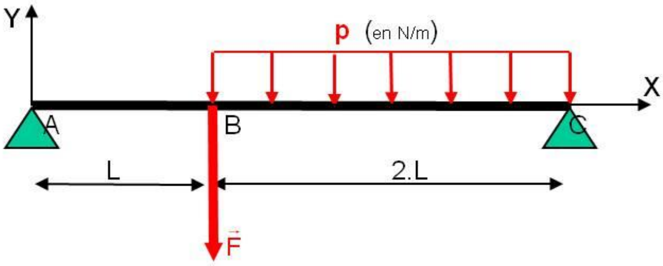
EXERCICE 1 : Torseur de cohésion
(9 points – 1h)

La poutre ci-contre est en appui en A et C, soumise à une charge uniformément répartie p suivant $-\vec{y}$ de B à C et une force $\vec{F}$ d'intensité F suivant $-\vec{y}$ en B.



Ces sollicitations sont indépendantes et peuvent être présentent ou non.

Application numérique : $L = 3m$, $F = 3000\ N$ et $p = 1000 N/m$

1. Définir les équations littérales des actions aux appuis. *(1 point)*

On applique le principe fondamental de la statique à { la poutre } isolée.

$$\sum \overrightarrow{M_A}.\vec{z} = 0 : \quad -F.L - 2.p.L \times 2.L + Y_C.3.L = 0$$
$$\sum \overrightarrow{M_A}.\vec{z} = 0 : \quad \boxed{Y_C = \frac{1}{3}.(F + 4.p.L)}$$

$$\sum \vec{F}.\vec{y} = 0 : \quad Y_A - F - 2.p.L + Y_C = 0$$
$$\sum \vec{F}.\vec{y} = 0 : \quad \boxed{Y_A = \frac{2}{3}.(F + p.L)}$$

2. Pour chaque zone de la poutre, définir les équations littérales des termes du torseur de cohésion. *(4 points)*

Equations d'équilibre local : 2 zones

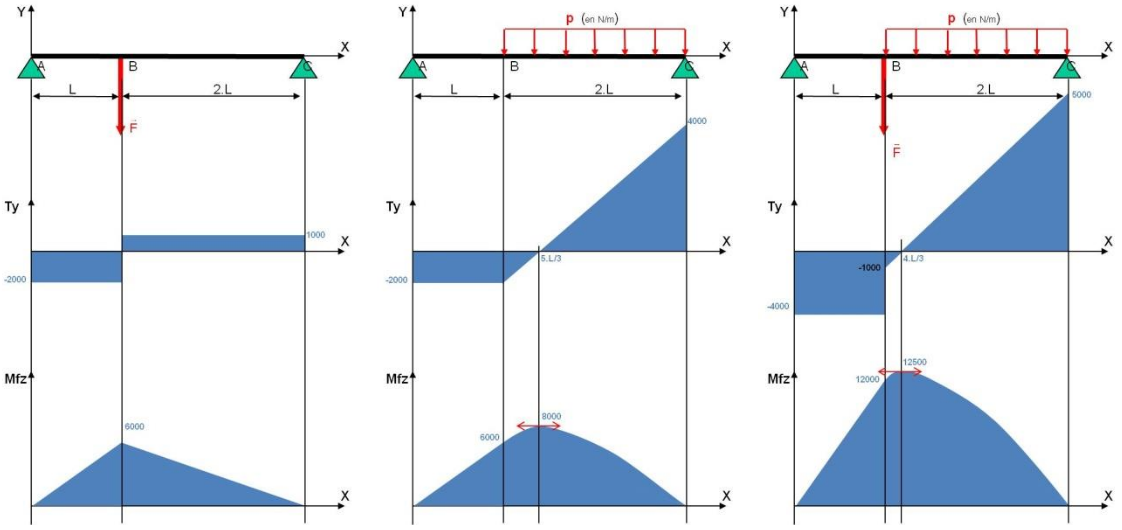
Zone AB : Coté Gauche

$$N(x) = 0$$
$$Ty(x) = -\frac{2}{3}.(F + p.L)$$
$$Mfz(x) = \frac{2}{3}.(F + p.L).x$$

Zone BC : Coté Droit

$$N(x) = 0$$
$$Ty(x) = -p.(3.L - x) + \frac{1}{3}.(F + 4.p.L)$$
$$Mfz(x) = -p.\frac{(3.L - x)^2}{2} + \frac{1}{3}.(F + 4.p.L).(3.L - x)$$

3. Tracer les diagrammes d'évolution des termes non nuls du torseur de cohésion pour chaque configuration. *(3 points)*

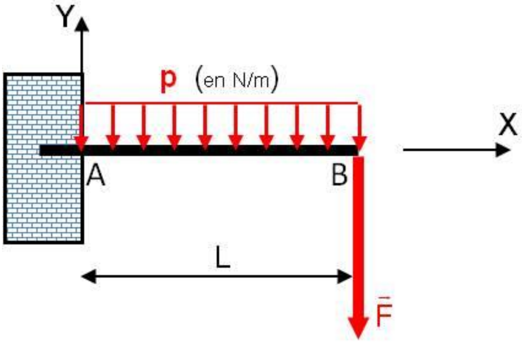


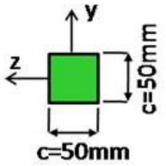
4. Dans quelle configuration et à quel endroit de la poutre, la structure est-elle la plus sollicitée ? *(1 point)*

C'est dans la configuration $p + F$ que le moment fléchissant est maxi pour l'abscisse $x = \frac{4}{3}.L$.

