

Résumé de la mécanique du point matériel

M.Mounjid

Professeur agrégé à l'ENS de MARRAKECH

CHAPITRE 1

CINÉMATIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

1. Repérage d'un point matériel

On repère la position d'un point matériel M , dans un référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$, par le vecteur position \overrightarrow{OM} qui s'écrit :

★ en coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

★ en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

★ en coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

2. Équation de la trajectoire

est la relation indépendante du temps, entre les coordonnées du point M .

3. Vecteur vitesse et vecteur accélération

3.1. Définitions

Les vecteurs vitesse et accélération d'un point M dans un référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ sont respectivement :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}/\mathcal{R} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d^2\overrightarrow{AM}}{dt^2}/\mathcal{R}$$

A étant un point fixe dans \mathcal{R} .

3.2. Expressions intrinsèques du vecteur vitesse et accélération

Abscisse curviligne : A étant un point fixe d'une courbe Γ , l'abscisse curviligne s d'un point M sur Γ est la mesure algébrique de l'arc \widehat{AM} .

Vecteur unitaire tangent $\vec{\tau}$ et vecteur unitaire normal \vec{n} :

$$\vec{\tau} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \rho \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

avec ρ rayon de courbure de la trajectoire au point M .

Vecteur vitesse et vecteur accélération en coordonnées curvilignes :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{s} \vec{\tau} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{s} \vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n}$$

3.3. Équation de l'hodographe

est la relation indépendante du temps, entre les composantes du vecteur vitesse.

4. Lois de Composition des vitesses et accélérations

Soient 2 référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e}$$

avec :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/_{\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Et

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$$

avec :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/_{\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

et

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

CHAPITRE 2

DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

1. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel, de masse m , animé d'un vecteur vitesse \vec{v} par rapport à un référentiel \mathcal{R} est :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

2. Principe d'inertie (1ère loi de NEWTON)

Dans un référentiel galiléen, une particule isolée ou pseudo-isolée est :

★ soit animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

★ soit au repos.

3. Théorème de la résultante cinétique (2ème loi de NEWTON)

3.1. Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \sum \vec{F}$$

3.2. Dans un référentiel non galiléen \mathcal{R}'

$$\frac{d\vec{p}'}{dt} = m \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \sum \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

avec \vec{F}_e force d'entraînement :

$$\vec{F}_e = -m \vec{a}_e$$

et \vec{F}_c force de CORIOLIS :

$$\vec{F}_c = -m \vec{a}_c$$

4. Équilibre relatif

Le point M est en équilibre relatif si :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{0} \text{ et } \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

5. Principe d'action et de réaction (3ème loi de NEWTON)

Soient A et B deux points matériels.

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} + \vec{F}_{B \rightarrow A} = \vec{0}$$

6. Moment cinétique

6.1. Définition

Le moment cinétique d'un point matériel M en un point A , dans un référentiel \mathcal{R} est :

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{v}$$

6.2. Théorème du moment cinétique en un point A mobile dans un référentiel galiléen \mathcal{R}

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{v}_A \wedge m \vec{v} = \overrightarrow{AM} \wedge \sum \vec{F}$$

6.3. Théorème du moment cinétique en un point A mobile dans un référentiel non galiléen \mathcal{R}'

$$\frac{d\vec{\sigma}'_A}{dt} + \vec{v}'_A \wedge m \vec{v}' = \overrightarrow{AM} \wedge \left(\sum \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \right)$$

CHAPITRE 3

PUISSANCE ET ÉNERGIE D'UN POINT MATÉRIEL

1. Puissance et travail d'une force dans un référentiel \mathcal{R}

★ La puissance d'une force \vec{F} exercée sur un point matériel M , de vecteur vitesse \vec{v} dans \mathcal{R} est :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

★ Le travail de \vec{F} entre les instants t_1 et t_2 dans \mathcal{R} est :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{M}$$

2. Énergie cinétique d'un point matériel M

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

2. Théorème de la puissance cinétique

2.1. dans un référentiel galiléen \mathcal{R}

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}$$

avec \mathcal{P} : puissance de **toutes** les forces appliquées sur le point matériel M .

2.2. dans un référentiel non galiléen \mathcal{R}'

$$\frac{dE'_c}{dt} = \mathcal{P} + \mathcal{P}_e$$

avec \mathcal{P} : puissance de **toutes** les forces appliquées sur le point matériel M .

\mathcal{P}_e puissance de la force d'entraînement de M :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e &= \vec{F}_e \cdot \vec{v}' \\ &= -m \vec{a}_e \cdot \vec{v}' \end{aligned}$$

Remarque : La puissance de la force de CORIOLIS est nulle. En effet :

$$\mathcal{P}_c = \vec{F}_c \cdot \vec{v}' = -m \vec{a}_c \cdot \vec{v}' = -m(2\vec{\omega} \wedge \vec{v}') \cdot \vec{v}' = 0$$

3. Force conservative

Une force est conservative s'elle dérive d'une énergie potentielle E_p :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

D'où le travail élémentaire de la force \vec{F} est :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = -dE_p$$

4. Énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un point matériel est :

$$E_m = E_c + E_p$$

D'où :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt}$$

Or :

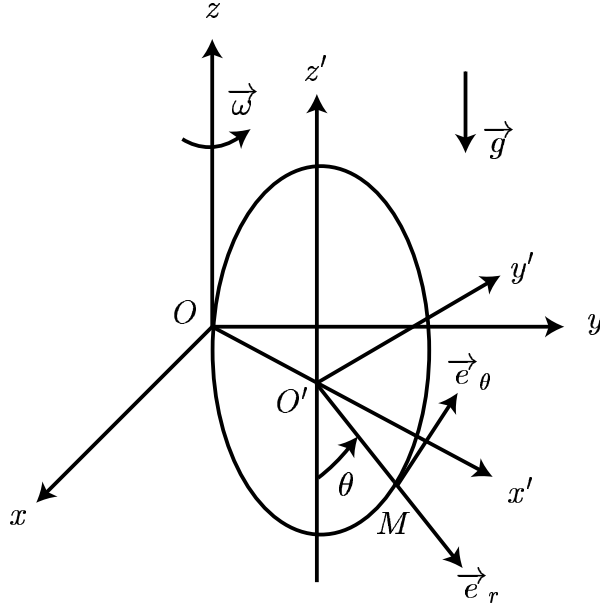
$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \mathcal{P} \text{ forces conservatives} + \mathcal{P} \text{ forces non conservatives} \\ \frac{dE_p}{dt} &= -\mathcal{P} \text{ forces conservatives} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P} \text{ forces non conservatives}$$

Problème : Théorèmes généraux : composition de deux rotations

Une circonférence (C) de centre O' et de rayon a , située dans le plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales Oz , d'un mouvement de rotation uniforme de vecteur rotation $\vec{\omega}$.



Un anneau M de masse m , assimilé à un point matériel, est mobile sans frottement sur cette circonférence. On désigne par θ l'angle que fait $\overrightarrow{O'M}$ avec la verticale descendante passant par O' . θ est compté positivement dans le sens indiqué sur le schéma.

1. Étude du mouvement de M sur (C) par plusieurs méthodes

1.1. Utilisation du théorème de la résultante cinétique

1.1.1. Écrire le théorème de la résultante cinétique dans le référentiel $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$ lié au cercle et en rotation dans le repère galiléen $\mathcal{R}(O, x, y, z)$. On notera \vec{F}_{ie} et \vec{F}_{ic} les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS et \vec{R} la réaction de (C) sur M .

1.1.2.

a. Montrer que \vec{F}_{ie} est colinéaire à $\vec{e}_{x'}$, et exprimer sa norme en fonction de θ , m , a et ω .

b. Montrer que \vec{F}_{ic} est colinéaire à $\vec{e}_{y'}$, et exprimer sa norme en fonction de θ , m , $v = \|\vec{v}(M/\mathcal{R}')\|$ et ω .

1.1.3. Projeter le théorème de la résultante cinétique sur \vec{e}_θ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par θ . Montrer que l'équation obtenue peut se mettre sous la forme :

$$a \frac{d^2 \theta}{dt^2} = f(\theta) \quad \text{où } f(\theta) \text{ une fonction à déterminer}$$

1.2. Utilisation du théorème du moment cinétique

1.2.1. Calculer le moment cinétique en O' du point M dans son mouvement dans \mathcal{R}' et montrer qu'il est colinéaire à $\vec{e}_{y'}$.

1.2.2. En appliquant le théorème du moment cinétique en O' du point M dans \mathcal{R}' , retrouver l'équation différentielle du mouvement.

1.3. Utilisation du théorème de l'énergie cinétique

1.3.1. Calculer l'énergie potentielle U_1 dont dérive la force d'inertie d'entraînement en fonction de θ . On prendra $U_1(\theta = 0) = 0$.

1.3.2. Calculer l'énergie potentielle U_2 dont dérive le poids de M en fonction de θ . On prendra $U_2(\theta = 0) = 0$.

1.3.3. Écrire, en la justifiant, la conservation de l'énergie mécanique du point M et retrouver l'équation différentielle du mouvement.

2. Étude de l'équilibre relatif de M sur (C)

2.1. Montrer que l'équation en θ , dont les solutions donnent les positions d'équilibre relatif de M sur (C), est :

$$a\omega^2(1 + \sin \theta) = g \tan \theta$$

2.2. En examinant les directions et les sens des trois forces mises en jeu dans cet équilibre, déterminer quels sont les intervalles possibles pour θ correspondant aux positions d'équilibre parmi les quatre suivants :

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad ; \quad \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad ; \quad \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

2.3. Retrouver, graphiquement, le résultat de la question **2.2.**.

2.4. On désire que l'équilibre corresponde à $\theta = \theta_0 = 30^\circ$.

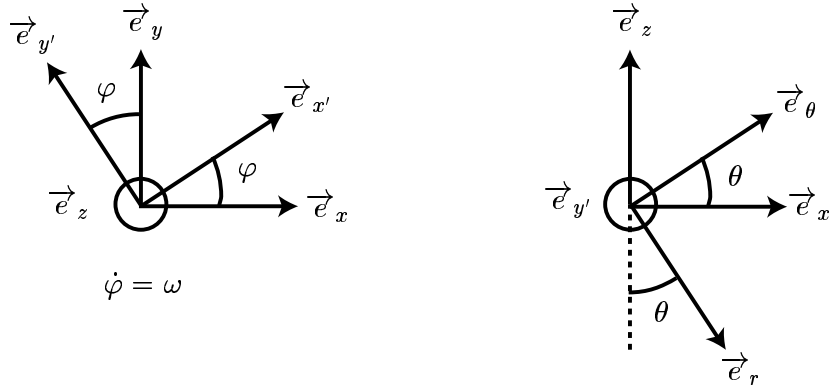
2.4.1. Quelle doit être la valeur de la vitesse angulaire ω sachant que $a = 0,2$ m et $g = 10$ m.s⁻² ?

