P 16

Énergie électromagnétique

16.1 Compétences du chapitre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Densité volumique de force électromagnétique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	• Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
Loi d'Ohm locale ; densité volumique de puissance Joule.	• Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un conducteur ohmique.
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting : bilan d'énergie.	• Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. • Effectuer un bilan d'énergie sous forme globale.

16.2 Puissance cédée par le champ électromagnétique

16.2.1 Cas d'une particule ponctuelle

Une particule ponctuelle M de masse m et de charge q, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ électromagnétique $[\,\vec{E},\ \vec{B}]$ est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F_L} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Le produit mixte $\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}$ contient 2 vecteurs colinéaires et est donc nul. On en déduit la puissance de la force de Lorentz :

$$\mathcal{P} = \vec{F_L} \cdot \vec{v} = q\ \vec{E} \cdot \vec{v}$$

La puissance du terme magnétique est donc nul.

16.2.2 Distribution volumique de charge

Pour un élément de volume $d\tau$, de densité volumique de charges mobiles ρ_m centré en M, la force élémentaire est donnée par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dF_L} &= dq\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)\\ &= \rho_m\, d\tau\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)\end{aligned}$$

La puissance de la force de Lorentz associée est :

$$d\mathcal{P} = \overrightarrow{dF_L} \cdot \vec{v} = \rho_m\ \vec{E} \cdot \vec{v}\, d\tau$$

Or, la densité volumique de courant en M est égale à :

$$\vec{j} = \rho_m\, \vec{v}$$

On en déduit alors la densité volumique de puissance (ou puissance volumique) cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}}$$

Cette énergie est cédée par le champ électromagnétique à la matière.

16.3 Densité volumique d'énergie électromagnétique

16.3.1 Expression

Au champ électrique $\vec{E}$, on associe une densité volumique d'énergie électrique w_e :

$$w_e = \varepsilon_0\,\frac{E^2}{2}$$

Au champ magnétique $\vec{B}$, on associe une densité volumique d'énergie magnétique w_m :

$$w_m = \frac{B^2}{2\,\mu_0}$$

Au champ électromagnétique $[\,\vec{E},\ \vec{B}]$ est associée la densité d'énergie électromagnétique $w_{em} = w_e + w_m$:

$$\boxed{w_{em} = \varepsilon_0\,\frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\,\mu_0}}$$

16.3.2 Calcul

En règle générale, pour calculer l'énergie électromagnétique contenue dans un volume τ, il faut intégrer la densité volumique d'énergie électromagnétique sur tout le volume considéré :

$$W_{em} = \iiint_{(\tau)} w_{em}\, d^3\tau$$

Si la densité d'énergie électromagnétique w_{em} est uniforme, c'est-à-dire constante dans l'espace, alors on peut la sortir de l'intégrale, ce qui donne :

$$W_{em} = w_{em} \iiint_{(\tau)} d^3\tau = w_{em}\,\tau$$

16.3.3 Exemples

16.3.3.1 Condensateur plan

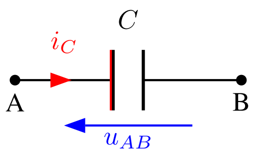

FIGURE 16.1 – Condensateur : conventions

— Lois —

$$i_C = \frac{dq}{dt}$$
$$u_{AB} = u_C = \frac{q}{C}$$
$$i_C = C\,\frac{du_C}{dt}$$

Comme déjà vu dans un chapitre précédent, la capacité C d'un condensateur plan vaut :

$$C = \frac{\varepsilon_0\, S}{\ell}$$

où S est la surface d'une des armatures et ℓ la distance entre elles.

Les unités :
L'intensité i_C du courant s'exprime en ampères A, la tension u_C en volts V, la charge q en coulombs C, la capacité C en farads F, la durée dt en secondes s.

En notant W_e l'énergie électrique emmagasinée au cours de la charge d'un condensateur de $q = 0$ à $q = Q$ (de $t = 0$ à $t = \infty$), on a :

$$\begin{aligned} W_e &= \int_{t=0}^{t=\infty} u_C\, i\, dt \\ &= \int_{t=0}^{t=\infty} \frac{q}{C}\,\frac{dq}{dt}\, dt \\ &= \int_{q=0}^{q=Q} \frac{q\, dq}{C} \\ &= \frac{Q^2}{2\,C} \end{aligned}$$

Or, le champ électrique E vaut :

$$\begin{aligned} E &= \frac{U}{\ell} \\ &= \frac{Q}{C\,\ell} \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0\, S} \end{aligned}$$

On en déduit l'énergie électrique w_e contenue dans le volume $\tau = S\ell$:

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{W_e}{\tau} \\ &= \frac{Q^2}{2\,C\,\tau} \\ &= \frac{\varepsilon_0^2\,S^2\,E^2\,\ell}{2\,\varepsilon_0\,S^2\,\ell} \\ &= \frac{\varepsilon_0\,E^2}{2} \end{aligned}$$

Cette énergie est appelée densité volumique d'énergie électrique :

$$\boxed{w_e = \frac{\varepsilon_0\,E^2}{2}}$$

— Remarque —

Ici, comme $w_e = C^{te}$, alors $W_e = w_e\,\tau$ mais en général, l'énergie électrique a pour expression :

$$W_e = \iiint_{(\tau)} w_e\,d^3\tau$$

16.3.3.2 Solénoïde illimité

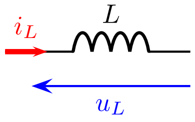

FIGURE 16.2 – Bobine : conventions

— Loi —

$$u_L = L\,\frac{di_L}{dt}$$

Les unités :
L'intensité i_L du courant s'exprime en ampères A, la tension u_L en volts V, l'inductance propre L en henrys H, la durée dt en secondes s.

