CLASE 3

Derivadas de polinomios y propiedades que usaremos

Como dijimos la clase pasada, $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ y $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, entonces es necesario que aprendamos algunas cosas sobre las derivadas. Derivadas es un tema que verán (o habrán visto) en AM1, pero para lo que usaremos en este curso solamente es necesario fijar algunas ideas:

1) Como vimos la clase pasada, podemos interpretar gráficamente la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.
2) Mini tabla de derivadas:
   a) Si c=cte., entonces $\frac{dc}{dt} = 0$
   b) Si n=cte. y x=x(t), entonces $\frac{dx^n}{dt} = nx^{n-1}$. Notemos que cuando n=1, nos queda $\frac{dx}{dt} = 1x^0 = 1$
3) Propiedades de las derivadas: Si f=f(t), g=g(t) y c=cte., entonces:
   a) $\frac{d(c \cdot f)}{dt} = c \cdot \frac{df}{dt}$
   b) $\frac{d(f+g)}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}$

Ejemplos:

1) Encuentre las velocidades y aceleraciones instantáneas para cada partícula:
   a) $x(t) = 3t^2 + 5t + 8$
   b) $x(t) = 3t^5 - 2t$
   c) $x(t) = 4$
2) Si $x(t) = 3t^2 + 5t + 8$, donde x está expresado en metros y t en segundos,
   a) ¿Cuál es la posición del objeto para t=0s?
   b) ¿Cuál es el desplazamiento del objeto entre t=0s y t=2s?
   c) ¿Cuál es la v media o velocidad promedio en el intervalo de tiempo entre 0 y 2s?
   d) ¿Cuánto valen las velocidades instantáneas para t=0 y t=2s?
   e) Calcule el promedio de las velocidades calculadas en d) y compare con el resultado obtenido en c). Explique.
   f) Repita los cálculos c) a e) pero para la aceleración.

===

Movimiento con velocidad constante (MRU)

Si una partícula se desplaza con velocidad constante, eso indica que tendrá movimiento rectilíneo (¿por qué?) y que el gráfico de la posición en función del tiempo será necesariamente una recta (¿por qué? ¿La velocidad podría ser constante si x(t) no fuera una recta?).

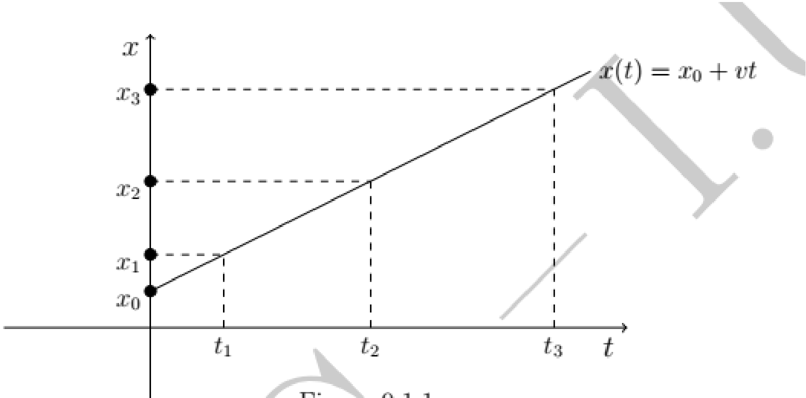


Figura 9.1.1

Notemos entonces que la velocidad media también es constante e igual a la velocidad instantánea en cualquier punto, entonces $\overline{v} = v = \text{cte.}$ con lo cual,

$v = \dfrac{x - x_0}{t - t_0}$ donde $x = x(t)$ y $x_0 = x(t_0)$ (se lee *x* es la posición a tiempo *t* y x_0 es la posición a tiempo t_0)

Despejando obtenemos: $x(t) = x_0 + v \cdot (t - t_0)$ donde, como dijimos antes, *x*(t) es la posición a tiempo *t* y x_0 la posición a tiempo x_0. En particular podemos pensar x_0 como la posición inicial (es decir la posición al tiempo inicial t_0) y si tomamos el tiempo inicial igual a cero nos queda la ecuación

$$x(t) = x_0 + v \cdot t$$

Que es la ecuación que ya conocen (secundaria y CN) para el MRU.

