LES LOIS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

I- L'électrostatique et magnéto-statique :

✓Force et champ électriques : Loi de Coulomb

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{q_1/q_2}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}\overrightarrow{u}_{12}}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{q_1}(q_2)=\frac{\overrightarrow{F}_{q_1/q_2}}{q_2}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}\overrightarrow{u}_{12}}$$

✓Force et champ magnétique : Loi de Biot et Savart :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_m(\overrightarrow{B}/q)=q\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{B}_{q_p}(M)=\frac{\mu_0 q_p}{4\pi PM^2}\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}_{PM}}$$

et la loi de Biot et Savart

$$\boxed{\overrightarrow{B}_I(M)=\int_{\Gamma(I)}\frac{\mu_0 I}{4\pi PM^2}d\overrightarrow{l}(P)\wedge\overrightarrow{u}_{PM}}$$

✓Propriétés de symétrie et d'invariance électrique :

☞Tout plan de symétrie des charges électriques est un plan de symétrie du champ électrique .

☞Tout plan d'anti-symétrie des charges électriques est un plan d'anti-symétrie du champ électrique .

✓Conséquences :

☞Pour tout point M d'un plan de symétrie Π (d'anti-symétrie Π^*) le champ $\overrightarrow{E}(M)$ est dans Π (orthogonal à Π^*).

☞Si un plan de symétrie (d'anti-symétrie) est invariant par translation ou rotation , la variable de translation ou rotation est une variable d'invariance (le champ ne dépend pas de cette variable).

✓Propriétés de symétrie et d'invariance magnétique :

☞Tout plan de symétrie des courants ($\overrightarrow{j}$) est un plan d'anti-symétrie du champ magnétique .

☞Tout plan d'anti-symétrie des courants ($\overrightarrow{j}$) est un plan d'anti-symétrie du champ magnétique .

✓Conséquences :

☞Pour tout point M d'un plan de symétrie Π (d'anti-symétrie Π^*) le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ est orthogonal à Π (dans Π^*).

☞Si un plan de symétrie (d'anti-symétrie) est invariant par translation ou rotation , la variable de translation ou rotation est une variable d'invariance (le champ ne dépend pas de cette variable).

✓Théorème de Gauss et théorème d'Ampère

$$\boxed{div\overrightarrow{E}(M)=\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}}$$

théorème de Gauss sous sa forme locale

$$\oiint_\Sigma \overrightarrow{E}(M).d\overrightarrow{S}=\frac{Q_\Sigma}{\varepsilon_0}$$

théorème de Gauss sous sa forme intégrale

☞Σ est la surface de Gauss confondue en général avec une surface équipotentielle (surface $\perp$ à $\overrightarrow{E}$).

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}(M)=\mu_0\overrightarrow{J}(M)}$$

théorème d'Ampère sous sa forme locale

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{B}(M).d\overrightarrow{l}=I_{\text{enlacé}/\Gamma}$$

théorème d'Ampère sous sa forme intégrale

☞Γ est le conteur d'Ampère confondue en général avec une ligne de champ magnétique (ligne localement parallèle à $\overrightarrow{B}$).

Exemples :

☞*Cylindre de rayon R uniformément chargé en volume.*

$(\overrightarrow{e}_r,\overrightarrow{e}_z)=\Pi_1$ plan de symétrie invariant par rotation autour de $Oz\Rightarrow\theta$ variable d'invariance .

$(\overrightarrow{e}_r,\overrightarrow{e}_\theta)=\Pi_2$ plan de symétrie invariant par translation suivant $Oz\Rightarrow z$ variable d'invariance $\Rightarrow\overrightarrow{E}=\overrightarrow{E}(r)$.

