

## Maria C. Torres

Ing. Electrónica (UNAL)

M.E. Ing. Eléctrica (UPRM)

Ph.D. Ciencias e Ingeniería de la Computación y la

Información (UPRM)

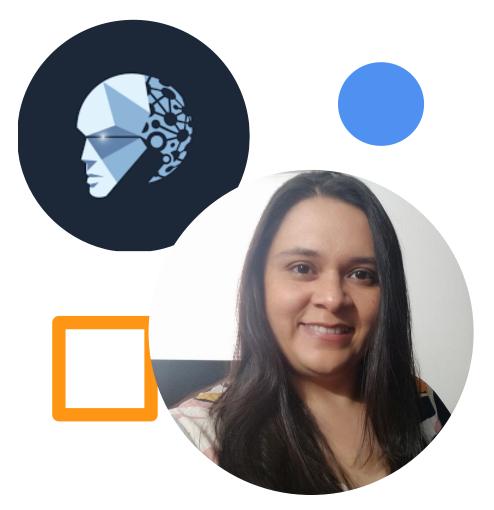
Profesora asociada

Dpto. Ciencias de la Computación y la Decisión

#### mctorresm@unal.edu.co

HORARIO DE ATENCIÓN: Martes 10:00 am a

12:00 m - Oficina 313 M8A





- ☐ Introducción: revisión fundamentos y POO
- Análisis de complejidad
- Arreglos
- ☐ Listas enlazadas
- ☐ Pilas y colas
- ☐ Heap
- □ Arboles binarios
- ☐ Tablas hash
- ☐ Grafos

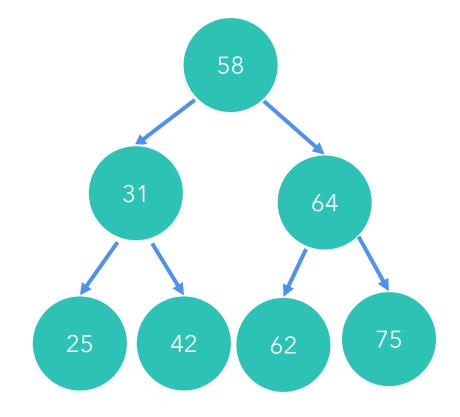


- ☐ Arboles
- □ Arboles binarios
- □ Arboles binarios de búsqueda
- ☐ Arboles balanceados

#### **Definición:**

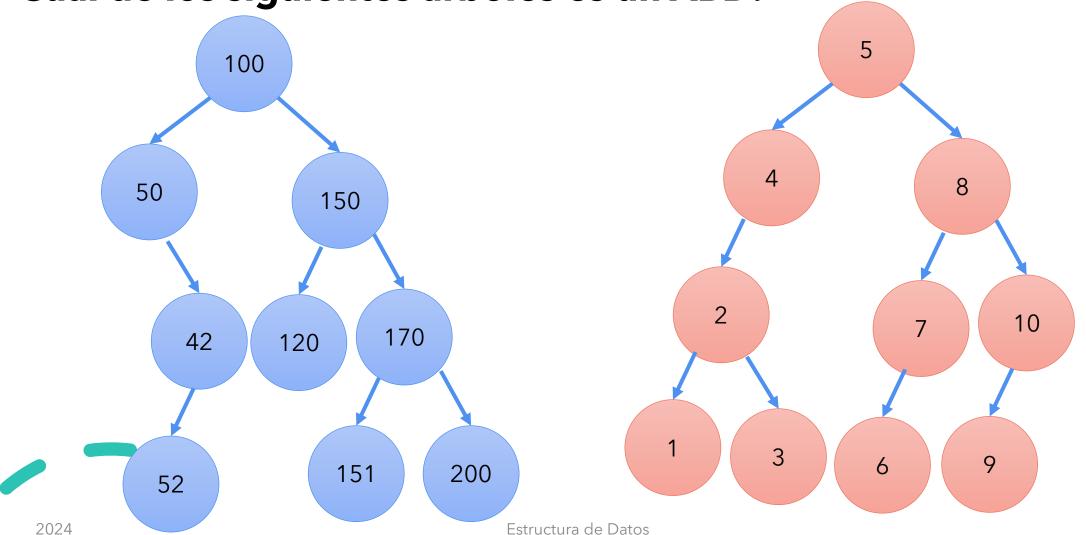
Dado un conjunto S tal que sus elementos tienen una relación de orden. Un árbol binario de búsqueda (abb) es un árbol T que:

- ■En cada nodo v almacena un elemento de S
- □Todos los elementos almacenados en el subárbol izquierdo de v son menores o iguales al elemento de v
- □Todos los elementos almacenados en el subárbol derecho de v son mayores o iguales al elemento de v

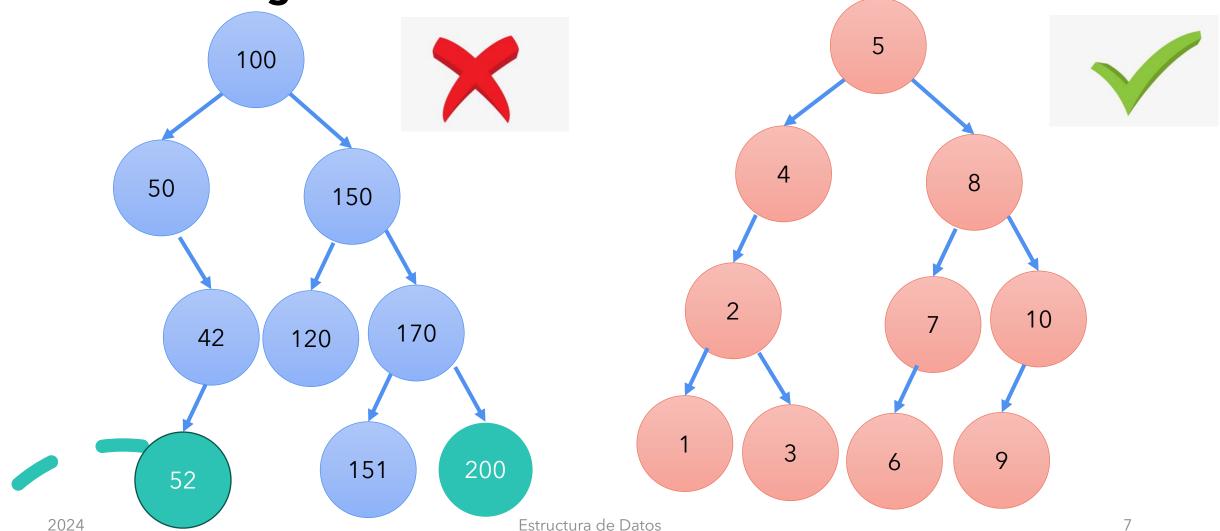




Cual de los siguientes arboles es un ABB?



Cual de los siguientes arboles es un ABB?



