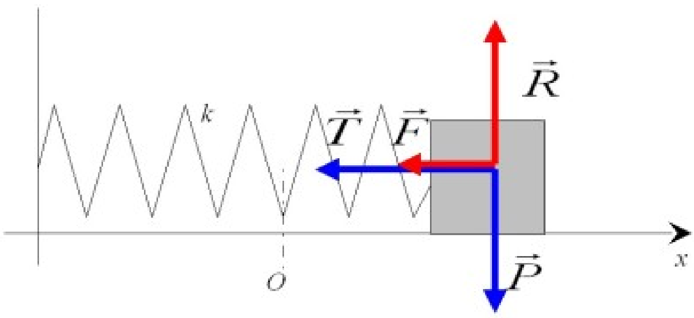
CYCLE PREPARATOIRE INTEGRE

CPI1A

Eléments de cours sur les Oscillateurs

Pr : Ossama AZAGROUZE

Responsable du module

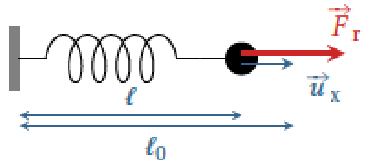


Novembre 2025

1. Oscillateurs en régime libre

1.1. Oscillateur harmonique

1.1.1. Force de rappel d'un ressort



$\overrightarrow{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u}_x$
k constante de raideur ; ℓ_0 longueur à vide ; $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ allongement.

1.1.2. Equation canonique de l'oscillateur

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Oscillateur masse-ressort $x = \ell - \ell_0$ allongement par rapport à l'équilibre : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
Oscillateur électrique LC $x = q$ la charge électrique : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

1.1.3. Résolution

Forme générale des solutions : $x(t) = Acos\omega_0 t + Bsin\omega_0 t$
A et B sont déterminées en fonction des conditions initiales sur x et $\dot{x}$ à la date $t = 0$.
ou sous la forme $x(t) = X_m cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec X_m est lamplitude des oscillations et φ est la phase à l'origine des temps de ces oscillations. X_m et φ sont imposées par les CI.

1.1.4. Bilan énergétique

Il n'y a pas de frottement donc l'énergie mécanique E_m est conservée.
$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX_m^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2$.
$E_c(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi)$ et $E_p(t) = \frac{1}{2}kX_m^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi)$. Les valeurs moyennes des énergies

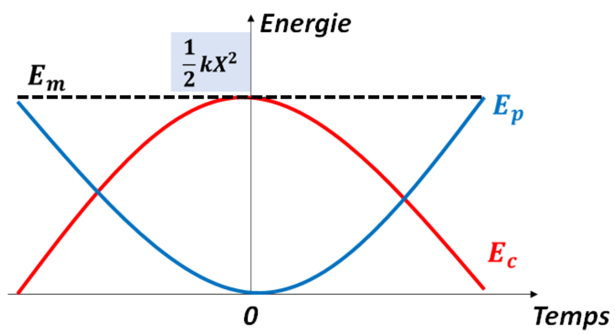


Figure 1: Evolution des énergies en fonction du temps

potentielle et cinétique sur une période sont :

$$\bar{E}_p = \frac{1}{4}kX_m^2 \qquad \bar{E}_c = \frac{1}{4}m\omega_0^2 X_m^2$$

$\bar{E}_p = \bar{E}_c$, Les valeurs moyennes des énergies potentielle et cinétique sont égales, il y a en permanence un transfert d'énergie entre les deux formes, potentielle et cinétique.

1.1.5. Portrait de phase

Une trajectoire de phase de l'oscillateur correspond à la représentation graphique $\dot{x} = f(x)$ dans le plan de phase $(\dot{x}, x)$. Le portrait de phase de l'oscillateur représente l'ensemble des trajectoires de phase réalisées par le même oscillateur à partir de toutes les conditions initiales réalisables.
En éliminant le temps entre $\dot{x}(t)$ et $x(t)$, on obtient : $(\frac{x}{X_m})^2 + (\frac{\dot{x}}{X_m\omega})^2 = 1$.

