(r = R) = \vec{0}$. par les relations locale et intégrale

on rappelle que : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

Ainsi :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Le courant I à le même sens que \vec{e}_z et par conséquent $\vec{A}(M) = A_z(r) \vec{e}_z$

Première méthode : Relation locale

On a $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ ce qui donne :

$$\begin{cases} B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B_z = \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ 0 = \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{cases}$$

Il en résulte que : $\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{d A_z}{d r} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ Ce qui donne

$$\vec{A}(M)_{\text{fil infini}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \vec{e}_z$$

Deuxième méthode : Relation intégrale

Soit le contour Γ : rectangle de largeur dr et de longueur h .

► $\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\ell = \int_{PQ} \vec{A} \cdot d\ell + \int_{QR} \vec{A} \cdot d\ell + \int_{RS} \vec{A} \cdot d\ell + \int_{SP} \vec{A} \cdot d\ell$

$$\implies \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\ell = (A_z(r+dr) - A_z(r))h.$$

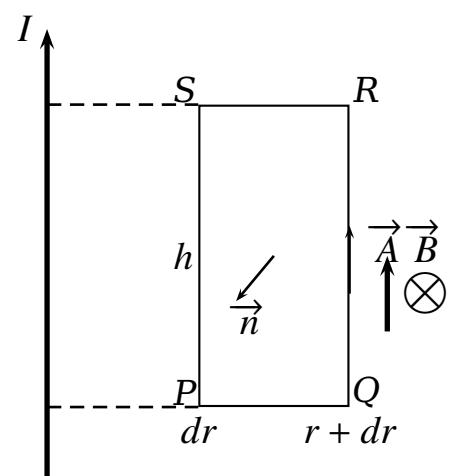
► $\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -Bh dr$

Il en résulte que :

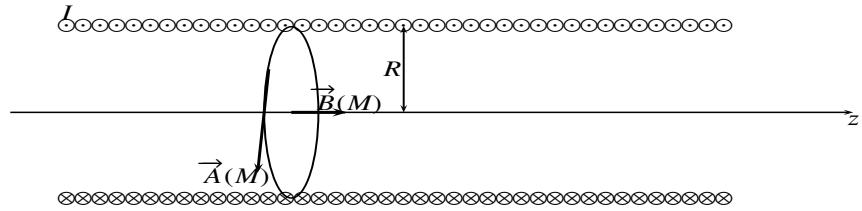
$$(A_z(r+dr) - A_z(r))h = -Bh dr \implies \frac{dA_z}{dr} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Ce qui donne avec $A_z(R) = 0$:

$$\vec{A}(M)_{\text{fil infini}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \vec{e}_z$$



Application 9 : Solénoïde infini



Symétrie et invariance donne $\vec{A}(M) = A(r) \vec{e}_\theta$ donc Γ est un cercle de rayon r . On rappelle que $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$.

► Pour $r < R$:

$$\oint \vec{A}(M) \cdot d\ell = \iint \vec{B} \cdot dS \implies 2\pi r A(r) = \mu_0 n I \pi r^2 \text{ ce qui donne}$$

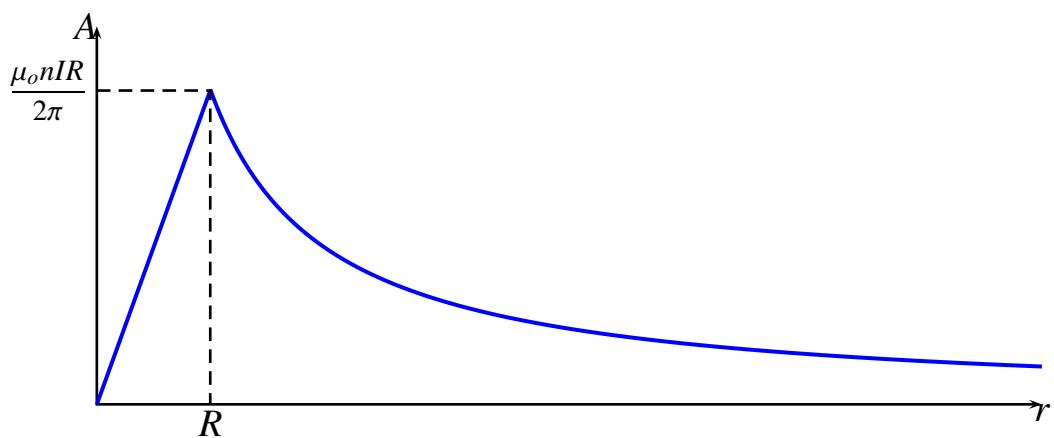
$$\vec{A}(r < R) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi} r \vec{e}_\theta$$

► Pour $r > R$:

$$\oint \vec{A}(M) \cdot d\ell = \iint \vec{B} \cdot dS \implies 2\pi r A(r) = \mu_0 n I \pi R^2 \text{ ce qui donne}$$

$$\vec{A}(r > R) = \frac{\mu_0 n I R^2}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Représentation graphique :



