化工应用数学 第五章 常微分方程求解 讲义

<u>常微分方程的基本概念</u>：

在化工研究中，很多时候我们所研究的变量之间的函数关系并不能直接写出来，而是要根据物理或者实际情况，先得到这些变量之间的导数的关系，然后再根据这些关系去把未知的函数关系求解出来。

下面介绍一些微分方程中的基本概念：

这种含有未知函数的导数的方程就称为微分方程。

如果未知函数是一元函数，那么这种含有未知函数导数的微分方程称为常微分方程；而若未知函数是多元函数，那么这种含有未知函数的偏导数的微分方程称为偏微分方程。

这里，方程中未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶

例如 $\frac{dy}{dx}=4x^2$，　$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\theta=0$

一阶　　二阶

一般的，二阶及二阶以上的微分方程我们称为高阶微分方程。

同时，最高阶导数的指数我们称为微分方程的次数，上面两个都是一次微分方程。

能够满足微分方程的某个函数 y=f(x)叫做微分方程的一个解。

一般的，n 阶微分方程的解并不是唯一的，我们把包含 n 个独立的任意常数，并且常数个数与微分方程的阶数相同的解称为微分方程的通解，写作：

$$y=f(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$$

通解中各任意常数取特定值所得到的解称为特解。

<u>常微分方程的解析求解-分离变量法</u>：

若常微分方程 dy/dx=φ(x,y)可以将φ(x,y)分解为 x、y 分别的两部分即：

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

对于这样的常微分方程，就可以使用分离变量法进行求解，即把上式数学变换为：

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

然后两边分别进行不定积分即可进行求解：

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$$

例：求微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$的通解。　　　解：$y=Ce^{x^2}$

而有些常微分方程虽然并不能像上面那样直接分解为 x、y 两部分，但是可

以通过一定的数学变换转换为可分解的形式，这时我们也可以先数学变换、再进行分离变量法进行求解。这种形式的常微分方程的一个代表就是齐次微分方程，即方程形式为：

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

此时，可以先进行变量代换：u=y/x，即 y=ux

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

结合原微分方程，有：

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u)$$

上式就可以变化为可分离变量的微分方程：

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

之后再根据 f(u)-u 是否等于 0，分别进行讨论计算

若不等于 0，通解为：$x = Ce^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$其中 $\varphi(u) = \int \frac{du}{f(u)-u}$

若等于 0，说明 f(u)=u，通解为：$\ln|x| = \ln|y| + c$

例：求解微分方程：$x\frac{dy}{dx} = \frac{3y^3+6x^2y}{3x^2+2y^2}$　　解：$x^3 = cy\sqrt{y^2+3x^2}$

常微分方程的解析求解-一阶线性方程：

另一种都具有解析解的常微分方程是一阶线性微分方程，其具有下述形式：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

当 Q(x)等于 0 时，上述方程称为齐次的

当其不等于 0 时，上述方程称为非齐次的

对于齐次情况，可以使用分离变量法：

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,\ \int\frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C,$$

齐次方程的通解为 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

对于非齐次情况，首先计算对应的齐次情况，然后使用常数变易法求解，下面以例子来具体讲解：

线性非齐次方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$

讨论 $\because \frac{dy}{y}=\left[\frac{Q(x)}{y}-P(x)\right]dx,$

两边积分 $\ln|y|=\int\frac{Q(x)}{y}dx-\int P(x)dx,$

设 $\int\frac{Q(x)}{y}dx$ 为 $v(x)$，$\therefore \ln|y|=v(x)-\int P(x)dx$

即 $y=e^{v(x)}e^{-\int P(x)dx}$. 非齐次方程通解形式

与齐次方程通解相比 $C\Rightarrow u(x)$

例：求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解 这是非齐次线性方程 先求对应的齐次方程的通解.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0,\quad \frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1},\quad y=C(x+1)^2.$$

用常数变易法把 C 换成 u，即令 $y=u(x+1)^2$,

$$\frac{dy}{dx}=u'(x+1)^2+2u(x+1),$$

代入非齐次方程得 $u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}$.

两端积分，得 $u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$.

故所求通解为 $y=(x+1)^2[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C]$.

15

<u>常微分方程的几何解法：</u>

常微分方程的解析方法与几何方法

解析方法	几何方法
y’=f(x,y)	方向场/斜率场/线素场
$y_1(x)$	积分曲线

方向场/斜率场/线素场：平面上，通过每点做短线素，线素的斜率等于每一

点的 f(x,y)值

积分曲线：平面上每一点都与线素场中的线素相切的一组曲线，其即为微分方程解的图像

定理：$y_1(x)$是方程 $y'=f(x,y)$的解的充分必要条件是 $y_1(x)$的图像是这一微分方程的积分曲线。

根据上述定理，画出相应的积分曲线实际上也是求解常微分方程的一种方法。

如何根据微分方程画积分曲线：

a.计算机方法：

1) 平面上选择不同的点(x,y)
2) 对每一点计算 f(x,y)
3) 在(x,y)处画斜率为 f(x,y)的线素

b.人工方法：

1) 选择不同的斜率 C
2) 画出函数 f(x,y)=C 的图像
3) 在上述曲线上取不同的点画出斜率为 C 的线素

例：通过几何法求解微分方程：$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$、$\frac{dy}{dx}=1+x-y$