2.4.2. Étudier la stabilité de la position d'équilibre $\theta_0 = 30^\circ$.

Correction : Théorèmes généraux : composition de deux rotations

1. Étude du mouvement de M sur (C) par plusieurs méthodes

1.1.



1.1.1.

$$m \vec{a}' = m \vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

1.1.2.

a.

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e = -m \left[\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \right]$$

Or :

$$\overrightarrow{OO'} = a \vec{e}_{x'} \quad \text{et} \quad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z = \dot{\varphi} \vec{e}_z \implies \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = -a\omega^2 \vec{e}_{x'} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$$

et :

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = \omega \vec{e}_z \wedge (\omega \vec{e}_z \wedge a \vec{e}_r) = -a\omega^2 \sin \theta \vec{e}_{x'}$$

donc la force d'inertie d'entraînement est :

$$\vec{F}_{ie} = ma\omega^2(1 + \sin \theta) \vec{e}_{x'}$$

Sa norme est :

$$|\vec{F}_{ie}| = ma\omega^2(1 + \sin \theta)$$

b.

$$\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_c = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

avec :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/\mathcal{R}'} = a\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

d'où :

$$\vec{F}_{ic} = -2ma\omega\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_{y'}$$

Sa norme est :

$$|\vec{F}_{ic}| = 2ma|\omega\dot{\theta} \cos \theta| = 2mv|\omega| |\cos \theta|$$

1.1.3. On a :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = a\dot{\theta} \vec{e}_\theta \implies \vec{a}' = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt}_{/\mathcal{R}'} = a\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$

Le théorème de la résultante cinétique de M dans \mathcal{R}' s'écrit donc :

$$m(a\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2 \vec{e}_r) = -mg \vec{e}_z + R_r \vec{e}_r + R_{y'} \vec{e}_{y'} + ma\omega^2(1 + \sin \theta) \vec{e}_{x'} - 2ma\omega\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_{y'}$$

Sa projections sur \vec{e}_θ donne :

$$a\ddot{\theta} = f(\theta) = -g \sin \theta + a\omega^2(1 + \sin \theta) \cos \theta$$

1.2.

1.2.1. Le moment cinétique en O' du point M dans \mathcal{R}' est :

$$\vec{\sigma}_{O'}(M)_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = -ma^2\dot{\theta}\vec{e}_{y'}$$

1.2.2.

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O'}(M)_{\mathcal{R}'}}{dt} = \overrightarrow{O'M} \wedge (m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic})$$

Projection sur $\vec{e}_{y'}$:

$$a\ddot{\theta} = f(\theta) = -g \sin \theta + a\omega^2(1 + \sin \theta) \cos \theta$$

1.3.

1.3.1.

$$\begin{aligned} dU_1 &= -\delta W(\vec{F}_{ie}) = -\vec{F}_{ie} \cdot d\vec{M}_{/\mathcal{R}'} \\ &= -ma\omega^2(1 + \sin \theta) \vec{e}_{x'} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} dt \\ &= -ma\omega^2(1 + \sin \theta) \vec{e}_{x'} \cdot a d\theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

d'où :

$$[dU_1]_0^{U_1} = -ma^2\omega^2 \int_0^\theta (1 + \sin \theta) \cos \theta d\theta \implies U_1 = -ma^2\omega^2 \left(\sin \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2} \right)$$

1.3.2.

$$dU_2 = mg \vec{e}_z \cdot a d\theta \vec{e}_\theta = mga \sin \theta d\theta$$

d'où :

$$U_2 = mga(1 - \cos \theta)$$

1.3.3. • Pas de frottement implique $dW(\vec{R}) = 0$.

• $dW(\vec{F}_{ic}) = -2m(\omega \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = 0$.

donc La variation de l'énergie cinétique élémentaire est :

$$dE_c = dW(m\vec{g}) + dW(\vec{F}_{ie}) \implies d(E_c + U_1 + U_2) = dE_m = 0 \implies E_m = \text{cte}$$

Il y a donc conservation de l'énergie mécanique du point M dans \mathcal{R}' :

$$\begin{aligned} E_M &= \frac{1}{2}m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}^2 + U_1 + U_2 \\ &= \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - ma^2\omega^2 \left(\sin \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) + mga(1 - \cos \theta) = \text{cte} \end{aligned}$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on retrouve :

$$a\ddot{\theta} = f(\theta) = -g \sin \theta + a\omega^2(1 + \sin \theta) \cos \theta$$

2. Étude de l'équilibre relatif de M sur (C)

2.1. Les positions d'équilibre relatif dans \mathcal{R}' correspondent à :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0} \text{ et } \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

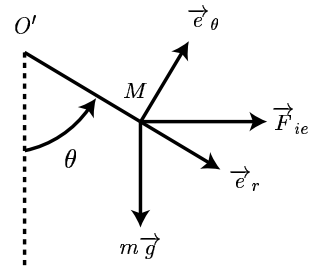
d'où la projection du théorème de la résultante cinétique de M dans \mathcal{R}' sur \vec{e}_θ , donne :

$$g \tan \theta = a\omega^2(1 + \sin \theta)$$

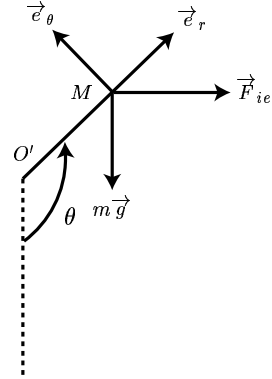
2.2. Lorsque M est en équilibre sur (C) c'est à dire dans \mathcal{R}' , la force d'inertie de coriolis s'annule et ne reste plus que trois forces appliquées sur M : $m\vec{g}$, \vec{F}_{ie} et \vec{R} avec :

$$m\vec{g} + \vec{F}_{ie} + \vec{R} = \vec{0}$$

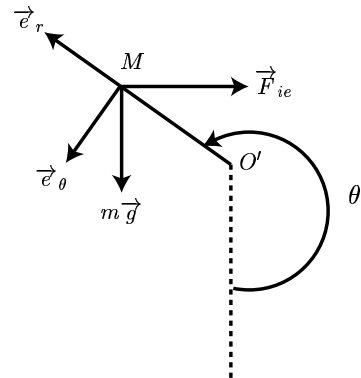
- $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$: Possibilité d'avoir équilibre puisque \vec{R} est perpendiculaire à \vec{e}_θ .



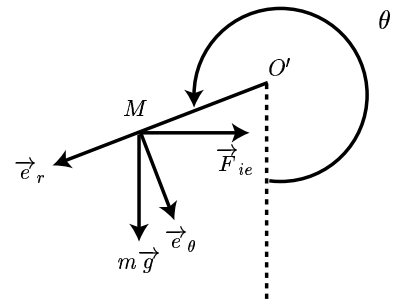
- $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$: Impossible d'avoir équilibre puisque \vec{R} est perpendiculaire à \vec{e}_θ .



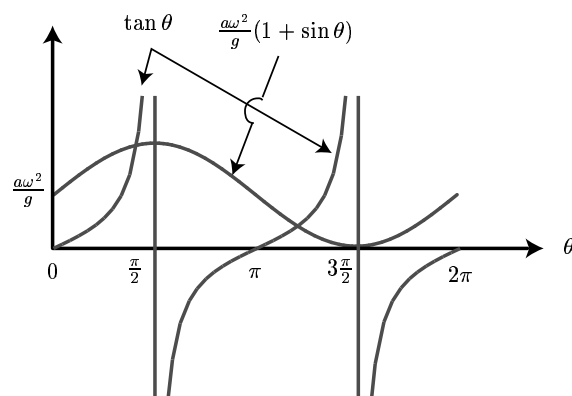
- $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$: Possibilité d'avoir équilibre puisque \vec{R} est perpendiculaire à \vec{e}_θ .



- $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$: Impossible d'avoir équilibre puisque \vec{R} est perpendiculaire à \vec{e}_θ .



2.3. Traçons sur un même graphe $\tan \theta$ et $\frac{a\omega^2}{g}(1 + \sin \theta)$ en fonction de θ et cherchons leurs intersections :



On remarque que les deux courbes se coupent bien dans les intervalles $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ dans lesquelles il y a donc possibilité d'avoir équilibre relatif de M sur (C) .

2.4.

2.4.1. On a :

$$a\omega^2(1 + \sin \theta_0) = g \tan \theta_0 \implies \omega = \sqrt{\frac{g \tan \theta_0}{a(1 + \sin \theta_0)}} \simeq 4,4 \text{ rad.s}^{-1}$$

2.4.2. Remplaçons θ par $\theta_0 + \varepsilon$ dans la relation suivante :

$$a\ddot{\theta} = -g \sin \theta + a\omega^2(1 + \sin \theta) \cos \theta$$

d'où :

$$a\ddot{\varepsilon} = -g \sin(\theta_0 + \varepsilon) + a\omega^2(1 + \sin(\theta_0 + \varepsilon)) \cos(\theta_0 + \varepsilon)$$

or :

$$\sin \varepsilon \simeq \varepsilon \quad \text{et} \quad \cos \varepsilon \simeq 1$$

donc :

$$a\ddot{\varepsilon} = -g(\sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0) + a\omega^2(1 + \sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0)(\cos \theta_0 - \varepsilon \sin \theta_0)$$

Linéarisons cette équation en ne gardant que les terme d'ordres inférieurs ou égales à 1 en ε :

$$a\ddot{\varepsilon} = -g(\sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0) + a\omega^2(1 + \sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0) \cos \theta_0 - a\omega^2 \varepsilon (1 + \sin \theta_0) \sin \theta_0$$

Puisque θ_0 est une position d'équilibre, alors :

$$-g \sin \theta_0 + a\omega^2(1 + \sin \theta_0) \cos \theta_0 = 0$$

donc :

$$a\ddot{\varepsilon} + [g \cos \theta_0 - a\omega^2 \cos^2 \theta_0 + a\omega^2(1 + \sin \theta_0) \sin \theta_0] \varepsilon = 0$$

d'où (puisque $a = 0,2 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, $\theta_0 = 30^\circ$ et $\omega \simeq 4,4 \text{ rad.s}^{-2}$) :

$$\ddot{\varepsilon} + 43,3\varepsilon = 0$$

Par conséquent, le mouvement de M est un mouvement sinusoïdal autour de la position d'équilibre $\theta = \theta_0 = 30^\circ$. Il s'agit donc d'une position d'équilibre stable.

