Capítulo 4

Derivada

4.1 Reglas de derivación

1. Calcule, usando la definición, las derivadas de las siguientes funciones:

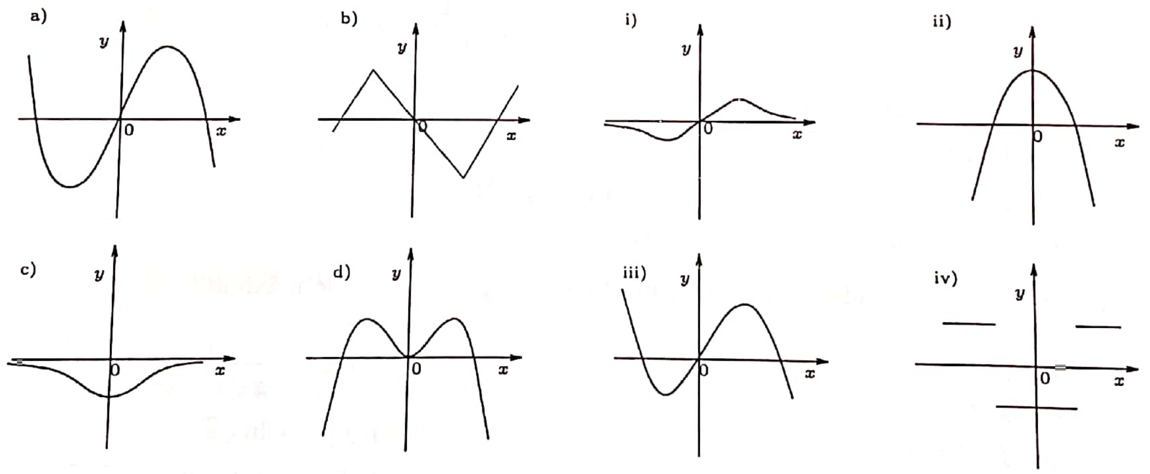
   (a) $f(x) = 5x + 3$ (b) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ (c) $f(x) = \sqrt{6-x}$

2. Determinar si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   es derivable en $x = 0$. En caso afirmativo obtener $f'(0)$.

3. Haga corresponder la gráfica de cada función en (a)-(d) con la de su derivada en (i)-(iv). Cite las razones de la correspondencia.

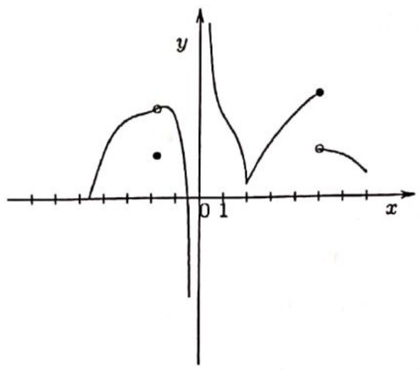


4. La figura muestra la gráfica de la función g en el intervalo $[-4, 7]$

   (a) ¿Qué puntos están excluídos de $D(g)$?

   (b) ¿En qué puntos de $D(g)$ es g discontinua?

   (c) ¿En qué puntos de $D(g)$ g no es diferenciable?



5. La **derivada a izquierda** y la **derivada a derecha** de f en a se definen, respectivamente, mediante

$$f'^{-}(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad f'^{+}(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

si es que los límites existen. En este caso, $f'(a)$ existe si y sólo si existen ambas derivadas laterales y son iguales.

(a) Determine $f'^{-}(0.6)$ y $f'^{+}(0.6)$ para la función $f(x) = |5x-3|$

(b) Demuestre que no existe $f'(0.6)$

6. (a) Emplee las definiciones del ejercicio 5 para calcular $f'^{-}(4)$ y $f'^{+}(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 5-x & 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5-x} & x \ge 4, x \ne 5 \end{cases}$$

(b) Trace la gráfica de $f(x)$.

(c) Determine $D(f)$

(d) ¿En qué puntos de $D(f)$ es discontinua $f(x)$?

