

## Problème 1

On considère un disque conducteur de rayon  $R$ , de centre  $O$  et d'axe  $Oz$ , chargé uniformément en surface avec la densité surfacique  $\sigma$ . On utilisera les coordonnées cylindriques. Dans ce problème, on cherche à calculer le champ  $\overrightarrow{E(M)}$  en un point  $M$  de l'axe  $Oz$  de cote  $z$ , par différentes méthodes.

**1** - Faire l'étude des symétries et invariances du champ en un point de coordonnées  $(r, \theta, z)$ . Quelle est la direction du champ en  $M$  sur l'axe ?

**2** - Pour tout point  $P$  du disque de coordonnées  $(r, \theta)$ , on considère le petit élément de surface  $dS = dr.r.d\theta$  près de  $P$ .

**a**) Indiquer l'expression du champ élémentaire  $\overrightarrow{dE(P)}$  que  $dS$  crée en  $M$ .

**b**) Expliquer pourquoi seule la composante suivant  $Oz$  de  $\overrightarrow{dE(P)}$  contribue réellement au champ en  $M$ .

**c**) Calculer  $\overrightarrow{E(M)}$  en sommant toutes les contributions des petites surfaces pour tous les points  $P$  du disque chargé. On intégrera pour cela sur les variables  $r$  et  $\theta$  et on donnera le résultat en fonction de  $\sigma$ ,  $\epsilon_0$ ,  $z$ ,  $R$  et du vecteur  $\overrightarrow{e_z}$ .

**d**) En faisant intervenir la valeur absolue de  $z$ , donner une expression de  $\overrightarrow{E(M)}$  valable au dessus et en dessous du plan chargé.

**3** - On calcule maintenant le champ à partir de l'expression du potentiel.

**a**) Donner l'expression du potentiel  $V(M)$  créé par la distribution sous forme d'une intégrale.

**b**) En procédant comme au **2- c)**, réaliser le calcul de cette intégrale. On donnera  $V(M)$  en fonction de  $\sigma$ ,  $\epsilon_0$ ,  $z$ ,  $R$ . Donner une expression valable pour  $z < 0$  et  $z > 0$ .

**c**) En utilisant l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes, retrouver le champ calculé précédemment.

**4** - On se place maintenant dans le cas d'un rayon  $R$  tendant vers l'infini. On obtient alors le champ créé par une nappe infinie.

**a**) Calculer l'expression du champ  $\overrightarrow{E(M)}$ .

**b**) Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de GAUSS.

**c**) Comment expliquer que le résultat ne dépende pas de  $z$  ?

**d**) Calculer le potentiel en  $M$  en utilisant le gradient en coordonnées cartésiennes.

## Problème 2

### Première partie : Etudes de transformations d'un gaz parfait

On étudie différentes transformations de  $n$  moles d'un *gaz parfait*.

On notera  $P$  la pression du gaz,  $V$  son volume et  $T$  sa température.

On notera  $R$  la constante des gaz parfaits.

Soit  $c_V$  la capacité calorifique *molaire* à volume constant du gaz.

Soit  $c_P$  la capacité calorifique *molaire* à pression constante du gaz.

Soit  $\gamma$  le rapport des capacités calorifiques molaires à pression constante et à volume constant :

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V}$$

#### 0/ Préliminaires

**0.1/** Donner l'équation d'état du gaz parfait. Préciser, pour chacune des grandeurs utilisées dans cette équation, l'unité qui lui correspond dans le système international.

**0.2/** Donner la relation de MAYER qui relie les capacités calorifiques molaires  $c_P$  et  $c_V$  et la constante des gaz parfaits  $R$ .

Déduire de la relation de MAYER et de la définition du coefficient  $\gamma$  la relation entre  $c_V$ ,  $R$  et  $\gamma$ , d'une part, et entre  $c_P$ ,  $R$  et  $\gamma$ , d'autre part.

**0.3/** Rappeler l'expression différentielle de la variation d'énergie interne  $dU$  de  $n$  moles d'un gaz parfait au cours d'une transformation quelconque en fonction de la température  $T$ .

Rappeler l'expression différentielle de la variation d'entropie  $dS$  de  $n$  moles d'un gaz parfait au cours d'une transformation quelconque en fonction de la température  $T$ , du volume  $V$ , de  $n$ ,  $R$  et  $\gamma$ .

