

Capítulo 2

Funciones

2.1 Propiedades generales

1. Considere un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 10 unidades.

(a) Expresé la superficie del triángulo como función de la base.

(b) Identifique el dominio de esta función.

2. Un recipiente de almacenamiento en forma de paralelepípedo (sin tapa), tiene $10m^3$ de volumen. La longitud de su base es el doble de su ancho x . El material de la base cuesta $\$10/m^2$, el de los laterales cuesta $\$6/m^2$. Obtener la función $C(x)$ que da el costo del recipiente en función de x . Determine su dominio.

3. Determine el dominio de las siguientes funciones:

(a) $g(x) = \frac{2}{3x-5}$

(c) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

(d) $g(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$

4. Analice dominio y paridad de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 3x - x^3$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

(b) $f(x) = x + x^2$

(d) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

5. Si $g(x) = x^2 - 2x$, obtenga $g(2)$, $g(0)$, $g(\alpha)$, $g(x) + g(-x)$ y $(g(x+h) - g(x))/h$.

6. Esboce la gráfica de las siguientes funciones

(a) $f(x) = |x^2 - 1|$

(f) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$

(g) $f(x) = -\frac{1}{x+2}$

(c) $f(x) = \begin{cases} |x| & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$

(h) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & x > 2 \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x-1| & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 0 \text{ ó } x > 2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \frac{1}{x}$

(j) $h(x) = f(x+1)$, donde $f(x)$ es la función dada en el punto 6i.

7. Determine dominio y rango, luego trace la gráfica de

(a) $g(x) = \sqrt{-x}$

(d) $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$

(b) $g(x) = \sqrt{6-2x}$

(e) $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$

(c) $h(x) = |2x - 3|$

8. Considere las funciones $g(x) = \sqrt{3x}$ y $f(x) = \sqrt{25-x^2}$. Determine el dominio de

(a) $g(x) + f(x)$

(b) $f(x)g(x)$

(c) $\frac{g(x)}{f(x)}$

(d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

9. Resuelva la ecuación

$$\sqrt{6x+1} = -x.$$

Corrobore gráficamente la o las soluciones.

10. Determine $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ y $g \circ f$ si

(a) $f(x) = x^2$ $g(x) = 2^x$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $g(x) = x^2 - 4x$

(b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

11. Determine el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$, si

$$g(x) = \sqrt{3x}$$

$$f(x) = \sqrt{8-x}$$

12. Cuando sea posible, calcule la inversa de las siguientes funciones. De no existir la inversa, indíquelo.

(a) $y = x^2$ $x \leq 0$

(c) $y = x^2$ $-\infty < x < \infty$

(b) $y = \frac{2-x}{3+x}$ $x \neq -3$

(d) $y = \sqrt{1-x^2}$ $-1 \leq x < 0$

13. En cada caso, determine $f(t)$ sabiendo que

(a) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ $x \in \mathbb{R}$

(c) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ $x \neq 0$

(b) $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ $x \neq 0$

14. Sea $f(x) = \frac{x+1}{x}$. Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones, luego escribálas en la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son polinomios:

(a) $f(x) + 1$

(d) $f(f(x))$

(b) $f\left(\frac{1}{x}\right)$

(e) $f(x+1)(f(x) - 2f(x^2 + 2x))$

(c) $f(x+1)$

2.2 Funciones exponencial, logaritmo e hiperbólicas

15. Decida, sin usar calculadora, cual de los siguientes números es el mayor: $\sqrt{2}^{(\sqrt{2}\sqrt{2})}$ y $(\sqrt{2}\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

2.3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SUS INVERSAS

16. Simplifique lo máximo posible:

$$\frac{\ln 8}{\ln 2} + \ln 8 - \ln 2 + \ln \frac{1}{4}$$

17. Esboce la gráfica de las funciones $f(x) = \ln(x+5)$, $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ y $h(x) = \ln|x|$.

18. Esboce, en un mismo gráfico, las gráficas de

(a) $f(x) = 2^x$

(b) $g(x) = e^x$

(c) $h(x) = 5^x$

(d) $l(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

19. Considere la función $f(x) = c e^{Kx}$.(a) Sabiendo que $f(2) = 2$ y $f(3) = 3$, determine el valor de las constantes c y K .(b) Calcule $f(4)$.(c) ¿Para qué valores de x vale que $f(x) = 4$?20. Cuando un volumen de gas se mantiene aislado, vale la siguiente relación entre volumen V y la temperatura absoluta T (medida en grados Kelvin (K)),

$$T = AV^{1-\kappa},$$

donde A y κ son constantes. Cuando se comprimen 30 litros de aire a 15 litros, la temperatura sube de 20°C a 114°C . Determine κ . Recuerde que la relación entre C (grados centígrados) y K (grados Kelvin) es $^\circ\text{C} = K + 273$.