$\overrightarrow{E}\in\Pi_1\cap\Pi_2\Rightarrow\overrightarrow{E}(r)=E(r)\overrightarrow{e}_r\Rightarrow$ les surfaces équipotentielle se sont des cylindres d'axe $Oz\Rightarrow$ la surface de Gauss Σ est un cylindre de rayon r et de hauteur H d'axe Oz:

$$\Rightarrow E(r).2\pi r.H=\frac{2\pi H\int_0^r\rho r.dr}{\varepsilon_0}=\begin{cases}\rho\pi H\dfrac{r^2}{\varepsilon_0}\ si\ r\leq R\\ \rho\pi H\dfrac{R^2}{\varepsilon_0}\ si\ r\geq R\end{cases}$$

☞ *Fil infini de rayon a , d'axe Oz parcouru par un courant I.* $(\overrightarrow{e}_r,\overrightarrow{e}_z)=\Pi_1$ plan de symétrie des courants de vecteur $\overrightarrow{j}=\dfrac{I}{\pi a^2}\overrightarrow{e}_z$invariant par rotation autour de $Oz\Rightarrow\theta$ variable d'invariance .

$(\overrightarrow{e}_r,\overrightarrow{e}_\theta)=\Pi_2$ plan de d'anti-symétrie invariant par translation suivant $Oz\Rightarrow z$ variable d'invariance $\Rightarrow\overrightarrow{B}=\overrightarrow{B}(r)$.

$\overrightarrow{B}\perp\Pi_1\Rightarrow\overrightarrow{B}(r)=B(r)\overrightarrow{e}_\theta\Rightarrow$ les lignes de champ sont des cercles d'axe $Oz\Rightarrow$ le conteur d'Ampère Γ est un cercle de rayon r d'axe Oz:

$$\Rightarrow\oint_\Gamma\overrightarrow{B}(r).d\overrightarrow{l}=B(r).2\pi r=\begin{cases}\mu_0 j.\pi r^2\ si\ r\leq a\\ \mu_0 j\pi a^2=\mu_0 I\ si\ r\geq a\end{cases}$$

☞ *Espace entre deux plan $x=\dfrac{-d}{2}$ et $x=\dfrac{d}{2}$ uniformément chargé en volume avec $\rho>0$.*

Les deux plans (xoz) et (xoy) sont des plans de symétrie des charges invariant par translation $\Rightarrow y$ et z sont des variables d'invariance $\Rightarrow\overrightarrow{E}=\overrightarrow{E}(x)\in(xoy)\cap(xoz)\Rightarrow\overrightarrow{E}=E(x)\overrightarrow{e}_x$.

$div\overrightarrow{E}(|x|>\dfrac{d}{2})=0\Rightarrow E(|x|>\dfrac{d}{2})=Cte$ et $div\overrightarrow{E}(|x|<\dfrac{d}{2})=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\Rightarrow E(|x|<\dfrac{d}{2})=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}x+C_o$, le plan (yoz) est un plan de symétrie $\Rightarrow\overrightarrow{E}=\overrightarrow{E}_y+\overrightarrow{E}_z=\overrightarrow{E}_x\Rightarrow\overrightarrow{E}(x=0)=\overrightarrow{0}\Rightarrow C_o=0$ la continuité en $x=\pm\dfrac{d}{2}\Rightarrow Cte=\pm\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{d}{2}$ finalement :

$$E_x=\begin{cases}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}x\quad si\quad |x|\leq\dfrac{d}{2}\\ \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{d}{2}\quad si\quad x\geq\dfrac{d}{2}\\ -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{d}{2}\quad si\quad x\leq-\dfrac{d}{2}\end{cases}$$

✓Relations de passage :

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{2t}-\overrightarrow{E}_{1t}=\overrightarrow{0}} \text{ et } \boxed{\overrightarrow{E}_{2n}-\overrightarrow{E}_{1n}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}_{12}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B}_{2n}-\overrightarrow{B}_{1n}=\overrightarrow{0}} \text{ et } \boxed{\overrightarrow{B}_{2t}-\overrightarrow{B}_{1t}=\mu_0\overrightarrow{j}_s\wedge\overrightarrow{n}_{12}}$$

ou $\overrightarrow{n}_{12}$ vecteur unitaire $\perp$ à l'interface $1/2$

✓Les actions de Laplace :

☞densité des forces de Laplace :

$$\boxed{\overrightarrow{f}_L=\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{B}}$$

☞moment des actions magnétiques :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma}=\overrightarrow{\mathcal{M}}\wedge\overrightarrow{B}}$$