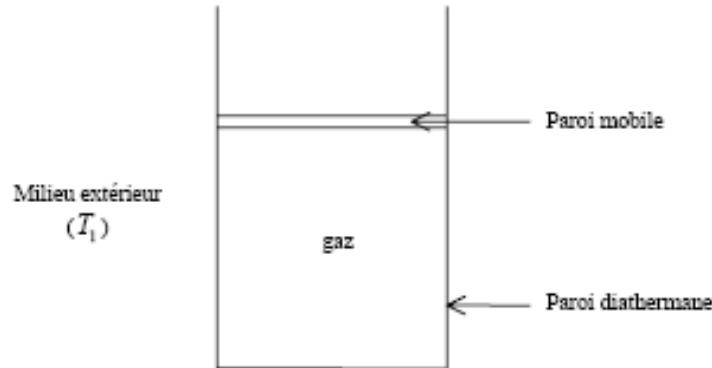
Que devient cette expression si l'on utilise les variables  $T$  et  $P$  ?

#### 1/ Détente isotherme

On enferme le gaz dans une enceinte diathermane (permettant les échanges thermiques) dont une paroi horizontale (piston), de masse négligeable, est mobile verticalement sans frottement.

La température  $T_1$  du milieu extérieur est constante. L'extérieur se comporte comme un thermostat.

A l'état initial le gaz est caractérisé par une pression  $P_1$ , un volume  $V_1$  et une température  $T_1$  et la paroi est bloquée.



On débloque la paroi et on la déplace de manière quasi-statique jusqu'à une position, telle que le volume  $V'_1$  offert au gaz soit  $V'_1 = 2V_1$ , et on la bloque à nouveau.

**1.1/** Déterminer la pression  $P'_1$  du gaz dans l'état final en fonction de  $P_1$ .

**1.2/** Déterminer l'expression du travail  $W_1$  mis en jeu par le gaz au cours de cette transformation en fonction de  $n$ ,  $R$  et  $T_1$ .

**1.3/** Calculer la variation d'énergie interne  $\Delta U_1$  du gaz au cours de cette transformation. En déduire le transfert thermique  $Q_1$  reçu par le gaz en fonction de  $n$ ,  $R$  et  $T_1$ .

**1.4/** Déduire de la question précédente l'expression  $\Delta S_{1,\text{éch}}$  de la variation d'entropie d'échange en fonction de  $n$  et  $R$ .

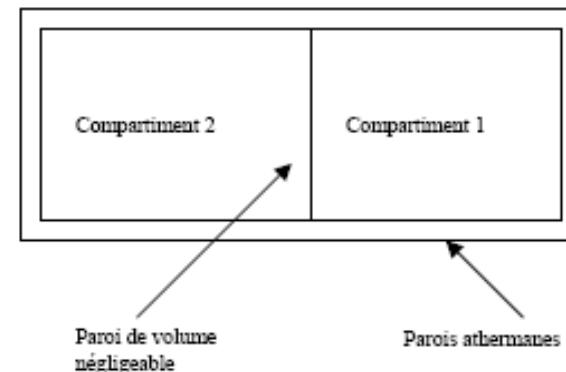
Quelle est l'expression de la variation d'entropie  $\Delta S_1$  au cours de cette transformation ?

En déduire la variation d'entropie d'irréversibilité  $\Delta S_{1,\text{irr}}$  au cours de cette transformation.

Commenter.

## 2/ Détente de JOULE GAY-LUSSAC

On considère un cylindre indéformable à parois athermanes (ne permettant pas les échanges thermiques) divisé intérieurement en deux compartiments de volumes identiques par une paroi de volume négligeable. Les  $n$  moles de gaz parfait se trouvent dans le compartiment 1, le compartiment 2 étant vide.



A l'état initial le gaz est caractérisé par une pression  $P_2$ , une température  $T_2$  et occupe un volume  $V_2$ .

On ôte alors la séparation et le gaz parfait occupe la totalité du cylindre. L'enlèvement de la séparation se fait sans travail.

**2.1/** En appliquant le premier principe de la thermodynamique, déterminer la variation d'énergie interne  $\Delta U_2$  du gaz au cours de cette transformation. En déduire la température  $T'_2$  puis la pression  $P'_2$  dans l'état final d'équilibre.

**2.2/ On considère, uniquement pour cette question, le cas d'un gaz réel.** Quelle est la différence qui existe, lors d'une détente de JOULE GAY-LUSSAC, entre le cas d'un gaz parfait et le cas d'un gaz réel ?

**2.3/** On considère à nouveau le cas du gaz parfait.

Déterminer la variation d'entropie  $\Delta S_2$  pour cette transformation.