对比两个函数的解析解：$x^2+y^2=C$ 和 $y=(xe^x+C)e^{-x}=x+Ce^{-x}$

<u>常微分方程数值求解-尤拉法/欧拉法</u>：

对于比较复杂的问题，若前面介绍的解析方法无法求解、几何方法求解也不方便时，对于给定初值的问题，我们可以使用欧拉法进行数值求解。

针对一阶初值问题：

$$\begin{cases} y'=f(x,y) & (a<x<b) \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

将[a,b]进行 n 等分，所得节点记为 x_i，对应的数值计算值为 u_i、对应的函数值为 y_i，记每等分为步长 h=(b-a)/n

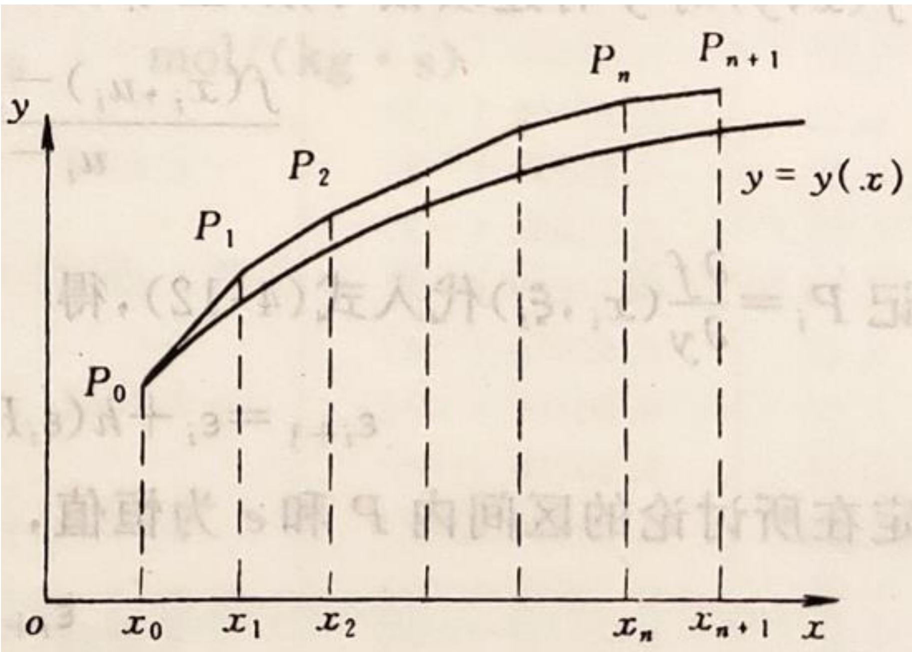
将 y(x)在 x_i 附近进行泰勒展开，可得：

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+(x_{i+1}-x_i)y'(x_i)+\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2!}y''(\xi_i)$$
$$x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$$

舍去高阶小量之后，上式可写为：

$$\begin{cases} u_{i+1}=u_i+hf(x_i,u_i) & i=0,1,2,\cdots,n-1 \\ u_0=y_0 \end{cases}$$

这一公式就是显式欧拉公式。



上图为显式欧拉法求解的示意图，实际上显式欧拉法就是利用 x_i 处的斜率代替(x_i,x_{i+1})整体上的斜率

同样的，我们也可以使用 x_{i+1} 处的斜率代替(x_i,x_{i+1})整体上的斜率，这时数学上相当于将 y(x)在 x_{i+1} 附近进行泰勒展开：

$$y(x_i) = y(x_{i+1}) - hy'(x_{i+1}) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi_i)$$

同样的，经数学处理可得：

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_{i+1}, u_{i+1})$$
$$u_0 = y_0$$

上式即为隐式欧拉法。

因为上式中，方程左右均含有 ui+1，所以求解过程需要进行迭代求解，此时迭代公式我们直接使用上式本身，即：

$$u_{i+1}^{(k+1)} = u_i + hf(x_{i+1}, u_{i+1}^{k})$$

数学上，我们可以证明隐式欧拉法是绝对稳定的，但是精度上其与显示欧拉法都只有一阶精度。为了提高精度，我们结合显式与隐式欧拉法，可以得到：

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}[f(x_i, u_i) + f(x_{i+1}, u_{i+1})]$$