2.1.7.2 Forme locale du théorème d'Ampère

On rappelle que $\oint \vec{B}(M) \cdot d\ell = \mu_0 I_e$
 Or d'après le théorème de Stokes : $\oint \vec{B}(M) \cdot d\ell = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{\text{rot}} \vec{B}(M) \cdot dS$

Ainsi $I_e = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$ ce qui donne

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}(M) = \mu_o \vec{j}$$



C'est l'équation de Maxwell-Ampère simplifiée

Remarque

Comparaison des lois de conservation pour \vec{E} et \vec{B} en régime stationnaire

	Flux	Circulation
\vec{E}	<ul style="list-style-type: none"> ▷ Non conservé ▷ $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (M.G) ▷ $\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ (T.G) 	<ul style="list-style-type: none"> ▷ Conservée ▷ $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ ▷ $\oint \vec{E} \cdot d\ell = 0$
\vec{B}	<ul style="list-style-type: none"> ▷ conservé ▷ $\text{div } \vec{B} = 0$ (M.T) ▷ $\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> ▷ Non Conservée ▷ $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_o \vec{j}$ (M.A) ▷ $\oint \vec{B} \cdot d\ell = \mu_o I_e$

2.1.8 Équation de Poisson de la magnétostatique

On rappelle que $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A})$
 Or $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

Puisque le potentiel vecteur \vec{A} n'est pas unique, et si on impose au potentiel vecteur \vec{A} de vérifier la jauge de Coulomb **valable en régime stationnaire**

$$\text{div } \vec{A} = 0$$

Jauge de Coulomb

Alors on obtient

$$\Delta \vec{A} + \mu_o \vec{j} = \vec{0}$$

C'est l'équation de Poisson de la magnétostatique

Remarque

L'équation vectorielle de Poisson est équivalente à trois équations scalaires (projetées sur les axes); en coordonnées cartésiennes par exemple elle est équivalente à :

$$\Delta \vec{A} + \mu_o \vec{j} = \vec{0} \implies \begin{cases} \Delta A_x + \mu_o j_x = 0 \\ \Delta A_y + \mu_o j_y = 0 \\ \Delta A_z + \mu_o j_z = 0 \end{cases}$$

Si on compare les équations de Poisson pour le potentiel électrostatique $V(M)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$

Électrostatique	Magnétostatique
$\Delta V(M) + \frac{1}{\epsilon} \rho = 0$	$\Delta \vec{A} + \mu_o \vec{j} = \vec{0}$
$V(M)$	$\vec{A}(M)$
ρ	\vec{j}
$\frac{1}{\epsilon_o}$	μ_o

Par analogie on montre que la solution de l'équation de Poisson pour la magnétostatique lorsque le potentiel vecteur vérifie la jauge de Coulomb pour une **distribution finie**

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{dC}}{PM}$$

C'est à dire

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{dC}}{PM} \xrightarrow[\text{volumique}]{\text{Distribution}} \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j} d\tau}{r} \xrightarrow[\text{surfacique}]{\text{Distribution}} \frac{\mu_o}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{j}_s dS}{r} \xrightarrow[\text{linéique}]{\text{Distribution}} \frac{\mu_o}{4\pi}$$

Remarque

1. Pour une **distribution infinie**, le calcul du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ se fait à partir de la relation $\vec{B}(M) = \vec{\text{rot}} \vec{A}(M)$.
2. Le potentiel vecteur \vec{A} est un vrai vecteur et par conséquent possède les même propriétés que le champ \vec{E}

$$\vec{A} \in \Pi_S \quad ; \quad \vec{A} \perp \Pi_A$$

En plus possède le même sens que le courant

2.1.9 Applications (énoncé voir TD)

 1 Potentiel vecteur d'un champ stationnaire uniforme.

En coordonnées cartésiennes On a : $\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$ et $\vec{B} = B_o \vec{e}_z$ donc

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & x \\ 0 & y \\ B_o & z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \implies \vec{A} = \begin{cases} A_x = -\frac{1}{2} B_o y \\ A_y = \frac{1}{2} B_o x \\ A_z = 0 \end{cases}$$

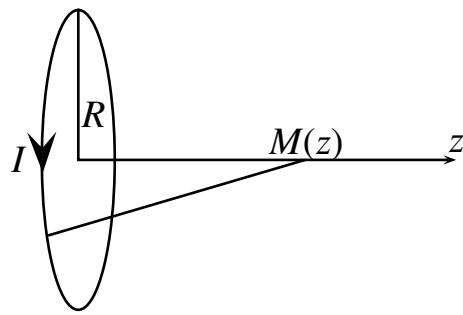
\vec{A} est un potentiel vecteur vérifiant la jauge de Coulomb si $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ et $\vec{\text{div}} \vec{A} = 0$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{\text{rot}} \vec{A} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2} B_o y \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} B_o x \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} B_o + \frac{1}{2} B_o = B_o \end{cases} \implies \vec{\text{rot}} \vec{A} = B_o \vec{e}_z. \\ \bullet \quad \vec{\text{div}} \vec{A} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial(B_o y)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(B_o x)}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

on retient que si \vec{B} est un champ magnétostatique alors il dérive d'un potentiel vecteur vérifiant la jauge de Coulomb