EXERCICE 2: Flexion
(8 points – 45 min)

La poutre métallique ($E = 220\,GPa$) ci-contre encastrée en A est soumise à l'action d'une charge répartie ($p = 2500\,N/m$) orientée suivant l'axe $-\vec{y}$ et d'une charge ponctuelle $\vec{F}$ d'intensité $p.L$ à l'abscisse $x = L$.





On peut montrer que les valeurs d'effort tranchant et moment fléchissant sont égaux aux relations ci-dessous :

$$Ty(x) = p.x - 2.p.L$$

$$Mfz(x) = -\frac{1}{2}.p.x^2 + 2.p.L.x - \frac{3}{2}.p.L^2$$

1. Exprimer puis calculer le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe $\vec{z}$. *(1 point)*

   $I_z = \frac{c^4}{12} = 520833\,mm^4$

2. Déterminer le lieu et la valeur de la contrainte maxi. *(2 points)*

   Le moment fléchissant est maxi à l'origine et vaut 3750 N.m

   La contrainte vaut donc : $\sigma_{max} = \sigma(0) = \frac{Mfz(0)}{I_z}.\frac{c}{2} = 180\,MPa$

3. Déterminer le lieu et la valeur de la flèche maxi. *(5 points)*

   <u>Méthode des déplacements :</u>
   <u>Hypothèses :</u>
   - *Matériau homogène, continu et isotrope*
   - *Elasticité linéaire*
   - *Petites perturbations → Rotation de la section droite par rapport à la fibre neutre négligée. Cela implique que l'on néglige l'effort tranchant pour traduire le déplacement de la poutre. Ainsi* $\gamma = 0 \;\rightarrow\; \frac{dv}{dx} = \theta$

   <u>Déformations longitudinales :</u>

   $\frac{du(x)}{dx} = \frac{N}{E.S} \qquad \rightarrow \qquad u(x) = 0$

   <u>Déformations transversales :</u>

   $\frac{dv(x)^2}{dx^2} = \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{Mfz}{E.Iz} = \frac{1}{E.Iz}\left[-\frac{1}{2}.p.x^2 + 2.p.L.x - \frac{3}{2}.p.L^2\right]$

   1ère intégration :

   $\frac{dv(x)}{dx} = \frac{1}{E.Iz}\left[-\frac{1}{6}.p.x^3 + p.L.x^2 - \frac{3}{2}.p.L^2.x\right] + C_1$

2nd intégration :

$$v(x) = \frac{1}{E.Iz}.\left[-\frac{1}{24}.p.x^4 + \frac{1}{3}.p.L.x^3 - \frac{3}{4}.p.L^2.x^2\right] + C_1.x + C_2$$

<u>Conditions aux limites pour déterminer les constantes C_1 et C_2</u>

En $x = 0$ il y a un encastrement, donc pas de déplacement $v(0) = 0$ ni de rotation de la section droite ou de la fibre neutre $\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = 0$.

On détermine la constante C_1 :

$$0 = \frac{1}{E.Iz}.\left[-\frac{1}{6}.p.x^3 + p.L.x^2 - \frac{3}{2}.p.L^2.x\right] + C_1$$

$$C_1 = 0$$

Puis la constante C_2 :

$$0 = \frac{1}{E.Iz}.\left[-\frac{1}{24}.p.x^4 + \frac{1}{3}.p.L.x^3 - \frac{3}{4}.p.L^2.x^2\right] + C_2$$

$$C_2 = 0$$

<u>Bilan :</u>

$$\theta(x) = \frac{1}{E.Iz}\left[-\frac{1}{6}.p.x^3 + p.L.x^2 - \frac{3}{2}.p.L^2.x\right]$$

$$v(x) = \frac{1}{E.Iz}.\left[-\frac{1}{24}.p.x^4 + \frac{1}{3}.p.L.x^3 - \frac{3}{4}.p.L^2.x^2\right]$$

<u>Lieu de la flèche maxi :</u>

La flèche est maxi quand $\theta(x_{vmax}) = 0$

$$-\frac{1}{6}.p.x^3 + p.L.x^2 - \frac{3}{2}.p.L^2.x = 0$$

$$p.x.\left[-\frac{1}{6}.x^2 + L.x - \frac{3}{2}.L^2\right] = 0$$

Solutions :

- $x = 0$ Encastrement
- $x = 3.L$ Hors zone

La solution est donc à la frontière $x = L$ (prévisible !!!)

$$\boxed{v_{max} = -\frac{11}{24}.\frac{p.L^4}{E.Iz}}$$

Application numérique :

$$\boxed{v_{max} = -10\ mm}$$