CLASE 4

VECTORES

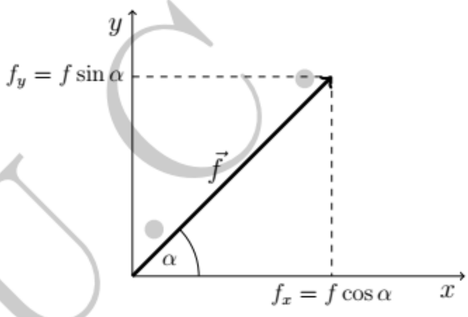
En el CN aprendieron entre otras cosas, como se definían los vectores en el plano y sus componentes, como se representaban gráficamente y cómo se definía y calculaba su módulo. Aprendieron también como se sumaban vectores y como se calculaba el producto de un vector por un escalar, tanto analítica como gráficamente.

Por último también aprendieron como se podía escribir cualquier vector en término de los vectores unitarios $\hat{i}$ y j. (CAPÍTULO 8)

Además, en el capítulo 10 del apunte del CN vieron cómo podían calcular las componentes de cualquier vector en el plano obteniendo:

$$\vec{f} = (f_x, f_y) = f_x\hat{\imath} + f_y\hat{\jmath} = (f\cos\alpha, f\sin\alpha),$$

como se indica en la figura 10.1.1



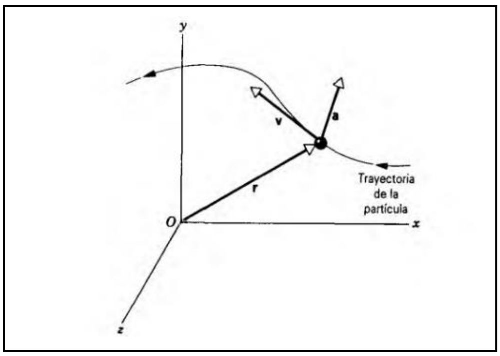
==

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

Las ecuaciones de movimiento que vimos hasta ahora, las planteamos como ecuaciones vectoriales, por lo tanto, que se cumplan en un movimiento en dos dimensiones significa que deben cumplirse componente a componente. Veamos de qué manera:

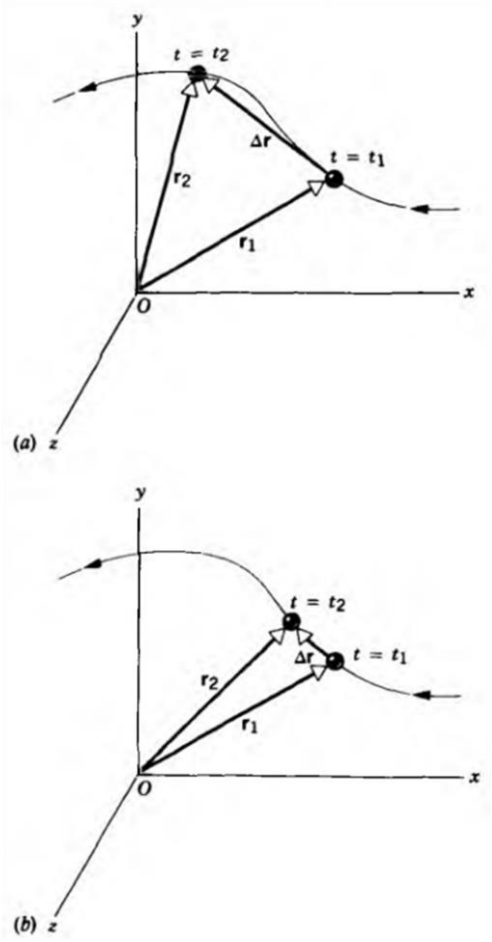
POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

La figura muestra una partícula en el tiempo *t* que se mueve en una trayectoria curva en tres dimensiones. Su *posición*, o desplazamiento desde el origen, está medida por el vector $\vec{r}$. La *velocidad* está indicada por el vector $\vec{v}$ el cual, como demostraremos enseguida, debe ser tangente a la trayectoria de la partícula. La *aceleración* está indicada por el vector $\vec{a}$, cuya dirección, como veremos explícitamente más adelante, no guarda en lo general ninguna relación única con la posición de la partícula o la dirección de $\vec{v}$.



