

COURS DE PHYSIQUE

2TSI

**ÉLECTRONIQUE - MÉCANIQUE
-THERMODYNAMIQUE
-ÉLECTROMAGNÉTISME -
PHYSIQUES DES ONDES - OPTIQUE -**

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID

EL FILALI SAID

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

Première partie

ÉLECTRONIQUE

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

1.1 Composition en fréquence d'un signal

1.1.1 Représentation temporelle et fréquentielle

Soit $g(t)$ un signal T -périodique c'est à dire $g(t + kT) = g(t)$ avec :

- $f = \frac{1}{T}$ la fréquence propre du signal.
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ la pulsation propre du signal.

Exemples

- Signal sinusoidal :
- Signal carrée impair :
- Signal carrée pair :
- Signal triangulaire impair :
- Signal triangulaire pair :

On admet le théorème de FOURIER :

$$g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

C'est le développement en série de FOURIER (DSF)

Avec

$$a_o = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} g(t) dt = \langle g(t) \rangle = g_m$$

C'est la valeur moyenne du signal $g(t)$.

Ainsi

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} g(t) \cos(n\omega t) dt ; b_n = \frac{2}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} g(t) \sin(n\omega t) dt$$

On retient que tout signal périodique de fréquence f est la somme des fonctions sinusoidales de fréquence $0, f, 2f, 3f, \dots$.

- On appelle le fondamental le terme correspond à la fréquence $f(\Rightarrow n = 1)$ c'est à dire le terme $a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$
- On appelle les harmoniques d'ordre n les termes correspondent aux fréquences nf avec $n > 1$.

Remarque- 1 :

- On peut écrire $g(t)$ sous la forme

$$g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

avec

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad ; \quad \tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

En effet :

$$A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = A_n \cos n\omega t \cos \varphi_n - A_n \sin n\omega t \sin \varphi_n \Rightarrow \begin{cases} A_n \cos \varphi_n = a_n \\ -A_n \sin \varphi_n = b_n \end{cases}$$

D'où le résultat

- La série de FOURIER peut être écrite en utilisant les nombres complexes

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} g(t) e^{-jn\omega t} dt$$

En effet : On rappelle les formules d'EULER :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \Rightarrow g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t}$$

On pose $\underline{c}_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \Rightarrow \underline{c}_n^* = \frac{a_n + jb_n}{2}$

Par conséquent $\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} g(t)(\cos n\omega t - j \sin n\omega t) dt$ Donc

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} g(t) e^{-jn\omega t} dt$$

ainsi

$$\underline{c}_n^* = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} g(t) e^{jn\omega t} dt$$

Remarquons que

$$\underline{c}_n^* = \underline{c}_{-n} \Rightarrow |A_n| = 2|\underline{c}_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Il en résulte que

$$g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t} + \underline{c}_n^* e^{-jn\omega t} \Rightarrow g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_{-n} e^{-jn\omega t}$$

$$\Rightarrow g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t}$$

c'est à dire en posant $\underline{c}_o = a_o = <g(t)>$ alors le résultat.

► Si le signal $g(t)$ est impair (symétrique par rapport à l'origine) alors $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ et par conséquent

$$g(t) \text{ impair} \Rightarrow g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f t)$$

► Si le signal $g(t)$ est pair (symétrique par rapport à l'axe oy) alors $b_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ et par conséquent

$$g(t) \text{ pair} \Rightarrow g(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f t)$$

► **Formule de BESSEL - PARSEVAL :**

Soit $g(t)$ une fonction T -périodique, développable en série de FOURIER. on admet que :

$$f_m^2 = <f^2> = \overline{f^2} = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f^2(t) dt \Rightarrow$$

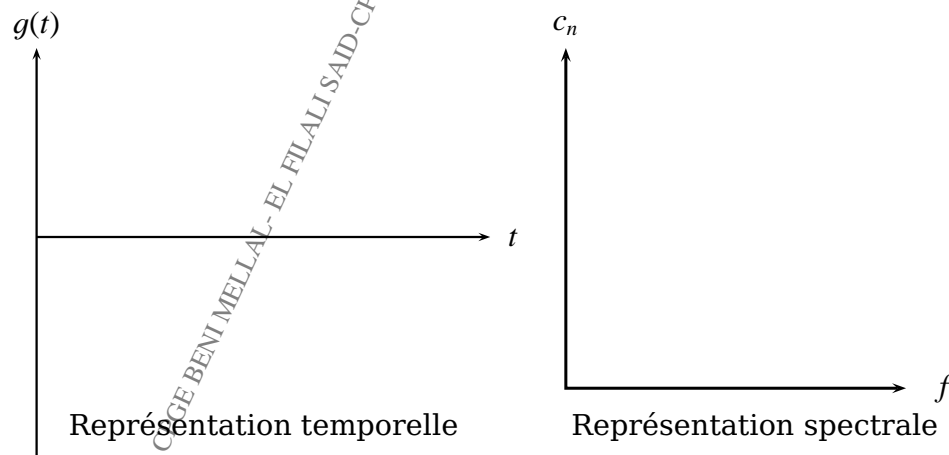
$$f_m^2 = <f^2> = \overline{f^2} = a_o^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = a_o^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

C'est la formule de BESSEL - PARSEVAL

► On rappelle valeur efficace g_{eff} du signal $g(t)$ la racine carrée de la valeur moyenne du carré du signal

$$g_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} g^2(t) dt}$$

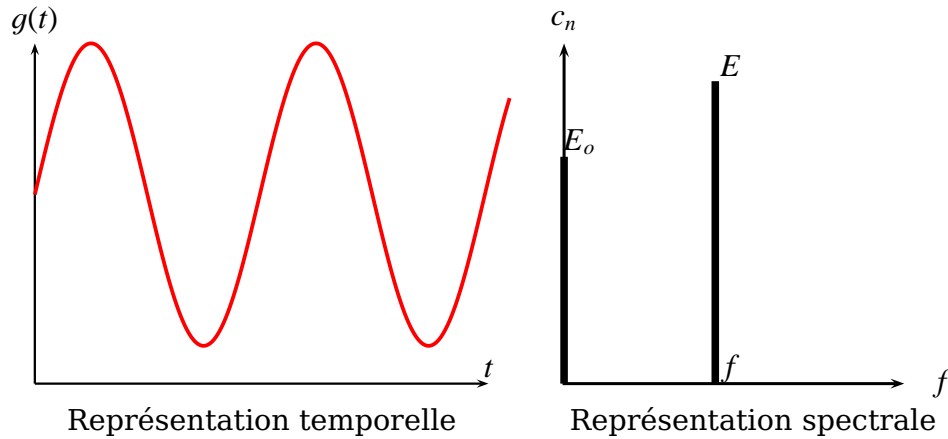
Donc pour toute fonction périodique présente deux représentations : temporelle et spectrale



1.1.2 Exemples

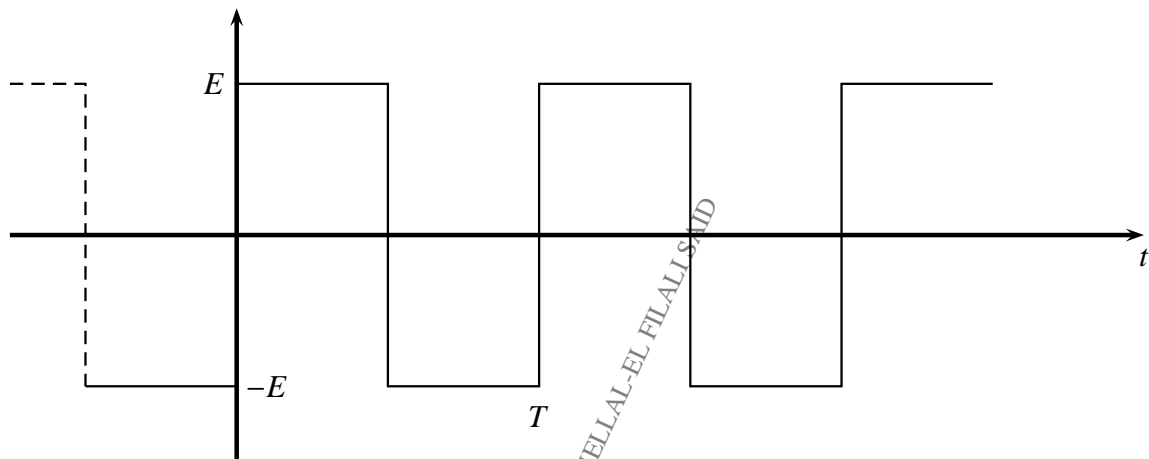
1.1.2.1 Signal sinusoïdal

Considérons un signal sinusoïdal d'amplitude E de fréquence f et de composante continue E_o ; Donc $g(t) = E_o + E \cos(2\pi ft)$



1.1.2.2 Signal carré impair

Soit $e(t)$ un signal carré impair $(-E, E)$



- Puisque $e(t)$ impair alors $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$

- Calculons les coefficients b_n :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \sin(n\omega t) dt \Rightarrow b_n = \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T/2} e(t) \sin(n\omega t) dt \\
 &\Rightarrow b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} E \sin(n\omega t) dt \\
 &\Rightarrow b_n = \frac{4E}{n\omega T} [1 - \cos(n\omega T/2)] \\
 &\Rightarrow b_n = \frac{4E}{2\pi n} (1 - \cos(n\pi))
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \cos n\pi = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{Si } n \text{ pair } (n = 2p) \\ -1 & \text{Si } n \text{ impair } (n = 2p + 1) \end{cases}$$

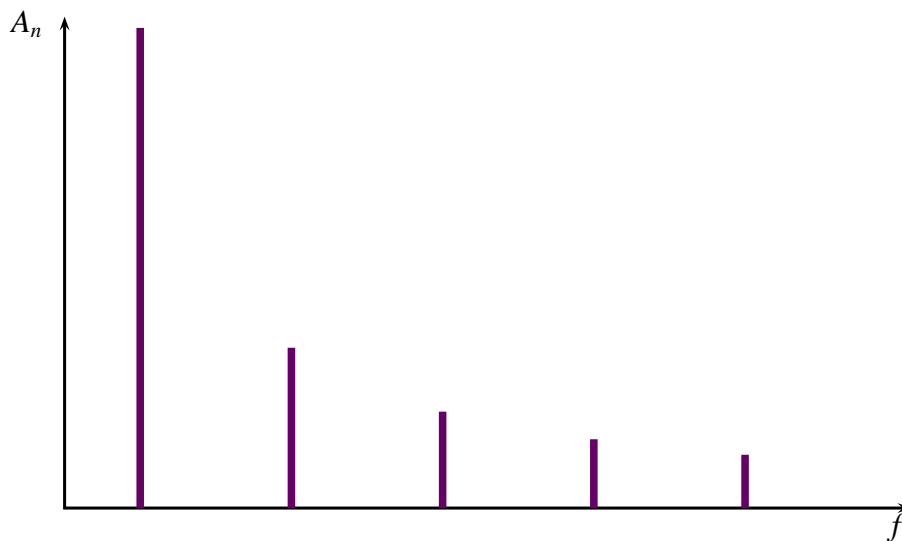
$$b_n(\text{carré impair}) = \frac{4E}{\pi(2p + 1)}$$

Par conséquent :

$$e(t) = 4E \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin(2p+1)\omega t}{(2p+1)\pi}$$

Representation spectrale :

p	0	1	2	3	4
n	1	3	5	7	9
$\frac{A_n}{E}$	1,273	0,424	0,255	0,182	0,141

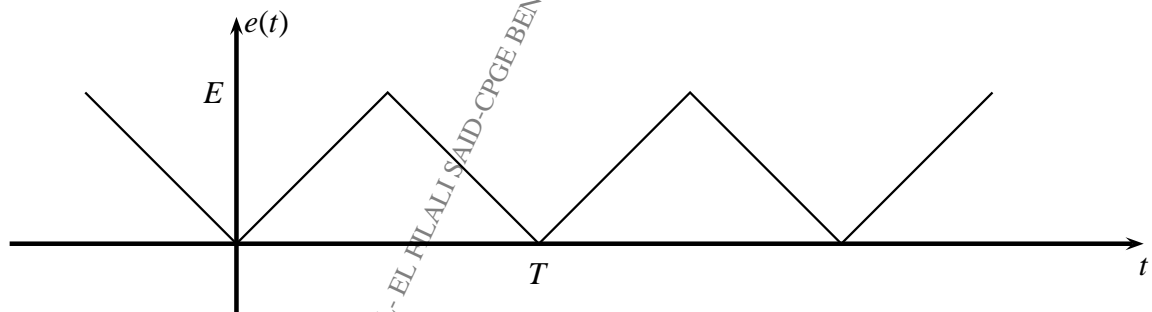


1.1.2.3 Signal carré pair

Conclusion:

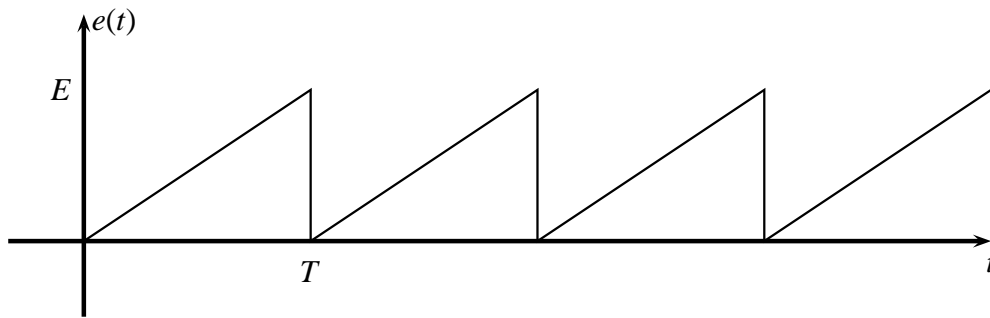
La parité du signal ne modifie pas le spectre de fréquence

1.1.2.4 Signal triangulaire pair de pentes symétriques



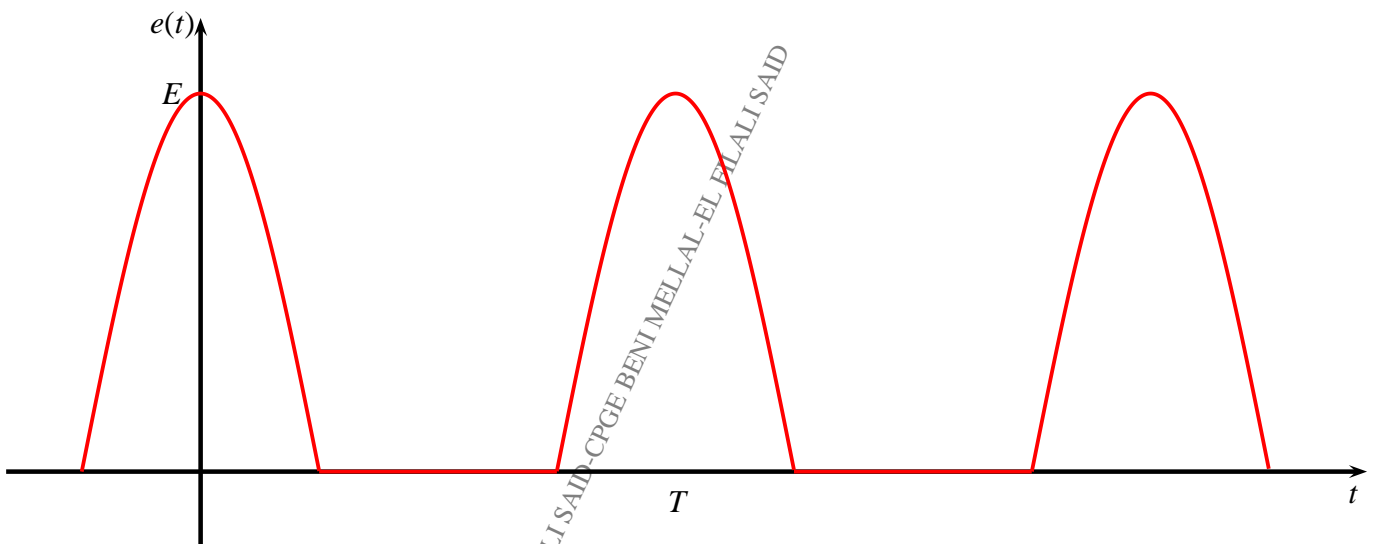
$$e(t) = E \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos[(2p+1)\omega t]}{(2p+1)^2} \right)$$

1.1.2.5 Signal dent de scie



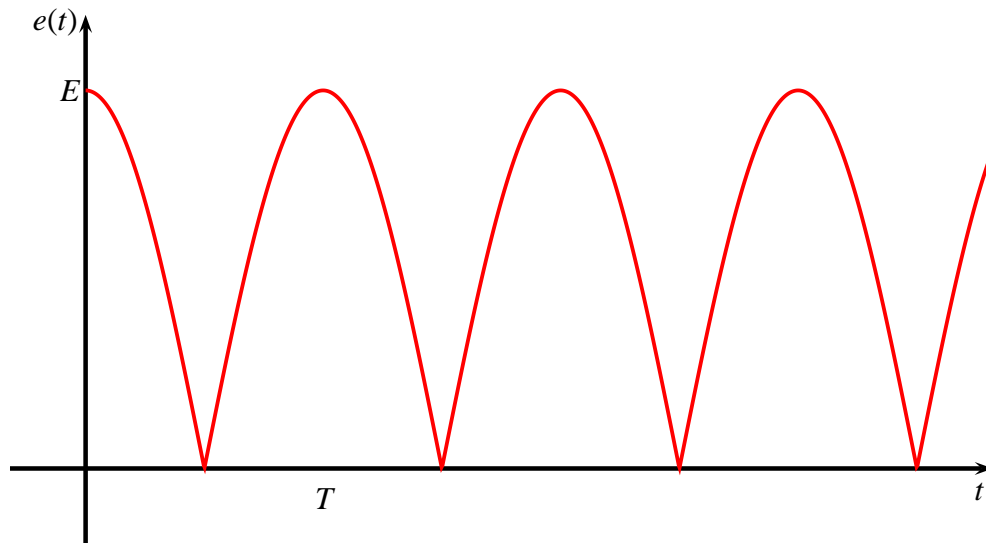
$$e(t) = E \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\omega t)}{n} \right)$$

1.1.2.6 Signal sinusoidal pair redressé monoalternance



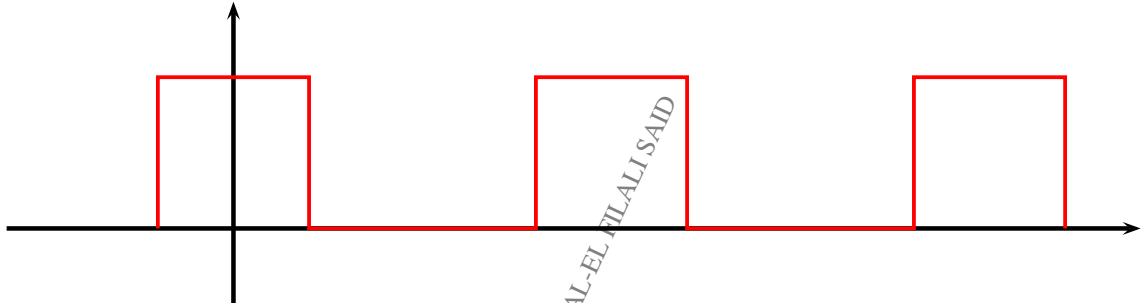
$$e(t) = E \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos(\omega t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(2n\omega t)}{4n^2 - 1} \right)$$

1.1.2.7 Signal sinusoidal pair redressé doublealternance



$$e(t) = E \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n\omega t)}{4n^2 - 1} \right)$$

1.1.2.8 Signal rectangulaire pair de rapport cyclique α quelconque



$$e(t) = E \alpha \left(1 + 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha\pi)}{n\alpha\pi} \cos(n\omega t) \right)$$

1.1.3 L'aspect énergétique

En général les grandeurs énergétiques (énergie ou puissance) sont proportionnelle au carrée de la grandeur physique $g(t)$ ($\frac{1}{2}kx^2$; $\frac{1}{2}mv^2$; $\frac{1}{2}cU^2$; Ri^2 ; $\frac{1}{2}Li^2 \dots$) par conséquent

$$\langle g^2 \rangle = a_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad (\text{Parseval})$$

Donc chaque terme harmonique de rang n ($a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$) a une puissance $|c_n|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$.

Il en résulte que la puissance du signal est la somme des puissance de chaque harmonique

1.2 Traitement d'un signal périodique par un système linéaire

1.2.1 Rappel

► Un circuit est linéaire si les tensions d'entrée $u_e(t)$ et de sortie $u_s(t)$ sont reliées par une équation différentielle linéaire.

Autrement dit si la tension d'entrée $u_e(t)$ est sinusoïdale de période T alors la tension de sortie $u_s(t)$ est sinusoïdale de période T .

► Si on appelle \underline{H} la fonction de transfert du circuit alors

$$\underline{U}_e(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \Rightarrow \underline{U}_s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}(jn\omega) c_n e^{jn\omega t}$$

► On rappelle les formes canoniques des fonctions de transferts des filtres usuelles :

- Filtre passe bas du premier ordre

$$\underline{H} = \frac{H_o}{1 + jx}$$

Intégrateur aux hautes fréquences.

- Filtre passe haut du premier ordre

$$\underline{H} = H_o \frac{jx}{1 + jx}$$

Dérivateur aux basses fréquences.

- Filtre passe bas du deuxième ordre

$$\underline{H} = \frac{H_o}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

- Filtre passe haut du deuxième ordre

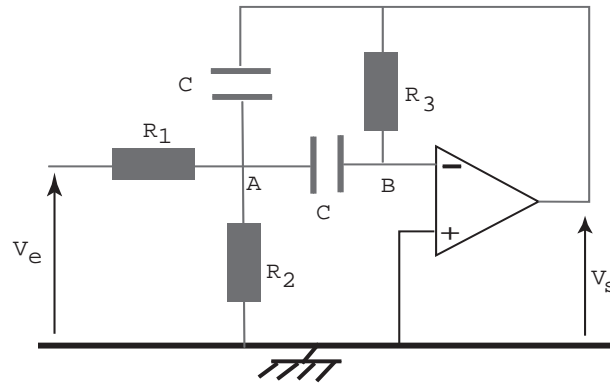
$$\underline{H} = H_o \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

- Filtre passe bande

$$\underline{H} = H_o \frac{jx/Q}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

1.2.2 Application 1 : CNC 2009 Filière MP

On considère le circuit à amplificateur opérationnel de la figure suivante.



L'amplificateur opérationnel est alimenté par une source de tension symétrique (non représentée) $\pm V_{cc} = \pm 15$ V. On suppose que l'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire.

On suppose ensuite que le signal v_e appliqué à l'entrée du circuit est sinusoïdal de pulsation ω .

① Étudier le comportement asymptotique du montage aux basses fréquences, puis aux hautes fréquences et déduire la nature du filtre.

② Appliquer le théorème de Millmann aux nœuds A et B et déduire deux relations entre v_s , v_A et v_e .

③ Montrer que la fonction de transfert du circuit s'écrit sous la forme $\underline{H} = \frac{H_o}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$, avec $x = \frac{\omega}{\omega_o}$.

Exprimer H_o , Q et ω_o en fonction de R_1 , R_3 , $R'_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ et C .

④ Dans quel domaine de fréquences ce circuit présente-t-il un caractère intégrateur? dérivateur? Exprimer $v_s(t)$ en fonction de $v_e(t)$ dans chacun des deux cas.

⑤ Définir, puis calculer les pulsations de coupure à $-3dB$ en fonction de ω_o et Q . En déduire la largeur de la bande passante du filtre.

⑥ Application numérique : on donne $H_o = -1$, $Q = 20$ et $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = 3$ kHz. Calculer la largeur de la bande passante en **fréquence** du filtre.

⑦ On pose $\underline{H} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$.

7.1 Déterminer le module $H(\omega)$ et l'argument $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert \underline{H} .

7.2 Montrer que $H(\omega)$ passe par un maximum pour une valeur ω'_o de ω que l'on exprimera. Tracer l'allure de $H(\omega)$.

On applique à l'entrée du montage de la figure précédente, un signal $v_e(t)$ de fréquence $f = \frac{1}{T} = 3$ kHz et d'amplitude $E = 5$ V.

⑧ Le signal appliqué est donné par $v_e(t) = E \sin(2\pi f t)$. En tenant compte des caractéristiques numériques du filtre, donner l'expression du signal $v_s(t)$ obtenu en sortie du circuit.

- 9 Le signal appliqué maintenant est un signal créneau dont on donne le DSF :

$$v_e(t) = \frac{E}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2E}{(2p+1)\pi} \sin(2\pi(2p+1)ft)$$

9.1 Donner la représentation temporelle de la tension d'entrée.

9.2 Donner l'allure du spectre en fréquence du signal $v_e(t)$?

9.3 En tenant compte des caractéristiques numériques du filtre , donner l'expression du signal $v_s(t)$ observé en sortie du circuit.

Correction

1 Le comportement asymptotique du montage :

- Aux basses fréquences : $v_s(t) = 0$ (la maille $(V_s; R_3; \varepsilon)$)
- Aux hautes fréquences : $v_s(t) = 0$ (la maille $(V_s; A; B; \varepsilon)$)
- La nature du filtre : Filtre actif passe-bande.

2 Le théorème de Millmann aux :

- Nœud A :

$$\underline{V}_A = \frac{\underline{V}_e + jC\omega R_1 \underline{V}_s}{\frac{R_1}{R'_3} + 2jC\omega R_1} \quad (a)$$

- Nœud B :

$$\underline{V}_B = 0 = \frac{\underline{V}_A}{\underline{Z}_c} + \frac{\underline{V}_s}{R_3} \Rightarrow \underline{V}_A = -\frac{1}{jCR_3\omega} \underline{V}_s \quad (b)$$

3 La fonction de transfert : Dans (a) on remplace \underline{V}_A par son expression dans (2), on en déduit que :

$$\underline{H} = \frac{-\frac{R_3}{2R_1}}{1 + j\frac{CR_3\omega}{2} + \frac{1}{j2R'_3C\omega}} = \frac{-\frac{R_3}{2R_1}}{1 + j\frac{CR_3x\omega_o}{2} + \frac{1}{j2R'_3Cx\omega_o}}$$

On tire donc que :

- Le coefficient d'amplification statique

$$H_o = -\frac{R_3}{2R_1}$$

- La pulsation propre :

$$\omega_o = \frac{1}{C\sqrt{R_3R'_3}}$$

- Le facteur de qualité :

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_3}{R'_3}}$$

4

- En H.F ($\omega \rightarrow \infty$ ou $x \rightarrow \infty$) :

$$\underline{H} \simeq \frac{H_o \omega_o}{Q} \frac{1}{j\omega} \Rightarrow v_s(t) \simeq \frac{H_o \omega_o}{Q} \int v_e(t) dt$$

Donc intégrateur en H.F.

- En B.F ($\omega \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow 0$) :

$$\underline{H} \simeq \frac{H_o}{Q \omega_o} j\omega \Rightarrow v_s(t) \simeq \frac{H_o}{\omega_o Q} \frac{dv_e(t)}{dt}$$

Donc dérivateur en B.F.

5

- Les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 sont définies par :

$$H(\omega = \omega_{1,2}) = \frac{|H_{max}|}{\sqrt{2}} \quad \text{ou bien} \quad G_{dB}(\omega = \omega_{1,2}) = G_{max} - 3dB$$

Les pulsations de coupure à $-3dB$ en fonction de ω_o et Q .

$$\omega_{min} = \frac{\omega_o}{2} \left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \right) \quad ; \quad \omega_{max} = \frac{\omega_o}{2} \left(\frac{1}{Q} + \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \right)$$

On conclut que :

$$\omega_{max} - \omega_{min} = \Delta\omega = \frac{\omega_o}{Q}$$

La largeur de la bande passante du filtre : $\Delta\omega = \frac{\omega_o}{Q}$.

6

- Application numérique :

$$\Delta f = \frac{f_o}{Q} \Rightarrow \Delta f = 150 \text{ Hz}$$

7

- On pose $\underline{H} = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$.

7.1

- Le module $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{|H_o|}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}}$$

- L'argument $\varphi(\omega)$:

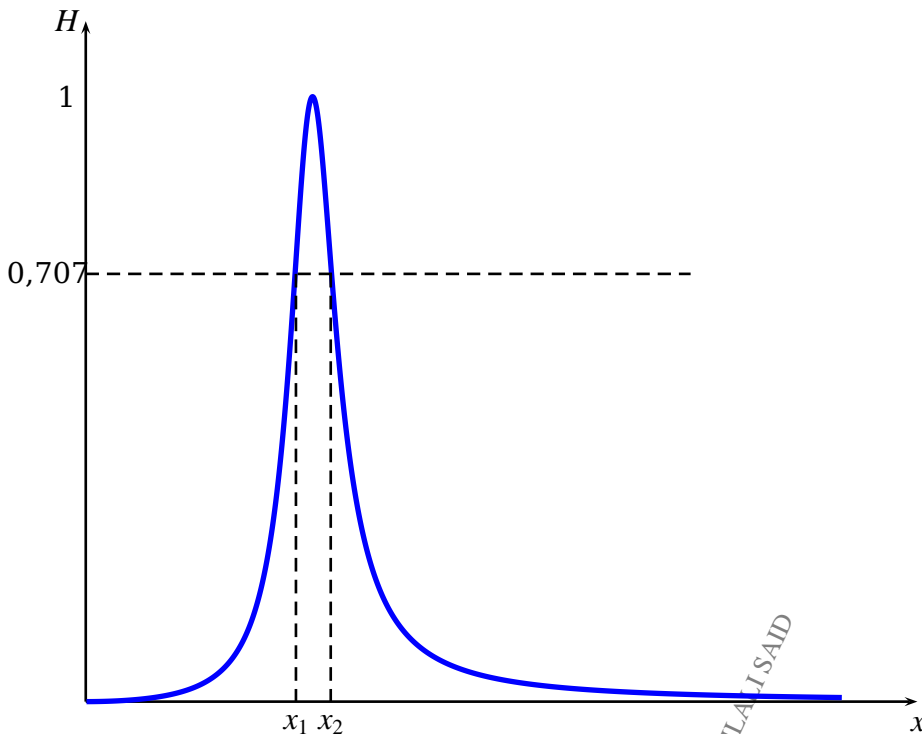
$$\varphi = \pi - \arg(1 + jQ(x - 1/x))$$

7.2 $H(\omega)$ passe par un maximum si $\frac{H(\omega)}{d\omega} = \frac{H(\omega)}{dx} \frac{d\omega}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{H(\omega)}{dx} = 0$

- $\frac{H(\omega)}{dx} = 0 \Rightarrow 2Q^2(x - 1/x)(1 + 1/x^2) = 0$ comme $x > 0$ alors H est maximal pour

$$x = 1 \Rightarrow \omega'_o = \omega_o$$

- L'allure de $H(x)$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_o}$.



8 Puisque le signal d'entrée est sinusoïdal alors le signal de sortie est aussi sinusoïdal et par conséquent $v_s(t) = V_s \sin(2\pi f t + \varphi)$ avec :

- $V_s = H(f = f_o)E \Rightarrow V_s = 5 \text{ V}$
- $\varphi(f = f_o) = \pi - \arg(1) = \pi$

$$v_s(t) = 5 \sin(6000\pi t + \pi) = -5 \sin(6000\pi t)$$

9 La tension d'entrée est une combinaison linéaire des tensions de fréquences variables $f \in \{0, f_o, 3f_o, 5f_o\}$.

Puisque le filtre est un filtre passe-bande de fréquence centrale est $f = f_o = 3 \text{ kHz}$ et de bande passante $\Delta f = 150 \text{ Hz}$ alors ce filtre ne laisse passer que les tensions sinusoïdales de fréquence situé dans l'intervalle $[f_1, f_2]$ c'est à dire la tension dont la fréquence est f_o d'où avec $H(f = f_o) = 1$ et $\varphi(f = f_o) = \pi$

$$v_s(t) = \frac{2E}{\pi} \sin(2\pi f t + \pi)$$

1.3 Étude de quelques oscillateurs permanents. Limite du modèle linéaire

1.3.1 Multivibrateur astable à amplificateur opérationnel :

(A) On considère le montage de la figure 1 représentant un amplificateur opérationnel idéal associé à deux résistances R_1 et R_2 . On appelle U_{sat} et $-U_{sat}$ les deux tensions de saturation positive et négative en sortie de l'amplificateur opérationnel.

On notera : $k = \frac{R_1}{R_2 + R_1}$.

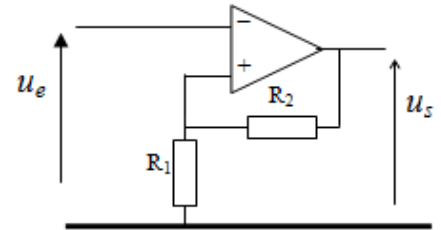


Figure 1

1 On admet que l'A.O fonctionne en régime saturé ($u_s = \pm U_{sat}$). Déterminer les valeurs de U_{e+} et U_{e-} les valeurs de u_e lorsque la sortie u_s prend les valeurs U_{sat} et $-U_{sat}$.

2 En déduire la caractéristique de transfert donnant la tension de sortie en fonction de la tension d'entrée : $u_s = f(u_e)$. On aura soin de préciser sur cette caractéristique les points particuliers et le sens du parcours sachant que u_e varie entre $-U_{em}$ et U_{em} avec $U_{em} > kU_{sat}$.

3 Quelle est la fonction réalisée par ce montage.
On ajoute au montage de la figure 1 un condensateur de capacité C et une résistance R pour obtenir le montage de la figure 2.

4 Montrer que l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension de $u_e(t)$ en fonction de la tension $u_s(t)$ et de la constante de temps $\tau = RC$ s'écrit :

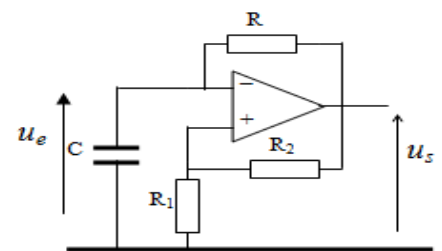


Figure 2

$$\tau \frac{du_e}{dt} + u_e = u_s \quad (1.1)$$

5 En supposant que la valeur initiale de la tension $u_e(t)$ est nulle et que la tension de sortie $u_s(t)$ est égale à U_{sat} , résoudre l'équation (1) en donnant l'expression de la tension $u_e(t)$.

6 Tracer sur le même graphe, les variations de $u_e(t)$, $u_s(t)$ et U_{e+} ; en déduire t_o l'instant de commutation de la sortie (change de signe).

7 Sachant que pour $t > t_o$ on a $u_s(t) = -U_{sat}$; résoudre l'équation (1) en prenant l'origine des temps t_o ($t_o = 0$).

8 Représenter sur le même graphe $u_e(t)$; U_{e+} , U_{e-} et $u_s(t)$ entre $t = 0$ et $t > t_o$.

9 En déduire que t_1 l'instant de commutation s'écrit : $t_1 = \tau \ln \frac{1+k}{1-k}$.

10 Pour $t > t_1$ résoudre l'équation (1) en prenant t_1 comme origine des temps.

11 En déduire t_2 l'instant de commutation et vérifier que $t_1 = t_2$.

12 On pose $T = t_1 + t_2$ la période du signal de sortie et admet que les commutations en sortie de l'A.O sont instantanées, dessiner sur le même graphe l'allure des signaux $u_s(t)$ et $u_e(t)$ entre $t = 0$ et $2T$.

13 En déduire alors la fréquence f du signal de sortie $u_s(t)$.

(B) On considère maintenant le montage de la figure 3 construit autour de deux A.O idéaux de même tensions de saturation U_{sat} , On admet que le premier A.O est en régime saturé et le deuxième en régime linéaire.

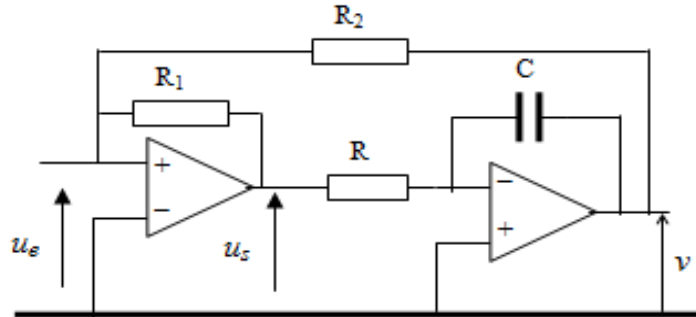


Figure 3

14 Déterminer la relation entre $u_s(t)$ et v puis en déduire la fonction mathématique réalisée par le second AO associé aux éléments R et C .

15 On suppose ce fonctionnement parfait. Donner l'équation différentielle reliant les tensions $u_s(t)$ et v en fonction de la constante du temps $\tau = RC$.

16 En utilisant le théorème de Millman, déterminer l'équation reliant la tension $u_s(t)$ aux tensions $u_s(t)$ et v en fonction uniquement de R_1 et R_2 .

17 Pour quelles valeurs V_0 et $-V_0$ de v le premier AO voit-il sa tension de sortie $u_s(t)$ basculer de $-U_{sat}$ à $+U_{sat}$ ou de $+U_{sat}$ à $-U_{sat}$.

18 Compte tenu de la réponse précédente, quelle condition doit respecter les résistances R_1 et R_2 pour que le montage puisse fonctionner.

Cette condition est supposée vérifier dans la suite dans la suite du problème.

19 On choisit un instant initial tel que $v = V_0$ et $u_s(t) = U_{sat}$ et l'on suppose toujours les commutations de l'AO sont instantanées. Tracer sur un même graphique la forme temporelle des tensions $v(t)$ et $u_s(t)$.

20 Montrer que la fréquence des signaux est $f' = \frac{R_1}{4RR_2C}$.

21 Quelles améliorations a-t-on apportées par rapport au montage précédent.

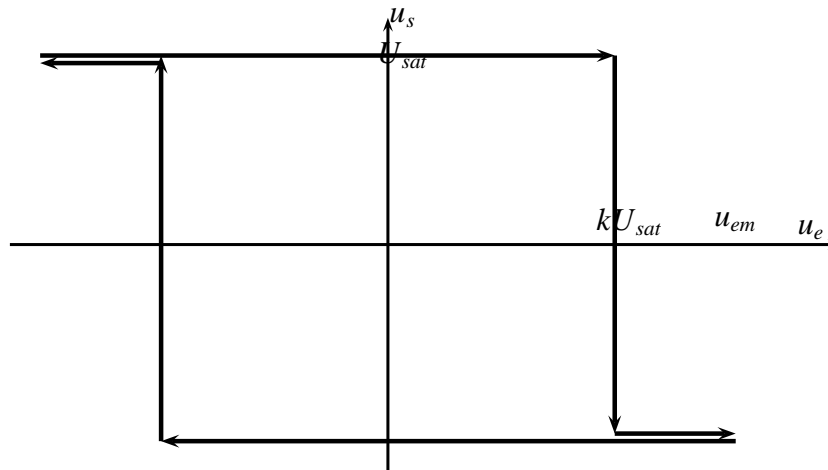
22 A.N : on choisit un condensateur de capacité $C = 10\text{nF}$, la tension de saturation $U_{sat} = 12\text{V}$. Donner des valeurs numériques raisonnables aux trois résistances R_1 , R_2 et R pour que le montage puisse délivrer en $v(t)$ une tension d'amplitude 6V avec une fréquence réglable entre 100 Hz et 10 kHz.

Correction

1 On applique diviseur de tension on obtient

$$U_{e^+} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{sat} = k U_{sat} ; \quad U_{e^-} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{sat} = -k U_{sat}$$

2 La caractéristique de transfert est :



3 Comparateur avec seuil.

4 La loi des mailles avec $q = Cu_e$ on obtient avec convention récepteur :

$$-u_e + Ri = u_s \Rightarrow \tau \frac{du_e}{dt} + u_e = u_s$$

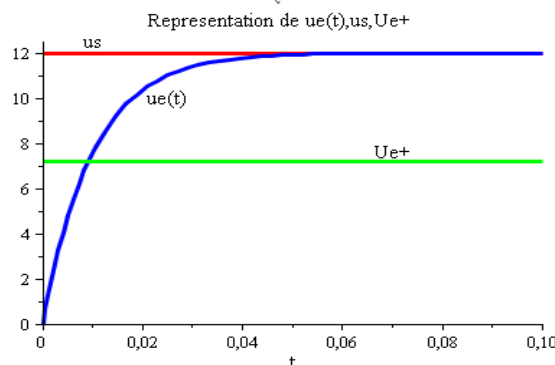
5 Avec $u_e(0) = 0$ et $u_s(0) = U_{sat}$, on obtient

$$u_e(t) = U_{sat}(1 - e^{-t/\tau})$$

6 Ce régime dure tant que $u_e(t) < kU_{sat}$

$$u_e(t_0) = kU_{sat} = U_{sat}(1 - e^{-t_0/\tau}) \Rightarrow t_0 = -\tau \ln(1 - k)$$

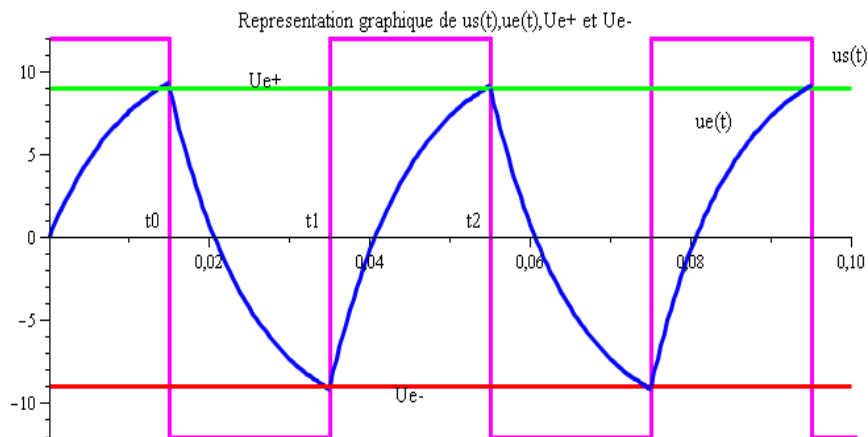
Représentation graphique



7 On a : $\frac{du_e}{dt} + \frac{1}{\tau}u_e = -\frac{1}{\tau}U_{sat}$ avec les conditions initiales à $t = 0 \Rightarrow u_e(0) = kU_{sat}$ on obtient

$$u_e(t) = U_{sat}((1 + k)e^{-t/\tau} - 1)$$

Représentation graphique

**8**

$$u_e(t_1) = -U_{em} = -kU_{sat} = U_{sat}((1+k)e^{-t_1/\tau} - 1) \Rightarrow t_1 = \tau Ln \frac{1+k}{1-k}$$

9 $\frac{du_e}{dt} + \frac{1}{\tau}u_e = \frac{1}{\tau}U_{sat}$ avec les conditions initiales : $u_e(t_1) = -kU_{sat}$ on obtient :

$$u_e(t) = U_{sat}(1 - (1+k)e^{\frac{t}{\tau}} - 1)$$

10 A $t = t_2$ on a : $u_e(t_2) = kU_{sat}$ donc

$$u_e(t_2) = U_{em} = kU_{sat} = U_{sat}(1 - (1+k)e^{-t_2/\tau}) \Rightarrow t_2 = \tau Ln \frac{1+k}{1-k} = t_1$$

11 Voir figure précédente.

12 13- La fréquence f est donnée par

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\tau Ln \frac{1+k}{1-k}}$$

B

13 Millmann donne :

$$\underline{v_-} = 0 = jC\omega \underline{v_-} + \frac{U_s}{R} \Rightarrow v = -\frac{1}{RC} \int u_s(t) dt$$

Donc intégrateur.

14 On a :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{RC}u_s \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}u_s = 0$$

15 Millmann donne :

$$u_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{u_s}{R_1} + \frac{v}{R_2} \right)$$

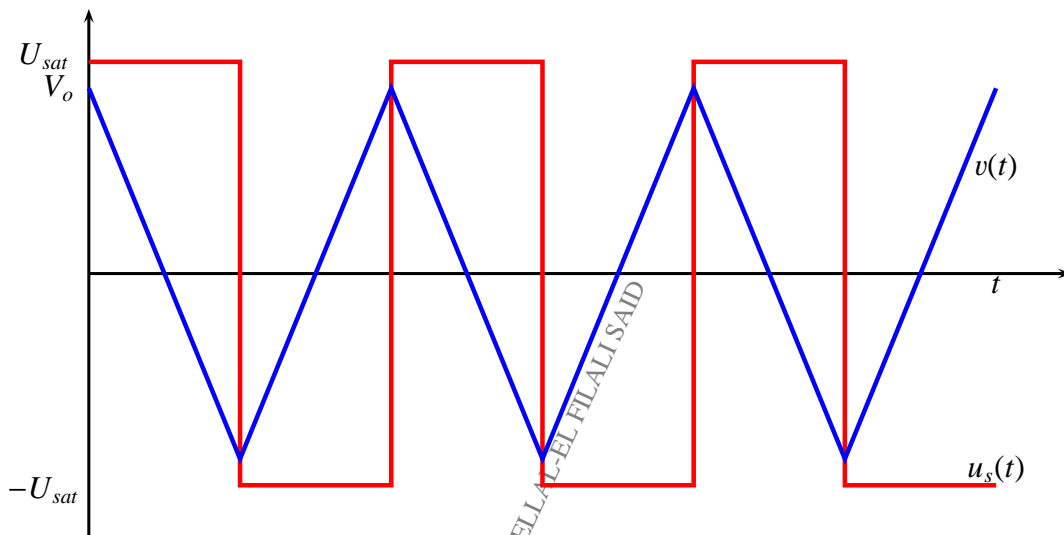
16 u_s bascule si $\varepsilon_o = u_e - 0 = 0$ donc $v = -\frac{R_2}{R_1} u_s$ par conséquent

$$V_0 = \frac{R_2}{R_1} U_{sat}$$

17 $V_0 < U_{sat} \Rightarrow R_2 < R_1$

18 Représentation graphique avec les conditions initiales $v(0) = V_0$ et $u_s(0) = U_{sat}$: on a

$$v = -\frac{1}{RC} \int u_s(t) dt \Rightarrow v = \begin{cases} -\frac{U_{sat}}{RC} t + V_0 \\ \frac{U_{sat}}{RC} t + cte \end{cases}$$



19 La période du signal triangulaire est $T' = 2t_1$ avec $t_1 = \frac{2\tau V_0}{U_{sat}}$ on tire donc que :

$$T' = 4RC \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow f' = \frac{R_1}{4RCR_2}$$

20 Le 2^{ème} montage fournit un signal carré et un signal triangulaire de même période et d'amplitude différente par contre le 1^{er} seulement un signal carré.

21 On a $V_0 = 6V$; $U_{sat} = 12V$ Or $V_0 = \frac{R_2}{R_1} U_{sat} \Rightarrow R_1 = 2R_2$

Par conséquent $f' = \frac{1}{2 \cdot 10^{-8} R}$ et donc

$$\begin{cases} f' = 100Hz \Rightarrow R = 500K\Omega \\ f' = 10KHz \Rightarrow R = 5K\Omega \end{cases}$$

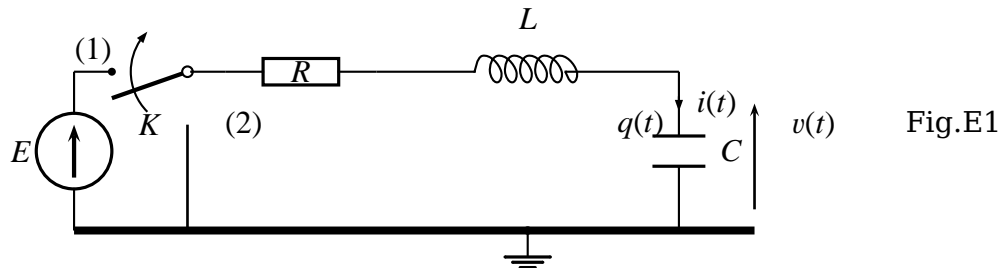
R est un potentiomètre dont la résistance varie entre $5k\Omega$ et $500K\Omega$.

1.3.2 Oscillateur quasi-sinusoidal

1.3.2.1 Oscillateur a résistance négative

ENSAM 1996 OPTION T

(A) Régimes transitoires d'un circuit RLC On considère le montage ci dessous (Fig. E1). L est l'inductance d'une bobine parfaite, C est la capacité d'un condensateur, R est la résistance totale du circuit, K est un interrupteur et E un générateur parfait de tension continue.



On appelle :

- $q(t)$, la charge du condensateur à l'instant t ,
- $i(t)$, l'intensité dans le circuit à l'instant t ,
- $v(t)$, la tension aux bornes du condensateur à l'instant t .

3.2.1.1 En tenant compte des conventions indiquées sur le schéma, écrire les relations entre $q(t)$ et $v(t)$, entre $q(t)$ et $i(t)$ et entre $i(t)$ et $v(t)$.

3.2.1.2 Le condensateur est initialement déchargé. A l'instant $t = 0$, on ferme K en position (1).

3.2.1.3 Établir l'équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants à laquelle satisfait $v(t)$ en fonction de E , ω_o et m avec $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$ et $m = \frac{R}{2L\omega_o}$.

3.2.1.3.1 Sans résoudre l'équation différentielle, montrer qu'il existe, selon les valeurs de m , deux régimes d'évolution possibles de la tension $v(t)$.

3.2.1.3.2 On définit la résistance critique comme étant la résistance du circuit correspondant à la limite entre ces deux régimes d'évolution. Exprimer cette résistance critique notée R_C en fonction de L et C .

3.2.1.3.3 Application numérique : $R = 100 \Omega$, $L = 40 \text{ mH}$, $C = 1 \mu\text{F}$. Calculer ω_o , m et R_C .

Dessiner l'allure de la variation de $v(t)$ en fonction de t .

Dans la suite du problème, on gardera les valeurs numériques ci dessus.

3.2.1.4 Lorsque le régime transitoire a disparu, on met K en position (2) et on prend cet instant comme nouvelle origine des temps.

3.2.1.4.1 Établir l'équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants à laquelle satisfait $v(t)$.

3.2.1.4.2 La solution générale de cette équation différentielle est

$$v(t) = A_1 \exp(a_1 t) + A_2 \exp(a_2 t)$$

Exprimer a_1 et a_2 en fonction de ω_o et m .

3.2.1.4.3 En considérant les conditions initiales, exprimer les constantes d'intégration A_1 et A_2 en fonction de E , ω_o et m .

3.2.1.4.4 On pose $\omega = \omega_o \sqrt{1 - m^2}$ et $\tan \theta = \frac{m\omega_o}{\omega}$. Démontrer que $v(t) = K \exp(-m\omega_o t) \cos(\omega t - \theta)$. Exprimer K . Représenter $v(t)$ en mettant en évidence K et l'enveloppe exponentielle de $v(t)$.

3.2.1.4.5 Décrire les échanges d'énergie au cours de la décharge du condensateur.

(B) Oscillateur LC

L'amplificateur opérationnel utilisé dans le circuit qui suit est parfait et fonctionne en régime linéaire. Les circuits d'alimentation ne sont pas représentés.

3.2.1.5 On réalise l'élément de circuit AB (Fig. E2.a) équivalent au dipôle D (Fig. E2.b).

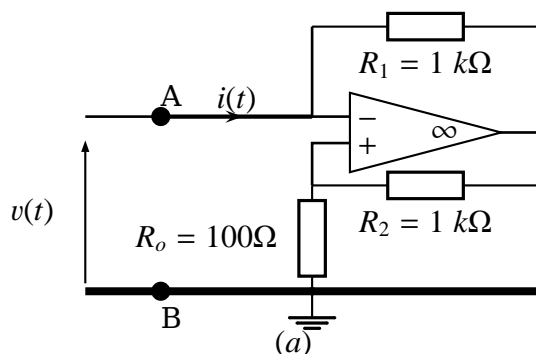
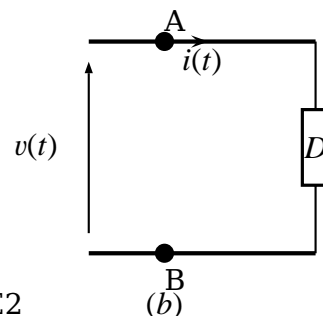


Fig.E2



3.2.1.5.1 Montrer qu'on peut écrire $v(t) = -Ri(t)$ et exprimer R en fonction de R_o , R_1 et R_2 . Calculer numériquement R .

3.2.1.5.2 On souhaite relever la caractéristique $i = f(v)$ de ce dipôle à l'aide d'un oscilloscope. Pour ce faire, on l'attaque avec une tension sinusoïdale alternative d'amplitude 1V crête à crête. Établir le schéma du montage.

Dessiner la caractéristique de D. On admettra qu'on peut placer la masse et les voies de mesure de l'oscilloscope en tout point du montage.

Dans quel mode de déviation horizontale doit on mettre l'oscilloscope ?

3.2.1.6 Le condensateur possède une charge initiale. On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ et on observe la tension aux bornes du condensateur. Dire qualitativement ce qu'on observe. D'où vient l'énergie dissipée dans la résistance R ?

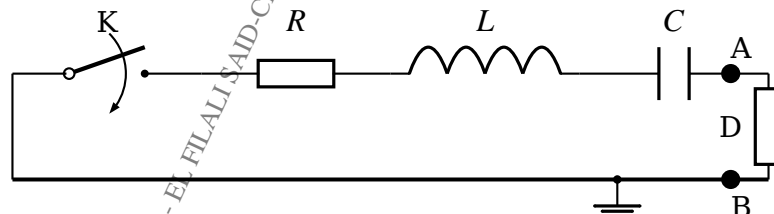


Fig.E3

Correction

(A) Régimes transitoires d'un circuit RLC

3.2.1.1 D'après les conventions d'orientation du schéma, il est clair que : $q =$

$$Cv; i = \frac{dq}{dt} \text{ et par conséquent : } i = C \frac{dv}{dt}$$

3.2.1.2

3.2.1.2.1

En utilisant la loi des mailles sur le circuit entier, on obtient $E = Ri + L \frac{di}{dt} + v$, soit en utilisant les relations précédentes de façon à éliminer le courant, et avec les notations de l'énoncé :

$$\ddot{v} + 2m\omega_o \dot{v} + \omega_o^2 v = \omega_o^2 E$$

3.2.1.2.2

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle sans second membre est :

$$r^2 + 2m\omega_o r + \omega_o^2 = 0$$

Le discriminant réduit vaut : $\Delta' = (m^2 - 1)\omega_o^2$ avec m positif ou nul d'après l'énoncé. On a donc trois cas suivant le signe de Δ' :

► soit $m > 1 \Rightarrow \Delta' > 0$ et les racines sont réelles négatives : $r = \omega_o(m \pm \sqrt{m^2 - 1}) < 0$: on a un **régime apériodique**.

► soit $m < 1 \Rightarrow \Delta' < 0$ et les racines sont complexes avec une partie réelle négative : on a un **régime pseudo-périodique**.

► soit $m = 1 \Rightarrow \Delta' = 0$ et on a une racine double négative : $r = -\omega_o < 0$: on a un **régime critique**.

3.2.1.2.3

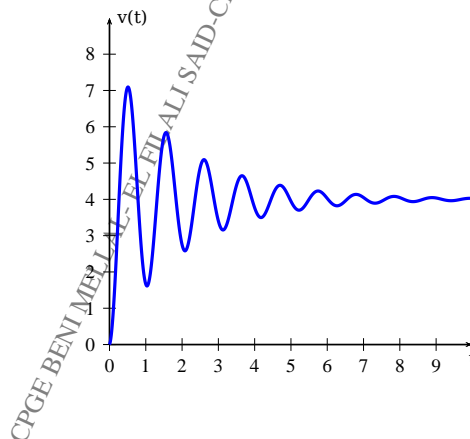
résistance critique correspond à $\Delta' = 0$ c'est-à-dire $m = 1$ d'où : $R_c = 2L\omega_o = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

3.2.1.2.4

A.N : $m = 0,25 \Rightarrow$ régime pseudopériodique

- La pulsation propre $\omega_o = 5000 \text{ rad.s}^{-1}$.
- La résistance critique $R_c = 400 \Omega$
- la charge $q(t)$ du condensateur étant une fonction continue on a $q = 0$ d'où $v = 0$,
- le courant $i(t)$ traversant la bobine étant une fonction continue on a $i = 0$ d'où $\dot{v} = 0$,
- quand $t \rightarrow \infty \Rightarrow v \rightarrow E$.

obtient une courbe dont l'allure est la suivante :



3.2.1.3

3.2.1.3.1 Le générateur a disparu du circuit, l'équation différentielle est donc la même que précédemment avec $E = 0$:

$$\ddot{v} + 2m\omega_o \dot{v} + \omega_o^2 v = 0$$

3.2.1.3.2 L'équation caractéristique associée puisque $m = 0,25 < 1$. On a donc deux racines complexes que l'on note a_1 et a_2 :

$$a_1 = -m\omega_o + i\omega_o \sqrt{1 - m^2} \quad ; \quad a_2 = -m\omega_o - i\omega_o \sqrt{1 - m^2}$$

3.2.1.3.3 Au nouvel instant initial, la charge q du condensateur vaut $q = CE$, et le courant i traversant la bobine est nul. En effet, le régime transitoire ayant disparu, le condensateur s'est chargé (sous la tension E) ce qui a eu pour effet de « couper » le courant (le condensateur se comportant alors comme un interrupteur ouvert). Comme précédemment q et i sont des fonctions continues et cela impose : $v = E$ et $\dot{v} = 0$ à $t = 0$. D'où : $A_1 + A_2 = E$ et $A_1 a_1 + A_2 a_2 = 0$. Soit, en résolvant ce système de deux équations à deux inconnues et en remplaçant a_1 et a_2 par leurs valeurs :

$$A_1 = \left[1 - \frac{im}{\sqrt{1 - m^2}} \right] \frac{E}{2} \quad \text{et} \quad A_2 = \left[1 + \frac{im}{\sqrt{1 - m^2}} \right] \frac{E}{2}$$

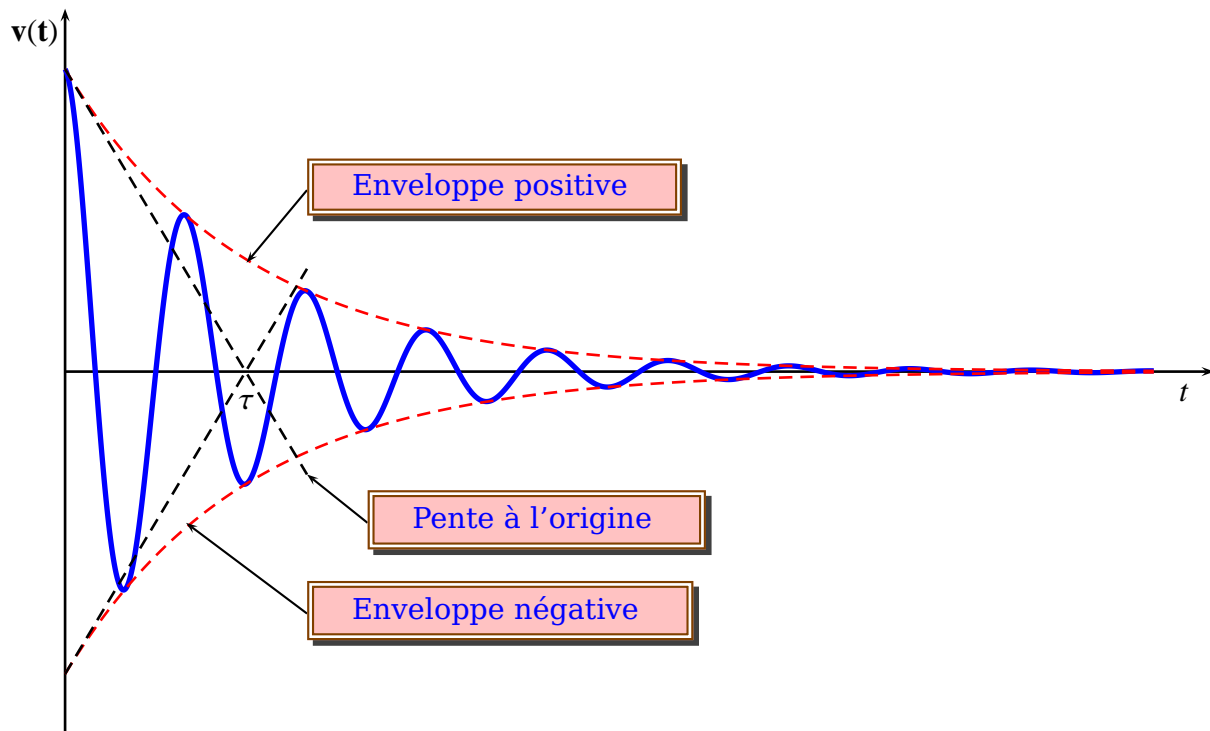
3.2.1.4 On a $\tan \theta = \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$, donc en remplaçant dans les expressions de A_1 et A_2 et en reportant dans celle de v , on trouve :

$$v = (1 - i \tan \theta) \frac{E}{2} \exp(-m\omega_o t) \exp(i\omega t) + (1 + i \tan \theta) \frac{E}{2} \exp(-m\omega_o t)$$

On développe les exponentielles complexes et on a :

$$v = \frac{E}{\cos \theta} \exp(-m\omega_o t) [\cos \theta \cos \omega t + \sin \theta \sin \omega t]$$

alors en comparant avec la relation donnée dans l'énoncé, on trouve : $k = \frac{E}{\cos \theta}$.
La courbe correspondante est :



B Oscillateur LC

3.2.1.4.1 L'A.O. fonctionnant en régime linéaire et étant parfait, on peut affirmer que les courants de polarisation sont nuls, donc il passe un courant i dans R_1 et on appellera i' le courant traversant à la fois R_2 et R_o , et par ailleurs, la tension entre les deux entrées (+ et -) de l'A.O. nulle. Si on utilise la loi des mailles entre A, les deux entrées de l'A.O. B, on obtient : $v = R_o.i'$ et pour la maille « faisant le tour de l'A.O. » on trouve : $R_1 i + R_2 i' = 0$ soit, après élimination de i' : $v = -\frac{R_o R_1}{R_2}$, donc après identification, on a :

$$R = \frac{R_o R_1}{R_2} = 100\Omega$$

. On a ici un « **montage à résistance négative** ».

