

DM 4 – Statique des fluides : modèles de l'atmosphère

On veut obtenir un modèle de la couche la plus basse de l'atmosphère : la troposphère (altitude entre 0 et 10 km). L'objectif est que ce modèle rende compte de la variation de pression avec l'altitude.

Coté expérience-mesures :

La variation de pression, issue de relevée expérimentaux, est présentée ci-contre. Le document au dos présente également des données expérimentales sous forme de table, pour z compris entre 0 et 20 km.

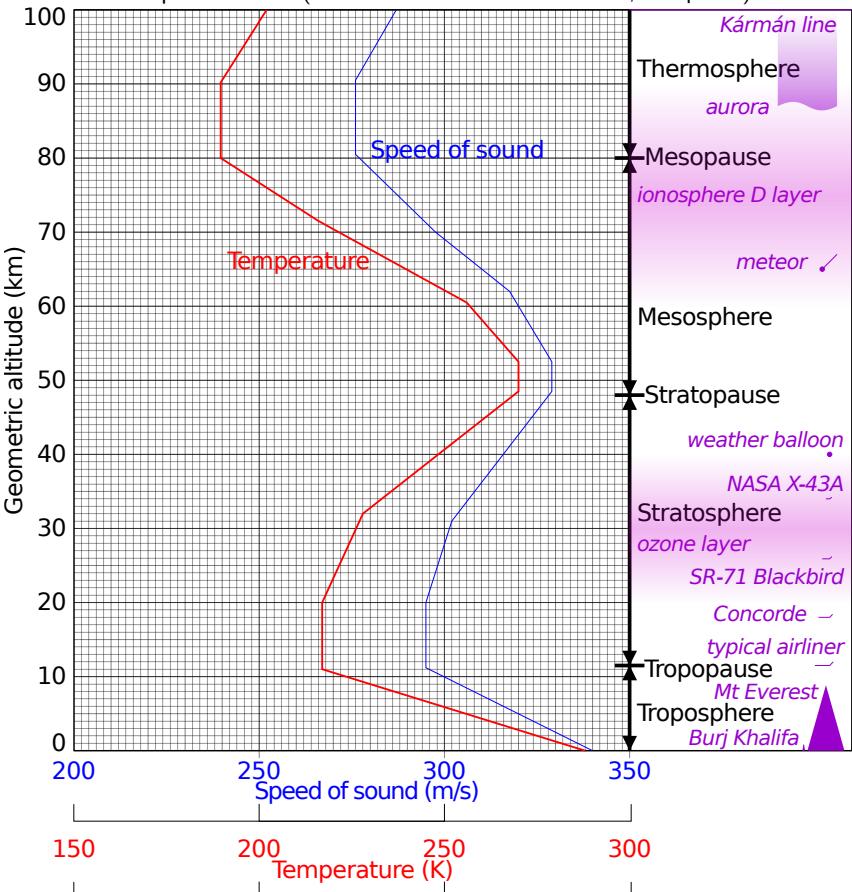
Coté théorie-modèle :

Les modèles considérés ici commencent par certaines hypothèses :

- l'atmosphère est au repos (pas de mouvement macroscopique d'air),
- le gaz de l'atmosphère est modélisé par un gaz parfait, de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$,
- la pesanteur est constante égale à $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

S'ajoute ensuite une autre hypothèse : celle de la variation de T avec l'altitude. Deux possibilités vont être considérées et comparées dans ce DM.

Évolution simplifiée de la température et de la vitesse du son en fonction de l'altitude dans l'atmosphère terrestre. La courbe de température est issue de relevés expérimentaux. (Source : 1962 US standard model, Wikipedia.)



1 - Dans le cours, nous avons en plus supposé l'atmosphère isotherme : la température y est constante égale à T_0 . On se place d'abord dans le cadre de cette hypothèse.

