

# Projet de Monte Carlo : Strong Convergence of the symmetrized Milstein scheme for some CEV-like SDEs

Samy Mekkaoui et Alexandre Alouadi

Février 2023

# 1 Introduction

L'article intitulé *Strong convergence of the symmetrized Milstein scheme for some CEV-like SDEs*, rédigé par Mireille Bossy et Héctor Olivero, aborde un aspect crucial des équations différentielles stochastiques (EDS) et de leurs méthodes d'approximation numérique. Les processus stochastiques jouent un rôle central dans la modélisation de phénomènes divers dans des domaines variés, allant de la finance à la physique. Des schémas numériques efficaces et précis sont essentiels pour simuler et analyser ces processus. Le schéma de Milstein symétrisé, tel qu'étudié dans cet article, représente une approche prometteuse pour approximer les solutions des EDS, en particulier celles ressemblant au modèle Constant Elasticity of Variance (CEV). En effet, bon nombre de ces EDS ne peuvent pas être résolues directement, il convient donc d'approcher leurs solutions à l'aide de méthodes numériques.

Le modèle CEV est largement utilisé en finance pour capturer la dynamique des prix des actifs, où la volatilité n'est pas constante mais présente une relation de puissance avec le prix de l'actif. Le schéma de Milstein symétrisé vise à fournir une approximation numérique robuste et précise pour de telles EDS, mettant en avant son applicabilité au-delà du schéma de Milstein classique et offrant des éclairages sur ses propriétés de convergence.

Dans ce rapport, nous explorons les principales conclusions de l'article, en examinant les fondements théoriques et les expériences numériques présentées par les auteurs. L'étude de la convergence forte revêt une importance primordiale, car elle assure la fiabilité du schéma numérique dans l'approximation de la vraie solution du processus stochastique sous-jacent. En comprenant et en évaluant les propriétés de convergence du schéma de Milstein symétrisé pour les EDS de type CEV, cette recherche apporte des connaissances précieuses au domaine plus large de la finance computationnelle et de l'analyse stochastique. À travers une revue de l'article, nous cherchons à obtenir des perspectives sur les forces et les limites du schéma de Milstein symétrisé et ses implications potentielles pour des applications pratiques.

## 2 Modèle CEV (Constant Elasticity of Variance)

La CEV est un modèle stochastique utilisé pour décrire l'évolution des prix d'actifs financiers. La caractéristique principale de la CEV est que la volatilité du modèle est proportionnelle à une puissance de la valeur de l'actif sous-jacent.

La dynamique d'un actif financier sous le modèle CEV est généralement décrite par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t^\gamma dW_t$$

avec la condition initiale  $X_0 = x_0$ , où :

- $X_t$  représente le prix de l'actif au temps  $t$ ,
- $\mu > 0$  est la constante de drift,
- $\sigma > 0$  est le paramètre de volatilité,
- $0 < \gamma < 1$  est le paramètre d'élasticité,
- $W_t$  est un mouvement brownien .

La nature de la CEV permet de modéliser certaines caractéristiques observées sur les marchés financiers, notamment la volatilité changeante en fonction du niveau des prix. Lorsque  $\gamma = 0$ , le modèle se réduit au modèle de volatilité constante, et à mesure que  $\gamma$  augmente, la volatilité devient plus sensible aux variations des prix.

### 2.1 Principales méthodes de simulation de CEV

La simulation numérique des modèles de type CEV peut être réalisée à l'aide de différentes méthodes. Nous présentons alors les principales. Pour ce faire, nous introduisons une partition  $\pi$  définie sur l'intervalle  $[0, T]$  par :

$$\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = T\}$$

et le pas de temps constant  $\Delta t = \frac{T}{N}$  et  $t_k = k \cdot \Delta t$

Dans tous les prochains schémas, nous travaillons sur la grille  $\pi$ .

#### Schéma d'Euler Explicite

La méthode d'Euler explicite consiste à discrétiser le temps en intervalles réguliers  $\Delta t$  et à utiliser une approximation simple pour estimer la valeur du processus à chaque pas de temps. La discrétisation temporelle est alors définie comme  $t_{n+1} - t_n = \Delta t$ . La méthode d'Euler explicite peut être formulée de la manière suivante avec  $\tilde{X}_0 = x_0$  la condition initiale :

$$\tilde{X}_{t_{n+1}} = \tilde{X}_{t_n} + \mu \tilde{X}_{t_n} \Delta t + \sigma \tilde{X}_{t_n}^\gamma \Delta W_n$$

où :

- $\tilde{X}_{t_{n+1}}$  est la valeur estimée du processus à l'instant  $t_{n+1}$ ,
- $\tilde{X}_{t_n}$  est la valeur connue du processus à l'instant  $t_n$ ,
- $\Delta W_n = W_{n+1} - W_n$ .

Cette méthode est simple à mettre en place. En revanche, elle est d'ordre un, ce qui signifie que l'erreur diminue linéairement avec le pas de temps. De plus, la stabilité de la méthode d'Euler dépend du pas de temps choisi. Un pas de temps trop grand peut conduire à une instabilité numérique.

## Méthode de Monte-Carlo

L'approche de Monte-Carlo est basée sur la simulation stochastique où l'on génère un nombre  $M$  de trajectoires du processus en utilisant des échantillons aléatoires pour simuler le mouvement brownien. À chaque pas de temps  $t_k$ , on simule une variable aléatoire  $\mathcal{N}(0, 1)$  indépendante que l'on multiplie par  $\Delta t$  pour simuler  $\Delta W_n$ , car  $\Delta W_n$  est égale en loi à  $\mathcal{N}(0, \Delta t) = \sqrt{\Delta t} \mathcal{N}(0, 1)$ .