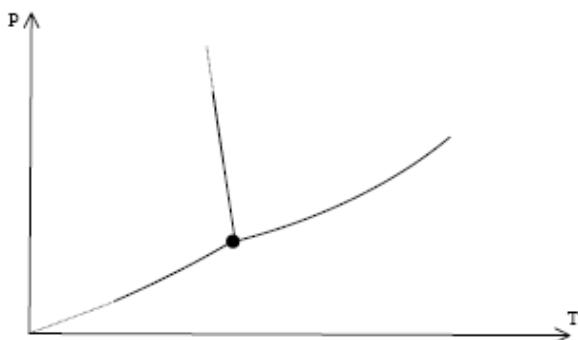
Que vaut la variation d'entropie d'échange  $\Delta S_{2,\text{éch}}$  pour cette transformation ?

En déduire l'expression  $\Delta S_{2,\text{irr}}$  de la variation d'entropie d'irréversibilité au cours de cette transformation.

**2.4/** Comparer la variation d'entropie  $\Delta S_2$  au cours de cette transformation à la variation d'entropie  $\Delta S_1$  de la détente isotherme de la question précédente (question 1). Commenter.

## Deuxième partie : Etude du corps pur sous deux phases

### 3/ Préliminaires



Le diagramme simplifié des phases de l'eau est représenté en coordonnées  $P$  et  $T$  sur le schéma ci-dessus.

**3.1/** Reproduire sommairement le diagramme ci-dessus. Compléter ce diagramme en précisant les domaines d'existence des différentes phases. Placer les points caractéristiques sur le diagramme et indiquer brièvement ce qu'ils représentent.

**3.2/** Définir la pression de vapeur saturante. De quel(s) paramètre(s) dépend cette grandeur ?

**3.3/** On souhaite faire passer à température constante un corps pur de l'état vapeur à l'état liquide. Quel est le nom donné à cette transformation ?

Représenter dans un diagramme en coordonnées  $P$  et  $V$  la transformation correspondante. On fera apparaître et on nommera sur le diagramme la courbe de rosée et la courbe d'ébullition. Préciser sur le diagramme les trois domaines qui interviennent et expliquer les trois parties de la courbe tracée.

#### 4/ Etude de changements de phases de l'eau

On considère une enceinte cylindrique et diathermane de volume initial  $V$ . Le volume de cette enceinte peut être modifié en déplaçant sans frottement un piston.

L'ensemble est maintenu dans l'atmosphère à la température  $T = 373$  K.

*La vapeur d'eau sèche et saturante sera considérée comme un gaz parfait.*

*On considère que le volume occupé par la phase liquide est négligeable devant le volume occupé par la phase vapeur. Par conséquent, le volume occupé par la phase vapeur est égal à la totalité du volume de l'enceinte.*

Soit  $P_S$  la pression de vapeur saturante de l'eau à la température  $T = 373$  K :  $P_S = 1$  bar.

Soit  $M_{\text{eau}}$  la masse molaire de l'eau.

**4.1/** Le cylindre est initialement vide. Le piston étant bloqué, on introduit dans le cylindre une masse  $m$  d'eau.

Déterminer la masse maximale  $m_{\text{max}}$  d'eau que l'on peut introduire dans le cylindre pour que l'eau soit entièrement sous forme de vapeur. On exprimera  $m_{\text{max}}$  en fonction de  $R$ ,  $T$ ,  $V$ ,  $P_S$  et  $M_{\text{eau}}$ .

**4.2/** On considère que la masse  $m$  d'eau introduite dans le cylindre est inférieure à  $m_{\text{max}}$  ( $m < m_{\text{max}}$ ).

Sous quel état se trouve l'eau introduite ?

On modifie le volume du cylindre en déplaçant le piston.

Faut-il augmenter ou diminuer le volume  $V$  du cylindre pour que l'eau puisse être simultanément sous forme liquide et vapeur ?

Déterminer le volume  $V_{\text{lim}}$  à partir duquel l'eau contenue dans le cylindre se trouve simultanément sous forme liquide et vapeur. On exprimera  $V_{\text{lim}}$  en fonction de  $R$ ,  $T$ ,  $m$ ,  $P_S$  et  $M_{\text{eau}}$ .

**4.3/** On a introduit dans le cylindre de volume  $V$  une masse  $m$  d'eau telle que l'on a simultanément de l'eau sous forme liquide et sous forme vapeur.

Déterminer en fonction de  $P_S$ ,  $V$ ,  $m$ ,  $R$ ,  $T$  et  $M_{\text{eau}}$  la fraction massique  $x_{\text{vap}}$  de l'eau à l'état vapeur ( $x_{\text{vap}}$  est définie comme le rapport de la masse d'eau à l'état vapeur sur la masse totale d'eau présente dans le cylindre).

## Problème 3

Le problème étudie quelques problèmes posés par la climatisation d'un local destiné à recevoir du public.

