

Université des sciences et de la Technologie H. Boumediene Alger

Les cours de la Faculté de physique



THERMODYNAMIQUE

Résumé de cours et exercices corrigés

Domaine L2 SM

Dr Nouri Sabrina Eps Laziri

Année universitaire 2017-2018

Preface

Ce cours du module Thermodynamique est destiné aux étudiants des deuxièmes années de licence scientifique spécialité science de la matière SM. Il couvre en quatre chapitres les notions de base de la thermodynamique et les machines thermiques. Chaque chapitre commence par des rappels mettant l'accent sur les points fondamentaux du cours, illustrés par quelques exemples classiques et accompagné par des exercices d'application.

Ce document est accompagné par des annexes comportant des rappels de notions de base en thermodynamique et des grandeurs physiques ainsi que la bibliographie utilisée.

L'auteur tient à remercier tous les collègues qui ont fait partie du collectif de l'enseignement de ce module.

Cette première édition comporte sûrement quelques imperfections, nous serions reconnaissants à tous ceux qui nous ferait part de leurs remarques et suggestions.

Le cours se trouve sur le lien :

<http://perso.usthb.dz/~snouri/>

L'auteur

Table des matières

I.	Outil mathématique	1
I.1.	Rappel sur les dérivée partielle.....	
I.2.	Exercices	2
II.	Premier principe de la thermodynamique.....	3
II.1.	Travail.....	3
II.2.	Quantité de chaleur.....	3
II.3.	Variation d'énergie interne.....	4
II.4.	Transformation d'un gaz parfait.....	4
a)	Transformation isochore.....	4
b)	Transformation isobare	4
c)	Transformation isotherme.....	4
d)	Transformation adiabatique.....	5
II.5.	Exercices.....	6
III.	Deuxième principe de la thermodynamique.....	19
III.1.	Système fermé.....	19
III.2.	Bilan d'entropie.....	20
III.3.	Application du deuxième principe à un système isolé.	21
III.4.	Irréversibilité	22
III.5.	Entropie.....	22
III.6.	Les applications du second principe.....	22
III.7.	Exercices sur le deuxième principe.....	25
IV.	Rappel sur les machines thermiques.....	29
IV.1.	Grandeurs thermodynamiques.....	29
IV.2.	Machine thermique monotherme.....	29
IV.3.	Machine thermique ditherme.....	29
a)	Inégalité de Clausus.....	30
b)	Diagramme de Ravau.....	30

V.	Théorème de Carnot.....	32
a)	Les moteurs.....	32
b)	Les récepteurs.....	33
V.4	Bilan énergétique.....	33
V.5.	Exercices sur les machines.....	18

NOMENCLATURE

Principales notations

C	: capacité calorifique
d	: dérivée totale
f	: fonction
f'	: dérivée
J	: joule
K	: kelvin
kg	: kilogramme
L	: chaleur latente
l	: litre
m	: masse
n	: quantité de matière
P	: pression
Q	: quantité de chaleur
R	: constante universelle des gaz parfaits
S	: entropie
T	: température
t	: temps
U	: énergie interne
V	: volume
W	: travail

Lettres grecques

∂	: dérivée partielle
Δ	: opérateur de Laplace
ρ	: densité
γ	: indice adiabatique du gaz parfait

Indices

0	: état initiale
ext	: extérieur
f	: finale
f	: fusion
i	: initiale
irrév	: irréversible
int	: intérieur
p	: à pression constante
réver	: réversible
v	: à volume constant

Introduction

Le mot thermodynamique est d'origine grec. Il est composé de deux parties : « thermo » qui signifie chaleur et « dynamique » qui signifie travail ou mouvement. Le mot composé veut dire mouvement produit à partir de la chaleur. La thermodynamique est apparue en tant que science à partir du XVIII siècle avec la découverte de la machine à vapeur. Son but est d'étudier les différentes formes d'énergies et les possibilités de conversion entre elles.

La thermodynamique compte plusieurs branches :

- **Thermodynamique classique** : étudie les systèmes à l'échelle macroscopiques en utilisant des grandeurs mesurables telles que la pression P, la température T et le volume V
- **Thermodynamique chimique** : étude des chaleurs des réactions et des propriétés thermodynamiques des équilibres chimiques.
- **Thermodynamique statistique** : prend en considération les systèmes sous leurs aspects microscopiques et s'appuie sur la mécanique statistique.
- **Thermodynamique technique** : pour les machines thermiques, frigorifiques, pompe à chaleur.....ect).

Etat de l'art de la thermodynamique :

- **1747** : le physiologiste A. HALLER a attribué la constance de la température, du corps humain au frottement accompagnant la circulation du sang.
- **1765** : J. WATT a créé la première machine à vapeur pratiquement sans fondement théorique.
- **1824** : S. CARNOT a découvert le deuxième principe de la thermodynamique, qui a été complété plus tard (en 1848) par W. THOMSON et R. CLAUSIUS (en 1850).
- **1842** : R. MAYER a découvert le premier de la thermodynamique, qui a été confirmé par J. JOULE en 1845.
- **1869** : M. MASSIEU, J.W. GIBBS (1875), H.L.F. HELMOTZ (1882), et P. DUHEM (1886) ont découvert les fonctions caractéristiques et les potentielles thermodynamiques, et ont initié l'application de la thermodynamique à la chimie.
- **1877** : L. BOLTZMANN a introduit la thermodynamique statistique.

I. Outil mathématique :

I.1. Rappel sur les dérivées partielles :

Soit une fonction $F(x)$ à une seule variable :

La dérivée de F est f'

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} \quad (I.1)$$

Soit

$$dF(x) = f'(x)dx \Rightarrow dF = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx \quad (I.2)$$

Exemple : calculer la différentielle de cette fonction :

$$F(x) = 4x^2 + 2x + 5 \Rightarrow dF(x) = (8x + 2)dx \quad (I.3)$$

Pour une fonction de deux variables x et y , par exemple $F(x, y)$:

$$f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy \quad (I.4)$$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y$: est la dérivée partielle de f par rapport à x pour y constant.

$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x$: est la dérivée partielle de f par rapport à y pour x constant.

Exemple : calculer la différentielle de cette fonction :

$$F(x, y) = 7x^2y + y^3 + x + 10 \quad (I.5)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = 14xy + 1 \quad (I.7)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x = 7x^2 + 3y^2 \quad (I.8)$$

I.2. Exercice

Soit F une fonction d'état définie à partir des trois variables d'états P, V, T d'un système tel que : $F(x, y) = 0$.

Ecrivons les différentielles dV, dP et dT pour en déduire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P &= 1 \\
 \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T &= 1 \\
 \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V &= 1 \\
 \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P &= -1
 \end{aligned} \tag{I.9}$$

Solution :

On peut écrire les différentielles dV , dP et dT comme suit :

$$\begin{aligned}
 dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP \\
 dT &= \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP \\
 dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV
 \end{aligned} \tag{I.10}$$

à $P = C^{\text{te}}$ $\Rightarrow dP = 0$, donc :

$$\begin{aligned}
 dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT \Rightarrow \frac{dV}{dT} = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \\
 dT &= \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV \Rightarrow \frac{dT}{dV} = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \\
 \frac{dV}{dT} \times \frac{dT}{dV} &= 1 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \times \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = 1}
 \end{aligned} \tag{I.11}$$

à $T = C^{\text{te}}$ $\Rightarrow dT = 0$, donc :

$$\begin{aligned}
 dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP \Rightarrow \frac{dV}{dP} = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \\
 dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV \Rightarrow \frac{dP}{dV} = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \\
 \frac{dV}{dP} \times \frac{dP}{dV} &= 1 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = 1}
 \end{aligned} \tag{I.12}$$

à $V = C^{\text{te}}$ $\Rightarrow dV = 0$, donc :

$$\begin{aligned}
 dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP &\Rightarrow \frac{dT}{dP} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \\
 dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT &\Rightarrow \frac{dP}{dT} = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \\
 \frac{dT}{dP} \times \frac{dP}{dT} = 1 &\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \times \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = 1}
 \end{aligned} \tag{I.13}$$

à $V = C^{\text{te}}$ $\Rightarrow dV = 0$, donc :

$$\begin{aligned}
 V = \text{Cte} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP = 0 &\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT = - \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP \\
 \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{dT}{dP} \right)_V = - \frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T} &\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{dT}{dP} \right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -1}
 \end{aligned} \tag{I.14}$$

II. Premier principe de la thermodynamique

Au cours d'une transformation quelconque d'un système fermé, la variation de son énergie est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur, par transfert thermique (chaleur) et transfert mécanique (travail)

II.1. Travail w :

$$\delta W = P_{\text{ext}} dV \tag{II.1}$$

δW : travail élémentaire

P_{ext} : la pression du milieu extérieur

Si la transformation est irréversible :

$$\delta W_{\text{irrèv}} = -P_{\text{ext}} dV \Rightarrow W_{\text{irrèv}} = - \int_1^2 P_{\text{ext}} dV = -P_{\text{ext}} (V_2 - V_1) = -P_{\text{ext}} \Delta V \tag{II.2}$$

Si la transformation est réversible à chaque instant :

$$P_{\text{ext}} = P_{\text{système}} = p \Rightarrow \delta W_{\text{rév}} = -pdV \tag{II.3}$$

II.2. Quantité de chaleur Q :

$Q_{\text{irrèv}}$ se calcul directement du premier principe de la thermodynamique.

Pour une transformation réversible, la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur

$Q_{\text{réver}}$ se calcul comme suit :

$$\begin{aligned}
 \delta Q &= C_V dT + l dV \\
 \delta Q &= C_p dT + h dP \\
 \delta Q &= \mu dV + \lambda dP
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

Avec :

$$l = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V, \quad k = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad \lambda = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V, \quad \eta = C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \quad (\text{II.5})$$

Remarque :

Pour les corps incompressibles, les solides et liquides $\delta w = 0$ et $\delta Q = mCdT$

II.3. Variation d'énergie interne

$$\begin{aligned} dU &= \delta W + \delta Q \\ \Delta U &= W + Q \\ \Delta U &= C_V \Delta T \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Relations de Mayer :

$$C_P - C_V = nR, \quad C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}, \quad C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \quad (\text{II.7})$$

II.4. Transformation d'un gaz parfait

a) Transformation isochore

$$\delta W_{\substack{\text{isochore} \\ \text{réversible}}} = - \int_1^2 p dV = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\begin{aligned} \delta Q &= C_V dT + l dV \\ V = \text{Cte} \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow \delta Q &= C_V dT \Rightarrow Q_{\text{isochore}} = C_V [T_f - T_i] \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

b) Transformation isobare

$$\delta W_{\substack{\text{isobare} \\ \text{réversible}}} = - \int_1^2 p dV = P(V_2 - V_1) \quad (\text{II.10})$$

$$\begin{aligned} \delta Q &= C_p dT + h dP \\ P = \text{Cte} \Rightarrow dP = 0 \Rightarrow \delta Q &= C_p dT \Rightarrow Q_{\text{isobare}} = C_p [T_f - T_i] \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

c) Transformation isotherme :

$$\delta W_{\substack{\text{isotherme} \\ \text{réversible}}} = - \int_1^2 p dV \quad (\text{II.12})$$

Pour un gaz parfait :

$$\begin{aligned} PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V} \Rightarrow W_{\substack{\text{isotherme} \\ \text{réversible}}} &= - \int_1^2 nRT \frac{dV}{V} \\ \Rightarrow W_{\substack{\text{isotherme} \\ \text{réversible}}} &= -nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \\ \Rightarrow W_{\substack{\text{isotherme} \\ \text{réversible}}} &= -nRT \ln \frac{P_1}{P_2} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

$$\Delta U = C_V \Delta T = Q + W = 0 \Rightarrow Q = -W \quad (\text{II.14})$$

$$Q = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (\text{II.15})$$

Où :

$$\delta Q_{\substack{\text{isotherme} \\ \text{réversible}}} = C_v dT + P dV = P dV \quad (\text{II.16})$$

$$Q_{\substack{\text{isotherme} \\ \text{réversible}}} = \int_1^2 P dV = -W_{\substack{\text{isotherme} \\ \text{réversible}}} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (\text{II.17})$$

d) Transformation adiabatique :

$$PV^\gamma = \text{Cte} \quad (\text{II.18})$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{Cte}$$

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{Cte}$$

$$W_{\substack{\text{adiabatique} \\ \text{réversible}}} = - \int_1^2 P dV \quad P = \text{Cte} V^{-\gamma} \quad (\text{II.19})$$

$$W_{\substack{\text{adiabatique} \\ \text{réversible}}} = - \int_1^2 \text{Cte} V^{-\gamma} dV = - \text{Cte} \left[\frac{1}{-\gamma+1} V^{-\gamma+1} \right]_1^2 \quad (\text{II.20})$$

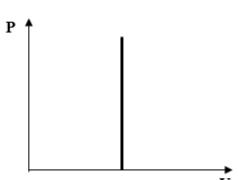
$$\Delta U = C_v \Delta T = Q + W = 0 \Rightarrow W = C_v \Delta T \quad (\text{II.21})$$

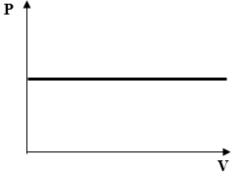
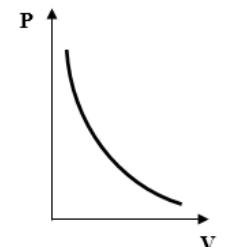
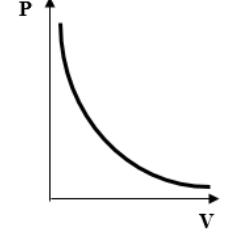
$$W_{\substack{\text{adiabatique} \\ \text{réversible}}} = \frac{1}{\gamma-1} [P_2 V_2 - P_1 V_1] \quad (\text{II.22})$$

Où

$$\delta Q_{\text{adiabatique}} = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$\Delta U = C_v \Delta T = Q + W = 0 \Rightarrow W = C_v \Delta T \quad (\text{II.24})$$

Transformation	$P = P(V)$	Équation caractéristique	W	Q	ΔU
Isochore $V = \text{Cte}$		$\frac{T}{P} = \text{Cte}$	$W = 0$	$Q = C_v (T_2 - T_1)$ $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$	$\Delta U = C_v (T_2 - T_1)$

Isobare $P = \text{Cte}$		$\frac{T}{V} = \text{Cte}$	$W = -P(V_2 - V_1)$	$Q = C_p(T_2 - T_1)$ $C_p = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1}$	$\Delta U = C_v(T_2 - T_1)$
Isotherme $T = \text{Cte}$		$PV = \text{Cte}$	$W = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$	$Q = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\Delta U = 0$
Adiabatique $Q = 0$		$PV^\gamma = \text{Cte}$ $TV^{\gamma-1} = \text{Cte}$ $\frac{1-\gamma}{TP^\gamma} = \text{Cte}$	$W = C_v(T_2 - T_1)$	$Q = 0$	$\Delta U = C_v(T_2 - T_1)$

II.5. Exercices sur le Premier principe de la thermodynamique

Exercices 1 :

Un morceau de glace de masse $m = 500\text{g}$, pris à -10°C , reçoit une quantité de chaleur $p = 175\text{J/s}$, selon le diagramme de la figure 1.