Pour chaque trajectoire  $i$ , on approche la solution de l'EDP par :

$$\tilde{X}_{t_{n+1}}^{(i)} = \tilde{X}_{t_n}^{(i)} + \mu \tilde{X}_{t_n}^{(i)} \Delta t + \sigma \tilde{X}_{t_n}^{(i)\gamma} \sqrt{\Delta t} Z_{n+1}^{(i)}$$

avec  $\tilde{X}_0^{(i)} = x_0$  et  $Z_{n+1}$  qui suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  pour  $i \in \{1, \dots, M\}$ .

L'estimateur de Monte-Carlo est alors :

$$\hat{X}_{MC} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_T^{(i)}$$

La variance de l'estimateur de Monte-Carlo est de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ , où  $M$  est le nombre de simulations. Cela signifie que la précision de l'estimation s'améliore lorsque le nombre de simulations augmente, mais qui demande donc plus de calcul.

## Méthode de Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta est une famille de méthodes numériques utilisées pour résoudre des équations différentielles ordinaires. La forme la plus couramment utilisée est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4). Cette méthode est applicable à la résolution numérique d'équations différentielles stochastiques, y compris celles qui représentent des modèles tels que la CEV.

La méthode RK4 pour résoudre cette équation stochastique entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  avec un pas de temps  $\Delta t$  et  $\tilde{X}_0 = x_0$  peut être formulée comme suit :

On définit alors les coefficients intermédiaires :

- $k_1 = \mu \tilde{X}_{t_n} \Delta t + \sigma \tilde{X}_{t_n}^\gamma \sqrt{\Delta t} \Delta W_n$
- $k_2 = \mu \left( \tilde{X}_{t_n} + \frac{1}{2} k_1 \right) \Delta t + \sigma \left( \tilde{X}_{t_n} + \frac{1}{2} k_1 \right)^\gamma \sqrt{\Delta t} \Delta W_n$
- $k_3 = \mu \left( \tilde{X}_{t_n} + \frac{1}{2} k_2 \right) \Delta t + \sigma \left( \tilde{X}_{t_n} + \frac{1}{2} k_2 \right)^\gamma \sqrt{\Delta t} \Delta W_n$
- $k_4 = \mu \left( \tilde{X}_{t_n} + k_3 \right) \Delta t + \sigma \left( \tilde{X}_{t_n} + k_3 \right)^\gamma \sqrt{\Delta t} \Delta W_n$

Le schéma de Runge-Kutta est alors :

$$\tilde{X}_{t_{n+1}} = \tilde{X}_{t_n} + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

La méthode de Runge-Kutta à un ordre de convergence global de 4. Cela signifie que l'erreur globale de la méthode est proportionnelle à  $\Delta t^4$ .

## Méthode de Milstein

Le schéma de Milstein est une méthode numérique utilisée pour simuler des équations différentielles stochastiques (EDS) avec un terme de diffusion dépendant de la variable. Dans le cadre de la CEV, le schéma de Milstein pour approximer la solution de l'EDS entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  avec le pas de temps  $\Delta t$  et  $\tilde{X}_0 = x_0$ , peut être formulé comme suit :

$$\tilde{X}_{t_{n+1}} = \tilde{X}_{t_n} + \mu \tilde{X}_{t_n} \Delta t + \sigma \tilde{X}_{t_n}^\gamma \Delta W_n + \frac{1}{2} \sigma^2 \gamma \tilde{X}_{t_n}^{2\gamma-1} (\Delta W_n^2 - \Delta t)$$

Le schéma de Milstein possède un ordre de convergence fort égal à 1 et un ordre de convergence faible égal à 1/2.

### Balanced Milstein Scheme (BMS)

Le BMS est une modification du schéma de Milstein conçue pour améliorer la stabilité numérique lors de la simulation de modèles stochastiques, tel que le modèle CEV. L'idée est de réduire l'effet de certaines perturbations numériques qui peuvent affecter la performance du schéma de Milstein standard. Il ajuste les termes de correction d'ordre supérieur pour obtenir une meilleure stabilité tout en conservant une bonne précision numérique. Sa convergence n'est en revanche pas prouvée, mais les analyses numériques sont concluantes.

### Symmetrized Milstein Scheme (SMS)

Le schéma SMS se construit de la même manière que le schéma de Milstein que nous avons défini dans la section précédente. La seule différence réside dans le fait qu'on prend la valeur absolue à chaque étape de discrétisation du processus ce qui s'écrit comme suit entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  avec le pas de temps  $\Delta t$ ,  $\tilde{X}_0 = x_0$  et  $b$  la fonction drift :

$$\tilde{X}_{t_{n+1}} = |\tilde{X}_{t_n} + b(\tilde{X}_{t_n})\Delta t + \sigma \tilde{X}_{t_n}^\gamma \Delta W_n + \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma \tilde{X}_{t_n}^{2\gamma-1}(\Delta W_n^2 - \Delta t)|$$

On donne également la version continue de ce schéma, qui sera utilisée par la suite :

$$\tilde{X}_t = |\tilde{X}_{\eta(t)} + b(\tilde{X}_{\eta(t)})(t - \eta(t)) + \sigma \tilde{X}_{\eta(t)}^\alpha (W_t - W_{\eta(t)}) + \frac{\alpha\sigma^2}{2} \tilde{X}_{\eta(t)}^{2\alpha-1}((W_t - W_{\eta(t)})^2 - (t - \eta(t)))| \quad (1)$$

pour  $0 \leq t \leq T$  et  $\eta(t) = \sup_{k \in \{1, \dots, N\}} \{t_k : t_k \leq t\}$ .

Le SMS vise à améliorer la convergence et la précision par rapport au schéma de Milstein classique, notamment en préservant la symétrie de l'approximation. Cependant, il peut y avoir des considérations spécifiques et des ajustements à prendre en compte en fonction des paramètres du modèle CEV que nous verrons plus en détail dans la suite. La convergence forte de ce schéma est d'ordre un, sous certaines hypothèses que nous présenterons également par la suite.