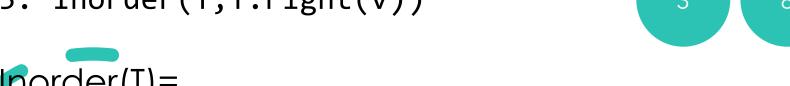
Arboles binarios de búsqueda - ABB Heap **Diferencia entre ABB y HEAP ABB** Estructura de Datos

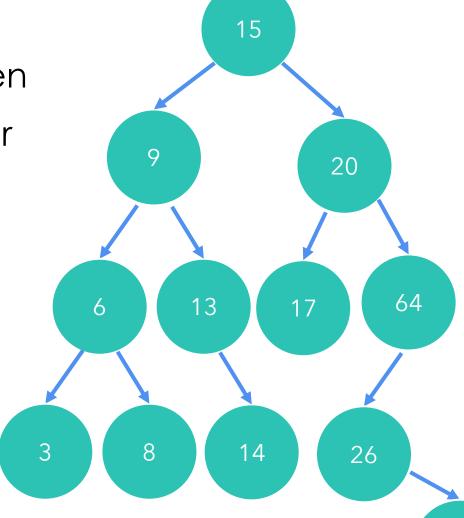
#### **Propiedades**

□ Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))





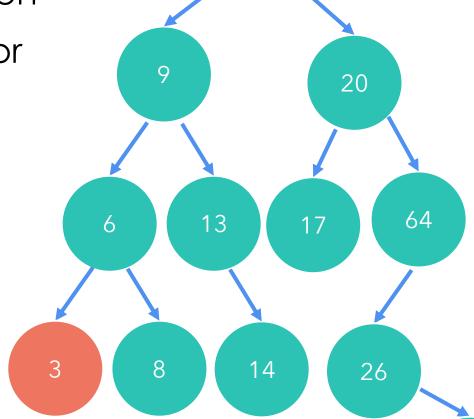


#### **Propiedades**

Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- 2. Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))



15

Inorder(T)=3-

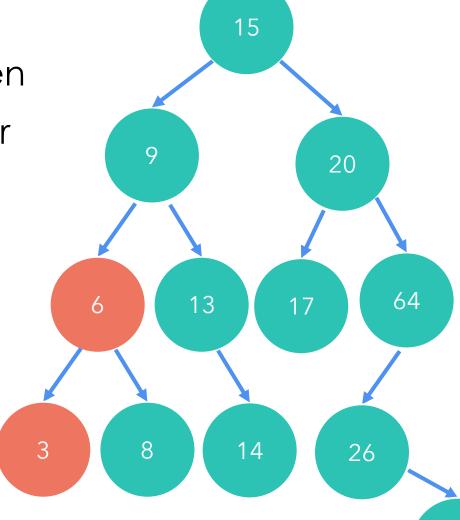
#### **Propiedades**

Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- 2. Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))



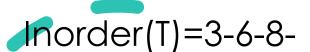


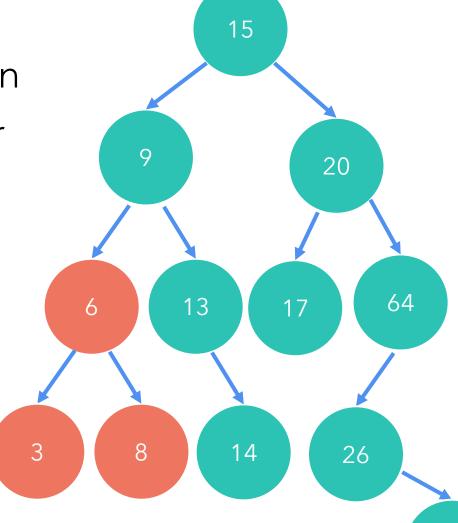
#### **Propiedades**

Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- 2. Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))



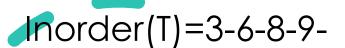


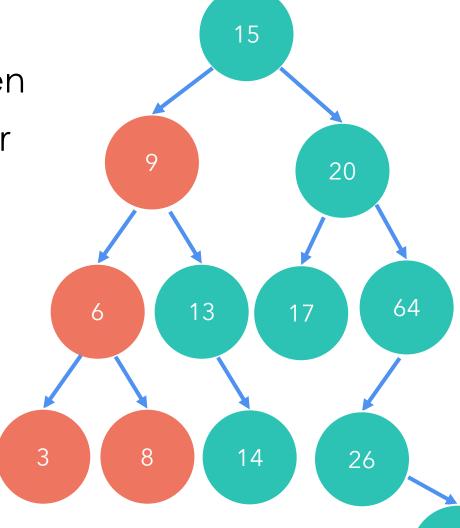
#### **Propiedades**

Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- 2. Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))



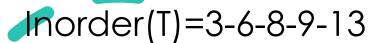


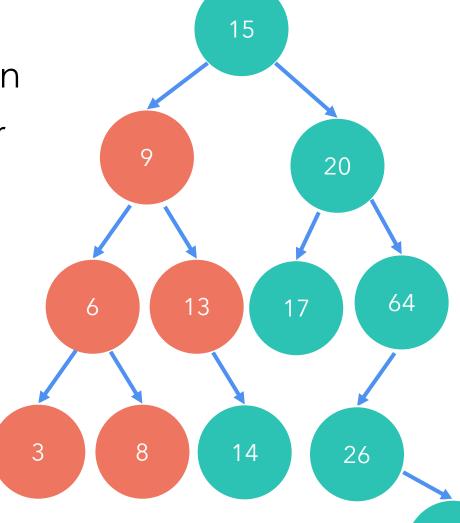
#### **Propiedades**

Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- 2. Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))





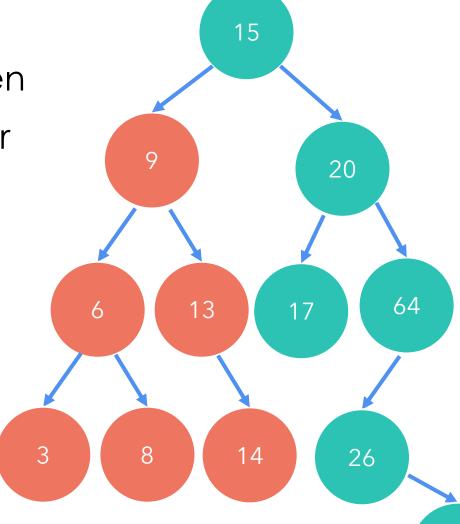
#### **Propiedades**

Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- 2. Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))



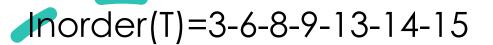


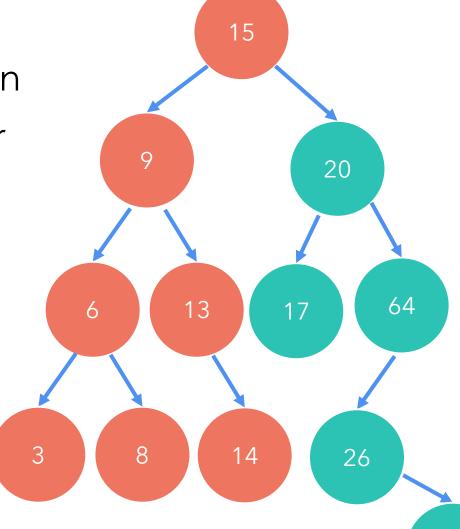
#### **Propiedades**

Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- 2. Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))



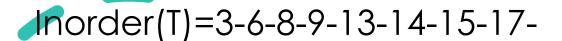


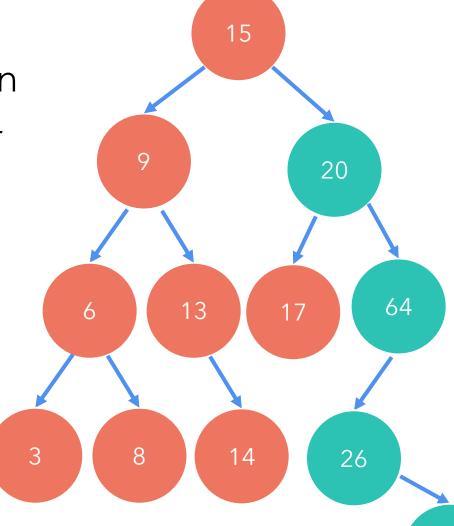
#### **Propiedades**

Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- 2. Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))



