Función

El concepto de función surge cuando dos variables están relacionadas, de tal manera que una de las variables determina el valor de la otra variable.

Ejemplos:

1. Física. Tiempo de caída, t representa tiempo y h representa altura:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{9.81}}$$

2. Economía / Finanzas. Tipo de cambio. m representa *MXN* (Peso Mexicano) y d representa *USD* (Dólar Americano).[1]

$$d = \frac{m}{21}$$

3. Geometría. Área del círculo, A representa el área y r representa el radio del círculo:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Estas tres relaciones son ejemplos de funciones, si en *Tiempo de caída* sustituimos un valor h por algún número en especifico por ejemplo $h = 20$ entonces obtenemos:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{9.81}} = 2.019275 \cdots \approx 2.02$$

O también, si en *Tipo de cambio* sustituimos $m = 105$ obtenemos:

$$d = \frac{105}{21} = 5$$

En ambos ejemplos, el valor de unas de las variables **determina** el valor de la otra variable. En el ejemplo de economía si $m = 105$ entonces $d = 5$, en el ejemplo de física si $h = 20$ entonces $t = 2.019275\ldots$

En las funciones tenemos dos tipos de variables: **independientes** y **dependientes**. Las variables **dependientes** reciben ese nombre porque *dependen* del valor de la otra variable, como regla general las podemos identificar porque siempre están despejadas. Las **independientes** tienen la característica que nosotros podemos elegir libremente su valor. Puedo sustituir $r = 1$, $r = 6.5$, $r = 10.1$ o cualquier valor que yo quiera en la función de *Área del círculo*.

En nuestro ejemplos tenemos:

[1] Este es el tipo de cambio redondeado al tiempo que se escribe este árticulo.

Función	Variable Independiente	Variable Dependiente
Tiempo de caída	h: Altura	t: Tiempo
Tipo de cambio	m: Peso Mexicano	d: Dólar Americano
Área del círculo	r: Radio	A: Área

Notación $f(x)$

Para simplificar el uso de variables, en cálculo denotamos a las variables independientes con la letra x y las variables dependientes con la letra y. Así, si expresamos nuestros ejemplos de la sección anterior tendríamos:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{9.81}} \to y = \sqrt{\frac{2x}{9.81}}$$
$$d = \frac{m}{21} \to y = \frac{x}{21}$$
$$A = \pi \cdot r^2 \to y = \pi \cdot x^2$$

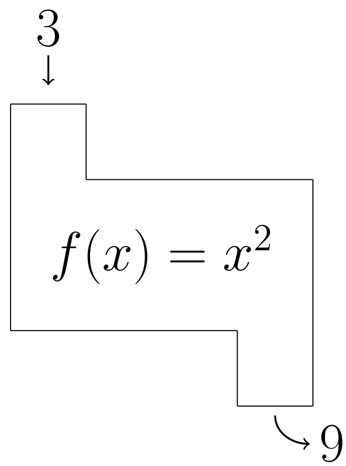
La notación que involucra a las variables x y y es común en cálculo, sin embargo, existe otra notación donde a la variable dependiente y la sustituimos por el símbolo $f(x)$. Esta notación nos permite escribir a la funciones de la siguiente manera:

$$y = \sqrt{\frac{2x}{9.81}} \to f(x) = \sqrt{\frac{2x}{9.81}}$$
$$y = \frac{x}{21} \to f(x) = \frac{x}{21}$$
$$y = \pi \cdot x^2 \to f(x) = \pi \cdot x^2$$

La letra f que sirve para identificar una función se le conoce como *nombre de la función*, claramente se puede nombrar una función como uno quiera, puedo cambiar $f(x) = x^2$ por $g(x) = x^2$ y representan la misma función. Así podemos entonces nombrar nuestra funciones como:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{9.81}} \to f(x) = \sqrt{\frac{2x}{9.81}}$$
$$f(x) = \frac{x}{21} \to g(x) = \frac{x}{21}$$
$$f(x) = \pi \cdot x^2 \to h(x) = \pi \cdot x^2$$

Analogía de la máquina.



Una manera muy útil de representar funciones, es a través de una "máquina". Nosotros le introducimos valores a esta "máquina", esta hace cálculos y nos regresa un valor. En el diagrama de arriba tenemos representado este proceso: Nuestra máquina es la función $f(x) = x^2$, le introducimos el número 3 y la máquina no devuelve el valor 9.

