

P 13

Électrostatique

13.1 Compétences du chapitre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Loi de Coulomb. Champ électrostatique. Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles. Principe de superposition.	<ul style="list-style-type: none"> • Exprimer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges. • Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.
Distributions continues de charges : volumique, surfacique, linéique.	<ul style="list-style-type: none"> • Décomposer une distribution en des distributions plus simples dans le but de calculer un champ électrostatique par superposition. • Choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée. Évaluer la charge totale d'une distribution continue dans des situations à géométries simples.
Symétries et invariances du champ électrostatique.	<ul style="list-style-type: none"> • Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges. • Identifier les invariances d'une distribution de charges. • Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique créé.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Circulation du champ électrostatique. Notion de potentiel électrostatique. Opérateur gradient.	<ul style="list-style-type: none"> • Relier le champ électrostatique au potentiel. • Exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges. • Connaître l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes. • Calculer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques. • Calculer une différence de potentiel par circulation du champ électrostatique dans les cas simples.
Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss.	<ul style="list-style-type: none"> • Reconnaître les situations pour lesquelles le champ électrostatique peut être calculé à l'aide du théorème de Gauss. • Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Cas de la sphère, du cylindre " infini " et du plan " infini " .	<ul style="list-style-type: none"> • Établir les expressions des champs électrostatiques créés en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume, par un cylindre " infini " uniformément chargé en volume et par un plan " infini " uniformément chargé en surface. • Établir et exploiter le fait qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.
Étude du condensateur plan comme la superposition de deux distributions surfaciques, de charges opposées.	<ul style="list-style-type: none"> • Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide en négligeant les effets de bords.
Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles.	<ul style="list-style-type: none"> • Orienter les lignes de champ électrostatique créées par une distribution de charges. • Représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement. • Relier les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ. • Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. • Approche numérique : représenter des cartes de lignes de champ et d'équipotentielles.
Énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur.	<ul style="list-style-type: none"> • Établir et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur. • Analogies avec la gravitation. Transposer le théorème de Gauss au cas de la gravitation.

13.2 Champ électrostatique

L'intérêt de définir un champ est qu'on se libère du sujet d'étude. Un champ est une propriété intrinsèque de l'espace.

13.2.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Soient deux charges ponctuelles, $P(q)$ de charge q , et $M(q')$ de charge q' . La force $\overrightarrow{F_{P \rightarrow M}}$ exercée par q sur q' , distantes de r , est donnée par la loi de Coulomb.

Le champ électrique créé en M est donné par la relation :

$$\frac{\overrightarrow{F_{P \rightarrow M}}}{q'} = \vec{E}_{(M)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

13.2.2 Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Soient une distribution de charges ponctuelles, P_i de charges q_i . Cette distribution est qualifiée de *discrete*. En procédant par superposition, on peut exprimer le champ électrique créé en un point M de l'espace :

$$\vec{E}_{(M)} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{e}_{r,i} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_i M}}{(P_i M)^3}$$

avec $\vec{e}_{r,i} = \frac{\overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|}$.

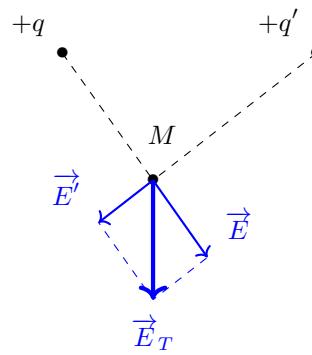


FIGURE 13.1 – Théorème de superposition

⇒ Activité 13.1

Pour illustrer le principe de superposition ...

On place trois charges positives identiques sur un plan. Dessinez en deux points différents du plan le vecteur champ électrique total.



13.2.3**Champ créé par une distribution continue de charges**

On peut étendre l'expression précédente à une distribution \mathcal{D} continue. Il faut alors considérer que chaque élément de charge élémentaire dq , situé en P , crée en un point M de l'espace le champ électrique élémentaire :

$$d\vec{E}_{(M)} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{e_r}}{(PM)^2}$$

On peut alors appliquer cette expression aux différentes distributions continues.

13.2.3.1**Distribution volumique de charge**

Soit P un point quelconque d'une distribution volumique de charge, au voisinage duquel on définit un volume élémentaire $d^3\tau_{(P)}$, contenant la charge élémentaire $d^3q_{(P)} = \rho_{(P)} d^3\tau_{(P)}$.

Soit M un point quelconque de l'espace.

En partant de l'expression du champ créé par une charge ponctuelle (Méthode de calcul directe), on obtient :

$$\vec{E}_{(M)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \frac{\rho_{(P)} \overrightarrow{PM}}{(PM)^3} d^3\tau_{(P)}$$

13.2.3.2**Distribution surfacique de charges**

On obtient par un raisonnement analogue, pour une distribution surfacique :

$$\vec{E}_{(M)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma_{(P)} \overrightarrow{PM}}{(PM)^3} d^2S_{(P)}$$

13.2.3.3**Distribution linéique de charge**

De même, pour une distribution linéique :

$$\vec{E}_{(M)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda_{(P)} \overrightarrow{PM}}{(PM)^3} d\ell_{(P)}$$

Les unités :

Le champ électrostatique s'exprime en $V.m^{-1}$, ρ en $C.m^{-3}$, σ en $C.m^{-2}$, λ en $C.m^{-1}$, les charges en C .

