

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材 159 种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础、精选内容、逐步更新、利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》，中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构，并制定了一九八二年～一九八五年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共 217 种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选优秀和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前　　言

本教材系由高等学校工科电子类电磁场与微波技术教材编审委员会微波技术教材编审小组评选审定，并推荐出版。

本教材由清华大学林德云副教授担任主审。本教材的编者和审者均依据微波技术教材编审小组审定的编写大纲进行编写和审阅。

本教材的参考教学时数为 76 学时（第八章微波元件除外），主要讲述微波技术的基本理论和基本分析方法。全书共分八章。第一章引言，叙述微波波段的划分及其特点，介绍微波技术的发展和应用。第二章传输线理论，即分布参数电路理论，主要讲述 TEM 模传输线的传输特性和无耗传输线的各种工作状态及其特点，讨论利用阻抗圆图进行阻抗计算和阻抗匹配的方法，介绍传输线的时域分析方法和格林函数解法以及传输线段与四端网络的关系。第三章金属波导，主要讲述规则波导的模式理论及其传输特性，分析矩形波导、圆波导和同轴线的各种模式及其场结构，讲解小孔耦合原理及其在波导定向耦合器中的应用，讨论规则波导的设计原理与波导的损耗和传输功率的计算问题。第四章微带传输线，主要讲述带状线、微带、耦合带状线和耦合微带的特性及其准静态分析计算方法。第五章介质波导，讲述介质波导的特点和工作原理，论述圆形介质波导的特性、阶跃光纤的波动方程解法与光纤中的模式，讨论矩形介质波导的近似求解方法及其特性。第六章微波谐振器，讲述微波谐振器的基本理论，分析各种微波谐振器的特性及其设计原理，讨论微波谐振腔的微扰理论及其应用。第七章广义传输线与波矩阵，论述均匀波导的等效原理和波导接头的等效网络与网络的各种波矩阵以及 N 端口网络的描述方法。第八章微波元件，定性讲述各种常用微波元件的基本特性及其应用。

使用本教材时要求学生熟悉电磁场和电磁波的基本理论，具备数学物理方程、矢量代数与场论、线性代数、复变函数等工程数学基础。书中一些较深内容标有花号“*”，可根据要求和时数取舍，略去这些内容并不影响全书内容和讲述的系统性和连贯性。书中各章节之间有相对的独立性，亦可根据要求和时数作选择和精简。第八章微波元件不包括在 76 学时之内，可根据要求和时数取舍或增减。

林德云副教授认真审阅了全部书稿，并为本书提出了许多宝贵意见，这里表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编者 1984.2.15.

目 录

第一章 引言	1
1.1 微波及其特点	1
1.2 微波技术的发展和应用	3
1.3 本书的目的与构成	5
参考资料	6
第二章 传输线理论	7
2.1 传输线的基本概念	7
2.2 传输线方程及其解	10
* 2.3 用场的概念分析传输线	16
2.4 传输线的阻抗与反射	20
2.5 无耗传输线工作状态分析	23
2.6 有耗传输线	31
2.7 传输功率与效率	36
2.8 阻抗与导纳圆图	38
2.9 传输线的阻抗匹配	47
* 2.10 传输线的时域分析	59
* 2.11 传输线的格林函数解法	67
2.12 传输线与四端网络	70
本章提要	73
参考资料	75
习题	75
第三章 金属波导	81
3.1 规则波导的导波方程及其求解方法	81
3.2 矩形波导中电磁波的传输特性	86
3.3 圆波导中的三个主要波型	97
3.4 同轴线及其高次模	106
3.5 波导正正规模的特性	112
3.6 波导的激励与耦合	116
3.7 规则波导的设计问题	126
本章提要	134
参考资料	136
习题	136
第四章 微带传输线	139
4.1 概述	139
4.2 带状线的主要特性	142
4.3 微带的主要特性	154

4.4 桥合带状线	188
4.5 桥合微带	197
4.6 微带线的不均匀性	206
本章提要	222
参考资料	222
习题	224
第五章 介质波导	225
5.1 概述	225
5.2 介质波导的工作原理	228
5.3 圆形介质波导与阶跃光纤	232
5.4 矩形介质波导	248
5.5 介质波导与金属波导的特点对比	261
本章提要	263
参考资料	263
习题	264
第六章 微波谐振器	265
6.1 概述	265
6.2 微波谐振器的基本特性与参数	266
6.3 金属波导型谐振腔	270
6.4 传输线谐振器	283
6.5 介质谐振器	287
* 6.6 非传输线型谐振腔	295
6.7 微波谐振器与外电路的耦合	298
6.8 谐振器的等效电路	300
6.9 谐振腔的微扰理论	306
本章提要	312
参考资料	313
习题	313
第七章 广义传输线与波矩阵	315
7.1 广义传输线方程	315
7.2 模式电压、模式电流与模式函数	316
7.3 均匀波导的等效电路	321
7.4 波导接头的等效网络	326
7.5 波导接头的波矩阵	329
* 7.6 N端口波导接头及其网络描述	344
本章提要	356
参考资料	357
习题	357
第八章 微波元件	360
8.1 一端口元件	360
8.2 二端口元件	364
8.3 三端口元件	370

8.4 四端口元件	376
8.5 微波铁氧体隔离器和环行器	384
本章提要	393
参考资料	394
习题	394
全书的结论	396
附录一 同轴线参数表	397
附录二 国产矩形和扁矩形波导管数据表	398

第一章 引 言

本章概述微波的特点与微波技术的应用，作为入门知识，最后简述本书的目的与构成。

1.1 微波及其特点

广泛的说，微波是指频率为 300MHz 至 300GHz 范围内的无线电波，其相应的波长范围是 1m 至 0.1mm。根据应用上的特点，将微波分成分米波、厘米波、毫米波和亚毫米波四个波段。表 1.1-1 表示国际无线电频谱的波段划分。

表 1.1-1 国际无线电频谱的波段划分

波段号数	符号（中译名）		频率范围 (下限除外，上限包括在内)	相当米制划分	波段缩写
4	VLF	（甚低频）	3 至 30 kHz	万米波	B·Mam
5	LF	（低频）	30 至 300 kHz	千米波	B·Km
6	MF	（中频）	300 至 3000 kHz	百米波	B·hm
7	HF	（高频）	3 至 30 MHz	十米波	B·dam
8	VHF	（甚高频）	30 至 300 MHz	米波	B·m
9	微波	UHF (超高频)	300 至 3000 MHz	分米波 (十分之一米波)	B·dm
10		SHF (特高频)	3 至 30 GHz	厘米波 (百分之一米波)	B·cm
11		EHF (极高频)	30 至 300 GHz	毫米波 (千分之一米波)	B·mm
12	波	超极高频	300 至 3000 GHz	亚毫米波 (万分之一米波)	

微波的低频端接近于超短波，高频端接近于红外线。它在整个电磁波频谱中的位置如图 1.1-1 所示。

在通讯和雷达工程中，常使用拉丁字母代表微波波段的名称，例如 S 波段代表 10 厘米波段，C 波段代表 5 厘米波段，X 波段代表 3 厘米波段，等等，如表 1.1-2 所示。

微波之所以引起人们的特别兴趣，并单独对它进行研究，主要是因为它与其它波段相比有如下特点：

(1) 微波的波长很短，与地球上一般物体（如飞机、舰船、火箭、导弹、建筑物等）的尺寸相比在同一数量级或更小。当微波照射到这些物体时，将产生显著的反射。其传播特性与几何光学相似，能象光线一样地传播和容易集中，即具有所谓“似光性”

● 频率的单位现在统一规定用“赫[芝]”(Hz)。微波的频率很高，为了简化数字，常采用千赫(kHz)、兆赫(MHz)、吉赫(GHz)等单位：

3000千赫以下（含3000千赫）以kHz (10^3 Hz) 计；

3兆赫以上至3000兆赫（含3000兆赫）以MHz (10^6 Hz) 计；

3吉赫以上至3000吉赫（含3000吉赫）以GHz (10^9 Hz) 计；

3000吉赫以上用THz (称为太赫) (10^{12} Hz) 表示。

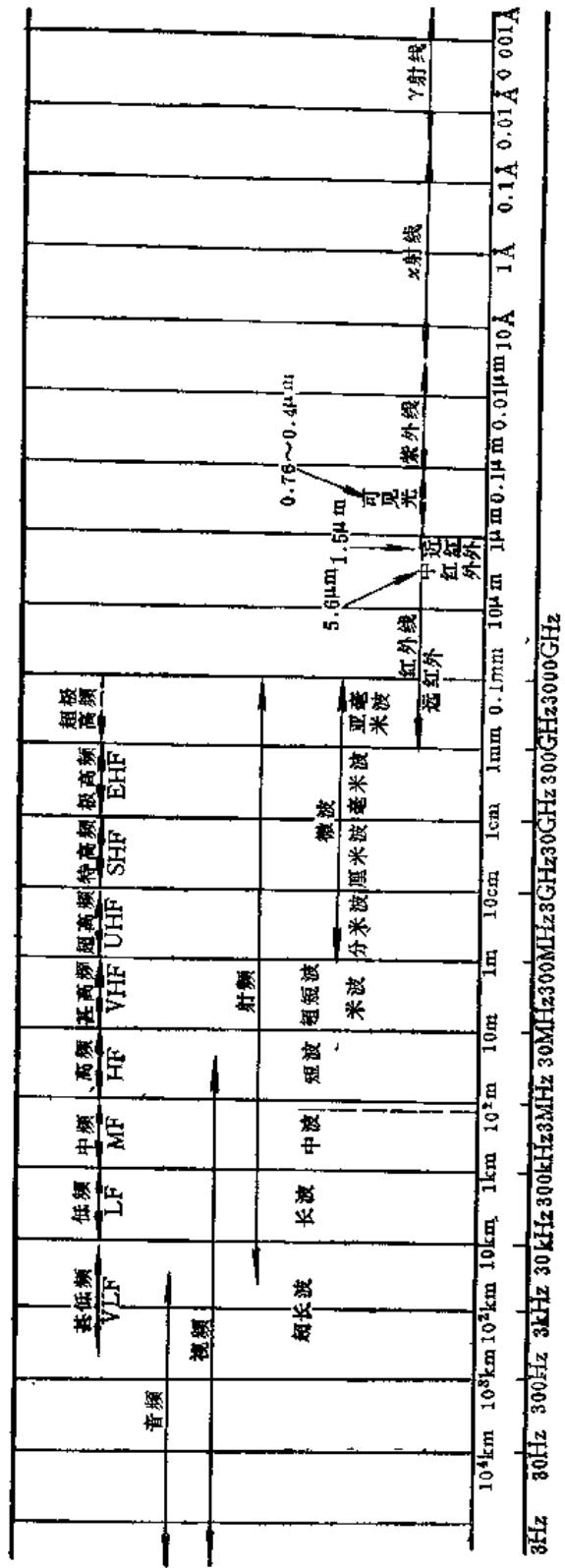


图1-1-1 电磁波频谱

表1.1-2 微波波段划分

波段	频率范围(GHz)	波段	频率范围(GHz)
UHF	0.3~1.12	K	18.0~26.5
L	1.12~1.7	Ka	26.5~40.0
LS	1.7~2.6	Q	33.0~50.0
S	2.6~3.95	U	40.0~60.0
C	3.95~5.85	M	50.0~75.0
XC	5.85~8.2	E	60.0~90.0
X	8.2~12.4	F	90.0~140.0
Ku	12.4~18.0	G	140.0~220.0
		R	220.0~325.0

和直线传播的特点。因此，利用微波可以设计制成体积小、方向性和增益都很高的天线系统，接收来自地面或宇宙空间各种物体反射回来的微弱信号，从而确定物体的方位和距离。

(2) 微波的频率很高，即振荡周期很短($10^{-9} \sim 10^{-13}$ s)。因此，低频使用的元件和器件不再适用于微波波段，低频时一些可以忽略的现象和效应(如趋肤效应、辐射效应、相位滞后等)在微波情况下不能再忽略了。同时，由于微波的频率很高，所以可用的频带宽，信息的容量大。

(3) 微波可以穿过电离层。它是人类探测外层空间的“宇宙窗口”。这就为宇宙通信、外空探测、导航、定位、宇宙航行以及射电天文学的研究和发展提供了必要的条件。

(4) 微波频率的量子能量与一般顺磁物质在磁场作用下所产生的能级差($10^4 \sim 10^{-5}$ eV)有着相近的数量级。当微波照射于物体(介质)时能够深入物质内部。此即微波的“穿透性”。因此，利用微波可以研究分子和原子核的结构。这正是近代微波波谱学和量子电子学所依据的基本物理事实。

(5) 微波的研究方法与低频不同。在低频电路中采用的是路的概念和方法，而在微波电路中则需要采用场的概念和方法。这是因为低频电路的尺寸比工作波长小得多，可以认为稳定状态的电压和电流的效应在整个电路系统各处是同时建立的，电压、电流有完全明确的物理意义，能对系统作完全的描述。但在微波电路中，工作波长与电路尺寸可相比拟，甚至更小，因此不能忽略电磁场的相位滞后现象。此时电压和电流等概念也失去了明确的物理意义，只有用电场、磁场和电磁波的概念和方法才能对系统作完全的描述。

如上所述，不论是在处理问题的概念和方法上，还是在实际微波系统的原理和结构上，微波都与低频情况有很大的不同。因此，有必要将微波技术作为一门专门学科来研究。

1.2 微波技术的发展和应用

微波技术是近代科学技术发展的重大成就之一，发展极为迅速。其发展过程大致可分为三个阶段。

1940年以前为第一阶段，是实验室早期研究阶段，主要研究微波产生的方法。

1940年至1945年为第二阶段，是微波技术迅速发展并应用于实际的阶段。在此阶段内，大多数微波电子器件都产生了，并采用了波导和空腔谐振器。

1945年以后为第三阶段，是微波技术广泛发展和应用的阶段。在此阶段内，不仅开辟了新波段，扩展了应用范围，而且形成了一系列新的边缘科学领域，如微波波谱学、射电天文学、射电气象学等。同时，在前一阶段的实践基础上，比较完整而系统地建立了一整套微波电子学理论，为微波技术的进一步发展和提高打下了理论基础。1965年以后，由于微波固体器件、固体集成电路和固体平面电路的出现和发展，使微波技术得以向固体化、小型化方向发展。

目前，微波技术正在向着如下三个方向迅速发展：

(1) 向更高频率或更短波长过渡，即向毫米波和亚毫米波发展，弥合厘米波段与激光波段之间的缝沟。

(2) 向微波电路的小型化和单片集成化方向发展。

(3) 向着开辟新的微波应用领域方向发展。

微波技术的迅速发展是和它的应用密切相联系的。

微波技术的传统应用是雷达和通讯。

微波最早是用于雷达。雷达是微波技术应用的典型例子。现代雷达大多数是微波雷达。利用微波工作的雷达可以使用较小的天线，来获得很窄的波束宽度，可以获得关于被测目标性质的更多的信息。例如机载综合孔径雷达具有极高的分辨率，可以获得和光学质量一样的图象。图1.2-1即为机载X波段综合孔径雷达获得的西安市郊的图象。

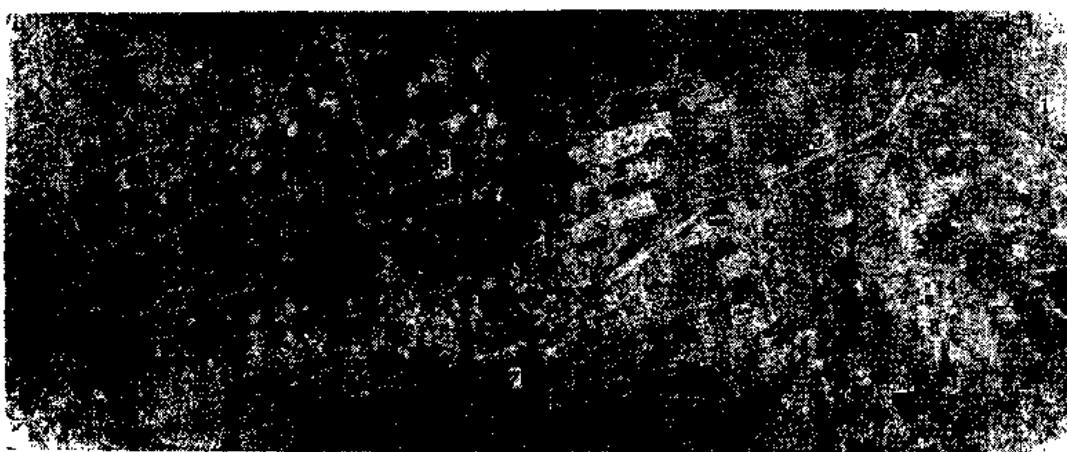


图1.2-1 西安市郊综合孔径雷达图象，1980年12月23日拍摄

1—渭河；2—铁路桥；3—铁路；4—工厂区；5—浐河；6—城区；7—西安城墙；8—公路。

(引自：孟侃主编《微波遥感》，华中工学院出版社，1982年)

通讯也是微波技术的传统应用。微波多路接力通讯便是利用微波中继站把微波信号连续接收、发射而实现效率高、容量大的远距离通讯，两个中继站之间的典型距离为40~50km。目前，有的国家已研制成准毫米波(20~30GHz频段)中继通讯设备。近年来，利用微波的卫星通讯得到了广泛的发展和应用，许多国家进行了25~120GHz频段的实验性毫米波通讯，并进行了毫米波卫星通讯的应用研究。

根据波段使用上的特点来考虑，从 S 至 Ku 波段的微波范围通常适用作以地面为基地的通讯，毫米波段则适用于空间-空间的通讯。最近有考虑采用 K 波段频率作为地面-卫星通讯的趋势，以减轻轻微波低端频率的拥挤。毫米波段的 60GHz 频段电波的大气衰减较大，非常适于作近距离保密通讯，而 94GHz 频段的电波在大气中的衰减却很小，是个窗口频段，适于作地-空和远距离通讯。对于很长距离的通讯，则 L 和 LS 波段更适合，因为在这些波段容易获得较大的功率。

在工农业生产方面广泛应用微波进行加热和测量。微波加热具有部位深、速度快、加热均匀、能量转换效率高等优点，现已广泛应用于食品、橡胶、塑料、化学、木材加工、造纸、印刷、卷烟等工业中。在农业上，可用微波进行灭虫、育种、干燥谷物、育蚕等。

在生物医学方面，微波技术有着广泛的应用潜力。利用微波可以诊断一些疾病，如早期肺气肿或肺水肿，监视重病人的呼吸，检查人脑部硬膜下的血肿，测量人的心动图等。微波还可以用来治疗疾病，如微波理疗、微波针灸、治疗妇产科病、冷藏器官的解冻等。目前，已将微波技术用于癌症的诊断和处理。

微波本身还是一种能源。上述各种微波加热的应用就是将微波作为一种能量来加以利用的。目前，微波加热炉不仅应用于许多工业部门，而且已广泛用于食堂和家庭烹调。微波作为能源还有其潜在的应用，即在未来的卫星太阳能电站的应用中，利用微波将其能量传送给地面接收站。因为在地球赤道上空 35860km 同步轨道上的卫星电站接收到的太阳能不能直接送回到地面上来，需要将接收到的太阳能转换成直流，用以产生微波能量发射到地面接收站，并将接收到的微波能量再转换成直流功率，才可供用户使用。

需要指出的是，大功率的微波辐射对人体是有伤害作用的。微波辐射对人体的伤害作用，按其机理可分为热效应和非热效应两种。热效应或称致热效应是指由于微波照射生物体引起组织器官的加热作用所产生的生理影响。非热效应或称热外效应是除了对生物体组织和器官的加热作用以外的，对生物体的其它特殊生理影响，这些影响是用别的加热手段不会产生的。微波对人体的伤害作用主要是热效应。大剂量或长时间微波照射全身时，可以使人体温度升高，产生高温的生理反应，使人体组织和器官受到损伤。因此应该采取适当的防护措施，并应对微波源的功率泄漏规定安全指标。理论和实验结果表明，人体受微波照射的容许强度约为 100mW/cm^2 。一般规定比此值小 10 倍的强度 (10mW/cm^2) 作为安全标准。但剂量大小还和照射时间的长短有关，若照射时间小于 0.1 h，可容许比 10mW/cm^2 大些；若照射时间大于 0.1 h，则容许的强度应小于此量。

1.3 本书的目的与构成

广义而言，微波技术是研究频率为 300MHz 至 3000GHz 范围内的无线电波的信息处理（包括产生、放大、调制、传输、接收、发射和测量等）的学科。本书主要是研究微波传输方面的问题，它是研究其它方面问题的基础。

从内容上讲，本书重点是分析现用主要微波传输线的传输特性。从方法上讲，本书以场的方法为重点，即以电磁波的讨论为重点。这是研究传输特性的根本方法。作为微波问题路的处理方法的理论基础，本书第二章和第七章分别讨论了分布参数电路理论和

广义传输线方程与波矩阵。

本书由八章构成。在本章“引言”之后，第二章传输线理论从路的观点研究传输线的高频运用特性及其计算方法。这一章内容实为分布参数电路理论。第三章是关于几种主要波导传输线特性的分析，系波导理论基础。第四章讨论微带传输线的主要特性及其分析计算方法。它是设计微波集成电路的基础。第五章介绍毫米波段使用的几种介质波导的特性及其分析方法。第六章研究各种微波谐振器的特性及其设计计算方法。第七章讨论微波电路的等效理论、各种波矩阵及其参数。第八章定性分析常用微波元件的基本特性。

参 考 资 料

- 〔1〕 廖承恩、陈达章，《微波技术基础》（上册），国防工业出版社，1979年。
- 〔2〕 张秀岐，“国际《无线电规则》与雷达和电子系统工程规划”，《国防电子工程情报》，1980年第10期。
- 〔3〕 Om P. Gandhi, *Microwave Engineering and Applications*, Pergamon Press, 1981.
- 〔4〕 Jechen Edrich, “Microwave Techniques in the Diagnosis and Treatment of Cancer,” 9th Eu MC, 1979, pp. 25—33.

第二章 传输线理论

传输线理论又称分布参数电路理论，是微波电路的理论基础。本章主要从路的观点，以双导线为例讲述传输线在微波运用下的传输特性，讨论利用阻抗圆图和导纳圆图进行阻抗计算和阻抗匹配的方法。

本章首先从传输线的分布参数入手得出传输线的等效电路，据此导出均匀无耗传输线方程，进而分析无耗传输线三种工作状态的传输特性；然后考虑分布参数电阻 R 和电导 G 的影响，讨论有耗传输线的特性与传输线的效率；接着讨论阻抗圆图和导纳圆图以及利用圆图进行阻抗计算和阻抗匹配的方法；最后介绍传输线的时域分析方法、格林函数解法及传输线段与四端网络的关系。

2.1 传输线的基本概念

传输线是用以从一处至另一处传输高频或微波能量（例如在雷达中，由发射机传输到天线，或由天线传输到接收机输入端）的装置，并要求其传输效率最高，损耗（包括热损耗、介质损耗和辐射损耗）尽可能小。传输线还可以用来构成各种微波电路元件，例如谐振器、滤波器、阻抗匹配器、定向耦合器等。

传输线的种类很多，按其上传输的导行电磁波型式可分为三类（见图2.1-1）：（1）TEM模传输线（包括准TEM模传输线），如双导线、同轴线、带状线、微带等；（2）金属波导传输线，其传输模为TE模和TM模，如矩形波导、圆形波导、椭圆波导、脊形波导等；（3）表面波传输线，其传输模一般为混合模，如介质波导、介质镜象线、单根线等。厘米波段采用较多的是同轴线、矩形波导、圆形波导和微带；毫米波段主要采用介质波导和介质镜象线。

对传输线的基本要求是损耗小、传输功率大、工作频带宽、尺寸小。

当传输线的横向尺寸比信号波长小得多，而轴向尺寸远比信号波长大时，可将传输线看成一维分布参数电路。其几何长度 l 与其上工作波长 λ 的比值（即 l/λ ）称为传输线的电长度。在微波波段工作的各种传输线，其上传输的电磁波的波长很短，传输线的几何长度比信号波长还长或者可以相比拟，所以传输线又称为长线。一般认为，当 $l > 0.1\lambda$ 时可看成长线。传输线理论又称为长线理论。

由电磁场理论知，当高频信号通过传输线时将产生如下分布参数效应：由于电流流过导线将使导线发热，这表明导线本身具有分布电阻；由于导线间绝缘不完善而存在漏电流，这表明导线间处处有分布电导；由于导线中通过电流，周围将有磁场，因而导线上存在分布电感的效应；又由于导线间有电压，导线间便有电场，于是导线间存在分布电容的效应。虽然传输线上具有这些分布参数性质，但是在低频或信号波长远大于传输线实际长度的电子设备中，传输线（此时为电路元件之间的连接线）本身分布参数所引起的效应完全可以忽略不计，而把电路当作集总参数电路来处理。但当频率很高时，传输线的实际长度可与信号波长相比拟甚至更长时，传输线上的电压和电流将不仅是时间

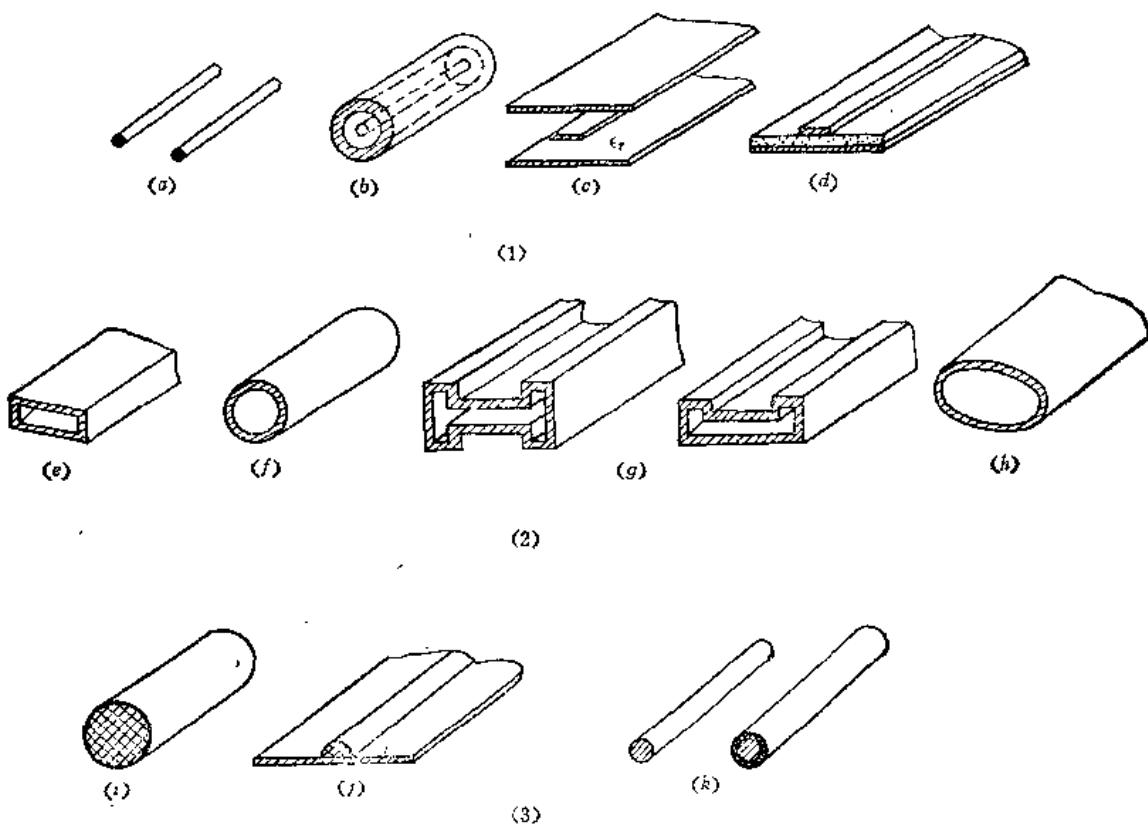


图2.1-1 传输线的种类

(1) TEM模与准TEM模传输线; (2) 金属波导传输线; (3) 表面波传输线。

(a) 平行双导线; (b) 同轴线; (c) 带状线; (d) 微带; (e) 矩形波导; (f) 圆形波导;
(g) 脊形波导; (h) 椭圆波导; (i) 介质波导; (j) 泄漏线; (k) 单根表面波传输线。

的函数，同时还是距离的函数，其上电压、电流和阻抗等物理量的变化规律就不能再沿用集总参数电路理论而必须用传输线理论来研究。

根据传输线上的分布参数是否均匀分布，可将传输线分为均匀传输线和不均匀传输线。本章主要讨论均匀传输线。

如上所述，在微波情况下，传输线是分布参数电路。线上任一无限小线元 Δz ($\Delta z \ll \lambda$) 上都分布有一定大小的电阻 $R\Delta z$ 和电感 $L\Delta z$ ；此线元间都分布有一定大小的电导 $G\Delta z$ 和电容 $C\Delta z$ 。这里 R 、 L 、 G 和 C 分别为传输线单位长度上的电阻、电感、电导和电容，分别称为分布电阻、分布电感、分布电导和分布电容。它们的数值与传输线的形状、尺寸、导线的材料及所填充介质的参数有关。双导线和同轴线的分布参数表示式如表2.1-1所示。

对于均匀传输线，我们取其上一无限小线元 Δz ($\Delta z \ll \lambda$)，并将它看成一集总参数电路，其集总电阻、电感、电导和电容分别为 $R\Delta z$ 、 $L\Delta z$ 、 $G\Delta z$ 和 $C\Delta z$ ，可用 Γ 形网络来等效（也可用T形网络或 Π 形网络等效），如图2.1-2(a)所示。整个传输线则可看成由许多线元的四端网络链联而成的分布参数电路，如图2.1-2(b)所示；对于无耗线 ($R = 0$, $G = 0$)，其等效电路如图2.1-2(c)所示。

表2.1-1 双导线和同轴线的分布参数①

分布参数 传输线	双 导 线	同 轴 线
$R (\Omega/m)$	$\frac{2}{\pi d} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma_2}}$	$\sqrt{\frac{f\mu_0}{4\pi\sigma_2}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$
$L (H/m)$	$\frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}$	$\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
$C (F/m)$	$\pi\epsilon_1 / \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}$	$2\pi\epsilon_1 / \ln \frac{b}{a}$
$G (S/m)$	$\pi\sigma_1 / \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}$	$2\pi\sigma_1 / \ln \frac{b}{a}$

① ϵ_1 、 σ_1 分别为介质的介电常数和漏电导； σ_2 为导体的电导率。

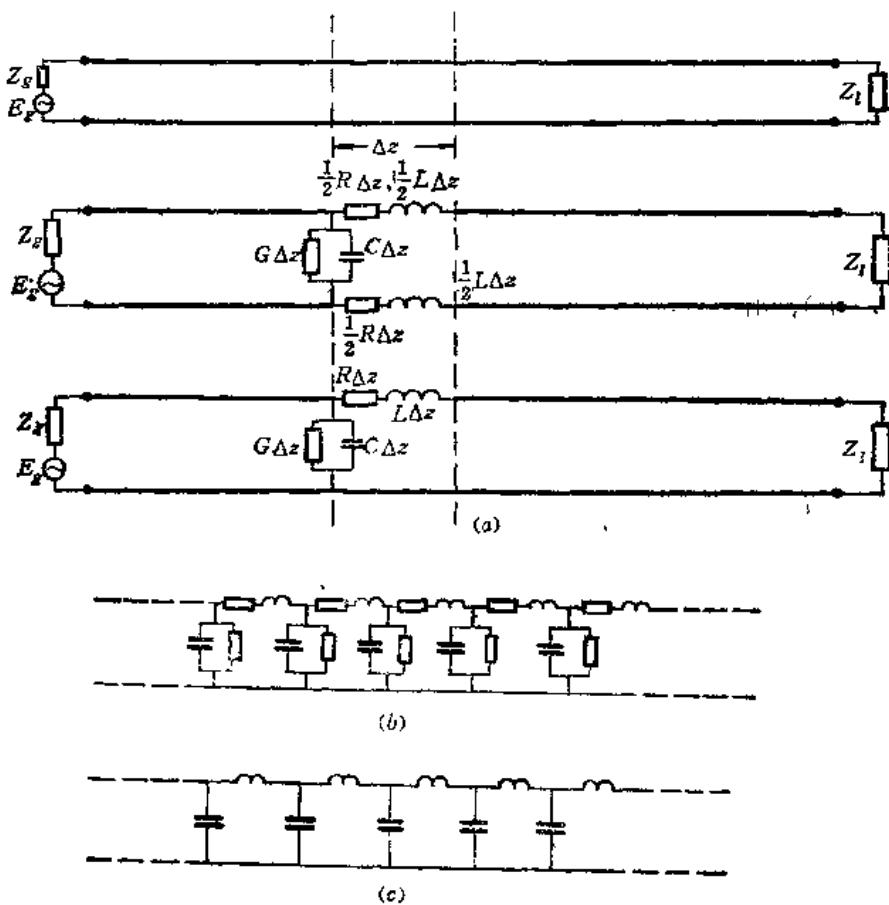


图2.1-2 传输线的等效电路
(a) 线元 Δz 的等效电路; (b) 有耗线的等效电路; (c) 无耗线的等效电路。

2.2 传输线方程及其解

传输线方程是研究传输线上电压、电流的变化规律及其相互关系的方程，是传输线理论的基本方程。本节将根据传输线的等效电路导出均匀传输线方程，据此求出均匀无耗传输线上电压和电流的解。

1. 均匀传输线方程

传输线上的电压和电流是距离和时间的函数，即

$$\left. \begin{array}{l} u = u(z, t) \\ i = i(z, t) \end{array} \right\} \quad (2.2-1)$$

如图2.2-1所示距传输线始端 z 处线元 Δz 的等效电路，设传输线上 z 处的电压和电流分别为 $u(z, t)$ 和 $i(z, t)$ ， $z + \Delta z$ 处的电压和电流分别为 $u(z + \Delta z, t)$ 和

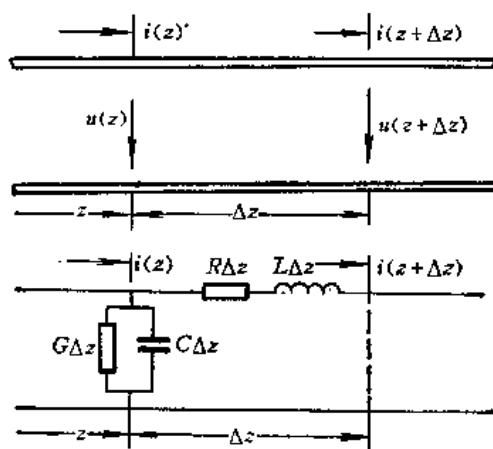


图2.2-1 传输线方程推导用图

$i(z + \Delta z, t)$ 。由于 $\Delta z \ll \lambda$ ，所以可将线元 Δz 看成集总参数电路，应用克希荷夫(Kirchhoff)定律，有

$$\left. \begin{array}{l} u(z + \Delta z, t) - u(z, t) = -\Delta u(z, t) = \left[R i(z, t) + L \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \right] \Delta z \\ i(z + \Delta z, t) - i(z, t) = -\Delta i(z, t) = \left[G u(z, t) + C \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \right] \Delta z \end{array} \right\} \quad (2.2-2)$$

将上式两端除以 Δz ，并令 Δz 趋近于零便得到

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = R i(z, t) + L \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = G u(z, t) + C \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (2.2-3)$$

式(2.2-3)即为均匀传输线方程，又称电报方程。

通常电压和电流随时间作简谐变化，此时电压和电流可表示成

$$\left. \begin{array}{l} u(z, t) = \operatorname{Re}[U(z)e^{j\omega t}] \\ i(z, t) = \operatorname{Re}[I(z)e^{j\omega t}] \end{array} \right\} \quad (2.2-4)$$

式中 $U(z)$ 和 $I(z)$ 分别为传输线上 z 处电压和电流的复有效值（又称为相量电压和相量电流），它们只是距离 z 的函数。

将式 (2.2-4) 代入式 (2.2-3)，得到如下均匀传输线方程：

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dU}{dz} &= (R + j\omega L) I = ZI \\ -\frac{dI}{dz} &= (G + j\omega C) U = YU \end{aligned} \right\} \quad (2.2-5)$$

为书写简单起见，电压 $U(z)$ 和电流 $I(z)$ 符号中的变量 z 省略了。上式中

$$\left. \begin{aligned} Z &= R + j\omega L \\ Y &= G + j\omega C \end{aligned} \right\} \quad (2.2-6)$$

分别是传输线单位长度的串联阻抗和并联导纳。

对于工作于微波频率的低耗传输线，总有 $R \ll \omega L$, $G \ll \omega C$ 。例如工作于2000MHz的铜制同轴线，设其内导体外半径和外导体内半径分别为0.8cm和2cm，内外导体之间所填充介质的 ϵ_r 为2.5， σ 为 10^8 S/m。由表2.1-1中的公式计算得到此同轴线的分布参数为

$$\begin{aligned} R &= 0.32 \times 10^{-2} \Omega/\text{m} \\ L &= 1.83 \times 10^{-7} \text{H}/\text{m} \\ C &= 0.15 \times 10^{-9} \text{F}/\text{m} \\ G &= 6.8 \times 10^{-8} \text{S}/\text{m} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \omega L &= 2.3 \times 10^3 \Omega/\text{m} \\ \omega C &= 1.89 \text{ S}/\text{m} \end{aligned}$$

显然 $R \ll \omega L$, $G \ll \omega C$ 。

为分析简单起见，我们先忽略 R 和 G 的影响[●]，到讨论有耗传输线的特性时再考虑 R 和 G 。于是式 (2.2-5) 变为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dU}{dz} &= j\omega LI \\ -\frac{dI}{dz} &= j\omega CU \end{aligned} \right\} \quad (2.2-7)$$

式 (2.2-7) 即为均匀无耗传输线方程。

2. 均匀无耗传输线方程的解

为了求解式 (2.2-7)，可由此方程组消去 I ，便得到 U 的方程

$$\frac{d^2U}{dz^2} = -\omega^2 LCU = -\beta^2 U \quad (2.2-8a)$$

同样，由方程组 (2.2-7) 消去 U ，便得到 I 的方程

● 一般，当 $\omega L/R \geq 10$ 和 $\omega C/G \geq 10$ 时可忽略 R 和 G 的影响，相应的最低工作频率，双导线约为几百千赫，同轴线约为几兆赫^[3]。

$$\frac{d^2I}{dz^2} = -\omega^2 L C I = -\beta^2 I \quad (2.2-8b)$$

式中

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (2.2-9)$$

称为相位因数（无耗情况下的传输因数）。

式 (2.2-8a) 的解为

$$U(z) = A_1 e^{-j\beta z} + A_2 e^{j\beta z} \quad (2.2-10)$$

将式 (2.2-10) 代入式 (2.2-7) 第一式，可得到电流解为

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-j\beta z} - A_2 e^{j\beta z}) \quad (2.2-11)$$

从物理学中波的定义可知，式 (2.2-10) 和 (2.2-11) 中的两项分别代表了沿传输线传播的两个波，前项沿 $+z$ 方向传播，称之为入射波，后项沿 $-z$ 方向传播，称之为反射波。式中

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.2-12)$$

具有阻抗量纲，称为无耗传输线的特性阻抗，为实数值（纯电阻）。

式 (2.2-10) 和 (2.2-11) 中的积分常数 A_1 和 A_2 须由传输线的边界条件来确定。通常给定的传输线边界条件有三种（见图 2.2-2）：(1) 已知终端的电压 U_l 和电流 I_l ；(2) 已知始端的电压 U_0 和电流 I_0 ；(3) 已知电源电动势 E_s 、电源阻抗 Z_s 与负载阻抗 Z_l 。下面分别加以讨论。

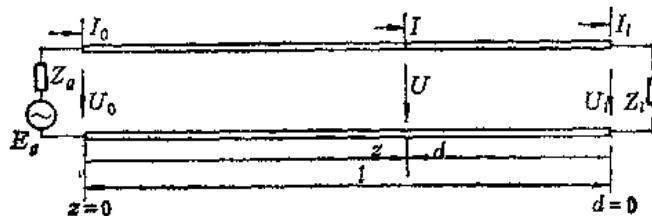


图 2.2-2 由边界条件确定积分常数

(1) 已知终端的电压 U_l 和电流 I_l 时的解

这是最常用的情况。将 $U(l) = U_l$, $I(l) = I_l$ 代入式 (2.2-10) 和 (2.2-11) 可求得

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{U_l + Z_0 I_l}{2} e^{j\beta l} \\ A_2 &= \frac{U_l - Z_0 I_l}{2} e^{-j\beta l} \end{aligned} \right\} \quad (2.2-13)$$

将式 (2.2-13) 代入式 (2.2-10) 和 (2.2-11)，得到

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= \frac{U_l + Z_0 I_l}{2} e^{j\beta(l-z)} + \frac{U_l - Z_0 I_l}{2} e^{-j\beta(l-z)} \\ I(z) &= \frac{U_l + Z_0 I_l}{2Z_0} e^{j\beta(l-z)} - \frac{U_l - Z_0 I_l}{2Z_0} e^{-j\beta(l-z)} \end{aligned} \right\} \quad (2.2-14)$$

令 $d = l - z$, 如图2.2-2所示, d 是由终端算起的坐标, 则得到

$$\left. \begin{aligned} U(d) &= \frac{U_t + Z_0 I_t}{2} e^{j\beta d} + \frac{U_t - Z_0 I_t}{2} e^{-j\beta d} \\ I(d) &= \frac{U_t + Z_0 I_t}{2Z_0} e^{j\beta d} - \frac{U_t - Z_0 I_t}{2Z_0} e^{-j\beta d} \end{aligned} \right\} \quad (2.2-15)$$

应用公式: $e^{j\beta d} = \cos \beta d + j \sin \beta d$ 和 $e^{-j\beta d} = \cos \beta d - j \sin \beta d$, 上式可用三角函数表示为

$$\left. \begin{aligned} U(d) &= U_t \cos \beta d + j Z_0 I_t \sin \beta d \\ I(d) &= I_t \cos \beta d + j \frac{U_t}{Z_0} \sin \beta d \end{aligned} \right\} \quad (2.2-16)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} U(d) \\ I(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta d & j Z_0 \sin \beta d \\ j \frac{\sin \beta d}{Z_0} & \cos \beta d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_t \\ I_t \end{bmatrix} \quad (2.2-17)$$

式(2.2-15)或(2.2-16)即为已知终端的电压和电流, 计算传输线上距终端 d 处复电压和复电流的一般公式。在实用中, 传输线的负载端接情况通常是给定的, 因此这种解形在分析和计算传输线的特性时应用最多。

(2) 已知始端的电压 U_0 和电流 I_0 时的解

将 $U(0) = U_0$, $I(0) = I_0$ 代入式(2.2-10)和(2.2-11), 可以得到

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{U_0 + Z_0 I_0}{2} \\ A_2 &= \frac{U_0 - Z_0 I_0}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2-18)$$

将式(2.2-18)代入式(2.2-10)和(2.2-11), 即得到

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= \frac{U_0 + Z_0 I_0}{2} e^{-j\beta z} + \frac{U_0 - Z_0 I_0}{2} e^{j\beta z} \\ I(z) &= \frac{U_0 + Z_0 I_0}{2Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{U_0 - Z_0 I_0}{2Z_0} e^{j\beta z} \end{aligned} \right\} \quad (2.2-19)$$

用三角函数表示, 则为

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= U_0 \cos \beta z - j Z_0 I_0 \sin \beta z \\ I(z) &= I_0 \cos \beta z - j \frac{U_0}{Z_0} \sin \beta z \end{aligned} \right\} \quad (2.2-20)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} U(z) \\ I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta z & -j Z_0 \sin \beta z \\ -j \frac{\sin \beta z}{Z_0} & \cos \beta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \quad (2.2-21)$$

式(2.2-19)或(2.2-20)便是已知始端的电压和电流, 求传输线上距始端 z 处的复电压和复电流的一般公式。实用中传输线始端的端接情况一般不知道, 所以这种解形应用不多。

(3) 已知电源电动势 E_s 、内阻抗 Z_s 与负载阻抗 Z_l 时的解

将 $I(0) = I_0$, $U(0) = E_s - I_0 Z_s$ 与 $I(l) = I_l$, $U(l) = I_l Z_l$ 代入式(2.2-10)和

(2.2-11), 可以求得

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{E_s Z_0}{(Z_s + Z_0)(1 - \Gamma_s \Gamma_t e^{-j2\beta t})} \\ A_2 &= \frac{E_s Z_0 \Gamma_t e^{-j2\beta t}}{(Z_s + Z_0)(1 - \Gamma_s \Gamma_t e^{-j2\beta t})} \end{aligned} \right\} \quad (2.2-22)$$

将式 (2.2-22) 代入式 (2.2-10) 和 (2.2-11) 即得到

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= \frac{E_s Z_0}{(Z_s + Z_0)} \cdot \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma_t e^{-j2\beta t} e^{j\beta z}}{(1 - \Gamma_s \Gamma_t e^{-j2\beta t})} \\ I(z) &= \frac{E_s}{(Z_s + Z_0)} \cdot \frac{e^{-j\beta z} - \Gamma_t e^{-j2\beta t} e^{j\beta z}}{(1 - \Gamma_s \Gamma_t e^{-j2\beta t})} \end{aligned} \right\} \quad (2.2-23)$$

令 $d = l - z$, 则上式变为

$$\left. \begin{aligned} U(d) &= \frac{E_s Z_0}{Z_s + Z_0} \cdot \frac{e^{-j\beta d}}{1 - \Gamma_s \Gamma_t e^{-j2\beta t}} (e^{j\beta d} + \Gamma_t e^{-j\beta d}) \\ I(d) &= \frac{E_s}{Z_s + Z_0} \cdot \frac{e^{-j\beta d}}{1 - \Gamma_s \Gamma_t e^{-j2\beta t}} (e^{j\beta d} - \Gamma_t e^{-j\beta d}) \end{aligned} \right\} \quad (2.2-24)$$

定义上式中的

$$\Gamma_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}, \text{ 为始端的电压反射系数}$$

$$\Gamma_t = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}, \text{ 为负载端的电压反射系数}$$

式 (2.2-23) 和 (2.2-24) 是已知始端 (电源端) 和负载端的端接情况下, 求传输线上任一点的复电压和复电流的公式。以后我们将看到, 这种解形正是在不考虑传输线的损耗情况下, 由于传输线始端和负载端阻抗不匹配引起的多次反射的结果。

3. 无耗传输线的基本特性

根据式 (2.2-10) 和 (2.2-11), 令 $A_1 = |A_1| e^{j\psi_1}$, $A_2 = |A_2| e^{j\psi_2}$, 则得到传输线上任一点的瞬时电压和瞬时电流为

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= |A_1| \cos(\omega t + \psi_1 - \beta z) + |A_2| \cos(\omega t + \psi_2 + \beta z) \\ i(z, t) &= \frac{|A_1|}{Z_0} \cos(\omega t + \psi_1 - \beta z) - \frac{|A_2|}{Z_0} \cos(\omega t + \psi_2 + \beta z) \end{aligned} \right\} \quad (2.2-25)$$

式中 Z_0 为无耗传输线的特性阻抗, 为纯电阻。此结果表明, 传输线上任一点的电压和电流为入射波和反射波的叠加。上式可表示成

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= u^+(z, t) + u^-(z, t) \\ i(z, t) &= i^+(z, t) + i^-(z, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.2-26)$$

对应的式 (2.2-10) 和 (2.2-11) 可表示成

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= U^+(z) + U^-(z) \\ I(z) &= I^+(z) + I^-(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.2-27)$$

上标 “+” 和 “-” 分别代表入射波和反射波。

无耗传输线的工作特性可用参数 Z_0 、 β 、 v_p 和 λ 来描述。

由前面的推导可知，特性阻抗 Z_0 是行波电压与行波电流之比，具体说就是入射波电压与入射波电流之比，或反射波电压与反射波电流之比的负值。对于无耗传输线， Z_0 为纯电阻，如式(2.2-12)所示，即

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.2-12)$$

有时需要应用其倒数量特性导纳，定义为

$$Y_0 = \sqrt{\frac{1}{Z_0}} \quad (2.2-28)$$

对于无耗线，

$$Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (2.2-29)$$

由表2.2-1，可求得双导线的特性阻抗公式为

$$Z_0 = 120 \ln \left[\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d} \right)^2 - 1} \right] \approx 120 \ln \frac{2D}{d} = 276 \lg \frac{2D}{d} \quad (\Omega) \quad (2.2-30)$$

式中， d 为导线的直径， D 为两导体之间的距离。双导线的特性阻抗值一般是250~700Ω，常用的是600Ω、400Ω和250Ω。

同轴线的特性阻抗公式为

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} = \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \lg \frac{b}{a} \quad (\Omega) \quad (2.2-31)$$

