# R 4

# Les oscillations libres

# 4.1 Le pendule

## 4.1.1 Définitions

**— Pendule pesant —**

Un pendule pesant est un solide qui peut osciller autour d'un axe horizontal ne passant pas par son centre d'inertie.

**— Pendule simple —**

Un pendule simple est un modèle idéalisé de pendule pesant : il est constitué d'un corps de masse $m$ considéré comme ponctuel, accroché à un fil inextensible de longueur $\ell$ et de masse négligeable devant $m$.

Un pendule simple peut être représenté par le dispositif suivant :

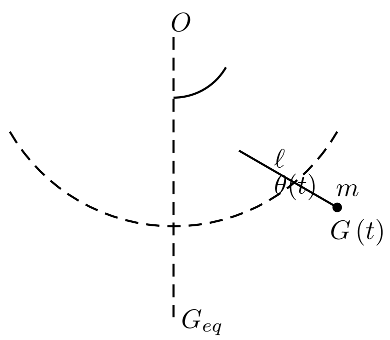


FIGURE 4.1 – Pendule simple

## 4.1.2 Mouvement d'un pendule simple non amorti

Considérons un pendule simple constitué d'un fil inextensible de longueur $\ell$ relié à $O$ auquel est attaché un corps $M$ de masse $m$.

### 4.1.2.1 Inventaire des forces extérieures appliquées au système

Les forces appliquées au corps $M$ de masse $m$ sont :

- Le poids $\overrightarrow{P}$ descendant, donc dirigé vers le bas.
- La tension du fil $\overrightarrow{T}$ orienté de $M$ vers $O$.
- Les forces de frottements et la poussée d'Archimède sont négligées.

### 4.1.2.2 Équation du mouvement

L'équation du mouvement peut être trouvé au choix grâce :

- au principe fondamentale de la dynamique (2ème loi de Newton)
- au théorème du moment cinétique
- au théorème de l'énergie cinétique

On obtient facilement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\sin\theta = 0$$

Les oscillations d'un pendule simple non amorti sont périodiques (c'est un système mécanique oscillant). Pour des oscillations d'amplitude assez faibles ($\theta_m < 10°$), un développement limité du $\sin$ à l'ordre $1$ donne :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\theta = 0$$

Soit, en posant $\omega_0^2 = \dfrac{g}{\ell}$ :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$$

#### 4.1.2.3 Les solutions de l'équation différentielle

Cette équation présente une solution de la forme :

$$\theta\,(t) = A\,\cos\omega_0\,t + B\,\sin\omega_0\,t$$

ou bien :

$$\theta\,(t) = C\,\cos\left(\omega_0\,t + \varphi\right)$$

On détermine l'expression de la période propre en remplaçant dans l'équation différentielle. On trouve la période des oscillations :

$$T_0 = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Avec par exemple les conditions initiales $\theta\,(t=0) = \theta_m$ et $\dfrac{d\theta}{dt}\,(t=0) = 0$, on obtient :
$A = \theta_m$ et $B = 0$.
La solution s'écrit donc :

$$\theta\,(t) = \theta_m\,\cos\left(\omega_0\,t\right)$$

Le mouvement du point $M$ est un mouvement oscillatoire d'amplitude $\theta_m$ et de période $T_0$ autour de sa position d'équilibre.
La période d'oscillation est indépendante de l'amplitude angulaire $\theta_m$. Il y a isochronisme des petites oscillations et la période vaut :

$$T_0 = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

> Les unités :
> $\ell$ en mètres, $g$ intensité de la pesanteur en $m.s^{-2}$ et $T$ en secondes.

### 4.1.3 Oscillateurs libres amortis

#### 4.1.3.1 Inventaire des forces extérieures appliquées au système

Les forces appliquées au corps $M$ de masse $m$ sont :

- Le poids $\overrightarrow{P}$ descendant, donc dirigé vers le bas.
- La tension du fil $\overrightarrow{T}$ orienté de $M$ vers $O$.
- Les forces de frottements.