☞théorème de Maxwell - travail des actions de Laplace dans le cas d'un circuit fermé :

$$\boxed{W=I.\Phi_c=I(\Phi_2-\Phi_1)}$$

II-Equations de Maxwell :

✓Maxwell - Gauss:

$$\boxed{div\overrightarrow{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

✓Maxwell-Faraday :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}=-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}}$$

✓Maxwell-Flux :

$$\boxed{div\overrightarrow{B}=0}$$

✓Maxwell-Ampère :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}=\mu_0\left(\overrightarrow{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right)}$$

✓Courant de déplacement :

$$\boxed{\overrightarrow{j}_d=\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}}$$

✓En régime statique, les termes en $\frac{\partial}{\partial t}$ sont nuls .

✓Cas d'un conducteur ohmique dans ARQP :

☞ neutralité électrique :

$$\boxed{\rho=\rho_o e^{-t/\tau}}$$

ou $\tau=\varepsilon_0/\gamma$ temps de relaxation , $\rho\approx 0$ au bout de $t=10^{-17}s$ pour le cuivre.

☞ Un conducteur ohmique est localement neutre à tout instant .

☞ le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction $\frac{j}{j_d}=\frac{\gamma}{\varepsilon_0\omega}>>1\Rightarrow$ le conducteur ohmique est localement neutre à tout instant.

Equations de Maxwell dans un conducteur ohmique dans l'ARQP:

✓Maxwell - Gauss:

$$\boxed{div\overrightarrow{E}=0}$$

✓Maxwell-Faraday :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}=-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}}$$

✓Maxwell-Flux :

$$\boxed{div\overrightarrow{B}=0}$$

✓Maxwell-Ampère :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}=\mu_0\overrightarrow{j}=\mu_0\gamma\overrightarrow{E}}$$

Les potentiels électromagnétiques dans l'ARQP:

✓Couplage potentiel vecteur-potentiel scalaire :

$$\boxed{\overrightarrow{B}=\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} \text{ et } \overrightarrow{E}=-\overrightarrow{grad}V-\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}}$$

✓Jauge de Lorentz :

$$\boxed{div\overrightarrow{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}=0}$$

✓Cas du régime statique :

☞ jauge de Coulomb :

$$\boxed{div\overrightarrow{A}=0}$$

☞ Equation de Poisson relative à V :

$$\boxed{\Delta V+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0}$$

☞ Equations de Laplace :

$$\boxed{\Delta V=0} \text{ et } \boxed{\Delta\overrightarrow{A}+\mu_0\overrightarrow{j}=\overrightarrow{0}}$$

Energie électromagnétique :

☞ Puissance électromagnétique cédée à la matière :

$$\boxed{P_c=\iiint\overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}d\tau}$$

☞ Puissance électromagnétique rayonnée à travers une surface :

$$\boxed{P_s=\iint\overrightarrow{\Pi}.d\overrightarrow{S} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\Pi}=\frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_o} \text{ vecteur de Poynting}}$$

☞ Equation de conservation de l'énergie :

$$\boxed{div\overrightarrow{\Pi}+\frac{\partial\omega_{em}}{\partial t}+\overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}=0}$$

ou $\boxed{\omega_{em}=\varepsilon_0\frac{E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}}$

est la densité volumique de l'énergie électromagnétique

III - Induction électromagnétique :

✓Champ électromoteur :

$$\boxed{\overrightarrow{E}_m=-\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}+\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}}$$

☞ Champ électromoteur de Lorentz = circuit mobile dans un champ $\overrightarrow{B}$ en régime statique.

$$\boxed{\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\overrightarrow{E}_m=\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}}$$

☞ Champ électromoteur de Neumann = circuit fixe dans un champ $\overrightarrow{B}$ variable.