(e) ¿Dónde no es diferenciable $f(x)$?

7. Calcule las derivadas de las siguientes funciones y simplifique lo máximo posible:

(a) $f(x) = x^7 - 5x^3 + 1$

(b) $f(x) = (x^2 - x)^4$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

(d) $f(x) = x\ln(x)$

(e) $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,(x)\cos(x)$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

(g) $f(x) = \mathrm{tg}\,(x)$

(h) $f(x) = e^{\mathrm{sen}\,(x)}$

(i) $f(x) = (x^2 - x)\ \mathrm{e}^{-x}$

(j) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

(k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

(l) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

(m) $f(x) = \ln\sqrt{x}$

(n) $f(x) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$

(o) $f(x) = \mathrm{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(p) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{sen}\,x^2}$

(q) $f(x) = \ln\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(r) $f(x) = \arcsin x^2$

(s) $f(x) = \arctan\dfrac{1+x}{1-x} - \arctan x$

(t) $f(x) = x^x$

(u) $f(x) = x^{\tan x}$

(v) $f(x) = \log_x \, \mathrm{e}$

(w) $f(x)$ dada en el ejercicio 2.

8. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ si las funciones $y = y(x)$ están definidas por

(a) $y^3 + 3y = x$

(b) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$

(c) $y = 1 + x \, \mathrm{e}^y$

(d) $\sqrt{xy} - 2x = \sqrt{y}$

(e) $2y^2 + \sqrt[3]{xy} = 3x^2 + 17$

(f) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+2x} = 2x$

9. Sea $y = \sqrt{\ln(1+x^2)+1}$. Calcular $(1+x^2)yy'$ y simplificar la expresión lo máximo posible.

4.2 Linealización. Razones relacionadas.

10. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ en los puntos (-1,0), (2,3) y (3,0).

11. ¿Para qué valores de x son paralelas las tangentes de $y = x^2$ e $y = x^3$?

12. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = y(x)$ definida por la ecuación

$$y = 1 + x \, \mathrm{e}^y$$

en el punto $(-1, 0)$.

13. Obtenga la ecuación de la recta normal a la curva $y = x \ln x$ y paralela a la recta $2x - 2y = 3$.

14. Demostrar que la tangente a la gráfica de $f(x) = 1/x$ en $(a, 1/a)$ no corta a la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$. ¿Ocurre lo mismo con la tangente a $g(x) = 1/x^2$ en $(a, 1/a^2)$?

15. Deduzca una ecuación de la tangente a la curva en el punto dado:

(a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad (-5, \dfrac{9}{4})$ (hipérbola)

(b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{36} = 1, \quad (-1, 4\sqrt{2})$ (elipse)

(c) $y^2 = x^3(2-x), \quad (1,1)$

16. Determine la linealización $L(x)$ de cada una de las siguientes funciones en el punto a:

(a) $f(x) = x^3, \quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}, \quad a = 0$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 4$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$

17. Sea f una función tal que $f(1) = 2$, cuya derivada se conoce y es $f'(x) = \sqrt{x^3+1}$

(a) Estime el valor de $f(1.1)$ con una aproximación lineal.

(b) ¿Cree que el valor exacto de $f(1.1)$ es menor o mayor que el estimado? ¿Por qué?

18. Usando diferenciales, encuentre un valor aproximado de

(a) $\sqrt{36.1}$

(b) $\sqrt[3]{1.02} + \sqrt[4]{1.02}$

(c) $\dfrac{1}{10.1}$

(d) $(1.97)^6$

(e) $\operatorname{sen} 59°$

(f) $\cos 31.5°$

19. El lado de un cubo mide 30 cm, con un posible error de medición de 0.1 cm. Usando diferenciales, estime el error máximo posible en el cálculo de

    (a) el volumen del cubo

    (b) su área

20. Se dice que el radio de un disco circular mide 24 cm, con un error máximo de medición de 0.2 cm.

    (a) Con diferenciales estime el error máximo en el área calculada del disco

    (b) ¿Cuál es el error relativo?