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B}_o \wedge \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{B}_o \wedge \vec{r}$$

 2 Spire circulaire



$$\begin{aligned}
 \vec{A}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Id\ell}{PM} \implies \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{R d\theta \vec{e}_\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}} \\
 &\implies \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi \sqrt{R^2 + z^2}} \oint d\theta \vec{e}_\theta \\
 &\implies \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi \sqrt{R^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z) d\theta
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{A}(M \in oz)_{\text{Spire circulaire}} = \vec{0}}$$

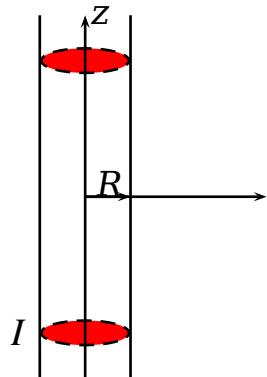
3 ◊ Cylindre infini

Symétrie et invariance donne :

$$\vec{A}(M) = A_z(r) \vec{e}_z$$

On rappelle que

$$\begin{cases} r \leq R \implies \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{e}_\theta \\ r \geq R \implies \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \\ \vec{B} = \vec{rot} \vec{A} \implies \frac{dA_z(r)}{dr} = B_\theta \end{cases}$$



ce qui donne :

$$A(r) = - \int B(r) dr$$

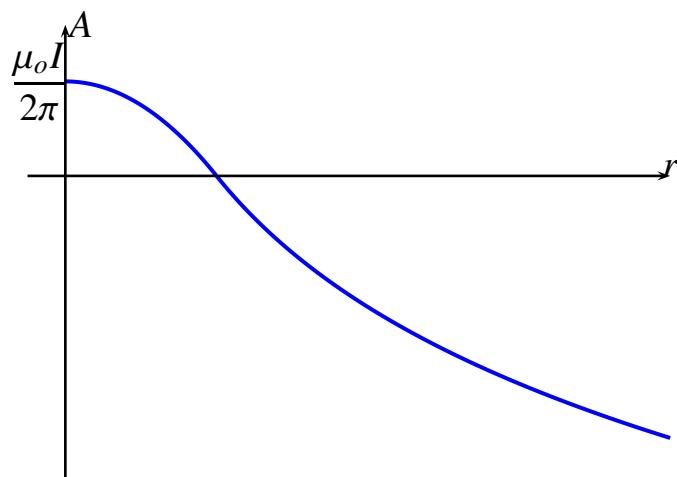
► Pour

$$\boxed{r \leq R \implies A = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} (R^2 - r^2)}$$

► Pour

$$\boxed{r \geq R \implies A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r}}$$

Représentation graphique



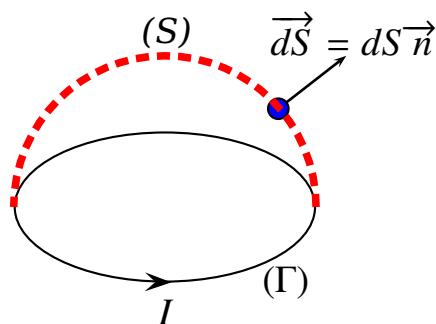
2.2 Dipôle magnétique

2.2.1 Définition. Moment magnétique

Définition

On appelle dipôle magnétique une boucle de courant.

En effet : Soit (Γ) un circuit linéaire fermé parcouru par un courant I



(S) est une surface quelconque s'appuyant sur le boucle (Γ) .

► On caractérise le dipôle magnétique par son moment dipolaire $\vec{\mathcal{M}}$ définie par

$$\vec{\mathcal{M}} = I \iint_{(S)} \vec{dS} \quad (A.m^2)$$

Remarques

1. En pratique puisque la surface (S) est quelconque on prend la surface de la boucle.

Exemples :

- Spire circulaire de rayon R : $\vec{\mathcal{M}} = I\pi R^2 \vec{e}_z$.
- Spire carrée de côté a : $\vec{\mathcal{M}} = Ia^2 \vec{e}_z$

2. sachant que $d\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{OM} \wedge d\vec{OM}$ alors :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \oint_{(\Gamma)} I\vec{OM} \wedge d\vec{OM} \implies \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \oint \vec{OM} \wedge Id\vec{OM}$$

