



Cycle Préparatoire Intégré CPI1A

TD : Mécanique classique du point

TD : principe fondamental de la dynamique

TD : principe fondamental de la dynamique du point matériel

Questions de réflexion : Tester ses connaissances et sa compréhension du cours

1. Définir un référentiel galiléen et donner des exemples.
2. Un corps ne peut se déplacer sans qu'une force agisse sur lui. (V ou F)
3. Toute variation de vitesse d'un corps exige l'action d'une force. (V ou F)
4. Si la norme de la vitesse d'un corps est constante, aucune force ne s'applique sur lui. (V ou F)
5. Si la force exercée sur un corps devient et reste nul, le corps s'arrête. (V ou F)
6. Un ascenseur de masse $m = 1300\text{kg}$ monte avec une accélération $a = 1,5\text{m.s}^{-2}$. Quelle est la tension du câble qui le hisse ?
7. Un déménageur doit pousser sur le sol deux lourds cartons identiques. Vaut-il mieux les faire glisser superposés, ou placés l'un derrière l'autre ?
8. Rappeler les lois de Coulomb pour le frottement de glissement. Pourquoi parle-t-on de lois phénoménologiques ou empiriques ?

Cube superposés

Soit trois cubes (1), (2) et (3) posés l'un sur l'autre, l'ensemble reposant sur le sol (S). On note $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ l'action de (1) sur (2), par exemple.

Calculer : $F_{1 \rightarrow 2}$, $F_{3 \rightarrow 2}$ et $F_{S \rightarrow 3}$.

Données : $m_1 = 100\text{ g}$; $m_2 = 200\text{ g}$; $m_3 = 400\text{ g}$; $g = 10,0\text{ m.s}^{-2}$.

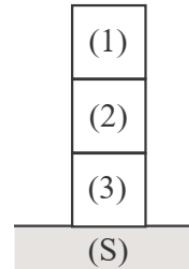


Figure 1:

Coefficient de frottement

Une bille de masse $m = 120\text{ g}$ tombe dans un fluide. On a enregistré sa vitesse (norme) v en fonction du temps.

Quelles sont les différentes phases du mouvement?

Donner une valeur approximative du temps caractéristique τ de ce mouvement.

Quelle est la valeur limite de v (notée v_{\lim}) ?

En négligeant la poussée d'Archimède et en prenant $\vec{f} = -k\vec{v}$ ($k > 0$) comme force de frottement, établir l'équation différentielle satisfait par v .

En déduire l'expression de v_{\lim} en fonction de m , k et g .

Calculer la valeur de k .

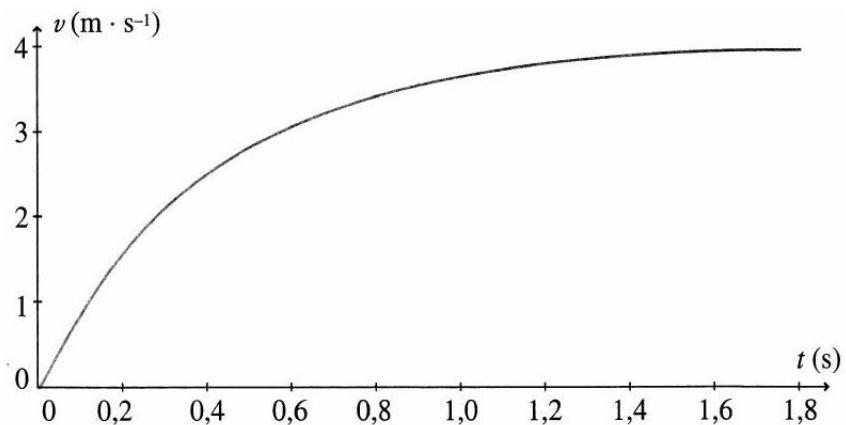


Figure 2:

Profondeur d'un puits

Pour mesurer la profondeur d'un puits, Mímir laisse tomber une pierre du bord du puits et chronomètre la durée qui s'écoule jusqu'au moment où il entend le bruit de l'impact de la pierre au fond du puits (il a pris soin de placer son oreille à hauteur du bord du puits). La durée mesurée est $\Delta t = 1,5$ s.

Calculer la profondeur h du puits.

On négligera les frottements de l'air sur la pierre et l'équation en h sera résolue numériquement.

Données : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; vitesse du son dans l'air : $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$.

Anneau glissant sur un cercle

Un anneau ponctuel M de masse m est enfilé sur un cercle fixe de centre O et de rayon b placé horizontalement dans le plan (Oxy).