✓Force électromotrice induite :

☞ Cas d'une portion d'un circuit orienté :

$$\boxed{e_{AB}=\int_A^B\overrightarrow{E}_m.d\overrightarrow{l}}$$

☞ Cas d'un circuit fermé Γ :

$$\boxed{e_\Gamma=\oint_\Gamma\overrightarrow{E}_m.d\overrightarrow{l}}$$

✓Loi d'Ohm généralisée :

☞ Pour une portion AB d'un circuit :

$$\boxed{u_{AB}+e_{AB}=R_{AB}.i_{AB}}$$

☞ Pour un circuit fermé : $u_{AB}=0$

$$\boxed{e_{AB}=R_{AB}.i_{AB}}$$

✓Loi de Faraday :

☞ Circuit fixe dans un champ magnétique variable :

$$\boxed{e=-\frac{d\Phi}{dt}}$$

ou Φ est le flux magnétique à travers la surface du circuit

☞ Circuit mobile dans un champ magnétique indépendant du temps

$$\boxed{e=-\frac{d\Phi_c}{dt}}$$

ou Φ_c est le flux magnétique coupé à travers la surface balayée par le circuit lors de son mouvement

✓Loi de Lenz :

Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donnés naissance.

✓Auto-induction ou induction propre :

$\boxed{\Phi_p=L.I}$ et $\boxed{e=-L\frac{dI}{dt}}$

pour un circuit indéformable $L=Cte$

✓induction mutuelle de deux circuits :

$\boxed{\Phi_{1/2}=M_{12}.I_2=M.I_2}$ et $\boxed{\Phi_{2/1}=M_{21}.I_1=M.I_1}$

avec $M_{12}=M_{21}=M$

coefficient d'induction mutuelle,exprimé en Henry :H

$\boxed{e_1=-L_1\frac{dI_1}{dt}-M.I_2}$ et $\boxed{e_2=-L_2\frac{dI_2}{dt}-M.I_1}$

✓Enérgie magnétique des circuits :

$$\boxed{W_m=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+M.I_1I_2}$$

ou bien

$$\boxed{W_m=\frac{1}{2}(\Phi_1I_1+\Phi_2.I_2)}$$

☞Pour un circuit quelconque l'énergie magnétique est donné par la localisation du champ $\overrightarrow{B}$ dans l'espace :

$$\boxed{W_m=\iiint\frac{B^2}{2\mu_0}d\tau}$$

☞Coefficient de couplage de deux circuit :

$$\boxed{k=\sqrt{\frac{M}{L_1L_2}}}$$

$k=0\Rightarrow$ pas de couplage

$k=1\Rightarrow$ couplage serré ou total (influence magnétique totale): pas de fuite des lignes de champ.

IV-Ondes électromagnétique dans le vide :

✓Equations de Maxwell dans le vide :

✓Maxwell - Gauss: $\boxed{div\overrightarrow{E}=0}$

✓Maxwell-Faraday : $\boxed{\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}=-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}}$

✓Maxwell-Flux : $\boxed{div\overrightarrow{B}=0}$

✓Maxwell-Ampère : $\boxed{\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}}$

✓Equations de propagation dans le vide :

$$\boxed{\Delta f-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0}$$

ou f peut être l'un des vecteurs $\vec{E},\vec{B},\vec{A}$ ou le potentiel scalaire V

✓Cas d'une onde plane :

☞L'onde plane ne dépend que d'une seule variable d'espace et du temps .

☞Une surface d'onde plane est un plan $\perp$ la direction de propagation donc du vecteur d'onde $\vec{k}$.

☞Une onde plane est dite progressive (régressive) si elle est fonction du terme de propagation $t-\frac{u}{v}$ $(t+\frac{u}{v})$ ou u est la variable de la direction de propagation et v la vitesse de propagation .

✓Cas d'une onde EM plane progressive monochromatique (OPPM):

$$\boxed{\vec{E}(M,t)=E(M,t)\vec{n}=E_o cos(\omega t-\vec{k}.\vec{OM})\vec{n}}$$

ou $\vec{n}$ vecteur unitaire du plan d'onde $\Pi\perp$ à la direction de propagation $\vec{k}$

✓Propriétés de l'onde plane en notation complexe :

$$\boxed{\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial u}\vec{e}_u=-j\vec{k}\ et\ \frac{\partial}{\partial t}=j\omega}$$

ou u variable d'espace de la direction de propagation

✓Conséquences :

☞Maxwell-Ampère :

$$\boxed{\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=-j\vec{k}\wedge\vec{B}=\frac{j\omega}{c^2}\vec{E}\Rightarrow\vec{E}=-\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\wedge\vec{B}}$$