### I - EVALUATION DE LA PUISSANCE DE L'INSTALLATION

Le local a un volume  $V = 300 \text{ m}^3$ , on souhaite y maintenir une température  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  (293 K). L'étude est réalisée dans des conditions extrêmes où l'air extérieur est à la température  $t_2 = 40^\circ\text{C}$ . La pression de l'air est la même à l'intérieur et à l'extérieur du local, soit  $P_0 = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$ .

**I-1 :** Ventilation : on fixe généralement le taux de renouvellement égal à 1, c'est à dire qu'en une heure, il faut renouveler en totalité l'air de la pièce.

**I-1-1 :** Calculer la masse d'air qui doit pénétrer en une heure dans le local.

On supposera que l'air est un gaz parfait, de masse molaire  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ ;  $R = 8,32 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .

**I-1-2 :** Calculer le transfert thermique  $Q$  reçu par cette masse d'air pour passer de la température  $t_2$  à la température  $t_1$ . En déduire la puissance thermique correspondante (transfert thermique par unité de temps). On

donne la capacité thermique massique à pression constante de l'air :  $c_p = 1000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**I-2 :** Fuites thermiques : l'air du local étant à 20°C, l'air extérieur à 40°C, on constate qu'en l'absence de climatisation et de ventilation, la température du local passe à 21°C en 10 minutes. Par un calcul simple ; donner un ordre de grandeur de la puissance thermique correspondant aux fuites thermiques.

**I-3 :** Bilan : quelle doit être la puissance thermique extraite par le système de climatisation ?

Dans la suite, on prendra cette puissance égale à  $\mathcal{P}_{TH} = 3 \text{ kW}$ .

## II - SYSTEME DE REFROIDISSEMENT

On envisage une machine frigorifique à gaz parfait dont on donne le schéma de principe sur la *Figure 1*.

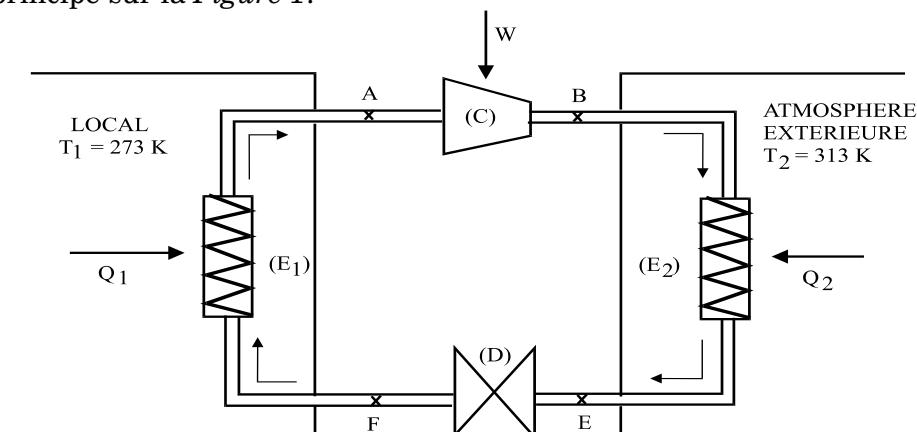


Figure 1

Le fluide qui décrit le cycle est de l'hélium pour lequel :  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$  et  $M = 4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Le fluide traverse successivement :

- un COMPRESSEUR (C) où le fluide subit une compression adiabatique réversible qui l'amène de A ( $T_1, P_1$ ) à B ( $T_3, P_2$ ).
- un ECHANGEUR (E<sub>2</sub>) où le transfert thermique entre le fluide et la source chaude est  $Q_2$ , ce qui amène le fluide au point E ( $T_2, P_2$ ).
- un DÉTENDEUR (D) où le fluide se détend de façon adiabatique réversible, ce qui l'amène en F ( $T_4, P_1$ ).
- un ECHANGEUR (E<sub>1</sub>) où le transfert thermique entre le fluide et la source froide est  $Q_1$ , ce qui ramène le fluide au point A ( $T_1, P_1$ ).

On donne :  $T_1 = 293 \text{ K}$ ;  $T_2 = 313 \text{ K}$ ;  $P_1 = 2 \text{ bar}$ ;  $P_2 = 3 \text{ bar}$ .

Tous les calculs sont rapportés à 1 kg d'hélium.

**II-1 :** Calculer pour l'hélium la capacité thermique massique  $c_p$ .

**II-2 :** Calculer les températures  $T_3$  et  $T_4$ .

**II-3 :** Calculer les volumes massiques  $v_A$ ,  $v_B$ ,  $v_E$  et  $v_F$ .

**II-4 :** Donner l'allure du diagramme du cycle en coordonnées ( $P$ ,  $v$ ). On fera apparaître les isothermes  $T_1$  et  $T_2$ . Préciser le sens de parcours du cycle et conclure

**II-5 :** Calculer les transferts thermiques  $Q_1$  et  $Q_2$  reçus par l'hélium lors de la traversée des échangeurs E<sub>1</sub> et E<sub>2</sub>. En déduire le travail  $W$  reçu par l'hélium lors de la traversée du compresseur.