Or $Id\vec{OM} = d\vec{C} = \vec{j}_s dS = \vec{j} d\tau$ ce qui donne

$$\vec{\mathcal{M}} = IS\vec{n} = I \iint d\vec{S} = \frac{1}{2} \oint \vec{OM} \wedge Id\vec{OM} = \frac{1}{2} \iint \vec{OM} \wedge \vec{j}_s dS = \frac{1}{2} \iiint \vec{OM} \wedge \vec{j} d\tau$$

Activité

Déterminer le moment magnétique :

1. D'un disque, de rayon R , chargé par une densité surfacique de charge σ en rotation uniforme autour de son axe à la vitesse ω (constante).
2. D'une sphère, de rayon R , chargée par une densité volumique ρ en rotation uniforme autour de l'un de ses axes à la vitesse ω constante.
3. D'une sphère, de rayon R , parcourue par un courant surfacique $\vec{j}_s = J_o \sin \theta \vec{e}_\varphi$.

Correction

1. On a $d\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\vec{OM} \wedge d\vec{C}$ avec $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ et $d\vec{C} = \vec{j}_s dS \implies d\vec{C} = \sigma r \omega \vec{e}_\theta dS$ ce qui donne : $d\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} r^2 \omega r dr d\theta \vec{e}_z$ et par conséquent

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{4} \sigma \pi \omega R^4 \vec{e}_z$$

Où bien on subdivise le disque en des couronnes élémentaires de largeur dr , son moment magnétique élémentaire s'écrit :

$d\vec{\mathcal{M}} = \pi r^2 i \vec{e}_z$ avec $i = \sigma r \omega dr$ ce qui donne :

$$d\vec{\mathcal{M}} = \sigma \omega r^3 dr \vec{e}_z \Rightarrow \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{4} \sigma \pi \omega R^4 \vec{e}_z$$

2. Soit une sphère chargée uniformément en volume (ρ) de rayon R en rotation uniforme autour de l'axe oz.

Le moment magnétique de la sphère s'écrit : $\vec{\mathcal{M}} = \mathfrak{M} \vec{e}_z$.

Sachant que : $d\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \vec{OM} \wedge \vec{dC}$.

Avec $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ et $\vec{dC} = \vec{j} d\tau = \rho \vec{V} d\tau \Rightarrow \vec{dC} = \rho r \omega \sin \theta d\tau \vec{e}_\varphi$

Ce qui permet d'écrire que $d\vec{\mathcal{M}} = -\frac{1}{2} \rho r^2 \omega \sin \theta d\tau \vec{e}_\theta$

Par projection sur \vec{e}_z on trouve :

$d\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{2} \rho r^4 \omega \sin^2 \theta dr d\theta d\varphi \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ et par intégration on trouve

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{4}{15} \pi \rho \omega R^5 \vec{e}_z$$

Ou bien on décompose la sphère en des couronnes élémentaires de section $rdrd\theta$.

La couronne élémentaire possède un moment magnétique élémentaire :

$$d\vec{\mathcal{M}} = \pi (r \sin \theta)^2 di \vec{e}_z$$

avec di le courant élémentaire qui traverse la section de la couronne élémentaire qui vaut

$$di = \rho V dr rd\theta \Rightarrow di = \rho r^2 \omega \sin \theta dr d\theta$$

Par conséquent :

$$d\vec{\mathcal{M}} = \pi \rho \omega r^4 \sin^3 \theta dr d\theta \vec{e}_z$$

On rappelle que :

$$\int_0^\pi \sin^3 x dx = \frac{4}{3}$$

Il en résulte que

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{4}{15} \pi \rho \omega R^5 \vec{e}_z$$

3. La sphère, de rayon R , parcourue par un courant surfacique $\vec{j}_s = J_o \sin \theta \vec{e}_\varphi$.

Remarquons que pour cette sphère on a $\vec{\mathcal{M}} = \mathfrak{M} \vec{e}_z$.

Ainsi $\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_r$ et $d\vec{C} = \vec{j}_s dS \implies d\vec{C} = j_o \sin \theta dS \vec{e}_\varphi$ avec $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ donc :

$$d\vec{\mathcal{M}} = -cj_o R^3 \sin^2 \theta d\theta d\varphi \vec{e}_\theta$$

par projection sur oz on trouve

$$d\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{2} j_o R^3 \sin^3 \theta d\theta d\varphi$$