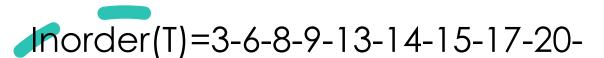


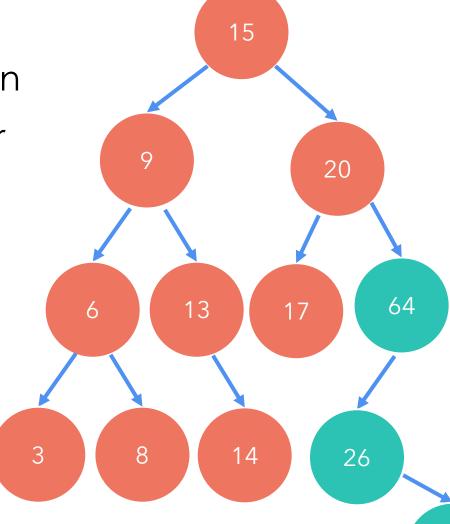
#### **Propiedades**

Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- 2. Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))



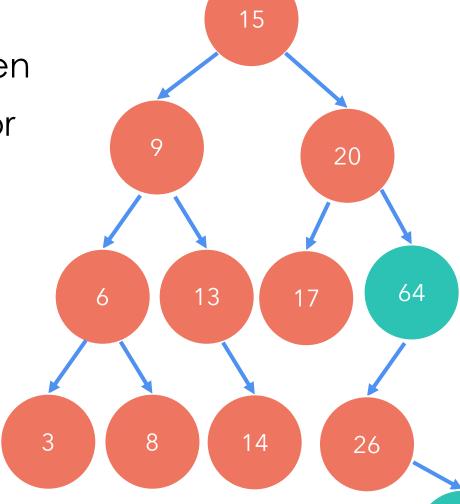


#### **Propiedades**

Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- 2. Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))



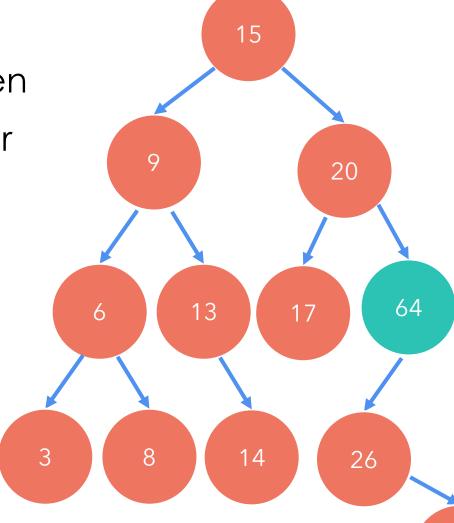
Inorder(T)=3-6-8-9-13-14-15-17-20-26-

#### **Propiedades**

Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- 2. Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))



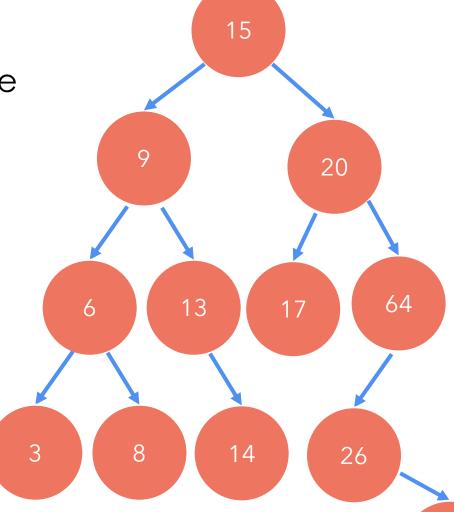
Inorder(T)=3-6-8-9-13-14-15-17-20-26-50-

#### **Propiedades**

Recorrido inorder: El recorrido inorden de un abb retorna los datos almacenados organizados de menor a mayor

Inorder(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- 2. Inorder(T,T.left(v))
- 3. visit(v)
- 4. If T.hasRight(v)
- 5. Inorder(T,T.right(v))



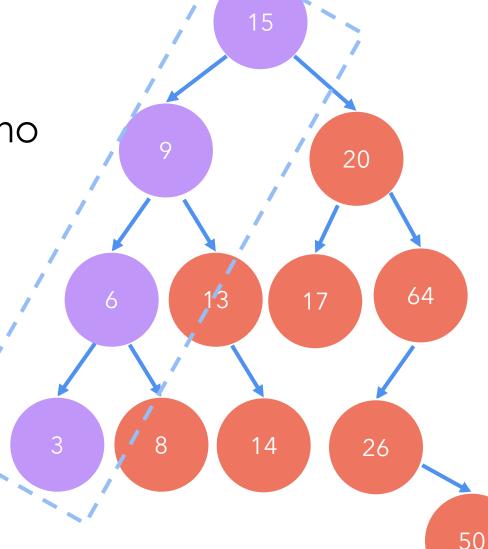
Inorder(T)=3-6-8-9-13-14-15-17-20-26-50-64

### **Propiedades**

□El valor mínimo en un ABB se encuentra en el nodo más extremo de la rama izquierda

min(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasLeft(v)
- return min(T,T.left(v))
- else
- \_\_return v.getData()

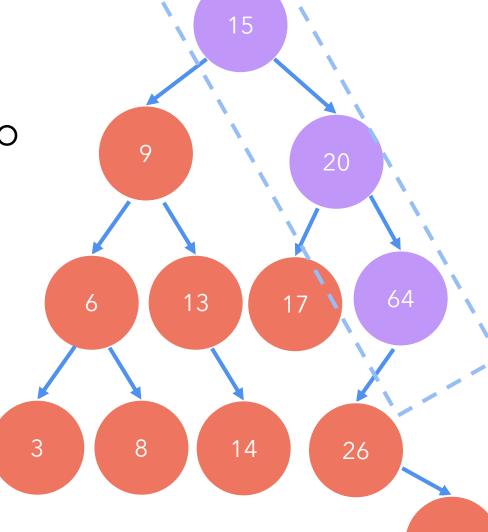


### **Propiedades**

□El valor máximo en un ABB se encuentra en el nodo más extremo de la rama derecha

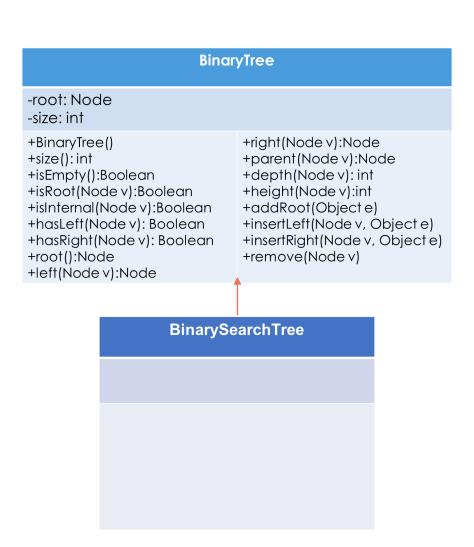
max(BinaryTree T, Node v)

- 1. If T.hasRight(v)
- 2. return max(T,T.right(v))
- 3. else
- 4. \_\_\_return v.getData()



#### **Implementación**

□ La clase BinarySearchTree es una extensión de la clase BinaryTree, heredando todos sus atributos y métodos



#### **Implementación**

- □Un nodo en un árbol binario de búsqueda almacena un objecto y una clave k asociada al mismo. La clave k permite ordenar los objetos.
- □Para manejar estos datos creamos la clase BSTEntry