3.2.1.4.2 Afin de tracer la caractéristique $i = f(v)$ de ce montage, on doit mesurer sur la voie Y une tension proportionnelle au courant, on prend donc la tension aux bornes de la résistance R_1 comme l'indique le montage ci-dessous. On mesure alors $X = -v$ et $Y = -R_1.i$. Si on passe en XY (ou Lissajou) on obtient donc $-R_1.i$ en fonction de $-v$, c'est-à-dire $R_1.i$ en fonction de v . Le facteur R_1 vaut 1000 d'où le calibre utilisé sur la voie Y. On voit alors sur l'oscilloscope la trace ci-dessous :

3.2.1.4.3 Le circuit RLC est celui du premier paragraphe avec $R = 100\Omega$. La loi des mailles nous donne donc, en supposant que l'A.O. fonctionne en régime linéaire,

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} - Ri = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \omega_o^2 q = 0$$

La solution est donc sinusoïdale de pulsation ω_o : $q = A \cos(\omega_o t + \varphi)$. Or à $q(t=0) \neq 0 \Rightarrow A \neq 0$. **On observe donc des oscillations sinusoïdales dans le circuit. L'énergie dissipée par la résistance provenant des alimentations +15V/-15V de l'A.O.**

En fait, on a un oscillateur de Van der Pol qui va faire passer alternativement l'A.O. du régime linéaire au régime saturé, les oscillations dans le circuit étant alors quasi-sinusoïdales.

1.3.2.2 Oscillateur de Wien : CNC 2012 Filière TSI

1.3.3 Oscillateur de Van Dear Pol

L'oscillateur de Van Dear Pol est un modèle mathématique destiné à représenter un oscillateur pour lequel un terme non linéaire permet de stabiliser l'amplitude ; son équation :

$$\ddot{x} - a\omega(1 - (\frac{x}{x_1})^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

- avec a, ω et x_1 sont des réels positifs non nuls.
- ω : fixe l'échelle des temps (période temporelle)
- x_1 : fixe l'échelle des amplitudes
- a : conditionne l'importance du terme non linéaire $a\omega(\frac{x}{x_1})^2\dot{x}$ en effet :

♣ $|x| \ll x_1 \Rightarrow \ddot{x} - a\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0$

$\Delta = \omega(a-2)(a+2)$ Oscillation pseudopériodique donc $\Delta < 0 \Rightarrow a < 2$

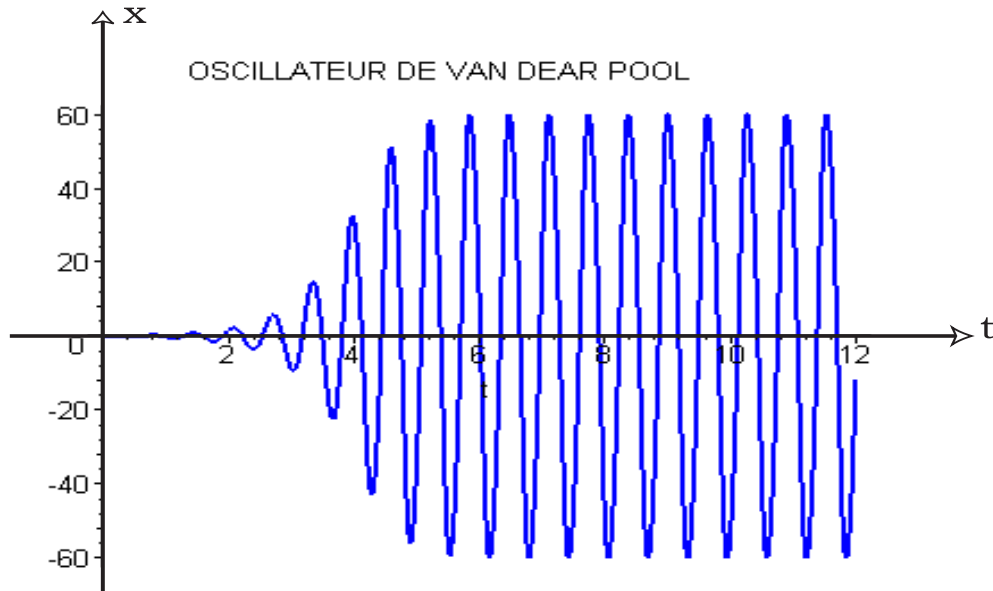
L'amplitude croît exponentiellement

♣ $|x| < x_1 \Rightarrow$ le terme $[-a\omega(1 - (\frac{x}{x_1})^2)] < 0 \Rightarrow$ **Amplification**

♣ $|x| > x_1 \Rightarrow$ le terme $[-a\omega(1 - (\frac{x}{x_1})^2)] > 0 \Rightarrow$ **Amortissement**

D'où le terme devant \dot{x} joue un rôle régulateur

Pour $a = 3$, $\omega = 10$, $x_1 = 30$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ la résolution numérique (voir séance de Maple) donne la représentation suivante :



Remarque- 2 :

$$X_m = 2x_1$$

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

Deuxième partie

MÉCANIQUE

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

2.1 CINÉMATIQUE DU SOLIDE

2.1.1 Définition d'un solide

On appelle un corps solide (S) si la distance entre deux points quelconque du solide A et B est constante

$$(S) = \text{solide} \implies \forall (A, B) \in S ; \|\vec{AB}\| = \text{cte}$$

Remarque- 3 :

Si la distance entre les deux points A et B est variable on dit que le système est déformable.

2.1.2 Barycentre d'un solide. Repère barycentrique

On définit le centre de masse ou barycentre d'un solide (S) par :

$$\iiint_{(S)} \vec{GM} dm = \vec{0}$$

Soit O un point quelconque de \mathcal{R} et sachant que $\vec{GM} = \vec{OM} - \vec{OG}$ alors en posant m la masse totale du solide on obtient

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \iiint \vec{OM} dm$$

En dérivant la relation obtenue par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} on obtient

$$\vec{V}_{(G/\mathcal{R})} = \frac{1}{m} \iiint \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} dm$$

De même

$$\vec{a}(G/\mathcal{R}) = \frac{1}{m} \iiint \vec{a}(M/\mathcal{R}) dm$$

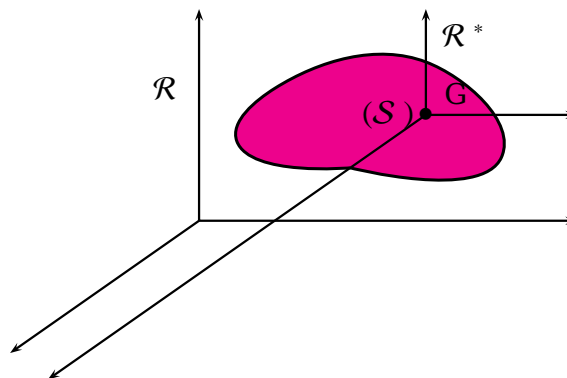
On en déduit que la quantité de mouvement totale du solide est

$$\vec{P}(S/\mathcal{R}) = \iiint \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm \Rightarrow \vec{P}(S/\mathcal{R}) = m \vec{V}(G/\mathcal{R})$$

On retient que : La quantité du mouvement du solide est équivalente à la quantité d'un point matériel G (centre de masse) affecté de la masse totale du solide.

On définit le repère barycentrique $\mathcal{R}_B = \mathcal{R}^* = \mathcal{R}_G$ le repère d'origine le centre de masse G et dont les axes restent constamment parallèles à ceux de \mathcal{R} c'est à dire

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_G/\mathcal{R}) = \vec{0}$$



Remarque- 4 :

- Le centre de masse appartient à l'intersection des plans de symétrie.
- Le centre de masse est confondu avec le centre de symétrie.
- Pour un système discret

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{OM}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Application 1 :

1 Déterminer la position du centre de masse G des courbes homogènes suivantes :

- 1.1** Fil linéique homogène de masse m et de longueur l
- 1.2** Demi-cercle de rayon R .
- 1.3** Quart de cercle de rayon R .
- 1.4** Demi disque de masse m et de rayon R
- 1.5** Cône de révolution homogène, de masse M , de hauteur h , dont la base est un disque de rayon R . (On commence par la détermination du volume)

1.6 Plaque rectangulaire homogène de masse m et de longueur a et de largeur b .

2 Déterminer les vecteurs \vec{GA} et \vec{GB} d'un bipoint $A(m_A)$ et $B(m_B)$ tel que $\vec{AB} = \vec{r}$.
Discuter le cas où $m_A \gg m_B$.

Correction - Correction

1 Détermination de la position du centre de masse G des courbes homogènes suivantes :

1.1 Fil linéique homogène de masse m et de longueur l

$$\vec{OG} = \frac{1}{2}l\vec{e}_x$$

1.2 Demi-cercle de rayon R d'axe de symétrie \vec{e}_y .

$$\vec{OG} = \frac{2R}{\pi}\vec{e}_y$$

1.3 Quart de cercle de rayon R .

$$\vec{OG} = \frac{2R}{\pi}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

1.4 Demi disque de masse m et de rayon R d'axe de symétrie \vec{e}_y .

$$\vec{OG} = \frac{4R}{3\pi}\vec{e}_y$$

1.5 Plaque rectangulaire homogène de masse m et de longueur a et de largeur b .

$$\vec{OG} = \frac{1}{2}(a\vec{e}_x + b\vec{e}_y)$$

1.6 Cône de révolution homogène, de masse M , de hauteur h , dont la base est un disque de rayon R . (On commence par la détermination du volume)

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow \vec{OG} = \frac{1}{4}h\vec{e}_z$$

2 Détermination des vecteurs \vec{GA} et \vec{GB} d'un bipoint $A(m_A)$ et $B(m_B)$ tel que $\vec{AB} = \vec{r}$

$$\vec{GA} = -\frac{m_B}{m_A + m_B}\vec{r} \quad ; \quad \vec{GB} = \frac{m_A}{m_A + m_B}\vec{r}$$

Discussions du cas où $m_A \gg m_B$.

$$\vec{GA} = -\frac{m_B}{m_A + m_B}\vec{r} \rightarrow \vec{0} \quad ; \quad \vec{GB} = \frac{m_A}{m_A + m_B}\vec{r} \rightarrow \vec{r}$$

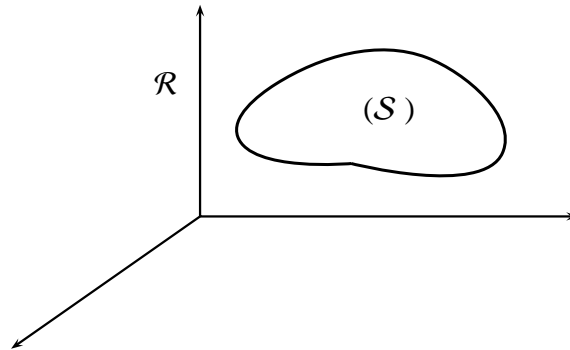
Le barycentre s'approche toujours du corps le plus lourd.

2.1.3 Cinématique du solide

Soit (S) un solide et \mathcal{R} un référentiel .

Puisque (S) est indéformable alors $\forall (A, B) \in S \Rightarrow \|\vec{AB}\| = cte$

c'est à dire $\vec{AB}^2 = cte \Rightarrow \frac{d\vec{AB}^2}{dt/\mathcal{R}} = 0$



Sachant que $\frac{d\vec{AB}^2}{dt/\mathcal{R}} = 2\vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt/\mathcal{R}}$

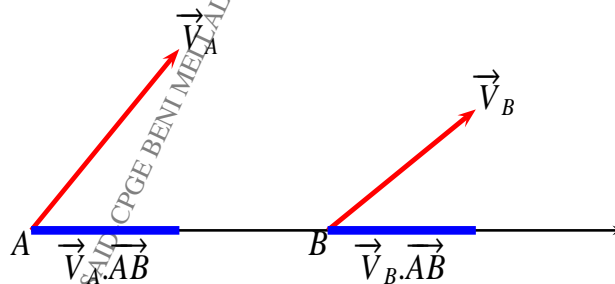
Or $\frac{d\vec{AB}}{dt/\mathcal{R}} = \vec{V}(B/\mathcal{R}) - \vec{V}(A/\mathcal{R})$.

Il en résulte que

$$\vec{AB} \cdot \vec{V}(B/\mathcal{R}) = \vec{AB} \cdot \vec{V}(A/\mathcal{R})$$

le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif

Et par conséquent le champ des vitesses d'un solide est un torseur.



En effet :

Appliquons la relation de dérivation vectorielle d'un vecteur avec \mathcal{R}' le référentiel lié au solide S :

$$\frac{d\vec{AB}}{dt/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{AB}}{dt/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{AB} \Rightarrow \vec{V}(B/\mathcal{R}) - \vec{V}(A/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{AB}$$

C'est à dire

$$\vec{V}(A/\mathcal{R}) = \vec{V}(B/\mathcal{R}) + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$$

2.1.4 Mouvement d'un solide

2.1.4.1 mouvement de translation

On dit que le mouvement du solide S est une translation si tous les points ont même vitesse quelque soit le temps t , c'est à dire

$$(S) \text{ en translation} \Rightarrow \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

C'est à dire que $\vec{V}(A/\mathcal{R}) = \vec{V}(B/\mathcal{R}) \Rightarrow \vec{a}(A/\mathcal{R}) = \vec{a}(B/\mathcal{R}) \forall t$

Exemple :

- Translation rectiligne.
- Translation circulaire.

2.1.4.2 mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Δ est l'axe de rotation ; posons $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_\Delta$.

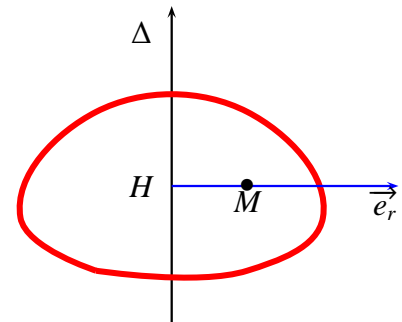
On en déduit que $\forall O \in \Delta, \vec{V}(O) = \vec{0}$

Pour tout point M de S , il existe un point H projection de M sur Δ .

Posons $HM = r$; le mouvement de M est une rotation pure autour de Δ , et donc sa trajectoire est circulaire (de centre H et de rayon r) :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(O/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{HM} = r\omega \vec{e}_\theta$$



2.1.4.3 Description du mouvement instantanée le plus général d'un solide

Soit Δ une droite telle que à l'instant t Δ représente l'axe de rotation $\Delta = \Delta(t)$ (l'axe de viration) et H la projection de M sur Δ .

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(H) + \vec{\Omega} \wedge \vec{HM}$$

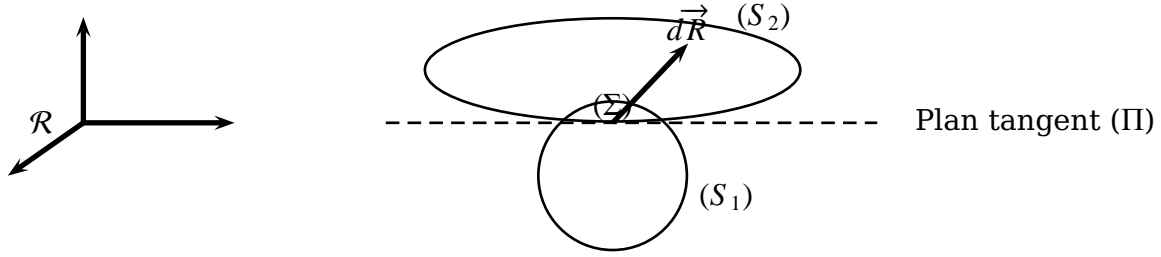
Donc le mouvement est une rotation autour de $\Delta(H, HM)$ et le point H est animé d'un mouvement suivant Δ .

on conclut que le mouvement général est helicoidal.

2.2 MODÉLISATION DES EFFORTS ENTRE SOLIDES EN CONTACT

2.2.1 Solide en contact

Considérons deux solides S_1 et S_2 en contact sur une petite surface plane (Σ) et en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} , et I un point quelconque de (Σ).



Soit I un point de Σ ; On peut décomposer la force élémentaire $d\vec{R}$ exercé par S_1 sur S_2 en deux forces de contact tel que

$$\vec{R} = \iint_{\Sigma} d\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$

\vec{T} : force de frottement de glissement. Elle appartient au plan tangent Π .
 \vec{N} : réaction normale à Π .

Le moment de cette force en I est :

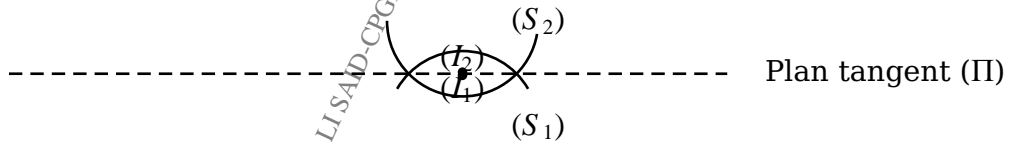
$$\vec{M}_{I,contact} = \iiint \vec{IM} \wedge d\vec{R}(M) = \vec{M}_{I,t} + \vec{M}_{I,n}$$

Avec :

- ▶ $\vec{M}_{I,t}$ moment de frottement de roulement. $\vec{M}_{I,t} \in$ au plan tangent Π .
- ▶ $\vec{M}_{I,n}$ moment de frottement de pivotement. $\vec{M}_{I,n} \perp \Pi$.

2.2.2 Vitesse de glissement

On suppose pour la suite que le contact est ponctuel c'est à dire que $\Sigma \rightarrow I$ appelé point géométrique



- ▶ Soit I_2 un point du solide S_2 qui coïncide à l'instant t avec le point géométrique I .
 - ▶ Soit I_1 un point du solide S_1 qui coïncide à l'instant t avec le point géométrique I .
- On appelle vitesse de glissement de solide S_2 par rapport à S_1

$$\vec{V}_g(I) = \vec{V}(I_2) - \vec{V}(I_1)$$

Remarque- 5 :

- La vitesse de glissement est vitesse relative.
- La vitesse de glissement ne dépend pas du référentiel. En effet :

Soit \mathcal{R}' un autre référentiel et d'après la loi de composition des vitesses on :

$$- \vec{V}(I_2/R) = \vec{V}(I_2/\mathcal{R}') + \vec{V}(O'/R) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/R) \wedge \vec{OI}_2$$

$$- \vec{V}(I_1/R) = \vec{V}(I_1/\mathcal{R}') + \vec{V}(O'/R) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/R) \wedge \vec{OI}_1$$

- ce qui donne puisque $\vec{I_1 I_2} = \vec{0}$

$$\vec{V}(I_2/R) - \vec{V}(I_1/R) = \vec{V}(I_2/\mathcal{R}') - \vec{V}(I_1/\mathcal{R}') \Rightarrow \vec{V}_g(\mathcal{R}) = \vec{V}_g(\mathcal{R}')$$

- la vitesse de glissement appartient au plan tangent Π .
- On peut écrire la vitesse de glissement $\vec{V}_g = \vec{V}(I_2/S_1)$

On dit que le mouvement de (S_2) est sans glissement si la vitesse de glissement est nulle

$$\vec{V}_g = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(I_2) = \vec{V}(I_1)$$

Si le solide (S_1) est fixe dans \mathcal{R} alors $\vec{V}_g = \vec{V}(I_2/S_1) = \vec{0}$ cad que la vitesse du point I_2 est nulle par rapport au solide (S_1)

2.2.3 Vecteur rotation relative

Soient eux solides en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} .

On définit le vecteur rotation relative du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) par

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}) - \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R})$$

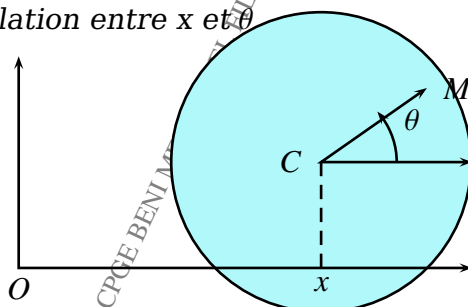
On décompose le vecteur rotation relative dans le plan tangent en

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}_T + \vec{\Omega}_N$$

- $\vec{\Omega}_T$ Vecteur rotation de roulement.
- $\vec{\Omega}_N$ Vecteur rotation de pivotement.

Application 2 :

On considère un disque de rayon R dont le centre C est repère par la coordonnée cartésienne x . La position d'un point M à la périphérie du disque est repérée par un angle θ par rapport à un axe de direction fixe. Le disque roule sans glisser sur un plan horizontal. Déterminer la relation entre x et θ



Que devient la relation précédente si le sol horizontal est remplacé par un tapis roulant se déplaçant à la vitesse $v_o \vec{e}_x$

Correction - Correction

$$1- \vec{OM} = x\vec{e}_x + R\vec{e}_y + R\vec{e}_r \Rightarrow \vec{V} = \dot{x}\vec{e}_x + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{V}_g = \vec{0} \Rightarrow \dot{x} + R\dot{\theta} = 0$$

$\Delta x = -R\Delta\theta$ le signe (-) traduit le fait que x et θ ont des sens opposés

$$2- \dot{x} + R\dot{\theta} = V_o \Rightarrow \Delta x + R\Delta\theta = V_o\Delta t$$

2.2.4 Lois de COULOMB pour le frottement de glissement

On admet les lois empiriques de COULOMB

① Loi de frottement « cinétique » : $\vec{V}_g \neq \vec{0}$ (présence de glissement)

La force de frottement \vec{T} possède les propriétés suivantes :

- ▶ $\vec{T} \wedge \vec{V}_g = \vec{0}$ cad $\vec{T} // \vec{V}_g$
- ▶ $\vec{T} \cdot \vec{V}_g = 0$ cad \vec{T} et \vec{V}_g ont des sens opposés
- ▶

$$T = fN$$

f ou μ coefficient de frottement de glissement caractérise la nature des surfaces en contact.

② Loi de frottement « statique » : $\vec{V}_g = \vec{0}$ (absence de glissement)

$$T \leq fN$$

2.2.5 La puissance totale des actions de contact

2.2.5.1 Expression de la puissance pour un solide

On rappelle que la puissance d'un point matériel animé par rapport à un référentiel d'une vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ soumis à la force \vec{F} est

$$\mathcal{P}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{F}$$

Pour un solide, on le décompose en des masses élémentaires (dm) centré en M dont la résultante des forces est $d\vec{F}$ donc

$$d\mathcal{P} = \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot d\vec{F}$$

Soit A un autre point du solide ; le torseur cinématique donne :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AM}$$

ce qui donne :

$$d\mathcal{P} = \vec{V}(A) \cdot d\vec{F} + (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM}) \cdot d\vec{F} \Rightarrow \mathcal{P}(S/\mathcal{R}) = \vec{V}(A/\mathcal{R}) \cdot \vec{F} + \iiint (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM}) \cdot d\vec{F}$$

Or $(\vec{\Omega} \wedge \vec{AM}).d\vec{F} = (\vec{AM} \wedge d\vec{F}).\vec{\Omega}$ Rappelons que

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge d\vec{F}$$

Le moment résultant

Il en résulte que la puissance du solide dans le référentiel \mathcal{R} s'écrit

$$\mathcal{P} = \vec{V}_{(A/\mathcal{R})}.\vec{F} + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}).\vec{\Omega}$$

Deux cas important à discuter :

- Mouvement de translation : Tous les point du solide ont même vitesse donc

$$\vec{\Omega} = \vec{0} \implies \mathcal{P}(S/\mathcal{R}) = \vec{V}_{(A)}.\vec{F} = \vec{V}_{(M)}.\vec{F}$$

- Mouvement de rotation pure autour d'un axe (Δ) : On choisit $A \in \Delta \implies \vec{V}_{(A)} = \vec{0}$ donc

$$\mathcal{P}(S/\mathcal{R}) = \vec{\mathcal{M}}_A.\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$$

2.2.5.2 Puissance totale des actions de contact

Soient deux solides en contact ponctuel avec $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ la résultante des forces de contact exercé par le solide (S_1) sur le solide (S_2).

La puissance de contact reçue par le solide (S_2) est :

$$\mathcal{P}_2 = \vec{R}.\vec{V}(I_2) + \vec{\mathcal{M}}_{I_2}.\vec{\Omega}_2$$

de même pour le solide (S_1) et d'après le principe de l'action et la réaction :

$$\mathcal{P}_1 = -\vec{R}.\vec{V}(I_1) + (-\vec{\mathcal{M}}_{I_1}).\vec{\Omega}_1$$

La puissance de contact totale est

$$\mathcal{P}_{T,\text{contact}} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \implies \mathcal{P}_{T,\text{contact}} = \vec{R}.\vec{V}(I_2) - \vec{R}.\vec{V}(I_1) + \vec{\mathcal{M}}_{I_1}.\vec{\Omega}_2 - \vec{\mathcal{M}}_{I_1}.\vec{\Omega}_1$$

Or :

$$- \vec{V}(I_2) - \vec{V}(I_1) = \vec{V}_g$$

$$- \vec{\mathcal{M}}_{I_1} = \vec{0} \text{ contact ponctuel}$$

Il en résulte que

$$\mathcal{P}_{T,\text{contact}} = \vec{R}.\vec{V}_g = \vec{T}.\vec{V}_g \quad (< 0)$$

Remarque- 6 :

Cas du roulement sans glissement

Dans le modèle du contact ponctuel, s'il y a roulement sans glissement, alors $\vec{V}_g = \vec{0}$ ainsi $\vec{\mathcal{M}}_{I_1} = \vec{0}$ donc

$$\text{Roulement sans glissement} \implies \mathcal{P}_{(T,\text{contact})} = 0$$

2.2.5.3 Modèle des liaisons parfaites

2.2.5.4 Définition

Une liaison est parfaite si la puissance de contact de cette liaison est nulle

2.2.5.5 Exemples

► Liaison glissière : C'est une liaison lors d'un mouvement de translation d'un solide par rapport à l'autre.

Si oz est l'axe de translation alors

$$\text{Liaison glissière} \Rightarrow R_z = \vec{R} \cdot \vec{e}_z = 0$$

► Liaison pivot : C'est une liaison lors d'un mouvement de rotation par rapport à un axe d'un solide par rapport à l'autre.

Si oz est l'axe de rotation alors :

$$\mathcal{P}_c = \vec{R} \cdot \vec{V}_g + \vec{\mathcal{M}}_I \wedge \vec{\Omega} = \vec{\mathcal{M}}_I \cdot \Omega \vec{e}_z \Rightarrow M_z = 0$$

$$\text{Liaison pivot} \Rightarrow M_z = 0$$

► Liaison rotule : C'est une liaison lors d'un mouvement de rotation par rapport à un point O d'un solide par rapport à l'autre.

Dans ce cas $\mathcal{P}_c = \vec{\mathcal{M}}_o \cdot \vec{\Omega} = 0$ quelque soit le vecteur $\vec{\Omega}$ donc

$$\text{Liaison rotule} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_o = \vec{0}$$

2.3 DYNAMIQUE D'UN SOLIDE

2.3.1 Théorème de la résultante cinétique

Soit un point M d'un solide de masse dm animé de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ avec \mathcal{R} un référentiel galiléen soumis à la force élémentaire $d\vec{F}$.

Appliquons la RFD dans \mathcal{R} galiléen :

$$dm \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} = d\vec{F} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\iiint_{(S)} \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm \right) = \iiint_{(S)} d\vec{F}$$

Si on pose : $\vec{F} = \iiint_{(S)} d\vec{F}$ la résultante des forces exercé sur le solide et sachant que :

$\iiint_{(S)} \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm = m\vec{V}(G/\mathcal{R})$ la quantité du mouvement du solide alors on obtient

$$\frac{d\vec{P}(S)}{dt} = m\vec{a}(G/\mathcal{R}) = \vec{F}$$

C'est le théorème de la résultante cinétique

Remarque- 7 :

Pour un solide isolé ou pseudo-isolé dans un référentiel galiléen alors le mouvement du centre de masse est rectiligne uniforme.

2.3.2 Le moment cinétique

2.3.2.1 Définition

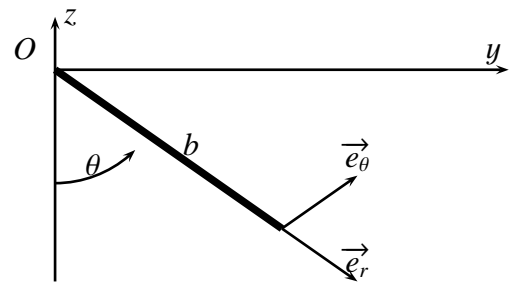
On décompose le solide en des points matériels ; chaque point M de masse dm est animé par rapport à un référentiel \mathcal{R} de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$.

Donc le moment cinétique du point M par rapport à un point A quelconque est : $d\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \vec{AM} \wedge (dm\vec{V}(M/\mathcal{R}))$ ce qui donne pour le solide

$$\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \iiint_{(S)} \vec{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm$$

Application 3 :

On considère une plaque rectangulaire a sur b , homogène, de masse M , d'épaisseur négligeable, qui oscille autour d'un axe horizontal Ox . Elle est attachée à cet axe par un de ses côtés de longueur a . La rotation de la plaque autour de Ox est repérée par l'angle $\theta(t)$. Le point O est au milieu du côté de longueur a . On utilisera la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ainsi que la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x)$.



- ① Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(P)$ d'un point P de la plaque en fonction de r (distance de P à Ox), θ et \vec{e}_θ .
- ② En déduire le vecteur quantité de mouvement \vec{P} de la plaque.
- ③ Déterminer la position du centre de masse G de la plaque. Vérifier que $\vec{P} = M\vec{V}(G)$.
- ④ Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}_o$ en fonction de M, a, b , et des vecteurs de base.
- ⑤ En déduire $\vec{\sigma}^*$. Vérifier l'homogénéité de son expression.

Correction - Correction

- 1- $\vec{OP} = x\vec{e}_x + r\vec{e}_r \Rightarrow \vec{V}(P/\mathcal{R}) = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
- 2- $\vec{P}(S/\mathcal{R}) = \iint_S \vec{OP} dm \Rightarrow \vec{P}(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}Mb\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
- 3- $\vec{V}(G/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}b\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{P}(S/\mathcal{R}) = M\vec{V}(G/\mathcal{R})$
- 4- $\vec{\sigma}_o = \iint \vec{OP} \wedge \vec{V}(P/\mathcal{R}) dm \Rightarrow \vec{\sigma}_o = \frac{1}{3}Mb^2\dot{\theta}\vec{e}_x$
- 5- $\vec{\sigma}_o = \vec{\sigma}^* + \vec{OG} \wedge M\vec{V}(G/\mathcal{R}) \Rightarrow \vec{\sigma}^* = \frac{1}{12}Mb^2\dot{\theta}\vec{e}_x$

2.3.2.2 Le torseur cinétique

Soit B un autre point quelconque donc :

$$\vec{\sigma}_B(M/\mathcal{R}) = \iiint_{(S)} \vec{BM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm.$$

- $\vec{\sigma}_B(M/\mathcal{R}) = \iiint_{(S)} \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm.$
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ ce qui donne

$$\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{P(S)} = \vec{\sigma}_B + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{V}(G/\mathcal{R})$$

Remarque- 8 :

1/ Dans le repère barycentrique \mathcal{R}^* on a :

$$\vec{\sigma}_A^* = \vec{\sigma}_B^* + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{P^*(S)} \Rightarrow \vec{\sigma}_A^* = \vec{\sigma}_B^* = \vec{\sigma}_G^* = \vec{\sigma}^*$$

On retient que le moment cinétique barycentrique ne dépend pas du point ou on le calcule (vecteur libre)

2/ De même on a si $B \equiv G$

$$\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_G + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{P(S)}$$

2.3.2.3 Le théorème de KENIG relatif moment cinétique

On a : $\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm.$

D'après la loi de composition des vitesses entre \mathcal{R} et \mathcal{R}^* on a :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \Rightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}) \Rightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}^* + \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}$$

Sachant que : $\vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \vec{\Omega} = \vec{0}$ alors

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{V}^*$$

Il en résulte que

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) dm + \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}^* dm$$

Puisque :

$$- \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}^* dm = \vec{\sigma}_A^*$$

$$- \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) dm = \iiint_S \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) dm + \underbrace{\iiint_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}) dm}_{\vec{0}}$$

Il en résulte que : (Théorème de KENIG relatif au moment cinétique

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}(G/\mathcal{R})$$

Remarque- 9 :

$$A \equiv G \Rightarrow \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}^*$$

Relation importante à retenir

2.3.3 L'énergie cinétique d'un solide

2.3.3.1 Définition l'énergie cinétique

on a $dE_c = \frac{1}{2} \vec{V}^2(M) dm$ donc

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}^2(M) dm$$

Application 4 :

Calculer l'énergie cinétique d'une barre (m, l) en rotation autour de son extrémité.

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{J}_\Delta \vec{\Omega}^2$$

Soit A un point quelconque du solide

le torseur cinématique donne $\vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$ ce qui donne

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}(M) \cdot (\vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) dm$$

ce qui donne

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \vec{V}(A) \cdot \iiint_S \vec{V}(M) dm + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M) dm$$

il en résulte que

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} [\vec{V}(A) \cdot \vec{P}(S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_A]$$

Cas particulier important : $A \equiv G$

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} [m \vec{V}^2(G) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_G] = \frac{1}{2} [m \vec{V}^2(G) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}^*]$$

2.3.3.2 Le théorème de KENIG relatif à l'énergie cinétique

Soit :

- $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ la vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R} .
- $\vec{V}^*(M)$ la vitesse du point M dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* .

Sachant que $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(G/\mathcal{R}) + \vec{V}^*(M)$ puisque $(\vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \vec{0})$

$$\text{Donc } \vec{E}_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}^2(G/\mathcal{R}) dm + \frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}^{*2}(M) dm + \iiint_S \vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}^*(M) dm$$

Comme :

- $\frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}^2(G/\mathcal{R}) dm = \vec{E}_c(G)$ l'énergie cinétique du barycentre affecté de la masse totale.

- $\frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}^{*2}(M) dm = \vec{E}_c^*$ l'énergie cinétique barycentrique.

$$- \iiint_S \vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}^*(M) dm = \vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot \iiint_S \vec{V}^*(M) dm = \vec{V}(G/\mathcal{R}) \cdot m \vec{V}(G/\mathcal{R}^*) = \vec{0}$$

D'où le théorème

$$\vec{E}_c(S/\mathcal{R}) = \vec{E}_c(G/\mathcal{R}) + \vec{E}_c(S/\mathcal{R}^*) = \vec{E}_c^* + \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G/\mathcal{R})$$

2.3.4 Le moment d'une force

On rappelle que le moment d'une force \vec{F} appliqué sur un point matériel (M, m) est

$$\vec{M}_O(F) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Pour un solide S soumis à la résultante des forces \vec{F}

$$\vec{M}_O(F) = \iiint_S \vec{OM} \wedge d\vec{F}$$

Avec $d\vec{F}$ la force élémentaire exercée sur le point M . On montre de même que

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{F}$$

Si la résultante des forces \vec{F} est nulle ; alors le système de forces est équivalent à un **couple**.

On appelle couple de forces un système de forces dont la résultante est nulle et le moment est non nul (indépendant du point).

Exemple : Calculer le moment de la résultante des forces exercée sur un dipôle électrostatique rigide par un champ extérieur uniforme .

Remarque- 10 :

Dans une liaison pivot (rotation autour d'un axe) :

- Si le couple présente le sens du mouvement : Couple moteur.
- Si le couple présente le sens contraire du mouvement : Couple frein.

2.3.5 Mouvement d'un solide autour d'un axe de direction fixe

2.3.5.1 Cinétique d'un solide ayant un point de vitesse nulle

On suppose que le solide (S) possède un point A tel que $\vec{V}(A/\mathcal{R}) = \vec{0}$; si non on fait l'étude dans le référentiel barycentrique et $A \equiv G$ et donc $\vec{V}(G/\mathcal{R}^*) = \vec{0}$

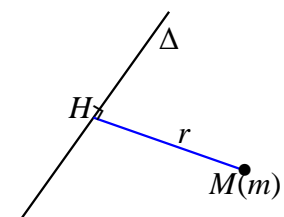
2.3.5.1.1 Le moment d'inertie. Théorème de Huygens .

2.3.5.1.1.1 Le moment d'inertie d'un point matériel M .

Soit Δ une droite et M un point matériel de masse m distant de $r = HM$ avec H la projection perpendiculaire de M sur Δ .

On appelle le moment d'inertie J_Δ du point M par rapport à Δ l'expression

$$J_\Delta = mr^2 \text{ (kg.m}^2\text{)}$$

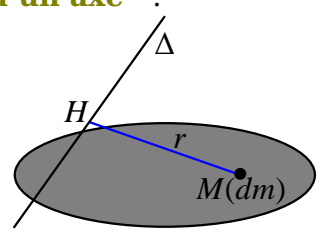


2.3.5.1.1.2 Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

On subdivise le solide en des points matériels élémentaire de masse dm et par conséquent

$$\mathbf{J}_\Delta = \iiint_{(S)} r^2 dm$$

Exemples : Voir photocopie

**2.3.5.1.1.3 Théorème de Huygens**

On a :

$$\mathbf{J}_\Delta = \iiint r^2 dm \Rightarrow \mathbf{J}_\Delta = \iiint \overrightarrow{HM}^2 dm$$

$$\text{Or } \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M}$$

$$\text{Donc } \mathbf{J}_\Delta = \iiint (\overrightarrow{HH'}^2 + \overrightarrow{H'M}^2) dm$$

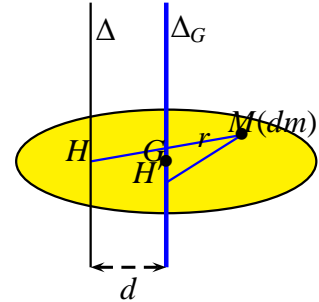
$$\Rightarrow \mathbf{J}_\Delta = \underbrace{\iiint \overrightarrow{HH'}^2 dm}_{md^2} + \underbrace{\iiint \overrightarrow{H'M}^2 dm}_{\mathbf{J}_{\Delta G}} + 2 \iiint \overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{H'M} dm$$

Puisque $\overrightarrow{H'M} = \overrightarrow{H'G} + \overrightarrow{GM}$ alors

$$\iiint \overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{H'M} dm = \iiint \underbrace{\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{H'G}}_{\perp} dm + \overrightarrow{HH'} \cdot \underbrace{\iiint \overrightarrow{GM} dm}_{=\vec{0} \text{ (déf de G)}} = 0$$

Il en résulte le théorème de HUYGENS :

$$\mathbf{J}_\Delta = \mathbf{J}_{\Delta G} + md^2$$

**2.3.5.1.2 Le moment cinétique**

$$\text{On a : } \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \iiint \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) dm$$

Puisque le solide est en rotation autour d'un axe Δ fixe

alors A est un point de Δ d'où :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} \Rightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$$

$$\text{Donc : } \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \iiint \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) dm$$

Sachant que $1 \wedge (2 \wedge 3) = 2(1.3) - 3(1.2)$ alors :

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \iiint (\overrightarrow{AM}^2 dm) \vec{\Omega} - \iiint \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{\Omega}) dm$$

Or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$ avec $\overrightarrow{AH} // \vec{\Omega} = \omega \vec{e}_\Delta$ et $\overrightarrow{HM} \perp \vec{\Omega}$ ainsi

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH} \vec{e}_\Delta$$

$$\vec{\sigma}_A = \left[\iiint \overrightarrow{AH}^2 \vec{\Omega} dm + \iiint \overrightarrow{HM}^2 \vec{\Omega} dm + 2 \iiint \underbrace{(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HM})}_{\perp} \vec{\Omega} dm \right] - \left[\iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{AH} dm + \iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} dm + \right.$$

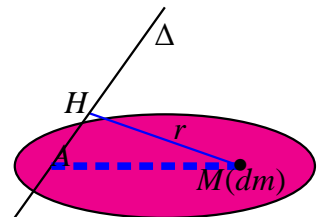
$$\left. \iiint \underbrace{(\overrightarrow{HM} \cdot \vec{\Omega})}_{\perp} \overrightarrow{AM} dm \right]$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_A = \iiint \overrightarrow{HM}^2 \vec{\Omega} dm + \iiint \overrightarrow{AH}^2 \omega \vec{e}_\Delta dm - \iiint \overrightarrow{AH}^2 \omega \vec{e}_\Delta dm - \iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} dm$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = (\iiint \overrightarrow{HM}^2 dm) \vec{\Omega} - \iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} dm$$

On pose

$$\mathbf{J}_\Delta = \iiint \overrightarrow{HM}^2 dm = \iiint r^2 dm \quad (m^2 kg)$$



Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe de rotation Δ

avec r la distance de M à l'axe Δ .

Donc

$$\iiint \overrightarrow{HM}^2 \vec{\Omega} \, dm = \mathbf{J}_{\Delta} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$$

Ainsi

$$\iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} \, dm = \iiint (\overrightarrow{AH} \omega) \overrightarrow{HM} \, dm = \vec{\sigma}_{A \perp \Delta}$$

Il en résulte que

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \mathbf{J}_{\Delta} \vec{\Omega} - \vec{\sigma}_{A \perp \Delta} = \mathbf{J}_{\Delta} \vec{\Omega} - \iiint (\overrightarrow{AH} \omega) \overrightarrow{HM} \, dm$$

On retient que : **Pour un solide en général le moment cinétique d'un solide par rapport à un point fixe A n'est pas colinéaire avec le vecteur instantané de rotation.**

Cas particuliers importants :

► Solide plan perpendiculaire à $\Delta \Rightarrow A \equiv H$ donc

$$\vec{\sigma}_A = \mathbf{J}_{\Delta} \vec{\Omega}$$

► Δ est un axe de symétrie matériel

$$\iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} \, dm = \vec{0}$$

2 à 2 s'annulent

On appelle σ_{Δ} la projection du moment cinétique en A sur l'axe Δ

$$\sigma_{\Delta} = \vec{\sigma}_A \cdot \vec{e}_{\Delta}$$

Donc

$$\vec{\sigma}_A = \mathbf{J}_{\Delta} \vec{\Omega} - \iiint (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} \, dm \Rightarrow \sigma_{\Delta} = \vec{\sigma}_A \cdot \vec{e}_{\Delta} = \mathbf{J}_{\Delta} \Omega$$

2.3.5.1.3 L'énergie cinétique

On a : $E_c = \frac{1}{2} \iiint \vec{V}^2(M) \, dm$

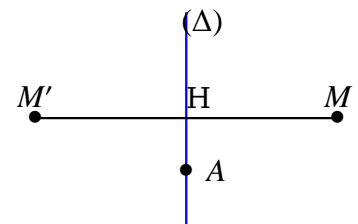
Or $\vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}$

Ainsi : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}$ ce qui donne $E_c = \frac{1}{2} \iiint (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \vec{\Omega}^2 \, dm$

Et puisque $\overrightarrow{HA} \parallel \vec{\Omega}$ alors

$$E_c = \frac{1}{2} \mathbf{J}_{\Delta} \omega^2$$

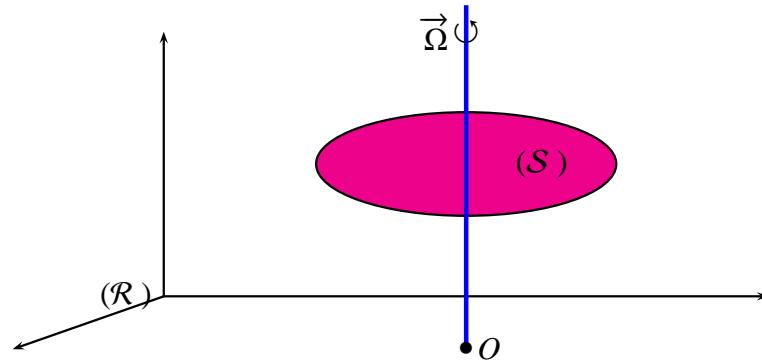
C'est l'énergie cinétique de rotation autour de l'axe Δ



2.3.5.2 Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen

Considérons un solide (S) en rotation **sans frottement**

2.3.5.2.1 Théorème scalaire du moment cinétique .



Soit O un point de Δ .

- ✓ $\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{0}$
- ✓ $\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}) = \mathbf{J}_\Delta \vec{\Omega} = \mathbf{J}_\Delta \omega \vec{e}_z$
- ✓ Le théorème du moment cinétique donne

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O\perp}}{dt/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt/\mathcal{R}} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext})$$

Ce qui donne l'équation différentielle

$$\mathbf{J}_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum \mathcal{M}_{Oz}$$

2.3.5.2.2 Théorème de l'énergie cinétique .

Calculons : $\frac{d\vec{E}_c}{dt}$

$$\frac{d\vec{E}_c}{dt} = \frac{1}{2} \iiint_S \frac{d\vec{V}^2}{dt} dm \Rightarrow \frac{d\vec{E}_c}{dt} = \iiint_S \vec{V}(M) \cdot d\vec{a}(M) dm$$

Or \mathcal{R} est galiléen donc $d\vec{a}(M) dm = d\vec{F}(M) = d\vec{F}_{ext} + d\vec{F}_{int}$ ce qui donne :

$$\frac{d\vec{E}_c}{dt} = \iiint_S \vec{V}(M) \cdot (d\vec{F}_{ext} + d\vec{F}_{int})$$

Puisque $\mathcal{P}_{int} = \iiint_S \vec{V}(M) \cdot d\vec{F}_{int} = 0$ d'après le principe des actions réciproques d'où

$$\frac{d\vec{E}_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext}$$

Théorème de la puissance cinétique

Par intégration on obtient le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta \vec{E}_c = \mathcal{W}_{ext}$$

2.3.5.2.3 Théorème de l'énergie mécanique

si on pose $\mathcal{W}_{ext} = \mathcal{W}_{ext}^C + \mathcal{W}_{ext}^{NC}$

Avec :

- \mathcal{W}_{ext}^C le travail des forces conservatives.
 - \mathcal{W}_{ext}^{NC} le travail des forces non conservatives.
- et puisque $\mathcal{W}_{ext}^C = -\Delta E_p$ alors

$$\Delta E_m = \Delta(\vec{E}_c + E_p) = \mathcal{W}_{ext}^{NC}$$

C'est le théorème de l'énergie mécanique

Remarque- 11 :

Si le système est conservatif alors $\mathcal{W}_{ext}^{NC} = 0$ alors l'énergie mécanique se conserve

$$\mathcal{W}_{ext}^{NC} = 0 \implies E_m = cte$$

2.4 Application : le pendule pesant (CNC 2014 MP P1)**Étude d'un pendule : CNC P1-2014**

1- Un référentiel R est dit galiléen s'il vérifie la première loi de Newton(principe d'inertie) :

Dans un référentiel R si un point matériel isolé ou pseudo-isolé et son mouvement par rapport à ce référentiel est rectiligne uniforme alors le référentiel R est galiléen

2- Le référentiel terrestre est un référentiel lié à la terre.

- L'expérience de pendule de Foucault.
- Si la durée de l'expérience est très négligeable devant la période de rotation de la terre autour d'elle même (un jour) alors on peut approximer le mouvement par une droite et par conséquent le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.

3- Liaison pivot parfaite de centre O est une liaison qui provoque un mouvement de rotation autour d'un axe passant par O sans frottement.

Conséquences :

- la vitesse de O est nulle $\vec{V}(O/R) = \vec{0}$.
- Le moment des forces projeté suivant oy est nul $M_{oy} = 0$.
- La puissance des forces de contact est nulle $\mathcal{P}_{contact} = 0$
- Le système est conservative et l'énergie mécanique est constante

4- Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation (Oy)

$$J_p = \frac{1}{3}m_T\ell^2 + \frac{1}{2}m_D(a^2 + 2\ell^2)$$

5- ▶ Le vecteur instantanée de rotation :

$$\vec{\Omega}(P/R) = \dot{\theta}\vec{e}_r$$

▶ Le vecteur position du barycentre

$$\vec{OG} = \frac{\ell}{2}\left(\frac{m_T + 2m_D}{m_T + m_D}\right)\vec{e}_r$$

▶ La vitesse du barycentre

$$\vec{V}(G/R) = \frac{\ell}{2}\left(\frac{m_T + 2m_D}{m_T + m_D}\right)\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

6-

▶ Les caractéristique de la poussée d'Archimède :

- Point d'application : barycentre C :
- Sens : vers le haut.
- Direction : verticale.
- Module $F_A = \rho_{air}gV_D$

▶ Comparons F_A et le poids P

$$\frac{F_A}{P} = \frac{\rho_{air}gV_D}{\rho_{Pendule}gV_D} = \frac{\rho_{air}}{\rho_{pendule}} \ll 1 \implies F_A \ll P$$

C'est à dire que la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids du disque.

7-

▶ Bilan des forces :

- \vec{P} le poids du pendule.
- \vec{R} réaction de l'axe.

▶ Le travail de chaque force :

- $W(\vec{R}) = 0$: liaison pivot parfaite.
- $W(\vec{P}) = \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(\cos\theta - \cos\theta_0)$

▶ T.E.C donne

$$\Delta E_c = W(\vec{R}) + W(\vec{P}) = -\Delta E_p \implies \Delta E_m = 0$$

Donc le système est conservatif.

▶ L'énergie potentielle

$$E_p = \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(1 - \cos\theta)$$

8-

► L'énergie cinétique(rotation autour de O)

$$E_c = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2$$

► L'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} g \ell (m_T + 2m_D)(1 - \cos \theta)$$

9- L'équation différentielle : Puisque le système est conservatif; donc par dérivation de l' énergie mécanique on obtient

$$J_p \ddot{\theta} + \frac{1}{2} g \ell (m_T + 2m_D) \sin \theta = 0$$

L'existence du terme $\sin \theta$ dans l'équation différentielle rend le système non linéaire.

10- TMC en O point fixe donne par projection suivant oy :

$$-\vec{\sigma}_o = J_p \dot{\theta} \vec{e}_y = \vec{\sigma}_{o||}$$

$$-\vec{M}_o(\vec{P}) = -(m_T + m_D)gOG \sin \theta \vec{e}_y$$

ce qui donne

$$\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt}_{/R} = \vec{M}_o(\vec{P}) + \vec{M}_o(\vec{R}) \Rightarrow J_p \ddot{\theta} + \frac{1}{2} g \ell (m_T + 2m_D) \sin \theta = 0$$

11- Le mouvement du pendule est oscillatoire si le système est dans un état lié

$$E_{pmin} = E_p(0) < E_m < E_{pmax} = E_p(\pi) \Rightarrow E_o = E_{pmax} = E_p(\pi) = g \ell (m_D + \frac{1}{2} m_T)$$

► Pour $E_m < E_o$ et puisque E_p est paire en fonction de θ alors il existe deux valeurs (dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$) θ_m et $-\theta_m$ telle que $0 < E_m < E_o$

► Expression de la période T :

On a : $E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} g \ell (m_T + 2m_D)(1 - \cos \theta)$ et puisque $E_m = cte = E_m(t = 0)$ donc

$$\frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} g \ell (m_T + 2m_D)(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} g \ell (m_T + 2m_D)(1 - \cos \theta_o)$$

Ce qui donne

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{g \ell (m_T + 2m_D)}{J_p}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_o}$$

ce qui donne

$$T = 4 \sqrt{\frac{J_p}{g \ell (m_T + 2m_D)}} \int_0^{\theta_o} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_o}}$$

12- ► Portrait de phase :

- Pour $E_m > E_o$ on a un mouvement de révolution autour de O.
- Position d'équilibre stable correspond au centre des courbes fermées.
- Position d'équilibre instable correspond à l'intersection des trajectoires de phases (croisement des courbes).

13- L'énergie potentielle est harmonique si $\theta(t)$ est harmonique (faibles oscillations)

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega_o t + \varphi)$$

Avec

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g\ell(m_T + 2m_D)}{2J_p}}$$

► La longueur du pendule synchrone L

Les deux pendules ont même périodes donc même pulsations propres et par conséquent

$$\frac{g}{L} = \frac{g\ell(m_T + 2m_D)}{2J_p} \Rightarrow L = \frac{2J_p}{\ell(m_T + 2m_D)}$$

14-

15- Courbe sinusoïdale dont l'amplitude décroît légèrement d'une façon exponentielle (et non linéaire) du à l'existence du frottement visqueux du à l'action de l'air sur le disque .

► Régime d'évolution : Pseudo-périodique.

16-

16.1- Le T.M.C projeté suivant \vec{e}_y :
sachant que $\vec{M}_o(\vec{F}) = -\alpha\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_y$ alors

$$J_p\ddot{\theta} + \alpha\ell^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \gamma\theta = 0$$

Ce qui donne

$$\beta = \frac{\alpha\ell^2}{J_p} [T^{-1}] \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{2J_p}g\ell(m_T + 2m_D) [T^{-2}]$$

16.2- La polynôme caractéristique est $r^2 + \beta r + \gamma = 0$ donc les solutions sont :

$$r_{1/2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

avec $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$ ce qui donne

$$\theta(t) = \exp(-\beta t/2) \left(A \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + B \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) \right)$$

Il en résulte que

$$\tau = \frac{2}{\beta}$$

► Les différents régimes :

- Si $\Delta > 0$ Régime apériodique, $\theta(t)$ décroît d'une façon exponentielle sans osciller.
- Si $\Delta = 0$ Régime critique, $\theta(t)$ décroît rapidement vers la position d'équilibre sans osciller.
- Si $\Delta < 0$ Régime pseudo-périodique $\theta(t)$ oscille avec une amplitude qui décroît d'une façon exponentielle

2.5 Autres Applications

Correction du concours CCP TSI 2009

2.5.1 MOUVEMENT D'UNE BARRE HOMOGÈNE

2.5.1.1 Étude cinématique du mouvement

5.1.1.1

5.1.1.1.1 $\vec{OA} = 2L \sin \theta \vec{e}_x$

5.1.1.1.2 $\vec{OB} = 2L \cos \theta \vec{e}_y$

5.1.1.1.3 $\vec{AB} = 2L(-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)$

5.1.1.2

5.1.1.2.1 Relation de Chasles donne le résultat

5.1.1.2.2 $\vec{OG} = L(\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)$

5.1.1.3

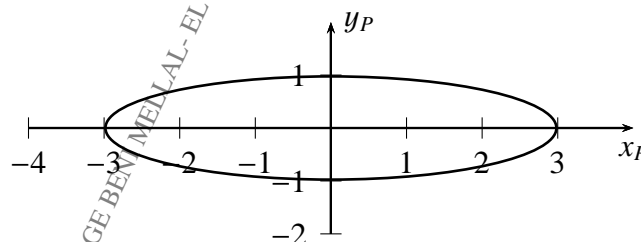
5.1.1.3.1 $\vec{OP} = (2L - r) \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_y$

5.1.1.3.2 On a : $x_P = (2L - r) \sin \theta$ et $y_P = r \cos \theta$ ce qui donne

$$\frac{x_P^2}{(2L - r)^2} + \frac{y_P^2}{r^2} = 1$$

Donc la trajectoire du point P est une ellipse.

5.1.1.3.3 On a : $r = L/2 \Rightarrow a = 3L/2$ et $b = L/2$



5.1.1.4

$$\text{5.1.1.4.1} \quad \vec{V}_B = (V_A - 2L\dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_x - 2L\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\text{5.1.1.4.2} \quad \vec{V}_B \cdot \vec{e}_x = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{V}{2L \cos \theta}$$

$$\text{5.1.1.4.3} \quad \vec{V}_B = -V \tan \theta \vec{e}_y$$

5.1.1.5

$$\text{5.1.1.5.1} \quad \vec{V}_G = L\dot{\theta}(\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y)$$

$$\text{5.1.1.5.2} \quad \vec{V}_G = \frac{V}{2}(\vec{e}_x - \tan \theta \vec{e}_y)$$

$$\text{5.1.1.5.3} \quad \vec{a}_G = L[(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \vec{e}_x - (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \vec{e}_y]$$

5.1.1.6

$$\text{5.1.1.6.1} \quad \vec{V}_P = \dot{\theta}[(2L - r) \cos \theta \vec{e}_x - r \sin \theta \vec{e}_y]$$

$$\text{5.1.1.6.2} \quad \vec{V}_P = \frac{V}{2L}[(2L - r) \vec{e}_x - r \tan \theta \vec{e}_y]$$

5.1.1.6.3

► Pour $r = L \Rightarrow \vec{V}_P = \frac{V}{2}(\vec{e}_x - \tan \theta \vec{e}_y) = \vec{V}_G$

► Pour $r = 2L \Rightarrow \vec{V}_P = -V \tan \theta \vec{e}_y = \vec{V}_B$

2.5.1.2 Étude énergétique du mouvement , relation entre V et θ

$$\text{5.1.2.1} \quad \text{On a : } \vec{R}_A \cdot \vec{V}_A = 0 \text{ et } \vec{R}_B \cdot \vec{V}_B = 0$$

5.1.2.2

$$\text{5.1.2.2.1} \quad E_p = +Mgy_G$$

$$\text{5.1.2.2.2} \quad dE_p = M\vec{g} \cdot d\vec{OG} \Rightarrow E_p = Mgy_G (+cte = 0 =$$

$$\text{5.1.2.2.3} \quad E_p = MgL \cos \theta$$

5.1.2.3

$$\text{5.1.2.3.1} \quad E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_m = MgL \cos \theta + \frac{MV^2}{6 \cos^2 \theta}$$

$$\text{5.1.2.3.2} \quad \text{Absence de forces non conservatives alors } E_m = cte$$

$$\text{5.1.2.3.3} \quad E_m = cte = E_m(t=0) = MgL$$

5.1.2.4

$$\text{5.1.2.4.1} \quad V^2 = 6gL \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)$$

$$\text{5.1.2.4.2} \quad \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2L} (1 - \cos \theta)$$

$$\text{5.1.2.4.3} \quad \ddot{\theta} = \frac{3g}{4L} \sin \theta$$

2.5.1.3 Étude dynamique du mouvement, verification de l'hypothèse initiale de contact de la barre avec le sol et le mur

$$\text{5.1.3.1} \quad \vec{a}_G = \frac{3g}{4} [\sin \theta (3 \cos \theta - 2) \vec{e}_x - (1 - 3 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta) \vec{e}_y]$$

5.1.3.2

5.1.3.2.1 $M\vec{a}_G = M\vec{g} + \vec{R}_A + \vec{R}_B$

5.1.3.2.2 $\vec{R}_B = \frac{3Mg}{4} \sin \theta (3 \cos \theta - 2) \vec{e}_x$

5.1.3.2.3 $\vec{R}_A = \frac{Mg}{4} (1 - 3 \cos \theta)^2 \vec{e}_y$

5.1.3.2.4 Il faut tenir compte du frottement.

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

2.5.2 OSCILLATIONS MÉCANIQUES

Correction du concours CCP TSI 2005

Première Partie : Oscillations d'un pendule simple

2.5.2.1 Étude dynamique : équation différentielle du mouvement

5.2.1.1 Bilan des forces : \vec{P} et \vec{T}

5.2.1.2 $\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt/\mathcal{R}} = mL^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = \vec{M}_o(\vec{P}) + \vec{M}_o(\vec{T}) = -mgL \sin\theta\vec{e}_z$ et par conséquent

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0$$

5.2.1.3 θ est une position d'équilibre $\Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ ce qui donne $\sin\theta = 0$ donc les positions d'équilibre sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

► Au voisinage de $\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$ donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$ équation diff caractéristique d'un oscillateur harmonique et par conséquent $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.

