Corrigé : Filtres-Diagramme de BODE

Exercice 1 : Déphaseur

Puisque l'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire, alors :

$$\underline{v_A} = \underline{v_B} \quad \text{et} \quad \underline{i_-} = \underline{i_+} = 0$$

⋆ Théorème de MILLMANN en A :

$$\underline{v_A} = \frac{\underline{v_e} + \underline{v_s}}{2}$$

⋆ Théorème de MILLMANN en B :

$$\underline{v_B} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{v_e}$$

d'où :

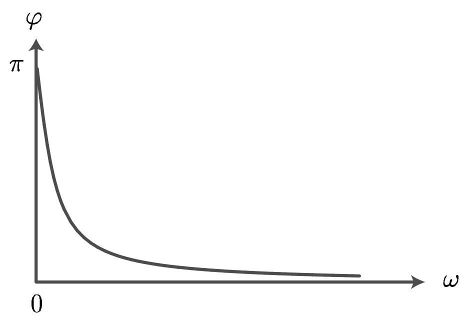
$$\underline{v_A} = \frac{\underline{v_e} + \underline{v_s}}{2} = \underline{v_B} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{v_e}$$

donc la fonction de transfert est :

$$\underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{jRC\omega - 1}{jRC\omega + 1}$$

Ce circuit est appelée déphaseur car l'amplitude de la tension d'entrée est égale à celle de sortie, par contre il y a un déphasage entre la sortie et l'entrée :

$$\varphi = \pi - 2\arctan(RC\omega)$$



Exercice 2 : Filtre passe-bande

1. Á basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où :

$$\underline{v_s} = 0$$

Á haute fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé, d'où :

$$\underline{v_s} = 0$$

Il s'agit donc d'un filtre passe-bande.

2. Théorème de MILLMANN en A :

$$\underline{v_A} = \frac{jx(1 + jx)}{1 - x^2 + 3jx}\underline{v_e} \tag{1}$$

Théorème de MILLMANN en B :

$$\underline{v_s} = \frac{1}{1 + jx}\underline{v_A} \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) donnent :

$$\underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{jx}{1 - x^2 + 3jx}$$

On a donc un passe-bande du second ordre.

3. • Recherche des asymptotes à "basse" et "haute" fréquence :
⋆ si $\omega \longrightarrow 0$, $x \longrightarrow 0$ donc :

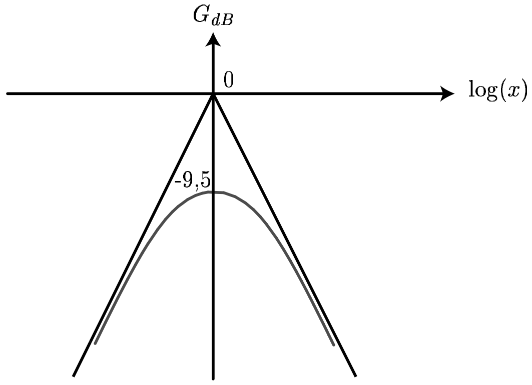
$$\underline{H} \simeq jx \quad \Longrightarrow \quad |\underline{H}| \simeq x \;\; \text{et} \;\; G_{dB} = 20\log|\underline{H}| \simeq 20\log x$$

On a donc une asymptote de pente 20dB/décade.

$\star$ si $\omega \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow \infty$ donc :

$\underline{H} \simeq -\dfrac{j}{x} \implies |\underline{H}| \simeq \dfrac{1}{x}$ et $G_{dB} = 20\log|\underline{H}| \simeq -20\log x$

On a donc une asymptote de pente -20dB/décade.



• Intersection des asymptotes :

$$20\log x = -20\log x \implies x = 1$$

Le point d'intersection des deux asymptotes est donc $(\log 1 = 0, 20\log 1 = 0)$.

