Corrigé : Analyseur de FOURIER (D'après CNC 1998)

L'amplificateur opérationnel étant idéal et fonctionne en régime linéaire, alors :

$$\varepsilon = v_+ - v_- = 0 \qquad \text{et} \qquad i_+ = i_- = 0$$

Appliquons le théorème de MILLMAN en B :

$$\underline{v}_B = \underline{u}_s = \frac{\underline{i}_1 + \frac{\underline{v}_E}{R_1} + \frac{\underline{v}_-}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

or $\underline{v}_- = \underline{v}_+ = 0$, alors :

$$\underline{u}_s = \frac{R_1 R_2 \underline{i}_1 + R_2 \underline{v}_E}{R_1 + R_2} \tag{1}$$

Appliquons le théorème de MILLMAN en D :

$$\underline{v}_D = \underline{v}_- = \underline{v}_+ = 0 = \frac{jC_0\omega \underline{v}_E + \frac{\underline{u}_s}{R_2}}{jC_0\omega + \frac{1}{R_2}}$$

d'où :

$$\underline{v}_E = -\frac{\underline{u}_S}{jR_2C_0\omega} \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) donnent :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{i}_1} = \frac{jR_1R_2C_0\omega}{1 + j\left(R_1 + R_2\right)C_0\omega}$$

On cherche L et R_e de façon à ce que la partie A du montage soit équivalente à $L \| R_e$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{u}_s}{\underline{i}_1} &= \frac{jR_1R_2C_0\omega}{1 + j\left(R_1 + R_2\right)C_0\omega} \\ &= \frac{jLR_e\omega}{R_e + jL\omega} \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$R_e = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \qquad \text{et} \qquad L = R_1R_2C_0$$

2. Appliquons le théorème de MILLMAN en F :

$$\underline{v}_F = \underline{u}_s = \frac{\underline{i}_2 + \frac{\underline{v}_G}{R_A}}{\frac{1}{R_A}}$$

d'où :

$$\underline{u}_s = R_A \underline{i}_2 + \underline{v}_G \tag{3}$$

Appliquons le théorème de MILLMAN en H :

$$\underline{V}_H = \underline{u}_s = \frac{\frac{0}{R_e} + \frac{\underline{v}_G}{R_b}}{\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_e}}$$

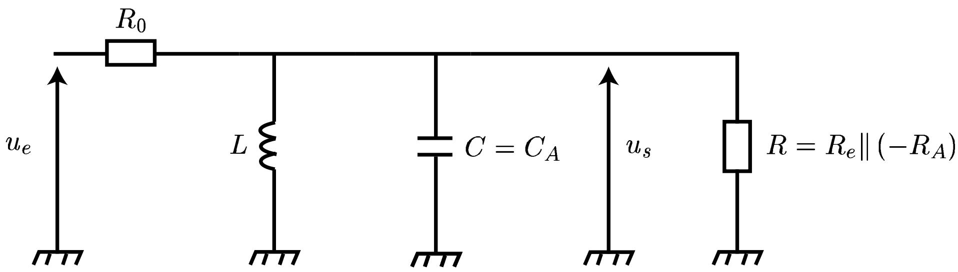
d'où :

$$\underline{u}_s = \frac{R_e}{R_b + R_e}\underline{v}_G \tag{4}$$

Les relations (3) et (4) donnent :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{i}_2} = -\frac{R_A R_e}{R_b} = -R_A \quad \text{puisque} \quad R_e = R_b$$

3. La figure (1) est équivalent à :



4. On a, d'après le schéma équivalent ci-dessus :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{Z_e}{Z_e + R_0} \qquad \text{(diviseur de tension)}$$

avec :

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega + \frac{1}{R}$$

d'où :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{R}{R + R_0 + jRR_0\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

5.

5.1. $|\underline{H}(j\omega)| = H(\omega) = \frac{R}{\sqrt{[R+R_0]^2 + R^2R_0^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$ est maximum pour :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

donc :

$$H_{max} = \frac{R}{R + R_0}$$

5.2.

$$L = R_1R_2C_0 = 0,09 \text{ H} \quad \text{et} \quad C = C_A = \frac{1}{L\omega_0^2} \simeq 281 \text{ nF}$$

d'autre part :

$$H_{max} = \frac{R}{R + R_0} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{R_0 H_{max}}{1 - H_{max}} = 10^6 \ \Omega$$

or :

$$R = \frac{R_A R_e}{R_A - R_e} \ \text{ et } \ R_e = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \simeq 2,31 \text{ k}\Omega$$

donc :

$$R_A \simeq 2,31 \text{ k}\Omega \simeq R_e$$

5.3.

$$|\underline{H}| = \frac{H_{max}}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)}} = \frac{H_{max}}{10}$$

d'où :

$$x^2 + \frac{\sqrt{99}}{Q}x - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 - \frac{\sqrt{99}}{Q}x - 1 = 0$$

Remarque : On ne retiendra que les solutions positives de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

5.4.

$$\frac{\triangle\omega}{\omega_0} = 0,012 \implies \text{le filtre est donc très sélectif}$$

6.

6.1. Le signal d'entrée du filtre s'écrit en notation complexe :

$$\underline{u}_e(t) = E_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_n \exp(jn\omega_0 t)$$

donc le signal de sortie, étant la somme des signaux de sortie de chaque terme du signal d'entrée, s'écrit en notation complexe :

$$\underline{u}_s(t) = \underline{H}(0)E_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_n \underline{H}(jn\omega_0) \exp(jn\omega_0 t)$$

6.2. Le signal d'entrée se décompose en termes sinusoïdaux de pulsation 0, ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, ...Cependant, il n'y a que la pulsation $\omega = \omega_0$ qui appartient à la bande passante du filtre $[0,994\omega_0; 1,006\omega_0]$, d'où le signal de sortie est :

$$\underline{u}_s(t) \simeq a_1 \underline{H}(j\omega_0) \exp(j\omega_0 t)$$

or :

$$\underline{H}(j\omega_0) = H_{max}$$

d'où le signal de sortie, en notation réelle, est :

$$u_s(t) \simeq a_1 H_{max} \cos(\omega_0 t)$$

7. Pour accéder à la mesure de a_n, il faut jouer sur $L = R_1 R_2 C_0$ et/ou $C = C_A$ pour que :

$$\frac{2\pi n}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \in \text{bande passante } \left[\frac{0,994}{\sqrt{LC}}; \frac{1,0064}{\sqrt{LC}}\right]$$

On aura donc à la sortie du filtre :

$$u_s(t) = a_n H_{max} \cos\left(\frac{2\pi n}{T_0} t\right)$$

dont on peut mesurer la tension efficace à l'aide d'un voltmètre :

$$U_e = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{a_n H_{max}}{\sqrt{2}}$$

et accéder à a_n.