13.3**Symétries et invariances****13.3.0.1****Principe de Curie****— Principe de Curie —**

"La symétrie de la cause se retrouve dans les effets".

Appliqué à l'électrostatique, ce principe de Curie implique que tous les éléments de symétrie pour la charge sont également éléments de symétrie pour le champ. Donc, si la distribution de charges admet un plan de symétrie, alors \vec{E} est contenu dans ce plan.

13.3.0.2

Éléments de symétrie du champ électrique

Soit P_1 et P_2 deux particules ponctuelles de charge q , symétriques par rapport à un plan (\mathcal{P}). Soit $M \in (\mathcal{P})$. Déterminons le champ électrique créé en M par les charges placées en P_1 et P_2 :

$$\vec{E}_{(M)} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\overrightarrow{P_1 M}}{P_1 M^3} + \frac{\overrightarrow{P_2 M}}{P_2 M^3} \right)$$

P_1 et P_2 étant symétriques par rapport au plan (\mathcal{P}), on a : $P_1 M = P_2 M$. De plus, avec H le point du segment $[P_1, P_2] \in (\mathcal{P})$:

$$\overrightarrow{P_1 M} = \overrightarrow{P_1 H} + \overrightarrow{H M}$$

$$\overrightarrow{P_2 M} = \overrightarrow{P_2 H} + \overrightarrow{H M}$$

Or d'après la configuration du système :

$$\overrightarrow{P_1 H} = -\overrightarrow{P_2 H}$$

D'où :

$$\overrightarrow{P_1 M} + \overrightarrow{P_2 M} = 2 \overrightarrow{H M}$$

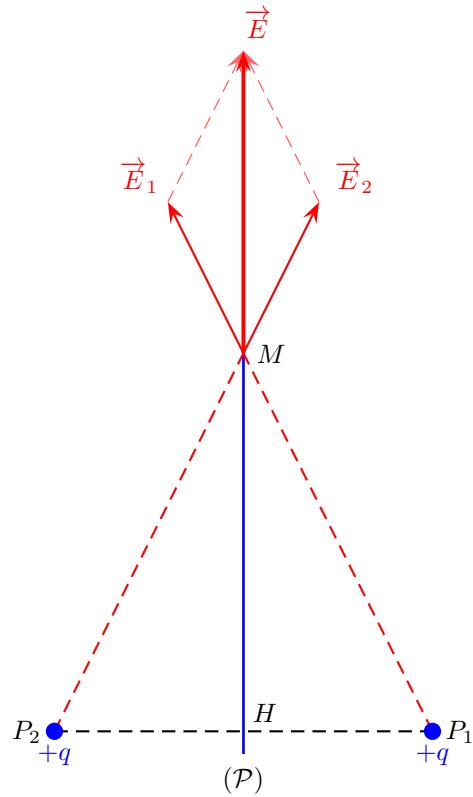


FIGURE 13.2 – Plan de symétrie pour la distribution de 2 charges

On obtient donc :

$$\vec{E}_{(M)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \overrightarrow{H M}}{P_1 M^3}$$

Or H et M sont dans le plan \mathcal{P} , donc $\overrightarrow{H M} \in \mathcal{P}$. On obtient donc que le champ $\vec{E} \in (\mathcal{P})$.

Le champ électrique appartient donc aux plans de symétrie d'une distribution de charges.

De la même façon, on montre que :

Le champ électrique est normal aux plans d'antisymétrie d'une distribution de charges.

⇒ Activité 13.2

Représenter sur un schéma l'illustration du principe d'antisymétrie avec 2 charges $+q$ et $-q$ placées de part et d'autre d'un plan d'antisymétrie (\mathcal{P}').

Une antisymétrie peut être décrite comme la composée d'une symétrie plane et d'une opération de conjugaison de charge.

De plus, le champ électrique possède les mêmes propriétés d'invariance (rotation, translation) que la distribution de charges qui en est la source.

13.4 Circulation du champ électrostatique, potentiel électrostatique

13.4.1 Circulation d'un champ de vecteurs



— Circulation —

Soit $\vec{F}_{(M)}$ un champ de vecteurs au point M .

On appelle circulation de $\vec{F}_{(M)}$ entre deux points M_1 et M_2 , le scalaire défini par :

$$\mathcal{C} = \int_{M_1}^{M_2} d\mathcal{C}(M) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_{(M)} \cdot d\vec{\ell}$$

Sur un contour fermé (Γ), la circulation est notée :

$$\mathcal{C} = \oint_{(\Gamma)} \vec{F}_{(M)} \cdot d\vec{\ell}$$



— Circulation conservative —

$\vec{F}_{(M)}$ est à circulation conservative si sa circulation ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement du point de départ et du point d'arrivée.

On dit alors que ce champ est conservatif.



— Propriété —

Sur un contour fermé (Γ), si le champ est un champ conservatif, alors :

$$\mathcal{C} = \oint_{(\Gamma)} \vec{F}_{(M)} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

13.4.2

Circulation du champ électrostatique

Soit $P(q)$ une charge ponctuelle de charge q placée à l'origine d'un repère.

La circulation du champ $\vec{E}_{(M)}$ entre deux points quelconques $M_1(r_1)$ et $M_2(r_2)$ est :

$$\mathcal{C} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}_{(M)} \cdot d\vec{\ell}$$

En explicitant $d\vec{\ell}$ en coordonnées cylindriques, on obtient :

$$\mathcal{C} = \int_{M_1}^{M_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

En prenant $r_1 = r_2$, on voit donc que $\vec{E}_{(M)}$ est un champ à circulation conservative.