► Au voisinage de $\theta = \pi$ on pose $\theta = \varphi + \pi \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varphi}$ ainsi $\sin\theta = -\sin\varphi$ donc $\ddot{\varphi} - \frac{g}{L}\varphi = 0$ équation diff dont la solution est exponentielle qui diverge et par conséquent $\theta = \pi$ est une position d'équilibre instable.

2.5.2.2 Petites oscillations

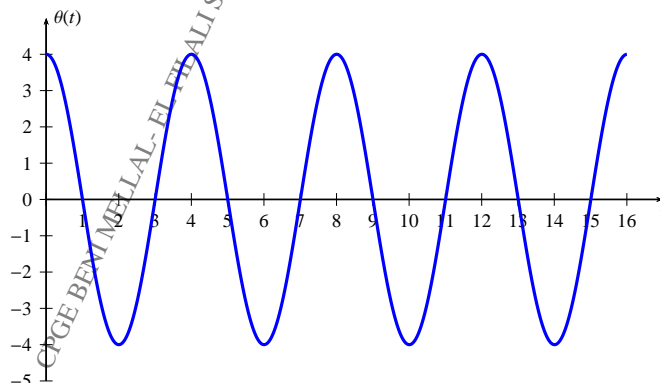
5.2.2.1 petites oscillations donc $\sin\theta \simeq \theta$ ce qui donne $\ddot{\theta} + \omega_o^2\theta = 0$ donc oscillateur harmonique.

- la pulsation propre $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}}$
- la période propre $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

5.2.2.2 $\theta(t) = \theta_o \cos \omega_o t$

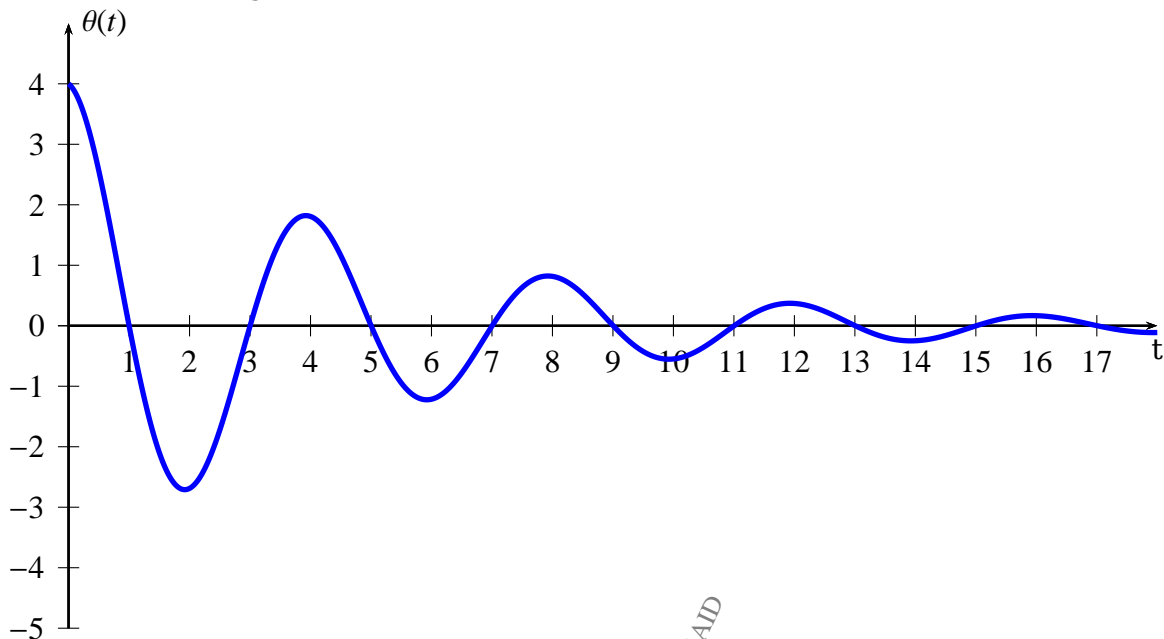
5.2.2.3 La valeur maximale de la vitesse $v_{max} = L\omega_o\theta_o = \theta_o\sqrt{gL}$

5.2.2.4 Représentation graphique



5.2.2.5 Amortissement par frottement fluide

- ▶ $\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$
- ▶ $\theta(t) = Ce^{-\lambda t} \cos[\Omega t + \varphi]$ avec :
 - $\lambda = \frac{h}{2m}$
 - $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$
 - $C = \theta_o \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\Omega^2}}$
 - $\tan \varphi = -\frac{\lambda}{\Omega} \Rightarrow \varphi = -\arctan \frac{\lambda}{\Omega}$
- ▶ Représentation graphique



2.5.2.3 Aspect énergétique

- 5.2.3.1 $E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$
- 5.2.3.2 $E_p = -mgL \cos \theta$
- 5.2.3.3 $\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$
- 5.2.3.4 Sachant que $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t))$ alors $T'_o = \frac{1}{2}T_o$
- 5.2.3.5 On a : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}) \Rightarrow mL^2\dot{\theta}(\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta) = -hL^2\dot{\theta}^2$ ce qui donne

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Deuxième Partie : Rotation d'un pendule composé autour d'un axe fixe

2.5.2.4 Moment d'inertie du pendule composé

$$J = I_1 + J_1 = \frac{1}{2}mR^2 + L^2(m + m'/3)$$

2.5.2.5 Étude dynamique : équation différentielle du mouvement

5.2.5.1 Bilan des forces : \vec{P} et \vec{R}

5.2.5.2 L'équation diff

$$\ddot{\theta} + \frac{gL(2m + m')}{2J} \sin \theta = 0$$

5.2.5.3 On a θ faible donc $\sin \theta \simeq \theta$ ce qui donne

$$\ddot{\theta} + \frac{gL(2m + m')}{2J} \theta = 0$$

équation diff d'un oscillateur harmonique

► La pulsation propre : $\omega_1 = \sqrt{\frac{gL(2m + m')}{2J}}$

► La période propre : $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{2J}{gL(2m + m')}}}$

2.5.2.6 Simplification : retour au cas du pendule simple

Si $m' \rightarrow 0$ et $R \rightarrow 0$ alors $J \simeq mL^2 \Rightarrow T' \simeq T_o$ On retrouve le pendule simple

=====

2.5.3 ÉTUDE D'UN PENDULE

CORRECTION DU CONCOURS NATIONAL DEUG 2003

MÉCANIQUE

① Les coordonnées du centre de gravité G du pendule (S) :

$$\vec{OG} = \frac{4r}{3\pi} \vec{x}_1$$

② La masse M du pendule (S) :

$$M = \frac{1}{2} \mu \pi r^2$$

③ La vitesse du point G lié au pendule (S) :

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_o) = \frac{4r}{3\pi} \dot{\theta} \vec{y}_1$$

④ l'accélération du point G lié au pendule (S) :

$$\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_o) = \frac{4r}{3\pi} (\ddot{\theta} \vec{y}_1 - \dot{\theta}^2 \vec{x}_1)$$

- 5 La résultante dynamique du pendule (S) :

$$\frac{d\vec{P}}{dt/\mathcal{R}} = M\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}) = \frac{4r}{3\pi}(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1)$$

- 6 L'action de la pesanteur sur le pendule (S) :

$$\vec{p} = Mg(\cos\theta\vec{x}_1 - \sin\theta\vec{y}_1)$$

- 7 Le théorème de la résultante dynamique et l'appliquer au pendule (S).

$$\frac{d\vec{P}}{dt/\mathcal{R}} = \vec{p} + \vec{R}$$

- 8 Les coordonnées X et Y de la réaction :

$$\begin{aligned} X &= -M(g\cos\theta + \frac{4r}{3\pi}\dot{\theta}^2) \\ Y &= M(g\sin\theta + \frac{4r}{3\pi}\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

- 9 Le moment de l'action de pesanteur au point O.

$$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{p} = -\frac{4r}{3\pi}Mg\sin\theta\vec{z}_o$$

- 10 Le moment cinétique du pendule (S) par rapport au point O :

$$\vec{L}_o(S/\mathcal{R}_o) = \vec{L}_{o//} = I\vec{\Omega} = I\dot{\theta}\vec{z}_o$$

- 11 Le théorème du moment cinétique appliqué au pendule (S) au point O.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt/\mathcal{R}} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_i) \Rightarrow I\ddot{\theta} = -\frac{4r}{3\pi}Mg\sin\theta$$

- 12 L'équation du mouvement du pendule (S).

$$\ddot{\theta} + \frac{4Mgr}{3\pi I}\sin\theta = 0$$

- 13 L'énergie cinétique T du pendule (S) dans son mouvement

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

- 14** Le travail W_e des forces extérieures appliquées au pendule (S)

$$W_e = W(\vec{p}) = +Mgh = MgOG(1 - \cos \theta)$$

- 15** Le théorème de la variation d'énergie cinétique dans le cas d'un solide

$$\Delta T = \sum_i W(\vec{F}_i)$$

- 16** L'équation du mouvement du pendule (S).

$$E_m = cte \implies I\ddot{\theta} + \frac{4Mgr}{3\pi} \sin \theta = 0$$

- 17** Integration de l'équation dans le cas où l'angle θ assez petit au cours du temps.

$$\theta(t) = \theta_o \cos \sqrt{\frac{4Mgr}{3\pi I}} t$$

- 18** La période T des oscillations ;

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3\pi I}{4Mgr}}$$

- 19** Application numérique :

$$T = 0,243 \text{ (s)} \text{ (s)}$$

- 20** La longueur L du pendule simple synchrone

$$l = \frac{3\pi I}{4Mr} \xrightarrow{\text{A.N}} l = 12 \text{ cm}$$

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

Troisième partie

THERMODYNAMIQUE

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

CHAPITRE 3

THERMODYNAMIQUE D'UN FLUIDE EN ÉCOULEMENT PERMANENT DANS UNE CONDUITE

3.1 Description d'un fluide en écoulement permanent dans une conduite

3.1.1 Modèle du fluide

► Un fluide (liquide ou gaz) est un système matériel composé de nombreuses particules "libres" de se mouvoir les unes des autres capable de s'écouler.

► Ordre de grandeurs :

Considérons le même volume $V_o = 1 \text{ mm}^3$ d'eau et de l'air à la même température $T_o = 25^\circ\text{C}$ et la même pression $P^o = 1 \text{ Bar}$.

Déterminons dans chaque cas le nombre N de particules contenu dans le volume V_o .

• Cas de l'eau :

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A} \Rightarrow N = N_A \frac{\rho V_o}{M} \xrightarrow{A.N} N = 3,34 \cdot 10^{19}$$

• Cas de l'air :

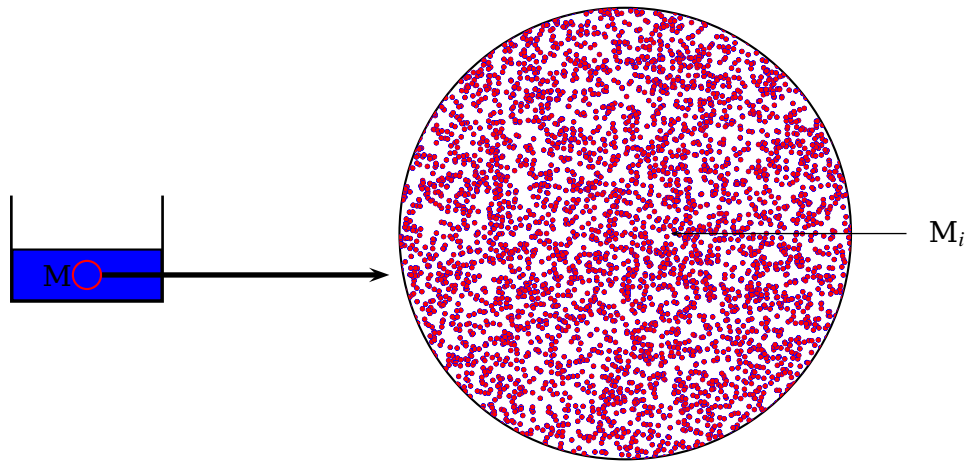
$$n = \frac{P^o V_o}{RT_o} = \frac{N}{N_A} \Rightarrow N = N_A \frac{P^o V_o}{RT_o} \xrightarrow{A.N} N = 2,43 \cdot 10^{16}$$

On retient que pour un volume macroscopique élémentaire, renferme un nombre très grand de particules.

Par conséquent, il est inutile de décrire le comportement de chaque particule.

Par la suite on adopte une échelle très supérieure à l'échelle microscopique et très faible devant l'échelle macroscopique : C'est l'échelle **mésoscopique**.

► À l'échelle mésoscopique les grandeurs intensives sont nivelées, c'est à dire toutes les particules ont même valeurs.

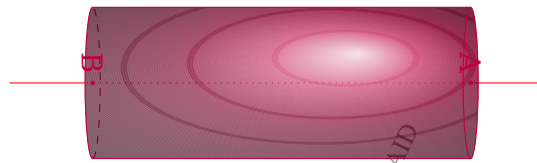


$$T(M, t) = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} T(M_i, t) dV$$

► On appelle particule fluide un ensemble de particules contenu dans un volume à l'échelle mésoscopique qui entoure le point M.

3.1.2 Grandeurs lagrangiennes.grandeurs eulériennes

Soit un fluide en écoulement



3.1.2.1 Méthode de Lagrange

On suit l'évolution au cours du temps d'une particule fluide M à partir d'une position initiale M_o donc

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{OM}(t = 0) = \overrightarrow{OM}_o$$

Par conséquent les variables de Lagrange sont le temps t et les trois coordonnées à l'origine x_o, y_o et z_o de \overrightarrow{OM}_o

3.1.2.2 Méthode d'Euler

Elle consiste à décrire la répartition des vitesses \vec{V} de toutes les particules fluides à un instant t donné c'est à dire s'intéresser aux vecteurs vitesses en suivant le mouvement. donc pour la particule fluide M tel que $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ on a

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$$

Il en résulte que les variables d'Euler sont $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ et le temps t .

Remarque

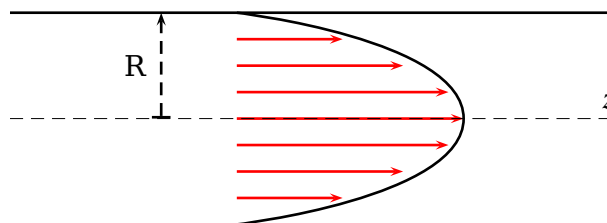
A t fixé, l'ensemble des vecteurs vitesses \vec{V} forment un champs de vecteurs appelé **champ des vitesses**.

Exemple

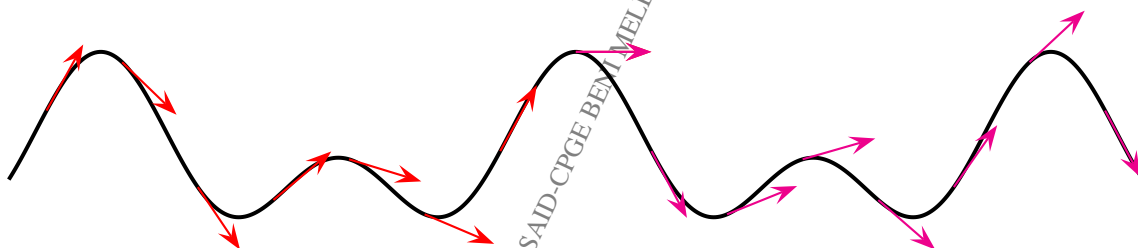
Écoulement de poiseuille :

Dans une conduite cylindrique de rayon R et d'axe oz , le champ de vitesse est donné par :

$$\vec{V}(M) = V_z \vec{e}_z = V_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z$$

**3.1.3 Définitions**

► On appelle lignes de courant (ou ligne de champs) des courbes où le vecteur vitesse y tangent à un instant t donné.

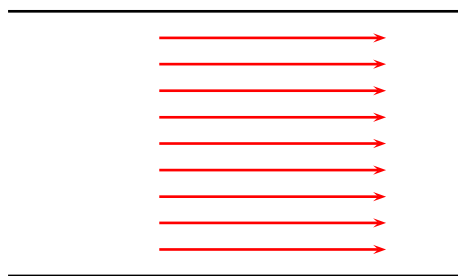


► On appelle tube de courant, un tube qui s'appuie sur les lignes de courant.

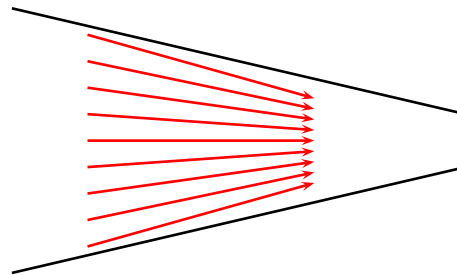
Remarque

La trajectoire est une notion lagrangienne par contre ligne de courant est une notion eulérienne

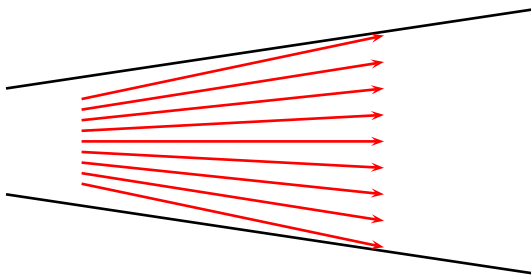
► Soient les écoulements suivants :



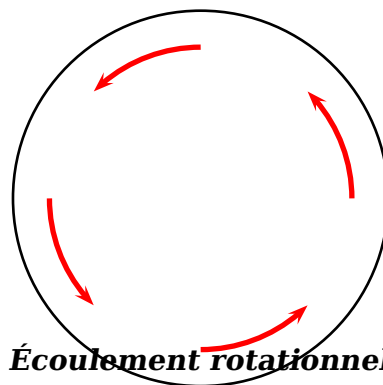
Écoulement laminaire



Écoulement convergent



Écoulement divergent



Écoulement rotationnel

Activité

On considère un écoulement plan défini par le champ des vitesses

$$\vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}} [a(x^2 - y^2)] \quad a > 0$$

1/ Déterminer le champ des vitesses.

2/ En déduire l'équation des lignes de champs.

Réponse :

1/ Champ des vitesses :

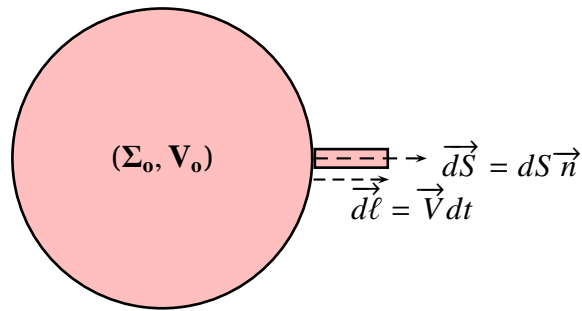
$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} V_x = -2xy \\ V_y = 2ay \end{array} \right.$$

2/ L'équation des LDC

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} \Rightarrow xv = cte$$

3.1.4 Débit massique. Débit volumique. Conservation de la masse

Soit un fluide occupant un fluide V_o délimité par la surface Σ_o dont la masse à l'instant t est $m(t)$.



Soit dm la masse élémentaire qui quitte la surface élémentaire dS pendant la durée dt occupant le volume $d\tau$.

Définition

On appelle débit massique la masse qui traverse une surface par unité de temps

$$D_m = \frac{dm}{dt} = \dot{m}$$

L'unité du débit massique est kg.s^{-1}

Sachant que $dm = \rho d\tau$ alors $D_m = \rho \frac{d\tau}{dt}$

On pose :

$$D_V = \frac{d\tau}{dt}$$

D_V est appelé le débit volumique son unité est $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$

Il en résulte que

$$D_m = \rho D_V$$

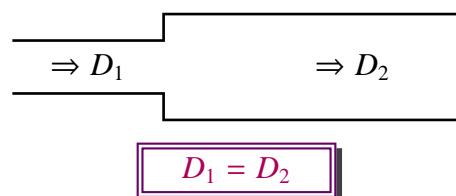
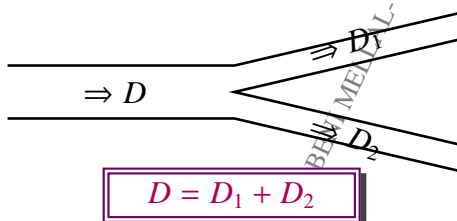
Remarque- 12 :

1- D_m représente la masse du fluide qui traverse la surface dS par unité de temps par contre D_V représente le volume du fluide qui traverse la surface dS par unité de temps.

2- Pour un fluide incompressible ($\rho = \text{cte}$) en régime stationnaire alors $D_m = \text{cte}$ ainsi $D_V = \text{cte}$ ce qui donne

$$m(t) = D_m(t - t_0) \quad \text{ainsi} \quad V(t) = D_V(t - t_0)$$

3- En régime permanent :



Analogie avec le courant électrique :

- Circuit série $\Rightarrow I_1 = I_2$:

- Circuit parallèle $\Rightarrow I = I_1 + I_2$

Soit dm la masse élémentaire qui traverse la surface élémentaire dS pendant le temps dt .

Cette masse dm est contenue dans un cylindre élémentaire de volume $d\tau$ tel que $d\tau = \vec{dS} \cdot \vec{d\ell}$

Avec $\vec{d\ell} = \vec{V}_F dt$; \vec{V}_F représente la vitesse d'écoulement du fluide.

Donc $d^3m = \rho d\tau \Rightarrow d^3m = \rho \vec{V}_F \cdot \vec{dS} dt$ ce qui donne en posant

$$\vec{j} = \rho \vec{V}_F$$

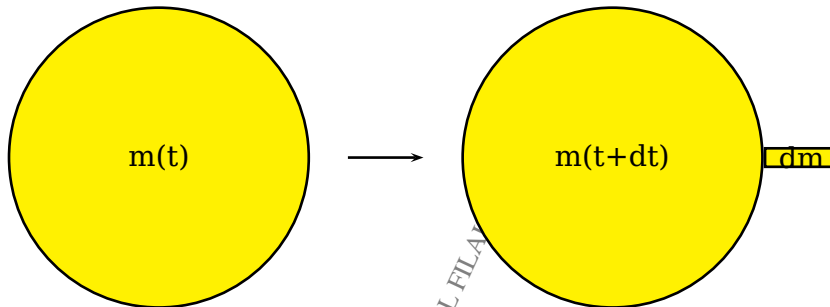
Vecteur densité de courant; son unité est $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

Il en résulte que

$$\frac{d^3m}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{dS} \Rightarrow D_m = \frac{dm}{dt} = \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

On retient que le débit massique représente le flux du vecteur densité de courant \vec{j} à travers la surface Σ .

Faisons un bilan de masse entre l'instant t et $t + dt$



La conservation de la masse se traduit macroscopiquement par

$$m(t) = m(t + dt) + dm$$

Or :

$$- m(t) = \iiint_V \rho(M, t) d\tau$$

$$- m(t + dt) = \iiint_V \rho(M, t + dt) d\tau$$

$$- dm = D_m dt = \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{dS} dt$$

Sachant que pour tout vecteur \vec{A} on a :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint_{V(\Sigma)} \text{div } \vec{A} d\tau$$

Ce qui donne pour tout volume V on a :

$$\iiint_V \left(\frac{\rho(M, t + dt) - \rho(M, t)}{dt} + \text{div } \vec{j} \right) d\tau = 0$$

Et par conséquent l'équation locale de la conservation de la masse s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0$$

Remarque- 13 :

1/ pour un fluide incompressible $\rho = \text{cte}$ si $D_m = \text{cte}$ alors $D_v = \text{cte}$ 2/ En régime stationnaire ($\frac{\partial X}{\partial t} = 0$) on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Le nombre de vecteurs \vec{j} qui entre à la surface fermée Σ est égal au nombre de vecteurs \vec{j} qui sort de Σ

Pour un circuit :

- Parallèle : $D = D_1 + D_2 \Rightarrow Su = S_1u_1 + S_2u_2$

- Série : $SU = su \Rightarrow \begin{cases} s > S \Rightarrow U > u \\ s < S \Rightarrow U < u \end{cases}$

3.2 Énergétiques des fluides en écoulement laminaire stationnaire dans une conduite

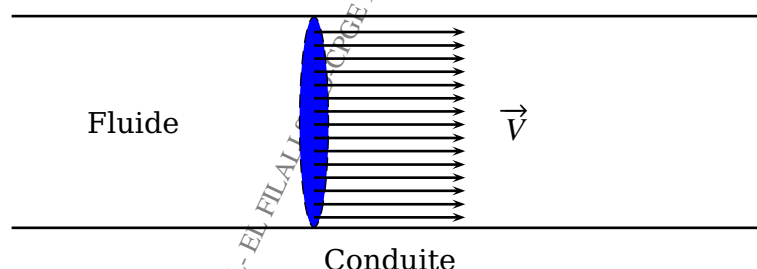
3.2.1 Fluide parfait. Fluide newtoniens

Considérons un fluide en écoulement dans une conduite

Définition

Fluide parfait

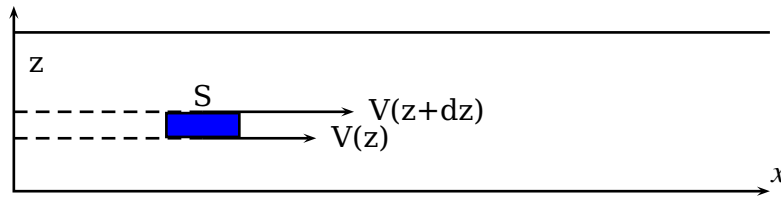
Un fluide en écoulement dans une conduite **est parfait** si toutes les particules fluides de la même section ont même vitesse



Remarque- 14 :

On appelle fluide newtonien (visqueux) un fluide qui n'est pas parfait.

En effet : Considérons un écoulement newtonien parallèle à l'axe Ox



L'expérience montre que

$$\vec{F} = -\eta S \frac{dV}{dz} \vec{e}_x$$

Avec :

- S : surface de contact en m^2 .
- η coefficient de viscosité ou viscosité dynamique son unité est Pa.s= Poiseuille.
- On appelle viscosité cinématique

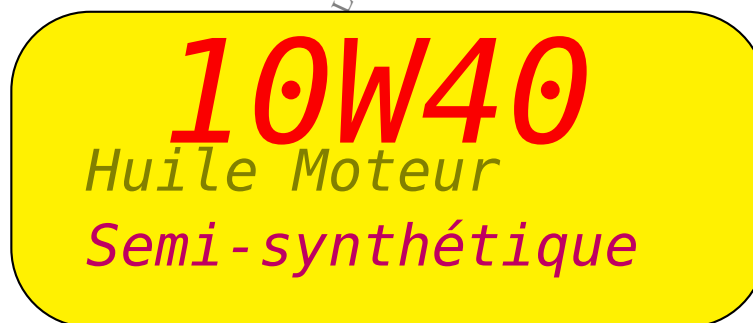
$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (m^2 \cdot s^{-1})$$

Quelques ordres de grandeurs :

T=20°C	η (Poiseuille)	$\nu = \frac{\eta}{\rho} (m^2 \cdot s^{-1})$
Eau	10^{-3}	10^{-6}
Glycerine pure	0,93	$0,6310^{-3}$
Mercure	1,554	$0,114710^{-6}$
Ethanol	$1,20 \cdot 10^{-3}$	$1,51 \cdot 10^{-6}$
Benzène	$0,625 \cdot 10^{-3}$	$0,74110^{-6}$
Glycerol	1,49	1182

Remarque- 15 :

Pour les lubrifiants (huile des moteurs) :



La viscosité de l'huile est une mesure de résistance à l'écoulement d'un fluide. La viscosité d'une huile moteur s'exprime par 2 grades. Un grade à froid et un grade à chaud. Le grade à froid se situe devant la lettre **W**. Dans l'illustration ci-contre, le grade est de 10. Le grade à chaud se situe après la lettre **W**. Dans le même exemple le grade à chaud est de 40. **W** est la première lettre du mot anglais "Winter" (hiver). Le premier grade traduit la viscosité dynamique à froid : la capacité à démarrer le moteur et à amorcer la pompe à huile :

0W : env. -30°C
 5W : env. -25°C
 10W : env. -20°C
 15W : env. -15°C

Le 2ème grade traduit la viscosité cinématique à chaud (100°C) : 20, 30, 40, 50, 60.

- Plus le nombre est élevé, plus épais sera le film d'huile à chaud. Il favorise la protection et l'étanchéité.

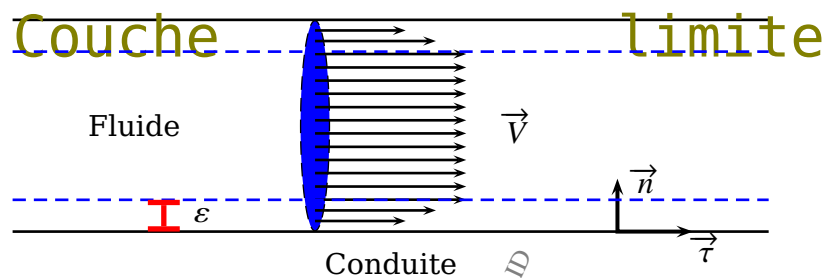
- Plus le nombre est bas, meilleure sera la réduction de frottement à chaud. Il favorise les économies de carburant.

Afin d'assurer une protection immédiate à chaque démarrage du moteur, le choix du grade de viscosité à froid est primordial. L'huile la plus fluide est la plus rapide pour le temps de mise en huile du moteur.

Retenons que la viscosité dépend de la température :

- Pour les liquide elle diminue lorsque la température augmente.
- Pour les gaz elle augmente lorsque la température augmente.

En réalité au voisinage de la conduite qu'on la considère fixe par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R}



Au voisinage de la conduite (dans la zone limite) :

- La particule fluide ne peut pas pénétrer dans la conduite et par conséquent $V_n = \vec{V} \cdot \vec{n} = 0$
- Avec ou en absence de glissement on a perte d'énergie et donc diminution de la vitesse.

Définition

Couche limite

On appelle couche limite la zone située au voisinage de la conduite où on a diminution de la vitesse.

Remarque

Pour un fluide parfait la largeur de la couche limite est nulle

Fluide parfait $\Rightarrow \epsilon \rightarrow 0$

Application 5 :

Viscosité à bille

Un tube cylindrique vertical en verre contient le liquide de viscosité η à déterminer. Une petite bille sphérique de rayon r , de masse volumique ρ , est lâchée sans vitesse initiale dans le fluide à sa partie supérieure. Soient ρ_o la masse volumique du liquide et g l'accélération du champ de pesanteur. Le diamètre de la bille est supposé très petit par rapport à celui du tube; on utilise donc pour la force de viscosité exercée par le fluide sur la bille la formule de Stokes

$$\vec{f}_s = -6\pi\eta r \vec{V}$$

1- Écrire l'équation de l'évolution de la vitesse \vec{V} de la bille. Donner l'expression du temps τ caractéristique de cette évolution.

2- Déterminer la vitesse limite \vec{V}_L en fonction de η et divers paramètres.

3- Application numérique :

On donne $r = 1 \text{ mm}$, $\rho = 7.9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; le liquide est la glycérine à 20°C pour laquelle $\rho_o = 1.26 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. On mesure expérimentalement l'intervalle de temps Δt entre les passages de la bille à deux niveaux dont les altitudes diffèrent de 50 cm. La mesure donne $\Delta t = 28 \text{ s}$. En déduire η en supposant que la bille avait, lors de ces passages, sa vitesse limite.

RÉPONSE

1/ Bilan des forces (oz orienté vers le haut) :

$$- \vec{P} = m\vec{g} = -\frac{4}{3}\rho\pi r^3 g \vec{e}_z$$

$$- \vec{F}_A = \frac{4}{3}\rho_o\pi r^3 g \vec{e}_z$$

$$- \vec{f}_s = -6\pi\eta r \vec{V}$$

RFD donne

$$\frac{dV}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho r^2} V = \frac{g}{\rho}(\rho_o - \rho)$$

Le temps caractéristique

$$\tau = \frac{2\rho r^2}{9\eta}$$

2/ la vitesse limite

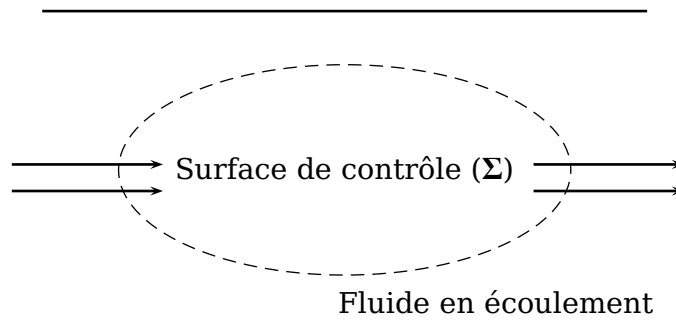
$$V_L = \frac{2gr^2}{9\eta}(\rho_o - \rho)$$

3/ l'expression de la viscosité :

$$h = |V_L|\Delta t \Rightarrow \eta = \frac{2gr^2(\rho - \rho_o)\Delta t}{9h} \xrightarrow{\text{A.N}} \eta = 0,8 \text{ Poiseuille}$$

3.2.2 Surface de contrôle. Volume de contrôle

- On appelle surface de contrôle une surface fermée au sens mathématique et non au sens physique ; fixe dans le référentiel d'étude ; c'est à dire une surface à trois dimension qui se laisse traversée par la matière



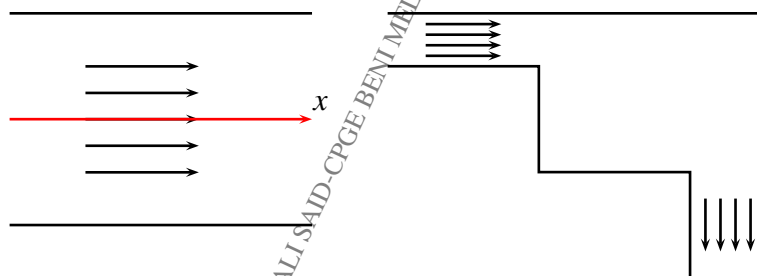
On appelle volume de contrôle V_c le volume délimité par la surface de contrôle.

3.2.3 Bilan dans des écoulements unidimensionnels

3.2.3.1 Définition

On appelle écoulement unidimensionnel un écoulement dont le champ de vitesses, ainsi que toutes les propriétés physiques locales du fluide ne dépendent que d'une seule coordonnée d'espace et du temps.

Exemple



3.2.3.2 Bilan en régime stationnaire

Considérons une grandeur extensive A (scalaire ou vectorielle) caractérisant le fluide et a sa valeur massique donc

$$a(M, t) = \frac{dA}{dm} \implies dA = a(M, t)dm$$

sachant que

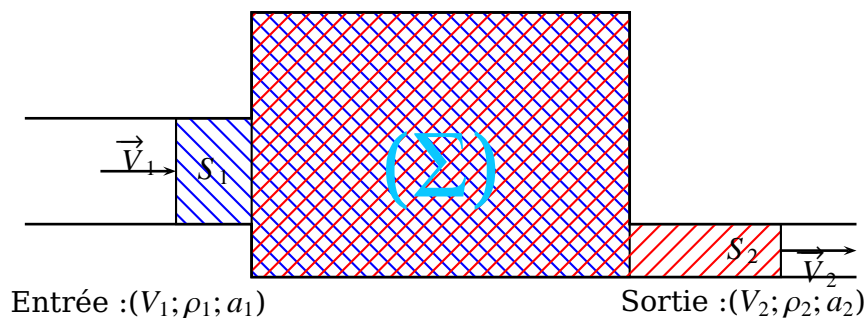
$$dm = \rho d\tau \Rightarrow dA = a(m, t) \rho d\tau$$

Évaluons DA la variation de la grandeur extensive A pendant le temps dt qu'on la note $\frac{DA}{dt}$

Notation

- $dA \Rightarrow A = A(M)$
- $DA \Rightarrow A = A(M, t)$

Pour cela considérons l'écoulement unidimensionnel suivant



On a : $DA = A(t + dt) - A(t) \Rightarrow DA = (a_2 dm_2 - a_1 dm_1)$

Or

- $dm_1 = \rho_1 d\tau_1 \Rightarrow dm_1 = \rho_1 S_1 V_1 dt$
- $dm_2 = \rho_2 d\tau_2 \Rightarrow dm_2 = \rho_2 S_2 V_2 dt$

Donc

$$\frac{DA}{dt} = (a_2 \rho_2 S_2 V_2) - (a_1 \rho_1 S_1 V_1)$$

En régime stationnaire on a :

$$D_m = \rho_2 S_2 V_2 = \rho_1 S_1 V_1$$

Ce qui donne

$$\frac{DA}{dt} = D_m (a_2 - a_1)$$

Valable pour toutes grandeurs extensives en régime stationnaire

3.2.4 Applications : Bilans divers

3.2.4.1 Conservation de la masse

On sait que la masse est extensive avec $a = \frac{dm}{dm} \Rightarrow a_1 = a_2 = 1$
donc en régime stationnaire

$$\frac{Dm}{dt} = (\rho_2 S_2 V_2) - (\rho_1 S_1 V_1) = 0 \Rightarrow \rho_2 S_2 V_2 = \rho_1 S_1 V_1$$

On retrouve la conservation de la masse.

Notons que pour un fluide incompressible $\rho_1 = \rho_2$ alors on retrouve la conservation du débit volumique.

3.2.4.2 Bilan de quantité de mouvement

Une particule fluide de masse $dm = \rho d\tau$ animée de la vitesse \vec{V} par rapport à un référentiel \mathcal{R} possède la quantité de mouvement

$$\vec{dP} = dm\vec{V} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dm} = \vec{V} = a$$

Ce qui donne pour un écoulement unidimensionnel en régime stationnaire

$$\frac{D\vec{P}}{dt} = D_m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \vec{F}_{ext}$$

3.2.4.3 Bilan de travail

3.2.4.3.1 Travail des forces pressantes .

On rappelle que le travail des forces pressantes est :

$\delta\mathcal{W} = -PSd\ell \Rightarrow \delta\mathcal{W} = -Pd\tau$ ce qui donne

$$\frac{\delta\mathcal{W}_{F.P}}{dm} = -\frac{P}{\rho} = a$$

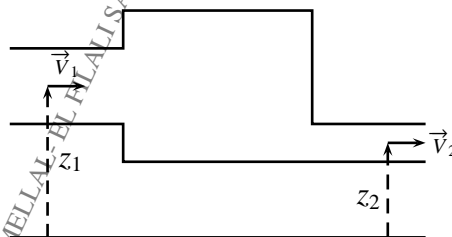
Il en résulte que

$$\frac{D\mathcal{W}_{F.P}}{dt} = \mathcal{P}_{F.P} = \dot{\mathcal{W}}_{F.P} = \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2}\right)D_m$$

3.2.4.3.2 Travail des forces de pesanteur .

On rappelle que (oz orienté vers le haut)

$$dE_{pp} = dmgz \Rightarrow \frac{dE_{pp}}{dm} = a = gz$$



Il en résulte que

$$\frac{DE_{pp}}{dt} = D_m(z_2 - z_1)g$$

Avec z_1 et z_2 les altitudes moyennes des sections d'entrée et de sortie.
Notons que la puissance des forces de pesanteur

$$\mathcal{P}_{p,p} = \dot{\mathcal{W}}_{p,p} = -\frac{DE_{pp}}{dt} = D_m(z_1 - z_2)g$$

3.2.5 Bilan énergétique. Aspect thermodynamique

Soit une particule fluide en écoulement unidimensionnel en régime stationnaire.
Sachant que :

- $dU = u dm \Rightarrow u = \frac{dU}{dm}$
- $dE_c = \frac{1}{2} V^2 dm \Rightarrow e_c = \frac{dE_c}{dm} = \frac{1}{2} V^2$

Alors

$$\frac{D(U + E_c)}{dt} = D_m \left[\left(u_2 + \frac{1}{2} V_2^2 \right) - \left(u_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \right]$$

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit donc

$$\frac{D(U + E_c + E_{pp})}{dt} = \dot{\mathcal{W}}_{pp} + \dot{\mathcal{W}}_u + \dot{\mathcal{Q}}_{th}$$

Avec

- ▶ $\dot{\mathcal{W}}_{pp} = -\frac{DE_{pp}}{dt} = -D_m g(z_2 - z_1)$
- ▶ $\dot{\mathcal{W}}_{FP} = -\frac{DE_{FP}}{dt} = D_m \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right)$

▶ $\dot{\mathcal{W}}_u$: la puissance des autres forces autres que la force de pesanteur et les forces de pression c'est à dire la puissance des pièces mobiles dans la surface de contrôle ; dite aussi puissance indiquée

- ▶ $\dot{\mathcal{Q}}_{th}$: la puissance thermique.

Ce qui donne

$$D_m \left[\left(u_2 + \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2 + \frac{P_2}{\rho_2} \right) - \left(u_1 + \frac{1}{2} V_1^2 + g z_1 + \frac{P_1}{\rho_1} \right) \right] = \dot{\mathcal{W}}_u + \dot{\mathcal{Q}}_{th}$$

On rappelle que :

$$h = u + Pv \Rightarrow h = u + \frac{P}{\rho}$$

puisque $v = \frac{1}{\rho}$ ce qui donne

$$D_m \left[\left(h_2 + \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2 \right) - \left(h_1 + \frac{1}{2} V_1^2 + g z_1 \right) \right] = \dot{\mathcal{W}}_u + \dot{\mathcal{Q}}_{th} = D_m \Delta \left(h + \frac{1}{2} V^2 + g z \right)$$

Relation importante valable pour un écoulement unidimensionnel stationnaire

3.2.6 Écoulement adiabatique stationnaire

Écoulement adiabatique donc $\dot{Q}_{th} = 0$.

On suppose de plus l'absence des pièces mobiles dans la surface de contrôle (pas de pompe) donc $\dot{W}_u = 0$ ce qui permet d'écrire

$$\Delta(h + \frac{1}{2}V^2 + gz) = 0 \implies h_2 + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 = h_1 + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1$$

Valable pour un écoulement unidimensionnel stationnaire adiabatique

Remarques

1/ Si On néglige la variation de la vitesse $V_1 \simeq V_2$ et la variation de l'altitude ($z_1 \simeq z_2$) alors on obtient

$$h_2 = h_1$$

écoulement isenthalpique

2/ Écoulement parfait : absence de frottement donc la viscosité est nulle \implies écoulement réversible et par conséquent isentropique.

La deuxième identité thermodynamique : $dh = Tds + v dP \implies dh = Tds + \frac{1}{\rho} dP$

isentropique donc $ds = 0 \implies dh = \frac{1}{\rho} dP$ et par intégration

$$h = \int_{P^o}^{P_1} \frac{1}{\rho} dP$$

Ce qui donne pour un écoulement parfait isentropique

$$\int_{P^o}^{P_1} \frac{1}{\rho_1} dP + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \int_{P^o}^{P_2} \frac{1}{\rho_2} dP + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2$$

3.2.7 Écoulement incompressible stationnaire

Écoulement incompressible stationnaire $\implies \rho_1 = \rho_2 = \rho = cte$ ce qui donne $h = \frac{P - P^o}{\rho}$ et par conséquent

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 \implies \Delta\left[\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz\right] = 0 \quad (E)$$

Valable pour un écoulement parfait incompressible stationnaire

L'équation (E) peut s'écrire

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = cte$$

C'est l'équation de Bernoulli

dans ce cas le premier principe s'écrit

$$D_m \Delta \left(u + \frac{1}{2} V^2 + gz + \frac{P}{\rho} \right) = \dot{W}_u + \dot{Q} \implies D_m(u_2 - u_1) = \dot{W}_u + \dot{Q}$$

Si $\dot{W}_u = 0$ absence de pièces mobiles alors

$$D_m(u_2 - u_1) = \dot{Q}$$

3.2.8 Perte de charge singulière et régulière

On appelle perte de charge dans une conduite la diminution de la pression qui peut être :

► Singulière : elle est liée aux "accidents" ponctuels sur la tuyauterie : élargissement ou rétrécissement brusque, coudes, vannes, robinets, clapets.

► Régulière : dite aussi perte de charge linéique, elle est due aux pertes d'énergie par frottement avec la paroi de la conduite et au viscosité du fluide.

Application 6 :

Etude d'une tuyère (TD)

1- On a : $\dot{W}_u = \dot{Q}_{th} = 0$ donc $h + e_c + e_p = cte$ ce qui donne

$$c_p(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)$$

2- On a : $h + e_c = cte \implies dh + de_c = 0$ ce qui donne

$$\frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)}dT + \frac{1}{2}d(v^2) = 0$$

3- Sachant que $Tv^{\gamma-1} = cte \implies T\rho^{1-\gamma} = cte$ d'où

$$\frac{dT}{T} + (1 - \gamma)\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

4- On a en régime permanent : $\dot{D}_m = \rho S v = cte \implies \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} = 0$ 5- On en déduit d'après les questions précédentes que

$$\frac{dv}{dS} = \frac{S}{v} \left(\frac{v^2}{RT\gamma} - 1 \right)$$

Pour une accélération du fluide ($dv > 0$) suite à un élargissement de la tuyère ($dS > 0$) donc

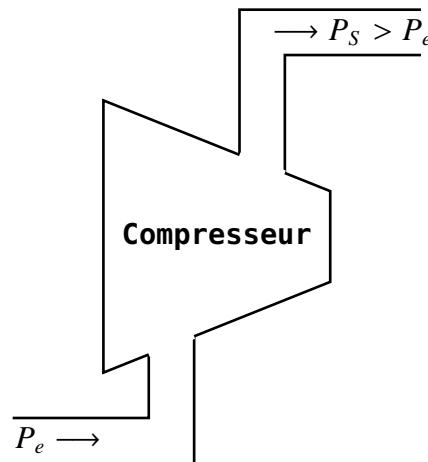
$$\frac{dv}{dS} > 0 \implies v > \sqrt{RT\gamma} = c$$

Avec c célérité du son dans le gaz

3.3 Thermodynamique industrielle

3.3.1 Compresseur

Le compresseur fourni de l'énergie au fluide, schématisé par :



On suppose :

► l'énergie cinétique massique e_c ainsi que l'énergie potentielle massique e_p sont très négligeables devant l'enthalpie massique h .

► Le système est calorifugé.

Dans ces conditions , le premier principe pour un système ouvert s'écrit

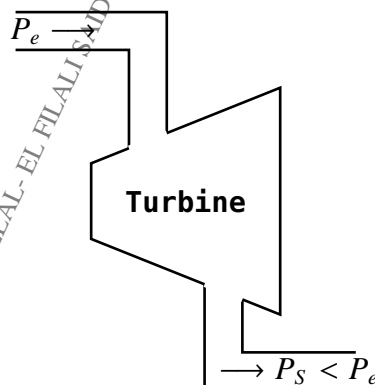
$$D_m \Delta h = \dot{W}_u = P_u$$

Pour un gaz parfait sachant que $\Delta h = c_p \Delta T$ donc

$$D_m \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)} \Delta T = P_u = \dot{W}_u > 0$$

3.3.2 Turbine adiabatique

La turbine reçoit de l'énergie du fluide pour fonctionner , schématisé par :



On suppose :

- l'énergie cinétique massique e_c ainsi que l'énergie potentielle massique e_p sont très négligeables devant l'enthalpie massique h .
- Le système est calorifugé (adiabatique).

Dans ces conditions , le premier principe pour un système ouvert s'écrit

$$D_m \Delta h = \dot{W}_u = P_u$$

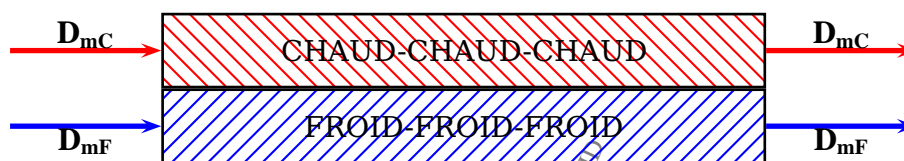
Pour un gaz parfait sachant que $\Delta h = c_p \Delta T$ donc

$$D_m \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)} \Delta T = P_u = \dot{W}_u < 0$$

3.3.3 Échangeur

On distingue :

3.3.3.1 Échangeur à co-courant

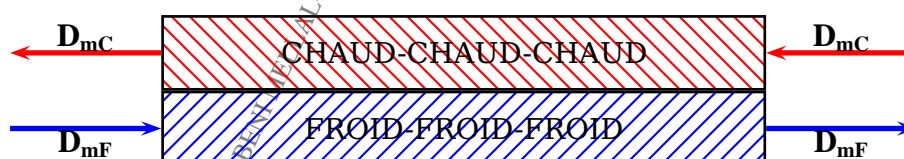


On suppose que l'écoulement est stationnaire avec absence de toutes pièces mobiles ainsi que l'échangeur est adiabatique.

On néglige en plus l'énergie cinétique et potentielle massique devant h l'enthalpie massique ce qui donne

$$D_{mC}(h_{2C} - h_{1C}) + D_{mF}(h_{2F} - h_{1F}) = 0 \implies D_{mC}(h_{2C} - h_{1C}) = D_{mF}(h_{1F} - h_{2F})$$

3.3.3.2 Échangeur à contre-courant



On suppose que les hypothèses précédentes sont toujours valables et en remplaçant D_{mC} par $-D_{mC}$ dans la relation trouvée précédemment on obtient

$$-D_{mC}(h_{2C} - h_{1C}) + D_{mF}(h_{2F} - h_{1F}) = 0 \Rightarrow D_{mC}(h_{2C} - h_{1C}) = D_{mF}(h_{2F} - h_{1F})$$

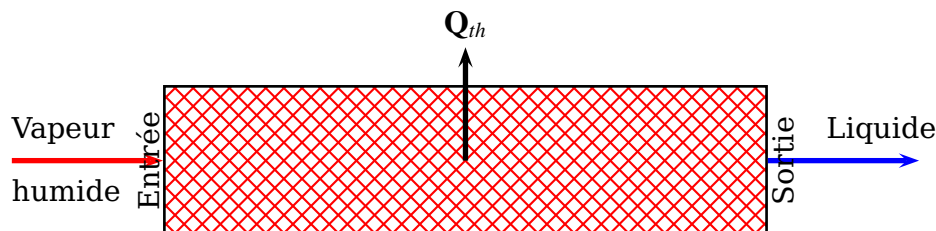
Remarque- 16 :

Si le fluide chaud (T_F) est identique au fluide froid (T_F) et D_m est le même alors

$$dh_C = dh_F \Rightarrow T_C - T_F = \text{cte}$$

3.3.4 Condenseur

Il condense la vapeur humide en liquide en évacuant de l'énergie thermique au milieu extérieur



On suppose que :

- ▶ Écoulement unidimensionnel, stationnaire sans pièces mobiles.
- ▶ la variation de l'énergie cinétique et potentielle massiques est négligeable.
- ▶ la pression est constante (présence d'un changement d'état)
- ▶ la température à la sortie T_s est inférieure à la température du changement d'état

Le premier principe de la thermodynamique en système ouvert s'écrit :

$$D_m \Delta(h + e_c + e_p) = \dot{W}_u + \dot{Q}_{th} \Rightarrow h_{\text{sortie(s)}} - h_{\text{entrée(e)}} = \frac{\dot{Q}_{th}}{D_m}$$

Or

$$h_s - h_e = x \ell_{\text{liquide}} + c_{(p,l)}(T_s - T_e)$$

Avec :

- x la fraction massique de la phase vapeur.
- $\ell_{\text{liquide}} = -\ell_v$: chaleur latente massique de liquéfaction (vaporisation pour ℓ_v).

Il en résulte que

$$h_s - h_e = x \ell_{\text{liquide}} + c_{(p,l)}(T_s - T_e) = \frac{\dot{Q}_{th}}{D_m}$$

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

CHAPITRE 4

TRANSFERT D'ÉNERGIE PAR CONDUCTION THERMIQUE

4.1 Les différents modes de transfert thermique

La quantité de chaleur ou transfert thermique est l'énergie de nature microscopique échangée à travers la surface qui délimite un système. Il existe trois modes de transfert thermique :

4.1.1 La convection thermique :

La convection est un transport d'énergie propre aux fluides associé au mouvement macroscopique dans le fluide ; chaque particule du fluide transporte son énergie interne en se déplaçant.

Exemples :

- Mélange d'un verre d'eau chaude et l'autre froid.
- Séchoirs. - Chauffage par un convecteur électrique ou un radiateur de chauffage central
- Échange thermiques entre le moteur d'une voiture et le radiateur

4.1.1.1 La rayonnement thermique

C'est un transport d'énergie qui ne nécessite aucun support matériel, résulte de la propagation des ondes électromagnétiques dont les longueurs d'onde sont comprises entre $0,1\mu m$ et $100\mu m$ y compris le visible.

On distingue :

- **Les milieux transparents** : Ils n'absorbent pas de rayonnement thermique, et n'en émettent plus, en toute rigueur, seul le vide est réellement transparent ($n=1$) ; l'air vu des distances modérées, peut être considéré comme transparent.

- **Les milieux opaques** : L'absorption ou l'émission s'effectuent sur une épaisseur suffisamment faible pour que l'on puisse la supposer nulle : c'est le cas des métaux.

- **Les milieux semi-transparent** : Un corps semi-transparent absorbe une partie du rayonnement thermique qu'il reçoit et laisse passer l'autre partie du rayonnement thermique ; dans ce cas l'absorption et l'émission sont volumiques.

Exemple : Rayonnement du soleil.

4.1.1.2 La diffusion (conduction) thermique

C'est un transfert d'énergie dans un support matériel sans mouvement macroscopique, résulte d'un gradient de température qui tend à uniformiser la température. C'est le seul mécanisme qui intervienne dans les solides homogènes et opaques. Dans les fluides, la conduction est souvent masquée par le phénomène de convection. Un milieu dont la température n'est pas homogène est au moins le siège de phénomènes de transfert thermique par conduction.

Conclusion:

La conduction thermique se produit dans un système initialement hors équilibre, des régions chaudes vers les régions froides : Le phénomène de diffusion est irréversible .

4.2 Vecteur densité de courant thermique

Soit un milieu matériel (solide, liquide ou gaz) , de volume V délimité par une surface S .

Soit dS un élément de cette surface centré en M et $\delta^2 Q$ la chaleur ou l'énergie thermique qui quitte dS pendant le durée dt

On pose

$$d\phi_{th} = \frac{\delta^2 Q}{dt} = P_{th}$$

$\phi_{th} = P_{th}$ est le flux thermique élémentaire (homogène à une puissance) son unité dans le système international est W.

Ainsi on pose

$$\phi_{th} = \iint_{(S)} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$$

\vec{j}_{th} est appelé vecteur densité de courant thermique (ou de flux de chaleur) noté aussi \vec{j}_Q son unité est $W m^{-2}$

4.3 Loi de FOURIER

C'est une loi expérimentale, traduit , à l'approximation linéaire, la proportionnalité du courant volumique thermique \vec{j}_{th} et du gradient de température :

$$\vec{j}_{th}(M, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(M, t)$$

λ est une constante positive appelé conductivité thermique du milieu exprimé en $W m^{-1} K^{-1}$.

Tableau des valeurs ($W m^{-1} K^{-1}$)

Argent	480	Cuivre	390
Aluminium	238	Laiton	120
Fer	82	Plomb	35
Inox	16	Verre	≈ 1
Béton	0,9 à 1,75	Brique	0,84
Eau (à 20°C)	0,6	Corps humain	0,5
Plâtre	0,46	Ciment	0,3
Bois	0,12 à 0,25	Huile minérale	0,13
polystyrene expansé	0,04	Air	24×10^{-3}

Remarque- 17 :

► Le signe moins traduit l'orientation du courant thermique vers les basses températures.

► Analogie avec l'électrocinétique

$\vec{j} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V$	$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$
\vec{j}	\vec{j}_Q
V	T
σ	λ
$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$	$\phi_{th} = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$
$R = \frac{V_2 - V_1}{I}$	$R_{th} = \frac{T_2 - T_1}{\phi_{th}}$

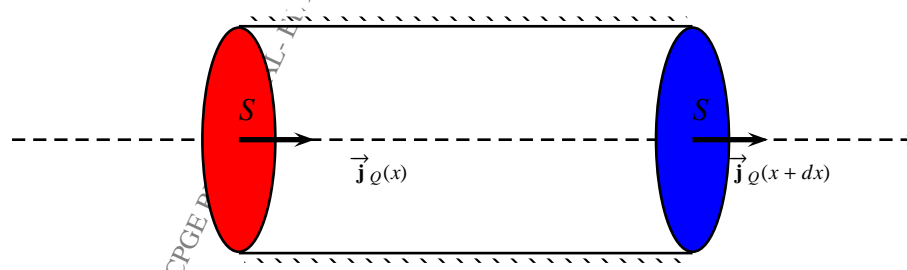
4.4 Bilan d'énergie thermique

On considère un corps homogène de masse volumique ρ et de conductivité λ et de capacité thermique massique c supposées toutes constantes.

4.4.1 Conduction pure unidimensionnelle

on étudie un modèle unidimensionnel : la température du matériau T ne dépend que de l'abscisse x et du temps t .

Soit un cylindre élémentaire de section S compris entre les abscisses x et $x + dx$



On suppose qu'il n'y a pas d'échange d'énergie thermique à travers la surface latérale entre les instants t et $t + dt$.

► L'énergie thermique reçue est : $\delta Q_e = j_Q(x)S dt$

► L'énergie thermique fournie est : $\delta Q_s = j_Q(x + dx)S dt$

Appliquons le premier principe de la thermodynamique au cylindre élémentaire :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Puisque le volume du cylindre est constant alors $\delta W = 0$ ce qui donne

$$(\rho S dx)cdT = (j_Q(x) - j_Q(x + dx))S dt$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\rho c dT = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} dt$$

Or d'après la loi de FOURIER :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \Rightarrow j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

C'est l'équation de la chaleur à une dimension

On note

$$D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

C'est la diffusivité thermique du matériau, exprimée en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$

Tableau des valeurs

Remarque- 18 :

1 - L'équation de la chaleur à trois dimension

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lambda \Delta T + P_{\text{autres}}$$

Avec P_{autres} la puissance volumique reçue par des mécanismes autres que la conduction.

2- Lorsque on remplace t par $-t$ l'équation de la chaleur ne reste plus invariante caractéristique d'un phénomène irréversible.

4.4.2 Régime stationnaire

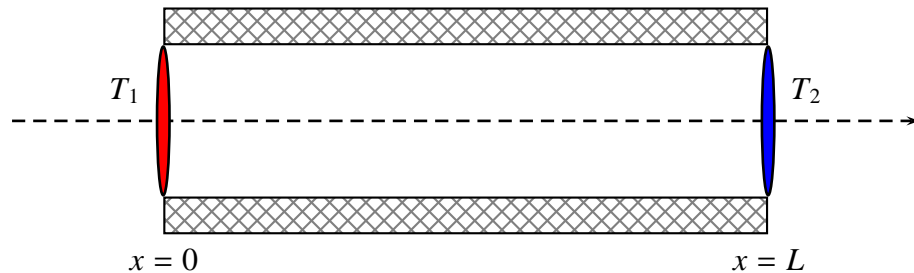
En régime stationnaire (la température ne dépend pas du temps), et en absence d'autres sources de transfert thermique que la conduction ; l'équation de la chaleur se simplifie :

$$\Delta T = 0$$

4.4.2.1 Cas d'une tige cylindrique isolée

Soit un tige homogène cylindrique de section S , de longueur L , et dont les extrémités sont maintenues aux températures T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$).

On suppose de plus qu'il n'y a aucun échange thermique entre la tige et le milieu extérieur par la surface latérale du cylindre (isolation thermique).



