## 1. Distancia entre dos puntos.

Para encontrar la distancia entre dos puntos utilizamos la siguiente fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2}$$

Por ejemplo, considere los puntos $(\underbrace{-2}_{x_1}, \underbrace{1}_{y_1})$ y $(\underbrace{3}_{x_2}, \underbrace{3}_{y_2})$. La distancia entre estos es:

$$d = \sqrt{(3-(-2))^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(5)^2 + (2)^2} = \sqrt{29} \approx 5.385$$

Nota que si cambias las etiquetas $x_1, y_1$ por $x_2, y_2$ y vice-versa obtienes el mismo resultado.

$$d = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \approx 5.385$$

Obten la distancia entre los puntos:

- $(0, 0)$ y $(-3, -4)$
- $(0, 0)$ y $(3, 4)$
- $(-2, 5)$ y $(2, -5)$
- $(1, 1)$ y $(-2, 1)$
- $(-1, 6)$ y $(-2, 1)$

## 2. División de un segmento en una razón dada.

Dados dos puntos sobre una recta, podemos obtener el punto que se encuentra a una razón $r$ con las siguientes fórmulas:

$$x_r = x_1 + r(x_2 - x_1)$$
$$y_r = y_1 + r(y_2 - y_1)$$

Ejemplo: Considere los puntos $(1, 3)$ y $(5, 4)$. Encuentre el punto que esta a la mitad de dicho segmento

$$x_{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(5-1) = 3$$
$$y_{\frac{1}{2}} = 3 + \frac{1}{2}(4-3) = 3.5$$

Ejemplo: Considere los puntos $(1,3)$ y $(5,4)$. Encuentre el punto que esta a dos tercios de dicho segmento

$$x_{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}(5-1) = \frac{11}{3}$$
$$y_{\frac{2}{3}} = 3 + \frac{2}{3}(4-3) = \frac{11}{3}$$

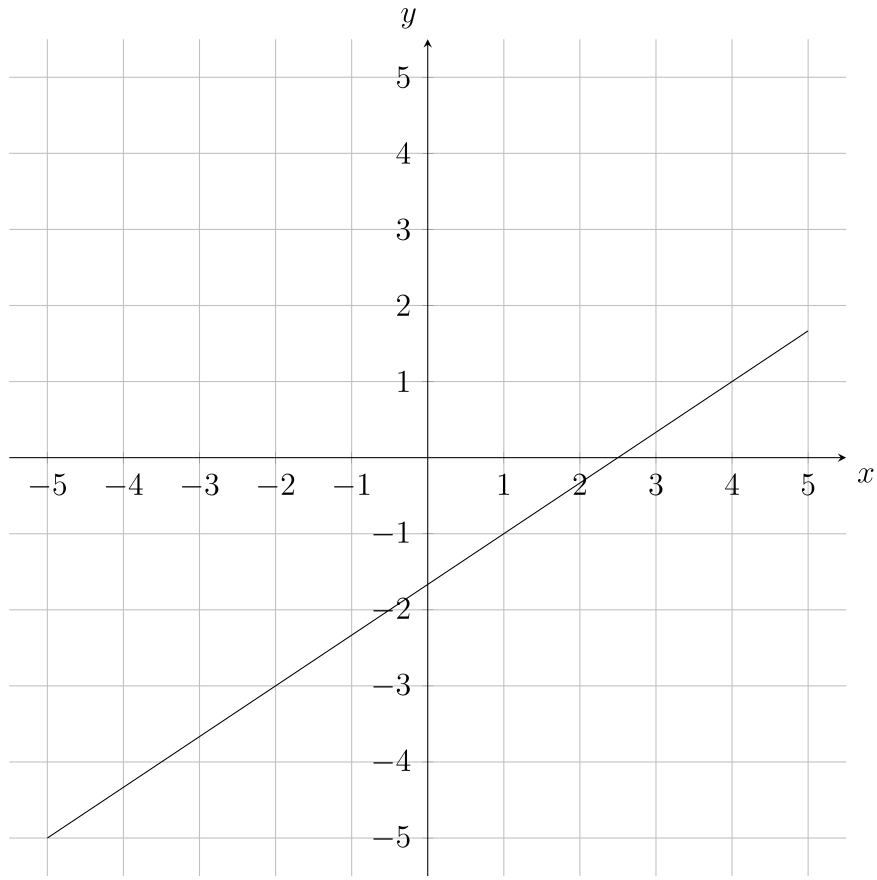
Resuelva los siguientes ejercicios:

- $(0,0)$ y $(-3,-4)$, $r = \frac{1}{2}$
- $(0,0)$ y $(3,4)$, $r = \frac{3}{4}$
- $(-2,5)$ y $(2,-5)$, $r = \frac{2}{3}$
- $(1,1)$ y $(-2,1)$, $r = \frac{2}{5}$
- $(-1,6)$ y $(-2,1)$, $r = \frac{3}{7}$

## 3. Linea Recta.

Una linea recta tiene por ecuación: $ax + by = c$, donde $a$, $b$ y $c$ son constantes. Por ejemplo: $3x + 4y = 5$, $-x - y = 1$ ó $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{3}{4}$

**Pendiente de una linea recta.** Una cantidad asociada a una linea recta que nos interesa es la *pendiente*. La pendiente describe que tan "inclinada" esta una linea, por ejemplo: considere la recta $2x - 3y = 5$.