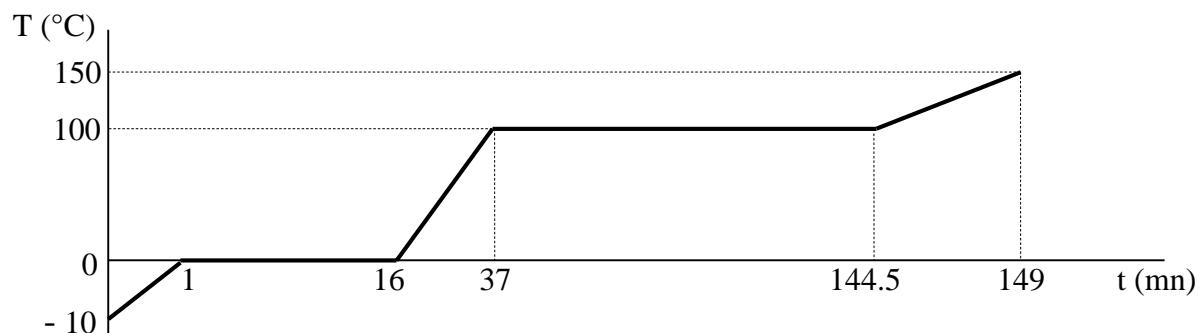


Figure 1

Sachant que la pression est maintenue constante et que les pertes thermiques sont négligeables :

- 1) Décrire les différentes phases

- 2) Evaluer les chaleurs latentes de changement de phase
- 3) Evaluer les chaleurs massiques de chacune des phases ainsi que la chaleur molaire de la vapeur d'eau.

Solution :

- 1) Les différentes phases sont :

- a) $t \in [0, 1 \text{ mn}]$:

Le morceau de glace subit un échauffement de -10°C jusqu'à 0°C .

- b) $t \in [1, 16 \text{ mn}]$:

Le morceau de glace subit une fusion à 0°C et se transforme en liquide.

- c) $t \in [16, 37 \text{ mn}]$:

Le morceau de glace liquide subit un échauffement de 0°C jusqu'à 100°C .

- d) $t \in [37, 144.5 \text{ mn}]$:

Le liquide obtenu de la phase précédente subit une évaporation à température constante égale à 100°C .

- e) $t \in [144.5, 149 \text{ mn}]$:

La vapeur obtenue de la phase précédente subit un échauffement de 100°C jusqu'à 149°C .

- 2) Les chaleurs latentes de changement de phase :

- a) La phase de fusion, $t \in [1, 16 \text{ mn}]$:

$$P \times \Delta t = m L_f \Rightarrow L_f = \frac{P \times \Delta t}{m}$$

A.N :

$$L_f = \frac{175 \times (16 - 1) \times 60}{0.5} = 315 \text{ kJ/kg}$$

- b) La phase d'évaporation $t \in [37, 144.5 \text{ mn}]$

$$P \times \Delta t = m L_v \Rightarrow L_v = \frac{P \times \Delta t}{m}$$

A.N :

$$L_v = \frac{175 \times (144.5 - 37) \times 60}{0.5} = 2257.5 \text{ kJ/kg}$$

- 3) Les chaleurs massiques de chacune des phases ainsi que la chaleur molaire :

- a) La phase de d'échauffement, $t \in [0, 1 \text{ mn}]$:

$$P \times \Delta t = m C_p \Delta T \Rightarrow C_p = \frac{P \times \Delta t}{m \Delta T}$$

A.N :

$$C_p = \frac{175 \times 1 \times 60}{0.5 \times (0 - (-10))} = 2.1 \text{ kJ/kg.K}$$

b) La phase d'échauffement, $t \in [16, 37 \text{ mn}]$:

$$P \times \Delta t = mC_p \Delta T \Rightarrow C_p = \frac{P \times \Delta t}{m \Delta T}$$

A.N :

$$C_p = \frac{175 \times 60 \times (37 - 16)}{0.5 \times (100 - 0)} = 4410 \text{ J/kg.K}$$

c) La phase d'échauffement, $t \in [149, 144.5 \text{ mn}]$:

$$P \times \Delta t = mC_p \Delta T \Rightarrow C_p = \frac{P \times \Delta t}{m \Delta T}$$

A.N :

$$C_p = \frac{175 \times 60 \times (149 - 144.5)}{0.5 \times (150 - 100)} = 1890 \text{ J/kg.K}$$

La chaleur molaire de la vapeur :

$$C_p = \frac{P \times \Delta t}{m \times \Delta T} = \frac{P \times \Delta t}{n \times M \times \Delta T}$$

Avec M : la masse molaire de la vapeur d'eau

$$C_p \times M = \frac{P \times \Delta t}{n \times \Delta T}, M_{H_2O} = 2M_H + M_O$$

A.N :

$$C_p \times M = 1890 \times 18 = 34020 \text{ J/mole.K}$$

Exercices 2 :

Un récipient contient 10 litres d'eau à la température $T_0=60^\circ\text{C}$.

- 1) Quel volume d'eau à $T_0=15^\circ\text{C}$ faut-il y verser pour obtenir de l'eau à la température $T_0=30^\circ\text{C}$?
- 2) Dans le récipient contenant 10 l d'eau à 60°C , on met un morceau de glace de masse $m=800\text{g}$ à la température $T_g = 0^\circ\text{C}$. quelle est la température finale du mélange ?
- 3) Dans le récipient contenant 10 l d'eau à 60°C , on plonge une résistance $R = 600 \Omega$ parcourue par un courant d'intensité $I=1.2 \text{ A}$.
 - a) Quel temps faudra-t-il pour porter l'eau à ébullition ?
 - b) Une fois l'ébullition est atteinte, combien de temps faudra-t-il pour vaporiser 1/2 l d'eau ?

Les pertes sont supposées négligeables et la pression, maintenue constante, est égale à 1 atm

On donne : $C_p = 4.18 \text{ Kj.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $L_v = 2260 \text{ Kj.kg}^{-1}$, $L_f = 334 \text{ Kj.kg}^{-1}$.

Solution :

1)

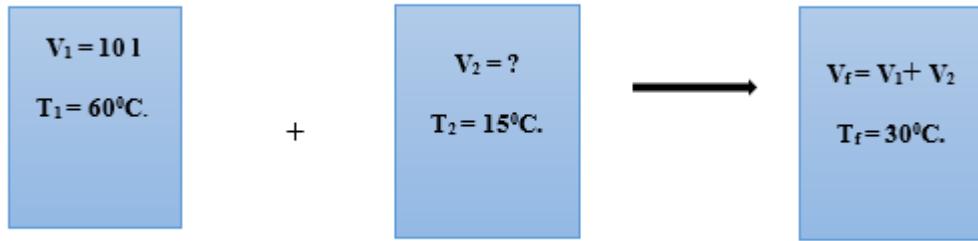


Figure 2

$$\begin{aligned}
 & (\text{Les pertes de chaleur sont négligeables}) \Leftrightarrow (\text{système isolé}) \Leftrightarrow \left(\sum Q_{\text{Reçue}} + \sum Q_{\text{Cédée}} = 0 \right) \\
 & m_1 C_p (T_f - T_1) + m_2 C_p (T_f - T_2) = 0 \Rightarrow \rho V_1 C_p (T_f - T_1) + \rho V_2 C_p (T_f - T_2) = 0 \\
 & V_2 = -V_1 \frac{(T_f - T_1)}{(T_f - T_2)} \Rightarrow V_2 = -10 \frac{(30 - 60)}{(30 - 15)} = 20 \text{ l}
 \end{aligned}$$

2)

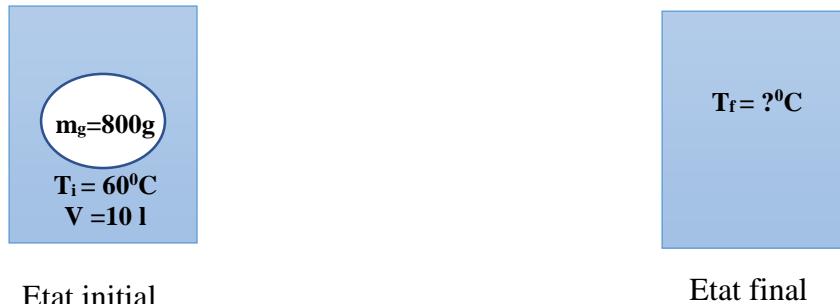


Figure 3

$$\left(\begin{array}{l} \text{La quantité de chaleur fournie} \\ \text{par l'eau chaude} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{La quantité de chaleur} \\ \text{de fusion} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{La quantité de chaleur d'échauffement} \\ \text{de la glace liquide} \end{array} \right)$$

$$\rho V C_{\text{peau}} (T_f - T_i) = m_g L_f + m_g C_{\text{pglace}} (T_f - T_{\text{glace liquide}}) \quad \text{avec } T_{\text{glace liquide}} = 0^\circ\text{C}, \rho = 1 \text{ kg/l}$$

$$T_f = \frac{\rho V C_{\text{peau}} T_i + m_g L_f - m_g C_{\text{pglace}} T_{\text{glace liquide}}}{\rho V C_p + m_g C_{\text{glace}}}$$

3)

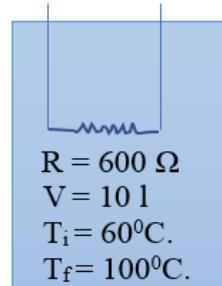
a) Le temps nécessaire pour porter l'eau à ébullition

Figure 4

$$\left(\begin{array}{l} \text{La quantité de chaleur} \\ \text{dégagée par effet Joule} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{La quantité de chaleur nécessaire} \\ \text{pour porter l'eau à ébullition} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} RI^2 \Delta t &= \rho V C_p (T_f - T_i) \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\rho V C_p (T_f - T_i)}{RI^2}} \\ &\Rightarrow \Delta t = \frac{1 \times 0.5 \times 4.18 \times 10^2 (373 - 333)}{600 \times (1.2)^2} = 1920 \text{ s} \end{aligned}$$

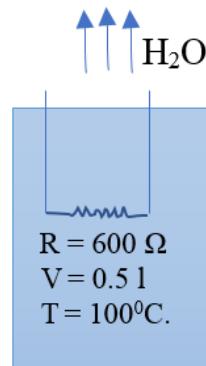
b) Une fois l'ébullition est atteinte, le temps nécessaire pour l'évaporation :

Figure 5

$$\left(\begin{array}{l} \text{La quantité de chaleur} \\ \text{dégagée par effet Joule} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{La quantité de chaleur} \\ \text{d'évaporation} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} RI^2 \Delta t &= \rho V L_v \Rightarrow \Delta t = \frac{\rho V L_v}{RI^2} \\ &\Rightarrow \Delta t = \frac{1 \times 0.5 \times 2260 \times 10^3}{600 \times (1.2)^2} = 1307 \text{ s} = 21.7 \text{ mn} \end{aligned}$$

Exercices 3 :

Une mole de gaz parfait monoatomique se trouve dans l'état (P_0, v_0, T_0) . Au cours d'une transformation réversible, il reçoit une quantité de chaleur $Q = \frac{3RT_0}{2}$.

1. Evaluer la pression et le volume finaux si la transformation est isotherme.
2. Evaluer la pression et la température finales si la transformation est isochore.
3. Evaluer la température et le volume finaux si la transformation est isobare.

On rappelle que la quantité de chaleur reçue d'un gaz considéré au cours d'une transformation élémentaire réversible est : $\delta Q = \frac{3}{2}RdT + PdV = \frac{5}{2}RdT - VdP$.