À l'instant $t = 0$, une vitesse initiale \vec{v}_0 tangente au cercle est communiquée à l'anneau qui glisse alors sans frottement le long du guide.

Déterminer les composantes de la réaction \vec{R} du guide circulaire sur l'anneau.

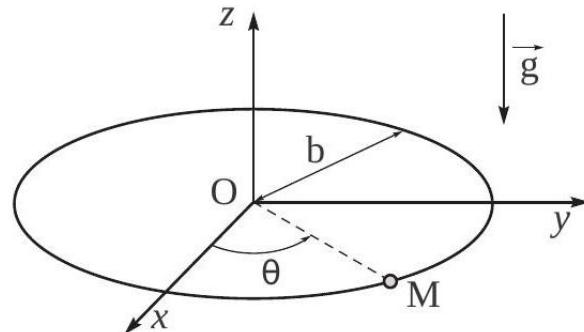


Figure 3:

Point soumis à une force centrale et à une force de frottement fluide

Un point matériel M de masse m se déplace sur un plan horizontal (on suppose la réaction du plan normale au plan). M est lancé à partir de M_0 , de coordonnées cartésiennes $(0, y_0)$ et est soumis à la force $\vec{F} = -a\vec{OM}$ et à une force résistante $\vec{f} = -b\vec{v}$ (a et b sont des constantes positives).

Établir en coordonnées polaires, les équations différentielles du mouvement de M .

Dans le cas où $\dot{\theta} = \omega = \text{cste}$, déterminer ω et l'expression de r en fonction du temps.

Chute libre d'une tige

Une tige rectiligne AB verticale de longueur $\ell = 80 \text{ cm}$, lâchée avec une vitesse initiale nulle, tombe en chute libre dans le vide. Elle passe au cours de sa chute par un trou ménagé dans une plaque horizontale de faible épaisseur. Quand son extrémité inférieure A atteint le trou, sa vitesse est $v = 5 \text{ m.s}^{-1}$.

À quelle distance h de la plaque se trouvait initialement le point A ?

Quelle est la vitesse v' de la tige lorsque son extrémité supérieure B sort du même trou?

Quelle est la durée T du passage de la tige à travers le trou?

Point matériel reliés entre deux ressorts horizontaux

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Un point matériel M de masse m est attaché à deux ressort (1) et (2) horizontaux de raideurs k_1 et k_2 , et de longueurs à vide l_{01} et l_{02} reliés à deux points fixes A et B distants de $(l_{01} + l_{02})$. Le point M glisse sans frottement le long de l'axe (Ox) à partir de sa position d'équilibre. Il est repéré sur cet axe par son abscisse $x = \overline{OM}$.

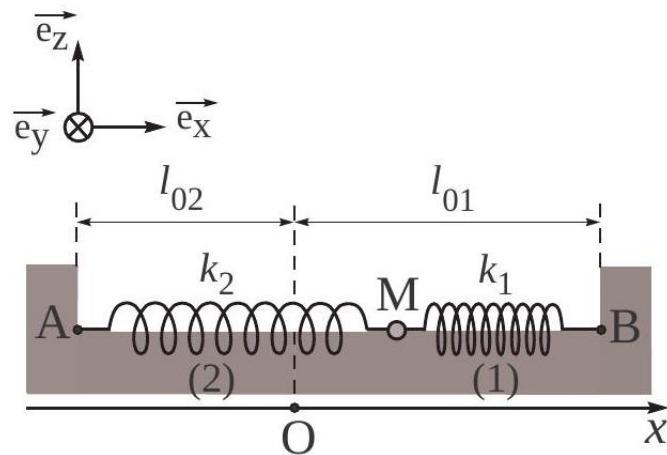


Figure 4:

Justifier la position d'équilibre en O du point M.

Établir l'équation différentielle du mouvement de M. En déduire la période T des oscillations et la raideur k du ressort équivalent à cette association.

À l'instant $t = 0$, le point matériel est abandonné sans vitesse initiale du point M_0 d'abscisse x_0 . Déterminer l'équation horaire du mouvement $x(t)$.

Glissement d'un solide sur un plan incliné

Un solide supposé ponctuel de masse m est déposé à l'extrémité supérieure de la ligne de plus grande pente Ox d'un plan incliné d'angle α , sans vitesse initiale. On note H la distance de ce point initial O au plan horizontal et g l'intensité du champ de pesanteur.