## 2.2 Projected Milstein Scheme (PMS)

Le PMS est une variante du SMS et permet de traiter des sauts de manière plus stable et efficace numériquement que le SMS. On définit sa version discrète comme :

$$\tilde{X}_{t_{n+1}} = (\tilde{X}_{t_n} + b(\tilde{X}_{t_n})\Delta t + \sigma \tilde{X}_{t_n}^\gamma \Delta W_n + \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma \tilde{X}_{t_n}^{2\gamma-1}(\Delta W_n^2 - \Delta t))^+$$

où pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(x)^+ = \max(0, x)$ , avec  $\tilde{X}_0 = x_0$ .

Le PMS converge à l'ordre 1, sous les mêmes hypothèses que le SMS que nous verrons plus loin.

### Schéma Symmetrized Euler Scheme (SES)

Le schéma SES se construit de la même manière que le schéma d'Euler Explicite que nous avons défini précédemment. La seule différence réside dans le fait qu'on prend la valeur absolue à chaque étape de discrétisation du processus ce qui s'écrit comme suit entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  avec le pas de temps  $\Delta t$ ,  $\tilde{X}_0 = x_0$  et  $b$  la fonction drift :

$$\tilde{X}_{t_{n+1}} = |\tilde{X}_{t_n} + b(\tilde{X}_{t_n})\Delta t + \sigma \tilde{X}_{t_n}^\gamma \Delta W_n|$$

Cette méthode préserve le signe de la solution et peut être simulé facilement. Le taux de convergence du SES est  $\sqrt{\Delta t}$  sous des conditions appropriées pour  $b(0)$ ,  $\sigma^2$  et  $K$ . Lorsque  $\alpha > \frac{1}{2}$ , le SES converge à un taux de  $\sqrt{\Delta t}$  dès que  $b(0) > 0$ .

### Alfonsi Implicit Scheme (AIS)

L'AIS peut être appliqué au cadre de la CEV lorsque le drift est une fonction linéaire, toujours appelée  $b$ . A priori, l'AIS peut être appliqué pour  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ , mais il est pertinent de noter que seulement lorsque  $\alpha = \frac{1}{2}$ , l'AIS est en fait un schéma explicite. Dans ce contexte, l'AIS est bien défini seulement pour  $\sigma^2 > 4b(0)$ . En termes de convergence, lorsque  $\alpha = \frac{1}{2}$ , l'AIS converge dans la norme  $L^p(\Omega)$ , pour  $p \geq 1$ , à un taux  $\Delta t$  sous certaines hypothèses. Lorsque  $\alpha > \frac{1}{2}$ , l'AIS converge dès que  $b(0) > 0$ , à un taux  $\Delta t$  vers la solution exacte.

### Modified Euler Scheme (MES)

Le MES peut être appliqué au cadre de la CEV pour  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$  quand le drift a la forme  $b(x) = \mu_1(x) - \mu_2(x)x$  avec  $\mu_1$  et  $\mu_2$  des fonctions appropriées. Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , le taux de convergence est de 1 si  $\sigma^2 \gg b(0)$ , sinon il est de  $\rho < 1$ . Lorsque  $\alpha > \frac{1}{2}$ , le MES converge à un taux de 1 dès que  $b(0) > 0$ .

## 3 Résultats de l'article

Dans cette section, nous présentons les résultats clés de l'article *Strong convergence of the symmetrized Milstein scheme for some CEV-like SDEs*. Cette étude se concentre sur l'ordre de convergence du SMS pour l'EDS suivante :

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma |X_s|^\alpha dW_s \quad (2)$$

où  $x_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$  et  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ .

Le résultat principal de l'article démontre **la convergence forte à l'ordre 1** du SMS (1) vers le processus exact  $X$ . Cette convergence est établie dans l'espace  $L^p$  pour  $p \geq 1$ . Afin de prouver ce résultat sur l'ordre de convergence, plusieurs hypothèses sont formulées concernant le cadre de travail.

#### Hypothèses :

(i) Le paramètre de puissance  $\alpha$  dans le coefficient de diffusion de l'équation (2) appartient à  $[\frac{1}{2}, 1)$ . Le coefficient de drift  $b$  est  $K$ -Lipschitz, avec  $K > 0$  constant, et tel que  $b(0) > 0$ .

(ii) Soit  $p \geq 1$ . Pour contrôler la norme  $L^p$  de l'erreur, si  $\alpha > \frac{1}{2}$ , nous supposons que  $b(0) > 2\alpha(1 - \alpha)\frac{\sigma^2}{2}$ . Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , nous supposons que  $b(0) > 3(2[p \vee 2] + 1)\frac{\sigma^2}{2}$ .

(iii) Le coefficient de drift  $b$  est de classe  $C^2(\mathbb{R})$ , et  $b''$  a une croissance polynomiale.

### **Théorème :**

Soit le pas de temps maximal  $\Delta_{\max}(\alpha)$  défini comme suit :

$$\Delta_{\max}(\alpha) = x_0 (1 - \sqrt{\alpha}) b\sigma(\alpha) \wedge \begin{cases} \frac{1}{4\alpha K(\alpha)}, & \text{pour } \alpha \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{1}{4K} \wedge x_0, & \text{pour } \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sous les hypothèses précédentes, on énonce alors le théorème suivant :

Soit  $(X_t, 0 \leq t \leq T)$  le processus défini dans (2) et  $(\tilde{X}_t, 0 \leq t \leq T)$  le schéma de Milstein symétrisé donné dans (1). Alors, pour tout  $p \geq 1$  satisfaisant les hypothèses précédentes, il existe une constante  $C$  dépendant de  $p, T, b(0), \alpha, \sigma, K$ , et  $x_0$ , mais pas de  $\Delta t$ , telle que pour tout  $\Delta t \leq \Delta_{\max}(\alpha)$ ,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ E \left| X_t - \tilde{X}_t \right|^p \right\}^{1/p} \leq C \Delta t.$$

La preuve de ce théorème est présentée dans l'article mais nécessite de nombreux lemmes techniques pour y aboutir. On peut cependant remarquer qu'elle repose globalement sur les résultats classiques d'analyse en probabilité.

