Cycle Préparatoire Intégré CPI1A

TD : Mécanique classique du point

TD : Analyse dimmensionnelle
TD : Cinématique 1

TD : Analyse dimensionnelle et unités

Exercice 1.

La masse volumique ρ d'un cylindre de masse m, de rayon R et de longueur L est donnée par la relation suivante : $\rho = \dfrac{m^x}{\pi L^y R^2}$

1.1 En utilisant les dimensions, trouver les deux constantes x et y.

1.2 En déduire l'expression exacte de la masse volumique ρ.

Exercice 2.

Les formules suivantes sont-elles valides dimensionnellement ? Faire une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

2.1 $F = \frac{Gm}{r}$, tels que : F est une force, G une constante exprimé en $\frac{m^3}{kg \cdot s^{-1}}$, m est une unité de masse et r une unité de longueur.

2.2 $P = g \cdot h_1 + h_2 \cdot F$ tels que : P : une pression, g : l'accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 : hauteurs, F : une force.

2.3 $\theta = \dfrac{b \cdot \sin(a)}{t \cdot \cos(c)}$, tels que : b, t des dimensions de longueur.

Exercice 3.

On note [X] la dimension physique de la grandeur X. On l'exprime dans la base L, M, T, I, θ (longueur, masse, temps, intensité et température). Ainsi, pour une vitesse v : $[v] = L.T^{-1}$.

3.1 Quelles sont les unités dans le système international des grandeurs de la base L, M, T, I, θ ? Donner la dimension et l'unité : d'une force, d'une puissance, d'une pression, d'une charge électrique.

3.2 Montrer que les unités suivantes correspondent à une seule dimension : N.m, kWh, e.V, g: $cm^2 \cdot s^{-2}$. Par quels facteurs numériques passe-t-on de l'un à l'autre ?

3.3 Quelle est la dimension d'un angle α ? Pourquoi dit-on que l'unité naturelle d'un angle est le radian ? Comparer la dimension et l'unité d'une fréquence ν et de la pulsation associée $\omega = 2\pi\nu$.

3.4 A l'aide d'arguments dimensionnels, discuter de la validité des égalités suivantes et proposer une écriture correcte :

- $x = (l^2 - d)/d$, où les trois grandeurs sont des distances.
- $x = x_0 \exp(-t/\tau)$, où t et τ sont des temps.
- $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{F}{\ell}$, où E est une énergie, v une vitesse, m une masse et ℓ une longueur et F une force.
- $\nu = \frac{g}{\ell} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$, où ℓ est une longueur, g l'accélération de la pesanteur et ω une pulsation.

Exercice 4.

Dans un fluide, une bille de rayon r animée d'une vitesse v est soumise à une force de frottement donnée par $F = -6\pi\eta r v$, où η est la viscosité du fluide.

4.1 Quelle est la dimension de η ?

4.2 Lorsque la bille est lâchée sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$, sa vitesse s'écrit pour $t>0$: $v = a\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{b}\right)\right)$ où a et b sont deux grandeurs qui dépendent des caractéristiques du fluide. Quelles sont les dimensions de a et b ?

4.3 Si ρ désigne la masse volumique du fluide, trouver une combinaison simple $Re = \rho^{\alpha} v^{\beta} r^{\gamma} \eta^{\delta}$ qui soit sans dimension (parmi les différents choix possibles on prendra $\alpha = 1$). On obtient ainsi le nombre de Reynolds qui permet de caractériser le régime d'écoulement d'un fluide (laminaire ou turbulent).

Exercice 5.

On considère que pour le pendule simple, les seuls paramètres sont sa longueur ℓ , sa masse m et l'accélération de pesanteur g. Déduire une grandeur proportionnelle à un temps qui caractérise les oscillations du pendule (Oscillations de faibles angles).

Exercice 6.

La loi des gaz parfaits est donnée par la formule $PV = nRT$ où T est la température, R est la constante molaire des gaz parfaits, et P, V et n sont respectivement la pression, le volume et le nombre de moles du gaz parfait. D'après cette formule :

A. La dimension de P est $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$

B. La dimension de V est L^{-3}

C. La dimension de R est $M \cdot L^{-4} \cdot T^{-2} \cdot N^{-1} \cdot \Theta^{-1}$

D. La dimension de R est $M \cdot L^{2} \cdot T^{-2} \cdot N^{-1} \cdot \Theta^{-1}$

E. R peut s'exprimer en $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$

TD : Cinématique du point -1-

Exercice 1. Dérivation des vecteurs unitaires(cours)

Dans le repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$, un point P se déplace dans le plan (xOy). Ses coordonnées polaires sont r et θ.