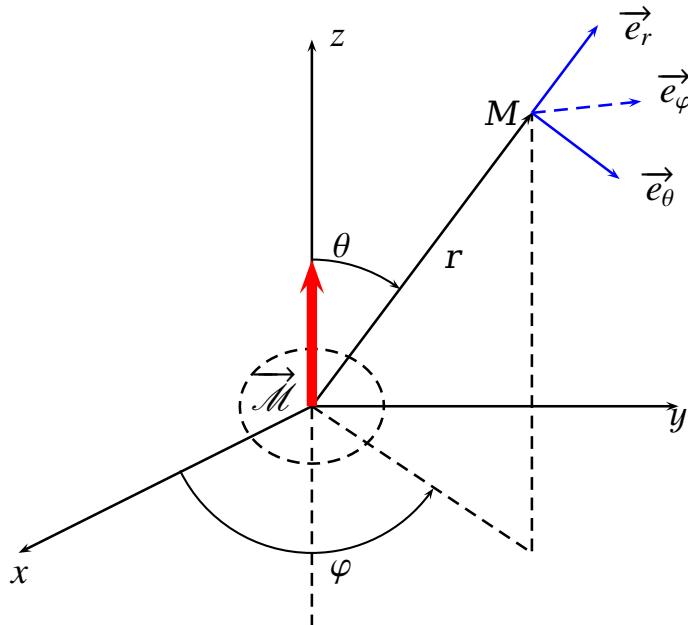
Par intégration sur θ et φ on trouve :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{4}{3} \pi R^3 j_o \vec{e}_z = j_o V \vec{e}_z$$

avec V le volume de la sphère.

2.2.2 L'expression du potentiel vecteur dans l'approximation dipolaire

Considérons un dipôle magnétique rigide de forme circulaire de rayon R , et M un point de l'espace tel que $M = M(r, \theta, \varphi)$



L'approximation dipolaire nécessite que $r \gg R$

► le plan ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) est un plan d'antisymétrie ce qui donne $\vec{A}(M) =$

$A_\varphi(M) \vec{e}_\varphi$.

► On a invariance par rotation autour de oz ce qui donne que

$$\vec{A}(M) = A(r, \theta) \vec{e}_\varphi$$

On a :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint_C \frac{d\ell}{PM}$$

On rappelle le théorème de Kelvin

$$\oint_C f(M) d\ell = \iint_{S(C)} dS \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f(M)$$

Ce qui donne : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \iint_{S(C)} dS \wedge \overrightarrow{\text{grad}} P \frac{1}{PM}$

Or : $\overrightarrow{PM} = (x_M - x_P) \vec{e}_x + (y_M - y_P) \vec{e}_y + (z_M - z_P) \vec{e}_z$ donc $\frac{1}{PM} = ((x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2)^{-1/2}$

$$\overrightarrow{\text{grad}} P \frac{1}{PM} = \frac{\partial}{\partial x_P} \left(\frac{1}{PM} \right) \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y_P} \left(\frac{1}{PM} \right) \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z_P} \left(\frac{1}{PM} \right) \vec{e}_z \implies \overrightarrow{\text{grad}} P \frac{1}{PM} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Il en résulte que

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \iint_{S(C)} dS \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Dans l'approximation dipolaire

$$\text{L'approximation dipolaire} \implies \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \simeq \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

Ce qui permet d'écrire que : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint_{S(C)} I dS \wedge \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$

On rappelle que : $\overrightarrow{\mathcal{M}} = I \iint_S dS$ ce qui donne

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{OM}}{OM^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi r^2} \mathfrak{M} \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

Potentiel vecteur en coordonnées sphériques dans l'approximation dipolaire

2.2.3 Le champ magnétique dans l'approximation dipolaire

On a : $\vec{B}(M) = \vec{\text{rot}} \vec{A}(M)$ avec $\vec{A} = A_\varphi \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} M \sin \theta \vec{e}_\varphi$
 Ainsi en coordonnées sphériques pour $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$ on a :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] = \frac{2\mu_0 M \cos \theta}{4\pi r^3} \\ B_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] = \frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^3} \\ B_\varphi = 0 \end{cases}$$

Qu'on peut écrire

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

Activité

Relation intrinsèque du champ magnétique dipolaire (TD)

1. On a :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \\ \implies \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + \sin \theta (\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r)) \\ \implies \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r) \wedge \vec{e}_r) \\ \implies \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r)) \\ \implies \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{e}_z (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r) + \vec{e}_r (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r)) \\ \implies \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (3(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{e}_z) \\ \implies \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^5} (3(\vec{M} \cdot \vec{OM}) \vec{OM} - r^2 \vec{M}) \end{aligned}$$

