

# P 7

## Principes de thermodynamique

### 7.1

### Compétences du chapitre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Échelle mésoscopique, transformation infinitésimale.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Découper un système en sous-systèmes élémentaires.</li> <li>Découper une transformation finie en une succession de transformations infinitésimales.</li> </ul>
Premier principe pour un système fermé sous la forme :  $dU + dE_c = \delta W + \delta Q$ deuxième principe pour un système fermé sous la forme :  $dS = \delta S_{\text{éch}} + \delta S_{\text{créée}}$ avec $\delta S_{\text{éch}} = \sum \frac{\delta Q_i}{T_i}$ .	<ul style="list-style-type: none"> <li>Appliquer les principes pour obtenir une équation différentielle relative au système considéré.</li> </ul>
Identités thermodynamiques.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Définir la température et la pression thermodynamiques.</li> </ul>
Relations massiques.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Écrire les principes dans le cas d'un système de masse unité.</li> </ul>

## 7.2

## Sous-systèmes



### — Rappel —

Comme déjà vu page 122, on distingue trois échelles de longueur dans la description d'un fluide :

- l'échelle microscopique, définie au niveau moléculaire : c'est le libre parcours moyen  $\ell_{\text{moyen}}$  caractérisant le mouvement des molécules du fluides, de l'ordre de  $0,1 \mu\text{m}$  pour un gaz et de  $0,1 \text{ nm}$  pour un liquide.
- l'échelle macroscopique  $L$ , caractéristique de l'écoulement (diamètre d'une canalisation, largeur d'une rivière, ...).
- l'échelle mésoscopique  $a$ , intermédiaire entre les deux échelles précédentes :  $\ell_{\text{moyen}} \ll a \ll L$ .

Un volume de fluide de dimension mésoscopique  $a^3$  est suffisamment petit à l'échelle macroscopique pour être considéré comme ponctuel, et suffisamment grand à l'échelle microscopique pour contenir un grand nombre de molécules. Typiquement, ce volume est de l'ordre de la dizaine (ou de quelques dizaines) de  $\mu\text{m}^3$ .

L'échelle mésoscopique permet de définir des grandeurs locales, définies statistiquement sur le grand nombre de molécules du volume  $a^3$  situé au point considéré.

Une particule de fluide constitue un système fermé, de volume mésoscopique  $dV_{(M)} = a^3$ . Elle permet de définir statistiquement des grandeurs locales intensives (température, pression, masse volumique, vitesse).

L'approche mésoscopique définit une échelle intermédiaire entre le macroscopique et le microscopique. À cette échelle, un petit volume est assez grand pour contenir un très grand nombre de particules et on peut considérer le milieu comme continu mais suffisamment petit pour considérer la densité de molécules comme uniforme.

## 7.3

## Premier principe de la thermodynamique

### 7.3.1

### Énergie totale d'un système

Le premier principe est un principe de conservation. Il existe une grandeur, appelée énergie totale, extensive et conservative, que l'on peut définir dans tout système fermé. On appelle énergie totale d'un système, toute l'énergie présente, sous toutes ses formes.

$$\mathcal{E}_{\text{totale}} = E_p + E_c + U + E_{\text{nucl}} + E_{\text{autre}}$$

- $\mathcal{E}_{\text{totale}}$  : énergie totale,
- $E_p$  : énergie potentielle (macroscopique),
- $E_c$  : énergie cinétique (macroscopique),
- $U$  : énergie interne,
- $E_{\text{nucl}}$  : énergie nucléaire,
- ...

Dans le cadre du programme, on se limitera à :

$$\mathcal{E}_{\text{totale}} = E_c + U$$

Les autres énergies seront considérées comme constantes et leurs variations seront donc nulles.

#### Les unités :

$U, E_c, W$  et  $Q$  s'expriment en Joules ( $J$ ).

**7.3.2****Premier principe**

L'énergie est une fonction d'état. Elle ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement de l'état initial et de l'état final.

La variation de cette énergie est donnée par :

$$\Delta E_{\text{totale}} = W + Q$$

On obtient alors :

**— Premier principe —**

$$\Delta U + \Delta E_c = W + Q$$

C'est le premier principe de la thermodynamique.

