Aula 4

CÁLCULO 3

Eber Vizarreta

UABJ-UFRPE

Conteúdo

Definição

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Um **campo vetorial** em $\mathbb{R}^3$ é uma função $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$, isto é, para cada ponto $(x, y, z) \in D$ é associado um vetor tridimensional $\vec{F}(x, y, z)$.

Definição

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Um **campo vetorial** em $\mathbb{R}^3$ é uma função $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$, isto é, para cada ponto $(x, y, z) \in D$ é associado um vetor tridimensional $\vec{F}(x, y, z)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\vec{F}(x,y) &= P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j} = \langle P(x,y), Q(x,y)\rangle \\ \vec{F}(x,y,z) &= P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k} \\ &= \langle P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\rangle\end{aligned}$$

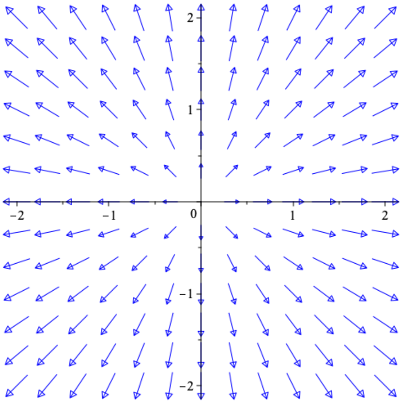


Figure: Campo vetorial $\vec{F}(x, y) = \langle x, y \rangle$

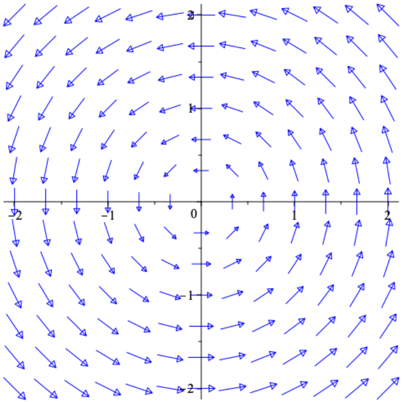


Figure: Campo vetorial $\vec{F}(x,y) = \langle -y, x \rangle$

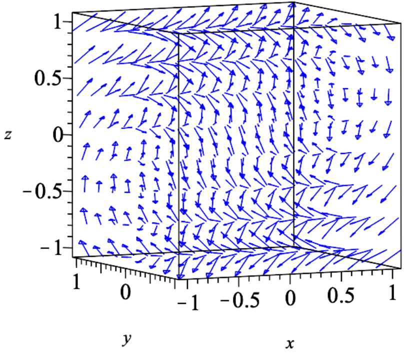


Figure: Campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = \langle z, y, x \rangle$

Problema:

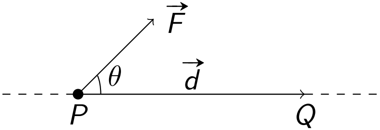
Como calcular o trabalho exercido por uma força $\vec{F}(x, y, z)$ ao mover uma partícula ao longo de uma curva lisa C parametrizada por $\vec{r}(t),\ t \in [a, b]$?

Problema:

Como calcular o trabalho exercido por uma força $\vec{F}(x, y, z)$ ao mover uma partícula ao longo de uma curva lisa C parametrizada por $\vec{r}(t),\ t \in [a, b]$?

Se $\vec{F}$ for uma força constante agindo sobre um objeto que se desloca em linha reta de P a Q, então o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ é definido como

$$W = \left(\left\|\vec{F}\right\| \cos\theta\right)\left(\left\|\vec{d}\right\|\right) = \vec{F} \cdot \vec{d}$$



Seja $\vec{F}(x, y, z)$ um campo de força contínuo. Vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos de igual tamanho $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ e, portanto, a curva C é dividido em subarcos $P_{i-1}P_i$ de comprimento Δs_i.

Seja $\vec{F}(x, y, z)$ um campo de força contínuo. Vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos de igual tamanho $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ e, portanto, a curva C é dividido em subarcos $P_{i-1}P_i$ de comprimento Δs_i.