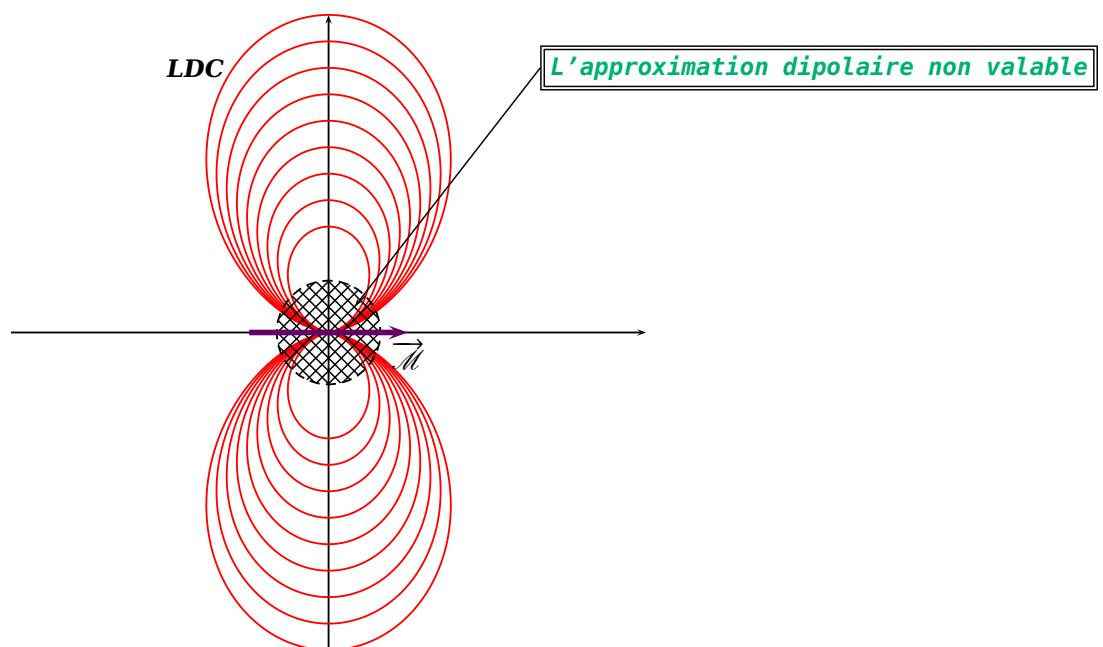
2. L'équation des lignes de champ :

$$\vec{B} \wedge d\vec{OM} = \vec{0} \implies \frac{B_r}{dr} = \frac{B_\theta}{r d\theta}$$

Par intégration

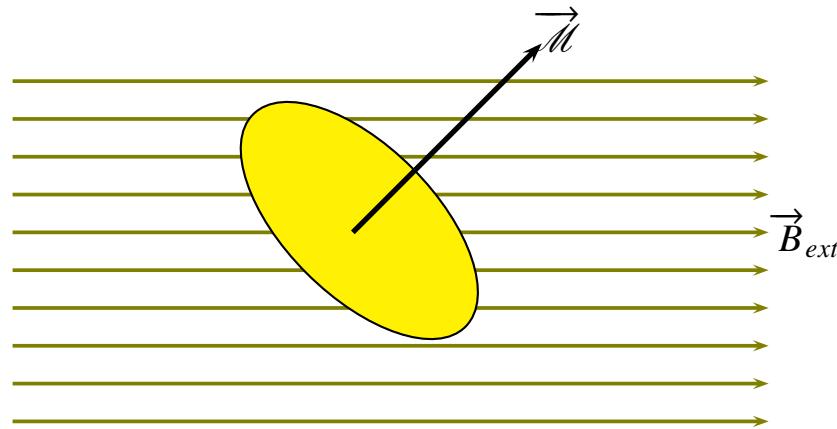
$$r = r_o \sin^2 \theta$$

Représentation graphique



2.2.4 Actions d'un champ magnétique sur un dipôle

Considérons un dipôle magnétique supposé rigide, de moment magnétique \vec{M} , de dimensions très petites devant les distances où s'exercent ses effets, et placé dans un champ extérieur \vec{B}_{ext} . L'hypothèse du dipôle de petites dimensions permet de pouvoir considérer \vec{B}_{ext} comme quasi uniforme sur la surface S limitée par le circuit constituant le dipôle.



2.2.4.1 Résultante des forces

On a $\vec{F} = \oint I \vec{d}\ell \wedge \vec{B}_{ext} \Rightarrow \vec{F} = I(\oint d\ell) \wedge \vec{B}_{ext}$
 Comme $\oint d\ell = 0$ alors

$$\vec{F} = \oint I \vec{d}\ell \wedge \vec{B}_{ext} = \vec{0}$$

On retient que la résultante de la force de Laplace due à un champ \vec{B}_{ext} uniforme sur un dipôle magnétique rigide est nulle.

Remarque

Si le champ magnétique \vec{B}_{ext} (ou le moment magnétique \vec{M} du dipôle) n'est pas uniforme alors la résultante des forces de Laplace n'est pas forcément nulle.