21. Se midió la circunferencia de una esfera y el resultado fue 84 cm, con un posible error de 0.5 cm.

    (a) Usando diferenciales estime el error máximo en el área de la superficie de dicha esfera.

    (b) ¿Cuál es el error relativo en el cálculo de área?

22. Si V es el volumen de un cubo cuyo lado mide x, calcule dV/dt en función de dx/dt

23. Si A es el área de un círculo de radio r, determine dA/dt respecto de dr/dt

24. Si $xy = 1$ y $dx/dt = 4$, calcule dy/dt cuando $x = 2$

25. Si $x^3 + 3xy + y^2 = 1$ y $dy/dt = 2$, calcule dx/dt cuando $y = 1$

26. Una bola de nieve esférica se funde de tal modo que su volumen se reduce a una velocidad de 1 cm^3/min. ¿Con qué velocidad disminuye el diámetro cuando mide 10 cm?

27. Un reflector en el piso alumbra un muro a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de altura camina del reflector hacia el muro a una velocidad de 1.6 m/s, ¿con qué velocidad disminuye la altura de su sombra en el edificio cuando está a 4 m de la pared?

28. La altura de un triángulo aumenta con una velocidad de 1 cm/min, mientras su área lo hace a una velocidad de 2 cm^2/min. ¿Con qué velocidad aumenta la base del triángulo cuando su altura es de 100 cm y su área es de 100 cm^2.

4.3 Derivadas de orden más alto

29. Calcule d^2y/dx^2 en cada caso

    (a) $y = (1 + x^2) \arctan x$

    (b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

30. Verifique las siguientes ecuaciones:

    (a) $y'' - 2y' + 2y = 0$ si $y = e^x \operatorname{sen} x$

    (b) $2y'^2 = (y - 1)y''$ si $y = \dfrac{x - 3}{x + 4}$

31. Calcule $y''\, e^y$ y simplifique lo máximo posible: $y = 2\ln(e^x + e^{-x})$

32. Sea $y = x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{4} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$. Calcule $x^2y'' + xy' - y$ y simplifique lo máximo posible.

33. Encuentre:

(a) $y^{(4)}$ si $y = e^x \cos x$.

(b) $y^{(20)}$ si $y = x^2 e^{2x}$.

34. Calcule la derivada n–ésima de la función $f(x) = x \ln x$

4.4 Extremos relativos y absolutos. Graficación de funciones

35. Encuentre el máximo y el mínimo absoluto de cada función en el intervalo indicado:

(a) $f(x) = 2x + 3, \quad x \in [-1, 1]$

(b) $f(x) = |x^2 - x - 2|, \quad x \in [-3, 3]$

(c) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}, \quad -1 \leq x \leq 1$

(d) $f(x) = x^2 - 4x + 6, \quad -3 \leq x \leq 10$

(e) $f(x) = (x^2 - x - 1)\, e^x, \quad |x| \leq 3$

36. Esboce la gráfica de las siguientes funciones. Previamente determine dominio, puntos de discontinuidad o no derivabilidad, puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y, de ser posible, puntos de inflexión e intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.

(a) $f(x) = x^2 + 2x$

(b) $f(x) = (x^2 - 4)^2$

(c) $f(x) = x^3 - 3x - 2$

(d) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

(e) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(g) $f(x) = x - 2 \arctan x$

(h) $f(x) = x^2\, e^{-2x^2}$

(i) $f(x) = x \ln x$

(j) $f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)(x + 2)}$

(k) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + x - 2}$

(l) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

(m) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 - 3}$

37. Esboce la gráfica de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^{1/x}$ para $x > 0$

(b) $f(x) = \arctan 3x - \arctan x$

(c) $f(x) = 2 \arctan \sqrt{x} + \dfrac{2}{x + 1}$

(d) $f(x) = x^{1/3} + (x - 1)^{2/3}$

38. Encuentre los extremos locales y absolutos de las siguientes funciones en $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x - x^{2/3}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 1} + 3 \arctan x$.