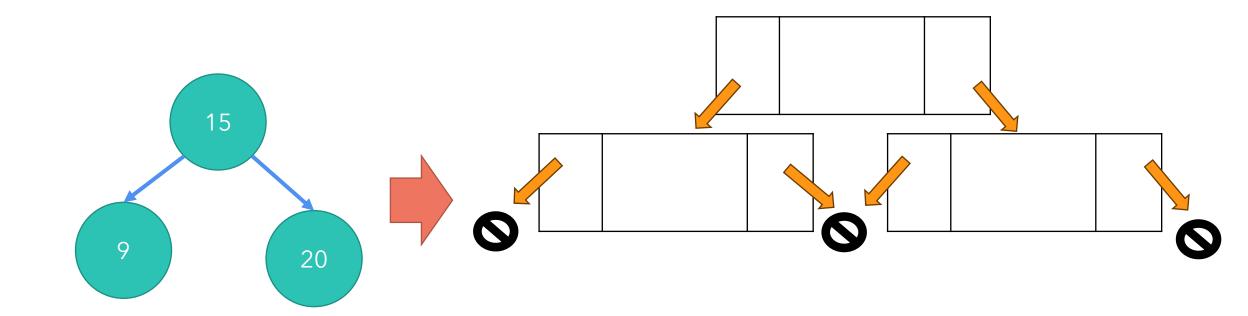
#### **BSTEntry**

```
#data: Object #k:int
```

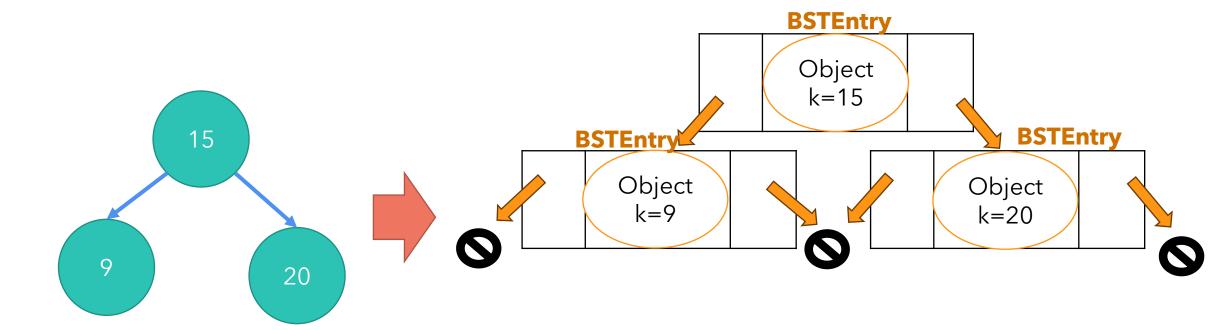
- +BSTEntry(Object d, int k)
- +getData(): Object
- +getKey(): int
- +setData(Object d)
- +setKey(int k)

2024 Estructura de Datos

# Arboles binarios de búsqueda - ABB Implementación



# Arboles binarios de búsqueda - ABB Implementación



#### **Implementación**

Métodos:

- ■BinarySearchTree(): Constructor vacio
- □find(int k): busca el nodo con clave k
- □insert(Object e, int k): inserta en el árbol binario de búsqueda un nodo con el elemento e y clave k
- ■Remove(int k): eliminar del árbol binario de búsqueda el nodo con clave k y retorna el objeto almacenado

#### **BinaryTree** -root: Node -size: int +BinaryTree() +right(Node v):Node +size(): int +parent(Node v):Node +isEmpty():Boolean +depth(Node v): int +isRoot(Node v):Boolean +height(Node v):int +isInternal(Node v):Boolean +addRoot(Objecte) +hasLeft(Node v): Boolean +insertLeft(Node v, Object e) +hasRight(Node v): Boolean +insertRight(Node v, Object e) +root():Node +remove(Node v) +left(Node v):Node

#### **BinarySearchTree**

- +BinarySearchTree()
- +find(int k): Node
- +insert(Object e, int k)
- +remove(int k): Object

2024 Estructura de Datos

#### **Implementación**

Métodos:

□find(int k): busca el nodo con clave k

#### Algoritmo recursivo

- 1. Se compara k con la raíz
- Si k es menor al valor de la raíz, se recorre el subárbol izquierdo de forma recursiva
- 3. Si k es mayor al valor de la raíz, se recorre el subárbol derecho

#### **BinaryTree** -root: Node -size: int +BinaryTree() +right(Node v):Node +size(): int +parent(Node v):Node +isEmpty():Boolean +depth(Node v): int +isRoot(Node v):Boolean +height(Node v):int +isInternal(Node v):Boolean +addRoot(Objecte) +hasLeft(Node v): Boolean +insertLeft(Node v, Object e) +insertRight(Node v, Object e) +hasRight(Node v): Boolean +root():Node +remove(Node v) +left(Node v):Node

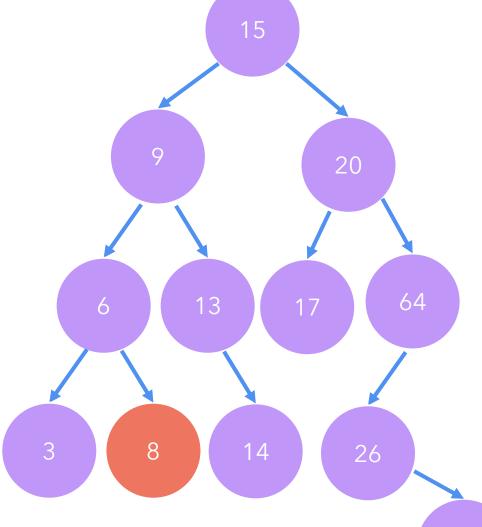
#### **BinarySearchTree**

- +BinarySearchTree()
- +find(int k): Node
- +insert(Object e, int k)
- +remove(int k): Object

