Цель работы: Изучить методы решения задачи Коши для ОДУ, применив приближенный аналитический метод Пикара и численный метод Эйлера в явном и неявном вариантах.

Задание: Решить уравнение (формула 0.1), не имеющее аналитического решения.

$$\begin{cases} u'(x) = f(x,u) \\ u(\xi) = y \end{cases} \tag{0.1}$$

Уравнение можно решить **методом Пикара** (формула 0.2)

$$y^{(s)}(x) = \eta + \int_0^x f(t, y^{(s-1)}(t))dt \\ y^{(0)} = \eta \tag{0.2}$$

Для задачи получим 4 приближения (формулы 0.3, 0.4, 0.5, 0.6)

$$y^{(1)} = \frac{x^3}{3} \tag{0.3}$$

$$y^{(2)} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{21} \tag{0.4}$$

$$y^{(3)} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{21} + \frac{2 \cdot x^8}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} \tag{0.5}$$

$$y^{(4)} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{21} + \frac{2 \cdot x^8}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} + \frac{2 \cdot x^{15}}{93555} + \frac{2 \cdot x^{19}}{3393495} + \\ \frac{2 \cdot x^{29}}{2488563} + \frac{2 \cdot x^{23}}{86266215} + \frac{x^{23}}{99411543} + \frac{2 \cdot x^{27}}{3341878155} + \frac{x^{31}}{109876902975} \tag{0.6}$$

Также уравнение решается **численным методом Эйлера**

Явная схема (формула 0.7)

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \tag{0.7}$$

Неявная схема (формула 0.8)

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot (f(x_{n+1}, y_{n+1})) \tag{0.8}$$

Ниже приведены листинги реализованных методов:

Листинг 1 — Метод Пикара

```
def methodPicara(valuesX, y_0):
    def y_1(x):
        return pow(x, 3) / 3.0

    def y_2(x):
        return y_1(x) + pow(x, 7) / 63.0

    def y_3(x):
        return y_2(x) + 2 * pow(x, 11) / 2079.0 + pow(x, 15) / 59535.0

    def y_4(x):
        return y_3(x) + 2 * pow(x, 15) / 93555.0 + 82 * pow(x, 19) / 37328445.0 + 662 * pow(x, 23) / 10438212015.0 + \
                4 * pow(x, 27) / 3341878155.0 + pow(x, 31) / 109876902975.0

    result = [[y_0, y_0]]

    for i in range(1, len(valuesX)):
        result.append([y_3(valuesX[i]), y_4(valuesX[i])])

    return result
```

Листинг 2 — Явная схема метода Эйлера

```
def methodEulerExplicit(valuesX, step, y):
    result = []

    for i in range(len(valuesX)):
        if (y == float('inf')):
            break
        y += step * (y * y + valuesX[i] * valuesX[i])
        result.append(y)

    return result
```

Листинг 3 — Неявная схема метода Эйлера

```
def methodEulerNExplicit(valuesX, step, y):
    result = []
```

```

    for i in range(len(valuesX)):
        discr = 1 - step * 4 * (y + step * (valuesX[i] * valuesX[i]))

        if (discr < 0):
            break

        y = (1 - sqrt(discr)) / (2 * step)
        result.append(y)

    return result
```