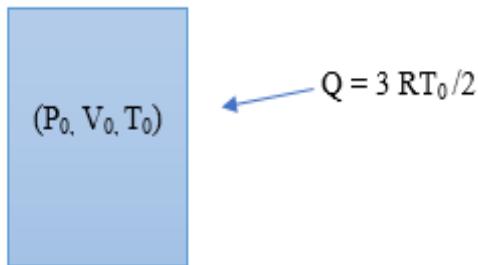
Solution :

Figure 6

1. Transformation isotherme :

Le calcul de V_1 :

$$T = \text{Cte} \text{ et } n=1 \Rightarrow \boxed{PV = RT_0}$$

$$\delta Q = \frac{3}{2}RdT + PdV = \frac{5}{2}RdT - VdP \text{ et } T = \text{Cte} \Rightarrow dT = 0$$

$$\Rightarrow \delta Q = PdV = -VdP$$

Où :

$$\Delta U = C_V \Delta T = W + Q = 0 \Rightarrow Q = -W = \int P_{\text{ext}} dV$$

(Transformation réversible $\Rightarrow P_{\text{ext}} = P_{\text{int}} = P$) $\Leftrightarrow Q = \int P dV$

$$Q = \int P dV = RT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} \Rightarrow Q = RT_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = \frac{3RT_0}{2}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{V_1}{V_0} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{V_1 = V_0 e^{3/2}}$$

Le calcul de P_1 :

$$P_1 V_1 = P_0 V_0 \Rightarrow P_1 = \frac{P_0 V_0}{V_1} \Rightarrow P_1 = P_0 e^{-3/2}$$

4) Transformation isochore :

Le calcul de la température :

$$V = \text{Cte et } n=1 \Rightarrow \boxed{\frac{P}{T} = \frac{R}{V_0}}$$

$$\delta Q = \frac{3}{2} R dT + P dV = \frac{5}{2} R dT - V dP \text{ et } V = \text{Cte} \Rightarrow dV = 0$$

$$\Rightarrow \delta Q = \frac{3}{2} R dT \Rightarrow Q = \frac{3}{2} R (T_1 - T_0) = \frac{3}{2} R T_0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = 2T_0}$$

Le calcul de la pression :

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{R}{V_0} \Rightarrow P_1 V_0 = R T_1 \Rightarrow P_1 = 2 \frac{R T_0}{V_0} = 2 P_0$$

5) Transformation isobare :

$$P = \text{Cte et } n=1 \Rightarrow \boxed{\frac{V}{T} = \frac{R}{P_0}}$$

$$\delta Q = \frac{3}{2} R dT + P dV = \frac{5}{2} R dT - V dP \text{ et } P = \text{Cte} \Rightarrow dP = 0$$

$$\Rightarrow \delta Q = \frac{5}{2} R dT \Rightarrow Q = \frac{5}{2} R (T_1 - T_0) = \frac{3}{2} R T_0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{8}{5} T_0}$$

Le calcul du volume :

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{R}{P_0} \Rightarrow V_1 = \frac{R T_1}{P_0} \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{8}{5} V_0}$$

Exercices 4 :

On considère une masse m d'azote, considéré comme gaz parfait, dans les conditions normales de pression et de température (état A).

1. Le gaz est comprimé de façon isotherme et réversible jusqu'à la pression $P_B = 10 P_0$ (état B). Calculer le travail et la quantité de chaleur reçus par le gaz.
2. Après avoir été ramené à l'état A, le gaz est comprimé de façon adiabatique et réversible jusqu'à la pression $P_B' = P_B$ (état B'). Calculer le travail reçu par le gaz.
3. Représenter dans le diagramme (P,V) les transformations (AB) et (AB') et calculer les pentes des tangentes aux deux courbes au point A.
4. Partant du point A, le gaz est comprimé de façon isotherme réversible jusqu'à la pression P_B ; il est ensuite détendu de façon adiabatique jusqu'à une pression $P_C = P_0$. Calculer V_C et T_C et représenter la transformation ABC.

Solution :

1.

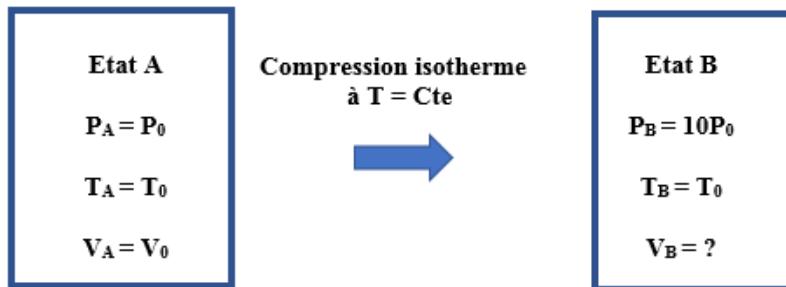


Figure 7

$$P_A V_A = P_B V_B \Rightarrow V_B = \frac{P_A V_A}{P_B} \Rightarrow V_B = \frac{P_0 V_0}{10 P_0}$$

$$\boxed{V_B = \frac{V_0}{10}}$$

Travail W :

$$(\text{Compression isotherme}) \Rightarrow (\text{Transformation réversible})$$

$$(\delta W = -P_{\text{ext}} dV) \xrightarrow{\text{Transformation réversible}} \left(\begin{array}{l} P_{\text{ext}} = P_{\text{int}} = P \\ \delta W = -P dV \end{array} \right)$$

$$\int_{V_A}^{V_B} \delta W = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = - nRT_0 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} \Rightarrow \boxed{W = nRT_0 \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right) = nRT_0 \ln 10}$$

La quantité de chaleur Q :

$$(\text{Transformation isotherme}) \Rightarrow (\Delta U = C_v \Delta T = W + Q = 0)$$

$$\boxed{Q = -W = -nRT_0 \ln 10}$$

2.



Figure 8

Le calcul du travail W :

$$\left(\begin{array}{c} \text{Transformation adiabatique} \\ \text{réversible} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\Delta U = nC_v(T_{B'} - T_A) = W + Q = W + 0 \right)$$

$$P_A V_A^\gamma = P_{B'} V_{B'}^\gamma \Rightarrow \left(\frac{V_{B'}}{V_A} \right)^\gamma = \frac{P_A}{P_{B'}} = \frac{P_0}{10P_0} = \frac{1}{10} \Rightarrow \boxed{V_{B'} = \frac{V_0}{10^{1/\gamma}}}$$

$$P_{B'} V_{B'} = n R T_{B'} \Rightarrow T_{B'} = \frac{P_{B'} V_{B'}}{n R}$$

$$\Rightarrow T_{B'} = \frac{10P_0 \frac{V_0}{10^{1/\gamma}}}{n R}$$

$$\Rightarrow T_{B'} = \frac{P_0 V_0}{n R} \times \frac{10V_0}{10^{1/\gamma}}$$

$$\Rightarrow T_{B'} = T_0 \times \frac{10V_0}{10^{1/\gamma}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{B'} = T_0 \times 10^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$W = \Delta U = nC_v \left(T_0 \times 10^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - T_0 \right) = nC_v T_0 \left(10^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

3)

$$A(P_0, V_0, T_0), \quad B\left(10P_0, \frac{V_0}{10}, T_0\right), \quad B' \left(10P_0, \frac{V_0}{10^{1/\gamma}}, T_0\right)$$

Transformation isotherme de A à B :

$$(Transformation isotherme) \Rightarrow (PV = nRT_0)$$

$$PV = nRT_0 \Rightarrow P = \frac{nRT_0}{V}$$

La pente au point A :

$$\begin{aligned} P &= \frac{nRT_0}{V} \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{dP}{dV}\right)_T = -\frac{nRT_0}{V^2} \\ &\Rightarrow \left(\frac{dP}{dV}\right)_{V=V_0} = -\frac{nRT_0}{V_0^2} = -\frac{V_0}{V_0} = -\frac{P_0}{V_0} \end{aligned}$$

$$\left[\left(\frac{dP}{dV}\right)_{V=V_0} = -\frac{P_0}{V_0}\right]$$

Transformation adiabatique réversible de A à B :

$$\begin{aligned} (Transformation adiabatique réversible) &\Rightarrow (PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma = C^{\text{te}}) \\ P = \frac{P_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} \Rightarrow P &= (P_0 V_0^\gamma) V^{-\gamma} \Rightarrow \left(\frac{dP}{dV}\right)_{V=V_0} = -\gamma (P_0 V_0^\gamma) V^{-\gamma-1} \\ &\quad \left(\frac{dP}{dV}\right)_T = -\gamma \frac{(P_0 V_0^\gamma)}{V^{\gamma+1}} \end{aligned}$$

La pente au point A :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{dV}\right)_{V=V_0} = -\gamma (P_0 V_0^\gamma) V_0^{-\gamma-1} &= \left(\frac{dP}{dV}\right)_{V=V_0} = -\gamma \frac{(P_0 V_0^\gamma)}{V_0^{\gamma+1}} \\ &= -\gamma \frac{P_0 V_0^\gamma}{V_0^\gamma V_0} \\ &= -\gamma \frac{P_0}{V_0} \end{aligned}$$

$$\left[\left(\frac{dP}{dV}\right)_{V=V_0} = -\gamma \frac{P_0}{V_0}\right]$$

D'après le calcul des deux tangentes au point A, la pente de la courbe associée à la transformation adiabatique réversible est plus importante que celle de la transformation isotherme.

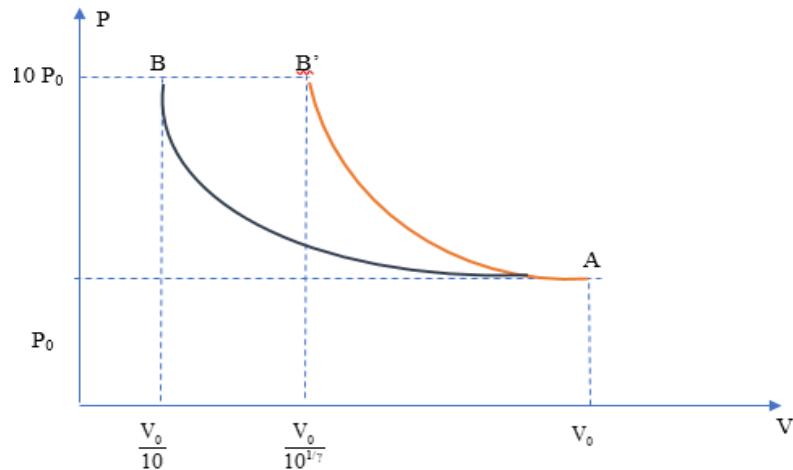


Figure 9 : Diagramme (P, V)

4)

$A(P_0, V_0, T_0)$ Isotherme réversible $B(10P_0, V_B, T_0)$ Adiabatique $C(P_0, V_C, T_C)$

$$P_B V_B = P_A V_A \Rightarrow V_B = \frac{P_A V_A}{P_B} = \frac{P_0 V_0}{10 P_0} = \frac{V_0}{10}$$

$$\boxed{V_B = \frac{V_0}{10}}$$

$$P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma \Rightarrow \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^\gamma = \frac{P_B}{P_C} = \frac{10P_0}{P_0} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{V_C}{V_B} = 10^{1/\gamma}$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{V_0}{10} (10)^{1/\gamma}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_C = V_0 (10)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

$$C\left(P_0, V_0 (10)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}, T_C\right)$$

$$\begin{aligned}
 (\text{Gaz parfait}) \Rightarrow P_c V_c = nR T_c \Rightarrow T_c &= \frac{P_c V_c}{nR} = \frac{P_0 V_0 (10)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\frac{P_0 V_0}{T_0}} \\
 \Rightarrow T_c &= T_0 V_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}
 \end{aligned}$$

Exercices 5 :

Un cylindre vertical, fermé par un piston de masse négligeable, mobile sans frottement, contient n moles d'un gaz parfait dont le rapport $\gamma = C_p / C_v$ est constant.

Initialement le gaz se trouve dans l'état A (P_0 , V_0 , T_0). Les parois du cylindre sont perméables à la chaleur. Préciser les paramètres d'état du gaz à la fin de chaque transformation. Evaluer le travail, la quantité de chaleur reçus par le gaz ainsi que la variation de son énergie interne en fonction de P_0 et V_0 entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final au cours de chacune des transformations suivantes :

- Partant de l'état A, on place sur le piston une masse M qui comprime le gaz jusqu'à un volume $V_0/2$. Soit B l'état d'équilibre final.
- Partant de l'état B, on enlève la masse M . Soit C l'état d'équilibre final.
- Partant de l'état A, on place progressivement sur le piston des masses infiniment petites dont la somme est égale à M . Soit B' l'état d'équilibre final.
- Partant de l'état B', on enlève progressivement les masses. Soit C' l'état d'équilibre final.

a)

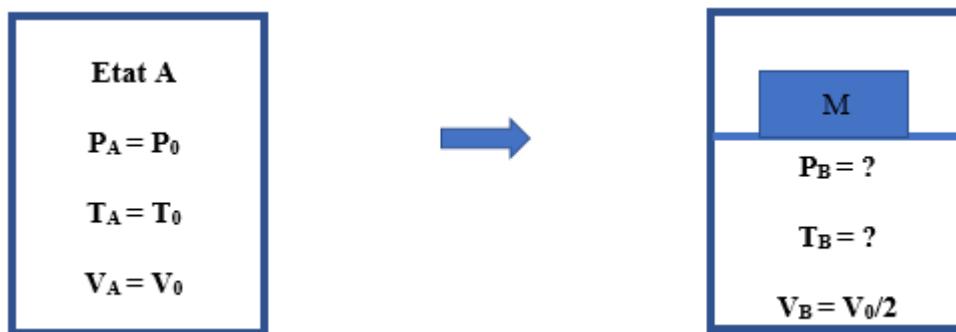


Figure 10

En état d'équilibre mécanique :

$$P_B = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

Pour un gaz parfait :

$$P_B V_B = n R T_B \Rightarrow T_B = \frac{P_B V_B}{n R} = \frac{P_B V_B}{P_0 V_0} T_0 \Rightarrow \boxed{T_B = \frac{1}{2P_0} \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) T_0}$$

$$P_A V_A = n R T_A \Rightarrow n R = \frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_0 V_0}{T_0}$$

Comme les parois du cylindre sont perméables à la chaleur, dans ce cas il y a un équilibre thermique :

$$(\text{Un équilibre thermique est vérifié}) \Leftrightarrow \left(T_B = \frac{1}{2P_0} P_B T_0 = T_0 \right) \Leftrightarrow (P_B = 2P_0)$$

$$\delta W = -P_{\text{ext}} dV \Rightarrow W = -2P_0 \int_{V_0}^{V_0/2} dV = -2P_0 \left(\frac{V_0}{2} - V_0 \right) = P_0 V_0 / 2$$

$$\boxed{W = P_0 V_0 / 2}$$

Pour un gaz parfait :

$$\Delta U = n C_V (T_B - T_A) = W + Q = 0 \Rightarrow \boxed{W = -Q}$$

Remarque : la transformation n'est pas isotherme, $T_A = T_B$ grâce à l'équilibre thermique.

b)

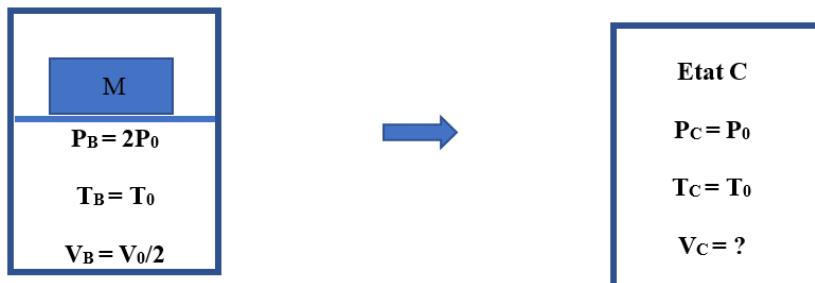


Figure 11

A cause de l'équilibre mécanique, la pression revient à P_0 .

