

R 5

Oscillations forcées

5.1 Masse sur un plan horizontal soumis à une excitation sinusoïdale

Considérons un mobile M (m) de masse m , observé dans le référentiel terrestre \mathcal{R} galiléen. M est posé sur un plan horizontal et accroché à un ressort. Il est soumis à :

- son poids \vec{P} ,
- la réaction normale au support \vec{N} ,
- une force de frottement fluide : $\vec{f} = -\lambda \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$,
- l'action du ressort : \vec{T} de norme $k \Delta \ell$.

L'excitateur est fixé au ressort. Le point de fixation peut se déplacer par rapport à sa position centrale O_1 .

Soit $\overrightarrow{OE_1}(t) = x_e(t) \vec{e}_x$ l'écartement du point de fixation par rapport à sa position centrale.

L'excitateur impose une excitation de type sinusoïdal :

$$x_e(t) = X_E \cos(\omega t)$$

En l'absence d'excitation, quand M est au repos, la position de M est repérée par le point O .

On appellera $x(t)$ l'écartement de M par rapport à O :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t) \vec{e}_x$$

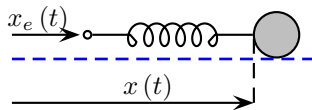


FIGURE 5.1 – Ressort

5.1.1 Équation différentielle du mouvement

En appliquant le P.F.D à M (m) dans \mathcal{R} galiléen, on obtient :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x(t) = \frac{k}{m} x_e(t)$$

En posant :

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- $\frac{\lambda}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$

On obtient :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 X_E \cos(\omega t)$$

5.1.2 Régime forcé ou régime permanent



— Régime permanent —

On considère que le système fonctionne en régime permanent quand $x(t)$ est à peu près égal à la solution particulière de l'équation différentielle, à savoir quand :

$$x(t) \simeq X_E \cos(\omega t + \varphi)$$

On appelle X l'amplitude de l'élongation de l'oscillateur et φ le déphasage entre l'oscillateur et l'excitateur.

5.2 Résonance en élongation

5.2.1 Notation complexe

Pour étudier le système, nous allons définir les notations complexes :

$$x_e(t) = X_E \cos(\omega t) \leftrightarrow \underline{x_e}(t) = X_E e^{j\omega t}$$

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$$

avec $\underline{X} = X e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe de l'oscillateur.

5.2.2 Amplitude complexe de l'oscillateur

En injectant dans l'équation différentielle, sachant que si par exemple, \underline{A} est un complexe, on obtient :

$$\frac{d\underline{A}}{dt} = j\omega \underline{A} \text{ et } \frac{d^2 \underline{A}}{dt^2} = -\omega^2 \underline{A}, \text{ on obtient :}$$

$$\underline{X}(u) = \frac{X_E}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}}$$

avec u , pulsation réduite :

$$u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On peut donc déterminer le module de l'amplitude de l'oscillateur et la phase φ :

$$X(u) = \frac{X_E}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{u}{Q(1 - u^2)}$$

5.2.3 Résonance d'élongation

Par analogie avec l'électricité, il y a résonance d'élongation si et seulement si :

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,7$$

À la résonance d'élongation, on obtient les relations suivantes :

$$u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \simeq 1 \text{ Pour } Q \text{ grand}$$

$$X_{\max} = X(u_r) = \frac{Q X_E}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \simeq Q X_E \text{ Pour } Q \text{ grand}$$

5.3 Vitesse

5.3.1 Amplitude complexe de la vitesse

L'amplitude complexe de la vitesse est :

$$\underline{v}(t) = j\omega \underline{x}(t)$$

En posant :

- $\underline{v}(t) = \underline{V}(\omega) e^{j\omega t}$
- $\underline{x}(t) = \underline{X}(\omega) e^{j\omega t}$

On obtient :

$$\underline{V}(\omega) = j\omega \underline{X}(\omega)$$

En posant :

$$\underline{V}(\omega) = V(\omega) e^{j\psi(\omega)}$$

avec :

- $V(\omega)$: module de la vitesse complexe
- $\psi(\omega)$: déphasage de la vitesse par rapport à l'excitateur

5.3.2 Passage en notation réelle

En considérant que :

- $\underline{X}(\omega) = X(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$
- $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

on obtient :

$$\begin{cases} V(\omega) = \omega X(\omega) = \frac{\omega_0 u X_e}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} \\ \psi(\omega) = \varphi(\omega) + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On montre que $\forall Q$, pour $u_r = 1$, il y a résonance de vitesse.

À la résonance de vitesse :

- $V_{\max} = V(\omega_0) = Q \omega_0 X_e$
- $\psi(\omega_0) = 0$: La vitesse est en phase avec l'excitateur.

5.4 Impédance complexe



— Impédance complexe —

Considérons un oscillateur mécanique soumis à l'action d'une force excitatrice d'amplitude complexe \underline{F} . On définit l'impédance complexe d'un oscillateur mécanique par le rapport :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{V}}$$

avec \underline{V} la vitesse complexe.

5.4.1 Force explicite

D'après l'équation différentielle du mouvement de $M(m)$, on obtient l'impédance complexe d'une oscillateur mécanique :

$$\underline{Z}(\omega) = j m \omega + \lambda + \frac{k}{j \omega}$$

5.4.2 Analogie électro-mécanique

On observe l'équivalence formelle des grandeurs suivantes :

Électricité	Mécanique
$q(t)$	$x(t)$
$i(t)$	$v(t)$
$u(t)$	$f(t)$
R	λ
L	m
$\frac{1}{C}$	k

TABLE 5.1 – Analogie électro-mécanique