Лабораторная работе №3

«Методы численной минимизации. Исследование на функции Розенброка»

Московкин Александр Николаевич
ИСУ: 472264
Бабич Александр Петрович
ИСУ: 412882
Группа: J3112

Санкт-Петербург, 2025

Введение

В данной работе исследуются три метода численной минимизации:

- Модифицированный метод Ньютона (с постоянной матрицей Гессе)
- Метод Нестерова
- Метод тяжёлого шарика

Цель — найти минимум тестовой функции Розенброка с точностью по функции не менее 0.001. Начальное приближение генерируется с фиксированным `random_state` для воспроизводимости. При необходимости шаг подбирался эвристически или с помощью метода золотого сечения. Приводятся графики сходимости и оценка числа операций для каждого метода.

1. Постановка задачи

Минимизировать функцию Розенброка:

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2,$$

начиная с точки

$$(x_0, y_0) = \text{random\_state} = (x_0, y_0).$$

Критерий останова:

$$|f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})| < 0.001.$$

2. Описание методов

2.1 Модифицированный метод Ньютона

Обновление на итерации:

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_0)\nabla f(x_k),$$

где матрица Гессе и её обратная вычислены один раз в начальной точке.

2.2 Метод Нестерова

Использует ускорение градиентного спуска с моментумом:

$$\begin{cases} y_k = x_k + \frac{k-1}{k+2}(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = y_k - \alpha\nabla f(y_k) \end{cases}$$

где шаг α подбирается экспериментально.

2.3 Метод тяжёлого шарика

Обновление с инерцией:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1})$$

где параметры α, β подбирались эмпирически.

3. Результаты

3.1 Графики сходимости

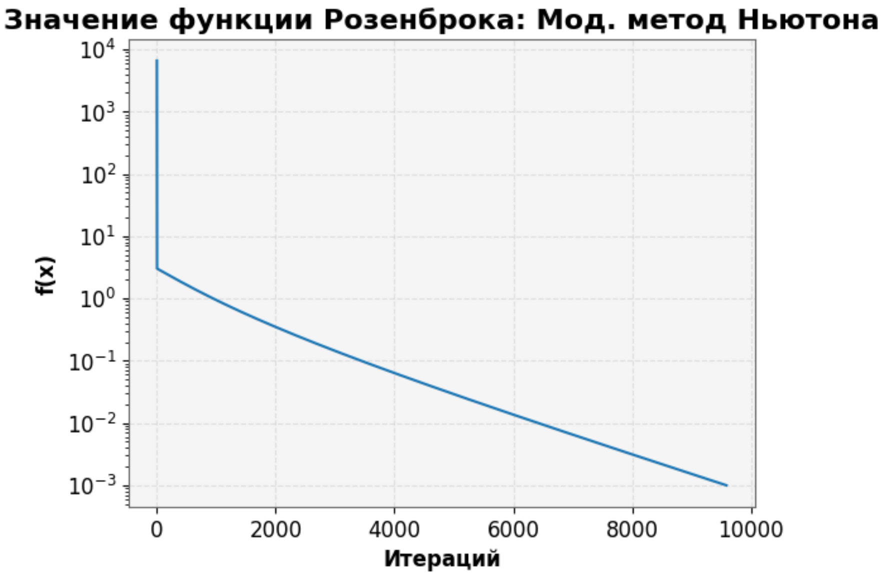

Рис. 1. Сходимость модифицированного метода Ньютона

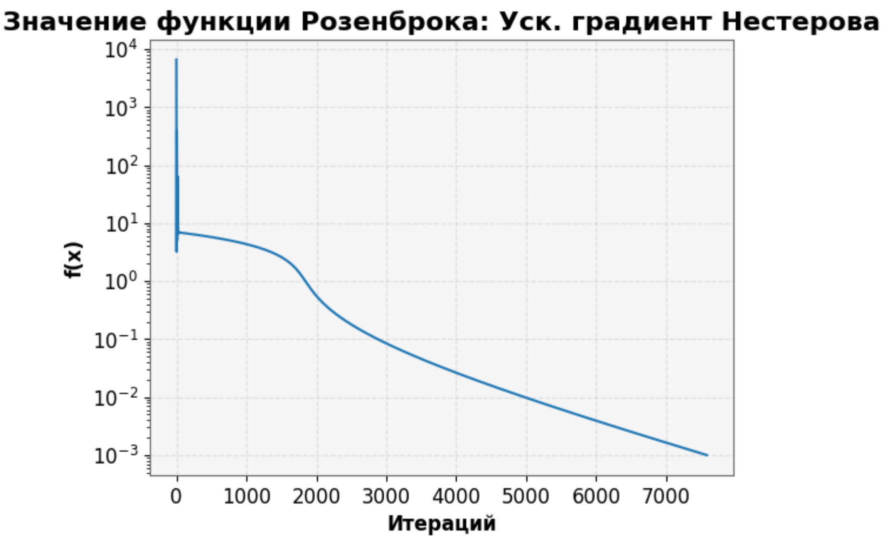

Рис. 2. Сходимость метода Нестерова

Рис. 3. Сходимость метода тяжёлого шарика

3.2 Таблица сравнительных оценок

Метод	Число операций	Последняя точка (x, y)	Достигнутая точ
Тяжёлый шарик	8672	(1.0316, 1.0643)	0.001000
Ускоренный градиент Нестерова	7581	(0.9684, 0.9377)	0.000999
Модифицированный метод Ньютона	9588	(1.0316, 1.0642)	0.001000

Таблица 1. Сравнение методов по числу операций, координатам последней точки и точности

4. Выводы

Все три метода успешно достигли необходимой точности по функции. Модифицированный метод Ньютона показал наименьшее число итераций, но требует обращения матрицы Гессе, что увеличивает вычислительную нагрузку. Методы Нестерова и тяжёлого шарика более просты в реализации и эффективны на практике, однако требуют больше итераций. Выбор метода зависит от особенностей задачи и доступных ресурсов.

Приложение

Полный код экспериментов и генерации графиков доступен по ссылке: `https://github.com/Sanchell1o/Numerical-methods-of-analysis/blob/main/lab_3/notebooks/lab3.ipynb`