TD-M2

Dynamique

Tester les connaissances

Enoncer la première loi de Newton.	Dans un référentiel galiléen, un point matériel isolé ou pseudo-isolé est immobile ou a un mouvement rectiligne et uniforme.
Enoncer la deuxième loi de Newton — pour un point matériel ; — pour un solide.	Dans un référentiel galiléen on a : — pour un point matériel : $\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ — pour un solide : $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = m\overrightarrow{a_{\text{G}}}$.
Enoncer la troisième loi de Newton.	Si M' exerce sur M une force $\overrightarrow{f}_{\text{M}'\to\text{M}}$ alors M exerce sur M' une force $\overrightarrow{f}_{\text{M}\to\text{M}'}$ de même droite d'action et telle que : $\overrightarrow{f}_{\text{M}'\to\text{M}} = -\overrightarrow{f}_{\text{M}\to\text{M}'}$.
Quelle est la condition pour qu'un mobile quitte un support ?	Il faut que la réaction normale s'annule.
Force d'interaction gravitationnelle entre 2 points matériels de masse m_1 et m_2.	$\overrightarrow{F}_{1\to2} = -\mathscr{G}\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{u}_{12} \qquad \overrightarrow{F}_{2\to1} = \mathscr{G}\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{u}_{12}$
Force d'interaction électrostatique entre 2 points matériels de charge q_1 et q_2.	$\overrightarrow{F}_{1\to2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{u}_{12} \qquad \overrightarrow{F}_{2\to1} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{u}_{12}$
Force de rappel d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k	$\overrightarrow{F} = \pm k\left(\ell - \ell_0\right)\overrightarrow{u}$ ℓ est la longueur physique du ressort. $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire dans l'axe du ressort.
Tension d'un fil inextensible	$\overrightarrow{F} = -T.\overrightarrow{e_r}$ $T > 0$. La norme T varie en fonction de θ (et/ou du temps).
Poussée d'Archimède	$\overrightarrow{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V \overrightarrow{g}$ Force dont la norme est égale au poids du volume de fluide déplacé. On la néglige en général dans l'air.
Force de frottement fluide	$\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{f}$ Toujours opposée au vecteur vitesse. (ici modèle valable pour de "faibles" vitesses).
Réaction du support (sans frottement)	$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_n}$ telle que $\overrightarrow{R_n}.\overrightarrow{v} = 0$ La réaction normale au support est toujours orthogonale au vecteur vitesse et est une force qui ne travaille pas (voir M3). En l'absence de frottement, la réaction tangentielle est toujours nulle : $\overrightarrow{R_T} = \overrightarrow{0}$

Tester les Bases

TLB MtE 1 Résultante des forces

Un corps de masse $m = 20\,\mathrm{kg}$, décrit la trajectoire plane d'équations paramétriques : $x(t) = 2.(t^2+1)$ et $y(t) = 7.t^2 + 3$.
t est le temps exprimé en secondes, x et y sont exprimés en mètres.
Quelle est l'intensité de la résultante des forces s'exerçant sur le corps ?

TLB MtE 2 Application directe du PFD

L'espace est rapporté à un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Un point matériel de masse m soumis à une seule force $\overrightarrow{F}$, décrit une trajectoire ayant la forme d'une cycloïde d'équation paramétriques dans le système d'axes (Ox, Oy) lié à $(\mathcal{R})$:

$$x(t) = R(\omega t - \sin \omega t)$$
$$y(t) = -R(1 - \cos \omega t)$$

Déterminer la norme et l'expression vectorielle de la force $\overrightarrow{F}$.

TLB MtE 3 La fronde

Une pierre est animée d'un mouvement circulaire uniforme à l'aide d'une fronde.