- Démontrer que l'expression de la pression en fonction de l'altitude z est $p(z) = p_0 \exp(-z/H)$. On donnera l'expression et la valeur numérique de H . (On a vu cette démonstration dans le cours, mais il est demandé de la refaire ici pour s'entraîner.)
- Application : que vaut la pression à 1.00 km, et à 10.0 km (soit un peu au-dessus du sommet de l'Everest) ? Comparer avec les valeurs mesurées et commenter.
- En étudiant le graphique ci-contre ou la table derrière, dire laquelle de nos hypothèses est vraisemblablement non réaliste ?

2 - Nous allons donc remplacer l'hypothèse isotherme par une hypothèse plus réaliste afin de voir si ceci permet d'améliorer le modèle : on suppose que la température évolue linéairement, $T(z) = T_0 - \lambda z$.

- À l'aide du graphique ci-dessus, donner une valeur approchée de T_0 et de λ .
- En procédant de façon similaire à la question 1, montrer que la pression obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dp}{dz} = -p \frac{Mg}{R} \frac{1}{T_0 - \lambda z}. \quad (1)$$

- Montrer que l'expression suivante pour $p(z)$ est bien solution de cette équation différentielle :

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^\alpha. \quad (2)$$

On donnera l'expression de α pour que ce soit bien le cas.

d - Application : que vaut la pression à 1.00 km, et à 10.0 km (soit un peu au-dessus du sommet de l'Everest) ? Comparer avec le modèle précédent et avec les valeurs mesurées et commenter.

3 – Bonus facultatif :

Les plus motivés pourront trouver la solution $p(z)$ de l'équation 1 de la façon suivante :

- Une méthode qui fonctionne souvent est de manipuler l'équation différentielle pour séparer les variables : on fait apparaître à gauche uniquement p et dp , et à droite uniquement z et dz . Ici il faut donc montrer qu'à partir de l'équation 1 qu'on arrive à :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R} \frac{dz}{T_0 - \lambda z}. \quad (3)$$

- Ensuite, on intègre cette équation entre les points $z = 0$ (où $p = p_0$) et $z = z_1$ quelconque (où $p = p(z_1)$) :

$$\int_{p=p_0}^{p=p(z_1)} \frac{dp}{p} = \int_0^{z_1} -\frac{Mg}{R} \frac{dz}{T_0 - \lambda z}. \quad (4)$$

(On n'a pas utilisé z pour les bornes de l'intégrale car ce symbole est déjà utilisé pour la variable d'intégration.)

- Il faut ensuite calculer ces deux intégrales, ce qui fera apparaître $p(z_1)$, et manipuler le résultat pour exprimer $p(z_1)$ en fonction de z_1 . On doit alors aboutir à l'expression 2.

Document : propriétés de l'air à haute altitude – relevés expérimentaux

Propriétés de l'air à haute altitude.