21. Para un diodo semiconductor vale la siguiente relación entre la corriente I y el voltaje U

$$I = I_0 (e^{KU} - 1),$$

donde I_0 y K son constantes positivas.

En una prueba de laboratorio se miden los siguientes valores

I (mA)	U (V)
2.0	0.60
40.0	1.20

(mA indica miliamperes y V voltios) Use estos datos para obtener I_0 y K . Con estos datos calcule el voltaje correspondiente a una corriente de 20 mA.

22. (i) Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $\sqrt{e^x} = e^{\sqrt{x}}$

(b) $(\sqrt{e})^x = e^{\sqrt{x}}$

(c) $\sinh x = 1$

(d) $\sqrt{\ln(x^2 - 1)} = \sqrt{\ln(x+1) + \ln(x-1)}$

(e) $\ln(x+2) + \ln(x+4) = \ln(2x+5)$

(f) $\sqrt{\ln x} = \ln \sqrt{x}$

(g) $x^{1-\log_{10} x} = 0.01$

(ii) Pruebe que

$$\operatorname{arcsenh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

2.3 Funciones trigonométricas y sus inversas

23. A partir de los valores conocidos de seno y coseno de $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ y $\pi/2$, calcule en forma exacta el valor de las expresiones que se dan a continuación:Cambio de base: $\ln x = \frac{\log x}{\log 10}$

(a) $\sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + \tan \frac{5\pi}{3}$

(b) $\sin \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{5\pi}{6}$

(c) $\sin \frac{\pi}{24} \left(\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$

24. Esboce la gráfica de

(a) $\sin \frac{x}{2}$

(b) $f(x) = \cos 2x$

(c) $f(x) = 2 \cos \frac{x\pi}{2}$

(d) $f(x) = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

(e) $f(x) = 1 + \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

(f) $f(x) = x + \sin x$

25. Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $\sin x = \sin 3x$

(b) $\tan 5x = \tan 3x$

(c) $\sin x = \cos 3x$

(d) $\sin x = \sqrt{3} \cos x$

26. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones

(a) $\sin^2 x + \cos x = \frac{5}{4}$

(b) $1 + \sin x = 2 \cos^2 x$

(c) $\cos x \sin x = 0$

(d) $\sin(2x) = 2 \sin x$

(e) $2 \cos(2x) + 4 \sin x = 3$

(f) $\cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$, en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$

(g) $\cos x = \cos \left(\frac{\pi}{4} \right)$, en el intervalo $72\pi \leq x \leq 73\pi$

(h) $\sin(2x) = \sqrt{2} \cos x$, en el intervalo $-\frac{19\pi}{2} \leq x \leq -\frac{15\pi}{2}$