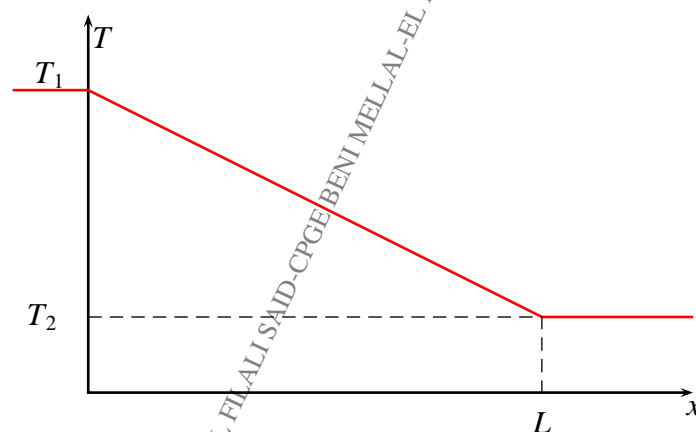
Le régime est stationnaire, la température est donc indépendante du temps. Le problème est unidimensionnel, la température ne dépend donc que de x . L'équation de la chaleur s'écrit alors :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) = a + bx$$

Les conditions aux limites : $T(x=0) = T_1$ et $T(x=L) = T_2$ ce qui donne

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

La représentation graphique est :



Soit λ la conductivité thermique du matériau constituant la tige. Le vecteur densité de courant thermique \vec{j}_Q à travers la section S est

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \Rightarrow \vec{j}_Q = \lambda \frac{T_2 - T_1}{L} \vec{e}_x$$

Dans ce cas le vecteur densité de courant thermique est un vecteur constant. Ainsi le flux thermique ϕ qui traverse la tige est

$$\phi = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \Rightarrow \phi = \lambda S \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Pour le flux totale

$$\phi_T = \phi_e + \phi_s \Rightarrow \phi_T = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{L} + \lambda S \frac{T_2 - T_1}{L} = 0$$

C'est un état stationnaire

4.4.2.2 Résistance thermique

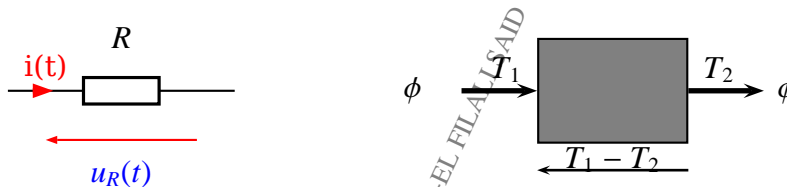
4.4.2.2.1 Définition

En régime stationnaire, on définit la résistance thermique qu'on note R_{th} par

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} \Rightarrow R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S}$$

Par analogie avec la définition de la résistance électrique d'une tige conductrice de mêmes dimensions que la tige précédente, de conductivité électrique σ , soumise à une différence de potentiel ($V_1 - V_2$) et parcourue par une intensité I (c'est-à-dire un flux de charges électriques) :

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} \Rightarrow R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}$$

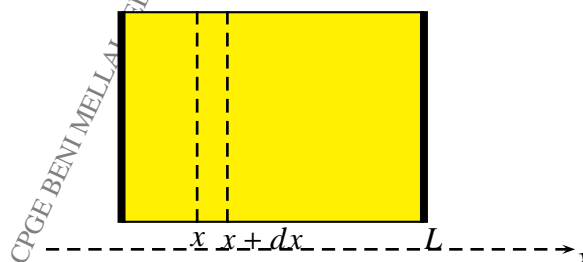


L'inverse de la résistance thermique s'appelle la *conductance thermique* :

$$G_{th} = \frac{1}{R_{th}} = \frac{\phi}{T_1 - T_2} = \lambda \frac{S}{L}$$

4.4.2.2.2 Détermination de la résistance thermique de dispositifs à géométrie circulaire et sphérique

considérons un système homogène, de conductivité thermique λ constante, de section S et d'épaisseur L .



On découpe ce système en éléments d'épaisseur infinitésimale dx , chaque portion représente une résistance thermique élémentaire :

$$dR_{th} = \frac{1}{\lambda S} dx \Rightarrow R_{th} = \int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{\lambda S} dx = \frac{1}{\lambda S} L$$

Appliquons ce principe de calcul à des milieux de géométrie différente.

4.4.2.2.1 Milieu à géométrie circulaire :

Considérons cylindre homogène de rayon interne R_1 , de rayon externe R_2 et de longueur L . La surface interne est maintenue à une température T_1 et la surface externe à la température T_2 . A la distance r de l'axe, on définit un cylindre de surface $S = 2\pi rL$ ayant une épaisseur élémentaire dr . Sa résistance thermique élémentaire s'exprime selon :

$$dR_{th} = \frac{1}{\lambda 2\pi rL} dr$$

Donc la résistance thermique totale

$$R_{th} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\lambda 2\pi rL} dr \Rightarrow R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

4.4.2.2.2 Milieu à géométrie sphérique :

Considérons une sphère creuse homogène de rayon interne R_1 et de rayon externe R_2 . Les surfaces internes et externes sont maintenues à la température T_1 et T_2 .

A la distance r de l'axe, on définit une sphère de surface $S = 4\pi r^2$ ayant une épaisseur élémentaire dr . Sa résistance thermique élémentaire est :

$$dR_{th} = \frac{1}{\lambda 4\pi r^2} dr$$

Donc la résistance thermique totale

$$R_{th} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\lambda 4\pi r^2} dr \Rightarrow R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

4.4.3 Transfert conducto-convectif : loi de NEWTON

On étudie le cas où le matériau étudié est en contact avec un milieu extérieur de température T_{ext} . On admet souvent que les échanges d'énergie à travers la surface du matériau sont régis par une loi linéaire, appelée loi de Newton :

Définition

loi de NEWTON

Les transferts thermiques entre un corps et le milieu extérieur suivent la loi de NEWTON si la densité de flux thermique sortant (algébriquement) à travers la surface du matériau est proportionnelle à l'écart de température entre T de la surface du matériau et T_{ext} du milieu extérieur :

$$j_{th} = h(T - T_{ext}) \quad (\text{Loi de Newton})$$

où h désigne le coefficient de transfert thermique de surface qui s'exprime en $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

Quatrième partie

ÉLECTROMAGNÉTISME

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

CHAPITRE 5

FORMULATION LOCALE DES LOIS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME EN RÉGIME STATIQUE

5.1 Formulation locale des lois de l'électrostatique

5.1.1 Rappel

- ▶ $dq = \rho d\tau = \sigma dS = \lambda dl$
- ▶ $\rho = \sum_i n_i q_i$ densité volumique de charge avec $n_i = \frac{dN_i}{d\tau}$ la densité particulière de la charge q_i
- ▶ Pour une charge ponctuelle : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$ et $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{r}$ (+cte $\xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$)
- ▶ Pour une distribution continue
- $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \iiint \frac{dq}{PM^2} \vec{u}$ avec $\|\vec{PM}\| = r$ et $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{r}$
- $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \iiint \frac{dq}{r}$
- ▶ $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(M)$.
- ▶ $V(M)$ est une fonction continue et défini à une constante additive près.
- ▶ Si la distribution est limitée dans l'espace alors on choisit $V(M \rightarrow \infty) = 0$.
- ▶ Les surfaces équipotentielles (SEP) est l'ensemble des points M de l'espace tel que $V(M) = Cte = V_o \in \mathbb{R}$.
- ▶ Les lignes de champs (LDC) sont des courbes telles que $\vec{E} // d\vec{OM} \Rightarrow \vec{E}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$.
- ▶ $\text{LDC} \perp \text{SEP}$
- ▶ $\vec{E} \in \bigcap \Pi_s$ et $\vec{E} \perp \Pi_A$.
- ▶ Théorème de Gauss (forme intégrale)

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_o}$$

- ▶ Le dipôle électrostatique : une distribution globalement neutre mais le barycentre des charges négative G_- diffère du barycentre des charges positives G_+ , se caractérise

par son moment dipolaire $\vec{P} = q\vec{G}_- \vec{G}_+$

• L'approximation dipolaire lorsque on s'intéresse à des points M très loin du dipole $r = OM \gg G_- G_+$

• Dans le cadre de l'approximation dipolaire on a :

$$\star V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cos \theta}{r^2}$$

$$\star \bullet E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2P \cos \theta}{r^3} \quad \bullet E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2P \sin \theta}{r^3} \quad \bullet E_\varphi = 0$$

$$\star E_p = \vec{P} \cdot \vec{E}_e$$

$$\star \vec{M} = \vec{P} \wedge \vec{E}_e$$

$$\star \vec{F} = \text{grad}(\vec{P} \cdot \vec{E}_e) \xrightarrow{\text{si dipole rigide}} \vec{0}$$

► Théorème de Gauss gravitationnel :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$$

5.1.2 Forme locale de la conservation de la circulation du champs électrostatique

On a $\vec{E} = -\text{grad} V \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{OM} = -\text{grad} V(M) \cdot d\vec{OM} = dV$ ce qui donne que $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} \Rightarrow \int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{OM}$ ce qui donne

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{OM}$$

Soit (Γ) un contour (courbe fermée quelconque) $\Rightarrow B \equiv A$ ce qui donne

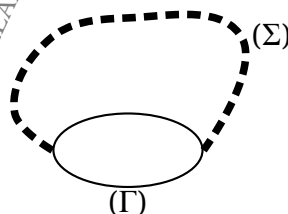
$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = 0$$

Avec \oint intégrer suivant le contour Γ

Or d'après le théorème de Stokes-Ampère

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{OM} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Ce qui donne que $\oint_{\Gamma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{E}(M) \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall \Gamma \text{ et } \Sigma \text{ une surface qui s'appuie sur } \Gamma$



On conclut que

$$\text{rot } \vec{E}(M) = \vec{0}$$

C'est à dire , en régime stationnaire ($\vec{E}(M)$ ne dépend pas du temps), le rotationnel du champ électrostatique est nul.

Remarque- 19 :

Soient Γ_1 et Γ_2 deux contours différents

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{E}(M).d\vec{OM} = \oint_{\Gamma_2} \vec{E}(M).d\vec{OM} = 0$$

C'est à dire la circulation du champ \vec{E} sur un contour est conservative.

On retient que :

En régime stationnaire le champ électrostatique est circulation conservative

Conclusion:

Conservation de la circulation du vecteur \vec{X} quelconque $\Rightarrow \text{rot } \vec{X} = \vec{0}$

5.1.3 Forme locale du théorème de Gauss. Équation de Poisson. Équation de Laplace

On a la forme intégrale du théorème de GAUSS : $\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$; Or $Q_{int} = \iiint_V \rho d\tau$
Ainsi le théorème de Green-Ostrogradsky

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A}.d\vec{S} = \iiint_{V(\Sigma)} \text{div } \vec{A} d\tau$$

Avec $V(\Sigma)$ le volume délimité par la surface fermée Σ et **div** un opérateur mathématique linéaire qui transforme un vecteur en scalaire son expression en coordonnées cartésiennes pour un vecteur

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \Rightarrow \text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Donc $\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M).d\vec{S} = \iiint_{V(\Sigma)} \text{div } \vec{E}(M) d\tau = \iiint_{V(\Sigma)} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$
cette égalité est vérifiée pour toute surface Σ fermée d'où

$$\text{div } \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

C'est l'équation de Maxwell-Gauss(M.G)

Sachant que $\vec{E}(M) = -\text{grad } V(M)$ alors $-\text{div} (\text{grad } V(M)) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Or

$$\text{div} (\text{grad } f(M)) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

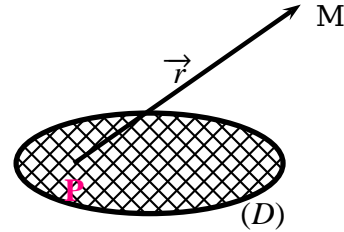
C'est l'opérateur Laplacien

D'où l'équation de Poisson

$$\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0$$

On admet que lorsque la distribution est limitée dans l'espace, la solution de l'équation de Poisson est de la forme

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho(P) d\tau}{r}$$



Avec $PM = r$

Cas particulier : si $\rho = 0$ alors :

$$\Delta V(M) = 0$$

C'est l'équation de Laplace

Ainsi

$$\text{div } \vec{E}(M) = 0$$

C'est à dire que dans une région de l'espace où il n'y a pas de charge le champ électrostatique est à flux conservatif (le nombre de vecteurs \vec{E} qui entrent à la surface fermée Σ est égale au nombre de vecteurs qui sortent).

$$\text{div } \vec{E} = 0 \iff \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Remarque- 20 :

► $\text{div } \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$ représente la première équation de MAXWELL et s'appelle équation de MAXWELL -GAUSS et se note (M.G)

► Pour une distribution (\mathfrak{D}) limitée dans l'espace, on a :

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} & \text{si } M \in \mathfrak{D} : \text{Le flux du champs n'est pas conservatif} \\ \text{div } \vec{E}(M) = 0 & \text{si } M \notin \mathfrak{D} \text{ le flux du champs est conservatif} \end{cases}$$

Application 7 :

Étude électrostatique d' une solution colloïdale

Une solution colloïdale (Le plasma sanguin et le blanc d'œuf par exemple) est constituée d'un solvant linéaire homogène et isotrope, de permittivité électrique supposée constante et uniforme : $\epsilon = 80\epsilon_0$. Où ϵ_0 est la permittivité du vide, dans lequel est introduit, un corps solide qui se disperse sous forme de particules.

On suppose que les particules solides sont toutes identiques, immobiles, assimilables à des sphères de rayon $R = 10 \text{ nm}$, distantes les une des autres de d et sont de taille très

grande devant celles des ions ; Ces particules portent, chacune, une charge constante $Q = 1,6 \cdot 10^{-12} C$, répartie uniformément à leurs surfaces extérieures.

On donne :

- $\epsilon_o = 8,85 \cdot 10^{-12} F.m^{-1}$ Permittivité électrique du vide
- $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$ Charge élémentaire
- $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} J.K^{-1}$ Constante de Boltzmann
- $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} mol^{-1}$ Nombre d'Avogadro

1-Etude de l'interaction entre particules en l'absence des ions

Dans un premier temps, on suppose que la solution colloïdale ne contient pas d'ions : Elle est donc constituée uniquement du solvant, de permittivité ϵ_o , et des particules solides précédemment citées.

On admet qu'autour d'une particule, la symétrie est sphérique ce qui implique que le potentiel $V_o(M)$, créé par cette même particule, n'est fonction que de la distance r qui sépare M du centre O de la particule.

1 Énoncer le théorème de Gauss du champ électrostatique, dans un solvant de permittivité absolue ϵ .

2 Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}_o(M)$ créé par la particule en tout point M de l'espace. on posera : $r = OM$

3 Tracer, soigneusement les variations de $E_o(r)$. Exprimer $E_o(R)$ en fonction de Q , R et ϵ .

4 Déterminer, minutieusement, le potentiel électrostatique $V_o(M)$ créé par la particule en tout point M de l'espace. Tracer $V_o(r)$.

5 Établir pour $r \geq R$, les équations en coordonnées sphériques des lignes de champ électrostatique et des surfaces équipotentielles. Illustrer votre réponse par une figure.

6 En déduire l'expression du vecteur \vec{F}_o qui modélise l'interaction entre deux particules (distances de d).

7 Évaluer numériquement l'intensité de la force $\vec{F}_o(d = 100R)$

2-Etude de l'interaction entre particules avec existence des ions

Dans cette partie, on tiendra compte de l'existence des ions de charges opposées : $q_i = \pm e$. On montre et on admet, dans ce cas, que suite à l'existence simultanée des particules et des ions, précédemment cités, ces derniers se répartissent dans le solvant sous l'effet du champ totale créé par le système $S \equiv \{ \text{ions ; particule} \}$ jusqu'à ce qu'ils acquièrent les densités particulières :

- $N_+(M) = N_o \exp\left(-\frac{eV(M)}{k_B T}\right)$ pour les ions positifs
- $N_-(M) = N_o \exp\left(\frac{eV(M)}{k_B T}\right)$ pour les ions négatifs

Avec :

- N_o : la densité particulaire globale des ions
- e : la charge élémentaire
- $V(M)$: Potentiel auquel est soumis l'ion M : créé par le système : $S \equiv \{ \text{ions ;} \}$

particule }

- k_B : Constante universelle de Boltzmann
- T : la température du milieu, supposée uniforme et constante et exprimée en Kelvin.

8 On rappelle la relation entre densité particulaire et densité de charge :

$$\rho(M) = \sum_{\text{ions}} q_i N_i(M)$$

Établir l'expression de la densité volumique de charge $\rho(M)$ entourant la particule (due aux ions) en fonction de N_o, e, k_B, T et $V(M)$.

9 Que devient cette expression si : $eV(M) \ll k_B T$ Cette expression reste valable pour la suite du problème.

10 On admet qu'autour d'une particule, la symétrie est sphérique aussi le potentiel $V(M)$, créé par cette même particule, n'est fonction que de la distance r qui sépare M du centre O de la particule ($R \leq r$) :

10.1 Quelle est la direction du champ électrostatique $\vec{E}(M)$? Justifier la réponse.

10.2 En déduire l'équation : $\frac{d}{dr}(r^2 \frac{dV}{dr}) + \frac{r^2 \rho(r)}{\epsilon_o} = 0$

10.3 Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $U(r) = rV(r)$, on posera :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon_o k_B T}{2N_o e^2}}$$

10.4 Résoudre cette équation, puis exprimer $V(r)$ en fonction de λ, r et d'une constante d'intégration C (l'autre constante étant nécessairement nulle, en se basant sur une condition au limite à préciser)

10.5 Quelle est la dimension de λ ? Donner une interprétation physique de cette grandeur. Quel est l'ordre de grandeur de λ à température ambiante pour une eau pure (donc neutre : $\text{pH} = 7$) ?

11 Détermination de l'expression de la constante d'intégration :

11.1 Écrire (en le justifiant) l'expression du champ électrostatique en un point extérieur à la particule .

11.2 En admettant l'égalité de l'expression précédente et celle trouvée pour $r = R$, déduire l'expression de la constante d'intégration C en fonction de Q, R, λ et ϵ .

11.3 Montrer alors que le potentiel créé par le système est :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \frac{\lambda}{R + \lambda} \exp\left(\frac{R - r}{\lambda}\right)$$

Justifier clairement l'appellation d'écrantage donné au phénomène .

12 Evaluation d'interaction électrostatique entre particules :

12.1 Exprimer le module $F(d)$ de la force modélisant les efforts entre deux particule distantes de d .

12.2 Exprimer le rapport : $\eta(d) = \frac{F(d)}{F_o(d)}$.

12.3 Calculer numériquement, à la température ambiante, $\eta(100R)$ dans l'eau pure, Le comparer à celui d'une solution aqueuse d'un électrolyte pour lequel :

$$N_o (\text{électrolyte}) = 100N_o (\text{eau pure})$$

Conclure.

CORRECTION - CORRECTION

1-Etude de l'interaction entre particules en l'absence des ions

① Le théorème de Gauss du champ électrostatique, dans un solvant de permittivité absolue ε

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon} \implies \text{div } \vec{E} = \frac{\rho(M)}{\varepsilon}$$

② Le champ électrostatique $\vec{E}_o(M)$ créé par la particule en tout point M de l'espace :

On a symétrie sphérique donc $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ ce qui donne :

► M à l'intérieur

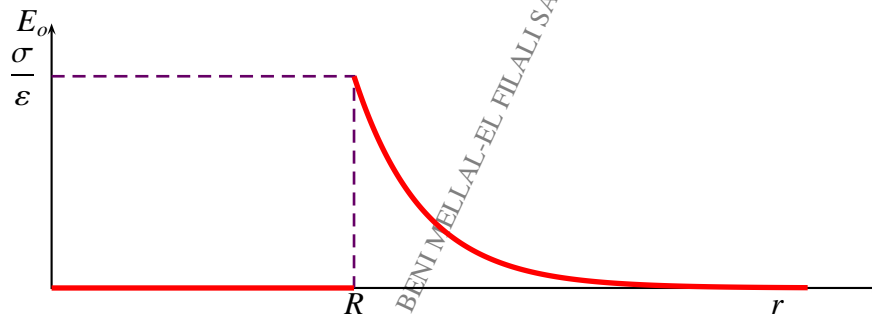
$$E_o(r < R) = 0$$

► M à l'extérieur

$$E_o(r > R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

Remarquons que pour une distribution limitée dans l'espace et pour un point M à l'extérieur, le tout ce passe comme si on a une charge ponctuelle placée au barycentre de la distribution.

③ Tracé de $E_o(r)$:



► Expression de :

$$\bullet E_o(R^-) = 0 \quad \bullet E_o(R^+) = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Remarquons que : $\vec{E}(R^+) - \vec{E}(R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{e}_r$ On retrouve la relation de passage (ici $\vec{n}_{int \rightarrow ext} = \vec{e}_r$)

④ Le potentiel électrostatique $V_o(M)$ créé par la particule en tout point M de l'espace :

$$\text{On a : } dV_o = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} \implies V(M) = -\int E(r)dr$$

► Pour M à l'extérieur

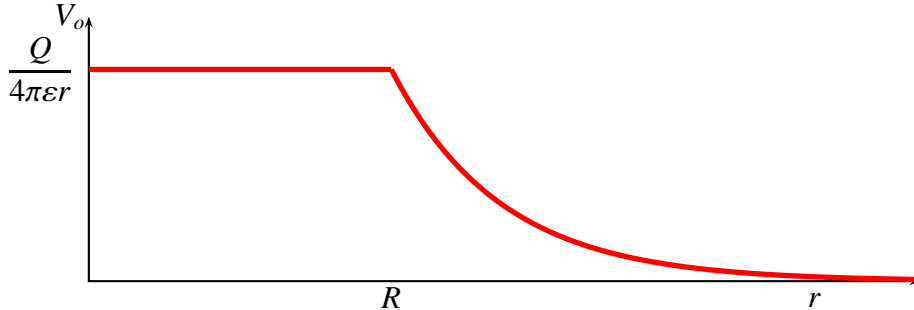
$$V_o(r > R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} (+cte \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0)$$

- Pour M à l'intérieur

$$V_o(r < R) = cte = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$$

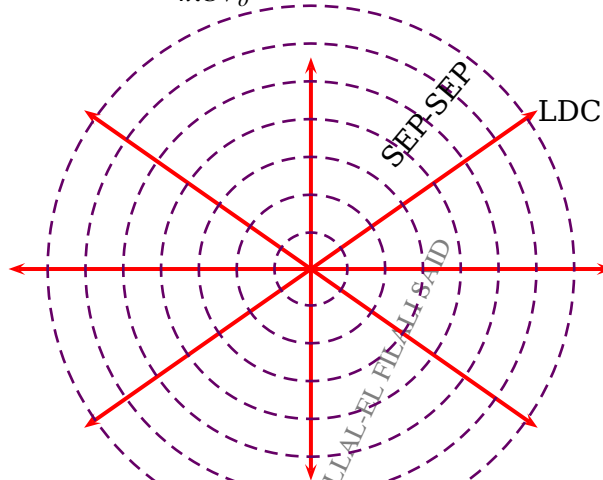
D'après la continuité du potentiel (puisque E est nul à l'intérieur).

Tracé de $V_o(r)$.



⑤ Pour $r \geq R$, les équations en coordonnées sphériques des lignes de champ électrostatique et des surfaces équipotentielles.

- On a : $\vec{E}_o = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r \Rightarrow$ les LDC sont des droites parallèles avec \vec{e}_r
- On a : $V_o = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = cte \Rightarrow r = \frac{Q}{4\pi\epsilon V_o} = Cte$ Les SEP sont des sphères concentriques
- Le tracé



⑥ L'expression du vecteur \vec{F}_o qui modélise l'interaction entre deux particules (distantes de d).

$$\vec{F}_o = Q\vec{E}(d) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon d^2} \vec{e}_r$$

⑦ AN :

$$F_o(d) = 2,88 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

2- Etude de l'interaction entre particules avec existence des ions

⑧ L'expression de la densité volumique de charge

$$\rho(M) = eN_+ + (-e)N_- \Rightarrow \rho(M) = -2eN_o \sinh \frac{eV(M)}{k_B T}$$

9 Si : $eV(M) \ll k_B T \Rightarrow -2eN_o \sinh \frac{eV(M)}{k_B T} \simeq -2eN_o \frac{eV(M)}{k_B T}$ alors

$$\rho(M) = -2eN_o \frac{eV(M)}{k_B T}$$

10 La symétrie est sphérique

10.1 La direction du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est radiale puisque le potentiel $V(M)$ ne dépend que de la variable r

10.2 D'après l'équation de POISSON et puisque

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right)$$

Il en résulte que

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) + \frac{\rho}{\varepsilon} r^2 = 0$$

10.3 L'équation différentielle vérifiée par la fonction $U(r) = rV(r)$:

On a $U = rV \Rightarrow V = \frac{U}{r}$ ce qui donne :

- $\frac{dV}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2}$
- $r^2 \frac{dV}{dr} = r \frac{dU}{dr} - U$
- $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = r \frac{d^2 U}{dr^2}$
- L'équation de POISSON donne

$$r \left(\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{2N_o e^2}{K_B T \varepsilon} U \right) = 0$$

11 Résolution : On cherche une solution pour $r \neq 0$ si non $U = 0$ et on posant

$$\lambda = \sqrt{\frac{K_B T \varepsilon}{2N_o e^2}}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{1}{\lambda^2} U = 0$$

La solution est

$$U(r) = A \exp(-r/\lambda) + B \exp(r/\lambda) \quad (A, B) \in \mathbb{R}$$

Par conséquent

$$V(r) = \frac{1}{r} (A e^{-r/\lambda} + B e^{r/\lambda})$$

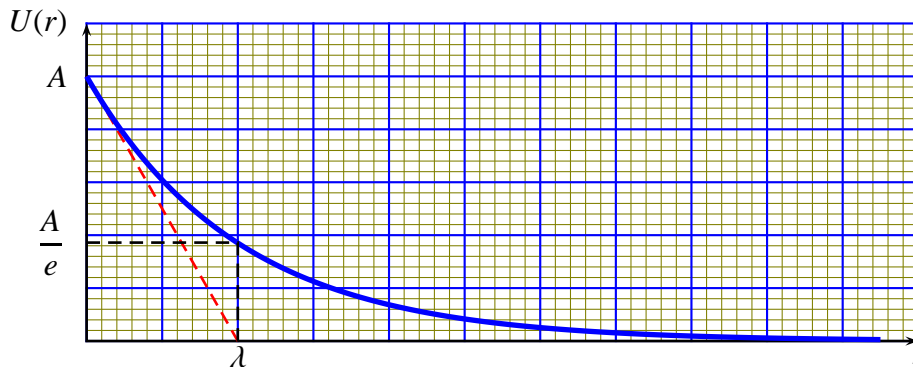
Comme $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0 \Rightarrow B = 0$ On conclut donc que

$$V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\lambda}$$

12 La dimension de λ est une distance

- λ s'appelle longueur de DEBYE
- L'interprétation physique de λ : C'est la distance nécessaire pour que

$$U(r = \lambda) = U(r = 0)/e$$



• L'ordre de grandeur de λ à température ambiante pour une eau pure (donc neutre : pH = 7)

- $T = 298 \text{ K}$ - $pH = 7 \Rightarrow C = 10^{-7}$ - $N_o = CN_A$ ce qui donne

$$\lambda = 30,73 \mu\text{m}$$

13 Détermination de l'expression de la constante d'intégration :

13.1 L'expression du champ électrostatique en un point extérieur à la particule

On a $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(r) \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$ par dérivation on obtient

$$E(r) = \frac{A}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-r/\lambda}$$

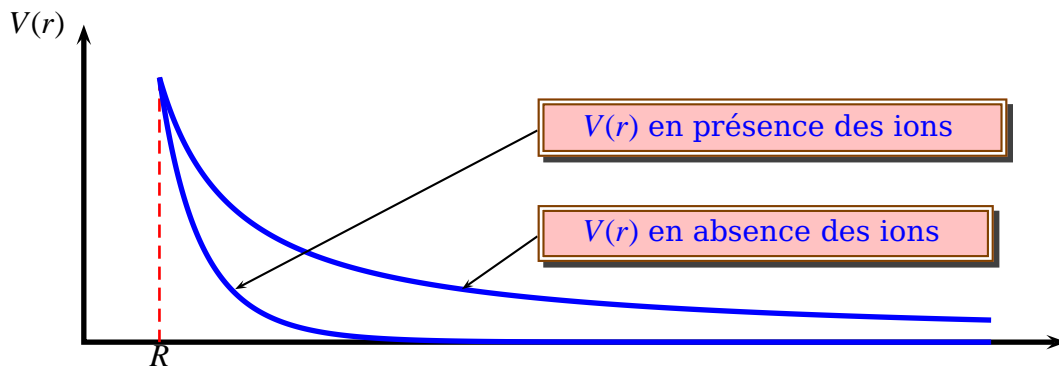
13.2 L'égalité de l'expression donne

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} = \frac{A}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-R/\lambda} \Rightarrow A = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon(\lambda + R)} e^{R/\lambda}$$

13.3 Le potentiel créé par le système est :

On remplace A par sa valeur on obtient

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \frac{\lambda}{R + \lambda} \exp\left(\frac{R - r}{\lambda}\right)$$



En présence des ions le potentiel décroît rapidement vers 0 comparaison en absence de charges : les ions font écran à la particule chargée (ie la particule possède une énergie potentielle plus grande en absence des ions et par conséquent les ions diminuent son énergie potentielle) : c'est l'écrantage donné au phénomène .

14 Evaluation d'interaction électrostatique entre particules :

14.1 Le module $F(d)$ de la force modélisant les efforts entre deux particules distantes de d .

$$F(d) = QE(d) \Rightarrow F(d) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon d} \frac{\lambda}{R + \lambda} \exp\left(\frac{R-d}{\lambda}\right) = F_o(d) \frac{d\lambda}{R + \lambda} \exp\left(\frac{R-d}{\lambda}\right)$$

14.2 Le rapport : $\eta(d) = \frac{F(d)}{F_o(d)} = \frac{d\lambda}{R + \lambda} \exp\left(\frac{R-d}{\lambda}\right)$.

14.3 A.N :

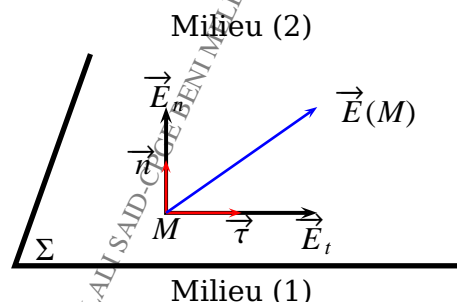
$$\eta = 0,968 \Rightarrow F(d) \simeq F_o(d)$$

Conclusion:

L'effet d'écran diminue rapidement

5.1.4 Relation de passages

Soient deux milieux séparés par une surface chargée Σ et M un point quelconque de Σ



Soient \vec{E}_1 le champ électrostatique dans le milieu (1) et \vec{E}_2 le champ électrostatique dans le milieu (2).

On définit un trièdre local $(M, \vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ tel que :

- $\vec{\tau}$ vecteur unitaire tangent à la surface Σ au point M.

- \vec{n} vecteur unitaire normale à la surface Σ au point M.

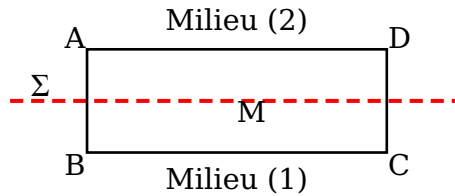
- $\vec{E} \in (\vec{\tau}, \vec{n}) \Rightarrow \vec{E} = E_t \vec{\tau} + E_n \vec{n}$

avec E_t la composante tangentielle de \vec{E} et E_n la composante normale.

5.1.4.1 Composante tangentielle

On rappelle que en régime stationnaire le champs électrostatique est à circulation conservative c'est à dire $\oint \vec{E} \cdot d\vec{OM} = 0$

Considérons le contour ABCDA entourant le point M suivant :



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{OM} = 0 \Rightarrow \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{OM} + \int_B^C \vec{E}_1 \cdot d\vec{OM} + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{OM} + \int_D^A \vec{E}_2 \cdot d\vec{OM} = 0$$

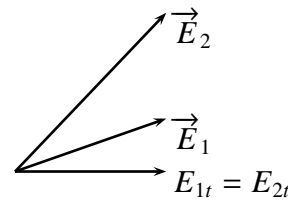
Lorsque $A \rightarrow B$ de même $C \rightarrow D$ alors $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{OM} = 0$

Or $\int_B^C \vec{E}_1 \cdot d\vec{OM} = E_{1t}L$ et $\int_D^A \vec{E}_2 \cdot d\vec{OM} = -E_{2t}L$ ce qui donne

$$(E_{1t} - E_{2t})L = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

On retient que :

La composante tangentielle du champ électrostatique à la traversée d'une surface est toujours continue



5.1.4.2 Composante normale

Considérons un cylindre de génératrice $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ centré en M de hauteur h . Appliquons le théorème de

Gauss : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ ce qui donne :

$$\iint_{S_{inf}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{sup}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

sachant que $\lim_{h \rightarrow 0} \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ et $Q_{int} = \sigma S$

alors

$$\iint_{S_{inf}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{sup}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_{2n}S - E_{1n}S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

Ce qui donne

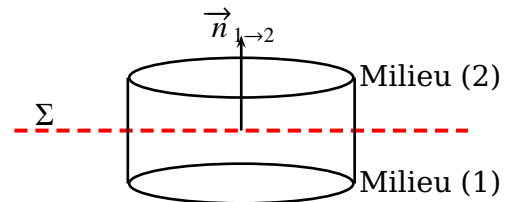
$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

On retient que :

La composante normale du champ électrostatique à la traversée d'une surface chargée est discontinue

Conclusion :

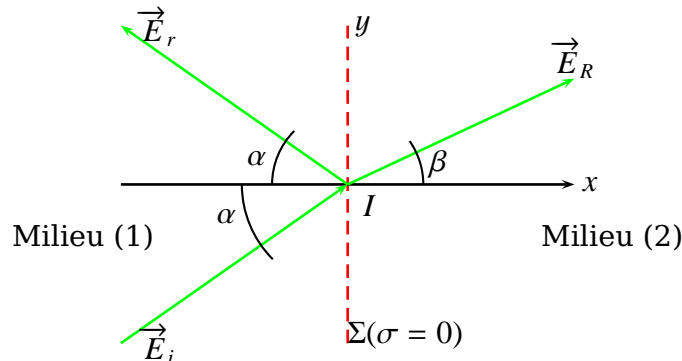
$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$



C'est la relation de passage

Application : Réflexion et réfraction du champ électrostatique

Soit \vec{E}_i un champ incident sur un dioptré non chargé au point I, \vec{E}_r et \vec{E}_R les champs réfléchis et réfractés.



Puisque la surface (Σ) n'est pas chargée alors il y a continuité des composantes tangentielles et normales.

Si on pose $E = \|\vec{E}\|$ alors :

- Continuité des composantes tangentielles

$$E_i \sin \alpha + E_r \sin \alpha = E_R \sin \beta$$

- Continuité des composantes normales

$$E_i \cos \alpha - E_r \cos \alpha = E_R \cos \beta$$

À propos du théorème de Gauss

Première partie : Le théorème de Gauss

① Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée est égal au rapport de la charge intérieure à la surface sur ϵ_0 :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

L'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ permet de démontrer le théorème de Gauss.

Deuxième partie : Condensateur plan

② Soit le plan infini chargé xOy.

$\vec{E}(M)$ est un vecteur donc il appartient aux plans de symétrie des charges (M, \vec{e}_x, \vec{e}_z) et (M, \vec{e}_y, \vec{e}_z) :

Ainsi invariance par translation donne

$$\vec{E}(M) = E(x, y, z) \vec{e}_z = E_z(z) \vec{e}_z$$

car les directions Ox et Oy sont infinies.

Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie des charges donc $E_z(z) = -E_z(-z)$

On considère un cylindre d'axe zz , de rayon R , se trouvant entre les plans z et $-z$ ($z > 0$).

Par application de Gauss :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_z \pi R^2 - E_z(-z) \pi R^2 = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0}$$

ce qui donne

$$\vec{E}(M) = \text{signe}(z) \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

3

3.1 On prend le plan(1) ($-\sigma$) en $z = 0$ et le plan(2)(σ) en $z = d$.

D'après le théorème de superposition on a :

- Pour $z < 0$: $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = \vec{0}$
- Pour $0 < z < d$: $\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$
- Pour $d < z$: $\vec{E}(M) = \vec{0}$

3.2 Le potentiel le plus élevé est celui du plan (2) :

$$U = V_2(z = d) - V_1(z = 0) = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

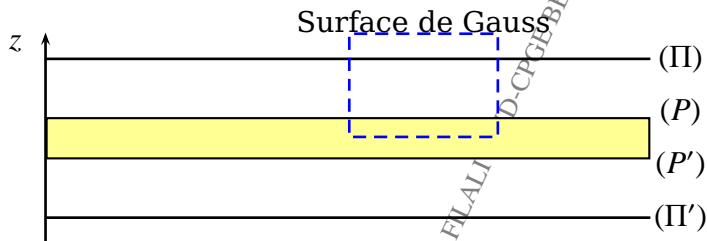
3.3 On a, pour le plan2 (σ) :

$$Q = \sigma S = V(V_2 - V_1) = CU \Rightarrow \frac{C}{S} = \frac{\epsilon_0}{d}$$

4 Le champ électrostatique qui règne dans le condensateur déplace les électrons de la lame jusqu'à ce que le champ total régnant dans cette lame soit nul.

Il apparaît des charges négatives sur le plan (P) et des charges positives sur le plan (P').

5



On applique le théorème de Gauss à un cylindre de section S et d'axe $z'z$ (voir dessin), le champ entre les armatures est toujours de la forme $\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z$

Le champ électrique est nul sur les surfaces S et aucun flux ne sort par la surface latérale, donc

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma S + \sigma_p S) \Rightarrow \sigma_p = -\sigma$$

De même, on en déduit que

$$\sigma_{p'} = +\sigma$$

6

6.1 On retrouve les mêmes condensateurs séparés de la distance $\frac{d-e}{2}$

Entre (P) et (II), $\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z$; Entre (P') et (II'); $\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z$.

D'où

$$U' = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\sigma(d-e)}{\epsilon_0}$$

6.2 On a, pour le plan (II) : $Q = \sigma S = C' U'$

D'où

$$\frac{C'}{S} = \frac{\epsilon_0}{d-e} \Rightarrow \frac{C'}{S} = \left(\frac{C}{S}\right) \frac{d}{d-e} > \frac{C}{S}$$

La capacité en présence de la lame est plus grande que sans la lame.

Troisième partie : Condensateur cylindrique

7

On considère un cylindre de même axe que ceux de la distribution de rayon r et de hauteur H . Comme le champ est radial :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 2\pi r H$$

Le théorème de Gauss donne :

$$\oiint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

- Pour $r < R_1$: $Q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{0}$.
- Pour $r > R_2$: $Q_{int} = Q - Q = 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{0}$.
- Pour $R_1 < r < R_2$: $Q_{int} = Q \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r H} \vec{u}$.

8

On a : $E_r = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln r + cte$

Comme pour $r = R_1$ on a $V = V_1$ alors $V(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln \frac{R_1}{r} + V_1$

Ce qui donne

$$U = V_2 - V_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

9

$$Q = C(V_1 - V_2) \Rightarrow C = 2\pi\epsilon_0 H \frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

10 On a : $W = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\tau = \iiint_{\text{cond}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 r dr d\theta dz$
En intégrant

$$W_{\text{cond}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 H} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2C} Q^2$$

11 Comme $C = 2\pi\varepsilon_0 H / \ln(1 + e/R_1)$ et $\ln(1+x) \simeq x$ on peut en déduire que

$$C = 2\pi\varepsilon_0 H \frac{R_1}{e} = \varepsilon_0 \frac{S_{\text{lat}}}{e}$$

C'est la capacité d'un condensateur plan dont les armatures sont séparées de e et ont une surface $S = 2\pi R_1 H$.

5.2 Formulation locale des lois de la magnétostatique

5.2.1 Potentiel vecteur. Forme locale du théorème d'AMPÈRE

5.2.1.1 Définition

On rappelle que le champ magnétique est à flux conservatif c'est à dire

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0 \implies \text{div } \vec{B}(M) = 0$$

Or pour tout vecteur \vec{V} quelconque

$$\text{div } \text{rot } \vec{V} = 0 \quad \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})}_{=0} = 0$$

il en résulte que

$$\text{div } \vec{B}(M) = 0 \iff \vec{B}(M) = \text{rot } \vec{A}(M)$$

$\vec{A}(M)$ est appelé potentiel vecteur.

Remarque- 21 :

- \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire $V(M)$ par contre $\vec{B}(M)$ dérive d'un **potentiel vecteur** $\vec{A}(M)$.
- Le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ présente les mêmes symétries que la source du champs (I ou \vec{j}).
- Le potentiel vecteur \vec{A} n'est pas unique, en effet si on pose

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f$$

avec f une fonction scalaire quelconque alors

$$\vec{\text{rot}} \vec{A}' = \vec{\text{rot}} \vec{A} + \vec{\text{grad}} f(M) \implies \vec{\text{rot}} \vec{A}' = \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$$

On retient que :

Le champ magnétique \vec{B} est unique par contre le potentiel vecteur \vec{A} est défini à un $\vec{\text{grad}}$ près

► **Relation intégrale entre \vec{A} et \vec{B} :**

On applique le théorème Stokes pour le potentiel vecteur

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Ce qui donne sachant que $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Application 8 :

Considérons un fil rectiligne infini traversé par un courant I constant.

Déterminons le potentiel vecteur \vec{A} avec $\vec{A}(r=R) = \vec{0}$. par les relations locale et intégrale

on rappelle que : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{e}_{\theta}$

Ainsi :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_{\theta} + \left(\frac{\partial A_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Le courant I a le même sens que \vec{e}_z et par conséquent $\vec{A}(M) = A_z(r) \vec{e}_z$

Première méthode : Relation locale

On a $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ ce qui donne :

$$\begin{cases} B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial z} \\ B_{\theta} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B_z = \frac{\partial A_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial z} \\ \frac{\mu_o I}{2\pi r} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ 0 = \frac{\partial A_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{cases}$$

Il en résulte que : $\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{d A_z}{d r} = -\frac{\mu_o I}{2\pi r}$ Ce qui donne

$$\vec{A}(M)_{\text{fil infini}} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$$

Deuxième méthode : Relation intégrale

Soit le contour Γ : rectangle de largeur dr et de longueur h .

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_{PQ} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} + \int_{QR} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} + \int_{RS} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} + \int_{SP} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

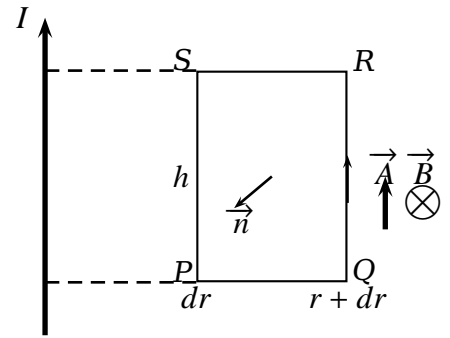
$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = (A(r+dr) - A(r))h.$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -Bhdr$$

Il en résulte que :

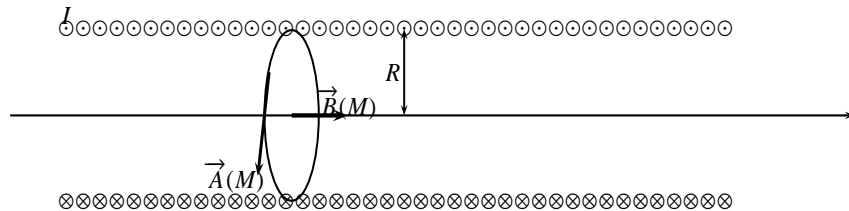
$$(A_z(r+dr) - A_z(r))h = -Bhdr \Rightarrow \frac{dA_z}{dr} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ Ce qui donne avec } A_z(R) = 0 :$$

$$\vec{A}(M)_{\text{fil infini}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$$



Application 9 :

Solénoïde infini



Symétrie et invariance donne $\vec{A}(M) = A(r)\vec{e}_\theta$ donc Γ est un cercle de rayon r On rappelle que $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$

► Pour $r < R$:

$$\oint \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow 2\pi r A(r) = \mu_0 n I \pi r^2 \text{ ce qui donne}$$

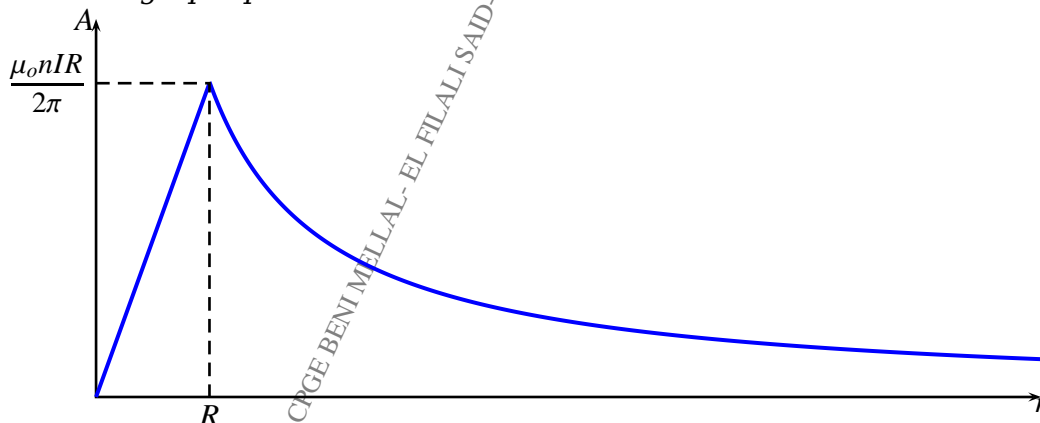
$$\vec{A}(r < R) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi} r \vec{e}_\theta$$

► Pour $r > R$:

$$\oint \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow 2\pi r A(r) = \mu_0 n I \pi R^2 \text{ ce qui donne}$$

$$\vec{A}(r > R) = \frac{\mu_0 n I R^2}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Représentation graphique :



5.2.1.2 Forme locale du théorème d'AMPÈRE

On rappelle que $\oint \vec{B}(M).d\vec{\ell} = \mu_o I_e$

Or d'après le théorème de STOKES-AMPÈRE : $\oint \vec{B}(M).d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{\text{rot}} \vec{B}(M).d\vec{S}$

Ainsi $I_e = \iint_{\Sigma} \vec{j}.d\vec{S}$ ce qui donne

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}(M) = \mu_o \vec{j}$$

C'est l'équation de MAXWELL -AMPÈRE simplifiée

Remarque- 22 :

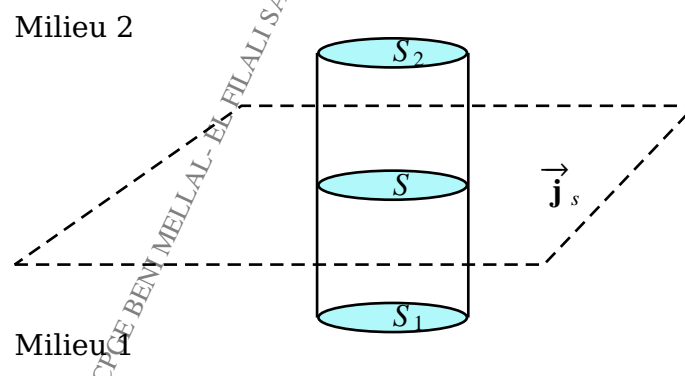
Comparaison des lois de conservation pour \vec{E} et \vec{B} en régime stationnaire

	Flux	Circulation
\vec{E}	<p>▶ Non conservé</p> <p>▶ $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$ (M.G)</p> <p>▶ $\iint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_o}$ (T.G)</p>	<p>▶ Conservée</p> <p>▶ $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$</p> <p>▶ $\oint \vec{E}.d\vec{\ell} = 0$</p>
\vec{B}	<p>▶ conservé</p> <p>▶ $\text{div} \vec{B} = 0$ (M.T)</p> <p>▶ $\iint_{\Sigma} \vec{B}.d\vec{S} = 0$</p>	<p>▶ Non Conservée</p> <p>▶ $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_o \vec{j}$ (M.A)</p> <p>▶ $\oint \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_o I_e$</p>

5.2.2 Relation de passage

5.2.2.1 La composante normale

Soit une distribution surfacique de courant \vec{j}_s séparant l'espace en deux régions 1 et 2. Considérons une surface fermée fictive Σ , traversant la nappe de courant.



La conservation du flux magnétique a travers cette surface s'écrit :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_L} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Où S_L est la surface latérale et S_1 et S_2 les surfaces de bases inférieure et supérieure. Lorsqu'on fait tendre la surface latérale vers zéro (S_1 tend vers S_2), on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \iint_{S_1=S_2} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot d\vec{S} &= 0 \end{aligned}$$

Puisque : $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2 = dS \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$

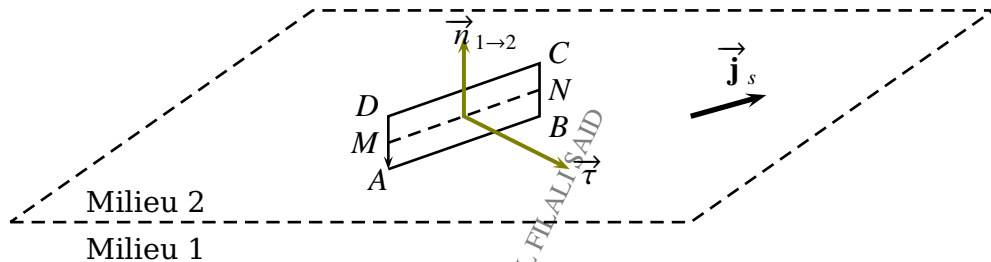
Dans cette limite. Ce résultat étant valable quelque soit la surface S choisie, il vient donc que :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 \implies B_{2n} = B_{1n}$$

La composante normale du champ magnétostatique est continue

5.2.2.2 La composante tangentielle

Pour la composante tangentielle, nous allons utiliser le théorème d'AMPÈRE .
Considérons le contour d'AMPÈRE suivant :



Remarquons que :

- $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$, $\vec{\tau}$ et $\vec{b} = \frac{\vec{MN}}{MN}$ est un trièdre direct.
- $\vec{j}_s \in (\vec{\tau}, \vec{b})$.
- $I_e = \iint_{ABCD} \vec{j} \cdot d\vec{S} \implies I_e = \int_{MN} (\vec{j}_s \cdot \vec{\tau}) d\ell$

Le théorème d'Ampere s'écrit alors :

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e$$

Lorsque $DA \rightarrow 0$ alors on a :

$$\int_{MN} (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot d\vec{\ell} = \int_{MN} (\mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{\tau}) d\ell$$

Puisque MN est quelconque alors

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot d\vec{\ell} = (\mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{\tau}) d\ell$$

Or $\vec{d\ell} = d\ell \vec{b} \Rightarrow d\ell(\vec{\tau} \wedge -\vec{n}_{1 \rightarrow 2})$ ce qui donne

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2).d\ell(\vec{\tau} \wedge -\vec{n}_{1 \rightarrow 2}) = \mu_o \vec{j}_s.(\vec{\tau} d\ell)$$

On rappelle que

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c} = (\vec{b} \wedge \vec{c}).\vec{a} = (\vec{c} \wedge \vec{a}).\vec{b}$$

Permutation circulaire

Il en résulte puisque MN est quelconque (la direction du vecteur $\vec{\tau}$ est quelconque) que

$$[(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}].\vec{\tau} d\ell = \mu_o \vec{j}_s.\vec{\tau} d\ell$$

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \mu_o \vec{j}_s \Rightarrow (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_o \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue.

Puisque

$$[(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}] \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)$$

5.2.3 Équation de POISSON de la magnétostatique

On rappelle que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \text{rot } (\text{rot } \vec{A})$

Or $\text{rot } (\text{rot } \vec{A}) = \text{grad } (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

Puisque le potentiel vecteur \vec{A} n'est pas unique, et si on impose au potentiel vecteur \vec{A} de vérifier la jauge de COULOMB **valable en régime stationnaire**

$$\text{div } \vec{A} = 0$$

Jauge de COULOMB

Alors on obtient

$$\Delta \vec{A} + \mu_o \vec{j} = \vec{0}$$

C'est l'équation de POISSON de la magnétostatique

Remarque- 23 :

L'équation vectorielle de POISSON est équivalente à trois équations scalaires (projetées sur les axes); en coordonnées cartésiennes par exemples elle est équivalente à :

$$\Delta \vec{A} + \mu_o \vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \Delta A_x + \mu_o j_x = 0 \\ \Delta A_y + \mu_o j_y = 0 \\ \Delta A_z + \mu_o j_z = 0 \end{cases}$$

Si on compare les équations de POISSON pour le potentiel électrostatique $V(M)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$

Électrostatique	Magnétostatique
$\Delta V(M) + \frac{1}{\epsilon_0} \rho = 0$	$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$
$V(M)$	$\vec{A}(M)$
ρ	\vec{j}
$\frac{1}{\epsilon_0}$	μ_0

Par analogie on montre que la solution de l'équation de POISSON pour la magnétostatique lorsque le potentiel vecteur vérifie la jauge de COULOMB pour une **distribution finie**

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{d\vec{C}}{PM}$$

C'est à dire

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{d\vec{C}}{PM} \xrightarrow[\text{volumique}]{\text{Distribution}} \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j} d\tau}{r} \xrightarrow[\text{surfacique}]{\text{Distribution}} \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{j}_s dS}{r} \xrightarrow[\text{linéique}]{\text{Distribution}} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{Id\ell}{r}$$

Remarque- 24 :

► Pour une **distribution infinie**, le calcul du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ se fait à partir de la relation $\vec{B}(M) = \text{rot } \vec{A}(M)$.

► Le potentiel vecteur \vec{A} est un vrai vecteur et par conséquent possède les mêmes propriétés que le champ \vec{E}

$$\vec{A} \in \Pi_S ; \vec{A} \perp \Pi_A$$

En plus possède le même sens que le courant

5.2.4 Applications (énoncé voir TD)



Potentiel vecteur d'un champ stationnaire uniforme.

En coordonnées cartésiennes On a : $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B_o\vec{e}_z$ donc

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & B_o \\ 0 & y & z \\ B_o & z & 0 \end{vmatrix} \wedge \vec{y} \Rightarrow \vec{A} = \begin{vmatrix} A_x = -\frac{1}{2}B_o y \\ A_y = \frac{1}{2}B_o x \\ A_z = 0 \end{vmatrix}$$

\vec{A} est un potentiel vecteur vérifiant la jauge de COULOMB si $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ et $\text{div } \vec{A} = 0$

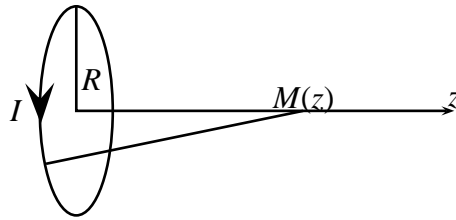
$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{2}B_o y & \frac{1}{2}B_o x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 & 0 & B_o \\ 0 & y & z \\ B_o & z & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{rot } \vec{A} = B_o \vec{e}_z.$$

$$\blacktriangleright \text{div } \vec{A} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial(B_o y)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(B_o x)}{\partial y} \right) \Rightarrow \text{div } \vec{A} = 0$$

on retient que si \vec{B} est un champ magnétostatique alors il dérive d'un potentiel vecteur vérifiant la jauge de COULOMB

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B}_o \wedge \vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{B}_o \wedge \vec{r}$$

2 Spire circulaire



$$\begin{aligned} \vec{A}(M) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{\ell}}{PM} \Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \frac{R d\theta \vec{e}_\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}} \\ &\Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu_o I R}{4\pi \sqrt{R^2 + z^2}} \oint d\theta \vec{e}_\theta \\ &\Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu_o I R}{4\pi \sqrt{R^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z) d\theta \end{aligned}$$

$$\vec{A}(M \in oz)_{\text{Spire circulaire}} = \vec{0}$$

3 Cylindre infini

Symétrie et invariance donne :

$$\vec{A}(M) = A_z(r) \vec{e}_z$$

On rappelle que

$$\begin{cases} r \leq R \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{2\pi R^2} r \vec{e}_\theta \\ r \geq R \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

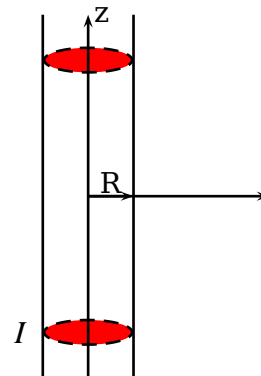
$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \frac{dA_z(r)}{dr} = B_\theta$$

ce qui donne :

$$A(r) = - \int B(r) dr$$

► Pour

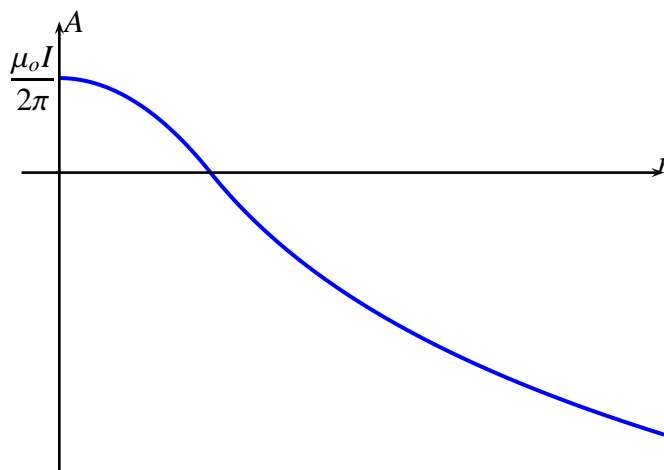
$$r \leq R \Rightarrow A = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2} (R^2 - r^2)$$



► Pour

$$r \geq R \Rightarrow A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$$

Représentation graphique



CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

CHAPITRE 6

L'ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UN COURANT

6.1 Force de LORENTZ

Soit M une particule de charge q animée de la vitesse $\vec{V}(M) = \vec{V}$ par rapport à un référentiel supposé galiléen, dans une région de l'espace où règne un champ \vec{E} et un champ \vec{B} .

Cette particule est soumise à la force de LORENTZ

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

Remarque- 25 :

- Les trois vecteurs \vec{V} , \vec{E} et \vec{B} doivent être exprimées dans le même référentiel galiléen (lié au conducteur).
- On peut mettre la force de LORENTZ sous la forme

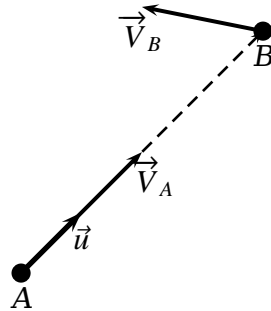
$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{F}_e = q\vec{E} \\ \vec{F}_m = q\vec{V} \wedge \vec{B} \end{cases}$$

- La force magnétique ne travaille pas, ainsi sa puissance est nulle. En effet :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_m) = \vec{F}_m \cdot \vec{V} = 0$$

Et par conséquent lorsque la force magnétique existe seule, l'énergie cinétique de la particule est conservée.

► **La force magnétique viole le principe d'action et de réaction**, en effet :
Supposons deux particules chargées $A(q_A, \vec{V}_A)$ et $B(q_B, \vec{V}_B)$ et que la particule A se dirige vers la particule B.



Le champ magnétique créé par A est donc nul en B puisque :

$$\vec{B}_A(B) = \frac{\mu_o q_A}{4\pi r^2} \vec{V}_A \wedge \vec{u} = \vec{0} \quad (\vec{V}_A \parallel \vec{u})$$

Il en résulte que $\vec{F}_{A/B} = \vec{0}$

Or Le champ magnétique créé par B en A n'est pas nul :

$$\vec{B}_B(A) = \frac{\mu_o q_B}{4\pi r^2} \vec{V}_B \wedge (-\vec{u}) \neq \vec{0} \implies \vec{F}_{B/A} \neq \vec{0}$$

on retient que la force magnétique ne vérifie pas la troisième loi de NEWTON

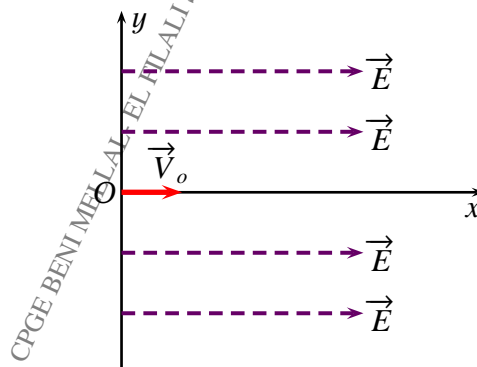
Application 10 :

Déterminer l'équation de la trajectoire dans les cas suivantes avec $\vec{OM}(t=0) = \vec{0}$:

- ① $\vec{E} = E\vec{e}_x$, $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{V}_o = V_o\vec{e}_x$
- ② $\vec{E} = E\vec{e}_y$, $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{V}_o = V_o\vec{e}_x$
- ③ $\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et $\vec{V}_o = V_o\vec{e}_x$
- ④ $\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et \vec{V}_o fait un angle α avec l'axe oz.