Podemos decir que esta linea esta "inclinada hacia arriba". La pendiente se calcula con la siguiente fórmula:

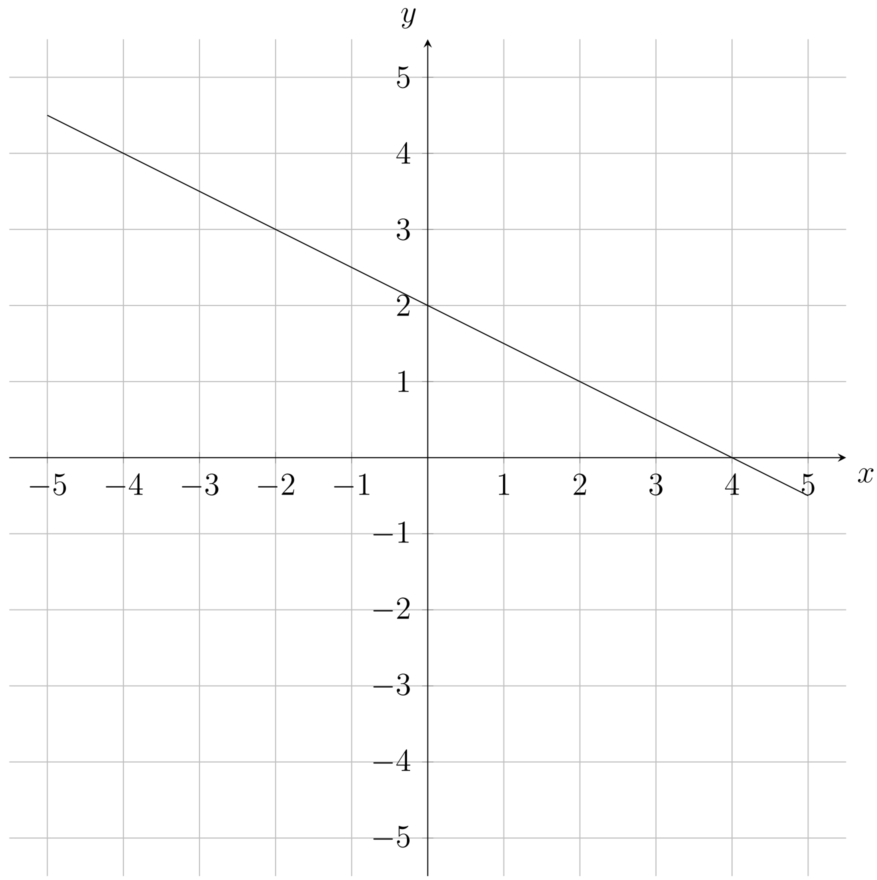
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ son dos soluciones de la ecuación de la recta dada. En nuestro ejemplo tenemos como soluciones $(\underbrace{4}_{x_1}, \underbrace{1}_{y_1})$ y $(\underbrace{-5}_{x_2}, \underbrace{-5}_{y_2})$. La pendiente es igual a:

$$m = \frac{-5 - 1}{-5 - 4} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$$

Una pendiente positiva significa que la recta esta "inclinada hacia arriba", una pendiente negativa significa que la recta esta "inclinada hacia abajo" y finalmente una pendiente de 0 significa que la recta es paralela al eje de las $x$, es decir, es horizontal.

Otro ejemplo es la recta $x + 2y = 4$




La pendiente de esta nueva recta la obtendremos con las soluciones $(\underbrace{0}_{x_1}, \underbrace{2}_{y_1})$ y $(\underbrace{4}_{x_2}, \underbrace{0}_{y_2})$. La pendiente es igual a:

$$m = \frac{0-2}{4-0} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

**Forma ordenada al origen.** Si en la ecuación $ax+by=c$ despejamos a $y$ obtenemos la **forma ordenada al origen** de la recta. Esta forma se escribe como $y = mx + b$, donde $m$ es igual a la pendiente y $b$ es la intersección en $y$ cuando $x = 0$. Retomemos la recta $2x - 3y = 5$, si despejamos a $y$:

$$\begin{aligned}
2x - 3y &= 5 \\
-3y &= 5 - 2x \\
y &= \frac{5 - 2x}{-3} \\
y &= \frac{5}{-3} - \frac{2x}{-3} \\
y &= -\frac{5}{3} + \frac{2x}{3} \\
y &= -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}x \\
y &= \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Tenemos entonces la forma ordenada la origen $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$, de inmediato podemos observar la pendiente $\frac{2}{3}$ y la intersección con el eje $y$, osea $(0, -\frac{5}{3})$

