1A - Théorie des Probabilités. 2024-2025
Prof. Brunel

Examen de mi-parcours

1. Durée de l'examen : 1 heure 30.
2. Feuille recto-verso manuscrite autorisée.
3. L'examen comporte 23 points au total. Votre note sera le minimum entre le nombre de points obtenus et 20.
4. Il est impératif que les questions soient traitées dans l'ordre, quitte à laisser de l'espace entre chaque question. Les copies ne respectant pas cette consigne ne seront pas corrigées (et recevront donc automatiquement la note 0).
5. Les copies mal présentées et/ou illisibles ne seront pas corrigées (et recevront donc automatiquement la note 0).
6. L'accent sera mis sur la rigueur et la précision de vos réponses. Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.
7. Bon courage !

Exercice 1 (15 points)

1. (3pt) Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0,1]$.
   a) Expliquer pourquoi on peut définir une variable aléatoire, notée $\ln(1/U)$, de sorte que sa loi soit définie de manière non ambiguë.
   b) Déterminer la fonction de répartition de $\ln(1/U)$.
   c) En déduire la loi de $\ln(1/U)$.
2. (3pt) Soient X et Y deux variables aléatoires i.i.d de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que X/Y admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et la déterminer *(pour vérifier la cohérence de votre calcul, posez-vous la question suivante : le résultat doit-il dépendre de λ ?)*.
3. (2pt) Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles i.i.d. On suppose que $X_1 \geq 0$ presque sûrement et que pour tout $t > 0$, $P(X_1 \leq t) > 0$. Montrer que $\min(X_1, \ldots, X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$.
4. (3pt) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $n \geq 1$, soit $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
   a) Montrer qu'avec probabilité 1, $M_n = 0$ pour tout n assez grand.
   b) En déduire que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{p.s}} 0$.
5. (4pt) Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifiez votre réponse à l'aide d'une preuve ou d'un contre-exemple.
   a) Soit X une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre 1 et Y une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X. Alors $\max(X, Y)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
   b) Soit X une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre 1 et Y une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X. Alors $X + Y$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
   c) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Alors $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{p.s}} 0$.
   d) Soit X une variable aléatoire réelle constante presque sûrement (i.e., il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $X = c$ presque sûrement). Alors X est indépendante de toute variable aléatoire définie sur le même espace de probabilité.

Exercice 2 (8 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles i.i.d. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. (1pt) Déterminer les fonctions de répartition de U et de V, à l'aide de la fonction de répartition F de X.
2. (1pt) Supposons, dans cette question uniquement, que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   a) Donner alors une expression pour les deux fonctions de répartition déterminées dans la question précédente.
   b) En déduire la loi de U.
3. (4pt) Supposons que X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, qu'on notera f.
   a) En calculant $\mathbb{E}[\phi(U, V)]$ pour toute fonction mesurable et positive $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, montrer que U et V admettent une densité jointe par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$, qu'on déterminera.
   b) En déduire les densités marginales de U et V.
   c) U et V sont elles indépendantes ? On justifiera très précisément la réponse.
4. (2pt) Supposons que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer les espérances de U, V et UV.

Ex 1 :

1\. a) On note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace de probas sur lequel est définie U.

Soit $A = U^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \in \mathcal{A}$.

Soit $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\omega \longmapsto \begin{cases} \log \frac{1}{U(\omega)} & \text{si } \omega \in A \\ \pi & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

ou n'importe quelle fonction mesurable de ω

Alors la loi de Y ne dépend pas de la manière dont elle est définie sur A^c car $P(A^c) = P(U \leq 0) = 0$ (ainsi, si $Y_{|A} = Y'_{|A}$, alors $Y = Y'$ p.s. donc $Y \overset{(d)}{=} Y'$ d'après le cours).

On note Y : "$\ln \frac{1}{U}$".

b) $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$P\left(\ln \frac{1}{U} \leq t\right) = P\left(U \geq e^{-t}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^{-t} \geq 1, \text{ i.e., } t \leq 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Donc $\ln \frac{1}{U} \sim \mathcal{E}xp(1)$.

2\. $(X, Y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ p.s.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x}{y}, y\right).$$

- φ est C^1
- Si $u, v > 0$:

$$\varphi(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} \frac{x}{y} = u \\ y = v \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = uv > 0 \\ y = v > 0 \end{cases}$$

donc φ est bijective et

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (u,v) & \longmapsto & (uv, v) \end{array}$$

est C^1.

Donc φ est un C^1-difféomorphisme.

