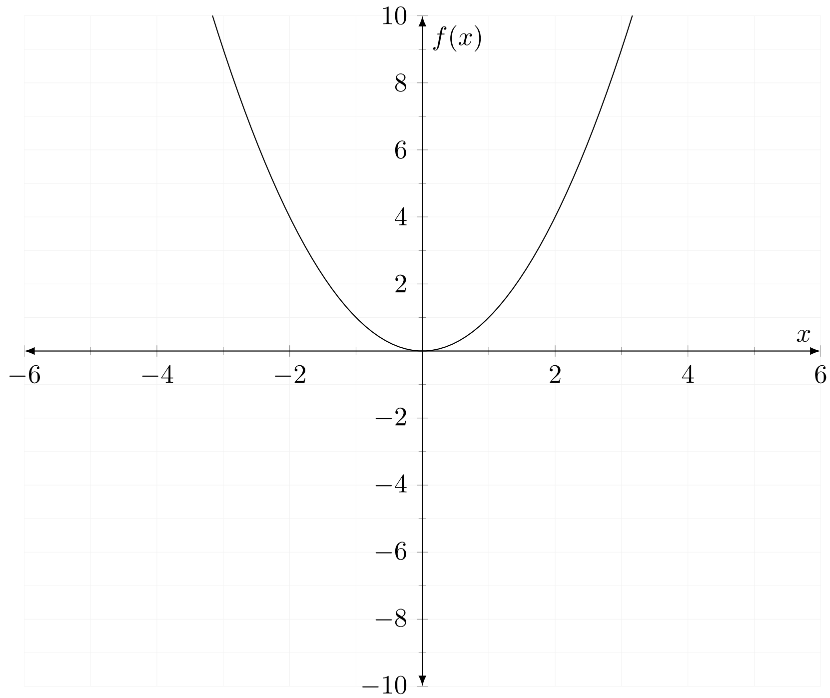
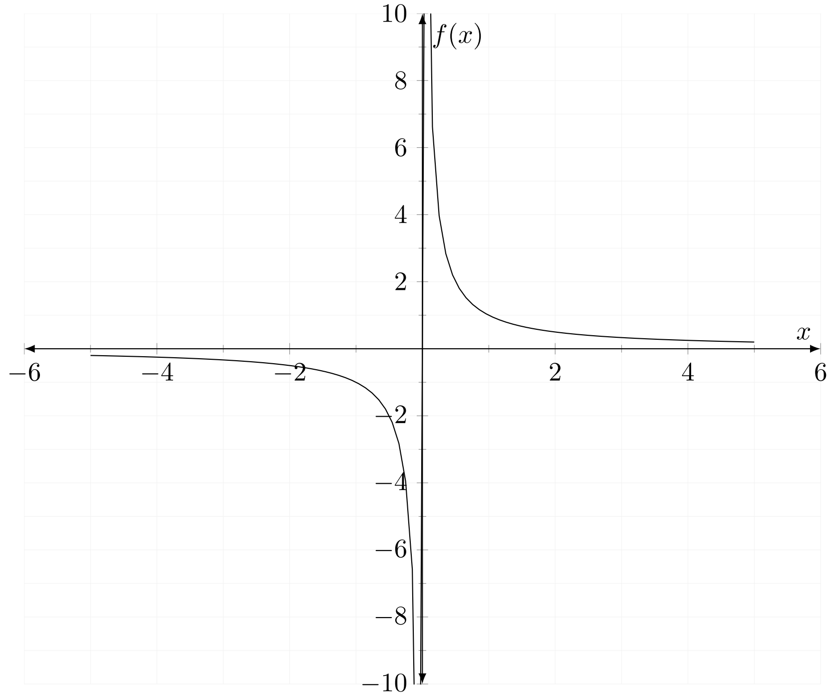
Continuidad

Informalmente podemos decir que una función es continua si en principio podemos trazar su gráfica sin tener que despegar el lápiz o bolígrafo del papel. La función $f(x) = x^2$ es continua



Mientras que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no es continua, debido a que cuando x es cero la función no está definida y tendríamos que dejar de trazar la función en ese punto para continuar más adelante.



De manera formal, una función es continua en algún punto $x = x_0$ si se cumplen tres condiciones:

1. El límite de la función cuando x tiende a x_0 existe.
2. La función está definida en $x = x_0$, es decir $f(x_0)$ es algún número real.
3. El límite de la función cuando x tiende a x_0 es igual al valor de $f(x_0)$

Las tres condiciones pueden resumirse en:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nota que, usando estas condiciones solamente puedes verificar si la función es continua en un punto. Si una función es discontinua en un punto entonces alguna de las tres condiciones no se cumple. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es discontinua en $x = 0$, debido a que no cumple la condición 2, es decir, la función no está definida cuando $x = 0$, nota que no es necesario revisar las tres condiciones, basta con encontrar una que no se cumpla para acertar su discontinuidad.

Sin embargo, una función puede no ser discontinua en algún punto y continua en otro u otros puntos. La misma función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en, por ejemplo, $x = 2$. Podemos verificar las tres condiciones:

1. $$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

2.
$$f(2) = \frac{1}{2}$$

3.
$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = f(2)$$

y por lo tanto, la función es continua en $x = 2$

Ahora revisemos la continuidad de la función $f(x) = x^2$ cuando $x = 0$

1.
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0^2 = 0$$

2.
$$f(0) = 0^2 = 0$$

3.
$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 = f(0)$$

Nota que esta función $f(x) = x^2$ es continua en cualquier punto $x = x_0$, porque el límite siempre existe y es igual a la función evaluada en ese punto, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$$

La continuidad de una función está relacionada con su dominio. Si el dominio de una función **no** son todos los números reales eso implica que existe una discontinuidad. Sin embargo, lo converso no es necesariamente cierto, es decir si una función está definida en todos los números reales eso no implica que la función sea continúa.

Considera la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ si } x \neq 1 \\ 0, \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

en $x = 1$.

Revisemos las tres condiciones:

1.
$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

2.
$$f(1) = 0$$

La condición 3 no se cumple, puesto que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

y

$$f(1) = 0$$

por lo tanto:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq 0 = f(1)$$

Nota en este ejemplo que la función esta definida en todos lo números reales, sin embargo es discontinua.

Considera la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ si } x < 2 \\ x - 2, \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

en $x = 2$.

En este ejemplo la condición 1 no se cumple. Vamos a utilizar límites laterales para comprobar que el límite no existe. Por la izquierda tenemos:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2x + 1 = 2(2) + 1 = 5$$

mientras que por la derecha:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x - 1 = 2 - 1 = 1$$

Como

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5 \neq 1 \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

el límite *no* existe y por lo tanto es discontinua.