式中， a 和 b 分别为同轴线内导体的外半径和外导体的内半径， ϵ_r 为所填充介质的相对介电常数。常用的同轴线特性阻抗值是50Ω和75Ω两种。

传输线上的入射波和反射波要以相同的相速度沿 z 轴传播。相速度是指波的等相位点移动的速度。对于入射波，等相位点为

$$\omega t + \psi_i - \beta z = \text{常数}$$

对 t 求导可得到相速度

$$v_p^+ = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.2-32a)$$

反射波的等相位点为

$$\omega t + \psi_r + \beta z = \text{常数}$$

对 t 求导得到反射波的相速度

$$v_p^- = -\frac{\omega}{\beta} \quad (2.2-32b)$$

式中负号表示反射波传播方向与入射波相反，即沿 $-z$ 方向传播。

将式(2.2-9)代入式(2.2-32)，得到无耗线上波的传播速度

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.2-33)$$

传输线上波的振荡相位相差 2π 的两点之间的距离为波长 λ ，即有

$$\beta\lambda = 2\pi$$

因此

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.2-34)$$

以式 (2.2-32) 代入, 则得

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = v_p T \quad (2.2-35)$$

式中, f 为振荡频率, T 为振荡周期。

综上分析我们可以得到结论: 均匀无耗线上的电压和电流, 一般情况下是两个以相同速度向相反方向传播的正弦波的叠加; 由电源向负载方向传播的波称为入射波, 由负载向电源方向传播的波称为反射波; 这两个波的电压与电流之比为一恒定值, 此值即传输线的特性阻抗 Z_0 ; 在无耗情况下, Z_0 为纯电阻。

2.3 用场的概念分析传输线

习惯上, 传输线是指由两个或两个以上平行导体组成的传输能量的装置, 如双导线、同轴线、带状线、微带等。其上导行电磁波的主模为 TEM 模。因此, 对传输线特性的分析可以说是在一定边界条件下的 TEM 模传播特性的分析, 而且, 这种用场的方法对 TEM 模沿线传播特性的分析, 必然可以导致上节用路的方法得到的基本结论。在这一节中我们将阐明这些理论。

我们从麦克斯韦方程组出发进行分析。为简单起见, 假定传输线周围的媒质为无耗、均匀、各向同性, 其介质常数为 ϵ 、 μ_0 。采用直角坐标系, 令波沿 z 向 (轴向) 传播, 其场随时间作简谐变化, 且应满足麦克斯韦方程, 即有

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon \mathbf{E} \quad (2.3-1)$$

$$\Delta \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad (2.3-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.3-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.3-4)$$

对于 TEM 模, $E_z = 0$, $H_z = 0$, 电场和磁场只有横向分量, 用 \mathbf{E}_t 和 \mathbf{H}_t 表示之, 则上列各式变成

$$\nabla \times \mathbf{H}_t = j\omega\epsilon \mathbf{E}_t \quad (2.3-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_t = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_t \quad (2.3-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_t = 0 \quad (2.3-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_t = 0 \quad (2.3-8)$$

矢量算子 ∇ 可分为横向部分和纵向部分, 即

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_t + \nabla_z \quad (2.3-9)$$

式中 \hat{x} 、 \hat{y} 和 \hat{z} 分别为 x 、 y 和 z 轴方向的单位矢量。

由矢量分析知道, $\nabla_t \times \mathbf{E}_t$ 和 $\nabla_t \times \mathbf{H}_t$ 为纵向分量。由于传输线上传输的是 TEM 模, 这两个纵向分量不存在。于是由式 (2.3-5) 和 (2.3-6) 可以得到

$$\hat{z} \times \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon \mathbf{E}_t \quad (2.3-10)$$

$$\hat{z} \times \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_t \quad (2.3-11)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t = 0 \quad (2.3-12)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0 \quad (2.3-13)$$

式 (2.3-12) 和 (2.3-13) 表明, 传输线上传播的 TEM 模的电场和磁场与二维静电场和静磁场所满足的条件相同。由场论知识知道, 标量函数梯度的旋度等于零。因此, 我们可以用适当的标量位函数的梯度来表示 \mathbf{E}_t 和 \mathbf{H}_t , 即

$$\mathbf{E}_t = g_1(z) \nabla_t \Phi(x, y) \quad (2.3-14)$$

$$\mathbf{H}_t = g_2(z) \nabla_t \Psi(x, y) \quad (2.3-15)$$

式中 $g_1(z)$ 、 $g_2(z)$ 、 $\Phi(x, y)$ 和 $\Psi(x, y)$ 都是待求的标量函数, 而 Φ 和 Ψ 只是 x 、 y 的函数, 因为仅在二维空间 \mathbf{E}_t 和 \mathbf{H}_t 才满足旋度为零的条件。

将式 (2.3-14) 和 (2.3-15) 代入式 (2.3-7) 和 (2.3-8), 得到

$$\nabla_t^2 \Phi = 0 \quad (2.3-16)$$

$$\nabla_t^2 \Psi = 0 \quad (2.3-17)$$

可见 Φ 和 Ψ 都满足二维拉普拉斯方程, 与静态场的位函数所满足的方程相同。但 Φ 和 Ψ 之间并不是独立的, 因为 \mathbf{E}_t 和 \mathbf{H}_t 由式 (2.3-10) 和 (2.3-11) 相联系着。由上面的分析可以看出, 传输 TEM 模的传输线上的瞬时电场结构与静电场二维空间的结构是一样的。磁场结构则可由电场结构求得。因此可以说, 不管传输线的结构多么复杂, 解决传输线上 TEM 模的传播问题所涉及的基本问题是解二维的静电场问题。

上面分析了传输 TEM 模的传输线横截面内的场结构情况。它与静态场相同。但这两种场沿 z 向的变化规律却是不同的: 静态场沿 z 向分布是均匀的, 而 TEM 模的场沿 z 向具有波的性质, 即沿 z 向传播。下面我们来分析波沿 z 向的变化规律。

由式 (2.3-11) 取旋度并以式 (2.3-10) 代入, 得到

$$\hat{z} \times \left(\hat{z} \times \frac{\partial^2 \mathbf{E}_t}{\partial z^2} \right) = -j\omega\mu_0(j\omega\epsilon\mathbf{E}_t)$$

即得到

$$\hat{z} \times \left(\hat{z} \times \frac{\partial^2 \mathbf{E}_t}{\partial z^2} \right) - \omega^2\mu_0\epsilon\mathbf{E}_t = 0$$

利用矢量公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, 由于 $\hat{z}(\hat{z} \cdot \partial^2 \mathbf{E}_t / \partial z^2) = 0$, $\hat{z} \cdot \hat{z} = 1$, 于是得到

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_t}{\partial z^2} + K^2 \mathbf{E}_t = 0 \quad (2.3-18)$$

式中

$$K = \omega \sqrt{\mu_0\epsilon} = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.3-19)$$

其中, v_p 为电磁波在介质中的传播速度, λ 为该介质中电磁波的波长。

同理可以得到

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_t}{\partial z^2} + K^2 \mathbf{H}_t = 0 \quad (2.3-20)$$

将式 (2.3-14) 和 (2.3-15) 分别代入式 (2.3-18) 和 (2.3-20), 则得到

$$\frac{\partial^2 g_1(z)}{\partial z^2} + K^2 g_1(z) = 0 \quad (2.3-21)$$

$$\frac{\partial^2 g_2(z)}{\partial z^2} + K^2 g_2(z) = 0 \quad (2.3-22)$$

式 (2.3-21) 和 (2.3-22) 的解分别为

$$g_1(z) = A^+ e^{-jkz} + A^- e^{jkz} \quad (2.3-23)$$

$$g_2(z) = B^+ e^{-jkz} + B^- e^{jkz} \quad (2.3-24)$$

此结果表明，不管传输线的结构多么复杂，在传输线上传输的 TEM 模的场都是以介质常数决定的传播因数和速度沿 z 向传输，其变化规律如式 (2.3-23) 和 (2.3-24) 所示。

根据上面的分析，我们可将传输线上 TEM 模的电场解写成

$$E = E_r = A^\pm \nabla_r \phi(x, y) e^{\mp jkz} \quad (2.3-25)$$

磁场解则可由 (2.3-11) 求得为

$$H = H_r = \pm \left(\frac{\epsilon}{\mu_0} \right)^{1/2} \hat{z} \times \nabla_r \phi(x, y) A^\pm e^{\mp jkz} = \pm \frac{\hat{z} \times E_r}{\eta} \quad (2.3-26)$$

式中

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \quad (2.3-27)$$

为介质的波阻抗。由此可见，传输线上 TEM 模的波阻抗与同一介质中均匀平面波的波阻抗相同。式 (2.3-26) 表明，传输线上 TEM 模的电场和磁场处处正交。

下面我们来建立传输线上的电压、电流与电场、磁场之间的关系。为了与静电场一致，将常数 A 包括到函数 $\Phi(x, y)$ 中去，将式 (2.3-25) 和 (2.3-26) 改写为

$$E_r = e e^{-jkz} = -\nabla_r \Phi(x, y) e^{-jkz} \quad (2.3-28)$$

$$H_r = h e^{-jkz} = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \nabla_r \Phi(x, y) e^{-jkz} \quad (2.3-29)$$

式中 e 和 h 分别是 E_r 和 H_r 的横向坐标函数。式 (2.3-28) 和 (2.3-29) 有非零解的条件是传输线系统中一个导体的电位不同于另一个导体的电位，即导体之间应有电位差。以图 2.3-1 所示双导线为例，由于电位差是相对的，我们取 S_2 上的电位为 U_0 ， S_1 上的电位为零，则

$$U_0 = - \int_{S_1}^{S_2} e \cdot dl = \int_{S_1}^{S_2} \nabla_r \Phi dl = \int_{S_1}^{S_2} d\Phi \quad (2.3-30)$$

因此，相应于在传输线周围空间传播的 TEM 模的电场 $E_r = -\nabla_r \Phi e^{-jkz}$ ，在传输线上有一确定的电压波 $U(z) = U_0 e^{-jkz}$ 。可见对传输线上 TEM 模电场的分析可用对电压波传播的分析来代替。

同时，由于 H_r 的作用在导体表面上将引起一表面电流 $J_s = \hat{n} \times H_r$ ， \hat{n} 为导体表面的单位外法线矢量。此电流沿 z 向流动。由安培定律 $\nabla \times H = j\omega \epsilon E + J$ ，并注意到 TEM 模无纵向电场，则可得到 h 环绕一个导体（比如说 S_2 ）的线积分为

$$\oint_{S_2} h \cdot dl = \oint_{S_2} J_s dl = I_0 \quad (2.3-31)$$

因此，与传输线周围空间传播的磁场相联系的，在传输线上有一个电流波 $I(z) = I_0 e^{-jkz}$ 。

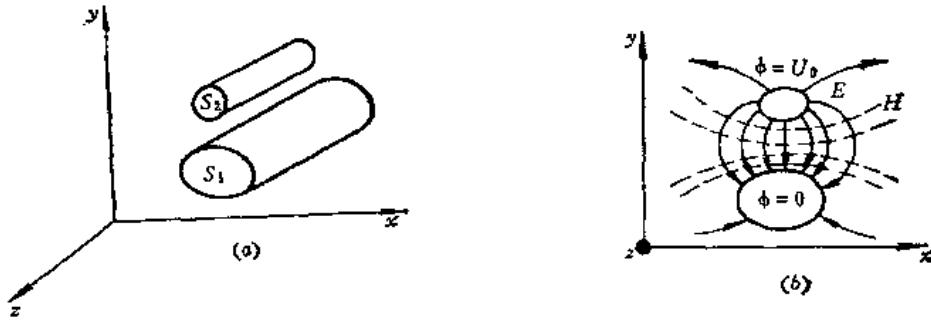


图2.3-1 双导线及其截面内场结构

假定导体 S_1 和 S_2 为理想导体，因而电场 E 的法向分量在导体表面上是不连续的，在导体表面有表面电荷密度 $\rho_s = \epsilon \hat{n} \cdot e_0$ 。同理，由于导体表面上磁场的切向分量不连续，在导体表面有一表面电流密度 J_s ，其大小为

$$|J_s| = |H_s| = \frac{1}{\eta} |\hat{n} \cdot E_s| = \frac{\rho_s}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}}$$

于是

$$I_0 = \oint_{S_2} |J_s| dl = \oint_{S_2} \frac{\rho_s dl}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = Q v_p \quad (2.3-32)$$

式中， Q 是导体 S_2 上单位长度的电荷， v_p 为介质中波的传播速度。

传输线的特性阻抗按定义可得到为

$$Z_0 = \frac{U(z)}{I(z)} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0}{Q} \sqrt{\mu_0 \epsilon} = \frac{\epsilon}{C} \eta = \frac{1}{v_p C} \quad (2.3-33)$$

式中 C 为传输线单位长度的电容，即分布电容。由此可见，传输线的特性阻抗与介质波阻抗仅差一个因子，这个因子与传输线的分布电容有关。因此，传输线的特性阻抗取决于传输线的分布电容。

最后，我们用场的方法来导出传输线方程。

由法拉第定律知

$$\oint_L E \cdot dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S B \cdot ds = - \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \quad (2.3-34)$$

式中 ψ_m 为穿过由 L 所包围的面积 S 的磁通量。如图 2.3-2(a) 所示，则有

$$\oint_L E \cdot dl = -U + \left(U + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \Delta z \right) = \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z$$

而

$$\Delta \psi_m = L \Delta z I$$

式中 L 为传输线单位长度电感，即分布电感。代入式 (2.3-34)，得到

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (2.3-35)$$

对于简谐变化情况，式 (2.3-35) 变成

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -j\omega L I \quad (2.3-36)$$

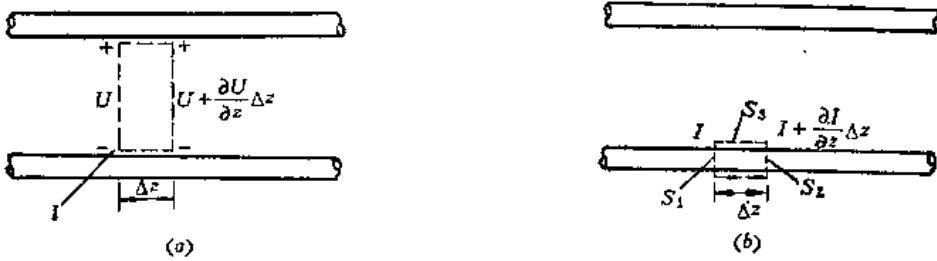


图2.3-2 传输线上的电压、电流关系

同样，由电流连续性定理 $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\partial Q / \partial t$ ，结合图 2.3-2(b) 可得到

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -j\omega C U \quad (2.3-37)$$

式 (2.3-36) 和 (2.3-37) 即为无耗传输线方程。

由上面分析可知，用场的方法可以得到传输线的各种特性，传输线上的电路效应则是 TEM 模传播的必然结果。以上结果说明，由电路理论和由电磁场理论出发分析所得到的结论是统一的。但是，电路理论的分析计算方法比场的方法要简便得多，因此，在许多实际问题中，总是尽可能把场的问题转化为一定前提条件下路的问题来处理。

2.4 传输线的阻抗与反射

在 2.2 节中，我们得到了传输线上任一点的电压和电流解，由上节分析可知，传输线上的电压波和电流波是伴随产生的，而线上任一点的电压和电流之比值等于该点的阻抗。阻抗是传输线理论中一个很重要的物理量，根据传输线上的阻抗特性可以分析传输线的工作状态。本节将讨论传输线阻抗的计算及其与传输线上波反射的关系。

1. 传输线的输入阻抗

传输线上任一点的输入电压与电流之比称为该点的输入阻抗，即

$$Z(d) = \frac{U(d)}{I(d)} \quad (2.4-1)$$

以式 (2.2-16) 代入，得到无耗线上任一点的输入阻抗为

$$Z(d) = Z_0 \frac{Z_t \cos \beta d + j Z_0 \sin \beta d}{Z_0 \cos \beta d + j Z_t \sin \beta d} = Z_0 \frac{Z_t + j Z_0 \operatorname{tg} \beta d}{Z_0 + j Z_t \operatorname{tg} \beta d} \quad (2.4-2)$$

式中， Z_0 为传输线的特性阻抗， Z_t 为负载阻抗。由此可见，传输线上任一点的输入阻抗与负载阻抗和位置有关，一般为复数。此式表明，传输线段具有阻抗变换作用。例如 $d = \lambda/8$ ，即 $\beta d = \pi/4$ ，则（设 $Z_t = R_t + jX_t$ ）

$$Z(d) = Z_0 \frac{Z_t + j Z_0}{Z_0 + j Z_t} = Z_0 \frac{2R_t Z_0 + j(Z_0^2 - |Z_t|^2)}{Z_0^2 + |Z_t|^2 - 2Z_0 X_t} \quad (2.4-3)$$

这表明，如 Z_t 为纯电阻性的，即 $X_t = 0$ ，则输入阻抗的绝对值等于特性阻抗 Z_0 ，因为

$$|Z(d)| = Z_0 \left\{ \frac{4R_t^2 Z_0^2 + (Z_0^2 - R_t^2)^2}{(Z_0^2 + R_t^2)^2} \right\}^{1/2} = Z_0$$

这就说明, $\lambda/8$ 线对任意负载电阻都起着限阻的作用, 即将任意的负载电阻 $Z_t=R_t$ 变换为 $Z(d)=Z_0 e^{j\psi_t}$, 其中

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{Z_0}{R_t} - \operatorname{arctg} \frac{R_t}{Z_0} = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{Z_0}{R_t} - \frac{R_t}{Z_0} \right) \right\}$$

假如 $|Z_t|=Z_0$, 则由式 (2.4-3) 可知, 输入阻抗总是纯电阻性的, 即

$$Z(d) = Z_0 \frac{R_t}{|Z_t| + X_t} = Z_0 \frac{\cos \psi_t}{1 - \sin \psi_t}$$

这里我们取 $Z_t=Z_0 e^{j\psi_t}$, 即 $R_t=|Z_t|\cos \psi_t$, $X_t=|Z_t|\sin \psi_t$ 。因此, 对于任意负载阻抗 Z_t , 均可用 $Z_0=|Z_t|$ 的 $\lambda/8$ 线变换成一纯电阻性阻抗。 $\lambda/8$ 线的这种特性可用来进行阻抗匹配 (关于阻抗匹配的问题, 以后要专门讨论)。

2. 反射系数 Γ 和传输系数 T

由 2.2 节的结果知道, 传输线上任一点的电压和电流为入射波和反射波的叠加。波的反射现象是传输线上最基本的物理现象。为了描述波的反射特性, 引入反射系数 Γ , 其定义式为

$$\text{反射系数 } \Gamma = \frac{\text{反射点的反射电压或反射电流}}{\text{反射点的入射电压或入射电流}}$$

电压反射系数为

$$\Gamma_v(d) = \frac{U^-(d)}{U^+(d)} \quad (2.4-4)$$

电流反射系数为

$$\Gamma_i(d) = \frac{I^-(d)}{I^+(d)} \quad (2.4-5)$$

将式 (2.2-15) 代入可知, $\Gamma_i(d)=-\Gamma_v(d)$ 。通常采用电压反射系数, 因为电压便于测量。以后如未特别说明, 反射系数 $\Gamma(d)$ 即指电压反射系数。

式 (2.2-15) 可以写成

$$\left. \begin{aligned} U(d) &= \frac{U_+ + Z_0 I_+}{2} e^{j\beta d} + \frac{U_- - Z_0 I_-}{2} e^{-j\beta d} = U_+ e^{j\beta d} + U_- e^{-j\beta d} = U^+(d) + U^-(d) \\ I(d) &= \frac{U_+ + Z_0 I_+}{2Z_0} e^{j\beta d} - \frac{U_- - Z_0 I_-}{2Z_0} e^{-j\beta d} = I_+ e^{j\beta d} + I_- e^{-j\beta d} = I^+(d) + I^-(d) \end{aligned} \right\} \quad (2.4-6)$$

于是可得无耗线上任一点的反射系数为

$$\Gamma(d) = \frac{U^- e^{-j\beta d}}{U^+ e^{j\beta d}} = \Gamma_i e^{-j2\beta d} = |\Gamma_i| e^{j(\psi_i - 2\beta d)} \quad (2.4-7)$$

式中 Γ_i 为负载反射系数, 由式 (2.4-6) 可得

$$\Gamma_i = \frac{U_i^-}{U^+} = \frac{U_i - Z_0 I_i}{2} / \frac{U_i + Z_0 I_i}{2} = \frac{U_i - Z_0 I_i}{U_i + Z_0 I_i} = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0} = \left| \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0} \right| e^{j\psi_i} = |\Gamma_i| e^{j\psi_i} \quad (2.4-8)$$

其中 ϕ 表示反射系数的幅角，即负载处反射波电压与入射波电压之间的相位差。由此可见，反射系数 $\Gamma(d)$ 是个复数量，且随位置变化。反射系数不仅反映反射波与入射波之间有大小差异，而且反映它们之间有相位差。

由式(2.4-7)和(2.4-8)可以看出，反射系数的幅值 $|\Gamma(d)| \leq 1$ ，在单位圆内变化；对于无耗线，其幅角按因子 $e^{-j2\beta d}$ 周期变化，周期为 $\lambda/2$ ，如图 2.4-1 所示。

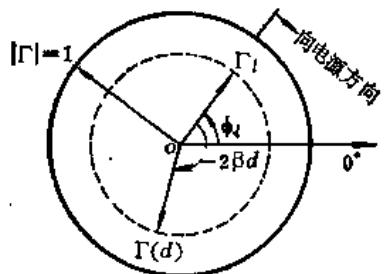


图 2.4-1 反射系数在单位圆内的变化情况

为了用入射波电压来表示负载电压，引入传输系数 T 。其定义为负载电压(或电流)与入射电压(或电流)之比，即

$$T_v = \frac{U'}{U^+} \quad (2.4-9)$$

$$T_i = \frac{I'}{I^+} \quad (2.4-10)$$

和反射系数一样，以后如未加特别说明，传输系数 T 指电压传输系数。

在负载处，有

$$U'_t + U'_i = U^t \quad (2.4-11)$$

$$\frac{U^+}{Z_0} + \frac{U^-}{Z_0} = \frac{U^t}{Z_t} \quad (2.4-12)$$

由此两式联立可求得

$$T_t = \frac{U^t}{U^+_t} = \frac{2Z_t}{Z_t + Z_0} = 1 + \Gamma_t \quad (2.4-13)$$

3. 输入阻抗与反射系数的关系

式(2.4-6)可改写成

$$U(d) = U^+(d) + U^-(d) = U^+(d)(1 + \Gamma(d)) \quad (2.4-14)$$

$$I(d) = I^+(d) + I^-(d) = I^+(d)(1 - \Gamma(d)) \quad (2.4-15)$$

由此可得

$$Z(d) = Z_0 \frac{1 + \Gamma(d)}{1 - \Gamma(d)} \quad (2.4-16)$$

式(2.4-16)表示传输线上任一点的输入阻抗与该点的反射系数之间的关系。在终端，则有

$$Z_t = Z_0 \frac{1 + \Gamma_t}{1 - \Gamma_t} \quad (2.4-17)$$

式(2.4-16)和(2.4-17)表明,传输线上任一点的输入阻抗与该点的反射系数之间有一一对应的关系,如测得传输线上某处的反射系数 $\Gamma(d)$,则可由上式求得该处的输入阻抗,反之亦然。

根据式(2.4-17)可以看出,按照负载阻抗 Z_L 的性质,传输线上将有如下三种不同的工作状态:

- (1) 当 $Z_L = Z_0$ 时, $\Gamma_L = 0$,称为无反射工作状态,即行波状态;
- (2) 当 $Z_L = 0$ (终端短路)时, $\Gamma_L = -1$,
- 当 $Z_L = \infty$ (终端开路)时, $\Gamma_L = +1$,
- 当 $Z_L = \pm jX_L$ (终端接纯电抗负载)时, $|\Gamma_L| = 1$ 。这三种情况称为全反射工作状态,即驻波状态;
- (3) 当 $Z_L = R_L \pm jX_L$ 时, $|\Gamma_L| < 1$,称为部分反射工作状态,即行驻波状态。

在下节中,我们将详细分析这三种工作状态的传输特性。

2.5 无耗传输线工作状态分析

由上节分析知道,传输线有三种工作状态,即行波状态、驻波状态和行驻波状态。本节将分析这三种工作状态下的电压、电流分布情况与阻抗特性。

1. 行波状态(无反射情况)

由式(2.2-15)可知,传输线无反射波的条件是 $Z_L = Z_0$,即负载匹配。此时,由式(2.2-19)得到

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= \frac{U_0 + Z_0 I_0}{2} e^{-j\beta z} = U_0^+ e^{-j\beta z} \\ I(z) &= \frac{U_0 + Z_0 I_0}{2Z_0} e^{-j\beta z} = I_0^+ e^{-j\beta z} \end{aligned} \right\} \quad (2.5-1)$$

式中 U_0^+ 和 I_0^+ 分别表示始端的入射波电压和入射波电流。线上的瞬时电压和电流为

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= |U_0^+| \cos(\omega t + \varphi_0 - \beta z) \\ i(z, t) &= |I_0^+| \cos(\omega t + \varphi_0 - \beta z) \end{aligned} \right\}, \quad (2.5-2)$$

式中 φ_0 表示始端入射波电压的初相角。由此可见,行波状态下无耗线上各点的电压、电流有效值的幅值不变,如图2.5-1;其相位随 z 的增大连续滞后,如图2.5-2所示。

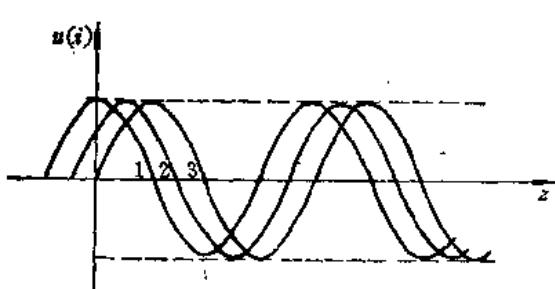


图2.5-1 行波电压(或电流)瞬时分布

$1-\omega t = 0$; $2-\omega t = \pi/4$; $3-\omega t = \pi/2$ 。

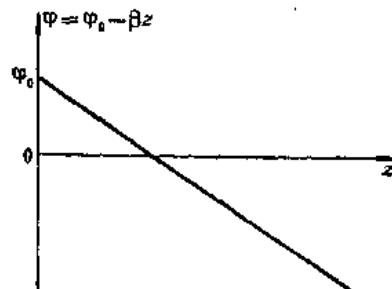


图2.5-2 行波电压(或电流)的相位变化

由式 (2.5-1) 得到阻抗为

$$Z(z) = Z_0 \quad (2.5-3)$$

由上面的分析可知：当负载阻抗等于特性阻抗 ($Z_L = Z_0$) 时，传输线上载行波。行波状态的特点是：(1) 沿线电压和电流的幅值不变（就无耗线而言）；(2) 沿线电压和电流的相位随 z 增加连续滞后，电压和电流的相位相同；(3) 沿线各点的输入阻抗均等于传输线的特性阻抗。

2. 驻波状态（全反射情况）

前面指出过，当终端短路、开路和接纯电抗负载时，要产生全反射，传输线工作于驻波状态。下面我们分别分析这三种情况下的驻波特性。分析结果表明，驻波的特性是一样的，只是驻波在线上分布的位置不同。因此我们着重分析终端短路情况。

(1) 终端短路线

此时 $Z_L = 0$ ，由式 (2.4-17) 得 $\Gamma_L = -1$ ，沿线的电压和电流可求得为

$$\left. \begin{array}{l} U(d) = j2U_i^* \sin \beta d \\ I(d) = \frac{2U_i^*}{Z_0} \cos \beta d \end{array} \right\} \quad (2.5-4)$$

可见沿线电压和电流的幅值随位置而不同，如图 2.5-3(a) 所示。当 $\beta d = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)，即 $d = n\lambda/2$ 处，电压为零，电流幅值最大。这些位置称为电压波节点，电流波腹点，且

$$\left. \begin{array}{l} |U(d)|_{\min} = 0 \\ |I(d)|_{\max} = 2|I_i^*| \end{array} \right\}$$

而当 $\beta d = (2n+1)\pi/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)，即 $d = (2n+1)\lambda/4$ 处，电压幅值最大，电流为零。这些位置称为电压波腹点，电流波节点，且

$$\left. \begin{array}{l} |U(d)|_{\max} = 2|U_i^*| \\ |I(d)|_{\min} = 0 \end{array} \right\}$$

由式 (2.5-4) 可以得到线上电流与电压之间的关系为

$$I(d) = -j \frac{U(d)}{Z_0} \operatorname{ctg} \beta d \quad (2.5-5)$$

可见当 $\operatorname{ctg} \beta d > 0$ ，即当 $0 < d < \lambda/4, \lambda/2 < d < 3\lambda/4, \dots$ 等时，电流的相位滞后电压 $\pi/2$ ；当 $\operatorname{ctg} \beta d < 0$ ，即当 $\lambda/4 < d < \lambda/2, 3\lambda/4 < d < \lambda, \dots$ 等时，电流的相位超前电压 $\pi/2$ 。沿线电压和电流的相位关系如图 2.5-3(b) 所示。

由式 (2.5-4) 可以得到短路线的阻抗为

$$Z_{in}(d) = jZ_0 \operatorname{tg} \beta d \quad (2.5-6)$$

可见短路线上各点的输入阻抗均为纯电抗，且随频率和距离变化。当频率一定时，阻抗随距离周期变化，其周期为 $\lambda/2$ ，如图 2.5-3(c) 所示。由图可见，短路线终端的阻抗为零，相当于串联谐振；当 $0 < d < \lambda/4$ 时为感抗，可等效一个电感；在 $d = \lambda/4$ 处的

输入阻抗为无限大，相当于并联谐振；当 $\lambda/4 < d < \lambda/2$ 时为容抗，可等效一个电容；在 $d = \lambda/2$ 处的输入阻抗为零，相当于串联谐振。如 d 继续增大，将重复上述阻抗特性。短路线的这些阻抗特性在微波技术中有着广泛应用。

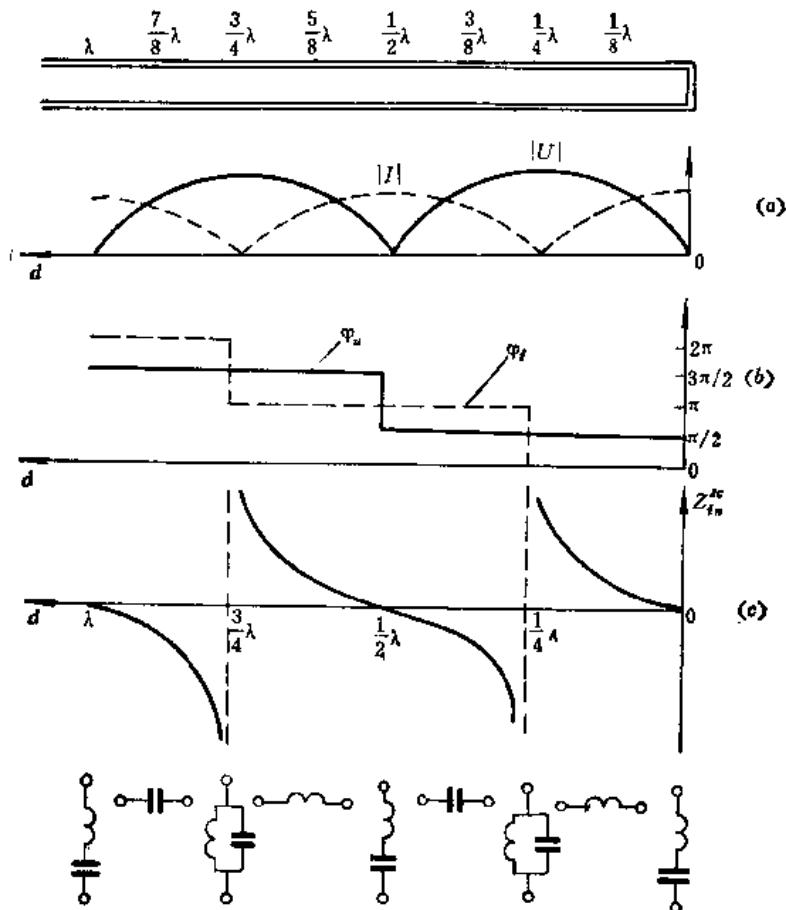


图 2.5-3 无耗短路线的驻波特性
(a) 电压、电流振幅分布；(b) 电压和电流的相位曲线；(c) 阻抗特性曲线。

(2) 终端开路线

此时 $Z_i = \infty$, $\Gamma_i = 1$, 沿线电压、电流与输入阻抗可求得为

$$\left. \begin{aligned} U(d) &= 2U_i^+ \cos \beta d \\ I(d) &= j \frac{2U_i^+}{Z_0} \sin \beta d \end{aligned} \right\} \quad (2.5-7)$$

$$Z_{\Gamma n}^R(d) = -jZ_0 \operatorname{ctg} \beta d \quad (2.5-8)$$

图 2.5-4 表示开路线上的电压、电流的振幅分布和阻抗分布曲线。由图可见，开路线的终端阻抗为无限大； $\lambda/4$ 处输入阻抗为零，相当于短路；长度小于 $\lambda/4$ 的开路线的输入阻抗为容抗，可等效一个电容； $\lambda/2$ 处的输入阻抗为无限大，相当于并联谐振。开路线的这些阻抗特性在微波技术中也有广泛应用。比较图 2.5-4 和图 2.5-3 容易看出，开路线上的电压、电流与阻抗分布曲线与短路线从终端起截去 $\lambda/4$ 后的分布情况完全一样。

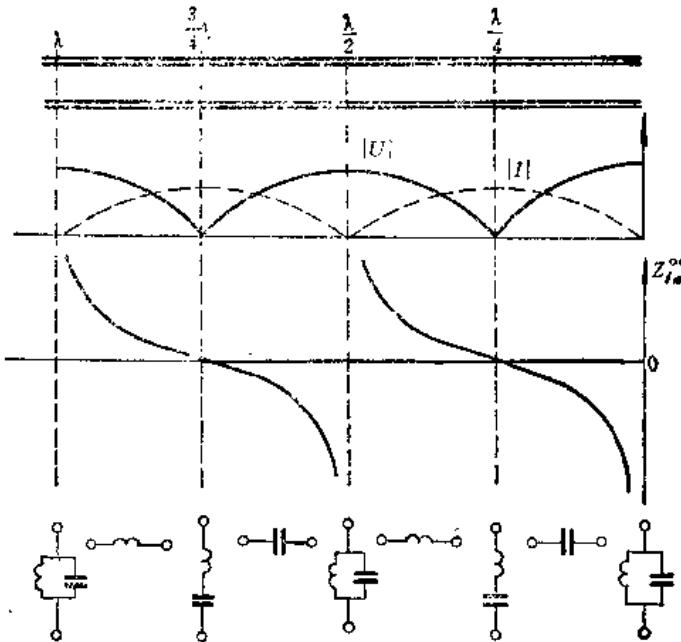


图2.5-4 开路线的特性

由式(2.5-6)和(2.5-7)可得

$$Z_{in}^{\infty}(d) \cdot Z_{in}^{\infty}(d) = Z_0^2 \quad (2.5-9)$$

(3) 终端接纯电抗负载的无耗线

此时 $Z_l = \pm jX_l$, $|\Gamma_l| = 1$, 传输线工作于驻波状态。与短路线和开路线不同的是, 此时的 Γ_l 为一复数, 终端不再是电压(或电流)的波节或波腹, 而有一定的位移。

终端接纯电抗负载情况下沿线电压、电流与阻抗分布情况可以用延长一段小于 $\lambda/4$ 的短路线或开路线来分析。这种方法叫做延长线段法。

如果负载为纯感抗, 即 $Z_l = jX_l$, 则可用一段小于 $\lambda/4$ 的短路线来等效此感抗, 其长度为

$$l_{eq} = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{X_l}{Z_0} \right) \quad (2.5-10a)$$

如果负载为纯容抗, 即 $Z_l = -jX_l$, 则可用一段小于 $\lambda/4$ 的开路线来等效此容抗, 其长度为

$$l_{eq} = -\frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arcctg} \left(\frac{X_l}{Z_0} \right) \quad (2.5-10b)$$

容易画出长度为 $(1 + l_{eq})$ 和 $(1 - l_{eq})$ 的短路线和开路线上沿线电压、电流与阻抗分布曲线, 然后自终端截去 l_{eq} 或 l_{eq} 后的分布即是终端接纯感抗或纯容抗负载时沿线的电压、电流与阻抗分布情况, 如图2.5-5和图2.5-6所示。

由图2.5-5和图2.5-6可以看出, 接纯电抗负载的无耗线终端, 既非电压波腹点也非电压波节点, 电压波腹点或电压波节点偏离终端一小段(小于 $\lambda/4$)距离。当负载为纯感抗时, 离开终端向电源方向第一个出现的是电压波腹点; 当负载为纯容抗时, 第一个出现的则是电压波节点。

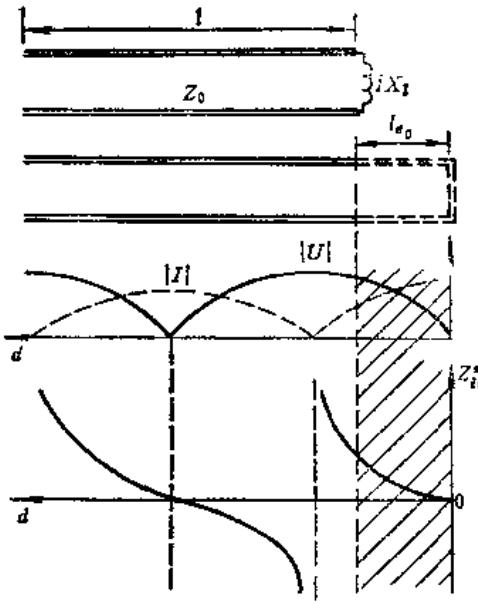


图2.5-5 端接纯感抗的电压、电流与阻抗分布

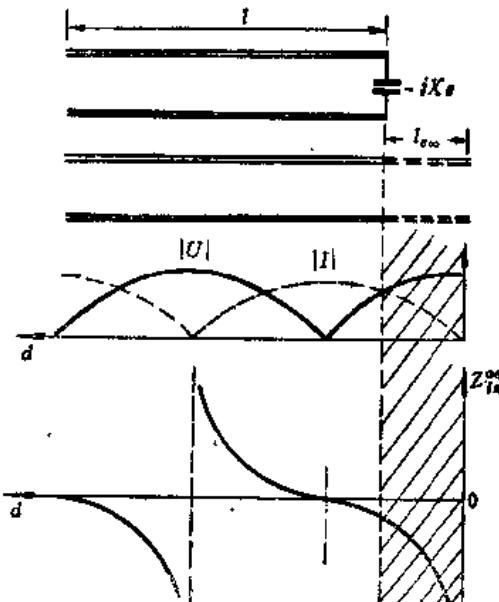


图2.5-6 端接纯容抗的电压、电流与阻抗分布

由上面的分析可知，当无耗线终端短路、开路或接纯电抗负载时，将产生全反射形成驻波。驻波的特点是：（1）沿线电压、电流的振幅随位置而不同，具有波节点（零值点）和波腹点（入射波的两倍）：短路线的终端为电压波节点、电流波腹点；开路线的终端为电压波腹点、电流波节点；端接纯感抗的无耗线，离开终端向电源方向第一个出现的是电压波腹点，端接纯容抗的无耗线，离开终端向电源方向第一个出现的是电压波节点。（2）沿线各点的电压和电流在时间和距离位置上都有 $\pi/2$ 相位差，因此在驻波状态下，线上既无能量损耗，也不传输能量。（3）线上波节点两侧沿线各点电压（或电流）反相，相邻两波节点之间各点电压（或电流）同相。（4）沿线各点的输入阻抗为纯电抗。

3. 行驻波状态（部分反射情况）

当传输线终端接一般阻抗时， $Z_L = R_L \pm jX_L$ ，终端反射系数为

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{R_L^2 - Z_0^2 + X_L^2}{(R_L + Z_0)^2 + X_L^2} \pm j \frac{2X_L Z_0}{(R_L + Z_0)^2 + X_L^2} = |\Gamma_L| e^{\pm j\phi_L} \quad (2.5-11)$$

其中

$$|\Gamma_L| = \sqrt{\frac{(R_L - Z_0)^2 + X_L^2}{(R_L + Z_0)^2 + X_L^2}} < 1$$

$$\phi_L = \arctan \frac{2X_L Z_0}{R_L^2 + X_L^2 - Z_0^2}$$

这表明波在终端要产生部分反射，在线上形成行驻波。此时线上的电压为

$$\begin{aligned} U(d) &= U_i^+ e^{j\beta d} + \Gamma_L U_i^+ e^{-j\beta d} \\ &= U_i^+ (1 - \Gamma_L) e^{j\beta d} + 2\Gamma_L U_i^+ \cos \beta d \end{aligned} \quad (2.5-12)$$

显然，式中第一项代表行波，第二项代表驻波。这说明此时线上电压既有行波分量也有驻波成分，故为行驻波状态。由式（2.5-12）可以看出，此时线上的行波分量和驻波成分的大小取决于终端反射系数。

为了决定行驻波状态下沿线电压、电流和阻抗分布，在工作波长一定的条件下，我们只需要知道距终端第一个电压节点（或腹点）的位置与驻波腹点和节点的电压、电流值。

（1）腹点和节点的大小

线上任一点的电压和电流可表示为

$$\left. \begin{aligned} U(d) &= U^+(d) + U^-(d) = U_i^+ e^{j\phi_i d} (1 + |\Gamma_i| e^{j(\phi_i - 2\beta d)}) \\ I(d) &= I^+(d) + I^-(d) = I_i^+ e^{j\phi_i d} (1 - |\Gamma_i| e^{j(\phi_i - 2\beta d)}) \end{aligned} \right\} \quad (2.5-13)$$

由此可见，当 $\phi_i - 2\beta d = 0^\circ$ 时将出现电压腹点，电流节点，且

$$\left. \begin{aligned} |U|_{\max} &= |U_i^+| (1 + |\Gamma_i|) \\ |I|_{\min} &= |I_i^+| (1 - |\Gamma_i|) \end{aligned} \right\} \quad (2.5-14)$$

当 $\phi_i - 2\beta d = -180^\circ$ 时将出现电压节点，电流腹点，且

$$\left. \begin{aligned} |U|_{\min} &= |U_i^+| (1 - |\Gamma_i|) \\ |I|_{\max} &= |I_i^+| (1 + |\Gamma_i|) \end{aligned} \right\} \quad (2.5-15)$$

由式(2.5-14)和(2.5-15)可以得到

$$Z_0 = \frac{|U|_{\max}}{|I|_{\max}} \quad (2.5-16)$$

$$= \frac{|U|_{\min}}{|I|_{\min}} \quad (2.5-17)$$

由式(2.5-14)和(2.5-15)可以看出，当终端接一般阻抗时，线上电压和电流的腹点的振幅不等于入射波的两倍，节点的振幅不等于零。这是与驻波状态的不同之处。

（2）腹点和节点的位置

由式(2.5-13)可以看出，离开终端向电源出现的第一个电压腹点和节点的位置分别为：

$$d_{\max_1} = \frac{\phi_i}{2\beta} = \frac{\phi_i \lambda}{4\pi} \quad (2.5-18)$$

$$d_{\min_1} = \frac{\phi_i \lambda}{4\pi} + \frac{\lambda}{4} = d_{\max_1} + \frac{\lambda}{4} \quad (2.5-19)$$

电压驻波节点的电长度为

$$\frac{d_{\min}}{\lambda} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\phi_i}{\pi} \right) \pm \frac{1}{2} n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.5-20)$$

根据驻波电压和电流腹点和节点的大小与第一个电压腹点（或节点）的位置，即可画出行驻波状态下沿线的电压和电流分布。这可分如下四种情况：

a. $Z_i = R_i > Z_0$

此种情况下，由式(2.5-11)可知， $\phi_i = 0^\circ$ ，因而 $d_{\max_1} = 0$ 。这表明，负载阻抗为大于特性阻抗的纯电阻时，终端为电压腹点，电流节点。其电压和电流振幅分布如图2.5-7(a)所示。

b. $Z_t = R_t < Z_0$

此时由式 (2.5-11) 可知, $\phi_t = \pi$, 因而 $d_{\max_1} = \lambda/4$ 。这表明, 负载阻抗为小于特性阻抗的纯电阻时, 终端为电压节点, 电流腹点。其电压和电流振幅分布如图 2.5-7 (b) 所示。

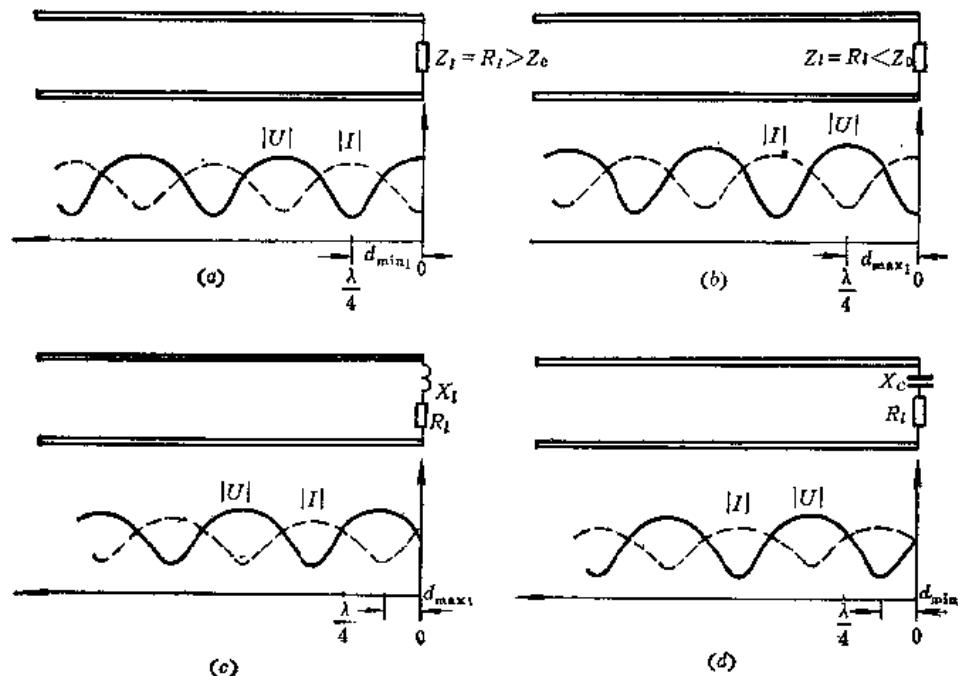


图 2.5-7 端接一般阻抗时沿线电压、电流振幅分布

(a) 大电阻负载; (b) 小电阻负载; (c) 感性负载; (d) 容性负载。

c. $Z_t = R_t + jX_t$

此时 $0 < \phi_t < \pi$, 于是 $0 < d_{\max_1} < \lambda/4$ 。这表明, 负载阻抗为感性阻抗时, 离开终端向电源第一个出现的是电压腹点, 电流节点。其电压和电流振幅分布如图 2.5-7 (c) 所示。

d. $Z_t = R_t - jX_t$

此时 $\pi < \phi_t < 2\pi$, 于是 $\lambda/4 < d_{\max_1} < \lambda/2$ 。这表明, 负载阻抗为容性阻抗时, 离开终端向电源第一个出现的是电压节点、电流腹点。其电压和电流振幅分布如图 2.5-7 (d) 所示。

(3) 行波系数 K 和驻波系数 ρ

为了描述端接一般阻抗时线上的驻波大小, 我们引入行波系数 K 和驻波系数 ρ 。

行波系数 K 定义为线上相邻的节点电压 (或电流) 与腹点电压 (或电流) 之比, 即

$$K = \frac{|U|_{\min}}{|U|_{\max}} = \frac{|I|_{\min}}{|I|_{\max}} \quad (2.5-21)$$

以式 (2.5-14) 和 (2.5-15) 代入, 得到

$$K = \frac{1 - |\Gamma_t|}{1 + |\Gamma_t|} \quad (2.5-22)$$

K 值的变化范围为 $0 \sim 1$ 。 $K = 0$ 表示线上载驻波, $K = 1$ 则表示载行波。

驻波系数 ρ 定义为线上相邻的腹点电压（或电流）与节点电压（或电流）之比。它等于行波系数的倒数，即

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} = \frac{|I|_{\max}}{|I|_{\min}} \quad (2.5-23)$$

$$= \frac{1 + |\Gamma_t|}{1 - |\Gamma_t|} \quad (2.5-24)$$

ρ 值的变化范围为 $1 \sim \infty$ 。 $\rho = 1$ 表示线上载行波， $\rho = \infty$ 则表示载驻波。

驻波系数 ρ 通常指电压驻波系数，又称电压驻波比 (VSWR)。

由式 (2.5-22) 和 (2.2-24)，得到反射系数与行波系数、驻波系数的关系为

$$|\Gamma_t| = \frac{1 - K}{1 + K} \quad (2.5-25)$$

$$= \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \quad (2.5-26)$$

反射系数的幅角由式 (2.5-20) 可求得为

$$\phi_t = \frac{4\pi d_{\min}}{\lambda} - \pi \pm 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.5-27)$$