Ainsi, d'après le théorème de changement de variables, $\left(\frac{X}{Y}, Y\right)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$, donnée par :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \left(\lambda e^{-\lambda uv} \mathbb{1}_{uv \geq 0}\right) \times \left(\lambda e^{-\lambda v} \mathbb{1}_{v \geq 0}\right) \end{array}$$

$$\times \left| \det \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\times \mathbb{1}_{u,v > 0}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda v(1+u)} v \mathbb{1}_{u,v>0}.$$

Ainsi, $\frac{X}{Y}$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$, donnée par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto \int_{\mathbb{R}} g(u,v)\,dv = \frac{1}{(1+u)^2} \mathbb{1}_{u>0}.$$

Rque : $\frac{X}{Y} = \frac{\lambda X}{\lambda Y}$ et $\lambda X, \lambda Y \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}xp(1)$

donc $\frac{X}{Y} \overset{(d)}{=} \frac{X'}{Y'}$ où $X', Y' \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}xp(1)$,

il est donc cohérent que le résultat ne dépende pas de λ.

3. $\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \geq 1,$

$$P(|\min(X_1, \dots, X_n)| > \varepsilon)$$
$$= P(\min(X_1, \dots, X_n) > \varepsilon)$$

car $X_1, \dots, X_n \geq 0$ p.s.

$$= P(X_1 > \varepsilon)^n$$
$$= (1 - \underbrace{P(X_1 \leq \varepsilon)}_{\in (0,1] \text{ par hypothèse}})^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

4. a) La suite $(M_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et ≥ 0 p.s.

Donc $P(M_n = 0 \text{ pour tout } n \text{ assez grand})$

$$= P(\exists n \geq 1,\ M_n = 0)$$
$$= P(\exists n \geq 1,\ X_n = 0)$$

$= 1 - P(\forall n \geq 1,\ X_n \neq 0)$

Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$P(\forall n \geq 1,\ X_n \neq 0) \leq P(\forall n = 1, \dots, N,\ X_n \neq 0)$

$\overset{X_1, \dots, X_n \text{ iid}}{=} P(X_1 \neq 0)^N$

$= (1 - P(X_1 = 0))^N$

$= (1 - e^{-\lambda})^N$

$\xrightarrow[N \to \infty]{} 0$ car $e^{-\lambda} \in [0, 1[$

donc $P(\forall n \geq 1,\ X_n \neq 0) = 0$, d'où le résultat.

b) Comme avec probabilité 1, on a :
$\forall n \geq 1,\ X_n \in \mathbb{N}$, et donc
$\forall n \geq 1,\ M_n \in \mathbb{N}$,
on a :

$P(\underbrace{M_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0}_{\text{i.e., } \{\omega \in \Omega : M_n(\omega) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\}}) = P(M_n = 0 \text{ pour tout } n \text{ assez grand})$

$= 1$ (d'après a).

C'est donc que $M_n \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} 0$.

5. a) FAUX

$P(\max(X, Y) = 1) \geq P(X \leq 1,\ Y = 1)$

$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} P(X \leq 1)\, P(Y = 1)$

$$= \left(1 - \frac{1}{e}\right) \times \frac{1}{2} > 0$$

donc 1 est un atome de max(X, Y).

b) VRAI

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable :

$$\mathbb{E}[\underbrace{h(X+Y)}] = \mathbb{E}[\underbrace{h(X)(1-Y) + h(X+1)}Y]$$

= p.s.

linéarité de l'espérance $\longrightarrow$

$$= \mathbb{E}[h(X)(1-Y)] + \mathbb{E}[h(X+1)Y]$$

$X \perp\!\!\!\perp Y \longrightarrow$

$$= \mathbb{E}[h(X)]\,\mathbb{E}[1-Y] + \mathbb{E}[h(X+1)]\,\mathbb{E}[Y]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[h(X)] + \mathbb{E}[h(X+1)]\right]$$

Thm. de transfert $\longrightarrow$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-x} \mathbb{1}_{x \geq 0}\, dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} h(x+1) e^{-x} \mathbb{1}_{x \geq 0}\, dx}_{= \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-x+1} \mathbb{1}_{x \geq 1}\, dx}\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(x) \underbrace{\frac{e^{-x}\mathbb{1}_{x \geq 0} + e e^{-x}\mathbb{1}_{x \geq 1}}{2}}_{\text{densité de } X+Y} dx$$

c) VRAI

$$P\left(\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right) \geq P\left(\forall n \geq 1, |X_n| \leq 1\right)$$

$$= 1 - P\left(\exists n \geq 1, |X_n| > 1\right)$$

borne d'union

$$\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P\left(|X_n| > 1\right)}_{= 0 \text{ car } X_n \sim \mathcal{B}e\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 1$$

d'où $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.

d) VRAI

Soit Y une telle v.a., à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

Alors :

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall B \in \mathcal{E}$,

$$P(X \in A, Y \in B) =$$

$$= P(X \in A, X = c, Y \in B) + \underbrace{P(X \in A, X \neq c, Y \in B)}_{\leq P(X \neq c) = 0}$$

Or, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A, X(\omega) = c, Y(\omega) \in B\}$

$$= \begin{cases} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = c, Y(\omega) \in B\} & \text{si } c \in A \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

donc :

Cas 1 : $c \in A$

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X = c, Y \in B)$$
$$= P(Y \in B) - \underbrace{P(X \neq c, Y \in B)}_{\leq P(X \neq c) = 0}$$
$$= P(Y \in B)$$
$$= P(X \in A) P(Y \in B)$$

car $P(X \in A) \geq P(X = c) = 1$.