Correction - Correction

①



$$\begin{aligned} \blacktriangleright \ddot{x} &= \frac{qE}{m} \implies \dot{x} = \frac{qE}{m}t + V_o \\ \blacktriangleright \overrightarrow{OM} &= x\vec{e}_x = \left(\frac{qE}{2m}t^2 + V_o t\right)\vec{e}_x \end{aligned}$$

Remarque- 26 :

Lorsque \vec{E} est parallèle à la vitesse initiale \vec{V}_o , il joue le rôle d'un champ accélérateur

(2)

Dans \mathcal{R} supposé galiléen ainsi en négligeant le poids ; on a :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 & (I) \\ m\ddot{y} = 0 & (II) \\ m\ddot{z} = 0 & (III) \end{cases}$$

- (III) donne le mvt est plan
- (I) donne : $x(t) = V_o t$
- (II) donne : $y(t) = \frac{qE}{2m}t^2$
- L'équation de la trajectoire

$$y = \frac{qE}{2mV_o^2}x^2$$

- Les coordonnées du point I :

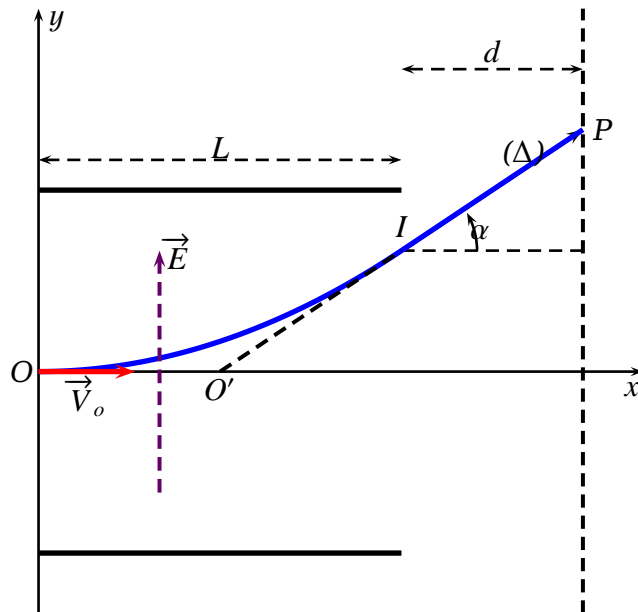
$$\overrightarrow{OI} = L\vec{e}_x + \frac{qE}{2mV_o^2}L^2\vec{e}_y$$

Entre les points I et P on le mvt est rectiligne uniforme de vitesse $\vec{V}(I)$ dont les composantes sont

$$\vec{V}(I) = V_o\vec{e}_x + \frac{qE}{mV_o}L\vec{e}_y$$

- l'équation de la droite (Δ) s'écrit $y_\Delta = kx + k'$ avec
- $k = \tan \alpha = \frac{V_y(I)}{V_x(I)} = \frac{qEL}{mV_o^2}$
- $y_\Delta = \frac{qEL}{mV_o^2}(x - L/2)$

L'intersection de la droite (Δ) avec l'axe ox se fait en $x(O') = L/2$



L'ordonnée du point P

$$y_P = (d + L/2) \tan \alpha = \frac{qEL}{mV_o^2} (d + L/2)$$

Remarque- 27 :

Dans ce cas ($\vec{V}_o \perp \vec{E}$), le champ électrostatique joue le rôle d'un champ accélérateur et déviateur.

③

On a d'après la RFD

$$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB}{m} \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{qB}{m} \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

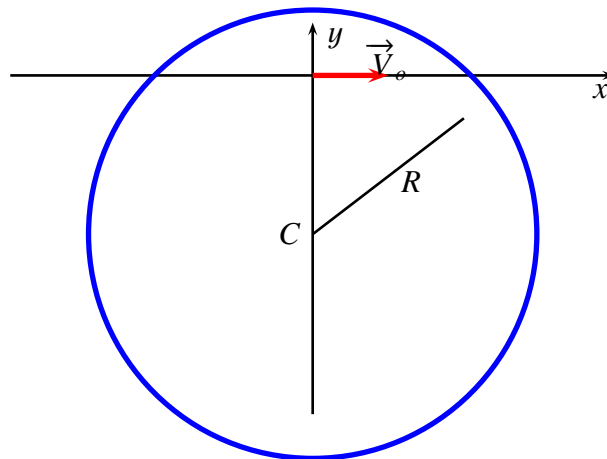
► En posant $\omega = \frac{qB}{m}$ et $R = \frac{V_o}{\omega}$ on obtient :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = R \sin \omega t \\ y(t) = R(\cos \omega t - 1) \\ z(t) = 0 \Rightarrow \text{mvt plan} \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire

$$x^2 + (y + R)^2 = R^2$$

C'est un cercle de rayon R et de centre C(0, -R)



Conclusion:

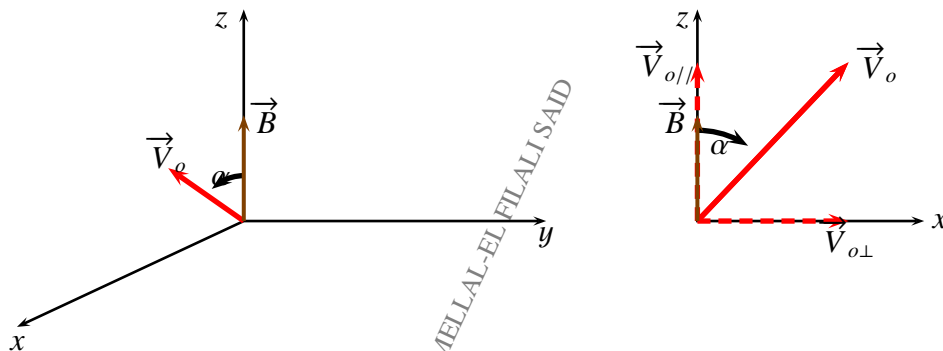
Si la vitesse initiale \vec{V}_o est perpendiculaire au champs \vec{B} uniforme alors la trajectoire est circulaire

④ On a :

$$\vec{V}_o \begin{cases} V_o \sin \alpha = V_{o\perp} \\ V_o \cos \alpha = V_{o\parallel} \\ 0 \end{cases}$$

Remarque- 28 :

la notion perpendiculaire et parallèle relative au champ magnétostatique \vec{B}



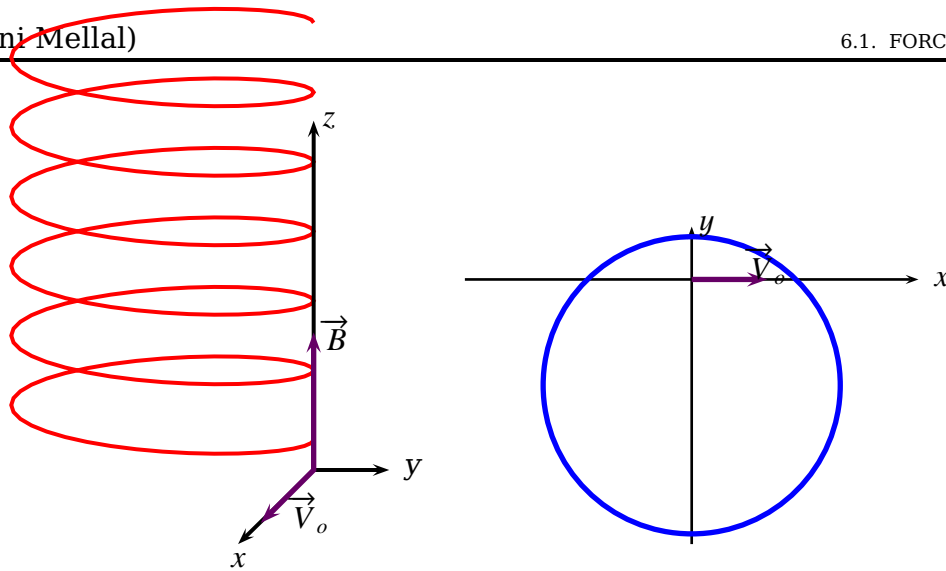
En posant $R_\alpha = \frac{V_o \sin \alpha}{\omega} = \frac{V_{o\perp}}{\omega}$; L'intégration des équations différentielles obtenues donne :

$$\begin{cases} x(t) = \left(\frac{V_o \sin \alpha}{\omega} \right) \sin \omega t = R_\alpha \sin \omega t \\ y(t) = \left(\frac{V_o \sin \alpha}{\omega} \right) (\cos \omega t - 1) = R_\alpha (\cos \omega t - 1) \\ z(t) = (V_o \cos \alpha) t = V_{o\parallel} t \end{cases}$$

Dans le plan xoy l'équation de la trajectoire est

$$x^2 + (y + R_\alpha)^2 = R_\alpha^2$$

Donc circulaire et puisque uniforme suivant oz donc hélicoidal



Conclusion:

Le mouvement d'une particule chargée de vitesse initiale $\vec{V}_o = \vec{V}_{o\perp} + \vec{V}_{o\parallel}$ dans un champ magnétique uniforme \vec{B} donne:

- ▶ $\vec{V}_{o\perp} \rightsquigarrow$ mvt circulaire dans le plan perpendiculaire à \vec{B}
- ▶ $\vec{V}_{o\parallel} \rightsquigarrow$ mvt uniforme dans la direction de \vec{B}

Application 11 :

Mouvement d'une particule chargée dans un champ uniforme

Une particule électrique ponctuelle M de masse m et portant une charge $q > 0$ mobile dans une région d'espace où règne un champ :

- Électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{e}_y$, $E > 0$
- Magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $B > 0$

La charge est émise sans vitesse initiale au point O à $t = 0$.

1

1.1 Vérifier que le poids est négligeable. Pour cela comparer la norme du poids d'un électron de masse $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et de charge $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et la force de Coulomb. On donne $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $E = 10 \text{ V.m}^{-1}$.

1.2 Par application de la RFD trouver un système de trois équations différentielles scalaires vérifiées par x , y et z .

1.3 Résoudre ce système et en déduire $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ on posera : $\omega = \frac{qB}{m}$

1.4 Représenter la trajectoire .

1.5 En déduire le rayon de courbure en fonction des données.

2

On suppose maintenant que la particule possède une vitesse initiale : $\vec{V}_o = V_o \vec{e}_x$

2.1 Retrouver : $x(t)$, $y(t)$

2.2 Pour quelle valeur particulière v_{oc} de v_o , la charge décrit un mouvement rectiligne confondu avec Ox . Exprimer v_{oc} en fonction de E et B .

2.3 Que peut-on dire dans ce cas sur la force exercée sur la charge.

2.4 Représenter la trajectoire de la particule dans le cas où $v_o = 2v_{oc}$

Correction - Correction

1

1.1 Comparons mg et eE

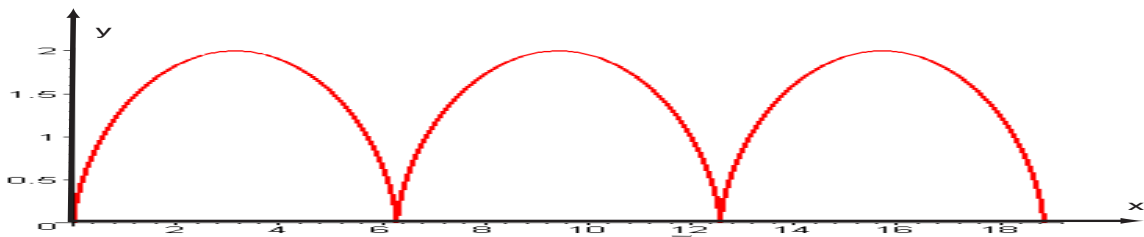
- $mg = 9,11 \cdot 10^{-30} \text{ N}$ - $eE = 6,11 \cdot 10^{-18} \text{ N}$

donc le poids est négligeable

1.2 $m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B & (1) \\ m\ddot{y} = q(E - \dot{x}B) & (2) \\ m\ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$

1.3 Par intégration on trouve : $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin \omega t) \\ y = \frac{E}{B\omega}(1 - \cos \omega t) \\ z = 0 \quad \text{mouvement plan} \end{cases}$

1.4 Représentation graphique (on prend $\frac{E}{B\omega} = 1$)



1.5 Le rayon de courbure est

$$\rho_c = \frac{4E}{B\omega} \left| \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right|$$

2 $\vec{V} = v_o \vec{e}_x$

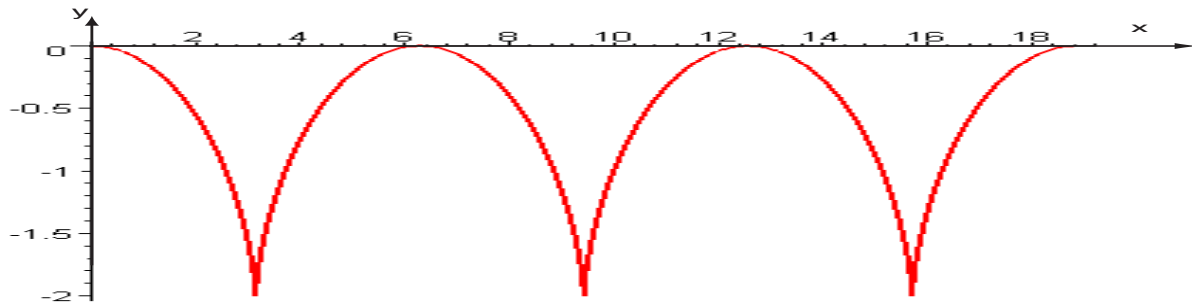
2.1 $\begin{cases} x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin \omega t) + \frac{v_o}{\omega} \sin(\omega t) \\ y = \left(\frac{E}{B} - v_o\right) \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega t) \end{cases}$

2.2 mouvement rectiligne confondu avec ox : $\forall t \Rightarrow v_{oc} = \frac{E}{B}$

2.3 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$ la force magnétique compense la force électrique

2.4 Représentation graphique avec $v = 2v_{oc}$

On rappelle que dans ce cas, on a : $\begin{cases} x = \frac{E}{B\omega}(\omega t + \sin \omega t) = \frac{V_o}{2\omega}(\omega t + \sin \omega t) \\ y = -\frac{E}{B\omega}(1 - \cos \omega t) = -\frac{V_o}{2\omega}(1 - \cos \omega t) \end{cases}$



6.2 Effet HALL

énoncé Voir CNC 2007 épreuve physique 1(MP/TSI)

Correction - Correction

Conduction électrique sous champ magnétique

Première partie : Sonde à effet HALL

1.1- Vecteur densité de courant :

$$\vec{j} = j\vec{u}_x \text{ et } I_o = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = jab \text{ donc}$$

$$\vec{j} = \frac{I_o}{ab} \vec{u}_x$$

1.2- Charge q animée d'une vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$

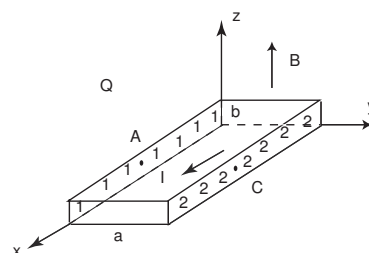
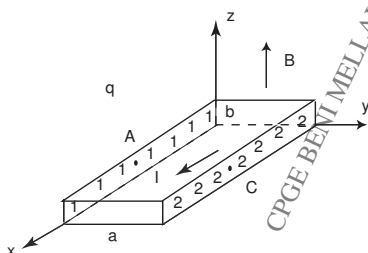
1.2.1- Force de lorentz

$$\vec{f}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{f}_L = -qvB\vec{u}_y$$

1.2.2- En absence du champ magnétostatique \vec{B} , un porteur mobile de charge q est soumis à la seule force électrostatique $\vec{f}_e = q\vec{E}$ qui est à l'origine du courant électrique I_0 .

En présence du champ magnétostatique $\vec{B} = B\vec{u}_z$, un porteur mobile de charge q est soumis à la force magnétique $\vec{f}_L = -qvB\vec{u}_y$ (q et v étant du même signe Cf. **1.2**) qui infléchit sa trajectoire vers la face de la plaque :

- ◇ située à droite du sens de I_0 pour $q < 0 \Rightarrow$ accumulation de charges négatives sur cette face et défaut de charges sur la face opposée.
- ◇ située à gauche du sens de I_0 pour $q > 0 \Rightarrow$ accumulation de charges négatives sur cette face et défaut de charges sur la face opposée.



1.2.3- Champ HALL

On en déduit du résultat de la question précédente **1.2.2** les faits suivants :

- ◇ Apparition d'un champ électrostatique (champ HALL noté \vec{E}_h) orienté vers la face située à droite du sens de I_0 (pour $q < 0$) ou vers la face située à gauche du sens de I_0 (pour $q > 0$). Dans les deux cas, un porteur de charge q est soumis à l'action de la force $\vec{f}_H = q\vec{E}_h$ (de direction l'axe Oy).
- ◇ Le régime permanent (au bout d'un certain temps) est atteint lorsque le champs HALL atteint une valeur suffisante pour que $\vec{f}_H + \vec{f}_L = \vec{0}$; les lignes de courant redeviennent parallèles au champ \vec{E}_h , d'où :

$$\vec{f}_L = -q\vec{E}_h \Rightarrow \vec{E}_h = -\frac{\vec{f}_L}{q} = vB\vec{u}_y$$

1.2.4- Tension HALL

$$V_C - V_A = \int \vec{E}_h \cdot d\vec{y} = vBa \Rightarrow V_h = vaB$$

La tension de HALL est positive et indépendante de la charge q .

1.2.5- Résistance de HALL

On a $I_o = jab$ et $j = nqv$ donc

$$V_h = \frac{BI_o}{nqb} = R_h \frac{BI_o}{b}$$

1.3- Applications**1.3.1- La plaque \mathcal{P} est en cuivre métallique****1.3.1.1- Densité particulaire**

$$n = \frac{mN_A}{MV} = \rho \frac{N_A}{M} = 82,40 \times 10^{27} m^{-3}$$

1.3.1.2- Résistance HALL

$$R_h = \frac{1}{nq} = -0,76 \times 10^{-10} m^3 A^{-1} s^{-1}$$

1.3.1.3- Tension HALL

$$V_h = -0,76 \times 10^{-6} V$$

1.3.2- Les sondes de HALL utilisées au laboratoire pour mesurer les champs magnétiques sont constituées d'un matériau semi-conducteur.

1.3.2.1- Dans un semi-conducteur et à température usuelle, la densité particulaire des porteurs majoritaires (électrons ou positrons "trous") est de l'ordre de $10^{22} m^{-3}$: plus faible que dans un conducteur, donc l'effet hall est plus important.

1.3.2.2- Dans la pratique, on mesure une tension (tension HALL). Cette dernière étant proportionnelle au champ B , simple étalonnage (détermination du coefficient de proportionnalité) permet, donc, l'accès à B .

Exemple : utilisation en teslamètre, appelé aussi sonde à effet HALL.

Deuxième partie : loi d'OHM anisotrope

2.1- τ est homogène à un temps ; son unité est, donc, la seconde (s).

2.2- L'expression de \vec{j}

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

2.3- Deuxième loi de NEWTON

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{m}{\tau}\vec{v} \text{ et } \vec{v} = \frac{1}{nq}\vec{j}$$

En régime permanent :

$$q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{m}{\tau}\vec{v} = q(\vec{E} + \frac{1}{nq}\vec{j} \wedge \vec{B}) - \frac{m}{nq\tau}\vec{j} = \vec{0}$$

$$\text{ce qui donne : } \vec{E} = \frac{m}{nq^2\tau}\vec{j} + \frac{1}{nq}\vec{B} \wedge \vec{j}$$

Si on pose

$$\sigma = n\frac{q^2\tau}{m} \quad \text{et} \quad R_h = \frac{1}{nq}$$

on obtient

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{j} + R_h\vec{B} \wedge \vec{j}$$

C.Q.F.D

2.4- L'axe Oz est choisi tel que $\vec{B} = B\vec{u}_z$

2.4.1- Projection de l'équation vectorielle (2)

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} + R_h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{j_x}{\sigma} - R_h B j_y \\ \frac{j_y}{\sigma} + R_h B j_x \\ \frac{j_z}{\sigma} \end{pmatrix}$$

Soient :

$$\begin{cases} j_x = \frac{\sigma E_y - \sigma^2 R_h B E_x}{1 + \sigma^2 R_h^2 B^2} \\ j_y = \frac{\sigma E_x + \sigma^2 R_h B E_y}{1 + \sigma^2 R_h^2 B^2} \\ j_z = \sigma E_z \end{cases}$$

ou :

$$\vec{j} \begin{cases} j_x = \frac{\sigma}{1 + \tau^2 \omega_c^2} (E_x + \tau \omega_c E_y) \\ j_y = \frac{\sigma}{1 + \tau^2 \omega_c^2} (-\tau \omega_c E_x + E_y) \\ j_z = \sigma E_z \end{cases}$$

2.4.2- $\vec{j} = j_x \vec{u}_x + j_y \vec{u}_y + j_z \vec{u}_z$

D'où : $\vec{j} = \vec{\sigma} \vec{E}$ avec

$$\vec{\sigma} = \frac{\sigma}{1 + \tau^2 \omega_c^2} \begin{pmatrix} 1 & \tau \omega_c & 0 \\ -\tau \omega_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \tau^2 \omega_c^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

> restart;

> eqA:=Ex=jx/sigma-Rh*B*jy;

$$eqA := Ex = \frac{jx}{\sigma} - Rh B jy$$

> eqB:=Ey=jy/sigma+Rh*B*jx;

$$eqB := Ey = \frac{jy}{\sigma} + Rh B jx$$

> solve({eqA, eqB}, [jx, jy]);

$$[[jx = \frac{\sigma (Ex + Rh B \sigma Ey)}{1 + Rh^2 B^2 \sigma^2}, jy = -\frac{\sigma (-Ey + Rh B \sigma Ex)}{1 + Rh^2 B^2 \sigma^2}]]$$

2.4.3- les vecteurs \vec{j} et \vec{E} ne sont pas colinéaires donc le milieu est anisotrope.

2.4.4- Oui, le milieu reste linéaire en présence du champ magnétique \vec{B} .

2.4.5- En absence du champ magnétique \vec{B} , l'équation (3) s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

On retrouve, ainsi, la loi d'ohm pur un milieu isotrope.

Conclusion : les phénomènes liés à l'anisotropie précédente (Cf. **2.4.3**) sont plus importants dans les semi-conducteurs et ils dépendent de la géométrie du système étudié !!

6.3 Aspects volumiques de la force de LORENTZ et de sa puissance

6.3.1 Force électromagnétique volumique

Considérons un milieu comportant des espèces différentes de particules chargées. Chaque espèce i a une densité particulière volumique n_i , une charge q_i et une vitesse \vec{V}_i . Le vecteur densité de courant est donc

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^N n_i q_i \vec{V}_i = \sum_{i=1}^N \rho_i \vec{V}_i$$

Considérons un élément de volume $d\tau$. cet élément de volume subit la force élémentaire de LORENTZ :

$$d\vec{F} = \sum_{i=1}^N (\rho_i d\tau (\vec{E} + \vec{V}_i \wedge \vec{B})) \Rightarrow d\vec{F} = \left(\sum_{i=1}^N \rho_i d\tau \right) \vec{E} + \sum_{i=1}^N (\rho_i d\tau \vec{V}_i) \wedge \vec{B}$$

Or : $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$ et $\sum_{i=1}^N (\rho_i \vec{V}_i) = \vec{j}$

Ce qui donne

$$d\vec{F} = d\tau(\rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{d\tau} = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

C'est la densité volumique de force électromagnétique

6.3.2 Puissance de la force de LORENTZ

On a pour une particule chargée : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V} = q\vec{E} \cdot \vec{V}$

De même pour une distribution volumique

$$d\mathcal{P} = \rho d\tau \vec{E} \cdot \vec{V} \Rightarrow d\mathcal{P} = \rho \vec{V} \cdot \vec{E} d\tau$$

Ce qui donne

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} \Rightarrow \mathcal{P} = \iiint_V (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau$$

C'est la densité volumique de puissance électromagnétique

Application 12 :

Conducteur ohmique de section S et de longueur L :

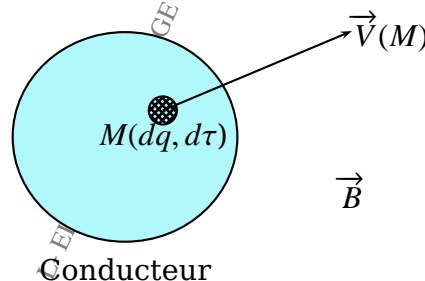
On a : $d\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \Rightarrow d\mathcal{P} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} \cdot \vec{j} d\tau$ c'est à dire $\mathcal{P} = \frac{1}{\sigma} \frac{I^2}{S^2} S L \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{1}{\sigma} \frac{I^2}{S} L$

Sachant que $R = \frac{L}{\sigma S} = \rho_{re} \frac{L}{S}$ la résistance du conducteur ohmique ; alors

$$\mathcal{P} = RI^2$$

6.4 Force de LAPLACE . Moment des forces de LAPLACE

La force de LAPLACE est la force magnétique qui s'exerce sur un conducteur traversé par un courant dans une région de l'espace où règne un champ magnétique \vec{B} .



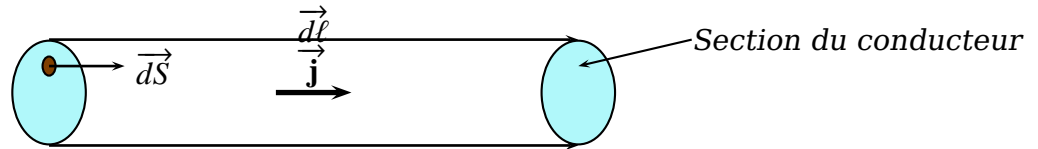
L'élément de volume $d\tau$ d'un conducteur subit la force élémentaire de LORENTZ :

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = d\vec{C} \wedge \vec{B}$$

La densité volumique des forces de LAPLACE

Remarque- 29 :

- ① Cas d'un circuit filiforme traversé par un courant permanent : $d\vec{C} = I d\vec{\ell}$



Ce qui donne

$$d\vec{F} = \int_{\text{circuit}} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Donc pour un conducteur fermé, parcouru par un courant permanent I , la force de LAPLACE s'écrit

$$\vec{F} = I \oint_{\text{circuit}} d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

- ② Si ce circuit est parcouru par un courant permanent I et plongé dans un champ magnétique \vec{B} , alors chaque élément de circuit $d\vec{\ell} = d\vec{OP}$, situé autour de P , subit une force de LAPLACE : $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

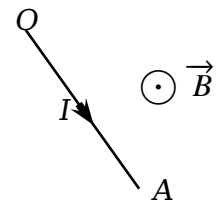
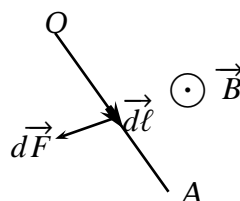
Le moment par rapport à un point A quelconque de la force de LAPLACE sur l'ensemble du circuit est alors

$$\vec{M}_A = \oint_{\text{circuit}} \vec{AP} \wedge d\vec{F} = \oint_{\text{circuit}} \vec{AP} \wedge (I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) = \oint_{\text{circuit}} \vec{AP} \wedge (I d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$$

Application 13 :**Force de Laplace appliquées à une tige** (énoncé voir TD3)

Une tige OA est parcourue par un courant d'intensité I ; elle baigne dans un champ magnétique uniforme \vec{B}_0 qui lui est orthogonal (voir figure ci-contre)

- ① Déterminer la résultante des forces de Laplace appliquée sur la tige.
- ② Calculer le moment en O de ces forces.
- ③ Quel est le moment en I , milieu de $[O,A]$?

**Correction**

- ① Puisque le circuit est filiforme alors $d\vec{F} = \int_0^A I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

Sachant que I est permanent et \vec{B}_o uniforme alors

$$\vec{F} = I \vec{OA} \wedge \vec{B}_o$$

- ② On a pour tout point $M \in [O, A]$ tel que $\vec{OM} = r\vec{u}$:

$$d\vec{M}_o = \vec{OM} \wedge (I d\vec{OM} \wedge \vec{B}_o)$$

On rappelle que

$$1 \wedge (2 \wedge 3) = 2(1.3) - 3(1.2)$$

Donc : $d\vec{M}_o = I d\vec{OM}(\vec{OM} \cdot \vec{B}_o) - I \vec{B}_o(\vec{OM} \cdot d\vec{OM})$

Puisque \vec{OM} et \vec{B}_o sont perpendiculaires alors $\vec{OM} \cdot \vec{B}_o = 0$ ainsi

$$\vec{OM} \cdot d\vec{OM} = d\left(\frac{1}{2} \vec{OM}^2 + cte\right)$$

Ce qui donne que

$$\vec{M}_o = -\frac{1}{2} I (OA)^2 \vec{B}_o$$

- ③ La relation caractéristique des torseurs donne :

$$\vec{M}_I = \vec{M}_o + I \vec{O} \wedge \vec{F}$$

Puisque $I \vec{O} = -\frac{1}{2} \vec{OA}$ alors

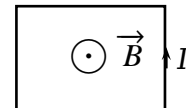
$$\vec{M}_I = \vec{0}$$

Application 14 :

Nature du système de forces de Laplace (énoncé voir TD3)

Soit une spire de forme carrée de côté a , traversée par un courant I qui règne dans un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire au plan de la spire.

- ① Déterminer la résultante des forces \vec{F} .
- ② Déterminer le moment résultant \vec{M}_o de la résultante des forces \vec{F} avec O le centre de la spire.
- ③ Conclure.



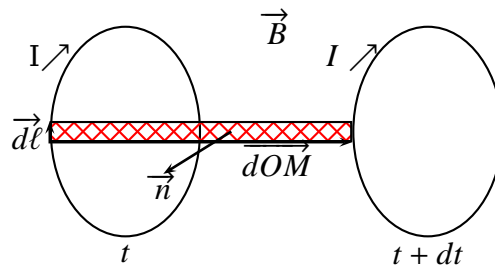
Correction

- ① La résultante des force est nulle.
- ② Le moment résultant $\vec{M} = \vec{M} \wedge \vec{B} = \vec{0}$
- ③ La spire carrée est en équilibre.

6.5 Travail des forces de LAPLACE sur un circuit indéformable

Considérons un élément $d\vec{\ell}$ d'un circuit filiforme, orienté dans la direction du courant I . Cet élément subit une force de LAPLACE $d\vec{F}$.

Pour déplacer le circuit d'une quantité $d\vec{r}$, cette force doit fournir un travail



$$\begin{aligned}
 d^2\mathcal{W} &= d\vec{F} \cdot d\vec{OM} \Rightarrow d^2\mathcal{W} = I(d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{OM} \\
 &\Rightarrow d^2\mathcal{W} = I \underbrace{(d\vec{OM} \wedge d\vec{\ell})}_{\vec{dS}} \cdot \vec{B} \quad \text{permutation circulaire} \\
 &\Rightarrow d^2\mathcal{W} = Id\vec{S} \cdot \vec{B}
 \end{aligned}$$

où $d\vec{S} = dS\vec{n}$ est la surface élémentaire décrite lors du déplacement de l'élément de circuit (les trois vecteurs $d\vec{OM}$, $d\vec{\ell}$, \vec{n} forment un trièdre direct). On reconnaît alors l'expression du flux magnétique à travers cette surface balayée, appelé flux coupé. Pour l'ensemble du circuit, le travail dû à un déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ est :

$$d\mathcal{W} = \oint_{\text{circuit}} d^2\mathcal{W} = \oint_{\text{circuit}} Id^2\Phi_c = Id\Phi_c$$

Théorème de MAXWELL :

Le déplacement d'un circuit électrique fermé dans un champ magnétique extérieur engendre un travail des forces magnétiques égal au produit du courant traversant le circuit par le flux coupé par celui-ci lors de son déplacement.

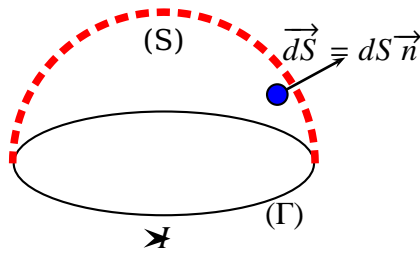
$$\mathcal{W} = I\Phi_c$$

6.6 Dipôle magnétique

6.6.1 Définition. Moment magnétique

► On appelle dipôle magnétique une boucle de courant.

En effet : Soit (Γ) un circuit linéique fermé parcouru par un courant I



(S) est une surface quelconque s'appuyant sur le boucle (Γ).

► On caractérise le dipôle magnétique par son moment dipolaire $\vec{\mathcal{M}}$ définie par

$$\vec{\mathcal{M}} = I \iint_{(S)} \vec{dS} \quad (A.m^2)$$

Remarque- 30 :

1 En pratique puisque la surface (S) est quelconque on prend la surface de la boucle.

Exemples :

- Spire circulaire de rayon R : $\vec{\mathcal{M}} = I\pi R^2 \vec{e}_z$.
- Spire carrée de côté a : $\vec{\mathcal{M}} = Ia^2 \vec{e}_z$

2 sachant que $\vec{dS} = \frac{1}{2} \vec{OM} \wedge \vec{dOM}$ alors :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \oint_{(\Gamma)} I \vec{OM} \wedge \vec{dOM} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \oint \vec{OM} \wedge I d\vec{OM}$$

Or $I d\vec{OM} = d\vec{C} = \vec{j}_s dS = \vec{j} d\tau$ e qui donne

$$\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S} \vec{n} = I \iint \vec{dS} = \frac{1}{2} \oint \vec{OM} \wedge I d\vec{OM} = \frac{1}{2} \iint \vec{OM} \wedge \vec{j}_s dS = \frac{1}{2} \iiint \vec{OM} \wedge \vec{j} d\tau$$

Application 15 :

Déterminer le moment magnétique :

- 1** D'un disque, de rayon R, chargé par une densité surfacique de charge σ en rotation uniforme autour de son axe à la vitesse ω (constante).
- 2** D'une sphère, de rayon R, chargée par une densité volumique ρ en rotation uniforme autour de l'un de ses axes à la vitesse ω constante.
- 3** D'une sphère, de rayon R, parcourue par un courant surfacique $\vec{j}_s = J_o \sin \theta \vec{e}_\varphi$.

Correction

1 On a $d\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \vec{OM} \wedge d\vec{C}$ avec $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ et $d\vec{C} = \vec{j}_s dS \Rightarrow d\vec{C} = \sigma r \omega \vec{e}_\theta dS$
ce qui donne : $d\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \sigma r^2 \omega dr d\theta \vec{e}_z$ et par conséquent

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{4} \sigma \pi \omega R^4 \vec{e}_z$$

Où bien on subdivise le disque en des couronnes élémentaires de largeur dr , son moment magnétique élémentaire s'écrit :

$d\vec{\mathcal{M}} = \pi r^2 i \vec{e}_z$ avec $i = \sigma \omega dr$ ce qui donne :

$$d\vec{\mathcal{M}} = \sigma \omega r^3 dr \vec{e}_z \implies \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{4} \sigma \pi \omega R^4 \vec{e}_z$$

2 Soit une sphère chargée uniformément en volume (ρ) de rayon R en rotation uniforme autour de l'axe oz .

Le moment magnétique de la sphère s'écrit : $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \vec{e}_z$.

Sachant que : $d\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \vec{OM} \wedge d\vec{C}$.

Avec $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ et $d\vec{C} = \vec{j} d\tau = \rho \vec{V} d\tau \implies d\vec{C} = \rho r \omega \sin \theta d\tau \vec{e}_\varphi$

Ce qui permet d'écrire que $d\vec{\mathcal{M}} = -\frac{1}{2} \rho r^2 \omega \sin \theta d\tau \vec{e}_\theta$

Par projection sur \vec{e}_z on trouve :

$d\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{2} \rho r^4 \omega \sin^2 \theta dr d\theta d\varphi \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ et par intégration on trouve

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{4}{15} \pi \rho \omega R^5 \vec{e}_z$$

Où bien on décompose la sphère en des couronnes élémentaires de section $r dr d\theta$.

La couronne élémentaire possède un moment magnétique élémentaire :

$$d\vec{\mathcal{M}} = \pi (r \sin \theta)^2 di \vec{e}_z$$

avec di le courant élémentaire qui traverse la section de la couronne élémentaire qui vaut

$$di = \rho V dr r d\theta \implies di = \rho r^2 \omega \sin \theta dr d\theta$$

Par conséquent :

$$d\vec{\mathcal{M}} = \pi \rho \omega r^4 \sin^3 \theta dr d\theta \vec{e}_z$$

On rappelle que :

$$\int_0^\pi \sin^3 x dx = \frac{4}{3}$$

Il en résulte que

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{4}{15} \pi \rho \omega R^5 \vec{e}_z$$

3 La sphère, de rayon R , parcourue par un courant surfacique $\vec{j}_s = J_o \sin \theta \vec{e}_\varphi$.

Remarquons que pour cette sphère on a $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \vec{e}_z$.

Ainsi $\vec{OM} = R \vec{e}_r$ et $d\vec{C} = \vec{j}_s dS \implies d\vec{C} = j_o \sin \theta dS \vec{e}_\varphi$ avec $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ donc :

$$d\vec{\mathcal{M}} = -\frac{1}{2} j_o R^3 \sin^2 \theta d\theta d\varphi \vec{e}_\theta$$

par projection sur oz on trouve

$$d\vec{M} \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{2} j_o R^3 \sin^3 \theta d\theta d\varphi$$

Par intégration sur θ et φ on trouve :

$$\vec{M} = \frac{4}{3} \pi R^3 j_o \vec{e}_z = j_o V \vec{e}_z$$

avec V le volume de la sphère.

6.6.2 L'expression du potentiel vecteur dans l'approximation dipolaire

Considérons un dipôle magnétique rigide de forme circulaire de rayon R , et M un point de l'espace tel que $M = M(r, \theta, \varphi)$

L'approximation dipolaire nécessite que $r \gg R$

- ▶ le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan d'antisymétrie ce qui donne $\vec{A}(M) = A_\varphi(M) \vec{e}_\varphi$.
- ▶ On a invariance par rotation autour de oz ce qui donne que

$$\vec{A}(M) = A(r, \theta) \vec{e}_\varphi$$

On a :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell}}{PM}$$

On rappelle le théorème de KELVIN

$$\oint_C f(M) d\vec{\ell} = \iint_{S(C)} d\vec{S} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f(M)$$

Ce qui donne : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \iint_{S(C)} d\vec{S} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_P \frac{1}{PM}$

Or : $\overrightarrow{PM} = (x_M - x_P) \vec{e}_x + (y_M - y_P) \vec{e}_y + (z_M - z_P) \vec{e}_z$ donc $\frac{1}{PM} = ((x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2)^{-1/2}$

$$\overrightarrow{\text{grad}}_P \frac{1}{PM} = \frac{\partial}{\partial x_P} \left(\frac{1}{PM} \right) \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y_P} \left(\frac{1}{PM} \right) \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z_P} \left(\frac{1}{PM} \right) \vec{e}_z \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}_P \frac{1}{PM} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Il en résulte que

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \iint_{S(C)} d\vec{S} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Dans l'approximation dipolaire

$$\text{L'approximation dipolaire} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \simeq \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

Ce qui permet d'écrire que : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint_{S(C)} I d\vec{S} \wedge \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$

On rappelle que : $\vec{M} = I \iint_S d\vec{S}$ ce qui donne

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \overrightarrow{OM}}{OM^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi r^2} M \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

Potentiel vecteur en coordonnées sphériques dans l'approximation dipolaire

6.6.3 Le champ magnétique dans l'approximation dipolaire

On a : $\vec{B}(M) = \text{rot } \vec{A}(M)$ avec $\vec{A} = A_\varphi \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_o \mathfrak{M}}{4\pi r^2} \sin \theta \vec{e}_\varphi$

Ainsi en coordonnées sphériques pour $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$ on a :

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] = \frac{2\mu_o \mathfrak{M} \cos \theta}{4\pi r^3} \\ B_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] = \frac{\mu_o \mathfrak{M} \sin \theta}{4\pi r^3} \\ B_\varphi = 0 \end{cases}$$

Qu'on peut écrire

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o \mathfrak{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

Application 16 :

Relation intrinsèque du champ magnétique dipolaire (TD) :

① On a :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \frac{\mu_o \mathfrak{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \\ \Rightarrow \vec{B}(M) &= \frac{\mu_o \mathfrak{M}}{4\pi r^3} (2(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + \sin \theta (\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r)) \\ \Rightarrow \vec{B}(M) &= \frac{\mu_o \mathfrak{M}}{4\pi r^3} (2(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r) \wedge \vec{e}_r) \\ \Rightarrow \vec{B}(M) &= \frac{\mu_o \mathfrak{M}}{4\pi r^3} (2(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r)) \\ \Rightarrow \vec{B}(M) &= \frac{\mu_o \mathfrak{M}}{4\pi r^3} (2(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{e}_z (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r) + \vec{e}_r (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r)) \\ \Rightarrow \vec{B}(M) &= \frac{\mu_o \mathfrak{M}}{4\pi r^3} (3(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{e}_z) \\ \Rightarrow \vec{B}(M) &= \frac{\mu_o}{4\pi r^5} (3(\mathfrak{M} \cdot \vec{OM}) \vec{OM} - r^2 \mathfrak{M}) \end{aligned}$$

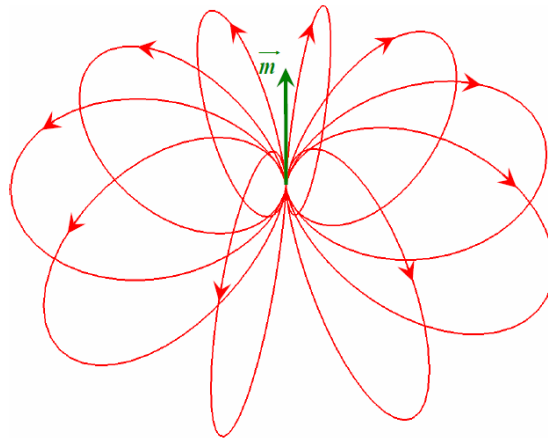
② L'équation des lignes de champ :

$$\vec{B} \wedge d\vec{OM} = \vec{0} \Rightarrow \frac{B_r}{dr} = \frac{B_\theta}{r d\theta}$$

Par intégration

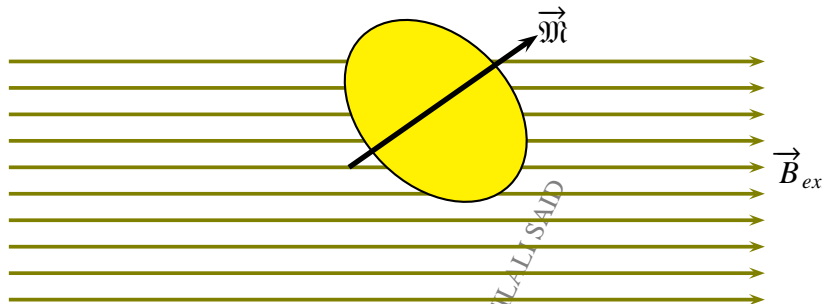
$$r = r_o \sin^2 \theta$$

Représentation graphique



6.6.4 Actions d'un champ magnétique sur un dipôle

Considérons un dipôle magnétique supposé rigide, de moment magnétique \vec{m} , de dimensions très petites devant les distances où s'exercent ses effets, et placé dans un champ extérieur \vec{B}_{ext} . L'hypothèse du dipôle de petites dimensions permet de pouvoir considérer \vec{B}_{ext} comme quasi uniforme sur la surface S limitée par le circuit constituant le dipôle.



6.6.4.1 Résultante des forces

On a $\vec{F} = \oint I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_{ext} \Rightarrow \vec{F} = I(\oint d\vec{\ell}) \wedge \vec{B}_{ext}$

Comme $\oint d\vec{\ell} = 0$ alors

$$\vec{F} = \oint I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_{ext} = \vec{0}$$

On retient que la résultante de la force de LAPLACE due à un champ \vec{B}_{ext} uniforme sur un dipôle magnétique rigide est nulle.

Remarque- 31 :

Si le champ magnétique \vec{B}_{ext} (ou le moment magnétique \vec{m} du dipôle) n'est pas uniforme alors la résultante des forces de LAPLACE n'est pas forcément nulle.

6.6.4.2 Le moment résultant des forces de LAPLACE

$$\vec{\Gamma} = \oint_C \vec{OM} \wedge (I d\vec{\ell}(M) \wedge \vec{B}) \Rightarrow \vec{\Gamma} = I \oint_C [(\vec{OM} \cdot \vec{B}) d\vec{\ell}(M) - \vec{B}(\vec{OM} \cdot d\vec{\ell}(M))] \\ \Rightarrow \vec{\Gamma} = I \oint_C (\vec{OM} \cdot \vec{B}) d\vec{\ell}(M) - I \left(\oint_C (\vec{OM} \cdot d\vec{OM}) \right) \vec{B} \quad \text{puisque } d\vec{\ell}(M) = d\vec{OM}$$

Or :

- $\oint_C \vec{OM} \cdot d\vec{OM} = \oint_C d\left(\frac{1}{2} \vec{OM}^2\right) = 0$

- D'après le théorème de KELVIN

$$\oint_C (\vec{OM} \cdot \vec{B}) d\vec{\ell}(M) = \iint_S d\vec{S} \wedge \text{grad}_M (\vec{OM} \cdot \vec{B})$$

On a : $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$

donc : $\vec{OM} \cdot \vec{B} = xB_x + yB_y + zB_z \Rightarrow \text{grad}_M (\vec{OM} \cdot \vec{B}) = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z = \vec{B}$

Il en résulte que : $\vec{\Gamma} = I \underbrace{\iint_S d\vec{S}(M) \wedge \vec{B}}_{\vec{\mathfrak{M}}}$

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$$

Conclusion :

L'action d'un champ magnétique \vec{B}_{ext} uniforme sur un dipôle rigide se réduit à un couple de forces dont le moment est $\vec{\Gamma} = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}_{ext}$

6.6.4.3 Énergie potentielle d'interaction d'un dipôle rigide placé dans un champ extérieur

On rappelle que d'après le théorème de MAXWELL : $\delta\mathcal{W} = I d\Phi = I d\Phi_c$

Si $I = cte$ alors $\delta\mathcal{W} = d(I\Phi + cte) = -dE_p$ ce qui donne

$$E_p = -I\Phi + cte$$

C'est l'énergie potentielle magnétique du contour (C) placé dans un champ \vec{B}_{ext}

Remarque- 32 :

Soit \mathcal{W} le travail fourni pour déplacer le contour à $I = cte$

$$\delta\mathcal{W} = I d\Phi \Rightarrow \mathcal{W} = I \int_{\Phi(t_1)}^{\Phi(t_2)} \text{et après intégration}$$

$$\mathcal{W}_{t_1 \rightarrow t_2} = I(\Phi(t_2) - \Phi(t_1)) > 0 \Rightarrow \Phi(t_2) > \Phi(t_1)$$

Conclusion:

Sous l'action d'un champ magnétique extérieur, le contour (C) se déplace dans le sens où le flux de \vec{B} à travers (C) augmente: C'est la règle du flux maximum

Pour un dipôle magnétique, l'énergie potentielle peut s'écrire :

$$E_p = -I\Phi \Rightarrow E_p = -(I \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{B}_{ext}) \text{ ce qui permet d'écrire que}$$

$$E_p = -\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$$

6.6.4.4 Actions subies par un dipôle magnétique dans un champ extérieur

On admet la généralisation de l'action d'un champ magnétique extérieur \vec{B}_{ext} sur un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{ext}$$

Et par conséquent si on appelle \vec{F} la résultante des forces de LAPLACE et $\vec{\Gamma}$ son moment alors :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \Rightarrow \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$$

Ainsi

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{ext}$$

6.6.4.5 Comparaison entre les dipôles électrostatique et magnétique

	Dipôle électrostatique	Dipôle magnétique
Définition	$Q_T = 0$ avec $G_- \neq G_+$	Boucle de courant
Modélisation	$G_-(-q) \longleftrightarrow G_+(+q)$	spire parcouru par un courant I
L'expression du moment	$\vec{P} = q\vec{G}_- \vec{G}_+$	$\vec{\mathcal{M}} = IS \vec{n}$
Potentiel scalaire	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$	$V_m(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$
Potentiel vecteur	/	$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{e}_r}{r^2}$
Expression du champ	$\vec{E} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$	$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$
Relation intrinsèque	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{P} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - r^2 \vec{P})$	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - r^2 \vec{\mathcal{M}})$
Énergie potentielle	$E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E}_e$	$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_e$
Résultante des forces	$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{P} \cdot \vec{E}_e)$	$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_e)$
Moment du couple	$\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E}_e$	$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_e$
Symétrie	$(\vec{P}, \vec{OM}) = \Pi_s$	$(\vec{\mathcal{M}}, \vec{OM}) = \Pi_A$
Invariance	Par rotation autour de \vec{P}	Par rotation autour de $\vec{\mathcal{M}}$

6.7 Le champ magnétique terrestre

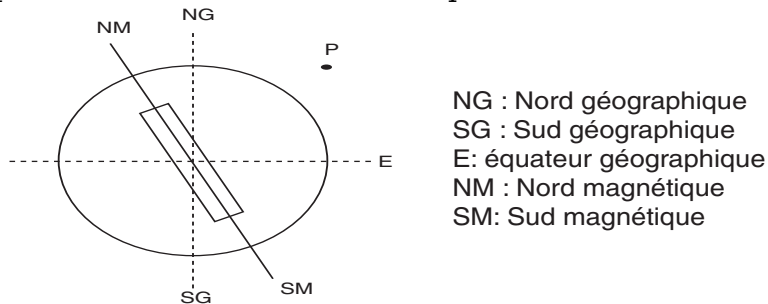
1 Propriétés du champ magnétique terrestre

À notre échelle, tout ce passe comme s'il existait à l'intérieur de la terre un aimant droit comme l'indique la figure.

1.1 Reprendre le schéma et indiquer :

- Les pôles de l'aimant
- Quelques lignes de champ orientées.

Les pôles d'une boussole située au point P.



1.2 L'observatoire de Chambon la Forêt (France) a déterminé pour l'année 2001 les caractéristiques suivantes du champ magnétique terrestre :

- Déclinaison $\widehat{D} = 2^\circ W$ (ouest)
- Inclinaison $\widehat{I} = 64^\circ$
- Valeur totale $B = 47450 \text{ nT}$

Définir à l'aide d'un schéma, la déclinaison et l'inclinaison magnétiques.

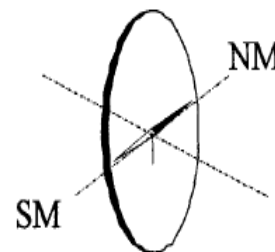
1.3 À partir des données précédentes, calculer la composante horizontale B_H du champ magnétique terrestre.

2 Mesure de la valeur de la composante horizontale B_H du champ magnétique terrestre. On réalise une bobine plate de N spires de rayon R parcourues par un courant d'intensité I .

2.1 Justifier que le champ au centre de la bobine est donné par la relation :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$$

2.2 On dispose au centre de la bobine et **perpendiculairement à son plan** une petite aiguille aimantée. en l'absence de courant dans la bobine, l'aiguille aimantée est perpendiculaire à l'axe de la bobine comme l'indique la figure ci-contre. Que se passe-t-il lorsque la bobine plate est parcourue par un courant ? s'aider d'un schéma.

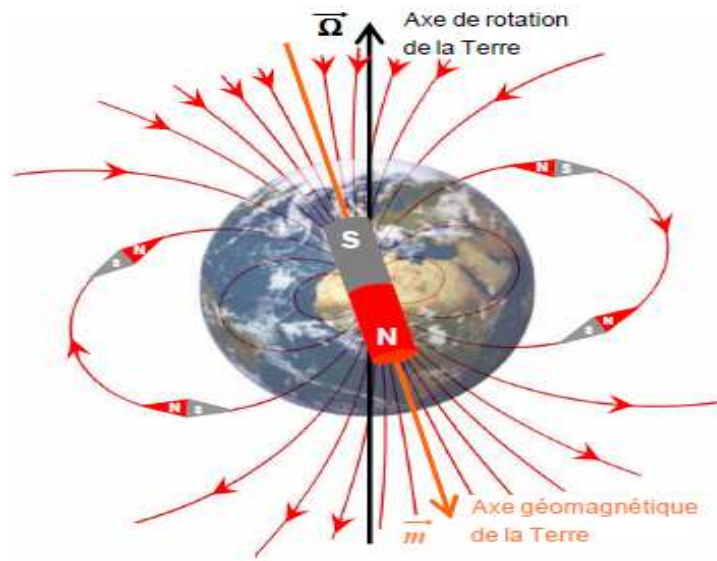


2.3 Lorsque l'aiguille aimantée atteint sa position d'équilibre en présence de courant, elle a dévié d'un angle α . Exprimer la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre B_H en fonction de N, I, R et α

2.4 A.N : $I = 1,2 \text{ A}$; $R = 10 \text{ cm}$; $N = 10$ et $\alpha = 75^\circ$. Calculer B_H . Conclure.

Correction - Correction

1-



► D : déclinaison, c'est l'angle entre le nord géographique et le nord magnétique

► I : inclinaison, c'est l'angle que fait \vec{B}_T avec l'horizontale

$$\text{► } B_H = B_T \cos I \xrightarrow{\text{A.N}} B_H = 20800 \text{ nT}$$

$$\text{► } B_V = B_T \sin I \xrightarrow{\text{A.N}} B_V = 42647 \text{ nT}$$

$$\text{2- } \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N I}{2R} \vec{e}_z$$

$$\text{3- } B_H = B_o \cot \alpha \xrightarrow{\text{A.N}} B_H = 20 \mu T$$

4- Les résultats sont en accord avec une précision de

$$\frac{20,8 - 20}{20,8} \approx 4\%$$

CHAPITRE 7

ÉQUATIONS DE MAXWELL

7.1 Équations de MAXWELL dans le vide

7.1.1 Formes locales des équations de MAXWELL

Soit \mathcal{D} une distribution de charges caractérisée dans un **référentiel galiléen** \mathcal{R} par les densités :

- ▶ de charges $\rho(\vec{r}, t)$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$
- ▶ de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$

On admet les quatres équations suivantes dites équations locales de MAXWELL dans le vide.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$	M.G : MAXWELL -GAUSS
$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	M.F : MAXWELL -Faraday
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0$	M.Φ : MAXWELL -Flux (ou Thomson)
$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_o(\vec{j} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$	M.A : MAXWELL -AMPÈRE

$\epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ à la dimension du densité d'un courant appelé vecteur densité de courant de déplacement noté \vec{j}_D .

Remarque- 33 :

- Puisque les équations de MAXWELL sont linéaires, alors les champs électromagnétiques \vec{E} et \vec{B} vérifient le principe de superposition.
- On peut avoir un champ \vec{E} à partir de la source ρ ou à partir d'un champ magnétique variable en fonction du temps. Ainsi la source d'un champs \vec{B} à partir de la source \vec{j} ou à partir d'un champ \vec{E} variable en fonction du temps.

• Dans un milieu linéaire homogène isotrope (L.H.I) les équations de MAXWELL restent valable à condition de remplacer

$$\varepsilon_0 \rightsquigarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \text{et} \quad \mu_0 \rightsquigarrow \mu = \mu_0 \mu_r$$

7.1.2 Contenu physique des équations de MAXWELL

7.1.2.1 Équation de MAXWELL -GAUSS

$$\text{On a : } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \iiint_V \text{div } \vec{E} \, d\tau = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, d\tau$$

Sachant que $\iiint_V \text{div } \vec{E} \, d\tau = \oiint_{\Sigma(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ ainsi $\iiint_V \rho \, d\tau = Q_{int}$ ce qui donne

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} (M.G) \Rightarrow \oiint_{\Sigma(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} (T.G)$$

Conclusion:

La forme intégrale de l'équation de MAXWELL -GAUSS ce n'est autre que le théorème de GAUSS .

7.1.2.2 Équation de MAXWELL -FARADAY

On a :

$$\text{M.F : } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Or : $\iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ avec Σ une surface qui s'appuie sur le contour Γ

$$\text{Ainsi : } \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = \frac{d\Phi}{dt}$$

Ce qui donne :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} (M - F) \Rightarrow e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

c'est la loi de FARADAY .

Avec e la force électromotrice. (plus de détail voir chapitre induction)

Conclusion:

La forme intégrale de l'équation de MAXWELL -FARADAY est la loi de FARADAY .

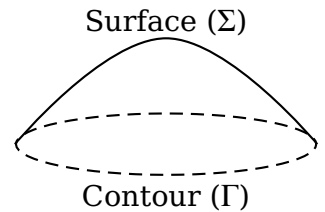
7.1.2.3 Équation de MAXWELL -Flux

On a : $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ c'est à dire que \vec{B} est à flux conservatif (aucune ligne de champ ne diverge)

$$\text{div } \vec{B} = 0 (M - \Phi) \Rightarrow \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 (\text{conservation du flux})$$

Conclusion:

la forme intégrale de l'équation de MAXWELL -Flux est la conservation du flux du champ magnétique à travers une surface fermée



7.1.2.4 Équation de MAXWELL -AMPÈRE

On a : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_o(\vec{j} + \vec{j}_D) \Rightarrow \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} (\vec{j} + \vec{j}_D) \cdot d\vec{S}$ Or

► $\iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$.

► $\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I_e$.

► $\iint_{\Sigma} \vec{j}_D \cdot d\vec{S} = I_D$ courant de déplacement

ce qui donne

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_o(\vec{j} + \vec{j}_D)(M - A) \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_o(I_e + I_D) \text{ (théorème d'AMPÈRE généralisé)}$$

Conclusion:

La forme intégrale de l'équation de MAXWELL -AMPÈRE est le théorème d'AMPÈRE généralisé.

Remarque- 34 :

Les quatres équations de MAXWELL plus la force de LORENTZ constituent les postulats de l'électromagnétisme.

7.1.3 Équations de MAXWELL et la conservation de la charge

Calculons $\text{div}(M.A)$:

$$\text{div} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \mu_o(\text{div} \vec{j} + \epsilon_o \frac{\partial \text{div} \vec{E}}{\partial t})$$

Or D'après M.G : $\epsilon_o \text{div} \vec{E} = \rho$

ainsi : $\text{div} \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0$

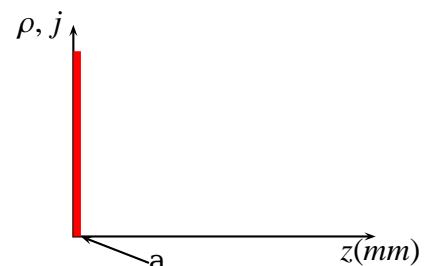
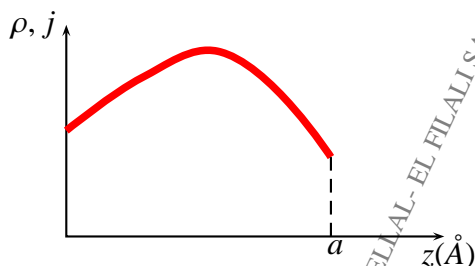
ce qui donne :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

C'est l'équation locale de conservation de charge

7.1.4 Équations de MAXWELL et relations de passages

Soit la distribution suivante à l'échelle microscopique (Å) :



► Pour la densité volumique de charge on a :

$$d^3q = \rho d\tau \Rightarrow d^3q = \rho dx dy dz$$

Intégrons cette expression par rapport à la variable z :

$$d^2q = \underbrace{\left(\int_0^a \rho dz \right)}_{\sigma} dx dy = \sigma dx dy$$

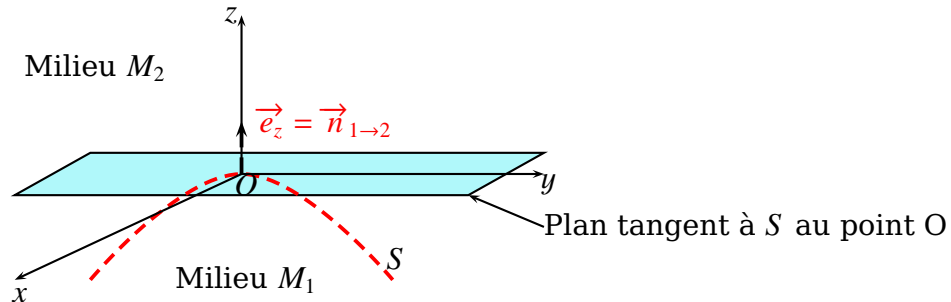
C'est à dire que à l'échelle macroscopique on peut modéliser la distribution volumique à l'échelle microscopique par une distribution surfacique telle que

$$\sigma = \int_0^a \rho dz$$

► de même pour le vecteur densité de courant, on obtient

$$\vec{j}_s = \int_0^a \vec{j} dz$$

Soit S une surface quelconque et O un point quelconque de S qu'on choisit comme origine d'un repère $\mathcal{R} (Oxyz)$ tel que Oz la verticale et Oxy le plan tangent à S au point O . Cette surface S délimite deux milieux M_1 et M_2 tel que $\vec{e}_z = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$



Intéressons nous à la continuité des champs électromagnétiques à la traversée de la surface au point O .