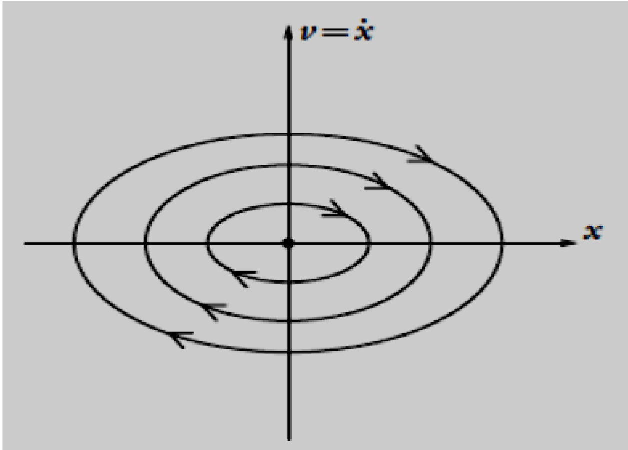


Figure 2: Portrait de phases

- la trajectoire de phase est donc une ellipse.
- Le portrait de phase d'un oscillateur harmonique est donc un ensemble d'ellipses de centre commun, position d'équilibre stable, qui se déduisent les unes des autres par homothétie.
- L'ellipse se répète indéfiniment dans le temps, ce qui est une signature de la conservation de l'énergie de l'oscillateur.
- Les éllipses sont toutes orientées dans le même sens.

1.2. Oscillateur amorti

1.2.1. PFD

A la force de rappel $\overrightarrow{F}_r$ s'ajoute une force de frottement de type visqueux $\overrightarrow{f} = -\lambda \overrightarrow{v}$. Le frottement solide avec l'axe Ox est nul. La projection du principe fondamental de la dynamique selon l'axe du mouvement Ox donne :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$$

1.2.2. Equation canonique

La forme canonique de l'équation : $\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\xi = \frac{\lambda}{m}$.
ou encore $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $Q = \frac{\omega_0 m}{\lambda} = \sqrt{\frac{km}{\lambda}}$. Q est le facteur de qualité de l'oscillateur dont on donnera après une interprétation énergétique.

Remarque : Pour l'oscillateur électrique (RLC) amorti on a :
$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $2\xi = \frac{R}{L}$ et $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

1.2.3. Résolution

L'équation $\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ est une équation différentielle homogène et linéaire du deuxième degré. Les solutions sont exponentielles. En effet, il s'agit de trouver une fonction solution dont la dérivée seconde et première sont proportionnelles à la fonction elle-même.
Soit les solutions de base sous la forme générale : $x(t) = Ae^{rt}$, r est le paramètre définissant la base génératrice des solutions. Il vérifie l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\xi r + \omega_0^2 = 0$$

Les solutions de cette équation caractéristique sont r_1 et r_2. Ce qui veut dire que la forme : $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$. A et B constantes d'intégration qui dépendent des CI du système.

L'oscillateur suit plusieurs types de régimes, donc possède plusieurs types de solutions. Ces régimes sont distingués suivant le signe du discriminant réduit de l'équation caractéristique :

$$\Delta' = \xi^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(\frac{1}{4Q^2} - 1)$$

1.2.4 Régime pseudo-périodique

Il s'agit d'un régime correspondant à $\Delta' = \xi^2 - \omega_0^2 < 0$. C'est à dire $Q > \frac{1}{2}$. C'est le cas des frottements fluide faible.
Les solutions de l'équation caractéristique sont : $r_1 = -\xi + i\sqrt{\Delta'} = -\xi + i\Omega$ et $r_2 = -\xi - i\sqrt{-\Delta'} = -\xi - i\Omega$. $\Omega = \sqrt{-\Delta'}$ est la pseudo-pulsation.
la solution de l'équation différentielle est de la forme : $x(t) = X_m e^{-\xi t} cos(\Omega t + \varphi)$. X_m et φ sont déterminées par les CI.à priori des complexes
On pose $A(t) = X_m e^{-\xi t}$, c'est l'amplitude des oscillations qui dépend du temps! $x(t) = A(t)cos(\Omega t+\varphi)$.

On observera donc d'oscillations amorties, leur amplitude $A(t)$ diminue exponentiellement en fonction du temps. Le temps caractéristique de cette décroissance est $\tau = \frac{1}{\xi}$. Cette décroissance est dû à l'existence du frottement fluide.