A cause de l'équilibre thermique, la température revient à T_0 .

$$(\text{Gaz parfait}) \Leftrightarrow \left(V_C = \frac{n R T_C}{P_C} \right) \Leftrightarrow \left(V_C = \frac{\left(\frac{2P_0 \frac{V_0}{2}}{T_0} \right) T_C}{P_C} = V_0 \right)$$

$$\delta W = -P_{\text{ext}} dV \Rightarrow W = -P_0 \int_{V_0/2}^{V_0} dV = -2P_0 \left(V_0 - \frac{V_0}{2} \right) = -P_0 V_0 / 2$$

$$W_{B \rightarrow C} = -P_0 V_0 / 2$$

Pour un gaz parfait :

$$\Delta U = nC_V(T_C - T_B) = W + Q = 0 \Rightarrow Q = -W = \frac{P_0 V_0}{2}$$

c) Compression isotherme réversible $A(P_0, V_0, T_0) \rightarrow B(P_B, V_B, T_0)$:

$$PV = nRT_0 \Rightarrow P = \frac{nRT_0}{V}$$

$$(\text{Equilibre mécanique}) \Rightarrow (P_B = 2P_0) \Rightarrow \left(V_B = \frac{nRT_0}{P_B} = \frac{V_0}{2} \right)$$

$$\delta W = -P_{\text{ext}} dV \Rightarrow W = - \int_{V_0}^{V_0/2} P dV = - \int_{V_0}^{V_0/2} nRT_0 \frac{dV}{V} = -nRT_0 \ln \frac{\frac{V_0}{2}}{V_0} = nRT_0 \ln 2$$

$$W_{A \rightarrow B} = nRT_0 \ln 2$$

$$(\text{Transformation isotherme}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Delta U = 0 \Rightarrow W_{A \rightarrow B} = -Q_{A \rightarrow B} \\ Q_{A \rightarrow B} = -nRT_0 \ln 2 \end{pmatrix}$$

d) Détente isotherme réversible $B(P_B, V_B, T_0) \rightarrow C(P_C, V_C, T_0)$:

$$PV = nRT_0 \Rightarrow P = \frac{nRT_0}{V}$$

$$(\text{Equilibre mécanique}) \Rightarrow (P_C = P_0) \Rightarrow \left(V_C = \frac{nRT_0}{P_C} = V_0 \right)$$

$$\delta W = -P_{\text{ext}} dV \Rightarrow W = - \int_{V_0/2}^{V_0} P dV = - \int_{V_0/2}^{V_0} nRT_0 \frac{dV}{V} = -nRT_0 \ln \frac{V_0}{\frac{V_0}{2}} = -nRT_0 \ln 2$$

$$W_{B \rightarrow C} = -nRT_0 \ln 2$$

$$(\text{Transformation isotherme}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Delta U = 0 \Rightarrow W_{B \rightarrow C} = -Q_{B \rightarrow C} \\ Q_{B \rightarrow C} = nRT_0 \ln 2 \end{pmatrix}$$

III. Deuxième principe de la thermodynamique

C'est un principe d'évolution. Il distingue entre transformation possible et impossible, réversible ou irréversible.

$$\Delta S = S_{\text{échangé}} + S_{\text{généré}} \quad (\text{III.1})$$

III.1. Système fermé :

La variation d'entropie au cours d'une transformation élémentaire quelconque est donnée par :

$$dS_{\text{système}} = \frac{\partial Q_{\text{d'échange}}}{T_{\text{d'échange}}} + \delta S_{\text{généré}} \quad (\text{III.2})$$

$\frac{\partial Q_{\text{Extérieur}}}{T_{\text{Extérieur}}}$: entropie d'échange entre le système et le milieu extérieur

$\delta S_{\text{généré}}$: entropie générée à l'intérieur du système.

Exemple :

On considère deux systèmes A et B d'entropie S_A et S_B .

$S_A \succ S_B \Rightarrow$ le système A est plus désordonnée que le système B

$\delta S_{\text{généré}}$ n'est pas une fonction d'état, par conséquent :

$$\delta S_{\text{généré}} \neq dS_{\text{généré}}$$

$$\delta S_{\text{généré}} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \delta S_{\text{généré}} = 0 & \text{si la transformation est réversible} \\ \delta S_{\text{généré}} \succ 0 & \text{si la transformation est irréversible} \end{cases}$$

Le terme $\delta S_{\text{généré}}$ est lié à l'irréversibilité. En intégrant entre l'état initial et l'état final :

$$\int_1^2 dS = S_f - S_i = \Delta S \quad (\text{III.3})$$

III.2. Bilan entropique :

Dans le cas d'un équilibre thermique ($T_{\text{Extérieure}} = T$) et une transformation réversible ($\delta S_{\text{généré}} = 0$) :

$$\Delta S_{\text{système}} = \Delta_e S \quad (\text{III.4})$$

$\Delta_e S$: la variation d'entropie échangé avec l'extérieur

Dans le cas d'une transformation irréversible :

$$dS_{\text{système}} = \frac{\partial Q_{\text{Extérieur}}}{T_{\text{Extérieur}}} + \delta S_{\text{généré}}, \quad \delta S_{\text{généré}} \succ 0$$

$$\int_1^2 dS_{\text{système}} = \int_1^2 \frac{\partial Q_{\text{Extérieur}}}{T_{\text{Extérieur}}} + \int_1^2 \delta S_{\text{généré}} \quad (\text{III.5})$$

$$\Delta S_{\text{système}} = \int_1^2 \frac{\partial Q_{\text{Extérieur}}}{T_{\text{Extérieur}}} + \int_1^2 \delta S_{\text{généré}}$$

Le terme $\int_1^2 \delta S_{\text{généré}}$ est difficile à calculer directement. Donc, il faut le calculer indirectement :

$$\int_1^2 \delta S_{\text{généré}} = \Delta S_{\text{système}} - \int_1^2 \frac{\partial Q_{\text{Extérieur}}}{T_{\text{Extérieur}}} \quad (\text{III.6})$$

$$\int_1^2 \delta S_{\text{généré}} < 0 \Rightarrow \text{transformation impossible}$$

$$\int_1^2 \delta S_{\text{généré}} > 0 \Rightarrow \text{transformation irréversible}$$

$$\int_1^2 \delta S_{\text{généré}} = 0 \Rightarrow \text{transformation réversible}$$

III.3. Application du deuxième principe à un système isolé

$$dS_{\text{système}} = \frac{\partial Q_{\text{Extérieur}}}{T_{\text{Extérieur}}} + \delta S_{\text{généré}} \quad (\text{III.7})$$

$$\text{système isolé } (Q = 0) \Leftrightarrow \left(dS_{\text{système isolé}} = \delta S_{\text{généré}} = dS_{\text{généré}} \right) \quad (\text{III.8})$$

$$\text{système isolé } (Q = 0) \Leftrightarrow \Delta S_{\text{système isolé}} = \int_1^2 \delta S_{\text{généré}} = \Delta S_{\text{généré}} \quad (\text{III.9})$$

$$\Delta S_{\text{système isolé}} \geq 0 \begin{cases} \Delta S_{\text{système isolé}} > 0 \Rightarrow \text{transformation irréversible} \\ \Delta S_{\text{système isolé}} = 0 \Rightarrow \text{transformation réversible} \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

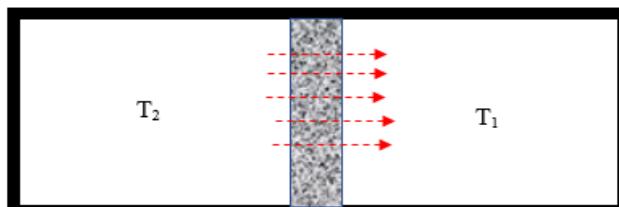
L'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter.

III.4. Irréversibilité

En thermodynamique, la notion d'évolution réversible est une évolution du système pour laquelle aucune entropie n'est produite. Par opposition, tous les autres phénomènes sont dits irréversibles à cause des forces de frottement.

Les trois expériences suivantes indiquent les causes d'irréversibilité.

Expérience 1 :



$$T_1 < T_2$$

Figure 12

Sur la figure 12, la cause d'irréversibilité est que la température n'est pas homogène partout et il y a un sens unique du transfert de chaleur de T_2 vers T_1 .

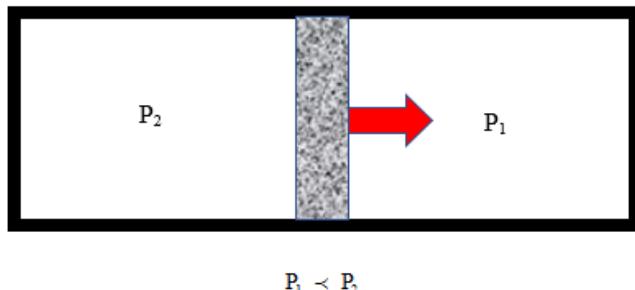


Figure 13

La figure 13 illustre un mouvement de la paroi de P_2 vers P_1 . Dans ce cas, la cause d'irréversibilité est que la pression n'est pas homogène.

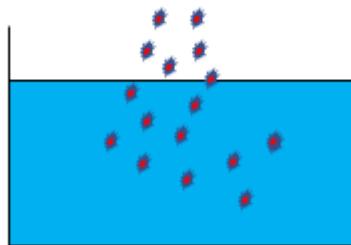


Figure 14

Dans l'expérience illustrée sur la figure 14, on a une solution ou on verse de la grenadine. Au cours du temps, on a une migration des particules. On sait que les particules ne vont pas se réintégrées une fois qu'elles sont mélangées avec le reste. Et finalement, la cause d'irréversibilité pour ce cas est que la concentration n'est pas homogène.

III.5. Entropie

L'interprétation en terme statistique de l'entropie, qu'a donné Boltzmann, est une mesure de désordre.

$$S = k_B \log (\Omega) \quad (\text{III.10})$$

Avec :

k_B : est la constante de Boltzmann

Ω : combinaison possible du système, ou la façon dont le système est arrangé.

III.6. Les applications du second principe

Exemple 1 : mélange de deux gaz parfaits A et B

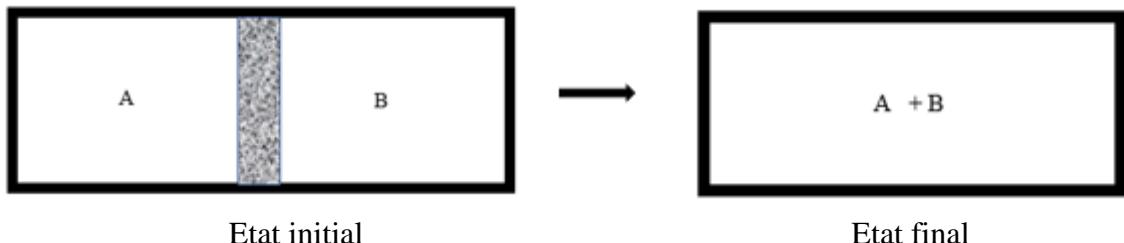


Figure 15

Pour effectuer le calcul, on utilise l'identité de thermodynamique suivante :

$$dU = TdS - PdV \quad (\text{III.11})$$

On déduit :

$$dU = TdS - PdV \quad \Rightarrow \quad dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV \quad (\text{III.12})$$

Si on revient sur la variation globale de l'entropie du système est :

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_p \quad (III.13)$$

D'autre part on a :

$$dS_A = \frac{dU_A}{T} + \frac{P}{T}dV_A \quad (\text{III.14})$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Comme les parois sont indéformables} \\ \text{et le transfert thermique est nul} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{D'après le premier principe :} \\ dU_A = 0 \end{array} \right)$$

A l'équilibre thermodynamique on a :

$$P_A V_A = n R T_A \quad \Rightarrow \quad \frac{P_A}{T_A} = \frac{n R}{V_A} \quad \Rightarrow \quad dS_A = n R \frac{dV_A}{V_A} \quad (III.15)$$

$$dS_A = nR \frac{dV_A}{V_A} \Rightarrow \int_{\text{initial}}^{\text{finale}} dS_A = \Delta S_A = nR \int_{\text{initial}}^{\text{finale}} \frac{dV_A}{V_A} = nR \ln \frac{V_A + V_B}{V_A} = nR \ln 2 \quad (\text{III.16})$$

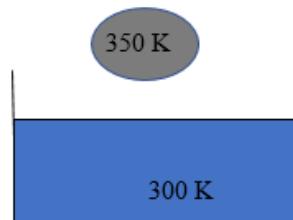
Après le calcul de ΔS_{g} , on utilise la relation d'entropie globale :

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = 2nR \ln 2 \quad (III.17)$$

La relation (III.17) montre que pour un système isolé avec une variation d'entropie totale du système positive, la transformation se fait dans un sens unique (de la gauche vers la droite).