• En $x = 1$, $G_{dB} = 20\log\frac{1}{3} \simeq -9,5\ dB$

Exercice 3 : Filtre passe-bas du second ordre

1. Á basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où :

$$\underline{v_s} = \underline{v_e}$$

Á haute fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé, d'où :

$$\underline{v_s} = 0$$

Il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

2. Théorème de Millmann en A :

$$\underline{v_A} = \frac{\underline{v_B}}{1 + jRC\omega}$$

or

$$\underline{v_A} = \underline{v_s} \tag{3}$$

donc :

$$\underline{v_B} = (1 + jRC\omega)\underline{v_s} \tag{4}$$

Théorème de Millmann en B :

$$\underline{v_B} = \frac{\frac{\underline{v_e}}{R} + \frac{\underline{v_A}}{R} + jC\omega\underline{v_s}}{\frac{2}{R} + jC\omega} \tag{5}$$

Les relations (3), (4) et (5) donnent la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{1}{1 - x^2 + 2jx}$$

On a donc un filtre passe-bas du second ordre.

3. • Recherche des asymptotes à "basse" et "haute" fréquence :

$\star$ si $\omega \longrightarrow 0$, $x \longrightarrow 0$ donc :

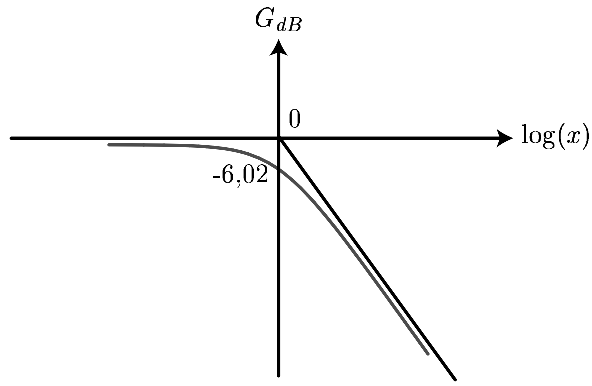
$$\underline{H} \simeq 1 \implies G_{dB} = 20\log|\underline{H}| \simeq 0$$

On a donc, à basse fréquence, une asymptote horizontal.

⋆ si $\omega \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow \infty$ donc :

$$\underline{H} \simeq -\frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad G_{dB} = 20\log|\underline{H}| \simeq -40\log x$$

On a donc une asymptote de pente -40dB/décade.



• Intersection des asymptotes :

$$-40\log x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

Le point d'intersection des deux asymptotes est donc $(\log 1 = 0, 0)$.

• En $x = 1$, $G_{dB} = 20\log\frac{1}{2} \simeq -6,02\ dB$

Exercice 4 : Calcul d'une impédance d'entrée

On a :

$$\underline{v_A} = \underline{v_D} \quad \text{et} \quad \underline{i_-} = \underline{i_+} = 0$$

1. Théorème de Millmann en A :

$$\underline{v_A} = \underline{v_e} = \frac{\underline{v_s}}{2} \tag{6}$$

Théorème de Millmann en D :

$$\underline{v_D} = \underline{v_e} = \underline{v_B} + R\underline{i_e} \tag{7}$$

Théorème de Millmann en B :

$$\underline{v_B} = \frac{\underline{v_e} + jRC\omega\underline{v_s}}{2 + jRC\omega} \tag{8}$$

Les relations (6), (7) et (8) donnent l'impédance d'entrée :

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{v_e}}{\underline{i_e}} = \frac{2 + jRC\omega}{1 - jRC\omega}\ R$$

2. On a :

$$\underline{Z_e} = jL\omega_0 = \frac{2 + jRC\omega}{1 - jRC\omega}\ R$$

d'où :

$$RCL\omega_0^2 + jL\omega_0 = 2R + jR^2C\omega_0$$

On en déduit par identification :

$$L = R^2C \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{RC}$$

Le montage est équivalent à une inductance pure de valeur $L = R^2C$.

L'intérêt est de simuler une inductance, ce qui nous évite donc d'utiliser directement des inductances qui sont de grande taille.