En utilisant le théorème de Stokes-Ampère et en considérant un contour (Γ) fermé, on a :

$$\mathcal{C} = \oint_{(\Gamma)} \vec{E}_{(M)} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\text{rot}} \vec{E}_{(M)} \cdot \vec{dS}$$

où (Σ) est une surface orientée s'appuyant sur le contour fermé (Γ).

Ce résultat étant vraie quelle que soit la surface (Σ), cela signifie que :

$$\boxed{\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}}$$

C'est une relation locale pour le champ \vec{E} .

13.4.3

Potentiel électrostatique



— Potentiel électrostatique —

Par analogie avec la définition des fonctions énergies potentielles E_p , on appelle potentiel électrostatique en M , notée $V_{(M)}$, la fonction définie par :

$$\mathcal{C} = -\Delta V = -(V_{(M_2)} - V_{(M_1)})$$

On obtient dans le cas d'un champ électrostatique créé par une charge ponctuelle en M :

$$\boxed{V_{(M)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{te}}$$



— Cas particulier —

La constante est nulle si on pose qu'à l'infini, $V_{(M)} = 0$.

$$\text{Dans ce cas : } V_{(M)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

13.4.4 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Sachant que C est égale à $-\Delta V$, et d'après la définition de la circulation, on obtient :

$$dV_{(M)} = -\vec{E}_{(M)} \cdot d\ell$$

Par définition :

$$dV_{(M)} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\ell$$

On obtient alors la relation suivante :

$$\boxed{\vec{E}_{(M)} = -\overrightarrow{\text{grad}} V}$$

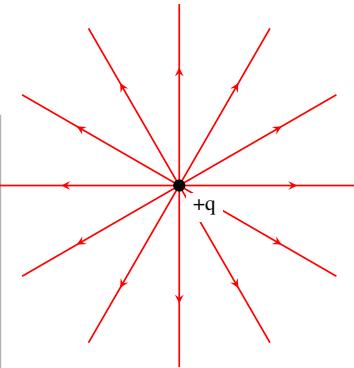
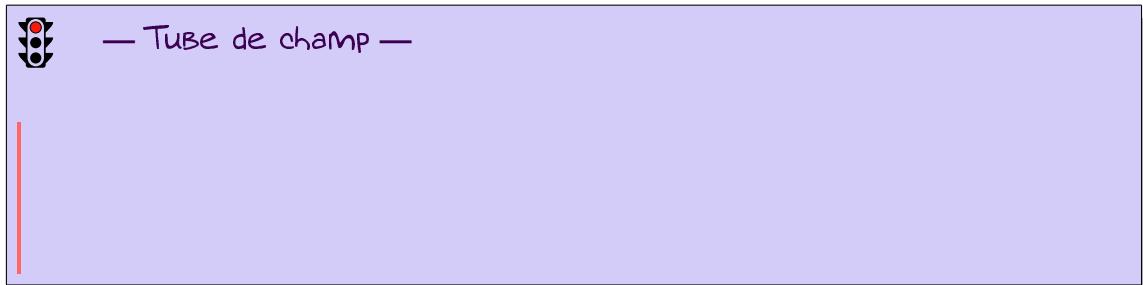


FIGURE 13.3 – Lignes de

On représente les lignes de champ avec des flèches, de façon à indiquer le sens d'orientation du champ. Ci-contre, les lignes de champ pour une charge ponctuelle.



Par exemple, la surface équipotentielle $V_{(M)} = 0$ est la surface pour laquelle tous les points ont un potentiel nul.

Par analogie avec la statique des fluides (cf. chapitre P4 : $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$), on obtient les propriétés suivantes :



— Propriété —

- Les surfaces équipotentielles $V_{(M)} = C^{te}$ sont orthogonales au champ $\vec{E}_{(M)}$
- $\vec{E}_{(M)}$ descend les potentielles, c'est-à-dire qu'il est orienté des régions de potentiel le plus élevé vers les régions de potentiel le plus faible.
- On obtient la formulation intégrale associée :

$$V_2 - V_1 = - \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}_{(M)} \cdot d\ell$$

Par application du principe de superposition, toutes les relations établies précédemment sont vérifiées quelle que soit la distribution de charges.

Les unités :

Le champ électrostatique s'exprime en $V.m^{-1}$, le potentiel en V .



13.4.5 Théorème de l'énergie cinétique

Par application du théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$$\Delta E_{c(M)} = W(\vec{F}) = \int q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = qC = -q \Delta V$$

Le travail d'une force conservative peut se définir de la façon suivante :

$$\delta W = -dE_p$$

Soit :

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} = q dV$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle électrostatique :

$$E_{p(M)} = q V_{(M)} + C^{te}$$

Ainsi, la variation d'énergie cinétique d'un système soumis uniquement à la force de Coulomb $\vec{F} = q \vec{E}$ est donnée par :

$$\Delta E_c = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}) = -\Delta E_p = -q (V_2 - V_1) = q (V_1 - V_2)$$

Le système est alors conservatif :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 = \Delta E_m$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + q V = C^{te}$$

13.5 Flux du champ électrostatique : Théorème de Gauss

13.5.1 Flux d'un champ de vecteurs



— Flux —

Par définition, le flux d'un champ de vecteurs $\vec{F}_{(M)}$, à travers la surface Σ orientée est donné par :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{F}_{(M)} \cdot \vec{d^2 S}_{(M)}$$

Avec $\vec{d^2 S}_{(M)}$ surface élémentaire orientée définie au voisinage du point M .