Exemple 2 : une pierre dans l'eau

Quand on met la pierre dans l'eau, le transfert thermique va être de la pierre vers l'eau et pas dans le sens contraire. Le système n'est pas isolé, donc on peut avoir de l'entropie échangée.

**Figure 16**

D'après l'identité de thermodynamique :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Dans cette expérience, on n'a pas} \\ \text{une variation de volume} \end{array} \right) \Leftrightarrow (dV = 0)$$

$$dS = \frac{dU}{T}$$

D'après le deuxième principe de la thermodynamique :

$$\begin{aligned} dS &= \delta S_{\text{échangé}} + \delta S_{\text{crée}} \Rightarrow \delta S_{\text{crée}} = dS - \delta S_{\text{échangé}} \\ &\Rightarrow \delta S_{\text{crée}} = \frac{dU}{T} - \frac{\delta Q}{T_{\text{échange}}} \end{aligned}$$

En appliquant le premier principe de la thermodynamique :

$$\begin{aligned} dU &= \delta W + \delta Q \\ (\text{Dans cette expérience } \delta W = 0) \Rightarrow (dU &= \delta Q = C_{\text{pierre}} dT) \\ \delta S_{\text{crée}} &= \frac{dU}{T} - \frac{\delta Q}{T_{\text{échange}}} = \delta Q \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{échange}}} \right) = C \left(\frac{dT}{T} - \frac{dT}{T_{\text{échange}}} \right) \\ S_{\text{crée}} &= C \left(\ln \frac{T_f}{T_i} - \frac{T_f - T_i}{T_f} \right) \end{aligned}$$

A.N :

$$C_{\text{pierre}} = 4 \text{ kJ/k}, T_i = 300 \text{ K}, T_f = 350 \text{ K} \Rightarrow S_{\text{crée}} = 45 \text{ J/k}$$

Exemple 3 :

On plonge la pierre dans l'eau dont la température égale à 325K puis on la met sous la température 300 k.

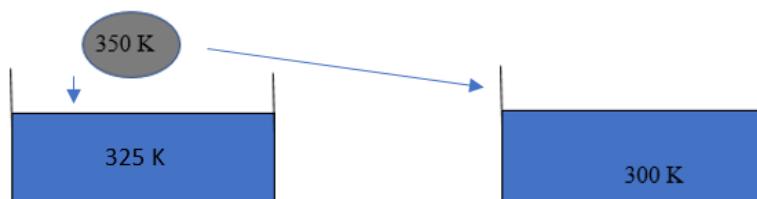


Figure 17

$$\begin{aligned}
 T_i &= 300\text{K}, T_f = 350\text{K}, T_{intermédiaire} = 325\text{K} \\
 S_{crée} &= C_{pierre} \left(\ln \frac{T_{intermédiaire}}{T_i} - \frac{T_{intermédiaire} - T_i}{T_{intermédiaire}} \right) + C \left(\ln \frac{T_f}{T_{intermédiaire}} - \frac{T_f - T_{intermédiaire}}{T_f} \right) \\
 &= C_{pierre} \left(\ln \frac{T_f}{T_i} - \frac{T_{intermédiaire} - T_i}{T_{intermédiaire}} - \frac{T_f - T_{intermédiaire}}{T_f} \right) \\
 &= 23.19 \text{J/K}
 \end{aligned}$$

Dans ces expériences, on a réussi de contrôler l'irréversibilité d'un processus

III.7. Exercices sur le deuxième principe de la thermodynamique

Exercices 1 :

1. Un solide de masse m_1 , de chaleur massique à pression constante C_{P1} à la température T_1 est mis en contact thermique avec un corps de masse m_2 de chaleur massique C_{P2} à la température T_2 . Le système (Σ) formé par l'ensemble des deux corps est isolé.
 - a. Evaluer ΔS_1 et ΔS_2 , variations d'entropie du système (Σ_1) constitué par le premier corps et du système (Σ_2) constitué par le deuxième corps. En déduire ΔS , variation d'entropie du système (Σ). Application numérique :
 $m_1 = 500\text{g}$, $C_{P1} = 900\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $m_2 = 600\text{g}$, $C_{P2} = 380\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$, $T_1 = 27^\circ\text{C}$, $T_2 = 60^\circ\text{C}$
Conclusion
 - b. Examiner le cas où $m_1 = m_2$, $C_{P1} = C_{P2}$
2. Un morceau de glace de masse $m_g = 200\text{g}$, pris à 0°C est plongé dans un récipient contenant 1l d'eau à 18°C . L'ensemble est isolé, la capacité calorifique du récipient est négligeable et la pression est constante.
Quelle est la variation d'entropie du mélange sachant que la glace a entièrement fondu ?
On donne : $C_{Peau} = 4.2 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $L_{glace} = 334 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$
3. Un récipient est divisé en deux compartiments A et B de volumes V_1 et V_2 par une cloison. A contient n_1 moles d'un gaz parfait dans l'état (P_1, V_1) . B contient n_2 moles d'un gaz parfait dans l'état (P_2, V_2) . Les parois du récipient sont indéformables et parfaitement calorifugées. On perce un petit trou dans la cloison. Calculez ΔS , variation d'entropie du mélange de gaz supposé idéal, dans les deux cas suivants :
 - a. La cloison est imperméable à la chaleur ; $T_1 = 27^\circ\text{C}$, $V_1 = 5\text{l}$, $n_1 = 0.2$ mole de H_2 , $T_2 = 600^\circ\text{C}$, $V_2 = 15\text{l}$, $n_2 = 0.5$ mole de O_2
 - b. La cloison est diatherme : $V_1 = 21$, $V_2 = 41$, $n_1 = 0.2$ mole de O_2 , $n_2 = 0.4$ mole de N_2 . Que vaudrait ΔS si les gaz qui diffusent étaient identiques ?

Solution :

1.

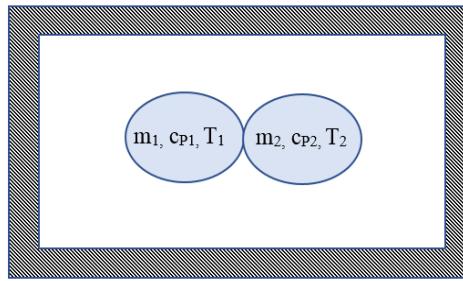


Figure 18

a)

$$(Système isolé) \Leftrightarrow \begin{cases} Q_{\text{Totale}} = Q_1 + Q_2 = 0 \\ S_{\text{échangé du système global}} = 0 \\ \Delta S_{\text{système isolé}} = S_{\text{créé du système global}} \end{cases}$$

D'après l'identité de thermodynamique suivante :

$$dU = TdS - PdV \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV$$

L'entropie globale du système composé des deux solides est comme suit :

$$\begin{aligned} dS_{\text{Totale}} &= dS_1 + dS_2 = \left(\frac{dU_1}{T} + \frac{P}{T}dV_1 \right) + \left(\frac{dU_2}{T} + \frac{P}{T}dV_2 \right) \\ &= (\delta S_{\text{échangé}1} + \delta S_{\text{créé}1}) + (\delta S_{\text{échangé}2} + \delta S_{\text{créé}2}) \end{aligned}$$

(Les deux solides sont indéformables) $\Rightarrow (dV_1 = dV_2 = 0)$

$$dS_{\text{Totale}} = dS_1 + dS_2 = \frac{dU_1}{T} + \frac{dU_2}{T}$$

En appliquant le premier principe de la thermodynamique :

$$(dV_1 = dV_2 = 0 \Rightarrow \delta W_1 = \delta W_2 = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} dU_1 = \delta Q_1 = m_1 C_{p1} dT \\ dU_2 = \delta Q_2 = m_2 C_{p2} dT \end{cases}$$

D'où :

$$\Delta S_{\text{du système Totale}} = \int_{T_1}^{T_E} \frac{\delta Q_1}{T} + \int_{T_2}^{T_E} \frac{\delta Q_2}{T} = \int_{T_1}^{T_E} \frac{m_1 C_{p1} dT}{T} + \int_{T_2}^{T_E} \frac{m_2 C_{p2} dT}{T} = m_1 C_{p1} \ln \frac{T_E}{T_1} + m_2 C_{p2} \ln \frac{T_E}{T_2}$$

Le calcul de la température d'équilibre T_E :

$$m_1 C_{p1} (T_E - T_1) + m_2 C_{p2} (T_E - T_2) = 0$$

$$T_E = \frac{m_1 C_{p1} T_1 + m_2 C_{p2} T_2}{m_1 C_{p1} + m_2 C_{p2}}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} dS_{\text{système isolé}} &= \delta S_{\text{échangé du système}} + \delta S_{\text{créé du système}} \\ &= \underbrace{\left(\delta S_{\text{échangé 1}} + \delta S_{\text{échangé 2}} \right)}_{=0} + \left(\delta S_{\text{créé1}} + \delta S_{\text{créé2}} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_{\text{échangé du système isolé}} = 0 \Rightarrow S_{\text{créé du système}} = \Delta S_{\text{Totale du système}} = m_1 C_{p1} \ln \frac{T_E}{T_1} + m_2 C_{p2} \ln \frac{T_E}{T_2} \neq 0}$$

$$\left(S_{\text{créé du système}} \neq 0 \right) \Leftrightarrow (\text{Transformation irréversible})$$

b) Si $m_1 = m_2 = m$ et $C_{p1} = C_{p2} = C_p$:

$$T_E = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S_{\text{système}} = m C_p \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2}}$$

2. Température d'équilibre :

$$m_e C_{pe} (T_e - T_1) + m_g L_{\text{fusion}} + m_g C_{pe} (T_e - T_{\text{fusion}}) = 0$$

$$T_e = \frac{m_e C_{pe} T_1 + m_g C_{pe} T_{\text{fusion}} - m_g L_{\text{fusion}}}{C_{pe} (m_e + m_g)}$$

$$\Delta S_{\text{fusion}} = \frac{m_g L_{\text{fusion}}}{T_{\text{fusion}}}$$

Entropie d'échauffement de la température de fusion jusqu'à la température d'équilibre :

$$\Delta S_{\text{Echauffement}} = m_g C_{pe} \ln \frac{T_{\text{équilibre}}}{T_{\text{fusion}}}$$

Entropie totale :

$$\Delta S = \frac{m_g L_{\text{fusion}}}{T_{\text{fusion}}} + m_g C_{pe} \ln \frac{T_{\text{équilibre}}}{T_{\text{fusion}}} + m_e C_{pe} \ln \frac{T_e}{T_1}$$

3. Système isolé : $\Delta U = 0$

Température des gaz à l'équilibre :

$$n_1 C_{v1} (T_e - T_1) + n_2 C_{v2} (T_e - T_2) = 0$$

$$T_e = \frac{n_1 C_{v1} T_1 + n_2 C_{v2} T_2}{n_1 C_{v1} + n_2 C_{v2}}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$dS_1 = \frac{\delta Q}{T} = n_1 C_{V1} \frac{dT}{T} + 1 \frac{dV}{T} = n_1 C_{V1} \frac{dT}{T} + p \frac{dV}{T} = n_1 C_{V1} \frac{dT}{T} + n_1 R \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_e} n_1 C_{V1} \frac{dT}{T} + n_1 R \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{dV}{V} = n_1 C_{V1} \ln \frac{T_e}{T_1} + n_1 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}$$

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_e} n_2 C_{V2} \frac{dT}{T} + n_2 R \int_{V_2}^{V_1+V_2} \frac{dV}{V} = n_2 C_{V2} \ln \frac{T_e}{T_2} + n_2 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}$$

Avec:

$$C_{V1} = \frac{3R}{2} \quad \text{et} \quad C_{V2} = \frac{5R}{2}$$

$$C_{P1} = C_{P2} \quad \text{et} \quad n_1 = n_2 \quad T_e = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

b) Paroi diatherme : Une paroi séparant deux milieux est dite diathermane lorsqu'elle permet l'échange de chaleur entre ces deux milieux $T_{i1} = T_{i2} = T_0$

$$\begin{cases} P_{i1} V_1 = n_1 R T_{i1} \\ P_{i2} V_2 = n_2 R T_{i2} \end{cases} \quad \text{avec } T_{i1} = T_{i2} = T_0, \quad V_2 = 2V_1, \quad n_2 = 2n_1 \quad \text{d'où } P_{i1} = P_{i2} = P_0$$

$$n_1 C_{V1} (T_e - T_{i1}) + n_2 C_{V2} (T_e - T_{i2}) = 0 \quad \text{avec } C_{V1} = C_{V2} = \frac{5R}{2}$$

$$T_e = T_0$$

$$\Delta S_1 = \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{dV}{V} = n_1 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}$$

$$\Delta S_2 = n_2 R \int_{V_2}^{V_1+V_2} \frac{dV}{V} = n_2 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}$$

$$\Delta S = n_1 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + n_2 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}$$

Si les gaz étaient identiques, on aurait dû avoir $\Delta S = 0$ où le système était en équilibre thermodynamique (même pression, même température et même concentration dans chacun des deux compartiments).

IV. Rappel sur les machines thermiques :

Une machine thermodynamique est un système fonctionnant grâce à un fluide auquel on fait subir des transformations cycliques au cours desquelles il y a échange d'Energie avec le milieu extérieur. Le milieu extérieur est constitué de n sources de chaleurs (idéalement n thermostats) échangeant de la chaleur avec le fluide, et d'un système mécanique échangeant du travail avec le fluide.