La forme différentielle de ce premier principe s'écrit :

$$dU + dE_c = \delta W + \delta Q$$

où les grandeurs représentent :

- $dU$  : variation infinitésimale de l'énergie interne,
- $dE_c$  : variation infinitésimale de l'énergie cinétique,
- $\delta W$  : transfert de travail élémentaire reçu,
- $\delta Q$  : transfert thermique élémentaire.

**7.3.3****Capacités thermiques**

Les capacités thermiques sont également appelées capacités calorifiques.

**Les unités :**

- Les capacités thermiques s'expriment en  $J.K^{-1}$ .
- Les capacités thermiques molaires s'expriment en  $J.K^{-1}.mol^{-1}$ .
- Les capacités thermiques massiques s'expriment en  $J.K^{-1}.kg^{-1}$ .

**7.3.4****Un peu de maths****7.3.4.1****Dérivées partielles****— Rappel —**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I \in \mathbb{R}$ . La dérivée de  $f$  au point  $a \in I$  est :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $A \in D$ . Une expression du type " $\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - f(A)}{X - A}$ " n'est pas bien définie parce que diviser par  $X - A$ , qui est un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ , n'a aucun sens ! Néanmoins, si on fixe toutes les composantes de  $X$  sauf une, on peut définir des dérivées partielles.



### — Dérivée partielle —

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $A \in D$ . Pour  $i = 1, \dots, p$ , on appelle dérivée partielle par rapport à  $x_i$  de  $f$  en  $A = (a_1, \dots, a_p)$ , et on note  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ , ou bien  $f'_{x_i}(A)$ , la dérivée de la fonction partielle  $f_{A,i}$  prise en  $a_i$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = f'_{A,i}(a_i) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_p)}{x_i - a_i}.$$

Pour une fonction de deux variables  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en point  $A = (a,b) \in D$  les dérivées partielles de  $f(x,y)$  en  $(a,b)$  sont les dérivées des fonctions partielles  $f(x,b)$  et  $f(a,y)$  qui se calculent alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}.$$

Parfois, on les note aussi  $f'_x(a,b)$  et  $f'_y(a,b)$ .

#### 7.3.4.2 Derivées partielles d'ordre supérieur.

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Les dérivées partielles définissent  $p$  nouvelles fonctions :

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p)$$

On peut regarder les dérivées partielles de chacune de ces nouvelles fonctions. Cela nous donne les dérivées partielles d'ordre 2 (aussi appelées les dérivées partielles secondes) et à leur tour on peut regarder les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre 2, ... Cela s'écrit par exemple :

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$



### — Fonction de classe $C^k$ —

Une fonction  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  est une fonction dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $k$  existent et sont continues. Une fonction est dite de classe  $C^\infty$  si elle est de classe  $C^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .



### — Théorème de Schwarz —

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $D$ . Les fonctions de dérivées partielles d'ordre 2,  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$  et  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$  sont égales en tout point de  $D$ .



### — Remarque —

Le théorème de Schwarz implique que les dérivées partielles d'ordre  $k$ ,  $k \geq 2$ , d'une fonction de classe  $C^k$ ,  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  ne dépendent pas de l'ordre dans lequel les dérivées partielles sont prises. Par exemple, pour une fonction de deux variables  $f(x, y)$  de classe  $C^3$ , on a :  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$

### 7.3.4.3 Différentielle totale

En physique, on retiendra notamment que la différentielle d'une fonction  $f$  peut s'écrire :

- pour une fonction de 2 variables  $x$  et  $y$ , en un point de coordonnées  $(x_0, y_0)$ ,

$$df_{(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy$$

ou plus simplement :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

- pour une fonction de 3 variables  $x, y$  et  $z$ , en un point de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ ,

$$df_{(x,y,z)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) dz$$

ou plus simplement :

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

### 7.3.4.4 Capacité thermique à pression constante



#### — Capacité thermique à pression constante —

On définit la capacité thermique à pression constante de la façon suivante :

$$C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$$

On a alors pour la capacité thermique molaire à pression constante :

$$C_{p,m} = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = \frac{C_p}{n}$$

et pour la capacité thermique massique à pression constante :

$$c_p = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = \frac{C_p}{m}$$

### 7.3.4.5 Capacité thermique à volume constant



#### — Capacité thermique à volume constant —

On définit la capacité thermique à volume constant de la façon suivante :

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

On a alors pour la capacité thermique molaire à volume constant :

$$C_{V,m} = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{C_V}{n}$$

et pour la capacité thermique massique à volume constant :

$$c_V = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{C_V}{m}$$

## 7.4 gaz parfait

### 7.4.1 Lois de Joule

#### 7.4.1.1 Première loi de Joule



##### — Première loi de Joule —

La première loi de Joule postule que l'énergie interne  $U$  d'un gaz parfait est une fonction qui dépend uniquement de la température :  $U = f_1(T)$ .

$$dU = C_V dT = n C_{V,m} dT = m c_V dT$$

Avec  $C_v$  la capacité thermique à volume constant ( $C_{V,m}$  et  $c_V$  sont les capacités thermiques respectivement molaires et massiques à volume constant).

