

P 14

Magnétostatique

14.1

Compétences du chapitre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Champ magnétostatique. Principe de superposition.	<ul style="list-style-type: none"> Décomposer une distribution en des distributions plus simples dans le but de calculer un champ magnétostatique par superposition dans des cas simples.
Symétries et invariances du champ magnétostatique.	<ul style="list-style-type: none"> Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courants. Identifier les invariances d'une distribution de courants. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de courants pour caractériser le champ magnétostatique créé.
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	<ul style="list-style-type: none"> Reconnaître les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie. Citer quelques ordres de grandeur de champs magnétostatiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Applications au fil rectiligne "infini" de section non nulle et au solénoïde "infini".	<ul style="list-style-type: none"> Justifier le choix d'une modélisation d'une distribution de charges par une distribution "infinie". Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne "infini" de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde "infini" en admettant que le champ est nul à l'extérieur.
Lignes de champ, tubes de champ.	<ul style="list-style-type: none"> Orienter les lignes de champ magnétostatique créées par une distribution de courants. Relier les variations de l'intensité du champ magnétostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de ligne de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. Approche numérique : représenter des cartes de lignes de champ magnétostatique.

14.2**Théorème de superposition**

De la même façon que pour le champ électrique \vec{E} , le champ magnétique \vec{B} créé par plusieurs distributions de courants est égal à la somme des champs magnétiques créés par chacune des distributions de courants.

14.3**Symétries et invariances**

Contrairement au cas du champ électrique, le champ magnétique appartient aux plans d'antisymétrie d'une distribution de courants.

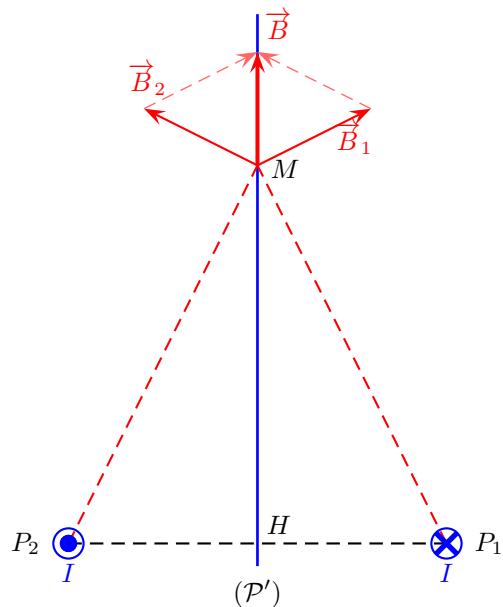


FIGURE 14.1 – Plan d'antisymétrie pour la distribution de 2 courants

De la même façon, on montre que :

Le champ magnétique est normal aux plans de symétrie d'une distribution de courants.

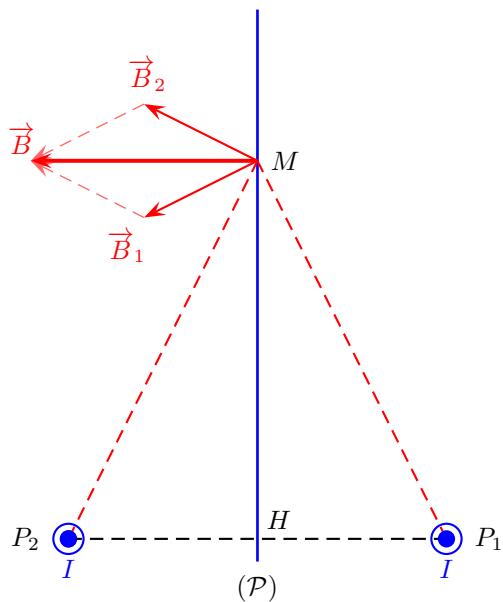


FIGURE 14.2 – Plan de symétrie pour la distribution de 2 courants

De plus, comme pour le champ électrique :

Le champ magnétique possède les mêmes propriétés d'invariance (rotation, translation) que la distribution de courants qui en est la source.