Altitude m	Température °C	Pression kPa	Accélération gravitationnelle $g, \text{m/s}^2$	Vitesse du son m/s	Masse volumique kg/m^3	Viscosité $\mu, \text{kg/m} \cdot \text{s}$	Conductivité thermique $\text{W/m} \cdot \text{K}$
0	15,00	101,33	9,807	340,3	1,225	$1,789 \times 10^{-5}$	0,0253
200	13,70	98,95	9,806	339,5	1,202	$1,783 \times 10^{-5}$	0,0252
400	12,40	96,61	9,805	338,8	1,179	$1,777 \times 10^{-5}$	0,0252
600	11,10	94,32	9,805	338,0	1,156	$1,771 \times 10^{-5}$	0,0251
800	9,80	92,08	9,804	337,2	1,134	$1,764 \times 10^{-5}$	0,0250
1 000	8,50	89,88	9,804	336,4	1,112	$1,758 \times 10^{-5}$	0,0249
1 200	7,20	87,72	9,803	335,7	1,090	$1,752 \times 10^{-5}$	0,0248
1 400	5,90	85,60	9,802	334,9	1,069	$1,745 \times 10^{-5}$	0,0247
1 600	4,60	83,53	9,802	334,1	1,048	$1,739 \times 10^{-5}$	0,0245
1 800	3,30	81,49	9,801	333,3	1,027	$1,732 \times 10^{-5}$	0,0244
2 000	2,00	79,50	9,800	332,5	1,007	$1,726 \times 10^{-5}$	0,0243
2 200	0,70	77,55	9,800	331,7	0,987	$1,720 \times 10^{-5}$	0,0242
2 400	-0,59	75,63	9,799	331,0	0,967	$1,713 \times 10^{-5}$	0,0241
2 600	-1,89	73,76	9,799	330,2	0,947	$1,707 \times 10^{-5}$	0,0240
2 800	-3,19	71,92	9,798	329,4	0,928	$1,700 \times 10^{-5}$	0,0239
3 000	-4,49	70,12	9,797	328,6	0,909	$1,694 \times 10^{-5}$	0,0238
3 200	-5,79	68,36	9,797	327,8	0,891	$1,687 \times 10^{-5}$	0,0237
3 400	-7,09	66,63	9,796	327,0	0,872	$1,681 \times 10^{-5}$	0,0236
3 600	-8,39	64,94	9,796	326,2	0,854	$1,674 \times 10^{-5}$	0,0235
3 800	-9,69	63,28	9,795	325,4	0,837	$1,668 \times 10^{-5}$	0,0234
4 000	-10,98	61,66	9,794	324,6	0,819	$1,661 \times 10^{-5}$	0,0233
4 200	-12,3	60,07	9,794	323,8	0,802	$1,655 \times 10^{-5}$	0,0232
4 400	-13,6	58,52	9,793	323,0	0,785	$1,648 \times 10^{-5}$	0,0231
4 600	-14,9	57,00	9,793	322,2	0,769	$1,642 \times 10^{-5}$	0,0230
4 800	-16,2	55,51	9,792	321,4	0,752	$1,635 \times 10^{-5}$	0,0229
5 000	-17,5	54,05	9,791	320,5	0,736	$1,628 \times 10^{-5}$	0,0228
5 200	-18,8	52,62	9,791	319,7	0,721	$1,622 \times 10^{-5}$	0,0227
5 400	-20,1	51,23	9,790	318,9	0,705	$1,615 \times 10^{-5}$	0,0226
5 600	-21,4	49,86	9,789	318,1	0,690	$1,608 \times 10^{-5}$	0,0224
5 800	-22,7	48,52	9,785	317,3	0,675	$1,602 \times 10^{-5}$	0,0223
6 000	-24,0	47,22	9,788	316,5	0,660	$1,595 \times 10^{-5}$	0,0222
6 200	-25,3	45,94	9,788	315,6	0,646	$1,588 \times 10^{-5}$	0,0221
6 400	-26,6	44,69	9,787	314,8	0,631	$1,582 \times 10^{-5}$	0,0220
6 600	-27,9	43,47	9,786	314,0	0,617	$1,575 \times 10^{-5}$	0,0219
6 800	-29,2	42,27	9,785	313,1	0,604	$1,568 \times 10^{-5}$	0,0218
7 000	-30,5	41,11	9,785	312,3	0,590	$1,561 \times 10^{-5}$	0,0217
8 000	-36,9	35,65	9,782	308,1	0,526	$1,527 \times 10^{-5}$	0,0212
9 000	-43,4	30,80	9,779	303,8	0,467	$1,493 \times 10^{-5}$	0,0206
10 000	-49,9	26,50	9,776	299,5	0,414	$1,458 \times 10^{-5}$	0,0201
12 000	-56,5	19,40	9,770	295,1	0,312	$1,422 \times 10^{-5}$	0,0195
14 000	-56,5	14,17	9,764	295,1	0,228	$1,422 \times 10^{-5}$	0,0195
16 000	-56,5	10,53	9,758	295,1	0,166	$1,422 \times 10^{-5}$	0,0195
18 000	-56,5	7,57	9,751	295,1	0,122	$1,422 \times 10^{-5}$	0,0195

Source : Thermodynamique, une approche pragmatique, Çengel et al.