On utilise donc  $U$  dans un système isochore.

#### 7.4.1.2 Deuxième loi de Joule



##### — Deuxième loi de Joule —

De même, la deuxième loi de Joule postule que l'enthalpie interne  $H$  est également une fonction qui dépend uniquement de la température :  $H = f_2(T)$ .

$$dH = C_p dT = n C_{p,m} dT = m c_p dT$$

Avec  $C_p$  la capacité thermique à pression constante. ( $C_{p,m}$  et  $c_p$  sont les capacités thermiques molaires et massiques à pression constante).

On utilise donc  $H$  dans une transformation monobare.

### 7.4.2 Rapport ou coefficient $\gamma$



##### — Rapport ou coefficient $\gamma$ —

$$\text{On définit la grandeur } \gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} > 1$$

### 7.4.3 Relation de Mayer

Dans le cadre de l'étude d'un G.P., on a :

$$C_V = \frac{dU}{dT}, C_p = \frac{dH}{dT}$$

Donc :

$$C_p - C_V = \frac{d(H - U)}{dT} = \frac{d(pV)}{dT} = nR \frac{dT}{dT}$$

On en déduit la relation de Mayer :



#### — Relation de Mayer —

$$C_p - C_V = nR$$

donc

$$C_{p,m} - C_{V,m} = R$$

ou encore

$$c_p - c_V = \frac{n}{m} R = \frac{R}{M} = r$$

On en déduit les expressions des capacités thermiques pour un gaz parfait :

	capacité thermique	capacité thermique molaire	capacité thermique massique
à volume constant	$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$	$C_{V,m} = \frac{R}{\gamma - 1}$	$c_V = \frac{R}{M(\gamma - 1)}$
à pression constante	$C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$	$C_{p,m} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$	$c_p = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)}$

TABLE 7.2 – Capacité thermique d'un gaz parfait

Pour un gaz parfait monoatomique, noté G.P.M., on a  $\gamma = \frac{5}{3} = 1,67$

Pour un gaz parfait diatomique, noté G.P.D., on a  $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$

## 7.5

### Phases condensées



#### — Phases condensées —

Pour les phases condensées (solides ou liquides), on peut faire l'hypothèse que  $U(T)$  et  $H(T)$  sont équivalentes.

On obtient alors :

$$C_p = C_V = C$$

Et :

$$dU = dH = C dT = m c dT = n C_m dT$$

**7.6****Deuxième principe de la thermodynamique****7.6.1****Entropie****— Entropie —**

Pour tout système fermé, on peut définir une fonction d'état, notée  $S$ , appelée entropie, qui est une grandeur extensive, mais non conservative. Cette grandeur peut être créée ou non, mais jamais détruite.

**7.6.2****Énoncés du deuxième principe**

Comme déjà vu dans les rappels page 108 :

- Énoncé de Kelvin : Dans un système cyclique, il est impossible de convertir totalement en travail de la chaleur extraite d'une seule source à température constante.
- Énoncé de Clausius : Dans un système cyclique, il est impossible de transférer de la chaleur d'une source froide à une source chaude sans un apport extérieur.

**— Deuxième principe —**

Ainsi, en pratique, toute transformation d'un système thermodynamique s'effectue avec augmentation de l'entropie totale incluant l'entropie du système ainsi que celle du milieu extérieur. On dit alors qu'il y a création d'entropie notée  $S_{\text{création}}$  ou  $S_{\text{créée}}$ .

$$\Delta S_{\text{totale}} = \Delta S_{\text{système}} + \Delta S_{\text{extérieur}} = S_{\text{création}} \geq 0$$

Le deuxième principe est un principe d'évolution.