De plus, s'il existe un plan de symétrie pour la distribution de courants, indépendamment du point M , cela signifie que pour 2 points M et M' symétriques l'un de l'autre par rapport à ce plan, les champs $\vec{B}_{(M)}$ et $\vec{B}'_{(M')}$ sont antisymétriques, autrement dit :

$$\vec{B}_{(M)} = -\vec{B}'_{(M')}$$

Le comportement est encore inversé par rapport à l'électrostatique.

14.4 Caractère conservatif

Examinons la carte du champ magnétique créé par des bobines de Helmholtz étudiées en première année :

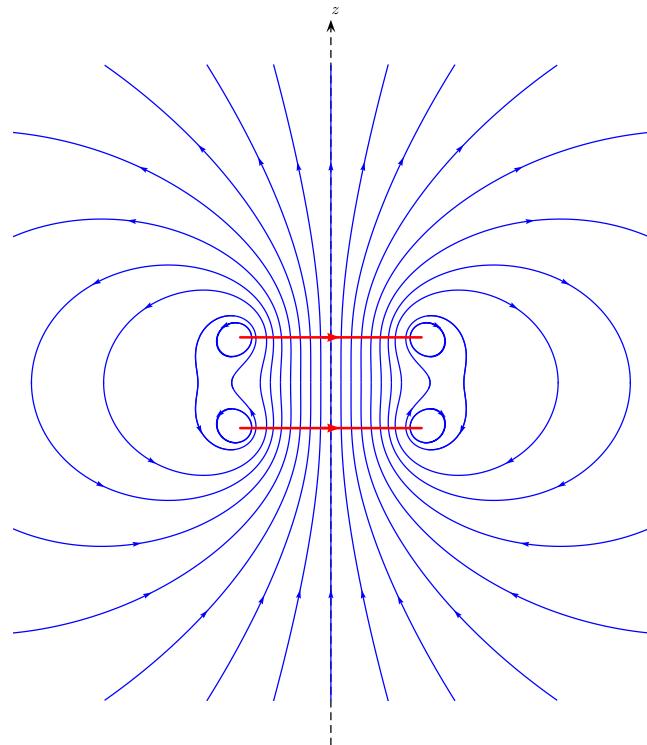


FIGURE 14.3 – Carte du champ des bobines de Helmholtz 2D

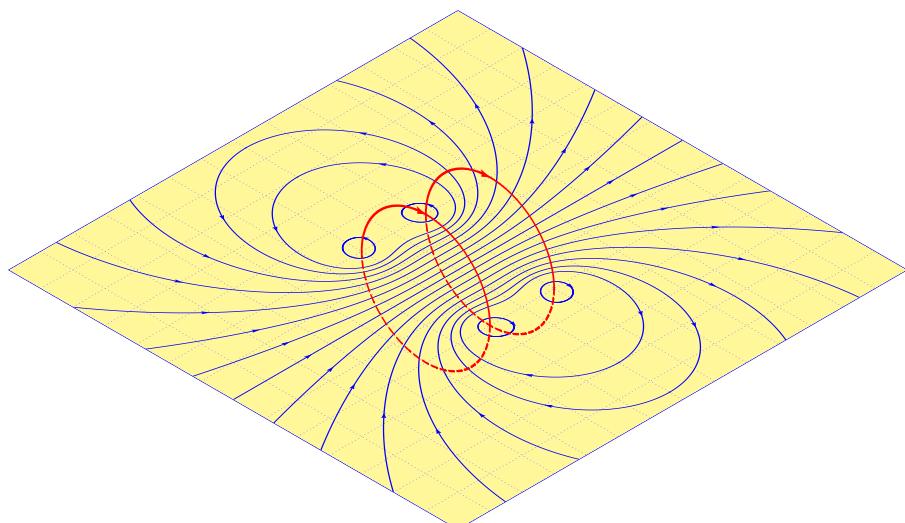
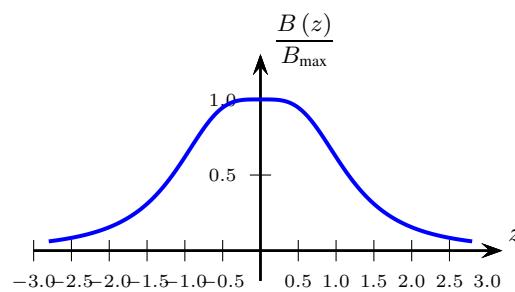