Le mouvement d'un oscillateur, défini par le paramètre $x(t)$, est décrit par l'équation différentielle :

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) \quad (4.1)$$

où :

- a , b et c des constantes **positives**.
- $f(t)$ représente l'excitation extérieur.

Remarque : $x(t)$ peut être une coordonnée cartésienne, un angle ou une charge électrique, ...

$f(t)$ peut être une force, un couple, ...

Exemples d'oscillateurs : pendule simple, pendule élastique (ressort), pendule de torsion, pendule pesant, circuit *RLC*, ...

1. Oscillations libres non amorties

C'est le cas où $b = 0$ et $f(t) = 0$.

L'équation (1) donne :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

Le système effectue donc des oscillations sinusoïdales d'équation $x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$, de pulsation ω_0 et de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et l'oscillateur est dit oscillateur **harmonique**.

2. Oscillations libres amorties

Dans ce cas $b \neq 0$ et $f(t) = 0$.

L'équation (1) donne :

$$\ddot{x} + \frac{b}{a}\dot{x} + \frac{c}{a}x = 0$$

On pose :

$$\sqrt{\frac{c}{a}} = \omega_0 \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} = 2\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}$$

avec λ constante d'amortissement, τ temps de relaxation et Q facteur de qualité.

D'où l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

3 cas à discuter :

• **1er cas : régime aperiodique**

Dans ce cas l'amortissement est important : $\lambda > \omega_0$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 > 0$$

D'où :

$$x(t) = \exp(-\lambda t) \left[A \exp(\sqrt{\Delta'} t) + B \exp(-\sqrt{\Delta'} t) \right]$$

A et B sont deux constantes qui se déterminent à l'aide des conditions initiales.

• **2ème cas : régime critique**

$\lambda = \omega_0 \implies \Delta' = 0$ et :

$$x(t) = (A + Bt) \exp(-\lambda t)$$

• **3ème cas : régime pseudo-périodique**

Dans ce cas l'amortissement est faible : $\lambda < \omega_0$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$$

D'où :

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(-\lambda t) [A \cos \omega t + B \sin \omega t] \\ &= C \exp(-\lambda t) \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

avec

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

A, B, C et φ sont des constantes.

Le mouvement est pseudo-périodique de pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

On définit le décrement logarithmique par :

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t+nT)} = \lambda T \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Remarque :

Pour les 3 régimes, $x(t)$ tend vers 0, lorsque t tend vers l'infini.

3. Oscillations forcées. Résonance

Dans ce cas : $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$ et l'équation (1) donne :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{a} \cos \omega t \tag{4.2}$$

La solution générale de cette équation est :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

avec $x_h(t)$ solution de l'équation homogène c'est à dire sans second membre (voir paragraphe 2.)

et $x_p(t) = X_m \cos(\omega t + \psi)$ solution particulière.

En utilisant la notation complexe :

$$\begin{aligned} \frac{F_0}{a} \cos \omega t &\longrightarrow \frac{F_0}{a} \exp i(\omega t) \\ X_m (\cos \omega t + \psi) &\longrightarrow X_m \exp i(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

En injectant $\underline{x}_p(t) = X_m \exp i(\omega t + \psi)$ dans l'équation (2), on trouve :

$$X_m = \frac{F_0}{a [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2]^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$\begin{cases} \psi = \arctan \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} & si \ \omega_0 > \omega \\ \psi = \arctan \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} - \pi & si \ \omega_0 < \omega \end{cases}$$

Remarque :

Si $\omega_0 > \sqrt{2} \lambda$ c'est à dire si le facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} > \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors X_m est maximale pour une pulsation de résonance :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \neq \omega_0$$

Exercice : Étude d'un piège d'électrons

Un électron de charge $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C et de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg (de poids négligeable) peut se déplacer dans une région de l'espace vide de charges dans laquelle il est soumis à une force électrostatique \vec{F} dérivant de l'énergie potentielle :

$$E_p(x, y, z) = \frac{eV_0}{4d^2}(2z^2 - x^2 - y^2)$$

Le mouvement de l'électron est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}(x, y, z)$ supposé galiléen.

1. Déterminer l'expression de la force \vec{F} et chercher la (ou les) position(s) d'équilibre.
2. Écrire le système d'équations différentielles régissant le mouvement de l'électron.
3. À quelle condition sur V_0 le mouvement de l'électron suivant Oz est-il confiné dans une région limitée de l'espace ? Le mouvement dans le plan Oxy est-il alors lui-même confiné ?
4. Exprimer, en fonction de V_0 et d , la pulsation ω_0 du mouvement confiné. Calculer ω_0 dans le cas où $V_0 = 5$ V et $d = 6$ mm. En déduire la fréquence correspondante f_0 en MHz.
5. On ajoute un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B \vec{u}_z$ ($B > 0$).
 - 5.1. Écrire le système d'équations différentielles du mouvement de l'électron. On posera $\omega_c = \frac{eB}{m}$. Le mouvement suivant Oz est-il modifié ?
 - 5.2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la variable complexe $u = x + iy$.
 - 5.3. En analysant la forme des différentes solutions possibles de cette équation (sans chercher à les déterminer explicitement), montrer qu'il est possible de confiner l'électron autour de sa position d'équilibre lorsque B est supérieur à une valeur B_0 que l'on calculera.

Corrigé : Étude d'un piège d'électrons

1. On a :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}.E_p \implies \vec{F} = -\frac{eV_0}{2d^2}(2z\vec{e}_z - x\vec{e}_x - y\vec{e}_y)$$

La position d'équilibre correspond à :

$$\vec{F} = \vec{0} \implies x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad z = 0$$

2. Le théorème de la résultante cinétique appliqué à l'électron dans le référentiel galiléen \mathcal{R} , s'écrit :

$$m(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z) = \vec{F} = -\frac{eV_0}{2d^2}(2z\vec{e}_z - x\vec{e}_x - y\vec{e}_y)$$

d'où :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{eV_0}{2d^2}x \\ m\ddot{y} = \frac{eV_0}{2d^2}y \\ m\ddot{z} = -\frac{eV_0}{d^2}z \end{cases}$$

3. Pour que le mouvement de l'électron soit confiné suivant Oz c'est à dire pour que l'électron oscille autour de Oz , il faut que V_0 soit positif. Dans ce cas, le mouvement de l'électron n'est pas confiné dans le plan Oxy .

4. La pulsation du mouvement confiné est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{md^2}} \simeq 1,56.10^8 \text{ rad.s}^{-1}$$

La fréquence correspondante est :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 2,49.10^7 \text{ Hz}$$

5.

a. Le théorème de la résultante cinétique appliqué à l'électron dans le référentiel galiléen \mathcal{R} , s'écrit dans ce cas :

$$m(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z) = \vec{F} - e\vec{v} \wedge \vec{B} = -\frac{eV_0}{2d^2}(2z\vec{e}_z - x\vec{e}_x - y\vec{e}_y) - e(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) \wedge B\vec{e}_z$$

d'où :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{eV_0}{2d^2}x - eB\dot{y} \\ m\ddot{y} = \frac{eV_0}{2d^2}y + eB\dot{x} \\ m\ddot{z} = -\frac{eV_0}{d^2}z \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x} = \frac{eV_0}{2md^2}x - \omega_c\dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{eV_0}{2md^2}y + \omega_c\dot{x} \\ \ddot{z} = -\frac{eV_0}{md^2}z \end{cases}$$

Le mouvement de l'électron suivant Oz n'est donc pas modifié.

b.

$$\ddot{u} - i\omega_c\dot{u} - \frac{eV_0}{2md^2}u = 0$$

c. L'électron va osciller autour de sa position d'équilibre si :

$$\Delta = -\omega_c^2 + \frac{2eV_0}{md^2} < 0 \implies \omega_c^2 = \frac{e^2B^2}{m^2} > \frac{2eV_0}{md^2}$$

ce qui implique :

$$B > B_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{ed^2}} \simeq 1,26.10^{-3} \text{ T}$$

Problème : Pendule simple

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'une tige de longueur L et de masse négligeable.

L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{e}_x$, \vec{e}_x étant un vecteur unitaire de l'axe vertical descendant Ox . La position du point M est repérée par l'angle $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$.

On donne $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $L = 0,25 \text{ m}$.

1. Oscillations non amorties

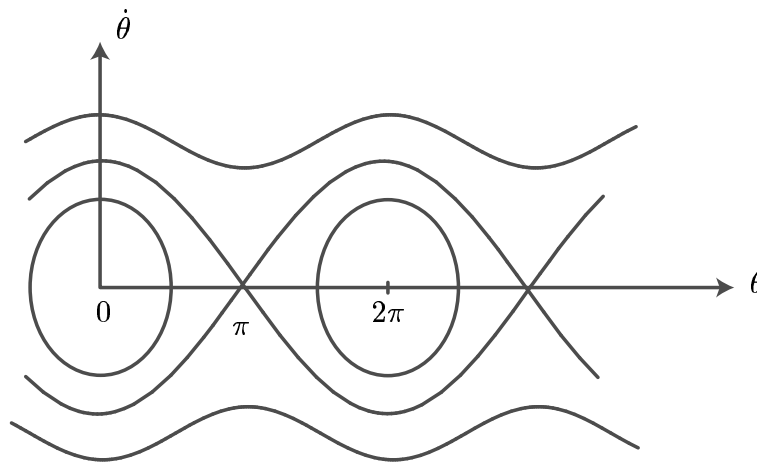
Dans cette partie, on négligera tout type de frottement.