À noter que l'hypothèse (i) est une condition classique assurant l'existence et l'unicité d'une solution forte de l'équation (2), tandis que l'hypothèse (iii) garantit la convergence forte du schéma de Milstein. Cependant, l'hypothèse (ii) peut être particulièrement contraignante lorsque  $\alpha = \frac{1}{2}$  en raison de sa dépendance en  $p$ . De plus, dans tous les cas, elle suppose que le rapport  $b(0)/\sigma$  est suffisamment élevé. Autrement, des expériences numériques indiquent que la convergence demeure toujours d'ordre 1, mais de manière sous-linéaire, donc la vitesse de convergence diminue progressivement au cours du temps.

## **4 Tests Numériques**

Dans cette partie, nous allons discuter des résultats de convergence théoriques de l'article que nous avons également essayé de reproduire. Pour se faire, et comme expliqué précédemment, nous distinguons 2 cas :

1. Le cas  $\alpha = 0.5$  dans lequel notre solution de référence sera un schéma AIS et où nous avons étudié les schémas SES, SMS et AIS.
2. Le cas  $\alpha > 0.5$  dans lequel notre solution de référence sera un schéma SMS et où nous avons étudié les schémas SES et SMS.

Nous allons nous placer dans un cadre où  $x_0 = 1, T = 1$  et  $b(x) = 10 - 10x$  afin qu'elle vérifie les principales hypothèses de régularité pour assurer la convergence. Notre but étant de vérifier empiriquement les ordres de convergence, nous allons effectuer la régression suivante :

$$\log(\mathbb{E}(|\epsilon_{\tilde{T}}|)) = \rho \log(\Delta t) + C \tag{3}$$

Avec :

1.  $\mathbb{E}(|\epsilon_{\tilde{T}}|)$  correspond à l'erreur forte entre le schéma de discrétisation ... considéré et celui de référence .
2.  $\Delta t$  correspond au pas de temps dans le schéma de discrétisation
3.  $\rho$  correspondra à l'ordre de convergence du schéma de discrétisation

Explicitons maintenant rapidement les pas de temps que nous avons considérés. Comme dans l'article, nous avons décidé de choisir que la solution de référence soit implémentée pour le pas de temps  $\Delta_{T_{ref}} = \frac{\Delta_{max}(\alpha)}{2^{12}}$  et les schémas de discrétisations sont définies de la manière suivante :

$$\Delta t \in \{\frac{\Delta_{max}}{2^n} | n \in \{1, \dots, 9\}\}$$

Pour l'estimation de  $\mathbb{E}(|\epsilon_T|)$ , nous avons simulé  $M = 5000$  trajectoires (par rapport aux 50000 de l'article pour des raisons de temps de calcul) et calculé la quantité suivante :

$$\hat{\epsilon}_{T,\Delta t} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |X_{T,\Delta_{T_{ref}}}^i - X_{T,\Delta t}^i|$$

Avec :

1.  $\hat{\epsilon}_{T,\Delta t}$  qui correspond à notre estimateur de l'erreur forte pour un schéma dont le pas est  $\Delta t$
2.  $X_{T,\Delta_{T_{ref}}}^i$  correspond à la i-ème valeur terminale  $X_T$  générée avec un pas de discrétisation de  $\Delta_{T_{ref}}$
3.  $X_{T,\Delta t}^i$  correspond à la i-ème valeur terminale  $X_T$  générée avec un pas de discrétisation de  $\Delta t$  avec le même brownien que pour la solution de référence

#### 4.1 Résultats Numériques obtenus dans le cadre $\alpha = 0.5$

On donne ci-dessous les résultats que nous avons obtenus lors de l'implémentation ainsi que ceux de l'article

Paramètres	SMS	AIS	SES
$\sigma^2 = 1$	$\hat{\rho} = 0.98$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 1.02$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 0.53$ , $R^2 = 99.9\%$
$\sigma^2 = 4$	$\hat{\rho} = 0.98$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 1.02$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 0.51$ , $R^2 = 99.9\%$
$\sigma^2 = 6.25$	$\hat{\rho} = 0.98$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 1.03$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 0.51$ , $R^2 = 99.9\%$
$\sigma^2 = 9$	$\hat{\rho} = 0.99$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 1.02$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 0.51$ , $R^2 = 99.9\%$
$\sigma^2 = 36$	$\hat{\rho} = 0.60$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 0.66$ , $R^2 = 99.8\%$	$\hat{\rho} = 0.47$ , $R^2 = 99.9\%$

Tableau 1 : Résultats obtenus pour les différents ordres de convergence dans le cas  $\alpha = 0.5$

$\sigma^2$	Observed $L^1(\Omega)$ convergence rate $\hat{\rho}$ (and its $R^2$ value)									
	SMS		AIS		BMS		MES		SES	
	$\hat{\rho}$	( $R^2$ )	$\hat{\rho}$	( $R^2$ )	$\hat{\rho}$	( $R^2$ )	$\hat{\rho}$	( $R^2$ )	$\hat{\rho}$	( $R^2$ )
1	0.9956	(99.9%)	1.0060	(99.9%)	1.0055	(99.9%)	0.9955	(99.9%)	0.5941	(99.3%)
4	0.9969	(99.9%)	1.0054	(99.9%)	1.0037	(99.9%)	0.9961	(99.9%)	0.5344	(99.8%)
6.25	0.9976	(99.9%)	1.0043	(99.9%)	1.0002	(99.9%)	0.9941	(99.9%)	0.5237	(99.9%)
9	0.9984	(99.9%)	1.0015	(99.9%)	0.9859	(99.9%)	0.7891	(99.9%)	0.5164	(99.9%)
36	0.6410	(99.7%)	0.6282	(99.8%)	0.4538	(99.3%)	0.3575	(99.4%)	0.4718	(99.9%)