2.2.4.2 Le moment résultant des forces de Laplace

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \oint_C \vec{OM} \wedge (I \vec{d}\ell(M) \wedge \vec{B}) \Rightarrow \vec{\Gamma} = I \oint_C [(\vec{OM} \cdot \vec{B}) \vec{d}\ell(M) - \vec{B}(\vec{OM} \cdot \vec{d}\ell(M))] \\ &\Rightarrow \vec{\Gamma} = I \oint_C (\vec{OM} \cdot \vec{B}) \vec{d}\ell(M) - I(\oint_C \vec{OM} \cdot \vec{d}\ell(M)) \vec{B} \quad \text{puisque } \vec{d}\ell(M) = \vec{dOM} \end{aligned}$$

Or :

- $\oint_C \vec{OM} \cdot \vec{dOM} = \oint_C d(\frac{1}{2} \vec{OM}^2) = 0$

- D'après le théorème de Kelvin

$$\oint_C (\vec{OM} \cdot \vec{B}) \vec{d}\ell(M) = \iint_S \vec{dS} \wedge \vec{\text{grad}}_M (\vec{OM} \cdot \vec{B})$$

$$\text{On a : } \vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \text{ et } \vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z$$

donc : $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B} = xB_x + yB_y + zB_z \implies \overrightarrow{\text{grad}}_M(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B}) = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z = \vec{B}$
 Il en résulte que : $\vec{\Gamma} = I \underbrace{\iint_S d\vec{S}(M) \wedge \vec{B}}_{\mathcal{M}}$

$$\vec{\Gamma} = \mathcal{M} \wedge \vec{B}$$

Conclusion:

L'action d'un champ magnétique \vec{B}_{ext} uniforme sur un dipôle rigide se réduit à un couple de forces dont le moment est $\vec{\Gamma} = \mathcal{M} \wedge \vec{B}_{ext}$

2.2.4.3 Énergie potentielle d'interaction d'un dipôle rigide placé dans un champ extérieur

On rappelle que d'après le théorème de Maxwell : $\delta \mathbf{W} = I d\Phi = I d\Phi_c$
 Si $I = cte$ alors $\delta \mathbf{W} = d(I\Phi + cte) = -dE_p$ ce qui donne

$$E_p = -I\Phi + cte$$

C'est l'énergie potentielle magnétique du contour (C) placé dans un champ \vec{B}_{ext}

Remarque

Soit \mathbf{W} le travail fourni pour déplacer le contour à $I = cte$
 $\delta \mathbf{W} = Id\Phi \implies \mathbf{W} = I \int_{\Phi(t_1)}^{\Phi(t_2)} d\Phi$ et après intégration

$$\mathbf{W}_{t_1 \rightarrow t_2} = I(\Phi(t_2) - \Phi(t_1)) > 0 \implies \Phi(t_2) > \Phi(t_1)$$

Conclusion:

Sous l'action d'un champ magnétique extérieur, le contour (C) se déplace dans le sens où le flux de \vec{B} à travers (C) augmente : C'est la règle du flux maximum.

Pour un dipôle magnétique, l'énergie potentielle peut s'écrire :
 $E_p = -I\Phi \implies E_p = -(I \iint_S d\vec{S}) \cdot \vec{B}_{ext}$ ce qui permet d'écrire que

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$$

2.2.4.4 Actions subies par un dipôle magnétique dans un champ extérieur

On admet la généralisation de l'action d'un champ magnétique extérieur \vec{B}_{ext} sur un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{ext}$$

Et par conséquent si on appelle \vec{F} la résultante des forces de Laplace et $\vec{\Gamma}$ son moment alors :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p \implies \vec{F} = \vec{\text{grad}} \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$$

Ainsi

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{ext}$$

2.2.4.5 Comparaison entre les dipôles électrostatique et magnétique

	Dipôle électrostatique	Dipôle magnétique
Définition	$Q_T = 0$ avec $G_- \neq G_+$	Boucle de courant
Modélisation	$G_-(-q) \longleftrightarrow G_+(+q)$	spire parcouru par un courant I
L'expression du moment	$\mathcal{P} = q\vec{G}_- \vec{G}_+$	$\vec{\mathcal{M}} = IS\vec{n}$
Symétrie	$(\vec{P}, \vec{OM}) = \Pi_s$	$(\vec{\mathcal{M}}, \vec{OM}) = \Pi_A$
Invariance	Par rotation autour de \vec{P}	Par rotation autour de $\vec{\mathcal{M}}$
Potentiel scalaire	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{P} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$	$V_m(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$
Potentiel vecteur	/	$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{e}_r}{r^2}$
Expression du champ	$\vec{E} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$	$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$
Relation intrinsèque	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\mathcal{P} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - r^2 \mathcal{P})$	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - r^2 \vec{\mathcal{M}})$
Énergie potentielle	$E_p = -\mathcal{P} \cdot \vec{E}_e$	$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_e$
Résultante des forces	$\vec{F} = \vec{\text{grad}} (\mathcal{P} \cdot \vec{E}_e)$	$\vec{F} = \vec{\text{grad}} (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_e)$
Moment du couple	$\vec{\Gamma} = \mathcal{P} \wedge \vec{E}_e$	$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_e$

2.3 Le champ magnétique terrestre

ÉNONCÉ

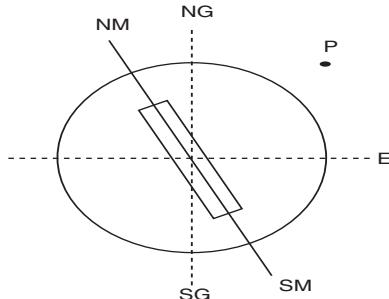
1. Propriétés du champ magnétique terrestre

À notre échelle, tout ce passe comme s'il existait à l'intérieur de la terre un aimant droit comme l'indique la figure.

