MP5-Interrogation

Exercice 1. (Pour s'échauffer)

Émile achète pour sa maman une bague contenant 2g d'or, 5g de cuivre et 4g d'argent. Il la paie 6200 euros.

Paulin achète pour sa maman une bague contenant 3g d'or, 5g de cuivre et 1g d'argent. Il la paie 5300 euros.

Frédéric achète pour sa chérie une bague contenant 5g d'or, 12g de cuivre et 9g d'argent. Combien va-t-il la payer ?

On note que $(5,12,9)=\frac{11}{5}(2,5,4)+\frac{1}{5}(3,5,1)$. Ainsi, la dernière bague peut être réalisée avec 11/5 de la première bague et 1/5 de la dernière bague. Son coût est donc $\frac{11}{5}6200+\frac{1}{5}5300=14700$.

Exercice 2. Montrer que les vecteurs $u_1=(0,1,1), u_2=(1,0,1)$ et $u_3=(1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $u=(1,1,1)$.

Puisque (u_1,u_2,u_3) est une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, à savoir $\mathbb{R}^3$, il suffit de prouver qu'elle est libre. L'équation $au_1+bu_2+cu_3=0$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} b+c &= 0 \\ a+c &= 0 \\ a+b &= 0 \end{cases}$$

puis à :

$$\begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{cases}$$

La famille est donc libre. Pour trouver les coordonnées du vecteur $(1,1,1)$, il suffit de résoudre l'équation $(1,1,1)=au_1+bu_2+cu_3$, qui est équivalente à :

$$\begin{cases} b+c &= 1 \\ a+c &= 1 \\ a+b &= 1 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à $a=b=c=1/2$. On a donc $(1,1,1)=\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{2}u_3$.

Exercice 3. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[1,1]$ qui sont affines sur $[1,0]$ et sur $[0,1]$. Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

E est clairement une structure stable par addition de vecteurs et par multiplication par un scalaire (vu le temps imparti cette réponse me suffit mais dans l'idéal il faudrait vérifier que E vérifie toutes les conditions de la définition d'un espace vectoriel, c'est assez facile).

Pour trouver une base de E, partons de$f\in E$. Puisque f est affine sur $[1,0]$, il existe des constantes a et b telles que, pour tout $x\in[1,0]$, on a $f(x)=ax+b$. Puisque f est affine sur $[0,1]$, il existe des constantes c et d telles que, pour tout $x\in[0,1]$, on a $f(x)=cx+d$. La continuité de f en 0 entraine que $b=d$. Finalement, on a prouvé que f est élément de E si et seulement s'il existe trois réels a, b et c tels que

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x\in[-1,0] \\ cx+b & \text{si } x\in[0,1] \end{cases}$$

Ceci suggère que la dimension de E est 3. Encore faut-il trouver la base à partir de l'écriture précédente. Posons pour cela

$$f_1(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[-1,0] \\ 0 & \text{si } x\in[0,1] \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,0] \\ x & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

f_1, f_2 et f_3 sont des éléments de E, et la discussion précédente montre que tout élément de E s'écrit $af_1 + cf_2 + bf_3$. Autrement dit, (f_1, f_2, f_3)est une famille génératrice de E. De plus, (f_1, f_2, f_3) est une famille libre. En effet, si $_1 f_1 +_2 f_2 +_3 f_3 = 0$, l'évaluation en $x = 0$ donne $_3 = 0$, puis celle en -1 donne $_1 = 0$ et enfin celle en 1 donne $_2 = 0$. On conclut finalement que (f_1, f_2, f_3) est une base de E qui est donc de dimension 3.

Exercice 4. Démontrer que les familles suivantes sont libres dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} &(x \mapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}; \\ &(x \mapsto |x - a|)_{a\in\mathbb{R}}; \\ &(x \mapsto cos(ax))_{a>0}; \\ &(x \mapsto (sinx)^n)_{n\geq 1}. \end{aligned}$$

Faisons le premier :
Soient $a_1 < a_2 << a_p$, où p est arbitraire. Il suffit de montrer que $(e^{a_1 x}, \ldots, e^{a_p x})$ est une famille libre. Considérons une relation de liaison $\lambda_p e^{a_1 x} + +\lambda_p e^{a_p x}$. On factorise par le terme dominant, c'est-à-dire $e^{a_p x}$. On obtient

$$e^{a_p x}(\lambda_p + \lambda_{p-1} e^{(a_{p-1} - a_p)x} + +\lambda_1 e^{(a_1 - a_p)x)} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On simplifie par $e^{a_p x}$, qui ne s'annule jamais, et on fait tendre x vers $+\infty$. Puisque $e^{(a_j - a_p)x}$ tend vers 0 pour $j < p$, le membre de gauche converge vers λ_p qui vaut donc 0. On répète le procédé en factorisant ensuite par $e^{a_{p1} x}$ pour prouver que $\lambda_{p-1} = 0$, et on obtient successivement que $\lambda_p, \lambda_{p-1}, \ldots$ et finalement λ_1 sont nuls. La famille est donc effectivement libre.

Exercice 5. Soient F et G les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y - 2z = 0\} \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y = x + z\}. \end{aligned}$$

Déterminer la dimension de F, puis la dimension de G. Calculer $F \cap G$. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Dimension de F : On a

$$(x, y, z) \in F \iff x - y - 2z = 0$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x &= y + 2z \\ y &= y \\ z &= z \end{cases}$$

La famille constituée par les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(2, 0, 1)$ est donc une famille génératrice de F. Comme elle est libre, c'est une base de F qui est de dimension 2.