1.1 Calculer $\left[\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right]_{\mathcal{R}}$ et $\left[\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right]_{\mathcal{R}}$ en projection dans la base cartésienne B liée à $\mathcal{R}$.

1.2 En déduire les expressions de ces dérivées vectorielles dans la base cylindrique B_{cy}.

1.3 θ étant fonction du temps, calculer à l'aide de la question précédente les expressions de $\left[\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right]_{\mathcal{R}}$ et $\left[\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right]_{\mathcal{R}}$ dans B_{cyl} en fonction de $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

1.4 Démontrer que de façon générale, la dérivée de tout vecteur unitaire n'a pas de composante sur lui-même.

1.5 Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega}$ tel que : $\left[\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right]_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r$, $\left[\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right]_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta$, $\left[\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right]_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_\Omega \wedge \vec{e}_z$. En déterminer les composantes. Ce vecteur est le vecteur rotation du repère cylindrique $\mathcal{R}_{cyl}$ par rapport à $\mathcal{R}$.

1.6 Pourquoi $\left[\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right]_{R_{cyl}} = \vec{0}$ et $\left[\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}} = \vec{0}$?

1.7 Calculer $\left[\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}}$ et $\left[\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right]_{\mathcal{R}_{cy}}$. La position d'un point M de l'espace est définie par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

1.8 Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans B .

1.9 Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans B_{cyl}.

1.10 Calculer la vitesse du point M par rapport au référentiel cartésien $\mathcal{R}$: $\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{\mathcal{R}}$. Exprimer le résultat dans B et dans B_{cyl} .

1.11 Calculer la vitesse du point M par rapport au référentiel cartésien $\mathcal{R}_{cyl}$: $\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}}$. Exprimer le résultat dans B et dans B_{cyl}.

Exercice 2. Mouvement plan circulaire uniforme(cours)

Dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$, un point P a pour coordonnées polaires r et θ à l'instant t , tels que:
$r = A\cos\theta + B\sin\theta$ avec $\theta = \omega t$, où A, B, et ω sont des constantes positives.

2.1 Déterminer les composantes cylindriques du vecteur vitesse $\vec{v}(P/\mathcal{R})$ en fonction du temps. En déduire la nature du mouvement.

2.2 Quelles sont les composantes cylindriques du vecteur accélération $\vec{a}(P/\mathcal{R})$ en fonction du temps?

2.3 Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire. Montrer que celle-ci est un cercle.

2.4 Déduire de l'expression de $\|\vec{a}(P/\mathcal{R})\|$ le rayon du cercle.

Exercice 3. Mouvement en spirale

Dans le plan (xOy) d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le mouvement d'un point P est décrit par la variation de ses coordonnées cartésiennes en fonction du temps t : $x = be^{-kt}\cos(kt)$; $y = be^{-kt}\sin(kt)$, où b et k sont deux constantes positives.

3.1 Vecteur position

3.1.1 Déterminer en fonction de t les coordonnées polaires r et θ de P.

3.1.2 En déduire l'équation polaire de la trajectoire de P.

3.1.3 Représenter la trajectoire.

3.2 Vecteur vitesse

3.2.1 Déterminer en fonction de t les composantes polaires du vecteur vitesse $\vec{v}(P/\mathcal{R})$.

3.2.2 Indiquer la nature du mouvement (uniforme, accéléré ou retardé).

3.3 Vecteur accélération

3.3.1 Déterminer en fonction de t les composantes polaires du vecteur accélération $\vec{a}(P/\mathcal{R})$.

3.3.2 Préciser la direction de $\vec{a}(P/\mathcal{R})$ et représenter ce vecteur sur la figure.

3.3.3 Déterminer en fonction de t les composantes tangentielle et normale de $\vec{a}(P/\mathcal{R})$.

3.3.4 En déduire la valeur du rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 4. Mouvement hélicoïdal

Un point matériel M décrit, par rapport à un repère $\mathcal{R}\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$, une trajectoire définie par les équations paramétriques : $x = b\sin\omega t, y = b(1-\cos\omega t)$ et $z = \omega t$, où b et ω constantes positives.