Notemos que:

1) Que la velocidad sea constante, significa que, en intervalos de tiempo iguales, la partícula recorrerá distancias iguales. A este tipo de movimiento se lo llama uniforme.
2) Si derivamos la expresión obtenida para x(t), obtenemos, como era de esperar, la velocidad instantánea que es constante.

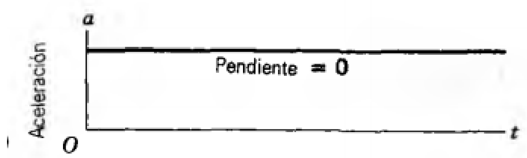
==

Movimiento rectilíneo con aceleración constante

Supongamos primero que $\vec{a} = \overrightarrow{cte} \neq 0$. Este tipo de movimiento recibe el nombre de Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV) (Explicar que significa el nombre).

Es bastante común encontrar este tipo de movimientos con aceleración constante (o casi constante): objetos que caen cerca de la superficie de la Tierra si los efectos del aire no son importantes, el frenado de un cuerpo que se desliza por una pendiente o sobre una superficie horizontal áspera, un avión cuando es lanzado con catapulta desde la cubierta de un portaviones, etc.

En estos casos, como la aceleración es constante el gráfico de la aceleración en función del tiempo será de la forma:



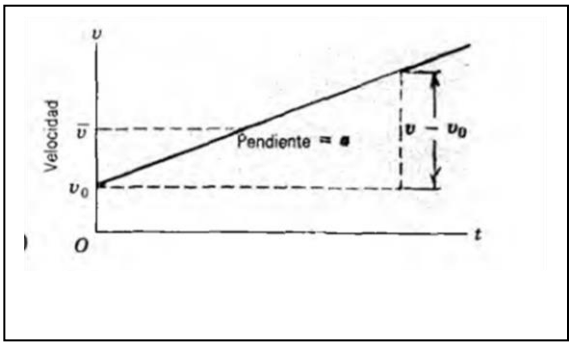
Como a es constante, las aceleraciones promedio e instantánea son idénticas y podemos usar las fórmulas derivadas previamente para cada caso. Un objeto arranca con velocidad $\vec{v}_0$ en el tiempo *t=0*, y en un tiempo *t* posterior tiene una velocidad $\vec{v}$. Entonces, para este intervalo de tiempo nos queda:

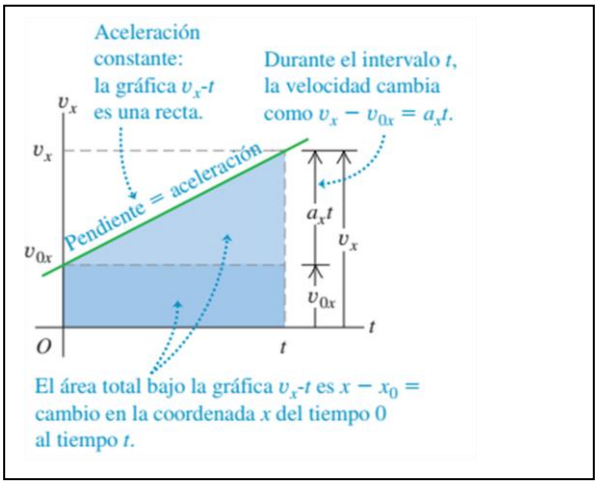
$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - 0}$$

o sea,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \qquad (1)$$

Este importante resultado nos permite hallar la velocidad de todos los tiempos posteriores. La ecuación (1) da la velocidad como función del tiempo, lo que podría escribirse como $\vec{v}(t)$, pero que usualmente escribimos simplemente como $\vec{v}$. Nótese que la ecuación (1) está en la forma de *y=mx+b*, la cual describe la gráfica de una línea recta. Aquí la aceleración es la pendiente, como ya hemos explicado y la velocidad inicial es la ordenada al origen (el valor de la velocidad para *t=0*). Esta línea recta está trazada en la siguiente figura:





Es fácil deducir que el área total bajo la recta en el gráfico v(t) entre dos tiempos dados, es igual a la distancia recorrida por el vehículo en ese intervalo de tiempo. En Análisis 1B verán que, aunque la gráfica de v(t) no fuera una recta, igual se cumpliría que el área bajo la curva en el grafico v(t) entre dos tiempos, es igual a la distancia recorrida en ese intervalo de tiempo.

Para completar el análisis de la cinemática de la aceleración constante, debemos hallar la dependencia de la posición $\vec{x}$ en el tiempo. Para esto necesitamos una expresión para la velocidad promedio en el intervalo. Si la gráfica de la velocidad en función del tiempo es una línea recta, como acabamos de ver, entonces el promedio o valor medio de la velocidad ocurre a medio camino a través del intervalo y es igual al promedio o media de los puntos extremos en el tiempo 0 y el tiempo *t*:

$$\bar{v} = \tfrac{1}{2}(v + v_0).$$

Usando la ecuación (1) para eliminar $\vec{v}$, obtenemos

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2}at \qquad (2)$$

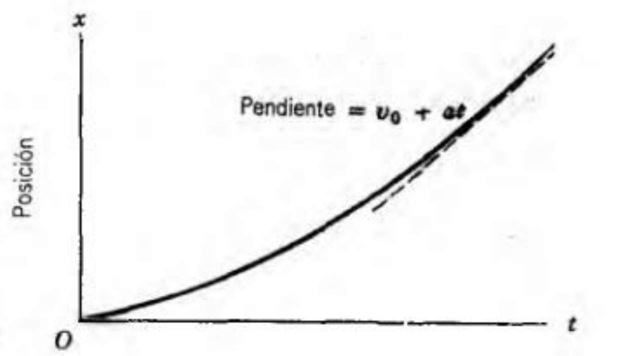
pero de la definición de velocidad promedio vista la clase pasada, y suponiendo que la partícula se mueve de la posición x_0 en el tiempo *0* a la posición *x* en el tiempo *t*, la velocidad promedio puede escribirse:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - 0}. \qquad (3)$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3), obtenemos el resultado esperado para *x(t)*:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (4)$$

Dados el valor de *a* y las *condiciones iniciales* x_0 *y* v_0 (es decir, la posición y la velocidad en $t=0$), la ecuación (4) nos permite entonces hallar la posición *x*, de todos los tiempos posteriores, lo cual es la meta de nuestro análisis cinemático. Por conveniencia, a menudo elegimos el origen de las coordenadas de manera que $x_0=0$. La siguiente figura muestra el trazado de *x* versus *t* para este caso:



Es fácil verificar en este tipo de movimiento que como era de esperarse se cumplen las ecuaciones generales $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(t)$ y $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t)$ **(La demostración de esto queda como TAREA)**

A menudo es útil tener una relación para la posición, la velocidad y la aceleración (constante) que no involucre el tiempo. Para lograr esto, primero despejamos *t* de la ecuación (1) y luego sustituimos la expresión resultante en la ecuación (4):

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \Rightarrow x = x_0 + v_{0x}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2$$

Transferimos el término x_0 al lado izquierdo y multiplicamos la ecuación por $2a_x$:

$$2a_x\left(x - x_0\right) = 2v_{0x}v_x - 2v_{0x}^2 + v_x^2 - 2v_{0x}v_x + v_{0x}^2$$

Finalmente, simplificando nos queda:

$$\boxed{v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\left(x - x_0\right)} \quad (5) \quad \text{(sólo para aceleración constante)}$$

Notemos que el caso particular donde $\vec{a} = \overrightarrow{cte} = 0$, coincide con el del MRU y reemplazando en las ecuaciones del MRUV podemos ver que recuperamos las ecuaciones del MRU.