**— Bilan entropique —**

Le bilan entropique se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta S = \Delta S_{\text{système}} = S_{\text{échangée}} + S_{\text{créée}} = \int dS \\ S_{\text{échangée}} = \int \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} \\ S_{\text{créée}} \geq 0 \end{array} \right.$$

La forme différentielle du bilan entropique s'écrit :

$$dS = dS_{\text{système}} = \delta S_{\text{échangée}} + \delta S_{\text{créée}}$$

**— Remarque —**

Dans le cas d'une transformation réversible, l'entropie créée  $S_{\text{créée}} = S_{\text{création}}$  est nulle.

**7.7****Identités thermodynamiques****7.7.1****Première identité thermodynamique**

La première identité thermodynamique s'écrit :

$$dU = T dS - p dV$$

**— Remarque —**

On peut se rappeler de cette relation grâce au premier principe :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

pris dans le cas réversible :

$$\delta W = -p dV \text{ et } \delta Q = T dS$$

**7.7.2****Deuxième identité thermodynamique**

La définition de l'enthalpie :

$$H = U + p V$$

permet d'écrire :

$$dH = dU + p dV + V dp$$

Soit :

$$dH = T dS + V dp$$

**7.7.3****Définition de la température et de la pression thermodynamiques****— Température thermodynamique —**

À l'aide de l'expression de  $dS$  dans le cas d'un système caractérisé par  $T, V$ , en identifiant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} dU &= T dS - p dV \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV \end{aligned}$$

on peut définir la température par :

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$$



## — Pression thermodynamique —

De même, en identifiant les expressions précédentes :

$$\begin{aligned} dU &= T dS - p dV \\ &= \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V dS + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S dV \end{aligned}$$

On peut définir la pression par :

$$p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S$$

La première identité thermodynamique donne aussi :

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV$$

Ce qui permet également d'écrire :

$$\frac{p}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_U$$

et ainsi de définir la pression thermodynamique à l'aide d'une autre expression :

$$p = T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_U$$

## 7.8 Entropie d'un corps pur

Si le système est caractérisé par  $T$  et  $V$ , on a alors :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p dV}{T}$$

relation déduite de la première identité thermodynamique, et s'il est caractérisé par  $p$  et  $T$ , on a :

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{V dp}{T}$$

relation déduite de la deuxième identité thermodynamique.

On détermine  $S_{\text{créée}}$  à l'aide de la relation :

$$S_{\text{créée}} = \Delta S - S_{\text{échangée}}$$

### 7.8.1

#### Variation de l'entropie pour un Gaz Parfait (G.P.)

Pour un gaz parfait, la variation d'énergie interne peut s'exprimer ainsi :

$$dU = n C_{V,m} dT$$

et la variation d'enthalpie :

$$dH = n C_{p,m} dT$$

Par conséquent, pour un gaz parfait G.P. la variation d'entropie élémentaire  $dS$  vaut :

$$dS = n C_{V,m} \frac{dT}{T} + n R \frac{dV}{V}$$

ou encore :

$$dS = n C_{p,m} \frac{dT}{T} - n R \frac{dp}{p}$$

En intégrant entre les valeurs initiales ( $p_i, T_i, V_i$ ) et les valeurs finales ( $p_f, T_f, V_f$ ), on retrouve les formules vues en première année :

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = n C_{V,m} \ln \frac{T_f}{T_i} + n R \ln \frac{V_f}{V_i}$$

ou encore :

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = n C_{p,m} \ln \frac{T_f}{T_i} - n R \ln \frac{p_f}{p_i}$$

### 7.8.2 Rappels : Loi de Laplace

En utilisant les lois de Joule ainsi que les identités thermodynamiques, on démontre la loi de Laplace.



#### — Loi de Laplace —

Pour une transformation isentropique, c'est-à-dire réversible et adiabatique, la pression  $p$  et le volume  $V$  du système sont liés à tout instant par la relation suivante :

$$p V^\gamma = C^{te}$$



#### — Autres expressions de la loi de Laplace —

La loi de Laplace peut s'exprimer également en fonction de la température à l'aide de l'équation des gaz parfaits :

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = C^{te'}$$

ou bien :

$$T V^{\gamma-1} = C^{te''}$$

#### ⇒ Activité 7.1

Démontrer la loi de Laplace sous une de ses formes.