☞Maxwell-Faraday :

$$\boxed{\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-j\vec{k}\wedge\vec{E}=-j\omega\vec{B}\Rightarrow\vec{B}=\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}}$$

☞En combinant les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ on obtient la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}=0\Rightarrow\vec{k}=\frac{\omega}{c}\vec{e}_u \text{ d'où } \vec{E}=c\vec{B}\wedge\vec{e}_u}$$

✓**Propagation de l'énergie :**

☞vecteur de Poynting :

$$\boxed{\vec{\Pi}=\varepsilon_0 cE^2\vec{e}_u \text{ cas d'une OPPM } <\vec{\Pi}>=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_o^2 c\vec{e}_u}$$

La puissance se propage avec la vitesse c

☞Puissance traversant une surface S :

$$\boxed{<\mathcal{P}>=\iint_S<\vec{\Pi}>.d\vec{S}}$$

✓Vitesse de phase :

$$\boxed{\varphi(M,t)=(\omega t-k.u)=Cte\Rightarrow v_\varphi=\frac{du}{dt}=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{n}}$$

Si $n=f(\lambda)$ le milieu est dit dispersif

$\frac{\omega}{k}=v_\varphi=\frac{c}{n}$ est la relation de dispersion

✓Vitesse de groupe : $\boxed{v_g=\frac{d\omega}{dk}}$

Cas d'un paquet d'onde de largeur spectrale $\Delta\nu$

V - Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait :

✓Un conducteur parfait est modèle de conducteur de conductivité infinie : $\vec{j}=\gamma\vec{E}\Rightarrow\vec{E}=\vec{0}$,donc dans un conducteur parfait : $\boxed{\vec{E}=\vec{0}\quad;\rho=0\quad;\vec{j}=\vec{0}\quad;\vec{B}=0}$

☞Dans un conducteur parfait,il ne peut y avoir de charges et de courant qu'en surface .

☞Les relations de passage dans le cas de la réflexion sur un conducteur parfait:

$$\boxed{\vec{E}_t(vide)=\vec{0}} \text{ et } \boxed{\vec{E}_n(vide)=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}}$$

avec le vide est le milieu (1)

$$\boxed{\vec{B}_t(vide)=-\mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{12}} \text{ et } \boxed{\vec{B}_n(vide)=\vec{0}}$$

avec le vide est le milieu (1)

✓Onde incidente :

$$\boxed{\vec{E}_i=E_o cos(\omega t-kx)\vec{e}_y \text{ et } \vec{B}_i=\frac{kE_o}{\omega}cos(\omega t-kx)\vec{e}_z}$$

☞Le plan (yoz) est l'interface vide-conducteur parfait.

☞la relation de passage $\vec{E}(vide)=\vec{0}\Rightarrow$ l'existence d'une onde réfléchie tel que :

$$\boxed{\vec{k}_r=-\vec{k}_i \text{ et } \vec{E}_r=-E_o cos(\omega t+kx)\vec{e}_y}$$

$$\boxed{\vec{B}_r=\frac{\vec{k}_r}{\omega}\wedge\vec{E}_r=\frac{kE_0}{\omega}cos(\omega t+kx)\vec{e}_z}$$

☞La réflexion d'une onde sur un conducteur s'accompagne d'un déphasage de $\Delta\varphi=\pi$ pour le champ $\vec{E}$,et sans variation de phase pour lz champ $\vec{B}$

☞L'onde résultante de l'onde incidente et l'onde réfléchie est une onde stationnaire :

$$\boxed{\vec{E}=2E_0.sin(kx)sin(\omega t)\vec{e}_y}$$

$$\text{et } \boxed{\vec{B}=2\frac{kE_0}{\omega}.cos(kx)cos(\omega t)\vec{e}_z}$$

☞Vecteur de Poynting :

$$\boxed{\vec{\Pi}=\frac{E_o^2}{\mu_0 c}sin(2kx)sin(2\omega t)\vec{e}_x\Rightarrow<\vec{\Pi}>=\vec{0}}$$

pas de propagation !!!