(a) Reprendre le schéma et indiquer :

- Les pôles de l'aimant
- Quelques lignes de champ orientées.

Les pôles d'une boussole située au point P.



NG : Nord géographique
 SG : Sud géographique
 E: équateur géographique
 NM : Nord magnétique
 SM: Sud magnétique

(b) L'observatoire de Chambon la Forêt (France) a déterminé pour l'année 2001 les caractéristiques suivantes du champ magnétique terrestre :

- Déclinaison $\widehat{D} = 2^\circ$ W (ouest)
- Inclinaison $\widehat{I} = 64^\circ$
- Valeur totale $B = 47450\text{ nT}$

Définir à l'aide d'un schéma ,la déclinaison et l'inclinaison magnétiques.

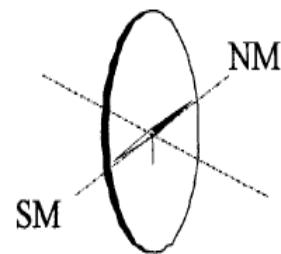
(c) À partir des données précédentes , calculer la composante horizontale B_H du champ magnétique terrestre.

2. Mesure de la valeur de la composante horizontale B_H du champ magnétique terrestre. On réalise une bobine plate de N spires de rayon R parcourues par un courant d'intensité I .

(a) Justifier que le champ au centre de la bobine est donné par la relation :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$$

(b) On dispose au centre de la bobine et **perpendiculairement à son plan** une petite aiguille aimantée. En l'absence de courant dans la bobine, l'aiguille aimantée est perpendiculaire à l'axe de la bobine comme l'indique la figure ci-contre. Que se passe-t'il lorsque la bobine plate est parcourue par un courant ? s'aider d'un schéma.

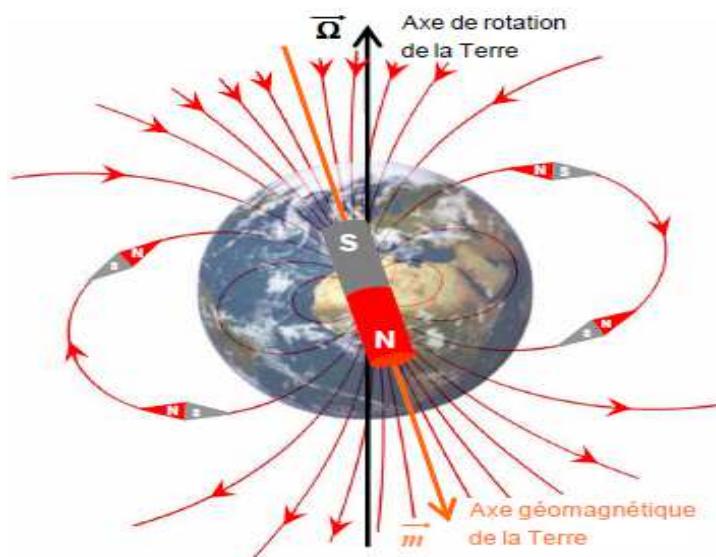


(c) Lorsque l'aiguille aimantée atteint sa position d'équilibre en présence de courant, elle a dévié d'un angle α . Exprimer la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre B_H en fonction de N, I, R et α

(d) A.N : $I = 1,2 \text{ A}$; $R = 10 \text{ cm}$; $N = 10$ et $\alpha = 75^\circ$. Calculer B_H . Conclure.

Correction

1-



► D : déclinaison, c'est l'angle entre le nord géographique et le nord magnétique

► I : inclinaison, c'est l'angle que fait \vec{B}_T avec l'horizontale

$$\rightarrow B_H = B_T \cos I \quad \xrightarrow{\text{A.N}} \quad B_H = 20800 \text{ nT}$$

$$\rightarrow B_V = B_T \sin I \quad \xrightarrow{\text{A.N}} \quad B_V = 42647 \text{ nT}$$

$$\mathbf{2-} \vec{B}(O) = \frac{\mu_o NI}{2R} \vec{e}_z$$

$$\mathbf{3-} B_H = B_o \cot \alpha \xrightarrow{A.N} B_H = 20 \mu T$$

4- Les résultats sont en accord avec une précision de

$$\frac{20,8 - 20}{20,8} \simeq 4\%$$