2024 Estructura de Datos

**Ejemplo:** 

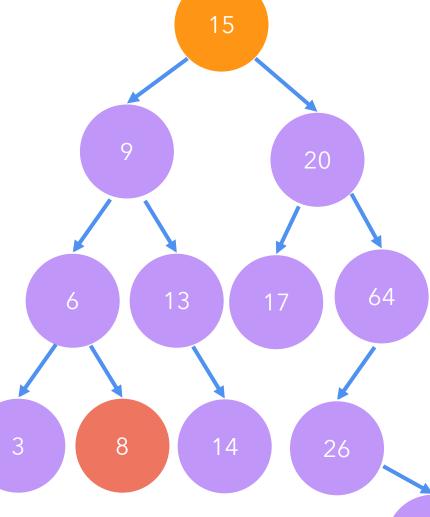
□Buscar nodo con clave igual a 8



**Ejemplo:** 

□Buscar nodo con clave igual a 8

 8<15 por tanto se busca al lado izquierdo del árbol

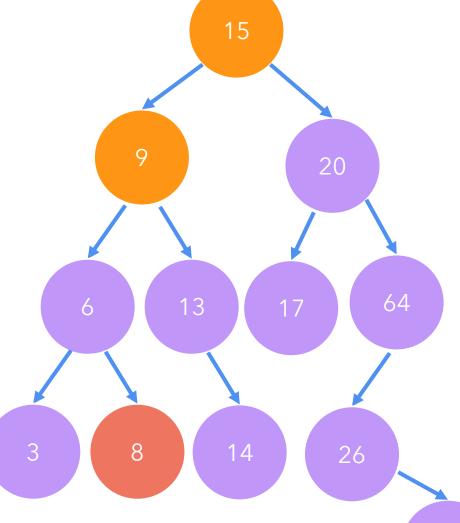




**Ejemplo:** 

□Buscar nodo con clave igual a 8

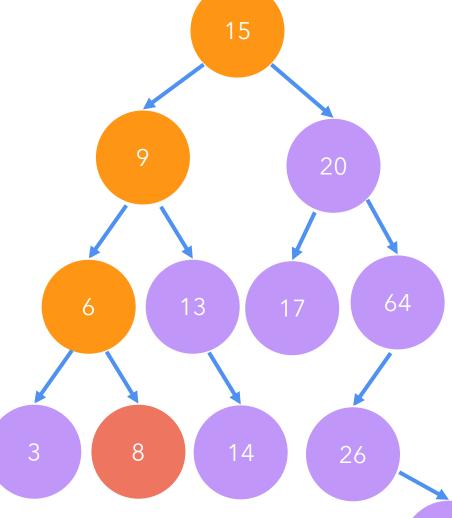
 8<9 por tanto se continua por el lado izquierdo del árbol



**Ejemplo:** 

■Buscar nodo con clave igual a 8

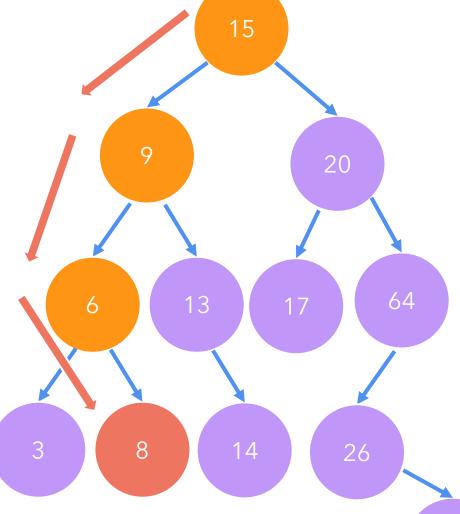
 8>6 por tanto se continua por el lado derecho del árbol



**Ejemplo:** 

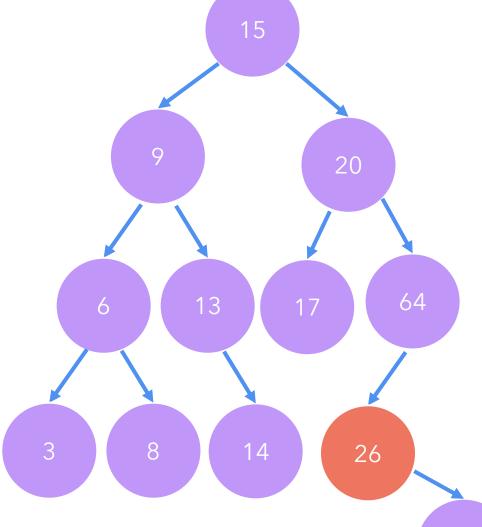
□Buscar nodo con clave igual a 8

• Se encuentra el nodo con clave 8



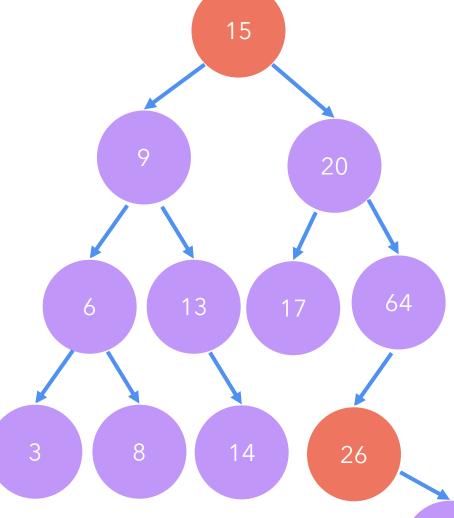
**Ejemplo:** 

□Buscar nodo con clave igual a 26



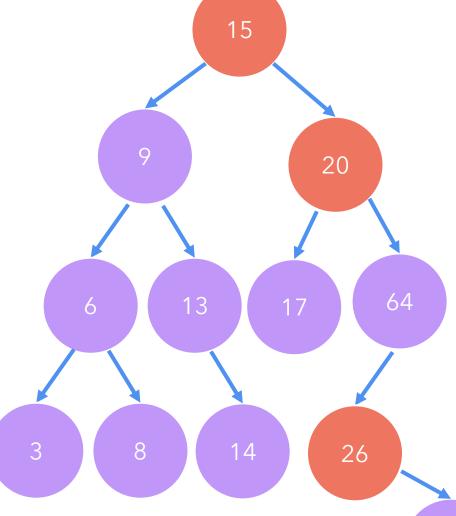
**Ejemplo:** 

□Buscar nodo con clave igual a 26



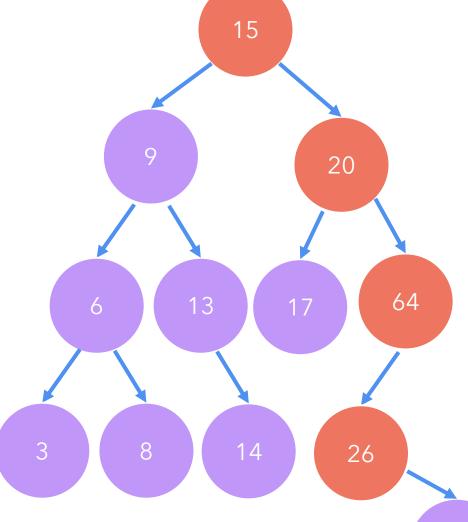
**Ejemplo:** 

□Buscar nodo con clave igual a 26



**Ejemplo:** 

□Buscar nodo con clave igual a 26



### **Implementación**

Métodos:

Ind(int k): busca el nodo con clave k

### Algoritmo recursivo

- 1. Se compara k con la raíz
- 2. Si k es menor al valor de la raíz, se recorre el subárbol izquierdo de forma recursiva
- 3. Si k es mayor al valor de la raíz, se recorre el subárbol derecho

### Seucodigo

find(int k)

return searchTree(k,root)

searchTree(int key, Node v)

- 1. BSTEntry u = v.getData()
- 2. if k==u.getKey() //Caso base
- 3. return v
- 4. elseif k<u.getKey()</pre>
- 5. return searchTree(k,v.getLeft())
- 6. else
- 7. return searchTree(k, v.getRight())

### **Implementación**

insert (Object e, int k): inserta en el árbol binario de búsqueda un nodo con el elemento e y clave k

### Algoritmo:

- Crear un nuevo BSTEntry O con dato = e y key=k
- Si el árbol está vacío, O será la raíz; por tanto, se invoca el método addRoot(Object e) de la clase BinaryTree
- 3. En caso contrario, de forma recursiva, se recorre el subárbol izquierdo si la clave es menor a la raíz, o el subárbol derecho si la clave es mayor a la raíz

#### **BinaryTree** -root: Node -size: int +BinaryTree() +right(Node v):Node +size(): int +parent(Node v):Node +isEmpty():Boolean +depth(Node v): int +isRoot(Node v):Boolean +height(Node v):int +isInternal(Node v):Boolean +addRoot(Objecte) +hasLeft(Node v): Boolean +insertLeft(Node v, Object e) +insertRight(Node v, Object e) +hasRight(Node v): Boolean +root():Node +remove(Node v) +left(Node v):Node

### **BinarySearchTree**

- +BinarySearchTree()
- +find(int k): Node
- +insert(Object e, int k)
- +remove(int k): Object