#### 4.1.3.2 Équation du mouvement

La tension ne travaille pas car elle est toujours perpendiculaire au mouvement.
Avec un frottement fluide de type $-\lambda\,\overrightarrow{v}$, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta E_c = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}$$

En posant $E_m = E_p + E_c$, il vient

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_p}{dt} + \frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\text{Forces non conservatives}) = \mathcal{P}(\overrightarrow{f_f}) = -\lambda\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} = -\lambda\,v^2 = -\lambda\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2$$

**Interprétation physique : l'énergie mécanique diminue à cause des frottements qui dissipent de l'énergie.**

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 \text{ et } \frac{dE_c}{dt} = m\,\ell^2\,\ddot{\theta}\,\dot{\theta}$$

$$E_p = -m\,g\,\ell\,\cos\theta + C^{te} \text{ et } \frac{dE_p}{dt} = m\,g\,\ell\,\dot{\theta}\,\sin\theta \simeq m\,g\,\ell\,\dot{\theta}\,\theta.$$

On trouve alors :

$$m\,\ell^2\,\ddot{\theta}\,\dot{\theta} + m\,g\,\ell\,\dot{\theta}\,\theta = -\lambda\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2$$

et :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \lambda\,\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\theta = 0}$$

#### 4.1.3.3 Les solutions de l'équation différentielle

L'équation précédente conduit à des solutions oscillantes si le frottement n'est pas trop fort (le discriminant de l'équation caractéristique doit être négatif).
La solution de l'équation différentielle est :

$$\theta\,(t) = [A\,\cos\,(\omega\,t) + B\,\sin\,(\omega\,t)]\;e^{\left(-\frac{\lambda}{2}\,t\right)}$$

avec la pseudo-pulsation $\omega = \sqrt{4\,\frac{g}{\ell} - \lambda^2}$.
Si, dans les conditions initiales, la vitesse est nulle et $\theta\,(t=0) = \theta_m$, alors :
$A = \theta_0$ et $B = \frac{\lambda\,\theta_m}{2\,\omega}$ et :

$$\theta\,(t) = \theta_m\,\left[\cos\left(\omega\,t + \frac{\lambda}{2\,\omega}\right)\right]\;e^{\left(-\frac{\lambda}{2}\,t\right)}$$

En choisissant $Ep = 0$ pour $\theta = 0$, on a :

$$E_p\,(t) = m\,g\,\ell\,(1-\cos\theta) \simeq -m\,g\,\ell\,\frac{\theta^2}{2}$$

#### 4.1.3.4 Évolution des énergies

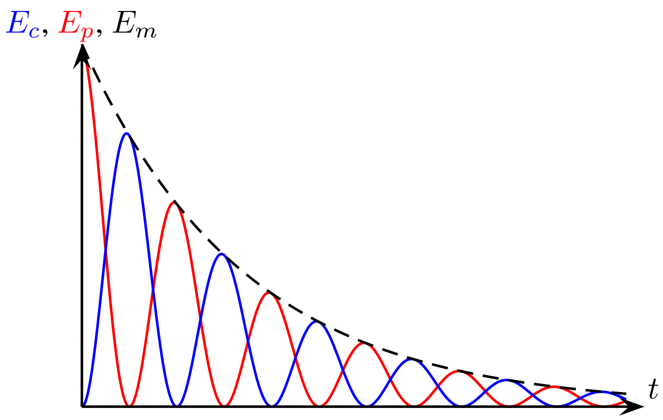


FIGURE 4.2 – Énergies cinétique, potentielle et mécanique

- L'énergie mécanique diminue de façon exponentielle en raison des frottements.
- Lorsque l'énergie cinétique diminue, l'énergie potentielle augmente et réciproquement (sans frottement, la somme de ces deux fonctions serait constante).

— Remarque —

- Si un oscillateur libre est faiblement amorti, il évolue en effectuant des oscillations dont l'amplitude maximale décroît au cours du temps. On parle d'oscillations et de régime pseudo-périodiques.
- La pseudo-période $T$ est la durée séparant deux passages successifs, dans le même sens, de l'oscillateur dans sa position d'équilibre. Si l'amortissement est faible, la période propre et la pseudo-période sont approximativement égales.
- Dans le cas d'un amortissement plus important, le mouvement de l'oscillateur et le régime sont apériodiques. Le système ne peut plus osciller : écarté de sa position d'équilibre, il la retrouve rapidement.
- La limite entre l'amortissement faible et l'amortissement faible est l'amortissement critique : on parle alors de régime critique.