**II-6 :** Définir et calculer l'efficacité de l'installation.

**II-7 :** Calculer la masse d'hélium qui doit, par seconde, décrire le cycle afin d'obtenir la puissance nécessaire au refroidissement du local, soit  $\mathcal{P}_{TH} = 3 \text{ kW}$ .

**II-8 :** Calculer la puissance minimale du moteur qui actionne le compresseur.

# Commentaires et correction :

## Problème 1

Sujet proche du cours qui permet de réviser les différentes manières de calculer un champ électrique sur un dispositif inscrit explicitement au programme MPSI. À travailler consciencieusement.

## Problème 2

Sujet de thermodynamique assez simple tiré du concours CCP TSI qui porte sur les transformation du gaz parfait et sur les changements d'état.

Une bonne connaissance du cours permet de s'en tirer sans difficulté. Attention aux notations non conventionnelles des capacités thermiques :  $c_p$  et  $c_v$  désignent des capacités **molaires**.

## Problème 3

Sujet du concours des Petites Mines. L'étude est assez classique et doit se mener en étudiant chaque élément comme un système ouvert.

Pour le calcul du travail à fournir au compresseur, le sujet suggère d'écrire  $W + Q_1 + Q_2 = 0$ . Cela ne me semble pas correct car il y a dans  $W$  le travail des forces de pression au niveau du détendeur, dont il n'est pas dit dans le sujet qu'il est récupéré par le compresseur. Dans ce cas, le travail utile au niveau du compresseur s'obtient avec le 1er principe pour un système ouvert appliqué au compresseur.

## Problème 1

1 - Le champ est défini partout sauf sur le disque. En coordonnées cylindriques, on a :

$$\overrightarrow{E(M)} = E_r(r, \theta, z) \overrightarrow{e_r} + E_\theta(r, \theta, z) \overrightarrow{e_\theta} + E_z(r, \theta, z) \overrightarrow{e_z}$$

Le plan (M,Oz) est un plan de symétrie, donc il contient  $\overrightarrow{E(M)}$ , d'où

$$\overrightarrow{E(M)} = E_r(r, \theta, z) \overrightarrow{e_r} + E_z(r, \theta, z) \overrightarrow{e_z}$$

L'invariance par rotation autour de Oz impose que  $E_r$  et  $E_\theta$  ne dépendent pas de  $\theta$ , d'où

$$\overrightarrow{E(M)} = E_r(r, z) \overrightarrow{e_r} + E_z(r, z) \overrightarrow{e_z}$$

2 - a) La surface  $dS$  placée en P crée le champ :

$$\overrightarrow{dE(M)} = \frac{\sigma d\overrightarrow{SPM}}{4\pi\epsilon_0 \|PM\|^3}$$

b) Pour tout point P du disque, on peut considérer son symétrique par rapport à l'axe. On constate que les composantes horizontales de  $\overrightarrow{dE_P(M)}$  et de  $\overrightarrow{dE_{P'}(M)}$  se compensent. Seule la composante suivant Oz contribue au champ  $\overrightarrow{E(M)}$ .

c) On a donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E(M)} &= \left( \iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{dE} \cdot \overrightarrow{e_z} \right) \overrightarrow{e_z} \\ &= \left( \iint_{\mathcal{D}} \frac{\sigma d\overrightarrow{SPM} \cdot \overrightarrow{e_z}}{4\pi\epsilon_0 \|PM\|^3} \right) \overrightarrow{e_z} \\ &= \left( \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \mathcal{D} \frac{\sigma r dr d\theta z}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \right) \overrightarrow{e_z} \\ &= \frac{\sigma z \overrightarrow{e_z}}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \left[ -(r^2 + z^2)^{-1/2} \right]_0^R \end{aligned}$$

soit finalement

$$\overrightarrow{E(M)} = \frac{\sigma z \overrightarrow{e_z}}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

d) Ce qui s'écrit encore

$$\boxed{\overrightarrow{E(M)} = \frac{\sigma z \overrightarrow{e_z}}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]}$$

3 - a) Par définition

$$V(M) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 \|PM\|}$$

b) On a donc

$$\begin{aligned} V(M) &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R \frac{\sigma d\theta r dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ (r^2 + z^2)^{1/2} \right]_0^R \end{aligned}$$

Soit

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{z}{\sqrt{z^2}} + \sqrt{R^2 + z^2} \right]$$

ou encore

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ -|z| + \sqrt{R^2 + z^2} \right]$$

c) Le champ  $\vec{E}$  étant porté par  $\vec{e}_z$ , on a

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

d'où

$$\overrightarrow{E(M)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \vec{e}_z$$

On retrouve bien le résultat précédent.