1. Quelles sont les forces appliquées à la pierre ?

2. La pierre est lancée. Quelles sont les forces appliquées à la pierre ? Quel a été le rôle de la fronde ?

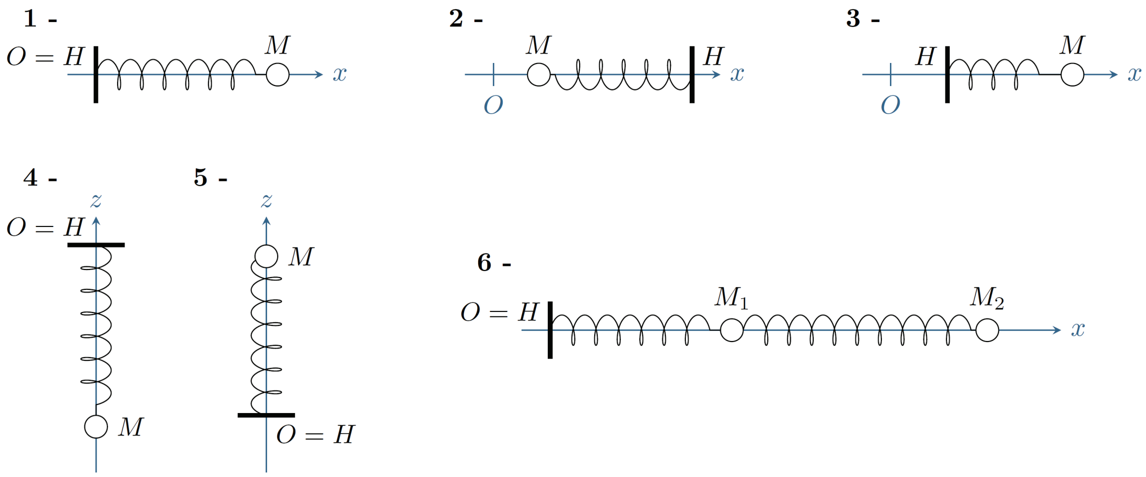
TLB MtE 4 Pendule simple

Un pendule est constitué d'un fil idéal de longueur ℓ, fixé en O et auquel est suspendu un objet ponctuel M de masse m. Il oscille dans le plan (Oxz), et sa position est repéré par θ.
Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ, et en déduire la période des petites oscillations.

TLB MtE 5 Force exercée par un ressort

On considère en ressort accroché un H au bâti. A l'autre extrémité du ressort, on accroche un solide M. Le point H est repéré par x_H ou z_H et le point M par x ou z. Dans chacun des cas, exprimer la force exercée par le ressort sur le solide fixé en M en fonction de la constante de raideur k de la longueur à vide ℓ_0 du ressort de la longueur ℓ du ressort et du vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$ orienté suivant Ox ou $\overrightarrow{e_z}$ orienté suivant Oz. Puis exprimer la force de rappel en fonction de k, ℓ_0 de la position x ou z du point M, de la position x_H ou z_H du point H.

Dans le dernier cas, exprimer les forces exercées par les deux ressorts sur chacun des points M_1 et M_2 d'abscisses x_1 et x_2. Les 2 ressorts sont supposés différents de caractéristiques $(k,\ \ell_0)$ et $(k',\ \ell'_0)$.



Exercices incontournables

Ex 1 Tir balistique

Une cible C, de masse m_C, est abandonnée sans vitesse initiale d'une hauteur h à l'abscisse $x = L$. Au même instant, un projectile P, de masse m_P est tiré depuis l'origine avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle β avec l'horizontale.
On admet que l'accélération d'un corps en chute libre est égale à $\overrightarrow{g}$ à chaque instant. Calculer l'angle β pour que le projectile atteigne sa cible. Quelle est la date t_1 à laquelle la cible est alors atteinte ?

Ex 2 Plan incliné

Un objet de masse m est lancé avec une vitesse initiale v_0 vers le haut suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Le coefficient de frottement de l'objet sur le plan incliné est égal à f.

1. Quelle distance parcourra le mobile avant de s'arrêter ?

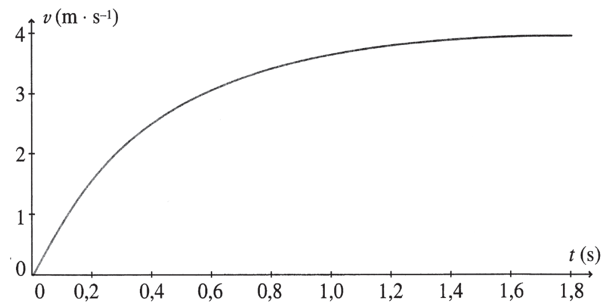
2. A quelle condition sur α l'objet restera-t-il ensuite immobile sur le plan incliné ?

Ex 3 Plateau horizontal

Un plateau horizontal P est animé d'un mouvement sinusoïdal vertical d'amplitude a et de fréquence f. Un point matériel M est posé sur P. Quelle condition doit vérifier f pour que M ne quitte jamais le plateau ?

Ex 4 Chute avec frottements fluides

Une bille de masse $m = 120$ g tombe dans un fluide. On a enregistré sa vitesse (norme) v en fonction du temps comme illustré ci-dessous :



1. Identifier les différentes phases du mouvement.

2. Donner une valeur approximative du temps caractéristique τ de ce mouvement.

3. Quelle est la valeur limite de v (notée v_{lim}) ?

4. En négligeant la poussée d'Archimède et en prenant $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{v}$ $(k > 0)$ comme force de frottement fluide, établir l'équation différentielle satisfaite par $\overrightarrow{v}$.

5. En déduire l'expression de v_{lim} en fonction de m, k et g.

6. Calculer la valeur de k.

Ex 5 Oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est constitué d'une masse m suspendue en M à l'extrémité d'un ressort de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe en O. On note l'allongement du ressort x.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement (position de M)

2. Trouver la période des oscillations qui prennent naissance lors de petites oscillations autour de la position d'équilibre.