Comme déjà vu en première année, le flux du champ magnétique à travers une spire circulaire vaut $\Phi' = B\,S$. Pour un solénoïde considéré comme infini et de longueur ℓ, il vaut $\Phi = N\,B\,S$ avec N le nombre de spires total du solénoïde : c'est le flux propre $\Phi_p = L\,I$.

Dans un chapitre précédent, l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde a été démontré : $B_{\text{ext}} = 0$ à l'extérieur et $B_{\text{int}} = \mu_0\,n\,I = \mu_0\,\frac{N}{\ell}\,I$ à l'intérieur.

L'expression du flux propre permet d'accéder à l'inductance propre :

$$L = \frac{N\,B\,S}{I} = \frac{\mu_0\,N^2\,S}{\ell}$$

En notant W_m l'énergie électrique emmagasinée par le solénoïde très long lorsque i passe de $i = 0$ à $i = I$

(t varie de $t = 0$ à $t = \infty$), on a :

$$\begin{aligned}
W_m &= \int_{t=0}^{t=\infty} u_L\, i_L\, dt \\
&= \int_{t=0}^{t=\infty} \frac{L\, di_L}{dt}\, i_L\, dt \\
&= \int_{i=0}^{i=I} L\, i_L\, di_L \\
&= \frac{L\, I^2}{2} \\
&= \frac{\mu_0\, N^2\, S\, I^2}{2\,\ell} \\
&= \frac{\ell\, S}{2\,\mu_0}\, \frac{\mu_0^2\, N^2\, I^2}{\ell^2}
\end{aligned}$$

Comme $B^2 = \dfrac{\mu_0^2\, N^2\, I^2}{\ell^2}$, on en déduit l'énergie magnétique w_m contenue dans le volume $\tau = S\,\ell$:

$$\begin{aligned}
w_m &= \frac{W_m}{\tau} \\
&= \frac{B^2}{2\,\mu_0}
\end{aligned}$$

Cette énergie est la densité volumique d'énergie magnétique :

$$\boxed{w_m = \frac{B^2}{2\,\mu_0}}$$

— Remarque —

Ici, comme $w_m = C^{te}$, alors $W_m = w_m\,\tau$ mais en général, l'énergie magnétique a pour expression :

$$W_m = \iiint_{(\tau)} w_m\, d^3\tau$$

16.4 Vecteur de Poynting et puissance rayonnée

16.4.1 Vecteur de Poynting

On définit un vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ (ou $\overrightarrow{R}$) par l'expression suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}}$$

Son flux à travers une surface représente le débit en énergie du champ électromagnétique à travers cette surface.

⚠ Pour déterminer l'expression du vecteur de Poynting, il faut que les vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ soient en notation réelle.

16.4.2 Bilan local de l'énergie électromagnétique

- Comme déjà vu en début de chapitre, l'énergie cédée par le champ électromagnétique pendant l'intervalle de temps dt à la matière contenue dans le volume (τ) est :

$$\delta W_c = dt \iiint_{(\tau)} \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}\, d^3\tau$$

- L'énergie qui sort de la surface fermée et orientée (Σ) délimitant le volume (τ) précédent vaut :

$$\delta W_s = dt \oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{d^2S}$$

avec $\mathcal{P} = \dfrac{\delta W_s}{dt} = \oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{d^2S}$ la *puissance rayonnée*. En effet :

— Puissance rayonnée —

La puissance rayonnée à travers une surface est égale au flux du vecteur de Poynting à travers cette surface.

- L'énergie contenue dans le volume τ varie entre les instants t et $t + dt$ de dW_{em} :

$$dW_{em} = W_{em}(t+dt) - W_{em}(t) = \left(\frac{\partial W_{em}}{\partial t}\right) dt = dt \iiint_{(\tau)} \frac{\partial w_{em}}{\partial t}\, d^3\tau \qquad \text{car } W_{em} = \iiint_{(\tau)} w_{em}\, d^3\tau$$