Si la surface est fermée, le flux devient :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{F}_{(M)} \cdot d^2 \vec{S}_{(M)}$$

La surface fermée délimite un volume. On peut donc distinguer un milieu intérieur d'un milieu extérieur. Il est d'usage d'orienter dans ce cas $d^2 \vec{S}_{(M)}$ vers l'extérieur et de poser $d^2 \vec{S}_{(M)} = d^2 S_{(M)} \vec{n}$.



— Théorème de Gauss —

Le flux du champ électrostatique $\vec{E}_{(M)}$ à travers une surface de Gauss (Σ_g) fermée est égale au rapport de la charge intérieure à cette surface, notée Q_{int} , sur la permittivité du vide ε_0 .

$$\Phi = \iint_{(\Sigma_g)} \vec{E}_{(M)} \cdot d^2 \vec{S}_{(M)} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho_{(M)}}{\varepsilon_0} d^3 \tau$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, on peut écrire :

$$\iint_{(\Sigma)} \vec{E}_{(M)} \cdot d^2 \vec{S}_{(M)} = \iiint_{(\tau)} \operatorname{div} \vec{E}_{(M)} d^3 \tau$$

où τ est le volume intérieur à (Σ) .

Soit, en combinant avec le théorème de Gauss :

$$\iiint_{(\tau)} \left(\operatorname{div} \vec{E}_{(M)} - \frac{\rho_{(M)}}{\varepsilon_0} \right) d^3 \tau = 0$$

Cette relation étant vérifiée pour n'importe quel volume (τ) , cela signifie que :



13.5.2 Relation de continuité

- Le champ $\vec{E}_{(M)}$ est continu à la traversée d'une distribution volumique de charges, mais discontinu à la traversée d'une distribution surfacique.
- Le potentiel $V_{(M)}$ est continu à la traversée d'une distribution volumique ou surfacique de charges, mais discontinu à la traversée d'une distribution linéique.

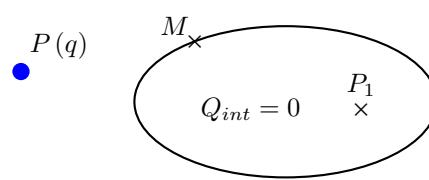
Ces relations de continuité nous permettent de déterminer V par intégration, et de vérifier la pertinence de nos calculs pour le champ.

13.5.3 Conditions d'application du théorème de Gauss

Considérons une charge ponctuelle de charge q située en P . Soit (Σ_g) une surface de Gauss orientée et centrée sur P_1 avec P_1 différent de P et $P \notin \Sigma_g$.

Par application du théorème de Gauss, on obtient :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma_g)} \vec{E}_{(M)} \cdot d^2 \vec{S}_{(M)} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0$$



Or $\vec{E}_{(M)} \neq \vec{0}$: la nullité du flux n'implique pas la nullité du champ.



Une bonne utilisation du théorème de Gauss passe par l'étude de la topographie du champ, c'est-à-dire l'étude des symétries ainsi que des invariances.



13.6 Distributions à haut degré de symétrie

13.6.1 Méthode générale pour le théorème de Gauss



—Principe—

La difficulté lors de l'utilisation du théorème de Gauss est de trouver la surface.

2 critères doivent être pris en compte.

En effet, le produit scalaire $\vec{E} \cdot d^2\vec{S}$ doit pouvoir être simplifié, soit parce que les deux vecteurs sont colinéaires, soit parce qu'ils sont orthogonaux.

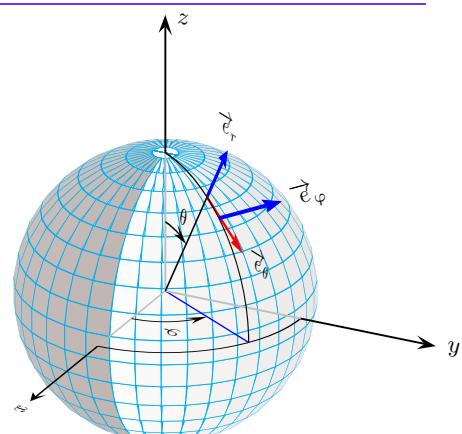
- Lorsque les deux vecteurs \vec{E} et $d^2\vec{S}$ sont orthogonaux, le produit scalaire est nul,
- Lorsque les deux vecteurs \vec{E} et $d^2\vec{S}$ sont colinéaires, le cosinus du produit scalaire vaut 1 et il faut alors pouvoir sortir le vecteur \vec{E} de l'intégrale. Pour cela, il doit être constant sur la surface de Gauss Σ_g .

13.6.2 Sphère uniformément chargée en volume

Considérons une sphère de centre P , de rayon R , chargée uniformément en volume avec la densité volumique de charge ρ .

Calculons le champ électrostatique créé en tout point M de l'espace par cette distribution \mathcal{D} .

Pour cela, choisissons des coordonnées sphériques (r, θ, φ) .