Cas 2 : $c \notin A$

$$P(X \in A, Y \in B) \leq P(X \neq c) = 0$$

donc $P(X \in A, Y \in B) = 0$

et $P(X \in A) \leq P(X \neq c) = 0$

donc $P(X \in A) = 0$.

Ainsi, $P(X \in A, Y \in B) = 0 = P(X \in A) P(Y \in B)$

Dans tous les cas, on a :

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B).$$

Donc : $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Ex 2 :

1. $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(U \leq t) &= 1 - P(U > t) \\ &= 1 - P(X > t, Y > t) \\ &\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} 1 - P(X>t)\,P(Y>t) \\ &= 1 - (1 - F(t))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(V \leq t) &= P(X \leq t, Y \leq t) \\ &= F(t)^2 . \end{aligned}$$

2. a) $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

donc $P(U \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-2\lambda t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

et $P(V \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ (1 - e^{-\lambda t})^2 & \text{si } t > 0 . \end{cases}$

b) On reconnaît que $U \sim \mathcal{E}xp(2\lambda)$.

3. a) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mesurable.

$$E[\varphi(U, V)] = E[\varphi(X, Y) \mathbb{1}_{X \leq Y} + \varphi(Y, X) \mathbb{1}_{Y < X}]$$

Thm de transfert

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) \mathbb{1}_{x \leq y} f(x) f(y)\, dx\, dy$$

$$+ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(y,x) \mathbb{1}_{y<x} f(x) f(y)\, dx\, dy}$$

$$= \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \mathbb{1}_{y \leq x} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

car $\mathrm{Leb}_{\mathbb{R}^2}(\{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}) = 0$

$$= 2\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) \mathbb{1}_{x \leq y} f(x) f(y)\, dx\, dy$$

Donc (U, V) admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$, donnée par :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & 2 f(u) f(v) \mathbb{1}_{u \leq v}. \end{array}$$

Remarque : Dans ce calcul, certaines manipulations pouvait s'exécuter dans les espérances avant l'utilisation du théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[\varphi(U,V)] = \mathbb{E}[\varphi(X,Y) \mathbb{1}_{X \leq Y}]$$

$$+ \mathbb{E}[\varphi(Y,X) \mathbb{1}_{Y<X}]$$

Or (X,Y) admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ donc $P(X=Y)=0$, donc $\mathbb{1}_{Y<X} = \mathbb{1}_{X\leq Y}$ p.s.

Donc $\mathbb{E}[\varphi(Y,X)\mathbb{1}_{Y<X}] = \mathbb{E}[\varphi(Y,X)\mathbb{1}_{Y\leq X}]$

$= \mathbb{E}[\varphi(X,Y)\mathbb{1}_{X\leq Y}]$ car (X,Y) et (Y,X) ont la même loi.

Ainsi :

$$\mathbb{E}[\varphi(U,V)] = 2\mathbb{E}[\varphi(X,Y)\mathbb{1}_{X\leq Y}]$$

$$= 2\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\mathbb{1}_{x\leq y} f(x)f(y)\,dx\,dy$$

b) U admet donc une densité donnée par :

$$g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto \int_{\mathbb{R}} g(u,v)\,dv$$

$$= 2f(u)\int_u^{\infty} f(v)\,dv$$

$$= 2f(u)(1-F(u))$$

et de même pour V avec

$$g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto \int_{\mathbb{R}} g(u,v)\,du = 2f(v)F(v).$$

c) F est continue, et $\begin{cases} F \xrightarrow[-\infty]{} 0 \\ F \xrightarrow[\infty]{} 1 \end{cases}$

donc $\exists\, s,t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} F(s) = \frac{1}{3} \\ F(t) = \frac{2}{3} \end{cases}$

Comme F est croissante, $s < t$,

donc $P(V \leq s, U \geq t) \leq P(V < U) = 0$

Or $P(V \leq s) = F(s)^2 = 1/9 > 0$
et $P(U \geq t) = (1 - F(t))^2 = 1/9 > 0$

donc $0 = P(V \leq s, U \geq t)$
$\neq P(V \leq s, U \geq t) = 1/27$

donc $U \not\perp V$.

4. $U, V \geq 0$ p.s. donc on peut définir leurs espérances, et d'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[U] = \int_{\mathbb{R}} u\, g_1(u)\,du = 2\int_0^1 u(1-u)\,du$$
$$= 1/3$$

$$\mathbb{E}[V] = \int_{\mathbb{R}} v\, g_2(v) = 2\int_0^1 v^2\, dv = \frac{2}{3}$$

Enfin, $UV = XY$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[UV] &= \mathbb{E}[XY] \\ &= \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] \quad \text{car } X \perp\!\!\!\perp Y \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$