2024 Estructura de Datos

## **Ejemplo:**

 $\Box$ Crear el árbol con las claves: 51 – 23 – 54 – 68 – 22 – 73 – 59 – 30

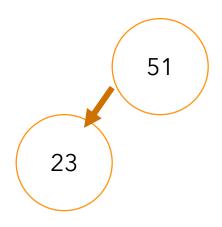


## **Ejemplo:**

 $\Box$ Crear el árbol con las claves: 51 - 23 - 54 - 68 - 22 - 73 - 59 - 30

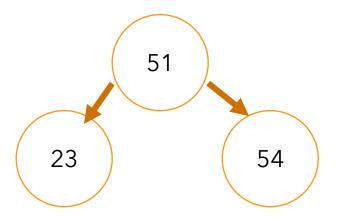
## **Ejemplo:**

 $\Box$ Crear el árbol con las claves: 51 – 23 – 54 – 68 – 22 – 73 – 59 – 30



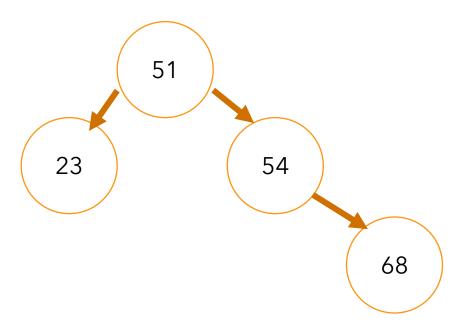
## **Ejemplo:**

 $\Box$ Crear el árbol con las claves: 51 – 23 – 54 – 68 – 22 – 73 – 59 – 30



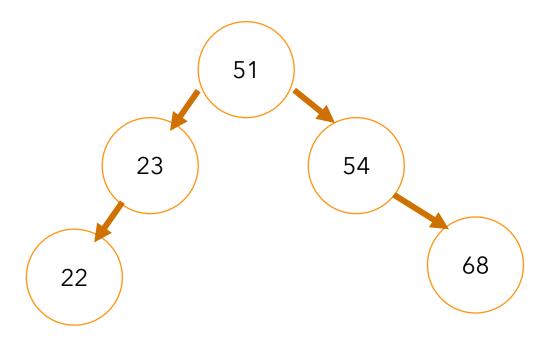
## **Ejemplo:**

 $\Box$ Crear el árbol con las claves: 51 – 23 – 54 – 68 – 22 – 73 – 59 – 30



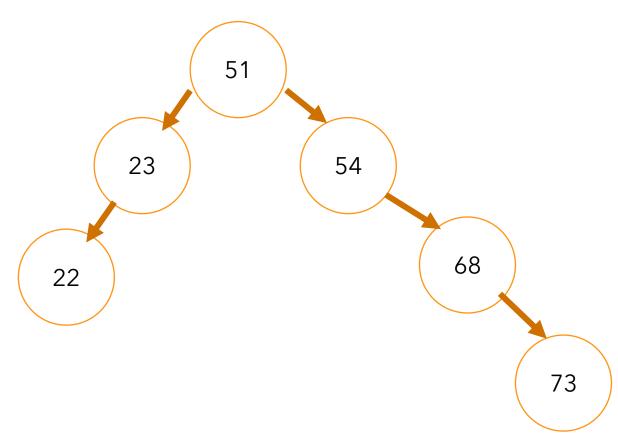
## **Ejemplo:**

 $\Box$ Crear el árbol con las claves: 51 – 23 – 54 – 68 – 22 – 73 – 59 – 30



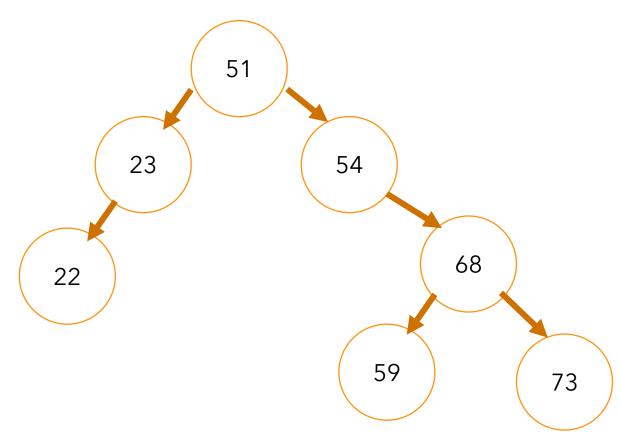
## **Ejemplo:**

 $\Box$ Crear el árbol con las claves: 51 – 23 – 54 – 68 – 22 – 73 – 59 – 30



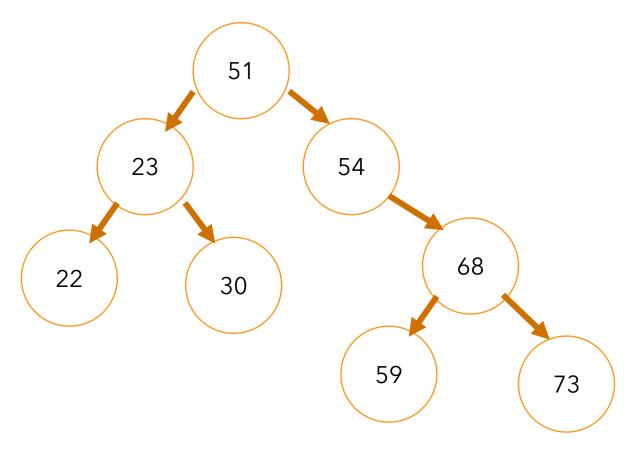
## **Ejemplo:**

 $\Box$ Crear el árbol con las claves: 51 – 23 – 54 – 68 – 22 – 73 – 59 – 30



## **Ejemplo:**

 $\Box$ Crear el árbol con las claves: 51 – 23 – 54 – 68 – 22 – 73 – 59 – 30



## **Implementación**

### Algoritmo:

- 1. Crear un nuevo BSTEntry O con dato = e y key=k
- 2. Si el árbol está vacío, O será la raíz; por tanto, se invoca el método addRoot(Object e) de la clase BinaryTree
- 3. En caso contrario, de forma recursiva, se recorre el subárbol izquierdo si la clave es menor a la raíz, o el subárbol derecho si la clave es mayor a la raíz

insert(Object e, int k)

- 1. BSTEntry 0 = new BSTEntry(e,k)
- 2. if isEmpty()
- 3. super.addRoot(0)
- 4. else
- addEntry(root,0)

Creamos BSTEntry con el objeto y la clave ingresadas como parámetros

Si no hay nodos en el árbol, O será la raíz

addEntry: método auxiliar recursivo

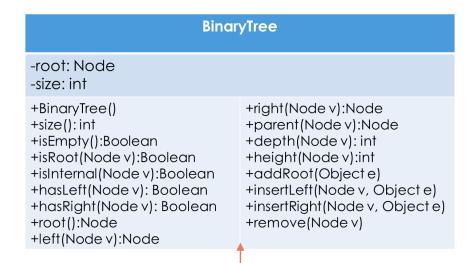
```
addEntry(Node v,BSTEntry o)
insert(Object e, int k)
1. BSTEntry 0 = new BSTEntry(e,k)
                                   1. BSTEntry temp = v.getData()
2. if isEmpty()
                                   2. Node nD = new Node(o)
3. super.addRoot(0)
4. else
                                   3. if o.getKey()<temp.getKey()</pre>
     addEntry(root,0)
5.
                                        if hasLeft(v)
                                   4.
                                   5.
                                            addEntry(left(v),o)
                                   6. else
                                   7. v.setLeft(nD)
                                   8. else
                                         if hasRight(v)
                                   9.
                                            addEntry(right(v),o)
                                   10.
                                   11. else
                                   12. v.setRight(nD)
```