A priori, le champ est de la forme :

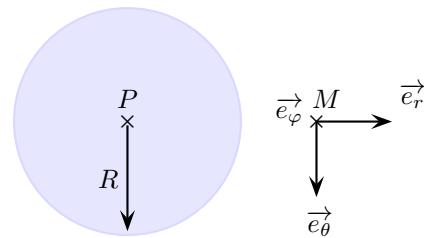
$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi$$

13.6.2.1 Symétries et invariances

- Symétries :

- Invariances :

- En résumé :



13.6.2.2 Choix de la surface de Gauss

Étant donnée la symétrie du problème, une sphère s'impose comme surface de Gauss. Nous la prendrons de centre P , de rayon r , passant par M . Ainsi, en chaque point de la surface Σ_g , le champ sera orthogonal à la sphère, donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{d^2S}$. De plus, le champ sera constant en tout point de Σ_g .

13.6.2.3 Application du théorème de Gauss

Le théorème s'exprime par :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma_g)} \vec{E}_{(M)} \cdot \overrightarrow{d^2S}_{(M)} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

- Le premier terme se calcule de la façon suivante :

- Pour le second terme, 2 cas sont à distinguer. En effet, suivant que M se trouve à l'intérieur ($r < R$) ou à l'extérieur ($r > R$) de la sphère chargée, la charge intérieure ne s'exprime pas de la même façon.

- Si $r > R$, alors $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3} \rho \pi R^3$. On en déduit alors :

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3} \frac{\rho \pi R^3}{\epsilon_0}$$

et :

$$E(r > R) = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2}$$

- Si $r < R$, alors $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3} \rho \pi r^3$. On en déduit alors :

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3} \frac{\rho \pi r^3}{\epsilon_0}$$

et :

$$E(r < R) = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}$$

On constate qu'il y a continuité en $r = R$.

Représentons le graphe $E = f(r)$:

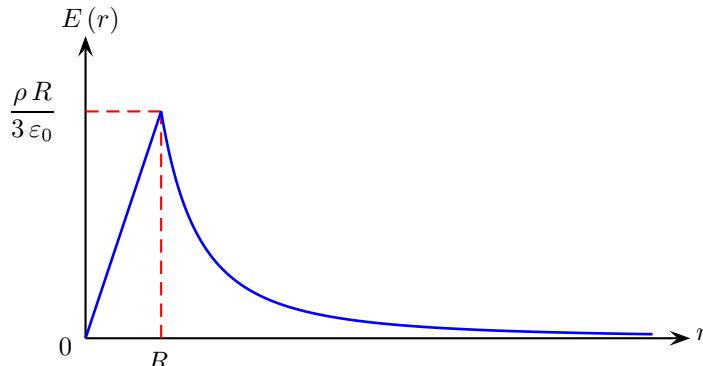


FIGURE 13.4 – Champ électrostatique créé par une sphère



— Remarque —

Si on exprime le champ extérieur à la sphère en fonction de la charge Q_T portée par sphère chargée, on a : $Q_T = \frac{4}{3} \rho \pi R^3$ et donc :

$$E(r > R) = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Le champ créé à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique est le même que celui créé par une charge ponctuelle de charge identique et placée en son centre.

13.6.3 Cylindre uniformément chargé en volume

Considérons un cylindre infiniment long suivant Oz , de rayon R , chargé uniformément en volume avec la densité volumique de charge ρ . Calculons le champ électrostatique créé en tout point M de l'espace par cette distribution \mathcal{D} . Pour cela, choisissons des coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

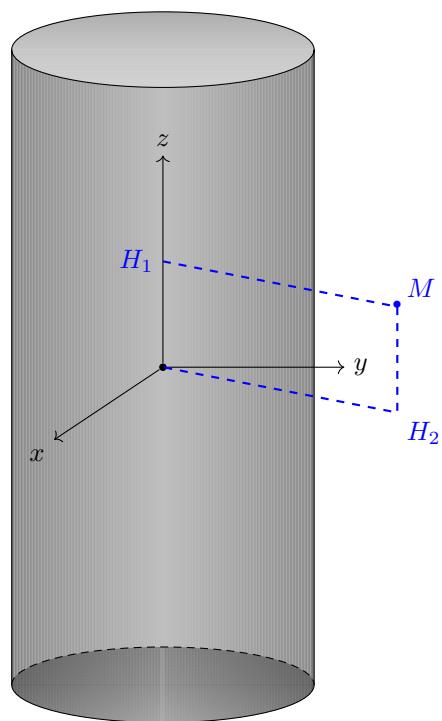


FIGURE 13.5 – Plan uniformément chargé

13.6.3.1 Symétries et invariances

A priori, le champ est de la forme :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

- **Symétries :**

- **Invariances :**

- **En résumé :**

13.6.3.2 Choix de la surface de Gauss

Étant donnée la symétrie du problème, un cylindre s'impose comme surface de Gauss. Nous le prendrons de rayon r , de hauteur h , passant par M . Ainsi, en chaque point de la surface latérale de $(\Sigma_{g,\text{latéral}})$, le champ sera orthogonal au cylindre, donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{d^2S}$. De plus, le champ sera constant en tout point de cette surface latérale.

Par ailleurs, en tout point des disques supérieur et inférieur fermant le cylindre, le champ est orthogonal à $\overrightarrow{d^2S}$. Le flux à travers ces disques est donc nul.