## 4.2 Le système solide-ressort

### 4.2.1 Période propre des oscillations d'un système solide-ressort

Un solide de masse $m$ est accroché à un ressort à spires non jointives, de masse considérée négligeable et de constante de raideur $k$.
On néglige les frottements de l'air ainsi que la poussée d'Archimède.
Le système solide-ressort est un système mécanique oscillant dont la période propre $T_0$ dépend de $m$ et de $k$ :

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Les unités :
$m$ s'exprime en $kg$, $k$ en $N.m^{-1}$ et $T_0$ en $s$.

## 4.2.2 L'oscillateur élastique horizontal

Le système est un solide de centre d'inertie $G$ de masse $m$. Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre, considéré galiléen pendant la durée de l'expérience.
Il est tenu par un ressort de longueur à vide $\ell_0$ et de raideur $k$.

### 4.2.2.1 Inventaire des forces extérieures appliquées au système

Les forces appliquées au corps de masse $m$ sont :

- Le poids $\overrightarrow{P}$ vertical descendant.
- La réaction du support $\overrightarrow{R}$. Elle peut être décomposée en la somme des deux forces : sa composante normale $\overrightarrow{N}$, perpendiculaire au support et vers le haut et sa composante tangentielle $\overrightarrow{T}$ correspondant à des frottements sur le support (négligés ici, donc $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$).
- La force de rappel élastique du ressort $\overrightarrow{F} = -k\,x\;\overrightarrow{e_x}$.
- Force de frottement (avec l'air par exemple) : négligée.

### 4.2.2.2 Dispositif

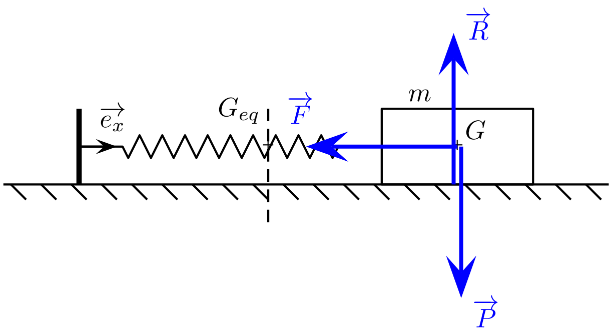


FIGURE 4.3 – Oscillateur horizontal

La 2ème loi de Newton s'écrit :

$$m\,\overrightarrow{a} = m\,\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}$$

En projetant cette relation sur l'axe $(Ox)$ et en considérant les frottements négligeables, on obtient :

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = m\,\ddot{x} = -k\,x$$

Le mouvement du centre d'inertie du solide de masse est donc décrit par une équation différentielle du 2ème ordre :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

ou encore, en posant $\omega_1^2 = \dfrac{k}{m}$ :

$$\ddot{x} + \omega_1^2\,x = 0$$

#### 4.2.2.3 Les solutions de l'équation différentielle

Cette équation présente une solution de la forme :

$$x\,(t) = A\,\cos\omega_1\,t + B\,\sin\omega_1\,t$$

ou bien :

$$x\,(t) = C\,\cos\left(\omega_1\,t + \varphi\right)$$

On détermine l'expression de la période propre en remplaçant dans l'équation différentielle. On trouve la période des oscillations :

$$T_1 = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}}$$

En prenant par exemple les conditions initiales $x\,(t = 0) = X_m$ et $\dfrac{dx}{dt}\,(t = 0) = 0$, on a :
$A = X_m$ et $B = 0$.
La solution s'écrit donc :

$$x\,(t) = X_m\,\cos\left(\omega_1\,t\right)$$

Le mouvement du point $M$ est un mouvement oscillatoire d'amplitude $X_m$ et de période $T_2$ autour de sa position d'équilibre.

