Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа №2

Дисциплина	Математическая статистика
Тема	Интервальные оценки
Студент	Куприй А. А.
Группа	ИУ7–63Б
Преподаватель	Власов П.А.

Москва, 2020 г.

1 Теоретическая часть

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до вектора $\vec{\theta} = \left(\theta_1, ..., \theta_r\right)$ неизвестных параметров. Для упрощения рассуждений будем считать, что $r = 1$ и

$$\vec{\theta} = \left(\theta_1\right) = \left(\theta\right) \in \mathbb{R}^1$$

то есть закон распределения случайной величины X зависит от одного скалярного неизвестного параметра.

Пусть $\vec{X}$ – случайная выборка объема n из генеральной совокупности X. Тогда $\vec{x}$ – любая реализация случайной выборки $\vec{X}$.

1.1 γ-доверительный интервал

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}\left(\vec{X}\right)$ и $\overline{\theta}\left(\vec{X}\right)$ таких, что

$$P\left\{\underline{\theta}\left(\vec{X}\right) < \theta < \overline{\theta}\left(\vec{X}\right)\right\} = \gamma$$

Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с коэффициентом доверия γ (γ-доверительным интервалом) параметра θ называют интервал $\left(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x})\right)$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}\left(\vec{X}\right)$ и $\overline{\theta}\left(\vec{X}\right)$.

1.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала

Пусть генеральная совокупность X распределена по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

Формулы для вычисления границ γ- доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}) t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

где

- $\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания;
- $S^2(\vec{X})$ – исправленная выборочная дисперсия;
- n – объем выборки;
- γ – уровень доверия;
- $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантиль соответствующего уровня распределения Стьюдента с n - 1 степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ- доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

где

- $S^2(\vec{X})$ – исправленная выборочная дисперсия;
- n – объем выборки;
- h_q – квантиль уровня $q \in \left\{\frac{1-\gamma}{2}; \frac{1+\gamma}{2}\right\}$ распределения хи-квадрат с n - 1 степенями свободы;
- γ – уровень доверия.

2 Практическая часть

2.1 Текст программы

В листинге 2.1 приведён текст программы.

Листинг 2.1 – Текст программы

```
function lab2()
    X=[
        -2.79, -3.01, -4.07, -2.85, -2.43, -3.20, ...
        -3.72, -4.27, -5.48, -2.38, -4.69, -4.34, ...
        -5.08, -5.01, -4.08, -4.20, -4.74, -1.88, ...
        -3.25, -2.78, -3.56, -3.54, -3.79, -3.18, ...
        -5.08, -4.30, -2.86, -2.45, -3.08, -3.22, ...
        -2.76, -3.20, -3.33, -4.91, -4.06, -3.81, ...
        -3.96, -3.65, -3.77, -4.60, -5.21, -2.67, ...
        -1.95, -2.43, -1.73, -2.50, -3.96, -3.75, ...
        -2.70, -4.26, -3.42, -4.07, -4.74, -3.00, ...
        -4.37, -5.42, -5.00, -4.08, -2.46, -4.33, ...
        -4.08, -3.72, -4.09, -2.96, -3.71, -1.51, ...
        -3.70, -6.48, -4.26, -4.39, -3.16, -4.63, ...
        -2.66, -2.22, -4.79, -2.46, -3.69, -3.35, ...
        -2.32, -4.17, -3.85, -4.93, -2.05, -3.15, ...
        -3.49, -5.70, -2.53, -3.85, -4.32, -3.37, ...
        -3.98, -3.74, -5.28, -2.56, -3.21, -3.10, ...
        -3.78, -3.36, -3.32, -2.59, -2.45, -3.34, ...
        -3.20, -4.14, -4.00, -4.79, -4.02, -4.58, ...
        -4.45, -3.69, -4.53, -3.98, -4.51, -4.44, ...
        -3.78, -4.24, -4.00, -2.46, -2.58, -4.04, ...
    ];

    % Уровень доверия
    gamma = 0.9;
    alpha = (1 + gamma) / 2;
    % Объем выборки
    n = length(X);
    % Оценка матожидания
    mu = mean(X);
    % Оценка дисперсии
    D = var(X);

    % Границы доверительного интервала для матожидания
    [mu_low, mu_high] = borders_mu(n, mu, D, alpha);
    % Границы доверительного интервала для дисперсии
    [var_low, var_high] = borders_var(n, D, gamma);

    fprintf('Mean = %.4f\n', mu);
    fprintf('Variance = %.4f\n', D);
```

```
    fprintf('Mean in (%.4f, %.4f)\n', mu_low, mu_high);
    fprintf('Variance in (%.4f, %.4f)\n', var_low, var_high);

    % Создание массивов точечных оценок и границ доверительных интервалов
    mu_arr = zeros(1, n);
    var_arr = zeros(1, n);
    mu_low_arr = zeros(1, n);
    mu_high_arr = zeros(1, n);
    var_low_arr = zeros(1, n);
    var_high_arr = zeros(1, n);

    % Заполнение созданных массивов
    for i = 1 : n
        mu = mean(X(1:i));
        D = var(X(1:i));
        % Точечная оценка матожидания
        mu_arr(i) = mu;
        % Точечная оценка дисперсии
        var_arr(i) = D;

        [mu_low_arr(i), mu_high_arr(i)] = borders_mu(i, mu, D, alpha);
        [var_low_arr(i), var_high_arr(i)] = borders_var(i, D, gamma);
    end

    % Построение графиков
    z_mu = (zeros(1, n) + mu);
    plot(10 : n, [z_mu(10:end)', mu_arr(10:end)', mu_low_arr(10:end)', ...
        mu_high_arr(10:end)']);
    xlim([10, n]);
    xlabel('n');
    ylabel('y');
    legend('$\hat \mu(\vec x_N)$', '$\hat \mu(\vec x_n)$', ...
        '$\underline{\mu}(\vec x_n)$', '$\overline{\mu}(\vec x_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 18);
    figure;
    z_D = (zeros(1, n) + D);
    plot(10 : n, [z_D(10:end)', var_arr(10:end)', var_low_arr(10:end)', ...
        var_high_arr(10:end)']);
    xlim([10, n]);
    xlabel('n');
    ylabel('z');
    legend('$\hat S^2(\vec x_N)$', '$\hat S^2(\vec x_n)$', ...
        '$\underline{\sigma}^2(\vec x_n)$', '$\overline{\sigma}^2(\vec x_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 18);
end

% Функция поиска границ доверительного интервала для матожидания
```

```
function [low_border, high_border] = borders_mu(n, mu, D, alpha)
    low_border = mu - sqrt(D) * tinv(alpha, n - 1) / sqrt(n);
    high_border = mu + sqrt(D) * tinv(alpha, n - 1) / sqrt(n);
end

% Функция поиска границ доверительного интервала для дисперсси
function [low_border, high_border] = borders_var(n, D, gamma)
    low_border = ((n - 1) * D) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
    high_border = ((n - 1) * D) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end
```