可以发现，这里我们相当于是使用 x_i 与 x_{i+1} 处的斜率的平均值代替(x_i,x_{i+1})整体上的斜率，所以上式也称为梯形法则，其具有二阶精度。

龙格-库塔法：

从前面的内容，我们可以发现，通过引入更多的点来代表区域中的斜率能够

有效的提高计算的精度，基于这一思想，提出了龙格-库塔方法：

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=1}^{v} \omega_j K_j$$

其中：

$$K_j = hf\left(x_i + c_j h, u_i + \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} K_l\right) a_{jl} K_l$$

$$c_1 = 0$$

$$x_i = x_0 + ih$$

这里使用 v 个节点去表征区域上中的斜率，每个节点赋予了不同的权重 ω_j

可以发现，如果我们仅使用一个节点、同时赋予权重，那么龙格-库塔法就退化为欧拉法；同时也可以证明，之前所讲的梯形法则也是龙格-库塔法使用两个节点的一个特例。

使用 v 个节点的龙格-库塔公式一般称为 v 阶龙格-库塔公式，公式中各参数参数的确定是使用待定系数法，将其与函数的泰勒展开式对比得到的，下面是一般使用的精度比较好的四阶龙格-库塔法公式：

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = hf(x_i, y_i) \\ K_2 = hf(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{1}{2}K_1) \\ K_3 = hf(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{1}{2}K_2) \\ K_4 = hf(x_i + h, y_i + K_3) \end{cases}$$

外推法：

很容易能想到，缩小步长 h 也是提高精度的一个方式，但 h 的减小会显著的提高总体的计算量；同时，由于截断误差的存在（之前公式推导过程中忽略的高阶小项），过小的步长也可能会导致截断误差的累计，从而精度反而减小。

针对这一问题提出的方法即为外推法，即将多个步长的计算结果结合起来，以提高计算的精度。

比如，若使用欧拉法在步长 h 与 h/2 两种步长上进行计算，由于普通欧拉法是一阶精度，误差和步长成正比，有：

$$u_i \approx y(x_i) + \phi h$$

$$w_i \approx y(x_i) + \phi \frac{h}{2}$$

这里我们认为φ是常数，那么通过上述两式消去φ即可得到：

$$y(x_i) \approx 2w_i - u_i$$

通过这样的计算，我们可以得到高于前两者的精度。

同样的，对于梯形法则我们有：

$$u_i \approx y(x_i) + \phi h^2$$

$$w_i \approx y(x_i) + \phi \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

从而：

$$y(x_i) \approx \frac{4w_i - u_i}{3}$$

通过这样的方式，我们就可以在不计算更小步长的情况下，提高计算的精度。（更小的步长会带来计算量的增加以及可能的计算不稳定）

<u>边值问题</u>：

前面数值计算是用来解决初值问题的，这也是我们在实际常微分方程求解过程中较多遇到的问题；而实际过程中，我们还会遇到另一类的常微分方程：没有提供初值，而是提供在边界处的函数值、导数值或者两者的结合，即边值问题。

针对这类问题，常见的解决方案有两种：

1. 将边值问题转化为等价的初值问题
2. 将问题进行有限差分，仅为转化为三角矩阵的形式，从而使用追赶法进行求解。

但针对这些问题，因为这种情况一般都是对应于稳态的扩散方程等问题，所以更加推荐的方式是使用一些商业或者开源的 CFD 软件进行求解，这部分将在偏微分方程求解部分一同讲解，这里不再具体介绍。

<u>常微分方程 Python 求解</u>：

Python 中求解微分方程的思路有很多，这里我们使用 scipy 中提供的用于解常微分方程的函数 odeint()，其基本语法为：

scipy.integrate.odeint(*func, y0, t, args=(), Dfun=None, col_deriv=0, full_output=0, ml=None, mu=None, rtol=None, atol=None, tcrit=None, h0=0.0, hmax=0.0, hmin=0.0, ixpr=0, mxstep=0, mxhnil=0, mxordn=12, mxords=5, printmessg=0, tfirst=False*) [s

实际使用中，还是主要使用前三个参数，即微分方程的描写函数、初值和需要求解函数值对应的的时间点。这个函数使用过程中要求微分方程必须化为标准

形式，并且可以处理常微分方程组的问题。（高阶微分方程可以转换为微分方程组来解决）

例：求解 dy/dx=x

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def diff(y, x):# dy/dx = x
    return x

x = np.linspace(0, 10, 100)  # 给出x范围
y = odeint(diff, 0, x)  # 设初值为0
plt.plot(x, y[:, 0])
plt.grid()
plt.show()
```

例：求解单摆运动： $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta$

引入角速度ω，将二阶常微分方程转化为一阶常微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{l}\theta$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

g = 9.8
l = 1
def diff2(d_list, t):
    omega, theta = d_list
    return np.array([-g/l*theta, omega])
t = np.linspace(0, 20, 2000)
result = odeint(diff2, [0, 35/180*np.pi], t)
# 结果是一个两列的矩阵， odeint中第二个是初始单摆角度35度
plt.plot(t, result[:, 0])  # 输出omega随时变化曲线
plt.plot(t, result[:, 1])  # 输出theta随时变化曲线，即方程解
plt.show()
```