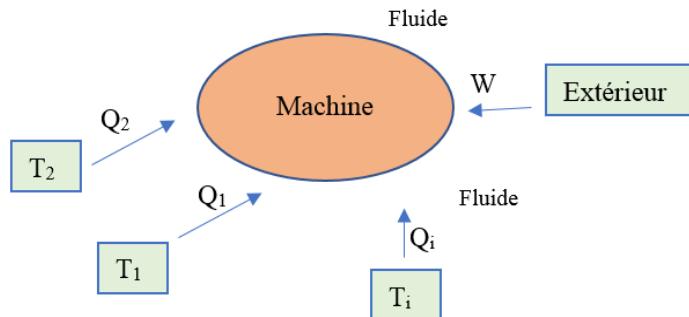


Figure 19

$(W > 0) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{la machine reçoit du travail} \\ \text{de l'extérieur} \end{array} \right) \Leftrightarrow (\text{Système récepteur})$

$(W < 0) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{la machine donne du travail} \\ \text{à l'extérieur} \end{array} \right) \Leftrightarrow (\text{Moteur})$

IV.1. Grandesurs thermodynamiques :

Mettre en équation le fonctionnement d'une machine :

$$\begin{aligned} (\text{Dans le cas d'un cycle}) &\Leftrightarrow \begin{cases} U_i = U_f \Rightarrow \Delta U_{\text{cycle}} = 0 \\ S_i = S_f \Rightarrow \Delta S_{\text{cycle}} = 0 \end{cases} \\ \Delta U &= W + \sum_i Q_i \\ \Delta S &= S_{\text{échangé}} + S_{\text{crée}} \\ S_{\text{échangé}} &= \sum \frac{Q_i}{T_i} \end{aligned}$$

IV.2. Machine thermique monotherme :

Ce moteur se caractérise par un seul thermostat ($i=1$). La mise en équation de cette machine est comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \Rightarrow Q + W = 0 \Rightarrow Q = -W \\ \Delta S &= 0 \Rightarrow S_{\text{échangé}} + S_{\text{crée}} = 0 \Rightarrow S_{\text{échangé}} = -S_{\text{crée}}, S_{\text{crée}} > 0 \\ S_{\text{échangé}} &= \frac{Q}{T} \Rightarrow S_{\text{crée}} = -\frac{Q}{T} \Rightarrow \boxed{\frac{Q}{T} \leq 0 \Rightarrow W \geq 0} \end{aligned}$$

$$(W \geq 0) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Le travail se fait de l'extérieur} \\ \text{vers la machine} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{La machine monotherme est} \\ \text{un système récepteur} \end{array} \right)$$

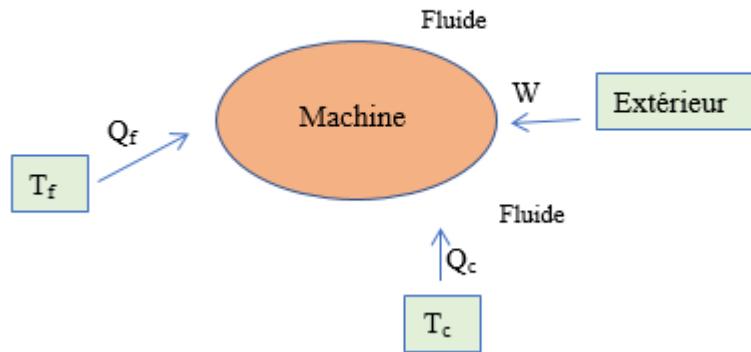
IV.3. Machine thermique d'isotherme :

Figure 20

a) Inégalité de Clausus :

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q_f + W + Q_c = 0 \Rightarrow Q_f + Q_c = -W$$

$$\Delta S = 0 \Rightarrow S_{\text{échangé}} \leq 0 \Rightarrow \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0$$

$$\boxed{\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0 \Rightarrow \text{Inégalité de Clausus}}$$

b) Diagramme de Ravau

$$W = 0 \Rightarrow Q_f + Q_c = 0 \Rightarrow Q_f = -Q_c$$

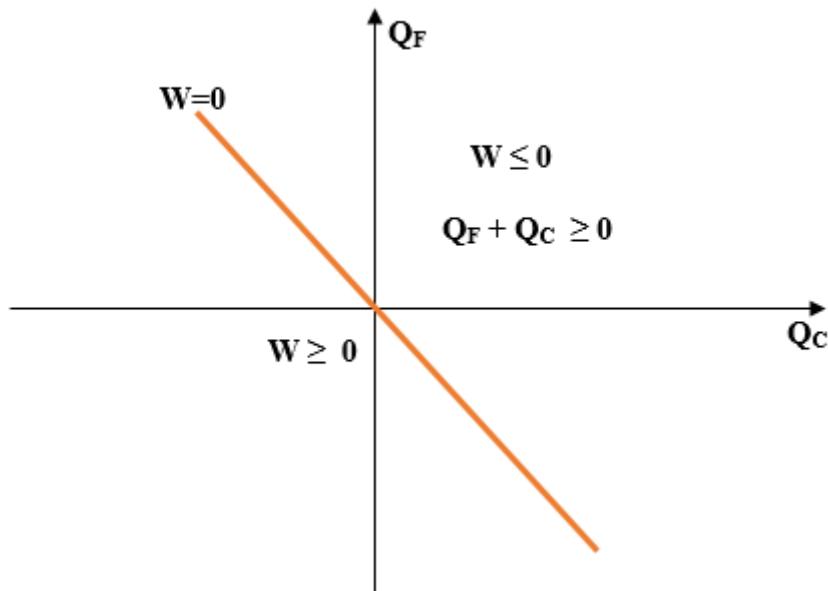


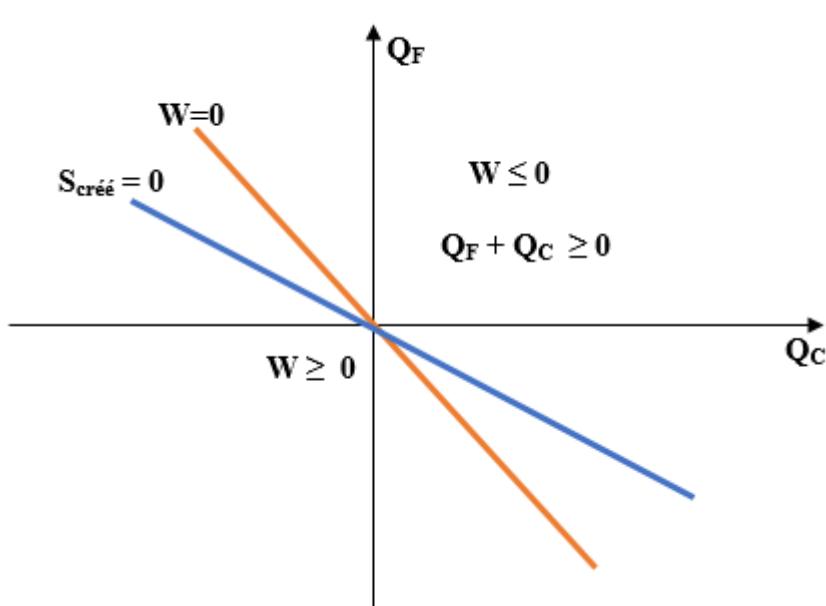
Figure 21

$$\left(\begin{array}{l} \text{Pour que la machine} \\ \text{puisse exister} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Il faut que l'entropie créé par} \\ \text{le cycle soit positif} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0 \right)$$

$$(\text{Système réversible}) \Leftrightarrow (\text{Entropie créé est nul}) \Leftrightarrow \left(\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0 \right)$$

$$\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0 \Rightarrow \frac{Q_f}{T_f} = -\frac{Q_c}{T_c} \Rightarrow Q_f = -\frac{T_f}{T_c} Q_c$$

Comme $\frac{T_f}{T_c} < 1$, la position du graphe correspondant à $\Delta S_{\text{créé}} = 0$ dans le diagramme de Ravau est comme suit :



La pente de la droite $\Delta S_{\text{créé}} = 0$ est plus douce que celle associée à $W = 0$.

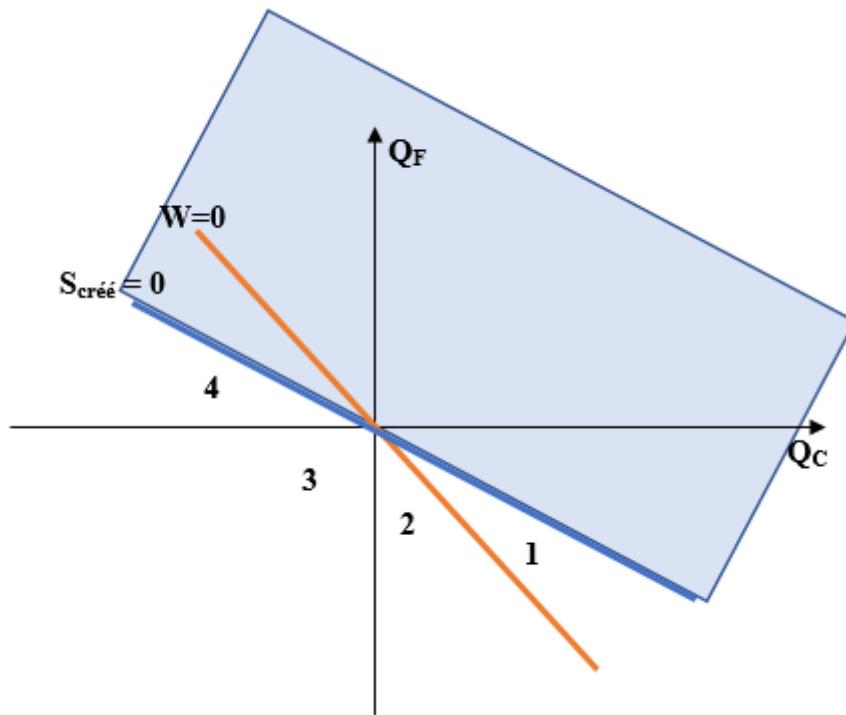


Figure 22

Le domaine coloré sur la figure 22 représente le domaine où $\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} > 0 \Rightarrow S_{\text{créé}} < 0$.

Dans ce cas, physiquement, ce domaine n'existe pas. Il reste les quatre domaines numérotés à discuter.

Zone 1 : $W < 0, Q_F < 0, Q_C > 0$

Dans ce cas, cette machine prend de l'énergie de la source chaude et elle la cède à la source froide en fournissant au même temps du travail au milieu extérieur. Ce cas correspond parfaitement aux moteurs à combustion interne et externe et toutes les machines qui fournissent du travail au milieu extérieur.

Zone 2 : $W > 0, Q_F < 0, Q_C > 0$

La machine consomme du travail en prenant de la chaleur à la source chaude et en en cédant à la source froide. Ces machines sont peu intéressantes car on peut obtenir la même chose sans consommer de travail.

Zone 3 : $W > 0, Q_F < 0, Q_C < 0$

La machine consomme du travail et cède de l'énergie aux deux sources chaude et froide. C'est le cas d'un radiateur ou une résistance. Donc, on n'a pas besoin d'une machine pour faire ça. Ça n'a aucun intérêt d'un point de vue thermodynamique.

Zone 4 : $W > 0, Q_F > 0, Q_C < 0$

La machine consomme du travail pour faire un transfert d'énergie du thermostat froid vers le thermostat chaud, ce qui est contre la nature. Ce cas correspond parfaitement à un réfrigérateur ou à un climatiseur.

V.4. Théorème de Carnot

Pour une machine diatherme, rendement et efficacité théoriques ne dépendent que de la température des thermostats.

a) Les moteurs

Les moteurs sont caractérisés par un rendement η donné par :

$$\eta = \frac{\text{énergie recherchée}}{\text{énergie payée}} = \frac{-W}{Q_c} , \quad 0 < \eta < 1$$

$$\eta = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

D'après l'égalité de Clausus :

$$\frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c} \Rightarrow \eta \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

b) Les récepteurs

Les récepteurs (réfrigérateur, climatiseur et pompe à chaleur) sont caractérisés par l'efficacité e (coefficient de performance) qui peut être supérieur à 1.

$$e = \frac{\text{énergie recherchée}}{\text{énergie payée}}, \quad e > 0$$

Climatisation :

$$e = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{-Q_f - Q_c} = \frac{1}{-1 - \frac{Q_c}{Q_f}}$$

$$\frac{Q_c}{Q_f} \leq -\frac{T_c}{T_f} \Rightarrow \boxed{e = \frac{1}{\frac{T_c}{T_f} - 1}}$$

Pompe à chaleur :

$$e = \frac{-Q_C}{W} = \frac{Q_C}{Q_F + Q_C} = \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_C}}$$

$$\frac{Q_C}{Q_F} \leq -\frac{T_C}{T_F} \Rightarrow \boxed{e = \frac{1}{1 - \frac{T_C}{T_F}}}$$

V.4. Bilan énergétique

Les machines fonctionnent par cycle. En appliquant le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = 0$$

En appliquant le deuxième principe de la thermodynamique :

$$\Delta S_{\text{cycle}} = S_{\substack{\text{échangée} \\ \text{avec l'extérieur}}} + S_{\text{crée}} = 0$$

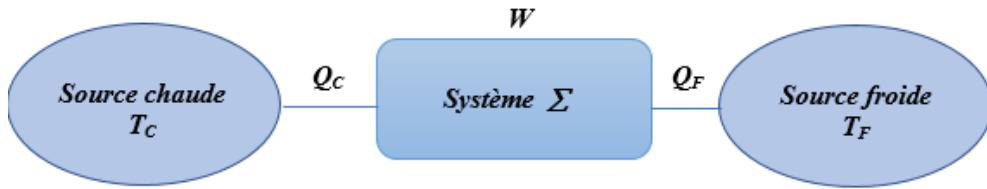


Figure 23

$$\Delta S_{\text{cycle}} = \frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} + S_{\text{crée}} = 0$$