(4) 阻抗特性

由端接一般阻抗时沿线电压和电流分布，可决定其阻抗分布。图 2.5-8 表示接感性负载时阻抗分布曲线。由图可见，在电压腹点，阻抗为最大且为纯电阻，其值为

$$R_{\max} = \rho Z_0 > Z_0 \quad (2.5-28)$$

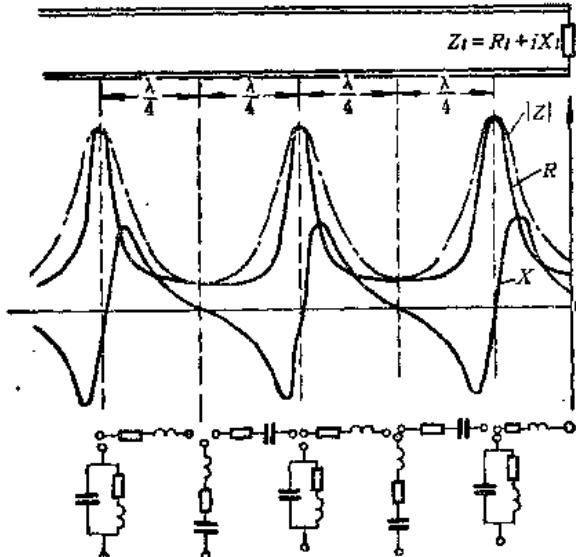


图 2.5-8 端接一般阻抗时沿线阻抗分布曲线

在电压节点，阻抗为最小也为纯电阻，其值为

$$R_{\min} = K Z_0 < Z_0 \quad (2.5-29)$$

由式 (2.5-28) 和 (2.5-29)，得到

$$R_{\min} \cdot R_{\max} = Z_0^2 \quad (2.5-30)$$

相邻 R_{\min} 和 R_{\max} 之间的距离为 $\lambda / 4$ 。由图还可以看出，阻抗变化具有 $\lambda / 4$ 变换性、 $\lambda / 2$ 重复性。即经过 $\lambda / 4$ 后，阻抗的性质发生变换：感性阻抗变成容性阻抗或相反，或小于特性阻抗的电阻变成大于特性阻抗的电阻，或相反；而经过 $\lambda / 2$ 后，阻抗的性质和大小则不变。

2.6 有耗传输线

实际使用的传输线总存在一定的损耗，包括导体损耗、介质损耗和辐射损耗。有时使用的传输线很长，即使线上单位长度的损耗很小，但整个线上的损耗也相当可观。有耗线的传输特性与无耗线有所不同。本节将讨论有耗线上电压、电流分布情况及其阻抗特性。

1. 有耗线上的电压和电流解

对于有耗线，由式 (2.2-5) 得到传输线方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2U}{dz^2} - ZYU = 0 \\ \frac{d^2I}{dz^2} - ZYI = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6-1)$$

令

$$\gamma^2 = ZY = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \quad (2.6-2)$$

则式 (2.6-1) 第一式的解为

$$U(z) = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z} \quad (2.6-3)$$

将式 (2.6-3) 代入式 (2.2-5a)，得到 I 的解为

$$I(z) = -\frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-\gamma z} - A_2 e^{\gamma z}) \quad (2.6-4)$$

式中，

$$Z_0 = \sqrt{-\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (2.6-5)$$

具有阻抗量纲，称为有耗传输线的特性阻抗，而

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (2.6-6)$$

称为传输线的传输因数（或传播因数），一般为复数。其实部 α 称为衰减因数，单位是奈培/米 (Np/m) 或分贝/米 (dB/m)；其虚部 β 称为相位因数（或相移因数），单位是弧度/米 (rad/m)。

上面的结果表明，有耗线和无耗线一样，线上也有入射波和反射波；不同之处在于，由于线有损耗，入射波和反射波的振幅将沿各自的传播方向按指数规律衰减，其衰减的快慢取决于衰减因数 α ，如图 2.6-1 所示。这是损耗对传输线上波的传播产生的第一个影响。

式 (2.6-4) 和 (2.6-5) 中的积分常数 A_1 和 A_2 须根据传输线边界条件确定，方法

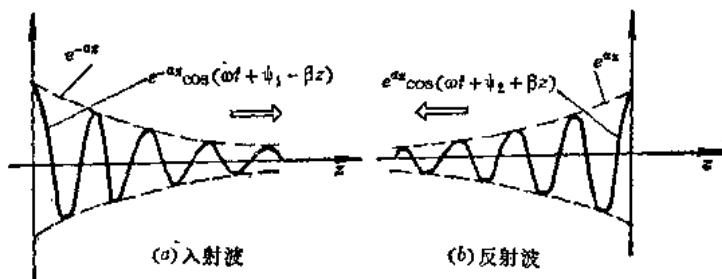


图2.6-1 有耗线上的入射波和反射波

和2.2节一样。在已知终端电压 U_i 和电流 I_i 情况下，可以得到

$$\begin{aligned} U(d) &= \frac{U_i + Z_0 I_i}{2} e^{\gamma d} + \frac{U_i - Z_0 I_i}{2} e^{-\gamma d} = U_i^+ e^{\gamma d} + U_i^- e^{-\gamma d} = U_i^+ e^{(a+j\beta)d} + U_i^- e^{-(a+j\beta)d} \\ &= U^+(d) + U^-(d) = U^+(d)(1 + \Gamma(d)) \end{aligned} \quad (2.6-7a)$$

$$\begin{aligned} I(d) &= \frac{U_i + Z_0 I_i}{2Z_0} e^{\gamma d} - \frac{U_i - Z_0 I_i}{2Z_0} e^{-\gamma d} = I_i^+ e^{\gamma d} + I_i^- e^{-\gamma d} = I^+(d) + I^-(d) \\ &= I^+(d)(1 - \Gamma(d)) \end{aligned} \quad (2.6-7b)$$

式中

$$\Gamma(d) = \frac{U^-(d)}{U^+(d)} = \frac{U_i^- e^{-(a+j\beta)d}}{U_i^+ e^{(a+j\beta)d}} = \Gamma_i e^{-2ad} e^{-j2\beta d} \quad (2.6-8)$$

为电压反射系数，而

$$\Gamma_i = \frac{Z_i - Z_0}{Z_i + Z_0} = |\Gamma_i| e^{j\phi_i} \quad (2.6-9)$$

为终端反射系数。可见，在有耗线情况下，反射系数的幅值随 d 的增大逐渐减小，其幅角则仍按因子 $e^{-j2\beta d}$ 周期变化，如图2.6-2所示。

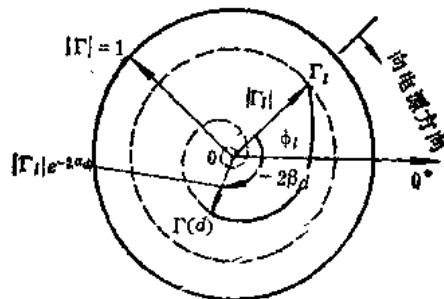


图2.6-2 有耗线反射系数在单位圆内的变化情况

由式(2.6-5)可见，在有耗线情况下，特性阻抗 Z_0 一般为复数，是分布参数和频率的复数函数。在微波运用下， $R \ll \omega L$, $G \ll \omega C$ ，则

$$\begin{aligned} Z_0 &= (R + j\omega L)^{1/2} (G + j\omega C)^{-1/2} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 - j \frac{R}{\omega L} \right]^{1/2} \left[1 - j \frac{G}{\omega C} \right]^{-1/2} \\ &\approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 - j \left(\frac{R}{2\omega L} - \frac{G}{2\omega C} \right) \right] \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned} \quad (2.6-10)$$

由式 (2.6-6) 可以看出, 有耗线上波的衰减因数和相位因数也是分布参数和频率的复数函数。事实上, 取式 (2.6-6) 平方, 得到

$$RG - \omega^2 LC + j\omega(GL + RC) = \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta$$

令上式两边实部和虚部分别相等, 得到

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC \quad (2.6-11)$$

$$2\alpha\beta = \omega GL + \omega RC \quad (2.6-12)$$

又取式 (2.6-6) 的绝对值, 得到

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \quad (2.6-13)$$

由式 (2.6-11) 和 (2.6-13) 联立解得 α 和 β 的一般式为

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(RG - \omega^2 LC) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \right]} \quad (2.6-14)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\omega^2 LC - RG) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \right]} \quad (2.6-15)$$

在微波情况下, $R \ll \omega L$, $G \ll \omega C$, 则

$$\begin{aligned} \gamma &= j\omega\sqrt{LC} \left(1 - j \frac{R}{\omega L} \right)^{1/2} \left(1 - j \frac{G}{\omega C} \right)^{1/2} \approx j\omega\sqrt{LC} \left(1 - j \frac{R}{2\omega L} \right) \left(1 - j \frac{G}{2\omega C} \right) \\ &\approx -\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} + j\omega\sqrt{LC} \end{aligned} \quad (2.6-16)$$

由此可得

$$\alpha = -\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.6-17)$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{LC} \quad (2.6-18)$$

有耗线上波的传播速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{I_m(\gamma)} = \frac{\omega}{I_m(\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)})} \quad (2.6-19)$$

可见有耗线上波的传播速度是频率的函数。这说明有耗线是有色散特性的。这是损耗产生的另一个影响。在微波情况下, 则近似有

$$v_p \approx \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.6-20)$$

这表明，在微波情况下，传输线上波的传播速度近似为常数，而不必考虑传输线的色散效应。这与传输线上传输TEM模的结果是一致的。不过这个结果是近似的。

2. 电压、电流分布特性

考虑到线上的损耗，可得到与式(2.2-24)相似的电压、电流表示式

$$U(d) = \frac{E_s Z_0}{Z_s + Z_0} e^{-(\alpha+j\beta)d} \cdot \frac{[e^{(\alpha+j\beta)d} + \Gamma_i e^{-(\alpha+j\beta)d}]}{1 - \Gamma_i \Gamma_s e^{-2(\alpha+j\beta)d}} \quad (2.6-21)$$

$$I(d) = \frac{E_s}{Z_s + Z_0} e^{-(\alpha+j\beta)d} \cdot \frac{[e^{(\alpha+j\beta)d} - \Gamma_i e^{-(\alpha+j\beta)d}]}{1 - \Gamma_i \Gamma_s e^{-2(\alpha+j\beta)d}} \quad (2.6-22)$$

因而阻抗为

$$Z(d) = Z_0 \frac{e^{(\alpha+j\beta)d} + \Gamma_i e^{-(\alpha+j\beta)d}}{e^{(\alpha+j\beta)d} - \Gamma_i e^{-(\alpha+j\beta)d}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(d)}{1 - \Gamma(d)} \quad (2.6-23)$$

假如 $Z_s = Z_0$ ，则 $\Gamma_s = 0$ ，式(2.6-21)和(2.6-22)简化为

$$U(d) = \frac{E_s}{2} e^{-(\alpha+j\beta)d} [e^{(\alpha+j\beta)d} + \Gamma_i e^{-(\alpha+j\beta)d}] \quad (2.6-24)$$

$$I(d) = \frac{E_s}{2Z_0} e^{-(\alpha+j\beta)d} [e^{(\alpha+j\beta)d} - \Gamma_i e^{-(\alpha+j\beta)d}] \quad (2.6-25)$$

下面分三种情况来讨论：

(1) 终端开路

此时 $Z_i \rightarrow \infty$ ， $\Gamma_i = 1$ ，于是得到

$$\left. \begin{aligned} |U(d)| &= E_s e^{-\alpha d} |\cosh(\alpha + j\beta)d| \\ |I(d)| &= \frac{E_s}{|Z_0|} e^{-\alpha d} |\sinh(\alpha + j\beta)d| \end{aligned} \right\} \quad (2.6-26 \text{ a})$$

$$Z_{in}^{\infty}(d) = |Z_0| \coth \gamma d \quad (2.6-26 \text{ b})$$

图2.6-3表示沿电压、电流与阻抗分布曲线。由图可见，越接近电源端，线上的驻波越小。

(2) 终端短路

此时 $Z_i = 0$ ， $\Gamma_i = -1$ ，于是

$$\left. \begin{aligned} |U(d)| &= E_s e^{-\alpha d} |\sinh(\alpha + j\beta)d| \\ |I(d)| &= \frac{E_s}{|Z_0|} e^{-\alpha d} |\cosh(\alpha + j\beta)d| \end{aligned} \right\} \quad (2.6-27 \text{ a})$$

$$Z_{in}^{\infty}(d) = |Z_0| \tanh \gamma d \quad (2.6-27 \text{ b})$$

式(2.6-26)和(2.6-27)成互补关系，故此种情况下沿 $|U(d)|$ 和 $|I(d)|$ 曲线与开路情况的 $|I(d)|$ 和 $|U(d)|$ 的曲线一样。

由式(2.6-26 b)和(2.6-27 b)可得

$$Z_{in}^{\infty}(d) \cdot Z_{in}^{\infty}(d) = Z_0^2 \quad (2.6-28)$$

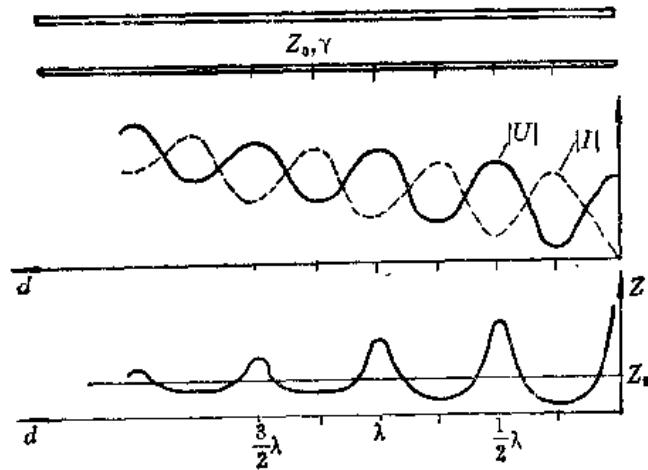


图2.6-3 终端开路有耗线的特性

(3) 匹配情况

此时 $Z_t = Z_0$, $\Gamma_t = 0$, 于是

$$\left. \begin{aligned} |U(d)| &= \frac{E_g}{2} e^{-\alpha(d-l)} \\ |I(d)| &= \frac{E_g}{2|Z_0|} e^{-\alpha(d-l)} \\ Z(d) &= Z_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6-29)$$

此时沿线电压、电流的振幅分布如图 2.6-4 所示。

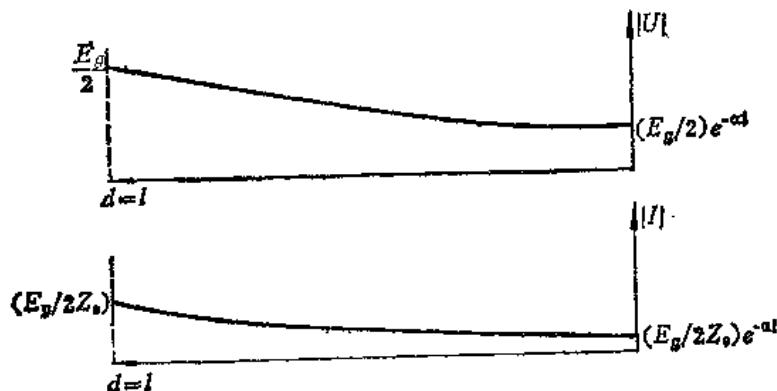


图2.6-4 终端匹配时有耗线|U|和|I|曲线

3. 阻抗特性

如上所述，由于线上有损耗，入射波和反射波都要沿各自传播方向按指数规律衰减，于是线上的电压和电流越靠近电源端，驻波起伏越小，因而阻抗的波动也越小，最后接近于特性阻抗，如图 2.6-3 所示。有耗线阻抗的这种特性，在损耗大时更明显。因此，有足够的长的有耗线的输入端阻抗接近于线的特性阻抗。

2.7 传输功率与效率

传输线主要是用来传输功率。本节讨论传输功率与效率的计算问题。

1. 传输功率

如果不考虑损耗，传输线上任一点的电压、电流为

$$U(d) = U_i^+ e^{j\beta d} (1 + \Gamma(d)) \quad (2.7-1)$$

$$I(d) = \frac{U_i^+}{Z_0} e^{j\beta d} (1 - \Gamma(d)) \quad (2.7-2)$$

因此传输功率为

$$\begin{aligned} P(d) &= \operatorname{Re}\{U(d) \cdot I^*(d)\} = \operatorname{Re}\left\{U_i^+ e^{j\beta d} (1 + \Gamma(d)) \cdot \frac{U_i^{+\ast}}{Z_0^*} e^{-j\beta d} (1 - \Gamma^*(d))\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{|U_i^+|^2}{Z_0^*} - \frac{|U_i^+|^2}{Z_0^*} |\Gamma(d)|^2 + |U_i^+|^2 \cdot \frac{|\Gamma(d) - \Gamma^*(d)|^2}{Z_0^*}\right\} \end{aligned}$$

若 Z_0 为实数，则上式第三项等于零，于是得到

$$P(d) = \frac{|U_i^+|^2}{Z_0} - \frac{|U_i^+|^2}{Z_0} |\Gamma(d)|^2 = P_{in}(d) - P_r(d) \quad (2.7-3)$$

式中，

$$P_{in}(d) = \frac{|U_i^+|^2}{Z_0} \quad (2.7-4)$$

$$P_r(d) = \frac{|U_i^+|^2}{Z_0} |\Gamma(d)|^2 \quad (2.7-5)$$

分别为传输线上 d 处的入射波功率和反射波功率。式 (2.7-3) 表明，传输线上任一点的功率等于入射功率与反射功率之差。需要指出的是，这一结论只对 Z_0 为实数成立。

由式 (2.7-4) 和 (2.7-5)，得到

$$\frac{P_r(d)}{P_{in}(d)} = |\Gamma(d)|^2 \quad (2.7-6)$$

即是说，反射功率与入射功率之比等于功率反射系数。

如果不考虑损耗，则通过线上任一点的传输功率应该是相同的。我们可以取线上任一点的电压和电流来计算功率。但是，为了简便起见，一般都取电压腹点或节点处计算，因为该处的阻抗为纯电阻，电压与电流同相。如取电压腹点，则得功率为

$$P(d) = \frac{1}{2} |U(d)|_{\max} \cdot |I(d)|_{\min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|U(d)|_{\max}^2}{Z_0} K \quad (2.7-7)$$

如取电压节点，则得

$$P(d) = \frac{1}{2} |U(d)|_{\min} \cdot |I(d)|_{\max} = \frac{1}{2} \cdot |I(d)|_{\max}^2 K Z_0 \quad (2.7-8)$$

可见，当传输线的耐压一定，或所能载的电流一定时，行波系数 K 越大，传输功率越大。

在不发生电压击穿条件下，传输线允许传输的最大功率称为传输线的功率容量（或称极限功率）。据此定义，传输线的功率容量应为

$$P_{br} = \frac{1}{2} \frac{|U_{br}|^2}{Z_0} K \quad (2.7-9)$$

式中 U_{br} 为线间的击穿电压。

由式(2.7-3)可得到传输功率与入射功率之比为

$$\frac{P(d)}{P_{in}(d)} = 1 - |\Gamma(d)|^2 \quad (2.7-10)$$

于是得到

$$\text{传输损耗} = 10\lg(1 - |\Gamma(d)|^2) \quad (\text{dB}) \quad (2.7-11)$$

$$\text{反射损耗} = 10\lg|\Gamma(d)|^2 = 20\lg|\Gamma(d)| \quad (\text{dB}) \quad (2.7-12)$$

式(2.7-11)实际上代表由反射所引起的损耗。

2. 传输效率

由于传输线总存在一定的损耗，所以不可能有百分之百的功率传输能力，即有一定传输效率。

传输效率定义为负载吸收的功率 P_t 与传输线的输入功率 P_{in} 之比，以 η 表示之。即

$$\eta = \frac{P_t}{P_{in}} \quad (\%) \quad (2.7-13)$$

注意 P_{in} 不是信号源的耗用功率。

考虑到损耗，传输线上任一点的电压、电流为

$$U(d) = U_i^* [e^{(a+jb)d} + |\Gamma_i| e^{j\phi_i} e^{-(a+jb)d}] \quad (2.7-14)$$

$$I(d) = I_i^* [e^{(a+jb)d} - |\Gamma_i| e^{j\phi_i} e^{-(a+jb)d}] \quad (2.7-15)$$

则传输功率为

$$P(d) = \frac{1}{2} |I_i^*|^2 Z_0 [e^{2ad} - |\Gamma_i|^2 e^{-2ad}] \quad (2.7-16)$$

式中 Z_0 设为实数。

传输线的输入功率则为

$$P_{in} = \frac{1}{2} |I_i^*|^2 Z_0 (e^{2ad} - |\Gamma_i|^2 e^{-2ad}) \quad (2.7-17)$$

负载吸收功率为

$$P_t = \frac{1}{2} |I_i^*|^2 Z_0 (1 - |\Gamma_i|^2) \quad (2.7-18)$$

因此得到

$$\eta = \frac{1 - |\Gamma_i|^2}{e^{2ad} - |\Gamma_i|^2 e^{-2ad}} \quad (2.7-19)$$

利用指数函数与双曲函数之间的关系式，上式变为

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right) \sinh 2ad}{\cosh 2ad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right) \sinh 2ad} \quad (2.7-20)$$

式中 ρ 为负载端的驻波系数。

假如传输线的损耗很小（低耗传输线），满足 $ad \ll 1$ ，则有 $\cosh 2ad \approx 1$ ， $\sinh 2ad \approx 2ad$ ，于是

$$\begin{aligned} \eta &\approx \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right) ad}{1 + \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right) ad} = \frac{1 - \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right) ad}{1 + \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right) ad} = 1 - \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right) ad \\ &= 1 - \left(K + \frac{1}{K} \right) ad \end{aligned} \quad (2.7-21)$$

式中 K 为负载端的行波系数。由此可见：① K 一定时， α 越小、 l 越短， η 越高；② αl 一定（即线一定）时， K 越大， η 越高。图 2.7-1 表示传输效率与行波系数的关系曲线。由图可见， $K < 0.5$ 时， K 对 η 的影响很大；而当 $K > 0.5$ 以后， K 对 η 的影响就不大了，特别是 $K > 0.75$ 以后。因此，如果仅从传输效率考虑的话，只要 $K > 0.5$ 就可以了。需要强调的是，这里所分析的只是线的损耗对传输效率的影响，而未考虑反射波的影响。

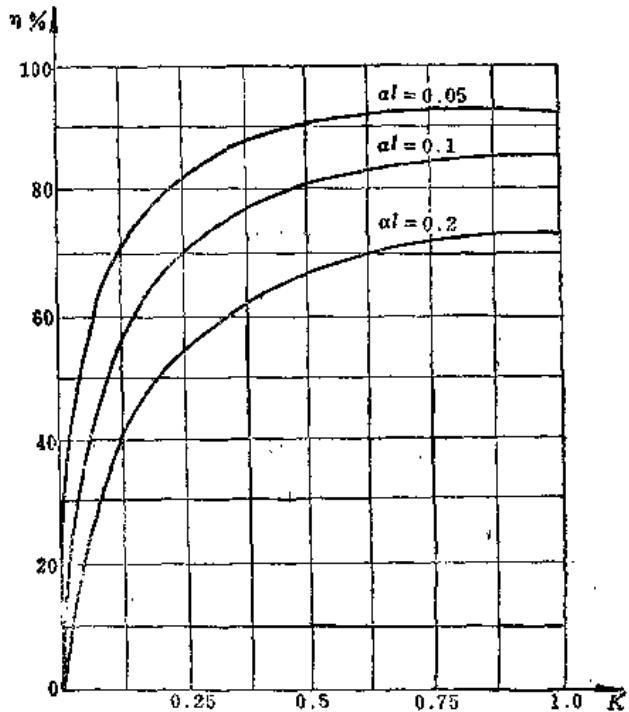


图 2.7-1 传输效率与行波系数的关系曲线

2.8 阻抗与导纳圆图

在微波和天线工程中，经常遇到阻抗计算和阻抗匹配的问题，例如已知驻波系数或反射系数，需要求传输线的输入阻抗，或相反。原则上我们可以利用前面导出的公式进行计算，但非常麻烦、费时。利用本节介绍的阻抗圆图和导纳圆图进行计算则很简便，并能满足一般工程上的精度要求。

阻抗圆图的特点是在一个单位电压反射系数圆内包含着端接各种无源阻抗的传输线电路归一化阻抗、反射系数和驻波系数圆及其各种数据，能简便地进行传输线的阻抗计算和阻抗匹配。

本节首先要讨论阻抗圆图和导纳圆图的构成，然后举例说明其使用方法。

1. 阻抗圆图

阻抗圆图是由绘制在单位电压反射系数圆内的一族归一化电阻圆和归一化电抗圆所构成的。其构成方程为（不考虑损耗）：

$$\Gamma(d) = \Gamma_t e^{-j2\beta d} = |\Gamma_t| e^{j(\phi_t - 2\beta d)} = |\Gamma_t| e^{j\phi} \quad (2.8-1)$$

和

$$z_n(d) = \frac{Z(d)}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma(d)}{1 - \Gamma(d)} \quad (2.8-2)$$

$z_n(d)$ 称为线上 d 处的归一化阻抗。

(1) 反射系数圆

由式 (2.8-2) 解得

$$\Gamma(d) = |\Gamma_i| e^{j(\phi_i - 2\beta d)} = \frac{z_n(d) - 1}{z_n(d) + 1} \quad (2.8-3)$$

若以 $d + l_0$ 代替 d , 则由上式可得

$$\Gamma(d+l_0) = |\Gamma_i| e^{j(\phi_i - 2\beta(d+l_0))} = (|\Gamma_i| e^{j(\phi_i - 2\beta d)}) e^{-j2\beta l_0} = \frac{z_n(d+l_0) - 1}{z_n(d+l_0) + 1} \quad (2.8-4)$$

式 (2.8-3) 和 (2.8-4) 说明, 沿正 d 方向移动距离 l_0 时 (即由负载向电源方向移动距离 l_0), 反射系数减小 (顺时针旋转) $2\beta l_0$ 的相角而幅值不变。 $d + l_0$ 处的反射系数 $\Gamma(d + l_0)$ 对应着 $d + l_0$ 处的归一化阻抗 $z_n(d + l_0)$, 而 d 处的反射系数 $\Gamma(d)$ 则对应着 d 处的归一化阻抗 $z_n(d)$ 。这个结果表明, 对于无耗线, 反射系数沿线的变化只是相角变化。故在复 Γ 平面上, 当负载阻抗不变时, 传输线上 Γ 的轨迹是以原点为圆心、半径为 $|\Gamma(d)| = |\Gamma_i| \leq 1$ 的圆周, 如图 2.4-1 所示。

(2) 归一化阻抗圆

式 (2.8-2) 为一分式线性变换式, 它实现由复 Γ 平面上的圆到 z_n 平面上的圆或直线 (半径为无限大的圆) 的变换。事实上, 令

$$\Gamma(d) = \Gamma_r(d) + j\Gamma_i(d) \quad (2.8-5)$$

$$z_n(d) = r_n(d) + jx_n(d) \quad (2.8-6)$$

式中, $r_n(d) = R(d)/Z_0$ 称为 d 处的归一化电阻, $x_n(d) = X(d)/Z_0$ 称为 d 处的归一化电抗。为简化起见, 下面省掉 (d) 。

将式 (2.8-5) 和 (2.8-6) 代入式 (2.8-2), 得到

$$r_n + jx_n = \frac{1 + (\Gamma_r + j\Gamma_i)}{1 - (\Gamma_r + j\Gamma_i)} = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} + j \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (2.8-7)$$

分开实部和虚部, 可得到两个圆方程:

$$\left(\Gamma_r - \frac{r_n}{r_n + 1} \right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{r_n + 1} \right)^2 \quad (2.8-8)$$

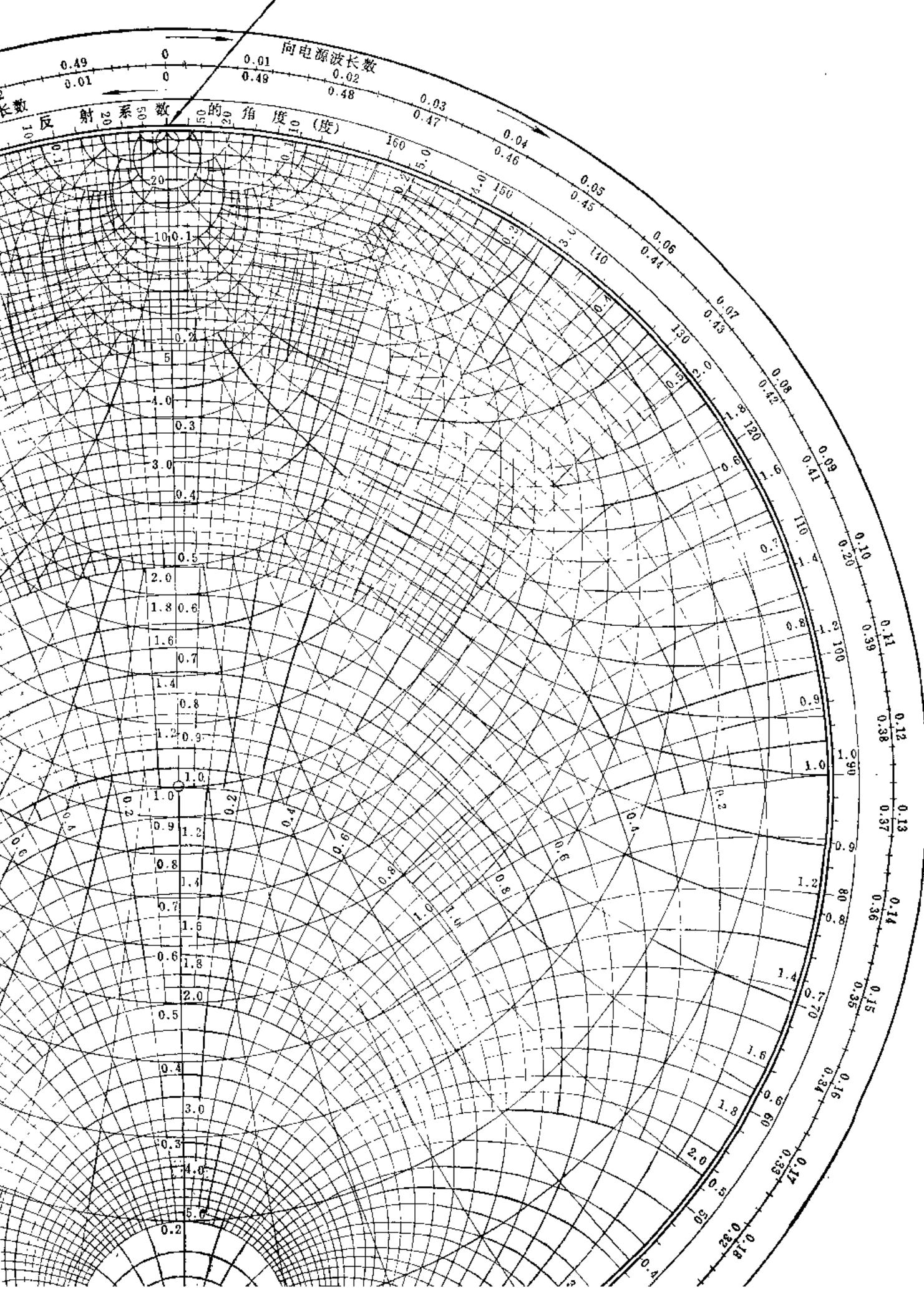
和

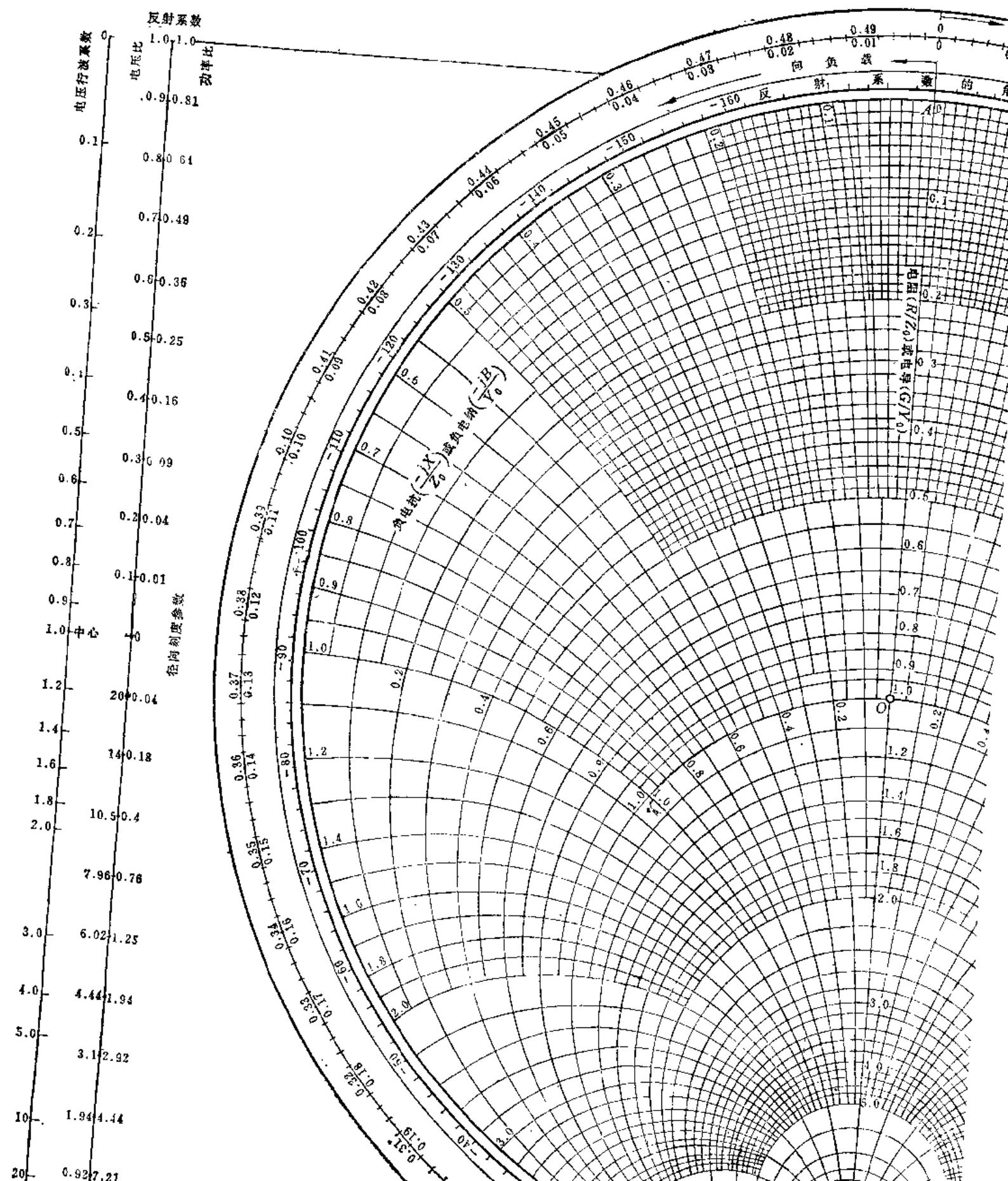
$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(1 - \frac{1}{x_n} \right)^2 = \left(\frac{1}{x_n} \right)^2 \quad (2.8-9)$$

式 (2.8-8) 是归一化电阻 r_n 为常数时反射系数 Γ 的矢量轨迹, 亦是归一化电阻 r_n 为常数时, 归一化阻抗的轨迹。其轨迹为一族圆, 圆心坐标为 $(r_n/(r_n+1), 0)$, 半径为 $1/(r_n+1)$ 。表 2.8-1 列出了 $r_n = 0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, \infty$ 的圆的圆心坐标和半径值, 相应的轨迹圆如图 2.8-1(a) 所示。由图可见, 所有的圆都通过点 $(1, 0)$, r_n 和 $1/r_n$ 圆与实轴的交点关于圆心中心对称。

式 (2.8-9) 是归一化电抗 x_n 为常数时反射系数 Γ 的矢量轨迹, 亦是归一化电抗 x_n 为常数时, 归一化阻抗的轨迹。其轨迹亦为一族圆, 圆心坐标为 $(1, 1/x_n)$, 半径为 $1/x_n$ 。表 2.8-2 列出了 $x_n = 0, \pm 0.25, \pm 0.5, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \infty$ 的圆的圆心坐标和半径值, 其相应的轨迹圆如图 2.8-1(b) 所示。由图可见, $\pm x_n$ 的圆弧关于实轴成镜象对称, x_n 和 $-1/x_n$ 圆与 $\Gamma = 1$ 的圆的交点在直径两端相对应。 x_n 圆和 $1/x_n$ 圆与 $\Gamma = 1$ 圆的交点关于虚轴对称。

短路, $R = 0$ $G = \infty$





(1) 旋转的方向问题：在传输线上由负载向电源方向移动（ d 增大），在圆图上应顺时针方向旋转；反之，由电源向负载方向移动（ d 减小）则应反时针方向旋转。这是因为 d 是从负载端计算起的坐标，由式 (2.8-1) 知，当 d 增大时， $\Gamma(d)$ 的相角减小（即滞后），故应顺时针旋转；而 d 减小时， $\Gamma(d)$ 的相角增大（即超前），应反时针旋转。

(2) 反射系数值在圆图上未标出，计算时需将半径等分来确定：圆图中心的 $|\Gamma|=0$ ，最大圆周的 $|\Gamma|=1$ 。有的圆图在下面附有相应的计算尺，其上标有反射系数、驻波系数等值，如图 2.8-2 所示，计算时可直接读取。

(3) 圆图外圈分别标有向电源和向负载的电长度（或称电刻度）。为了避免圆图上出现几处零值点，电刻度从 π 处为起始点，但这对计算旋转的电长度值无关紧要，因为旋转的电长度是传输线上两点之间的相对距离。同时要注意，圆图中的归一化阻抗点 z_n 所对应的电长度是由连接圆图中心和 z_n 点的直线延长与电长度圆周的交点来决定，而不是由 z_n 所在的电抗曲线与电长度圆周的交点决定。

2. 导纳圆图

在实际电路中，有时已知的不是阻抗而是导纳，并需要计算导纳；而微波电路常用并联元件构成，此种情况下，用导纳计算比较方便。用以计算导纳的圆图称为导纳圆图。

设传输线上任一点的归一化导纳为 y_n ，则有

$$y_n = g_n + jb_n = -\frac{Y}{Y_0} = \frac{Z_0}{Z} = \frac{1 - \Gamma(d)}{1 + \Gamma(d)} = \frac{1 + \Gamma_i(d)}{1 - \Gamma_i(d)} \quad (2.8-10)$$

式中， $g_n = G/Y_0$ 为归一化电导， $b_n = B/Y_0$ 为归一化电纳， $\Gamma_i(d)$ 为 d 处的电流反射系数， Y_0 为传输线的特性导纳。式 (2.8-10) 与式 (2.8-2) 形式完全一样，只是归一化阻抗用相应的归一化导纳代替， r_n 换成 g_n ， x_n 换成 b_n ，电压反射系数 $\Gamma(d)$ 用电流反射系数 $\Gamma_i(d)$ 代替。而归一化导纳与归一化阻抗互为倒数关系，即

$$y_n = \frac{1}{z_n} \quad (2.8-11)$$

另一方面，无耗 $\lambda/4$ 线段具有阻抗变换性，即（见图 2.8-3）

$$Z_{in} \cdot Z_t = Z_0^2 \quad (2.8-12)$$

或者

$$z_{in} \cdot z_t = 1 \quad (2.8-13)$$

而

$$y_{ni} = \frac{1}{z_{ni}}$$

于是得到

$$z_{in} = y_{ni} \text{ 和 } z_{ni} = y_{ni} z_{in} \quad (2.8-14)$$

这表明，圆图中任一点的归一化阻抗值就是经 $\lambda/4$ 后的归一化导纳值，而该归一化阻抗代表的归一化导纳值则是经 $\lambda/4$ 后的归一化阻抗

值。因此，阻抗圆图的 (r_n, x_n) 点绕圆图中心旋转 180° 即得到其对应的归一化导纳值 (g_n, b_n) ；将整个阻抗圆图旋转 180° 即得到导纳圆图，如图 2.8-4 所示。

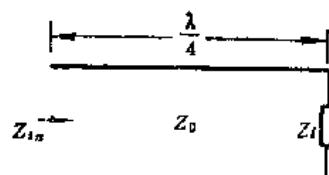


图 2.8-3 $\lambda/4$ 线的阻抗变换性

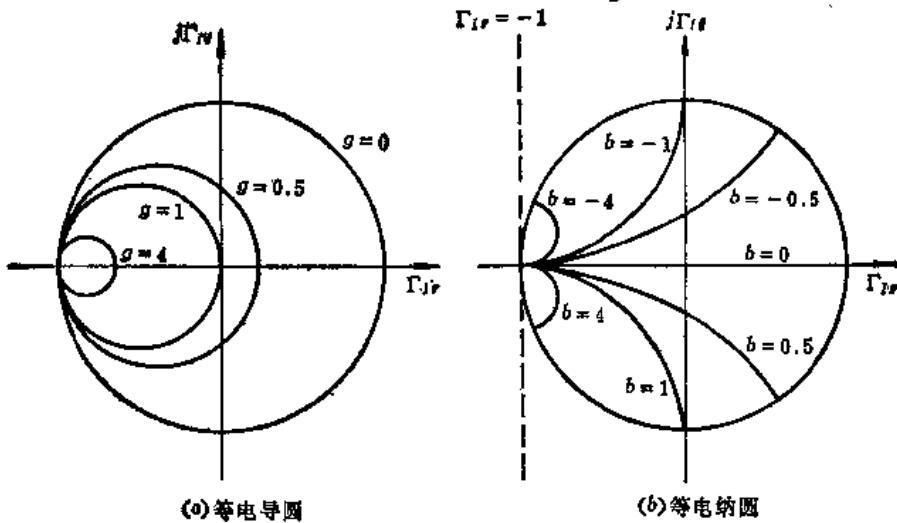


图2.8-4 导纳圆图

由于

$$(g_n + jb_n) = \frac{1}{r_n + jx_n} = \frac{r_n}{r_n^2 + x_n^2} - j \frac{x_n}{r_n^2 + x_n^2} \quad (2.8-15)$$

可见 b_n 的符号与 x_n 的符号相反，所以导纳圆图上半圆内的 b_n 为负，下半圆内的 b_n 为正。

不难证明，阻抗圆图也可当导纳圆图用，用阻抗圆图可以计算导纳。事实上，

$$z_n(d) = \frac{1 + \Gamma(d)}{1 - \Gamma(d)} = \frac{1 + |\Gamma_i|e^{j\phi}}{1 - |\Gamma_i|e^{j\phi}} \quad (2.8-16)$$

而

$$y_n(d) = \frac{1 - \Gamma(d)}{1 + \Gamma(d)} = \frac{1 - |\Gamma_i|e^{j\phi}}{1 + |\Gamma_i|e^{j\phi}} = \frac{1 + |\Gamma_i|e^{j(\phi+\pi)}}{1 - |\Gamma_i|e^{j(\phi+\pi)}} \quad (2.8-17)$$

由此可见，如果在阻抗圆图上已知传输线上某处 d 的归一化阻抗点，则该点沿等 Γ 圆旋转 180° 后的对应点即为对应的归一化导纳点。

实际上，导纳圆图和阻抗圆图完全一样。将阻抗圆图整个地旋转 180° 就得到导纳圆图，但实质上还是原来的阻抗圆图。如果要由某点阻抗求另一点的阻抗，或由某点导纳求另一点的导纳，都可用阻抗圆图求。此时圆图上相应点的值分别为归一化阻抗和归一化导纳值。但如果要由某点的阻抗求该点的导纳，则先求该点的归一化阻抗，然后沿等 Γ 圆旋转 180° 后的相应点才是该点的归一化导纳点。

3. 导抗圆图

如将上述阻抗圆图和导纳圆图重叠在一起，便得到导抗圆图，如图 2.8-5 所示。由导抗圆图上的点可同时读得其归一化阻抗值和归一化导纳值，有时使计算更加简便。

4. 圆图应用举例

圆图在微波和天线工程的应用很广泛。下面举几个典型例子来说明其使用方法。

例2.8-1 已知同轴线的特性阻抗 Z_0 为 50Ω ，负载阻抗为 $100 + j50\Omega$ ，如图 2.8-6(a) 所示，求离负载 0.24λ 处的输入阻抗。

解

(1) 计算归一化负载阻抗

$$z_{nl} = \frac{100 + j 50}{50} = 2 + j 1$$

在阻抗圆图上标出此点，其对应的电刻度为0.213，如图2.8-6(b)所示。

(2) 以 z_{nl} 点沿等 Γ 圆顺时针旋转电长度0.24到 $z_{n,in}$ 点，读得

$$z_{n,in} = 0.42 - j 0.25$$

因此距负载0.24 λ 处的输入阻抗为

$$Z_{in} = (0.42 - j 0.25) \times 50 = 21 - j 12.5 \quad (\Omega)$$

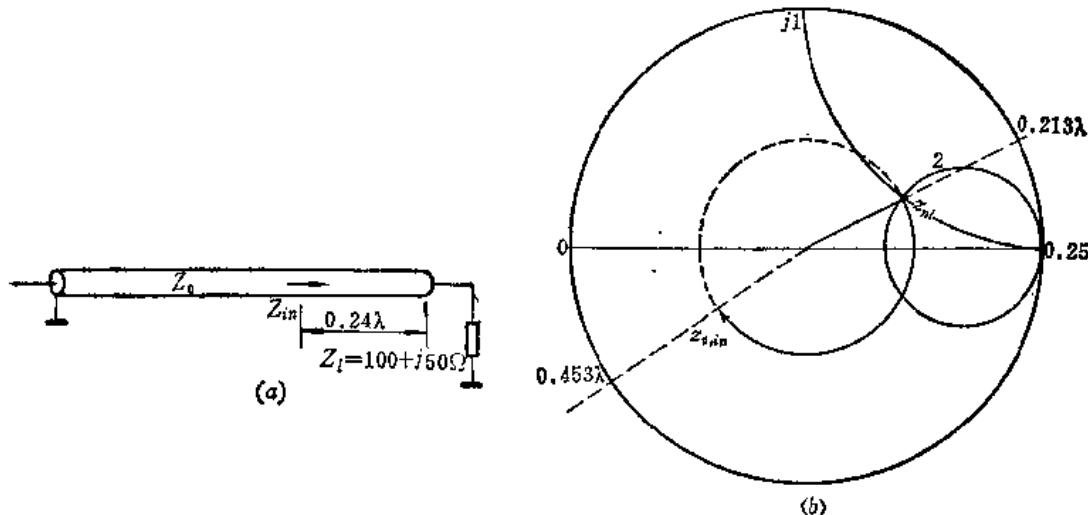


图2.8-6 例2.8-1的圆图数据

例2.8-2 由测量得到 $Z_{in}^{sc} = +j 106 \Omega$, $Z_{in}^{\infty} = -j 23.6 \Omega$ 和 $Z_{in} = 25 - j 70 \Omega$ (终端接实际负载时), 求负载阻抗值。

解 传输线的特性阻抗为

$$Z_0 = \sqrt{Z_{in}^{sc} \cdot Z_{in}^{\infty}} = 50 \Omega$$

则(见图2.8-7) $z_{n,in}^{sc} = Z_{in}^{sc}/Z_0 = +j 2.12$, 其对应的电刻度为0.18, 而终端短路点 $z_{nl} = 0$,

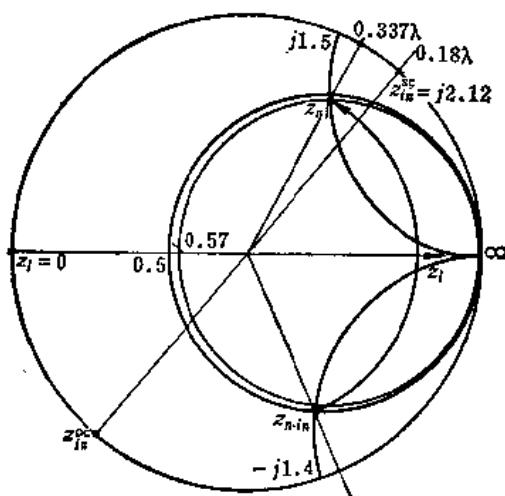


图2.8-7 例2.8-2的圆图数据

位置在圆图实轴左端点。由此可知传输线的长度为 0.18λ 。而当终端接实际负载时，传输线归一化输入阻抗为

$$z_{n, in} = \frac{Z_{in}}{Z_0} = \frac{25 - j70}{50} = 0.5 - j1.4$$

其对应的电刻度为 0.157。因此负载应位于 $0.18\lambda + 0.157\lambda = 0.33\lambda$ 处。由此点查得

$$z_{nl} = 0.57 + j1.5 \text{ 或 } Z_l = 28.5 + j75 (\Omega)$$

例2.8-3 在 Z_0 为 50Ω 的损耗线上测得 ρ 为 5，电压最小点出现在距负载 $\lambda/3$ 处，如图 2.8-8(a) 所示，求负载阻抗值。