13.6.3.3 Application du théorème de Gauss

Le théorème s'exprime par :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma_g)} \vec{E}_{(M)} \cdot d^2\vec{S}_{(M)} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

- Le premier terme se calcule de la façon suivante :

- Pour le second terme, 2 cas sont à distinguer. En effet, suivant que M se trouve à l'intérieur ($r < R$) ou à l'extérieur ($r > R$) du cylindre chargé, la charge intérieure ne s'exprime pas de la même façon.

On constate qu'il y a continuité en $r = R$.

Représentons le graphe $E = f(r)$:

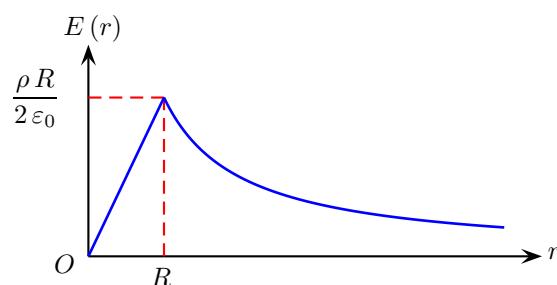


FIGURE 13.6 – Champ électrostatique créé par un cylindre infini

⇒ Activité 13.3

Considérons un fil infini de longueur ℓ , colinéaire à Oz , uniformément chargé avec la densité linéique de charge λ .

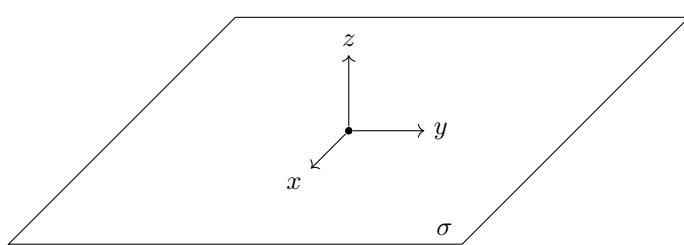
1. Exprimer la densité linéique de charge λ en fonction de la charge totale Q_T portée par le fil.
2. Par une étude de symétries et d'invariances, déterminer les propriétés du champ électrostatique.
3. Par application du théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique en un point M situé à la distance r du fil.

**13.6.4****Plan infini uniformément chargé en surface**

Considérons un plan infini confondu avec le plan xOy , chargé uniformément en surface avec la densité surfacique de charges σ .

Calculons le champ électrostatique créé en tout point M de l'espace par cette distribution \mathcal{D} .

Pour cela, choisissons des coordonnées cartésiennes (x, y, z) .



13.6.4.1 Symétries et invariances

A priori, le champ est de la forme :

$$\vec{E} = E_x(x, y, z) \hat{e}_x + E_y(x, y, z) \hat{e}_y + E_z(x, y, z) \hat{e}_z$$

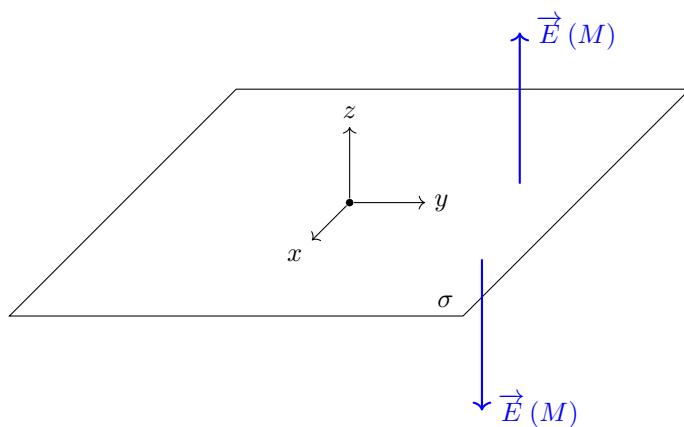


Le plan xOy est un plan de symétrie pour \mathcal{D} , indépendamment du point M . Cela signifie que pour 2 points M et M' symétriques l'un de l'autre par rapport à ce plan, les champs $\vec{E}_{(M)}$ et $\vec{E}_{(M')}$ sont symétriques, autrement dit :

$$E(-z) = -E(z)$$

La fonction $E(z)$ est **impaire**.

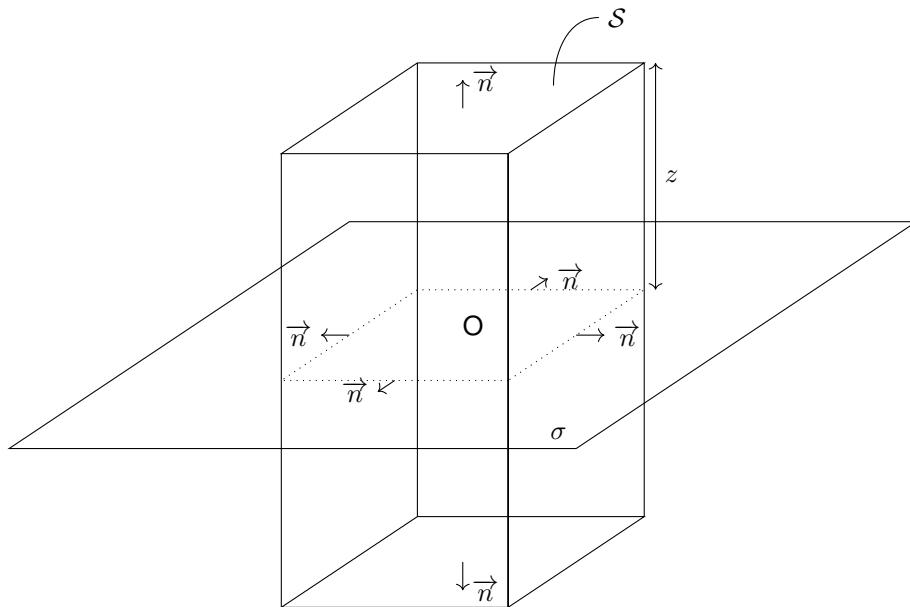
On obtient alors :



