I. Principe fondamental de la dynamique : Cas général

I.1- Référentiel Galiléen

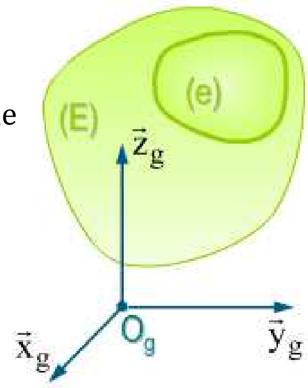
Pour la plupart des mécanismes en laboratoire, un repère lié à la terre constitue une très bonne approximation d'un repère galiléen.

I.2- Chronologie

Une chronologie galiléenne est obtenue par les horloges classiques (oscillation d'un quartz, mouvement de certains astres, ...).

I.3- Enoncé du PFD

Il existe au moins un repère R_g, appelé repère galiléen, et au moins une chronologie, appelée chronologie galiléenne, tels que pour tout sous-ensemble matériel (e) d'un ensemble matériel (E), le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R_g soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à (e).



R_g est défini par : $(O_g, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$

On désigne par $(\bar{e})$ le domaine extérieur à (e).

Le principe fondamental de la dynamique peut s'écrire :

....

I.4- Théorèmes généraux de la dynamique

En traduisant l'égalité des torseurs exprimés plus haut en terme d'égalité des résultantes et d'égalité des moments (exprimés en un point commun), on obtient deux théorèmes appelés théorèmes généraux de la dynamique.

On note *m* la masse du sous-ensemble matériel (e) et G son centre d'inertie.

On a :

.... et ....

d'où :

- **Théorème de la résultante dynamique** (TRD) **:**

  ....

- **Théorème du moment dynamique** (TMD) **:**

  ....

I.5- Equations de mouvement

Une équation de mouvement est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique. On nomme « Intégrale première du mouvement » une équation différentielle du premier ordre avec un second membre constant, obtenue par intégration d'une équation de mouvement.

II. Méthodologie de résolution d'un problème de dynamique

II.1- Algorithme de résolution

Pour chaque application du PFD, il est important de se forcer à mettre en place les étapes suivantes du raisonnement.

On choisit un repère galiléen et on effectue le bilan complet des données d'entrée du problème

Récapituler les particularités de certains torseurs d'actions mécaniques (composantes nulles pour les torseurs de liaisons pivot ou glissière, actions connues dans certaines liaisons (couple moteur ou forces résistantes…), …)

On isole le solide ou le système de solides considéré

Utilisation du graphe d'analyse pour faire l'inventaire des données et élaborer la stratégie de résolution

On s'aide d'un dessin si on peut

On effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures agissant sur le système isolé

Actions à distance (pesanteur,…)
Actions de contact (liaisons,…)

On écrit le PFD

Toujours préciser l'axe de projection pour le thm de la résultante dynamique et le point + l'axe pour le thm du moment dynamique

On projette les relations vectorielles sur les axes choisis

On injecte les lois de comportement (ressort, lois de coulomb, …)

On effectue la résolution

On s'assure que le pb est isostatique

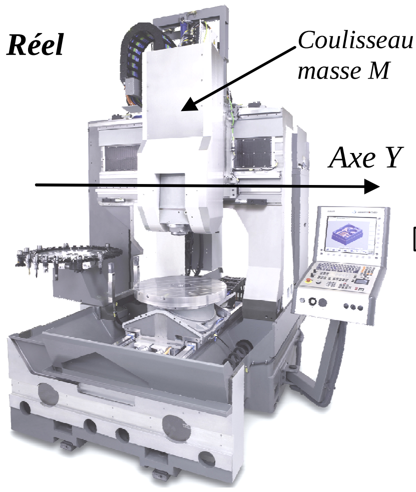
II.2- Graphe d'analyse

Le graphe d'analyse est un outil important pour mener à bien un problème de dynamique, il permet notamment :

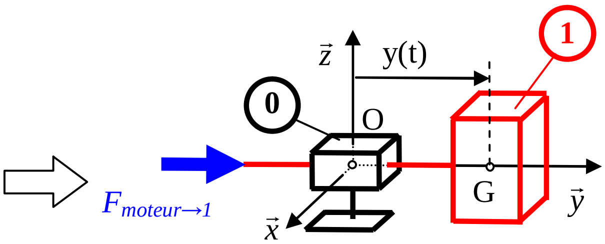
- De faire le bilan des actions mécaniques complet du problème.
- De réaliser le BAME associé à un isolement.
- D'élaborer les stratégies de résolution par rapport à un objectif d'étude.