1.1. En utilisant le théorème du moment cinétique en O , déterminer l'équation différentielle du mouvement de M . Calculer la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 du système pour les petites oscillations.

1.2. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique du système en prenant l'origine de l'énergie potentielle en $\theta = 0$.

1.3. Déterminer, en fonction de m , g et L , l'expression de l'énergie mécanique minimale E_0 qu'il faut donner à M en $\theta = 0$ pour qu'il atteigne le sommet de sa trajectoire.

1.4. Dans la figure ci-dessous on donne le portrait de phase du système.



1.4.1. Indiquer les positions d'équilibre stables et instables.

1.4.2. Identifier les trajectoires de phases correspondantes à $E_m < E_0$, $E_m = E_0$ et $E_m > E_0$ et décrire le mouvement de M dans chaque cas.

2. Oscillations libres amorties

En réalité, les frottements fluides sont inévitables à cause de l'air. On modélise les actions dissipatrices de type fluide par une force $\vec{f} = -2m\lambda\vec{v}$ où λ est une constante positive. Dans ces conditions, le pendule effectue des oscillations amorties.

2.1. En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle du mouvement.

2.2. Déterminer la solution de l'équation précédente pour les petites oscillations.

On donne à $t = 0$, $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \Omega > 0$.

2.3. Représenter l'allure de $\theta(t)$ et donner l'expression de la pseudo-période.

2.4. On observe qu'après 10 oscillations, l'amplitude de mouvement n'est que 80 % de l'amplitude initiale. Calculer le décrement logarithmique du mouvement et en déduire la valeur de λ et du facteur de qualité Q .

2.5. On lance le pendule de la position $\theta = 0$ avec une vitesse $\Omega > 0$. Dessiner qualitativement dans le plan de phase $(\theta, \dot{\theta})$ les trajectoires de phase dans les deux cas suivants :

2.5.1. La vitesse du pendule s'annule pour la première fois pour $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$.

2.5.2. La vitesse du pendule s'annule pour la première fois pour $\theta_2 = \frac{7\pi}{3}$.

3. Oscillations forcées

Pour compenser l'énergie dissipée par les frottements, on exerce sur le pendule, une action excitatrice de moment par rapport à O :

$$\vec{\mathcal{M}} = mL^2 a \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

3.1. Écrire la nouvelle équation différentielle vérifiée par θ . Préciser l'unité de a .

3.2. Déterminer la solution, en régime établi, sous la forme $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$.

3.3. Tracer l'allure de θ_m en fonction de ω en précisant les points particuliers de la courbe. Interpréter les résultats.

3.4. Comment choisir a pour que l'amplitude θ_m reste voisine de 0,1 rad pour $\omega = \omega_0$.

Corrigé : Pendule simple

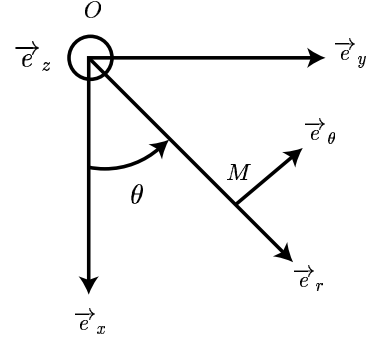
1.

1.1.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} &= \frac{d(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v})}{dt} = mL^2\ddot{\theta}\vec{e}_z \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge (T\vec{e}_r + mg\vec{e}_x) = -mgL \sin\theta \vec{e}_z\end{aligned}$$

d'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0$$



Pour les petites oscillations $\sin\theta \simeq \theta$ d'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

donc :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

1.2 L'énergie potentielle dont dérive le poids est telle que :

$$\int_0^{E_{p1}} dE_{p1} = E_{p1} = - \int_0^\theta mg\vec{e}_x \cdot L d\theta \vec{e}_\theta = \int_0^\theta mgL \sin\theta d\theta = mgL(1 - \cos\theta)$$

L'énergie potentielle dont dérive la tension du fil est telle que :

$$\int_0^{E_{p2}} dE_{p2} = E_{p2} = - \int_0^\theta T\vec{e}_r \cdot L d\theta \vec{e}_\theta = 0$$

d'où l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned}E_m &= \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos\theta)\end{aligned}$$

1.3. Puisque on néglige tout type de frottement, il y a conservation de l'énergie mécanique. Donc :

$$E_m(\theta = 0) = E_m(\theta = \pi)$$

or $E_m(\theta = 0) = E_0$ lorsque l'énergie cinétique de M en $\theta = \pi$ est nulle. D'où :

$$E_0 = 2mgL$$

1.4.

1.4.1. Les positions d'équilibre stables sont :

$$\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$

Les positions d'équilibre instables sont :

$$\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$$

1.4.2. Les trajectoire de phase correspondantes à $E_m < E_0$ sont les ellipses. le mouvement de M est un mouvement oscillatoire sans amortissement.

Les trajectoire de phase correspondantes à $E_m = E_0$ sont les trajectoires passant par $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ ces positions correspondent à des points d'arrêt du point M .

Les trajectoire de phase correspondantes à $E_m > E_0$ sont les trajectoires qui ne coupent pas l'axe des θ . le mouvement de M est un mouvement rotatoire dans un même sens.

2.

2.1.

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = mL^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = \vec{OM} \wedge (T\vec{e}_r + mg\vec{e}_x - 2m\lambda L\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = -(mgL \sin \theta + 2m\lambda L^2\dot{\theta})\vec{e}_z$$

d'où :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

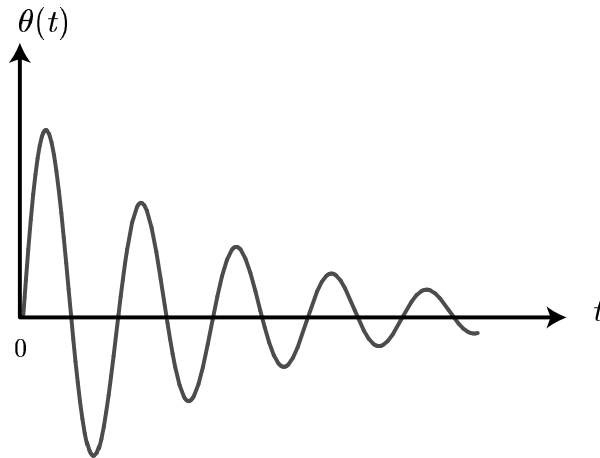
2.2. Pour les petites oscillations $\sin \theta \simeq \theta$ et $\Delta' = \lambda^2 - \frac{g}{L} < 0$, d'où la solution de l'équation précédente :

$$\theta = \exp(-\lambda t) \left[A \cos \left(\sqrt{-\Delta'} t \right) + B \sin \left(\sqrt{-\Delta'} t \right) \right]$$

avec A et B deux constantes d'intégration à déterminer à l'aide des conditions initiales :

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = \frac{\Omega}{\sqrt{-\Delta'}}$$

2.3. Tracé de $\theta = \frac{\Omega \exp(-\lambda t)}{\sqrt{-\Delta'}} \sin \left(\sqrt{-\Delta'} t \right)$:



L'expression de la pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{-\Delta'}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} - \lambda^2}}$$

2.4. Le décrement logarithmique est défini par :

$$\delta = \frac{1}{10} \ln \frac{\theta(t)}{\theta(t+10T)} = \frac{1}{10} \ln \frac{100}{80} \simeq 0,022$$

En remplaçant θ par son expression dans la définition du décrement logarithmique, on trouve :

$$\delta = \lambda T = \lambda \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} - \lambda^2}}$$

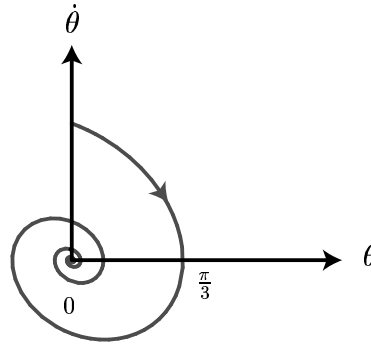
d'où :

$$\lambda = \sqrt{\frac{g\delta^2}{L(4\pi^2 + \delta^2)}} \simeq 0,022.s^{-1}$$

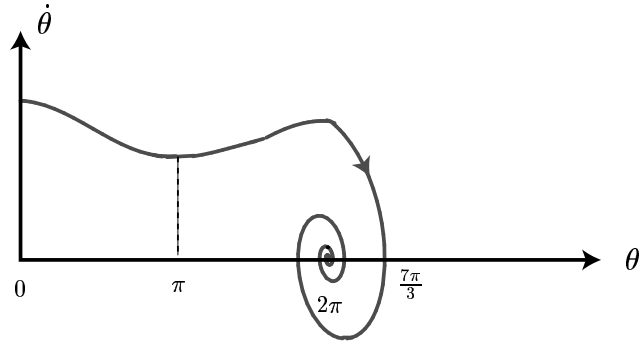
et le facteur de qualité est :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\sqrt{g}}{2\lambda\sqrt{L}} \simeq 141$$

2.5.
2.5.1.



2.5.2.



3.

3.1. Pour les petites oscillations :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = a \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

L'unité de a est rad.s^{-2} .

3.2. Remplaçons, en notation complexe, $\underline{\theta}$ par son expression $\theta_m \exp(j(\omega t + \varphi))$ dans l'équation précédente :

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\lambda)\underline{\theta} = a \exp(j\omega t)$$

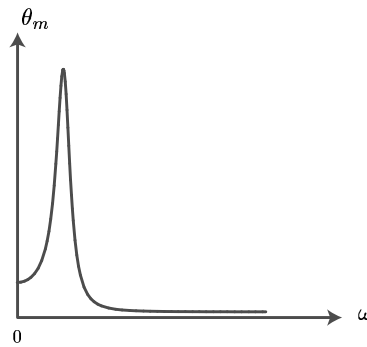
d'où :

$$\theta_m = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}$$

et

$$\begin{cases} \varphi = \arctan \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} & \text{si } \omega_0 > \omega \\ \varphi = \arctan \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} - \pi & \text{si } \omega_0 < \omega \end{cases}$$

3.3



3.4. On a :

$$\theta_m = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}$$

lorsque $\omega = \omega_0$, alors :

$$a = 2\theta_m\omega_0\lambda = 2\theta_m\lambda\sqrt{\frac{g}{L}} \simeq 0,03 \text{ rad.s}^{-2}$$

CHAPITRE 5

SYSTÈME ISOLÉ DE DEUX POINTS MATÉRIELS

1. Position du problème

On se propose d'étudier le mouvement d'un système **isolé** de deux particules M_1 et M_2 en interaction, par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, x, y, z)$.