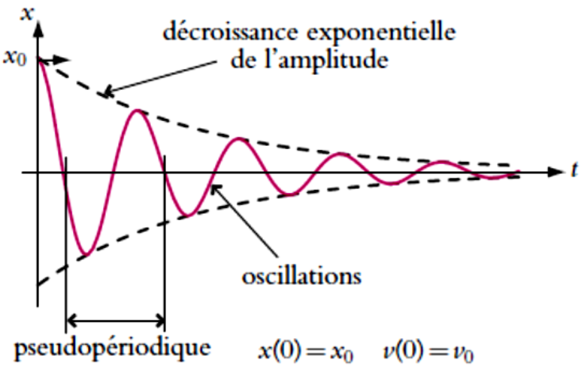


Figure 3: Oscillations pseudo-périodiques

Pour caractériser ce type de mouvement oscillatoire amorti, on définit deux grandeurs :

- la pseudo-période : $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\omega_0^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$. La pseudo-période est supérieur à la période propre $T > T_0$. Dans le cas limite d'un frottement très faible $\frac{\xi}{\omega_0} << 1$, chose qu'on peut admettre dès que $Q2$, on a alors $T \approx T_0$.
- le décrément logarithmique : Il caractérise l'amortissement. Il est définit par $\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \xi T = \xi \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\omega_0^2}}}$.
  Si l'amortissement est faible $\delta \approx \xi T_0$.

1.2.5 Régime apériodique

Ce régime correspond au cas où $\Delta' > 0$, c'est à dire $\xi > \omega_0$ ou $Q < \frac{1}{2}$. Le frottement est fort!
L'équation caractéristique admet deux solutions réelles $r_1 = -\xi + \sqrt{\Delta'} < 0$ et $r_2 = -\xi - \sqrt{\Delta'} < 0$. En effet on a $\xi > \sqrt{\Delta'}$.
La solution est de la forme $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$. L'amplitude diminue au cours du temps sans qu'elles n'apparaissent d'oscillations, d'où le nom de régime apériodique donné à ce type de solutions.

1.2.6. Régime critique

Ce régime correspond au cas où $\Delta' = 0$, c'est à dire $\xi = \omega_0$ ou $Q = \frac{1}{2}$. Le frottement est relativement fort!
L'équation caractéristique admet une seule solution réelle $r_1 = r_2 = -\xi = -\omega_0$.

La solution est de la forme $x(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$. L'amplitude diminue au cours du temps sans qu'elles n'apparaissent d'oscillations, mais plus rapidement que dans le cas du régime apériodique. D'un point de vue physique, il est la limite entre les deux autres cas de régimes précédents et ne sera jamais observé car l'égalité $\xi = \omega_0$ ne sera jamais rigoureusement obtenue.

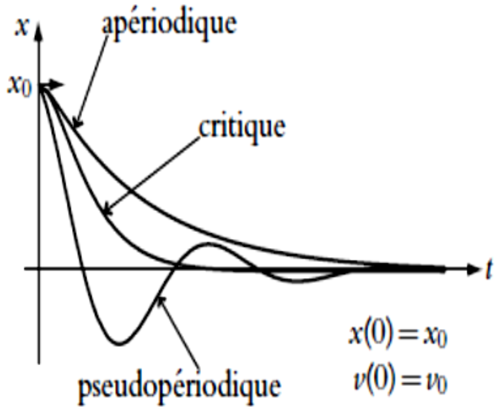


Figure 4: Trois régimes libres de l'oscillateur amorti

La limite de l'oscillateur harmonique peut être obtenue en passant à la limite $Q \to \infty$.

1.3. Aspect élergétique de l'oscillateur amorti en régime pseudo-périodique

On limite l'étude au cas où on a effectivement des oscillations donc au régime pseudopériodique :

La position $x(t) = X_m e^{-\xi t} cos(\Omega t + \varphi)$ et la vitesse $\dot{x} = X_m e^{-\xi t}(-\xi cos(\Omega t + \varphi) - \Omega sin(\Omega t + \varphi))$.