Absence de frottement

Déterminer l'accélération du mobile à l'instant t , lorsque les frottements de glissement sont négligés.

En déduire la vitesse du mobile au point A.

Existence de frottement de glissement

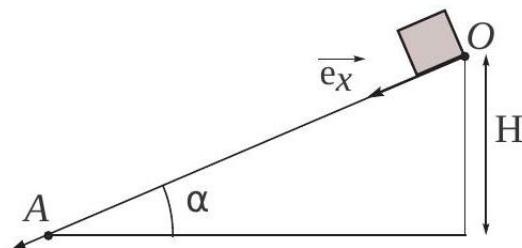


Figure 5:

Quelle est la condition sur f , le coefficient de frottement pour que le solide commence à glisser à $t = 0$?

Reprendre les questions de la partie

Glissade d'un enfant sur un igloo

Un enfant de masse m glisse sans frottements sur un igloo sphérique de rayon R . L'enfant commence à glisser à $t = 0$ à partir du sommet sans vitesse initiale. On assimilera l'enfant à un point matériel repéré à l'instant t par l'angle polaire $\theta(t)$.

1. Projeter le PFD dans la base locale polaire.
2. Établir la relation entre la position angulaire $\theta(t)$ et la vitesse angulaire $\omega(t)$.
3. Donner l'expression de la réaction de l'igloo sur l'enfant en fonction de sa position angulaire $\theta(t)$.
4. L'enfant décolle-t-il ? Si oui, pour quel angle ? Effectuer l'application numérique.

Point sur une tige en rotation uniforme dans \mathcal{R}_T

Une tige OP rigide est soudée sur un plateau tournant à vitesse angulaire constante ω . Cette tige forme un angle constant α avec l'axe vertical (Oz) = (Δ).

Un point matériel de masse m pouvant glisser sans frottement est en équilibre relatif sur la tige.

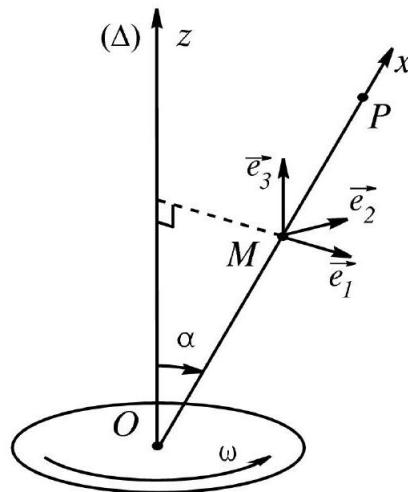


Figure 6:

En utilisant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

préciser la position x_e de l'équilibre relatif;

donner les composantes R_1 , R_2 et R_3 de la réaction \vec{R} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ liée à la tige.

Chute libre

Un enfant lâche une bille dans la cage d'escalier de son immeuble depuis le 4ème étage au moment où l'ascenseur y passe. Son père, qui monte par l'ascenseur jusqu'au 10ème étage avec une vitesse constante observe lui aussi la chute de la bille. Les grandeurs physiques suivantes sont-elles identiques pour l'enfant et pour son père :

1. la vitesse de la bille à un instant donné ?
2. le temps de chute total ?
3. l'accélération de la bille à un instant quelconque ?
4. la distance totale parcourue par la bille ?

Tir balistique sans frottement

Un obus sphérique de masse m assimilé à un point matériel M est lancé dans l'air avec une vitesse \vec{v}_0 depuis le point O , origine du repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au référentiel terrestre \mathcal{R}_g supposé galiléen.

La vitesse \vec{v}_0 fait un angle α avec l'horizontale Ox dans le plan Oxz . Le champ de pesanteur \vec{g} est supposé uniforme et Oz est la verticale ascendante du lieu. On néglige tout frottement.

Déterminer l'équation de la trajectoire.

Déterminer la flèche de la trajectoire (altitude maximale atteinte). Pour quel angle α la flèche est-elle maximale?

Déterminer la portée D (distance entre O et le point de chute sur le plan horizontal $z = 0$).

Pour quel angle α la portée D est-elle maximale? Calculer pour cet angle la portée et la flèche de la trajectoire.

Comment choisir l'angle de tir α pour que la trajectoire passe par un point A de coordonnées (x_A, z_A) ?

Définir la parabole de sûreté.

Données : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; $v_0 = 30 \text{ m.s}^{-1}$; $m = 1 \text{ kg}$.