On a :

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_1} \text{ et } \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_2} \quad \text{avec } G \text{ le centre d'inertie de } M_1 \text{ et } M_2.$$

Par conséquent, les mouvements de M_1 et M_2 dans le référentiel d'étude \mathcal{R} se déduisent de ceux de M_1 et M_2 dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* et de celui de G dans \mathcal{R} .

1. Mouvement de G dans \mathcal{R}

On a, par définition de G :

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} \implies (m_1 + m_2)\vec{a}_G = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

avec \vec{a}_G vecteur accélération de G dans \mathcal{R} , \vec{f}_1 force exercée par M_2 sur M_1 et \vec{f}_2 force exercée par M_1 sur M_2 . D'après le principe d'action et de réaction :

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$$

D'où :

$$\vec{v}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \vec{cte} = \vec{v}_{G(t=0)} = \frac{m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20}}{m_1 + m_2}$$

et :

$$\overrightarrow{OG} = \vec{v}_{G(t=0)} t + \overrightarrow{OG_0}$$

Par conséquent, le mouvement de G dans \mathcal{R} est un mouvement rectiligne uniforme et donc le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est un référentiel **galiléen**.

2. Mouvements de M_1 et M_2 dans \mathcal{R}^*

Appliquons le théorème de la résultante cinétique de M_1 dans \mathcal{R} :

$$m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} /_{\mathcal{R}} = m_1 \frac{d^2 (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_1})}{dt^2} /_{\mathcal{R}} = \vec{f}_1$$

Or :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} /_{\mathcal{R}} = \frac{d \vec{v}_G}{dt} /_{\mathcal{R}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} /_{\mathcal{R}} = \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} /_{\mathcal{R}^*}$$

Donc :

$$m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} / \mathcal{R}^* = \overrightarrow{f}_1 = -\overrightarrow{f}_2 \quad (5.1)$$

De même :

$$m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} / \mathcal{R}^* = \overrightarrow{f}_2 \quad (5.2)$$

(1) et (2) donnent, en posant $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ et $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (masse réduite) :

$$\mu \frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} / \mathcal{R}^* = \overrightarrow{f}_2$$

c'est le théorème de la résultante cinétique dans \mathcal{R}^* , d'une particule fictive M de masse μ , de vecteur position $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ et soumise à la force \overrightarrow{f}_2 .

Cherchons la relation entre $\overrightarrow{GM_1}$ et \overrightarrow{GM} d'une part puis entre $\overrightarrow{GM_2}$ et \overrightarrow{GM} d'autre part.

On a d'après la définition de G :

$$\frac{\overrightarrow{GM_2}}{m_1} = -\frac{\overrightarrow{GM_1}}{m_2} = \frac{\overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1}}{m_1 + m_2} = \frac{\overrightarrow{GM}}{m_1 + m_2}$$

D'où :

$$\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM}$$

Donc les trajectoires de M_1 et M_2 dans \mathcal{R}^* , se déduisent de celle de M dans \mathcal{R}^* .

3. Mouvement de M dans \mathcal{R}^*

3.1. Nature de la trajectoire

On remarque que \overrightarrow{f}_2 passe constamment par G , c'est donc une force centrale.

Appliquons le théorème du moment cinétique de M en G dans \mathcal{R}^* :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma}_G^*}{dt} = \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{f}_2$$

or \overrightarrow{f}_2 et \overrightarrow{GM} sont colinéaires, donc :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma}_G^*}{dt} = 0$$

d'où :

$$\overrightarrow{\sigma}_G^* = c\vec{e} = \overrightarrow{\sigma}_{G(t=0)}^*$$

Comme \overrightarrow{GM} et $\overrightarrow{\sigma}_G = c\vec{e}$ sont perpendiculaires, le mouvement de M dans \mathcal{R}^* est plan. Pour cela, on va travailler en coordonnées polaires (r, θ) dans le plan Gx^*y^* :

$$\overrightarrow{\sigma}_G^* = \overrightarrow{r} \wedge \mu \overrightarrow{v}^*(M) = \overrightarrow{r} \wedge \mu r \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \mu C \vec{e}_z$$

avec $C = r^2 \dot{\theta}$ la constante des aires.

On dit que le mouvement obéit à la loi des aires.

Cherchons la nature de la trajectoire de M dans \mathcal{R}^* , dans le cas d'une interaction newtonienne entre M_1 et M_2 :

$$\overrightarrow{f}_2 = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r \quad , \quad \text{avec } k > 0$$

Théorème de la résultante cinétique de M dans \mathcal{R}^* :

$$\mu \vec{a}^*(M) = \vec{f}_2$$

or d'après la deuxième formule de BINET :

$$\vec{a}^*(M) = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r$$

avec $C = r^2 \dot{\theta}$ et $u = \frac{1}{r}$.

d'où :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{\mu C^2}$$

sa solution est :

$$u = \frac{k}{\mu C^2} + A \cos(\theta + \theta_0)$$

Par un choix judicieux de l'origine de l'angle θ , on prend $\theta_0 = 0$.

d'où :

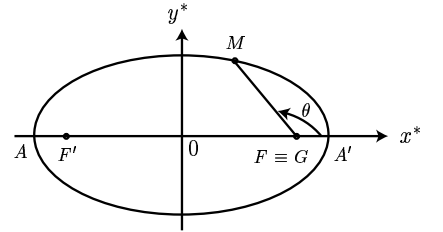
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec $p = \frac{\mu C^2}{k}$ paramètre de la conique.

$e = Ap$ excentricité de la conique.

Nature de la trajectoire de M dans \mathcal{R}^* :

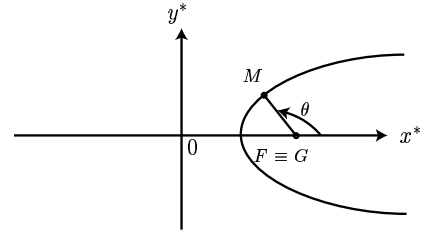
- Si $0 < e < 1$, la trajectoire est elliptique dont l'un des foyers est le centre d'inertie G du système isolé (M_1, M_2) . Il s'agit d'états liés.



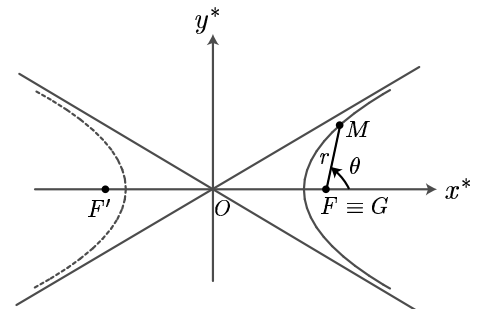
Le périégée A' (ou péricentre) est caractérisée par $r_p = GA' = r_{min} = \frac{p}{1+e}$ et l'apogée A (ou apocentre) par $r_a = GA = r_{max} = \frac{p}{1-e}$

- Si $e = 0$, la trajectoire est circulaire de rayon $r = p$.

- Si $e = 1$, la trajectoire est parabolique. Il s'agit d'états de diffusion.



- Si $e > 1$, la trajectoire est hyperbolique dont l'un des foyers est le centre d'inertie G du système isolé (M_1, M_2) . Il s'agit d'états de diffusion.



3.2. Relation entre l'énergie mécanique E_m et l'excentricité e

On a :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu v^{*2} - \frac{k}{r}$$

Or d'après la 1ere formule de BINET :

$$v^{*2} = C^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$$

et comme :

$$u = \frac{1 + e \cos \theta}{p}$$

alors :

$$E_m = \frac{k}{2p}(e^2 - 1)$$

D'où :

Si $e < 1$, $E_m < 0$: ellipse.

Si $e = 1$, $E_m = 0$: parabole.

Si $e > 1$, $E_m > 0$: hyperbole.

Remarque : 3ème loi de KEPLER

Considérons le cas d'une ellipse.

L'aire balayée par \overrightarrow{GM} entre les instants t et $t + dt$, est :

$$dA \simeq \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{dr}| \simeq \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v} dt| \simeq \frac{C}{2} dt$$

Comme :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = cte$$

\Rightarrow

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi ab}{T}$$

avec T la période de révolution et πab la surface de l'ellipse de demi-petit et grand axe a et b .

Or :

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{\mu C^2}{k}$$

\Rightarrow

$$\left(\frac{\pi ab}{T} \right)^2 = \frac{C^2}{4} = \frac{kb^2}{4\mu a}$$

\Rightarrow

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2 \mu} = cte$$

Dans le cas fréquent où $m_1 \gg m_2$, $\mu \simeq m_2$, $M_1 \cong G$ et $M_2 \cong M$:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2 m_2} = cte$$

Exemples de systèmes isolés où $m_1 \gg m_2$: (soleil, planète), (terre, satellite), etc. Dans ce cas $k = \mathcal{G}m_1m_2$ avec $\mathcal{G} \simeq 9.10^{-11}$ S.I la constante universelle d'attraction.

Donc :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}m_1}{4\pi^2} = cte$$

c'est la 3ème loi de KEPLER.

Annexe : Coniques

1. Ellipse : L'excentricité $e < 1$

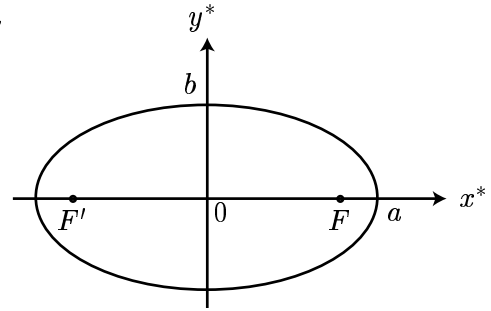
Soient $d = \frac{FF'}{2} = OF$ avec F et F' les foyers de l'ellipse, a demi-grand axe et b demi-petit axe.