#### 4.2.2.4 Énergie mécanique du système solide-ressort

En considérant l'énergie potentielle de peseanteur nulle, on a :

$$E_m = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

L'énergie mécanique $E_m$ se conserve dans le cas où les frottements sont négligés.

### 4.2.3 L'oscillateur élastique vertical non amorti

Le système est un solide représenté par le point $M$ de masse $m$. Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre, considéré galiléen pendant la durée de l'expérience.
Il est tenu par un ressort de longueur à vide $\ell_0$ et de raideur $k$.

#### 4.2.3.1 Inventaire des forces extérieures appliquées au système

Les forces appliquées au corps $M$ de masse $m$ sont :

- Le poids $\overrightarrow{P}$ vertical descendant.
- La force de rappel élastique du ressort $\overrightarrow{F} = -k\,\Delta\ell\;\overrightarrow{e_z}$.
- La force de frottement (de l'air par exemple) : négligée ici.

#### 4.2.3.2 Dispositif

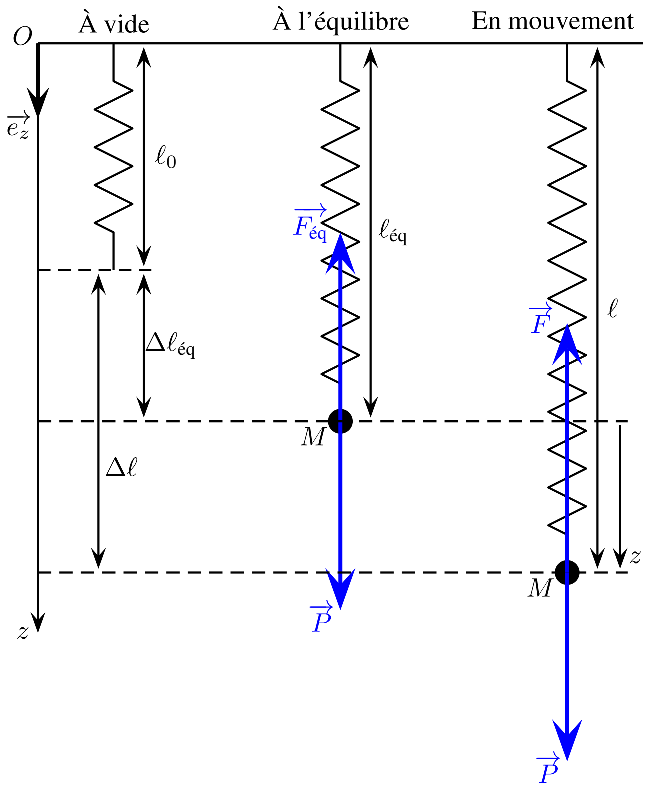


FIGURE 4.4 – Oscillateur vertical

L'élongation $\Delta\ell$ du ressort est égale à $\ell - \ell_0$ où $\ell_0$ est la longueur à vide du ressort.
À l'équilibre, l'élongation $\Delta\ell_{\acute{e}q}$ du ressort est égale à $\ell_{\acute{e}q} - \ell_0$ où $\ell_{\acute{e}q}$ est la longueur à l'équilibre du ressort.

#### 4.2.3.3 À l'équilibre

La 2ème loi de Newton s'écrit :

$$m\,\overrightarrow{a} = m\,\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_{\acute{e}q}}$$

En projetant cette relation sur l'axe $(Oz)$ et en considérant les frottements négligeables, on obtient :

$$m\,g - k\,(\ell - \ell_{\acute{e}q}) = 0$$

#### 4.2.3.4 En mouvement

La 2ème loi de Newton s'écrit :

$$m\,\overrightarrow{a} = m\,\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}$$

Le mouvement du centre d'inertie du solide de masse est donc décrit par :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = m\,g - k\,(\ell)$$