FIGURE 14.4 – Carte du champ des bobines de Helmholtz 3D

On peut constater sur le graphe ci-contre que :

- l'intensité du champ magnétique \vec{B} est constante dans la zone centrale où les lignes de champ sont parallèles,
- l'intensité de \vec{B} croît dans la zone où les lignes de champ se resserrent,
- à l'inverse, l'intensité de \vec{B} décroît lorsqu'elles s'écartent.



De façon générale, on retiendra que le long d'un tube de champ magnétique, le flux du champ magnétique \vec{B} à travers une section se conserve (avec $d^2\vec{S} = d^2S \vec{n}$) :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \iint_{(\Sigma_1)} \vec{B} \cdot \vec{n} d^2S \\ &= \iint_{(\Sigma_2)} \vec{B} \cdot \vec{n} d^2S \\ &= \Phi_2\end{aligned}$$



— Propriété —

On admettra alors la propriété suivante :

$$\iint_{(\Sigma_{\text{fermée}})} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = \iint_{(\Sigma_{\text{fermée}})} \vec{B} \cdot \vec{n} d^2S = 0$$

Le flux du champ magnétique sortant de toute surface fermée est nul.

On peut donc noter ici une différence notable avec le champ électrique.

⇒ Activité 14.1

Vérifier que les propriétés de symétrie et d'invariance sont compatibles avec la carte de champ proposée.



14.5

Théorème d'Ampère

14.5.1

Orientation d'une surface et du contour associé

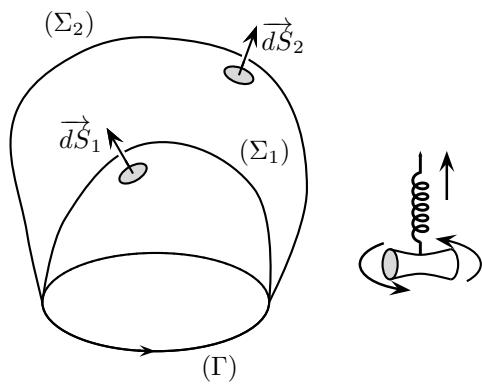


FIGURE 14.5 – Tire-bouchon

14.5.2**Forme globale ou intégrale du théorème d'Ampère**

Considérons la carte du champ magnétique créé par une spire circulaire :