On a :

$$a^2 = d^2 + b^2 \quad ; \quad e = \frac{d}{a} < 1 \quad \text{et} \quad p = \frac{b^2}{a}$$

dans ce cas :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

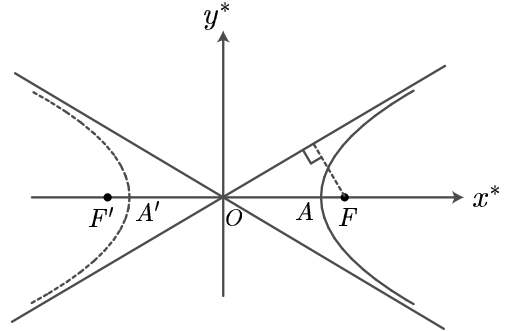


2. Hyperbole : $e > 1$

Soient $d = \frac{FF'}{2} = OF$ avec F et F' les foyers de l'hyperbole, $a = \frac{AA'}{2}$ et b distance entre F et l'une des asymptotes.

On a :

$$d^2 = a^2 + b^2 \quad ; \quad e = \frac{d}{a} > 1 \quad \text{et} \quad p = \frac{b^2}{a}$$



dans ce cas :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^{*2}}{a^2} - \frac{y^{*2}}{b^2} = 1$$

3. Parabole : $e = 1$

On a :

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta} \quad \Rightarrow \quad y^{*2} = 2px^*$$

Problème : Système isolé de deux points matériels

Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle, forment un système isolé. À l'instant t , elles sont situées respectivement aux points A_1 et A_2 repérés, dans un référentiel galiléen, par $\vec{r}_1 = \vec{OA}_1$ et $\vec{r}_2 = \vec{OA}_2$, avec les vecteurs vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . On pose $\vec{r} = \vec{A_1A_2}$ et $r = |\vec{r}|$ et on désignera par \mathcal{G} la constante de gravitation universelle.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux masses.
2. Déterminer la position de leur centre de masse G . Quelle est la trajectoire de G ? Déterminer sa vitesse.
3. Calculer l'énergie cinétique des deux masses dans le référentiel barycentrique; montrer qu'elle est égale à celle d'une masse ponctuelle de vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ et de masse μ que l'on déterminera en fonction de m_1 et m_2 .
4. Montrer que le mouvement relatif de m_2 par rapport à m_1 , caractérisé par \vec{r} , est équivalent à celui de cette masse ponctuelle soumise à une force que l'on explicitera et dont on précisera les caractéristiques.
5. À quelle condition portant sur r et v les deux masses restent-elles à distance finie l'une de l'autre?
6.
 - 6.1. À quelle condition sur r et v , les deux masses restent-elles à distance fixe r_0 l'une de l'autre?
 - 6.2. Déterminer dans ce cas, la période T de leur mouvement, ainsi que la vitesse angulaire Ω , en fonction de m_1 , m_2 , r_0 et \mathcal{G} .

7. Étude d'un cas particulier du problème à trois corps

On étudie un cas particulier du problème à trois corps "restreint", à savoir :

★ deux masses m_1 et m_2 sont beaucoup plus grandes que la troisième m , soit $m_1 \gg m$ et $m_2 \gg m$. La masse m est supposée ponctuelle comme m_1 et m_2 .

★ les deux masses m_1 et m_2 , à distance constante l'une de l'autre, effectuent un mouvement de rotation à la vitesse angulaire Ω autour de leur centre d'inertie G . Ce mouvement décrit au 6., n'est pas affecté par la présence de la troisième masse m . On ne considère que la situation où les trois masses restent alignées au cours du temps. La masse m est située au point A . On prendra la direction $\vec{A_1A_2}$ comme axe $x'Gx$ d'origine G , avec :

$$\vec{GA_1} = -r_1 \vec{e}_x \quad ; \quad \vec{GA_2} = r_2 \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{GA} = x \vec{e}_x$$

\vec{e}_x vecteur unitaire.

La composante selon l'axe $x'Gx$ de la force qui s'exerce sur la masse m , dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire Ω est :

$$F_x = -\frac{\mathcal{G}mm_1}{|x+r_1|^3}(x+r_1) - \frac{\mathcal{G}mm_2}{|x-r_2|^3}(x-r_2) + m\Omega^2 x$$

7.1 Que représente chacun des termes de F_x ?

7.2. Montrer que, dans ce référentiel tournant, cette composante dérive d'une fonction $U(x)$ qui joue le rôle d'une "énergie potentielle". Expliciter $U(x)$.

7.3. Effectuer une étude qualitative de $U(x)$ en fonction de x , par une analyse graphique, et montrer qu'il y a trois positions "d'équilibre" possibles pour la masse m et les situer qualitativement par rapport aux masses m_1 et m_2 .

7.4. Discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre, dans le référentiel tournant, vis à vis des déplacements selon l'axe $x'Gx$.

Corrigé : Système isolé de deux points matériels

1. On a :

$$dE_p = dE_{p1} + dE_{p2} = -\vec{f}_1 \cdot d\vec{A}_1 - \vec{f}_2 \cdot d\vec{A}_2$$

or :

$$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2 \quad \text{puisque'il s'agit d'un système isolé}$$

d'où :

$$dE_p = -\vec{f}_2 \cdot d\vec{A}_1\vec{A}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr$$

donc si on prend $E_p(\infty) = 0$:

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

2. On a :

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OA}_1 + m_2 \vec{OA}_2}{m_1 + m_2}$$

Le théorème de la résultante cinétique appliqué au système $\{A_1, A_2\}$, s'écrit :

$$(m_1 + m_2) \vec{a}_G = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$$

la trajectoire de G est donc rectiligne et sa vitesse :

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

3. On a :

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^* + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^*$$

or la loi de composition des vitesses donne, puisque $\vec{\omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$:

$$\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_G = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2^* = \vec{v}_2 - \vec{v}_G = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \vec{v}$$

d'où :

$$E_c^* = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ la masse réduite}$$

4. Les théorèmes de la résultante cinétique appliquées respectivement à A_1 et A_2 , s'écrivent :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{A}_1}{dt^2} = \vec{f}_1 \quad \text{et} \quad m_2 \frac{d^2 \vec{A}_2}{dt^2} = \vec{f}_2$$

Puisque $\vec{f}_1 = \vec{f}_2$, alors on en déduit :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_2$$

c'est le théorème de la résultante cinétique d'une particule fictive de masse μ et soumise à la force $\vec{f}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$: force exercée par \vec{A}_1 sur \vec{A}_2 . Il s'agit d'une force centrale.

5. Pour que r soit finie (état lié), il faut que :

$$E_m^* = \frac{1}{2} \mu v^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} < 0$$

6.

6.1. Dans ce cas, le mouvement de la particule fictive dans le référentiel barycentrique est circulaire de rayon r_0 . Le théorème de sa résultante cinétique donne :

$$\mu \frac{v^2}{r_0} = G \frac{m_1 m_2}{r_0^2} \quad v = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r_0}}$$

6.2.

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi r_0}{v} = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{r_0}{G(m_1 + m_2)}} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{v}{r_0} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r_0^3}}$$

7. • $-\frac{Gm_1m_2}{|x+r_1|^3}(x+r_1)$ représente la force exercée par A_1 sur A .

• $-\frac{Gm_1m_2}{|x-r_2|^3}(x-r_2)$ représente la force exercée par A_2 sur A .

• $m\Omega^2x$ représente la force d'inertie. En effet :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ie} &= -m \vec{a}_e \\ &= -m \left[\vec{a}_{G/\mathcal{R}} + \frac{\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{GA} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{GA}) \right] \\ &= m\Omega^2x \vec{e}_x \end{aligned}$$

Remarque : La force de CORIOLIS :

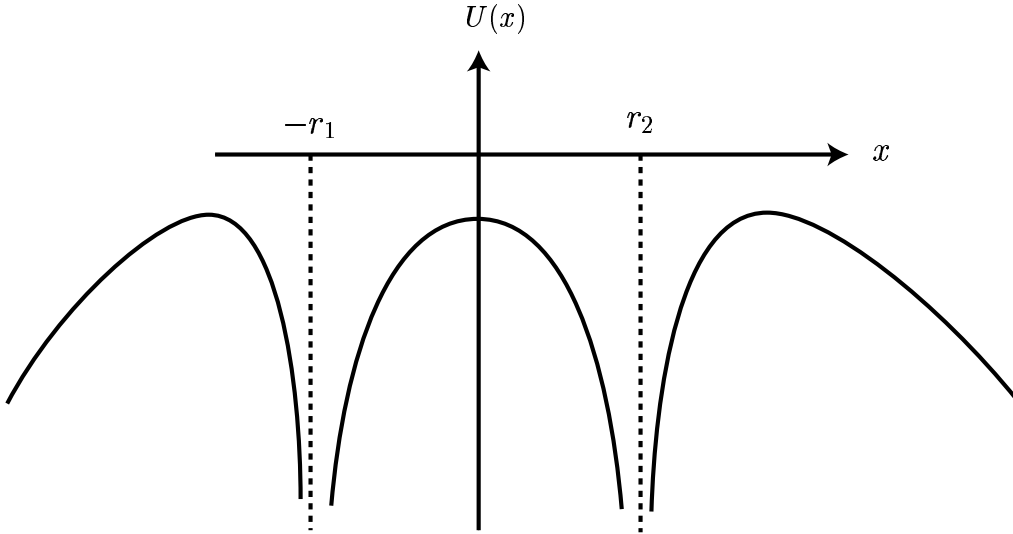
$$\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_e = -2m\Omega \vec{e}_z \wedge \vec{v}_{A/\mathcal{R}} = -2m\Omega \dot{x} \vec{e}_y$$

n'a pas de composante suivant Ox .

7.2. On a :

$$dU(x) = -F_x dx = -G \frac{mm_1}{|x+r_1|} - G \frac{mm_2}{|x-r_2|} - \frac{m}{2} \Omega^2 x^2$$

7.3. $U(x)$ présente trois maximum, donc trois positions d'équilibre.