### 7.8.3

### Variation de l'entropie pour une phase condensée

Pour une phase condensée,  $\delta Q = C dT = n c_m dT = m c dT$  et on a :

$$dS = C \frac{dT}{T} = n C_m \frac{dT}{T} = m c \frac{dT}{T}$$

En intégrant entre les températures initiale  $T_i$  et finale  $T_f$ , on retrouve les formules vues en première année :

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} C \frac{dT}{T} = C \ln \frac{T_f}{T_i} = n C_m \ln \frac{T_f}{T_i} = m c \ln \frac{T_f}{T_i}$$

## 7.9

## Machines thermiques : rappels et compléments

### 7.9.1

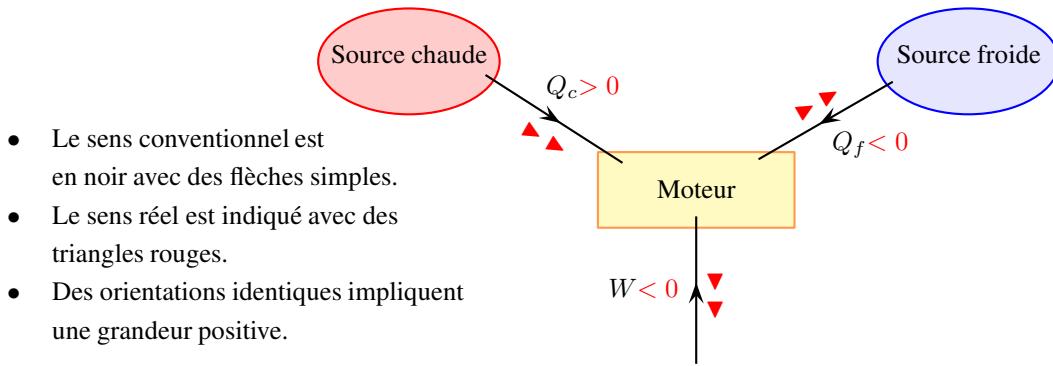
### Moteurs et machines réceptrices

Soit  $Q_f$  le transfert thermique de la source froide vers le système, en contact avec un thermostat de température  $T_f$  et  $Q_c$  le transfert thermique de la source chaude vers le système en contact avec un thermostat de température  $T_c$ .

- Le moteur ditherme est caractérisé par :

- $Q_f < 0$
- $Q_c > 0$
- $W < 0$

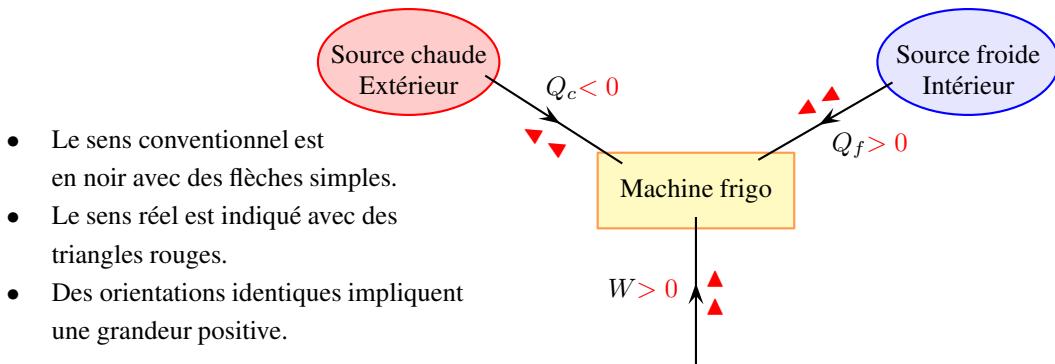
On peut représenter son schéma de principe comme suit :



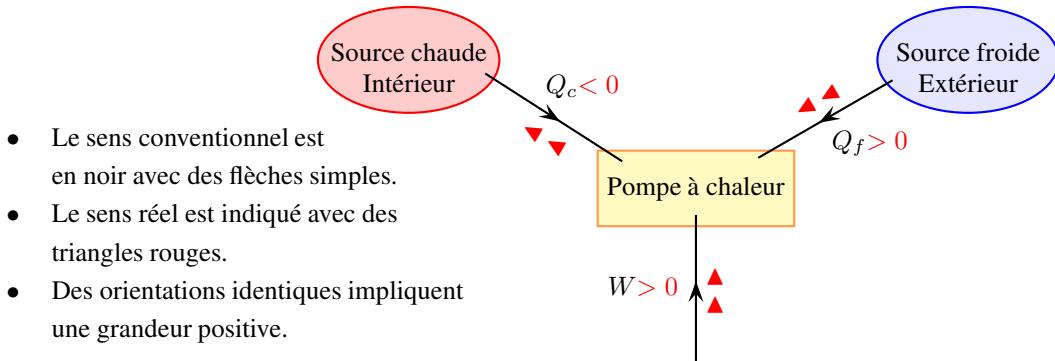
- La machine frigorifique et la pompe à chaleur sont caractérisées par :