解 电压最小点 $r_{n, min} = 1/5 = 0.2$ ，在阻抗圆图实轴左半径上，如图 2.8-8(b) 所示。

以 $r_{n, min}$ 点沿等 $\rho = 5$ 的圆反时针旋转 $\lambda/3$ 得到

$$z_{nl} = 0.77 + j1.48$$

故负载阻抗为

$$Z_l = (0.77 + j1.48) \times 50 = 38.5 + j74 (\Omega)$$

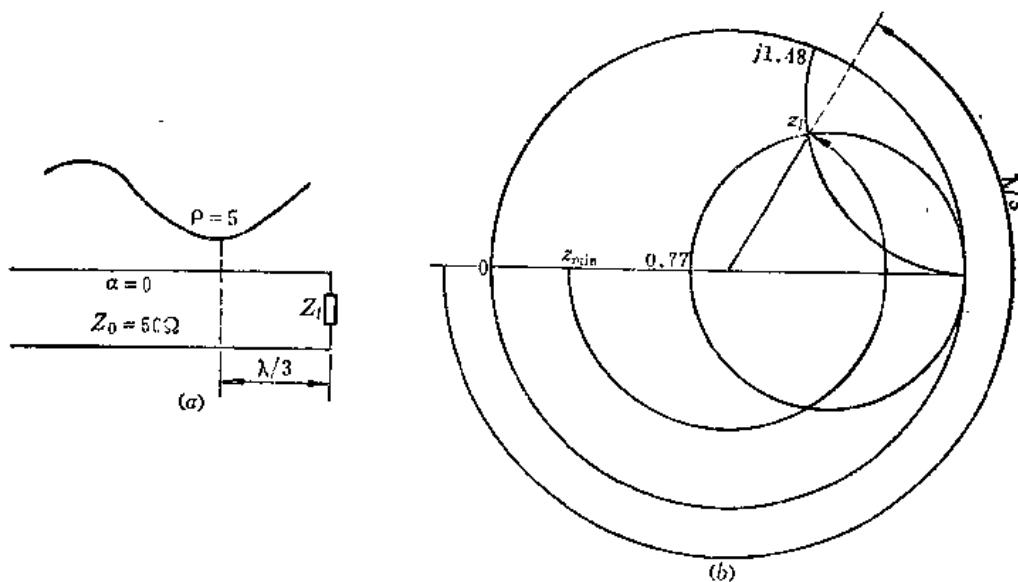


图 2.8-8 例 2.8-3 的作图法

例2.8-4 在 Z_0 为 50Ω 开槽线终端接一未知负载时测得 $|U|_{max}$ 为 0dB, $|U|_{min}$ 为 -6dB, $|U|_{min}$ 出现在距负载 0.10m , 0.35m , 0.6m 和 0.85m 处；而当终端以短路器代替未知负载时测得 $|U|_{min}$ 出现在 0m , 0.25m , 0.50m 和 0.75m 处，试求工作频率和未知负载阻抗。

解 由题意知

$$\lambda/2 = 0.25\text{m} \quad \text{或者} \quad \lambda = 0.50\text{m}$$

于是工作频率为

$$f = \frac{3 \times 10^8}{0.5} = 600(\text{MHz})$$

由 $|U|_{max} = 0\text{dB}$, $|U|_{min} = -6\text{dB}$, 查表得 $\rho = 2$, 则 $K = 0.5$ 。又由题意知接未知负载时电压最小点距负载 0.10m , 电长度为 $0.10/0.50 = 0.2$ 。如图 2.8-9 所示, 以 $z_{n, min}$ 点沿等 $\rho = 2$ 的圆反时针旋转 0.2λ , 得到

$$z_{si} = 1.55 - j0.65$$

故

$$Z_t = (1.55 - j0.65) \times 50 = 77.5 - j32.5 (\Omega)$$

例2.8-5 已知双导线的特性阻抗为 250Ω , 负载阻抗为 $500 - j150\Omega$, 线长 4.8λ , 求输入导纳。

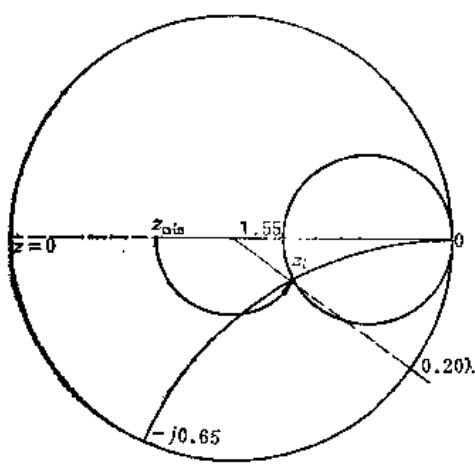


图2.8-9 例2.8-4的圆图数据

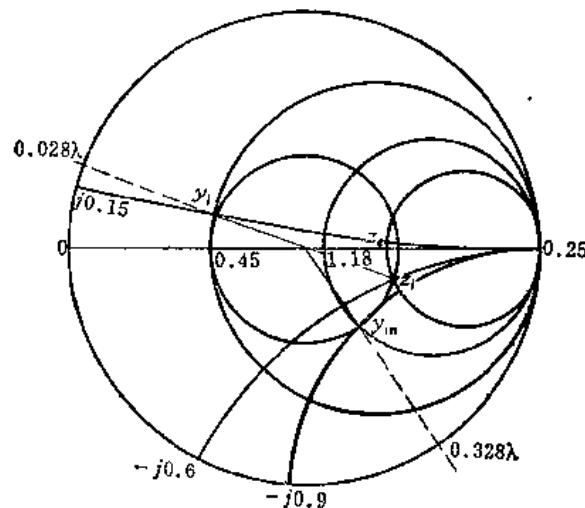


图2.8-10 例2.8-5的圆图数据

解 归一化负载阻抗为

$$z_t = \frac{500 - j150}{250} = 2 - j0.6$$

如图2.8-10所示。以 z_t 沿等Γ圆旋转 180° 得到

$$y_t = 0.45 + j0.15$$

其对应的电刻度为 0.028 。以 y_t 沿等Γ圆顺时针方向旋转 0.3λ 至 0.328λ , 即得到

$$y_{in} = 1.18 - j0.9$$

故输入导纳为

$$Y_{in} = (1.18 - j0.9)/250 = 0.00472 - j0.0036 (\text{S})$$

2.9 传输线的阻抗匹配

本节讨论传输线的阻抗匹配的原理与计算方法。这是微波和天线工程中经常遇到而需要处理的问题。

1. 阻抗匹配的概念

前面讲过, 传输线在行波状态下的损耗小、效率高, 传输相同功率时线上电压、电流的驻波最小, 功率承受能力最大。同时, 行波状态下线上任一点的输入阻抗都等于传输线的特性阻抗, 不致于产生谐振现象, 电源的工作状态也不会受到负载的影响。

但是, 传输线一般不是工作在行波状态。这就需要加入匹配装置, 使传输线工作于行波状态。这就是所谓阻抗匹配。

如图 2.9-1 所示传输系统, 通常负载阻抗 Z_t 不等于传输线的特性阻抗 Z_0 , 信号源的内阻抗 Z_s 也不等于 Z_0 。因此, 传输系统的阻抗匹配一般包括两个问题: 一个是信号源与

传输线之间的阻抗匹配问题，其所解决的问题是使信号源无反射。还有一种信号源的共轭匹配，它是解决使信号源的功率输出最大；另一个是负载与传输线之间的阻抗匹配问题，所要解决的是如何消除负载的反射。为了实现阻抗匹配，就需要在信号源和传输线之间，传输线与负载之间加入匹配装置（称为匹配器），如图2.9-1所示。下面分别来讨论这两种匹配问题。

(1) 信号源与传输线的阻抗匹配

分两种情况：

a. 信号源的共轭匹配

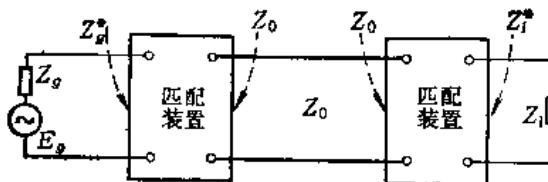


图2.9-1 传输系统的匹配问题

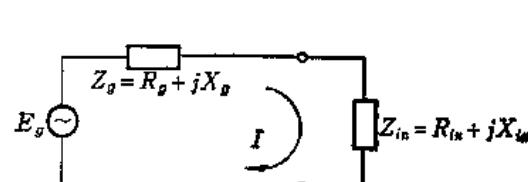


图2.9-2 信号源的共轭匹配

信号源的共轭匹配就是使传输线的输入阻抗与信号源的内阻抗互为共轭复数，此时信号源的功率输出最大。

事实上，图2.9-1所示传输系统在信号源端的等效电路如图2.9-2所示。回路中的电流为

$$I = \frac{E_g}{Z_g + Z_{in}} = \frac{E_g}{(R_g + jX_g) + (R_{in} + jX_{in})} \quad (2.9-1)$$

信号源传输给负载的功率为

$$P = \frac{1}{2} R_{in} I I^* = \frac{1}{2} R_{in} \frac{E_g^2}{(R_{in} + R_g)^2 + (X_{in} + X_g)^2} \quad (2.9-2)$$

如果改变电抗 X_{in} ，显然当 $X_{in} = -X_g$ （或 $X_g = -X_{in}$ ）时，负载上的功率最大。此时

$$P|_{X_{in}=-X_g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_g^2 R_{in}}{(R_{in} + R_g)^2} \quad (2.9-3)$$

如果再改变电阻 R_{in} ，则由功率最大条件 $\partial P / \partial R_{in} = 0$ 可得到

$$R_{in} = R_g$$

故信号源功率输出最大条件为

$$Z_{in} = Z_g^* \quad \text{或者} \quad \begin{cases} R_{in} = R_g \\ X_{in} = -X_g \end{cases} \quad (2.9-4)$$

满足此条件时，负载吸收的功率为

$$P_{max} = \frac{E_g^2}{8R_g} \quad (2.9-5)$$

b. 信号源的阻抗匹配

如图2.9-3所示传输系统，如果 $Z_i \neq Z_0$ ，则 $\Gamma_i \neq 0$ ，在负载端将产生反射波。此反射波传至电源端，如果 $Z_g \neq Z_0$ ，则 $\Gamma_g \neq 0$ ，电源端也要产生反射，进而在传输系统中不断产生反射。而

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$$

$$\Gamma_t = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}$$

下面我们来求这样多次反射的结果，线上任一点 d 的电压和电流表示式。

如图 2.9-3 所示，信号源向传输线发出的

起始电压和电流为

$$U_0 = \frac{E_g Z_0}{Z_g + Z_0} \quad (2.9-6)$$

和

$$I_0 = \frac{E_g}{Z_g + Z_0} \quad (2.9-7)$$

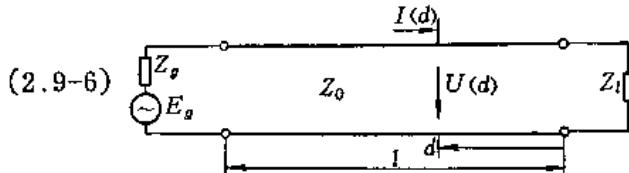


图 2.9-3 未匹配传输线上任一点的电压和电流

于是传到 d 处的电压为 $U_0 e^{-j\beta(l-d)}$ ，继续传至负载并产生反射，到 d 处的反射波为 $\Gamma_t U_0 e^{-j\beta(l+d)}$ ；再继续传至电源并产生反射，至 d 处变为 $\Gamma_t \Gamma_g U_0 e^{-j\beta(3l-d)}$ 。此过程继续下去，则在 d 处的电压波为一无穷级数，即

$$\begin{aligned} U(d) &= U_0 e^{-j\beta(l-d)} + \Gamma_t U_0 e^{-j\beta(l+d)} + \Gamma_t \Gamma_g U_0 e^{-j\beta(3l-d)} \\ &\quad + \Gamma_t \Gamma_g \Gamma_t U_0 e^{-j\beta(5l+d)} + \Gamma_t \Gamma_g \Gamma_t \Gamma_g U_0 e^{-j\beta(5l-d)} + \dots \\ &= U_0 e^{-j\beta l} (e^{j\beta d} + \Gamma_t e^{-j\beta d}) \\ &\quad \cdot [1 + \Gamma_t \Gamma_g e^{-j2\beta l} + (\Gamma_t \Gamma_g e^{-j2\beta l})^2 + (\Gamma_t \Gamma_g e^{-j2\beta l})^3 + \dots] \end{aligned}$$

上式中括号内的项为一几何级数，其和等于 $1/(1 - \Gamma_t \Gamma_g e^{-j2\beta l})$ 。因此得到

$$\begin{aligned} U(d) &= U_0 e^{-j\beta l} (e^{j\beta d} + \Gamma_t e^{-j\beta d}) \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_t \Gamma_g e^{-j2\beta l}} \\ &= \frac{E_g Z_0}{Z_g + Z_0} \cdot \frac{e^{-j\beta l}}{1 - \Gamma_t \Gamma_g e^{-j2\beta l}} (e^{j\beta d} + \Gamma_t e^{-j\beta d}) \quad (2.9-8) \end{aligned}$$

同理可得到经多次反射后， d 处的电流为

$$I(d) = \frac{E_g}{Z_g + Z_0} \cdot \frac{e^{-j\beta l}}{1 - \Gamma_t \Gamma_g e^{-j2\beta l}} (e^{j\beta d} - \Gamma_t e^{-j\beta d}) \quad (2.9-9)$$

式 (2.9-8) 和 (2.9-9) 与传输线方程的解形 (2.2-24) 完全相同。由此可见，为了消除电源的反射，就要求 $\Gamma_g = 0$ ，或者 $Z_g = Z_0$ 。满足 $Z_g = Z_0$ 的电源称为匹配电源。

在实用中， $Z_t = Z_0$ 的条件难以完全做到。为此，通常在电源后面接一个隔离器，吸收负载产生的反射波，消除或者减弱负载不匹配对信号源的影响。

(2) 负载与传输线的阻抗匹配

负载的阻抗匹配即使 $Z_t = Z_0$ ，此时负载不产生反射波，线上载行波。

2. 阻抗匹配的方法

这里只讨论负载与传输线的阻抗匹配。其方法是在负载与传输线之间加入一匹配装置，如图 2.9-4 所示。对匹配装置的基本要求是引入的附加损耗尽量小、频带宽、能适应各种负载（可调节）。最基本的匹配装置是 $\lambda/4$ 变换器、支节匹配器和指数线变换器。

(1) $\lambda/4$ 变换器

$\lambda/4$ 变换器或 $\lambda/4$ 匹配线，由一段特性阻抗为 Z_{01} 的 $\lambda/4$ 线段构成，如图 2.9-5 所示。此时有

$$Z_{in} = \frac{Z_{01}^2}{R_l} \quad (2.9-10)$$

当匹配时, $Z_{in}=Z_0$, 则得

$$Z_{01} = \sqrt{Z_0 \cdot R_l} \quad (2.9-11)$$

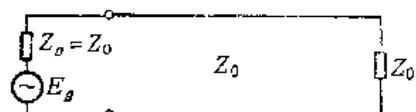
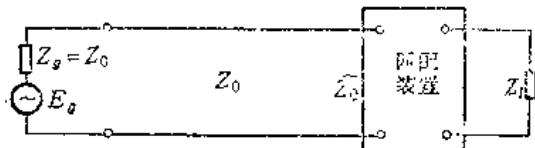


图2.9-4 负载的阻抗匹配

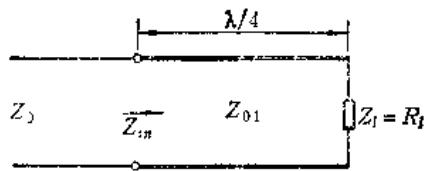


图2.9-5 $\lambda/4$ 变换器

据此可以计算 $\lambda/4$ 线所要求的特性阻抗值, 进而计算其尺寸。

需要指出注意的是, $\lambda/4$ 线只能匹配纯电阻负载。如果负载不是纯电阻, 仍要采用 $\lambda/4$ 线进行匹配时, 需将 $\lambda/4$ 线接在离负载一段距离的电压波节或电压波腹处。此距离可用圆图求得。

$\lambda/4$ 变换器的缺点之一是频带窄。当阻抗变换比 Z_0/R_l 过大或为了能宽带工作, 可采用两节或多节 $\lambda/4$ 变换器。如图2.9-6所示两节 $\lambda/4$ 变换器, 当满足如下关系时可获得最佳匹配效果:

$$\left(\frac{Z_0}{Z_{02}} \right)^2 = \frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \left(\frac{Z_{01}}{R_l} \right)^2 \quad (2.9-12)$$

(2) 支节匹配器

支节匹配法的原理是利用短路或开路短截线 (称为支节) 的电纳来抵消其接入处传输线上的电纳而达到匹配目的的。它分单支节匹配、双支节匹配、三支节匹配等。下面分别加以讨论。

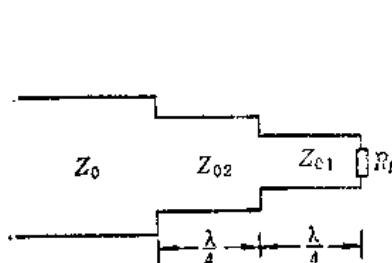


图2.9-6 双节 $\lambda/4$ 变换器

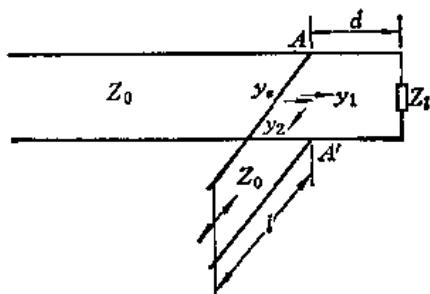


图2.9-7 单支节匹配

a. 单支节匹配

单支节匹配装置的原理图如图2.9-7所示, 是由在主传输线距负载 d 处并联一长度为 l 的支节 (通常采用短路支节, 如图示) 构成的。

如图2.9-7所示, 一般 $Z_l \neq Z_0$, 在传输线上总可以找到 $A-A'$ 处, 其归一化导纳 $y_1=$

$1+jb_1$, 我们在 $A-A'$ 处并联归一化电纳 $y_2 = -jb_1$ 的短路支节, 即可使 $y_s = 1$, 达到匹配。 d 和 l 的长度可用圆图计算。

例2.9-1 特性阻抗 Z_0 为 50Ω 的无耗线终端接 Z_l 为 $25 + j 75\Omega$ 的负载, 采用单支节匹配, 如图2.9-8(a)所示, 求支节的位置和长度。

解

(1) 归一化负载阻抗

$$z_l = \frac{25 + j 75}{50} = 0.5 + j 1.5$$

在阻抗圆图上标出此点, 如图 2.9-8(b) 所示, 查得 $\Gamma_l = 0.74/64^\circ$, $\rho = 6.7$, 相应的归一化负载导纳

$$y_l = 0.2 - j 0.6, \text{ 其电刻度为 } 0.412$$

(2) 由 y_l 沿等 $|\Gamma_l|$ 圆顺时针旋转与 $g_s = 1$ 的圆交于两点:

$$y_1 = 1 + j 2.2 \text{ 电刻度为 } 0.192\lambda$$

$$y'_1 = 1 - j 2.2 \text{ 电刻度为 } 0.308\lambda$$

(3) 支节的位置求得为

$$d = 0.088\lambda + 0.192\lambda = 0.28\lambda$$

$$d' = 0.088\lambda + 0.308\lambda = 0.396\lambda$$

(4) 短路支节的归一化输入电纳

$$y_2 = -j 2.2$$

$$y'_2 = +j 2.2$$

(5) 短路支节的长度, 由于其负载为 $y_l = \infty$, 位于实轴右端点, 所以由此点向所要求的支节电纳旋转即得到短路支节的长度。因此

$$l = 0.318\lambda - 0.25\lambda = 0.068\lambda$$

$$l' = 0.25\lambda + 0.182\lambda = 0.432\lambda$$

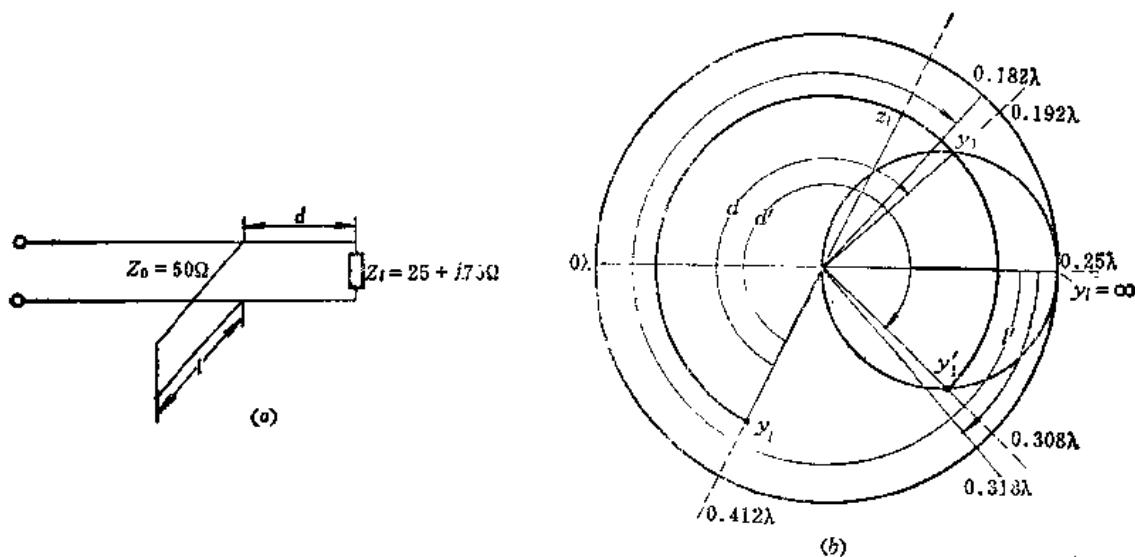


图2.9-8 例2.9-1单支节匹配问题

需要指出的是, 匹配的解答有二对值, 通常选取其中较短的一对。

支节匹配的 d 和 l 值也可以用解析法计算。为了与用圆图计算结果进行比较, 以说

明圆图计算的精度，下面我们来导出 d 和 l 的解析式子。

支节连接处向负载看去的归一化导纳为

$$y_1 = \frac{1 - |\Gamma_i|e^{j(\phi_i + 2\beta d)}}{1 + |\Gamma_i|e^{j(\phi_i + 2\beta d)}} = g_1 + jb_1 \quad (2.9-13)$$

有理化后得到

$$g_1 = \frac{1 - |\Gamma_i|^2}{1 + |\Gamma_i|^2 + 2|\Gamma_i|\cos(\phi_i + 2\beta d)} \quad (2.9-14)$$

和

$$b_1 = \frac{-2|\Gamma_i|\sin(\phi_i + 2\beta d)}{1 + |\Gamma_i|^2 + 2|\Gamma_i|\cos(\phi_i + 2\beta d)} \quad (2.9-15)$$

匹配时， $g_1 = 1$ ，则由式 (2.9-14) 得

$$\cos(\phi_i + 2\beta d) = -|\Gamma_i|$$

由此得到支节位置

$$d = \frac{\phi_i + \pi - \arccos(|\Gamma_i|)}{2\beta} \quad (2.9-16)$$

将式 (2.9-16) 代入式 (2.9-15)，得到 d 处的归一化电纳

$$b_1 = \frac{-2|\Gamma_i|\sin(\arccos(-|\Gamma_i|))}{1 - |\Gamma_i|^2} \quad (2.9-17)$$

设支节的特性阻抗与主传输线相同，则支节的归一化输入电纳值为

$$b_2 = -\operatorname{ctg} \beta l \quad (2.9-18)$$

匹配时， $b_1 = -b_2$ ，于是

$$\operatorname{ctg} \beta l = \frac{-2|\Gamma_i|\sin(\arccos(-|\Gamma_i|))}{1 - |\Gamma_i|^2}$$

由此求得支节长度

$$l = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{1 - |\Gamma_i|^2}{2|\Gamma_i|\sin(\arccos(-|\Gamma_i|))} \quad (2.9-19)$$

利用例2.9-1的数据 ($\Gamma_i = 0.74/64^\circ$)，代入式 (2.9-16)，得到

$$d = \frac{(64/360)(2\pi) + \pi - \arccos 0.74}{4\pi} \lambda = 0.339\lambda \pm 0.059\lambda$$

即得到

$$d = 0.28\lambda \text{ 或 } d' = 0.398\lambda$$

由式 (2.9-19)，

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{0.453}{1.48\sin(\arccos(-0.74))} = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} (\pm 0.455)$$

即求得

$$l = 0.068\lambda \text{ 或者 } l' = 0.431\lambda$$

所计算得到的 d 和 l 值与用圆图求得的一致。这个例子说明，利用阻抗圆图计算不仅快，而且结果也相当准确。

例2.9-2 双级微波晶体管放大器的前级输出端反射系数 Γ_1 为 $0.79/-81.9^\circ$ ，后级输入端反射系数 Γ_2 为 $0.40/165^\circ$ ，如图2.9-9(a) 所示，设计一匹配装置使两者共轭匹配。

解 在圆图上读取 Γ_1 , 其相应的导纳点为 Γ_{1s} , 电刻度为 0.114λ , 如图 2.9-9(b) 所示。以 Γ_{1s} 沿等 $|\Gamma|$ 圆顺时针方向旋转交 $g=1$ 的圆于点 A , 得到

$$y_A = 1 + j 2.5 \text{ 电刻度为 } 0.197\lambda$$

于是

$$l_1 = 0.197\lambda - 0.114\lambda = 0.083\lambda$$

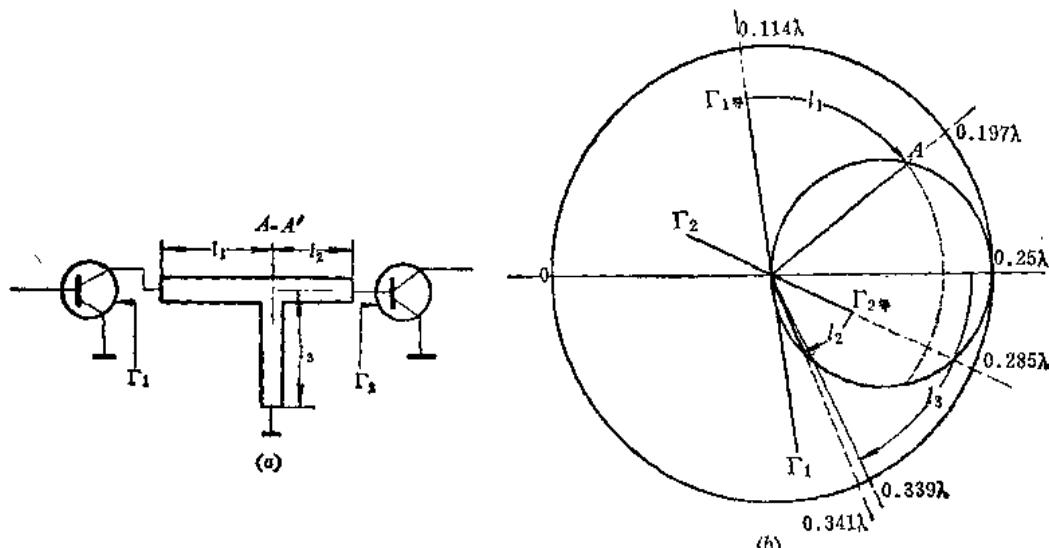


图2.9-9 例2.9-2共轭匹配问题

在圆图上查得 Γ_2 , 其相应的导纳点为 Γ_{2s} , 电刻度为 0.285λ , 以 Γ_{2s} 沿等 $|\Gamma|$ 圆顺时针旋转交 $g=1$ 的圆于 A' , 得到

$$y_{A'} = 1 - j 0.9, \text{ 电刻度为 } 0.341\lambda$$

于是

$$l_2 = 0.341\lambda - 0.285\lambda = 0.056\lambda$$

为了抵消 $A-A'$ 处的电纳, 需并联一个 $y_s = -j 1.6$ 的短路支节, 其长度由圆图查得为

$$l_s = 0.339\lambda - 0.25\lambda = 0.089\lambda$$

需要指出的是, 此例解答并非单值, 如图 2.9-9(b) 所示, 沿等 $|\Gamma_{1s}|$ 旋转与 $g=1$ 的圆还有一个交点, 相应的可求得另一组解。另外, 也可沿等 $|\Gamma_{1s}|$ 旋转与 $g \neq 1$ 的圆相交, 只要支节抵消 $A-A'$ 处的电纳, 仍可实现共轭匹配。故此例共轭匹配的解答为多值。

b. 双支节匹配

单支节匹配器的支节位置 d 必须加以调节。这对同轴线难以实现。解决的办法可以采用双支节匹配。

双支节匹配器是在主传输线某处并联两个可调支节(通常为短路支节)构成, 两支节之间的距离固定, 一般选取为 $\lambda/8$ 、 $\lambda/4$ 、 $3\lambda/8$ 等, 但不能取 $\lambda/2$, 如图 2.9-10 所示。

双支节匹配的原理可以用圆图来说明。如图 2.9-10 所示, 当匹配时, $y_b = 1$ 。这就

必须使 $y_3 = 1 + jb_3$, 即应使 y_3 落在 $g = 1$ 的圆上, 如图2.9-11所示, 然后利用调节 l_2 的长度来抵消 $B-B'$ 处的电纳分量从而达到匹配。为此, 就要求 y_4 落在辅助圆上 (图2.9-11所示为 $d_2 = \lambda/8$ 的情况), 这可以利用调节 l_1 来达到。 l_1 和 l_2 的值分别由 y_2 和 y_4 的值确定。

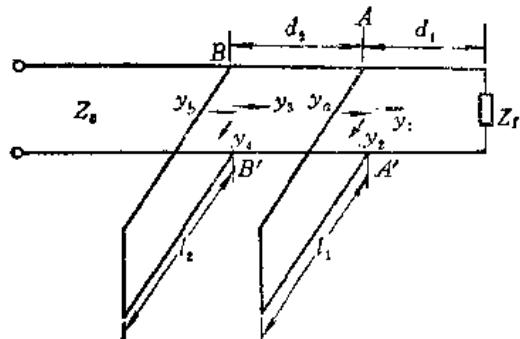


图2.9-10 双支节匹配

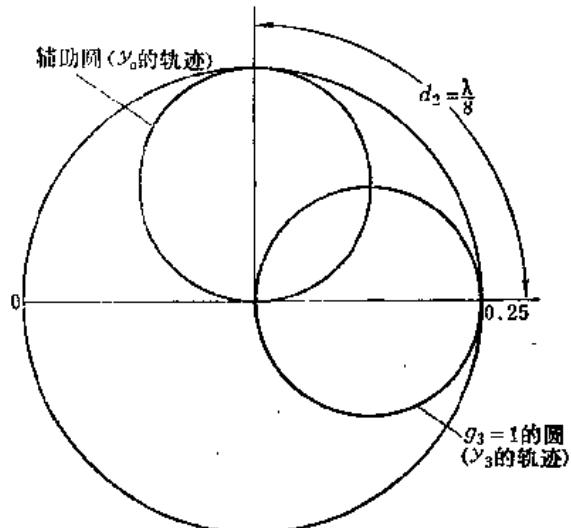


图2.9-11 双支节匹配原理说明图

例2.9-3 如图2.9-12(a) 所示同轴线双支节匹配器, 求支节长度 l_1 和 l_2 。

解 归一化负载阻抗为

$$z_f = 2 + j1$$

其相应的归一化负载导纳为

$$y_t = 0.4 - j0.2$$

如图2.9-11(b) 所示, 其对应的电刻度为0.463。

以 y_t 沿等 $|\Gamma|$ 圆顺时针旋转 $\lambda/8$ 得到

$$y_1 = 0.5 + j0.5 \text{ 电刻度为 } 0.088$$

以 y_1 沿等 $g_1 = 0.5$ 的圆旋转交辅助圆于

$$y_2 = 0.5 + j0.14$$

于是

$$y_2 = j0.14 - j0.5 = -j0.36$$

由 y_2 在圆图上的位置查得

$$l_1 = (0.445 - 0.25)\lambda = 0.195\lambda$$

以 y_4 沿等 $|\Gamma|$ 圆顺时针旋转 $\lambda/8$, 得到

$$y_4 = 1 + j0.72$$

于是

$$y_4 = -j0.72$$

查得

$$l_2 = (0.405 - 0.25)\lambda = 0.155\lambda$$

需要指出的是, 双支节匹配也有两对解答, 上面我们所求的是较短的一对解答。

双支节匹配存在得不到匹配的盲区。如图2.9-12(b)所示, 当 d_2 为 $\lambda/8$ 时, 如果 y_1 落在 $g > 2$ 的阴影圆内, 则沿等 g_1 圆旋转不可能与辅助圆有交点, 因此不能获得匹配。同理, 当 d_2 为 $\lambda/4$ 时, y_1 落在 $g > 1$ 的圆内也得不到匹配。为了克服此缺点, 可以采用三支节或四支节匹配器。

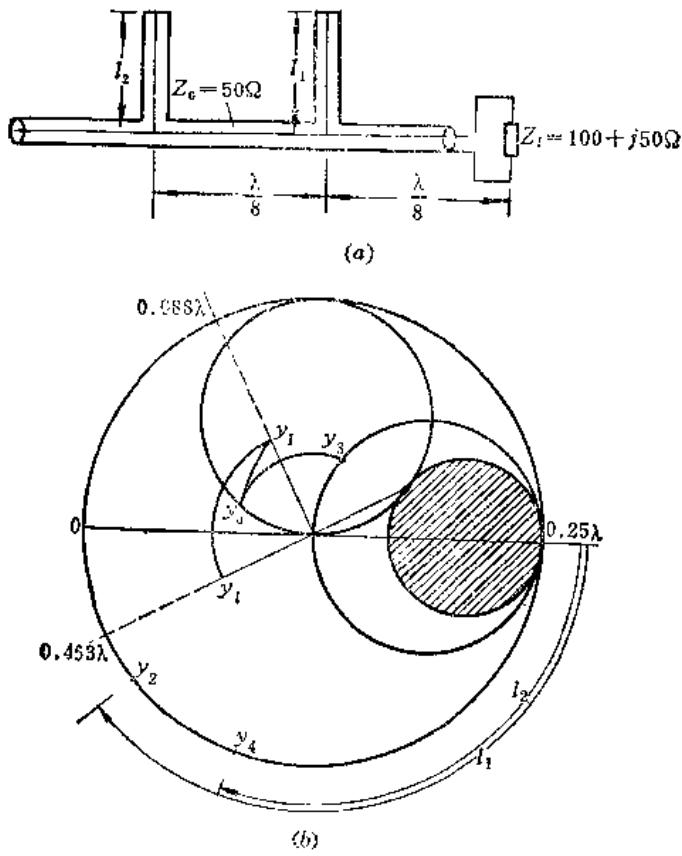


图2.9-12 例2.9-3的双支节匹配问题

c. 三支节匹配

如图2.9-13所示三支节匹配器, 在 d_2 为 $\lambda/8$ 情况下, 当 y_1 落于 $g > 2$ 的圆内时, 则不用第一个支节, 用第二、三支节一定可以达到匹配; 如 y_1 未落于 $g > 2$ 的圆内, 则用第一、二支节即可达到匹配。可见, 三支节匹配器可对任何 $g \neq 0$ 的负载阻抗进行匹配。

(3) 指数线阻抗变换器

上述匹配方法的频带比较窄, 为了宽频带工作, 可以采用指数线阻抗变换器(简称指数线)进行匹配。

指数线是一种不均匀传输线, 其特性阻抗沿线按指数规律变化。它可以通过改变线间距离或导线的直径来构成, 如图2.9-14所示。如果其单位长度内的阻抗渐变很小, 则这种指数线可用作宽频带阻抗变换器。在主传输线与负载之间接入一段指数线, 可将一个大的(或小的)电阻负载同特性阻抗较小的(或较大的)传输线在一个较宽的频带范围内得

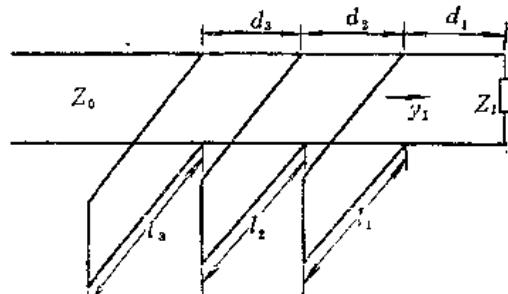


图2.9-13 三支节匹配器

到匹配。

下面我们来求指数线的匹配条件。

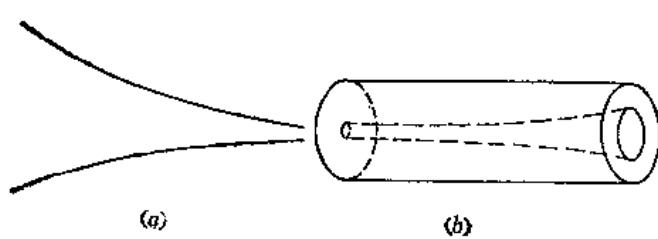


图2.9-14 指数线的结构示意图
(a) 双导线指数线; (b) 同轴线指数线。

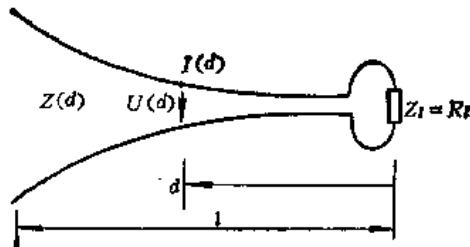


图2.9-15 指数线及其坐标

如图2.9-15所示指数线，传输线方程为（为了避免与距离坐标相混，微分符号用 ∂ 表示）

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U(d)}{\partial d} &= Z(d) I(d) \\ \frac{\partial I(d)}{\partial d} &= Y(d) U(d) \end{aligned} \right\} \quad (2.9-20)$$

式中， $Z(d) = R(d) + j\omega L(d)$ ， $Y(d) = G(d) + j\omega C(d)$ 分别是指数线单位长度的串联阻抗和并联导纳，它们都是距离 d 的函数。

由式(2.9-20)消去 $I(d)$ ，得到

$$\frac{\partial^2 U(d)}{\partial d^2} - \frac{\partial U(d)}{\partial d} \left[\frac{1}{Z(d)} \cdot \frac{\partial Z(d)}{\partial d} \right] - Z(d) Y(d) U(d) = 0$$

因为 $\partial \ln Z(d)/\partial d = 1/Z(d) \cdot \partial Z(d)/\partial d$ ，所以上式变为

$$\frac{\partial^2 U(d)}{\partial d^2} - \frac{\partial}{\partial d} (\ln Z(d)) \frac{\partial U(d)}{\partial d} - Z(d) Y(d) U(d) = 0 \quad (2.9-21)$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 I(d)}{\partial d^2} - \frac{\partial}{\partial d} (\ln Y(d)) \frac{\partial I(d)}{\partial d} - Z(d) Y(d) I(d) = 0 \quad (2.9-22)$$

式(2.9-21)和(2.9-22)称为非均匀传输线方程。任意的非均匀传输线方程可用李代数方法求解，但求解过程比较复杂，这里不去讨论，只讨论指数线情况下的解。

如图2.9-15所示，指数线上任一点的电感和电容分别为

$$L(d) = L(0) e^{bd} \quad (2.9-23)$$

$$C(d) = C(0) e^{-bd} \quad (2.9-24)$$

式中， $L(0)$ 和 $C(0)$ 为负载端线上的电感和电容， b 为渐变常数。因此指数线的特性阻抗为

$$Z_0(d) = \sqrt{\frac{L(d)}{C(d)}} = \sqrt{\frac{L(0)}{C(0)}} e^{bd} = Z_0(0) e^{bd} \quad (2.9-25)$$

式中 $Z_0(0)$ 为负载端线的特性阻抗。

将式(2.9-23)~(2.9-25)代入式(2.9-21)和(2.9-22)，并考虑到在微波情况下， $R(d) \ll \omega L(d)$ ， $G(d) \ll \omega C(d)$ ，得到方程

$$\frac{\partial^2 U(d)}{\partial d^2} - \delta \frac{\partial U(d)}{\partial d} + \beta^2 U(d) = 0 \quad (2.9-26)$$

$$\frac{\partial^2 I(d)}{\partial d^2} + \delta \frac{\partial I(d)}{\partial d} + \beta^2 I(d) = 0 \quad (2.9-27)$$

式 (2.9-26) 和 (2.9-27) 为无耗指数线方程, 式中 $\beta = \omega \sqrt{L(d)C(d)}$ 。此式的一般解为

$$\left. \begin{aligned} U(d) &= e^{-\frac{\delta}{2}d} (A_1 e^{j\beta' d} + B_1 e^{-j\beta' d}) \\ I(d) &= e^{-\frac{\delta}{2}d} (A_2 e^{j\beta' d} - B_2 e^{-j\beta' d}) \end{aligned} \right\} \quad (2.9-28)$$

式中, A_1 , A_2 , B_1 , B_2 分别为积分常数, β' 为指数线的相位因数, 且

$$\beta' = \sqrt{\beta^2 - \frac{\delta^2}{4}} \quad (2.9-29)$$

将式 (2.9-28) 代入式 (2.9-20), 可得到关系

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= A_1 \left[-j \frac{\delta}{2\beta} + \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta} \right)^2} \right] Z_0(0) \\ B_2 &= B_1 \left[-j \frac{\delta}{2\beta} - \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta} \right)^2} \right] Z_0(0) \end{aligned} \right\} \quad (2.9-30)$$

而 A_1 和 B_1 可由边界条件确定。设负载端的电压 $U(0) = U_L$, 电流 $I(0) = U_L/Z_L = I_L$, 代入式 (2.9-30) 联立解得

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{U_L \left[j \frac{\delta}{2\beta} + \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta} \right)^2} \right] + I_L Z_0(0)}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta} \right)^2}} \\ B_1 &= \frac{U_L \left[-j \frac{\delta}{2\beta} + \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta} \right)^2} \right] - I_L Z_0(0)}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta} \right)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.9-31)$$

将式 (2.9-31) 和 (2.9-30) 代入式 (2.9-28) 即可得到已知终端电压和电流时指数线上任一点的电压和电流表示式。

使用时是将指数线接于主传输线与负载之间, 因此指数线必须同时与主传输线和负载匹配。

为使指数线与负载匹配, 式 (2.9-28) 中的反射波应为零, 则须 $B_1 = 0$ 。由式 (2.9-31), 得到

$$U_L \left[-j \frac{\delta}{2\beta} + \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta} \right)^2} \right] - I_L Z_0(0) = 0$$

或者

$$Z_t = \frac{Z_0(0)}{-j\frac{\delta}{2\beta} + \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta}\right)^2}} \quad (2.9-32)$$

由式 (2.9-28) 和 (2.9-30) 可得到指数线的输入阻抗为

$$Z_{in} = \frac{A_1}{A_2} e^{\delta t} = \frac{Z_0(0)}{-j\frac{\delta}{2\beta} + \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta}\right)^2}} e^{\delta t} = Z_t e^{\delta t} \quad (2.9-33)$$

由式 (2.9-32) 和 (2.9-33) 可知，指数线的匹配阻抗均为复数。当负载阻抗等于式 (2.9-32) 时，指数线与负载匹配；当主传输线特性阻抗等于式 (2.9-33) 时，主传输线与指数线匹配。这在实际上是比较困难的。但是，如果指数线的特性阻抗变化很慢， $\delta/2\beta \ll 1$ ，则由式 (2.9-32) 得到

$$Z_t = Z_0(0) \quad (2.9-34)$$

由式 (2.9-33) 得到

$$Z_{in} = Z_0(0) e^{\delta t} = Z_0(1) \quad (2.9-35)$$

这说明，当指数线的特性阻抗变化很慢时，负载阻抗等于指数线终端的特性阻抗，指数线始端的特性阻抗等于主传输线的特性阻抗，就可以同时达到匹配。

式 (2.9-34) 和 (2.9-35) 是在 $\delta/2\beta \ll 1$ 条件下得到的指数线的近似匹配条件。但式 (2.9-32) 和 (2.9-33) 说明指数线的输入阻抗一般为复阻抗，而主传输线的特性却是纯电阻，因此在指数线与主传输线连接处将产生反射。其反射的大小取决于指数线特性阻抗变化的快慢。渐变常数 δ 愈小，这种反射就愈小。然而 δ 愈小，指数线要求愈长。因此，有时宁可允许主传输线上存在一定反射，而使指数线不致过长。

为了求得在给定的最大反射系数条件下指数线的最短长度，就需要找出指数线反射系数与 δ 的关系。对于无耗指数线，其上反射系数的模就等于终端反射系数的模。由式 (2.9-28) 和 (2.9-31) 得到终端反射系数

$$\begin{aligned} \Gamma_t &= \frac{U_t}{U_1} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{U_1 \left[-j\frac{\delta}{2\beta} + \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta}\right)^2} \right] - I_t Z_0(0)}{U_1 \left[j\frac{\delta}{2\beta} + \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta}\right)^2} \right] + I_t Z_0(0)} \\ &= \frac{Z_t \left[-j\frac{\delta}{2\beta} + \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta}\right)^2} \right] - Z_0(0)}{Z_t \left[j\frac{\delta}{2\beta} + \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta}\right)^2} \right] + Z_0(0)} \\ &= \frac{Z_t \left[-\frac{\delta}{2} + j\beta \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta}\right)^2} \right] - j\beta Z_0(0)}{Z_t \left[-\frac{\delta}{2} + j\beta \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2\beta}\right)^2} \right] + j\beta Z_0(0)} \end{aligned} \quad (2.9-36)$$

对于缓变指数线， $\delta/2\beta \ll 1$ ， $Z_t \approx Z_0(0)$ ，于是

$$\Gamma_t = \frac{-\frac{\delta}{2} + j\beta - j\beta}{-\frac{\delta}{2} + j\beta + j\beta} = \frac{-\frac{\delta}{2}}{-\delta + j4\beta} \quad (2.9-37)$$

反射系数的模为

$$|\Gamma_t| = \sqrt{\delta^2 + (4\beta)^2} \approx \frac{\delta}{4\beta} \quad (2.9-38)$$

当 $Z_t = Z_0(0)$ 时，指数线输入阻抗为 $Z_{in} = Z_0(0)e^{\delta t}$ 。为了跟主传输线匹配， Z_{in} 应等于主传输线的特性阻抗 Z_0 ，即应有

$$Z_0 = Z_0(0)e^{\delta t} \quad (2.9-39)$$

由此求得指数线的长度为

$$t = \left| -\frac{1}{\delta} \ln \frac{Z_0}{Z_0(0)} \right| = \left| -\frac{1}{\delta} \ln \frac{Z_0}{Z_t} \right| \quad (2.9-40)$$

以式 (2.9-38) 代入式 (2.9-40)，即得到给定最大反射系数条件下指数线最短长度

$$t = \frac{1}{4\beta |\Gamma_t|} \left| \ln \frac{Z_0}{Z_t} \right| = \frac{\lambda}{8\pi |\Gamma_t|} \left| \ln \frac{Z_0}{Z_t} \right| \quad (2.9-41)$$

式中 λ 为工作波长；如果工作波长为一个范围，则应取 λ_{max} 计算。

假如所要匹配的阻抗 (Z_0 和 R_t) 相差不大， δ 很小，指数线可近似作成直线过渡，以便于加工。

2.10 传输线的时域分析

本节讨论传输线的时域特性及其分析方法。

1. 时域和频域概念

实用的传输系统有两种工作体制，即频域体制和时域体制，如图2.10-1所示。在频域体制中，信号源电压是角频率为 ω 、时间为 t 的简谐函数，信号源和负载的电路特性分别可用与角频率 ω 有关的阻抗 $Z_s(\omega)$ 和 $Z_t(\omega)$ 来表示。而在时域体制中，信号源电压是时间 t

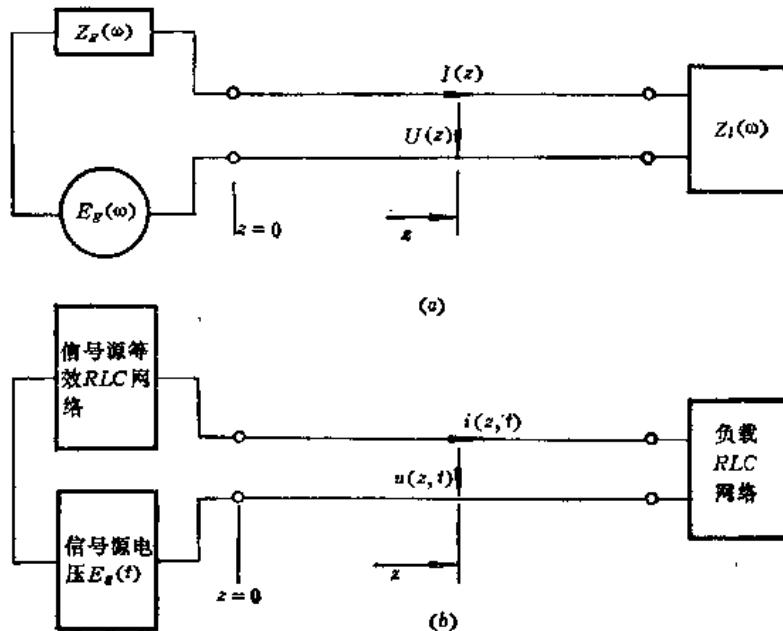


图2.10-1 两种传输体制
(a) 频域体制; (b) 时域体制。

的任意函数，信号源和负载的电路特性须用电阻、电感和电容组成的网络来表示。前面各节所述均属于传输线的频域分析。本节讨论传输线的时域分析问题。

传输线的频域分析问题所要求的是某特定频率下的稳态电压和稳态电流，即要求传输线上任意点的电压和电流复有效值。在微波网络中研究的就属于这种稳态情况。

传输线的时域分析问题则主要是研究传输线上信号的失真问题，分析信号传输的瞬态变化情况。

实际传输系统中的信号总包含有一定的频带宽度，而传输线的性能也总是和频率有一定的关系。这样，当信号在传输线上传输时总要产生一定的失真。分析信号在传输线上传输时的这种瞬态变化响应便是时域分析的任务之一。应用传输线的时域分析原理构成的时域反射计便可以用来分析和研究传输系统内不均匀性的性质和位置。

