Capítulo 3

Límite y continuidad

3.1 Límite

1. Usando la definición de límite, demuestre que:

   (a) $\lim_{x\to 1}(3x+1) = 4$

   (b) $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

2. ¿A qué intervalo debe pertenecer x si $f(x)$ debe estar a una distancia menor que ϵ del número L?

   (a) $f(x) = 2x - 1, \quad \epsilon = 0.02, \quad L = 3$

   (b) $f(x) = x^2, \quad \epsilon = 0.1, \quad L = 4$

3. En cada uno de los siguientes casos encontrar un δ tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$:

   (a) $f(x) = x^4$; $a = 2, l = 16$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = 1, l = 1$

4. (a) Si no existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$, ¿pueden existir $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ o $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$?

   (b) Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, ¿debe existir $\lim_{x\to a} g(x)$?

   (c) Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y no existe $\lim_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$?

   (d) Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$, ¿se puede concluir que existe $\lim_{x\to a} g(x)$?

5. Calcule los límites indicados:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x+1}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{x}$

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+6x)}{x(x-7)}$

   (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

   (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$

   (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$

   (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2}$

   (l) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+1}{x+1}$

   (m) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+x}{1+3x^2}$

   (n) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x-\ln\sqrt{x}+\operatorname{sen} x}{2x-\sqrt{x}\ln x^3}$

(o) $\lim_{x\to\infty} (1 + x^6 + x^{12})\, e^{-x}$

(p) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

(q) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2x} + (2x)^x}{x^{2x} - (2x)^x}$

3.2 Continuidad

6. Determine -si los hay- los puntos del dominio de $f(x)$ en los que la función es discontinua. Estudiar la existencia de límites laterales en cada uno de dichos puntos.

   (a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ x & x \leq 2 \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ x & x \leq 1 \end{cases}$

   (e) $f(x) = H(x-1)$, donde $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

7. Investigue para que valores de x están definidas las siguientes funciones, luego determine los puntos de discontinuidad.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

   (b) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{|x|}}$

   (c) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

   (e) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

8. (a) Determine la constante c para que $g(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - c & x < 4 \\ cx + 20 & x \geq 4 \end{cases}$$

   (b) Grafique $g(x)$ con el valor de c encontrado en el ítem anterior.

9. ¿Para cuáles de las siguientes funciones f existe una función continua F de dominio $\mathbb{R}$ que satisface $F(x) = f(x)$ si $x \in D(f)$? Obtenga F en cada caso en que exista:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

   (b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x} \ln x^2$

   (d) $f(x) = (1+x^2)^{1/x^2}$

   (e) $f(x) = \arctan(\ln|x|)$

   (f) $f(x) = x \ln \dfrac{1}{x^2}$

   (g) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$

10. Empleando el teorema del valor intermedio demuestre que hay una solución de la ecuación en el intervalo dado:

   (a) $x^3 - 3x = -1$, $(0,1)$

   (b) $x^5 - 2x^4 - x - 3 = 0$, $(2,3)$

   (c) $x^3 + 2x = x^2 + 1$, $(0,1)$

   (d) $x = cos(x)$, $(0, \pi/2)$

   (e) $x^2 = \sqrt{x+1}$, $(1,2)$

Respuestas a algunos ejercicios

3.2. CONTINUIDAD

(2a) $(1.99, 2.01)$
(2b) $(-\sqrt{4.1}, -\sqrt{3.9})$
$\cup(\sqrt{3.9}, \sqrt{4.1})$
(4) si,si,no,no
(5a) 1
(5b) 3
(5c) $2/3$
(5d) $1/2$
(5e) 1
(5f) 3
(5g) $-6/7$
(5h) -1
(5i) 1
(5j) ∞
(5k) $1/2$
(5l) ∞
(5m) $1/3$
(5n) $1/2$
(5o)0
(5p)1
(5q) 1

(6a) continua en $\mathbb{R}$
(6b) continua en su dominio
(6c) discontinua en $x = 2$; $\lim\limits_{x\to 2^-} = 2$; $\lim\limits_{x\to 2^+} = 4$
(6d) continua en $\mathbb{R}$
(6e) discontinua en $x = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} = 0$; $\lim\limits_{x\to 1^+} = 1$

(7a) $D(f) = \mathbb{R}$; discontinua en $x = 2$
(7b) $D(f) =$ [redacted] $\setminus \{0\}$, continua en su dominio.
(7c) $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, continua en $D(f)$
(7d) $D(f) = \mathbb{R}$, discontinua en $x = 0$
(7e) $D(f) = \mathbb{R}$, continua

(8) $c = -4/5$
(9a) $F(x) = x + 2$
(9b) No existe
(9c) $F(0) = 0$
(9d) $F(0) = e$
(9e) $F(0) = -\pi/2$
(9f) $F(0) = 0$
(9g) Infinitas F posibles
Ej: $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
si $|x| \geq 1$, 0 si $x \in (-1, 1)$