- D'après le principe de conservation de l'énergie, la diminution $-dW_{em}$ de l'énergie contenue dans le volume τ est égale à $\delta W_s + \delta W_c$ (somme de l'énergie rayonnée et de celle cédée à la matière). On en déduit :

$$-dW_{em} = \delta W_s + \delta W_c$$

Le théorème de Green-Ostrogradski donne $\oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \iiint_{(\tau)} div\, \overrightarrow{\Pi}\, d^3\tau$ et :

$$\underbrace{-\,dt \iiint_{(\tau)} \frac{\partial w_{em}}{\partial t}\, d^3\tau}_{\delta W_{em}} = \underbrace{dt \oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{d^2S}}_{\delta W_s} + \underbrace{dt \iiint_{(\tau)} \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}\, d^3\tau}_{\delta W_c}$$

$$-\iiint_{(\tau)} \frac{\partial w_{em}}{\partial t}\, d^3\tau = \iiint_{(\tau)} \left(div\, \overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}\right) d^3\tau$$

Soit :

$$\iiint_{(\tau)} \left(div\, \overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} + \frac{\partial w_{em}}{\partial t}\right) d^3\tau = 0$$

Cette relation étant vraie quelque soit le volume τ, on en déduit :

$$\boxed{div\, \overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} + \frac{\partial w_{em}}{\partial t} = 0}$$

C'est le bilan local de l'énergie électromagnétique.

— Remarque —

On voit qu'il y a analogie avec la conservation de la charge :

$$div\, \overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Cependant, il y a un terme supplémentaire lié au fait que de l'énergie peut être transférée aux porteurs de charge ; ce n'est pas le cas de la charge électrique.

$\Rightarrow$ **Activité 16.1**

1. Rappeler les équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Faraday.
2. En utilisant la formule $div\left(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\right)=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{a}-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{b}$, démontrer la formule traduisant le bilan local de l'énergie.

16.5 Cas particulier d'un conducteur ohmique

Soit un tronçon rectiligne de conducteur ohmique de longueur ℓ, de rayon a et de conductivité γ :

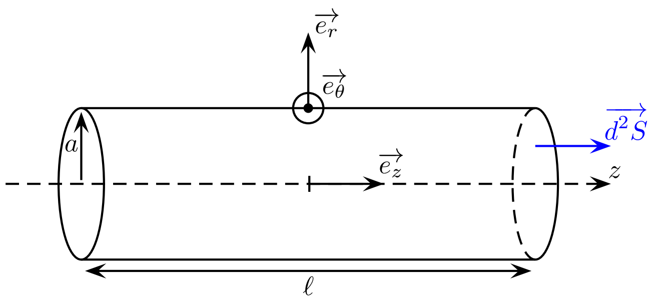

FIGURE 16.3 – Conducteur ohmique

Soumis à une tension U et sous l'action du champ électrique correspondant $\overrightarrow{E}=E\,\overrightarrow{e_z}$, il est parcouru par un courant de densité volumique $\overrightarrow{j}=\gamma\,\overrightarrow{E}$: c'est la loi d'ohm locale.

L'intensité du courant correspondante est donnée par :

$$I=\iint\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{d^2S}=j\,S=\pi\,a^2\,\gamma\,E$$

Or, ce courant est la source d'un champ magnétique de la forme $\overrightarrow{B}=B\,(r)\;\overrightarrow{e_\theta}$.

À la surface du tronçon, le théorème d'Ampère donne son expression :

$$\overrightarrow{B}=\frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,a}\;\overrightarrow{e_\theta}=B\;\overrightarrow{e_\theta}$$

Le vecteur de Poynting associé au champ électromagnétique vaut ainsi :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Pi} &= \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} \\
&= \frac{E\ \overrightarrow{e_z} \wedge B\ \overrightarrow{e_\theta}}{\mu_0} \\
&= -\frac{E\,B}{\mu_0}\ \overrightarrow{e_r} \\
&= -\frac{I^2}{2\,\gamma\,\pi^2\,a^3}\ \overrightarrow{e_r} \\
&= -\Pi\ \overrightarrow{e_r}
\end{aligned}$$

La puissance électromagnétique qui entre dans le conducteur est égale à l'opposée du flux à travers la surface latérale (Σ) du vecteur de Poynting :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= -\Phi_{(\Sigma)}(\overrightarrow{\Pi}) \\
&= -\iint_{(\Sigma)} -\Pi\ \overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{e_r}\, d^2S \\
&= \Pi\,\Sigma \\
&= \frac{I^2}{2\,\gamma\,\pi^2\,a^3}\, 2\,\pi\,a\,\ell \\
&= \frac{I^2\,\ell}{\gamma\,\pi\,a^2}
\end{aligned}$$

La résistance du conducteur ohmique étant donnée par :

$$R = \frac{\rho'\,\ell}{S} = \frac{\ell}{\gamma\,S} = \frac{\ell}{\gamma\,\pi\,a^2}$$

On obtient :

$$\boxed{\mathcal{P} = R\,I^2}$$

Le conducteur s'échauffe car la puissance électromagnétique est fournie au conducteur (en fait aux conducteurs de charge) puis est transformée intégralement en chaleur : c'est l'*effet Joule*.

Les unités :

La résistivité ρ' s'exprime en $\Omega.m$, la conductivité $\gamma = \dfrac{1}{\rho'}$ en $\Omega^{-1}.m^{-1}$ ou $S.m^{-1}$, la longueur ℓ en m, la section $S = \pi\,a^2$ en m^2 et la résistance R en Ω.