En combinant avec la relation obtenue à l'équilibre, on obtient :

$$m\,\frac{d^2z}{dt^2} = -k\,(\ell - \ell_{\acute{e}q})$$

ou encore, en posant $z = \ell - \ell_{\acute{e}q}$ (cela revient à choisir la position d'équilibre comme origine, c'est-à-dire $z_{\acute{e}q} = 0$) et $\omega_2^2 = \dfrac{k}{m}$ :

$$\ddot{z} + \omega_2^2\,z = 0$$

### 4.2.3.5 Les solutions de l'équation différentielle

Cette équation présente une solution de la forme :

$$z\,(t) = A\,\cos\omega_2\,t + B\,\sin\omega_2\,t$$

ou bien :

$$z\,(t) = C\,\cos\left(\omega_2\,t + \varphi\right)$$

On retrouve pour la période la valeur précédente :
$T_2 = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.
Si les conditions initiales sont $z\,(t=0) = Z_m$ et $\dfrac{dz}{dt}\,(t=0) = 0$, il vient :
$A = Z_m$ et $B = 0$.
La solution s'écrit donc :

$$z\,(t) = Z_m\,\cos\left(\omega_2\,t\right)$$

Le mouvement du point $M$ est un mouvement oscillatoire d'amplitude $Z_m$ et de période $T_2$ autour de sa position d'équilibre :

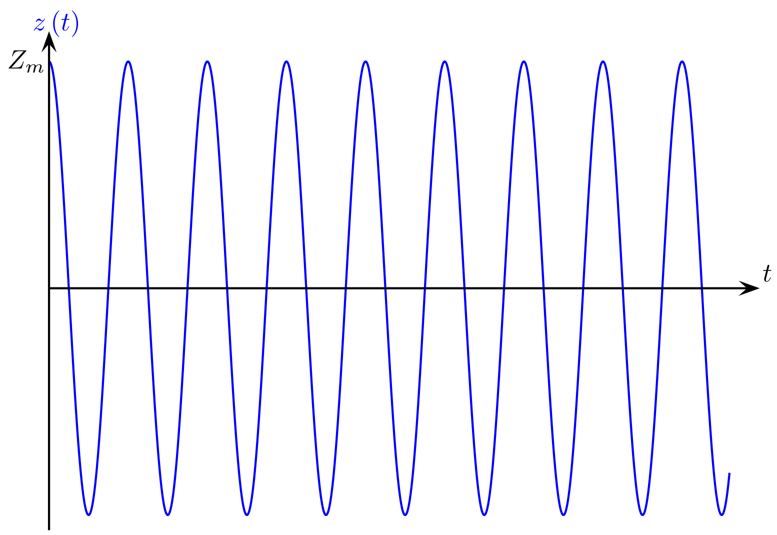


FIGURE 4.5 – Oscillations libres non amorties

### 4.2.3.6 Énergie mécanique du système solide-ressort

L'énergie cinétique du système vaut :

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,\dot{z}^2$$

L'énergie potentielle est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle élastique :

$$E_{p,\text{pes}} = -m\,g\,z + C^{te}$$

$$E_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}\,k\,z^2 + C^{te}$$

Soit :

$$E_p = -m\,g\,z + \frac{1}{2}\,k\,z^2 + C^{te}$$

On en déduit l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p$$

C'est-à-dire :

$$E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot{z}^2 - m\,g\,z + \frac{1}{2}\,k\,z^2 + C^{te}$$

L'énergie mécanique $E_m$ se conserve dans le cas où les frottements sont négligés. Si ce n'est pas le cas, les oscillations sont alors amorties.

### 4.2.4 L'oscillateur élastique vertical amorti

Le système est un solide représenté par le point $M$ de masse $m$. Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre, considéré galiléen pendant la durée de l'expérience.
Il est tenu par un ressort de longueur à vide $\ell_0$ et de raideur $k$.
On considérera que des forces de frottement existent et qu'elles peuvent être modélisées par une force unique de type $\overrightarrow{f}_f = -\alpha\,\overrightarrow{v}$.

#### 4.2.4.1 Inventaire des forces extérieures appliquées au système

Les forces appliquées au corps $M$ de masse $m$ sont :

- Le poids $\overrightarrow{P}$ vertical descendant.
- La force de rappel élastique du ressort $\overrightarrow{F} = -k\,\Delta\ell\ \overrightarrow{e_z}$.
- La force de frottement (de l'air par exemple) : $\overrightarrow{f}_f = -\alpha\,\overrightarrow{v}$.