FIGURE 1 – Résultats de l'article de l'estimateur de l'ordre de convergence pour  $\alpha = 0.5$  et différentes valeurs de  $\sigma^2$

On donne également quelques graphiques représentant l'évolution du pas de temps par rapport à l'estimation  $L^1$  de l'erreur pour différentes valeurs de  $\sigma^2$  (échelle log-log)



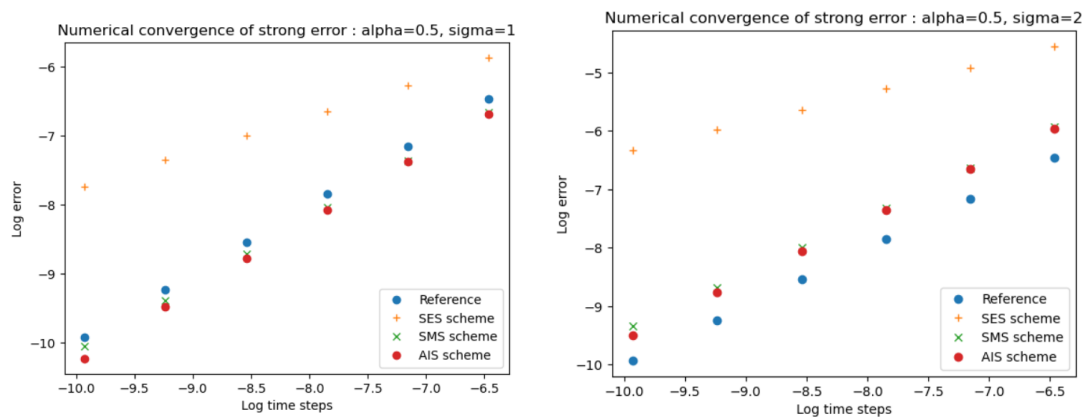


FIGURE 2 – Cas  $\sigma = 1$  à gauche et  $\sigma = 2$  à droite

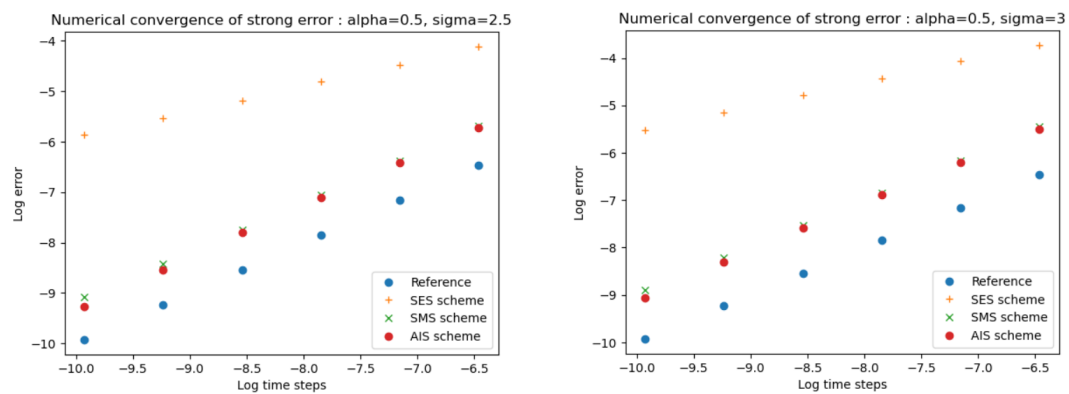


FIGURE 3 – Cas  $\sigma = 2.5$  à gauche et  $\sigma = 3$  à droite

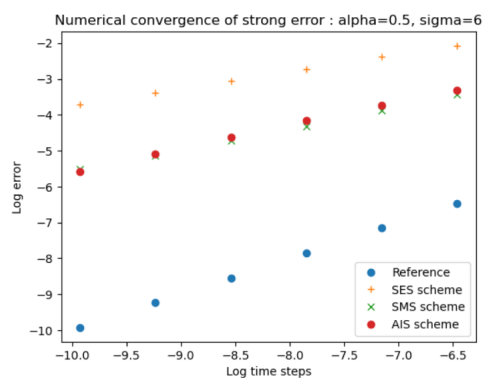


FIGURE 4 – Cas  $\sigma = 6$

**Résultats empiriques obtenus :** On voit que les résultats que nous avons obtenus sont plutôt similaires à ceux obtenus dans l'article.

Le cas ( $\sigma^2 = 1$ ) qui est tel que ( $10 = b(0) > 6\sigma^2$ ) nous dit que théoriquement les schémas SMS et AIS ont un ordre de 1 et le SES un ordre de 0.5. Cela est vérifié empiriquement notamment avec la 2 où l'on voit que les pentes sont très proches de 1 pour le SMS et le AIS et proche de 0.5 pour le SES.

Les cas ( $\sigma^2 = 4, 6.25$  ou 9) sont tels que théoriquement seul le AIS a un ordre de convergence théorique de 1 mais on observe avec les figure 2 et 3 que l'ordre du convergence du SMS semble être également de 1. Cela vient du fait que la condition sur les coefficients pour le SMS est suffisante mais ne garantit pas la sous-optimalité de l'ordre de convergence.