Application numérique :

$$L \simeq 0,9\text{H} \quad \text{et} \quad \omega_0 \simeq 4,7.10^3\ \text{rad.s}^{-1}$$

Exercice 5 : Réjecteur de bande

1. On a :

$$\underline{v_-} = \underline{v_B} = \underline{v_+} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{i_-} = \underline{i_+} = 0$$

Théorème de MILLMANN en B :

$$\underline{v_B} = 0 = \frac{\underline{Y_2}\underline{v_A} + \underline{Y_5}\underline{v_s}}{\underline{Y_2} + \underline{Y_5}} \Longrightarrow \underline{Y_2 v_A} + \underline{Y_5 v_s} = 0 \tag{9}$$

Théorème de MILLMANN en A :

$$\underline{v_A} = \frac{\underline{Y_1}\underline{v_e} + \underline{Y_4}\underline{v_s} + \underline{Y_2}\underline{v_B}}{\underline{Y_1} + \underline{Y_4} + \underline{Y_2} + \underline{Y_3}} = \frac{\underline{Y_1}\underline{v_e} + \underline{Y_4}\underline{v_s}}{\underline{Y_1} + \underline{Y_4} + \underline{Y_2} + \underline{Y_3}} \tag{10}$$

Les relations (9) et (10) donnent la fonction de transfert :

$$\underline{H_1} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = -\frac{\underline{Y_1}\underline{Y_2}}{\underline{Y_5}(\underline{Y_1} + \underline{Y_2} + \underline{Y_3} + \underline{Y_4}) + \underline{Y_2} + \underline{Y_4}}$$

2.

2.1.

$$\underline{H_1} = \frac{-1}{1 + j\left(RC\omega - \frac{1+\alpha}{2RC\omega}\right)} = \frac{-1}{1 + j\left(2\pi RCf - \frac{1+\alpha}{4\pi RCf}\right)}$$

à identifier avec :

$$\underline{H_1} = \frac{-1}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

d'où :

$$Q = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \qquad \text{et} \qquad f_0 = \frac{Q}{2\pi RC} = frac12\pi RC\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}$$

2.2. C'est un filtre passe-bas du second ordre.

On a :

$$Q = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 2Q^2 - 1 \simeq 799$$

$$f_0 = \frac{Q}{2\pi RC} \qquad \Longrightarrow \qquad R = \frac{Q}{2\pi C f_0} \simeq 199\text{k}\Omega$$

3.

3.1. D'après la question **2.1.** :

$$\underline{H_1} = \frac{\underline{v_1}}{\underline{v_e}} = \frac{-1}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

3.2. Pour l'amplificateur opérationnel 2, on a :

$$\underline{v_F} = \underline{v_-} = \underline{v_+} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{i_-} = \underline{i_+} = 0$$

Théorème de MILLMANN en F :

$$\underline{v_F} = 0 = \frac{\frac{\underline{v_1}}{r} + \frac{\underline{v_2}}{r} + \frac{\underline{v_s}}{r}}{\frac{3}{r}} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{v_s} = -\underline{v_1} - \underline{v_e} \tag{11}$$

Le montage est un sommateur inverseur.

3.3. On a :

$$\underline{H_2} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = -\frac{\underline{v_1} + \underline{v_e}}{\underline{v_e}} = -1 - \underline{H_1}$$

or

$$\underline{H_1} = \frac{-1}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

donc :

$$\underline{H_2} = \frac{-jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

Nature du filtre :

Si $f \longrightarrow 0\,;\ |\underline{H_2}| \longrightarrow 1 \Longrightarrow |\underline{v_s}| = |\underline{v_e}|$.

Si $f \longrightarrow \infty\,;\ |\underline{H_2}| \longrightarrow 1 \Longrightarrow |\underline{v_s}| = |\underline{v_e}|$.

Le filtre est donc un réjecteur de bande c'est à dire un coupe bande.

3.4. $\star$ La fréquence rejetée correspond à :

$$\underline{H_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = f_0 = 50\text{Hz}$$

$\star$ Les fréquences de coupures à -3dB sont définies par :

$$|\underline{H_2}(f_c)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}}} = \frac{|\underline{H_2}|_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}$$

d'où :

$$\frac{1}{Q^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad Q\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right) = \pm 1$$

Tout calcul fait et en ne conservant que les fréquences positives, on trouve :

$$f_{1c} = \frac{f_0}{2Q}(\sqrt{1 + 4Q^2} - 1) \quad \text{et} \quad f_{2c} = \frac{f_0}{2Q}(\sqrt{1 + 4Q^2} + 1)$$

d'où la largeur de bande coupée est :

$$\triangle f = f_{2c} - f_{1c} = \frac{f_0}{Q} \simeq 2,5\text{Hz}$$

Une application de ce filtre : il rejette la fréquence du secteur $f = 50$ Hz lorsque celle-ci est indésirable.