A el número que le introducimos a esta máquina se le conocen como *argumento*, *entrada* o *input*. Después la máquina "evalúa"[2] el argumento y nos regresa un valor que se le conoce como *valor de retorno*, *salida* o *output*.

En nuestro diagrama en particular: 3 es el argumento, la función evalúa $f(3) = 3^2$ y el valor de retorno es 9.

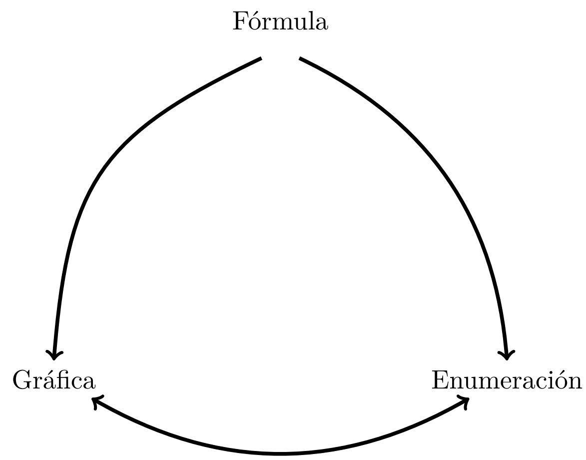
Representación de una función.

Tenemos tres maneras de representar una función, cada una de estas maneras tiene ventajas y desventajas:

- Fórmula - Representación analítica.
- Gráfica.
- Enumeración.

Una fórmula es la representación mas común en esta materia, ya hemos visto muchos ejemplos de fórmulas: $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{x}{21}$, etc. La gráfica consiste en una colección de puntos en el plano cartesiano, en la próxima sección veremos como podemos graficar funciones. Y por última una enumeración consiste en describir a través de una lista o tabla a que argumento le corresponde que valor de retorno.

[2]Claramente nosotros somos los que tenemos que hacer los cálculos a mano, la máquina es solo una analogia.



La representación analítica es la que preferimos porque es posible convertirla en gráfica y en enumeración, mientras que las otras dos no tienen esta característica: la gráfica la podemos convertir en una enumeración pero no necesariamente la podemos convertir en fórmula y la enumeración la podemos convertir en gráfica pero no necesariamente en fórmula.

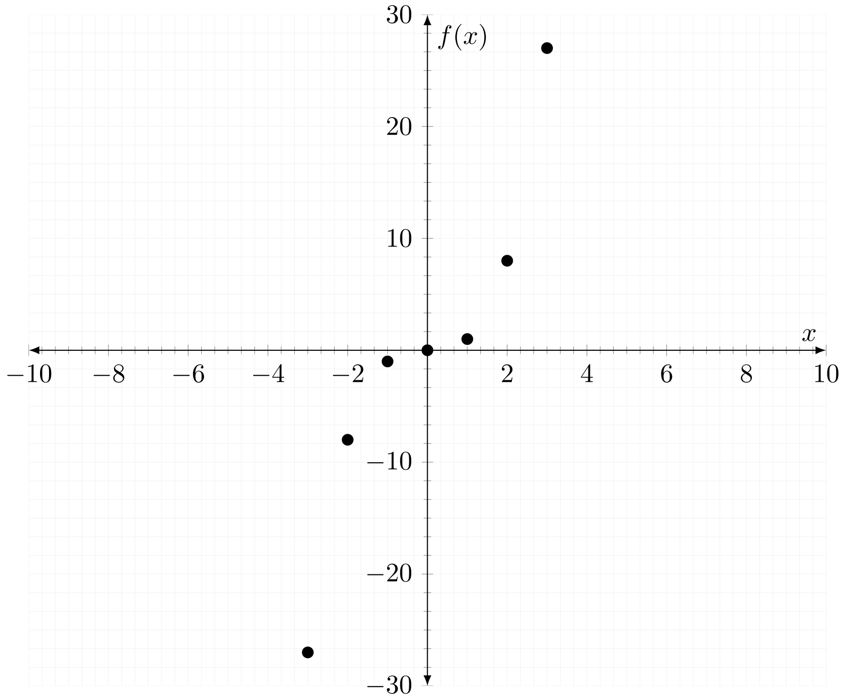
Gráfica de una función.(Tabulación)

El proceso para graficar una función dada una fórmula $f(x)$ es el siguiente:

1. Escoge un rango de valores para x. Por ejemplo: -3, -2, -1, 0, 1, 2 y 3.
2. Evalúa cada uno de los valores en la función $f(x)$. Hazlo en una tabla para mantener orden.
3. Cada uno de los valores obtenidos forman una coordenada $(x, f(x))$. Ubicalos en el plano.