## 4. Paralelismo y perpendicularidad.

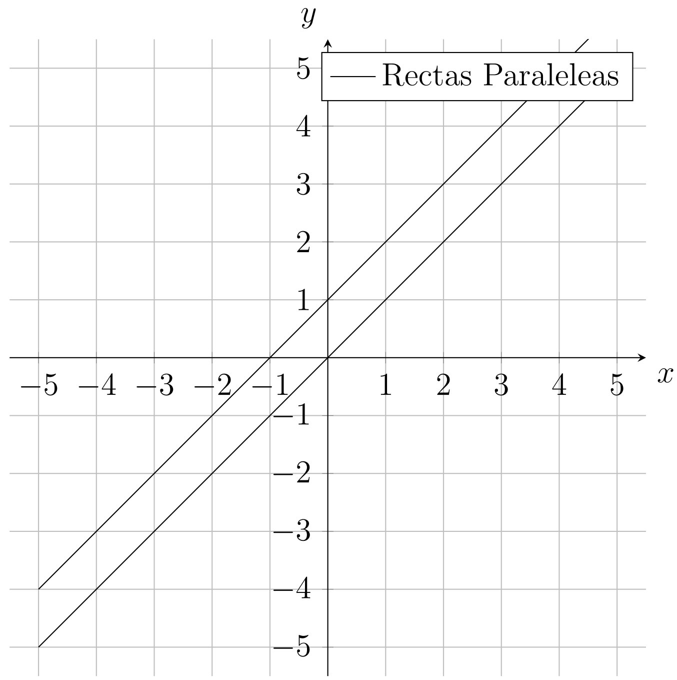
Dos rectas son paralelas si nunca se encuentran, por ejemplo las rectas $y = x$ y $y = x + 1$. Sin embargo, no es necesario graficarlas para saber si son paralelas o no, si las pendientes de las rectas son la misma entonces son paralelas. Nota que en nuestro ejemplo ambas rectas tienen pendiente $m = 1$.**Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.**

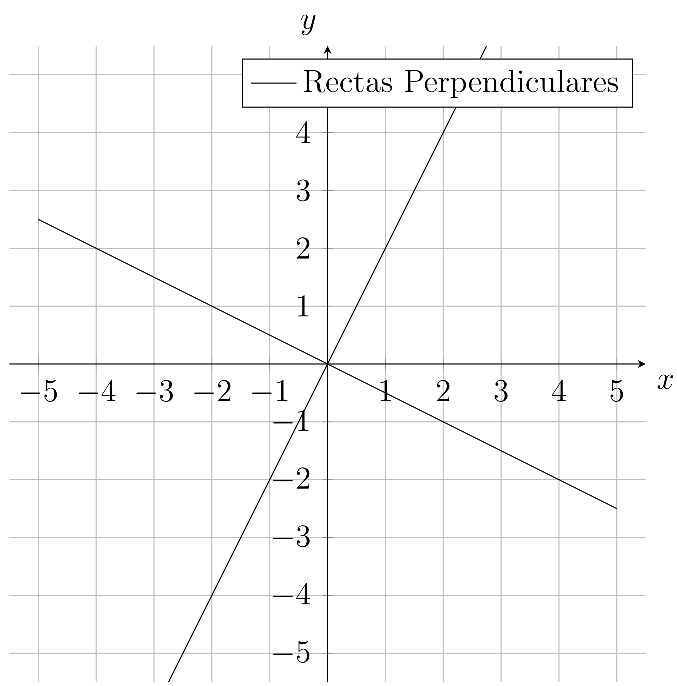
Dos rectas son paralelas si cuando se encuentran forman un ángulo de 90 grados, por ejemplo las rectas $y = 2x$ y $y = -\frac{1}{2}x$. Tambien es posible determinar si dos rectas son perpendiculares sin necesidad de graficar. Suponga que la pendiente de una recta es $m_1$ y la pendiente de la otra recta es $m_2$, esas dos rectas son perpendiculares si se cumple:

$$m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

En nuetro ejemplo la pendiente de la recta $y = 2x$ es 2 y la pendiente de la recta $y = -\frac{1}{2}x$ es $\frac{-1}{2}$, y por lo tanto:

$$2 = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = \frac{\frac{-1}{1}}{\frac{-1}{2}} = \frac{-2}{-1} = 2$$


y
Rectas Paraleleas
5
4
3
2
1
x
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5
−1
−2
−3
−4
−5


y
Rectas Perpendiculares
4
3
2
1
x
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5
−1
−2
−3
−4
−5

## 5. Distancia de un punto a una recta.

Para obtener la distancia entre un punto $(x, y)$ y una recta $ax+by+c=0$, utilizamos la siguiente fórmula:

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Toma en cuenta que esta es la distancia que existe entre la recta dada y el punto en perpendicular. Ejemplo: Considere el punto $(1, 3)$ y la recta $2x - 3y + 1 = 0$

$$d = \frac{|(2)(1) + (-3)(3) + (1)|}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{13}} \approx 1.66$$