Dimension de G : On cherche de même une base de G :

$$(x, y, z) \in G \iff x = 2y = x + z$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x & = 2y \\ y & = y \\ z & = 0 \end{cases}$$

La famille constituée par le seul vecteur non-nul $(2, 1, 0)$ engendre G et elle est évidemment libre. C'est une base de G et donc $dim(G) = 1$.

Calcul de $F \cap G$: On a (x, y, z) ∈F $\cap G$ si et seulement si

$$\begin{cases} x & = y + 2z \\ y & = 2y \\ z & = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $x = y = z = 0$.Ainsi, $F \cap G = 0$. On en déduit que $dim(F \cap G) = 0$. Il vient

$$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = 2 + 1 - 0 = 3.$$

$F + G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. On en déduit que $F + G = \mathbb{R}^3$. Puisque de plus $F \cap G = 0$, F et G sont supplémentaires.

Exercice 6. Démontrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? Soit E l'ensemble des suites arithmétiques complexes. On vérifie sans difficulté que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites complexes, et donc que c'est un espace vectoriel. Pour calculer sa dimension, on remarque que l'on connait parfaitement une suite arithmétique si l'on connait son premier terme et sa raison. Ceci laisse à penser que la dimension de E est égale à deux. Prouvons-le. Si (u_n) est une suite arithmétique, alors son premier terme est u_0 et sa raison est égale à $u_1 - u_0$. Considérons donc

$$\Phi : (u_n) \in E \mapsto (u_0, u_1 - u_0) \in C^2$$

Φ est clairement une application linéaire. Elle est injective : si $\Phi((u_n)) = 0$, alors (u_n) est une suite arithmétique de premier terme nul et de raison nulle, et donc $u_n = 0$ pour tout entier n. Elle est aussi surjective : si $(a, b) \in \mathbb{C}2$, alors la suite (u_n) définie par $u_n = a + nb$ est élément de E et vérifie $\Phi((u_n)) = (a, b)$. Autrement dit, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et $\mathbb{C}^2$. Puisque $\mathbb{C}^2$ est de dimension 2, E est aussi de dimension 2. Remarquons que l'on peut aussi trouver une base de E. Si (a_n) est la suite définie par $a_n = 1$ pour tout entier n, et (b_n) est la suite définie par $b_n = n$ pour tout entier n, alors ces deux suites sont éléments de E et forment une famille libre. De plus, si un est un élément de E, alors elle peut s'écrire $u_n = c + nd = ca_n + db_n$, et donc (u_n) est combinaison linéaire de (a_n) et (b_n). Autrement dit, $((a_n), (b_n))$ est une base de E, qui est donc de dimension 2.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 2y - z = 0\} \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + 2z = 0\}. \end{aligned}$$

Donner une base de F et une base de G. Démontrer que F et G sont supplémentaires, puis décomposer un élément $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans $F \bigoplus G$

Base de F :

Un élément $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à F si et seulement si

$$\begin{cases} x + 2y + z & = 0 \\ x + 2y - z & = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x &= -2y \\ y &= y \\ z &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, F est engendré par le vecteur $(-2, 1, 0)$ qui est non-nul et qui constitue une base de F (en particulier, F est de dimension 1).

Base de G :

D'autre part, Un élément $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à G si et seulement si

$$\begin{cases} x &= -y - z \\ y &= y \\ z &= z \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(x, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$. Ainsi, G est le sous-espace vectoriel engendré par $(-1, 1, 0)$ et $(-2, 0, 1)$ et comme ces vecteurs ne sont pas proportionnels, ils constituent une base de G qui est de dimension 2.

Supplémentaire et décomposition :

Pour démontrer que F et G sont supplémentaires, on peut vérifier que la réunion de la base de F et de la base de G trouvées à la question précédente forme une base de $\mathbb{R}^3$. On peut aussi répondre aux deux questions en une seule étape, en démontrant que tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique $a(-2, 1, 0) + b(-1, 1, 0) + c(-2, 0, 1)$. Cette égalité conduit au système

$$\begin{cases} x &= -2a - b - 2c \\ y &= a + b \\ z &= c \end{cases}$$

dont l'unique solution est $a = -x - y - 2z$, $b = x + 2y + 2z$, $c = z$. Ceci prouve que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sevs de E. Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

1. $F \cap G = \{0\}$;
2. $F + G = E$;
3. $dim(F) + dim(G) = dim(E)$.

Tout repose sur la formule

$$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

et sur la propriété : si H est un sev de E tel que $dim(H) = dim(E)$, alors $H = E$.

Si 1. et 2. sont vraies, alors

$$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = dim(F) + dim(G)$$

tandis que E=F+G implique

$$dim(E) = dim(F) + dim(G).$$

3. est donc vérifié.

Si 1. et 3. sont vraies, alors

$$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = dim(E) - 0 = dim(E).$$

Ainsi, $F+G$ est un sev de E de même dimension que E : $F+G=E$.

Si 2. et 3. sont vraies, alors

$$dim(E) = dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = dim(E) - dim(F \cap G).$$

On en déduit que $dim(F \cap G) = 0$ et donc que $F \cap G = 0$.

Exercice 9. (*) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un entier $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f_n = 0$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour chaque i, il existe un entier n_i tel que $f^{n_i}(e_i) = 0$. Posons $n = max(n_1, \dots, n_p)$ et remarquons que pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$,

$$f^n(e_i) = f^{n-n_i}(f^{n_i}(e_i)) = f^{n-n_i}(0) = 0.$$

Considérons maintenant $x \in E$ et écrivons-le $x = x_1e_1 + +x_pe_p$. On obtient

$$f^n(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i f^n(e_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i 0_E = 0_E$$