4.1 Donner les coordonnées polaires r et θ de H , projeté orthogonal de M dans (xOy).

4.2 Quels sont la trajectoire et le mouvement, par rapport à $\mathcal{R}$, de H ?

4.3 Donner les composantes cartésiennes, cylindriques et intrinsèques des vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport à $\mathcal{R}$.

Exercice 5. Mouvement parabolique

Dans le plan (xOy) d'un repère $\mathcal{R}\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$, un point P décrit la parabole d'équation : $y = \frac{(x^2-1)}{2}$. Son mouvement est à accélération centrale de centre O.

5.1 Tracer le graphe de la trajectoire.

5.2 Calculer l'aire balayée par le vecteur espace $\overrightarrow{OP}$ lorsque l'angle polaire θ de P varie de π à 2π.

5.3 Montrer que l'équation polaire de la trajectoire est: $r = \frac{1}{1-\sin\theta}$.

5.4 Donner l'expression de la vitesse v de P en fonction de C (constante des aires) et de r. On pourra utiliser la première formule de Binet.

5.5 En déduire la valeur de la constante des aires C, sachant que pour $\theta = \frac{3\pi}{2}, v = 4\ \mathrm{ms}^{-1}$.

5.6 Combien de temps met $\overrightarrow{OP}$ pour balayer la surface indiquée de la première question?

5.7 Donner l'expression de l'accélération a de P en fonction de r.

Exercice 6.

Mouvement plan de vecteur accélération connu Un point matériel évolue dans le plan (Oxy). Initialement, sa position en coordonnées polaires est $(r(0) = r_0 > 0, \theta(0) = 0)$ et sa vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e_\theta}$ avec $v_0 > 0$ Au cours du mouvement, son accélération vérifie :

$$\overrightarrow{a} = -\frac{\alpha}{r^3}\overrightarrow{e_r} \qquad \text{avec } \alpha > 0$$

6.1 Montrer que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est constante. L'exprimer en fonction de r_0 et v_0.

6.2 Pour r_0 fixé, comment choisir v_0 pour obtenir un mouvement circulaire?

Exercice 7. Échelle double

Une échelle double (figure 1) est posée sur le sol, un de des points d'appui restant constamment en contact avec le coin O d'un mur. La position de l'échelle à l'instant t est repérée par l'angle $\alpha(t)$ formé par la portion OA de l'échelle avec le mur. L'extrémité B de l'échelle glisse sur le sol. L'échelle est telle que $OA = AB = \ell$.

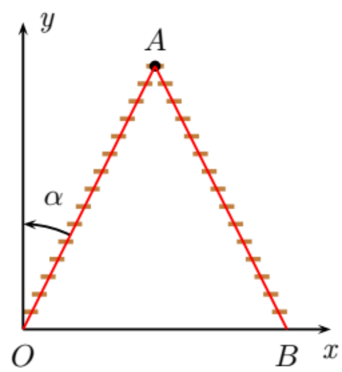

Figure 1: Échèle double.

7.1 Déterminer les composantes des vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}(A)_{/\mathcal{R}}$ et accélération $\overrightarrow{a}(A)_{/\mathcal{R}}$ du point A dans la base polaire $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}\right)$ en fonction de $\ell, \alpha, \dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$.

7.2 Exprimer dans la base cartésienne $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}\right)$ les composantes des vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}(B)/\mathcal{R}$ et accélération $\overrightarrow{a}(B)_{/\mathcal{R}}$ du point B en fonction $\ell, \alpha, \dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$.

Exercice 8. Satellite

Un satellite décrit une trajectoire elliptique dont l'équation en coordonnées polaires est : $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ où p, $e < 1$ sont deux paramètres constants (paramètre et excentricité de l'ellipse) et $\theta \in [0; 2\pi]$

8.1 Déterminer la vitesse du satellite en tout point en coordonnées polaires.

8.2 Quelle est l'expression générale de l'accélération en coordonnes polaires? Comment se simplifie cette expression lorsque la grandeur $r^2\dot{\theta}$ est constante (loi des aires)?