COMPLEMENT MATHEMATIQUE :

Les équations différentielles

A- *EQUATIONS DIFFERENTIELLES DE PREMIER ORDRE :*

1) Equation sans second membre (équation homogène) :

Forme de l'équation : $\boxed{\frac{dx(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}x(t)=0}$

τ : Constante homogène à un temps.

La solution s'écrit : $\boxed{x_H = A.\exp(-\frac{t}{\tau})}$

A est une constante, pour la déterminer on utilise les conditions initiales.

2) Equation avec second membre :

Forme de l'équation : $\boxed{\frac{dx(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}x(t)=f(t)}$

f (t) : Fonction qui dépend du temps.

La solution s'écrit : $\boxed{x(t)=x_H+x_P}$

$x_H(t)$: Solution de l'équation homogène.

$x_P(t)$: Solution particulière de l'équation: $\boxed{\frac{dx(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}x(t)=f(t)}$

Cette équation particulière dépend de la forme du second membre f (t).

Si f (t) = C (Constante) $\Rightarrow$ $x_P(t)$ =C. τ

D'où la solution complète : $\boxed{x(t)=A.\exp(-\frac{t}{\tau})+C.\tau}$

B- *EQUATIONS DIFFERENTIELLES DE SECOND ORDRE :*

1) Equation sans second membre (équation homogène) :

Forme de l'équation : $\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\lambda.\frac{dx(t)}{dt}+\omega_0{}^2.x(t)=0}$

L'équation caractéristique est : $\boxed{r^2+2\lambda r+\omega_0{}^2=0}$

La résolution de cette équation donne deux racines r_1 et r_2 $\boxed{x_H = A.\exp(r_1 t)+B.\exp(r_2 t)}$

A et B sont deux constantes d'intégration, pour les déterminer on utilise les conditions initiales.

Le discriminant réduit : $\boxed{\Delta' = \lambda^2 - \omega^2}$

Selon le signe de Δ' on distingue 3 cas :

- **<u>1ier cas</u> :** $\Delta' > 0$ **:** $\boxed{r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - {\omega_0}^2} \quad \text{et} \quad r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - {\omega_0}^2}}$

Deux racines réelles négatives.

La solution : $\boxed{x(t) = e^{-\lambda t}.\left[A.\exp(\sqrt{\lambda^2 - {\omega_0}^2}.t) + B.\exp(-\sqrt{\lambda^2 - {\omega_0}^2}.t)\right]}$

- **<u>2ème cas</u> :** $\Delta' = 0$ **:** $\boxed{r_1 = r_2 = -\lambda = -\omega_0}$

On a une racine double.

La solution : $\boxed{x(t) = (A + B.t)e^{-\omega_0 t}}$

- **<u>3ème cas</u> :** $\Delta' < 0$ **:** $r_1 = -\lambda + j.\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}$; et $r_2 = -\lambda - j.\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}$

On a deux racines complexes conjuguées.
On pose : et $\Omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}$
Donc $\boxed{x(t) = e^{-\lambda t}.\left[A.\cos(\Omega.t) + B.\sin(\Omega.t)\right]}$

Qu'on peut écrire aussi sous la forme : $\boxed{x(t) = A'.e^{-\lambda t}.\cos(\Omega.t + \varphi)}$

(A, B) et (A', φ) sont des constantes d'intégrations. Pour les déterminer on utilise les conditions initiales.

2) Equation avec second membre :

Forme de l'équation : $\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\lambda.\frac{dx(t)}{dt} + {\omega_0}^2.x(t) = f(t)}$

La solution s'écrit $x(t) = x_H + x_P$
La solution particulière prend la forme du second membre f (t).
En physique on rencontre souvent des seconds membres de la forme :
* f (t)=A (constante) $\Rightarrow$ $x_p = K = A/{\omega_0}^2$
* f (t)= A.t+B $\Rightarrow$ $x_p = M.t + N$ avec $M = A/{\omega_0}^2$ et $N = B/{\omega_0}^2$
* f (t)=A.cos (ωt +N) $\Rightarrow$ $x_P = M.\cos(\omega t + N)$, M et N sont déterminés par la méthode complexe.