Introduction à la finance mathématique.
TD3 (9/04/2018): Modèles de marché financier à temps discret

EXERCICE 1 -Un modèle à une période
On considère un marché à une période avec trois états $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et deux actifs risqués:

- Un actif S de valeur 1.5 au temps $t = 0$, et qui vaut, au temps $t = 1$, i quand l'état correspond à ω_i, pour tout $i = 1, 2, 3$.
- Une option Put, P de sous-jacent S et strike $K = 2$, qui vaut $3/8$ au temps $t = 0$.

On suppose que le taux d'intérêt est de $r = 1/3$.

1. Évaluer le gain G ainsi que le gain actualisé G^* dans chaque état pour la stratégie qui consiste en l'achat d'une unité de l'actif risqué et d'une option put. Est-ce une opportunité d'arbitrage?
2. Pour chaque état ω_i, $i = 1, 2, 3$, calculer le prix correspondant, i.e. prix de l'actif qui paie 1 quand ω_i est réalisé et 0 si non.
3. On rajoute un quatrième état ω_4 où le prix de l'actif vaut 4, les autres paramètres restent inchangés. A-t-on des opportunités d'arbitrage dans ce cas? Caractériser l'ensemble des probabilités risque-neutre.
4. Est-ce que ce nouveau marché est complet?
5. Peut-on compléter ce marché avec un Call de strike $K = 2$? avec un Put de strike $K = 4$? avec strike $K = 3$? Quelles sont les bornes de non-arbitrage pour les prix de ces trois actifs?
6. On suppose que le marché est complété par un Put de strike $K = 3$ et de prix $7/8$. Calculer la probabilité risque-neutre dans ce nouveau marché. Calculer le prix d'un Call de strike $K = 3$.

EXERCICE 2 - On considère un marché financier binomial à deux périodes de temps (modèle CRR) et de paramètres $d = 0.95$, $u = 1.1$ et $r = 0.05$. Soit $S_0 = 95$ le prix initial de l'actif risqué.

1. Calculer le prix au temps $t = 0$ d'un Call asiatique de strike $K = 100$ et maturité $T = 2$.
2. Calculer le prix au temps $t = 0$ d'un Call lookback de strike $K = 100$.
3. Calculer le prix au temps $t = 0$ d'un Put Américain de strike $K = 100$.

EXERCICE 3 -Convergence du modèle Binomial vers le modèle de Black Scholes
Considérons un marché financier, constitué d'un actif sans risque R normalisé en $t = 0$, et d'un actif risqué S, ouvert sur la période de temps $[0, T]$.

Divisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en n intervalles $[t_i^n, t_{i+1}^n]$ avec $t_i^n := \frac{iT}{n}$ et plaçons nous dans le cadre d'un modèle binomia à n périodes. Notons r_n le taux d'intérêt de l'actif sans risque, la valeur R_t^n de l'actif sans risque aux instants $t = t_i^n$ est alors donnée par:

$$R^n_{t_i^n} = (1 + r_n)^i.$$

On note X_i^n le rendement de l'actif risqué entre les instants t_{i-1}^n et t_i^n . On a alors sous la probabilité historique $\mathbb{P}_n$:

$$\mathbb{P}(X_i^n = u_n) = p_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i^n = d_n) = 1 - p_n.$$

On rappelle que le vecteur $(X_1^n, \dots, X_n^n)$ est un vecteur de variables aléatoires indépendantes. Soit r et σ deux constantes positives, r_n, d_n et u_n ont la forme suivante:

$$r_n = \frac{rT}{n} \qquad d_n = \left(1 + \frac{rT}{n}\right) e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \qquad u_n = \left(1 + \frac{rT}{n}\right) e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}.$$

1. Représenter l'arbre d'évolution de l'actif risqué dans le modèle.
2. Montrer que R_T^n converge vers e^{rT} lorsque n tend vers l'infini.
3. Le marché vérifie t'il l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage?
4. Exprimer la valeur $S_{t_i^n}^n$ de l'actif risqué en t_i^n en fonction de S_0 et de $(X_1, \ldots, X_i)$.
5. Donner la dynamique du processus X^n sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}_n$.
   La probabilité $\mathbb{Q}_n\left(X_i^n = u_n\right)$ sera notée q_n dans la suite.
6. Vérifier que l'on a:
$$q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \qquad n\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}\left[\ln X_1^n\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \qquad nVar_{\mathbb{Q}_n}\left[\ln X_1^n\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2 T.$$
7. Montrer à l'aide des fonctions caractéristiques la convergence en loi suivante:
$$\sum_{i=1}^{n} \ln X_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right).$$
8. En déduire que:
$$S_T^n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T} \qquad \text{avec } W_T \sim \mathcal{N}\left(0, T\right).$$
   La dynamique de la limite est, comme vous le verrez, celle que l'on supposera dans le modèle de Black & Scholes.
9. Écrire sous forme d'espérance le prix d'un Put de strike K et de maturité T dans le modèle binomial à n périodes.
10. En déduire que le prix du Put converge lorsque n tend vers l'infini vers:
$$P_0 := Ke^{-rT}\mathcal{N}\left(-d_2\right) - S_0\mathcal{N}\left(-d_1\right).$$
    Avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, d_1 et d_2 donnés par:
$$d_1 := \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad \text{et} \qquad d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$
11. Conclure en obtenant la formule de Black & Scholes donnant le prix du Call:
$$C_0 := S_0\mathcal{N}\left(d_1\right) - Ke^{-rT}\mathcal{N}\left(d_2\right).$$