39. Determine los intervalos donde la función $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ es monótona.

40. Determine los máximos y mínimos locales de $f(x) = x^2 - |2x - 1|$.

41. Determine la imagen de la función $f(x) = \arctan x + \ln \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$, para $x \geq 0$.

42. Demuestre:

(a) $x^4 + 1 \geq x^3 + x$ para todo x

(b) $4x^3 + 2x^2 \leq x^4 + 12x + 9$ para todo x. ¿Para cuáles x vale la igualdad?

(c) $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ para todo x

(d) $\operatorname{sen} x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$ para $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

(e) $\ln \sqrt{x} > \dfrac{x - 1}{x + 1}$ para $x > 1$

(f) $x\, e^{1-x} \leq 1$ para todo x.

43. Compruebe la siguiente desigualdad para $x > 0$:
$$4\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} > \ln(x^2+1).$$

4.5 Problemas de Optimización

44. Calcule el número positivo que, sumado a su inverso multiplicativo de por resultado una suma mínima.

45. Determine dos números cuya suma sea S y su producto sea máximo.

46. Pruebe que de todos los rectángulos de perímetro P el de mayor área es el cuadrado de lado $P/4$.

47. Se quiere fabricar una lata cilíndrica de volumen V. El material empleado en tapa y fondo es igual al del lateral. Calcule las dimensiones de la lata que minimicen su costo.

48. Un recipiente de almacenamiento en forma de paralelepípedo (sin tapa) debe tener 10 m^3 de volumen. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material de su base cuesta \$ 10 por m^2 y el de los lados \$ 6 por m^2. Calcule el costo mínimo de los materiales para ese recipiente.

49. Las márgenes superior e inferior de un cartel tienen 6 cm de ancho y los laterales 4 cm. Si el área del material impreso del cartel se fija en 384 cm^2, calcule el área mínima total del cartel.