#### 4.2.4.2 Dispositif

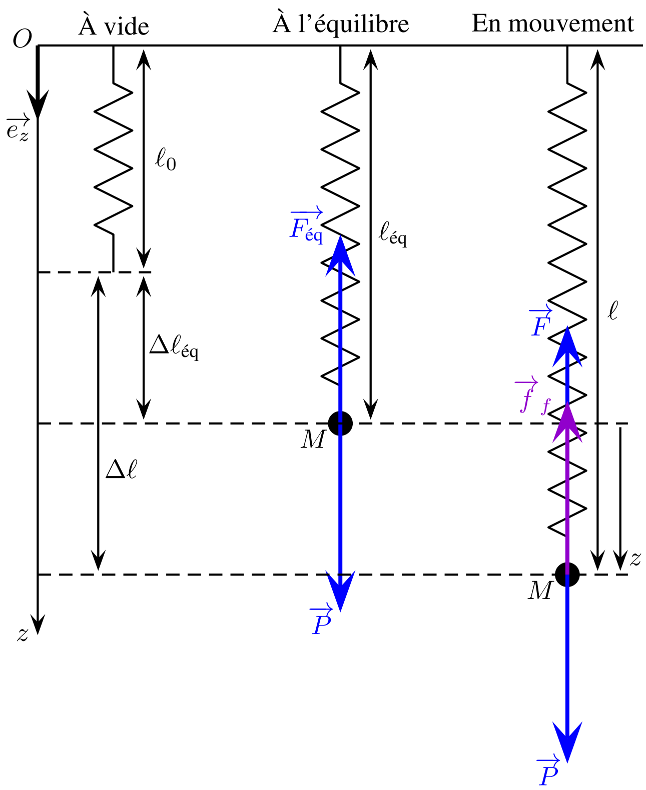


FIGURE 4.6 – Oscillateur vertical

L'élongation $\Delta\ell$ du ressort est égale à $\ell - \ell_0$ où $\ell_0$ est la longueur à vide du ressort.
À l'équilibre, l'élongation $\Delta\ell_{éq}$ du ressort est égale à $\ell_{éq} - \ell_0$ où $\ell_{éq}$ est la longueur à l'équilibre du ressort.

### 4.2.4.3 À l'équilibre

La 2ème loi de Newton s'écrit :

$$m\,\overrightarrow{a} = m\,\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_{éq}} - \alpha\,\overrightarrow{v}$$

En projetant cette relation sur l'axe $(Oz)$, on obtient la même relation que pour l'oscillateur non amorti :

$$m\,g - k\,(\ell - \ell_{éq}) = 0$$

### 4.2.4.4 En mouvement

La 2ème loi de Newton s'écrit :

$$m\,\overrightarrow{a} = m\,\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} - \overrightarrow{f}_f$$

Le mouvement du centre d'inertie du solide de masse est donc décrit par :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = m\,g - k\,(\ell) - \alpha\,\frac{dz}{dt}$$

En combinant avec la relation obtenue à l'équilibre, on obtient :

$$m\,\frac{d^2z}{dt^2} = -k\,(\ell - \ell_{éq}) - \alpha\,\frac{dz}{dt}$$

ou encore, en posant $z = \ell - \ell_{éq}$ (cela revient encore une fois à choisir la position d'équilibre comme origine, c'est-à-dire $z_{éq} = 0$) et $\omega_2^2 = \dfrac{k}{m}$ :

$$\ddot{z} + \alpha\,\dot{z} + \omega_2^2\,z = 0$$

ou encore :

$$\ddot{z} + 2\,\lambda\,\dot{z} + \omega_2^2\,z = 0$$

### 4.2.4.5 Les solutions de l'équation différentielle

Si le cœfficient de frottement $\alpha$ n'est pas trop important, le système possède alors un mouvement pseudo-périodique amorti.
Ceci est réalisé si $\omega_2^2$ est supérieur à $\lambda^2$. Cette équation présente alors une solution de la forme :

$$z\,(t) = e^{-\lambda\,t}\,(A\,\cos\omega_3\,t + B\,\sin\omega_3\,t)$$

avec $\omega_3 = \sqrt{\omega_2^2 - \lambda^2}$ : pseudo-pulsation. La pseudo-période est donnée par $T_3 = \dfrac{2\,\pi}{\omega_3}$.
Si le frottement est très faible, la pseudo-période est alors très proche de la période propre de l'oscillateur non amorti étudié précédemment et $T_3 \simeq T_2$.