Exemple de l'axe Y de la machine outil

Réel



Modèle



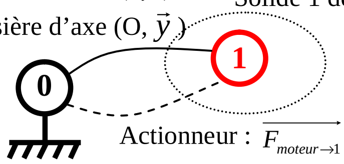
Graphe d'analyse

$$\left\{\begin{matrix} X & L \\ 0 & M \\ Z & N \end{matrix}\right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Glissière d'axe (O, $\vec{y}$)

Action de la pesanteur : $\vec{g} = -g.\vec{z}$

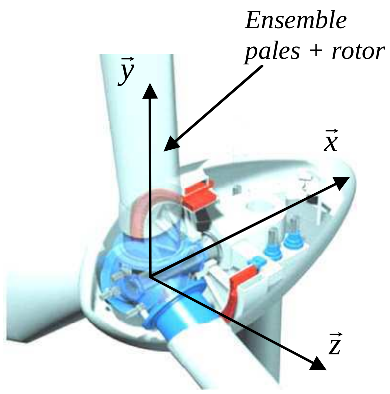
Solide 1 de masse M (centre de gravité G)



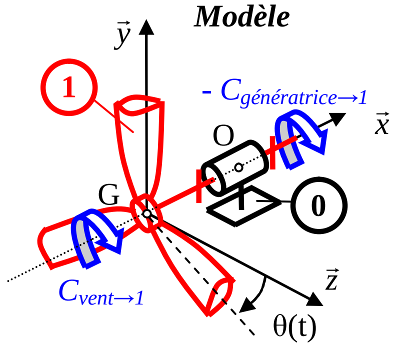
Actionneur : $\overrightarrow{F_{moteur\to 1}} = F_{moteur\to 1}.\vec{y}$

Exemple de l'éolienne

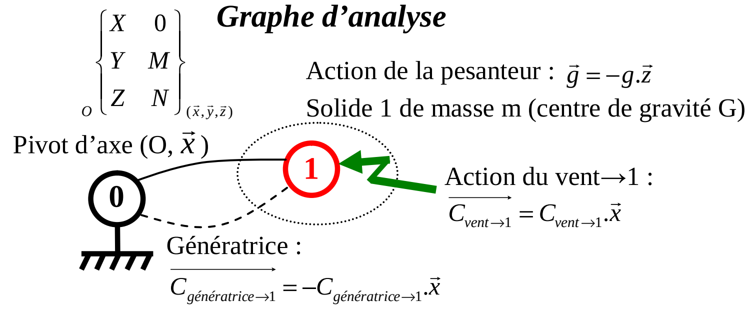
Réel



Modèle



Graphe d'analyse



III. Application du PFD

III.1- Détermination des équations de mouvement

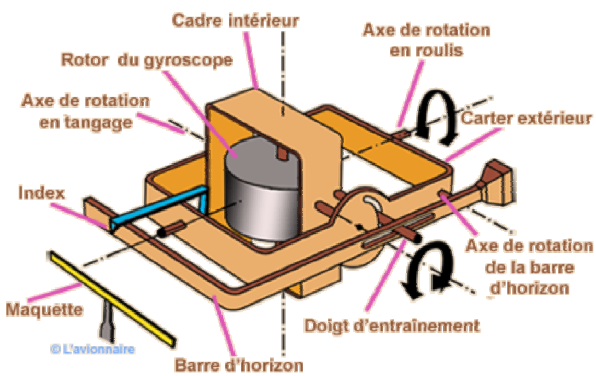
Pour déterminer ces équations de mouvement à l'aide du PFD il faut dans un premier temps, identifier la nature de la chaine cinématique (ouverte ou fermée) car les méthodes de calcul diffèrent en fonction de ce critère.

a) Equations de mouvement dans le cas d'une chaine ouverte

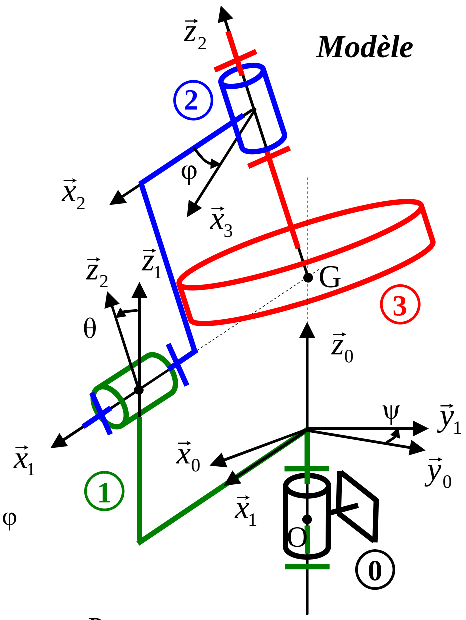
Il faut rechercher autant d'équations scalaires dans lesquelles il n'y a pas d'inconnues de liaison que de paramètres cinématiques inconnus. Pour un solide en liaison pivot parfaite par rapport à un autre solide, l'équation du moment dynamique suivant l'axe de rotation permet d'exprimer la dérivée seconde du paramètre de position angulaire en fonction du couple appliqué (couple connu).