Tir balistique avec force de frottement proportionnelle à la vitesse

On reprend les données de l'exercice 10 en supposant, cette fois, que l'obus est soumis à une force de frottement (traduisant la résistance de l'air) du type : $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ en plus de son poids.

Déterminer les composantes $(v_x(t); v_z(t))$ du vecteur vitesse \vec{v} à chaque instant.

Déterminer les composantes $(x(t); z(t))$ du vecteur position \vec{OM} à chaque instant.

Déterminer et calculer la flèche de la trajectoire.

Montrer que la trajectoire tend vers une asymptote verticale dont on précisera la position.

Montrer que la vitesse de l'obus tend vers une limite que l'on déterminera.

Tracer l'allure de la trajectoire.

Données : $\alpha = 45^\circ$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; $v_0 = 30 \text{ m.s}^{-1}$; $m = 1 \text{ kg}$; $\lambda = 0,1 \text{ kg.s}^{-1}$.

Ressort sur un plan incliné [ENAC96]

Un système est constitué d'une glissière (\mathcal{T}) soudée sur un bâti mobile autour d'un axe vertical (Δ).

Sur la glissière inclinée d'un angle θ fixe par rapport à la verticale est posé un solide (S) de masse m qui peut glisser sans frottement sur (\mathcal{T}). Ce solide que l'on peut considérer comme ponctuel, est accroché à un ressort à spires non jointives, de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixée au bâti.

Le système étant tout d'abord immobile, calculer la longueur $\ell_{\text{éq}}$ du ressort à l'équilibre.

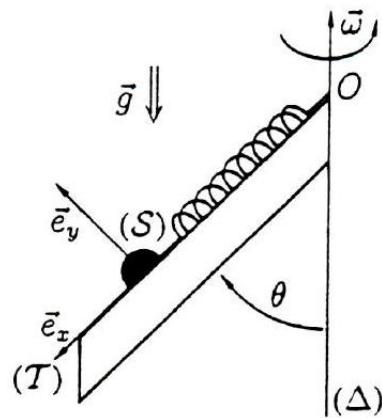


Figure 7:

Le système est mis en rotation autour de l'axe vertical (Δ) avec une vitesse angulaire constante ω suffisamment faible pour que (S) reste en contact de (T).

Calculer les composantes dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) de l'accélération $\vec{a}_{M/R}$ du solide (S) dans le référentiel fixe du laboratoire quand le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre ℓ'_{eq} .

Exprimer ℓ'_{eq} .

Déduisez-en la réaction \vec{R} de la glissière sur (S).

La vitesse de rotation du solide est maintenant ω_0 . Elle est telle que le solide décolle juste de la glissière quand le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre ℓ''_{eq} . Exprimer la nouvelle longueur à l'équilibre ℓ''_{eq} et déduisez ω_0 en fonction de k, m, ℓ_0 et θ .

Cavité dans un astéroïde (Facultatif)

Soit un astéroïde, de forme sphérique (centre C, rayon R) qui présente une cavité cylindrique de petite section, de longueur $A_1A_2 = L$ et de milieu O. Un point matériel de masse m, abandonné en A_1 , à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale, se déplace le long de la cavité.

On admet que ce point matériel situé en M, à l'instant t, tel que $\overrightarrow{CM} = r \cdot \vec{e}_r$ ($r = CM$), est soumis à l'action de la force gravitationnelle (de l'astéroïde) $f = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r$.

g_0 représente la norme du champ de gravitation à la surface de l'astéroïde.

On note f_1 l'action du support A_1A_2 sur le point matériel M.

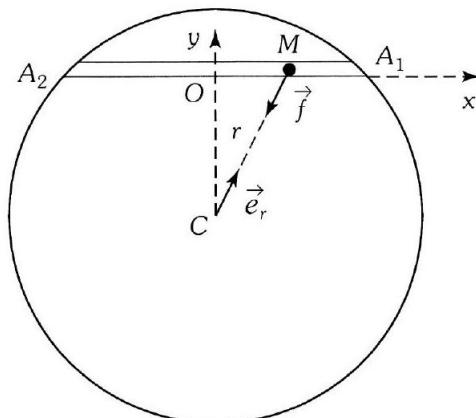


Figure 8:

On pose $\overrightarrow{OM} = x$ et on néglige les frottements.

Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel M dans le référentiel d'axe Ox , supposé galiléen.

Quelle est l'expression de x en fonction de t et des paramètres du système? Quelle est l'expression de la réaction du support?

Déterminer la durée τ du trajet A_1A_2 et la vitesse maximale v_{\max} du point M .