7.1.4.1 Équation de MAXWELL -GAUSS

On a : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Intégrons cette équation par rapport à z entre 0 et $a (\rightarrow 0)$:

$$\int_0^a \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) dz + \int_0^a \frac{\partial E_z}{\partial z} dz = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a \rho dz$$

Or :

- $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) dz = 0$ quantité bornée.
- $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \frac{\partial E_z}{\partial z} dz = E_z(O^+) - E_z(O^-)$
- $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \rho dz = \sigma$ densité surfacique de charge.

Il en résulte que :

$$E_z(O^+) - E_z(O^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

La composante normale du champ \vec{E} est discontinue en présence d'une densité surfacique de charge

7.1.4.2 Équation de MAXWELL -Flux

On a :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \implies \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Intégrons cette équation par rapport à z entre 0 et a ($a \rightarrow 0$) :

$$\int_0^a \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) dz + \int_0^a \frac{\partial B_z}{\partial z} dz = 0$$

Or :

$$\blacktriangleright \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) dz = 0 \text{ quantité bornée.}$$

$$\blacktriangleright \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \frac{\partial B_z}{\partial z} dz = B_z(O^+) - B_z(O^-)$$

Il en résulte que :

$$B_z(O^+) - B_z(O^-) = 0 \implies B_{2n} = B_{1n}$$

La composante normale du champ \vec{B} est toujours continue

7.1.4.3 Équation de MAXWELL -AMPÈRE

On a :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_o \left(\vec{j} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

avec : $\vec{j} = \vec{j}(x, y, z, t)$ et $\vec{j}_s = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \vec{j}(x, y, z, t) dz$

Projetons l'équation de M.A sur l'axe Ox on obtient :

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_o j_x + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

intégrons cette équation par rapport à z de 0 à a on obtient :

$$\blacktriangleright \int_0^a \frac{\partial B_z}{\partial y} dz \rightarrow 0 \quad (B_z \text{ est continue})$$

$$\blacktriangleright \int_0^a \frac{\partial B_y}{\partial z} dz = B_y(x, y, a, t) - B_y(x, y, 0, t)$$

$$\blacktriangleright \int_0^a \frac{\partial E_x}{\partial t} dz \rightarrow 0 \text{ (quantité bornée)}$$

$$\blacktriangleright \int_0^a j_x(x, y, z, t) dz = j_{sx}$$

Ce qui donne

$$B_{2y} - B_{1y} = \mu_o j_{sx}$$

De même la projection sur Oy donne

$$B_{2x} - B_{1x} = \mu_o j_{sy}$$

En combinant les deux résultats on obtient

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_o \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Conclusion:

En présence du courant surfacique \vec{j}_s la composante normale du champ \vec{B} est toujours continue par contre la composante tangentielle est discontinue

7.1.4.4 Équation de MAXWELL -FARADAY

calculons $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

(2)

(3)

Intégrons par rapport à z entre 0 et $a(\rightarrow 0)$

► (1) $\Rightarrow E_{2y} - E_{1y} = 0$

► (2) $\Rightarrow E_{2x} - E_{1x} = 0$

► (3) $\Rightarrow 0 = 0$

Il en résulte que

$$\vec{E}_{2\perp} = \vec{E}_{1\perp}$$

la composante tangentielle du champ \vec{E} est continue c'est à dire

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$$

Conclusion:

À la traversée d'une surface chargée S le champ \vec{E} vérifie

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

7.1.5 Tableau récapitulatif

Formes Locales	Formes intégrales	Relations de passage
MAXWELL -GAUSS $\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Théorème de GAUSS $\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
MAXWELL -flux $\text{div } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Flux de \vec{B} conservatif $\oiint_{\Sigma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0$	$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$
MAXWELL -FARADAY $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Loi de FARADAY $e = \oint \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$	$\vec{n} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$
MAXWELL -AMPÈRE $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$	Théorème d'AMPÈRE généralisé $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_e + I_D)$	$\vec{n} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$

7.2 Potentiel vecteur et potentiel scalaire

En régime variable (dépendant du temps), la loi de COULOMB ainsi BIOT et SAVART ne sont plus valables ; il faudra utiliser d'autres méthodes pour déterminer le champs électromagnétique (\vec{E} et \vec{B}).

Une des méthodes est la méthode des potentiels.

7.2.1 Existence des potentiels

D'après l'équation de M.Φ, on a : $\text{div } \vec{B}(M, t) = 0$ ce qui donne

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot } \vec{A}(M, t) \quad \text{relation toujours valable}$$

Or l'équation de M.F : $\text{rot } \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \Rightarrow \text{rot } \vec{E}(M, t) = -\text{rot } \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t}$

C'est à dire

$$\text{rot } \left(\vec{E}(M, t) + \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Donc il existe une fonction scalaire V telle que

$$\vec{E}(M, t) + \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t} = -\text{grad } V(M, t) \Rightarrow \vec{E}(M, t) = -\text{grad } V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t}$$

Conclusion:

Les champs \vec{E} et \vec{B} s'expriment à l'aide des potentiels vecteur \vec{A} et potentiel scalaire V par:

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot } \vec{A}(M, t) \quad ; \quad \vec{E}(M, t) = -\text{grad } V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t}$$

Remarque- 35 :

Les potentiels \vec{A} et V ne sont pas uniques.

On admet la transformation de jauge suivante :

Si (\vec{A}, V) et (\vec{A}_1, V_1) deux couples de potentiels dont dérivent \vec{E} et \vec{B} alors si $\vec{A} = \vec{A}_1 - \text{grad } f$ alors $V = V_1 + \frac{\partial f}{\partial t}$ où la fonction $f = f(M, t)$ est une fonction quelconque.

Conclusion:

Une transformation de jauge ne modifie pas les champs \vec{E} et \vec{B}

7.2.2 Choix de jauge

puisque les potentiels ne sont pas uniques alors on impose certaines conditions supplémentaire sur les \vec{A} et V afin de simplifier les équations.

► En régime stationnaire (indépendant du temps) : on utilise la jauge de COULOMB afin que \vec{A} vérifie l'équation de POISSON pour la magnétostatique :

$$\text{div } \vec{A}(M) = 0$$

► En régime variable : on utilise la jauge de LORENTZ afin que \vec{A} et V vérifient les équations de POISSON généralisées.

$$\text{div } \vec{A} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{jauge de LORENTZ}$$

7.2.3 Équations de POISSON généralisées

7.2.3.1 Équation de POISSON généralisée pour le potentiel V

On a : $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_o$ ainsi $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ce qui donne

$$\text{div} \left(-\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_o} \implies -\Delta V - \text{div} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_o}$$

$$\text{Or : } \text{div} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) = -\mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Il en résulte que

$$\Delta V - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_o} = 0$$

C'est l'équation de POISSON généralisée pour le potentiel V

7.2.3.2 Équation de POISSON généralisée pour le potentiel vecteur

$$\text{On a : } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_o \vec{j} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Or : $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ et $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ce qui donne

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \mu_o \vec{j} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\implies \vec{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_o \vec{j} - \mu_o \epsilon_o \vec{\text{grad}} \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\implies \vec{\text{grad}} \left(\text{div } \vec{A} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \Delta \vec{A} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu_o \vec{j} = 0$$

D'après la jauge de LORENTZ : $\text{div } \vec{A} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

Il en résulte que

$$\Delta \vec{A} - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_o \vec{j} = \vec{0}$$

C'est l'équation de POISSON généralisée pour le potentiel vecteur \vec{A}

Remarquons que :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow m^{-2} \\ \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow m^{-2} \end{array} \right\} \implies \mu_o \epsilon_o \rightarrow m^{-2} \cdot s^2$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \rightarrow (m.s^{-1})^2$$

On pose

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

c : dite la célérité de l'onde électromagnétique : représente la vitesse de propagation dans le vide (suite voir partie des ondes).

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} &= 0 \\ \blacktriangleright \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Si on pose

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

opérateur Alembertien

alors les potentiels \vec{A} et V vérifient les équations de d'ALEMBERT

$$\square \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \quad ; \quad \square V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Remarque- 36 :

Dans une région (comme le vide par exemple) où $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ les équations de d'ALEMBERT s'écrivent

$$\square \vec{A} = \vec{0} \quad ; \quad \square V = 0$$

7.2.4 Potentiels retardés

► On rappelle qu'en régime stationnaire on a :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = 0$$

Et lorsque la distribution est limitée dans l'espace on a :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)d\tau}{PM} \quad \text{et} \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P) d\tau}{PM}$$

On démontre qu'en régime variable et lorsque la distribution est limitée dans l'espace que les solutions des équations de d'ALEMBERT pour V et \vec{A} s'écrivent :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright V(M, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P, t - PM/c)}{PM} d\tau \\ \blacktriangleright \vec{A}(M, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P, t - PM/c)}{PM} d\tau \end{aligned}$$

$V(M, t)$ et $\vec{A}(M, t)$ sont appelés les potentiels retardés.

Si on pose $\theta = \frac{PM}{c}$ le retard ; c'est à dire que le point M va subir les potentiels issuent de la distribution mais avec un retard $\theta = \frac{r}{c} = \frac{PM}{c}$

7.3 L'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP)

Dite aussi Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

7.3.1 Définition de l'ARQP

L'ARQP consiste à négliger le retard θ devant un temps caractéristiques (T la période par exemple pour un signal périodique), c'est à dire considérer

$$\begin{aligned} \blacktriangleright V(M, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P, t)}{PM} d\tau \\ \blacktriangleright \vec{A}(M, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P, t)}{PM} d\tau \\ \blacktriangleright \vec{E}(M, t) &= -\vec{\text{grad}} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t} \\ \blacktriangleright \vec{B}(M, t) &= \vec{\text{rot}} \vec{A}(M, t) \end{aligned}$$

En d'autres termes l'ARQP consiste à négliger le phénomène de propagation

7.3.2 Domaine de validité de l'ARQP

Considérons un signal T-périodique.

ARQP est valable donc $\theta \ll T \Rightarrow \frac{SM}{c} \ll T$ c'est à dire

$$SM \ll cT = \lambda = \frac{c}{f}$$

f	λ
50 Hz	6000 km
10 MHz	30 m
1 GHz	30 cm

On retenir que le cadre de l'ARQP est valable au laboratoire si la fréquence du signal est inférieure à 1 MHz

$$ARQP \Rightarrow f \leq 1 \text{ MHz}$$

7.3.3 Comparaison des amplitudes des vecteurs densité de courant et de courant de déplacement

Considérons un conducteur métallique (type cuivre) de conductivité $\sigma \simeq 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ soumis à un champ électrique sinusoïdal de la forme $\vec{E} = \vec{E}_o \cos(\omega t)$.

Comparons les amplitudes des vecteurs densité de courants \vec{j} et \vec{j}_D

On a :

- $\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}_o \cos(\omega t)$ l'amplitude est donc $j_M = \sigma E_o$
- $\vec{j}_D = \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j}_D = -\epsilon_o \omega \sin(\omega t)$ l'amplitude est donc $j_{DM} = \epsilon_o \omega E_o$

Ce qui donne

$$\frac{j_{DM}}{j_M} = \frac{\epsilon_o \omega}{\sigma}$$

Cherchons à quelle fréquence f on a le vecteur densité de courant de déplacement \vec{j}_D est négligeable devant le densité de courant \vec{j}

$$\frac{j_M}{j_{DM}} \gg 1 \Rightarrow f \gg \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_o} \simeq 10^{16} \text{ Hz}$$

Conclusion:

Dans le cadre de l'ARQP, le vecteur densité de courant de déplacement \vec{j}_D est très négligeable devant le vecteur densité de courant \vec{j}

Conséquence : Dans le cadre de l'ARQP l'équation de MAXWELL -AMPÈRE généralisée s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_o \left(\vec{j} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \xrightarrow{\text{ARQP}} \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_o \vec{j}$$

7.3.4 Équations de MAXWELL dans le cadre de l'ARQP

$$(M.G) \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$$

$$(M.F) \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(M.\Phi) \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

$$(M.A) \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_o \vec{j}$$

Remarque- 37 :

Les relations entre les potentiels \vec{A} et V et les champs restent valables en effet :

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

7.3.5 Équations de MAXWELL en régime stationnaire

La variable X est en régime stationnaire si $\frac{\partial X}{\partial t} = 0$, ce qui donne

$$(M.G) \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(M.F) \quad \text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

$$(M.\Phi) \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$(M.A) \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

CHAPITRE 8

ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

8.1 Puissance volumique cédée par le champ à la matière

8.1.1 Rappel

Considérons une charge ponctuelle q placée au point M où règne un champ électromagnétique $[\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t)]$ animée de la vitesse $\vec{V}(M)$ par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R} .

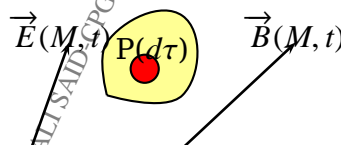
Cette charge subit l'action de la force de LORENTZ

$$\vec{F} = q[\vec{E}(M, t) + \vec{V}(M) \wedge \vec{B}(M, t)]$$

La puissance de cette force est

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M) \Rightarrow \mathcal{P} = q \vec{E}(M, t) \cdot \vec{V}(M)$$

Pour une distribution volumique, on la subdivise en des volumes élémentaire centré au point $P(d\tau)$ qui renferme la charge dq



L'élément de volume $d\tau$ qui renferme la charge élémentaire dq subit l'action $d\vec{F}$.
ce qui donne : $d\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$ et par conséquent

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \rho(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

Densité de force électromagnétique

Ainsi la puissance :

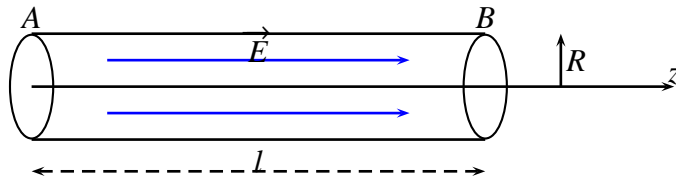
$$d\mathcal{P} = d\vec{F} \cdot \vec{V} \Rightarrow d\mathcal{P} = (\rho \vec{V})(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) d\tau \text{ ce qui donne}$$

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

C'est la puissance volumique cédée par le champ à la matière

8.1.2 Exemple d'un fil conducteur

Soit un fil conducteur de forme cylindrique d'axe oz de rayon R et de longueur l parcouru par un courant I constant.



Si on pose $U = V_A - V_B$ alors $\vec{E} = \frac{U}{l} \vec{e}_z$ ainsi $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z$ donc

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \frac{UI}{\pi R^2 l} \Rightarrow \mathcal{P} = UI$$

8.1.3 Loi d'OHM locale

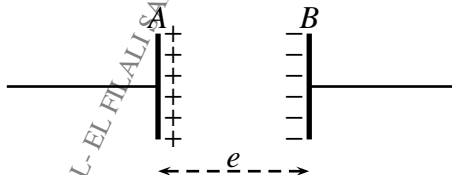
On rappelle que la loi d'OHM locale s'écrit

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

8.2 Densité volumique d'énergie électromagnétique

8.2.1 Cas d'un condensateur plan chargé

Considérons un condensateur plan formé d'armatures de surfaces S distantes de e , on néglige les effets des bord



On a l'énergie emmagasinée par le condensateur : $\mathcal{W} = \frac{1}{2}CU^2 \Rightarrow \mathcal{W} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} E^2 e^2$ ce qui donne

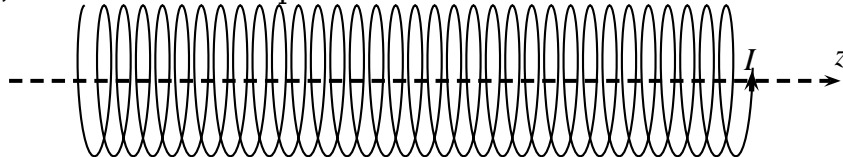
$$\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

par conséquent la densité volumique d'énergie électromagnétique pour le champs \vec{E} s'écrit

$$w_e = \frac{d\mathcal{W}}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$$

8.2.2 Cas d'un solénoïde infini

Considérons un solénoïde de rayon R , de longueur l , contenant N spires considéré infini ($l \gg R$), d'axe oz traversé par un courant I



On rappelle que :

► L'expression du champs : $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} I \vec{e}_z \Rightarrow I = \frac{Bl}{\mu_0 N}$

► L'expression de l'inductance $L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$

En effet : $\Phi = LI = NBS \Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$

► L'énergie magnétique emmagasinée par le solénoïde

$$\mathcal{W}_m = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow \frac{\mathcal{W}_m}{V} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

Et par conséquent la densité volumique d'énergie magnétique :

$$w_m = \frac{d\mathcal{W}}{d\tau} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

8.2.3 Cas général

Dans une région de l'espace où règne un champ électromagnétique $[\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t)]$ la densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit

$$w = w_m + w_e = \frac{d\mathcal{W}}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(M, t) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(M, t)$$

8.3 vecteur de POYNTING .Conservation de l'énergie électromagnétique

8.3.1 définition

On définit le vecteur de POYNTING qu'on note $\vec{\Pi}$ par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Notons que le flux du vecteur de POYNTING $\vec{\Pi}$ à travers une surface Σ représente la puissance électromagnétique rayonnée par \vec{E} et \vec{B} ; donc

$$\mathcal{P}_{ray} = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S}$$

8.3.2 Identité de POYNTING

Montrons l'identité de POYNTING :

$$\text{div } \vec{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

équation locale de la conservation de l'énergie électromagnétique= identité de POYNTING

$$\text{M.A : } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\text{rot}} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{ce qui donne } \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Sachant que

$$\text{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B}$$

$$\text{Il en résulte que : } \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} - \underbrace{\frac{\vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E}}{\mu_0}}_{\frac{\partial w}{\partial t}} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Donc

$$\text{div } \vec{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

Remarque- 38 :

En régime stationnaire $\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$ ce qui donne

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{\Pi} d\tau + \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = 0 \Rightarrow \oint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = 0$$

C'est à dire en régime stationnaire toute la puissance cédée à la matière par le champ électromagnétique (valeur positive) est totalement rayonnée (valeur négative)

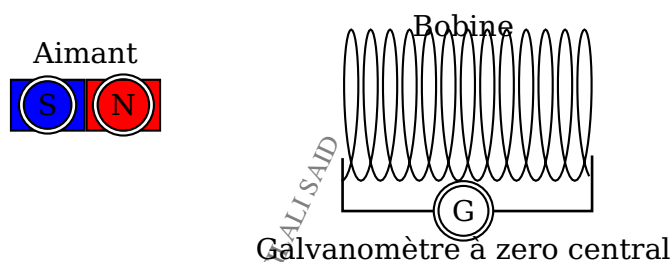
CHAPITRE 9

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

9.1 Phénomène d'induction : Loi de LENZ . Loi de FARADAY

9.1.1 L'étude expérimentale

Soit le montage suivant :



Réalisons les expériences suivantes :

Expérience 1 : On maintient la bobine fixe et on déplace l'aimant : le galvanomètre indique le passage du courant.

Expérience 2 : On maintient l'aimant fixe et on déplace la bobine : le galvanomètre indique le passage du courant.

C'est le phénomène d'induction électromagnétique.

9.1.2 Définitions

Définition :

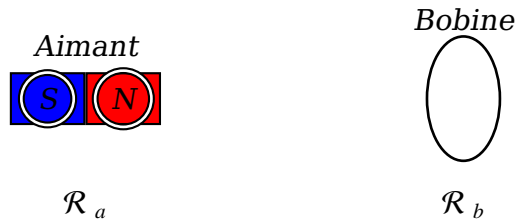
On appelle phénomène d'induction, l'apparition d'un courant ou d'une force électromotrice (f.e.m) dans un circuit mobile dans un champ magnétique variable.

Deux cas particuliers :

- ▶ Circuit fixe dans un champ magnétique variable : Cas de NEUMANN .
- ▶ Circuit mobile dans un champ magnétique permanent : Cas de LORENTZ .

Remarque- 39 :

Soient \mathcal{R}_a le référentiel lié à l'aimant et \mathcal{R}_b le référentiel lié à la bobine

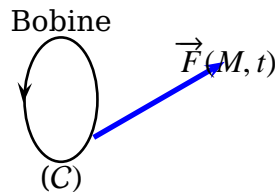


- Si l'observateur est lié à $\mathcal{R}_a \Rightarrow$ cas de LORENTZ .
- Si l'observateur est lié à $\mathcal{R}_b \Rightarrow$ cas de NEUMANN .

Définition :

- **Circuit induit : circuit siège du phénomène d'induction.**
- **Circuit inducteur : circuit source du champ magnétique à l'origine du phénomène d'induction.**

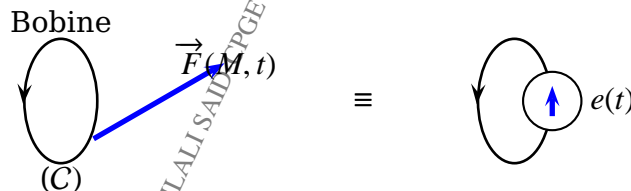
Soit un circuit (C) dont les porteurs de charge peuvent être mis en mouvement sous l'action d'une force $\vec{F}(M, t)$

**Définition :**

On appelle f.e.m dans le circuit (C) la quantité

$$e(t) = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F}(M, t) \cdot d\vec{OM}$$

q représente la charge des porteurs de charge et la fem $e(t)$ le même sens que l'orientation de C :

**Remarque- 40 :**

L'existence d'une force électromotrice est liée à celle d'un champ à circulation non conservative.

En effet :

$$\text{On a } \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \vec{F} = q(-\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

Ce qui donne

$$e(t) = \oint_C \left(-\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{V} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{OM}$$

Or $\oint_C \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{OM} = 0$ d'où :

$$e(t) = \oint_C \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{V} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{OM} = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{OM}$$

$$\vec{E}_m(M, t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{V} \wedge \vec{B}$$

Le champ électromoteur

Si le circuit induit présente une résistance R alors $e(t) = Ri(t)$ ce qui montre que $i(t)$ et $e(t)$ ont même sens.

9.1.3 Loi de LENZ

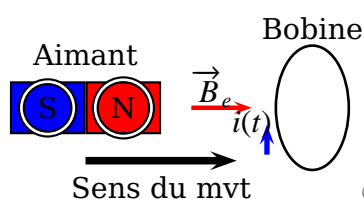
9.1.3.1 Énoncé

Le sens du courant induit est tel que le champ magnétique créé par le courant induit s'oppose par ses effets aux causes qui ont donnés naissance à l'induction

9.1.3.2 Exemples

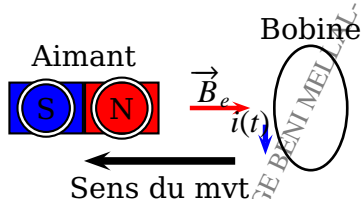
Exemple-1 : Mouvement de l'aimant

Premier cas :



Lorsque on approche le pôle nord de l'aimant vers la bobine \vec{B}_e augmente, donc le sens de i est tel qu'il s'oppose à cette augmentation en créant un champ magnétique \vec{b} qui s'oppose à \vec{B}

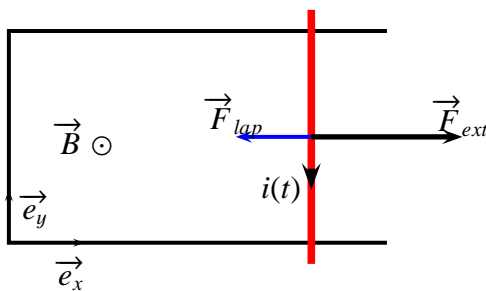
Deuxième cas :



Lorsque on éloigne le pôle nord de l'aimant de la bobine \vec{B}_e diminue, donc le sens de i est tel qu'il s'oppose à cette diminution en créant un champ magnétique \vec{b} qui aura le même sens que \vec{B}

Remarque- 41 :

Rapprocher le pôle sud est équivalent à éloigner le pôle nord ; ainsi éloigner le pôle sud est équivalent à rapprocher le pôle nord

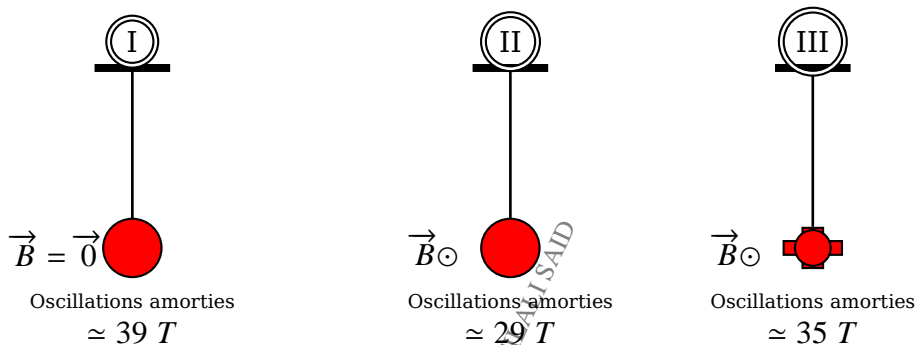
Exemple-2 : Rail de LAPLACE

La force \vec{F}_{ext} déplace la barre suivant le sens de \vec{e}_x donc Le sens du courant induit i est tel que la force de LAPLACE \vec{F}_{lap} s'oppose à la force extérieur donc i se dirige vers la bas (opposé à \vec{e}_y)

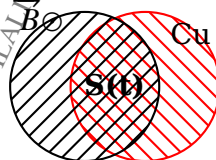
Comme application : freinage par induction.

Exemple-3 : Mouvement d'un pendule pesant en cuivre

Réalisons les expériences suivantes



- Dans (I) on a $\vec{B} = \vec{0}$; les forces exercées sont : \vec{P} , \vec{R} et \vec{f} force de frottement.
- Dans (II) et (III) on a $\vec{B} \neq \vec{0}$ et l'amortissement augmente de (III) vers (II).
- Lors du mouvement de la plaque de cuivre la surface en regard S varie en fonction du temps c'est à dire $S = S(t)$



Par conséquent le flux $\Phi = \Phi(t) \Rightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$ d'où l'apparition d'un courant induit.

Le sens du courant induit est tel que le moment de la force de LAPLACE s'oppose au moment du poids

9.1.4 Loi de FARADAY

La force électromotrice (fem) d'induction est égale à l'opposée de la variation du flux du champ magnétique par rapport au temps

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\text{On a : } e(t) = \underbrace{\oint_C \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{OM}}_{\text{Induction de NEUMANN}} + \underbrace{\oint_C \vec{V} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{OM}}_{\text{Induction de LORENTZ}}$$

9.2 L'étude de l'induction

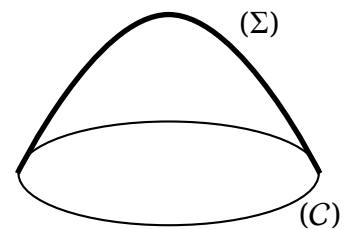
9.2.1 L'induction de NEUMANN

Considérons un circuit (C) fixe ($\vec{V} = \vec{0}$) dans un champ magnétique $\vec{B} = \vec{B}(t)$.

$$\text{On a : } e(t) = -\oint_C \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{OM}$$

$$\text{Or } \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \Rightarrow e(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{OM} \right)$$

Ce qui donne en transformant l'intégrale simple en intégrale double :



$$e(t) = -\oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{OM} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Application 17 :
CCP TSI 2010

9.2.2 L'induction de LORENTZ

Le champ magnétique $\vec{B}(M, t) = \vec{B}(M)$ est permanent et le circuit C est mobile.

$$e(t) = \oint_C (\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{OM} = -\frac{d\Phi_c}{dt}$$

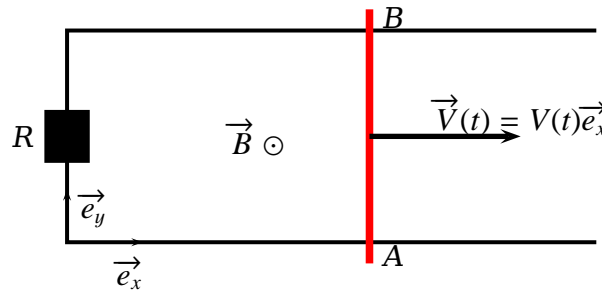
Avec Φ_c le flux coupé par le circuit lors de son mouvement.

Application 18 :

Considérons le circuit suivant constitué des rails de LAPLACE modélisable par une résistance R et une barre MN de masse m mobile **sans frottement**

on donne :

- $\vec{B} = B\vec{e}_z$ champ stationnaire uniforme.
- La vitesse initiale $V(t=0) = V_0$
- $MN = \ell$ longueur de la barre



Questions:

- 1 Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $V(t)$.
- 2 Donner l'expression du courant induit.
- 3 Faire un bilan énergétique.

Correction - Correction

- 1 L'équation différentielle vérifiée par la vitesse $V(t)$.

On a : $e(t) = \oint_C (\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{OM} \Rightarrow e(t) = -VB\ell < 0$

Comme $e(t) = Ri \Rightarrow i = -\frac{VB\ell}{R}$

On suppose le référentiel \mathcal{R} est galiléen, la RFD donne : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_L = m \frac{d\vec{V}}{dt}$

Par projection suivant \vec{e}_x on obtient : $m \frac{dV}{dt} = iB\ell = -\frac{VB^2\ell^2}{R}$
ce qui donne

$$\frac{dV}{dt} + \frac{B^2\ell^2}{mR}V = 0$$

C'est l'équation différentielle vérifiée par la vitesse

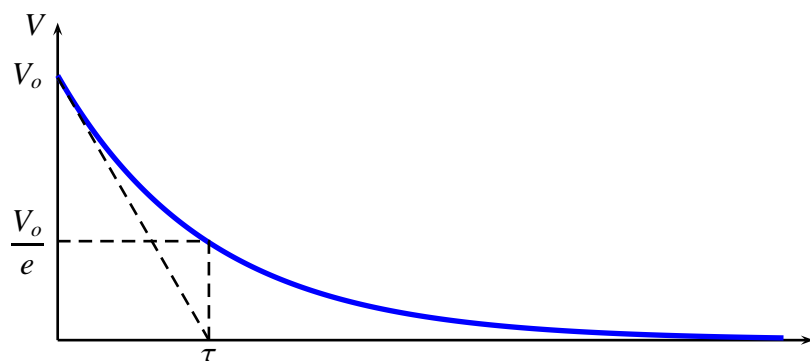
On pose

$$\tau = \frac{mR}{B^2\ell^2}$$

alors l'équation précédente devient

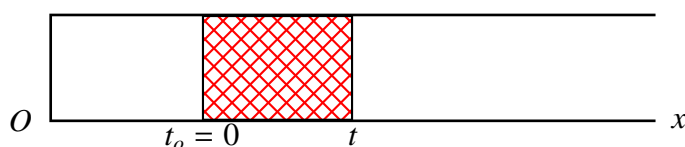
$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau}V = 0 \Rightarrow V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

Représentation graphique :

**Remarque- 42 :**

On a :

$$\left. \begin{array}{l} e(t) = -VB\ell \\ V = \frac{dx}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow e(t) = -\frac{d(B\ell x)}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$



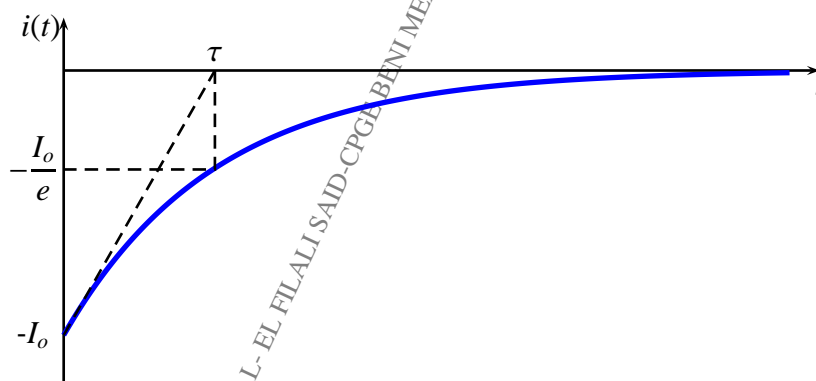
② L'expression du courant :

On a : $i = -\frac{BV\ell}{R}$ et $V = V_o e^{-t/\tau}$ alors

$$i(t) = -I_o e^{-t/\tau}$$

avec

$$I_o = \frac{B\ell V_o}{R}$$



Le signe (-) traduit la loi de LENZ .

③ Bilan énergétique On a à $t = 0$

$$E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_{mo} = E_{co} = \frac{1}{2} m \vec{V}_o^2$$

De même : $W_J = \int_0^{+\infty} Ri^2(t)$

Or $i(t) = -I_0 e^{-t/\tau}$ ce qui donne après intégration

$$W_J = \frac{1}{2} m \vec{V}_0^2 = E_{co}$$

Conclusion:

**Toute l'énergie cinétique initiale de la barre est dissipée par effet joule:
C'est le principe de la conservation de l'énergie**

9.3 L'AUTO-INDUCTION

9.3.1 DÉFINITIONS

Soit (C) un contour traversé par un courant i permanent ($I=cte$) ou lentement variable ($i(t)$ avec ARQP respectée)

On rappelle que dans le cadre de l'ARQP on a $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\text{On a : } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{d\vec{OP} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

$$\text{Ainsi } \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{d\vec{OP}}{PM}$$

Calculons le flux de \vec{B} crée par (C) à travers Σ qui s'appuie sur ce contour, un tel flux s'appelle le flux propre on le note Φ_p

$$\Phi_p = \iint_{\Sigma(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = \oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Ce qui donne

$$\Phi_p = \oint_{(C)} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{d\vec{OP}}{PM} \right) \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \Phi_p = i \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \left(\oint_{(C)} \frac{d\vec{OP}}{PM} \right) \cdot d\vec{\ell} \right)$$

On pose

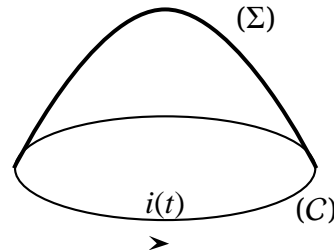
$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \left(\oint_{(C)} \frac{d\vec{OP}}{PM} \right) \cdot d\vec{\ell}$$

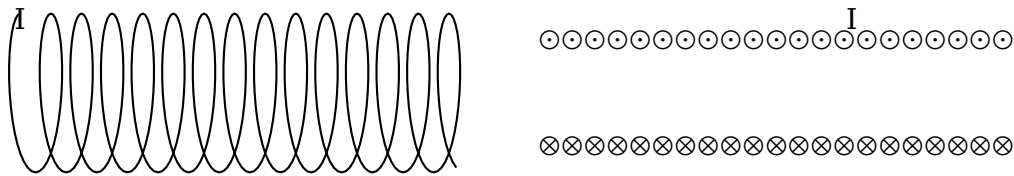
L représente L'inductance du circuit; son unité est le Henry de symbole H
Il en résulte que

$$\Phi = Li$$

9.3.2 APPLICATION: SOLÉNOÏDE INFINI

Considérons un solénoïde infini ($\ell \gg R$) parcouru par un courant i





On a $\Phi_p = N\Phi_p(\text{spire}) \Rightarrow \Phi = Li = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Comme \vec{B} est uniforme alors

$$\Phi_p = Li = \mu_o \frac{Ni}{\ell} S \Rightarrow L = \frac{\mu_o N^2 S}{\ell} = \frac{\mu_o N^2 \pi R^2}{\ell}$$

Remarque- 43 :

On peut déterminer l'inductance L à partir de l'expression de l'énergie magnétique
En effet :

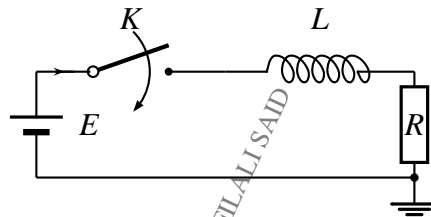
$$E_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2\mu_o} \iiint \vec{B}^2 d\tau \Rightarrow L = \frac{1}{\mu_o i^2} \iiint \vec{B}^2 d\tau$$

Comme $\vec{B} = \mu_o n i \vec{e}_z$ et $\iiint d\tau = S \ell$ alors

$$L = \frac{\mu_o N^2 S}{\ell}$$

9.3.3 L'ÉNERGIE MAGNÉTIQUE DANS UN CIRCUIT

Considérons le circuit suivant :



l'interrupteur K est ouvert depuis longtemps à $t = 0$ on le ferme.

① Quelle est l'expression du courant $i(t)$ pour $t \geq 0$

② Faire un bilan énergétique. Puisque K est ouvert depuis longtemps alors $i(t = 0^-) = 0 = i(t = 0^+)$ d'après la continuité du courant qui traverse la bobine.

La loi des mailles donne

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{E}{L}$$

avec $\tau = \frac{L}{R}$ constante du temps ou temps de relaxation

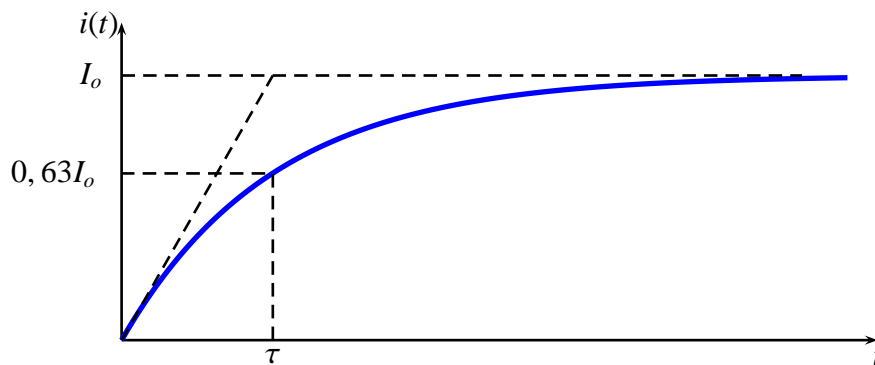
En tenant des conditions initiales la solution de cette équation est

$$i(t) = I_o(1 - e^{-t/\tau})$$

Avec

$$I_o = \frac{E}{R}$$

Représentation graphique :



Bilan énergétique

On a :

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} \Rightarrow \int_0^t Ei \, dt = \int_0^t Ri^2 \, dt + \int_0^t L \frac{di}{dt} i \, dt$$

Or $\int_0^t L \frac{di}{dt} i \, dt = \int_0^t L i \, di = \frac{1}{2} L (i^2 - i_o^2)$ et puisque $i_o = 0$ alors

$$\underbrace{\int_0^t Ei \, dt}_{E_g} = \underbrace{\frac{1}{2} Li^2}_{E_m} + \underbrace{\int_0^t Ri^2 \, dt}_{E_J}$$

Avec :

- ▶ E_g : Énergie fournie par le générateur entre $t = 0$ et l'instant $t > 0$.
- ▶ E_m : Énergie magnétique emmagasinée par la bobine entre $t = 0$ et l'instant $t > 0$.
- ▶ E_J : Énergie dissipée par effet JOULE dans la résistance entre $t = 0$ et l'instant $t > 0$.

On retrouve la loi de conservation de l'énergie

$$E_g = E_m + E_J$$

Remarque- 44 :

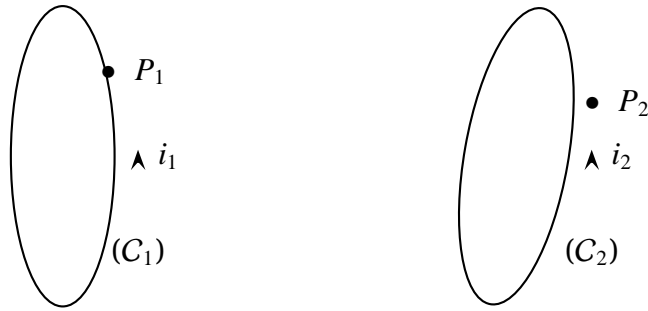
Autre expression de l'énergie magnétique

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2\mu} \iiint \vec{B}^2 \, d\tau = \frac{1}{2} \Phi i$$

9.4 INDUCTION MUTUELLE DE DEUX CIRCUITS FILIFORMES FERMÉS INDÉFORMABLES ET FIXES

9.4.1 DÉFINITIONS

Soient deux circuits (C_1) et (C_2) filiformes fermés et indéformables fixés par rapport à un référentiel, traversés par les courants i_1 et i_2



Notons :

- (\vec{B}_1, \vec{A}_1) les champs créent par le courant i_1 traversant le circuit (C_1)
- (\vec{B}_2, \vec{A}_2) les champs créent par le courant i_2 traversant le circuit (C_2)

Avec :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_o i_1}{4\pi} \oint_{(C_1)} \frac{d\vec{l}_1 \wedge \overrightarrow{P_1 M}}{P_1 M^3} \quad ; \quad \vec{A}_1 = \frac{\mu_o i_1}{4\pi} \oint_{(C_1)} \frac{d\vec{l}_1}{P_1 M}$$

Ainsi :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_o i_2}{4\pi} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{l}_2 \wedge \overrightarrow{P_2 M}}{P_2 M^3} \quad ; \quad \vec{A}_2 = \frac{\mu_o i_2}{4\pi} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{l}_2}{P_2 M}$$

De même :

- $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\Sigma_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$: le flux du champ \vec{B}_1 à travers le circuit (C_2)
- $\Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{\Sigma_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$: le flux du champ \vec{B}_2 à travers le circuit (C_1)

On a :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\Sigma_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \Rightarrow \Phi_{1 \rightarrow 2} = \oint_{(C_2)} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

Or : $\vec{A}_1 = \frac{\mu_o i_1}{4\pi} \oint_{(C_1)} \frac{d\vec{l}_1}{P_1 P_2}$ donc

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_o i_1}{4\pi} \oint_{(C_2)} \left(\oint_{(C_1)} \frac{d\vec{l}_1}{P_1 P_2} \right) d\vec{\ell}_2$$

Par conséquent

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = i_1 \left[\frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{(C_2)} \oint_{(C_1)} \frac{d\vec{\ell}_1 d\vec{\ell}_2}{P_1 P_2} \right]$$

On pose

$$\mathbf{M}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{(C_2)} \oint_{(C_1)} \frac{d\vec{\ell}_1 d\vec{\ell}_2}{P_1 P_2}$$

L'inductance mutuelle du circuit (C_1) à travers le circuit (C_2)

Remarque- 45 :

L'unité de $\mathbf{M}_{1 \rightarrow 2}$ est le HENRY (H)

Il en résulte que

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{M}_{1 \rightarrow 2} i_1$$

De la même façon on trouve

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = i_2 \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{\vec{dl}_1 \vec{dl}_2}{P_2 P_1} \right] = \mathbf{M}_{2 \rightarrow 1} i_2$$

Remarque- 46 :

1

$$\mathbf{M}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{M}_{2 \rightarrow 1} = \mathbf{M}$$

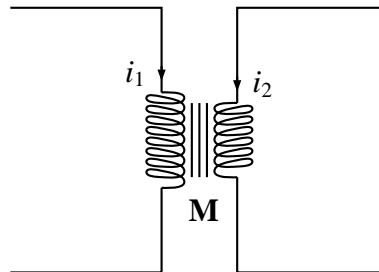
coefficient d'inductance mutuelle

2

Le coefficient d'inductance mutuelle \mathbf{M} est un réel ($\mathbf{M} \in \mathbb{R}$).

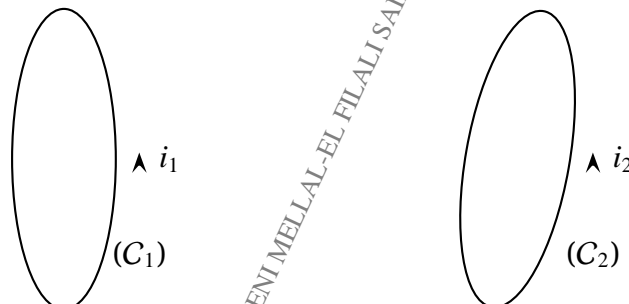
3

Deux circuits à caractère inductif avec convention récepteur $\mathbf{M} > 0$



9.4.2 FLUX MAGNÉTIQUE TOTAL À TRAVERS UN CIRCUIT

Soient deux circuits en influence inductif



Soient Φ_1 le flux total à travers le circuit C_1 et Φ_2 le flux total à travers le circuit C_2 .
Notons Φ_p le flux propre. par conséquent :

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_1 = \Phi_{p1} + \Phi_{2 \rightarrow 1} \\ \Phi_2 = \Phi_{p2} + \Phi_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \end{array} \right.$$

Qu'on peut écrire sous forme matricielle

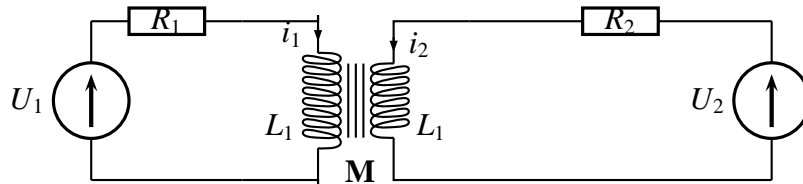
$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt} \quad \text{et} \quad e_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt}$$

Application 19 :

Écrire la loi des mailles pour le circuit suivant :



$$U_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$U_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

9.4.3 L'ÉNERGIE MAGNÉTIQUE DE DEUX CIRCUITS COUPLÉS PAR INDUCTANCE MUTUELLE

On rappelle que $E_m = \frac{1}{2} \Phi i$ ce qui donne :

$$E_{m1} = \frac{1}{2} \Phi_1 i_1 \Rightarrow E_{m1} = \frac{1}{2} (L_1 i_1 + M i_2) i_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} M i_1 i_2$$

Ainsi

$$E_{m2} = \frac{1}{2} \Phi_2 i_2 \Rightarrow E_{m2} = \frac{1}{2} (L_2 i_2 + M i_1) i_2 = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \frac{1}{2} M i_1 i_2$$

Il en résulte que

$$E_m = E_{m1} + E_{m2} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Remarque- 47 :

En convention récepteur on a $M > 0$ et $E_m > 0$ ainsi

$$E_m = \frac{1}{2} i_1^2 \left[L_2 + L_1 \left(\frac{i_1}{i_2} \right)^2 + 2M \left(\frac{i_1}{i_2} \right) \right]$$

On pose $x = \frac{i_1}{i_2}$ ce qui donne $E = m = \frac{1}{2} i_2^2 (L_1 x^2 + 2Mx + L_2) > 0 \Rightarrow \Delta' = M^2 - L_1 L_2 < 0$ il en résulte que

$$M < \sqrt{L_1 L_2}$$

x

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

10.1 Propagation du champ électromagnétique dans une région sans charges ni courants

10.1.1 Équation de propagation

Considérons les équations de MAXWELL dans le vide c'est à dire dans une région de l'espace qui ne contient ni charges ($\rho = 0$) ni courants ($\vec{j} = \vec{0}$). Dans ces conditions les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$M.G \quad \text{div } \vec{E} = 0$$

$$M.F \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$M.\Phi \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$M.A \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

10.1.2 Équation de propagation du champ électrique

Calculons $\text{rot}(\text{rot } \vec{E})$:

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{B}) \Rightarrow \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Comme $\text{div } \vec{E} = 0$ alors

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \Rightarrow \square \vec{E} = \vec{0} \quad (I)$$

C'est l'équation de propagation du champ \vec{E} dans le vide

Avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

célérité de l'OEM qui représente la vitesse de propagation de l'OEM

Remarque- 48 :

1 l'équation (I) est une équation vectorielle qui correspond à trois équations scalaires en coordonnées cartésiennes

$$\Delta E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \square E_x = 0 \quad (10.1)$$

$$\Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \square E_y = 0 \quad (10.2)$$

$$\Delta E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \square E_z = 0 \quad (10.3)$$

2 En coordonnées cylindriques (r, θ, z) ou sphériques (r, θ, φ) les composantes de \vec{E} ne vérifient pas les équations :

► $\square E_r = 0 ; \square E_\theta = 0 ; \square E_z = 0$

► $\square E_r = 0 ; \square E_\theta = 0 ; \square E_\varphi = 0$

Puisque en coordonnées :

- cylindriques $\Delta (E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta + E_z \vec{e}_z) \neq (\Delta E_r) \vec{e}_r + (\Delta E_\theta) \vec{e}_\theta + (\Delta E_z) \vec{e}_z$
- sphériques $\Delta (E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta + E_\varphi \vec{e}_\varphi) \neq (\Delta E_r) \vec{e}_r + (\Delta E_\theta) \vec{e}_\theta + (\Delta E_\varphi) \vec{e}_\varphi$

10.1.3 Équation de propagation du champ magnétique

Calculons $\vec{\text{rot}} (M.A) :$

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) \Rightarrow \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Comme $\text{div} \vec{B} = 0$ alors

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \Rightarrow \square \vec{B} = \vec{0} \quad (II)$$

C'est l'équation de propagation du champ \vec{B} dans le vide

Remarque- 49 :

l'équation (II) est une équation vectorielle qui correspond à trois équations scalaires en coordonnées cartésiennes

$$\Delta B_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = \square B_x = 0 \quad (10.4)$$

$$\Delta B_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \square B_y = 0 \quad (10.5)$$

$$\Delta B_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \square B_z = 0 \quad (10.6)$$

10.1.4 Interprétation et conclusion

► \vec{E} et \vec{B} vérifient les équations de propagations de d'ALEMBERT ; \vec{E} et \vec{B} constituent une onde appelée onde électromagnétique.

► A partir des mesures en régime statique, on obtient les valeurs :

$$\bullet \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \quad (F.m^{-1})$$

$$\bullet \mu_0 = 4\pi.10^{-7} \quad (H.m^{-1})$$

► Donc $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \simeq 3.10^8 \quad (m.s^{-1})$

► Postulat de MAXWELL :

La lumière est une onde électromagnétique qui se propage dans le vide

à la vitesse $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$

10.2 Onde plane progressive monochromatique (harmonique) (OPPM)

10.2.1 Solution de l'équation de d'ALEMBERT à une dimension

Soit un signal $s(x, t)$ qui vérifie l'équation de d'ALEMBERT à une dimension x (par exemple).

Donc

$$\square s(x, t) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

On pose

$$p = x - ct \quad \text{et} \quad q = x + ct$$

sachant que :

$$\partial s(p, q) = \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x}$$

alors

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial p} + \frac{\partial s}{\partial q}$$

De même :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial t} = c \left(-\frac{\partial s}{\partial p} + \frac{\partial s}{\partial q} \right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s}{\partial p} + \frac{\partial s}{\partial q} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial p} + \frac{\partial s}{\partial q} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 s}{\partial q \partial p} + \frac{\partial^2 s}{\partial q^2} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 s}{\partial q^2} \end{aligned}$$

De même :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial p^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 s}{\partial q^2} \right)$$

Il en résulte que

$$\square s(p, q) = 0 \Rightarrow 4 \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial q} = 0$$

C'est à dire $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial s}{\partial q} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right) = 0$ ce qui montre que

$$s(p, q) = f(p) + g(q) \Rightarrow s(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

10.2.2 Interpretation de la solution générale de l'équation de d'ALEMBERT à une dimension

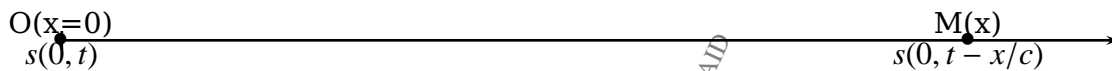
► Remarquons que $g(x + ct) = g(-[(-x) - ct])$ c'est à dire g est une fonction quelconque de la variable $[(-x) - ct]$.

Par conséquent l'interprétation de $g(x + ct)$ est la même que celle de $f(x - ct)$ avec **un changement de l'axe x près**

► Intéressons à la fonction $s(x, t) = f(x - ct)$:

Puisque $s(x, t) = f(0 - c(t - x/c)) = s(0, t - \theta)$ avec $\theta = x/c$.

Par conséquent si on connaît $s(0, t)$ on peut en déduire $s(x, t)$ pour tout $x > 0$ c'est à dire pour tout point $M(x)$ il va répéter le mouvement du point $O(x = 0)$ avec un certain retard $\theta = OM/c = x/c$



► On retient que la fonction $f(x - ct)$ est une onde progressive : **représente la propagation sans déformation d'un signal à la vitesse c dans le sens des x croissants.**

► La fonction $g(x + ct)$ est une onde régressive : **représente la propagation sans déformation d'un signal à la vitesse c dans le sens des x décroissants.**

Remarque- 50 :

En symétrie sphérique, et pour tout champ scalaire $s(r, t)$ on a : $\Delta s = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rs)$ ce qui donne :

$$\square s = 0 \Rightarrow \Delta(rs) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(rs)}{\partial t^2} = 0$$

Ce qui donne comme solution :

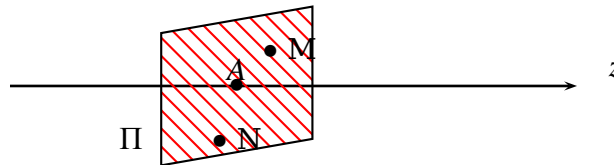
$$s(r, t) = \underbrace{\frac{1}{r} f(r - ct)}_{\text{O.Sph progressive}} + \underbrace{\frac{1}{r} g(r + ct)}_{\text{O.Sph régressive}}$$

10.2.3 Structure d'une onde plane progressive monochromatique

10.2.3.1 Définition

► Une onde électromagnétique est dite plane de direction de propagation \vec{e}_u si les champs \vec{E} et \vec{B} sont des fonctions de la forme $s(u, t)$

C'est à dire ; il existe un plan $\Pi \perp \vec{e}_u$ telle que $\forall (M, N) \in \Pi \implies s(M, t) = s(N, t)$



$$(M, A, N) \in \Pi \xrightarrow{\text{Onde plane}} s_A(u, t) = s_M(u, t) = s_N(u, t)$$

C'est à dire si l'onde électromagnétique est plane de direction de propagation de \vec{e}_u alors tous les points du plan perpendiculaire à \vec{e}_u ont même valeur de $s(u, t)$.

Conséquence : La solution de l'équation de d'ALEMBERT à une dimension est la superposition de deux ondes planes.

► Une onde électromagnétique plane est progressive dans le vide de direction de propagation \vec{e}_u solution de l'équation de d'ALEMBERT de la forme $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(u - ct)$ ainsi $\vec{B}(M, t) = \vec{B}(u - ct)$.

► Une onde électromagnétique plane progressive dans le vide est dite harmonique (monochromatique ou sinusoidal) s'elle est de la forme

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_o \cos[\omega(t - \theta) + \varphi_E] \quad ; \quad \vec{B}(M, t) = \vec{B}_o \cos[\omega(t - \theta) + \varphi_B]$$

Avec $\theta = \frac{SM}{c} = \frac{u}{c}$ le retard de M par rapport à la source S.

Par conséquent : $\omega(t - \theta) + \varphi_i = \omega t - \frac{\omega}{c}u + \varphi_i$

On pose de même

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{e}_u = \frac{2\pi}{cT}\vec{e}_u = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_u$$

Vecteur d'onde

De même puisque $\vec{k} = k\vec{e}_u$ et $\vec{OM} = u\vec{e}_u$ alors

$$\frac{\omega}{c}u = ku = \vec{k} \cdot \vec{OM}$$

et Par conséquent

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_o \cos(\omega t - ku + \varphi_E) \implies \vec{E}(M, t) = \vec{E}_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_E)$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_o \cos(\omega t - ku + \varphi_B) \implies \vec{B}(M, t) = \vec{B}_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_B)$$

Remarque- 51 :

Si on pose

$$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z \implies \vec{k} \cdot \vec{OM} = xk_x + yk_y + zk_z$$

alors la direction de propagation de l'OPPM est

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}$$

► On appelle la relation entre $\omega = \omega(k)$ ou $k = k(\omega)$ la relation de dispersion.

► On définit la vitesse de groupe par

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

► On définit la vitesse de phase par

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Remarque- 52 :

• $v_g \leq c$: puisque elle représente la vitesse de propagation de l'énergie (Voir partie énergie d'une OPPM)

• $v_\varphi \geq c$: c'est une définition théorique qui ne représente la vitesse d'aucune grandeur physique.

•

$$v_g \cdot v_\varphi = c^2$$

Retenons que :

Grâce au théorème de FOURIER , on peut décomposer toute onde réelle (appelé paquet d'onde) en une somme infinie d'onde plane progressive monochromatique

$$\sum_{i=1}^{\infty} (OPPM)_i \rightarrow \text{Onde réelle} = \text{Paquet d'onde}$$

10.2.3.2 OEPPM et notation complexe

Considérons une OEPPM décrite par le champs électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) tels que :

• Pour le champ $\vec{E}(M, t)$ on a :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_E) \implies \vec{E}(M, t) = \vec{E}_o \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_E)$$

• Pour le champ $\vec{B}(M, t)$ on a :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_B) \implies \vec{B}(M, t) = \vec{B}_o \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_B)$$

- Relation de dispersion :

Puisque \vec{E} vérifie l'équation de d'ALEMBERT alors

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \implies \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 \right) \vec{E} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E} = \vec{0}$$

C'est à dire

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \implies k = \frac{\omega}{c}$$

Dérivons la relation de dispersion

$$k dk = \frac{\omega d\omega}{c^2} \implies v_g \cdot v_\varphi = c^2$$

En notation complexe on a :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_E) \implies \vec{E}(M, t) = \underline{\vec{E}}_o \mathbf{e}^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_B) \implies \vec{B}(M, t) = \underline{\vec{B}}_o \mathbf{e}^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

Avec

$$\underline{\vec{E}}_o = \vec{E}_o \mathbf{e}^{i\varphi_E} \quad ; \quad \underline{\vec{B}}_o = \vec{B}_o \mathbf{e}^{i\varphi_B}$$

- En notation complexe , Montrons que :

$$\vec{\nabla} = -i \vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = i\omega$$

En effet :

$$\vec{\nabla} \underline{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = -ik_x \underline{\vec{E}} \\ \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial y} = -ik_y \underline{\vec{E}} \\ \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial z} = -ik_z \underline{\vec{E}} \end{pmatrix} \implies \vec{\nabla} \underline{\vec{E}} = -i \vec{k} \underline{\vec{E}}$$

Ainsi

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{E}} \implies \frac{\partial}{\partial t} = i\omega$$

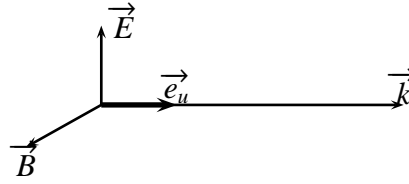
- Autre écriture des équations de MAXWELL dans le vide avec $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ des OPPM :

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{\vec{E}} &= 0 \implies \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \\ \text{rot } \underline{\vec{E}} &= -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \implies \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}} \\ \text{div } \underline{\vec{B}} &= 0 \implies \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \\ \text{rot } \underline{\vec{B}} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \implies \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}} \end{aligned}$$

On en déduit que Les champs \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires à la direction de propagation.

Conclusion:

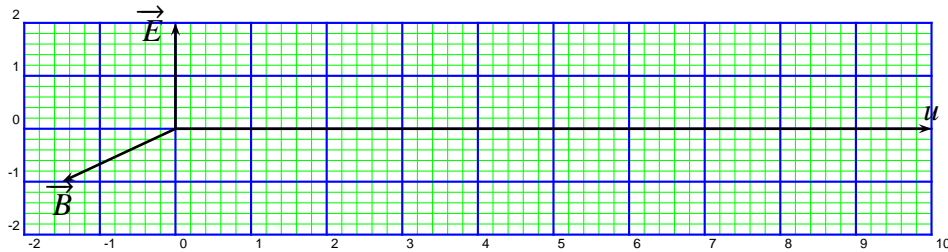
les champs \vec{E} et \vec{B} sont transverses ainsi le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ est direct



A partir de la relation

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \Rightarrow B = \frac{E}{c}$$

Représentation temporelle de \vec{E} et \vec{B}



Remarque- 53 :

Si on écrit $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_o \mathbf{e}^{i(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)}$ alors $\vec{\nabla} = i\vec{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$

10.2.3.3 L'aspect énergétique d'une OEPPM dans le vide

► On rappelle que la densité d'énergie électromagnétique associée à \vec{E} et \vec{B} est

$$w = \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_o \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_o}$$

Et comme $\vec{B} = \frac{\vec{e}_u \wedge \vec{E}}{c} \Rightarrow B = \frac{E}{c}$ c'est à dire

$$w = \epsilon_o \vec{E}^2 = \frac{1}{\mu_o} \vec{B}^2 \Rightarrow \langle w \rangle = \epsilon_o \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{\mu_o} \langle \vec{B}^2 \rangle$$

► Vecteur de POYNTING :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_o} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{EB}{\mu_o} \vec{e}_u \Rightarrow \vec{\Pi} = c\epsilon_o E^2 \vec{e}_u = cw \vec{e}_u$$

Ce qui donne avec $\vec{E} = \vec{E}_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_E)$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = c \langle w \rangle \vec{e}_u \Rightarrow \langle \Pi \rangle = c \langle w \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_o E_o^2$$

Sachant que le flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface S représente la puissance qui traverse cette surface. donc

$$\left\langle \frac{d\mathcal{W}}{dt} \right\rangle = \langle \mathcal{P} \rangle = \langle \Pi \rangle S = c \langle w \rangle S \implies \langle d\mathcal{W} \rangle = c \langle w \rangle S c dt$$

Il en résulte que l'énergie $\langle d\mathcal{W} \rangle$ est l'énergie moyenne contenue dans un cylindre de section S et de hauteur $c dt$.