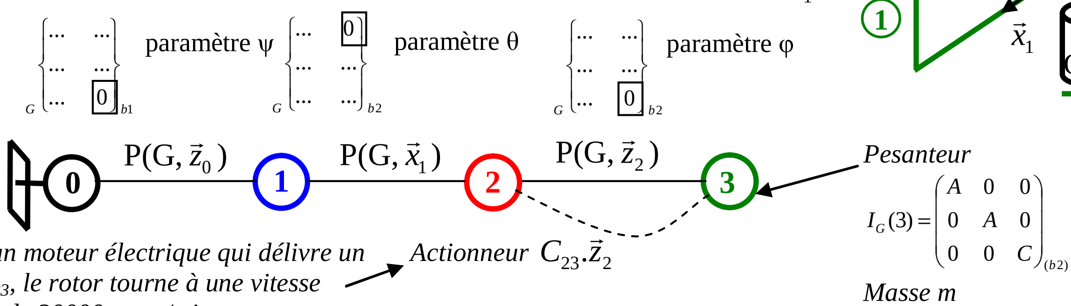
Application sur le gyroscope d'horizon artificiel

Réel



Modèle





Grâce à un moteur électrique qui délivre un couple C_{23}, le rotor tourne à une vitesse constante de 20000 tours/min

b) Equations de mouvement dans le cas d'une chaine fermée

Il faut chercher dans un premier temps à ouvrir la chaine en supprimant une liaison de la chaine fermée (on choisit en général la liaison qui possède le plus de degré de liberté et donc le moins d'inconnus de liaisons).

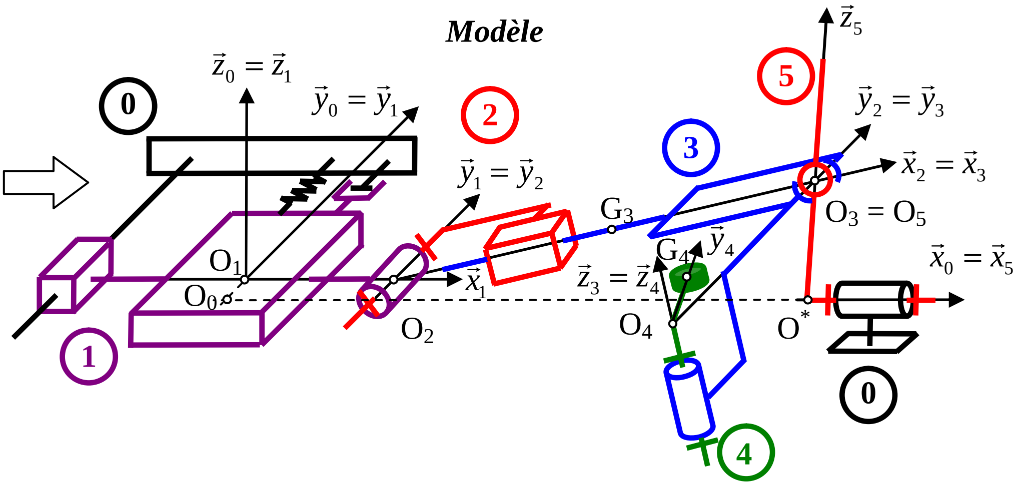
Application sur le vibreur d'olivier

On s'intéresse à un automoteur vibreur d'oliviers, machine agricole destinée à la cueillette des olives dont on donne la modélisation lors d'une phase de vibration d'un olivier. Le dispositif a pour fonction de faire vibrer l'arbre par l'intermédiaire d'une pince mécanique qui enserre le tronc. Le vibreur est constitué de trois sous ensembles :

- le porteur, engin à deux roues motrices permettant le déplacement dans l'exploitation
- le bras télescopique à commande hydraulique qui ajuste la position de la pince autour de l'arbre
- une pince sur laquelle est monté un générateur de vibrations.