Le cas  $b(0) < \sigma^2 = 36$  où tous les schémas ont un comportement sous-linéaire comme l'illustre 4. Cela permet de mettre en évidence que les conditions sur les paramètres énoncés dans les hypothèses du théorème se doivent d'être vérifiés si on veut observer le comportement optimal

## 4.2 Résultats Numériques obtenus dans le cadre $\alpha > 0.5$

On donne ci-dessous les résultats que nous avons obtenus lors de l'implémentation ainsi que ceux de l'article

Paramètres	SMS	SES
$\gamma = 0.6, \sigma^2 = 49$	$\hat{\rho} = 0.97$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 0.54$ , $R^2 = 99.9\%$
$\gamma = 0.6, \sigma^2 = 53.29$	$\hat{\rho} = 0.96$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 0.54$ , $R^2 = 99.9\%$
$\gamma = 0.6, \sigma^2 = 144$	$\hat{\rho} = 0.60$ , $R^2 = 99.1\%$	$\hat{\rho} = 0.51$ , $R^2 = 99.9\%$
$\gamma = 0.7, \sigma^2 = 64$	$\hat{\rho} = 0.99$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 0.56$ , $R^2 = 99.6\%$
$\gamma = 0.7, \sigma^2 = 81$	$\hat{\rho} = 0.97$ , $R^2 = 99.9\%$	$\hat{\rho} = 0.59$ , $R^2 = 99.1\%$
$\gamma = 0.7, \sigma^2 = 225$	$\hat{\rho} = 0.89$ , $R^2 = 99.0\%$	$\hat{\rho} = 0.73$ , $R^2 = 99.8\%$

Tableau 2 : Résultats obtenus pour les différents ordres de convergence dans le cas  $\alpha > 0.5$

Parameters		Observed $L^1(\Omega)$ convergence rate $\hat{\rho}$ (and its $R^2$ value)					
$\alpha$	$\sigma^2$	SMS		BMS		SES	
		$\hat{\rho}$	$(R^2)$	$\hat{\rho}$	$(R^2)$	$\hat{\rho}$	$(R^2)$
0.6	49	0.9819	(99.9%)	0.7296	(99.1%)	0.5273	(99.8%)
	53.29	0.9766	(99.9%)	0.7788	(99.3%)	0.5133	(99.9%)
	144	0.6609	(98.9%)	0.4336	(97.3%)	0.5074	(99.9%)
0.7	64	1.004	(99.9%)	0.9022	(99.7%)	0.5242	(99.8%)
	81	0.9991	(99.9%)	0.8813	(99.7%)	0.5327	(99.7%)
	225	0.9146	(99.7%)	0.6497	(97.6%)	0.6410	(99.2%)

FIGURE 5 – Résultats de l'article de l'estimateur de l'ordre de convergence pour différentes valeurs de  $\alpha > 0.5$  et différentes valeurs de  $\sigma^2$

On donne également quelques graphiques représentant l'évolution du pas de temps par rapport à l'estimation  $L^1$  de l'erreur pour différentes valeurs de  $\sigma^2$  (échelle log-log)

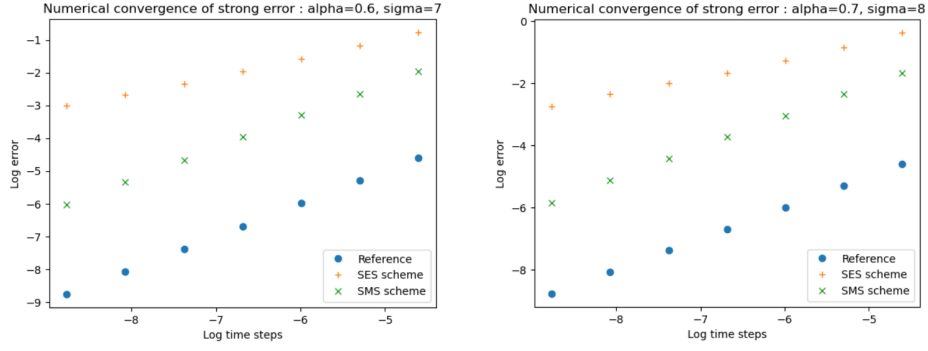


FIGURE 6 – Cas  $\alpha = 0.6$  et  $\sigma = 7$  à gauche et  $\alpha = 0.7$  et  $\sigma = 8$  à droite

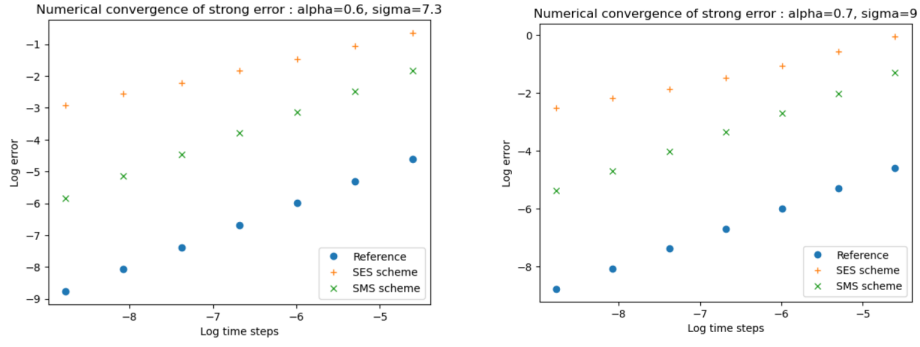


FIGURE 7 – Cas  $\alpha = 0.6$  et  $\sigma = \sqrt{53.29}$  à gauche et  $\alpha = 0.7$  et  $\sigma = 9$  à droite