Ce cylindre d'énergie traverse la surface S pendant le temps dt , il se déplace donc à la vitesse $c\vec{e}_u$ ce qui montre que :

Conclusion:

La vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique est c

► **Vecteur de POYNTING complexe**

On peut définir aussi un vecteur POYNTING complexe par

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}^*(M, t)}{\mu_0}$$

où \vec{B}^* représente le complexe conjugué de la représentation complexe du champ magnétique.

L'intérêt de cette notation réside dans la relation suivante (qu'on peut vérifier aisément dans le cas d'une OEMPPM)

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \frac{1}{2} \Re[\vec{\Pi}(M, t)] = \frac{1}{2} \Re\left[\frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}^*(M, t)}{\mu_0}\right]$$

où \Re représente la partie réelle.

10.3 Polarisation de l'OEMPPM

10.3.1 Définition générale

Une onde électromagnétique (OEM) transversale est polarisée si l'extrémité A du vecteur $\vec{MA} = \vec{E}(M, t) = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y + Z\vec{e}_z$ décrit au cours du temps t une courbe fermée invariante dans le temps

10.3.2 Cas général d'une OEMPPM

Dans la suite on suppose que la direction de propagation de l'onde transverse est

$$\vec{e}_u = \vec{e}_z \implies \vec{k} = k\vec{e}_z$$

Dans ce cas, le champ électrique de l'onde est donné par

$$\vec{E} = \vec{E}_o \cos(\omega t - kz + \varphi_E) \implies \vec{E} \begin{cases} E_x = X = E_{ox} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = Y = E_{oy} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ E_z = Z = 0 \end{cases}$$

L'extrémité A décrit donc une courbe plane contenu dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation passant par le point M .

Posons alors

$$X_o = E_{ox} \quad , \quad Y_o = E_{oy} \quad , \quad p = \omega t - kz + \varphi_x \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_y - \varphi_x \implies \varphi_y = \varphi + \varphi_x$$

Avec ces notations on a :

$$\overrightarrow{MA} \left| \begin{array}{l} X = X_o \cos(p) \\ Y = Y_o \cos(p + \varphi) \end{array} \right.$$

Donc pour tout $X_o \neq 0$, $Y_o \neq 0$ et $\varphi \neq n\pi$ on a :

$$\left| \begin{array}{l} X = X_o \cos p \\ \frac{Y}{Y_o} = \cos(p + \varphi) = \cos p \cos \varphi - \sin p \sin \varphi \end{array} \right. \implies \left| \begin{array}{l} \cos p = \frac{X}{X_o} \\ \sin p = \frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{X}{X_o} \cos \varphi - \frac{Y}{Y_o} \right) \end{array} \right.$$

En éliminant p entre les deux équations, on obtient :

$$\begin{aligned} \sin^2 p + \cos^2 p = 1 &\implies \left(\frac{X}{X_o} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{X}{X_o} \cos \varphi - \frac{Y}{Y_o} \right)^2 = 1 \\ &\implies \left(\frac{X}{X_o} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[\left(\frac{X}{X_o} \right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{Y}{Y_o} \right)^2 - 2 \frac{X}{X_o} \frac{Y}{Y_o} \cos \varphi \right] = 1 \\ &\implies \left(\frac{X}{X_o} \right)^2 \sin^2 \varphi + \left(\frac{X}{X_o} \right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{Y}{Y_o} \right)^2 - 2 \frac{X}{X_o} \frac{Y}{Y_o} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

En fin

$$\boxed{\left(\frac{X}{X_o} \right)^2 + \left(\frac{Y}{Y_o} \right)^2 - 2 \frac{X}{X_o} \frac{Y}{Y_o} \cos \varphi = \sin^2 \varphi}$$

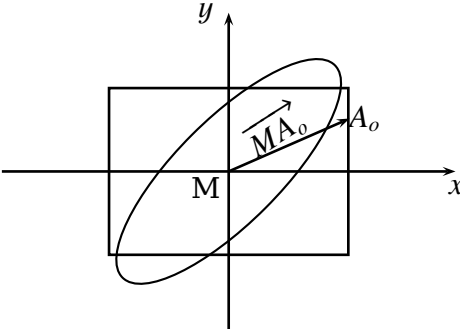
C'est l'équation cartésienne d'une ellipse. Ainsi dans le cas général l'OEMPPM est polarisée elliptiquement.

Pour déterminer le sens de parcours de l'ellipse, calculons la dérivée temporelle de \overrightarrow{MA}

$$\frac{d\overrightarrow{MA}(t)}{dt} \left| \begin{array}{l} \dot{X} = \omega X_o \sin(p) \\ \dot{Y} = \omega Y_o \sin(p + \varphi) \\ \dot{Z} = 0 \end{array} \right.$$

Il est inutile d'essayer de déterminer le sens du vecteur $\frac{d\overrightarrow{MA}(t)}{dt}$ à un instant quelconque. En effet, pour déterminer le sens de parcours de l'ellipse de polarisation, il suffit de connaître le sens de ce vecteur en un point particulier de l'ellipse. Il est particulièrement facile de répondre à cette question lorsque A est au point A_o tel que $p = 0$; soit t_o l'instant

correspond

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\vec{MA}(t_o)}{dt} \end{array} \right| \begin{array}{l} \dot{X} = 0 \\ \dot{Y} = \omega Y_o \sin(\varphi) \\ \dot{Z} = 0 \end{array}$$


Ainsi si :

- Pour : $0 < \varphi < \pi \Rightarrow \dot{Y} > 0$ le point A décrit l'ellipse dans le sens trigonométrique ; on dit que **La polarisation elliptique est gauche**.
- Pour : $\pi < \varphi < 2\pi \Rightarrow \dot{Y} < 0$ le point A décrit l'ellipse dans le sens horaire ; on dit que **La polarisation elliptique est droite**.

10.3.3 Cas particuliers

Il reste à étudier les différents cas autres qui donne la polarisation elliptique.

1 Polarisation circulaire : c'est le cas lorsque :

- $E_{ox} = X_o = Y_o = E_{oy} \neq 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ **La polarisation circulaire est gauche**.
- $E_{ox} = X_o = Y_o = E_{oy} \neq 0$ et $\varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ **La polarisation circulaire est droite**.

2 Polarisation rectiligne : Il existe différents cas de polarisation rectiligne :

2.1 $E_{ox} \neq 0, E_{oy} \neq 0$ et $\varphi = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{MA} \end{array} \right| \begin{array}{l} X = X_o \cos p \\ Y = Y_o \cos p) \Rightarrow Y = \frac{Y_o}{X_o} X \\ \dot{Z} = 0 \end{array}$$

C'est l'équation d'un segment de droite situé dans le premier et le troisième quadrants

$$\boxed{2.2} \quad E_{ox} \neq 0, E_{oy} \neq 0 \text{ et } \varphi = \pi$$

$$\overrightarrow{MA} \left| \begin{array}{l} X = X_o \cos p \\ Y = -Y_o \cos p \\ \dot{Z} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow Y = -\frac{Y_o}{X_o} X$$

C'est l'équation d'un segment de droite situé dans le deuxième et le quatrième quadrants

$$\boxed{2.3} \quad E_{ox} \neq 0, E_{oy} = 0 : \text{l'onde est polarisée rectilignement selon } Ox.$$

$$\boxed{2.4} \quad E_{ox} = 0, E_{oy} \neq 0 : \text{l'onde est polarisée rectilignement selon } Oy.$$

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

CHAPITRE 11

RÉFLEXION D'UNE O.E.M SUR UN CONDUCTEUR PARFAIT

11.1 Conducteur parfait

On rappelle que la loi d'OHM : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ est valable du régime continue ($f = 0$) jusqu'au domaine des ondes hertziennes : ($f \leq 10^{11} Hz$). Ainsi que $\vec{j}_D \ll \vec{j}$.

11.1.1 Relaxation d'un conducteur

Supposons qu'à l'instant pris comme origine ($t = 0$) on crée une densité volumique de charge à l'intérieur d'un conducteur ohmique de conductivité σ .

On se propose de déterminer l'évolution de $\rho(t)$. Pour cela on utilise l'équation de conservation de la charge électrique.

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Qui donne compte tenu de la loi d'OHM $\vec{j} = \sigma \vec{E}$; on obtient

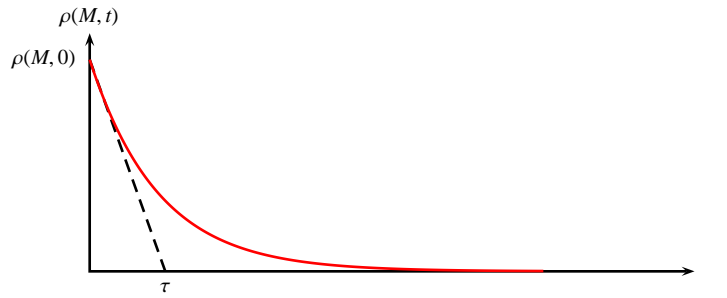
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma \text{div } \vec{E} = 0$$

En utilisant l'équation de M.G $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0$$

En posant $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$ constante du temps ou temps de relaxation
On en déduit alors

$$\rho(M, t) = \rho(M, 0) e^{-t/\tau}$$



Remarquons que au delà de quelques τ : $\rho(M, t) = 0$

Ordre de grandeur de τ pour un conducteur type cuivre tel que

$$\sigma \approx 10^7 \Rightarrow \tau \approx 10^{-19} \text{ s}$$

Donc on peut considérer que dans le domaine de validité de la loi d'OHM, la densité volumique de charges est identiquement nulle à l'intérieur d'un conducteur soit

$$\rho(M, t) = 0$$

11.1.2 Conséquence : Équations de MAXWELL dans d'un conducteur

Compte tenu de ce qui précède, les équations de MAXWELL peuvent s'écrire à l'intérieur d'un conducteur obéissant à la loi OHM

$$M.G \quad \text{div } \vec{E} = 0$$

$$M.F \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$M.\Phi \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$M.A \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

11.1.3 Onde électromagnétique dans un conducteur. Effet de peau

On se propose d'étudier la possibilité de propagation d'une onde électromagnétique au sein d'un conducteur ohmique.

Pour cela on commence tout d'abord par établir l'équation de propagation d'une telle onde.

$\text{rot } (M.F)$ et $M.A$ donne

$$\Delta \vec{E}(M, t) - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} = \vec{0} \quad (EC)$$

C'est l'équation de propagation de $\vec{E}(M, t)$ à l'intérieur du conducteur ohmique

Examinons la possibilité de propagation au sein du conducteur ohmique d'une OEMPPM décrite en notation complexe par le champ électrique, avec

$$\vec{e}_u = \vec{e}_z \Rightarrow u = z$$

Ce qui donne

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}^o \mathbf{e}^{i(\omega t - kz)}$$

Relation de dispersion : Sachant que pour une OEMPPM on a :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \rightarrow (-ik)^2 = -k^2 \\ \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega \end{array} \right\} \Rightarrow (EC) : -k^2 - i\omega\mu_o\sigma = 0$$

L'existence de l'onde à l'intérieur du conducteur impose à k d'être complexe

$$k^2 = \mu_o\sigma\omega e^{-i\pi/2} \Rightarrow \underline{k} = \pm \sqrt{\mu_o\sigma\omega} \mathbf{e}^{-i\pi/4} = \pm \sqrt{\frac{\mu_o\sigma\omega}{2}} (1 - i)$$

On pose

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_o\sigma\omega}} \Rightarrow \underline{k} = \pm \frac{1 - i}{\delta}$$

Le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur ohmique est

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}^o \exp(\pm \frac{z}{\delta}) \exp i(\omega t \pm \frac{z}{\delta})$$

Le vecteur densité de courant

$$\underline{\vec{j}} = \sigma \underline{\vec{E}} \Rightarrow \underline{\vec{j}} = \sigma \underline{\vec{E}}^o \exp(\pm \frac{z}{\delta}) \exp i(\omega t \pm \frac{z}{\delta})$$

Ainsi le champ magnétique

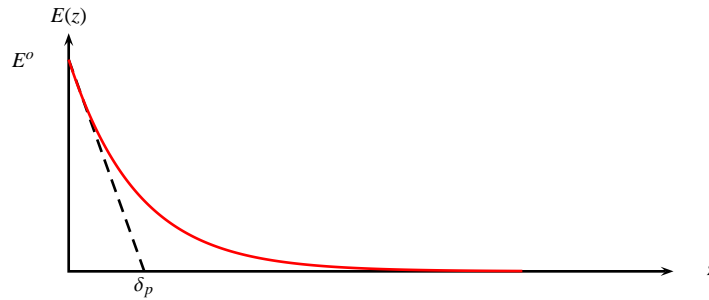
$$\underline{\vec{B}}(M, t) = \frac{\underline{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \Rightarrow \underline{\vec{B}} = \pm \frac{1 + i}{\omega\delta} (\vec{e}_z \wedge \underline{\vec{E}}^o) \exp(\pm \frac{z}{\delta}) \exp i(\omega t \pm \frac{z}{\delta})$$

11.1.4 Interprétation physique

Dans les expressions de $\underline{\vec{E}}$, $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\vec{B}}$ le signe (+) correspond à une onde qui se propage dans le sens des z croissants alors que le signe (-) correspond à une onde qui se propage dans le sens des z décroissants.

Donc dans les deux cas, l'onde se propage en s'atténuant.

Traçons l'amplitude de l'onde $E(z)$



L'onde électromagnétique se propage dans le conducteur ohmique en s'atténuant. Dès que z dépasse quelques δ_p , l'amplitude du champ électrique devient négligeable devant $|\vec{E}^o|$ à la surface. La grandeur δ_p , homogène à une longueur, caractérise la profondeur de pénétration de l'onde dans le conducteur. Elle est appelée épaisseur de peau. L'épaisseur de peau diminue avec la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

Ordres de grandeur de δ pour un bon métal tel le cuivre et pour quelques fréquences :

- ★ Si $f = 1\text{GHz}$, $\lambda = 30\text{ cm}$: $\delta \simeq 6,5\text{ }\mu\text{m}$.
- ★ Si $f = 1\text{MHz}$, $\lambda = 300\text{ m}$: $\delta \simeq 0,21\text{ mm}$.
- ★ Si $f = 50\text{Hz}$, $\lambda = 6000\text{ km}$: $\delta \simeq 9,3\text{ mm}$.

Par conséquent, δ est faible dans le domaine des ondes métriques et centimétriques : L'onde électromagnétique reste donc localisée sur une épaisseur très faible de la surface du métal.

11.1.5 Modèle du Conducteur parfait

Un matériau est d'autant meilleur conducteur que sa conductivité est grande. On définit le conducteur parfait comme étant un conducteur pour lequel la conductivité est «très grande» ; formellement, pour un conducteur parfait $\sigma \rightarrow \infty$. Ainsi, d'après les résultats précédents, à l'intérieur du conducteur parfait.

Conducteur parfait

$$\sigma \rightarrow \infty$$

$$\delta_p = 0$$

$$\rho = 0$$

$$\vec{E}(M, t) = \vec{0}$$

$$\vec{j}(M, t) = \vec{0}$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{0}$$

Remarque- 54 :

① Autrement dit : Un conducteur parfait est un conducteur tel que

$$\sigma \rightarrow \infty$$

- Et comme la densité de puissance est finie alors

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

- M.G donne

$$\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow \rho = 0$$

- M.F donne

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}(M, t) = \vec{B}(M)$$

C'est à dire que le champ \vec{B} est stationnaire qui ne peut pas décrire une onde électromagnétique donc on prend

$$\vec{B} = \vec{0} \quad (\text{en régime variable})$$

- M.A donne aussi que

$$\vec{j} = \vec{0} \quad (\text{en régime variable})$$

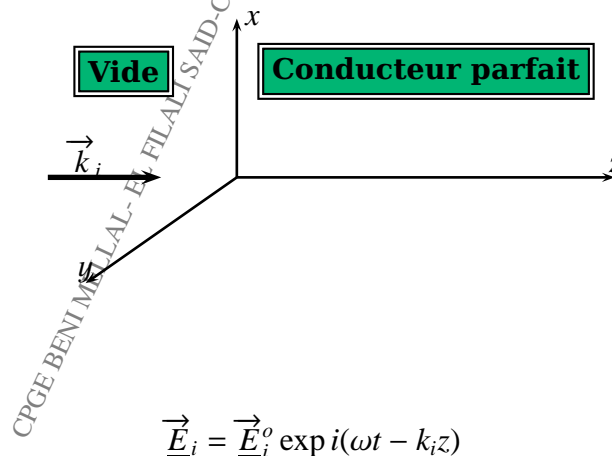
② La densité volumique de puissance électromagnétique : $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2 = \vec{0}$

Il n'y a aucune perte par effet JOULE dans un conducteur parfait

11.2 Réflexion d'une OEPPM en incidence normale

11.2.1 Position du problème

Considérons une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se propageant dans le vide et arrivant, **sous incidence normale**, sur la surface plane d'un conducteur **parfait** :



Avec :

- $\vec{k}_i = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z \implies k_i = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$.
- Puisque l'onde est plane alors

$$\vec{E}_i^o \begin{cases} E_x^o \exp i\varphi_x \\ E_y^o \exp i\varphi_y \\ 0 \end{cases}$$

Le champ magnétique s'obtient alors à partir de la relation

$$\vec{B}_i(M, t) = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \vec{E}_i(M, t) = \frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E}_i(M, t)$$

Qui peut s'écrire sous la forme

$$\vec{B}_i = \vec{B}_i^o \exp i(\omega t - k_i z)$$

où

$$\vec{B}_i^o = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \vec{E}_i^o$$

11.2.2 Relations de passage

Lors de la traversée d'une distribution surfacique de charges et de courants (ρ_s, \vec{j}_s) , le champ électromagnétique subit une discontinuité donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_s \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2(M, t) - \vec{B}_1(M, t) &= \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{aligned}$$

Puisque le milieu (1) est le vide et le milieu (2) est le conducteur parfait alors : $\vec{E}_2(M, t) = \vec{B}_2(M, t) = \vec{0}$

Le champs électromagnétique total (\vec{E}_1, \vec{B}_1) au voisinage de la surface extérieure du conducteur métallique parfait doit donc vérifier :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(M, t) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_s \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_1(M, t) &= -\mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{aligned}$$

Ainsi au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur parfait le champ électrique doit être orthogonal à la surface et le champ magnétique doit être parallèle à la surface

du conducteur. Le champ électromagnétique incident ne vérifiant pas ces deux conditions, on admet l'existence d'une onde électromagnétique réfléchie (\vec{E}_r, \vec{B}_r) telle que l'on ait au voisinage immédiat de la surface du conducteur

$$\begin{aligned}\vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_s \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_i(M, t) + \vec{B}_r(M, t) &= -\mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}\end{aligned}$$

11.2.3 Caractérisation de l'onde réfléchie

Le système physique constitué du conducteur et du champ électromagnétique incident étant invariant par translations selon Ox et Oy , le champ électromagnétique de l'onde réfléchie ne doit dépendre ni de x ni de y .

Cherchons alors à décrire l'onde électromagnétique réfléchie par une O.E.M.P.P.M. dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_r^o \exp i(\omega' t + k_r z)$$

Le champ électrique de l'onde réfléchie, comme celui de l'onde incidente et de l'onde résultante, doit vérifier l'équation de propagation des O.E.M dans le vide, puisque le champ \vec{E} vérifie le théorème de superposition, ainsi les équations de MAXWELL sont linéaires

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_r}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_r}{\partial t^2} = \vec{0} \implies k_r = \frac{\omega'}{c}$$

D'autre part et de la même façon le champ électrique de l'onde réfléchie doit vérifier l'équation de MAXWELL -GAUSS (et le vide non chargé)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_r = 0 \implies \vec{E}_r^o \cdot \vec{e}_z = 0$$

C'est à dire que \vec{E}_r est transversal.

La relation de passage s'écrit alors en $z = 0$

$$\vec{E}_i^o \exp i\omega t + \vec{E}_r^o \exp i\omega' t = -\frac{\rho_s(x, y, t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Projections suivant \vec{e}_z donne

$$\rho_s(x, y, t) = 0$$

C'est à dire pas de charges induites par l'O.E.M.(valable uniquement en incidence normale) Comme \vec{E}_i^o et \vec{E}_r^o n'ayant pas de composantes selon \vec{e}_z ce qui donne

$$\vec{E}_i^o \exp i\omega t + \vec{E}_r^o \exp i\omega' t = \vec{0}$$

Ceci n'est possible que si

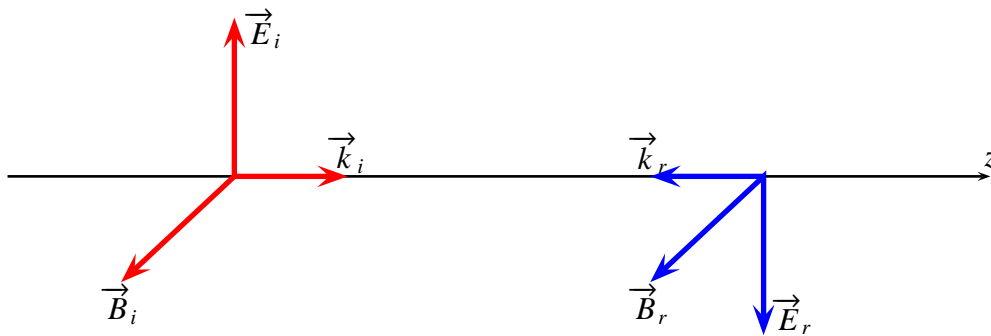
$$\vec{E}_i^o = -\vec{E}_r^o \quad \text{et} \quad \omega = \omega' \Rightarrow k' = k$$

Il en résulte que l'expression du champ électrique de l'onde réfléchie

$$\vec{E}_r = -\vec{E}_i^o \exp i(\omega t + kz)$$

Le champ magnétique de l'onde réfléchie s'en déduit alors à l'aide de la relation

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r}{\omega} \wedge \vec{E}_r = \frac{-\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E}_r \Rightarrow \vec{B}_r = \vec{B}_i^o \exp i(\omega t + kz)$$



11.2.4 Courant induit

On rappelle qu'en incidence normale la densité surfacique de charge $\rho_s(x, y, t)$ est nulle.

Déterminons l'expression du courant surfacique $\vec{j}_s(M, t) = \vec{j}_s(x, y, t)$.

Pour cela utilisons la relation de passage : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$

Avec $\vec{B}_2 = \vec{0}$ et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{e}_z$ alors puisque $\vec{j}_s \in (Oxy)$ alors

$$\vec{j}_s \cdot \vec{e}_z = 0$$

Donc

$$-\vec{B} \wedge \vec{e}_z = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{e}_z) \wedge \vec{e}_z \Rightarrow j_s = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \wedge \vec{e}_z)$$

Comme $\vec{B}(x, y, 0, t) = \vec{B}_i(x, y, 0, t) + \vec{B}_r(x, y, 0, t) \Rightarrow \vec{B}(0, 0, 0, t) = 2\vec{B}_i^o \exp i\omega t$

Ce qui donne

$$\vec{j}_s = \frac{2}{\mu_0} (\vec{B}_i^o \wedge \vec{e}_z) \exp i\omega t = 2\varepsilon_0 c \vec{E}_i^o \exp i\omega t$$

11.3 Superposition de l'onde incidente et réfléchi : Onde stationnaire

11.3.1 Généralités sur les ondes planes stationnaires

Définition : Une onde plane $s(u, t)$ est dite stationnaire si elle peut être écrite en notation réelle sous la forme d'un produit de deux fonctions à variables séparées

$$s(u, t) = f(u)g(t)$$

u étant une coordonnée cartésienne du point M et t le temps.

$s(u, t)$ vérifie l'équation de d'ALEMBERT ce qui donne après avoir divisée par $f(u)g(t)$:

$$\frac{c^2}{f(u)} \frac{d^2 f(u)}{du^2} = \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} \quad (EQ)$$

Le membre de gauche de l'équation (EQ) ne dépend que de la variable spatiale u alors que celui de droite ne dépend que de la variable temporelle t .

L'égalité exprimée par cette équation n'est alors possible que si les deux membres sont tous égaux à une constante K . et donc l'équation (EQ) se sépare en deux équations différentielles

$$\frac{d^2 f(u)}{du^2} - \frac{K}{c^2} f(u) = 0 \quad (11.1)$$

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} - K g(t) = 0 \quad (11.2)$$

► Pour $K = \frac{1}{\tau^2} > 0$ la solution de l'équation (11.2) est de la forme

$$g(t) = A \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + B \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Cette forme de solution n'est pas retenue en général pour décrire un phénomène de propagation. En effet le premier terme est du type «explosif» alors que le second terme décrit un régime transitoire.

► Pour $K = 0$, la solution de l'équation (11.1) est de la forme

$$g(t) = At + B$$

Cette forme de solution ne convient pas non plus pour décrire un phénomène de propagation car elle est «explosive».

► Pour $K = -\omega^2 < 0$, l'équation (11.2) admet pour solution générale

$$g(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

tandis que l'équation (11.1) admet pour solution générale

$$f(u) = B \cos(ku + \psi)$$

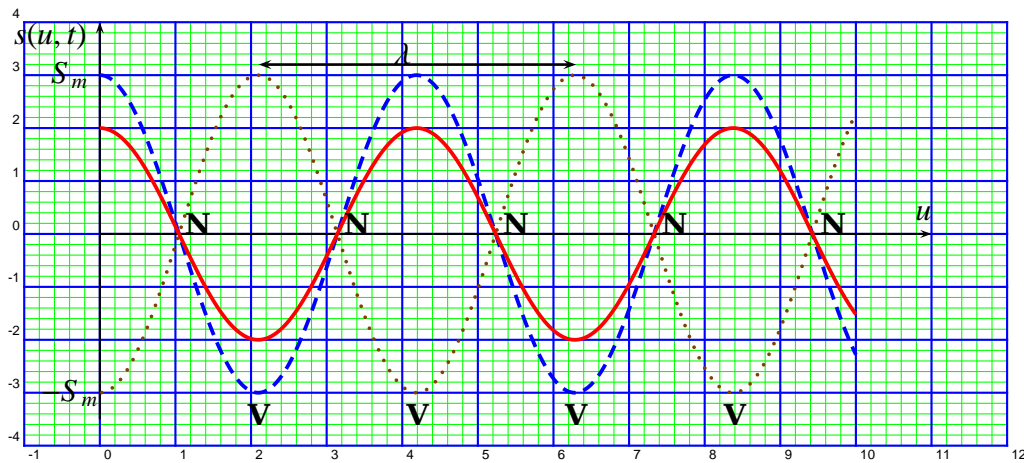
avec

$$k = \frac{\omega}{c}$$

La solution en onde plane stationnaire de l'équation de d'ALEMBERT s'écrit alors

$$s(u, t) = S_m \cos(ku + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$$

Représentation graphique



Onde stationnaire (N : nœud ; V : ventre)

La distance séparant deux nœuds ou deux ventres consécutifs est $\frac{\lambda}{2}$

11.3.2 Champs résultants

► les champs incidents sont :

$$\vec{E}_i = \vec{E}_i^o \exp i(\omega t - kz)$$

$$\vec{B}_i = \vec{B}_i^o \exp i(\omega t - kz) \quad \text{avec} \quad \vec{B}_i^o = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_i^o}{c}$$

► les champs réfléchis sont :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_r^o \exp i(\omega t + kz) \quad \text{avec} \quad \vec{E}_r^o = -\vec{E}_i^o$$

$$\vec{B}_r = \vec{B}_r^o \exp i(\omega t + kz) \quad \text{avec} \quad \vec{B}_r^o = \vec{B}_i^o$$

► Les champs résultants :

• $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_i^o \exp(i\omega t) [\exp(-ikz)] - \exp(+ikz)$ ce qui donne

$$\vec{E} = 2\vec{E}_i^o \sin(kz) \exp i(\omega t - \pi/2)$$

• $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_i^o \exp(i\omega t) [\exp(-ikz)] + \exp(+ikz)$ ce qui donne

$$\vec{B} = 2\vec{B}_i^o \cos(kz) \exp i(\omega t)$$

Conclusion:

L'onde électromagnétique résultante est donc une onde résultante

Remarque- 55 :

Les champs électromagnétiques \vec{E} et \vec{B} sont en quadrature de phase donc les nœuds de \vec{E} sont des ventres pour \vec{B} et vice versa.

11.3.3 Aspect énergétique

11.3.3.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

- On rappelle que

$$w(M, t) = \frac{1}{2} \epsilon_o \vec{E}^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2(M, t)}{\mu_o}$$

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_o}$$

- Lorsque les champs sont harmoniques

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\langle \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}^*(M, t)}{\mu_o} \right\rangle$$

- La densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \Re(w) = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{1}{2} \epsilon_o \vec{E}(M, t) \cdot \vec{E}^*(M, t) + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}(M, t) \cdot \vec{B}^*(M, t)}{\mu_o} \right)$$

Ce qui donne

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} (\epsilon_o |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_o} |\vec{B}|^2) = \epsilon_o |\vec{E}_i^o|^2 \sin^2 kz + \frac{1}{\mu_o} |\vec{B}_i^o|^2 \cos^2 kz$$

Il en résulte que

$$\langle w \rangle = \epsilon_o |\vec{E}_i^o|^2$$

11.3.3.2 Vecteur de POYNTING

On a : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \Re(\vec{\Pi}) = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}^*(M, t)}{\mu_o} \right)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}^*(M, t)}{\mu_o} = \frac{4}{\mu_o} (\vec{E}_i^o \wedge \vec{B}_i^{o*}) (-i) \sin kz \cos kz \\ \Rightarrow & \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}^*(M, t)}{\mu_o} = -\frac{2i}{\mu_o} \vec{E}_i^o \wedge \left(\frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_i^{o*}}{c} \right) \sin 2kz \\ \Rightarrow & \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}^*(M, t)}{\mu_o} = -\frac{2i}{\mu_o c} |\vec{E}_i^o|^2 \sin 2kz \vec{e}_z \end{aligned}$$

Donc

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

Ainsi en moyenne, il n'y a pas de propagation de l'énergie électromagnétique.

Ceci est en accord avec le fait que l'onde résultat de la superposition des ondes incidente et réfléchie est une onde stationnaire.

Conclusion:

Puisque on a négligé les pertes par effets JOULE (conducteur parfait) donc toute l'énergie incidente est totalement réfléchie: c'est un état stationnaire

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

Cinquième partie

OPTIQUE PHYSIQUE

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID

12.1 MODÈLE SCALAIRE DE LA LUMIÈRE

12.1.1 APPROXIMATION SCALAIRE

► On a montré d'après les équations de MAXWELL que la lumière est une onde électromagnétique qui se propage dans le vide à la vitesse $c_o = 3.10^8 \text{ m/s}$ (c'est le postulat de MAXWELL)

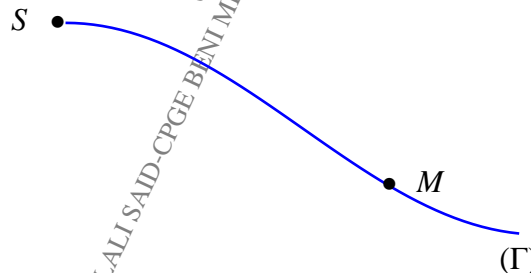
► Dans la mesure où on ne s'intéresse pas aux expériences d'interférences en lumière polarisée, il suffit de décrire la propagation par une grandeur scalaire $E(M, t)$ et non $\vec{E}(M, t)$: c'est l'approximation scalaire.

► Dans le cas harmonique :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_o \exp(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) \xrightarrow{\text{Approximation scalaire}} \underline{E} = \underline{E}_o \exp(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})$$

12.1.2 CHEMIN OPTIQUE

Soit (Γ) une courbe quelconque d'origine S et M un point quelconque de (Γ)



On définit le chemin optique entre les points S et M qu'on note (SM) la quantité

$$(SM) = \int_S^M n(P) ds$$

Avec :

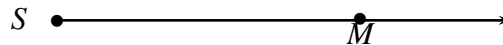
► $n(P)$: l'indice de réfraction au point P défini par $n(P) = \frac{c_o}{c(P)} \geq 1$; $c(P)$ représente la

vitesse de propagation (célérité) de la lumière au point P et c_o la célérité de la lumière dans le vide.

► s : l'abscisse curviligne.

Remarque- 56 :

1 Dans un milieu transparent (T) linéaire (L) homogène (H) et isotrope (I) on a $n = \text{cte}$ et la lumière se propage en ligne droite



Ce qui donne

$$(SM) = n SM$$

avec SM la distance entre les points S et M .

2 Signification physique du chemin optique

On a : $(SM) = \int_S^M n(P) ds$ or $n(P) = \frac{c_o}{c}$, ainsi, $ds = \|d\vec{OM}\| = c_o dt$ donc

$$(SM) = c_o(t_M - t_S)$$

Conclusion:

Le chemin optique est la distance que parcourait la lumière dans le vide (à la vitesse c_o) entre les mêmes instants t_s et t_M

Si on prend $t_s = 0$ (origine des dates) alors $t_m = \tau_M$ représente le retard.

Si on suppose que à $t = 0$ on a une onde d'amplitude complexe $\underline{a}(S, t) = \underline{a}_o e^{i\omega t}$; l'expression de l'onde au point M est

$$\underline{a}(M, t) = \underline{a}(S, t - \tau) = \underline{a}_o e^{i\omega(t-\tau)}$$

Or $(SM) = c_o \tau \Rightarrow \tau = \frac{(SM)}{c_o}$ ce qui donne

$$\underline{a}(M, t) = \underline{a}_o e^{i\omega(t-(SM)/c_o)}$$

Si on pose :

$$k_o = \frac{\omega}{c_o}$$

Vecteur d'onde dans le vide

Alors

$$\underline{a}(M, t) = \underline{a}_o e^{i(\omega t - k_o(SM))}$$

Remarque- 57 :

① Si on pose :

- ▶ k_o : vecteur d'onde dans le vide
- ▶ k : vecteur d'onde dans un milieu T.L.H.I d'indice de réfraction n
- ▶ λ_o : longueur d'onde dans le vide.
- ▶ λ : longueur d'onde dans un milieu T.L.H.I d'indice de réfraction n

Alors :

$$C_o = nC \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_o}{n}$$

De même

$$k = nk_o$$

Il en résulte que : $\underline{a}(M, t) = \underline{a}_o e^{i(\omega t - k_o(SM))}$

Si on pose $\underline{a}_o = a_o e^{i\varphi_o}$ alors $\underline{a}(M, t) = a_o e^{i(\omega t + \varphi_o - k_o(SM))}$

On pose pour la suite

$$\varphi(M) = k_o(SM) - \varphi_o$$

La phase au point M

Ce qui donne

$$\underline{a}(M, t) = a_o e^{i(\omega t - \varphi(M))}$$

② $\varphi(M) = k_o(SM) - \varphi_o$ représente la phase à $t = 0$

12.1.3 SURFACE D'ONDES

Définition:

On appelle surface d'onde l'ensemble des points M tel que $\varphi(M) = cte$

Comme

$$\varphi(M) = k_o(SM) - \varphi_o = cte \Rightarrow (SM) = Cte$$

Remarque- 58 :

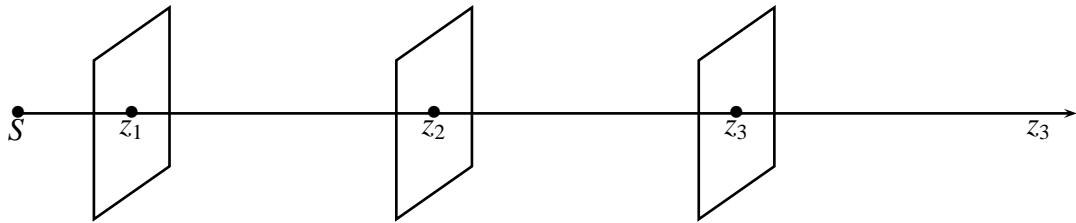
Les surfaces d'ondes sont des surfaces équiphases.

Exemples

① **Onde plane progressive monochromatique**

Considérons une onde plane progressive monochromatique de direction de propagation \vec{e}_z ; donc $\underline{a}(M, t) = \underline{a}_o e^{i(\omega t - kz)}$

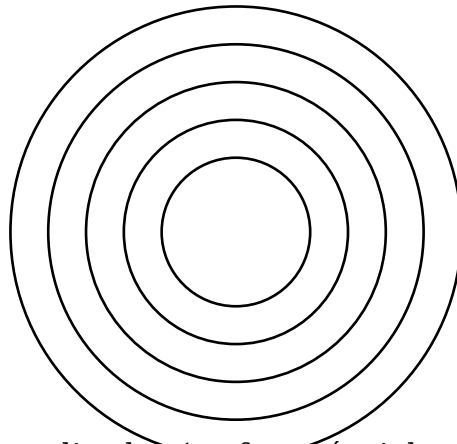
Les surfaces d'onde sont $kz = cte \Rightarrow z = cte$ donc les surfaces d'ondes sont des plans parallèles au plan xoy



2 Onde sphérique

Considérons une onde sphérique : $a(M, t) = \frac{a_o}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi)$

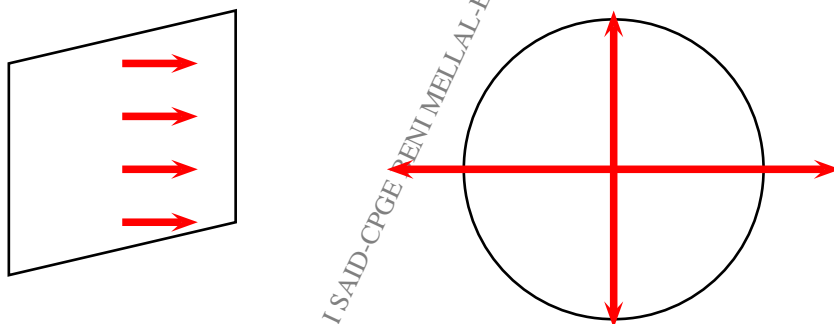
$\varphi(M) = kr - \varphi_o = cte \Rightarrow r = cte$ donc les surfaces équiphasés sont des sphères concentriques



3 Entre deux surfaces d'ondes (surfaces équiphasés) le chemin optique est le même quelque soit le chemin optique emprunté par la lumière

12.1.4 THÉORÈME DE MALUS-DUPIN (admis)

Les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde (surfaces équiphasés)



12.1.5 L'INTENSITÉ LUMINEUSE

Définition:

On définit l'intensité lumineuse par

$$I(M) = \frac{1}{\Delta t_R} \int_0^{\Delta t_R} \|\vec{\Pi}(M, t)\| dt$$

Avec $\|\vec{\Pi}(M, t)\|$ le module du vecteur de POYNTING .
Et Δt_R le temps de réponse du détecteur.

Exemples

- L'œil : $\Delta t_R \approx 67 \text{ ms}$
- Photodiode : $\Delta t_R \approx 1 \mu\text{s}$

On retient que **l'intensité lumineuse est une valeur moyenne temporelle.**
On admet que

$$I = KE_o^2 = K \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*$$

avec

$$K = \frac{1}{2} n \varepsilon_o C$$

Donc l'intensité lumineuse est une forme quadratique (proportionnelle à E_o^2)

12.2 INTERFÉRENCES DES ONDES LUMINEUSES

Soient deux sources lumineuses ponctuelles S_1 et S_2 et M un point de l'espace :



On dit qu'il y a interférence si

$$\text{interférence} \implies I(M) \neq I_1(M) + I_2(M)$$

Dans le cas général (N sources) :

$$I(M) \neq \sum_{i=1}^{i=N} I_i(M)$$

12.2.1 INTERFERENCES NON LOCALISÉES DE DEUX ONDES CO-HÉRENTES ENTRE ELLES

12.2.1.1 Superposition de deux ondes lumineuses monochromatiques

Soient deux sources ponctuelles S_1 et S_2 .

En notation complexe on a :

- $\underline{a}(S_1, t) = \underline{a}_{o1} \mathbf{e}^{i\omega_1 t}$
- $\underline{a}(S_2, t) = \underline{a}_{o2} \mathbf{e}^{i\omega_2 t}$

Au point M on a :

- $\underline{a}_1(M, t) = \underline{a}_{o1} \mathbf{e}^{i[\omega_1 t - k_{o1}(S_1 M)]}$
- $\underline{a}_2(M, t) = \underline{a}_{o2} \mathbf{e}^{i[\omega_2 t - k_{o2}(S_2 M)]}$

Ce qui donne : $\underline{a}(M, t) = \underline{a}_1(M, t) + \underline{a}_2(M, t)$ donc

$$\underline{a}(M, t) = \underline{a}_{o1} \mathbf{e}^{i[\omega_1 t - k_{o1}(S_1 M) + \varphi_{a1}]} + \underline{a}_{o2} \mathbf{e}^{i[\omega_2 t - k_{o2}(S_2 M) + \varphi_{a2}]}$$

Avec φ_{a1} et φ_{a2} sont les phases à l'origine c'est à dire à $t = 0$ et $M \equiv S$

On rappelle que

$$I(M) = K a a^* \Rightarrow I(M) = K a_o^2$$

avec a_o l'amplitude de l'onde ce qui donne

$$I(M) = K \left(a_{o1} e^{i[\omega_1 t - k_{o1}(S_1 M)]} + a_{o2} e^{i[\omega_2 t - k_{o2}(S_2 M) + \varphi_{a2}]} \right) \left(a_{o1} e^{-i[\omega_1 t - k_{o1}(S_1 M)]} + a_{o2} e^{-i[\omega_2 t - k_{o2}(S_2 M) + \varphi_{a2}]} \right)$$

Ce qui donne

$$I(M) = K(a_{o1}^2 + a_{o2}^2 + 2a_{o1} a_{o2} \cos \alpha)$$

Avec

$$\alpha = [(\omega_1 - \omega_2)t + \frac{\omega_2}{c_o}(S_2 M) - \frac{\omega_1}{c_o}(S_1 M) + \varphi_{a1} - \varphi_{a2}]$$

Qu'on peut écrire

$$I(M) = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha}_{\text{terme d'interférence}}$$

Conditions d'interférences

On a interférence si $I(M) \neq I_1(M) + I_2(M)$ (on rappelle que l'intensité lumineuse I est une valeur moyenne) donc

$$\langle \cos \alpha \rangle = \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \frac{\omega_2}{c_o}(S_2 M) - \frac{\omega_1}{c_o}(S_1 M) + \varphi_{a1} - \varphi_{a2}] \rangle \neq 0$$

1 $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow f_1 = f_2 \Rightarrow T_1 = T_2$: On dit que les sources sont **synchrones**

Dans ce cas

$$\langle \cos[\frac{\omega_2}{c_o}(S_2 M) - \frac{\omega_1}{c_o}(S_1 M) + \varphi_{a1} - \varphi_{a2}] \rangle \neq 0$$

2 $\varphi_{a1} = \varphi_{a2}$: les deux sources sont **cohérentes** Conclusion:

Conditions d'interférences:

Deux ondes s'interfèrent s'elles sont synchrones (même période) et cohérentes (même phase à l'origine)

Dans ces conditions

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[\frac{\omega}{c_o}((S_2 M) - (S_1 M)) \right]$$

On pose pour la suite

$$\varphi(M) = \frac{\omega}{c_o}((S_2 M) - (S_1 M)) = k_o((S_2 M) - (S_1 M)) = \frac{2\pi}{\lambda_o}((S_2 M) - (S_1 M))$$

Ainsi

$$\delta(M) = (S_2 M) - (S_1 M)$$

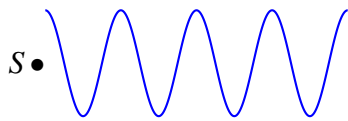
la différence de marche

Il en résulte que

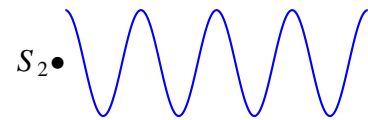
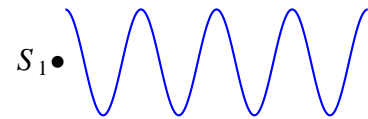
$$\varphi(M) = k_o \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda_o} \delta(M) = \frac{\omega}{c_o} \delta(M)$$

Remarque- 59 :

1 Pour avoir deux sources synchrones et cohérentes en pratique on dédouble une source primaire par un système interférentiel



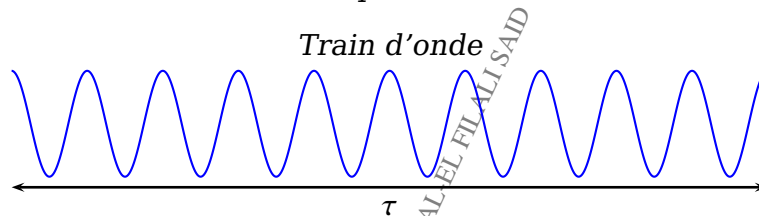
Système optique interférentiel



La suite voir systèmes interférentiels

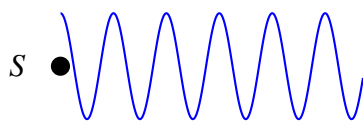
2 L'onde plane monochromatique qui dure de $t = 0$ jusqu'à $t \rightarrow \infty$ de même de $u = 0$ jusqu'à $u \rightarrow \infty$ n'existe pas en réalité; c'est à dire que toute onde présente une limitation dans le temps et dans l'espace.

En effet : Soit une onde monochromatique réelle :

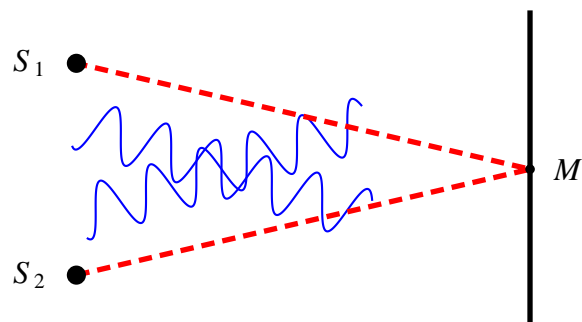


τ représente la durée du train d'onde

Supposons un train d'onde issu de la source primaire S qu'on dédouble en deux trains d'ondes issus de S_1 et S_2



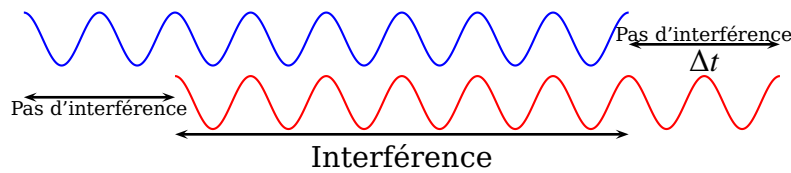
Système optique interférentiel



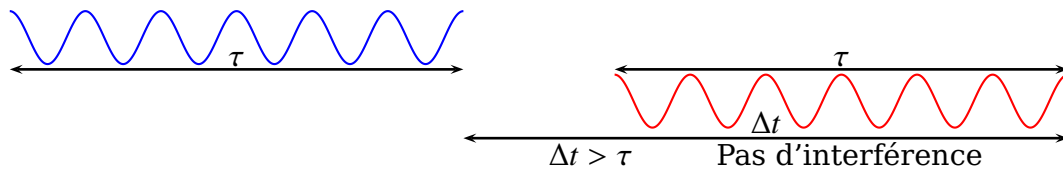
Si $(S_1M) = (S_2M)$ alors $M \equiv O$ origine de l'axe

Dans ce cas $\varphi = 0 \Rightarrow \delta = 0$ pas de retard entre les deux trains d'ondes issus de S_1 et S_2

Au voisinage de O, on a un certain retard



Loin de l'origine O on a :



A la limite : $\Delta t = \tau$ et comme $\delta = c_o \Delta t = c_o \tau = \ell$

Conclusion:

Pour avoir interférence entre deux sources synchrones et cohérentes entre elles

$$\Delta t \leq \tau \iff \delta(M) \leq c_o \tau = \ell$$

Remarque- 60 :

Les systèmes optiques interférentiels utilisés se divisent en deux catégories :

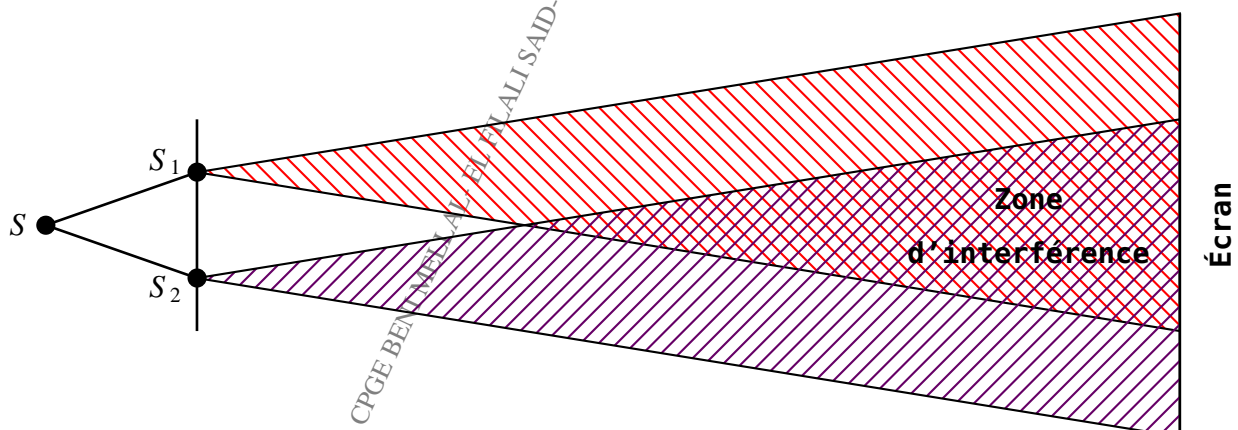
1 Diviseur du front d'onde : Fentes de YOUNG , Miroir de LLOYD, Miroirs de FRESNEL , Biprimes de FRESNEL ,...

2 Diviseur d'amplitude : Lame à faces parallèles, Dispositif de MICHELSON , Perrot- Fabry,...

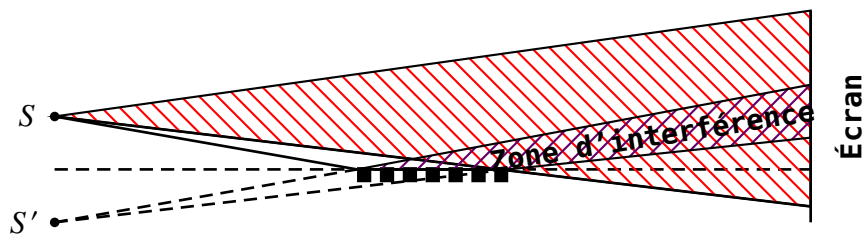
12.2.1.2 Diviseur du front d'onde. Champ d'interférences

12.2.1.2.1 Présentation de quelques dispositifs interférentiels

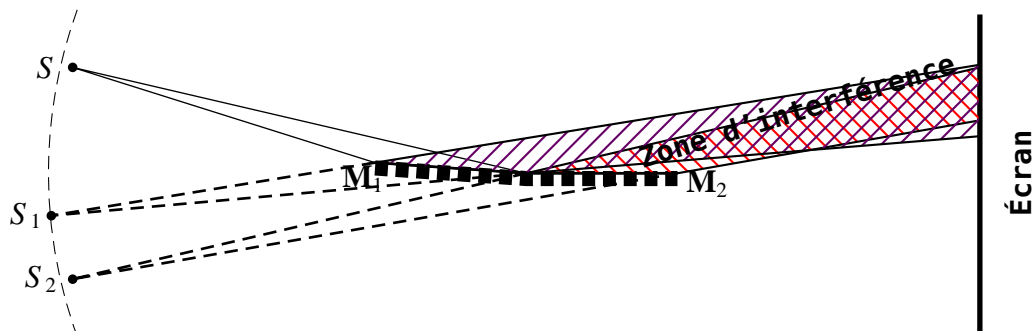
12.2.1.2.1.1 Trous (Fentes) de YOUNG



12.2.1.2.1.2 Miroir de LLOYD



12.2.1.2.1.3 Miroir de FRESNEL

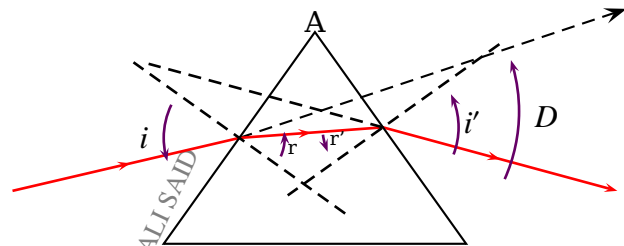


Les sources S, S_1 et S_2 sont situées sur le même cercle de centre O et de rayon OS

12.2.1.2.1.4 Biprismes de FRESNEL

On rappelle les quatres formules du prisme

- ▶ D.S en I : $\sin i = n \sin r$
- ▶ D.S en I' : $n \sin r' = \sin i'$
- ▶ $A = r + r'$
- ▶ $D = i + i' - A$



Deux cas particuliers importants :

- $i = i' \Rightarrow r = r'$ ce qui rend $D = D_m$ donc

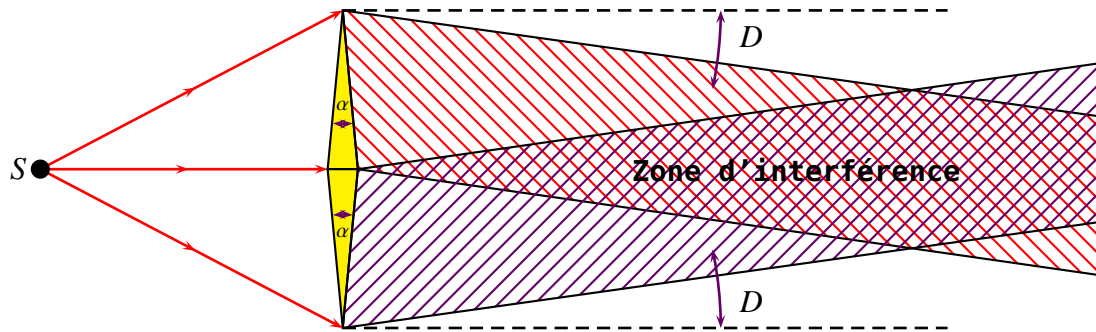
$$\left. \begin{array}{l} i = i' = \frac{D_m + A}{2} \\ r = r' = \frac{A}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

• L'angle A du prisme est très petit donc r, r', i et i' sont aussi faibles ce qui donne des relations de D.S les relations de KEPLER

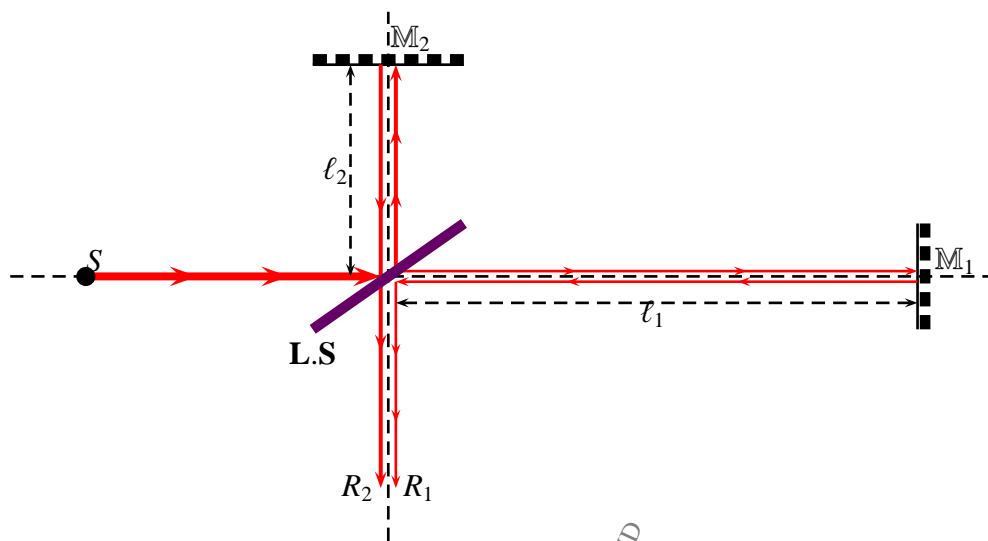
$$\left. \begin{array}{l} i = nr \\ i' = nr' \end{array} \right\} \Rightarrow D = (n - 1)A$$

Dans ce cas on a toujours un rayon émergeant ainsi que l'angle de déviation D ne dépend pas de l'angle d'incidence i

Le biprisme de FRESNEL est le suivant



12.2.1.2.1.5 Interféromètre de MICHELSON



Suite voir document

12.2.1.2.2 Différence de marche. Interfrange

12.2.1.2.2.1 Complément sur la différence de marche

► On rappelle que :

$$\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_o} = k_o \delta(M) \text{ avec } \delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = [(SS_2) - (SS_1)] + [(S_2M) - (S_1M)]$$

Si $(SS_2) = (SS_1)$ alors

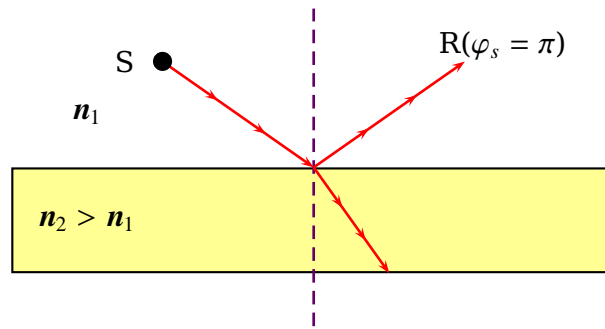
$$(SS_2) = (SS_1) \Rightarrow \delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$$

► En plus de ce déphasage géométrique $\varphi(M)$ on doit ajouter un déphasage supplémentaire

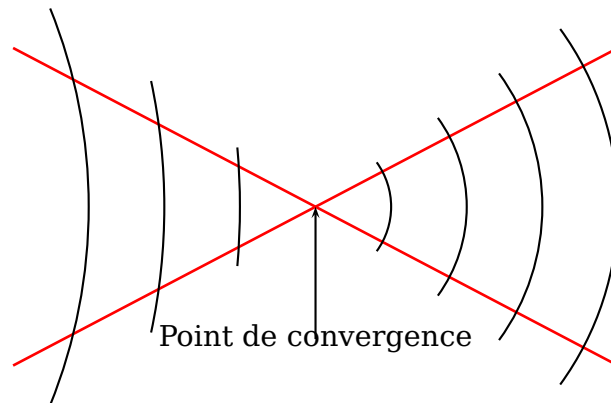
$$\varphi_s(M) = \pi$$

dans les cas suivants :

- ① Réflexion sur un miroir métallique.
- ② Lorsque le rayon se réfléchit en passant d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent



3 Lorsque la lumière passe d'un point de convergence



Remarque- 61 :

Ajouter un déphasage supplémentaire $\varphi_s = \pi$ revient à ajouter $\frac{\lambda_o}{2}$ à $\delta(M)$

12.2.1.2.2.2 Surfaces d'égales intensités

Une surface d'égale intensité est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels $I(M) = cte$

Comme $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi(M)$ avec $\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_o} \delta(M)$ donc

$$I(M) = cte \implies \delta(M) = cte$$

Si les rayons S_2M et S_1M traversent un milieu L.H.I d'indice n alors

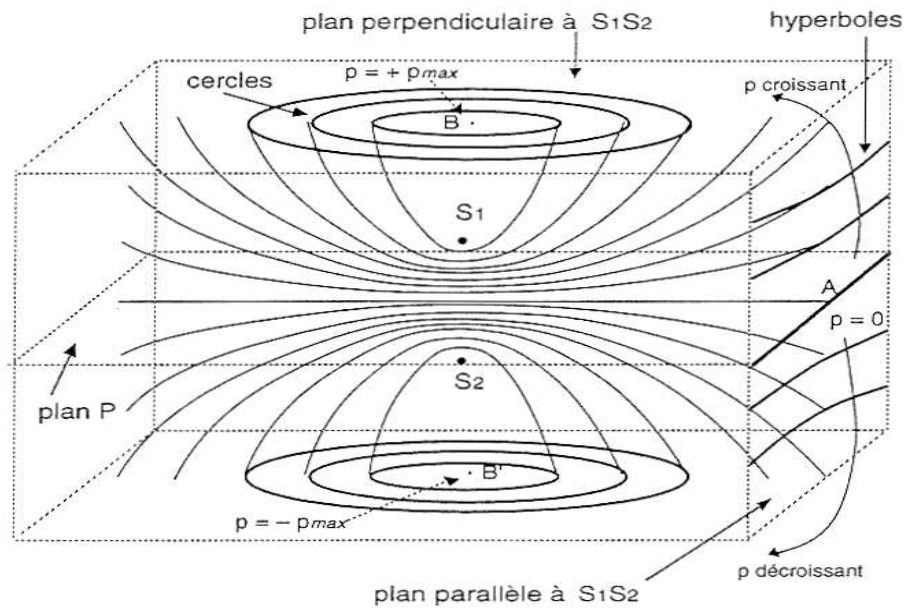
$$\delta(M) = n(S_2M - S_1M)$$

Il en résulte que

$$I(M) = cte \implies S_2M - S_1M = cte$$

Conclusion:

Dans un milieu L.H.I les surfaces d'égales intensité sont des hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2



12.2.1.2.2.3 Ordre d'interférence. Franges

On définit l'ordre d'interférence en un point M par

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_o} \Rightarrow \varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_o} \delta(M) = 2\pi p(M)$$

► On appelle frange l'ensemble des points M d'un écran où $I(M) = cte$

► **Franges claires ou brillantes**

$M \in F.B$ (frange brillante) $\Rightarrow p(M) = k \in \mathbb{Z}$

En effet : $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi(M)$

$M \in F.B \Rightarrow \varphi(M) = 0[2\pi]$ cad $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = I_{max}$

Avec

$$I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 \Rightarrow p_{FB}(M) = k \in \mathbb{Z}$$

► **Franges sombres**

$M \in F.S$ (frange sombre) $\Rightarrow p(M) = (k + \frac{1}{2})$ avec $k \in \mathbb{Z}$

En effet : $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi(M)$

$M \in F.S \Rightarrow \varphi(M) = \pi[2\pi]$ cad $I(M) = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = I_{min}$

Donc

$$I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \Rightarrow p_{FS}(M) = (k + \frac{1}{2}), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Tableau récapitulatif

	Franges claires	Franges sombres
$I(M)$	$I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$	$I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$
$\varphi(M)$	$2k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}$
$p(M)$	k	$k + \frac{1}{2}$
$\delta(M)$	$k\lambda_o$	$(k + \frac{1}{2})\lambda_o$

► Frange centrale

On définit la frange centrale par $(SS_1M_c) = (SS_2M_c)$

Si $(SS_1) = (SS_2)$ alors $S_2M_c = (S_1M_c)$

Ainsi si le milieu est transparent linéaire homogène et isotrope alors $n = cte \implies (S_2M_c = S_1M_c)$ c'est à dire que M_c est l'intersection entre l'écran et la médiatrice du segment $[S_1S_2]$

Remarque- 62 :

Pour $\varphi(M) = (SS_2M) - (SS_1M) + \varphi_s$ Dans le cas ou $(SS_2M) = (SS_1M)$ alors :

► Si $\varphi_s = 0 \implies \varphi(M) = 0$ et par conséquent $p(M_c) = 0$ ce qui donne que $I(M_c) = I_{max}$: la frange centrale est brillante

► Si $\varphi_s = \pi \implies \varphi(M) = \pi$ et par conséquent $p(M_c) = \frac{1}{2}$ ce qui donne que $I(M_c) = I_{min}$: la frange centrale est sombre

12.2.1.2.2.4 Contraste ou visibilité des franges .

On définit le contraste (ou visibilité) des franges au point M qu'on note $C(M)$ par

$$C(M) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Pour $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\varphi(M)$ on a :

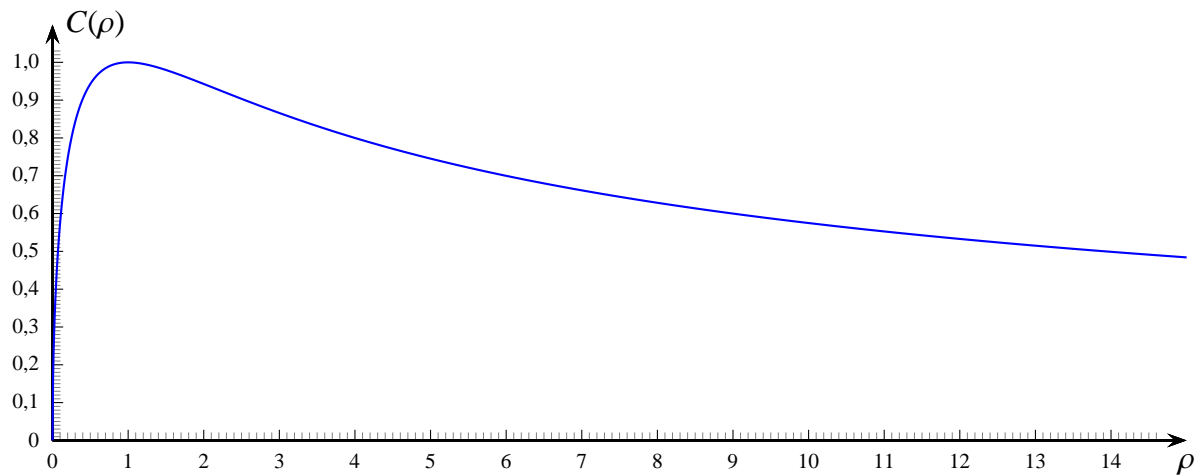
$$C(M) = \frac{(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 - (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2}{(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 + (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2} \implies C(M) = \frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2}$$

Si on pose $\rho = \frac{I_1}{I_2}$ alors

$$C(M) = \frac{2\sqrt{\rho}}{1 + \rho}$$

Représentation graphique de $C(\rho)$

- $\lim_{\rho \rightarrow 0} C(\rho) = 0$
- $\lim_{\rho \rightarrow \infty} C(\rho) = 0$
- $\frac{dC}{d\rho} = 0 \implies \rho = 1 \implies C(\rho = 1) = 1$



Remarque- 63 :

1

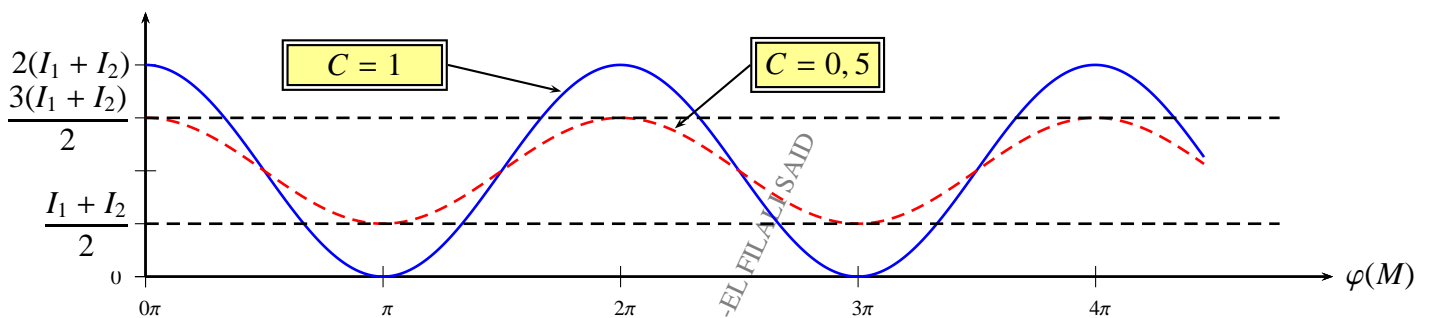
$$0 < C(M) \leq 1$$

2

$C(M) = 1 \Rightarrow I_1 = I_2 = I_0$ c'est à dire les deux sources ont même intensité.