Réel

Modèle



- Le repère 0 correspond au sol, on associe le repère galiléen R_0 à 0 dont l'axe $(O_0, \vec{z}_0)$ est vertical ascendant.
- Le solide 1 correspond au tracteur porteur. On considère que dans la phase de vie étudiée le tracteur est en liaison glissière par rapport au sol suivant l'axe $(O_0, \vec{y}_0)$ et un système ressort + amortisseur visqueux modélise le comportement des pneus (ressort de raideur k_1 et amortissement visqueux de coefficient b_1). Le paramètre du mouvement est Y tel que $\overrightarrow{O_0O_1} = Y.\vec{y}_1$.
- Le solide 2 correspond au bras en liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{y}_2)$ par rapport au solide 1. Le paramètre du mouvement est θ tel que $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On définit $\overrightarrow{O_1O_2} = l_1.\vec{x}_1$.
- Le solide 3 correspond à la pince liée en liaison glissière avec le solide 2 suivant l'axe $(O_2, \vec{x}_2)$. Le paramètre du mouvement est X tel que $\overrightarrow{O_2G_3} = X.\vec{x}_2$. On définit $\overrightarrow{G_3O_3} = l_3.\vec{x}_2$ avec l_3 = cte.
- Le solide 4 correspond à un rotor qui porte un excentrique (balourd) qui génère les vibrations. Le balourd est lié au solide 3 par une liaison pivot d'axe $(O_4, \vec{z}_3)$ par rapport au solide 3. Le paramètre du mouvement est ϕ tel que $\phi = (\vec{y}_3, \vec{y}_4)$. On définit $\overrightarrow{O_3O_4} = -d.\vec{y}_2$ et $\overrightarrow{O_4G_4} = e.\vec{y}_4$.
- Le solide 5 correspond à l'arbre vibré. Lors de la phase de vie étudié, on considère que l'arbre est en liaison pivot d'axe $(O^*, \vec{x}_0)$ par rapport au sol et un système ressort + amortisseur visqueux modélise le comportement de l'ensemble tronc+racines (ressort de raideur k^* et amortissement visqueux de coefficient b^*). Le paramètre du mouvement est β tel que $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z}_5)$.

Enfin on considère que la liaison pince 3 tronc d'arbre est modélisée par une liaison rotule de centre O_3. On définit $\overrightarrow{O_0O^*} = d_0.\vec{x}_0$ et $\overrightarrow{O^*O_5} = l_5.\vec{z}_5$.

Hypothèses :

- Les liaisons sont toutes supposées parfaites sauf la liaison rotule entre 5 et 3 où l'on admet une loi de comportement donnée par le torseur : $\{F_{5\to3}\} = {}_{O_3}\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_{5\to3}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{O_3(5\to3)}} = -\lambda.\overrightarrow{\Omega_{3/5}} \end{array}\right\}$.
- L'action mécanique exercée par le ressort et l'amortisseur entre 0 et 1 est modélisé par une force : $\overrightarrow{F_{0\to1}} = (-k_1.Y - b_1.\dot{Y}).\vec{y}_0$.
- L'action mécanique exercée par le ressort et l'amortisseur entre 0 et 5 est modélisé par un couple : $\overrightarrow{C_{0\to5}} = (-k^*.\beta - b^*.\dot{\beta}).\vec{x}_0$.
- Le rotor est entrainé par un moteur hydraulique qui exerce un couple $\overrightarrow{C_{3\to4}} = C_m.\vec{z}_4$ et qui assure une vitesse de rotation uniforme $\dot{\phi} = \Omega = cte$.
- On néglige l'action mécanique de la pesanteur par rapport aux autres actions mécaniques mises en jeu.

Données massiques :

- S_1 : Solide de masse m_1 et de centre de gravité O_1.
- S_2 : Solide de masse m_2 et de centre de gravité O_2. $I_{O_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(b2)}$
- S_3 : Solide de masse m_3 et de centre de gravité G_3. $I_{G_3}(S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(b2)}$
- S_4 : Solide de masse m_4 et de centre de gravité G_4. $I_{G_4}(S_4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(b4)}$
- S_5 : Solide de masse m_5 et de centre de gravité O_5. $I_{O^*}(S_5) = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(b5)}$

Q.1. Réaliser le graphe d'analyse du système.

Q.2. Ecrire les relations entre les paramètres géométriques du système en utilisant la fermeture géométrique $\overrightarrow{O_0O^*} + \overrightarrow{O^*O_5} = \overrightarrow{O_0O_5}$ projetée sur les trois axes de la base 0.

Q.3. Linéariser les équations obtenues en supposant les paramètres θ et β petits. Etablir ensuite la relation $Y = -l_5.\beta$.