- $Q_f > 0$
- $Q_c < 0$
- $W > 0$

Pour la machine frigorifique, on a :



et pour la pompe à chaleur, on peut écrire :





Attention aux conventions : Si par exemple, la source chaude est constituée d'eau, de masse  $m$ , de capacité calorifique massique  $c_e$  dont la température est égale à  $T_e$  et variant de  $T_{e,I}$  à  $T_{e,F}$ , on a alors la relation suivante :

$$Q_c = - \int_{T_{e,I}}^{T_{e,F}} m c_e dT_e$$

car  $Q_c$  est la chaleur reçue par le système de la part de la source chaude. C'est donc la chaleur cédée par l'eau chaude, soit l'opposé de la chaleur reçue par celle-ci !

Dans cette étude, sachant que le système est en contact avec deux thermostats, on a les formules suivantes :

Premier principe :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = W + Q_f + Q_c = 0$$

Deuxième principe :

$$\Delta S_{\text{cycle}} = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_{\text{création}} = 0$$

Comme l'entropie créée  $S_{\text{création}}$  est positive ou nulle, on en déduit l'inégalité de Clausius :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$



### — Remarques —

Dans le cas où ce sont des pseudo-sources, on a :

$$\Delta S_{\text{cycle}} = \int \frac{\delta Q_c}{T_c} + \int \frac{\delta Q_f}{T_f} + S_{\text{création}} = 0$$

Comme précédemment, l'entropie créée  $S_{\text{création}}$  est positive ou nulle et on en déduit l'inégalité de Clausius :

$$\int \frac{\delta Q_c}{T_c} + \int \frac{\delta Q_f}{T_f} \leq 0$$

## 7.9.2

### Coefficient d'efficacité



### — Rendement ou efficacité —

On appelle rendement ou coefficient d'efficacité, notée  $\eta$ , le rapport de l'énergie utile de la machine thermique, compte tenu de sa vocation, sur l'énergie dépensée, en valeur absolue.

$$\eta = \frac{\text{Énergie utile}}{\text{Énergie dépensée}}$$

**Les unités :**

Le rendement  $\eta$  est bien sûr sans unité

**7.9.2.1 Cycle moteur**

Le fonctionnement moteur est caractérisé par :

- $W < 0$  : du travail est fourni à l'extérieur,
- $Q_c > 0$  : on prend de la chaleur à la source chaude,
- $Q_f < 0$  : on donne de la chaleur à la source froide,
- $\eta = -\frac{W}{Q_c}$ .

**7.9.2.2 Cycle frigorifique**

Dans une machine frigorifique, un fluide caloporteur ( $CFC$ ,  $NH_3$ , ...) circule. Sous l'action du compresseur, le fluide caloporteur passe de sa phase gazeuse à sa phase liquide. Ce faisant, il restitue de l'énergie à la source chaude. Sous l'action du détendeur, le fluide caloporteur passe de sa phase liquide à sa phase gazeuse. Ce faisant, il absorbe de l'énergie au contact de la source froide.

La machine frigorifique fonctionne donc à l'aide des transitions de phases, qui réclament des transferts thermiques.

Le fonctionnement en machine frigorifique est caractérisé par :

- $W > 0$  : on doit consommer du travail, généralement de l'énergie électrique,
- $Q_c < 0$  : on restitue de l'énergie à la source chaude,
- $Q_f > 0$  : on récupère de l'énergie depuis la source froide,
- $\eta = \frac{Q_f}{W}$ .

**7.9.2.3 Cycle de pompe à chaleur**

Le fonctionnement en pompe à chaleur est caractérisé par :

- $W > 0$ ,
- $Q_c < 0$ ,
- $Q_f > 0$ ,
- $\eta = -\frac{Q_c}{W}$ .