2. 时域传输线方程及其解

时域传输线方程与式(2.2-3)的形式一样，即

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = -Ri(z, t) - L \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}, \quad (2.10-1)$$

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -Gu(z, t) - C \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \quad (2.10-2)$$

式中， $u(z, t)$ 和*i*(z, t)是距离z、时间t的任意函数，R、L、G和C是传输线的分布参数。

为了便于求解，将式(2.10-1)对z取偏导数，并以式(2.10-2)代入，得到方程

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - RG u(z, t) = 0 \quad (2.10-3)$$

同样可得

$$\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} - RG i(z, t) = 0 \quad (2.10-4)$$

对于无耗线， $R = 0$ ， $G = 0$ ，式(2.10-3)和(2.10-4)简化为

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.10-5)$$

$$\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.10-6)$$

其一般解为

$$u(z, t) = f(t - \sqrt{LC}z) + g(t + \sqrt{LC}z) = f\left(t - \frac{z}{v_p}\right) + g\left(t + \frac{z}{v_p}\right) \quad (2.10-7)$$

$$\begin{aligned} i(z, t) &= \frac{1}{Z_0} [f(t - \sqrt{LC}z) - g(t + \sqrt{LC}z)] \\ &= \frac{1}{Z_0} \left[f\left(t - \frac{z}{v_p}\right) - g\left(t + \frac{z}{v_p}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.10-8)$$

式中， $v_p = 1/\sqrt{LC}$ 是波的传播速度， Z_0 是传输线的特性阻抗，式(2.10-7)和(2.10-8)中右边第一项代表滞后波，第二项代表超前波。

3. 时域传输线特性的分析方法

如上所述，传输线的时域分析即是对传输线上的电压、电流信号的瞬态分析。常用

的分析方法有时空图解法和拉普拉斯变换法。下面分别加以介绍。

(1) 时空图解法

如图2.10-2所示传输系统，设线长为 l ，负载阻抗为电阻 R_l 。由式(2.10-7)和(2.10-8)可知，传输线上任一点的电压和电流为滞后波和超前波之叠加，即入射波和反射波之叠加，可表示为

$$u(z, t) = u^+(z, t) + u^-(z, t) \quad (2.10-9)$$

$$i(z, t) = i^+(z, t) + i^-(z, t) = \frac{1}{Z_0} [u^+(z, t) - u^-(z, t)] \quad (2.10-10)$$

在负载处

$$R_l = \frac{u(l, t)}{i(l, t)} = \frac{u^+(l, t) + u^-(l, t)}{\frac{u^+(l, t) - u^-(l, t)}{Z_0}} \quad (2.10-11)$$

电压反射系数

$$\Gamma_l = \frac{u_l^-}{u_l^+} = \frac{R_l - Z_0}{R_l + Z_0} \quad (2.10-12)$$

式(2.10-11)和(2.10-12)适用于任一时刻 t 。而电压波和电流波是以有限速度在传输线上传播。在 $z = 0$ 处发出的电压波和电流波经周期 $T = l/v_p$ 到达终端。我们可以用时空图来分析线上电压和电流的瞬态变化情况。

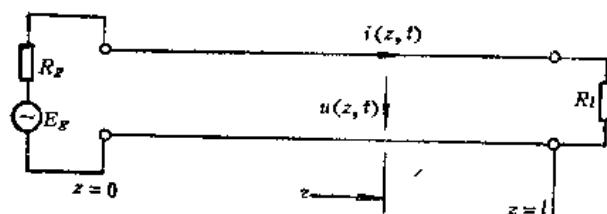


图2.10-2 端接电阻负载的传输线

图2.10-3表示一阶跃电压(或电流)沿无耗线传输的时空图——锯齿图。图中水平轴表示位置(将线长 l 分成若干小段)，垂直轴表示时间 t 。在起始点 $(0, 0)$ 由电源发出的电压波 u_0 以斜率 $\Delta t/\Delta z = 1/v_p$ 在图示“空间”传输，在 $t = T = l/v_p$ 时刻到达终端 l 处。在 T 时刻之前的时空内， $u = 0$ ，在 T 时刻之后 $u = u_0$ ；波在 $z = l$ 处产生反射，反射系数为 Γ_l ，反射波电压为 $u_1 = \Gamma_l u_0$ ，在 $t = 2T$ 时刻到达始端，在 $2T$ 之前的时空内， $u = u_0$ ，在 $2T$ 之后 $u = u_0 + u_1$ 。如果 $R_s \neq Z_0$ ，波在始端又要产生反射，反射系数为 Γ_s ，反射波电压为 $u_2 = \Gamma_s u_1 = \Gamma_s \Gamma_l u_0$ 。如此不断反射下去。如果 $R_s = Z_0$ ，则只需考虑负载的一次反射即达到稳态。

根据时空图可以很方便地确定传输线上任一点在任一时刻的电压(或电流)波形及其数值。

例2.10-1 内阻为 10Ω 、电压为 1V 的电源在 $t = 0$ 时刻接于 10m 长的无耗传输线，线的分布电感和分布电容分别为 10^{-4}H/m 和 $4 \times 10^{-8}\text{F/m}$ ，终端负载电阻为 30Ω 。试用时空图求 $t = 1.5T$ 和 $2.5T$ 时刻及 $z = l/2$ 处的电压波形。

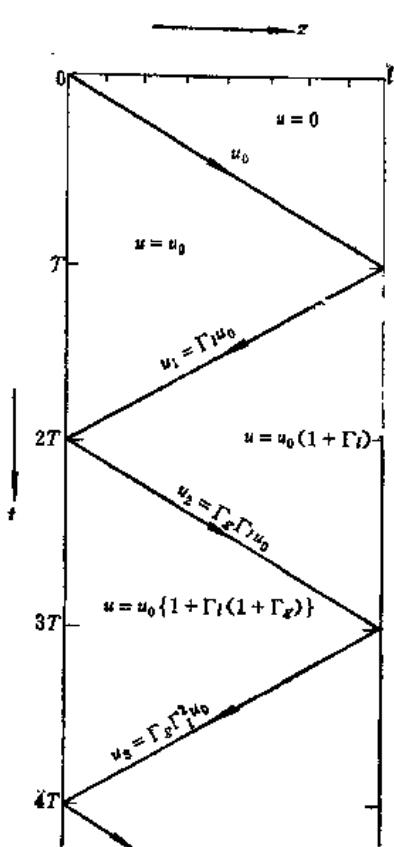


图2.10-3 锯齿形时空图

解 传输线的特性阻抗

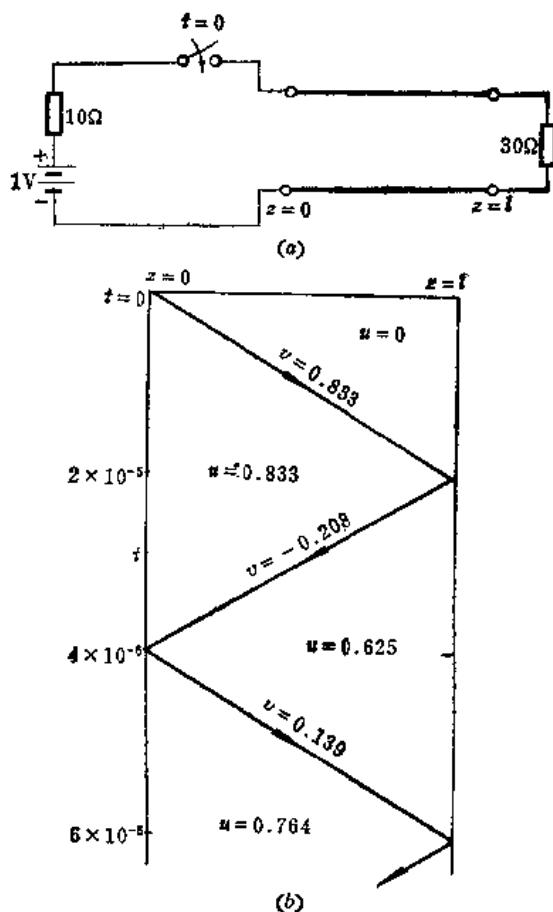


图2.10-4 例2.10-1 的电路与时空图

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 50(\Omega)$$

波的传播速度求得为

$$v_p = 5 \times 10^5 \text{ m/s}$$

传输周期

$$T = l/v_p = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$$

终端反射系数

$$\Gamma_I = \frac{30 - 50}{30 + 50} = -0.25$$

始端反射系数

$$\Gamma_S = \frac{10 - 50}{10 + 50} = -0.667$$

电路图及其时空图如图2.10-4所示。在 $t = 0$ 时刻电源发出的电压波 $u_0 = 5/6 \text{ V}$ ，此波在 T 时刻到达终端并产生一反射波 $u_1 = -0.25 \times 5/6 = -0.208 \text{ V}$ ；此波在 $2T$ 时刻传到始端并产生反射波 $u_2 = 0.139 \text{ V}$ 。如此不断产生反射。图2.10-5表示在 $t = 1.5T$ 和 $2.5T$ 时刻沿线的电压波形，及电压在 $z = l/2$ 处的时间波形。

(2) 拉普拉斯变换法

时域分析的拉普拉斯变换方法是利用拉普拉斯变换把时域问题变成频域问题来求解，因为频域问题的求解是大家比较熟悉的；有的问题已经有现成的解答。然后利用拉普拉斯反变换将频域解变成时域解。

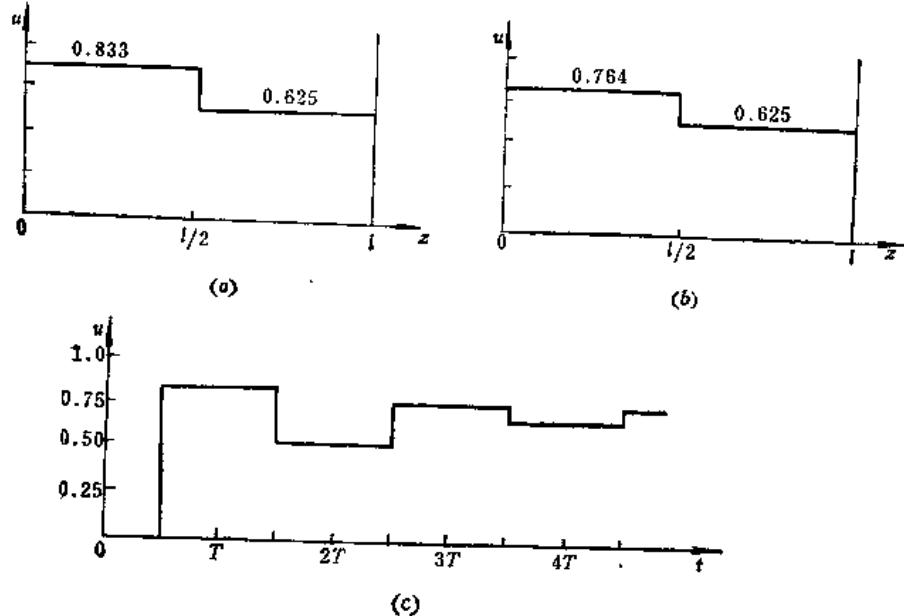


图2.10-5 例2.10-1的电压波形

(a) $t = 1.5T$ 时刻; (b) $t = 2.5T$ 时刻; (c) $z = l/2$ 处。

我们从时域传输线方程式(2.10-1)和(2.10-2)开始分析。我们首先将此两式通过拉普拉斯变换变成频域方程。将式(2.10-1)乘以 e^{-st} 并由 $0 \rightarrow \infty$ 积分($s = j\omega$, 称为复频率), 则有

$$\int_0^\infty L \frac{\partial i}{\partial t} e^{-st} dt + \int_0^\infty Rie^{-st} dt = - \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial z} e^{-st} dt \quad (2.10-13)$$

应用部分积分, 有

$$\int_0^\infty L \frac{\partial i}{\partial t} e^{-st} dt = \left[Lie^{-st} \right]_0^\infty + Ls \int_0^\infty ie^{-st} dt = -Li(z, 0) + LsI(z, s) \quad (2.10-14)$$

式中

$$I(z, s) = \int_0^\infty i(z, t) e^{-st} dt \quad (2.10-15)$$

这表明, $I = I(z, s)$ 是 $i(z, t)$ 的拉普拉斯变换。又

$$-\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial z} e^{-st} dt = -\frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty u e^{-st} dt = -\frac{\partial U(z, s)}{\partial z} \quad (2.10-16)$$

式中 $U(z, s)$ 是 $u(z, t)$ 的拉普拉斯变换。

将式(2.10-14)、(2.10-16)代入式(2.10-13), 得到

$$(R + Ls)I(z, s) = -\frac{\partial U(z, s)}{\partial z} + Li(z, 0) \quad (2.10-17)$$

用同样方法, 可将式(2.10-2)变换成

$$(G + Cs)U(z, s) = -\frac{\partial I(z, s)}{\partial z} + Cu(z, 0) \quad (2.10-18)$$

式(2.10-17)和(2.10-18)是用 z 和 s 表示的传输线方程, 称为频域传输线方程。此

方程的求解比较方便。

为求解式(2.10-17)和(2.10-18),由此两式消去 $U(z, s)$,并用 $G + Cs$ 乘式(2.10-17),对式(2.10-18)求 z 的微商,合并得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I(z, s)}{\partial z^2} - (R + Ls)(G + Cs)I(z, s) \\ = C \frac{\partial u(z, 0)}{\partial z} - L(G + Cs)i(z, 0) \end{aligned} \quad (2.10-19)$$

同理可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(z, s)}{\partial z^2} - (R + Ls)(G + Cs)U(z, s) \\ = L \frac{\partial i(z, 0)}{\partial z} - C(R + Ls)u(z, 0) \end{aligned} \quad (2.10-20)$$

令

$$\gamma^2 = (R + Ls)(G + Cs) \quad (2.10-21)$$

则式(2.10-19)和(2.10-20)的通解为

$$I(z, s) = A_1 e^{-\gamma z} + B_1 e^{\gamma z} \quad (2.10-22)$$

$$U(z, s) = A_2 e^{-\gamma z} + B_2 e^{\gamma z} \quad (2.10-23)$$

式中, A_1, B_1, A_2 和 B_2 是与 z 无关的,需由问题边界条件和初始条件确定的. s 的任意函数。

如果我们能由方程(2.10-17)、(2.10-18)、(2.10-19)和(2.10-20)求得 $I(z, s)$ 和 $U(z, s)$,则根据拉普拉斯反变换可求出 $i(z, t)$ 和 $u(z, t)$ 。

如图2.10-6所示传输系统,假设信号 $f(t)$ 未加之前,传输线处于静止状态,则式(2.10-19)和(2.10-20)的右边各项为零,其解为

$$I(z, s) = A_1 e^{-\gamma z} + B_1 e^{\gamma z} \quad (2.10-24)$$

$$U(z, s) = A_2 e^{-\gamma z} + B_2 e^{\gamma z} \quad (2.10-25)$$

式中 A_1, A_2, B_1 和 B_2 是 s 的任意函数。

由式(2.10-17)得到

$$I(z, s) = \frac{-1}{R + Ls} \frac{\partial U(z, s)}{\partial z} \quad (2.10-26)$$

则式(2.10-24)可以写成

$$\begin{aligned} I(z, s) &= \frac{\gamma}{R + Ls} (A_2 e^{-\gamma z} - B_2 e^{\gamma z}) = \sqrt{\frac{G + Cs}{R + Ls}} (A_2 e^{-\gamma z} - B_2 e^{\gamma z}) \\ &= \frac{1}{Z_0} (A_2 e^{-\gamma z} - B_2 e^{\gamma z}) \end{aligned} \quad (2.10-27)$$

式中

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + Ls}{G + Cs}} \quad (2.10-28)$$

为传输线的特性阻抗。

A_2 和 B_2 可根据端接条件确定。在输入端,由于 Z_0 上的电压为 $(f(t) - u(0, t))$,其变换电压方程为

$$Z_0(s)I(0, s) = F(s) - U(0, s) \quad (2.10-29)$$

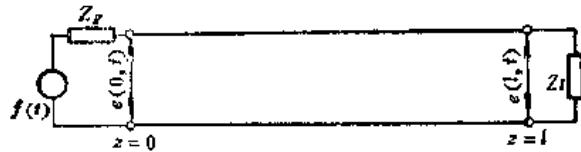


图2.10-6 端接阻抗的有限长传输线

式中

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (2.10-30)$$

类似地，输出端的变换电压方程为

$$Z_L I(z, s) = U(z, s) \quad (2.10-31)$$

将式(2.10-27)和(2.10-25)代入式(2.10-29)，得到

$$\frac{Z_s(s)}{Z_0(s)} [A_2(s) - B_2(s)] = F(s) - [A_2(s) + B_2(s)] \quad (2.10-32)$$

同样，式(2.10-31)变为

$$\frac{Z_L(s)}{Z_0(s)} [A_2(s)e^{-\gamma(z-L)} - B_2(s)e^{\gamma(z-L)}] = [A_2(s)e^{-\gamma(z-L)} + B_2(s)e^{\gamma(z-L)}] \quad (2.10-33)$$

由式(2.10-32)和(2.10-33)解得

$$A_2(s) = \frac{Z_0}{1 - \left(\frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}\right) \left(\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right) e^{-2\gamma L}} F(s) \quad (2.10-34)$$

$$B_2(s) = \frac{\left(\frac{Z_0}{Z_s + Z_0}\right) \left(\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right) e^{-2\gamma L}}{1 - \left(\frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}\right) \left(\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right) e^{-2\gamma L}} F(s) \quad (2.10-35)$$

将这些值代入式(2.10-25)和(2.10-27)，最后得到

$$U(z, s) = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_s} \cdot \frac{\{e^{-\gamma z} + \Gamma_i e^{-\gamma(2L-z)}\} F(s)}{1 - \Gamma_s \Gamma_i e^{-2\gamma L}} \quad (2.10-36)$$

$$I(z, s) = \frac{1}{Z_0 + Z_s} \cdot \frac{\{e^{-\gamma z} - \Gamma_i e^{-\gamma(2L-z)}\} F(s)}{1 - \Gamma_s \Gamma_i e^{-2\gamma L}} \quad (2.10-37)$$

式中

$$\Gamma_s(s) = \frac{Z_s(s) - Z_0(s)}{Z_s(s) + Z_0(s)} \quad (2.10-38)$$

$$\Gamma_i(s) = \frac{Z_L(s) - Z_0(s)}{Z_L(s) + Z_0(s)} \quad (2.10-39)$$

分别为电源和负载的反射系数。式(2.10-36)和(2.10-37)与2.2节得到的式(2.2-23)相似。

将式(2.10-36)和(2.10-37)的分母展开，有

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \Gamma_s(s) \Gamma_i(s) e^{-2\gamma L}} &= 1 + \Gamma_s(s) \Gamma_i(s) e^{-2\gamma L} + \Gamma_s^2(s) \Gamma_i^2(s) e^{-4\gamma L} \\ &\quad + \Gamma_s^3(s) \Gamma_i^3(s) e^{-6\gamma L} + \dots \end{aligned} \quad (2.10-40)$$

则式(2.10-36)和(2.10-37)可表示为

$$U(z, s) = \frac{Z_0 F(s)}{Z_0 + Z_s} \{e^{-\gamma z} + \Gamma_i(s) e^{-\gamma(2l-z)} + \Gamma_e(s) \Gamma_i(s) e^{-\gamma(2l+z)} \\ + \Gamma_e(s) \Gamma_i^2(s) e^{-\gamma(4l-z)} + \dots\} \quad (2.10-41)$$

$$I(z, s) = \frac{F(s)}{Z_0 + Z_s} \{e^{-\gamma z} - \Gamma_i(s) e^{-\gamma(2l-z)} + \Gamma_e(s) \Gamma_i(s) e^{-\gamma(2l+z)} \\ - \Gamma_e(s) \Gamma_i^2(s) e^{-\gamma(4l-z)} + \dots\} \quad (2.10-42)$$

取式(2.10-41)和(2.10-42)各项的反变换，即可得到时域电压和电流解 $u(z, t)$ 和 $i(z, t)$ 。

例2.10-2 求图2.10-7所示端接电阻 R_i 的无耗线上瞬态电压表示式。

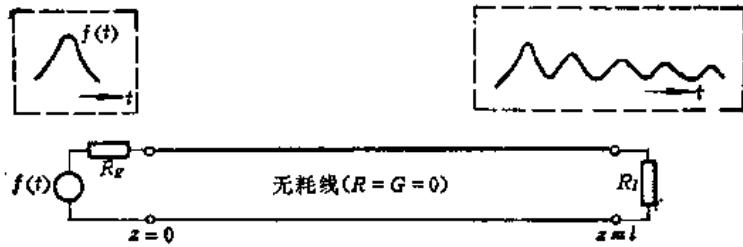


图2.10-7 例2.10-2的传输系统

解 此时 $R = 0$, $G = 0$, $Z_s = R_s$, $Z_i = R_i$ 。因此

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+Ls}{G+Cs}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\Gamma_e = \frac{R_s - \sqrt{\frac{L}{C}}}{R_s + \sqrt{\frac{L}{C}}}, \quad \Gamma_i = \frac{R_i - \sqrt{\frac{L}{C}}}{R_i + \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

可见， Γ_e 和 Γ_i 都是常数，与 s 无关。因此 Γ_e 和 Γ_i 只会引起振幅的减小，而不会引起波形的变化。

又

$$\gamma = \sqrt{(R+Ls)(G+Cs)} = s \sqrt{LC}$$

将这些值代入式(2.10-41)，得到

$$U(z, s) = \frac{F(s) \sqrt{\frac{L}{C}}}{R_s + \sqrt{\frac{L}{C}}} \{e^{-s \sqrt{LC} z} + \Gamma_i e^{-s \sqrt{LC}(2l-z)} \\ + \Gamma_e \Gamma_i e^{-s \sqrt{LC}(2l+z)} + \dots\}$$

应用拉普拉斯变换关系式 $F(s) = e^{-b} F(s)$ ，则 $f(t)|_{t \geq 0} = f(t-b) U(t-b)$ 。求上式的反变换可得到瞬态电压为

$$u(z, t) = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R_s + \sqrt{\frac{L}{C}}} \{ f(t - \sqrt{LC}z) + \Gamma_I f(t - (2l - z)\sqrt{LC}) \\ + \Gamma_R f(t - (2l + z)\sqrt{LC}) + \dots \}$$

由此结果可以看出，线上任一点的瞬态电压是由一个入射信号和一系列反射信号的叠加所组成，这些反射信号与初始的入射信号的波形相同，但幅度逐渐减小。所有的信号都以速度 $v_p = 1/\sqrt{LC}$ 沿传输线传播。

2.11 传输线的格林函数解法

格林函数法也是求解传输线问题常用的方法。本节介绍用格林函数求解一维传输线方程的原理和方法。

1. 基本原理

格林函数法是求解如下有源传输线方程的常用方法之一：

$$\frac{dU}{dz} = -ZI + \mathcal{U} \quad (2.11-1)$$

$$\frac{dI}{dz} = -YU + \mathcal{I} \quad (2.11-2)$$

式中， \mathcal{U} 为电压源， \mathcal{I} 为电流源。

格林函数法的依据是叠加原理，即由电源集合所产生的总电压（或电流）等于各个电源分别产生的电压（或电流）的总和。

格林函数是单位点源所产生的位函数。一个线性微分方程（包括传输线方程）的解可由点源解的叠加来求得，即可用格林函数对源的积分来表示。假定线性微分方程为

$$\mathcal{L}\{\psi(z)\} = f(z) \quad (2.11-3)$$

式中， \mathcal{L} 代表线性算子， $f(z)$ 是给定的源函数。此方程的解应满足一定的边界条件。设 $f(z)$ 为单位点源，即 $f(z) = \delta(z - z')$ ，则有

$$\mathcal{L}\{\psi(z)\} = \delta(z - z') \quad (2.11-4)$$

式 (2.11-4) 与式 (2.11-3) 应具有相同的边界条件。

式 (2.11-4) 的解可表示成 $\psi_G(z, z')$ ，称为此问题的格林函数。它是变量 z 和源的位置 z' 的函数。假如在 z' 处有一个振幅为 $f(z')$ 的点源，则方程为

$$\mathcal{L}\{\psi(z)\} = f(z') \delta(z - z') \quad (2.11-5)$$

其解为

$$\psi(z) = f(z') \psi_G(z, z') \quad (2.11-6)$$

假如在 z'_1 和 z'_2 处分别有振幅为 $f(z'_1)$ 和 $f(z'_2)$ 的点源，则它们所产生的位函数分别为

$$\psi_1(z) = f(z'_1) \psi_G(z, z'_1) \quad (2.11-7)$$

$$\psi_2(z) = f(z'_2) \psi_G(z, z'_2) \quad (2.11-8)$$

这两个点源同时作用的位函数则为

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z) = f(z'_1) \psi_G(z, z'_1) + f(z'_2) \psi_G(z, z'_2) \quad (2.11-9)$$

假如源函数 $f(z)$ 为点源的集合，即

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z') \delta(z - z') dz' \quad (2.11-10)$$

则方程 (2.11-3) 的解为

$$\psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z') \psi_0(z, z') dz' \quad (2.11-11)$$

由此可见，线性方程 (2.11-3) 满足边界条件的求解方法，首先要求满足相同边界条件的一个点源的解 $\psi_0(z, z')$ ，然后将此解乘以实际的源分布并在源分布区域内积分。显然，求解的关键在于求一个点源的解，即找出该问题的格林函数。这就是格林函数解法的含义。

2. 有源传输线方程的求解

有源传输线方程 (2.11-1) 和 (2.11-2) 的求解，需把它们变成只含电压或电流的方程。考虑到问题的线性，我们可以将既含有电压源又含有电流源的问题分解成只含电流源和只含电压源的二个问题的叠加。即假设 I' 满足 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(z')$ 和 $\mathcal{U} = 0$ 的传输线方程：

$$\frac{dI'}{dz} = -YU' + \mathcal{S} \quad (2.11-12a)$$

$$\frac{dU'}{dz} = -ZI' \quad (2.11-12b)$$

而 I^v 和 U^v 则满足 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(z')$ 和 $\mathcal{S} = 0$ 的传输线方程：

$$\frac{dI^v}{dz} = -YU^v \quad (2.11-13a)$$

$$\frac{dU^v}{dz} = -ZI^v + \mathcal{U} \quad (2.11-13b)$$

将式 (2.11-12a) 和 (2.11-13a) 相加，式 (2.11-12b) 和 (2.11-13b) 相加，则得到

$$\frac{d(I' + I^v)}{dz} = -(U' + U^v)Y + \mathcal{S} \quad (2.11-14a)$$

$$\frac{d(U' + U^v)}{dz} = -(I' + I^v)Z + \mathcal{U} \quad (2.11-14b)$$

这表明， $I = I^v + I'$ 和 $U = U^v + U'$ 是方程 (2.11-1) 和 (2.11-2) 的解。

为了求式 (2.11-12) 的解，先对式 (2.11-12b) 微分，并用式 (2.11-12a) 代入，得到

$$\frac{d^2U'}{dz^2} = ZYU' - Z\mathcal{S} \quad (2.11-15a)$$

或者

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - ZY \right) U' = -Z\mathcal{S} \quad (2.11-15b)$$

其解为

$$U' = \int \mathcal{S}(z') U_0^l(z, z') dz' \quad (2.11-16a)$$

式中 $U_0^l(z, z') = -Z\psi_0^l(z, z')$ 为电压格林函数。

同理可得电流解为

$$I' = \int \mathcal{S}(z') I_G^l(z, z') dz' \quad (2.11-16 b)$$

式中 $I_G^l(z, z') = -1/Z \cdot dU_G^l(z, z')/dz$ 为电流格林函数。

用同样的方法可求得式 (2.11-13) 的解为

$$U^v = \int \mathcal{U}(z') U_G^v(z, z') dz' \quad (2.11-17 a)$$

$$I^v = \int \mathcal{U}(z') I_G^v(z, z') dz' \quad (2.11-17 b)$$

因此, 式 (2.11-1) 和式 (2.11-2) 的完整解为

$$U = U' + U^v = \int \mathcal{S}(z') U_G^l(z, z') dz' + \int \mathcal{U}(z') U_G^v(z, z') dz' \quad (2.11-18)$$

$$I = I' + I^v = \int \mathcal{S}(z') I_G^l(z, z') dz' + \int \mathcal{U}(z') I_G^v(z, z') dz' \quad (2.11-19)$$

结果说明, 传输线方程 (2.11-1) 和 (2.11-2) 的格林函数解法的主要任务是求电压和电流格林函数 $U_G(z, z')$ 和 $I_G(z, z')$, 即求传输线对单位点源的响应。

例2.11-1 求图2.11-1所示端接条件下, 均匀无耗传输线的格林函数, 设在 z' 处有单位振幅的恒流源 ($I_s = \int \mathcal{S}(z') \delta(z - z') dz' = 1$) 激励。

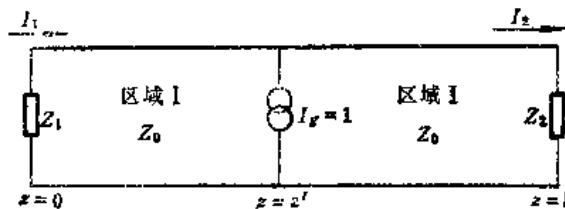


图2.11-1 例2.11-1的电路

解 将传输线分成 $z < z'$ 的区域 I 和 $z > z'$ 的区域 II 两部分, 分别求出这两个区域内的格林函数, 然后利用两端的边界条件与 z' 处连续条件, 最后确定之。

在区域 I 的电压和电流解为

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= A_1 e^{-\gamma_1 z} (1 + \Gamma_1 e^{2\gamma_1 z}) \\ I_1 &= Y_0 A_1 e^{-\gamma_1 z} (\Gamma_1 e^{2\gamma_1 z} - 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.11-20)$$

式中, A_1 为待定常数, Y_0 为传输线的特性导纳, Γ_1 为 I 端的反射系数, $\Gamma_1 = (Z_1 - Z_0)/(Z_1 + Z_0)$ 。

在区域 II 的电压和电流解为

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= A_2 e^{-\gamma_2 z} (1 + \Gamma_2 e^{2\gamma_2 (z-l)}) \\ I_2 &= Y_0 A_2 e^{-\gamma_2 z} (1 - \Gamma_2 e^{2\gamma_2 (z-l)}) \end{aligned} \right\} \quad (2.11-21)$$

利用 $z = z'$ 处连续条件, 有

$$\begin{aligned} I_1(z') - I_2(z') &= I_s = Y_0 e^{-\gamma_2 z'} [1 - \Gamma_2 e^{2\gamma_2 (z' - l)}] A_2 \\ &\quad - Y_0 e^{\gamma_2 z'} [\Gamma_1 e^{-2\gamma_1 z'} - 1] A_1 \end{aligned} \quad (2.11-22)$$

$$\begin{aligned} U_1(z') - U_2(z') &= 0 = e^{-\gamma_2 z'} [1 + \Gamma_2 e^{2\gamma_2 (z' - l)}] A_2 - e^{\gamma_2 z'} (\Gamma_1 e^{-2\gamma_1 z'} + 1) A_1 \end{aligned} \quad (2.11-23)$$

将式 (2.11-22) 除以 Y_0 , 得到

$$I_g Z_0 = e^{-\gamma z'} (1 - \Gamma_2 e^{2\gamma(z' - l)}) A_2 - e^{\gamma z'} (\Gamma_1 e^{-2\gamma z'} - 1) A_1 \quad (2.11-24)$$

式 (2.11-23) 和 (2.11-24) 的系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-\gamma z'} (1 + \Gamma_2 e^{2\gamma(z' - l)}) & -e^{\gamma z'} (\Gamma_1 e^{-2\gamma z'} + 1) \\ e^{-\gamma z'} (1 - \Gamma_2 e^{2\gamma(z' - l)}) & -e^{\gamma z'} (\Gamma_1 e^{-2\gamma z'} - 1) \end{vmatrix} = 2(1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l})$$

余子式为

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} e^{-\gamma z'} (1 + \Gamma_2 e^{2\gamma(z' - l)}) & 0 \\ e^{-\gamma z'} (1 - \Gamma_2 e^{2\gamma(z' - l)}) & I_g Z_0 \end{vmatrix} = I_g Z_0 e^{-\gamma z'} (1 + \Gamma_2 e^{2\gamma(z' - l)})$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -e^{\gamma z'} (\Gamma_1 e^{-2\gamma z'} + 1) \\ I_g Z_0 & -e^{\gamma z'} (\Gamma_1 e^{-2\gamma z'} - 1) \end{vmatrix} = I_g Z_0 e^{\gamma z'} (\Gamma_1 e^{-2\gamma z'} + 1)$$

于是得到

$$A_1 = \frac{I_g Z_0 e^{-\gamma z'} (1 + \Gamma_2 e^{2\gamma(z' - l)})}{2(1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l})} \quad (2.11-25)$$

$$A_2 = \frac{I_g Z_0 e^{\gamma z'} (\Gamma_1 e^{-2\gamma z'} + 1)}{2(1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l})} \quad (2.11-26)$$

将式 (2.11-25) 和 (2.11-26) 代入式 (2.11-20) 和 (2.11-21) 就得到电压和电流的完整解。当 $I_g = 1$ 时问题的解就是所求的格林函数，即

$$U_{1c}^I = \frac{Z_0 [1 + \Gamma_2 e^{2\gamma(z' - l)}]}{2(1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l})} [e^{\gamma(z-z')} + \Gamma_1 e^{-\gamma(z+z')}] \quad \text{I 区} \quad (2.11-27)$$

$$U_{1c}^I = \frac{Z_0 [1 + \Gamma_1 e^{-2\gamma z'}]}{2(1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l})} [e^{-\gamma(z-z')} + \Gamma_2 e^{\gamma(z+z'-2l)}] \quad \text{II 区} \quad (2.11-28)$$

如令 $z' = 0$ ，则由上面求得的电压和电流解与式 (2.2-23) 一致。

2.12 传输线与四端网络

一段均匀传输线可以等效为四端网络，从而使传输线理论与网络理论联系起来，成为微波电路的理论基础。本节讨论传输线段与四端网络之间的关系及传输线段的网络参数。

由传输线方程解 (2.2-17) 和 (2.2-21) 可以看出，均匀、各向同性媒质中的均匀传输线段可以等效为特性参数为 γl 和 Z_0 的线性对称互易二端口网络（或称四端网络）。这样，只要我们求出传输线段相应的四端网络参数，就可以方便地求得任意端接传输线的输入阻抗、反射系数、驻波系数和插入损耗等。下面我们根据传输线方程的解来求出传输线段的四端网络参数。

如图 2.12-1(a) 所示长度为 l 的均匀传输线段，由式 (2.6-3) 和 (2.6-4)，可得在输入端 ($z = 0$)，

$$\left. \begin{aligned} U(0) &= U_1 = A_1 + A_2 \\ I(0) &= I_1 = \frac{A_1 - A_2}{Z_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.12-1)$$

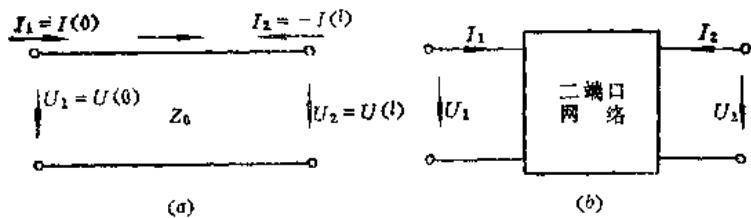


图2.12-1 均匀传输线段及其等效二端口网络

在输出端 ($z = l$),

$$\left. \begin{aligned} U(l) &= U_1 = A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l} \\ I(l) &= -I_2 = \frac{A_1 e^{-\gamma l} - A_2 e^{\gamma l}}{Z_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.12-2)$$

图2.12-1(a) 所示均匀传输线段可以用图2.12-1(b) 所示等效网络来表示。用电压和电流描述的常用网络参数是阻抗 (Z) 参数、导纳 (Y) 参数、转移 (A) 参数。

如取两个端口的电流作为自变量, 电压作为因变量, 则有

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ U_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.12-3)$$

用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.12-4)$$

式中, 系数 Z_{11} 、 Z_{12} 、 Z_{21} 和 Z_{22} 具有阻抗量纲, 称为二端口网络的阻抗参数, 简称 Z 参数。

由式 (2.12-1) 和 (2.12-4) 可解得

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = Z_0 \left[\frac{A_1 + A_2}{A_1 - A_2} \right]_{I_2=0}$$

由边界条件 $I_2 = 0$, 则由式 (2.12-2) 求得 $A_1 = A_2 e^{2\gamma l}$ 。因此

$$Z_{11} = Z_0 \frac{e^{2\gamma l} + 1}{e^{2\gamma l} - 1} = Z_0 \operatorname{cth}(\gamma l) \quad (2.12-5)$$

同理可得

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_0 \operatorname{csch}(\gamma l) \quad (2.12-6)$$

$$Z_{22} = Z_{11} = Z_0 \operatorname{cth}(\gamma l) \quad (2.12-7)$$

用同样方法可以求得 Y 参数、 A 参数表示式。表2.12-1列出了均匀传输线段的二端口网络参数及其关系式。

传输线段二端口网络的特性也可以用入射波和反射波来描述。由此定义的网络参数有散射 (S) 参数和传输 (T) 参数。这将在第七章详细讨论。

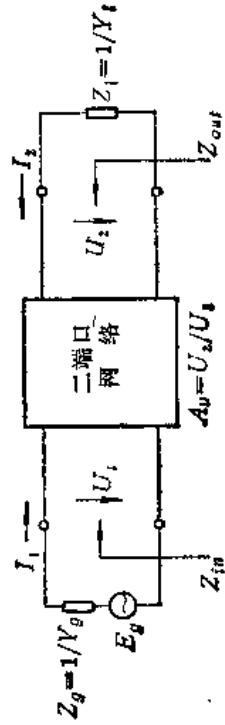
表2.12-1 均匀传输线二端口网络矩阵元件关系①

矩阵符号	定义式	矩阵表示式	输入阻抗 (Z_{in})	输出阻抗 (Z_{out})	电压比 ($A_V = U_2/U_1$)	对称条件	互易条件
$\{Z_H\}$	$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$ $U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$	$Z_0 \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\theta) & \operatorname{csch}(\theta) \\ \operatorname{csch}(\theta) & \operatorname{ch}(\theta) \end{bmatrix}$	$\frac{ Z + Z_{11}Z_l}{Z_{22} + Z_l}$	$\frac{ Z + Z_{21}Z_l}{Z_{11} + Z_l}$	$Z_{11} = Z_{22}$	$Z_{12} = Z_{21}$	
$\{Y_H\}$	$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2$ $I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$	$Y_0 \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\theta) & -\operatorname{csch}(\theta) \\ -\operatorname{csch}(\theta) & \operatorname{ch}(\theta) \end{bmatrix}$	$\frac{Y_{22} + Y_l}{ Y_1 + Y_{11}Y_l}$	$\frac{Y_{11} + Y_l}{ Y_1 + Y_{22}Y_l}$	$Y_{11} = Y_{22}$	$Y_{12} = Y_{21}$	
$\{A_H\}$	$U_1 = A_{11}U_2 - A_{12}I_2$ $I_1 = A_{21}U_2 - A_{22}I_2$	$\begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\theta) & Z_{0sh}(\theta) \\ Y_{0sh}(\theta) & \operatorname{ch}(\theta) \end{bmatrix}$	$\frac{A_{11}Z_l + A_{12}}{A_{21}Z_l + A_{22}}$	$\frac{A_{22}Z_l + A_{12}}{A_{21}Z_l + A_{11}}$	$A_{11} = A_{22}$	$ A = 1$	

① $\theta \equiv \gamma l$

$Z_0 \equiv 1/Y_0$

$|Z| \equiv \det(Z)$, 等

 Z_{in} , Z_{out} 和 A_V 的定义如右图示。

本 章 提 要

1. 传输线是一种分布参数电路。它不仅可用以传输微波能量和信息，而且可用以构成各种分布参数电路元件。同时，在理论上，传输线的研究方法及其一些概念可以引用到电磁场、天线及微波传输的波导中去，因此，研究并掌握传输线理论具有非常重要的实用意义。

2. 传输线理论的基本方程是传输线方程。无耗传输线方程为

$$\frac{d^2U}{dz^2} + \beta^2 U = 0 \quad \text{和} \quad \frac{d^2I}{dz^2} + \beta^2 I = 0$$

其解为

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= A_1 e^{-j\beta z} + A_2 e^{j\beta z} \\ I(z) &= -\frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-j\beta z} - A_2 e^{j\beta z}) \end{aligned} \right\}$$

式中

$\beta = \omega \sqrt{LC}$ 为相位因数，或称无耗线的传输因数；

$Z_0 = \sqrt{L/C}$ 为传输线特性阻抗，为纯电阻。

有耗传输线方程为

$$\frac{d^2U}{dz^2} - \gamma^2 U = 0 \quad \text{和} \quad \frac{d^2I}{dz^2} - \gamma^2 I = 0$$

其解为

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z} = A_1 e^{-(\alpha+j\beta)z} + A_2 e^{(\alpha+j\beta)z} \\ I(z) &= -\frac{1}{Z_0} [A_1 e^{-\gamma z} - A_2 e^{\gamma z}] = -\frac{1}{Z_0} [A_1 e^{-(\alpha+j\beta)z} - A_2 e^{(\alpha+j\beta)z}] \end{aligned} \right\}$$

式中

$\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} = \alpha + j\beta$ 为传输因数，为一复数，其实部 α 称为衰减因数，其虚部 β 称为相位因数。 α 和 β 都是频率和分布参数的复数函数；在微波运用时， $R \ll \omega L$, $G \ll \omega C$ ，近似得到

$$\alpha = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{和} \quad \beta = \omega \sqrt{LC}$$

$Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$ 为传输线特性阻抗，此时一般为复数；但在微波情况下， $Z_0 \approx \sqrt{L/C}$ ，可近似看成纯电阻。

3. 对传输线特性的分析可归结为对线上导行的TEM模场特性的分析。结果表明，TEM模在传输线横截面内的电场结构与静电场二维空间的结构一样，并以介质特性决定的传输因数 K 沿轴向传播；因而，解决传输线上电磁波传播问题基本上是个解决二维静止电场的问题。传输线的特性阻抗

$$Z_0 = \frac{\epsilon}{C} \eta = \frac{1}{v_p C}$$

取决于传输线的分布电容 C , 即取决于横截面上的电场分布。

4. 本章分析了无耗线在不同端接情况下的传输特性:

(1) 当 $Z_t = Z_0$ 时, 线上载行波。此时沿线各点电压、电流的振幅不变, 其相位连续变化, 线上各点输入阻抗都等于特性阻抗;

(2) 当 $Z_t = 0$ 、 ∞ 和 $\pm jX_t$ 时线上载驻波。此时线上出现波节点(零值点)和波腹点(入射波的两倍); 其阻抗为纯电抗且随距离改变电抗的性质和大小。短路线的终端阻抗为零; $\lambda/4$ 处阻抗为无限大, 相当于开路; 长度小于 $\lambda/4$ 的短路线可等效一个电感。开路线的终端阻抗为无限大; $\lambda/4$ 处阻抗为零, 相当于短路; 长度小于 $\lambda/4$ 的开路线可等效一个电容。

(3) 当 $Z_t = R_t \pm jX_t$ 时, 线上载行驻波。此时线上亦出现节点(但不为零)和腹点(但不等于入射波的两倍)。根据第一个电压波节点(或波腹点)的位置和驻波系数值可确定负载的性质和数值。

5. 表征传输线工作状态的状态参数有反射系数 Γ 、驻波系数 ρ 和行波系数 K 。它们之间的关系见表 2.A-1。其数值与工作状态的关系如下表:

	行波状态	驻波状态	行驻波状态
$ \Gamma $	0	1	< 1
ρ	1	∞	$1 \sim \infty$
K	1	0	< 1

6. 载行波是传输线理想工作状态, 实际上不容易实现。为使线上载行波, 通常需要进行阻抗匹配。阻抗匹配有电源阻抗匹配、电源共轭匹配和负载阻抗匹配之分。

负载阻抗匹配条件为 $Z_t = Z_0$, 常用方法是 $\lambda/4$ 阻抗变换器、支节匹配器和指教线阻抗变换器。用以进行阻抗计算和阻抗匹配的工具是阻抗圆图。

7. 有耗线与无耗线的主要不同处是其入射波和反射波的振幅沿各自传播方向按指教规律衰减, 因而愈接近输入端, 线上电压和电流的驻波起伏愈小, 阻抗接近于 Z_0 。

8. 传输线的时域分析主要是分析传输线上电压和电流的瞬态响应。常用的分析方法是时空图解法和拉普拉斯变换法。

9. 均匀传输线段可等效为对称互易二端口网络, 因而可以用网络参数来表示传输线的特性。用电压和电流描述的网络参数有 Z 参数、 Y 参数、 A 参数, 用入射波和反射波描述的网络参数有 S 参数和 T 参数。

10. 本章的主要公式如表 2.A-1 所示。

表2.A-1 TEM模传输线常用公式

参量	有耗线	无耗线
传输因数	$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$	$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$
相位因数 β	γ 的虚部	$\beta = \omega\sqrt{LC} = 2\pi/\lambda$
衰减因数 α	γ 的实部	$\alpha = 0$
特性阻抗	$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$
输入阻抗	$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_t + Z_0 \operatorname{th}\gamma l}{Z_0 + Z_t \operatorname{th}\gamma l}$	$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_t + jZ_0 \operatorname{tg}\beta l}{Z_0 + jZ_t \operatorname{tg}\beta l}$
短路线输入阻抗	$Z_{in}^s = Z_0 \operatorname{th}\gamma l$	$Z_{in}^s = jZ_0 \operatorname{tg}\beta l$
开路线输入阻抗	$Z_{in}^o = Z_0 \operatorname{ctg}\gamma l$	$Z_{in}^o = -jZ_0 \operatorname{ctg}\beta l$
$\frac{\lambda}{4}$ 奇数倍线输入阻抗	$Z_{in}^{\frac{\lambda}{4}} = Z_0 \frac{Z_t + Z_0 \operatorname{ctgh}\frac{\lambda}{4}}{Z_0 + Z_t \operatorname{ctgh}\frac{\lambda}{4}}$	$Z_{in}^{\frac{\lambda}{4}} = \frac{Z_0^2}{Z_t}$
$\frac{\lambda}{2}$ 整数倍线输入阻抗	$Z_{in}^{\frac{\lambda}{2}} = Z_0 \frac{Z_t + Z_0 \operatorname{tgh}\frac{\lambda}{2}}{Z_0 + Z_t \operatorname{tgh}\frac{\lambda}{2}}$	$Z_{in}^{\frac{\lambda}{2}} = Z_t$
沿线电压	$U(d) = U^+(d)(1 + \Gamma_t e^{-2\gamma d})$	$U(d) = U^+(d)(1 + \Gamma_t e^{-j2\beta d})$
沿线电流	$I(d) = I^+(d)(1 - \Gamma_t e^{-2\gamma d})$	$I(d) = I^+(d)(1 - \Gamma_t e^{-j2\beta d})$
终端电压反射系数	$\Gamma_t = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}$	$\Gamma_t = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}$
驻波系数		$P = \frac{1 + \Gamma_t }{1 - \Gamma_t }$
行波系数		$K = \frac{1 - \Gamma_t }{1 + \Gamma_t }$

参考资料

- [1] 廖承恩、陈达章，《微波技术基础》（上册），国防工业出版社，1979年。
- [2] William Sinnema, «Electronic Transmission Technology», Prentice-Hall, Inc., 1979.
- [3] Robert A. Chipman, Ph.D., Theory and Problems of Transmission Lines, McGraw-Hill, Inc., 1968.
- [4] Samuel Y. Liao, Microwave Devices and Circuits, Prentice-Hall, Inc., 1980.
- [5] Lawrence N. Dworsky, Modern Transmission Line Theory and Applications, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
- [6] 清水俊之、三原义男著，マイクロ波工学，东海大学出版会，1980。
- [7] 杉浦寅彦、石井顺也、弓场芳治、阿座上孝，マイクロ波工学，朝倉書店，1976。
- [8] Carl T. A. Johnk, Engineering Electromagnetic Fields and Waves, John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [9] 小口文一，マイクロ波すびミリ波回路，丸善株式会社，昭和39年。
- [10] Y. H. Ku, Transient Circuit Analysis, D. Van Nostrand Company, Inc., 1961.