### **Implementación**

Remove(int k): eliminar del árbol binario de búsqueda el nodo con clave k y retorna el objeto almacenado

### Algoritmo

- 1. Se busca el nodo v con clave k
- 2. Si el nodo v tiene un solo hijo o no tiene hijos, empleamos el método remove() en la clase BinaryTree
- 3. Si el nodo v tiene dos hijos, debemos remplazar el nodo v por su predecesor



### **BinarySearchTree**

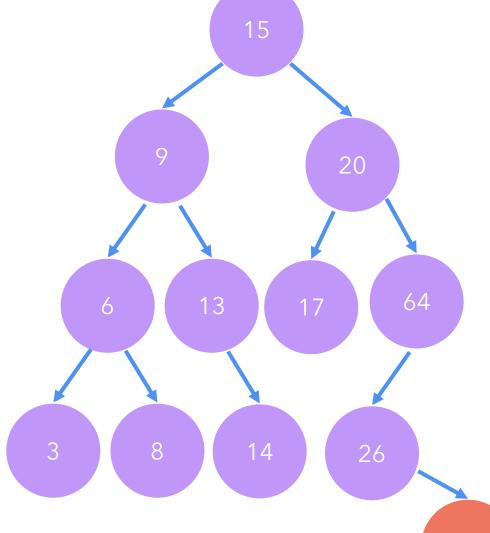
- +BinarySearchTree()
- +find(int k): Node
- +insert(Object e, int k)
- +remove(int k): Object

2024 Estructura de Datos



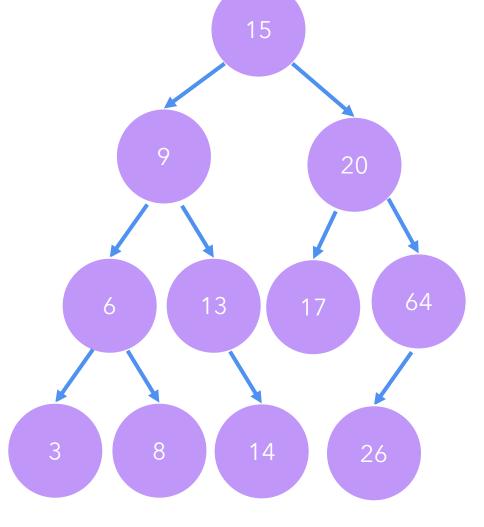
**Ejemplo:** 

□Eliminar nodo con clave igual a 50



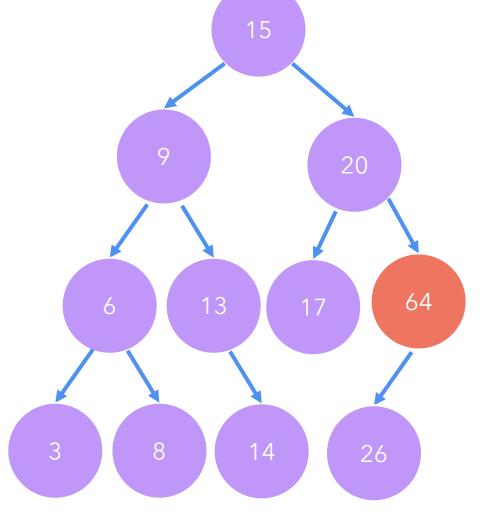
**Ejemplo:** 

□Eliminar nodo con clave igual a 50



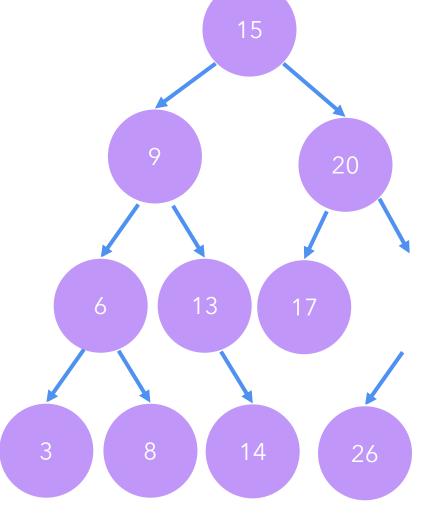
**Ejemplo:** 

□Eliminar nodo con clave igual a 64



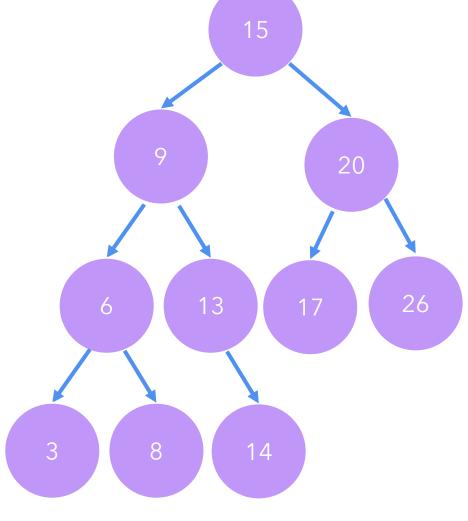
**Ejemplo:** 

□Eliminar nodo con clave igual a 64



**Ejemplo:** 

□Eliminar nodo con clave igual a 64

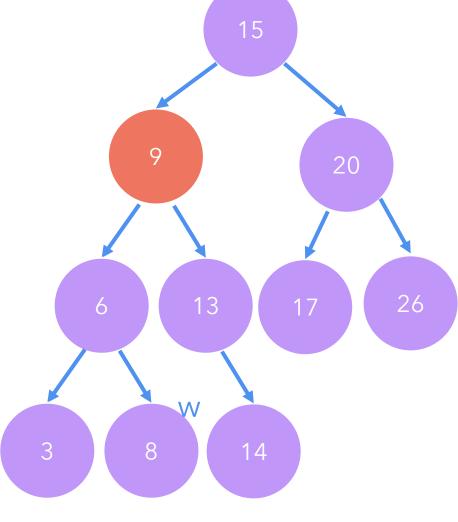


**Ejemplo:** 

□Eliminar nodo con clave igual a 9

### Algoritmo

- Si el nodo v tiene dos hijos, debemos remplazar el nodo v por su predecesor
- Si se organiza los nodos de menor a mayor, el predecesor es el nodo anterior a v
- 2. El nodo w predecesor de v es el valor máximo del subárbol izquierdo de v
- 3. El predecesor w puede tener un hijo izquierdo, en tal caso, el hijo izquierdo toma la posición de w

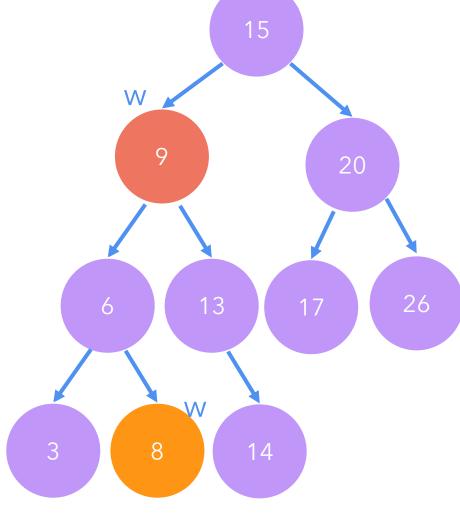


**Ejemplo:** 

□Eliminar nodo con clave igual a 9

### Algoritmo

- Si el nodo v tiene dos hijos, debemos remplazar el nodo v por su predecesor
- 1. Si se organiza los nodos de menor a mayor, el predecesor es el nodo anterior a *v*
- 2. El nodo w predecesor de v es el valor máximo del subárbol izquierdo de v
- 3. El predecesor w puede tener un hijo izquierdo, en tal caso, el hijo izquierdo toma la posición de w