1.3.1. Expression des énergies cinétique, potentielle et mécanique

Les différents énergies s'expriment comme:

- énergie cinétique : $E_c(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mX_m^2 e^{-2\xi t}(-\xi cos(\Omega t + \varphi) - \Omega sin(\Omega t + \varphi))^2$.
- énergie potentielle : $E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX_m^2 e^{-2\xi t}cos^2(\Omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 e^{-2\xi t}cos^2(\Omega t + \varphi)$.
- énergie mécanique : $E_m(t) = \frac{1}{2}mX_m^2 e^{-2\xi t}(-\xi cos(\Omega t+\varphi) - \Omega sin(\Omega t+\varphi))^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 e^{-2\xi t}cos^2(\Omega t + \varphi)$

  Il y a dissipation de l'énergie mécanique. En effet $E_m(t)$ tend vers 0 quand $t >> \frac{1}{2\xi}$. L'énergie mécanique diminue en moyenne suivant une loi en $e^{-2\xi t}$.

1.3.2. Cas d'un amortissement très faible

On se place dans le cas où $\xi >> \omega_0$ ou encore $Q >> \frac{1}{2}$ (on a déjà précisé qu'on peut admettre ce résultat dès que $Q2$).

De cette hypothèse sont déduites les expressions approchées suivantes :

$$E_c \approx \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 e^{-2\xi t}sin^2(\Omega t+\varphi) \quad E_p \approx \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 e^{-2\xi t}cos^2(\Omega t+\varphi) \quad E_m \approx \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 e^{-2\xi t} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

On peut alors estimer la perte d'énergie ΔE_m au cours d'une pseudo-période assimilée ici à la période propre.

$$\Delta E_m = E_m(t) - E_m(t + T_0) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 e^{-\frac{1}{\tau}t} - \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 e^{-\frac{1}{\tau}(t+T_0)} \Delta E_m = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 e^{-\frac{1}{\tau}t}(1 - e^{\frac{T_0}{\tau}})$$

La variation relative d'énergie mécanique, dans le cas d'un amortissement très faible, s'écrit : $\frac{\Delta E_m}{E_m(t)} = 1 - e^{\frac{T_0}{\tau}} \approx \frac{T_0}{\tau} = \frac{2\pi}{Q}$.
Le facteur de qualité Q mesure donc le degré d'amortissement énergétique de l'oscillateur. On verra que le facteur de qualité est en relation avecl'acuité de la résonance dans le régime forcé de l'oscillateur (Voir oscillateur en régime sinusoïdal forcé).

1.3.4. Origine de la variation de l'énergie mécanique

En appliquant le théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E_m = W_{nc} = W(-\lambda\overrightarrow{v})$. On obtient : $\Delta E_m = -\int \lambda \dot{x}^2 dt < 0$.
L'énergie mécanique du point matériel diminue : l'énergie est perdue à cause des frottements et est dissipée sous forme de chaleur.

1.4. Portrait de phase de l'oscillateur amorti

Dans le cas du régime pseudo-périodique, l'allure générale est :

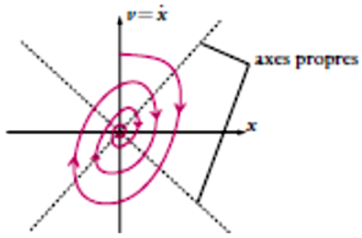


Figure 5: Amortissement pseudo-périodique

Dans le cas du régime critique :

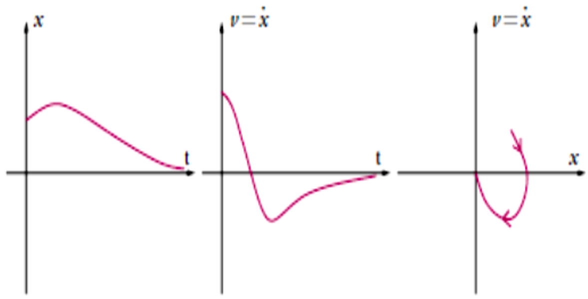


Figure 6: Amortissement critique

Dans le cas durégime apériodique :

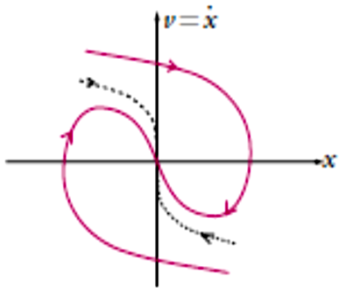


Figure 7: Amortissement apériodique