

Contenidos

1	Recta numérica, plano cartesiano, ecuaciones en una y dos incógnitas	5
1.1	Valor absoluto, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita	5
1.2	Sistema cartesiano en el plano, ecuaciones con dos incógnitas	6
2	Funciones	9
2.1	Propiedades generales	9
2.2	Funciones exponencial, logaritmo e hipérbólicas	10
2.3	Funciones trigonométricas y sus inversas	11
3	Límite y continuidad	15
3.1	Límite	15
3.2	Continuidad	16
4	Derivada	19
4.1	Reglas de derivación	19
4.2	Linealización. Razones relacionadas.	21
4.3	Derivadas de orden más alto	22
4.4	Extremos relativos y absolutos. Graficación de funciones	23
4.5	Problemas de Optimización	24

Capítulo 1

Recta numérica, plano cartesiano, ecuaciones en una y dos incógnitas

1.1 Valor absoluto, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita

1. Expresa el subconjunto de los números reales que satisfacen las siguientes condiciones como un intervalo o unión de intervalos, y dibújelo sobre la recta real.

(a) $x \geq 0$ y $x \leq 5$

(c) $x < 2$ y $x \geq -3$

(b) $x \neq -1$

(d) $x^2 > 2$

2. Resuelva las siguientes inecuaciones. Para cada una de ellas, exprese el conjunto solución como un intervalo o unión de intervalos y dibújelo sobre la recta real.

(a) $3(2 - x) < 2(3 + x)$

(c) $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$

(b) $\frac{1}{2-x} < 3$

(d) $\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$

3. Resuelva:

(a) $|2t + 5| = 4$

(d) $|x - 3| < 2|x|$

(b) $|x - 1| = 1 - x$

(e) $2|x + 1| + |x| + |x - 1| \leq 4$

(c) $|x + 1| > |x - 3|$; (b') $|x - 2| > 1$

(f) $|x - 1| > 2|x - 2|$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x} = x + 12$

(e) $\frac{2x+3}{2x-3} - \frac{2x-3}{2x+3} = \frac{8}{3}$

(b) $\frac{x}{\frac{4}{3}-x} - \frac{\frac{1}{3}-x}{x} = \frac{1}{9x}$

(f) $\sqrt{4-x^2} = -x$

(c) $(x+1)^2 = 4(x+1) - 4$

(g) $3 - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}$

(d) $x^4 - 36x^2 = 0$

(h) $\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+1} + 2 = 0$

1.2 Sistema cartesiano en el plano, ecuaciones con dos incógnitas

5. Encuentre la ecuación de la recta

(a) $y = mx + 1$ que pasa por el punto $(1, 0)$

(b) $y = 3x + b$ que pasa por el punto $(1, 4)$

6. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 1)$ y es paralela a la recta $y = 3x + 5$.

7. Encuentre el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

(a) $x^2 - 6x + y^2 - 4y = -9$

(b) $x^2 + 8x + y^2 = -12$

8. ¿Para qué valores de x se satisface la desigualdad $x^2 + 5x + 4 \geq 0$?

9. Dibuje las curvas determinadas por las ecuaciones:

(a) $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$

(g) $y = |x^2 + x - 1|$

(b) $y = x^2 - 8x + 4$

(h) $\frac{x^2}{4} + 2y^2 = 1$

(c) $v = -u^2 + 2u - 7$

(i) $x^2 - 3x = -y^2 + 4y + 9$

(d) $y = |x - 1|$

(j) $x^2 - y^2 = 2$

(e) $y = |x + 1| - |x - 1|$

(f) $y = \operatorname{sgn}(1 - x^2)$

10. Describa la curva o la región del plano determinada por las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

(a) $\frac{x^2}{2} + y^2 \geq 1$

(d) $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4$

(g) $x \leq 1 - y^2$

(b) $x^2 + y^2 \leq 1$

(e) $\frac{x^2}{4} - y^2 \geq 1$

(h) $x = -\frac{y^2}{4}$

(c) $x + y > 1$

(f) $y > -\frac{8}{5}x + 5$

(i) $y \geq x^2 - 2x + 2$

11. Empleando argumentos geométricos determine cuantas soluciones tiene cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones en dos incógnitas, luego resuelva cada sistema

(a)

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y = -x + 5/3 \end{cases}$$

12. Empleando argumentos geométricos determine cual es el número máximo de soluciones que puede tener cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones en dos incógnitas. Para cada sistema, grafique en el plano el conjunto solución de cada una de sus dos ecuaciones, y analice la intersección de estos dos conjuntos.

(a)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x + 1 - y = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x + 2 - y = 0 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x + 3 - y = 0 \end{cases}$$

Respuestas a algunos ejercicios

- | | | |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| (1a) $[0, 5]$ | (3c) $x \in (1, \infty)$ | (4f) $x = -\sqrt{2}$ |
| (1b) $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ | (3d) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ | (4g) $x = 1$ |
| (1c) $[-3, 2)$ | (3e) $x \in [-5/4, 1/2]$ | (4h) no tiene solución |
| (1d) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ | (3f) $x \in (5/3, 3)$ | (5a) $y = -x + 1$ |
| (2a) $x \in (0, \infty)$ | (4a) $x = 2 \pm \sqrt{3}; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ | (5b) $y = 3x + 1$ |
| (2b) $x \in (-\infty, 5/3) \cup (2, \infty)$ | (4b) $x = \frac{1}{3}$ | (6) $y = 3x - 5$ |
| (2c) $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 1)$ | (4c) $x = 1$ | (7a) $C = (3, 2); r = 2$ |
| (2d) $x \in [-2, 0) \cup [4, \infty)$ | (4d) $x = 0; \pm 6$ | (7b) $C = (-4, 0); r = 2$ |
| (3a) $t = -1/2, -9/2$ | (4e) $x = 3; -\frac{3}{4}$ | (8) $x \in (-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$ |
| (3b) $x \in (-\infty, 1]$ | | |

- (10a) Elipse con centro $C = (0, 0)$, semiejes $\sqrt{2}$ (en x) y 1 (en y), y su exterior.
 (10b) Círculo de radio $r = 1$ y centro $C = (0, 0)$.
 (10c) Región del plano por arriba de la recta $y = 1 - x$.
 (10d) Región del plano fuera del círculo de radio $r = 3$ y centro $C = (2, -1)$.
 (10e) Hipérbola horizontal con centro $C = (0, 0)$, vértices $(2, 0)$ y $(-2, 0)$ y asíntotas $y = \pm x/2$, y su interior.
 (10f) Región del plano por arriba de la recta $y = -\frac{8}{5}x + 5$.
 (10g) Parábola horizontal que se abre hacia la izquierda y tiene vértice $(1, 0)$, y su interior.
 (10h) Parábola con vértice en $(0, 0)$, abierta hacia la izquierda.
 (10i) Región del plano dentro y sobre la parábola hacia arriba con vértice en $(1, 1)$.

- | | |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| (11a) $x = -4/7, y = 3/7$ | (12a) $(-1/2 + \sqrt{3}/2, 1/2 + \sqrt{3}/2),$
$(-1/2 - \sqrt{3}/2, 1/2 - \sqrt{3}/2)$ |
| (11b) no tiene solución | (12b) $(-1, 1)$ |
| (12c) no tiene solución | |