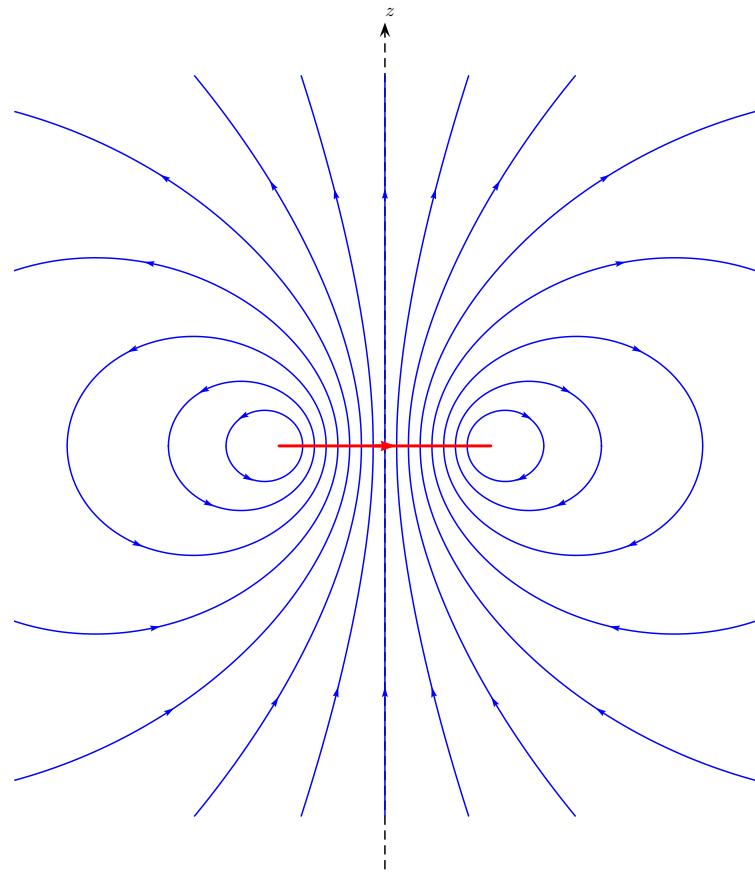


FIGURE 14.6 – Carte du champ d'une spire circulaire 2D

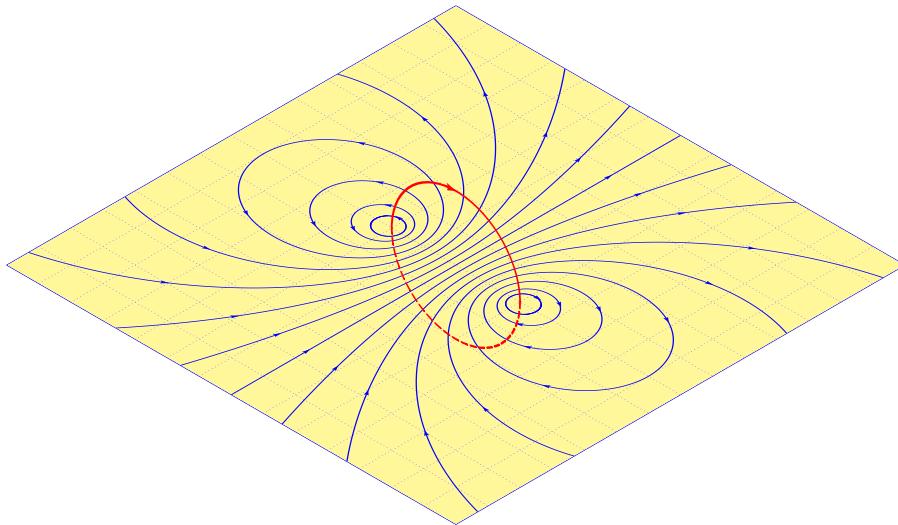


FIGURE 14.7 – Carte du champ d'une spire circulaire 3D

On peut remarquer que :

- les lignes de champ s'enroulent autour de la spire,
- l'orientation des lignes de champ est liée au sens de circulation du courant (cf. figure ci-contre),
- la valeur moyenne de la norme du champ magnétique B le long des lignes de champ est proportionnelle à l'intensité du courant circulant dans la spire.



FIGURE 14.8 – "Règle" de la main droite

Ceci amène à postuler le théorème suivant, en considérant un contour fermé (Γ_a), et (Σ_a) une surface orientée quelconque (Σ_a) s'appuyant sur ce contour fermé (Γ_a).



— Théorème d'Ampère —

La circulation du champ magnétique \vec{B} le long d'une courbe fermée (Γ_a) est égale au produit $\mu_0 i_{\text{int}}$ où i_{int} représente l'intensité enlacée et μ_0 la perméabilité magnétique du vide :

$$\oint_{(\Gamma_a)} \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 i_{\text{int}}$$

Les unités :

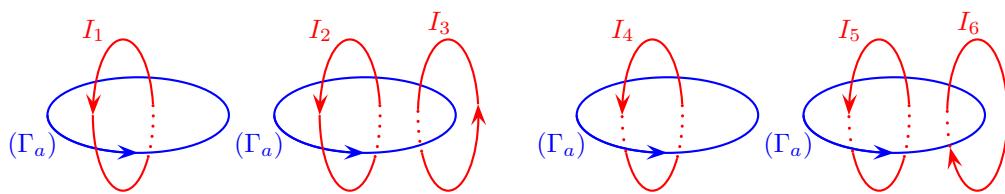
B s'exprime en teslas (T), μ_0 en $H.m^{-1}$ et I en A . $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H.m^{-1}$

i_{int} le courant enlacé défini par :

$$i_{\text{int}} = \iint_{(\Sigma_a)} \vec{j} \cdot \vec{n} d^2 S$$

On doit définir le sens de $d\ell$. Le courant enlacé est donc une grandeur algébrique.