Si les conditions initiales sont $z\,(t=0) = Z_m$ et $\dfrac{dz}{dt}\,(t=0) = 0$, on a :
$A = Z_m$ et $B = \dfrac{\lambda\,Z_m}{\omega_2} \simeq 0$ si le frottement est très faible.
La solution s'écrit dans ce dernier cas :

$$z\,(t) = Z_m\,e^{-\lambda\,t}\,\cos(\omega_2\,t)$$

Le mouvement du point $M$ est un mouvement oscillatoire d'amplitude $Z_m$ et de période $T_2$ autour de sa position d'équilibre :

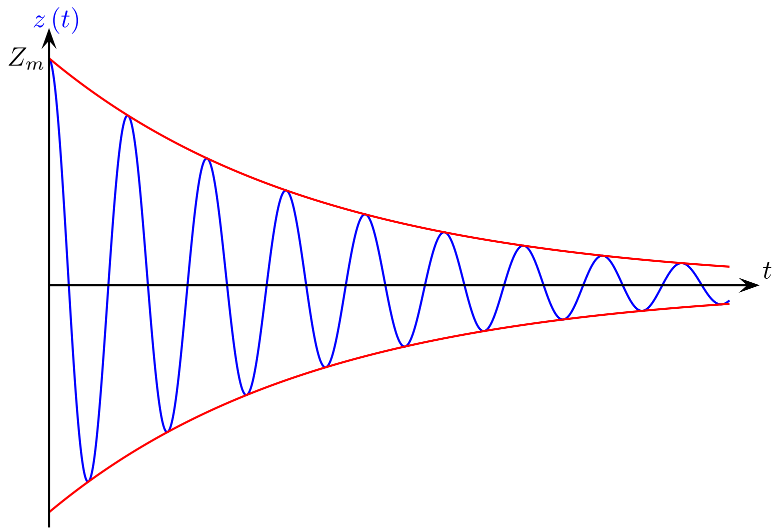


FIGURE 4.7 – Oscillations libres amorties

### 4.2.4.6 Énergie mécanique du système solide-ressort

L'énergie cinétique du système vaut :

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, \dot{z}^2$$

L'énergie potentielle est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle élastique :

$$E_{p,\text{pes}} = -m\, g\, z + C^{te}$$

$$E_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}\, k\, z^2 + C^{te}$$

Soit :

$$E_p = -m\, g\, z + \frac{1}{2}\, k\, z^2 + C^{te}$$

On en déduit l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p$$

C'est-à-dire :

$$E_m = \frac{1}{2}\, m\, \dot{z}^2 - m\, g\, z + \frac{1}{2}\, k\, z^2 + C^{te}$$

L'énergie mécanique $E_m$ diminue dans le cas où les frottements ne sont pas négligés.
Dans le cas où ces frottements sont très faibles et en prenant la constante nulle, on a :

$$\begin{aligned}
< E_m > &= < E_c > + < E_p > \\
&= \frac{1}{2}\, m\, \langle \dot{z}^2 \rangle + \frac{1}{2}\, k\, \langle z^2 \rangle - m\, g\, \langle z \rangle \\
&= \frac{1}{2}\, m\, \omega_2^2\, Z_m^2\, \langle \sin^2(\omega_2\, t) \rangle + \frac{1}{2}\, k\, Z_m^2\, \langle \cos^2(\omega_2\, t) \rangle \\
&= \frac{1}{2}\, k\, Z_m^2\, e^{-2\,\lambda\, t}
\end{aligned}$$