4 - a) Pour  $R \rightarrow \infty$  on trouve

$$\overrightarrow{E(M)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{z^2}} \vec{e}_z$$

donc

$$\begin{cases} \overrightarrow{E(M)} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ pour } z > 0 \\ \overrightarrow{E(M)} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ pour } z < 0 \end{cases}$$

b) voir cours

c) On considère un point M au dessus de la nappe à l'altitude  $z$  et on s'intéresse aux charges dans le cône de sommet M et d'angle  $\alpha$ . La charge de la nappe sous le cône vaut :

$$Q = \sigma S = \sigma \pi (z \tan \alpha)^2$$

Le champ créé en M par la nappe vaut environ

$$E(M) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}$$

Toutes les charges ne sont pas à la distance  $z$  mais cela donne une idée.

On a donc

$$E(M) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \pi (z \tan \alpha)^2}{z^2}$$

qui ne dépend pas de  $z$ .

Pour voir toute la nappe, il faut faire tendre  $\alpha$  vers  $\pi/2$

d) Le champ  $\vec{E}$  étant porté par  $\vec{e}_z$ , on a

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

d'où

$$\begin{cases} \text{pour } z > 0 \quad \frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow V(M) = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \\ \text{pour } z < 0 \quad \frac{dV}{dz} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow V(M) = +\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \end{cases}$$

où on a choisi des constantes d'intégration nulles pour assurer  $V=0$  sur la nappe et la continuité de  $V$ .

## Problème 2

0.1/ L'équation d'état du gaz parfait est :

$$PV = nRT$$

avec  $P$  en Pascal,  $V$  en  $\text{m}^3$ ,  $n$  en moles,  $R$  en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $T$  en Kelvin.

0.2/ La relation de MAYER s'écrit :

$$c_P - c_V = nR$$

Avec  $\gamma = c_P/c_V$ , on déduit :

$$c_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad c_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

0.3/ L'identité thermodynamique pour  $U$  s'écrit :

$$dU = TdS - PdV$$

A partir de la relation précédente, on obtient :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV$$

en utilisant l'équation d'état et la première loi de JOULE  $dU = nc_VdT$ , on en déduit pour le gaz parfait

$$dS = nc_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

En différentiant logarithmiquement l'équation d'état du gaz parfait, on obtient

$$\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

d'où on peut tirer

$$\begin{aligned} dS &= n(c_V + R) \frac{dT}{T} + nR \frac{dP}{P} \\ &= nCP \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P} \end{aligned} \quad (1)$$

**1.1/** Les parois étant diathermanes et la transformation étant quasi-statique, il y a équilibre thermique avec le milieu extérieur et donc  $T = T_1$  à tout instant. On déduit de l'équation d'état que  $P_1 V_1 = P'_1 V'_1 = nRT_1$  et donc

$$P'_1 = P_1 \frac{V_1}{V'_1} = \frac{P_1}{2}$$

**1.2/** Le travail des forces de pression est donné par

$$W_1 = \int -P_e dV$$

où  $P_e$  désigne la pression extérieure. Ici la transformation est quasi-statique donc  $P_e = P$  et

$$\begin{aligned} W_1 &= \int -P_d V = \int -\frac{nRT_1}{V} dV \\ &= -nRT_1 \ln \frac{V'_1}{V_1} = -nRT_1 \ln 2 \end{aligned}$$

**1.3/** La variation d'énergie interne est donnée par la première loi de JOULE

$$\Delta U_1 = nc_V \Delta T = 0$$

D'après le premier principe de la thermodynamique

$$\Delta U_1 = W_1 + Q_1$$

d'où on déduit

$$Q_1 = -W_1 = nRT_1 \ln 2$$

**1.4/** La variation d'entropie d'échange est définie par

$$\Delta S_{1,\text{éch}} = \frac{Q_1}{T_1}$$

soit

$$\Delta S_{1,\text{éch}} = nR \ln 2$$

La variation d'entropie s'obtient en intégrant la relation (1)

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \int dS = \int nCP \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P} \\ &= -nR \ln \frac{P'_1}{P_1} = nR \ln 2 \end{aligned}$$

On a donc

$$\Delta S_1 = \Delta S_{1,\text{éch}}$$

D'après le second principe de la thermodynamique

$$\Delta S_{1,\text{irr}} = \Delta S_1 - \Delta S_{1,\text{éch}}$$

soit

$$\Delta S_{1,\text{irr}} = 0$$

La transformation est réversible.