Por ejemplo, vamos a conseguir la gráfica de al función $f(x) = x^3$ desde -3 hasta 3.

x	$f(x) = x^3$	$\big(x, f(x)\big)$
-3	$f(-3) = (-3)^3 = -27$	$(-3, -27)$
-2	$f(-2) = (-2)^3 = -8$	$(-2, -8)$
-1	$f(-1) = (-1)^3 = -1$	$(-1, -1)$
0	$f(0) = (0)^3 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = (1)^3 = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = (2)^3 = 8$	$(2, 8)$
3	$f(3) = (3)^3 = 27$	$(3, 27)$



Detalles técnicos de graficación.

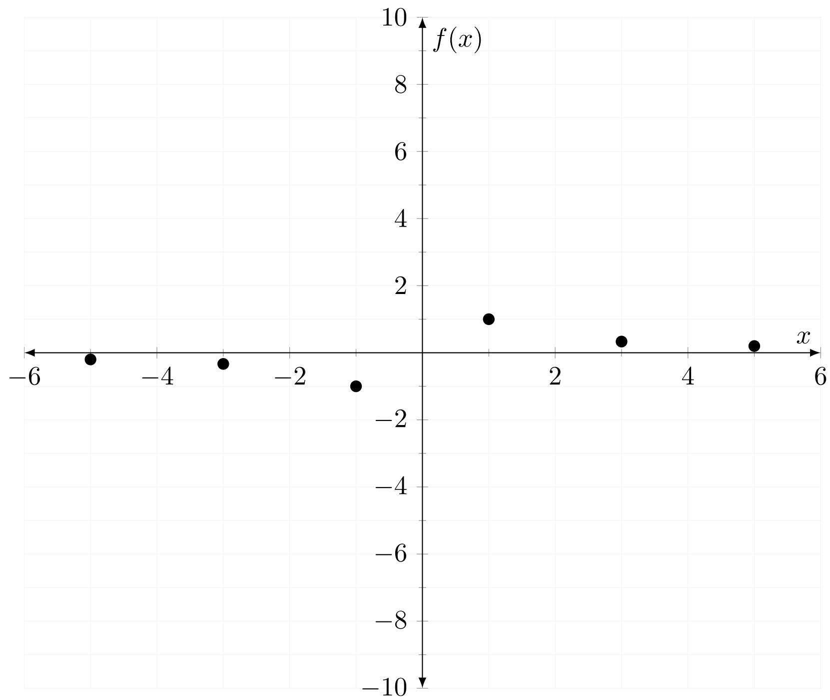
Considera la función $f(x) = \frac{1}{x}$, vamos a realizar *tres* gráficas de la misma función:

1. De -5 a 5 pasando por: $-5, -3, -1, 1, 3, 5$ (2 unidades entre cada valor)
2. De -5 a 5 pasando por: $-5, -4, -3, \ldots, 3, 4, 5$ (1 unidad entre cada valor)
3. De -5 a 5 pasando por: $-5, -4.9, -4.8, \ldots, 4.8, 4.9, 5$ (0.1 unidades entre cada valor)

Primer gráfica.

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\big(x, f(x)\big)$
-5	$f(-5) = \frac{1}{-5} = -0.2$	$(-5, -0.2)$
-3	$f(-3) = \frac{1}{-3} = -0.333$	$(-3, -0.333)$
-1	$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$	$(-1, -1)$
1	$f(1) = \frac{1}{1} = 1$	$(1, 1)$
3	$f(3) = \frac{1}{3} = 0.333$	$(3, 0.333)$