Escolhemos $P_i^* = (x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ no i-ésimo subarco correspondente a $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$. Se Δs_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} a P_i na curva ocorre aproximadamente na direção de $\vec{T}(t_i^*)$, vetor tangente unitário à curva C em P_i^*, e então o trabalho feito por $\vec{F}$ para mover a partícula de P_{i-1} a P_i é aproximadamente

$$\left[\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \vec{T}(t_i^*)\right]\Delta s_i$$

e o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \vec{T}(t_i^*)\right]\Delta s_i$$

As aproximações melhoram à medida que n aumenta.

Definição

O **trabalho** W feito pela força continua $\vec{F}(x, y, z)$ ao mover uma partícula ao longo de uma curva C parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ é definida por

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{T}(x, y, z)\, ds$$
$$= \int_a^b \left(\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} \right) \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

isto é, o **trabalho** é a integral em relação ao comprimento do arco da componente tangencial da força.

Isso motiva a definição da integral de linha de um campo vetorial.

Definição

Seja $\vec{F}$ um campo vetorial continuo definido sobre uma curva lisa C parametrizada por $\vec{r}$, $t \in [a, b]$. A **integral de linha de $\vec{F}$ ao longo de C** é

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) dt$$

Observação

Seja $\vec{F} = \langle P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\rangle$ e $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$, então $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ é

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \langle P(\vec{r}(t)), Q(\vec{r}(t)), R(\vec{r}(t))\rangle \cdot \left\langle x'(t), y'(t), z'(t)\right\rangle \, dt \\
&= \int_a^b \left[P(\vec{r}(t))x'(t) + Q(\vec{r}\,'(t))y'(t) + R(\vec{r}(t))z'(t)\right] \, dt \\
&= \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz
\end{aligned}
$$

Exemplo

Determine o trabalho feito pela força $\vec{F}(x,y) = \langle x^2, -xy \rangle$ agindo sobre uma partícula se deslocando ao longo de $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \text{sen } t \rangle$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Solução:

Exemplo

Determine o trabalho feito pela força $\vec{F}(x,y) = \langle x^2, -xy \rangle$ agindo sobre uma partícula se deslocando ao longo de $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Solução: Temos

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left\langle \cos^2 t, -\cos t \operatorname{sen} t \right\rangle \cdot \langle -\operatorname{sen} t, \cos t \rangle\, dt \\ &= -\int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} t \cos^2 t dt = 2\int_0^1 u^2 du = 2\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

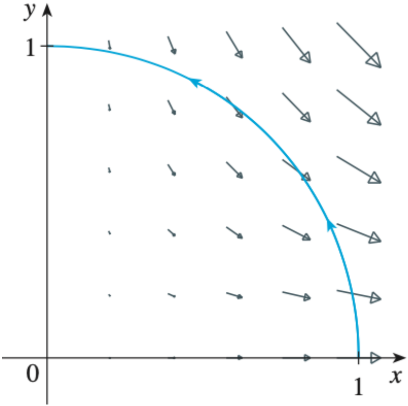


Figure: O trabalho W é negativo pois o campo de força impede o movimento ao longo da curva

Observação

Se $-C$ denota a curva parametrizada C com sentido oposto, então

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Observação

Se $-C$ denota a curva parametrizada C com sentido oposto, então $\displaystyle\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Exemplo

Determine $\displaystyle\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = \langle xy, yz, xz \rangle$ e C é parametrizada por $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

Observação

Se $-C$ denota a curva parametrizada C com sentido oposto, então $\displaystyle\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Exemplo

Determine $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = \langle xy, yz, xz \rangle$ e C é parametrizada por $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

Solução:

Observação

Se $-C$ denota a curva parametrizada C com sentido oposto, então $\displaystyle\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Exemplo

Determine $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = \langle xy, yz, xz \rangle$ e C é parametrizada por $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

Solução: Temos $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é

$$= \int_0^1 \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_0^1 \left\langle t^3, t^5, t^4 \right\rangle \cdot \left\langle 1, 2t, 3t^2 \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\, dt = \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{27}{28}.$$

Exemplo

Seja $\vec{F}(x,y) = \left\langle \frac{-y^3}{(x^2+y^2)^2}, \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right\rangle$. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a circunferência $x^2+y^2=R^2$ orientada no sentido anti-horário.