Q.4. Montrer que le torseur d'action mécanique de 5→3 est de la forme $\{F_{5\to3}\} = {}_{O_3}\left\{\begin{array}{cc} X_{53} & \lambda.\dot{\beta}.\cos\theta \\ Y_{53} & 0 \\ Z_{53} & \lambda.\dot{\beta}.\sin\theta \end{array}\right\}_{(b2)}$.

Q.5. Déterminer les équations de mouvement du système.

III.2- Détermination des caractéristiques d'un actionneur

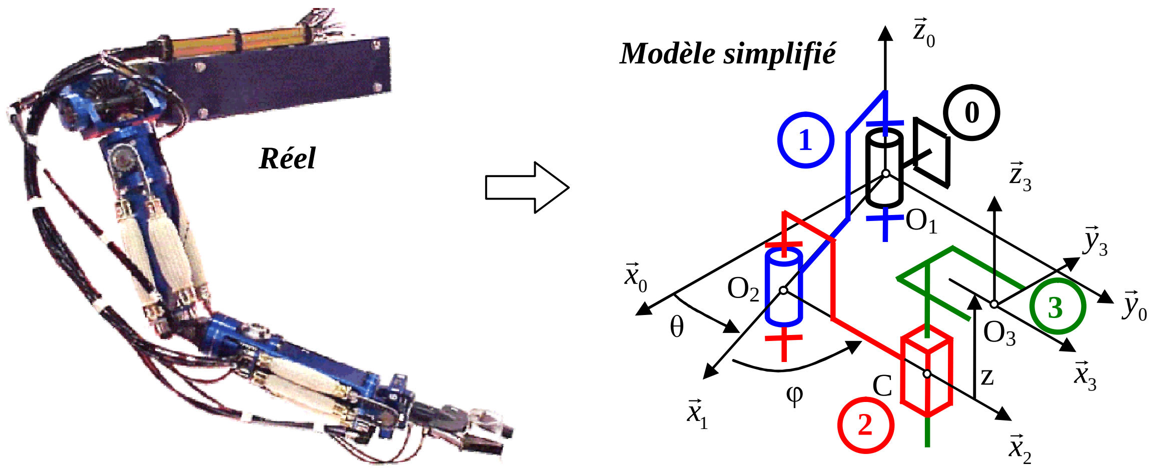
Pour déterminer les caractéristiques d'un actionneur (moteur, vérin, …), il faut rechercher les équations particulières qui n'introduisent pas d'inconnues de liaison tout en écrivant le moins d'équations possibles, comme dans le cas :

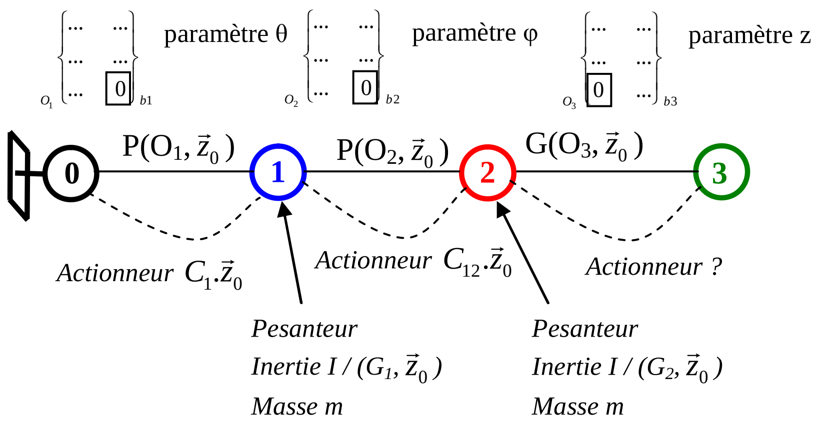
- D'un système mis en mouvement de rotation autour d'un axe par un actionneur, l'utilisation du théorème du moment dynamique (**TMD**) écrit en un point appartenant à l'axe de rotation projeté sur l'axe de rotation permet de déterminer **le couple moteur**.
- D'un système mis en mouvement de translation suivant un axe par un actionneur, l'utilisation du théorème de la résultante dynamique (**TRD**) projeté sur l'axe de translation permet de déterminer **l'effort moteur**.

III.3- Détermination des inconnus des liaisons

Pour rechercher les inconnus dans une liaison, il suffit d'écrire autant d'équations que d'inconnus de liaison à déterminer pour au final obtenir leurs expressions uniquement en fonction de données connues.

III.4- Application





Q1- Déterminer le couple moteur $\boldsymbol{C_1}$.

Q2- Déterminer le couple moteur $\boldsymbol{C_{12}}$.

Q3- Déterminer les inconnus de la liaison $\mathbf{L}_{12}$.