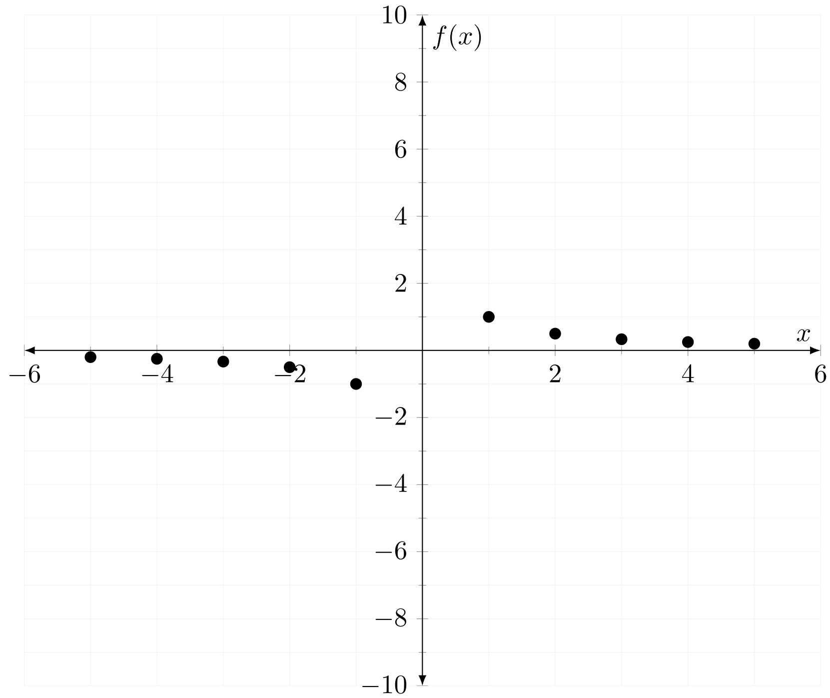
x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\big(x, f(x)\big)$
5	$f(5) = \frac{1}{5} = 0.2$	$(5, 0.2)$



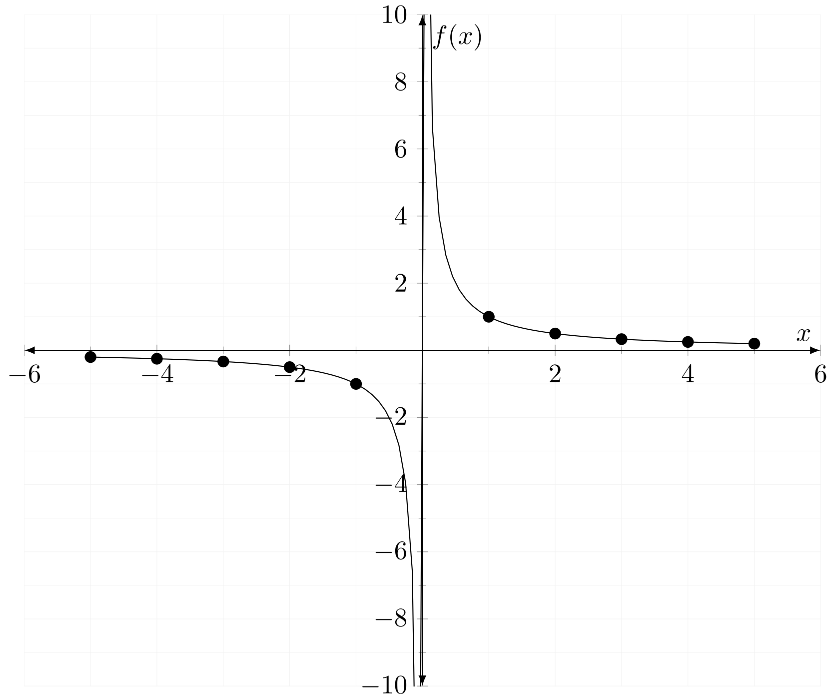
Segunda gráfica

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\big(x, f(x)\big)$
-5	$f(-5) = \frac{1}{-5} = -0.2$	$(-5, -0.2)$
-4	$f(-4) = \frac{1}{-4} = -0.25$	$(-4, -0.25)$
-3	$f(-3) = \frac{1}{-3} = -0.333$	$(-3, -0.333)$
-2	$f(-2) = \frac{1}{-2} = -0.5$	$(-2, -0.5)$
-1	$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$	$(-1, -1)$
0	$f(0) = \frac{1}{0}$(indef)	$(0, -)$
1	$f(1) = \frac{1}{1} = 1$	$(1, 1)$

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\big(x, f(x)\big)$
2	$f(2) = \frac{1}{2} = 0.2$	$(2, 0.2)$
3	$f(3) = \frac{1}{3} = 0.333$	$(3, 0.333)$
4	$f(4) = \frac{1}{4} = 0.25$	$(4, 0.25)$
5	$f(5) = \frac{1}{5} = 0.2$	$(5, 0.2)$



Tercer gráfica



La forma de la gráfica de una función no siempre es evidente, la mejor estrategia es usar el mayor número de puntos para obtener la mejor resolución posible.