13.6.4.2 Choix de la surface de Gauss

Étant donnée la symétrie du problème, un cylindre s'impose comme surface de Gauss. Celui-ci peut être à base cylindrique ou rectangulaire. Nous le prendrons ici de hauteur $2z$, fermé par 2 carrés d'ordonnées z et $-z$ et d'aires \mathcal{S} . Ainsi, en chaque point de la surface latérale de $\Sigma_{g,\text{latéral}}$, le champ sera orthogonal au vecteur $d^2\vec{S}$.

Par ailleurs, en tout point des carrés supérieur et inférieur fermant le cylindre, le champ est colinéaire à $\overrightarrow{d^2S}$.



13.6.4.3 Application du théorème de Gauss

Le théorème s'exprime par :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma_g)} \vec{E}_{(M)} \cdot \overrightarrow{d^2S}_{(M)} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

- Le premier terme se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\Sigma_g} \vec{E}_{(M)} \cdot \overrightarrow{d^2S}(M) \\ &= \Phi_{\text{latéral}} + \Phi_{(z)} + \Phi_{(-z)} \\ &= 0 + E(z) \mathcal{S} - E(-z) \mathcal{S} \\ &= 2 E(z) \mathcal{S} \text{ lorsque } z > 0 \end{aligned}$$

- Pour le second terme, $Q_{\text{int}} = \sigma \mathcal{S}$.

On en déduit :

$$E(z > 0) = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0}$$

et :

$$E(z < 0) = -\frac{\sigma}{2 \varepsilon_0}$$

On constate qu'il y a discontinuité en $z = 0$:

$$E(0^+) - E(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Dans le cas d'une modélisation surfacique de charge, une discontinuité du champ apparaît lors de la traversée de la surface.

Représentons le graphe $E = f(z)$:

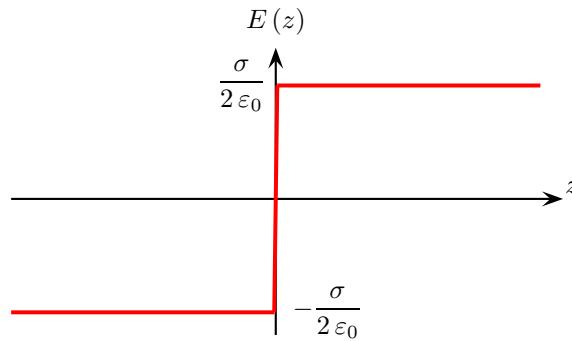


FIGURE 13.7 – Champ électrostatique créé par un plan infini

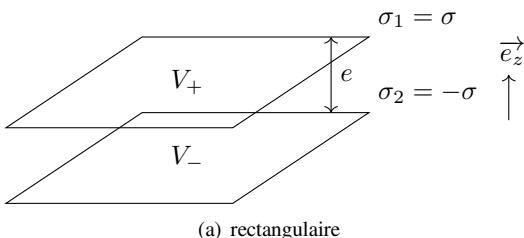
13.7 Condensateur plan

13.7.1 Dispositif

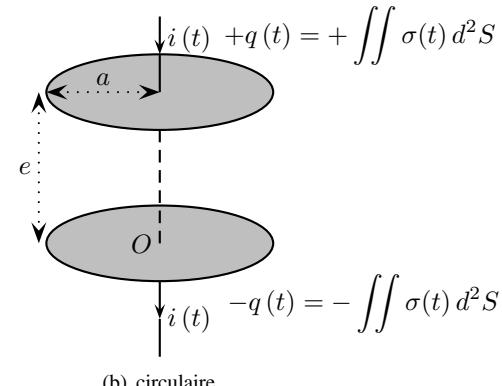


— Condensateur —

Un condensateur est composé de deux armatures conductrices qui se font face, séparées par un matériau isolant.



(a) rectangulaire



(b) circulaire

FIGURE 13.8 – Condensateur

13.7.2 Expression du champ entre les armatures

Considérons un condensateur composé de deux armatures conductrices 1 et 2, qui se font face, écartées d'une distance e .

Ces deux armatures sont assimilées à des plans, carrés ou en forme de disques, par exemple.

Lorsqu'on applique une tension U aux bornes de ce condensateur, il apparaît un champ électrique \vec{E} dans l'espace inter-armatures.

Des charges électriques opposées apparaissent alors sur les faces en regard.

Si on considère que la distance e entre les armatures est très petite devant la dimension de celles-ci, on peut assimiler ces armatures à des plans infinis.

Plaçons le plan xOy au milieu du condensateur.

Pour chacune des armatures, assimilée à un plan, on retrouve les invariances et symétries décrites dans le paragraphe 13.6.4.1 page 270. Le champ électrique pour chacune des armatures est donc colinéaire à \vec{e}_z , le champ total également, par application du théorème de superposition.