===

CUERPOS EN CAÍDA LIBRE

El ejemplo más conocido de movimiento con aceleración (casi) constante es la caída de un cuerpo bajo la influencia de la atracción gravitacional de la Tierra. Dicho movimiento ha interesado a filósofos y científicos desde la antigüedad. En el siglo IV a.C., Aristóteles pensaba (erróneamente) que los objetos pesados caían con mayor rapidez que los ligeros, en proporción a su peso. Diecinueve siglos después, Galileo afirmó que los cuerpos caían con una aceleración constante e independiente de su peso.

Los experimentos indican que, si es posible omitir el efecto del aire, Galileo está en lo cierto: todos los cuerpos en un lugar específico caen con la misma aceleración hacia abajo, independientemente de su tamaño o peso. Si, además, la distancia de caída es pequeña en comparación con el radio terrestre, y si ignoramos los pequeños efectos debidos a la rotación de la Tierra, la aceleración es constante. El modelo idealizado que surge de tales supuestos se denomina **caída libre**.

Si bien hablamos de cuerpos *en caída*, los cuerpos con movimiento hacia arriba experimentan la misma aceleración que aquellos en caída libre (en magnitud y dirección). Esto es, sin importar que la velocidad de la partícula sea hacia arriba o hacia abajo, la dirección de su aceleración bajo la influencia de la gravedad de la Tierra es siempre hacia abajo. En la secundaria solían describir este movimiento con el nombre de **tiro vertical**, pero esa distinción no es necesaria.

La aceleración constante de un cuerpo en caída libre se llama **aceleración debida a la gravedad**, y denotamos su magnitud con la letra g. Por lo regular, usaremos el valor aproximado de g en la superficie terrestre o cerca de ella:

$$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \text{ (valor aproximado cerca de la superficie terrestre)}$$

El valor exacto varía según el lugar, así que normalmente daremos el valor de g en la superficie de la Tierra con solo tres cifras significativas. En la superficie de la Luna, la aceleración debida a la gravedad es causada por la fuerza de atracción de la Luna, no de la Tierra, y allí $g = 1{,}6$ m/s^2. Cerca de la superficie del Sol es $g = 270$ m/s^2, etc.

CUIDADO: ***g* siempre es un número positivo**. Como g es la *magnitud* de un vector, siempres es un número positivo. Si se considera hacia arriba como la dirección *positiva*, como suele hacerse en la mayoría de las situaciones que implican caída libre, entonces la aceleración es negativa (hacia abajo) e igual a $-g$.

Notemos que como una caída libre es un movimiento con aceleración constante, entonces no necesitamos deducir nuevas ecuaciones para describirlo. Las ecuaciones que usaremos serán las del MRUV tomando un sistema de referencia adecuado que nos permita describir el movimiento de la mejor manera posible.

Ejemplos:

1) Se deja caer una moneda desde la Torre Inclinada de Pisa. La moneda cae libremente a partir del reposo. Calcule su posición y velocidad después de 1 s, 2 s y 3 s.

2) Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el techo de un edificio alto. La pelota abandona la mano del lanzador, en un punto a la altura del barandal de la terraza, con velocidad ascendente de 15 m/s. Al bajar, la pelota elude el barandal. Obtenga:

   a) La posición y velocidad de la pelota 1 s y 4 s después de soltarla.
   b) La velocidad de la pelota cuando está 5 m sobre el barandal.
   c) La altura máxima alcanzada.
   d) La velocidad de la pelota en su altura máxima.
   e) La aceleración de la pelota en su altura máxima.

3) El superhéroe Linterna Verde se tira desde la terraza de un edificio. Cae libremente a partir del reposo, recorriendo la mitad de la distancia total hacia el suelo en 1 s. ¿Cuál es la altura del edificio?

==

TAREA:

- Guía 2: Ejercicios 12 a 22.