Solução:

Exemplo

Seja $\vec{F}(x,y) = \left\langle \frac{-y^3}{(x^2+y^2)^2}, \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right\rangle$. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é a circunferência $x^2+y^2=R^2$ orientada no sentido anti-horário.

Solução: A curva C é parametrizada por $\vec{r}(t) = \langle R\cos t, R\,\text{sen}\,t\rangle$, $t \in [0, 2\pi]$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left\langle -\frac{R^3\,\text{sen}^3\,t}{R^4}, \frac{R^3\cos t\,\text{sen}^2\,t}{R^4} \right\rangle \cdot \langle -R\,\text{sen}\,t, R\cos t\rangle\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\text{sen}^4\,t + \cos^2 t\,\text{sen}^2\,t\right) dt = \int_0^{2\pi} \text{sen}^2\,t\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt = \pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2t)\, dt = \pi.
\end{aligned}$$

Observação

Se $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$ é uma curva lisa por partes então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \cdots + \int_{C_n} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Observação

Se $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$ é uma curva lisa por partes então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \cdots + \int_{C_n} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Exemplo

Seja $\vec{F}(x,y) = \langle x^2, xy \rangle$ e C o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$ percorrido no sentido anti-horário. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução: Temos que $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ onde

$$C_1 = \{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\}; \qquad C_2 = \{(1,t) : 0 \leq t \leq 1\};$$
$$C_3 = \{(1-t,1) : 0 \leq t \leq 1\}; \qquad C_4 = \{(0,1-t) : 0 \leq t \leq 1\};$$

Logo,

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left\langle t^2, 0 \right\rangle \cdot \langle 1, 0 \rangle \, dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \langle 1, t \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle \, dt = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \left\langle (1-t)^2, 1-t \right\rangle \cdot \langle -1, 0 \rangle \, dt = -\int_0^1 (1-t)^2 dt \\ &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$$\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \langle 0, 0 \rangle \cdot \langle 0, -1 \rangle \, dt = 0$$

Portanto, $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}$.

Exercício

Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\vec{F}$ em uma partícula que se move sobre a curva C

1. $\vec{F}(x,y) = \langle x, y+2 \rangle$, C é parametrizada por $\vec{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t \rangle$, $0 \leq t \leq 2\pi$
2. $\vec{F}(x,y) = \langle x \operatorname{sen} y, y \rangle$, C é o arco da parábola $y = x^2$ de $(-1,1)$ a $(2,4)$
3. $\vec{F}(x,y,z) = \langle y+z, x+z, x+y \rangle$, C é o segmento de reta de $(1,0,0)$ a $(3,4,2)$
4. $\vec{F}(x,y) = \left\langle e^{x-1}, xy \right\rangle$, C é dada por $\vec{r}(t) = \left\langle t^2, t^3 \right\rangle$, $0 \leq t \leq 1$.
5. $\vec{F}(x,y,z) = \left\langle z^3, yz, x \right\rangle$, C é a circunferência de raio 2 no plano yz centrado na origem com orientação horária quando visto do eixo x positivo.

Exercício

Suponha que uma partícula se mova através do campo de forças $\vec{F}(x, y) = \langle xy, x - y \rangle$ do ponto $(0, 0)$ para o ponto $(1, 0)$, ao longo da curva $x = t$, $y = \lambda t(1 - t)$. Com qual valor de λ o trabalho realizado pelo campo de forças será igual a 1?

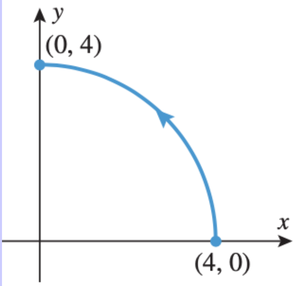
Exercício

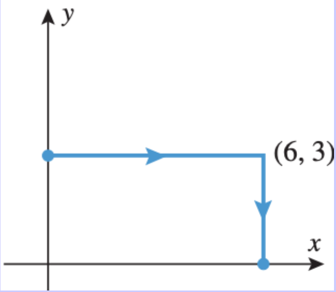
Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é parametrizada por $\vec{r}$.