Si la transformation est réversible :

$$S_{\text{crée}} = 0 \Rightarrow \Delta S_{\text{cycle}} = \frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} = 0$$

Pour un système réel :

$$S_{\text{crée}} > 0 \Rightarrow \frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} < 0$$

Diagramme de Clapeyron (P ,V) :

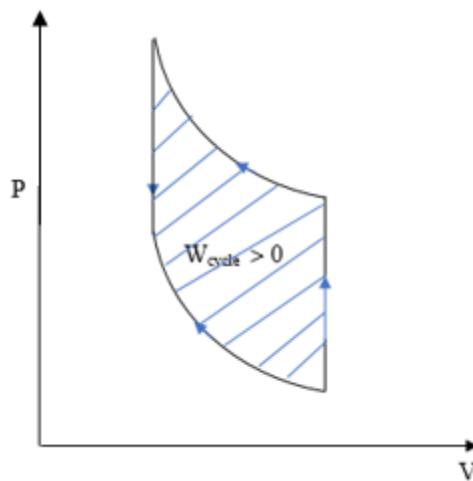


Figure 24

Le cycle présenté dans la figure 24 est décrit dans le sens trigonométrique $\Rightarrow w_{cycle} > 0$, donc c'est un récepteur

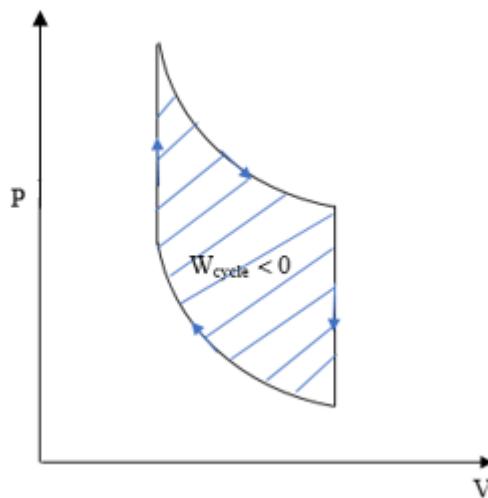


Figure 25

Le sens du cycle de la figure 25 est contraire au sens trigonométrique $\Rightarrow w_{cycle} < 0$. Dans ce cas, le système fournit un travail à l'extérieur donc il s'agit d'un moteur

V.5. Exercices sur les machines thermiques :

Exercices 1 :

Au cours d'un cycle, une machine thermique échange :

- Une quantité de chaleur Q_2 avec une source chaude à la température $T_2 = 600^\circ\text{C}$.
- Une quantité de chaleur Q_1 avec une source froide à la température T_1
- Un travail W avec le milieu extérieur.

Les cycles suivants sont -ils possibles ?

- a. $Q_1 = -60 \text{ kJ}$; $Q_2 = -150 \text{ kJ}$; $W = -210 \text{ kJ}$; $T_2 = 1200\text{K}$; $T_1 = 300\text{K}$
- b. $Q_1 = -60 \text{ kJ}$; $Q_2 = 150 \text{ kJ}$; $W = -90 \text{ kJ}$; $T_2 = 650\text{K}$; $T_1 = 300\text{K}$
- c. $Q_1 = 150 \text{ kJ}$; $Q_2 = -180 \text{ kJ}$; $W = 30 \text{ kJ}$; $T_2 = 27^\circ\text{C}$; $T_1 = -20^\circ\text{C}$

2. Une pompe à chaleur fonctionnant entre $T_1 = -5^\circ\text{C}$ et $T_2 = 20^\circ\text{C}$ peut -elle avoir un coefficient d'efficacité $\eta = 15$?

Solution :

1. On doit vérifier :

Le premier principe pour un cycle : $(\Delta U = 0) \Leftrightarrow (W + Q_1 + Q_2 = 0)$

Le deuxième principe : $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$

- a. $(Q_1 + W + Q_2 = -60 - 150 - 210 \neq 0) \Leftrightarrow (\text{Le premier principe n'est pas vérifié})$
- b. $\left(\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.43 > 0 \right) \Leftrightarrow (\text{Le deuxième principe n'est pas vérifié})$
- c. $\left(\begin{array}{l} \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = -0.21 \leq 0 \\ W + Q_1 + Q_2 = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Les deux principes sont vérifiés et qui correspond} \\ \text{le cas d'une machine frigorifique} \end{array} \right)$

2. Le rendement η doit être inférieur ou égale à η_{Carnot}

$$\eta_{\text{Carnot}} = \left| \frac{Q_2}{W} \right| = \frac{-Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} = 11.72 \neq 15$$

Exercices 2 :

1. Dans une machine frigorifique, le système que l'on assimilera à un gaz parfait dont le rapport est constant, décrit un cycle de Carnot. Au cours d'un cycle le gaz échange une quantité de chaleur Q_1 avec la source chaude à la température $T_1 = 27^\circ\text{C}$, une quantité de chaleur Q_2 avec la source froide à la température $T_2 = 0^\circ\text{C}$ et un travail W avec le milieu extérieur.

a- Représenter le cycle dans le diagramme (P,V) puis (T,S).

b- Exprimer en fonction de T_1 , T_2 et de Q_2 le travail théorique W reçu par le gaz au cours d'un cycle. En déduire qu'une machine frigorifique ne permet pas d'atteindre le zéro absolu.

2. Du fait de l'irréversibilité de la machine, le rapport $\left| \frac{Q_2}{Q_1} \right|$ est égal à $0.8 \frac{T_2}{T_1}$.

- a- Exprimer W' , travail reçu, en fonction de T_1 , T_2 et de Q_2 .
- b- Quel travail faut-il fournir pour congeler 0.5 l d'eau prise à 0°C ? (on donne la chaleur latente de congélation de l'eau: $L=334 \text{ kJ/kg}$).
3. Exprimer en fonction de T_1 et T_2 puis calculer le coefficient d'efficacité de la machine dans les deux cas. Conclusion ?
 4. Exprimer en fonction de Q et T la variation d'entropie au cours d'un cycle du système formé par le gaz et les deux sources de chaleur (dans les deux cas). Conclusion.

Solution :

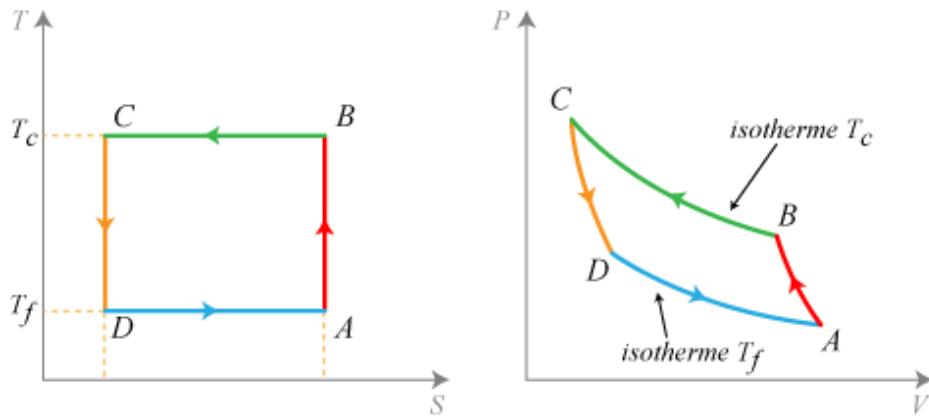
a) Machine frigorifique de Carnot :

AB : compression adiabatique (isentropique) amenant le système de T_1 à T_2 .

BC: compression isotherme ($T = T_2$), le système reçoit la quantité de chaleur $Q_2 > 0$ de la source chaude.

CD : détente adiabatique (isentropique) ramenant le système de T_2 à T_1

DA : détente isotherme ($T = T_1$), le système reçoit la quantité de chaleur $Q_1 < 0$ de la source froide.



b) Le travail W

$$(\text{Machine thermique}) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta U_{\text{Cycle}} = 0 \\ \Delta S_{\text{Cycle}} = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{machine frigorifique} \\ \text{de Carnot} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(S_{\text{créé}} = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} W + Q_1 + Q_2 = 0 \\ S_{\text{échangé}} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} W = - (Q_1 + Q_2) \\ \frac{Q_1}{Q_2} = - \frac{T_1}{T_2} \end{cases} \Leftrightarrow W = - \left(-\frac{T_1}{T_2} Q_2 + Q_2 \right) = Q_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right)$$

$$W = Q_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right)$$

2. Du fait de l'irréversibilité de la machine :

a)

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -0.8 \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{T_1}{0.8 \times T_2} Q_2 \Rightarrow W' = Q_2 \left(\frac{T_1}{0.8 \times T_2} - 1 \right)$$

b)

$$Q_2 = \rho V L_{\text{fusion}} \Rightarrow W' = \rho V L_{\text{fusion}} \left(\frac{T_1}{0.8 \times T_2} - 1 \right) \text{ avec } T_1 = 300 \text{ K et } T_2 = 273 \text{ K}$$

3. Le calcul de l'efficacité de la machine :

$$e_{\text{rèversible}} = \frac{Q_2}{W} \Rightarrow e = \frac{Q_2}{Q_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right)} = \frac{1}{\left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right)}$$

$$e_{\text{rèversible}} = \frac{1}{\left(\frac{300}{273} - 1 \right)} = 10$$

$$e = \frac{Q_2}{W'} \Rightarrow e = \frac{Q_2}{Q_2 \left(\frac{T_1}{0.8 \times T_2} - 1 \right)} = \frac{1}{\left(\frac{T_1}{0.8 \times T_2} - 1 \right)}$$

$$e_{\text{irrégible}} = \frac{1}{\left(\frac{300}{0.8 \times 273} - 1 \right)} = 2.67$$

Conclusion

$$e_{\text{irrégible}} < e_{\text{rèversible}}$$

Exercices 3:

Dans un moteur thermique le système que l'on assimilera à n moles de gaz parfait dont le rapport γ est constant décrit le cycle d'Ericsson suivant :

- Transformation isotherme AB à la température T_2 de $P_A = P_1$ jusqu'à $P_B = P_2$, $P_2 > P_1$
- Transformation isobare BC de la température $T_B = T_2$ à $T_C = T_1$; $T_1 > T_2$

- Transformation isotherme CD jusqu'à $P_D = P_1$
 - Transformation isobare DA
1. Représenter le cycle dans le diagramme (P, V) puis dans le diagramme (T, S) en précisant le sens de parcours.
 2. Evaluer le travail échangé avec le milieu extérieur. Montrer qu'on le mettre sous la forme :

$$W = -nRT_1(1 - T_2/T_1)\ln(P_2/P_1)$$
 3. Evaluer le rendement du moteur
 4. En supposant que le moteur est muni d'un régénérateur si bien que l'énergie nécessaire au réchauffage isobare est entièrement récupérée au cours du refroidissement isobare, calculer les quantités de chaleur $Q_1 = Q_{CD}$ et $Q_2 = Q_{AB}$ échangées avec les sources de chaleur. En déduire le rendement du moteur et le comparer au rendement de Carnot

Solution :

1.

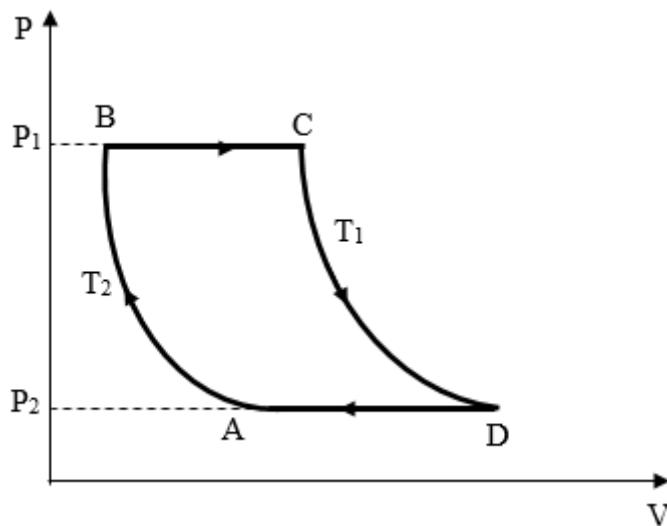
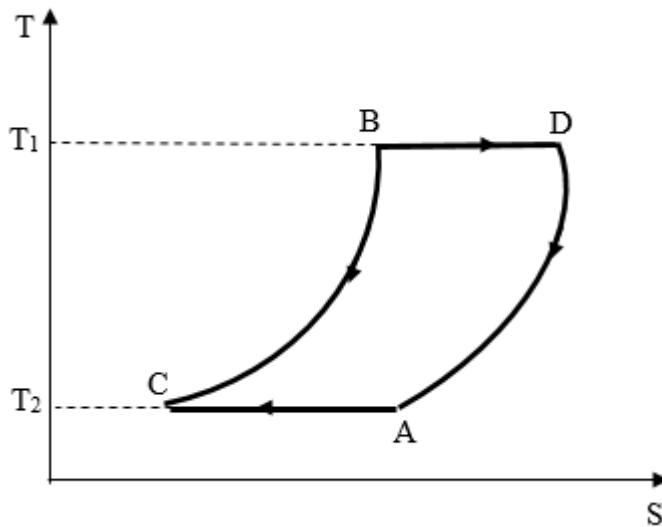


Diagramme de Clapeyron (P,T)



$$dS = \frac{\delta Q}{T} = nC_p \frac{dT}{T} + h \frac{dP}{T}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Transformation isobare} \\ P = C^{\text{te}} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(dS = \frac{\delta Q}{T} = nC_p \frac{dT}{T} \Rightarrow S - S_0 = nC_p \ln \frac{T}{T_0} \right)$$

$$T = T_0 e^{-S_0/nC_p} e^{S/nC_p} \Rightarrow \boxed{T = C^{\text{te}} e^{S/nC_p}}$$

On conclut que l'allure de l'isobare dans le diagramme (T, S) est une exponentielle croissante.