7.4. Les positions d'équilibre correspondent à des maximums de $U(x)$, donc elles sont instables.

Problème : Étude d'un satellite artificiel

Toute l'étude sera faite par rapport au référentiel géocentrique supposé galiléen.

1. Propriétés générales de la trajectoire

Un satellite artificiel S assimilable à un point matériel de masse m , évolue librement à grande distance de la terre. La terre est considérée comme un corps immobile, rigoureusement sphérique et homogène, de rayon R , de masse M et de centre O .

On désigne par $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OS}$, le vecteur position du satellite et par $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ son vecteur vitesse. À l'instant initial $t = 0$, le satellite se trouve dans la position \vec{r}_0 , animé de la vitesse \vec{v}_0 , non radiale.

L'influence de la lune, du soleil, des autres planètes, ainsi que celle de l'atmosphère sont ignorées. On étudie la situation pour $t > 0$.

1.1. Donner l'expression vectorielle du champ de force $\vec{F}(\vec{r})$ auquel est soumis le satellite. On désignera par G la constante de gravitation universelle et par \vec{u} le vecteur unitaire radial. S'agit-il d'un champ de force central ?

1.2. Définir le vecteur moment cinétique \vec{J} du satellite, par rapport au centre O .

1.3. Montrer que, quel que soit $t \geq 0$, le moment cinétique \vec{J} du satellite est constant, égal à une valeur \vec{J}_0 . Expliciter \vec{J}_0 .

1.4. Justifier le fait que la trajectoire suivie par le satellite, pour $t \geq 0$, est entièrement contenue dans un plan fixe \mathcal{P} que l'on précisera.

2. Étude du mouvement plan. Aspects dynamiques et énergie

On reprend les hypothèses du paragraphe 1. ci-dessus, en se plaçant dans le plan \mathcal{P} de la trajectoire. Ce plan est rapporté aux coordonnées polaires (r, θ) de centre O et de base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. \vec{u}_r et \vec{u}_θ sont respectivement le vecteur unitaire radial et le vecteur unitaire orthoradial.

2.1. Montrer que le principe fondamentale de la dynamique, appliqué au satellite, conduit à l'équation différentielle :

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

2.2. Dédurre de l'équation différentielle précédente que le mouvement du satellite vérifie une relation de la forme :

$$r^n\dot{\theta} = C = \text{cte}$$

Déterminer l'exposant n et relier la constante C au moment cinétique J du satellite par rapport au centre de la terre et à sa masse m .

2.3. Montrer que l'aire dA balayée par le rayon vecteur \vec{r} durant l'intervalle de temps dt est proportionnelle à dt .

2.4. Calculer l'énergie potentielle $U(r)$ dont dérive la force gravitationnelle \vec{F} . On adoptera la convention $U = 0$ à l'infini.

2.5. Soit $K(r)$ l'énergie cinétique du satellite. De quelle propriété jouit la somme :

$$E(r) = U(r) + K(r) \quad ?$$

2.6. Soient U_0 et K_0 respectivement l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du satellite à l'instant initial. À quelle condition liant U_0 et K_0 , le satellite reste-t-il en orbite autour de la terre (état lié) ? Quelle est alors la trajectoire suivie par le satellite ? On donnera ces deux résultats sans les démontrer.

3. Satellite géostationnaire

La terre tourne sur elle-même, autour de sa ligne des pôles, à la vitesse angulaire Ω . On ne considère pas son mouvement de révolution autour du soleil.

Le satellite évolue maintenant de façon géostationnaire, c'est à dire qu'il tourne de façon synchrone avec la terre sur une orbite circulaire de rayon a_1 , située dans le plan équatorial.

3.1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au satellite, déterminer l'expression du rayon a_1 de l'orbite géostationnaire, en fonction de G , M et Ω .

3.2. Exprimer l'énergie mécanique totale E_T du satellite sur son orbite géostationnaire, en fonction de G , M , m et a_1 .

3.3. Le satellite a été lancé à partir d'une base terrestre située sur l'équateur (Kourou [Guyane]).

Déterminer l'énergie mécanique W qu'il a fallu dépenser pour le placer sur l'orbite géostationnaire de rayon a_1 . On ne tient pas compte des frottements dans l'atmosphère.

Corrigé : Étude d'un satellite artificiel

1.

1.1.

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}$$

\vec{F} est une force centrale puisqu'elle est toujours dirigée vers O .

1.2.

$$\vec{J} = \overrightarrow{OS} \wedge m \vec{v}$$

1.3. Le théorème du moment cinétique du satellite, donne :

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \overrightarrow{OS} \wedge \vec{F} = r \vec{u} \wedge F \vec{u} = \vec{0}$$

donc \vec{J} est un vecteur constant :

$$\vec{J} = \vec{J}_0 = \vec{r}_0 \wedge m \vec{v}_0$$

1.4. On a :

$$\vec{J}_0 = \vec{cté} = \overrightarrow{OS} \wedge m \vec{v}$$

donc :

$$\overrightarrow{OS} \perp \vec{cté}$$

d'où le mouvement de S est plan. ce plan est défini par \vec{r}_0 et \vec{v}_0 .

2.

2.1. Le principe fondamental de la dynamique du satellite est :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OS}}{dt^2} = \vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}$$

puisque :

$$\overrightarrow{OS} = r \vec{u} \implies \frac{d\overrightarrow{OS}}{dt} = \dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \implies \frac{d^2 \overrightarrow{OS}}{dt^2} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

d'où :

$$m \left[(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta \right] = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}$$

d'où l'on tire :

$$r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} = 0 \implies r^2 \ddot{\theta} + 2 r \dot{r} \dot{\theta} = 0$$

2.2. On a :

$$r^2 \ddot{\theta} + 2 r \dot{r} \dot{\theta} = \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} = 0 \implies r^2 \dot{\theta} = C = \text{cte}$$

Le moment cinétique est :

$$\vec{J} = r \vec{u} \wedge m (\dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

d'où :

$$J = mC$$

2.3.

$$dA \simeq \frac{1}{2} (\vec{r} \wedge d\vec{r}) = \frac{1}{2} (\vec{r} \wedge \vec{v}) dt = \frac{1}{2} C dt$$

2.4. On a :

$$\int_0^{U(r)} dU(r) = GMm \int_0^r \frac{dr}{r^2} \implies U(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

2.5. Le théorème de l'énergie cinétique du satellite, est :

$$dK = \delta W(\vec{F}) = -dU \quad \implies \quad d(K + U) = 0 \quad \implies \quad E(r) = K(r) + U(r) = \text{cte}$$

2.6. L'état lié correspond à une énergie mécanique du satellite négative :

$$E(r) = K_0 + U_0 < 0$$

La trajectoire du satellite est, en général, elliptique.

3.

3.1. Dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ supposé galiléen (Oz axe de rotation de la terre), le principe fondamental de la dynamique du satellite s'écrit :

$$m \vec{a}(S)_{/\mathcal{R}} = -G \frac{Mm}{a_1^2} \vec{u}$$

or ($\vec{\mathcal{R}}_T$ étant un référentiel d'origine O et lié à la terre) :

$$\vec{a}(S)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(S)_{/\mathcal{R}_T} + \vec{a}(O)_{/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \vec{OS} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OS}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(S)_{/\mathcal{R}_T}$$

or le satellite est fixe par rapport à la terre : $\vec{a}(S)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{0}$ et $\vec{v}(S)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{0}$. En plus $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z = \text{cte}$, donc :

$$\vec{a}(S)_{/\mathcal{R}} = -\Omega^2 a_1 \vec{u} = -G \frac{M}{a_1^2} \vec{u}$$

d'où :

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{GM}{\Omega^2}}$$

3.2.

$$E_T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2(S)_{/\mathcal{R}} - G \frac{Mm}{a_1} = \frac{1}{2} m a_1^2 \Omega^2 - G \frac{Mm}{a_1}$$

or :

$$\vec{v}(S)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(S)_{/\mathcal{R}_T} + \vec{v}(O)_{/\mathcal{R}} + \Omega \vec{u}_z \wedge \vec{OS} = a_1 \Omega \vec{u}_\theta$$

donc :

$$E_T = \frac{1}{2} m a_1^2 \Omega^2 - G \frac{Mm}{a_1}$$

D'après **3.1.** :

$$a_1^2 \Omega^2 = \frac{GM}{a_1}$$

donc :

$$E_T = -G \frac{Mm}{2a_1}$$

3.3.

$$W = E_T - E_{T0}$$

avec E_{T0} énergie mécanique du satellite sur la surface de la terre et exactement sur l'équateur :

$$E_{T0} = \frac{1}{2} m R^2 \Omega^2 - G \frac{Mm}{R}$$

or :

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a_1^3}$$

donc :

$$E_{T0} = \frac{GM}{2a_1^3} m R^2 - G \frac{Mm}{R}$$

et par suite :

$$W = GMm \left(-\frac{1}{2a_1} - \frac{R^2}{2a_1^3} + \frac{1}{R} \right)$$

Exercice : Déviation vers l'est et vers le sud

On lâche, sans vitesse initiale, depuis une altitude $h = 268$ m, un point matériel M de masse m ; l'étude est réalisée dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ à une altitude $\lambda = 45^\circ$. On choisit \vec{e}_z vertical dirigé vers le haut, \vec{e}_y horizontal dirigé vers le nord, \vec{e}_x horizontal dirigé vers l'est. On note $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ le vecteur rotation de la terre autour de l'axe des pôles.

1. Faire un schéma montrant les données ci-dessus.
2. Donner une valeur approchée de la vitesse angulaire ω de la rotation propre de la terre.
3. En supposant le vecteur accélération de pesanteur \vec{g} vertical, projeter la relation fondamentale de la dynamique dans la base \mathcal{R}_T . On notera les équations différentielles où apparaissent \ddot{x} , \ddot{y} et \ddot{z} respectivement par (1), (2) et (3).

Dans toute la suite, on négligera les termes en ω^2 .

4. Intégrer les équations (2) et (3) et reporter les résultats obtenus dans (1) pour obtenir une équation différentielle où seules apparaissent les variables x et t . En déduire alors $x(t)$.

5.