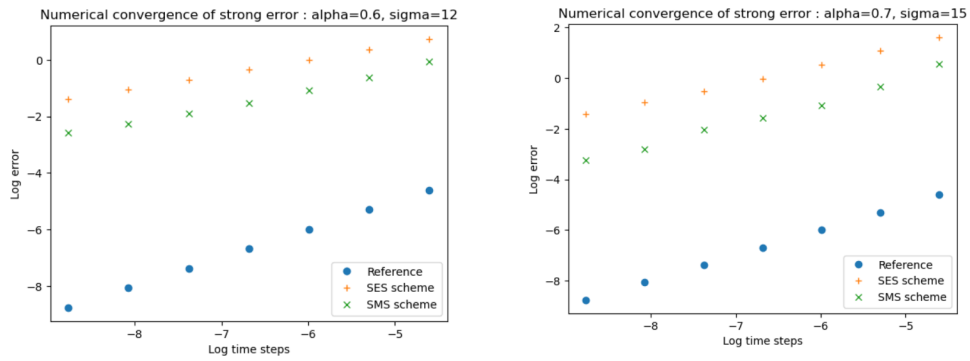


FIGURE 8 – Cas  $\alpha = 0.6$  et  $\sigma = 12$  à gauche et  $\alpha = 0.7$  et  $\sigma = 15$  à droite

**Résultats empiriques obtenus :** On voit également que les résultats que nous avons obtenus sont similaires à ceux obtenus dans l'article.

Les cas où  $(b(0) > 2\alpha(1 - \alpha)^2)(\sigma = 7 \text{ ou } \sigma = 8)$ , c'est à dire les cas où on peut appliquer les résultats du théorème et on observe effectivement un ordre de convergence de 1 pour le schéma SMS comme l'illustre 6

Les cas  $(b(\sigma^2 = 53.29 \text{ ou } \sigma^2 = 81))$  sont tels que les hypothèses du théorème ne sont pas vérifiées mais les simulations numériques mettent en évidence le fait qu'on observe toujours l'ordre de convergence de 1 comme l'illustre 7

Les cas où  $\sigma \gg b(0)$  c'est à dire ici  $(\sigma = 12 \text{ et } \sigma = 15)$  sont telles qu'on n'observe plus l'ordre de convergence de 1 et qu'on est dans la situation du comportement sous-linéaire comme l'illustre 8. Cela montre que des restrictions sur les coefficients doivent être effectuées pour observer l'ordre de convergence de 1. Cependant, la condition du théorème est seulement suffisante mais pas nécessaire comme l'ont montré les graphiques 7

## 5 Exemple d'application du SMS en Finance : Pricing d'un Zéro Coupon par Multilevel Monte Carlo (MLMC)

Le MLMC est une technique numérique améliorée basée sur la méthode classique de Monte Carlo pour estimer le prix d'actifs financiers tels que des options. Il exploite la nature séquentielle des simulations financières pour améliorer l'efficacité numérique.

### Principes Fondamentaux :

1. **Niveaux de Discrétisation :** Diviser le processus stochastique en plusieurs niveaux de résolution, avec des discrétisations plus grossières aux niveaux inférieurs et plus fines aux niveaux supérieurs.
2. **Estimation d'Erreur :** Estimer l'erreur entre les niveaux en utilisant les résultats des simulations pour identifier les composantes corrigeables par des résolutions plus élevées.
3. **Combinaison des Résultats :** Combiner les résultats des différentes résolutions de manière appropriée pour obtenir une estimation plus précise du prix de l'actif financier.

Le MLMC permet d'atteindre une précision donnée avec un coût informatique inférieur par rapport à la méthode de Monte Carlo classique, surtout dans des conditions de marché complexes.

C'est dans ce contexte que nous présentons les résultats de tests numériques visant à évaluer le prix d'un zéro coupon (ZC) de maturité  $T$  et à comparer les performances du SMS, PMS, AIS et BMS.

### Rappel sur les ZC :

Une obligation ZC est une obligation pour laquelle le porteur ne reçoit aucun paiement d'intérêts (coupons) pendant toute la durée de vie de l'obligation. Les intérêts sont capitalisés plutôt que d'être distribués au fur et à mesure, et ils sont versés dans leur totalité à la maturité, notée ici  $T$ .

Son prix à  $t = 0$  pour une maturité  $T$  est donné par  $\mathbb{E} \left[ e^{-\int_0^T r(s) ds} \right]$ ,

avec  $dr_t = (a - br_t) dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t$ , la dynamique du taux d'intérêt dans le modèle CIR ( $\alpha = 0.5$  et  $b(x) = a - bx$ ).

Le prix des ZC admet une formule bien connue de la forme  $B(0, T) = A(T)e^{B(T)r_0}$ , où  $r_0$  est la valeur initiale de  $r$ , et  $A$  et  $B$  des fonctions qui dépendent de  $T, a, b$  et  $\sigma$ .

Soit  $\mathbb{E}[\hat{B}(\Delta t^{(l)})]$  une approximation faible en temps discret de  $B(0, T)$  avec un pas de temps  $\Delta t^{(l)}$ . On considère alors l'estimateur de MC de niveau  $L$  suivant :

$$\hat{Y}_T = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \hat{B}^{(i)}(\Delta t^{(0)}) + \sum_{l=1}^L \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} \left\{ \hat{B}^{(i)}(\Delta t^{(l)}) - \hat{B}^{(i)}(\Delta t^{(l-1)}) \right\}.$$

Pour une erreur quadratique moyenne ciblée  $\varepsilon^2$  dans le calcul de la quantité  $B(0, T)$  :

$$\mathbb{E} \left[ (\hat{Y}_T - B(0, T))^2 \right] = \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

on peut choisir la paramétrisation a priori suivante de la méthode MLMC pour minimiser le temps de calcul : nous utilisons l'estimation  $L = \frac{\log \varepsilon^{-1}}{\log 2}$ . D'un niveau à l'autre, le pas de temps est divisé par 2,  $\Delta t^{(l)} = \frac{1}{2^{(l+1)}}$ , et  $N_l$  le nombre de trajectoires à simuler est estimé avec la formule de Giles (cliquez [ici](#) pour plus de détails).