习题

2-1 某双导线的直径为2mm，间距为10cm，周围介质为空气，求其特性阻抗。

某同轴线的外导体内直径为23mm，内导体外直径为10mm，求其特性阻抗，若在内外导体之间填充 $\epsilon_r = 2.25$ 的介质，求其特性阻抗。

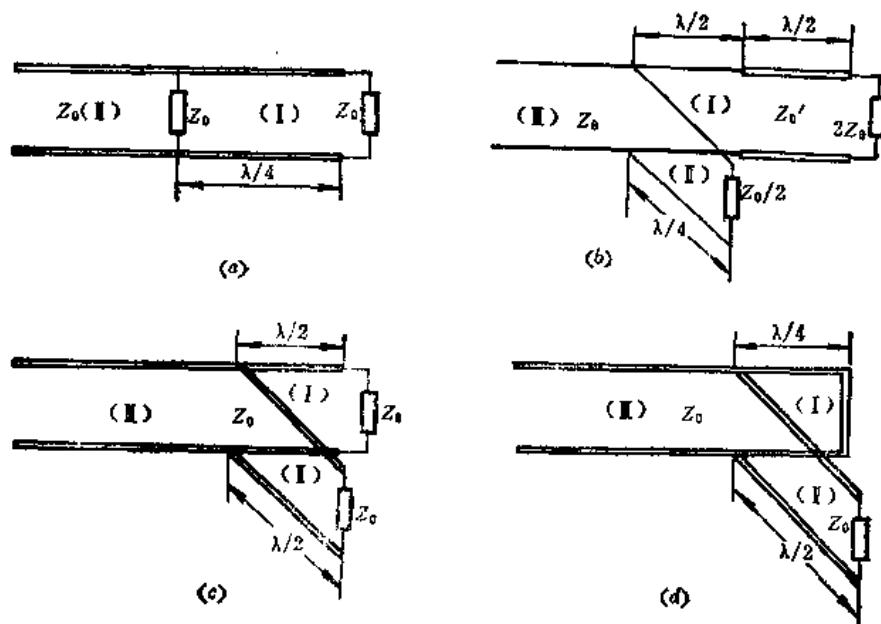


图2-1 习题2-3用图

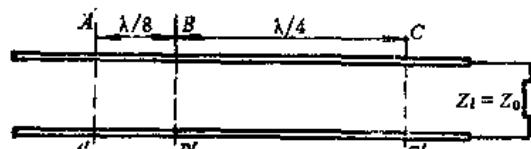


图2-2 习题 2-4 用图

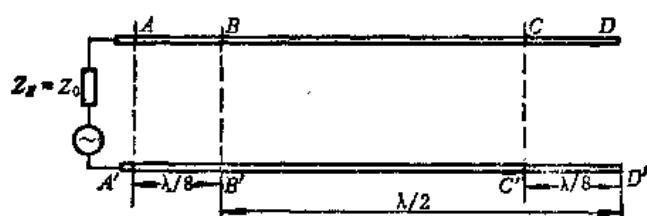


图2-3 习题 2-5 用图

- 2-2 某无耗线在空气中单位长度电容为 60PF/m , 求其特性阻抗和单位长度电感。
- 2-3 求图 2-1 各电路中各无耗线段的反射系数。
- 2-4 一无耗线终端阻抗等于特性阻抗, 如图 2-2 所示, 已知 $U_B = 50\angle 20^\circ$, 求 U_A 和 U_C , 并写出 AA' 、 BB' 和 CC' 处的电压瞬时式。
- 2-5 如图 2-3 所示终端开路线, 其特性阻抗为 200Ω , 电源内阻抗等于特性阻抗, 输入端电压 u_a 等于 $100\cos(\omega t + 30^\circ)$, 求 BB' 、 CC' 处的电压瞬时式。
- 2-6 长度为 5λ 的无耗开路线, 特性阻抗为 1000Ω , 试求频率分别为 300MHz 和 500MHz 时的输入阻抗, 并画出沿线电压、电流和阻抗振幅分布图。
- 2-7 在无耗线上测得: Z_{in}^s 为 $j100$, Z_{in}^o 为 $-j25$, d_{min} 为 0.1λ 、 0.6λ 、……, VSWR 为 3, 试求负载阻抗。
- 2-8 在无耗线上测得 Z_{in}^s 、 Z_{in}^o 和 Z_{in} (接实际负载时), 试证明负载阻抗

$$Z_L = Z_{in}^s \frac{Z_{in}^s - Z_{in}}{Z_{in} - Z_{in}^s}$$

假如 $Z_{in}^{\infty} = j100$, $Z_{in}^0 = -j25$, $Z_{in} = 75/30^\circ$, 求负载阻抗。

- 2-9 设无耗线的特性阻抗为 100Ω , 负载阻抗为 $50-j50\Omega$, 试求 Γ_l , VSWR 及距负载 0.15λ 处的输入阻抗。
- 2-10 长度为 $3\lambda/4$, 特性阻抗为 600Ω 的双导线, 负载阻抗为 300Ω , 输入端电压为 $600V$, 试画出沿线电压、电流和阻抗的振幅分布图, 并求出它们的最大值和最小值。
- 2-11 试证明无耗传输线的负载阻抗为

$$Z_l = Z_0 \frac{K - j \operatorname{tg} \beta d_{min}}{1 - j K \operatorname{tg} \beta d_{min}}$$

式中, K 为行波系数, d_{min} 为第一个电压波节点至负载的距离。

- 2-12 如图 2-4 所示电路, 画出沿线电压、电流和阻抗的振幅分布图, 并求出它们的最大值和最小值。
- 2-13 试证明长度为 $\lambda/2$ 的两端短路的无耗线, 不论电源从线上哪一处馈入均对电源频率呈现并联谐振。

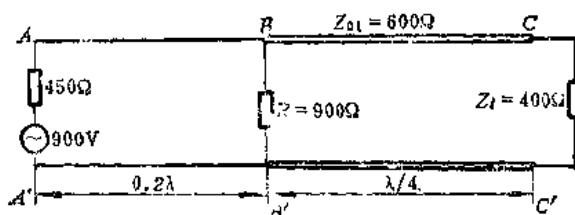


图 2-4 习题 2-12 用图

- 2-14 一特性阻抗为 300Ω 的短路线要求与推挽放大器的输出电容 $5PF$ 谐振, 谐振频率为 $300MHz$, 求所需短路线的长度。
- 2-15 欲以一特性阻抗为 600Ω 的短路线代替电感为 $2 \times 10^{-6}H$ 的线圈, 频率为 $300MHz$, 求该短路线长度应是多少? 欲以特性阻抗为 600Ω 的开路线代替电容为 $0.884PF$ 的电容器, 频率为 $300MHz$, 求该开路线长度应是多少?
- 2-16 在特性阻抗为 200Ω 无耗双导线上, 测得负载处为电压波节, $|U|_{min}$ 为 $8V$, 距负载 $\lambda/4$ 处为电压波腹, $|U|_{max}$ 为 $10V$, 试求负载阻抗及负载吸收的功率。
- 2-17 如图 2-5 所示, 已知 Z_{01} 为 250Ω , Z_{02} 为 200Ω , 电源电动势为 $100V$, 今测得 Z_{01} 和 Z_{02} 线上行波系数分别为 0.8 和 0.5 , B 点为 Z_{01} 线段的电压波节, 试求 Z_1 和 Z_2 值及 Z_2 吸收的功率。
- 2-18 求图 2-6 各电路 1-1' 处的输入阻抗、反射系数模及线 A 的电压驻波系数。
- 2-19 如图 2-7 所示传输系统, 求其中 $\lambda/4$ 匹配线的特性阻抗 Z_{01} 与最接近负载的位置, 并计算加与不加 $\lambda/4$ 匹配线时信号源传输至负载的功率。

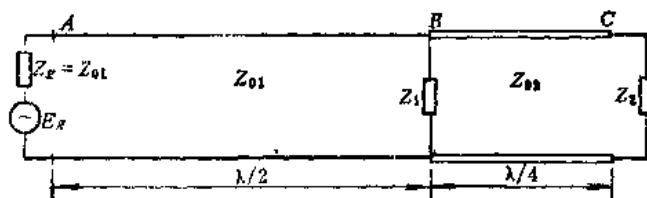


图 2-5 习题 2-17 用图

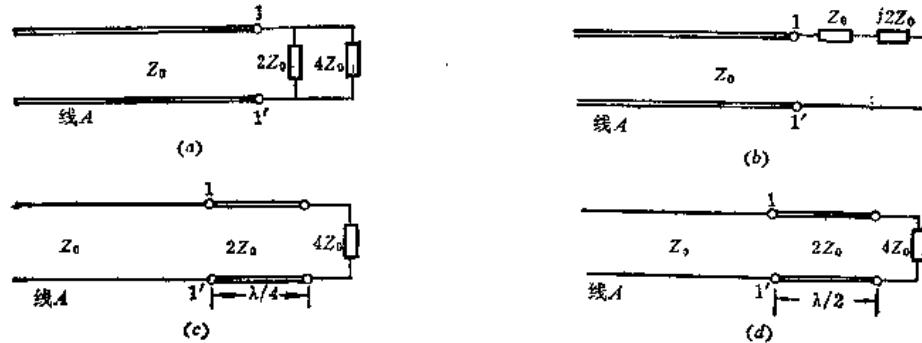


图2-6 习题2-18用图

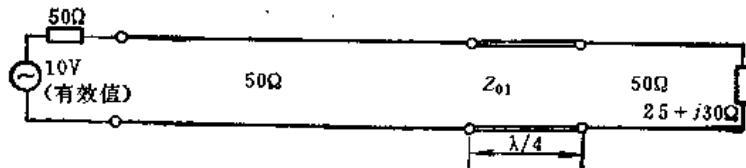


图2-7 习题2-19用图

2-20 某同轴线在 100MHz 时的分布参数为:

$$\begin{aligned} R &= 0.098 \Omega/m, & L &= 0.32 \times 10^{-6} H/m, \\ G &= 1.50 \times 10^{-6} S/m, & C &= 34.5 \times 10^{-12} F/m, \end{aligned}$$

求其特性阻抗值。

2-21 完成下列圆图基本练习:

- ① 已知 Z_t 为 $20 - j40 \Omega$, Z_0 为 50Ω , l/λ 为 0.11 , 求 Z_{tn} 。
- ② 已知 Y_t 为 $0.03 - j0.01 S$, Z_0 为 60Ω , l/λ 为 0.31 , 求 Y_{tn} 。
- ③ 已知 Z_{tn} 为 $20 - j40 \Omega$, Z_0 为 50Ω , l/λ 为 0.11 , 求 Y_t 。
- ④ 已知 Y_{tn} 为 $0.03 - j0.01 S$, Z_0 为 50Ω , l/λ 为 0.31 , 求 Z_t 。
- ⑤ 已知 Z_t 为 $100 - j600 \Omega$, Z_0 为 250Ω , 求 Γ_t 。

2-22 完成下列圆图基本练习:

- ① 已知 Y_t 为 0 , 要求 y_{tn} 为 $j0.12$, 求 l/λ 。
- ② 已知 Y_t 为无限大, 要求 y_{tn} 为 $-j0.06$, 求 l/λ 。
- ③ 已知 Z_t 为 $(0.2 - j0.31) Z_0 \Omega$, 要求 y_{tn} 为 $1 - jb_{tn}$, 求 l/λ 。
- ④ 一短路支节, 要求 y_{tn} 为 $-j1.3$, 求 l/λ 。
- ⑤ 一开路支节, 要求 y_{tn} 为 $-j1.5$, 求 l/λ 。
- ⑥ 一短路支节, 已知 l/λ 为 0.11 , 求 y_{tn} ; 若为开路支节, 求 y_{tn} 。

2-23 完成下列圆图基本练习:

- ① 已知 z_t 为 $0.4 - j0.8$, 求第一个电压波节点和波腹点至负载的距离、线上的 P 和 K 。
- ② 已知 y_t 为 $0.2 - j0.4$, 求第一个电压波节点和波腹点至负载的距离与线上的 P 和 K 。
- ③ 已知 l/λ 为 1.29 , K 为 0.32 , d_{min1} 为 0.32λ , Z_0 为 75Ω , 求 Z_t 和 Z_{tn} 。
- ④ 已知 l/λ 为 6.35 , P 为 1.5 , d_{min1} 为 0.082λ , Z_t 为 75Ω , 求 Z_t , Z_{tn} , Y_t 和 Y_{tn} 。
- ⑤ 已知 l/λ 为 1.82 , $|U|_{max}$ 为 $50V$, $|U|_{min}$ 为 $13V$, d_{max1} 为 0.032λ , Z_0 为 50Ω , 求 Z_t 和 Z_{tn} 。

2-24 如图 2-8, 设 Z_t 为 $100 + j200 \Omega$, L 为 $0.1\mu H$, C 为 $20PF$, Z_0 为 50Ω , 工作频率为 $300MHz$, 试求电容器左边的驻波系数。

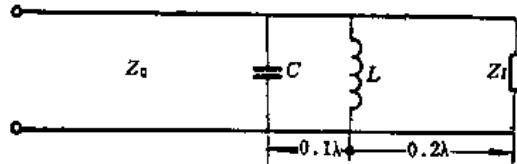


图2-8 习题2-24用图

- 2-25 无耗线特性阻抗为 125Ω , 第一个电流波腹点距负载 15cm , 驻波系数为 5, 工作波长为 80cm , 求负载阻抗。
- 2-26 无耗同轴线的特性阻抗为 50Ω , 负载阻抗为 100Ω , 工作频率为 1000MHz 。今用 $\lambda/4$ 线进行匹配, 求此 $\lambda/4$ 线的长度和特性阻抗。
- 2-27 求上题 $\lambda/4$ 匹配器在反射系数小于 0.1 条件下的工作频率范围。
- 2-28 无耗双导线的归一化负载导纳为 $y_L = 0.45 + j0.7$, 若在负载两端并联一短路支节后, 要求总的归一化负载导纳为 ① $0.45 - j0.2$; ② $0.45 + j0.2$, 求支节长度应是多少?
- 2-29 无耗双导线的特性阻抗为 500Ω , 负载阻抗为 $300 + j250\Omega$, 工作波长为 80cm , 欲以 $\lambda/4$ 线使负载与传输线匹配, 求 $\lambda/4$ 线的特性阻抗与安放的位置。
- 2-30 无耗同轴线的特性阻抗为 50Ω , 端接一未知阻抗 Z_L , 当负载端短路时在线上测得一短路参考点 d_0 ; 当端接 Z_L 时测得 P 为 2.4, 电压波节点位于 d_0 电源端 0.208λ 处, 试求该未知负载阻抗 Z_L 。
- 2-31 如图 2-9 所示匹配装置, 设支节和 $\lambda/4$ 线均无耗, 特性阻抗为 Z_{01} , 主线的特性阻抗为 50Ω , 工作频率为 300MHz , 试求 $\lambda/4$ 线的特性阻抗与所需短路支节的最短长度。
- 2-32 如图 2-10, 试计算 Z_{L0} 。
- 2-33 在特性阻抗为 600Ω 的无耗双导线上测得 $|U|_{\max}$ 为 200V , $|U|_{\min}$ 为 40V , d_{\min} 为 0.15λ , 问 Z_L 为何值? 今用短路支节进行匹配, 求支节的位置和长度。

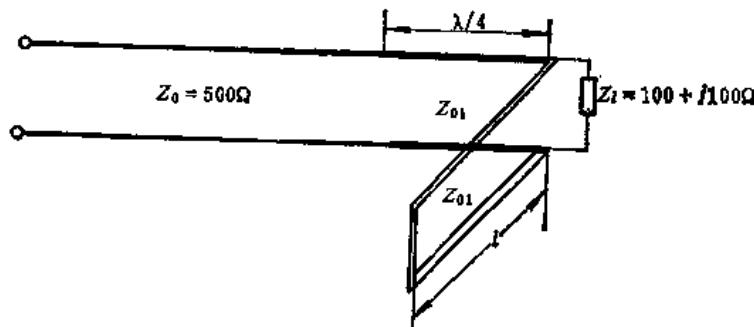


图2-9 习题2-31用图

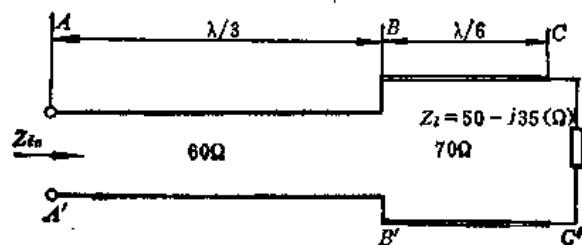


图2-10 习题2-32用图

- 2-34 上题中支节改用开路支节，问支节的位置和长度应为多少？
- 2-35 特性阻抗为 400Ω 的无耗线终端接 $Z_L = 1600 + j800\Omega$ 的负载，今用特性阻抗为 200Ω 的短路支节进行匹配，求支节放的位置与长度。
- 2-36 能否用间距 d_2 为 $\lambda/10$ 的双支节匹配器来匹配归一化导纳为 $2.5 + j1$ 的负载？
- 2-37 无耗双导线的特性阻抗为 600Ω ，负载阻抗为 $300 + j300\Omega$ ，采用双支节进行匹配，第一个支节距负载 0.1λ ，两支节的间距为 $\lambda/8$ ，求支节的长度 l_1 和 l_2 。
- 2-38 无耗双导线的特性阻抗为 600Ω ，负载阻抗为 $360 - j600\Omega$ ，采用三支节进行匹配，设第一个支节距负载 3cm ，支节间距为 2.5cm ，工作波长为 20cm ，试求支节的长度 l_1 、 l_2 和 l_3 。
- 2-39 无耗双导线的特性阻抗为 500Ω ，电源内阻为 500Ω ，其最大输出功率为 200W ，当馈线未匹配前测得 K 为 0.3 ，负载离第一个电压波节点为 0.4λ ，①试以单支节匹配之；②画出匹配状态下沿线电压、电流振幅分布并算出数值。
- 2-40 长度为 1.8m 的同轴线馈线，其特性阻抗为 50Ω ，填充介质的 ϵ_r 为 2.25 ，信号源工作频率为 1GHz ，内阻为 50Ω ，所接负载阻抗为 75Ω 。试求：
 ① 负载的反射系数和线上的电压驻波比；
 ② 欲使负载与馈线匹配，在其间插入一段 $\lambda/4$ 线，试求其特性阻抗；
 ③ 若在负载与馈线之间用串联短截线进行匹配，求此串联短截线的位置和电抗值。设匹配后信号源输至 50Ω 线的功率为 10W ，试计算负载上的功率及匹配前线上的最大电压幅值。
- 2-41 长度为 l ，特性阻抗为 Z_0 的无耗短路线，电源电动势为 E ，内阻为 $Z_0/2$ ，试用锯齿时空图求 $z = 0$ 和 $z = l/2$ 处的电压随时间变化的波形。
- 2-42 用拉普拉斯变换方法求无耗无限长传输线在始端以 $u(0, t) = f(t)$ 激励时的瞬态电压表示式。

第三章 金属波导

金属波导即封闭的空心金属波导管。早在1933年，人们就在实验中发现空心金属管可以用来传输能量。现在，金属波导是厘米波段最常用的传输线，包括矩形波导、圆形波导和同轴波导（通常称为同轴线）。

本章主要讨论规则金属波导的基本理论及其应用中的一些问题。所谓“规则波导”是指无限长直波导，其截面形状和尺寸、波导管壁的结构以及波导内媒质分布情况沿其轴线方向（纵向）都是不变的。这种规则波导的基本理论问题主要包括两部分，即波导中的模式及其场结构问题（即所谓横向问题）与这些模式沿波导轴向传输的基本特性问题（即所谓纵向问题）。

3.1 规则波导的导波方程及其求解方法

所谓波导，是泛指用来引导电磁波的传输线或器件，包括双导线、同轴线、矩形波导、圆形波导、带状线、微带、介质波导等等。被波导引导着传输的电磁波则称为电磁波或定向电磁波，简称为导波。导波场的求解问题实质上是求解波导的边值问题。本节要讨论的就是任意截面形状规则波导中的导波方程及其求解问题。

1. 导波方程及其求解

如图3.1-1所示，任意截面形状的规则柱形波导中的场是满足其内壁边界条件的麦克斯韦方程组的解。为了求解简单起见，作如下假设：

- (1) 波导内壁的电导率为无限大；
- (2) 波导内的介质（介质常数为 ϵ 、 μ ）是均匀无耗的、线性的、各向同性的；
- (3) 波导内无自由电荷和传导电流（ $\rho = 0$, $J = 0$ ），即是说波导远离波源；
- (4) 波导无限长。

假设波导中的场为时简场，它们应满足如下麦克斯韦方程组：

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (3.1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (3.1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.1-4)$$

将式(3.1-2)两边取旋度，并以式(3.1-1)代入，得到

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E}$$

应用矢量公式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$$

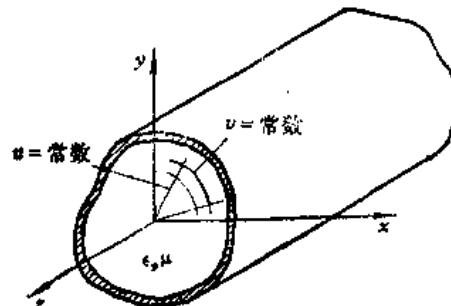


图3.1-1 规则波导及其坐标系

又由式(3.1-4), 得到

$$\nabla^2 \mathbf{E} + K^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3.1-5)$$

同理可得

$$\nabla^2 \mathbf{H} + K^2 \mathbf{H} = 0 \quad (3.1-6)$$

式中

$$K^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (3.1-7)$$

式(3.1-5)和(3.1-6)分别称为电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 的波动方程, 或称为齐次矢量亥姆霍兹方程。

为了求解式(3.1-5)和式(3.1-6), 需要将矢量式化为标量一维常微分方程, 然后用分离变量法求解。

对于图3.1-1所示规则柱形波导, 采用广义柱坐标(u, v, z)表示之, 并假定电磁波沿波导轴线方向(z 方向)传播, 波动因子为 $e^{-j\beta z}$ (若考虑导体和介质损耗, 则为传播因子 $e^{-\gamma z}$), β 为相位因数。

在广义柱坐标系中, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 可分解为横向分量和纵向分量, 即

$$\mathbf{E} = \hat{u} E_u + \hat{v} E_v + \hat{z} E_z = \mathbf{E}_t + \hat{z} E_z \quad (3.1-8)$$

$$\mathbf{H} = \hat{u} H_u + \hat{v} H_v + \hat{z} H_z = \mathbf{H}_t + \hat{z} H_z \quad (3.1-9)$$

式中, $\hat{u}, \hat{v}, \hat{z}$ 分别代表坐标 u, v, z 方向的单位矢量。而横向场 \mathbf{E}_t 和 \mathbf{H}_t 可以用纵向场 E_z 和 H_z 来表示。事实上, 令式(3.1-2)两边横向分量相等, 则有

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = (\nabla_t + \nabla_z) \times (\mathbf{E}_t + \hat{z} E_z)|_t = \nabla_t \times \hat{z} E_z + \nabla_z \times \mathbf{E}_t = -j\omega \mu \mathbf{H}_t$$

即得到

$$\nabla_t \times \hat{z} E_z + \nabla_z \times \mathbf{E}_t = -j\omega \mu \mathbf{H}_t \quad (3.1-10)$$

同样由式(3.1-1)可得到

$$\nabla_t \times \hat{z} H_z + \nabla_z \times \mathbf{H}_t = j\omega \epsilon \mathbf{E}_t \quad (3.1-11)$$

用 ∇_z 叉乘式(3.1-11)两边, 得到

$$\nabla_z \times (\nabla_t \times \hat{z} H_z) + \nabla_z \times (\nabla_z \times \mathbf{H}_t) = j\omega \epsilon \nabla_z \times \mathbf{E}_t \quad (3.1-12)$$

应用矢量公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (3.1-13)$$

则

$$\nabla_z \times (\nabla_t \times \hat{z} H_z) = \nabla_t (\nabla_z \cdot \hat{z} H_z) - (\nabla_z \cdot \nabla_t) \hat{z} H_z$$

$$\nabla_z \times (\nabla_z \times \mathbf{H}_t) = \nabla_z (\nabla_z \cdot \mathbf{H}_t) - (\nabla_z \cdot \nabla_z) \mathbf{H}_t$$

同时注意到 $\nabla_z \equiv \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \equiv -j\beta \hat{z}$, 于是式(3.1-12)可以写成

$$\beta^2 \mathbf{H}_t - j\beta \nabla_t H_z = j\omega \epsilon \nabla_z \times \mathbf{E}_t \quad (3.1-14)$$

将式(3.1-10)代入式(3.1-14), 得到

$$\begin{aligned} \beta^2 \mathbf{H}_t - j\beta \nabla_t H_z &= j\omega \epsilon (-j\omega \mu \mathbf{H}_t - \nabla_t \times \hat{z} E_z) = \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{H}_t - j\omega \epsilon \nabla_t \times \hat{z} E_z \\ &= K^2 \mathbf{H}_t + j\omega \epsilon \hat{z} \times \nabla_t E_z \end{aligned}$$

由此得到

$$(K^2 - \beta^2) \mathbf{H}_t = -j\omega \epsilon \hat{z} \times \nabla_t E_z - j\beta \nabla_t H_z \quad (3.1-15)$$

令

$$K_t^2 = K^2 - \beta^2 \quad (3.1-16)$$

则得到

$$\mathbf{H}_t = -j \frac{\omega \epsilon}{K_t^2} \hat{z} \times \nabla_t E_z - \frac{j\beta}{K_t^2} \nabla_t H_z \quad (3.1-17)$$

同理可得

$$\mathbf{E}_t = j \frac{\omega \mu}{K_t^2} \hat{z} \times \nabla_t H_z - \frac{j\beta}{K_t^2} \nabla_t E_z \quad (3.1-18)$$

式 (3.1-17) 和 (3.1-18) 即是导波横向场分量与纵向场分量之关系式。按此方程，只要 E_z 和 H_z 已知，就可求出横向场分量 \mathbf{E}_t 和 \mathbf{H}_t 。

而根据假设，规则波导是无限长直波导，其横截面形状与 z 无关，所以横向坐标度量系数 h_1 和 h_2 与 z 无关，其坐标度量系数满足如下条件^[2]：

$$\begin{cases} h_3 = 1 \\ -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h_1}{h_2} \right) = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} (h_1 h_2) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} h_3 = 1 \\ \frac{\partial}{\partial z} (h_1) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (h_2) = 0 \end{cases} \quad (3.1-19)$$

满足此条件的规则波导中的电磁场问题可以化为标量亥姆霍兹方程来求解；而且，在满足此条件的广义柱坐标系中， H_z 和 E_z 本身就是满足标量亥姆霍兹方程的两个标量函数。

在广义柱坐标系中， E_z 和 H_z 满足如下标量亥姆霍兹方程：

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{h_1 h_2} \left[-\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial v} \right) \right] + -\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + K^2 E_z = 0 \\ & \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial v} \right) \right] + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + K^2 H_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1-20)$$

或者简写成

$$\nabla_t^2 \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + K^2 \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.1-21)$$

由于有 $\partial^2 / \partial z^2 = -\beta^2$ ，因而上式变成

$$\nabla_t^2 \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + K_t^2 \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.1-22)$$

式中 $K_t^2 = K^2 - \beta^2$ ， K_t 称为导波的截止波数。式 (3.1-22) 即为规则波导中纵向场分量 E_z 和 H_z 所满足的导波波动方程，简称为导波方程。由此方程并结合具体波导的边界条件便可求得 E_z 或 H_z ，然后利用横向场分量与纵向场分量关系式，求出横向场分量，则波导中的 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 就可以完全确定。

规则波导中的导波场应满足理想导体边界条件，即要求在理想导体表面上电场的切线分量和磁场的法线分量应等于零。在具体求解时，根据导波的模式只须使用其中一个条件就够了。即要求

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.1-23a)$$

或者

$$\hat{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.1-24a)$$

式中 \hat{n} 为波导壁内法线单位矢量。如图3.1-1所示，则应有

$$\hat{n} \times (\hat{u} E_u + \hat{v} E_v + \hat{z} H_z) = 0$$

或者

$$\hat{n} \cdot (\hat{u} H_u + \hat{v} H_v + \hat{z} E_z) = 0$$

而 $\hat{n} \times \hat{u} = 0$, $\hat{n} \cdot \hat{v} = 0$, $\hat{v} E_v = 0$, $\hat{u} H_u = 0$, 因此得到用纵向场分量表示的边界条件

$$E_z = 0 \quad (3.1-23b)$$

或者

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \quad (3.1-24b)$$

2. 广义柱坐标系中横向场分量与纵向场分量关系式

下面我们来导出广义柱坐标系中各横向场分量与纵向场分量的关系式。

将式(3.1-1)和(3.1-2)在广义柱坐标系中展开后分别得到：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial v} - \frac{\partial(h_2 H_v)}{\partial z} &= j\omega\epsilon h_2 E_u \\ \frac{\partial(h_1 H_v)}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial u} &= j\omega\epsilon h_1 E_v \\ \frac{\partial(h_2 H_v)}{\partial u} - \frac{\partial(h_1 H_u)}{\partial v} &= j\omega\epsilon h_1 h_2 E_v \end{aligned} \right\} \quad (3.1-25)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial v} - \frac{\partial(h_2 E_v)}{\partial z} &= -j\omega\mu h_2 H_u \\ \frac{\partial(h_1 E_u)}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial u} &= -j\omega\mu h_1 H_v \\ \frac{\partial(h_2 E_v)}{\partial u} - \frac{\partial(h_1 E_u)}{\partial v} &= -j\omega\mu h_1 h_2 H_v \end{aligned} \right\} \quad (3.1-26)$$

注意到 $\partial/\partial z = -j\beta$, 则得到

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \frac{1}{j\omega\epsilon h_2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial v} + j\beta h_2 H_v \right) \\ E_v &= -\frac{1}{j\omega\epsilon h_1} \left(j\beta h_1 H_u + \frac{\partial H_z}{\partial u} \right) \\ E_z &= \frac{1}{j\omega\mu h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 H_v)}{\partial u} - \frac{\partial(h_1 H_u)}{\partial v} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.1-27)$$

和

$$\left. \begin{aligned} H_u &= -\frac{1}{j\omega\mu h_2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial v} + j\beta h_2 E_v \right) \\ H_v &= \frac{1}{j\omega\mu h_1} \left(j\beta h_1 E_u + \frac{\partial E_z}{\partial u} \right) \\ H_z &= -\frac{1}{j\omega\mu h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 E_v)}{\partial u} - \frac{\partial(h_1 E_u)}{\partial v} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.1-28)$$

经替换并加以整理后可得

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{K_c^2} \left[\frac{j\omega\mu}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} + \frac{j\beta}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u} \right] \\ E_v &= -\frac{1}{K_c^2} \left[\frac{-j\omega\mu}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u} + \frac{j\beta}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial v} \right] \\ H_u &= -\frac{1}{K_c^2} \left[\frac{-j\omega\epsilon}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial v} + \frac{j\beta}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u} \right] \\ H_v &= -\frac{1}{K_c^2} \left[\frac{j\omega\epsilon}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u} + \frac{j\beta}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.1-29)$$

式中

$$K_c^2 = K^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 \quad (3.1-30)$$

式 (3.1-29) 即是用纵向场分量 E_z 和 H_z 表达横向场分量的表示式，只要知道了 E_z 或 H_z ，即可由此式求出导波的横向场分量。

3. 规则波导中传输模的种类

所谓模式(或称模、波型)是指能够单独在波导中存有的电磁场结构。满足式(3.1-30)的传输模，按其有无纵向场分量 E_z 和 H_z ，可以分为三类：

(1) $E_z = 0$ 和 $H_z = 0$ 的传输模称为横电磁模，记为 TEM 模。

这种模只能存在于双导体或多导体传输系统中。由式 (3.1-29) 可知，此时 $K_c^2 = 0$ ，则 $\beta^2 = K^2$ ，故

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (3.1-31)$$

这表明 TEM 模的相速度与同一媒质中平面波的速度相等。

(2) $E_z \neq 0$ 而 $H_z \neq 0$ 的传输模称为横电模或磁模，记为 TE 模或 H 模； $E_z \neq 0$ 而 $H_z = 0$ 的传输模称为横磁模或电模，记为 TM 模或 E 模。

空心金属波导管中只能传输这类模。从以后的具体求解可以看出，在规则金属波导中，TE 模和 TM 模是麦克斯韦方程的两套独立解，故 TE 模和 TM 模又统称为波导模。它们是规则波导的基本模式。此时 $K_c^2 \neq 0$ ，且 $K_c^2 < 0$ ，则 $\beta^2 < K^2$ ，故

$$v_p > \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (3.1-32)$$

这表明空心金属波导中的 TE 模和 TM 模沿轴向传播的相速度大于媒质中平面波的速度，所以 TE 和 TM 模是一种快波。

(3) $E_z \neq 0$ 和 $H_z \neq 0$ 的传输模称为混合模。

这类模存在于开放式波导中，且在波导表面附近的空间内传播，故又称为表面波。此时 $K_c^2 \neq 0$ ，且 $K_c^2 > 0$ ，则 $\beta^2 > K^2$ ，因此

$$v_p < \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (3.1-33)$$

这表明表面波的相速度小于周围空间媒质中平面波的速度，是一种慢波。

这种混合模可分为 HE 模和 EH 模。这将在第五章中讨论。

综合上述讨论我们可以得到规则波导中导波场求解的一般步骤是：

(1) 结合具体波导边界条件求解导波方程 (3.1-22)，解出纵向场分量 E_z 或 H_z

H_z 。求解方法通常用分离变量法。由式(3.1-17)和(3.1-18)可以得到，边界条件要求在波导内壁表面：

$$\left. \begin{array}{ll} E_x = 0 & \text{TM模} \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 & \text{TE模} \end{array} \right\} \quad (3.1-34)$$

(2) 根据式(3.1-29)求出横向场分量。

这种导波场求解法称为纵向场方法。这种方法不仅适用本章所讨论的金属波导，而且适用于其它规则波导，如介质波导等。

3.2 矩形波导中电磁波的传输特性

矩形波导是截面形状为矩形的金属波导管，如图3.2-1所示， a 、 b 分别表示波导内壁宽边和窄边尺寸，管壁材料通常用铜，也有用铝或其它金属材料。矩形波导是目前各种微波设备中使用最多的微波传输线。

在本节中，我们首先分析矩形波导中的模式及其场结构，然后研究矩形波导中波的传输特性，并着重分析 TE_{10} 模的特性。

1. 矩形波导的模式及其场分量

如图3.2-1所示，采用直角坐标系(x , y , z)，此时 $h_1=h_2=h_3=1$ ，则式(3.1-22)变成

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = -K_x^2 E_x \quad (3.2-1)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -K_z^2 H_z \quad (3.2-2)$$

应用分离变量法求解，即令

$$H_z(x, y, z) = X(x)Y(y)e^{-j\beta z} \quad (3.2-3)$$

代入式(3.2-1)，得到

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -K_x^2 \quad (3.2-4)$$

式中 X'' 和 Y'' 分别是 X 对 x 、 Y 对 y 的二阶导数。

式(3.2-4)要成立，则左边两项应分别等于常数。

令

$$\frac{X''}{X} = -K_x^2 \quad \text{或者} \quad X'' + K_x^2 X = 0 \quad (3.2-5)$$

和

$$\frac{Y''}{Y} = -K_y^2 \quad \text{或者} \quad Y'' + K_y^2 Y = 0 \quad (3.2-6)$$

显然

$$K_x^2 + K_y^2 = K_z^2 \quad (3.2-7)$$

式(3.2-5)和(3.2-6)的解分别为

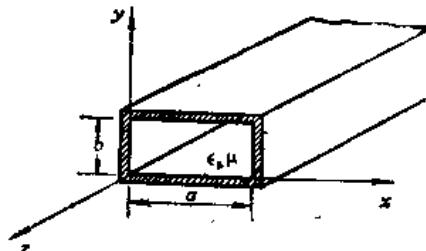


图3.2-1 矩形波导及其坐标系

$$X(x) = A_1 \cos(K_x x) + A_2 \sin(K_x x) \quad (3.2-8)$$

$$Y(y) = B_1 \cos(K_y y) + B_2 \sin(K_y y) \quad (3.2-9)$$

因此得到

$$H_z = \{A_1 \cos(K_x x) + A_2 \sin(K_x x)\} \{B_1 \cos(K_y y) + B_2 \sin(K_y y)\} e^{-j\beta z} \quad (3.2-10)$$

同理可以求得

$$E_z = \{A_3 \cos(K_x x) + A_4 \sin(K_x x)\} \{B_3 \cos(K_y y) + B_4 \sin(K_y y)\} e^{-j\beta z} \quad (3.2-11)$$

有了 E_z 和 H_z ，就可以利用式 (3.1-29) 求横向场分量。下面分 TE 模和 TM 模两种情况讨论。

(1) TE 模

在直角坐标系中，式 (3.1-29) 变成

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{K_c^2} \left[j\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \\ E_y &= -\frac{1}{K_c^2} \left[j\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \\ H_x &= -\frac{1}{K_c^2} \left[j\beta \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right] \\ H_y &= -\frac{1}{K_c^2} \left[j\beta \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.2-12)$$

对于 TE 模， $E_z = 0$ ， $H_z \neq 0$ ，上式变为

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{j\omega \mu}{K_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ E_y &= \frac{j\omega \mu}{K_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_x &= -\frac{j\beta}{K_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_y &= -\frac{j\beta}{K_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.2-13)$$

边界条件要求：

$$\text{在 } x = 0 \text{ 和 } a \text{ 处, } E_y = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$$

$$\text{在 } y = 0 \text{ 和 } b \text{ 处, } E_z = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$$

则由式 (3.2-11)，

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \{-A_1 K_x \sin(K_x x) + A_2 K_x \cos(K_x x)\} \{B_1 \cos(K_y y) + B_2 \sin(K_y y)\} e^{-j\beta z}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \{A_1 \cos(K_x x) + A_2 \sin(K_x x)\} \{-B_1 K_y \sin(K_y y) + B_2 K_y \cos(K_y y)\} e^{-j\beta z}$$

于是由 $x = 0$ 处 $\partial H_z / \partial x = 0$ ，应有

$$A_2 K_x \cdot \{B_1 \cos(K_y y) + B_2 \sin(K_y y)\} e^{-j\beta z} = 0$$

由此得到

$$A_2 = 0$$

又由 $x = a$ 处 $\partial H_z / \partial x = 0$ ，应有

$$-A_1 K_x \sin(K_x a) \{B_1 \cos(K_y y) + B_2 \sin(K_y y)\} e^{-j\beta z} = 0$$

则得到

$$K_x a = m\pi \quad \text{或者} \quad K_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

由 $y = 0$ 处 $\partial H_z / \partial y = 0$, 应有

$$A_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \{B_2 K_y\} e^{-j\beta z} = 0$$

则要求

$$B_2 = 0$$

再由 $y = b$ 处 $\partial H_z / \partial y = 0$, 应有

$$A_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \{-B_1 K_y \sin(K_y b)\} e^{-j\beta z} = 0$$

则得到

$$K_y b = n\pi \quad \text{或者} \quad K_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

最后得到

$$H_z = H_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} \quad (3.2-14)$$

式中, $H_{mn} = A_1 B_1$ 为任意常数, m 、 n 可取任意正整数。任意一对 m 、 n 值对应一个基本波函数。这些基本波函数的线性组合也是式 (3.2-2) 的解。故 H_z 的一般解为

$$H_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} \quad (3.2-15)$$

将式 (3.2-15) 代入式 (3.2-13), 可求得横向场分量。最后我们得到矩形波导中传输型TE模场分量为:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j\omega\mu}{K_c^2} \frac{n\pi}{b} H_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_y &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-j\omega\mu}{K_c^2} \frac{m\pi}{a} H_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_z &= 0 \\ H_x &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j\beta}{K_c^2} \frac{m\pi}{a} H_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_y &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j\beta}{K_c^2} \frac{n\pi}{b} H_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \end{aligned} \right\} \quad (3.2-16)$$

式中

$$K_c^2 = K_x^2 + K_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (3.2-17)$$

由此可见，矩形波导中的TE模有无穷多个，以 TE_{mn} 表示之。最低次的TE模是 TE_{10} 模或 TE_{01} 模，要视 a 、 b 的相对大小而定。

(2) TM模

对于TM模， $H_z = 0$ ， $E_z \neq 0$ 。其场分量的求解方法与TE模一样。最后我们可以得到矩形波导中传输型TM模的场分量为：

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -j\beta \frac{m\pi}{K_c^2} \frac{m\pi}{a} E_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t-\beta z)} \\ E_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -j\beta \frac{n\pi}{K_c^2} \frac{n\pi}{b} E_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t-\beta z)} \\ E_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t-\beta z)} \\ H_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\epsilon}{K_c^2} \frac{n\pi}{b} E_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t-\beta z)} \\ H_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{j\omega\epsilon}{K_c^2} \frac{m\pi}{a} E_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t-\beta z)} \\ H_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2-18)$$

式中

$$K_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

与TE模相同。由此可见，矩形波导中的TM模也有无穷多个，以 TM_{mn} 表示之，最低次者为 TM_{11} 模。

上述 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模称为矩形波导的正规模。

2. 传输模的场结构

我们用电力线和磁力线的密与稀来表示波导中电场和磁场强度的强与弱。所谓场结构就是指电力线和磁力线的形状及其分布情况。

(1) TE模的场结构

对于TE模，由于 $E_z = 0$ ， $H_z \neq 0$ ，所以电力线仅分布在横截面内，而磁力线则是空间闭合曲线。

先考虑最低次 TE_{10} 模的场结构。其场分量由式(3.2-16)可求得为

$$\left. \begin{aligned} E_y &= -j \frac{\omega\mu a}{\pi} H_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t-\beta z)} \\ H_x &= j \frac{\beta a}{\pi} H_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t-\beta z)} \\ H_z &= H_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t-\beta z)} \\ E_x &= E_z = H_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2-19)$$

其瞬时式为

$$\left. \begin{aligned} E_y &= \frac{\omega \mu a}{\pi} H_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_x &= -\frac{\beta a}{\pi} H_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_z &= H_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - \beta z) \\ E_x &= E_z = H_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2-20)$$

可见TE₁₀模只有E_y、H_x和H_z三个分量，且均与y无关。这表明电磁场沿y方向无变化。其电场只有E_y分量，它沿x方向呈正弦变化，在a边上有半个驻波分布，即在x=0和a处为零，在x=a/2处最大，如图3.2-2(a)、(b)所示；E_y沿z方向按正弦变化，如图3.2-2(c)所示。

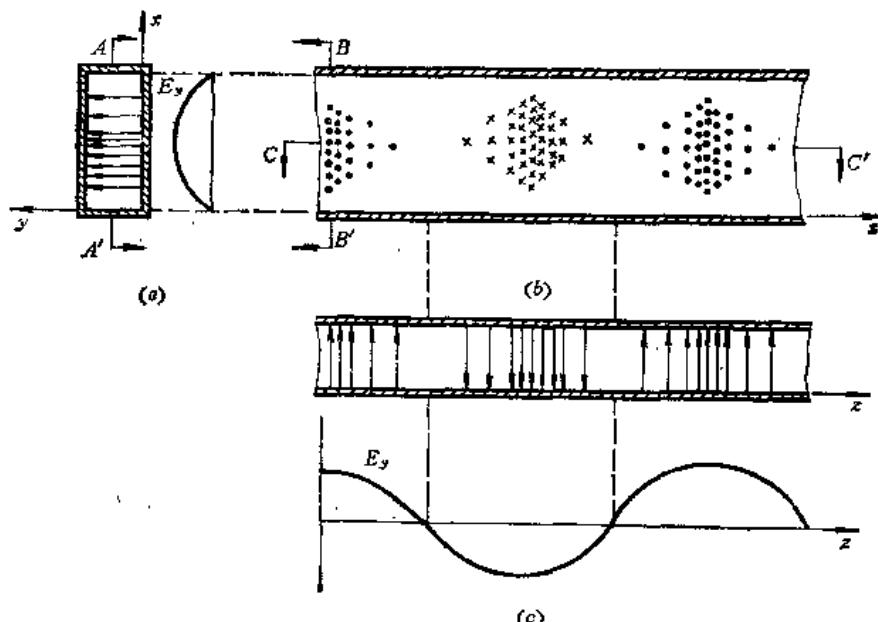


图3.2-2 TE₁₀ 模的电场结构
(a) BB' 横剖面; (b) AA' 纵剖面; (c) CC' 纵剖面。

TE₁₀模的磁场有H_x和H_z两个分量。H_x沿a边呈正弦分布，有半个驻波分布，即在x=0和a处为零，在x=a/2处最大；H_z沿a边呈余弦分布，在x=0和a处最大，在x=a/2处为零，如图3.2-3(a)所示。H_x沿z方向按正弦变化，H_z沿z方向按余弦变化。H_x和H_z在xy平面内合成闭合曲线，类似椭圆形形状，如图3.2-3(b)所示。E_y和H_x沿z方向同相，它们与H_z沿z方向则有90°相位差。这是传输模的特点。

图3.2-4表示TE₁₀模的完整场结构图。

由式(3.2-16)和TE₁₀模场结构可以看出，m和n分别是场沿a边和b边分布的半驻波数。TE₁₀模的场沿a边有半个驻波分布，沿b边无变化。

同理，TE₂₀、TE₃₀、…TE_{m0}等模的场结构就是场沿a边有2个、3个、…m个半驻波分布，沿b边无变化，或者说是沿a边分布有2个、3个、…m个TE₁₀模场结构的“小巢”，沿b边无变化。图3.2-5(b)表示TE₂₀模的场结构。

TE₀₁模的场结构与TE₁₀模的差异只是波的极化面（即通过电场矢量与波导轴的平

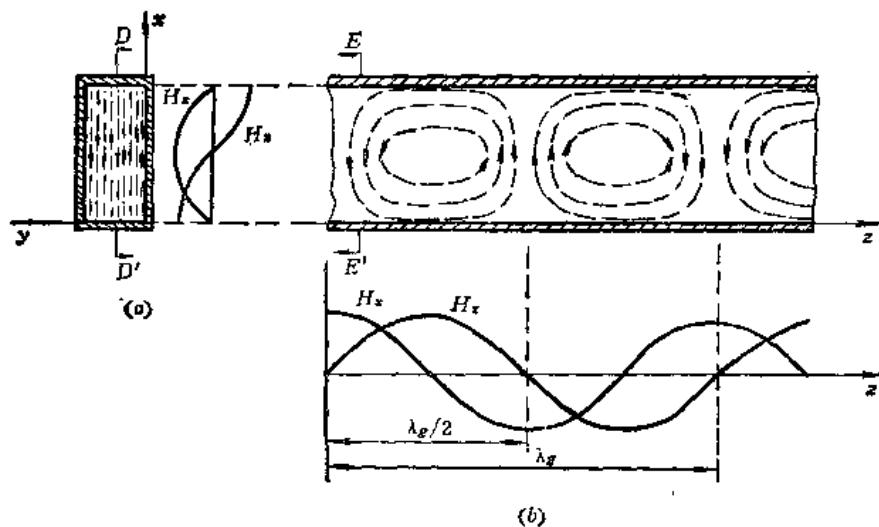


图3.2-3 TE₁₀ 模的磁场结构
(a) EE' 横剖面, (b) DD' 纵剖面。

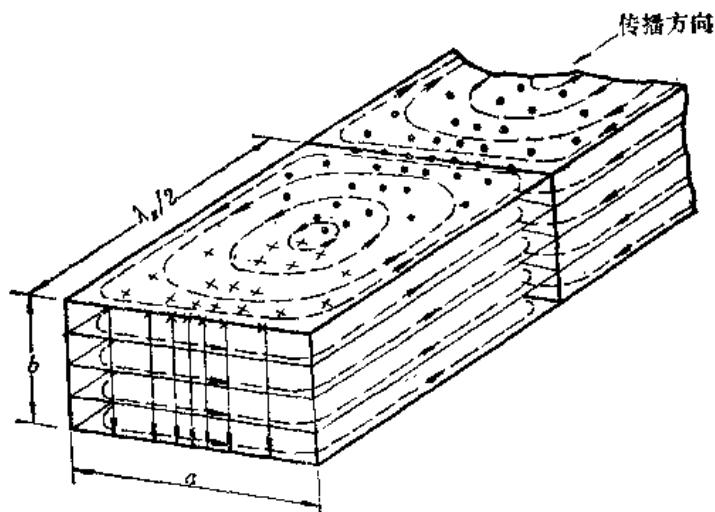


图3.2-4 TE₁₀ 模电磁场结构图

面) 旋转了90°, 即场沿b边有半个驻波分布, 沿a边无变化, 如图3.2-5(c)所示。

仿照TE₀₁模的场结构, TE₀₂、TE₀₃、…TE_{0n}模的场结构便是场沿a边无变化, 沿b边有2个、3个、… n 个半驻波分布; 或者说是沿a边无变化, 沿b边分布有2个、3个、… n 个TE₀₁模场结构“小巢”。图3.2-5(d)表示TE₀₂模的场结构。

m 和 n 都不为零的TE_{mn}模有着更复杂的场结构, 其中以TE₁₁模为最简单。TE₁₁模的场沿a边和b边都有半个驻波分布, 如图3.2-5(e)所示。 m 和 n 都大于1的TE_{mn}模的场结构则是沿a边分布有 m 个TE₁₁模场结构“小巢”, 沿b边分布有 n 个TE₁₁模“小巢”。图3.2-5(f)表示TE₂₁模的场结构。

(2) TM模的场结构

TM模中最简单者是TM₁₁模, 其场沿a边和b边都有半个驻波分布, 如图3.2-5(g)所示。 m 和 n 都大于1的TM_{mn}模的场结构便是沿a边和b边分别有 m 个和 n 个TM₁₁模