**2.1/** Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\Delta U_2 = W_2 + Q_2$$

Ici le système du gaz est isolé thermiquement donc  $Q_2 = 0$ . Les parois sont rigides, donc le travail des forces de pression vaut  $W_2 = 0$ . Finalement

$$\Delta U_2 = 0$$

Pour un gaz parfait, la première loi de JOULE conduit alors à  $\Delta T = 0$ , d'où

$$T'_2 = T_2 \quad \text{et} \quad P'_2 = \frac{P_2 V_2}{V'_2} = \frac{P_2}{2}$$

On a exploité l'équation d'état pour trouver  $P'_2$ .

**2.2/** Dans le cas d'un gaz réel, l'énergie interne peut dépendre de la température. La détente de JOULE GAY-LUSSAC se fait toujours à énergie interne constante mais la température peut varier.

**2.3/** La variation d'entropie se calcule en intégrant la relation (1)

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= \int dS = \int nCP \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P} \\ &= -nR \ln \frac{P'_2}{P_2} = nR \ln 2 \end{aligned}$$

La variation d'entropie d'échange vaut

$$\Delta S_{2,\text{éch}} = 0$$

car il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur.  
D'après le second principe de la thermodynamique

$$\Delta S_{2,\text{irr}} = \Delta S_2 - \Delta S_{2,\text{éch}}$$

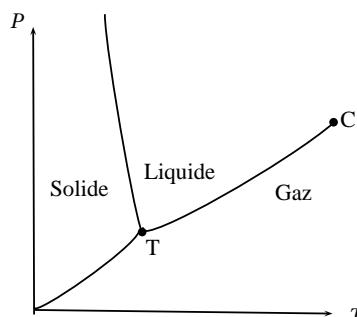
soit

$$\Delta S_{2,\text{irr}} = nR \ln 2 > 0$$

Cette fois-ci la détente est irréversible.

**2.4/** Dans les deux expériences la variation d'entropie est la même. Dans l'expérience 1 qui est réversible, elle est imputable à l'échange thermique, dans la deuxième expérience, elle est uniquement due à l'irréversibilité de la transformation

**3.1/** Le diagramme des phases de l'eau est donnée ci-dessous :

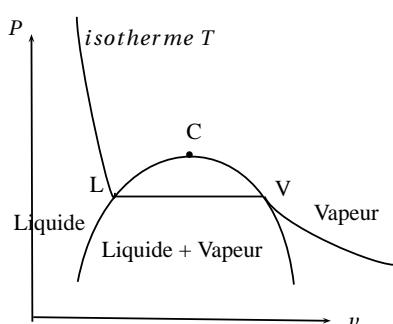


Le point T est le point triple où les trois phases coexistent à l'équilibre. Le point C est le point critique au delà duquel on ne distingue pas l'état gazeux et l'état liquide.

**3.2/** La pression de vapeur saturante correspond à la fonction du diagramme précédent entre les point T et C. Elle ne dépend que de la température.

**3.3/** La transformation de l'état vapeur à l'état liquide est la *liquéfaction*.

Le diagramme en coordonnées  $P$  et  $V$  de cette transformation est indiquée ci-dessous. On y a fait figurer l'isotherme à la température  $T$ .



Partant d'un point dans le domaine du liquide et augmentant le volume, on arrive au point L où apparaît la première bulle de gaz. L'ensemble des points L correspond à la *courbe d'ébullition*.

Tant que les deux phases sont présentes,  $P$  est constante. On arrive alors en V où disparaît la dernière goutte de liquide. L'ensemble des points V est appelé *courbe de rosée*.

**4.1/** La valeur la plus grande que l'on peut avoir pour la pression de la vapeur est  $P_S$ . cela correspond à la quantité maximale d'eau vapeur. La loi des gaz parfaits permet d'écrire

$$P_S V = nRT = \frac{m_{\text{max}}}{M_{\text{eau}}} RT$$

d'où on sort

$$m_{\text{max}} = \frac{M_{\text{eau}} P_S V}{RT}$$

**4.2/** Lorsque la masse d'eau introduite vérifie  $m < m_{\text{max}}$  toute l'eau est sous forme de vapeur sèche et  $P < P_S$ .