Dans l'article, les calculs ont été réalisés pour un taux d'intérêt initial  $r_0 = 1$ ,  $T = 1$ , des paramètres de drift  $a = b = 10$ , et  $\sigma = 1$ . Pour la simulation MLMC, on fixe un nombre minimum de trajectoires à 500 et un nombre minimal de niveaux à 6.

On teste ensuite les quatre schémas pour les trois erreurs ciblées décroissantes suivantes :  $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ ,  $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ . Pour  $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ , on observe une erreur de l'ordre de  $1.0 \times 10^{-5}$  pour le SMS, tandis qu'elle est de  $1.0 \times 10^{-4}$  pour les autres, et ce avec un nombre inférieur de trajectoires simulées pour le SMS. Le temps de calcul est donc plus court. De plus, les schémas de Milstein présentent de meilleures performances que ceux d'Euler. Enfin, à mesure que  $\varepsilon$  diminue, le SMS se comporte nettement mieux que sa version PMS, avec des temps CPU respectifs de 1589.6 et 1910.7, et des erreurs respectives de  $4.752 \times 10^{-6}$  et  $5.889 \times 10^{-6}$ , toujours avec un nombre plus faible de trajectoires simulées. Dans ce cadre là, le SMS est donc un choix à privilégier.

## 6 Conclusion

Ce projet sur l'étude des EDS CEV nous a permis d'étudier le schéma SMS à travers l'étude théorique de l'ordre de convergence de l'erreur forte. On a ainsi pu voir que sous certaines conditions sur la régularité du drift et sur les hypothèses entre les coefficients, on pouvait obtenir un ordre de convergence de 1 comme classiquement dans le schéma de Milstein pour les fonctions de drift et de diffusion  $C^2$ . On a pu également mettre en oeuvre les différents schémas numériques pour observer les différents comportements des schémas en fonction du choix des paramètres effectués. Cela nous a notamment permis d'observer que la condition sur les coefficients selon que  $\alpha = 0.5$  ou non n'est pas une condition nécessaire mais seulement suffisante à l'observation d'un ordre de convergence de 1. En effet, dans certains cas, on pouvait encore observer un ordre de convergence de 1 bien que la condition ne soit pas vérifiée mais lorsque  $\sigma$  était significativement élevée par rapport à  $b(0)$  alors, on observait ce comportement sous linéaire dans l'ordre de convergence. On a également pu étudier grâce à l'article un cadre d'utilisation du schéma SMS en finance via le calcul de prix de ZC par approche Monte-Carlo Multilevel. On a pu observer que dans ce cadre d'approche MLMC, le SMS offrait de meilleurs résultats en terme de temps d'exécution.

## 7 Annexes

### 7.1 Tableau résumant les ordres de convergence des schémas étudiés dans ce rapport

On donne ci-dessous les tableaux résumant les conditions théoriques de convergence pour les différents schémas que nous avons étudiés que ce soit dans le cas  $\alpha = 0.5$  ou  $\alpha > 0.5$

Scheme	Norm	Drift	Convergence's Condition	Theoretical rate
SMS	$L^p, p \geq 1$	$b$ Lipschitz, $b \in \mathcal{C}^2$ $b''$ with polynomial growth	$b(0) > 3(2[p \vee 2] + 1) \frac{\sigma^2}{2}$	1
AIS [2]	$L^p, p \in [1, \frac{4b(0)}{3\sigma^2})$	$b(x) = a - bx$	$b(0) > (1 \vee \frac{3}{4}p)\sigma^2$	1
BMS				undetermined
MES [6]	$L^1$	$b(x) = \mu_1(x) - \mu_2(x)x$ $\mu_i \in \mathcal{C}_b^2 \cap \mathcal{C}_b^0, \mu_1 \geq 0$ $\mu'_1 \leq 0, \mu'_2 \geq 0$	$b(0) > \frac{5\sigma^2}{2}$	1
			$b(0) > \frac{3\sigma^2}{2}$	$\frac{1}{2}$
			$b(0) > \sigma^2$	$(\frac{1}{6}, \frac{1}{2} - \frac{\sigma^2}{2b(0)+\sigma^2})$
SES [3]	$L^p, p \geq 1$	$b$ Lipschitz	$b(0) > \left[ \sqrt{\frac{8}{\sigma^2}} \mathcal{K}(\frac{p}{2} \vee 1) + 1 \right] \frac{\sigma^2}{2},$ $\mathcal{K}(q) = K(16q - 1)$ $\vee 4\sigma^2(8p - 1)^2$	$\frac{1}{2}$

FIGURE 9 – Résumé des conditions de convergence pour les différents schémas dans le cas  $\alpha = 0.5$

Scheme	Norm	Drift	Convergence's Condition	Theoretical rate
SMS	$L^p, p \geq 1$	$b$ Lipschitz, $b \in \mathcal{C}^2$ $b''$ with polynomial growth	$b(0) > 2\alpha(1 - \alpha)^2\sigma^2$	1
AIS	$L^p, p \in [1, \frac{4b(0)}{3\sigma^2})$	$b(x) = a - bx$	$b(0) > 0$	1
BMS				undetermined
MES	$L^1$	$b(x) = \mu_1(x) - \mu_2(x)x$ $\mu_i \in \mathcal{C}_b^2 \cap \mathcal{C}_b^0, \mu_1 \geq 0$ $\mu'_1 \leq 0, \mu'_2 \geq 0$	$b(0) > 0$	1
SES	$L^p, p \geq 1$	$b$ Lipschitz	$b(0) > 0$	$\frac{1}{2}$

FIGURE 10 – Résumé des conditions de convergence pour les différents schémas dans le cas  $\alpha > 0.5$

### 7.2 Code Python pour la génération des ordres de convergence

Le code est consultable directement sur cette page GitHub