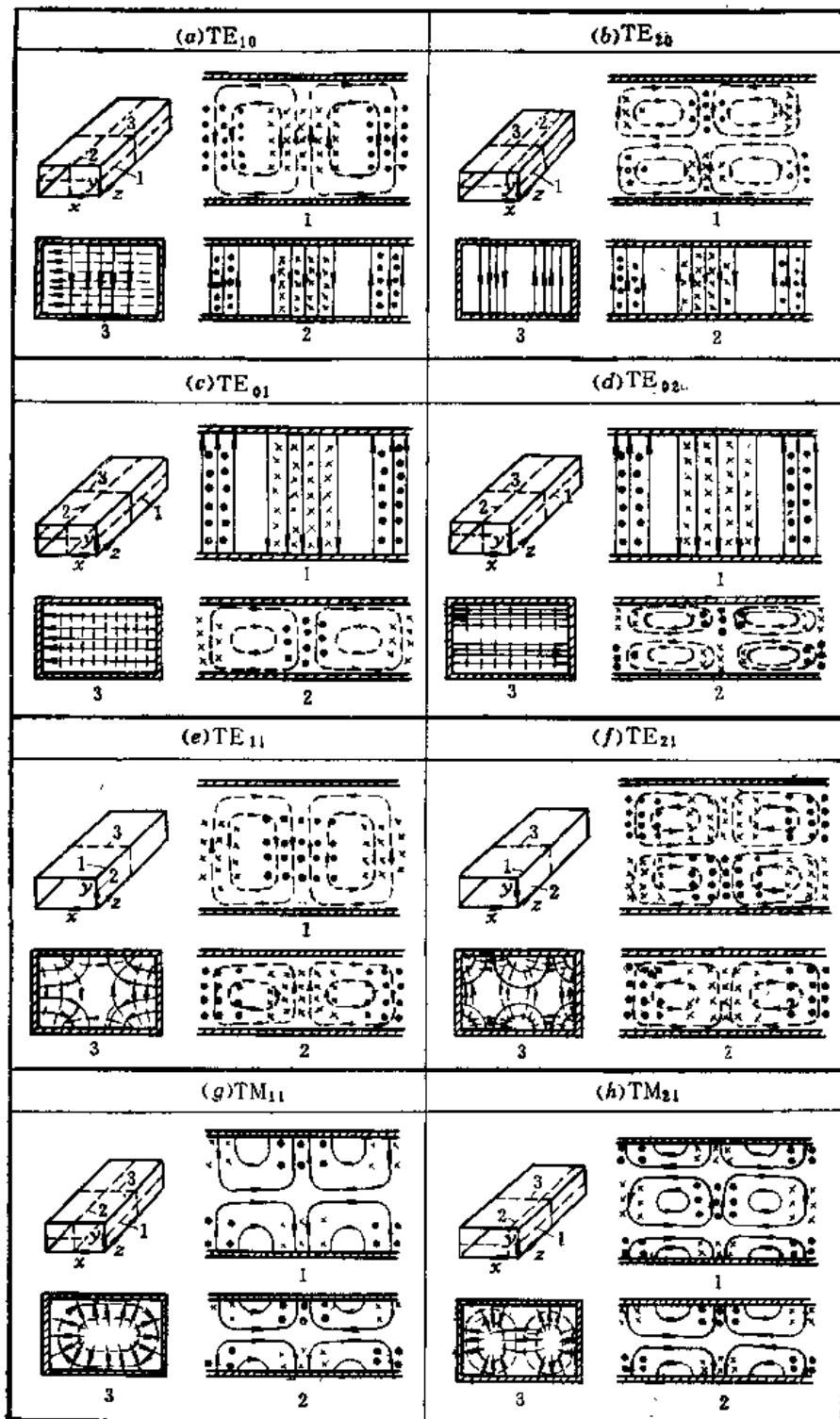


图3.2-5 矩形波导中 TE 和 TM 模场结构截面图

“小巢”。图3.2-5(h)表示 TM_{21} 模的场结构。

综上分析可以得到结论：矩形波导中模的场结构基本型式（基本场结构“小巢”）是 TE_{10} 、 TE_{01} 、 TE_{11} 和 TM_{11} 四个模。只要掌握这四个模的场结构，矩形波导中所有 TE 和 TM 模的场结构便全可明了。

熟悉波导中各种模的场结构有着重要的实际意义，因为模的场结构是分析和研究波导问题及设计波导元件的基础和出发点。

需要指出的是，并非所有的 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模都会在波导中同时传播，波导中存在什么模，需由信号频率、波导尺寸与激励方式来决定。

3. 矩形波导的管壁电流

当波导中传输微波能量时，在金属波导内壁表面上将产生感应电流，称之为管壁电流。在微波情况下，由于趋肤效应，这种管壁电流集中在波导内壁表面层内流动，其趋肤深度 δ 的典型数量级是 10^{-4}cm 。所以这种管壁电流可看成面电流。

管壁电流的分布由管壁附近的磁场分布情况决定，即应满足关系

$$\mathbf{J}_s = \hat{n} \times \mathbf{H}_s \quad (3.2-21)$$

式中， \hat{n} 是波导内壁的单位法线矢量， \mathbf{H}_s 为内壁附近的切向磁场，如图3.2-6所示。

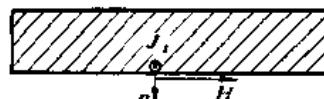


图3.2-6 管壁内的表面电流

当传输 TE_{10} 模时，由式 (3.2-19) 和 (3.2-21) 可求得管壁电流为：

在波导下底面 ($y=0$) 和上顶面 ($y=b$)， $\hat{n}=\pm\hat{y}$ ，其上电流分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s|_{y=0} &= \hat{y} \times (\hat{x}H_x + \hat{z}H_z) = \hat{x}H_x - \hat{z}H_z \\ &= \left[H_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\hat{x} - j \frac{\beta a}{\pi} H_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\hat{z} \right] e^{j(\omega t-\beta z)} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s|_{y=b} &= -\hat{y} \times (\hat{x}H_x + \hat{z}H_z) = -\hat{x}H_x + \hat{z}H_z \\ &= \left[-H_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\hat{x} + j \frac{\beta a}{\pi} H_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\hat{z} \right] e^{j(\omega t-\beta z)} \end{aligned}$$

在左侧壁上， $\hat{n}=\hat{x}$ ， $x=0$ ，则

$$\mathbf{J}_s|_{x=0} = \hat{x} \times \hat{z}H_z = -\hat{y}H_z|_{x=0} = -H_{10} e^{j(\omega t-\beta z)} \hat{y}$$

在右侧壁上， $\hat{n}=-\hat{x}$ ， $x=a$ ，则

$$\mathbf{J}_s|_{x=a} = -\hat{x} \times \hat{z}H_z = \hat{y}H_z|_{x=a} = -H_{10} e^{j(\omega t-\beta z)} \hat{y}$$

结果表明，当矩形波导中传输 TE_{10} 模时，在左右侧壁内只有 J_s 分量电流，且大小相等，方向相同；在上下宽壁内的电流由 J_x 和 J_z 合成，在同一 x 位置的上下宽壁内的电流大小相等，方向相反，如图3.2-7所示。

知道波导不同模式的管壁电流结构才便于设计波导元件。例如，当需要在波导壁上开孔或槽面不希望影响传输模式的传输性能和不造成辐射

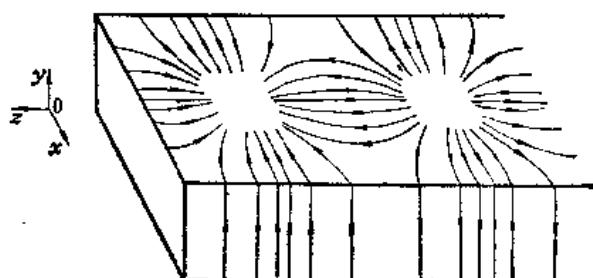


图3.2-7 TE_{10} 模的管壁电流结构

时，就不应该破坏该模式的管壁电流的通路。在矩形波导传输 TE_{10} 模时，由上面分析知道，在波导宽壁中心线 ($x = a/2$) 上只有 J_z 分量电流，因此可沿中心线纵向开槽。相反，如果需要在波导壁上开槽做成辐射器，则应当切断电流。

4. 矩形波导的传输特性

由上面分析知，矩形波导中可以传输 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模。这些模沿 x 、 y 方向为驻波分布，沿 z 方向为行波，即沿 z 方向（轴向）传输。下面我们来分析它们的传输特性。

(1) 截止频率和截止波长

由导波方程 (3.1-22) 和场分量关系式 (3.2-12) 的推导知，

$$K_c^2 = K^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 \quad (3.2-22)$$

其中 β 为相位因数，应为实数。由式 (3.2-17) 可知，对于尺寸一定的波导和一定的模式， K_c^2 为一常数，而对于一定的介质， K^2 的值就取决于频率的高低。这样，当 ω 由小变大时，将出现三种情况：

- a. $K_c^2 > \omega^2 \mu \epsilon$ ， β 成为虚数，则传播因子 $e^{-j\beta z}$ 成了衰减因子，说明波不能传输；
- b. $K_c^2 < \omega^2 \mu \epsilon$ ， β 为实数，波可以传输；
- c. $K_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ ， $\beta = 0$ 。这是波导中波能否传输的临界状态。这时波沿 z 方向无传播，只是在横截面内振荡，沿 z 方向波的振幅和相位均不变。

由 $K_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ 决定的频率称为截止频率（或临界频率），用 f_c 表示，相应的波长称为截止波长（或临界波长），用 λ_c 表示。于是有关系

$$K_c^2 = \omega_c^2 \mu \epsilon$$

由此求得截止频率为

$$f_c = \frac{K_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{K_c}{2\pi} v \quad (3.2-23)$$

式中 v 为介质 (ϵ 、 μ) 中的光速。相应的截止波长则为

$$\lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2\pi}{K_c} \quad (3.2-24)$$

对于矩形波导中的 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模，将式 (3.2-17) 代入，得到其截止波长均为

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (3.2-25)$$

截止波长或截止频率是传输线最重要的特性参数之一。由上面分析知，只有 $\omega^2 \mu \epsilon > K_c^2$ 时电磁波才能在波导中传播；对一定的波导和模式， K_c 是常数，因此只有 $\lambda < \lambda_c$ （或 $f > f_c$ ）的波才能在波导中传播。所以金属波导具有“高通滤波器”性质。

波导中不同的模具有相同截止波长（或截止频率）的现象，称为波导模式的“简并”现象。在矩形波导中，除 TE_{m0} 模和 TE_{0n} 模以外的模都有简并，即 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模 ($m, n \neq 0$) 是简并的。

波导中截止波长最长（或截止频率最低）的模称为波导的最低型模（或称主模、基模），其它的模则称为高次模。矩形波导中的主模是 TE_{10} 模（如果 $a > b$ ），其截止波长最长，等于 $2a$ 。

由上面分析知，波导中不同模式的截止波长是不同的，而当波导尺寸和信号频率一定时，只有满足条件 $\lambda < \lambda_c$ 的模才能传播。例如对于 $a = 2b$ 的矩形波导，可以得到如图 3.2-8 所示截止波长分布图。由图可见，当 $a < \lambda < 2a$ 时，波导中只能传输 TE_{10} 模，可以做到单模工作。

(2) 相速度和群速度

波导中波的相速度是指传输模等相位面沿波导轴向移动的速度。由相速度一般公式

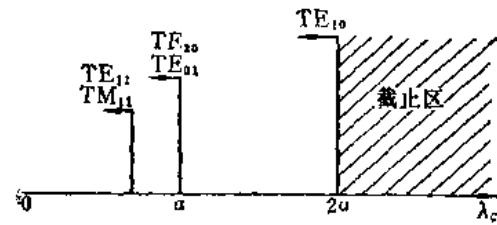


图 3.2-8 $a = 2b$ 矩形波导的截止波长分布图

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (3.2-26)$$

而波导中传输模的相位因数 β 应满足关系

$$\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon - K_c^2$$

则

$$\frac{\beta^2}{\omega^2} = \mu \epsilon - \frac{K_c^2}{\omega^2} = \frac{\lambda_c^2 - \lambda^2}{\lambda_c^2 v^2} = \frac{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}{v^2}$$

于是得到波导中传输模的相速度

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (3.2-27)$$

式中， v 和 λ 分别为介质中的光速和波长。由此可见，波导中传输模的相速度大于同一媒质中的光速。

矩形波导传输 TE_{10} 模时，

$$v_{pTE_{10}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (3.2-28)$$

群速度是指由许多频率组成的波群的速度，或者说是波包的速度，其一般公式为

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

由关系 $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - K_c^2}$ ，则得

$$\frac{d\beta}{d\omega} = -\frac{1}{2} (\omega^2 \mu \epsilon - K_c^2)^{-1/2} \cdot 2\omega \mu \epsilon = -\frac{\omega \mu \epsilon}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - K_c^2}} = -\frac{v_p}{v^2}$$

故得群速度为

$$v_g = \frac{v^2}{v_p} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (3.2-29)$$

由此可见，波导中传输模的群速度小于同一媒质中的光速。

由式 (3.2-29) 可见，波导中传输模的相速度和群速度有关系

$$v_p \cdot v_g = v^2 \quad (3.2-30)$$

矩形波导传输 TE_{10} 模的群速度为

$$v_{g\text{TE}_{10}} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (3.2-31)$$

可以证明，波导中传输模的群速度与其能量传播速度 v_e 相等。证明留给读者作为练习（习题3-5）。

由式(3.2-27)和(3.2-29)可见，波导中波的传播速度是频率的函数。此即波导的色散特性。这种色散特性是由于波导的截止特性引起的，即是由波导本身的特性（边界条件）所决定的。

(3) 波导波长

波导中某传输模相邻两同相位面之间的轴向距离（或说相角差为360°的两个相平面之间的距离）称为该模的波导波长或相波长，以 λ_g 表示之。它与相速度 v_p 的关系是

$$v_p = f \lambda_g$$

或者

$$\lambda_g = \frac{v_p}{f} \quad (3.2-32)$$

式中 f 是信号的振荡频率。以式(3.2-27)代入，得到

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (3.2-33)$$

式(3.2-33)即表示波导中传输模的波导波长 λ_g 、截止波长 λ_c 与介质中的波长 λ 三者之间的重要关系。

矩形波导中 TE₁₀ 模的波导波长为

$$\lambda_{g\text{TE}_{10}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (3.2-34)$$

由式(3.2-26)和(3.2-32)可以得到波导波长与传输模的相位因数的关系为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} \quad (3.2-35)$$

(4) 波阻抗

波导中的波型阻抗简称为波阻抗，定义为该波型的横向电场与横向磁场之比，即

$$Z_w = \frac{E_u}{H_v} = -\frac{E_v}{H_u} \quad (3.2-36)$$

a. TE 模的波阻抗

对于 TE 模， $E_s = 0$ ，则由式(3.1-29)可以得到其波阻抗的一般公式为

$$Z_{TE} = \frac{\omega \mu}{\beta} \quad (3.2-37)$$

以关系 $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - K_e^2}$ 代入，可以求得

$$Z_{TE} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{\lambda_g}{\lambda} = \eta \cdot \frac{\lambda_g}{\lambda} \quad (3.2-38)$$

式中 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 是介质中的波阻抗。如果波导中的介质是空气，则

$$Z_{TE} = \eta_0 \frac{\lambda_0}{\lambda_0} \quad (3.2-39)$$

式中, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.7 \Omega$, 是自由空间波阻抗; λ_0 为自由空间的波长。

空气矩形波导中传输 TE_{10} 模时的波阻抗, 由式 (3.2-41) 得到为

$$Z_{TE_{10}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} \quad (3.2-40)$$

可见 TE_{10} 模的波阻抗与波导窄边尺寸 b 无关。矩形波导通常都以 TE_{10} 工作。由上式可见, 宽边尺寸 a 相同而窄边尺寸 b 不同的两段矩形波导的波阻抗相等。显然, 将这两段波导连接时, 在连接处必将产生波的反射而得不到匹配。为了处理波导的匹配问题, 就需要引入波导的等效特性阻抗。关于矩形波导的等效特性阻抗问题, 我们在第七章中讨论。

3.3 圆波导中的三个主要波型

圆波导具有损耗较小与双极化特性, 常用在天线馈线中; 圆波导段广泛用作微波谐振腔。本节将讨论圆波导中的波型及其传输特性, 着重分析常用的三个主要波型 (TE_{11} 模、 TM_{01} 模和 TE_{01} 模) 的特点及其应用。

1. 圆波导中的波型及其场分量

如图 3.3-1 所示半径为 R 的圆波导, 采用圆柱坐标系 (r 、 φ 、 z), 其度量系数 $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$ 。于是式 (3.1-29) 变为

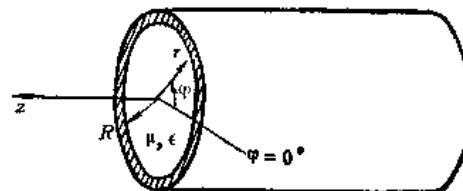


图 3.3-1 圆波导及其坐标系

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{1}{K_c^2} \left[j\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{j\omega \mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right] \\ E_\varphi &= -\frac{1}{K_c^2} \left[\frac{j\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \\ H_r &= -\frac{1}{K_c^2} \left[j\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{j\omega \epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right] \\ H_\varphi &= -\frac{1}{K_c^2} \left[\frac{j\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + j\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.3-1)$$

而 E_z 和 H_z 满足如下标量亥姆霍兹方程:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} = -K_c^2 E_z \quad (3.3-2)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} = -K_c^2 H_z \quad (3.3-3)$$

下面我们分别来求 TE 模和 TM 模的场分量。

(1) TE 模场分量

对于 TE 模, $E_z = 0$, 只需求 H_z 。应用分离变量法求解式 (3.3-3), 即令

$$H_z = R(r)\Phi(\varphi)e^{-j\beta z} \quad (3.3-4)$$

代入式 (3.3-3), 得到方程

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + K_e^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

此式要成立，则等式两边须等于一个共同的常数。令此常数为 m^2 ，则得到如下两个常微分方程：

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (3.3-5)$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (K_e^2 r^2 - m^2) R = 0 \quad (3.3-6)$$

其解分别为

$$\Phi(\varphi) = B_1 \cos m\varphi + B_2 \sin m\varphi = B \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \quad (3.3-7)$$

$$R(r) = A_1 J_m(K_e r) + A_2 N_m(K_e r) \quad (3.3-8)$$

式中， A_1 、 A_2 、 B 为积分常数； $J_m(K_e r)$ 是第一类 m 阶贝塞尔函数， $N_m(K_e r)$ 是第二类 m 阶贝塞尔函数，其变化曲线如图 3.3-2 所示。

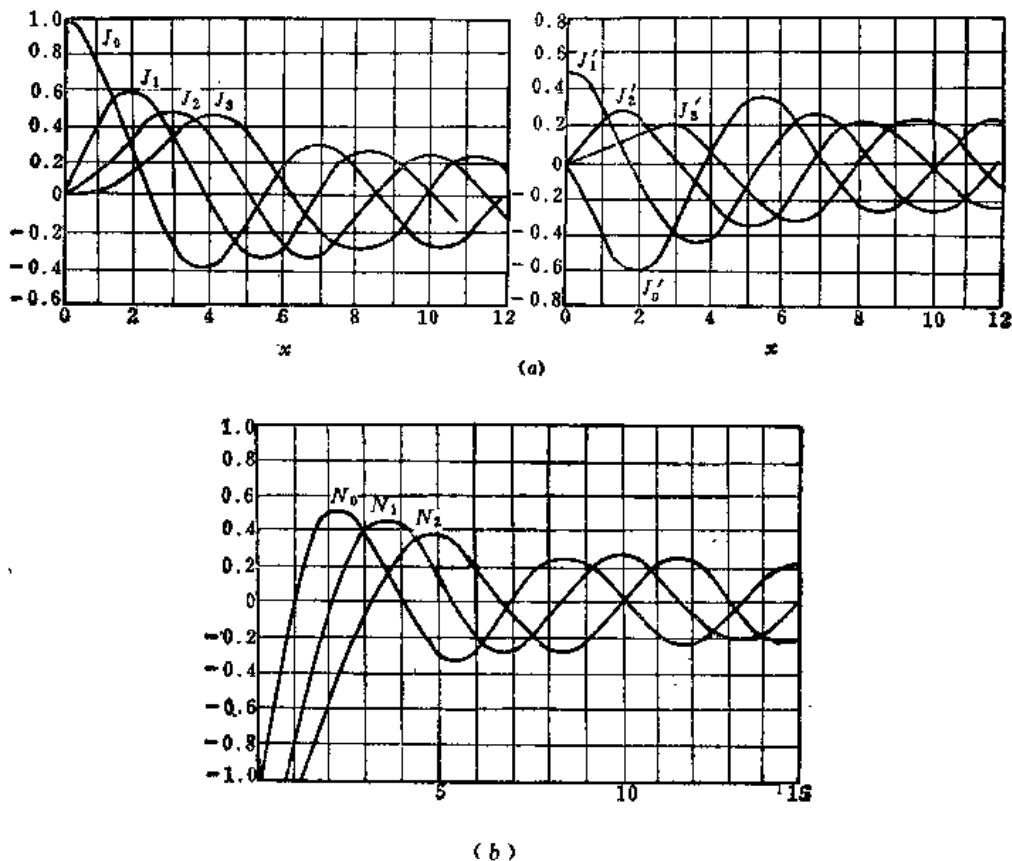


图3.3-2

(a) 第一类贝塞尔函数 $J_m(x)$ 及其导数 $J'_m(x)$ 的变化曲线；
(b) 第二类贝塞尔函数 $N_m(x)$ 的变化曲线。

这里要对式 (3.3-7) 所示 $\Phi(\varphi)$ 的解形作两点解释：第一，这里 Φ 的解不写成 $\Phi = \cos(m\varphi - \psi)$ 的形式，是考虑到圆波导存在着轴对称性，起始角 ψ 无法决定。当 $\psi = 0$ 时， $\cos(m\varphi - \psi) \rightarrow \cos m\varphi$ ；当 $\psi = -\pi/2$ 时， $\cos(m\varphi - \psi) \rightarrow \sin m\varphi$ ，而当 ψ 为其它任意角时， $\cos(m\varphi - \psi)$ 可分解成包含 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$ 的两部分。第二， m 必须

取整数， $m = 0, 1, 2, \dots$ 。由于圆波导结构是轴对称的，因此当 r 和 z 一定时，坐标 φ 旋转 360° 变成 $\varphi + 2\pi$ 后，其电磁场的大小和方向应当不变，即应有

$$\cos(m\varphi - \psi) = \cos[m(\varphi + 2\pi) - \psi]$$

此式成立的条件即要求 m 须为整数。一般取正整数，负整数的结果与正整数一样。

将式(3.3-7)和(3.3-8)代入式(3.3-4)，得到

$$H_z = \{A_1 J_m(K_c r) + A_2 N_m(K_c r)\} B \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-j\beta z} \quad (3.3-9)$$

边界条件要求：① $0 \leq r \leq R$ ， H_z 应为有限值；②在 $r = R$ 处， $E_\varphi = E_z = 0$ 。

根据条件①，要求 $A_2 = 0$ 。因为 $r \rightarrow 0$ 时， $N_m(K_c r) \rightarrow -\infty$ ，而圆波导中心处的场应该是有限的，故须令 $A_2 = 0$ 。

根据条件②，由式(3.3-1)可知，即要求

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$$

由式(3.3-9)，

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=R} = \{A_1 K_c J'_m(K_c R)\} B \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-j\beta z} = 0$$

则须

$$J'_m(K_c R) = 0$$

令 $J'_m(K_c R)$ 的第 n 个根为 u'_{mn} ，即得到

$$K_c R = u'_{mn} \quad \text{或者} \quad K_c = \frac{u'_{mn}}{R} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.3-10)$$

由此求得圆波导中TE模的截止波长为

$$\lambda_c = \frac{2\pi R}{u'_{mn}} \quad (3.3-11)$$

表3.3-1列出了几个 u'_{mn} 值与相应的TE模截止波长值。

表3.3-1 u'_{mn} 值与相应TE_{mn}模的 λ_c 值

波型	u'_{mn} 值	λ_c 值	波型	u'_{mn} 值	λ_c 值
TE ₁₁	1.841	3.41R	TE ₂₂	6.705	0.94R
TE ₂₁	3.054	2.06R	TE ₀₂	7.016	0.90R
TE ₀₁	3.832	1.64R	TE ₁₃	8.536	0.74R
TE ₃₁	4.201	1.50R	TE ₀₃	10.173	0.62R
TE ₁₂	5.332	1.18R			

这样我们就得到 H_z 的解形为

$$H_z = H_{mn} J_m\left(\frac{u'_{mn}}{R} r\right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-j\beta z} \quad (3.3-12a)$$

式中 $H_{mn} = A_1 B$ ，为任意常数。式(3.3-3)的一般解应为

$$H_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} J_m\left(\frac{u'_{mn}}{R} r\right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-j\beta z} \quad (3.3-12b)$$

将式(3.3-12b)代入式(3.3-1)可以求得横向场分量。最后我们得到圆波导中

传输型 TE 模场分量为

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\mu m R^2}{(u'_{mn})^2 r} H_{mn} J_m \left(\frac{u'_{mn}}{R} r \right) \sin m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_\theta &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\mu R}{u'_{mn}} H_{mn} J'_m \left(\frac{u'_{mn}}{R} r \right) \cos m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_z &= 0 \\ H_r &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-j\beta R}{u'_{mn}} H_{mn} J'_m \left(\frac{u'_{mn}}{R} r \right) \cos m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_\theta &= \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\beta m R^2}{(u'_{mn})^2 r} H_{mn} J_m \left(\frac{u'_{mn}}{R} r \right) \sin m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} J_m \left(\frac{u'_{mn}}{R} r \right) \sin m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \end{aligned} \right\} \quad (3.3-13)$$

由此可见，圆波导中的 TE 模有无穷多个，以 TE_{mn} 表示之。 m 表示场沿圆周分布的驻波数， n 表示场沿半径分布的半驻波数或场的最大值个数。

(2) TM 模场分量

对于 TM 模， $H_z = 0$, $E_z \neq 0$ 。用同样的方法可以求得

$$E_z = \{A_3 J_m(K_c r) + A_4 N_m(K_c r)\} C \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-j\beta z} \quad (3.3-14)$$

边界条件要求：① $0 \leq r \leq R$, E_z 为有限值；

② $r = R$, $E_\theta = E_z = 0$ 。

由条件①，要求 $A_4 = 0$ ；

由条件②，要求 $J_m(K_c R) = 0$ 。

令 $J_m(K_c R)$ 的第 n 个根为 u_{mn} ，则得到

$$K_c = \frac{u_{mn}}{R} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.3-15)$$

由此可求得圆波导中 TM 模的截止波长为

$$\lambda_c = \frac{2\pi R}{u_{mn}} \quad (3.3-16)$$

这样， E_z 的解形就变成

$$E_z = E_{mn} J_m \left(\frac{u_{mn}}{R} r \right) \cos m\varphi e^{-j\beta z} \quad (3.3-17a)$$

式中 $E_{mn} = A_1 C$, 为任意常数。式 (3.3-2) 的一般解应为

$$E_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} J_m \left(\frac{u_{mn}}{R} r \right) \cos m\varphi e^{-j\beta z} \quad (3.3-17b)$$

将式 (3.3-17b) 代入式 (3.3-1) 可以求得 TM 模的横向场分量。最后我们得到圆波导中传输型 TM 模场分量为：

$$\left. \begin{aligned}
 E_r &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-j\beta R}{u_{mn}} E_{mn} J_m' \left(\frac{u_{mn}}{R} r \right) \sin m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 E_\theta &= \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\beta R^2 m}{u_{mn}^2} E_{mn} J_m \left(\frac{u_{mn}}{R} r \right) \cos m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 E_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} J_m \left(\frac{u_{mn}}{R} r \right) \cos m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 H_r &= \mp \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega \epsilon R^2 m}{u_{mn}^2 r} E_{mn} J_m \left(\frac{u_{mn}}{R} r \right) \sin m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 H_\theta &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-j\omega \epsilon R}{u_{mn}} E_{mn} J_m' \left(\frac{u_{mn}}{R} r \right) \cos m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 H_z &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3-18)$$

结果表明，圆波导中的 TM 模也有无穷多，以 TM_{mn} 表示之。

表 3.3-2 列出了几个 TM_{mn} 模的截止波长值。

表 3.3-2 u_{mn} 值与相应 TM_{mn} 模的截止波长值

波型	u_{mn} 值	λ_c 值	波型	u_{mn} 值	λ_c 值
TM_{01}	2.405	$2.62R$	TM_{12}	7.016	$0.90R$
TM_{11}	3.832	$1.64R$	TM_{22}	8.417	$0.75R$
TM_{21}	5.135	$1.22R$	TM_{03}	8.650	$0.72R$
TM_{02}	5.520	$1.14R$	TM_{13}	10.173	$0.62R$

由上面的分析可知：

a. 圆波导和矩形波导一样，也具有高通特性，传输模的相位因数也需满足关系 $\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon - K_e^2$ 。因此圆波导中也只能传输 $\lambda < \lambda_c$ 的模，且因 λ_c 与圆波导的半径 R 成正比，故尺寸越小， λ_c 越小。

b. 圆波导也有简并现象：一种是 TE_{0n} 模和 TM_{1n} 模简并，这两种模的 λ_c 相同；另一种是特殊的简并现象，即所谓“极化简并”。这是因为场分量沿 φ 方向的分布存在着 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$ 两种可能性。这两种分布模的 m 、 n 和场结构完全一样，只是极化面相互旋转了 90° ，故称为极化简并。除 TE_{0n} 和 TM_{0n} 模外，每种 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模 ($m, n \neq 0$) 本身都存在这种简并现象。这种极化简并现象实际上也是存在的。因为圆波导加工总不可能保证完全是个正圆，如稍微出现有椭圆度，则其中传输的模就会分裂成沿椭圆长轴极化和沿短轴极化的两个模，从而形成极化简并现象。另外，波导中总难免出现不均匀性，或在波导壁上开孔或槽等，这也会导致模的极化简并。故圆波导通常不宜用来作传输系统。但有时我们又需要利用圆波导的这种极化简并现象来做成一些特殊的微波元件。

比较表 3.3-1 和表 3.3-2 可以看出，圆波导中的主模是 TE_{11} 模，其截止波长最长。图 3.3-3 示出圆波导模式的截止波长分布图。由图可见，当 $2.62R < \lambda < 3.41R$ 时，圆波导中只能传输 TE_{11} 模，可以做到单模工作。

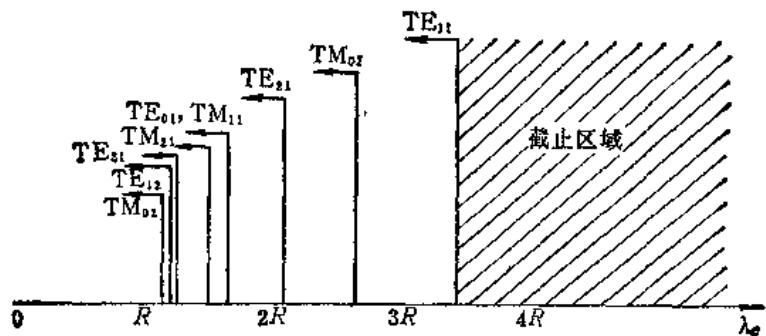


图3.3-3 圆波导的模式截止波长分布图

2. 三个主要模及其应用

圆波导中实际应用较多的模是 TE_{11} 、 TM_{01} 和 TE_{01} 三个模。利用这三个模场结构和管壁电流分布的特点可以构成一些特殊用途的波导元件，用于微波天线馈线系统中。下面分别加以讨论。

(1) TE_{11} 模

如上所述， TE_{11} 模是圆波导的主模，其截止波长 $\lambda_0 = 3.41R$ 。

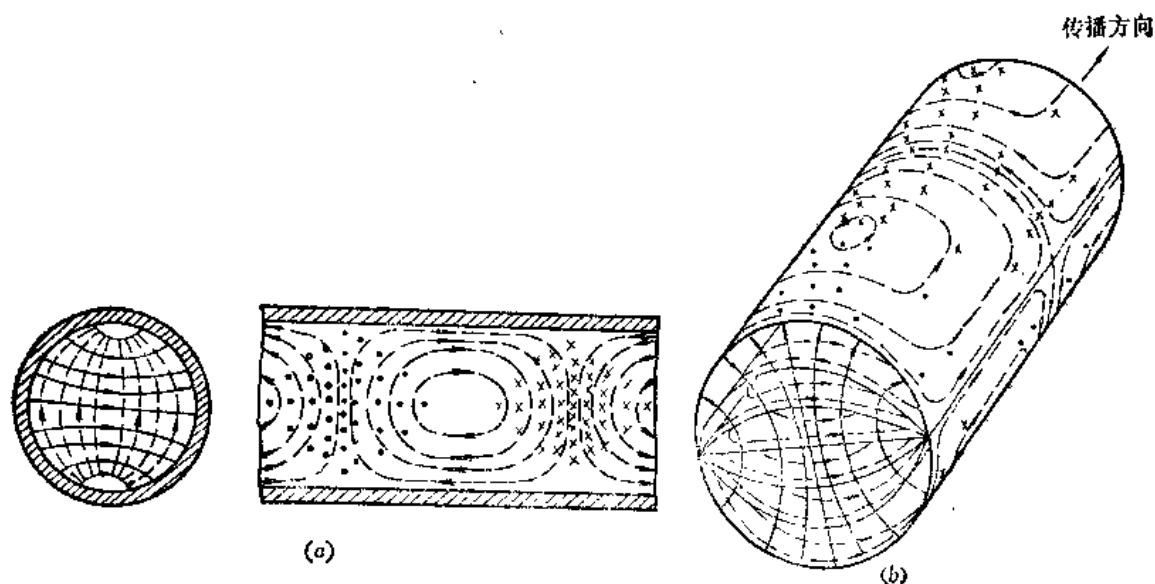
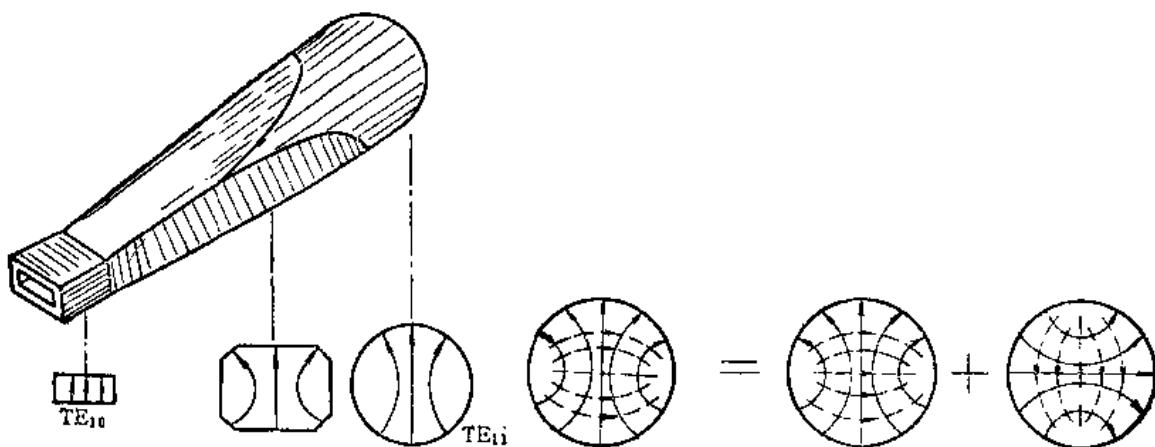
将 $m = 1$ ， $n = 1$ 代入式 (3.3-13) 可以得到 TE_{11} 模场分量为

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \mp \frac{j\omega\mu R^2}{(1.841)^2 r} H_{11} J_1 \left(\frac{1.841}{R} r \right) \sin \varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_\varphi &= \frac{j\omega\mu R}{1.841} H_{11} J'_1 \left(\frac{1.841}{R} r \right) \cos \varphi \sin \varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_z &= 0 \\ H_r &= \frac{-j\beta R}{1.841} H_{11} J'_1 \left(\frac{1.841}{R} r \right) \cos \varphi \sin \varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_\varphi &= \pm \frac{j\beta R^2}{(1.841)^2 r} H_{11} J_1 \left(\frac{1.841}{R} r \right) \cos \varphi \sin \varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_z &= H_{11} J_0 \left(\frac{1.841}{R} r \right) \cos \varphi \sin \varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \end{aligned} \right\} \quad (3.3-19)$$

可见 TE_{11} 模有五个场分量，其场结构如图 3.3-4 所示。由图可见，其场结构与矩形波导主模 TE_{10} 模的场结构相似，因此很容易由矩形波导 TE_{10} 模来过渡转换成圆波导的 TE_{11} 模，如图 3.3-5 所示。

虽然 TE_{11} 模是圆波导的主模，但它存在极化简并，而圆波导加工时总难免出现一定的椭圆度，会使模的极化面发生旋转，分裂成极化简并模，如图 3.3-6 所示。所以不宜采用 TE_{11} 模来传输微波能量。这也就是实用中不用圆波导而采用矩形波导作传输系统的基本原因。

然而，利用 TE_{11} 模的极化简并却可以构成一些特殊的波导元器件，如极化衰减器、极化变换器、微波铁氧体环行器等。

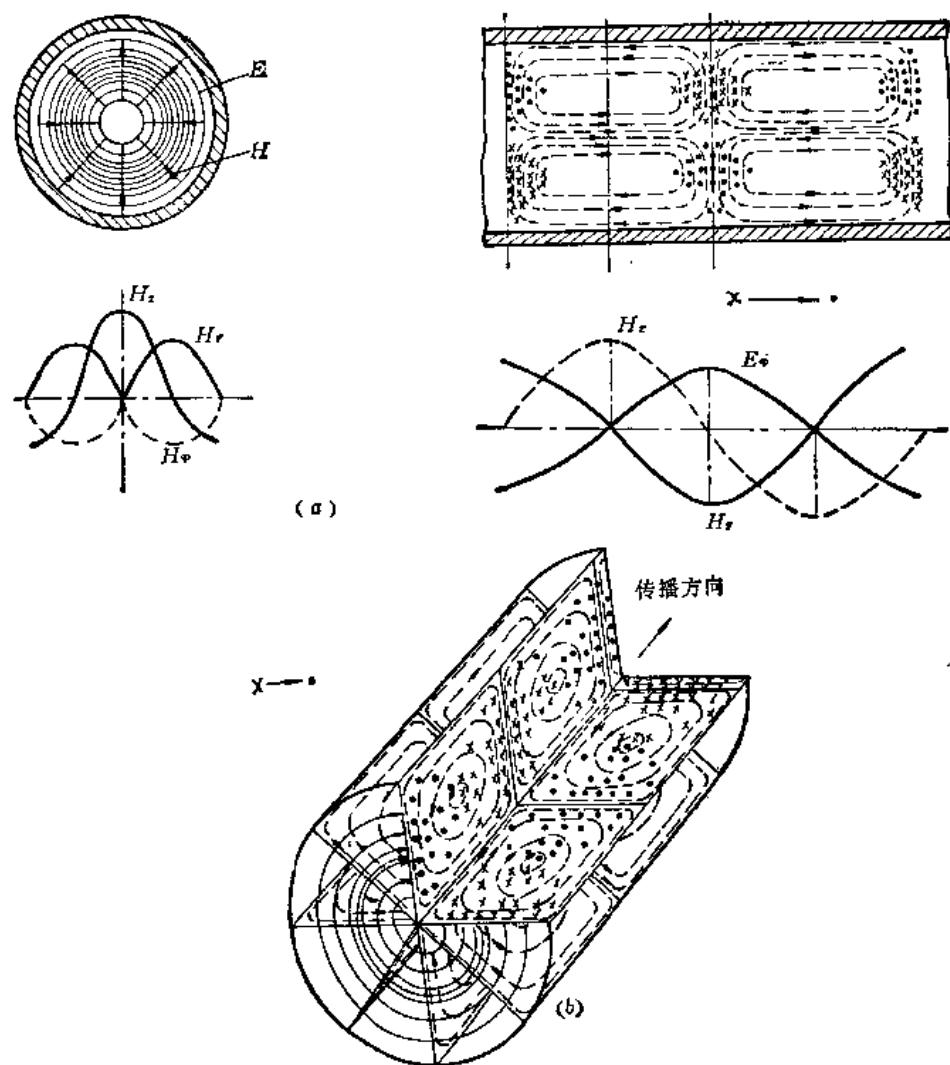
图3.3-4 TE₁₁ 模的电磁场结构图3.3-5 由矩形波导TE₁₀模均匀过渡到圆波导TE₁₁模图3.3-6 TE₁₁ 模的极化简并(2) TE₀₁ 模

TE₀₁模是圆波导的高次模。将 $m = 0$, $n = 1$ 代入式 (3.3-13) 可以得其场分量为

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{j\omega\mu R}{3.832} H_{01} J_1 \left(\frac{3.832}{R} r \right) e^{j(\omega t-\beta z)} \\ H_r &= \frac{j\beta R}{3.832} H_{01} J_1 \left(\frac{3.832}{R} r \right) e^{j(\omega t-\beta z)} \\ H_z &= H_{01} J_0 \left(\frac{3.832}{R} r \right) e^{j(\omega t-\beta z)} \\ E_t &= E_\varphi = H_\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3-20)$$

其截止波长 $\lambda_c = 1.64 R$ 。

TE₀₁模的场结构如图 3.3-7 所示。由图可见，其场结构有如下特点：①电场和磁场

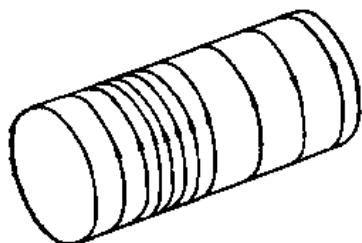
图 3.3-7 TE₀₁ 模电磁场结构

均沿 φ 方向无变化，具有轴对称性；②电场只有 E_φ 分量，电力线都是横截面内的同心圆，且在波导中心和波导壁附近为零；③在管壁附近只有 H_φ 分量，因此只有 J_φ 分量管壁电流，如图 3.3-8 所示。

TE₀₁模有个突出的特点，那就是由于它没有纵向管壁电流，所以当传输功率一定时，随着频率的升高，其功率损耗反而单调下降。这一特点使 TE₀₁ 模适于用作高 Q 谐振腔的工作模式和远距离毫米波波导传输。但 TE₀₁ 模不是主模，因此在使用时需要设法抑制其它模。

(3) TM₀₁模

TM₀₁ 模是圆波导中的最低型横磁模，并且不存在简并，截止波长为 $2.62R$ 。将 $m = 0$,

图 3.3-8 TE₀₁ 模的管壁电流分布

$n = 1$ 代入式 (3.3-18) 可以得到 TM_{01} 模场分量为

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{j\beta R}{2.405} E_{01} J_1 \left(\frac{2.405}{R} r \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_z &= E_{01} J_0 \left(\frac{2.405}{R} r \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_\varphi &= \frac{j\omega \epsilon R}{2.405} E_{01} J_1 \left(\frac{2.405}{R} r \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_\varphi &= H_r = H_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3-21)$$

其场结构如图 3.3-9 所示。由图可见，其场结构特点是：①电磁场沿 φ 方向不变化，场分布具有轴对称性；②电场在中心线附近最强；③磁场只有 H_φ 分量，因而管壁电流只有纵向分量。

由于 TM_{01} 模场结构具有轴对称性，且只有纵向电流，所以它适于作微波天线馈线系统的旋转铰链的工作模式。

上述三个模的比较见表 3.3-3。

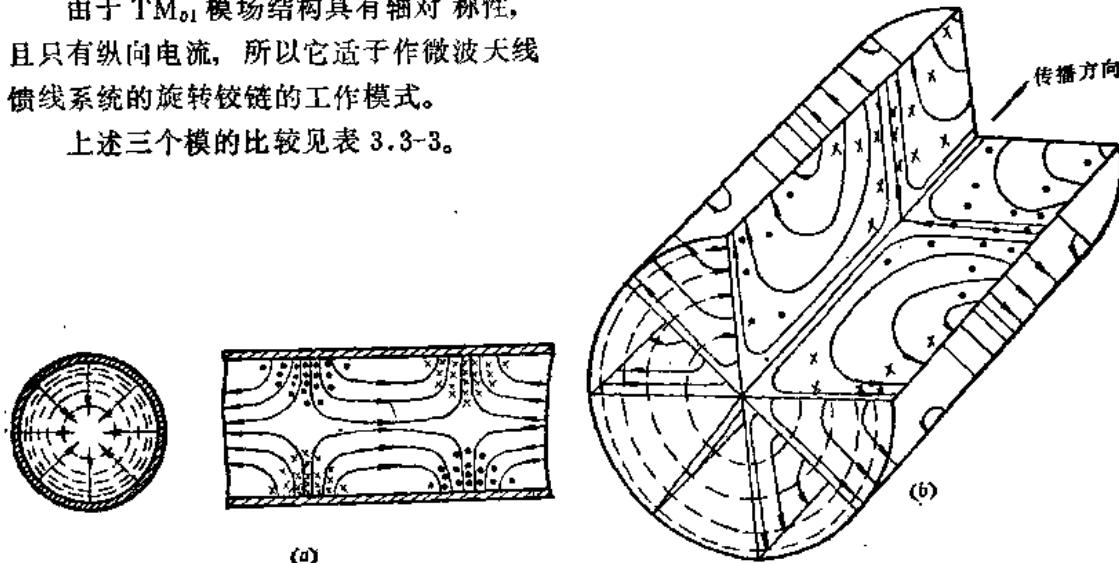


图3.3-9 TM_{01} 模电磁场结构

表3.3-3 圆波导中的三个主要波型比较

波型	TE_{11}	TE_{01}	TM_{01}
场分量	$H_z, H_r, H_\varphi, E_r, E_\varphi$	H_z, H_r, E_φ	E_r, E_z, H_φ
场结构			

(续)

波型	TE ₁₁	TE ₀₁	TM ₀₁
λ_c	$3.41R$	$1.64R$	$2.62R$
导体衰减	$\frac{R_s}{R\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \cdot \left[\left(\frac{f_c}{f} \right)^2 + 0.420 \right]$	$\frac{R_s}{R\eta} \cdot \frac{(f_c/f)^2}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$	$\frac{R_s}{R\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$
特点	① λ_c 最长, 为主模 ② 存在极化简并, 容易发生模的分裂	① 无纵向管壁电流 ② 损耗随频率升高而降低 ③ 场分布具有轴对称性	① 只有纵向管壁电流 ② 场分布具有轴对称性
应用	① 天线开关传输模 ② 极化元件的工作模	① 远距离波导传输用模 ② 低损耗馈线用模	旋转铁芯工作模

注: $R_s = 1/c\delta$ (δ —趋肤深度), $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 376.7/\sqrt{\epsilon_r}$

3.4 同轴线及其高次模

如图 3.4-1 所示由两个与 z 共轴的圆柱导体构成的传输线称为同轴线, a 、 b 分别为内导体外半径和外导体内半径。同轴线

常用于 2500MHz 以下微波波段作传输线或制作宽频带微波元器件。

同轴线的主模是 TEM 模。通常同轴线都是以 TEM 模工作。TE 模和 TM 模为其高次模。

本节从分析同轴线中的三种波型出发, 分析同轴线的传输特性, 进而讨论其尺寸选择。

1. 同轴线的主模 TEM 模

同轴线是一种双导体传输系统, 可以传输 TEM 模。如图 3.4-1 所示, 采用圆柱坐标系, 则同轴线内 TEM 模的电场和磁场应满足如下波动方程:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + (K^2 - \beta^2) E = 0 \quad (3.4-1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} + (K^2 - \beta^2) H = 0 \quad (3.4-2)$$

式中, $K = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ 为自由空间波数, β 为 TEM 模沿同轴线轴向传播时的相位因数。这里假设波的传播因子为 $e^{-j\beta z}$ 。

对于 TEM 模, 由 2.3 节分析知, $K = \beta$, 所以 $K^2 = K^2 - \beta^2 = 0$ 。于是式(3.4-1) 和 (3.4-2) 变为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3.4-3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3.4-4)$$

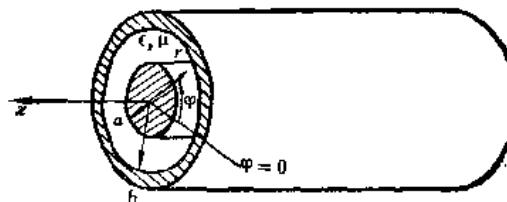


图 3.4-1 同轴线及其坐标系

此即为极坐标下的拉普拉斯方程。这表明 TEM 模在同轴线横截面上的场分布与静电场的分布相同。式 (3.4-3) 和 (3.4-4) 的求解可用位函数方法。以电场为例, 设横截面内的电场为标量位 Φ 的梯度:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi(r, \varphi) e^{-j\beta z} = E_r(r, \varphi) e^{-j\beta z} \quad (3.4-5)$$

式中 $E_r(r, \varphi)$ 表示同轴线横截面上的电场, 仅为 r 、 φ 的函数。

将式 (3.4-5) 代入式 (3.4-3), 得到电位 Φ 的方程

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3.4-6)$$

因为同轴线结构具有轴对称性, 并且有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$$

于是式 (3.4-6) 变成

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.4-7)$$

其解为

$$\Phi = -A \ln r + B \quad (3.4-8)$$

将式 (3.4-8) 代入式 (3.4-5), 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \Phi e^{-j\beta z} = -\left(\hat{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \hat{\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) e^{-j\beta z} \\ &= -\hat{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} e^{-j\beta z} = \hat{r} \frac{A}{r} e^{-j\beta z} \end{aligned} \quad (3.4-9)$$