14.5.3 Exemples



⇒ Activité 14.2

Indiquer $I_{\text{int}} = I_{\text{enlacé}}$ pour chacun des cas.

I_{int}				
------------------	--	--	--	--

14.5.4 Divergence et rotationnel du champ magnétique

14.5.4.1 Divergence

Considérons le champ créé en un point M par un élément de circuit de longueur $d\ell$ d'un fil parcouru par l'intensité i .

Considérons (Σ) , une surface fermée contenant M enfermant le volume (τ) . L'expression du flux à travers cette surface est alors :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot \vec{n} d^2S$$

Le théorème de Green-Ostrogradski ($\iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \iiint_{(\tau)} \text{div } \vec{B} d^3\tau$) permet décrire :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot \vec{n} d^2S = \iiint_{(\tau)} \text{div } \vec{B} d^3\tau = 0$$

Le flux étant nul quel que soit le volume (τ) , on obtient donc :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

La divergence du champ magnétique est donc nulle.

14.5.4.2 Rotationnel

Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_{(\Gamma_a)} \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \mu_0 i_{\text{int}}$$

Le premier terme, peut se transformer grâce au théorème de Stokes-Ampère :

$$\oint_{(\Gamma_a)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(\Sigma_a)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{d^2S}$$

où (Σ_a) est une surface orientée s'appuyant sur (Γ_a) .

Le second terme, vaut :

$$\mu_0 i_{\text{int}} = \iint_{(\Sigma_a)} \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{n} d^2S = \iint_{(\Sigma_a)} \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{d^2S}$$

En combinant les deux expressions précédentes, on obtient :

$$\iint_{(\Sigma_a)} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \mu_0 \vec{j}) \cdot \vec{d^2S} = 0$$

Cette relation étant vérifiée pour toute surface (Σ_a) , cela signifie que :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

14.6

Distributions à haut degré de symétrie

14.6.1

Méthode générale pour le théorème d'Ampère



—Principe—

Comme avec le théorème de Gauss pour le champ électrique, la difficulté lors de l'utilisation du théorème d'Ampère est de trouver le contour (Γ) . Ici encore, 2 critères doivent être pris en compte :

- Le produit scalaire $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ doit pouvoir être simplifié, soit parce que les deux vecteurs sont colinéaires, soit parce qu'ils sont orthogonaux.
- Lorsque les deux vecteurs \vec{B} et $d\vec{\ell}$ sont orthogonaux, le produit scalaire est nul,
- Lorsque les deux vecteurs \vec{B} et $d\vec{\ell}$ sont colinéaires, le cosinus du produit scalaire vaut 1 et il faut alors pouvoir sortir le vecteur \vec{B} de l'intégrale. Pour cela, il doit être constant sur le contour d'Ampère (Γ_a) .

14.6.2

Fil rectiligne infini

Considérons un fil infini suivant l'axe z et parcouru par le courant d'intensité I .

Calculons le champ magnétique créé en tout point M de l'espace par cette distribution \mathcal{D} .

Pour cela, choisissons des coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

14.6.2.1

Symétries et invariances

- Symétries :

- Invariances :

- En résumé :

On a finalement :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$

14.6.2.2 Choix du contour d'Ampère

Étant donnée la symétrie du problème, un cercle s'impose comme contour d'Ampère. Nous le prendrons de rayon r , passant par M . Ainsi, en chaque point du contour d'Ampère (Γ_a), le champ sera colinéaire au cercle, donc colinéaire au vecteur $d\vec{\ell}$. De plus, le champ sera constant en tout point de ce contour.