**7.9.2.4 Les différents cycles**

cycle	moteur	frigorifique	pompe à chaleur
$W$	$< 0$	$> 0$	$> 0$
$Q_c$	$> 0$	$< 0$	$< 0$
$Q_f$	$< 0$	$> 0$	$> 0$
$\eta$	$-\frac{W}{Q_c}$	$\frac{Q_f}{W}$	$-\frac{Q_c}{W}$

TABLE 7.3 – Rendement et efficacités des différentes machines

### 7.9.3 Cycle de Carnot

#### 7.9.3.1 Dans le diagramme de Watt ( $p, V$ )

La pente de la tangente à la courbe représentative d'une adiabatique réversible (donc isentropique) est plus grande que celle représentant une isotherme.

En effet :

- Pour un gaz parfait, une transformation isotherme est décrite par la loi du gaz parfait :

$$pV = nRT = C^{te}$$

D'où, en prenant la différentielle logarithmique :

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = 0$$

On obtient la pente :

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V} \quad \textcircled{1}$$

- Pour une adiabatique réversible, donc isentropique, la première identité thermodynamique donne :

$$dU = TdS - pdV = -pdV \quad \textcircled{2}$$

La première loi de Joule donne :

$$dU = C_VdT = \frac{nR}{\gamma - 1}dT \quad \textcircled{3}$$

Avec la loi des gaz parfaits  $nRT = pV$ , on a :

$$nRdT = d(pV) = pdV + Vdp \quad \textcircled{4}$$

Grâce aux équations  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$  et  $\textcircled{4}$ , on trouve :

$$dU = \frac{pdV + Vdp}{\gamma - 1} = -pdV$$

Soit :

$$pdV(1 + \gamma - 1) = -Vdp$$

Et :

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V} \quad \textcircled{5}$$

Avec les relations  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{5}$ , on a la relation suivante :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

Le rapport des deux pentes est  $\gamma$ .

#### ⇒ Activité 7.2

Retrouver la pente d'une isentropique à l'aide de la loi de Laplace en utilisant les dérivés logarithmiques.

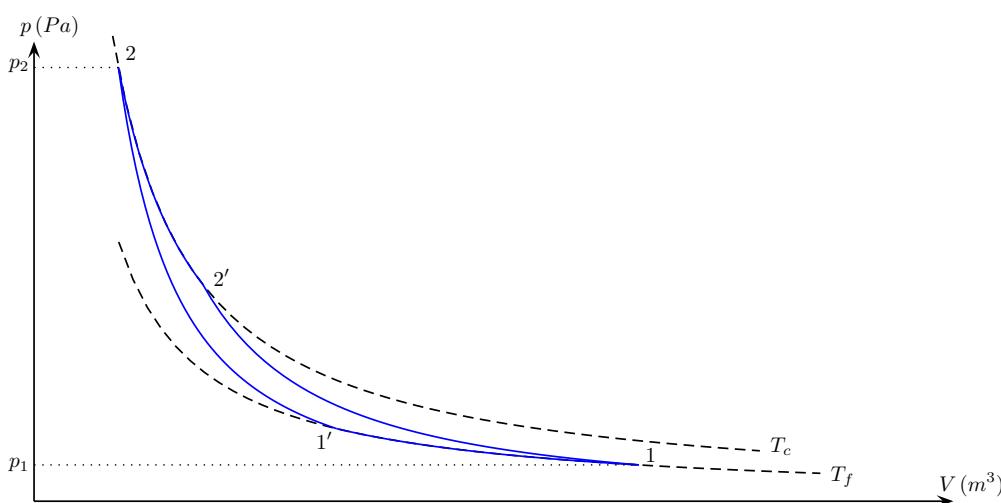


FIGURE 7.1 – Cycle de Carnot : diagramme de Watt

Pour que le cycle fournit de l'énergie (un travail), le cycle doit être parcouru dans le sens horaire. L'aire du cycle représente alors le travail fourni par le moteur.