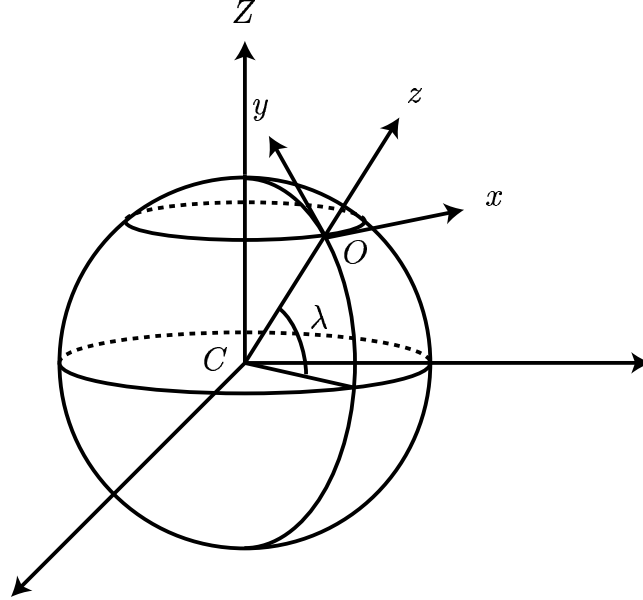
- 5.1. Donner alors les expressions de $y(t)$ et $z(t)$.

- 5.2. Calculer la durée de chute t_c en fonction de h et g .

- 5.3. Calculer la valeur de la déviation vers le sud et celle vers l'est. On donne $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Corrigé : Déviation vers l'est et vers le sud

1.



2.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \simeq \frac{2\pi}{24 * 3600} \simeq 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

3. On se propose de trouver l'expression du poids d'un corps. Pour cela, on appliquera le théorème de la résultante cinétique au corps dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T(O, x, y, z)$:

$$m \vec{a}(G)_{/\mathcal{R}_T} = \sum \vec{F}_{\text{app}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \quad (5.3)$$

Or le poids $m \vec{g}$ d'un corps de masse m , est l'opposé de la tension \vec{T} d'un fil qui maintient ce corps en équilibre dans le référentiel terrestre :

$$m \vec{g} + \vec{T} = \vec{0} \quad (5.4)$$

L'application de l'équation (1) à ce corps en équilibre, donne :

$$\vec{F}' + \vec{T} + \vec{F}_e = \vec{0} \quad (5.5)$$

avec : \vec{F}' résultante des forces appliquées sur le corps autres que la tension \vec{T} du fil.

La force de CORIOLIS $\vec{F}_c = -2m \vec{\omega}_{\mathcal{R}_T/R} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{0}$, puisque le corps étant au repos dans \mathcal{R}_T , alors $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{0}$. (\mathcal{R} étant le référentiel de COPERNIC)

les relations (2) et (3) donnent alors l'expression du poids :

$$m \vec{g} = \vec{F}' + \vec{F}_e \quad (5.6)$$

Appliquons à présent le théorème de la résultante cinétique dans \mathcal{R}_T , au point matériel M lâché sans vitesse, depuis une altitude h :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_G + \vec{F}_e + \vec{F}_c \quad (5.7)$$

avec \vec{F}_G résultante des forces gravitationnelles exercées par tous les astres (terre, lune, soleil,...) sur le point M .

or on a montré que le poids de M est :

$$m\vec{g} = \vec{F}_G + \vec{F}_e \quad (5.8)$$

d'où, les relations (5) et (6) donnent :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{g} + \vec{F}_c \quad (5.9)$$

$$= m\vec{g} - 2m\vec{\omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T} \quad (5.10)$$

or :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}}$$

or le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G est en translation par rapport au référentiel de COPERNIC \mathcal{R} :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

donc :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} = \vec{\omega} = \omega \vec{e}_Z = \omega(\cos \lambda \vec{e}_y + \sin \lambda \vec{e}_z) \quad (5.11)$$

L'utilisation de la relation (9) et la relation (8) en projection sur les axes Ox , Oy et Oz donnent alors :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x} \sin \lambda \\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x} \cos \lambda \end{cases}$$

les équation différentielles où apparaissent \ddot{x} , \ddot{y} et \ddot{z} sont notées respectivement, dans toute la suite, par (1), (2) et (3) comme suggère l'énoncé.

4. (2) implique :

$$\dot{y} = -2\omega x \sin \lambda + \text{cte}_1$$

or, à $t = 0$, $x = 0$ et $\dot{y} = 0$, donc $\text{cte}_1 = 0$, et par suite :

$$\dot{y} = -2\omega x \sin \lambda$$

De même (3) donne :

$$\dot{z} = -gt + 2\omega x \cos \lambda$$

En injectant les expressions de \dot{y} et \dot{z} dans (1), on trouve :

$$\ddot{x} + 4\omega^2 x = 2\omega g t \cos \lambda$$

Comme $\omega \simeq 7,3.10^{-5}$ rad/s $\ll 1$, on négligera le terme en ω^2 , d'où :

$$\ddot{x} = 2\omega g t \cos \lambda \implies \dot{x} = \omega g t^2 \cos \lambda + 0 \implies x = \frac{\omega g t^3}{3} \cos \lambda + 0$$

donc :

$$x = \frac{\omega g}{3} t^3 \cos \lambda$$

5.

5.1. On a :

$$\dot{y} \simeq -2\omega x \sin \lambda + \text{cte}_1, \quad \dot{z} = -gt + 2\omega x \cos \lambda \quad \text{et} \quad x \simeq \frac{\omega g}{3} t^3 \cos \lambda$$

d'où, en tenant compte des conditions initiales :

$$y \simeq -\frac{\omega^2}{12} g t^4 \sin(2\lambda) \quad \text{et} \quad z = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{\omega^2 g}{6} t^4 \cos^2 \lambda + h \simeq -\frac{1}{2} g t^2 + h \quad (\text{terme en } \omega^2 \text{ négligé devant les 2 autres})$$

5.2. La durée de chute correspond à :

$$z = 0 \simeq -\frac{1}{2}gt_c^2 + h \implies t_c \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 7,4 \text{ s}$$

5.3.

$$y \simeq -\frac{\omega^2}{12}gt_c^4 \sin(2\lambda) \simeq -13 \text{ } \mu m$$

Il y a donc une très faible déviation vers le sud.

$$x \simeq \frac{\omega g}{3}t_c^3 \cos \lambda \simeq 6,8 \text{ cm}$$

La déviation importante se fait donc vers l'est.

Problème : Effet de marée exercé par la lune sur la terre

Notations et données numériques :

Constante gravitationnelle $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$

Masse du soleil : $m_s = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Distance Terre-Soleil : $D_s = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Masse de la lune : $m_L = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

Distance moyenne Terre-Lune : $D_L = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$

Rayon de la lune : $R_L = 1,75 \cdot 10^6 \text{ m}$

Masse de la terre : $m_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Rayon de la terre : $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

Le soleil, la lune et la terre sont supposés être sphériques à répartition de masse à symétrie sphérique.

1. Quel est le mouvement du référentiel géocentrique \mathcal{R}_T dans le référentiel de COPERNIC \mathcal{R} ? \mathcal{R}_T est-il galiléen?

2. On considère une particule de masse m assimilée à un point matériel se trouvant au point P , au voisinage de la terre, à l'instant t . On appelle \vec{F} , la résultante des forces autres que les forces de gravitation et d'inertie s'exerçant sur la particule.

On note $\vec{G}_S(P)$, $\vec{G}_L(P)$ et $\vec{G}_T(P)$, les champs gravitationnels créés respectivement en P par le soleil, la lune et la terre.

Les seuls astres contribuant au champ gravitationnel en P étant la lune, la terre et le soleil, montrer que l'on peut écrire le principe fondamental de la dynamique pour la particule dans le référentiel \mathcal{R}_T sous la forme :

$$m \vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F} + m \vec{G}_T(P) + m \vec{G}_L(P) + m \vec{G}_S(P) - m \vec{a}(T)_{/\mathcal{R}}$$

où $\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T}$ et $\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}}$ désignent les accélérations du point P et du centre d'inertie T de la terre, respectivement dans \mathcal{R}_T et \mathcal{R} .

3. On suppose $\vec{F} = \vec{0}$, M étant un point de la terre, on montre qu'en faisant un développement de $\vec{G}_S(M)$ et de $\vec{G}_L(M)$ au voisinage de T , on peut écrire :

$$\vec{G}_S(M) \simeq \vec{G}_S(T) + \left[\left(\overrightarrow{TM} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{G}_S \right]_T \quad \text{et} \quad \vec{G}_L(M) \simeq \vec{G}_L(T) + \left[\left(\overrightarrow{TM} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{G}_L \right]_T$$

3.1. En considérant la terre comme un système de points discrets A_i , de masse m_i , tels que $\sum_i m_i = m_T$, exprimer $\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}}$ en appliquant le théorème du centre d'inertie à la terre.

3.2. Montrer alors que l'on peut écrire :

$$m \vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T} = m \vec{G}_T(P) + m \vec{G}_L(P) + m \vec{G}_S(P)$$

où :

★ $\vec{C}_L(P) = \vec{G}_L(P) - \vec{G}_L(T)$ représente le champ de marée dû à la lune en P ;

★ $\vec{C}_S(P) = \vec{G}_S(P) - \vec{G}_S(T)$ représente le champ de marée dû au soleil en P .

4. On suppose l'astre considéré (soleil ou lune), de centre A , de masse m_A , situé à la distance D_A de T telle que $\vec{TA} = D_A \vec{e}_x$, dans le plan équatorial.

On considère les points P_1 et P_2 de la surface terrestre de coordonnées $(R_T, 0, 0)$ et $(-R_T, 0, 0)$ dans le repère associé au référentiel \mathcal{R}_T . En considérant que $\frac{R_T}{D_A} \ll 1$, évaluer le champ de marée $\vec{C}_A(P_1)$ et $\vec{C}_A(P_2)$. Quelle est la direction de ces deux vecteurs ? Faire un schéma.

Evaluer numériquement le terme $\frac{2\mathcal{G}m_A R_T}{D_A^3}$ dans le cas où l'astre A est le soleil, puis la lune. Quel est l'astre qui a l'effet le plus important ?