14.6.2.3 Application du théorème d'Ampère

Le théorème s'exprime par :

$$\mathcal{C} = \oint_{(\Gamma_a)} \vec{B}_{(M)} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

- On a : $d\vec{\ell} = d\vec{OM}$ avec $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$, soit :

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} &= dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z \\ &= r d\theta \vec{e}_\theta \text{ car } r = C^{te} \text{ et } z = C^{te} \text{ pour un cercle} \end{aligned}$$

Ainsi, le premier terme se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint_{(\Gamma_a)} \vec{B}_{(M)} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \oint_{(\Gamma_a)} B(r) \times r d\theta \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta \\ &= \oint_{(\Gamma_a)} B(r) \times r d\theta \\ &= r B(r) \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= B(r) \times 2\pi r \end{aligned}$$

- Le second terme se calcule également très facilement :

$$I_{\text{int}} = I$$

On en déduit alors :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Le cas du fil infini sert dans d'autres distributions et il n'est donc pas interdit de retenir le résultat final ...
Un fil infini est bien entendu impossible à réaliser. Pour s'approcher de ce modèle, il faut que le point M de l'étude précédente se situe à petite distance r devant la longueur L du fil. Il convient également, vu que le circuit est nécessairement fermé pour que le courant puisse circuler, de faire abstraction de l'influence du courant de retour, donc le considérer comme suffisamment éloigné du point M .

14.6.3 Câble cylindrique

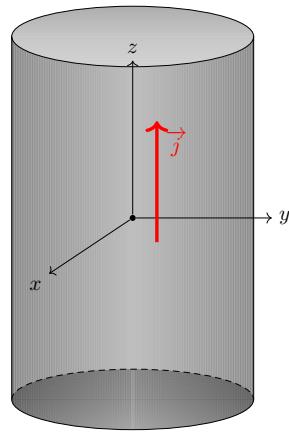
Considérons un cylindre infiniment long suivant Oz , de rayon R , parcouru par un courant I suivant z et de densité volumique de courant j .

On a la relation :

$$I = \iint_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot \overrightarrow{d^2S} = j \pi R^2$$

Calculons le champ magnétique créé en tout point M de l'espace par cette distribution \mathcal{D} .

Pour cela, choisissons des coordonnées cylindriques (r, θ, z) .



14.6.3.1 Symétries et invariances

- Symétries :



- Invariances :

- En résumé :

On a finalement :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$

14.6.3.2 Choix du contour d'Ampère

Étant donnée la symétrie du problème, un cercle s'impose comme contour d'Ampère. Nous le prendrons de rayon r , passant par M . Ainsi, en chaque point du contour d'Ampère Γ_a , le champ sera colinéaire au cercle, donc colinéaire au vecteur $d\ell$. De plus, le champ sera constant en tout point de ce contour.

14.6.3.3 Application du théorème d'Ampère

Le théorème s'exprime par :

$$\mathcal{C} = \oint_{(\Gamma_a)} \vec{B}_{(M)} \cdot d\ell = \mu_0 I_{\text{int}}$$

- Le premier terme se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint_{(\Gamma_a)} \vec{B}_{(M)} \cdot d\ell \\ &= \oint_{(\Gamma_a)} B(r) \times d\ell \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta \\ &= \oint_{(\Gamma_a)} B(r) \times d\ell \\ &= B(r) \oint_{(\Gamma_a)} d\ell \\ &= B(r) \times 2\pi r \end{aligned}$$

- Pour le second terme, 2 cas sont à distinguer. En effet, suivant que M se trouve à l'intérieur ($r < R$) ou à l'extérieur ($r > R$) du cylindre parcouru par le courant, le courant enlacé (ou intérieur) ne s'exprime pas de la même façon.

- Si $r > R$, alors $I_{\text{int}} = I = j\pi R^2$. On en déduit alors :

$$B(r > R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- Si $r < R$, alors $I_{\text{int}} = j\pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2}$. On en déduit alors :

$$B(r < R) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 j r}{2}$$

On constate qu'il y a continuité en $r = R$.