1. $\vec{F}(x, y) = \left\langle xy, 3y^2 \right\rangle$, $\vec{r}(t) = \left\langle 11t^4, t^3 \right\rangle$, $0 \leq t \leq 1$
2. $\vec{F}(x, y, z) = \left\langle x + y, y - z, z^2 \right\rangle$, $\vec{r}(t) = \left\langle t^2, t^3, t^2 \right\rangle$, $0 \leq t \leq 1$
3. $\vec{F}(x, y, z) = \langle \operatorname{sen} x, \cos y, xz \rangle$, $\vec{r}(t) = \left\langle t^3, -t^2, t \right\rangle$, $0 \leq t \leq 1$
4. $\vec{F}(x, y, z) = \langle z, y, -x \rangle$, $\vec{r}(t) = \langle t, \operatorname{sen} t, \cos t \rangle$, $0 \leq t \leq \pi$.

Exercício

Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y) = \left\langle \frac{1}{x^2+y^2}, \frac{4}{x^2+y^2} \right\rangle$ em uma partícula que se move ao longo de cada curva C mostrada nas seguintes figuras





Exercício

Calcule a integral $\displaystyle\int_{-C} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, onde C é uma circunferência $x^2+y^2=a^2$ percorrido no sentido anti-horário.

Exercício

Calcule a integral $\displaystyle\int_C y\,dx + z\,dy - x\,dz$ para C em cada caso:

1. A cúbica torcida $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ de $(0,0,0)$ até $(1,1,1)$.
2. A hélice $x=\cos(\pi t)$, $y=\text{sen}(\pi t)$, $z=t$ de $(1,0,0)$ até $(-1,0,1)$

Suponha que $\vec{F}(x, y, z)$ represente o campo de velocidades de um fluido em estado estacionário (a velocidade em um ponto fixado não varia com o tempo) escoando por uma região no espaço.

Definição

Se $\vec{r}(t)$ parametriza uma curva lisa C no domínio de um campo de velocidade contínuo $\vec{F}$. O **escoamento** ao longo da curva C entre $A = \vec{r}(a)$ e $B = \vec{r}(b)$ é

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds \tag{1}$$

A integral também é conhecida como integral de escoamento. Se a curva C for fechada, o escoamento é denominado **circulação** ao redor da curva.

Fluxo através uma curva plana

Para encontrar a taxa na qual um fluido está entrando ou saindo de uma região delimitada por uma curva lisa e fechada simples C no plano xy, calculamos a integral de linha sobre C de $\vec{F} \cdot \vec{n}$, a componente normal do campo de velocidade na direção do vetor normal exterior da curva.

Fluxo através uma curva plana

Para encontrar a taxa na qual um fluido está entrando ou saindo de uma região delimitada por uma curva lisa e fechada simples C no plano xy, calculamos a integral de linha sobre C de $\vec{F} \cdot \vec{n}$, a componente normal do campo de velocidade na direção do vetor normal exterior da curva.

Definição

Seja C uma curva lisa, fechada e simples no domínio de um campo vetorial no plano e seja $\vec{n}$ for o vetor normal unitário exterior de C. O **fluxo** de $\vec{F} = \langle P(x,y), Q(x,y) \rangle$ através de C é

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$$

Exemplo

Encontre o fluxo de $\vec{F} = \langle x - y, x \rangle$ através da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy.

Solução:

Exemplo

Encontre o fluxo de $\vec{F} = \langle x - y, x \rangle$ através da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy.

Solução: A circunferência é parametrizada por $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e é percorrida no sentido anti-horário. Neste caso, $\vec{n} = \langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$. Então, o fluxo através da circunferência é

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds &= \int_0^{2\pi} \langle \cos t - \operatorname{sen} t, \cos t \rangle \cdot \langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle \; dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(\cos^2 t - \operatorname{sen} t \cos t \operatorname{sen}^2 t + \cos t \operatorname{sen} t \Big), dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi.
\end{aligned}$$