Ex 6 Ressort sur tige inclinée

On considère une masse m accrochée à un ressort (k, ℓ_0) et pouvant glisser sans frottement sur une tige inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. On définit un axe (Ox) selon la direction de la tige avec l'origine O prise à l'autre extrémité du ressort.

1. Déterminer la position d'équilibre de la masse

2. On lâche la masse à la distance a par rapport à sa position à l'équilibre. Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse.

3. En déduire la période des oscillations et résoudre l'équation différentielle.

Ex 7 Un jeu d'enfant

Un enfant esquimau joue sur le toit d'un igloo. L'enfant se laisse glisser depuis le sommet S de l'Igloo, qui a la forme d'une demi sphère de rayon R et de centre O. La position de l'enfant, assimilé à un point matériel M, de masse m, est repérée par l'angle $\theta = (Oz, OM)$, (Oz) étant la verticale ascendante.

1. A partir de quelle position (repérée par l'angle θ_0) l'enfant perd-t-il le contact avec l'igloo (on néglige bien sûr les frottements).

2. Quel est le mouvement ultérieur de l'enfant ? Quelle est sa vitesse quand il retombe sur le sol ? Effectuer l'application numérique avec $m = 30$ kg, $a = 2$ m et $g = 9.8$ m $\cdot$ s^{-2}. Commenter.

Ex 8 Corde d'escalade

Au cours de l'escalade d'une paroi rocheuse, un grimpeur effectue une chute libre sans frottement, sans vitesse initiale d'une hauteur de $L = 8\ \mathrm{m}$ avant que la corde de sécurité fixée en A ne se tende. L correspond à la longueur de la corde au repos.

Pour simplifier les équations, tout le mouvement est supposé vertical.

1. Calculer la vitesse v_L atteinte par le grimpeur à l'instant où la corde commence à se tendre.

2. L'élasticité de la corde vaut $E = 8\ \%$. Entre le moment où la corde commence à se tendre et où elle atteint son maximum d'élasticité (arrêt complet du grimpeur pour $t = t_B$), on suppose qu'elle le soumet à une tension constante. Son accélération totale a_T est donc constante. Exprimer cette accélération puis la calculer.

3. La résistance à la rupture de cette corde vaut $25\ \mathrm{kN}$ $(2,5\ \mathrm{tonnes})$. Cette valeur est-elle suffisante pour enrayer la chute ? la masse du grimpeur avec son équipement est $m = 83\ \mathrm{kg}$. Une corde plus fine pourrait-elle suffire ?

Ex 9 Glissement sur un plan incliné

Un point matériel M de masse m est lancé depuis l'origine O d'un support plan (Oxy) incliné d'un angle β par rapport au plan horizontal et tel que l'axe (Ox) soit horizontal. Le vecteur vitesse initial $\overrightarrow{v}_0$ contenu dans le plan (Oxy) forme un angle α avec l'axe (Ox). Les frottements sur le support plan et avec l'air sont négligés.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique en projection dans la base adaptée.

2. En déduire les équations horaires du mouvement en fonction de v_0, α, β et g.

3. Déterminer l'équation de la trajectoire et identifier sa nature.

4. Examiner et commenter les cas limites $\beta = 0$ et $\beta = \pi/2$.

Ex 10 Rotation autour d'un axe fixe

Un point matériel M de masse m est relié par deux fils inextensibles de longueur L et sans masse à 2 points A et B d'un axe vertical. L'axe tourne sur lui-même avec la vitesse angulaire $\omega = C^{ste}$.

1. En supposant les deux fils tendus, calculer les tensions des fils (MA=MB)

2. Montrer que ω doit être supérieur à ω_{min} pour que les fils restent tendus.

3. A.N. : Calculer ω_{min} et les tensions des fils.
$m = 0,1\ \mathrm{kg}$, $L = MA = MB = 30\ \mathrm{cm}$, $d = AB = 40\ \mathrm{cm}$, $\omega = 3$ß $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

Ex 11 Oscillations forcées

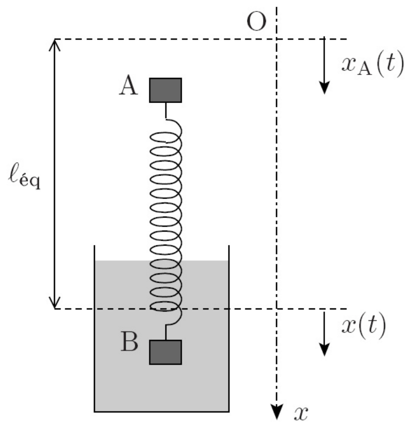
Une bille B assimilée à un point matériel de masse m est suspendue à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k. La bille plonge dans un liquide lui communiquant du fait des forces pressantes une poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi} = -M\overrightarrow{g}$ où M est la masse de liquide déplacée par la bille et $\overrightarrow{g}$ le champ de pesanteur. Les frottements exercés par le liquide sur la bille sont modélisés par une force $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse instantanée de la bille. On impose à l'extrémité supérieure du ressort notée A un déplacement vertical $x_A(t) = X_A \cos(\omega t)$ tel que $x_A = 0$ lorsque le système est à l'équilibre. Les cotes de A et B sont mesurées par rapport à l'axe vertical descendant $(0x)$.