Représentons le graphe $B = f(r)$:

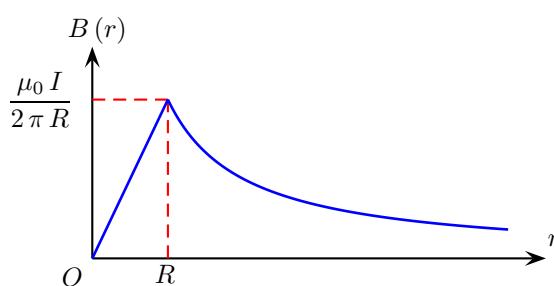


FIGURE 14.9 – Champ magnétique créé par un câble infini

14.6.4 Solénoïde infini

Soit un solénoïde infini parcouru par un courant. Celui-ci est constitué d'un grand nombre de spires enroulées sur un cylindre d'axe Oz et de rayon a .

Ce solénoïde peut être considéré comme infini si sa longueur L est très grande devant son rayon a .

Calculons le champ magnétique $\vec{B}_{(M)}$ créé en tout point M de l'espace.

14.6.4.1 Symétries et invariances

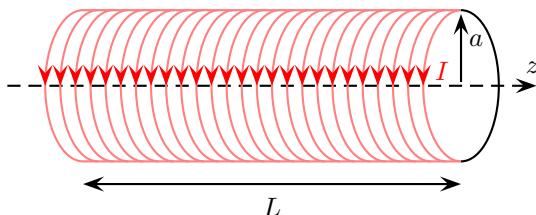


FIGURE 14.10 – Solénoïde

- Symétries :

- Invariances :

- Finalement, $\boxed{\vec{B}_{(M)} = B(r) \vec{e}_z}$.

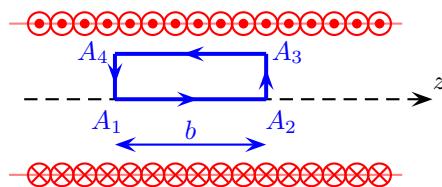
14.6.4.2 Choix du contour d'Ampère

Étant donnée la symétrie du problème, un contour convient bien : un rectangle dans le plan MOz et s'appuyant sur le point M . Ainsi, sur les côtés perpendiculaires à Oz , le champ est perpendiculaire et sur les côtés parallèles à l'axe Oz , le champ y est colinéaire. De plus, sur ces derniers côtés à $r = \text{cte}$, le champ magnétique est uniforme.

Il va falloir trois contours.

14.6.4.3 Application du théorème d'Ampère

- En appliquant le théorème d'Ampère sur le contour fermé $A_1A_2A_3A_4$ intérieur au solénoïde, en appelant b la longueur A_1A_2 , on obtient :

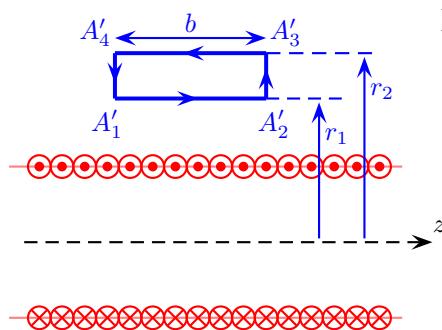


$$\begin{aligned}
 \oint_{(A_1A_2A_3A_4)} \vec{B} \cdot d\ell &= \int_{A_1}^{A_2} \vec{B}(0) dz \ \vec{e}_z + \int_{A_2}^{A_3} \vec{B}(r) dr \ \vec{e}_r \\
 &\quad + \int_{A_3}^{A_4} \vec{B}(r) dz \ \vec{e}_z + \int_{A_4}^{A_1} \vec{B}(r) dr \ \vec{e}_r \\
 &= \int_{A_1}^{A_2} B(0) dz + \int_{A_3}^{A_4} B(r) dz \\
 &= \int_{z=0}^{z=b} B(0) dz + \int_{z=b}^{z=0} B(r) dz \\
 &= [B(0) - B(r)] b \\
 &= \mu_0 I_{\text{int}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

On en déduit $B(r) = B(0) = C^{\text{te}} \quad \forall r < a.$

\vec{B} est donc uniforme à l'intérieur du solénoïde.