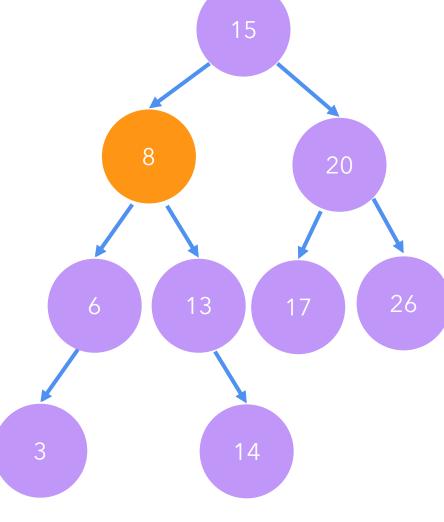


**Ejemplo:** 

□Eliminar nodo con clave igual a 9

### Algoritmo

- Si el nodo v tiene dos hijos, debemos remplazar el nodo v por su predecesor
- 1. Si se organiza los nodos de menor a mayor, el predecesor es el nodo anterior a *v*
- El nodo w predecesor de v es el valor máximo del subárbol izquierdo de v
- 3. El predecesor w puede tener un hijo izquierdo, en tal caso, el hijo izquierdo toma la posición de w

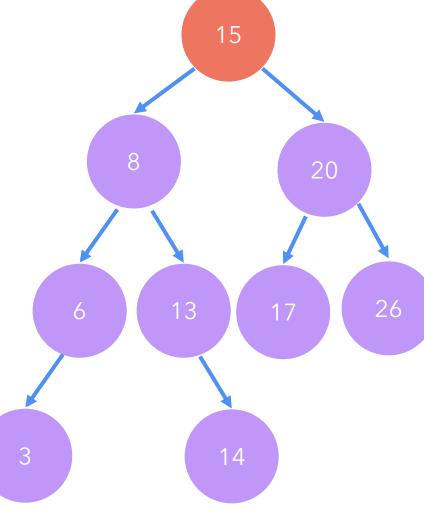


**Ejemplo:** 

□Eliminar nodo con clave igual a 15

### Algoritmo

- Si el nodo v tiene dos hijos, debemos remplazar el nodo v por su predecesor
- Si se organiza los nodos de menor a mayor, el predecesor es el nodo anterior a v
- 2. El nodo w predecesor de v es el valor máximo del subárbol izquierdo de v
- 3. El predecesor w puede tener un hijo izquierdo, en tal caso, el hijo izquierdo toma la posición de w

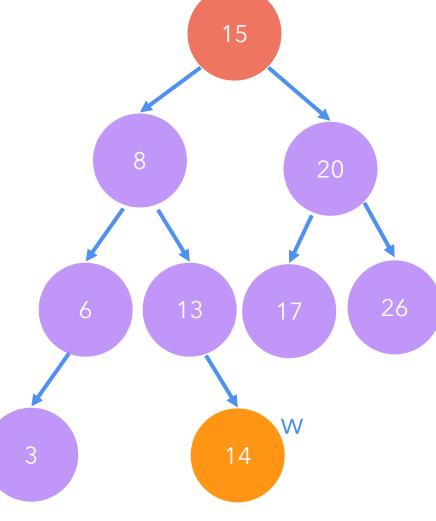


**Ejemplo:** 

□Eliminar nodo con clave igual a 15

### Algoritmo

- Si el nodo v tiene dos hijos, debemos remplazar el nodo v por su predecesor
- 1. Si se organiza los nodos de menor a mayor, el predecesor es el nodo anterior a *v*
- 2. El nodo w predecesor de v es el valor máximo del subárbol izquierdo de v
- 3. El predecesor w puede tener un hijo izquierdo, en tal caso, el hijo izquierdo toma la posición de w

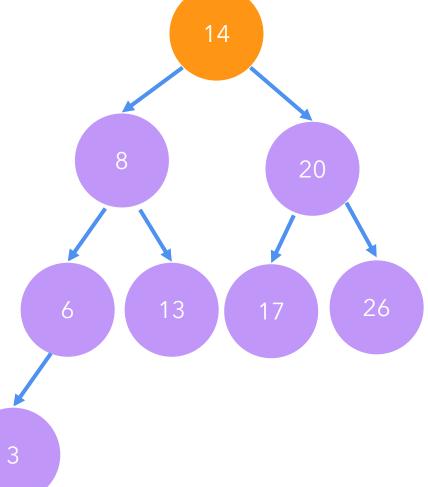


**Ejemplo:** 

□Eliminar nodo con clave igual a 15

### Algoritmo

- Si el nodo v tiene dos hijos, debemos remplazar el nodo v por su predecesor
- 1. Si se organiza los nodos de menor a mayor, el predecesor es el nodo anterior a *v*
- 2. El nodo w predecesor de v es el valor máximo del subárbol izquierdo de v
- 3. El predecesor w puede tener un hijo izquierdo, en tal caso, el hijo izquierdo toma la posición de w



## **Implementación**

Remove(int k)

### Algoritmo

- 1. Se busca el nodo v con clave k
- Si el nodo v tiene un solo hijo o no tiene hijos, empleamos el método remove() en la clase BinaryTree
- 3. Si el nodo v tiene dos hijos, debemos remplazar el nodo v por su predecesor

```
Remove(int k)
```

- 1. Node v = find(k)
- 2.temp = v.getData()
- 3.if hasLeft(v)&&hasRight(v) //caso 2
- 4.else //caso 1
- 5. super.remove(v)
- 6.return temp

```
Remove(int k)
1. Node v = find(k)
2.temp = v.getData()
3.if hasLeft(v)&&hasRight(v) //caso 2
    Node w = predecesor(v)
   v.setData(w.getData())
    super.remove(w)
7.else //caso 1
8. super.remove(v)
9. return temp
```

```
predecesor(Node v)
1. Node temp = temp.getLeft()
2. return maxNode(temp)
maxNode(Node temp)
1. if hasRight(temp)
2. return maxNode(right(temp))
3. else
4.
     return temp
```

Operación	Complejidad
parent()	O(n)
depth()	O(n²) Árbol completo: O(n lg n)
height()	O(n) Árbol completo: O(lg n)
addRoot()	Θ(1)
insertLeft()	Θ(1)
insertRight()	Θ(1)
remove()	O(n) Árbol completo: O(lg n)
Find()	Árbol completo: O(h) Árbol completo: O(lg n)
Insert()	Árbol completo: O(h) Árbol completo: O(lg n)

1. N.1 1 .	
-root: Node -size: int	
+size(): int + +isEmpty():Boolean + +isRoot(Node v):Boolean + +isInternal(Node v):Boolean + +hasLeft(Node v): Boolean + +hasRight(Node v): Boolean +	+right(Node v):Node +parent(Node v):Node +depth(Node v): int +height(Node v):int +addRoot(Object e) +insertLeft(Node v, Object e) +insertRight(Node v, Object e) +remove(Node v)

### **BinarySearchTree**

- +BinarySearchTree()
- +find(int k): Node
- +insert(Object e, int k)
- +remove(int k): Object