Pour faire apparaître l'eau liquide, il faut diminuer le volume  $V$ . Le volume d'eau limite s'obtient à nouveau en écrivant la loi des gaz parfaits avec  $P = P_S$  et  $n = m/M_{\text{eau}}$ .

$$P_S V_{\text{lim}} = nRT = \frac{m}{M_{\text{eau}}} RT$$

d'où

$$V_{\text{lim}} = \frac{mRT}{M_{\text{eau}} P_S}$$

**4.3/** L'eau vapeur prenant tout le volume  $V$ , l'application de la loi des gaz parfaits donne

$$P_S V = nRT = \frac{m_{\text{vap}}}{M_{\text{eau}}} RT$$

On a donc

$$m_{\text{vap}} = \frac{P_S V M_{\text{eau}}}{RT}$$

et la fraction massique de la vapeur vaut

$$x_{\text{vap}} = \frac{m_{\text{vap}}}{m} = \frac{P_S V M_{\text{eau}}}{RTm}$$

# Problème 3

**I-1-1 :** Le nombre de moles d'air à introduire est donné par :

$$n = \frac{P_0 V}{R T_1}$$

soit une masse

$$m = nM = \frac{P_0 V M}{R T_1} = 357 \text{ kg}$$

**I-1-2 :** Il s'agit d'une transformation monobare avec équilibre de pression au départ et à la fin. Le transfert thermique est donc donné par

$$Q = \Delta H = mc_p(T_1 - T_2) = -7,1 \cdot 10^6 \text{ J}$$

La puissance thermique correspondante est :

$$\mathcal{P} = \frac{Q}{\Delta t} = -1,98 \text{ kW}$$

**I-2 :** Cette puissance se calcule comme précédemment

$$\mathcal{P}_{\text{fuite}} = \frac{Q_{\text{perdue}}}{\Delta t} = \frac{mc_p \Delta T}{\Delta t} = 590 \text{ W}$$

**I-3 :** En régime permanent, il faut extraire une puissance thermique totale

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = (-\mathcal{P}) + \mathcal{P}_{\text{fuite}} = 2770 \text{ W}$$

**II- 1 :** La capacité thermique pour  $n$  moles d'hélium vaut :

$$C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1}$$

soit une capacité thermique massique à pression constante

$$c_p = \frac{C_p}{m} = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} = 5,2 \cdot 10^3 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

**II-2 :** La transformation A→B est adiabatique réversible, on a donc d'après la loi de LAPLACE

$$T_3 = T_1 \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 345 \text{ K}$$

De même pour la transformation E→F, on a

$$T_4 = T_2 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 266 \text{ K}$$

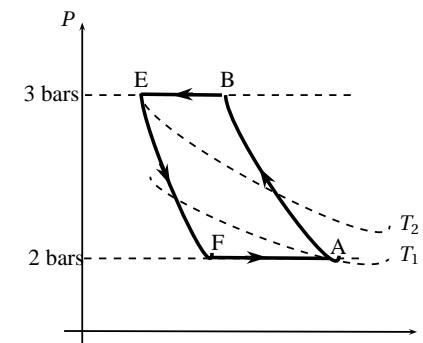
**II-3 :** Le volume massique s'obtient par

$$v = \frac{V}{m} = \frac{nRT}{mP} = \frac{\frac{m}{M}RT}{mP} = \frac{RT}{MP}$$

On en déduit les volumes massiques demandés en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  :

points	A	B	E	F
$v$	3,05	2,39	2,17	2,77

**II-4 :** Sur le diagramme de CLAPEYRON les isothermes ( $P = k/V$ ) ont des pentes moins fortes (en valeur absolue) que les adiabatiques réversibles ( $P = k/V^\gamma$ ).



Le cycle est parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On a alors

$$W = - \oint P_e dV = - \oint P dV > 0$$

**II-5 :** On applique le premier principe pour le système ouvert constitué par l'échangeur  $E_1$ . On le suppose horizontal et on néglige les vitesses d'écoulement. On a alors

$$\Delta h = c_p(T_A - T_F) = c_p(T_1 - T_4) = q_1$$

soit  $q_1 = 140 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

De même pour l'échangeur  $E_2$

$$\Delta h = c_p(T_E - T_F) = c_p(T_2 - T_3) = q_2$$

soit  $q_2 = -166 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

Le travail utile reçu dans le compresseur s'obtient en appliquant le premier principe pour un système ouvert :

$$\Delta h = c_p(T_B - T_A) = c_p(T_3 - T_1) = w'_{\text{comp}}$$

soit  $w'_{\text{comp}} = 270 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

**II-6 :** L'efficacité est définie par

$$\eta = \frac{q_1}{w'_{\text{comp}}} = 0,52$$

**II-7 :** La puissance est donnée par

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = \frac{d(mq_1)}{dt} = q_1 \frac{dm}{dt}$$

soit un débit d'hélium

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\mathcal{P}_{\text{th}}}{q_1} = 21 \text{ g.s}^{-1}$$

**II-8 :** La puissance minimum du compresseur est

$$\mathcal{P}' = \frac{d(mw'_{\text{comp}})}{dt} = w'_{\text{comp}} \frac{dm}{dt} = 5,7 \text{ kW}$$