Le rendement de ce moteur correspond au rapport du travail fourni sur un cycle par le moteur à la chaleur qu'il absorbe depuis la source chaude pour pouvoir fonctionner :

$$\eta = -\frac{W}{Q_c} = \frac{W_{\text{fourni}}}{Q_c}$$

Le premier principe permet d'écrire :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = Q_c + Q_f + W$$

Le second principe permet d'écrire, si le cycle est réversible :

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}$$

On en déduit :

$$\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Ce rendement est indépendant de la nature du fluide, puisque seules interviennent les températures des sources. Pour un moteur fonctionnant entre les deux mêmes sources, le second principe s'écrit, dans le cas général, avec  $S_{\text{créée}}$  :

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_{\text{créée}}$$

Soit :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = -S_{\text{créée}} \leqslant 0$$

On en déduit :

$$\frac{Q_f}{Q_c} \leqslant -\frac{T_f}{T_c}$$

et donc :

$$\eta = -\frac{W}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c} \leqslant 1 - \frac{T_f}{T_c} = \eta_{\max}$$

Le rendement du cycle de Carnot est maximal pour des sources dont la température est fixée.

### 7.9.3.2 Dans le diagramme entropique ( $T, s$ )



#### — Diagramme entropique —

Un diagramme entropique est un diagramme  $T - s$  : en abscisse est représentée l'entropie massique alors qu'en ordonnée est représentée la température.

Le second principe s'écrit pour une transformation quelconque :

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} + S_{\text{créée}}$$

Si la transformation est adiabatique,  $Q = 0$  et si elle est réversible,  $S_{\text{créée}} = 0$ .

On en déduit  $\Delta S = 0$  : **la transformation est alors isentropique.**

Dans le diagramme entropique, les isothermes  $1 \rightarrow 1'$  et  $2 \rightarrow 2'$  sont horizontales, tandis que les transformations adiabatiques réversibles, donc isentropiques  $1' \rightarrow 2$  et  $2' \rightarrow 1$  sont des verticales :

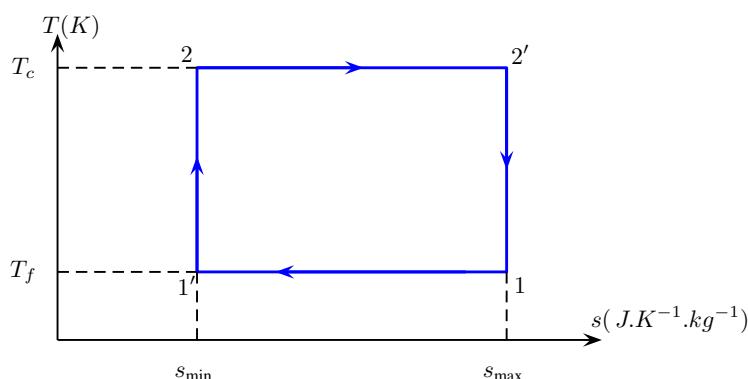


FIGURE 7.2 – Cycle de Carnot : diagramme entropique

Lors du contact avec la source chaude à la température  $T_c$ , le fluide reçoit un transfert thermique, son entropie augmente : **le cycle est parcouru encore une fois dans le sens horaire.**

Pour la transformation isotherme réversible  $2 \rightarrow 2'$  en contact avec la source chaude à la température  $T_c$ , l'entropie du fluide croît, et :

$$\Delta S_{2 \rightarrow 2'} = S_{\max} - S_{\min} = \frac{Q_c}{T_c}$$

De même, comme le fluide cède réversiblement de la chaleur à la source froide, son entropie décroît et :

$$\Delta S_{1 \rightarrow 1'} = S_{\min} - S_{\max} = \frac{Q_f}{T_f}$$

L'aire du cycle rectangulaire, vaut :

$$\mathcal{A} = (S_{\max} - S_{\min})(T_c - T_f) = T_c \frac{Q_c}{T_c} - T_f \left( -\frac{Q_f}{T_f} \right) = Q_c + Q_f = -W$$

L'aire de ce cycle est identique à l'aire du cycle dans le diagramme de Watt.

Le rendement vaut  $\eta = -\frac{W}{Q_c} = \frac{W_{\text{fourni}}}{Q_c}$ .

Or le travail du moteur est égal à l'aire du cycle, tandis que le second principe pour la transformation  $2 \rightarrow 2'$  s'écrit  $Q_c = T_c(S_{\max} - S_{\min})$ , ce qui permet d'identifier  $Q_c$  à l'aire  $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 2'}$  sous l'isotherme  $2 \rightarrow 2'$ .  
Ainsi, on trouve :

$$\boxed{\eta = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 2'}} = \frac{(S_{\max} - S_{\min})(T_c - T_f)}{T_c(S_{\max} - S_{\min})} = 1 - \frac{T_f}{T_c}}$$

