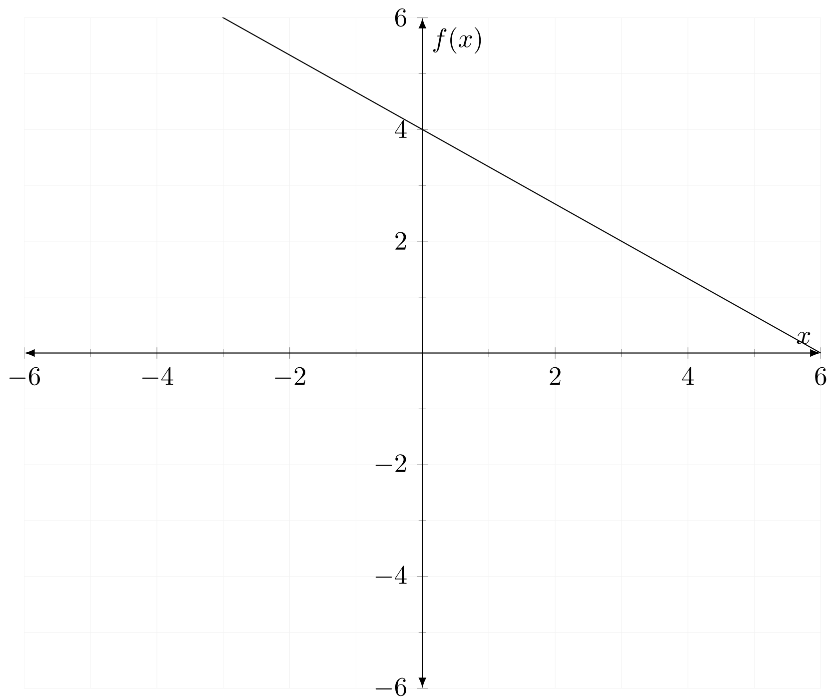
La derivada.

El concepto de derivada responde al siguiente problema: Considera una función $f(x)$ y algún punto $x = x_0$. Determina la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.



Sin embargo, resolver este problema parece muy complicado en principio, pues solo conocemos *un* punto que pasa por la recta tangente $(x_0, f(x_0))$. Para encontrar la pendiente utilizamos el siguiente método:

1. Ubica algún otro punto que este sobre la función $f(x)$ llamémoslo $(b, f(b))$. Si conectas los dos puntos en cuestión obtenemos una recta secante.
2. La pendiente de esta recta tangente es:

$$m = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$$

3. Aproxima el punto $(b, f(b))$ hacia el punto $(x_0, f(x_0))$. Matemáticamente esto es:

$$\lim_{b \to x_0} \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$$

4. Esta última expresión se conoce como **derivada por definición**.

Existe una formulación alterna que es más fácil de manipular:

1. Ubica algún otro punto que este sobre la función $f(x)$ llamémoslo

$$(x_0 + h, f(x_0 + h))$$

, donde h es la distancia entre las coordenadas x de nuestros puntos.
2. La pendiente de esta recta tangente es:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3. Aproxima el punto $(x_0+h, f(x_0+h))$ hacia el punto $(x_0, f(x_0))$. Matemáticamente esto es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplo: Calcula la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto $x = 3$. Evidentemente, conocemos las coordenadas del punto por donde pasa la recta:

$$(3, f(3)) = (3, 9)$$

solo nos falta conocer el valor de la pendiente. Este valor m se calcula:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(6 + h)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 6 + h = 6
\end{aligned}$$

ya que conocemos el valor de un punto y la pendiente, sustituimos en la fórmula:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 9 = 6(x - 3)$$

Repitamos este ejercicio pero ahora en el punto $x = -2$. La coordenada por donde pasa la tangente es:

$$(-2, f(-2)) = (-2, 4)$$

y la pendiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2-4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4-4h+h^2-4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-4h+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-4+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -4+h = -4
\end{aligned}$$

y por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y-4=-4(x+2)$$

Sin embargo, como seguro habras notado, la manera de obtener la pendiente de ambas rectas es practicamente igual, si te pidiera ahora que encontraras la pendiente usando la misma función pero en algun otro valor digamos $x=1$ tendriamos que realizar la misma series de pasos otra vez. Un mejor sistema es calcular la pendiente de la recta tangente pero de manera general, osea, dejando el punto x_0 como un punto cualquiera y realizar el límite.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x_0+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x_0+h = 2x_0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión $2x_0$ nos dice el valor de la pendiente en cualquier punto x_0 que elijamos. Por ejemplo, si $x_0=3$ al sustituir en esta expresión obtenemos: $2(3)=6$, si $x_0=-2$ al sustituir obtenemos: $2(-2)=-4$. Regularmente, estas expresiones las escribimos sin el subindice, es decir, solamente vamos a escribir x: $2x_0 \to 2x$. Esta expresión $2x$ se conoce como: *función derivada* o simplemente *derivada.*

Notación

La derivada de una función $f(x)$ se puede escribir como:

$$f'(x), \frac{df(x)}{dx}, D_x\left(f(x)\right)$$

Notación de Leibniz

La notación de Leibniz es usada en todas las ramas de las matemáticas que involucran al cálculo:

$$\frac{df(x)}{dx}$$

También es común encontrar esta notación como:

$$\frac{d}{dx}f(x), \frac{d}{dx}\big(f(x)\big)$$

Recuerda que es $f(x) = y$ y es posible encontrar la notación de Leibniz como:

$$\frac{dy}{dx}$$

o también

$$\frac{d}{dx}y, \frac{d}{dx}\big(y\big)$$

La notación $f'(x)$ se le conoce como notación de *Lagrange*, y es posible encontrar y'.A la notación $D_x(f(x))$ se le conoce como notación de *Euler*, y es posible encontrar $D_x(y)$.

Existe otra notación $\dot{y}$, conocida cono notación de *Newton*, pero es mas común encontrar esta notación en libros de física.

A manera de ejemplo considera la función $f(x) = x^2$ y su derivada $2x$. Usando las diferentes notaciones:

1. Leibniz:
$$\frac{df(x)}{dx} = 2x$$
2. Lagrange:
$$f'(x) = 2x$$
3. Euler:
$$D_x(f(x)) = 2x$$

También es común encontrar las diferentes notaciones aplicadas directamente sobre la fórmula de una función, es decir:

1. Leibniz:
$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

2. Lagrange:
$$(x^2)' = 2x$$
3. Euler:
$$D_x(x^2) = 2x$$

Derivadas por definición.

Ejemplo. Calcula la derivada de la función $f(x) = x^3$. Usamos la fórmula de derivada por definición:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2
\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{\frac{h}{1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+0)} = \frac{-1}{x^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcula la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Calcula la derivada de la función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2+2(x+h)+1-(3x^2+2x+1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3(x^2+2xh+h^2)+2(x+h)+1-(3x^2+2x+1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2+6xh+3h^2+2x+2h+1-3x^2-2x-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6xh+3h^2+2h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(6x+3h+2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 6x+3h+2 = 6x+3(0)+2 = 6x+2
\end{aligned}
$$

La regla de las potencias.

Si derivas funciones que sean potencias de x obtienes el siguiente patrón:

Función	Derivada
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$

A partir de esta tabla podemos formar una conjetura: *La derivada de* $f(x) = x^n$ *es* $f'(x) = nx^{n-1}$