27. Calcule en forma exacta:

(a) $\arcsen \frac{1}{2}$

(b) $\arccos(-1)$

(c) $\arctan \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

(d) $\arcsen \frac{1}{2} + \arccos \left(-\frac{1}{2} \right)$

(e) $\arcsen \frac{1}{3} + \arcsen \left(-\frac{1}{3} \right)$

(f) $\arcsen \frac{1}{2} + \arcsen \frac{\sqrt{3}}{2}$

(g) $\sin \left(\arcsen \frac{1}{2} \right)$

(h) $\arcsen \left(\sin \frac{3\pi}{5} \right)$

(i) $\cos \left(\arccos \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$

28. Resuelva las ecuaciones

(a) $\arcsen 2x = \frac{\pi}{2}$

(b) $\arccos 3x = \arctan 2x$

(c) $\arcsen x = 2 \arccos x$

(d) $3 \arccos x = \arccos 3x$

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta$$

Demuestre

Respuestas a algunos ejercicios

- (1a) $S(b) = \frac{b}{2} \sqrt{100 - \frac{b^2}{4}}$
 (1b) $0 < b < 20$
 (2) $C(x) = 20x^2 + 180/x, (0, \infty)$
 (3a) $x \neq 5/3$
 (3b) $-1 \leq x \leq 1$
 (3c) $x \geq 0$
 (3d) $x \neq -3$ y $x \neq 2$
- (4a) Impar, $D_f = \mathbb{R}$
 (4b) Sin paridad, $D_f = \mathbb{R}$
 (4c) Par, $D_f = \mathbb{R}$
 (4d) Impar, $D_f = \mathbb{R}$
 (5) $0, 0, \alpha^2 - 2\alpha, 2x^2, 2x + h - 2$
 (7a) $D_g = (-\infty, 0]; I_g = [0, \infty)$
 (7b) $D_g = (-\infty, 3]; I_g = [0, \infty)$
 (7c) $D_h = \mathbb{R}; I_g = [0, \infty)$
- (7d) $D_f = [2, \infty); I_f = (-\infty, 3]$
 (7e) $D_f = \mathbb{R}; I_f = [-7/2, \infty)$
 (8a) $D_{f+g} = [0, 5]$
 (8b) $D_{fg} = [0, 5]$
 (8c) $D_{g/f} = [0, 5]$
 (8d) $D_{f/g} = (0, 5]$
 (9) $x = 3 - \sqrt{10}$
- (10a) $(f \circ f)(x) = x^4, (g \circ g)(x) = 2^{(2^x)}, (f \circ g)(x) = 2^{2x}, (g \circ f)(x) = 2^{(x^2)}$
 (10b) $(f \circ f)(x) = \frac{x-1}{2-x}, (g \circ g)(x) = -\frac{1}{x}, (f \circ g)(x) = -\frac{x+1}{2}, (g \circ f)(x) = \frac{2-x}{x}$
 (10c) $(f \circ f)(x) = x^{1/4}, (g \circ g)(x) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 16x, (f \circ g)(x) = (x^2 - 4x)^{-1/2}, (g \circ f)(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$
- (11) $D_{f \circ g} = [0, 64/3]$
 $D_{g \circ f} = (-\infty, 8]$
 (12a) $y = -\sqrt{x} \quad x \geq 0$
 (12b) $y = \frac{2-3x}{x+1} \quad x \neq -1$
 (12c) No tiene inversa
 (12d) $y = -(1-x^2)^{1/2}, x \in [0, 1]$
 (13a) $f(t) = t^2 - 5t + 6, t \in \mathbb{R}$
 (13b) $f(t) = 1/t + (1+t^2)^{1/2}/|t|, t \neq 0$
 (13c) $f(t) = t^2 - 2$
 (14a) $\frac{2x+1}{x}$
 (14b) $\left(1+x\right)^{\frac{x}{x}}$
- (14c) $\frac{x+2}{x+1}$
 (14d) $\frac{2x+1}{x+1}$
 (14e) -1
 (15) $\sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})} < \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$
 (16) 3
 (19a) $c = 8/9; K = \ln \frac{3}{2}$
 (19b) $f(4) = 4.5$
 (19c) $x = \frac{\ln 4.5}{\ln 1.5} \sim 3.71$
 (20) $\kappa = 1 - \ln(293/387)/\ln(2)$
 (21) $K = (5/3) \ln(19), I_0 = 1/9$
 $V = 0.6 \frac{\ln 181}{\ln 19} \text{ Volts}$
- (22a) $x = 0; 4$
 (22b) $x = 0; 4$
 (22c) $x = \ln(1 + \sqrt{2})$
 (22d) $x \in [\sqrt{2}, \infty)$
 (22e) $x = -1$
 (22f) $x = 1; e^4$
 (22g) $x = 100; 0.1$
 (23a) $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$
 (23b) $\frac{3-5\sqrt{3}}{6}$
 (23c) $\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$
- (25a) $x = n\pi; \frac{\pi}{4}(2n+1); n \in \mathbb{Z}$
 (25b) $x = n\pi; n \in \mathbb{Z}$
 (25c) $x = \frac{\pi}{2}(n + \frac{1}{4}); -\pi(n + \frac{1}{4}); n \in \mathbb{Z}$
 (25d) $x = \frac{\pi}{3} + n\pi; n \in \mathbb{Z}$
 (26a) $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi; -\frac{\pi}{3} + 2n\pi; n \in \mathbb{Z}$
 (26b) $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi; \frac{5\pi}{6} + 2n\pi; \frac{3\pi}{2} + 2n\pi; n \in \mathbb{Z}$
- (26c) $x = n\pi/2, n \in \mathbb{Z}$
 (26d) $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
 (26e) $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi; \frac{5\pi}{6} + 2n\pi; n \in \mathbb{Z}$
 (26f) $x = \frac{\pi}{20}; \frac{9\pi}{20}; \frac{17\pi}{20}$
 (26g) $x = \frac{\pi}{4} + 72\pi$
 (26h) $x = \frac{-31\pi}{4}; \frac{-15\pi}{2}; \frac{-17\pi}{2}; \frac{-19\pi}{2}$
- (27a) $\frac{\pi}{6}$
 (27b) π
 (27c) $\frac{-\pi}{6}$
 (27d) $\frac{5\pi}{6}$
- (27e) 0
 (27f) $\frac{\pi i}{2}$
 (27g) $\frac{1}{2}$
- (27h) $\frac{2\pi}{5}$
 (27i) $\frac{-1}{2}$
 (28a) $x = \frac{1}{2}$
- (28b) $x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
 (28c) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 (28d) no tiene solución

STEXIADT #9. Acc. 1.1. 31 → 37. 39 → 50