Respuestas a algunos ejercicios

(1a) $f'(x) = 5$
(1b) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$
(1c) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}$
(2) Sí, $f'(0) = 0$
(3) (a) con (ii); (b) con (iv); (c) con (i); (d) con (iii)
(4a) $x = 0$
(4b) $x = -2$ y $x = 5$
(4c) $x = -2, x = 2$ y $x = 5$
(5a) $f'^-(0.6) = -5; f'^+(0.6) = 5$
(5b) $f'-(0.6) \neq f'^+(0.6)$
(6a) $f'^-(4) = -1;\quad f'^+(4) = 1$
(6c) $D(f) = \mathbb{R} - \{5\}$
(6d) $x = 0$
(6e) $x = 0$ y $x = 4$
(7a) $f'(x) = 7x^6 - 15x^2$
(7b) $f'(x) = 4(x^2-x)^3(2x-1)$
(7c) $f'(x) = (2/3)x^{-1/3}$
(7d) $f'(x) = \ln(x) + 1$
(7e) $f'(x) = 2cos(2x)$
(7f) $f'(x) = 2x/(x+1)^3$
(7g) $f'(x) = 1/cos^2(x)$
(7h) $f'(x) = e^{\operatorname{sen}(x)}\cos(x)$
(7i) $f'(x) = -e^{-x}(-3x+1+x^2)$
(7j) $f'(x) = 2(x^2+2)^{-3/2}$
(7k) $f'(x) = -(x+1)^{-1/2}$ $(x-1)^{-3/2}$
(7l) $f'(x) = (-1+2x^2)$ $(x^2(1-x^2))^{-3/2}$
(7m) $f'(x) = 1/(2x)$
(7n) $f'(x) = 1/(2\sqrt{x^2+x})$
(7o) $f'(x) = -\operatorname{sen}(2/x)/x^2$
(7p) $f'(x) = e^{\operatorname{sen}(x^2)}\cos(x^2)2x$
(7q) $f'(x) = 1/\operatorname{sen}(x+\pi/2)$
(7r) $f'(x) = 2x/\sqrt{1-x^4}$
(7s) $f'(x) = 0$
(7t) $f'(x) = x^x(\ln(x)+1)$
(7u) $f'(x) = x^{tan(x)}(\ln(x)/cos^2(x)+ tan(x)/x)$
(7v) $f'(x) = -1/(x(\ln(x))^2)$
(7w) $f'(0) = 0$
$f'(x) = 2x\operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$ si $x \neq 0$
(8a) $\dfrac{1}{3(y^2+1)}$
(8b) $\dfrac{1-x-y}{x-y}$
(8c) $\dfrac{e^y}{1-x\,e^y}$
(8d) $\dfrac{\sqrt{4xy}-y}{x-\sqrt{x}}$
(8e) $\dfrac{18x\sqrt[3]{x^2y^2}-y}{12y\sqrt[3]{x^2y^2}+x}$
(9) x
(10) En $(-1,\,0)$: $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}(x+1)$;
en $(2,3)$: $y = 3$;
en $(3,0)$: $x = 3$
(11) $x = 0$ y $x = 2/3$
(12) $y = (x+1)/2$
(13) $y = x - 3e^{-2}$
(15a) $y = -\dfrac{5}{4}x - 4$
(15b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+1) + 4\sqrt{2}$
(15c) $y = x$
(16a) $L(x) = 3x - 2$
(16b) $L(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \dfrac{x}{4}\right)$
(16c) $L(x) = -\dfrac{1}{16}x + \dfrac{1}{2}$
(16d) $L(x) = x/12 - 4/3$
(17a) $f(1,1) \approx 2.14$
(17b) mayor
(18a) 721/120
(18b) 1207/600
(18c) 99/1000
(18d) 1456/25
(18e) $(\sqrt(3) - \pi/180)/2$
(18f) $(\sqrt(3) - \pi/120)/2$
(19a) 270 cm^3
(19b) 36 cm^2
(20a) 9.6π cm^2
(20b) 1/60
(21a) $84/\pi$ cm^2
(21b) $1/(336\pi^2)$
(22) $\dfrac{dV}{dt} = 3x^2\dfrac{dx}{dt}$
(23) $\dfrac{dA}{dt} = 2\pi r\dfrac{dr}{dt}$

(24) $\dfrac{dy}{dt} = -1$

(25) $\dfrac{dx}{dt} = -4/3$

(26) $\dfrac{1}{50\pi}\dfrac{\text{cm}}{\text{min}}$

(27) Disminuye a 0.6 m/s

(28) $1/50\ cm/min$

(29a) $2\left(\dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x\right)$

(29b) $\dfrac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$

(31) 8

(32) $\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

(33a) $-4e^x \cos x$

(33b) $2^{20}(x^2+20x+95)e^{2x}$

(34) $f'(x) = \ln(x) + 1$,
$f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{(n-1)!}{x^{n-2}}$,
$n \geq 2$

(35a) El máximo es 5, en $x = 1$; el mínimo es 1, en $x = -1$
(35b) El máximo es 10, en $x = -3$; el mínimo es 0, en $x = -1$ y $x = 2$
(35c) El máximo es 3, en $x = -1$; el mínimo es 1, en $x = 1$
(35d) El máximo es 66, en $x = 10$; el mínimo es 2, en $x = 2$
(35e) El máximo es $5e^3$, en $x = 3$; el mínimo es $-e$, en $x = 1$

(39) Monótona creciente en $(-1, 1)$; monótona decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

(40) Mínimos locales: $x = 1$ y $x = -1$. Máximo local en $x = 1/2$

(41) $Im(f) = (-\infty, \pi/4]$

(44) 1

(45) $S/2$ y $S/2$

(48) $540/\sqrt[3]{36}$

(49) $864cm^2$