En coordenadas cartesianas, la partícula se localiza por *x*, *y* y *z*, las cuales son las componentes del vector $\vec{r}$ que da la posición de la partícula:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$



Supongamos que la partícula se mueve de una posición $\mathbf{r}_1$ en el tiempo t_1 a la posición $\mathbf{r}_2$ en el tiempo t_2, como se muestra en la figura 2*a*. Su desplazamiento (cambio de posición) en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ es el *vector* $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, y la velocidad promedio $\mathbf{v}$ en el intervalo Δt es

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{2}$$

En la ecuación 2, el vector $\Delta \mathbf{r}$ está multiplicado por el escalar $1/\Delta t$ para dar el vector $\overline{\mathbf{v}}$. Entonces $\overline{\mathbf{v}}$ debe tener la misma dirección que $\Delta \mathbf{r}$.

Cuando se reduce el intervalo Δt, el vector $\Delta \mathbf{r}$ tiende a la trayectoria real (como en la figura 2*b*), y resulta tangente a la trayectoria en el límite $\Delta t \to 0$, en cuyo caso la velocidad promedio tiende a la velocidad instantánea $\mathbf{v}$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Al igual que el vector $\Delta \mathbf{r}$ en el límite $\Delta t \to 0$, *el vector* $\mathbf{v}$ *es tangente a la trayectoria de la partícula en cualquier punto del movimiento.*

La *magnitud* del vector $\vec{v}$ en cualquier instante es la *rapidez* v de la partícula en ese instante. La *dirección* de $\vec{v}$ en cualquier instante es la dirección en que la partícula se mueve en ese instante.

A menudo es más sencillo calcular el vector velocidad instantánea empleando componentes. Durante cualquier desplazamiento $\Delta\vec{r}$, los cambios Δx, Δy y Δz en las tres coordenadas de la partícula son las *componentes* de $\Delta\vec{r}$. Por lo tanto, las componentes v_x, v_y y v_z de la velocidad instantánea $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$ son simplemente las derivadas con respecto al tiempo de las coordenadas x, y y z:

Cada **componente del vector velocidad instantánea** de una partícula ...

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{3.4}$$

... es igual a la razón de cambio instantánea de su coordenada correspondiente.

La magnitud del vector velocidad instantánea $\vec{v}$, es decir, la rapidez, se obtiene en términos de las componentes v_x, v_y y v_z aplicando el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{3.6}$$

La **figura 3.4** muestra la situación cuando la partícula se mueve en el plano xy. En este caso, z y v_z son iguales a cero, y la rapidez (la magnitud de $\vec{v}$) es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

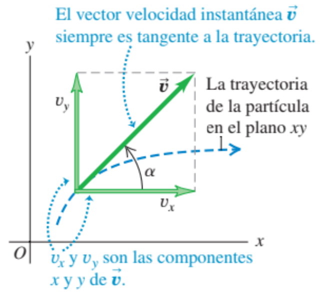
y la dirección de la velocidad instantánea $\vec{v}$ está dada por el ángulo α (la letra griega alfa) de la figura. Vemos que

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.7}$$

(Se utiliza α para la dirección del vector velocidad instantánea con la finalidad de evitar confusiones con la dirección θ del vector de *posición* de la partícula).

De ahora en adelante, al usar el término "velocidad", siempre nos referiremos al vector velocidad *instantánea* $\vec{v}$ (no al vector velocidad media). Por lo regular, ni siquiera nos molestaremos en llamar vector a $\vec{v}$; el lector debe recordar que la velocidad es una cantidad vectorial con magnitud y dirección.

3.4 Las dos componentes de velocidad para movimiento en el plano xy.



Consideremos ahora la *aceleración* de una partícula que se mueve en el espacio. Al igual que en el movimiento rectilíneo, la aceleración describe cómo cambia la velocidad de la partícula; pero como ahora tratamos la velocidad como un vector, la aceleración describirá los cambios *tanto* en la magnitud de la velocidad (es decir, la rapidez) *como* en la dirección de la velocidad (esto es, la dirección en que se mueve la partícula).

En la **figura 3.6*a***, un automóvil (tratado como partícula) se desplaza en una trayectoria curva. Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ representan las velocidades instantáneas del auto en el instante t_1, cuando el automóvil está en el punto P_1, y en t_2 cuando se encuentra en el punto P_2. Durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2, el *cambio vectorial de velocidad* es $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$, de modo que $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$ (figura 3.6*b*). Definimos la **aceleración media** $\vec{a}_{\text{med}}$ del automóvil en este intervalo como el cambio de velocidad dividido entre el intervalo de tiempo $t_2 - t_1 = \Delta t$:

Cambio en la velocidad de la partícula

Vector aceleración media de una partícula durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2