3

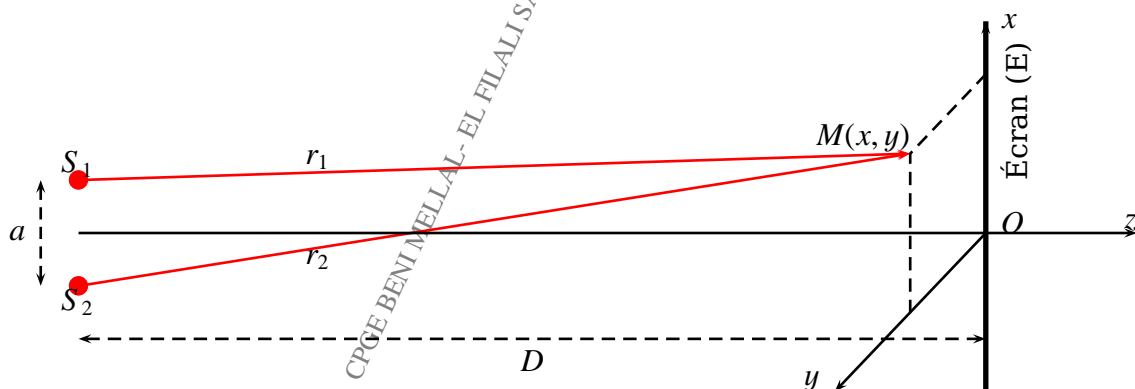
Sachant que $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi(M) \Rightarrow I(M) = (I_1 + I_2)(1 + C(M) \cos \varphi(M))$
 Représentation graphique de l'intensité lumineuse $I(M)$ pour $C = 1$ et $C = 0,5$ à savoir
 $I = (I_1 + I_2)(1 + \cos \varphi)$ et $I' = (I_1 + I_2)(1 + 0,5 \cos \varphi)$



12.2.1.2.3 Observation des franges

12.2.1.2.3.1 Observation transversale .

On place l'écran E parallèle à la droite joignant les deux sources S_1 et S_2



Ordre de grandeurs :

- $a \simeq 1 \text{ mm}$
- $x, y \simeq 1 \text{ cm}$
- $D \simeq 1 \text{ m}$ Donc $D \gg x, y, a$

On a : $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$ et puisque l'utilisation courante des sources S_1, S_2 et le point M sont situées dans l'air et comme $n(\text{air}) \simeq 1$ alors

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) = r_2 - r_1$$

Sachant que :

$$M \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \quad S_1 \begin{vmatrix} a' = a/2 \\ 0 \\ -D \end{vmatrix} \quad S_2 \begin{vmatrix} -a' = -a/2 \\ 0 \\ -D \end{vmatrix}$$

alors :

- $r_2 = S_2M = \sqrt{(x + a')^2 + y^2 + D^2}$
- $r_1 = S_1M = \sqrt{(x - a')^2 + y^2 + D^2}$

Donc

$$\delta(M) = r_2 - r_1 = \sqrt{(x + a')^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{(x - a')^2 + y^2 + D^2}$$

Puisque $D \gg x, y, a$ alors :

- $r_2 = D \sqrt{1 + \frac{y^2 + (x + a')^2}{D^2}} \simeq D \left(1 + \frac{y^2 + (x + a')^2}{2D^2} \right)$
- $r_1 = D \sqrt{1 + \frac{y^2 + (x - a')^2}{D^2}} \simeq D \left(1 + \frac{y^2 + (x - a')^2}{2D^2} \right)$

Donc :

$$\begin{aligned} \delta(M) = r_2 - r_1 &= D \left(1 + \frac{y^2 + (x + a')^2}{2D^2} - 1 - \frac{y^2 + (x - a')^2}{2D^2} \right) \\ \Rightarrow \delta(M) = r_2 - r_1 &= D \left(\frac{y^2 + (x + a')^2}{2D^2} - \frac{y^2 + (x - a')^2}{2D^2} \right) \\ \Rightarrow \delta(M) = r_2 - r_1 &= \frac{1}{2D} ((x + a')^2 - (x - a')^2) \\ \Rightarrow \delta(M) = r_2 - r_1 &= \frac{2xa'}{D} = \frac{ax}{D} \end{aligned}$$

Donc

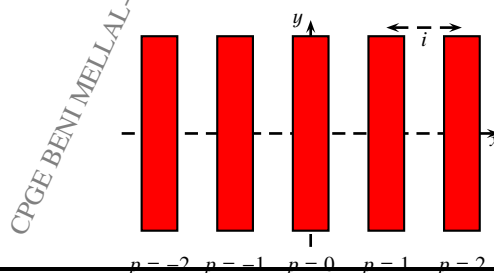
$$\delta(M) = r_2 - r_1 = \frac{ax}{D}$$

Sachant que l'équation des franges est $I(M) = cte \Rightarrow \delta(M) = Cte$

Dans notre cas

$$\delta(M) = Cte \Rightarrow x = cte$$

Les franges sont des segments de droite



Définition:

On appelle l'interfrange notée i la distance séparant deux franges consécutives de même nature .

On a pour l'ordre k : $\delta_k(M) = \frac{ax_k}{D} = \lambda_o p_k(M)$

On a pour l'ordre $k+1$: $\delta_{k+1}(M) = \frac{ax_{k+1}}{D} = \lambda_o p_{k+1}(M)$

Par conséquent :

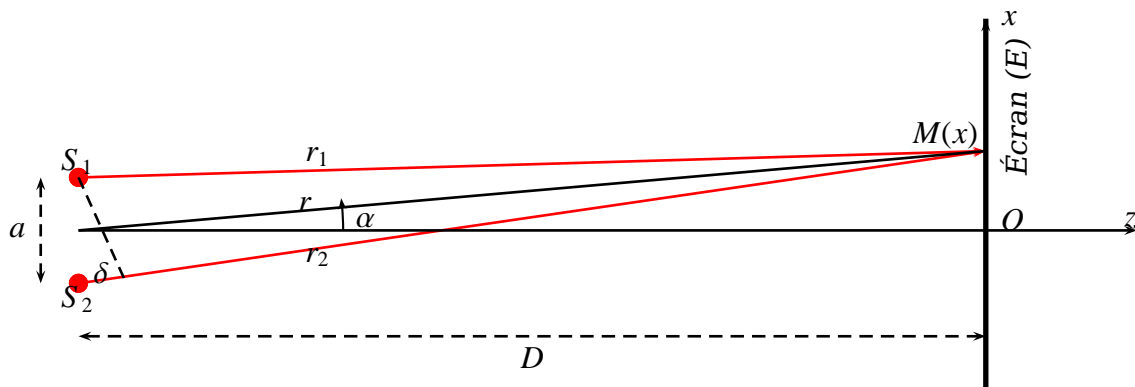
$$\lambda_o \Delta p = \lambda_o = \frac{a}{D}(x_{k+1} - x_k)$$

donc

$$i = \frac{\lambda_o D}{a}$$

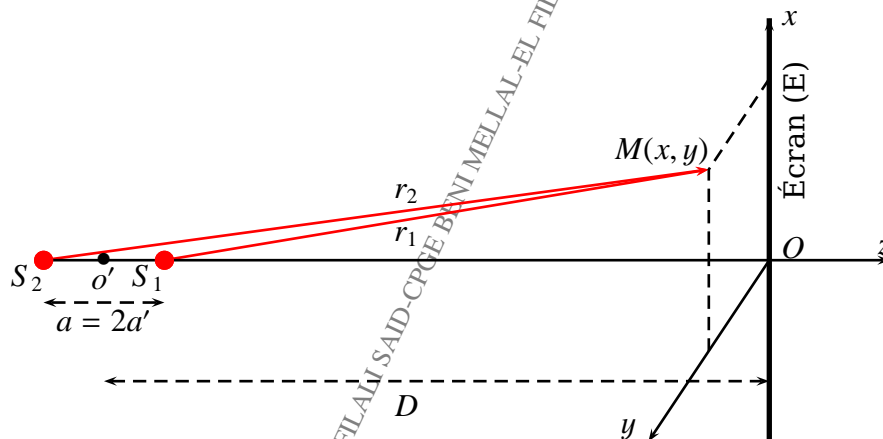
Remarque- 64 :

Autre méthode pour le calcul de la différence de marche



On a : $\tan \alpha \simeq \sin \alpha \Rightarrow \frac{x}{D} = \frac{\delta}{a}$ d'où : $\delta = \frac{ax}{D}$

12.2.1.2.3.2 Observation longitudinale



Sachant que :

M	x	0	0
	y	0	0
	z	$-D + a'$	$-(D + a')$

alors :

$$\bullet r_2 = S_2 M = \sqrt{x^2 + y^2 + (D + a')^2} \Rightarrow r_2 = D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2 + a'^2 + 2Da'}{D^2}} = Df(D) \text{ avec}$$

$$f(D) = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2 + a'^2 + 2Da'}{D^2}}$$

$$\bullet r_1 = S_1 M = \sqrt{x^2 + y^2 + (D - a')^2} \Rightarrow r_1 = D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2 + a'^2 - 2Da'}{D^2}} = Df(-D)$$

Donc la différence de marche s'écrit

$$\delta = r_2 - r_1 = D(f(D) - f(-D))$$

Faisons un DL à l'ordre 3 de $f(D)$ au voisinage de 0 sachant que $D \gg x, y, a'$
On rappelle que

> restart;

> taylor((1+x)^alpha, x=0, 5);

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{24} x^4 + O(x^5)$$

> taylor((1+x)^0.5, x=0, 5);

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + O(x^5)$$

Ainsi :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ce qui donne :

$$f(D) \simeq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2a'}{D} + \frac{a'^2 + x^2 + y^2}{D^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2a'}{D} + \frac{a'^2 + x^2 + y^2}{D^2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{2a'}{D} + \frac{a'^2 + x^2 + y^2}{D^2}\right)^3 + \dots$$

$$\Rightarrow f(D) \simeq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2a'}{D} + \frac{a'^2 + x^2 + y^2}{D^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{4a'^2}{D^2} + \frac{4a'(a'^2 + x^2 + y^2)}{D^2}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{8a'^3}{D^3}\right) + \dots$$

$$\Rightarrow f(D) \simeq 1 + \frac{a'}{D} + \frac{1}{D^2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2D^3}[a'(x^2 + y^2)] + \dots$$

Ce qui donne :

$$\frac{\delta}{D} = f(D) - f(-D) \Rightarrow \frac{\delta}{D} = \frac{2a'}{D} - \frac{a'}{D^3}(x^2 + y^2)$$

Par conséquent :

$$\delta = 2a' - \frac{a'}{D^2}(x^2 + y^2) = a - \frac{a}{2D^2}(x^2 + y^2)$$

L'équation des franges :

$I(M) = cte \Rightarrow \delta(M) = cte$ c'est à dire :

$$x^2 + y^2 = cte$$

Par conséquent les sources sont perpendiculaire à l'écran ($S_1 S_2 \perp (E)$) alors les franges sont des cercles.

Pour $\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_o} \delta(M) + \varphi_s$ et $\delta(M) = (S S_2) + (S_2 M) - (S S_1) - (S_1 M)$ et dans l'air

$$\delta(M) = \left[\underbrace{SS_2}_{r_{o2}} - \underbrace{SS_1}_{r_{o1}} \right] + \left[\underbrace{S_2 M}_{r_2} - \underbrace{S_1 M}_{r_1} \right]$$

Ce qui donne

$$\delta(M) = (r_2 - r_1) + (r_{02} - r_{01})$$

Par conséquent en présence d'un déphasage supplémentaire ($\varphi_s = \pm\pi$: + pour le rayon S_2M et - pour le rayon S_1M)

$$\delta(M) = \lambda_o p(M) = (r_2 - r_1) + (r_{02} - r_{01}) \pm \frac{\lambda_o}{2} \Rightarrow p(M) = \frac{1}{\lambda_o} [(r_2 - r_1) + (r_{02} - r_{01}) \pm \frac{\lambda_o}{2}]$$

Et puisque $r_2 - r_1 = a - \frac{a}{2D^2}(x^2 + y^2)$ alors $\lambda_o p(M) = a - \frac{a}{2D^2}(x^2 + y^2) + (r_{02} - r_{01}) \pm \frac{\lambda_o}{2}$
Alors

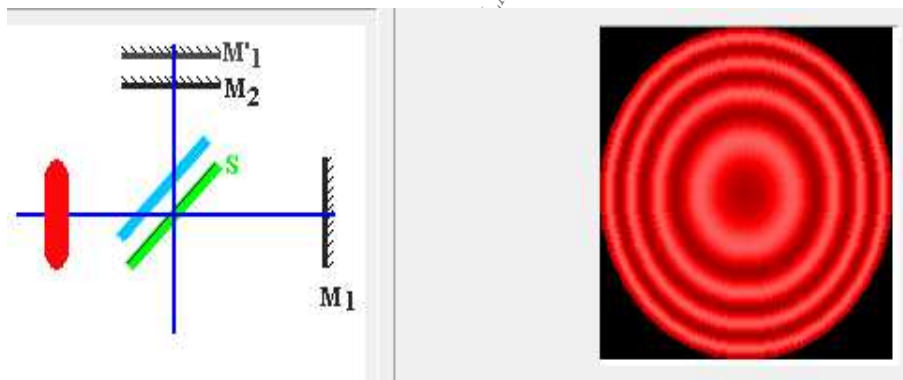
$$R_p^2 = x^2 + y^2 = \frac{2\lambda_o D^2}{a} \left[\underbrace{\frac{1}{\lambda_o} (a + r_{02} - r_{01} \pm \frac{\lambda_o}{2})}_{p_o} - p(M) \right]$$

Avec p_o représente l'ordre d'interférence à l'origine $p_o = p(x = 0, y = 0)$ ce qui donne l'expression du rayon des franges

$$R_p = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{2\lambda_o D^2}{a} (p_o - p(M))}$$

Remarque- 65 :

- ① Puisque $R_p \geq 0 \Rightarrow p_o \geq p(M)$ c'est à dire p_o représente un ordre maximale parfois noté $p_o = p_{max}$
- ② Puisque $p_o = p_{max} = p(x, 0, y = 0)$ alors si :
 - $p_o = k (k \in \mathbb{Z})$ la frange centrale est claire (brillante)
 - $p_o = k + \frac{1}{2} (k \in \mathbb{Z})$ la frange centrale est sombre
- ③ Puisque R_p varie en $\sqrt{p_o - p(M)}$ alors les cercles se resserrent lorsqu'on s'éloigne du centre



12.2.2 Interférences localisées de deux ondes totalement cohérentes

On rappelle que

- Lorsque les sources S_1 et S_2 sont ponctuelles, alors les franges sont non

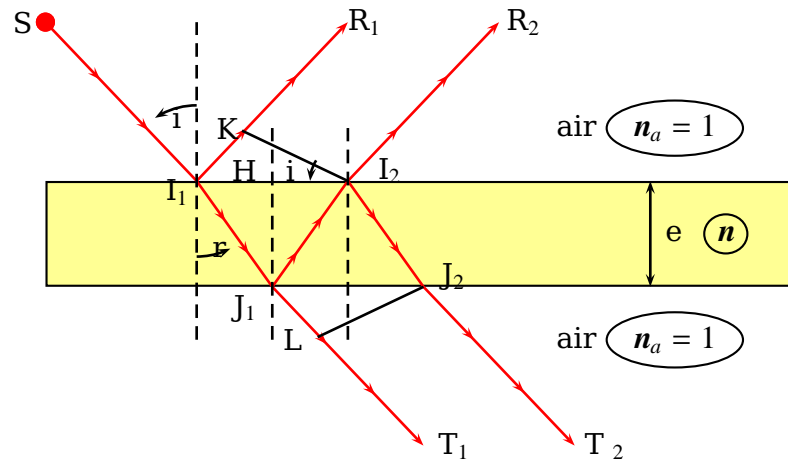
localisées dans l'espace

► Lorsque les sources S_1 et S_2 sont étendues dans l'espace (non ponctuelles), alors les franges sont localisées dans l'espace

suite voir TP et TP-cours.

12.2.2.1 Franges d'égale inclinaison

Les franges d'égale inclinaison sont obtenues lorsqu'on éclaire par une source étendue une lame à faces parallèles ou dispositifs équivalents



► Les rayons R_1 et R_2 donnent des interférences par réflexion par contre les rayons T_1 et T_2 par transmission (réfraction)

► Les rayons sont parallèles donc les franges d'interférences sont localisées à l'infini et pour les voir :

- Intercaler une lentille convergente
- Observation à grande distance

12.2.2.1.1 Calcul de la différence de marche .

12.2.2.1.1.1 Par réflexion .

On note cette différence de marche δ_r

On a : $\delta_r = (SI_1J_1I_2R_2) - (SI_1R_1) \Rightarrow \delta_r = (I_1J_1I_2) - (I_1K)$

donc $\delta_r = n(I_1J_1 + J_1I_2) - I_1K$ comme $I_1J_1 = J_1I_2$ alors

$$\delta_r = 2nI_1J_1 - I_1K$$

Or :

$$- \cos r = \frac{e}{I_1J_1} \Rightarrow I_1J_1 = \frac{e}{\cos r}$$

$$- \sin i = \frac{I_1K}{I_1I_2} \Rightarrow I_1K = I_1I_2 \sin i$$

$$- I_1I_2 = 2I_1H \Rightarrow I_1H = e \tan r$$

$$\text{Par conséquent : } \delta_r = 2n \frac{e}{\cos r} - 2e \tan r \sin r$$

D.S en $I_1 \Rightarrow \sin i = n \sin r$ ce qui donne $\delta_r = 2n \frac{e}{\cos r} - 2e \frac{\sin^2 r}{\cos r}$ d'où la différence géométrique

$$\delta_r(\text{géométrique}) = 2ne \cos r$$

Le déphasage géométrique correspondant est

$$\varphi_r(\text{géométrique}) = \frac{2\pi}{\lambda_o} 2ne \cos r = \frac{4\pi ne}{\lambda_o} \cos r$$

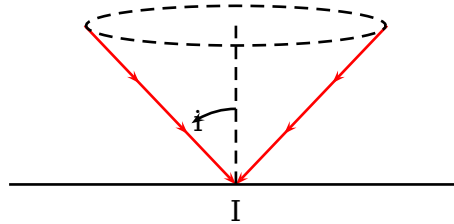
Question : Y-at-il un déphasage supplémentaire φ_r^s ?

$$\varphi_r^s = (SI_1J_1I_2R_2)_s - (SI_1R_1)_s \Rightarrow \varphi_r^s = 0 - \pi = -\pi \text{ ce qui donne}$$

$$\delta_r(M) = 2ne \cos r - \frac{1}{2}\lambda_o \Rightarrow \varphi_r(M) = \frac{4ne \cos r}{\lambda_o} - \pi$$

Le franges d'égales intensité :

$$I_r(M) = cte \Rightarrow r = cte \quad \text{et} \quad i = cte$$



$i = cte \Rightarrow$ cone de sommet I et puisque i représente l'angle d'inclinaison du rayon lumineux par rapport à la normale, donc **Franges d'égale inclinaison**

Conclusion:

La figure d'interférences est constituée des anneaux circulaires concentriques

12.2.2.1.1.2 Par transmission .

On note cette différence de marche δ_t

De la même manière on trouve

$$\delta_t(\text{géométrique}) = \delta_r(\text{géométrique}) = 2ne \cos r$$

Question : Y-at-il un déphasage supplémentaire φ_t^s ?

pas de déphasage supplémentaire par transmission $\varphi_t^s = 0$ donc

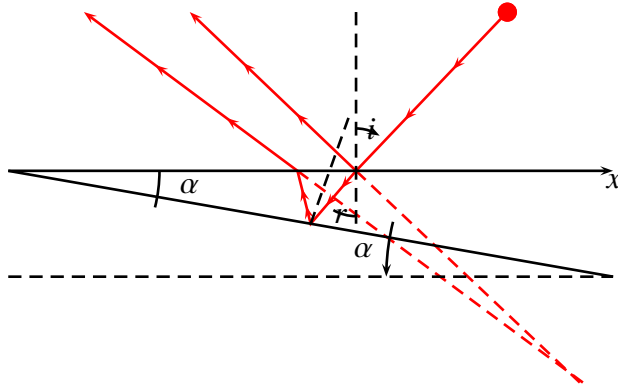
$$\delta_t(M) = 2ne \cos r \Rightarrow \varphi_t(M) = \frac{4ne \cos r}{\lambda_o}$$

Le franges d'égales intensité :

$I_t(M) = cte \Rightarrow r = cte$ et $i = cte$: Franges d'égale inclinaison : circulaires concentriques.

12.2.2.2 Franges d'égales épaisseur

Considérons une lame mince d'épaisseur non uniforme qu'on éclaire par une source étendue sous incidence quasi-normale.



La source est étendue : donc les franges sont localisées au voisinage de la lame, c'est le type d'interférences qu'on trouve dans la nature.

Puisque le contraste C est meilleur en réflexion qu'en transmission, alors

$$\delta_r = 2ne \cos r - \frac{\lambda_o}{2} \Rightarrow \varphi_r = \frac{4\pi ne \cos r}{\lambda_o} - \pi$$

• En incidence quasi normale : $i \rightarrow 0 \Rightarrow r \rightarrow 0$ ce qui donne $\cos r \simeq 1$ par conséquent

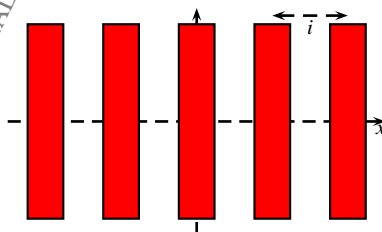
$$\delta_r = 2ne - \frac{\lambda_o}{2} \Rightarrow \varphi_r = \frac{4\pi ne}{\lambda_o} - \pi$$

• L'équation des franges :

$I_R = cte \Rightarrow \delta_r = cte$ donc $e = cte$ **Franges d'égale épaisseur**

Et puisque $\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{e}{x} \Rightarrow e = \alpha x$

$e = cte \Rightarrow x = cte$: les franges sont des segments de droites



12.2.3 Interféromètre de MICHELSON

On retient que lorsque $M_1 \perp M_2$ l'interféromètre de MICHELSON est équivalent à une lame d'air

La différence de marche correspondante est

$$\delta = (S_2M) - (S_1M) + \frac{\lambda_o}{2} - \frac{\lambda_o}{2}$$

Donc

$$\delta = 2|l_2 - l_1|$$

Par conséquent les franges sont circulaires.

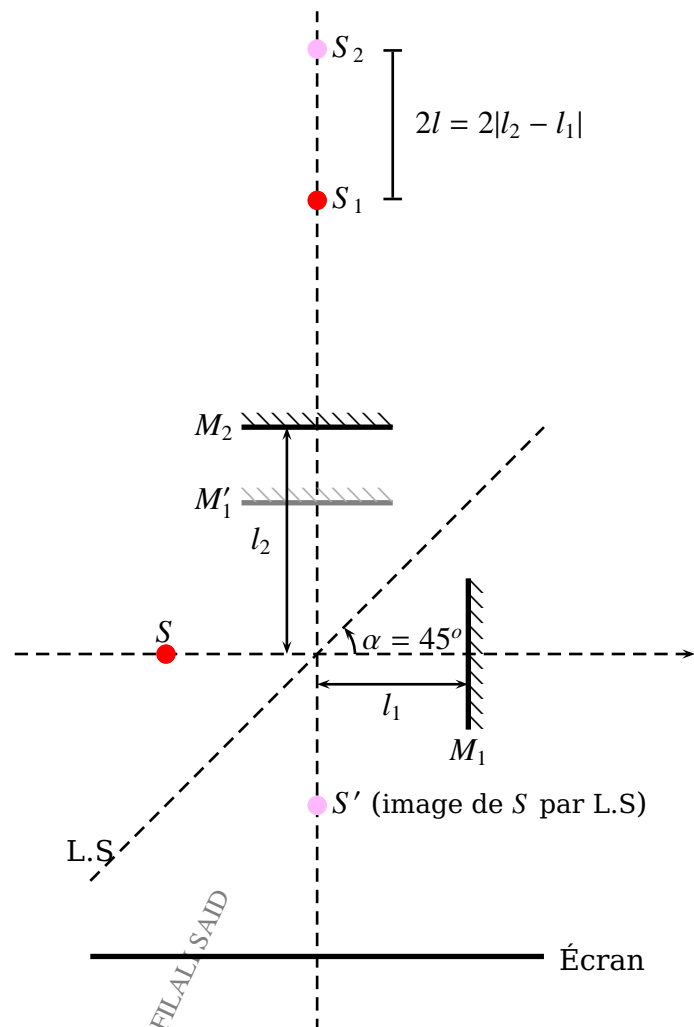
Lorsque on fait tourner légèrement le miroir M_2 ($M_1 \nparallel M_2$) d'un angle très faible l'interféromètre de MICHELSON est équivalent au coin d'air et les franges sont des segments de droite.

Conclusion:

► $M_1 \perp M_2 \Rightarrow$ Franges circulaires concentriques (anneaux)

► $M_1 \nparallel M_2 \Rightarrow$ Franges rectilignes (segments de droite)

Suite voir TP et TP-cours d'optique



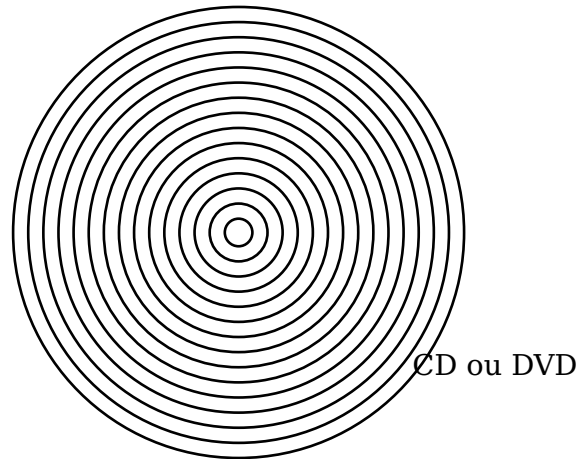
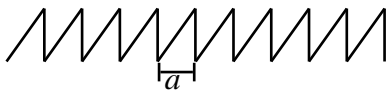
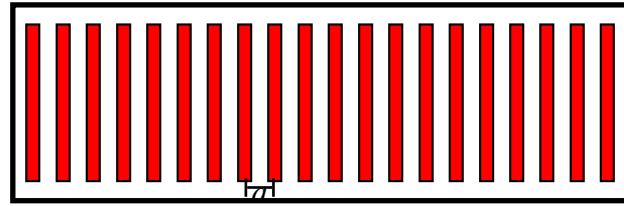
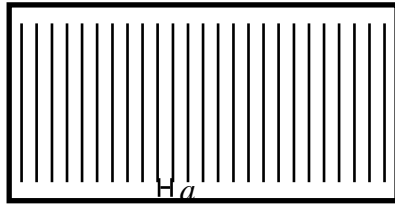
12.3 Réseau plan

12.3.1 Définition

Définition:

Un réseau est une surface diffractante sur laquelle un motif est répété sur une distance un nombre de fois

Exemples



- On note a la distance séparant deux motifs consécutifs.
- On caractérise un réseau par

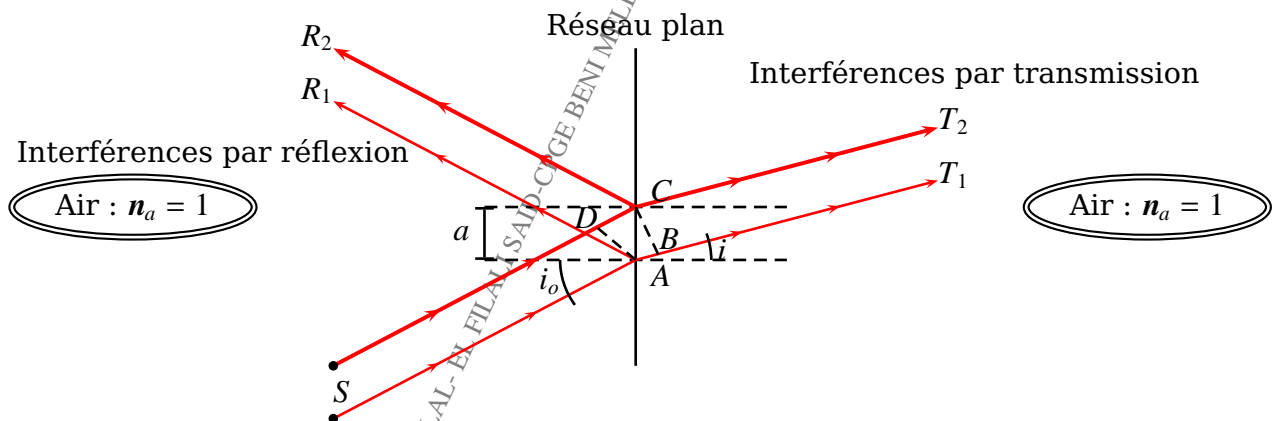
$$n = \frac{1}{a}$$

n : nombre de motifs par unité de longueur

- Un réseau est dit plan si tous les motifs appartiennent au même plan c'est à dire la surface du réseau est plane

12.3.2 Formule du réseau par transmission

Considérons un réseau plan éclairé par un faisceau de lumière cylindrique



La figure d'interférences contient des franges :

- Claires si $\delta = k\lambda_o \Rightarrow \varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$: **Interférences constructives**
- Claires si $\delta = (k + \frac{1}{2})\lambda_o \Rightarrow \varphi = (2k + 1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$: **Interférences destructives**

Déterminons la différence de marche :

$\delta = AB - CD$, or $AB = a \sin i$ et $CD = a \sin i_o$ ce qui donne

$$\delta = a(\sin i - \sin i_o)$$

C'est la formule du réseau par transmission

Remarque- 66 :

① De la même façon on trouve

$$\delta = a(\sin i + \sin i_o)$$

C'est la formule du réseau par réflexion

② Cas particulier important : $i_o = 0$ incidence normale

$$\delta_{I.N} = a \sin i$$

L'intensité transmise par le réseau est maximale si

$$\delta(M) = a(\sin i + \sin i_o) = k\lambda_o$$

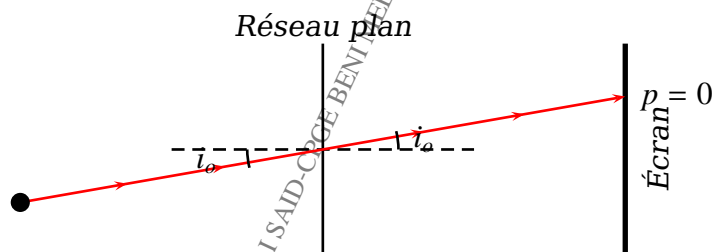
C'est à dire l'ordre d'interférence est entier $p(M) = k$

Remarque- 67 :

① Pour $p = 0$ on a

$$\sin i = \sin i_o \Rightarrow i = i_o$$

C'est la direction géométrique



② Pour $k \in \mathbb{Z}^*$ (entier relatif non nul) l'intensité est maximale et par conséquent

$$\sin i_k = \sin i_o + \frac{k\lambda_o}{a}$$

La position des franges brillante, déterminée par l'angle i , dépend de la longueur λ_o mais la frange d'ordre 0 ($p = k = 0$) est commune pour toutes valeurs de λ_o , donc la couleur de la frange d'ordre 0 est la superposition de toutes les couleurs de la source.

③ On a $\sin i - \sin i_o = \frac{k\lambda_o}{a}$ ce qui donne puisque :

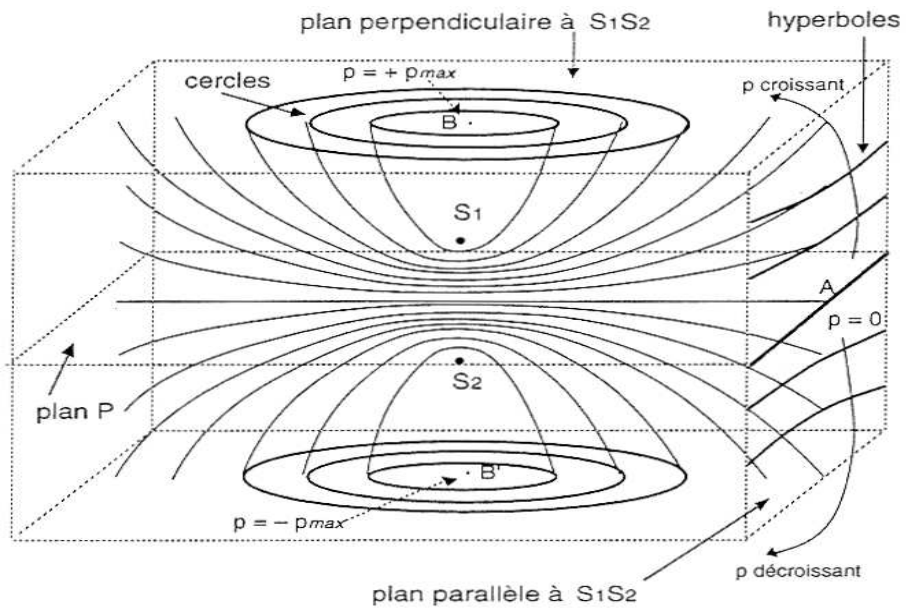
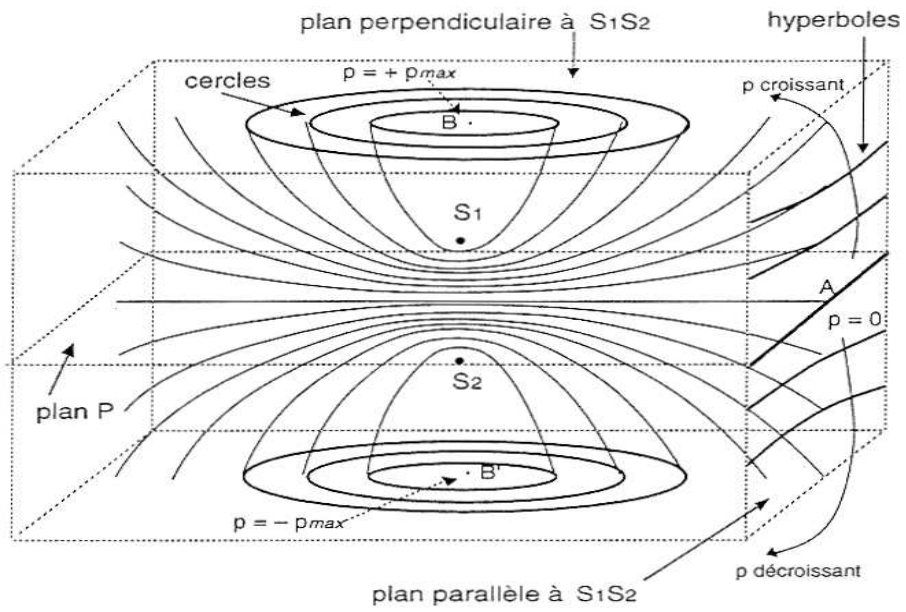
$$-1 \leq \sin i \leq 1 \implies -1 \leq \sin i_o + \frac{k\lambda_o}{a} \leq 1$$

Cette relation détermine le nombre de valeurs de k c'est à dire le nombre de franges brillantes.

④ En incidence normale $i_o = 0$ on a

$$-\frac{a}{\lambda_o} \leq k \leq \frac{a}{\lambda_o}$$

CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI MELLAL-EL FILALI SAID



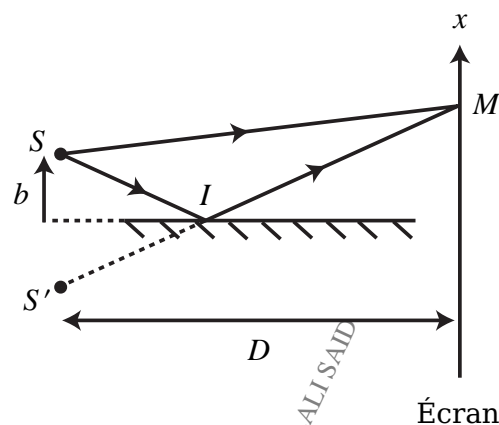
CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI /

CALCUL DE LA DIFFÉRENCE DE MARCHE DE QUELQUES DIVISEURS D'ONDES

12.4 Miroir de LLOYD

D'après la figure ci-dessous, la différence de marche en un point M de coordonnées $(x,y,0)$, est :

$$\begin{aligned}\delta(M) &= SI + IM + \frac{\lambda}{2} - SM \\ &= S'M - SM \\ &\simeq \frac{2bx}{D} + \frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$



Calcul de l'interfrange i :

$$i = \Delta x \text{ lorsque } \Delta p(M) = 1$$

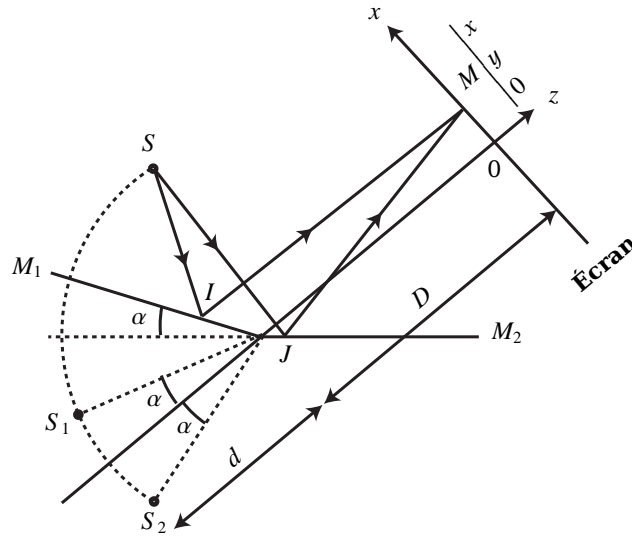
d'où :

$$\delta(M) \simeq \frac{2bx}{D} + \frac{\lambda}{2} = p(M)\lambda \implies i \simeq \frac{\lambda D}{2b}$$

12.5 Miroirs de Fresnel

Calculons, d'après la figure ci-dessous, la différence de marche $\delta(M)$ en un point M de l'écran :

$$\begin{aligned}\delta(M) &= S_1J + JM + \frac{\lambda}{2} - SI - IM - \frac{\lambda}{2} = S_2J + JM - S_1I - IM \\ &= S_2M - S_1M \\ &\simeq \frac{S_1S_2 x}{d + D}\end{aligned}$$

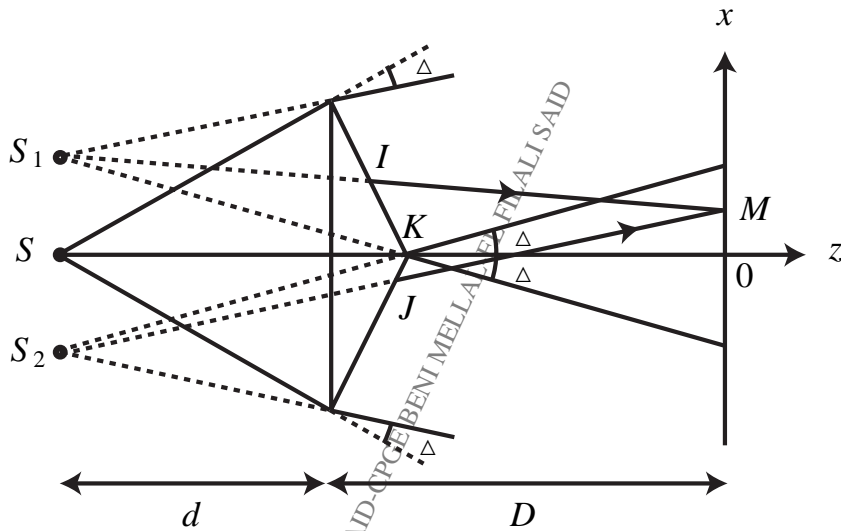


or $\alpha \ll 1 \text{ rad} \Rightarrow S_1 S_2 \simeq 2\alpha d$

d'où :

$$\delta(M) \simeq \frac{2\alpha d x}{d + D} \Rightarrow \text{l'interfrange } i \simeq \frac{\lambda}{2\alpha} + \frac{\lambda D}{2\alpha d}$$

12.6 Biprisme de Fresnel



La différence de marche au point M est :

$$\delta(M) = (SJ) + JM - (SI) - IM$$

or S_1 est l'image de S par le prisme 1, donc :

$$(SI) - IS_1 = (SK) - KS_1 \quad (12.1)$$

de même S_2 est l'image de S par le prisme 2, donc :

$$(SJ) - JS_2 = (SK) - KS_2 \quad (12.2)$$

Les relations (1) et (2) donnent, puisque $KS_1 = KS_2$:

$$(SJ) - (SI) = JS_2 - IS_1$$

donc :

$$\delta(M) = S_2M - S_1M \simeq \frac{S_1S_2x}{d+D}$$

or la déviation Δ de l'un des prismes étant très faible devant 1 rad :

$$S_1S_2 \simeq 2\Delta d \simeq 2A(n-1)d$$

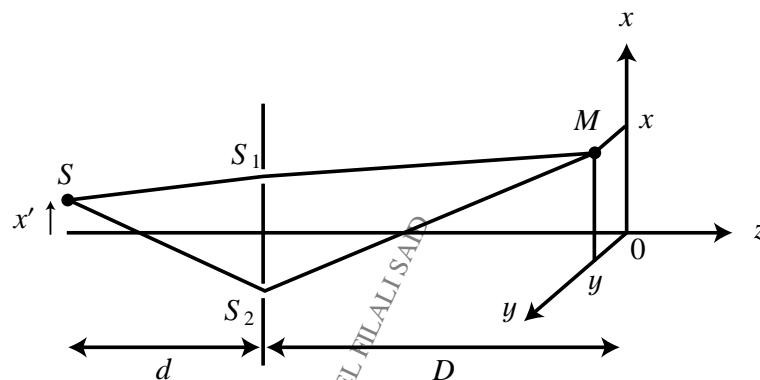
avec A et n sont respectivement l'angle et l'indice du biprisme.

d'où :

$$\delta(M) \simeq \frac{2Ad(n-1)x}{d+D} \Rightarrow \text{l'interfrange } i \simeq \frac{\lambda}{2A(n-1)} + \frac{\lambda D}{2A(n-1)d}$$

12.7 Trous d'Young

On perce sur une plaque opaque deux trous circulaires S_1 et S_2 distants de a . On les éclaire par une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde λ .



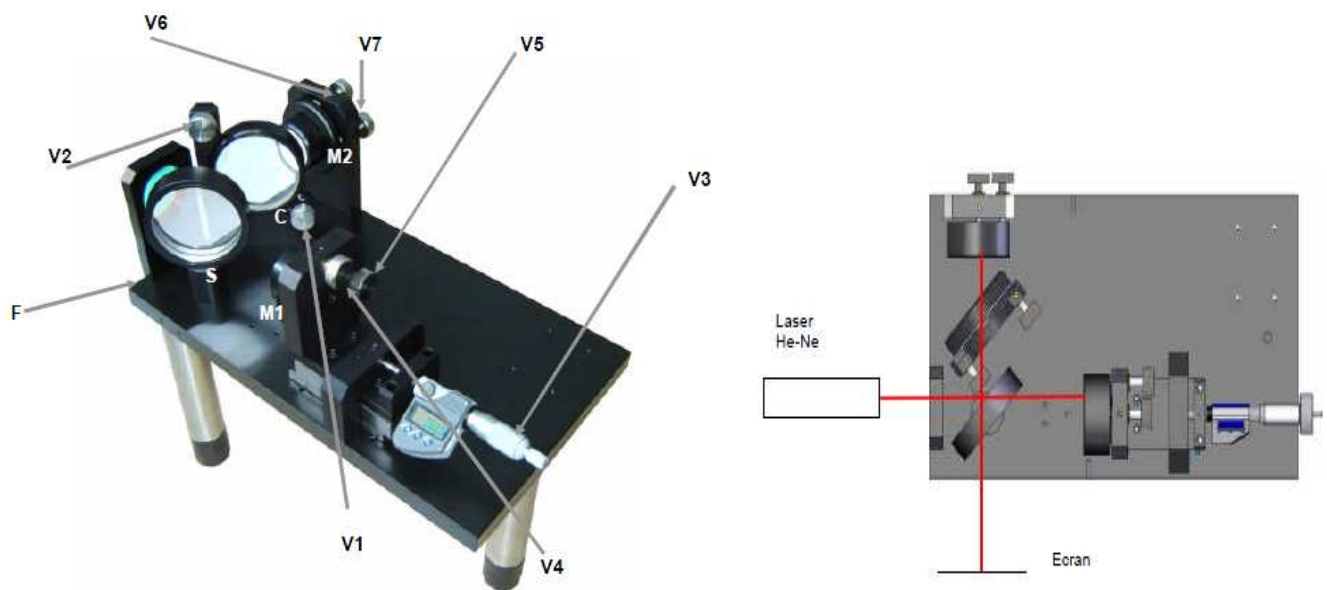
La différence de marche en un point M de l'écran est, d'après la figure ci-dessous :

$$\delta(M) = SS_2 - SS_1 + S_2M - S_1M \simeq \frac{ax'}{d} + \frac{ax}{D} \Rightarrow \text{l'interfrange } i = \frac{\lambda D}{a}$$

CPGE BENI MELLAL - EL FILALI SAID - CPGE BENI MELLAL - EL FILALI SAID

INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON

12.8 Présentation de l'appareil



12.9 Caractéristiques des appareils

L'interféromètre de Michelson comporte :

- ▶ Deux miroirs plans réfléchissants notés M_1 et M_2 sensiblement orthogonaux aux axes OX et OY.
- ▶ Trois lames de verre : Le verre anticalorique, la séparatrice et la compensatrice.
 - Le verre anticalorique (VA) fixe filtre les infrarouges et autres radiations non visibles énergétiques. Il évite l'échauffement et la déformation des miroirs et autres lames .
 - La séparatrice (Sp) est une lame semi-réfléchissante qui permet la division du front d'onde en réfléchissant et en transmettant la moitié de l'énergie incidente. Elle est fixe dans la plan $X = Y$. La face semi-réfléchissante de la séparatrice est la face qui reçoit la lumière incidente de la source primaire .
 - La compensatrice (Cp) est une lame de même épaisseur et de même verre que la séparatrice. La compensatrice est traitée antireflet dans le cas du modèle DIDALAB et non traitée dans le cas du modèle SOPRA.
- ▶ Les vis V_1 et V_2 permettent un réglage d'orientation «grossier» de M_2 .
- ▶ Les vis V_4 et V_5 permettent un réglage d'orientation plus fin de M_1 .
- ▶ La vis V_6 permet un réglage d'orientation de la compensatrice autour d'un axe vertical.

► La vis V_7 permet un réglage d'orientation de la compensatrice autour d'un axe horizontal.

► Un chariot permet la translation en bloc du miroir M_2 (chariotage) dans la direction OX grâce à la vis micrométrique V_3 .

Ce déplacement est repérable à l'aide de la graduation d'un vernier au $1/200 \text{ mm} = 5 \mu\text{m}$ ou au $1/100 \text{ mm} = 10 \mu\text{m}$.

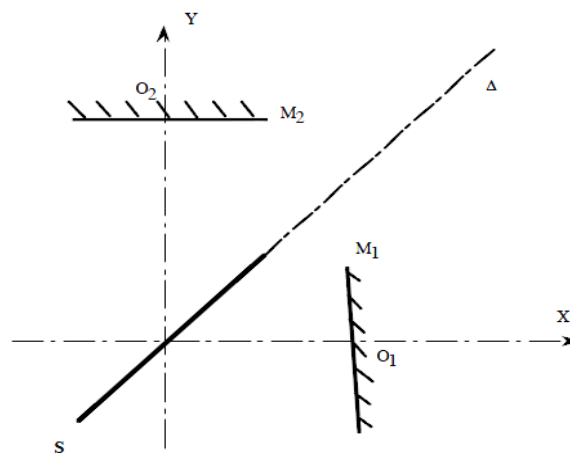
► Une direction d'observation OY perpendiculaire au miroir M_1 et à la direction OX de l'onde incidente.

12.10 Le pliage Δ

Un rayon lumineux, noté R_o , entrant dans l'interféromètre est divisé en deux par la séparatrice (ce type de dispositif est dit à division d'amplitude, par opposition à un dispositif à division du front d'onde, type fentes d'Young, qui sépare un faisceau en deux parties) :

► un rayon R_1 traverse la séparatrice, se réfléchit en I_1 sur M_1 , puis à nouveau en J_1 sur la séparatrice et sort de l'interféromètre.

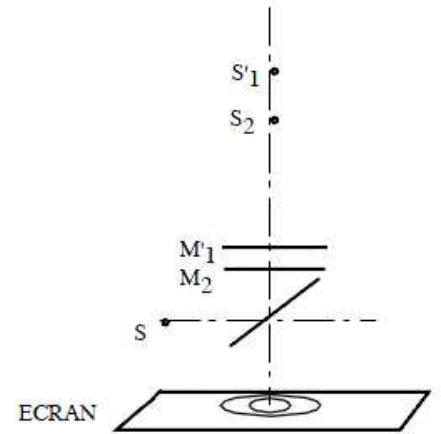
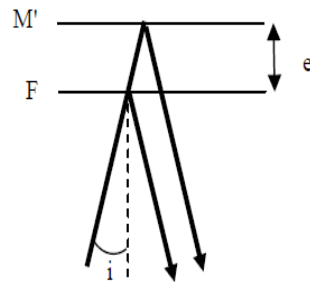
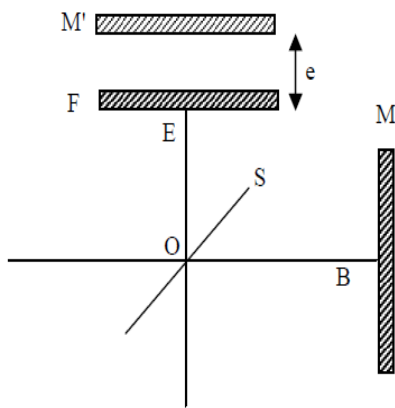
► un rayon R_2 se réfléchit sur la séparatrice, puis en I_2 sur M_2 , puis retraverse la séparatrice en J_2 et sort de l'interféromètre.



Rien n'est changé du point de vue des calculs des chemins optiques si on effectue un «pliage» selon l'axe Δ de la séparatrice, qui rabat l'axe X sur l'axe Y : on fait ainsi apparaître un miroir «image» M'_1 de M_1 . Le système est ainsi réduit à un axe optique unique sur lequel nous raisonnons désormais.

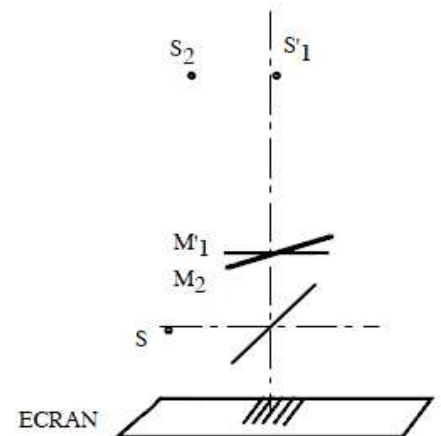
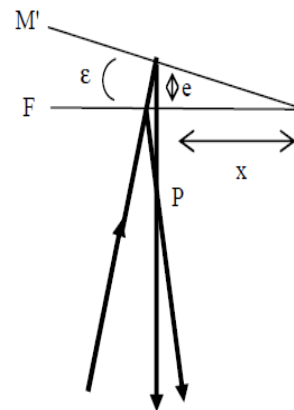
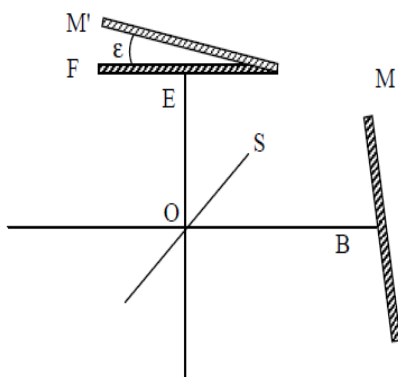
12.11 Équivalence à une lame d'air à faces parallèles

Si M_2 et M'_1 sont parfaitement parallèles et forment **une lame d'air à faces parallèles** d'épaisseur e , les images S_2 et S'_1 de S sont alignées sur l'axe optique : un écran placé orthogonalement à cet axe permet d'observer des anneaux d'interférences. La position de l'écran peut être quelconque sur l'axe : **les franges sont délocalisées**.



12.12 Équivalence à un coin d'air

Si M_2 et M'_1 se coupent en faisant un angle ε_0 très faible, formant ainsi un coin d'air d'angle ε_0 , les images S_2 et S'_1 de S sont quasiment alignées sur un axe orthogonal à l'axe optique : un écran placé orthogonalement à cet axe permet d'observer des franges d'interférences quasi-rectilignes, parallèles à « l'intersection » des miroirs.



CPGE BENI MELLAL- EL FILALI SAID-CPGE BENI