2.2 Результат

В листинге 2.2 приведён результат выполнения описанной программы.

Листинг 2.2 – Результат программы

```
Mean = -3.6762
Variance = 0.8664
Mean in (-3.8170, -3.5353)
Variance in (0.7088, 1.0875)
```

На рисунке 2.1 представлен график оценки математического ожидания.

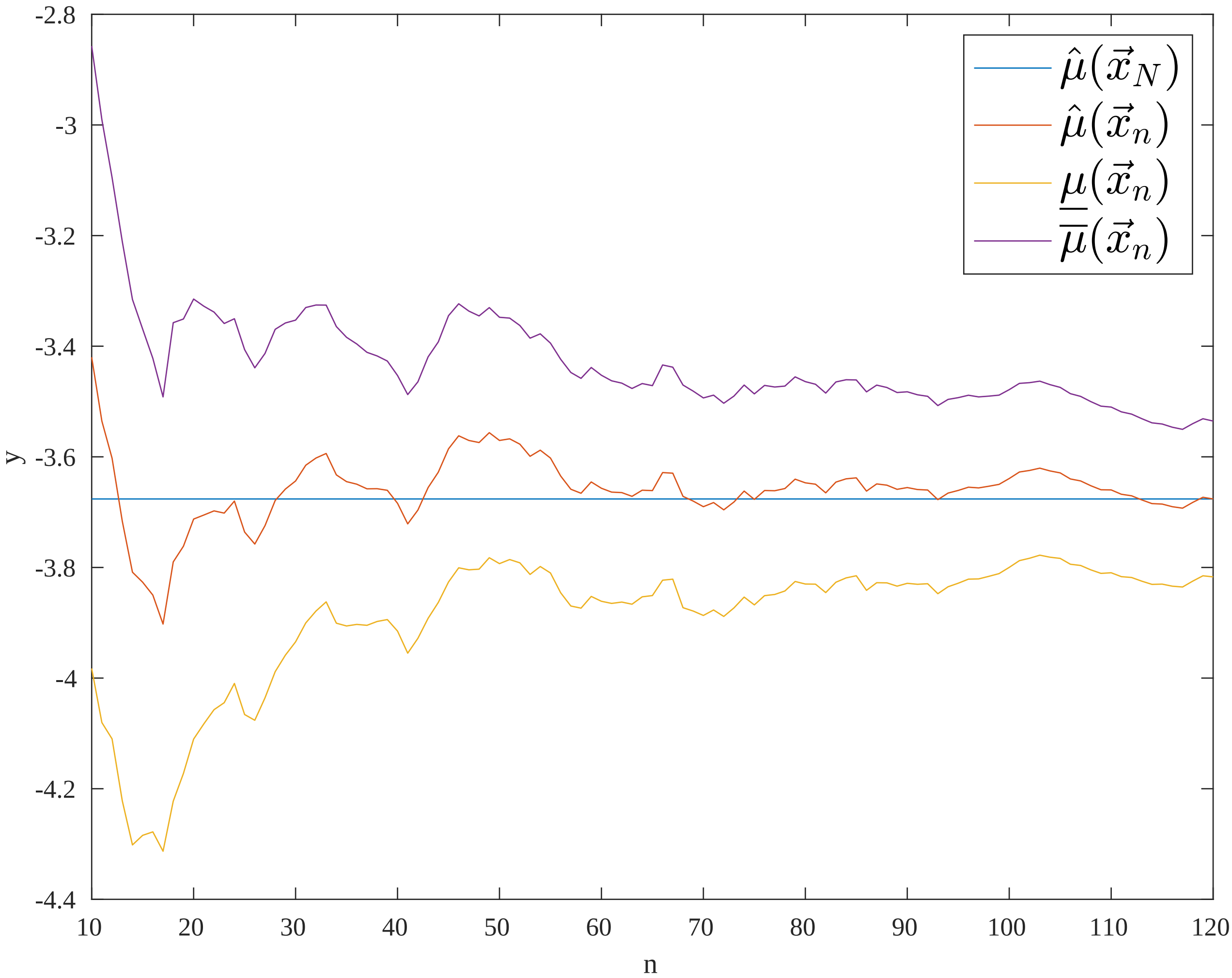
