Introduction à la finance mathématique
TD 6 (23/5/18): Formule de Cameron-Martin, marchés financiers en temps continu et le modèle de Black-Scholes

Exercice 1 (Formule de Cameron-Martin)**.** Soit$(B_t, 0 \leq t \leq T)$ un M.B.S. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de filtration $(\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T)$.

Soit $\mathbb{Q}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ équivalente à $\mathbb{P}$. Alors, pour tout $t \leq T$, la densité de Radon Nikodym de $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}_t}$ par rapport à $\mathbb{P}_{\mathcal{F}_t}$ est notée Z_t:

$$Z_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} > 0$$

où $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}_t}$, $\mathbb{P}_{\mathcal{F}_t}$ sont les restrictions des probabilité à la tribu $\mathcal{F}_t$.

1. Montrer que le processus Z est une $\mathcal{F}$-martingale positive par rapport à $\mathbb{P}$. Calculer $\mathbb{E}[Z_t]$ pour tout t.

2. Montrer que sous les hypothèses précédentes on a la règle de Bayes : Si Y est $\mathcal{F}_t$-mesurable,

$$\forall s \leq t, \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y|\mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[YZ_t|\mathcal{F}_s]$$

Soit maintenant $\mathbb{Q}$ la probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = Z_t := e^{-\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

3. Montrer que Z est bien une martingale continue positive. Calculer $\mathbb{E}[Z_t]$.

4. On rappelle que si un processus continu vérifie

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}\left[e^{i\theta(W_t - W_s)}|\mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{\theta^2}{2}(t-s)}$$

alors W est un Mouvement Brownien. Montrer que le processus W défini par $W_t = B_t + \sigma t$ est un Mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}$.

Exercice 2 (Le risk reversal)**.** On se place dans le cadre du modèle Black-Scholes standard avec volatilité σ et taux d'intérêt r. Un risk reversal est un contrat qui consiste à vendre un put de strike K_1 et à acheter un call de strike $K_2 > K_1$.

1. Tracer le pay-off du risk-reversal en fonction de la valeur du sous-jacent à l'échéance S_T.

2. Tracer le vega du risk-reversal à l'instant $T = 0$ en fonction de la valeur du sous-jacent S_0.

3. Pour une valeur fixée de S_0, donner une condition sur les strikes K_1 et K_2 pour que le risk-reversal soit *vega-neutre*. Interpréter cette condition en termes du delta du call et du put.

Exercice 3 (Options puissance)**.** Dans cet exercice on considère *une option puissance de type A*, de pay-off

$$H_T^A = (S_T^2 - K^2)^+$$

et *une option puissance de type B* de pay-off

$$H_T^B = ((S_T - K)^+)^2,$$

dans le cadre du modèle de Black-Scholes.

1. En utilisant la valorisation risque-neutre, calculer le prix F_t à l'instant t d'un actif qui paie S_T^2 à l'instant T. Montrer que F_t^1 suit le modèle de Black-Scholes, calculer sa volatilité.

2. Montrer que l'option puissance de type A peut être vue comme une option call standard sur l'actif F^1. En utilisant la formule de Black-Scholes, calculer le prix à l'instant t de l'option puissance de type A.

3. Calculer le delta (en utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée) et décrire la stratégie de couverture dynamique pour cette option.

4. Montrer que le pay-off de l'option puissance de type B peut être exprimé en termes du pay-off de l'option de type A et du pay-off de l'option call de strike K.

5. En déduire le prix de l'option de type B à l'instant $t < T$.

6. Calculer le delta de l'option puissance de type B.

7. En déduire le gamma de l'option puissance de type B et montrer qu'il est borné par une constante indépendante de t et S_t. Quelles sont les implications pour la couverture de cette propriété?

Exercice 4 (Leveraged ETF)**.** On considère le modèle de Black-Scholes standard avec un actif sous-jacent risqué (indice de marché) de dynamique

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

où W est un mouvement brownien, et un actif sans risque S^0, capitalisé avec le taux sans risque r. On suppose que $\mu > r$.

Un *Leveraged ETF* est un fonds géré en utilisant la stratégie dynamique suivante: à chaque instant t,

- Une proportion m de la valeur du fonds est investie dans l'actif risqué S;

- Un proportion $1-m$ de la valeur est investie dans l'actif sans risque.

Ici, m est une constante, qui peut être supérieure à 1. Cette dernière situation correspond à emprunter pour investir plus dans l'actif risqué: on appelle cela levier ou leverage. La valeur du leveraged ETF à l'instant t sera notée par V_t; on pose $V_0 = v$ (investissement initial).

1. Ecrire l'équation différentielle stochastique vérifiée par V. Quelle est la volatilité de V?

2. Calculer la valeur V_t en resolvant explicitement l'EDS.

3. Calculer l'espérance de V_T. Au vu de votre résultat, quelle est la valeur de m à prendre pour maximiser la performance de la stratégie.

4. La médiane d'une variable aléatoire Z est la valeur z_0 telle que $\mathbb{P}[Z \leq z_0] = \mathbb{P}[Z > z_0] = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, Z est inférieur ou égal à z_0 dans 50% des cas. Calculer la médiane de W_t.

5. Calculer la médiane de V_T. Si le but de l'investisseur est de maximiser la performance du fonds dans 50% des cas, quelle valeur de m doit-il prendre?

6. Calculer le prix d'une option call de pay-off $(V_T - K)^+$.

7. Imaginez que vous êtes conseiller en investissement, et un client vous demande un produit avec les caractéristiques suivantes:

   - Il souhaite investir un montant initial x, avec un horizon d'investissement T.
   - Le capital en T, noté par X_T doit dans tous les cas être supérieur ou égal à $B > 0$.
   - L'espérance du rendement $\mathbb{E}\left[\frac{X_T - x}{x}\right]$ doit être égale à $\alpha > \frac{B-x}{x}$.

   (a) Est-il toujours possible de satisfaire les souhaits de l'investisseur? Donner la relation entre x et B pour qu'un tel produit puisse exister.

   (b) Dans le cas où un tel investissement est possible, proposer une stratégie utilisant un actif sans risque et un leveraged ETF, avec le multiplicateur m à préciser.