- De la même façon, on peut démontrer que \vec{B} est uniforme à l'extérieur du solénoïde en utilisant le contour fermé $(A'_1A'_2A'_3A'_4)$ extérieur au solénoïde :



En appelant encore b la longueur $A'_1A'_2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \oint_{(A'_1A'_2A'_3A'_4)} \vec{B} \cdot d\ell &= \int_{z=0}^{z=b} B(r_1) dz + \int_{z=b}^{z=0} B(r_2) dz \\
 &= [B(r_1) - B(r_2)] b \\
 &= \mu_0 I_{\text{int}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

On en déduit $B(r) = C^{\text{te}} \quad \forall r > a.$

\vec{B} est donc uniforme à l'extérieur du solénoïde.

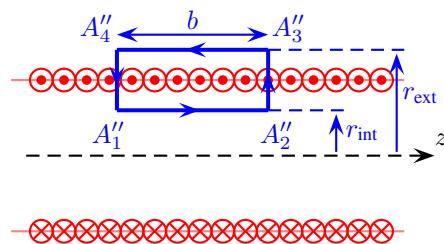
Or, pour des raisons physiques, le champ magnétique lorsque r tend vers l'infini est forcément nul.

Cela signifie donc que le champ magnétique \vec{B} est nul à l'extérieur du solénoïde.

- En appliquant le théorème d'Ampère sur $(A''_1A''_2A''_3A''_4)$ tel que $A''_3A''_4$ soit à l'extérieur et $A''_1A''_2$ soit à l'intérieur du solénoïde et en appelant toujours b la longueur $A''_1A''_2$, r_{int} la distance de l'axe à $A''_1A''_2$, r_{ext} la distance de l'axe à $A''_3A''_4$, on obtient :

$$\oint_{(A''_1A''_2A''_3A''_4)} \vec{B} \cdot d\ell = B_{\text{int}} \times b - B_{\text{ext}} \times b = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Le courant enlacé I_{int} vaut $N I = n b I$, si on appelle $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur.



Le champ magnétique à l'extérieur est nul :
 $B_{\text{ext}} = 0$.

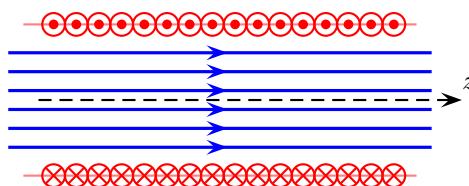
On en déduit :

$$B_{\text{int}} = \mu_0 n I \quad \forall r < a$$

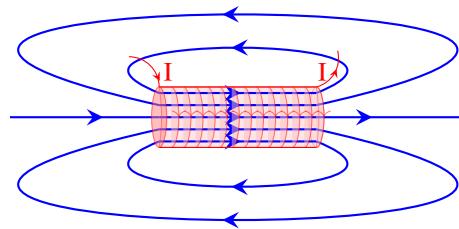
On a donc finalement :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \hat{e}_z \text{ à l'intérieur et } \vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0} \text{ à l'extérieur du solénoïde}$$

Pour le solénoïde infini :



Pour le solénoïde réel :



⇒ Activité 14.3

En observant les lignes de champ à l'intérieur du solénoïde et entre les bobines de Helmholtz, que peut-on en déduire ?

14.7 Ordres de grandeur du champ magnétique

Vide interstellaire	$10^{-6} T$
Surface de la terre	$4,7 \cdot 10^{-5} T \simeq 0,5 G$
À la distance $r = 2 \text{ cm}$ d'un fil ($I = 10 \text{ A}$)	$\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 10^{-4} T$
Aimant permanent (à quelques millimètres de sa surface)	0,1 à 1 T
Intérieur d'un électro-aimant à bobinage	10 T
Étoile à neutrons	$10^{11} T$

TABLE 14.2 – Ordres de grandeur de champs magnétiques