Par application de la différence de potentiel U , comme le potentiel est défini à une constante près, l'armature supérieure peut être prise à $V_+ = \frac{U}{2}$ et l'armature inférieure à $V_- = -\frac{U}{2}$.

La surface des équipotentialles est bien compatible avec la direction du champ \vec{E} .

Le plan est alors plan d'antisymétrie pour le potentiel et par voie de conséquence sur la répartition des charges, ce qui implique que la face supérieure est chargée avec la densité surfacique de charge σ et la face inférieure avec la densité surfacique de charge $-\sigma$.

Dans l'espace compris entre les armatures, donc dans l'intervalle compris entre $z = -\frac{e}{2}$ et $z = +\frac{e}{2}$, le champ total résulte de la superposition des champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 créés respectivement par les plans supérieur 1 et inférieur 2 chargés respectivement $\sigma_1 = +\sigma$ et $\sigma_2 = -\sigma$.

En utilisant les résultats établis page 271 pour le plan infini, on obtient :

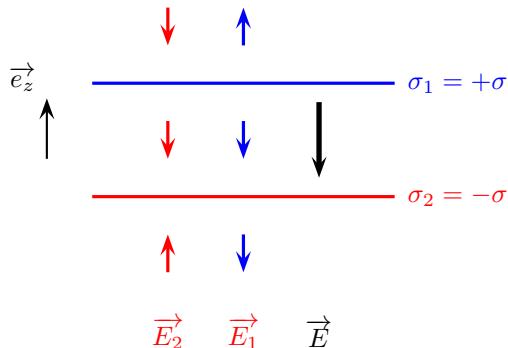
$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

et :

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Le champ total entre les armatures est donc :

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z}$$



13.7.3 Capacité d'un condensateur plan

La relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ donne :

$$-\frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{dV}{dz}$$

Soit :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{V_2}^{V_1} dV = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz$$

et donc :

$$U = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$$

Or, la charge Q portée par la plaque supérieure, de surface S , peut s'exprimer par :

$$Q = \sigma S$$

On en déduit la relation :

$$U = \frac{Q e}{S \epsilon_0}$$

La capacité C d'un condensateur a déjà été définie en première année par :

$$Q = C U$$

Pour un condensateur plan, la capacité vaut donc $C = \frac{Q}{U}$, soit :
$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{e}}$$

13.7.4 Complément : conducteur en équilibre électrostatique



— Équilibre électrostatique —

Un conducteur électrique en équilibre électrostatique est un conducteur qui n'est parcouru par aucun courant.

Cela signifie que toutes les charges électriques libres internes au conducteur sont "immobiles". Dans un conducteur quelconque, les charges électriques se déplacent pour deux raisons :

- l'agitation thermique. Cependant, les charges se déplaçant dans des directions aléatoires, la vitesse moyenne est nulle et tout se passe comme s'il n'y avait pas courant dans le conducteur.
- la présence d'un champ électrique, qui met les charges électriques en mouvement et génère ainsi un courant.

Pour qu'il n'y ait pas de courant dans un conducteur, celui-ci ne doit être soumis à aucun champ électrique. Cela signifie que le champ électrostatique \vec{E} est nul à l'intérieur du conducteur.

Par conséquent, un conducteur en équilibre électrostatique ne peut être chargé que surfaciquement : il n'y a pas de charge à l'intérieur du conducteur. La charge se répartit uniquement à la surface du conducteur en équilibre.

On peut démontrer qu'au voisinage d'un conducteur en équilibre électrostatique, le champ vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

\vec{n} étant un vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur. Cette expression, appelée théorème de Coulomb, peut être démontrée à l'aide du théorème de Gauss.



— Théorème de Coulomb —

Le champ électrostatique au voisinage d'un conducteur en équilibre électrostatique est donné par :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}}$$

13.8

Analogie avec la gravitation

13.8.1

Analogies

Tous les résultats établis en électrostatique sont généralisables à la gravitation.

On passe donc de l'électrostatique à la gravitation en effectuant les changements suivants :

électrostatique	gravitation
q	m
$\vec{E}_{(M)}$	$\vec{g}_{(M)}$

$$\frac{1}{\epsilon_0}$$

$$-4\pi G$$

TABLE 13.2 – Analogie électrostatique-gravitation

13.8.2

Potentiel



— Potentiel gravitationnel —

Par analogie, le potentiel gravitationnel est donné par :

$$\vec{g}_{(M)} = -\overrightarrow{grad}(V_{g,(M)}) \quad V_{g,(M)} \text{ étant le potentiel gravitationnel}$$

On obtient donc le potentiel gravitationnel créé par une masse ponctuelle m à une distance r :

$$V_{g,(M)} = \frac{-G m}{r} + C^{te}$$

13.8.3**Énergie potentielle**

On en déduit alors que :



— Énergie potentielle d'interaction gravitationnelle —

Si on place une masse m' en M , l'énergie potentielle d'interaction entre m et m' est donnée par :

$$E_p = m' V_{g, (M)} = \frac{-G m m'}{r} + C^{te}$$

13.8.4**Théorème de Gauss**

Le théorème de Gauss appliqué à la gravitation s'écrit alors :

$$\phi = \iint_{(\Sigma_g)} \vec{\mathcal{G}}_{(M)} \cdot \overrightarrow{d^2 S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

avec M_{int} la masse intérieure à la surface de Gauss.