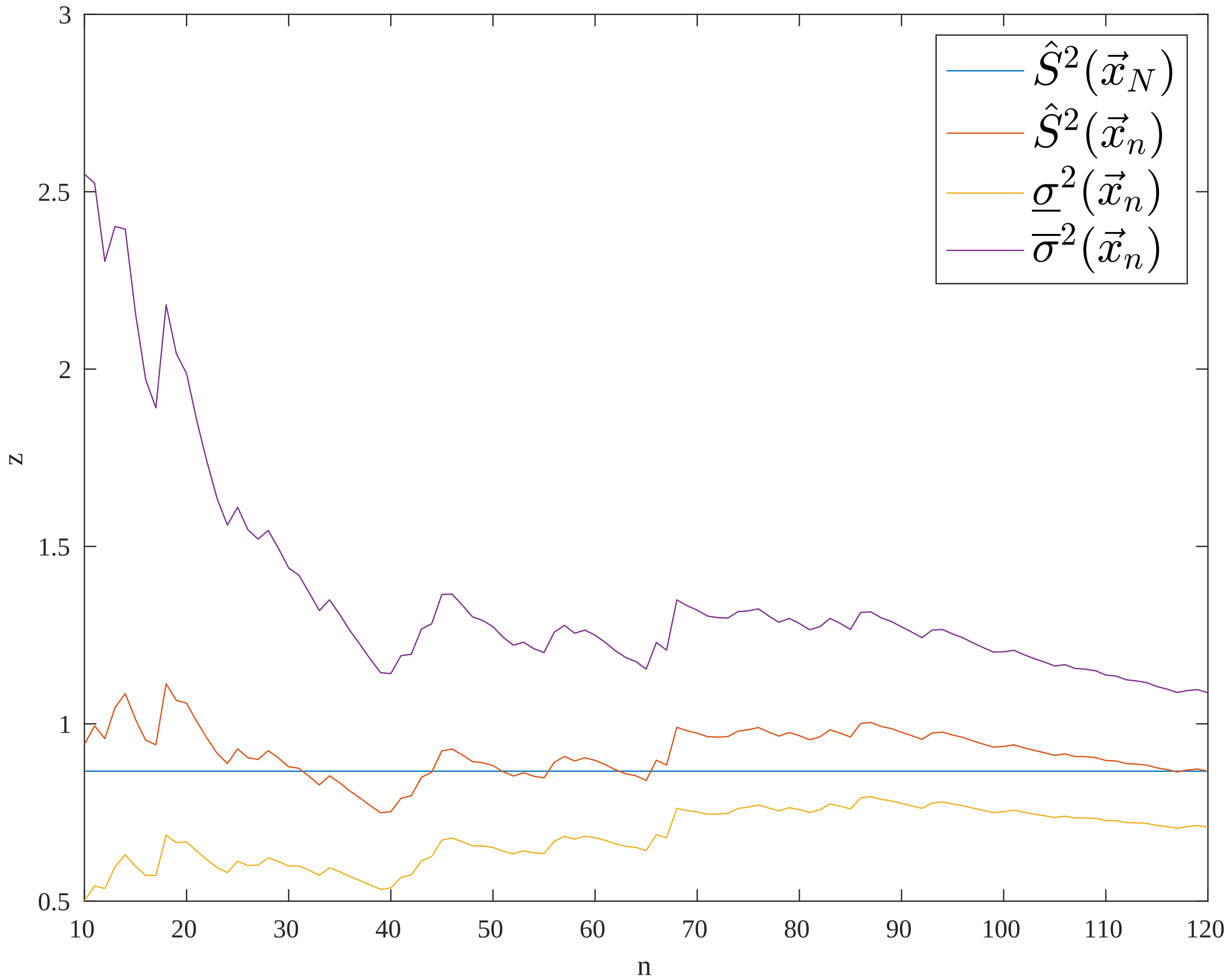


Рис. 2.1

На рисунке 2.2 представлены график оценки дисперсии.



3
2.5
2
1.5
1
0.5
z
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
n
$\hat{S}^2(\vec{x}_N)$
$\hat{S}^2(\vec{x}_n)$
$\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$
$\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$

Рис. 2.2