2.Travail W :

Compression isotherme AB : $T = \text{Cte} = T_2$

$$\delta W = -PdV = -nRT_2 \frac{dV}{V} \Rightarrow W_{A \rightarrow B} = -nRT_2 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$P_A V_A = P_B V_B = nRT_2 \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{P_A}{P_B} = \frac{P_1}{P_2} \Leftrightarrow \boxed{W_{A \rightarrow B} = nRT_2 \ln \frac{P_2}{P_1}}$$

Echauffement isobare BC : $P = P_2$

$$\delta W = -PdV = -P_2 dV \Rightarrow W_{B \rightarrow C} = -P_2 \int_{V_B}^{V_C} dV = P_2 (V_B - V_C)$$

$$V_B = \frac{nRT_2}{P_2} \text{ et } V_C = \frac{nRT_1}{P_2} \Rightarrow \boxed{W_{B \rightarrow C} = nR(T_2 - T_1)}$$

Détente isotherme CD : $T = T_1$

De même que pour W_{AB} :

$$W_{C \rightarrow D} = nRT_1 \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Refroidissement isobare DA : $P = P_1$

De même que pour W_{BC} :

$$W_{D \rightarrow A} = nR(T_1 - T_2)$$

Le travail du cycle :

$$\begin{aligned} W_{\text{Total}} &= W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A} = nRT_2 \ln \frac{P_2}{P_1} + nR(T_2 - T_1) + nRT_1 \ln \frac{P_1}{P_2} + nR(T_1 - T_2) \\ W_{\text{Total}} &= -nRT_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \ln \frac{P_2}{P_1} \end{aligned}$$

2.

D'après la définition du rendement d'un moteur :

$$\eta = \frac{-W}{Q_1}$$

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = W + Q_1 + Q_2 = 0 \Leftrightarrow W = -(Q_1 + Q_2)$$

$$\eta = \frac{-W}{Q_1} = \frac{-(Q_1 + Q_2)}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

3.

Pour un gaz parfait :

$$dU = nC_V dT$$

La quantité de chaleur échangée avec la source chaude :

$$T = \text{Cte} \Rightarrow dU = 0 \Rightarrow Q = -W \Rightarrow Q_{CD} = Q_1 = -W_{CD} = -nRT_1 \ln \frac{P_1}{P_2}$$

$$Q_{CD} = Q_1 = -nRT_1 \ln \frac{P_1}{P_2}$$

La quantité de chaleur échangée avec la source froide :

$$Q_{AB} = Q_2 = -W_{AB} = -nRT_2 \ln \frac{P_2}{P_1}$$

Le calcul du rendement :

$$\eta = \frac{-W}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{-nRT_2 \ln \frac{P_2}{P_1}}{-nRT_1 \ln \frac{P_1}{P_2}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

Le rendement dans le cas d'un cycle de Carnot :

$$\eta = \frac{-W}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

D'après l'inégalité de Clausius :

$$\left(\begin{array}{l} \text{Transformation Rèversible} \\ S_{\text{Crèè}} = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow (\Delta S_{\text{Cycle}} = 0 \Rightarrow S_{\text{échange}} = 0)$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}} \Rightarrow \boxed{\eta_{\text{carnot}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

Références

1. *C. COULON, S. LE BOITEUX et P. SEGONDS THERMODYNAMIQUE PHYSIQUE Cours et exercices avec solutions Edition DUNOD, 1997*
2. *H.B. Callen THERMODYNAMICS, Cours, Edition John Wiley and Sons, 1960*
3. *R. CLERAC, C. COULON, P. GOYER, S. LE BOITEUX et C. RIVENC THERMODYNAMICS, Cours et travaux dirigés de thermodynamique Université Bordeaux I, 2003*
4. *O. PERROT, COURS DE THERMODYNAMIQUE I.U.T. de Saint-Omer Dunkerque, 2011*
5. *C. LHUILLIER, J. ROUS, Introduction à la thermodynamique, Edition Dunod, 1994*

Annexe 1

Sujet d'examen et solution

USHB-Faculté de physique

Jeudi 17/05/2018

Thermodynamique (L2)**Interrogation 2****Exercice 1 :**

On considère 1 kg d'air (considéré comme un gaz parfait), subissant un cycle de Carnot ABCDA : AB et CD isotherme et BC et DA adiabatiques réversibles. A(P_A, T_A), B(P_B, T_B), C(P_C, T_C), D(P_D, T_D).

La température au point A est $T_A = 300\text{K}$ et son volume est $V_A = 0.86 \text{ m}^3$. les pressions aux points A, B et C sont respectivement $P_A = 1 \text{ bar}$, $P_B = 3 \text{ bar}$ et $P_C = 9 \text{ bar}$.

On donne $C_p = 10^3 \text{ JK}^{-1} \text{ kg}$ et $\gamma = 7/5$.

1-Remplir le tableau suivant :

Points	Pression P	Volume	Température
A			
B			
C			
D			

2- Représenter le cycle dans les diagrammes (P, V) et (T, S)

3-Calculer le rendement thermodynamique du cycle de deux manières :

- a- En faisant le bilan thermique du cycle
- b- A partir des températures extrêmes du cycle

Corrigé**Exercice 2 :**

Points	Pression P (Pa)	Volume V(m ³)	Température T(K)
A	10^5	0.86	300
B	3×10^5	0.29	300
C	9×10^5	0.13	410
D	3×10^5	0.39	413

Transformation isotherme AB : $T_A = T_B = 300 \text{ K}$

$$P_A V_A = P_B V_B \Rightarrow V_B = \frac{P_A V_A}{P_B}$$

Transformation adiabatique BC :

$$\begin{aligned} P_B V_B^\gamma &= P_C V_C^\gamma \Rightarrow V_C = V_B \left(\frac{P_B}{P_C} \right)^{1/\gamma} \\ T_B V_B^{\gamma-1} &= T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1} \end{aligned}$$

Transformation isotherme CD :

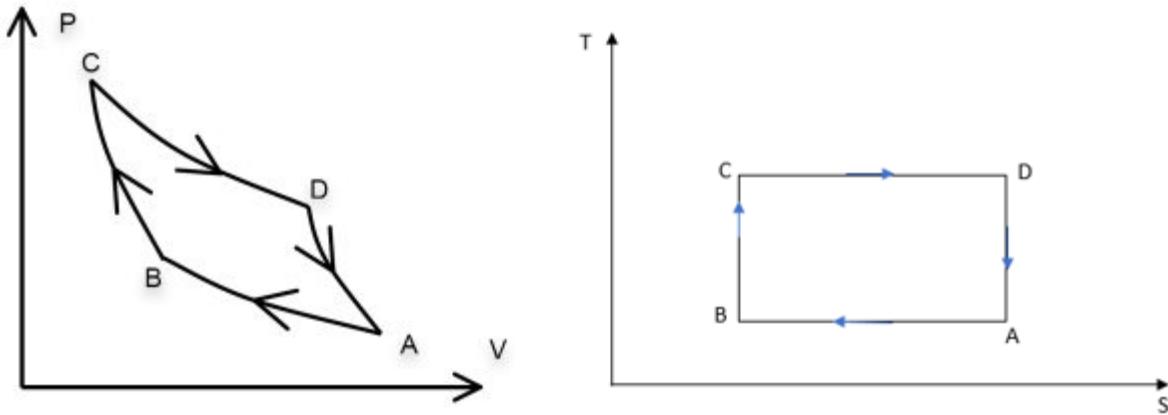
$$T_C = T_D \Rightarrow T_D = 413.53 \text{ K}$$

Transformation adiabatique DA :

$$T_D V_D^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \Rightarrow V_D = V_A \left(\frac{T_A}{T_D} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Transformation isotherme CD :

$$P_C V_C = P_D V_D \Rightarrow P_D = \frac{P_C V_C}{V_D}$$



3) Rendement à partir du bilan thermique :

$$\eta = \left| \frac{W}{Q_1} \right| = - \frac{W}{Q_1}$$

Appliquant le premier principe pour un cycle :

$$\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

Avec $Q_1 = Q_{CD}$ et $Q_2 = Q_{AB}$, $T_2 = T_{AB} = 300 \text{ K}$, $T_1 = T_{CD} = 413 \text{ K}$

Transformation isotherme AB : $dU = \delta W + \delta Q = nC_V dT = 0$

$$Q_{AB} = -W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} P dV = \int_{V_A}^{V_B} nRT_2 \frac{dV}{V}$$

$$Q_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

De même sur l'isotherme CD :

$$Q_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}$$

$$\eta = 1 + \frac{T_2}{T_1} \frac{\ln \frac{V_B}{V_A}}{\ln \frac{V_D}{V_C}} = 0.28$$

b) A partir des températures, pour un cycle de Carnot $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$$\eta = 1 - \frac{300}{413} = 0.27$$

L₂ Licence Physique
Examen de Thermodynamique

Exercice 1

On fait subir à une mole de gaz parfait les transformations réversibles suivante :

A : état (1) ----- état (2) : compression adiabatique.

B : état (2) ----- état (3) : dilatation isobare.

C : état (1) ----- état (2) : détente adiabatique.

D : état (1) ----- état (2) : refroidissement isochore.

On définit $a = \frac{V_1}{V_2}$ et $b = \frac{V_4}{V_3}$

1/ Représenter sommairement le cycle sur un diagramme de Clapeyron

2/Donner les expressions de la pression, du volume et de la température des états (2), (3) et (4) en fonction de P_1 , V_1 , T_1 , a et b et calculer numériquement ces valeurs.

3/Calculer les travaux et quantités de chaleur échangés par le gaz au cours des 4 transformations.

Que passe-t-il si $b=a$?

4/Calculer le rendement de ce cycle et comparer au rendement du cycle de Carnot fonctionnant entre T_1 et T_3 .

5/Calculer la variation d'entropie pour chaque transformation. En déduire cette variation pour tout le cycle.

Données numérique : $R = 8.314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, $P_1 = 1.0 \text{ bar}$, $a = 9$, $b = 3$, $\gamma = 1.4$

Exercice 2

I-Au cours d'une transformation élémentaire réversible, un système (Σ) reçoit une quantité de chaleur :

1-Donner la signification de C_v et de 1

2- A partir des équation des deux principes, montrer que 1 s'exprime par : $1 = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v$

3- Construire la fonction $\psi(T, V)$ transformée de Legendre de la fonction $U(S, V)$

Quelle est cette nouvelle fonction ? puis donner sa forme différentielle. En déduire les relations de Maxwell correspondantes.

II-On considère une mole de gaz de Van der Waals d'équation d'état :

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

1-Donner l en fonction de P et V, puis montrer que C_v ne dépend pas de V.

2-On donne $C_v = \frac{5}{2} R$

- a. Donner les expressions de l'énergie interne $U(T, V)$ et de l'entropie $S(T, V)$ qui correspondent à ce gaz.
- b. On fait subir à une mole de ce gaz une détente de Joule-Gay Lussac (détente dans le vide) de l'état $(P_1, V_1, T_1 = 293K)$ à l'état (P_2, V_2, T_2) avec $V_2 = 10V_1$.

Calculer T_2 .

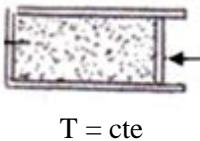
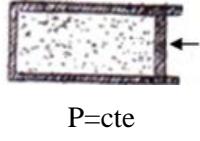
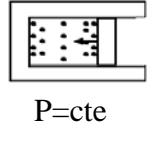
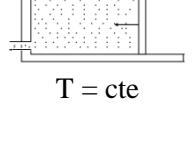
A.N : $V_1 = 2.51$, $a = 0.14 \text{ J.m}^3.\text{mol}^{-2}$, $b = 3.2 \times 10^5 \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$, $R = 8.314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Annexe 2

Fonctions d'état usuelles en thermodynamique

- L'énergie interne : U exprimée en J (joule).
- L'enthalpie : $H = U + pV$ exprimée en J.
- L'entropie : S exprimée en $J.K^{-1}$.
- L'énergie libre : $F = U - TS$ exprimée en J.
- L'enthalpie libre : $G = H - TS$ exprimée en J.

Notion de système thermodynamique

	Système	Caractéristiques (isolé, ouvert, fermé)	Transfert (masse, chaleur, travail)	Fonction
(Σ_1)		• Isolé	• pas de transfert de masse • pas de transfert de chaleur • sans travail	$\Delta U=0$
(Σ_2)		• Fermé	• pas de transfert de masse • Transfert de chaleur • sans travail	$\Delta U = (\Delta Q)_V$
(Σ_3)		• Fermé	• pas de transfert de masse • Transfert de chaleur • avec travail	$\Delta F = (\Delta W)_T$
(Σ_4)		• Fermé • adiabatique	• pas de transfert de masse • pas de transfert de chaleur • avec travail	$\Delta U = (\Delta W)_{Q=0}$
(Σ_5)		• Fermé	• pas de transfert de masse • transfert de chaleur • avec travail	$\Delta H = (\Delta Q)_P$
(Σ_6)		• Ouvert'	• transfert de masse • transfert de chaleur • avec travail	$\Delta G = (\Delta W^*)_T$

Variables intensives et extensives

Grandeur	extensive	Intensive	Function d'état
Capacité calorifique C_P	+		+
Le travail W	+		
Enthalpie libre G	+		
Chaleur latent de changement de phase L		+	+
Entropie	+		+
Volume	+		
Pression		+	
Température		+	