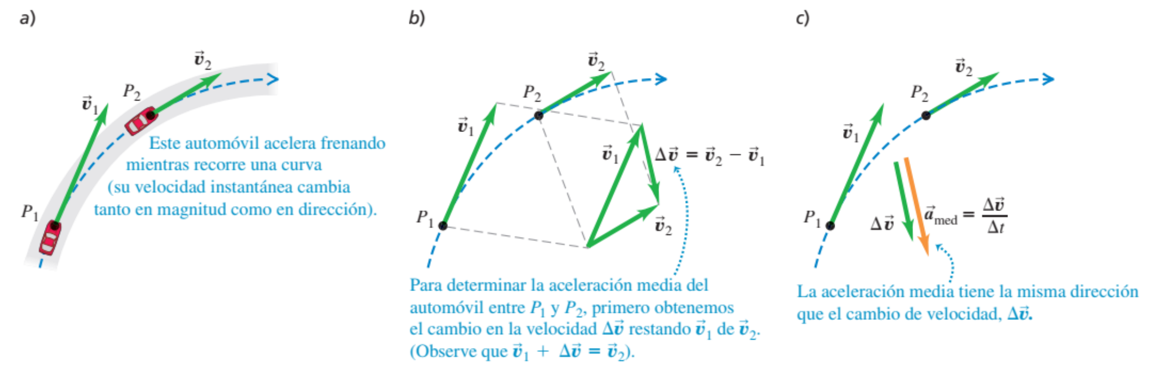
$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \tag{3.8}$$

Velocidad final menos la velocidad inicial

Intervalo de tiempo

Tiempo final menos tiempo inicial

3.6 *a*) Un automóvil se mueve a lo largo de una curva de P_1 a P_2. *b*) Cómo obtener el cambio en la velocidad $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ mediante resta de vectores. *c*) El vector $\vec{a}_{\text{med}} = \Delta\vec{v}/\Delta t$ representa la aceleración media entre P_1 y P_2.



Al igual que en el capítulo 2, definimos la **aceleración instantánea** $\vec{a}$ (una cantidad *vectorial*) en el punto P_1 como el límite de la aceleración media cuando el punto P_2 se acerca a P_1, de modo que $\Delta\vec{v}$ y Δt se acercan a cero (figura 3.7).

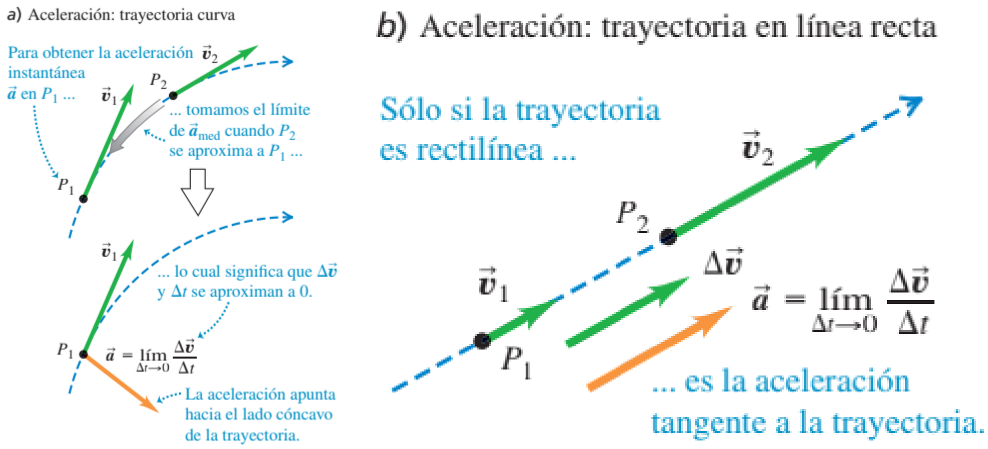
El **vector aceleración instantánea** de una partícula ...

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.9}$$

... es igual al límite de este vector aceleración media cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero ...

... y es igual a la razón de cambio instantánea de su vector velocidad.

El vector velocidad $\vec{v}$, como vimos, es tangente a la trayectoria de la partícula. No obstante, el vector aceleración instantánea $\vec{a}$ *no* tiene que ser tangente a la trayectoria. La figura 3.7a muestra que si la trayectoria es curva, $\vec{a}$ apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria, es decir, hacia el interior de la curva descrita por la partícula. La aceleración es tangente a la trayectoria únicamente si la partícula se mueve en línea recta (figura 3.7*b*).



CUIDADO **Cualquier partícula que sigue una trayectoria curva está acelerando** Cuando una partícula sigue una trayectoria curva, su aceleración siempre es distinta de cero, aun si se mueve con rapidez constante. Quizás esta conclusión sea contraria a la intuición, pero más bien va contra el uso cotidiano de la palabra "aceleración" para indicar que la velocidad aumenta. La definición más precisa de la ecuación (3.9) indica que la aceleración es diferente de cero cuando el vector velocidad cambia de *cualquier* forma, ya sea en su magnitud, su dirección o en ambas.