1. En étudiant le système à l'équilibre (le point A immobile) déterminer l'expression de la longueur ℓ_{eq} du ressort.
Dans toute la suite, on se place en régime sinusoïdal forcé et on pose $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$ le déplacement de la bille B par rapport à la position d'équilibre.

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ en fonction de m, h, k et $x_A(t)$.

3. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{X}$ des oscillations en déduire l'amplitude X.

4. Déterminer à quelle condition l'amplitude des oscillations peut devenir supérieure à celle de l'excitation.



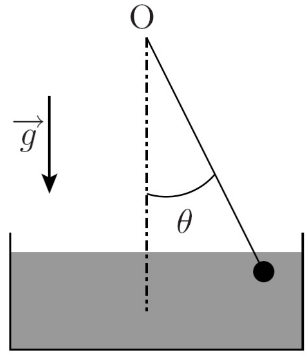
Ex 12 Mesure de la viscosité d'un milieu

Une sphère de masse m est attachée à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ. Elle peut osciller dans un milieu liquide dans lequel elle subit une force de frottement fluide $\overrightarrow{F} = -6\pi\eta r\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de la sphère et η la viscosité du milieu. La position de la sphère est repérée par l'angle $\theta(t)$ par rapport à la verticale descendante. On néglige la Poussée d'Archimède devant les autres forces mises en jeu et on suppose que le fil reste constamment tendu au cours du mouvement.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

2. Dans le cas d'oscillations de faible amplitude, exprimer la pseudo-pulsation Ω.

3. En déduire l'expression de la viscosité η en fonction de la pseudo-période T, de la période propre T_0 et des données.



Exercices pour s'entraîner ou pour aller plus loin

Ex 13 Skieur

Un skieur de masse $m = 80$ kg glisse sans frottement sur une piste rectiligne faisant un angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontale. Il subit de la part de l'air une force de résistance $\frac{1}{2}kSv^2$ où $S = 0.4\ \mathrm{m}^2$ et k le coefficient aérodynamique vaut 0.55. Il part sans vitesse initiale.

1. Montrer que le skieur atteint une vitesse limite v_ℓ. Comparer au record du monde de vitesse à skis de $250\ \mathrm{km/h}$.

2. Montrer que la vitesse varie selon la loi $\frac{v}{v_l} = \mathrm{th}\,(t/\tau)$ où τ et un temps caractéristique dont on donnera la valeur numérique. Quel temps faut-il au skieur pour atteindre v_ℓ à 1% près.

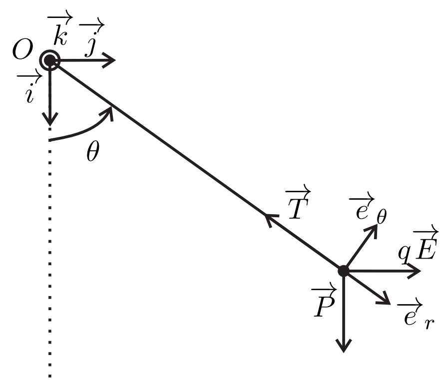
3. Le coefficient de frottement des skis sur la neige n'est plus nul, mais vaut $f = 0,05$. La réaction tangentielle vaut $T = fN$. Quelle est la nouvelle vitesse limite ? Le record de vitesse est-il un problème de glisse ou un problème d'aérodynamisme ?

On donne : $\dfrac{\mathrm{darth}\,(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{1-x^2}$

Ex 14 Pendule Electrostatique

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple électrostatique, de poids $m.\overrightarrow{g}$, de longueur ℓ, portant la charge q dans un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E}$ orthogonal à $\overrightarrow{g}$. Le référentiel d'étude est galiléen.

2. En déduire la période des petites oscillations.



Ex 15 Mouvement sur une tige en rotation

Un axe II' horizontal tourne autour d'un axe vertical Oz passant par son milieu O, à la vitesse angulaire constante ω.

En I et I' sont fixés 2 ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Entre les ressorts est fixée une masse m qui peut glisser sans frottements le long de II' ($II' > \ell_0$).

Étudier le mouvement de M sur la tige lorsqu'en $t = 0$, on lâche M sans vitesse initiale par rapport à la tige et de la distance a de O.