Normalmente nos interesará la aceleración instantánea, no la media. A partir de ahora, usaremos el término "aceleración" para referirnos al vector aceleración instantánea $\vec{a}$.

Cada componente del vector aceleración $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ es la derivada de la componente correspondiente de la velocidad:

Cada **componente** del **vector aceleración instantánea** de una partícula ...

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{3.10}$$

... es igual, respectivamente, a la razón de cambio instantánea de la componente correspondiente de su vector velocidad.

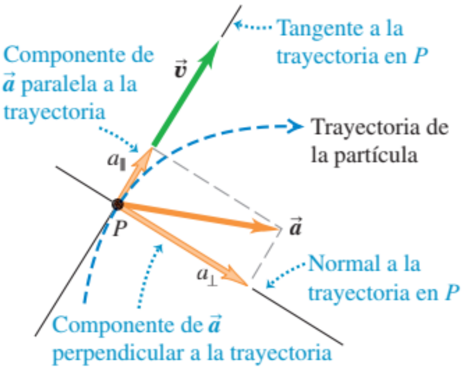
En términos de vectores unitarios,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} \tag{3.11}$$

Como cada componente de velocidad es la derivada de la coordenada correspondiente, expresamos las componentes a_x, a_y y a_z del vector aceleración $\vec{a}$ como

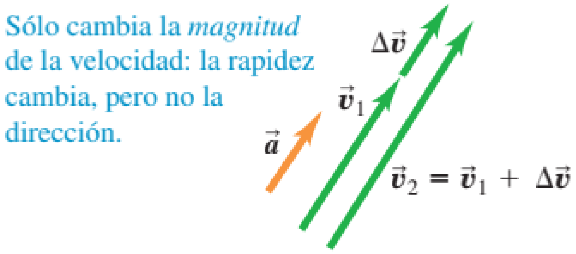
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{3.12}$$

3.10 La aceleración puede descomponerse en una componente $a_\parallel$ paralela a la trayectoria (es decir, a lo largo de la tangente a la trayectoria) y una componente $a_\perp$ perpendicular a la trayectoria (es decir, a lo largo de la normal a la trayectoria).

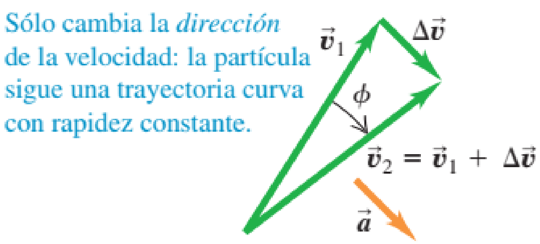


La componente paralela $a_\parallel$ nos habla acerca de los cambios en la *rapidez* de la partícula; mientras que la componente perpendicular $a_\perp$ nos indica los cambios en la *dirección del movimiento* de la partícula.

a) Aceleración paralela a la velocidad:



b) Aceleración perpendicular a la velocidad:



En el caso más general, la aceleración $\vec{a}$ tiene componentes *tanto* paralela *como* perpendicular a la velocidad $\vec{v}$, como en la figura 3.10. Entonces, cambiarán la rapidez de la partícula (descrita por la componente paralela $a_\parallel$) *y* su dirección (descrita por la componente perpendicular $a_\perp$).

==

Ejemplo:

1) Un vehículo robot está explorando la superficie de Marte. El módulo de descenso estacionario es el origen de las coordenadas y la superficie marciana circundante está en el plano *xy*. El vehículo que representamos como un punto, tiene coordenadas *x* e *y* que varían con el tiempo de la forma:

$$x = 2\text{m} - \left(0,25\text{m/s}^2\right)t^2$$

$$y = \left(1\text{m/s}\right)t + (0,025\text{m/s}^3)t^3$$

   a) Obtenga las coordenadas del vehículo y su distancia con respecto al módulo en $t=0$s.
   b) Obtenga los vectores desplazamiento y velocidad media del vehículo entre $t=0$s y $t=2$s.
   c) Deduzca una expresión general para el vector velocidad instantánea $\vec{v}$ del vehículo.
   d) Exprese $\vec{v}$ en $t=2$s en forma de componentes y en términos de magnitud y dirección.
   e) Obtenga las componentes de la aceleración media de $t=0$s a $t=2$s.
   f) Determine la aceleración instantánea en $t=2$s.

===

TAREA:

- Guía 3: Ejercicios 1 a 7.