这表示同轴线传输 TEM 模时, 电场只有 E_r 分量。式 (3.4-9) 中的常数 A 可以利用边界条件确定。设 $z = 0$ 和 $r = a$ 处的电场为 E_0 (其大小由激励源决定), 代入式 (3.4-9), 求得

$$A = E_0 a$$

故得电场为

$$E_r = E_0 \frac{a}{r} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3.4-10)$$

磁力线必须与电力线垂直, 所以磁场只有 H_z 分量。利用式 (3.1-26) 第二式, 可以求得

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} + j\beta E_r \right) = \frac{\beta}{\omega\mu} E_r = \frac{E_r}{\eta} = \frac{E_0 a}{\eta r} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3.4-11)$$

式中 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 为介质的波阻抗。

图 3.4-2 表示同轴线传输 TEM 模时的电磁场分布。由图和式 (3.4-10)、(3.4-11)

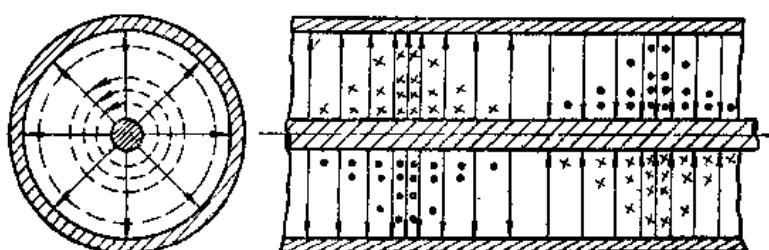


图 3.4-2 同轴线中 TEM 模电磁场结构

可见，愈靠近内导体表面，电磁场愈强。因此内导体的表面电流密度较外导体内表面的表面电流密度大得多。所以同轴线的热损耗主要发生在截面尺寸较小的内导体上。

同轴线内导体上的轴向电流

$$I = \oint_{\text{内}} H_\varphi dl = \int_0^{2\pi} H_\varphi r d\varphi = 2\pi a H_\varphi |_{r=a} = \frac{2\pi E_0 a}{\eta} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3.4-12)$$

内外导体之间的电压

$$U = \int_a^b E_\varphi dr = E_0 a \ln \frac{b}{a} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3.4-13)$$

于是得到特性阻抗

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} (\Omega) \quad (3.4-14)$$

此结果与 2.2 节的结果一致。图 3.4-3 表示同轴线特性阻抗与尺寸的关系曲线。

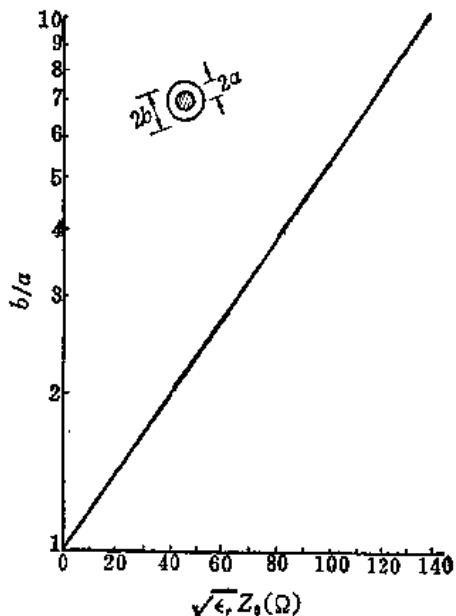


图 3.4-3 同轴线的特性阻抗曲线

传输 TEM 模时，空气同轴线的导体衰减

$$\alpha_s = \frac{R}{2Z_0} = \frac{R_s}{2\pi b} \frac{1 + \frac{b}{a}}{\left(120 \ln \frac{b}{a}\right)} (\text{Np/m}) \quad (3.4-15)$$

式中， R 为同轴线的分布电阻， Z_0 为其特性阻抗， $R_s = 1/\sigma\delta$ 为金属导体的表面电阻。

同轴线传输 TEM 模时的功率容量

$$P_{tr} = \frac{1}{2} \frac{|U_{tr}|^2}{Z_0} = \sqrt{\epsilon_r} \frac{a^2}{120} E_{tr}^2 \ln \frac{b}{a} \quad (3.4-16)$$

式中 E_{tr} 为介质的击穿场强。空气的击穿场强约为 30kV/cm。例如内外导体半径分别为 3.5mm 和 8mm 的 50-16 空气同轴线，其功率容量求得为 700kW。

2. 同轴线的高次模

当同轴线截面尺寸与信号波长可相比拟时，同轴线内将出现高次模：TE 模和 TM

模。实用中的同轴线都是以 TEM 模工作的。我们分析同轴线中可能出现的高次模的目的在于了解高次模的场结构，确定其截止波长，以便在给定工作频率时选择合适的尺寸，保证同轴线内只传输 TEM 模，或者采取措施抑止高次模的产生。

(1) TM 模

分析同轴线中 TM 模的方法与分析圆波导中 TM 模的方法相似。TM 模的横向场分量可由 E_z 求得，而 E_r 则可由方程 (3.3-2) 求得为

$$E_r = [A_1 J_m(K_c r) + A_2 N_m(K_c r)] B \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-j\beta z} \quad (3.4-17)$$

与圆波导不同之处在于，对于同轴线， $r = 0$ 不属于波的传播区域，故第二类贝塞尔函数应保留。

边界条件要求在 $r = a$ 和 b 处， $E_r = 0$ ，于是得到

$$A_1 J_m(K_c a) + A_2 N_m(K_c a) = 0$$

和

$$A_1 J_m(K_c b) + A_2 N_m(K_c b) = 0$$

因此得到决定 TM 模特征值 K_c 的特征方程

$$\frac{J_m(K_c a)}{J_m(K_c b)} = -\frac{N_m(K_c a)}{N_m(K_c b)} \quad (3.4-18)$$

式 (3.4-18) 是个超越方程，其解有无限多个，每个解的根决定一个 K_c 值，即确定一个截止波长 λ_c 。但式 (3.4-18) 无解析解，一般用图解法或数值法求解。下面我们来求其近似解。对于 $K_c a$ 和 $K_c b$ 值很大的情况，贝塞尔函数可以用三角函数近似表示为：

$$J_m(K_c a) \approx \sqrt{\frac{2}{K_c a \pi}} \cos \left(K_c a - \frac{2m+1}{4} \pi \right)$$

$$N_m(K_c a) \approx \sqrt{\frac{2}{K_c a \pi}} \sin \left(K_c a - \frac{2m+1}{4} \pi \right)$$

$$J_m(K_c b) \approx \sqrt{\frac{2}{K_c b \pi}} \cos \left(K_c b - \frac{2m+1}{4} \pi \right)$$

$$N_m(K_c b) \approx \sqrt{\frac{2}{K_c b \pi}} \sin \left(K_c b - \frac{2m+1}{4} \pi \right)$$

代入式 (3.4-18)，并消去共同因子后得到

$$\frac{\sin \left(K_c a - \frac{2m+1}{4} \pi \right)}{\cos \left(K_c a - \frac{2m+1}{4} \pi \right)} \approx -\frac{\sin \left(K_c b - \frac{2m+1}{4} \pi \right)}{\cos \left(K_c b - \frac{2m+1}{4} \pi \right)} \quad (3.4-19)$$

令

$$x = K_c b - \frac{2m+1}{4} \pi \quad \text{和} \quad y = K_c a - \frac{2m+1}{4} \pi$$

则得

$$\sin x \cos y - \cos x \sin y \approx 0$$

即得

$$\sin(x - y) = \sin K_c(b - a) \approx 0$$

由此可得

$$K_e \approx \frac{n\pi}{b-a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.4-20)$$

因此得到同轴线中 TM_{mn} 模的截止波长近似为

$$\lambda_{eTM} \approx \frac{2}{n} (b-a) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.4-21)$$

最低型 TM_{01} 模的截止波长近似为

$$\lambda_{eTM_{01}} \approx 2(b-a) \quad (3.4-22)$$

由式 (3.4-21) 可以看出, 同轴线中 TM 型高次模的截止波长近似与 m 无关。这就意味着, 如果在同轴线内出现 TM_{01} 模, 就可能同时出现 TM_{11} 、 TM_{21} 、 TM_{31} 、 \dots 等模。这是我们所不希望的。因此, 在设计和使用同轴线时, 应设法避免 TM 型模的出现。

(2) TE 模

分析同轴线中 TE 模的方法与圆波导中 TE 模的方法相似。此时 $E_z = 0$, H_z 则可由式 (3.3-3) 解得为

$$H_z = [A_3 J_m(K_e r) + A_4 N_m(K_e r)] C \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-j\beta z} \quad (3.4-23)$$

边界条件要求在 $r = a$ 和 b 处, $\partial H_z / \partial n = 0$, 于是得到

$$A_3 J'_m(K_e a) + A_4 N'_m(K_e a) = 0$$

和

$$A_3 J'_m(K_e b) + A_4 N'_m(K_e b) = 0$$

由此得到决定 TE 模特征值 K_e 的特征方程

$$\frac{J'_m(K_e a)}{J'_m(K_e b)} = \frac{N'_m(K_e a)}{N'_m(K_e b)} \quad (3.4-24)$$

式 (3.4-24) 也是超越方程, 无解析解, 一般用图解法或数值法求解。

用上述近似方法可以求得 $m \neq 0$, $n = 1$ 的 TE_{m1} 模的截止波长近似为

$$\lambda_{eTE_{m1}} \approx \frac{\pi(b+a)}{m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.4-25)$$

最低型 TE_{11} 模的截止波长则为

$$\lambda_{eTE_{11}} \approx \pi(b+a) \quad (3.4-26)$$

对于 $m = 0$ 的情况, 式(3.4-24)变为

$$\frac{J'_0(K_e a)}{J'_0(K_e b)} = \frac{N'_0(K_e a)}{N'_0(K_e b)}$$

根据公式 $J'_0 = -J_1$, $N'_0 = -N_1$, 则得

$$\frac{J_1(K_e a)}{J_1(K_e b)} = \frac{N_1(K_e a)}{N_1(K_e b)}$$

此式与决定 $m = 1$ 的 TM_{11} 模 K_e 值的式 (3.4-18) 相同。因此 TE_{01} 的截止波长近似为

$$\lambda_{eTE_{01}} \approx 2(b-a) \quad (3.4-27)$$

由式 (3.4-22)、(3.4-26) 和 (3.4-27) 可以看出, TE_{11} 模是同轴线中的最低型高次模。因此, 设计同轴线尺寸时, 只要保证能抑制 TE_{11} 模就行。图 3.4-4 表示同轴线模式的截止波长分布图。图 3.4-5 表示 TE_{11} 、 TM_{01} 和 TE_{01} 模的场分布。

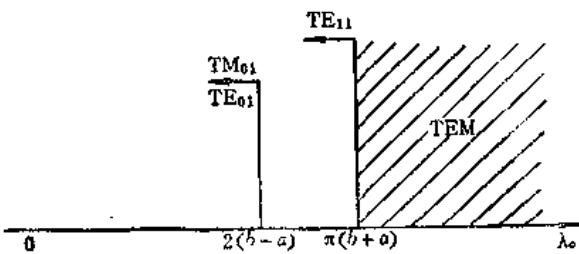
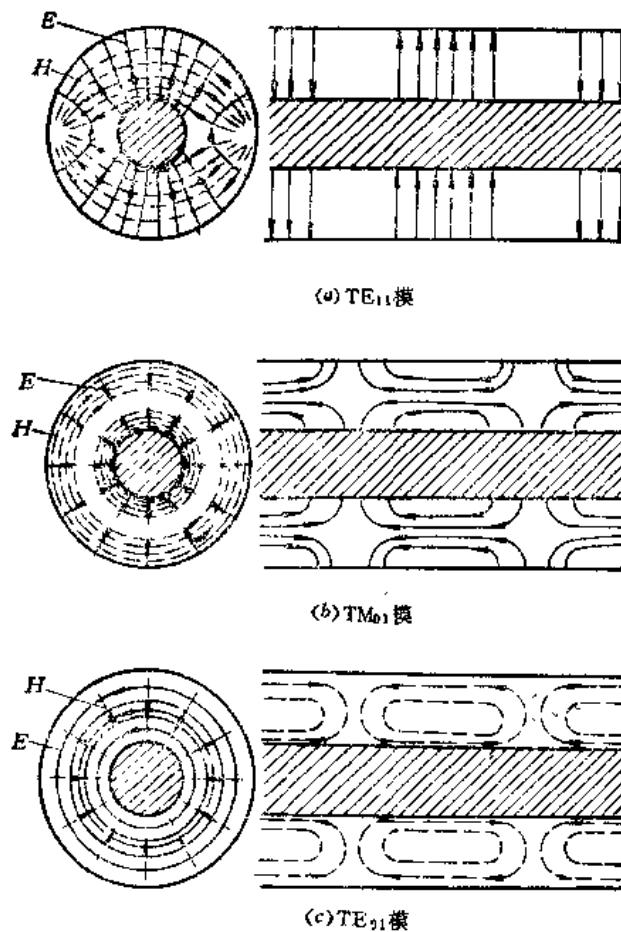


图 3.4-4 同轴线模式的截止波长分布图

图3.4-5 同轴线中TE₁₁、TM₀₁和TE₀₁模的场分布

3. 同轴线的尺寸选择

尺寸选择的原则是：①保证在给定工作频带内只传输TEM模；②满足功率容量要求，即传输功率尽量大；③损耗最小。

为保证只传输TEM模，必须满足条件

$$\lambda_{\min} \geq \pi(b + a)$$

因此得到

$$(b + a) \leq \frac{\lambda_{\min}}{\pi} \quad (3.4-28)$$

为保证传输功率最大，在满足式(3.4-28)条件下，限定**b**值，改变a，则传输功率也将改变。功率容量最大的条件是 $dP_{br}/da = 0$ 。以式(3.4-16)代入求得

$$\frac{b}{a} = 1.649 \quad (3.4-29)$$

其相应的空气同轴线特性阻抗为 30Ω 。

衰减最小的条件是 $d\alpha_e/da = 0$ 。以式(3.4-15)代入，求得

$$\frac{b}{a} = 3.591 \quad (3.4-30)$$

其相应的空气同轴线特性阻抗为 76.71Ω 。

计算表明， b/a 在一个比较宽的范围内变化时，衰减因数最小值基本不变，即当

b/a 从 3.2 变到 4.1 时，衰减因数最小值变化小于 0.5%， b/a 为 5.2 和 b/a 为 2.6 相比，衰减因数最小值仅增加 5%。

如果对衰减最小和功率最大都有要求，则一般取

$$\frac{b}{a} = 2.303 \quad (3.4-31)$$

其相应的空气同轴线特性阻抗为 50Ω 。

同轴线已有标准化尺寸，见附录一，设计同轴元件时可参考。

3.5 波导正规模的特性

前面我们得到了矩形波导和圆波导的 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模。这些模称为金属波导的正规模。各种波导也都有其相应的正规模。正规模具有一些很重要的特性，即所谓对称性、正交性和完备性。本节专门加以讨论。

1. 正规模的对称性

正规模的电场和磁场对时间和距离具有对称性或反对称性。

(1) 正规模的电场和磁场波函数对时间 t 分别为对称函数和反对称函数，即

$$\left. \begin{array}{l} E_1(r, -t) = E_1(r, t) \\ H_1(r, -t) = -H_1(r, t) \end{array} \right\} \text{或} \quad \left. \begin{array}{l} E_1(r) = E_1^*(r) \\ H_1(r) = -H_1^*(r) \end{array} \right\} \quad (3.5-1)$$

式中， $E_1(r, -t)$ 、 $H_1(r, -t)$ 是时间为 $(+t)$ 的场； $E_1(r, t)$ 、 $H_1(r, t)$ 是时间为 $(-t)$ 的场；符号 * 代表共轭复数。

特性 (3.5-1) 可根据麦克斯韦方程加以证明。时间为 $(+t)$ 的场 $E_1(r, t)$ 、 $H_1(r, t)$ 应满足麦克斯韦方程，即有

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times H_1 = \epsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} \\ \nabla \times E_1 = -\mu \frac{\partial H_1}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (3.5-2)$$

而时间为 $(-t)$ 的场 $E_1(r, -t)$ 、 $H_1(r, -t)$ 也应满足麦克斯韦方程。事实上，我们将式 (3.5-1) 代入麦克斯韦方程，得到

$$\nabla \times (-H_1(r, -t)) = \epsilon \frac{\partial E_1(r, -t)}{\partial t} = -\epsilon \frac{\partial E_1(r, -t)}{\partial t}$$

即得

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times H_1(r, -t) = \epsilon \frac{\partial E_1(r, -t)}{\partial t} \\ \nabla \times E_1(r, -t) = -\mu \frac{\partial (-H_1(r, -t))}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H_1(r, -t)}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (3.5-3)$$

式 (3.5-3) 与 (3.5-2) 相同，即说明 $E_1(r, -t)$ 和 $H_1(r, -t)$ 满足麦克斯韦方程，亦说明式 (3.5-1) 前一种形式的正确性。同样可以证明式 (3.5-1) 后一种形式也满足麦克斯韦方程。

(2) 正规模的电场和磁场波函数关于纵坐标 z 的对称性：横向电场 E_z 与纵向磁场 H_x 是坐标 z 的对称函数；横向磁场 H_y 与纵向电场 E_y 是坐标 z 的反对称函数，即有

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_{t2}(z) = \mathbf{E}_{t1}(-z) \\ E_{z2}(z) = -E_{z1}(-z) \\ \mathbf{H}_{t2}(z) = -\mathbf{H}_{t1}(-z) \\ H_{z2}(z) = H_{z1}(-z) \end{array} \right\} \quad (3.5-4)$$

式中, $\mathbf{E}_{t1}(z)$ 、 $E_{z1}(z)$ 、 $\mathbf{H}_{t1}(z)$ 和 $H_{z1}(z)$ 是沿 $+z$ 方向传输的场; $\mathbf{E}_{t2}(z)$ 、 $E_{z2}(z)$ 、 $\mathbf{H}_{t2}(z)$ 和 $H_{z2}(z)$ 是沿 $-z$ 方向传输的场。

为了证明式 (3.5-4) 的正确性, 只需证明 \mathbf{E}_2 和 \mathbf{H}_2 满足麦克斯韦方程。 \mathbf{E}_2 和 \mathbf{H}_2 可分成横向分量和纵向分量两部分:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{t2}(\mathbf{r}, t) + \hat{z}E_{z2}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_{t2}(\mathbf{r}, t) + \hat{z}H_{z2}(\mathbf{r}, t) \end{array} \right\} \quad (3.5-5)$$

将式 (3.5-5) 代入麦克斯韦方程, 得到

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H}_2 = \nabla \times (\mathbf{H}_{t2} + \hat{z}H_{z2}) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}_{t2} + \hat{z}E_{z2}) \\ \nabla \times \mathbf{E}_2 = \nabla \times (\mathbf{E}_{t2} + \hat{z}E_{z2}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}_{t2} + \hat{z}H_{z2}) \end{array} \right\}$$

由此可得

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E}_{t2} = -j\hat{z}\omega\mu H_{z2} \\ \nabla \times \mathbf{H}_{t2} = j\hat{z}\omega\epsilon E_{z2} \\ \nabla \times \hat{z}E_{z2} + \hat{z} \times -\frac{\partial \mathbf{E}_{t2}}{\partial z} = -j\omega\mu \mathbf{H}_{t2} \\ \nabla \times \hat{z}H_{z2} + \hat{z} \times -\frac{\partial \mathbf{H}_{t2}}{\partial z} = -j\omega\epsilon \mathbf{E}_{t2} \end{array} \right\} \quad (3.5-6)$$

将式 (3.5-4) 的右边代入麦克斯韦方程, 也可以得到与式 (3.5-6) 相同的结果。这就证明了式 (3.5-4) 的正确性。

如果时间 t 和传输方向 (即 z 坐标) 同时交换符号, 则电场和磁场应同时满足式 (3.5-1) 和式 (3.5-4), 对称性则变成:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_{t2m} = \mathbf{E}_{t1m}^* \\ \mathbf{H}_{t2m} = \mathbf{H}_{t1m}^* \\ E_{z2m} = -E_{z1m}^* \\ H_{z2m} = -H_{z1m}^* \end{array} \right\} \quad (3.5-7)$$

下标 m 代表模式号码。

由式 (3.5-7) 可以看出, \mathbf{E}_{tm} 和 \mathbf{H}_{tm} 必须是实数, 否则左右两边不可能相等。因此 \mathbf{E}_{tm} 和 \mathbf{H}_{tm} 必然是同相。同时可以看出, E_{zm} 和 H_{zm} 必然是虚数, 否则左右两边也不能相等。由此我们可以得到结论: 正规模的电场和磁场的横向分量、纵向分量相互同相, 但横向分量与纵向分量成 90° 相位差。所以对于正规模, $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 是传输能量。

(3) 对于消失模 (即衰减模), 不存在变换 z 的符号问题; 只有时间的对称关系, 即有

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_{zm}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{1m}^*(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_{zm}(\mathbf{r}) = -\mathbf{H}_{1m}^*(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \quad (3.5-8)$$

由此可见, E_m 是实数, H_m 是虚数, 两者相位差 90° 。故消失模的 $E_m \times H_m$ 不是传输能量, 而是虚功, 是储能。

由上面分析可知, 正规模的对称性是麦克斯韦方程对称性和规则波导本身对称性的必然结果。它们在下面研究波导的激励和耦合时很有用。

2. 正交性和完备性

式 (3.2-16)、(3.2-18) 和式 (3.3-13)、(3.3-18) 表明, 金属波导中传输的电磁波可以表示为正规模的叠加。换句话说, 金属波导中的正规模 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模 (包括传输模和消失模) 构成一个完备的正交系。所谓正规模的正交性就是指正规模能够独立存在, 互不耦合; 所谓完备性 (或完全性) 就是波导中任意的电磁场都可以用所有正规模的叠加来表示, 即是说, 波导中的正规模 (包括消失模) 是完备的。

规则波导正规模 (TE 模或 TM 模) 的正交性有如下三种形式:

(1) $E_{tm} \cdot E_{tn}$ 或 $H_{tm} \cdot H_{tn}$ 沿波导横截面的积分等于零, 如 $m \neq n$, 即

$$\left. \begin{aligned} \int_s E_{tm} \cdot E_{tn} ds &= 0 \\ \int_s H_{tm} \cdot H_{tn} ds &= 0 \end{aligned} \right\} m \neq n \quad (3.5-9)$$

(2) $E_{zm} E_{zn}$ 或 $H_{zm} H_{zn}$ 沿波导横截面的积分等于零, 如 $m \neq n$, 即

$$\left. \begin{aligned} \int_s E_{zm} E_{zn} ds &= 0 \\ \int_s H_{zm} H_{zn} ds &= 0 \end{aligned} \right\} m \neq n \quad (3.5-10)$$

(3) $\hat{z} \cdot E_{tm} \times H_{tn}$ 沿波导横截面的积分等于零, 如 $m \neq n$, 即

$$\int_s \hat{z} \cdot E_{tm} \times H_{tn} ds = 0 \quad m \neq n \quad (3.5-11)$$

式 (3.5-9) 和 (3.5-10) 可用二维格林恒等式得到证明。二维格林恒等式为

$$\int_s U \nabla^2 V ds = \oint_l U \frac{\partial V}{\partial n} dl - \int_s \nabla U \cdot \nabla V ds \quad (3.5-12)$$

式中, U 和 V 为两个任意标量函数。将 U 与 V 交换后的式子与式 (3.5-12) 相减得到

$$\int_s (U \nabla^2 V - V \nabla^2 U) ds = \oint_l \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dl \quad (3.5-13)$$

在上式中, 令 $U = E_{zm}$, $V = E_{zn}$, 则由式 (3.1-22) 和 (3.1-34), 得到

$$(K_{zm}^2 - K_{zn}^2) \int_s E_{zm} E_{zn} ds = 0 \quad (3.5-14)$$

即有

$$\int_s E_{zm} E_{zn} ds = 0 \quad m \neq n$$

同样可以证明式 (3.5-10) 第二式。

利用式 (3.1-17) 和 (3.1-18), 如令 $U = E_{zm}$, $V = E_{zn}$, 代入式 (3.5-12), 得到

$$-K_{zn}^2 \int_s E_{zm} E_{zn} ds + \frac{\beta_m \beta_n}{K_{zm}^2 K_{zn}^2} \int_s E_{tm} \cdot E_{tn} ds = \oint_l E_{zm} \frac{\partial E_{zn}}{\partial n} dl = 0$$

于是

$$\int_s \mathbf{E}_{tm} \cdot \mathbf{E}_{tn} ds = 0$$

同样可以证明式(3.5-9)第二式。

式(3.5-11)的证明，只要利用如下关系就够了：

$$\hat{z} \cdot (\mathbf{E}_{tm} \times \mathbf{H}_{tn}) = \mathbf{E}_{tm} \cdot (\mathbf{H}_{tn} \times \hat{z}) = \mathbf{E}_{tm} \cdot \mathbf{E}_{tn} / Z_{mn}$$

式中 Z_{mn} 为第 n 模的波阻抗。

如果第 m 和 n 模为两个简并模，则 $K_{em}^2 = K_{en}^2$ ，则由式(3.5-14)得不到正交关系(3.5-10)。在这种情况下，我们可以将这两个简并模场代以它们的线性组合，以便使式(3.5-9)、(3.5-10)和(3.5-11)成立。关于两个简并模正交关系的证明这里从略，可参考有关资料(如参考资料[11])。

正规模的正交关系不限于 TE 模和 TM 模。对于任意的波型，对于规则波导，有如下正交关系：

(4) 不管是理想波导壁(此时 $\hat{n} \times \mathbf{E} = 0$)还是阻抗壁，都有

$$\int_s (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n - \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m) \cdot \hat{z} ds = 0 \quad (3.5-15)$$

(5) 功率正交关系

$$\int_s (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m^*) \cdot \hat{z} ds = 0 \quad (3.5-16)$$

式(3.5-15)利用罗伦兹定理很容易得到证明。

下面我们来证明式(3.5-16)：

第 m 模的场 \mathbf{E}_m 、 \mathbf{H}_m 和第 n 模的场 \mathbf{E}_n 、 \mathbf{H}_n 分别满足麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{H}_m = j\omega \epsilon \mathbf{E}_m \text{ 和 } \nabla \times \mathbf{E}_m = -j\omega \mu \mathbf{H}_m$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_n^* = -j\omega \epsilon \mathbf{E}_n^* \text{ 和 } \nabla \times \mathbf{E}_n^* = j\omega \mu \mathbf{H}_n^*$$

由上四式，可以得到

$$\mathbf{H}_n^* \cdot \nabla \times \mathbf{E}_m - \mathbf{E}_m \cdot \nabla \times \mathbf{H}_n^* = \nabla \cdot (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^*) = j\omega (-\mathbf{H}_n^* \cdot \mu \mathbf{H}_m + \mathbf{E}_m \cdot \epsilon \mathbf{E}_n^*) \quad (3.5-17)$$

$$\mathbf{E}_n^* \cdot \nabla \times \mathbf{H}_m - \mathbf{H}_m \cdot \nabla \times \mathbf{E}_n^* = \nabla \cdot (\mathbf{H}_m \times \mathbf{E}_n^*) = j\omega (\mathbf{E}_n^* \cdot \epsilon \mathbf{E}_m - \mathbf{H}_m \cdot \mu \mathbf{H}_n^*) \quad (3.5-18)$$

由式(3.5-17)和(3.5-18)可得

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^* - \mathbf{H}_m \times \mathbf{E}_n^*) = \nabla \cdot (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H}_m) = 0 \quad (3.5-19)$$

设 \mathbf{E}_m 、 \mathbf{H}_m 和 \mathbf{E}_n 、 \mathbf{H}_n 分别具有因子 $e^{j\omega z - \gamma_m z}$ 和 $e^{j\omega z - \gamma_n z}$ ，则对式(3.5-19)在 z 和 $z + \Delta z$ 两平面及波导内壁所围空间积分，得到

$$\begin{aligned} & \int_s (-\hat{z}) \cdot (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H}_m) ds + \int_s \hat{n} \cdot (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H}_m) ds \\ & + \int_s \hat{z} \cdot \left\{ \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H}_m - \Delta z \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H}_m) \right\} ds = 0 \end{aligned} \quad (3.5-20)$$

式中 \hat{n} 为外向单位法线矢量。对于理想波

导壁， $\hat{n} \times \mathbf{E} = 0$ ；对于阻抗壁， $E_z/H_z = Z_z$ ， $E_z/H_z = -Z_z$ (波导周界上的坐标关系如图 3.5-1 所示)，式(3.5-20)中的第二个积分都等于零。因此得到

$$(\gamma_m + \gamma_n^*) \int_s (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H}_m) \cdot \hat{z} ds = 0 \quad (3.5-21)$$

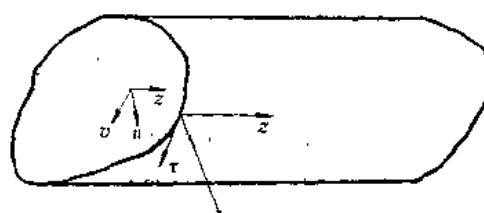


图 3.5-1 波导周界上的坐标系

由此得到

$$\int_s (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H}_m) \cdot \hat{z} ds = 0 \quad \gamma_m \neq -\gamma_n^* \quad (3.5-22)$$

故正交关系 (3.5-16) 得证。

通常, 将式 (3.5-15) 和 (3.5-16) 写成如下正交归一化关系

$$\int_s \hat{z} \cdot [\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n - \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m] ds = N_m \delta_{mn} \quad (3.5-23)$$

$$\int_s \hat{z} \cdot (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H}_m) ds = N_m \delta_{mn} \quad (3.5-24)$$

式中, 当 $m \neq n$ 时, $\delta_{mn} = 0$; $m = n$ 时, $\delta_{mn} = 1$; 而 N_m 为一常数, 称为归一化因子。

由式 (3.5-23) 和 (3.5-24), 对于波导中两个沿相反方向传播的模, 则有

$$\int_s \hat{z} \cdot [\mathbf{E}_m^+ \times \mathbf{H}_n^- - \mathbf{E}_n^- \times \mathbf{H}_m^+] ds = 0 \quad (3.5-25)$$

$$\int_s \hat{z} \cdot (\mathbf{E}_m^+ \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H}_m^+) ds = 0 \quad (3.5-26)$$

将式 (3.5-25)、(3.5-26) 与式 (3.5-23)、(3.5-24) 分别相加, 可以得到如下正交归一化关系

$$\int_s \hat{z} \cdot \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n ds = - \int_s \hat{z} \cdot \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m ds = \frac{1}{2} N_m \delta_{mn} \quad (3.5-27)$$

$$\int_s \hat{z} \cdot \mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^* ds = + \int_s \hat{z} \cdot \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H}_m ds = \frac{1}{2} N_m \delta_{mn} \quad (3.5-28)$$

由上面的推导可知, 规则波导正规模正交关系 (3.5-15) 或 (3.5-23) 对无耗和有耗媒质都成立, 但对各向异性媒质 (如旋磁物质) 不成立。而 $\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n$ 无明确的物理意义。

功率正交关系 (3.5-16) 或 (3.5-24) 只对无耗媒质 (包括无耗旋磁物质) 成立, 但对有耗媒质不成立。功率正交关系有明确的物理意义, 它表示各个不同模之间无能量的相互耦合和交换, 整个波导系统的传输功率等于各个模所载功率之和。正规模场的正交关系在研究波导的激励、耦合及能量传输时十分有用。在研究波导中的激励和各种不连续性问题时, 我们需要将待求的场展开成波导中完备的正规模场的级数, 为求得展开式中的待定系数, 就需要利用正规模的正交关系。

在应用上述正交关系求各正规模的待定系数或各模的相对幅度时, 往往需要人为地作某种规定, 即所谓归一化, 如式 (3.5-23) 和 (3.5-24) 那样。需要指出的是, 归一化并非正规模的特性, 只是一种运算方法。这样规定有时会使运算简便, 但有时并不需要这样做。

正规模函数的完备性与二阶常微分方程固有函数的完备性施特姆-刘维尔 (Sturm-Liouville) 定理相同, 其证明可参考有关数学物理方程书●。

3.6 波导的激励与耦合

在前面的讨论中, 我们没有涉及波导中的微波能量是如何产生的问题, 而是假定波导中已经建立了某种频率的稳定波型; 同时也没有讨论各种波型之间的相互作用问题。

● 例如参考复旦大学数学系主编: 《数学物理方程》, 上海科学技术出版社, 1983年, P. 262-270。

波导中的微波能量是用所谓激励方式产生的，如图 3.6-1 所示那样。其激励的结果是要求在波导中建立起所需要的波型。这种装置称为激励装置或激励元件。相反的，从波导中取出微波能量的装置则称为耦合装置或耦合元件。根据互易原理，激励和耦合是可逆的，激励装置也可作耦合装置。

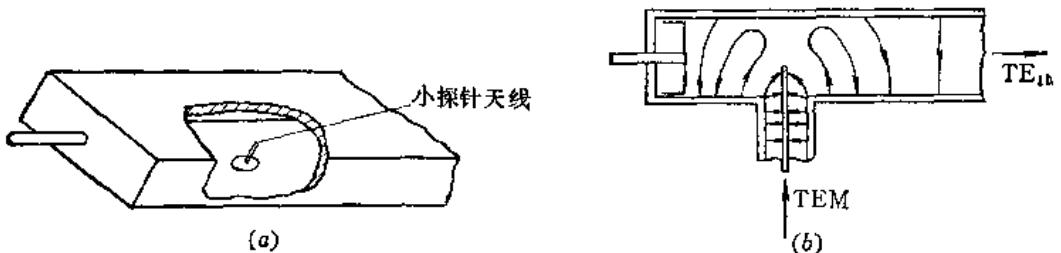


图3.6-1 矩形波导TE₁₀模的激励

波导激励的本质是电磁波的辐射，是微波源向波导内壁所限定的空间辐射，并要求在其中建立所需要的波型。由于激励源附近的边界条件比较复杂，要用严格的数学方法求解是很困难的，一般只能作近似分析。另一方面，激励机构本身又相当于在波导内引入不均匀性，因此，在激励源附近不仅会产生所需要的波型，而且会出现许多别的模。这些模叠加在一起才能满足激励源附近的边界条件。同时，激励机构的不均匀性将引起模之间的能量耦合。因此，在本节中，在讨论波导激励的同时，还要研究各种模之间的耦合规则。

1. 波导激励的一般方法及其计算

波导中某种模的激励是建立在已知这种模的电磁场结构基础之上的。这样，波导激励的方法大致可以分为三类：

(1) 传导电流激励。它一般是在波导中放置一个探针天线或小环天线，以产生所需电场。

(2) 电子流激励。它是由电子流通过波导，在其中产生所需模式。这种激励方法常用于微波电子器件中。

(3) 小孔激励。它是在波导的公共壁上开不同形状的小孔或槽缝，在波导中激发所需模式。

假定激励源是给定的，则激励问题就变成在波导系统中求解有源麦克斯韦方程的问题。而求激励场的问题则是要找出所激励正规模的系数的表示式。麦克斯韦方程组的源包括电流源 J_e 和假想的等效磁流源 J_m ，于是问题就变成求正规模系数与 J_e 和 J_m 的关系式。其方法是将电磁场用正规模展开，写成正规模的级数形式，然后利用罗伦兹定理和模的正交性确定所求模的系数。

如图 3.6-2 所示柱形波导，电流源位于 z_1 和 z_2 之间， S_1 、 S_2 为波导截面， S_0 为波导管壁（设为理想导体）， n 为外法线单位矢量。设波导为无限长，则由电流源所辐射的场将向两个方向传输，且可用正规模展开为

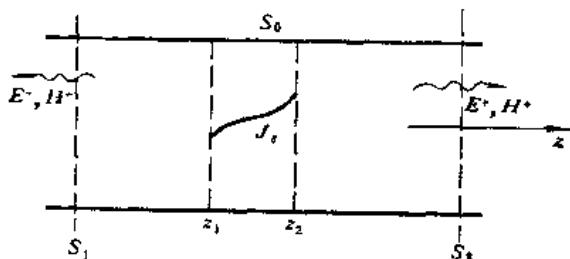


图3.6-2 柱形波导中的电流源

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^+ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{E}_i^+ \\ \mathbf{H}^+ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{H}_i^+ \end{aligned} \right\} \quad (3.6-1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^- &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i \mathbf{E}_i^- \\ \mathbf{H}^- &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i \mathbf{H}_i^- \end{aligned} \right\} \quad (3.6-2)$$

式中, a_i 和 b_i 分别表示 $+z$ 和 $-z$ 方向正模的系数, $\mathbf{E}_i^+, \mathbf{H}_i^+$ 和 $\mathbf{E}_i^-, \mathbf{H}_i^-$ 分别表示 $+z$ 和 $-z$ 方向传输的正模的电场和磁场, 且可表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_i^+ &= (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{zi}) e^{-\gamma_i z} \\ \mathbf{H}_i^+ &= (\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_{zi}) e^{-\gamma_i z} \end{aligned} \right\} \quad (3.6-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_i^- &= (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{zi}) e^{\gamma_i z} \\ \mathbf{H}_i^- &= (-\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_{zi}) e^{\gamma_i z} \end{aligned} \right\} \quad (3.6-4)$$

由模式正交归一化条件, 有

$$\int_S (\mathbf{E}_i^+ \times \mathbf{H}_j^+) \cdot d\mathbf{s} = \delta_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{ll} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{array} \right. \quad (3.6-5)$$

取图 3.6-2 由截面 S_1 、 S_2 及其间波导壁作为体积 V 的边界, S_1 和 S_2 位于无源区, 在该处只有所求的第 i 个波导模的场。由罗伦兹互易公式

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) dv &= \oint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} ds \\ &= \int_V (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2) dv \end{aligned}$$

设公式中的场 \mathbf{E}_1 、 \mathbf{H}_1 是电流源 \mathbf{J}_1 所激发的场, 它由式 (3.6-1) 和 (3.6-2) 表示; 取第 i 个波导模的场 \mathbf{E}_i^+ 、 \mathbf{H}_i^+ 表示罗伦兹互易公式中的 \mathbf{E}_2 、 \mathbf{H}_2 , 它们由式 (3.6-4) 给出, 而 \mathbf{E}_2 、 \mathbf{H}_2 现在是 V 中无源时 ($\mathbf{J}_2 = 0$) 的解, 于是罗伦兹公式变为

$$\oint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_i^+ - \mathbf{E}_i^+ \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} ds = \int_V \mathbf{E}_i^+ \cdot \mathbf{J}_1 dv \quad (3.6-6)$$

式中 $\oint_S = \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_0}$ 。根据边界条件, $\hat{n} \times \mathbf{E}_1 = 0$, $\hat{n} \times \mathbf{E}_i^+ = 0$, 故 $\int_{S_0} = 0$ 。而

由模式正交条件, 在波导横截面上积分时, 在 \mathbf{E}_1 、 \mathbf{H}_1 的展开式中, 除了第 i 项外, 其余各项都为零; 又由正交性知, 在 S_1 横截面上的积分恒等于零, 故得

$$\begin{aligned} &\int_{S_2} a_i [(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{zi}) \times (-\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_{zi}) - (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{zi}) \times (\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_{zi})] \cdot \hat{z} ds \\ &- \int_{S_1} b_i [(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{zi}) \times (-\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_{zi}) - (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{zi}) \times (-\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_{zi})] \cdot \hat{z} ds \\ &= -2a_i \int_{S_2} \mathbf{e}_i \times \mathbf{h}_i \cdot \hat{z} ds = \int_V \mathbf{E}_i^+ \cdot \mathbf{J}_1 dv \end{aligned}$$

因此得到

$$a_i = -\frac{1}{2z_i} \int_V \mathbf{E}_i^+ \cdot \mathbf{J}_e dv = -\frac{1}{2z_i} \int_{S_e} \mathbf{E}_i^+ \cdot \mathbf{J}_{e_s} ds \quad (3.6-7a)$$

同理，如在式(3.6-6)中取第*i*个波导模的场 \mathbf{E}_i^+ 、 \mathbf{H}_i^+ 表示 \mathbf{E}_i 、 \mathbf{H}_i ，则可以求得

$$b_i = -\frac{1}{2z_i} \int_V \mathbf{E}_i^+ \cdot \mathbf{J}_m dv = -\frac{1}{2z_i} \int_{S_m} \mathbf{E}_i^+ \cdot \mathbf{J}_{m_s} ds \quad (3.6-7b)$$

式中， S_e 为电源的表面积； z_i 为第*i*个波导模的波阻抗。

当激励源还包含磁流源 \mathbf{J}_m 时，可得⁽²⁾

$$\left. \begin{aligned} a_i &= -\frac{1}{2z_i} \int_V (\mathbf{E}_i^+ \cdot \mathbf{J}_e - \mathbf{H}_i^+ \cdot \mathbf{J}_m) dv \\ b_i &= -\frac{1}{2z_i} \int_V (\mathbf{E}_i^+ \cdot \mathbf{J}_e - \mathbf{H}_i^+ \cdot \mathbf{J}_m) dv \end{aligned} \right\} \quad (3.6-8)$$

式(3.6-8)即为计算波导激励所产生的正模系数的一般公式。需要指出的是，式(3.6-8)只适用于无源区。

2. 模式耦合的奇偶禁戒规则

实际应用的波导系统总存在各种各样的不均匀性（或称不连续性）。波导激励装置本身就是一种不均匀性。波导中的基本不均匀性可以分为三类：

(1) 几何形状或材料性能的不连续性，例如波导尺寸突变、空气波导向介质加载（包括铁氧体负载）波导过渡、波导壁上开孔、裂缝等。

(2) 波导轴向的连续性变化，例如波导尺寸渐变过渡、弯曲等。

(3) 波导中引入的障碍物，如膜片、销钉等。

波导中不均匀性的存在，将引起能量的散射，并出现模式的相互变换，使传输模变成衰减模，增加传输损耗。然而，传输模之间的变换也具有改善波导色散特性（脉冲响应）的效应。研究传输系统中模式变换的理论，即耦合波理论，在微波传输理论中具有很重要的实际意义。因为模式之间的耦合是微波传输系统中一种经常发生的基本现象，对多模传输系统的设计和运用非常重要。

模式之间的耦合意味着不同模式之间发生能量的交换或转移。模式耦合遵守所谓“奇偶禁戒规则”。由于耦合和激励的原理是相同的，因此奇偶禁戒规则也适用于波导或谐振腔的激励问题。

所谓奇偶禁戒规则是说：(1) 偶激励（或称对称激励）不可能激励起奇（反对称）模；(2) 奇激励（或称反对称激励）不可能激励起偶（对称）模。

这一规则可由模式之间的交叉功率来说明。波导中第*i*和第*j*模之间的交叉功率为

$$P_{ij} = -\frac{1}{2} \int_S \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_j^* ds = -\frac{Z_i}{2} \int_S \mathbf{H}_{i_t} \cdot \mathbf{H}_{j_t}^* ds = \frac{1}{2Z_i} \int_S \mathbf{E}_{i_t} \cdot \mathbf{E}_{j_t}^* ds \quad (3.6-9)$$

式中，足标_t代表横向， Z 为波阻抗。

引入 \mathbf{E}_{it} 和 \mathbf{E}_{jt}^* 的归一化横向场 e_i 和 e_j ，由正交归一化条件，有

$$\int_S e_i \cdot e_j^* ds = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases} \quad (3.6-10)$$

而

$$E_i(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e_i(u, v) \quad (3.6-11)$$

将式 (3.6-11) 两边点乘 e_j^* , 并在 S 面内积分, 得到

$$C_j = \int_S E_i(u, v) \cdot e_j^*(u, v) ds \quad (3.6-12)$$

由数学中奇偶函数的性质可知: 奇函数乘偶函数仍为奇函数; 奇函数在对称区间内的积分等于零。因此, 由式 (3.6-12) 可以看出, 如果 E_i 和 e_j^* 对某一对称面具有相反的对称性质 (一个为奇函数, 另一个为偶函数), 则必然有 $C_j = 0$ 。这表明第 j 模的场不存在。如将 E_i 看成是输入的激励场, 则由式 (3.6-12) 说明, 如果激励场 E_i 与被激励模的场 e_j^* 具有相反的对称性质, 则此模不会被激励, 即此模被禁戒。这就是奇偶禁戒规则。这个规则可用于分析波导和谐振腔激励时存在什么样的模式。

例如图 3.6-1 所示矩形波导探针激励装置, 小天线由同轴线内导体伸入波导内构成, 同轴线外导体与波导壁连接, 同轴线另一端接微波信号源。微波能量通过小天线在波导内辐射。为了使波单方向传输, 在小天线左端装有可调短路活塞。设计波导尺寸, 使 $\lambda < \lambda_{CTF_{10}}$, 则可激励起 TE_{10} 模沿波导右端传输。但在小天线附近, 除 TE_{10} 模外, 还会出现高次模。我们可以利用奇偶禁戒规则来判断会出现哪些模。如图 3.6-1 所示, 小天线由宽壁中心线伸入。这是一种对称激励, 只能激励起 m 为奇数的对称模 TE_{10} 、 TE_{30} 、…, 等等, 而不会激励出 m 为偶数的反对称模 TE_{20} 、 TE_{40} 、…等。

3. 小孔耦合原理

耦合小孔常被用作波导与波导之间, 波导与谐振腔之间以及谐振腔与谐振腔之间的耦合机构, 利用电磁波通过小孔的绕射来激励波导或谐振腔。要严格地求解绕射场, 在数学上是很困难的。因此通常采用近似方法分析, 即作为一级近似, 将尺寸远小于信号波长的小孔, 等效为电偶极子和磁偶极子的组合, 其偶极矩分别正比于入射波在小孔处的法向电场和切向磁场。其等效原理如图 3.6-3(a) 和图 3.6-3(b) 所示。图 3.6-3(a) 表示小孔处电场耦合的等效情况: 其中图 (1) 表示在没有开孔的导电表面上, 强度为 E 的法向电场; 当在此壁上开一小孔时, 通过小孔的电力线如图 (2) 所示; 这种场分布与图 (3) 所示等效电偶极子产生的电场相似, 故通过小孔的电场耦合可用电偶极子来等效。图 3.6-3(b) 表示小孔处磁场耦合的等效情况: 其中图 (1) 表示未开孔时导电表面附近的切向磁场; 当在此壁上开一小孔时, 通过小孔的磁力线如图 (2) 所示; 这种场分布与图 (3) 所示等效磁偶极子产生的磁场相似, 故通过小孔的磁场耦合可用磁偶极子来等效。

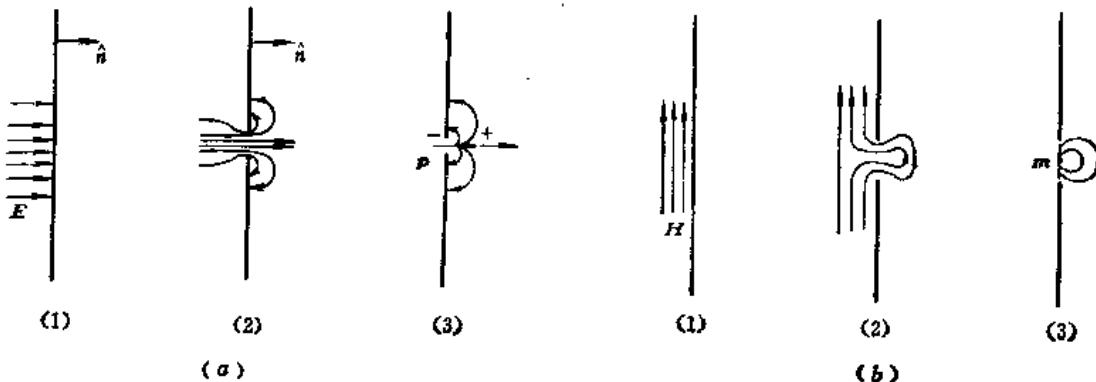


图 3.6-3
(a) 小孔的电场耦合与等效; (b) 小孔的磁场耦合与等效。

所示，这种磁场分布与图(3)所示孔平面上的磁偶极子所产生的磁力线相似，故小孔的磁场耦合可用磁偶极子来等效。

下面我们分别来分析小孔的这两种等效及其所产生的场，从而找出小孔耦合所产生的正规模的系数表示式。

(1) 电流等效原理

首先分析如图3.6-4所示一矩形波导在 $z=0$ 处有一开孔 S_a 的导体片将此波导分成①、②两部分的耦合情况，设波源在激励波导①中， E_0, H_0 是当 $z=0$ 上的小孔 S_a 为理想导体所封闭时在波导①中的激励场，波导②部分为被激励波导。我们来求这两部分波导中的电磁场。

如上所述，在 $z=0$ 的导体片未开孔之前，波导①部分有场 E_0, H_0 ，此时在此导体片上有面电流密度 $-\hat{n} \times H_0$ ；当孔打开时，波导①中的波源在波导②中激励的场设为 E_2, H_2 ，它与分布在孔处的等效面电流 $J_s = \hat{n} \times H_0$ 所产生的场相等，而此等效面电流分布在波导①将辐射场 E_1, H_1 。结果，在波导①中总的场为 $E_0 + E_1, H_0 + H_1$ ，在波导②中的场为 E_2, H_2 。这就是波导小孔耦合的电流等效原理。

这种等效原理的正确性，可由所得出的场满足边界条件来加以证明。事实上，因为 E_1, H_1 是波导①中的无源场，而 E_0, H_0 是孔用导体片封闭时在波导①中的场，则总场 $E_0 + E_1, H_0 + H_1$ 满足波导①的边界条件。在小孔 S_a 上， $\hat{n} \times E = 0$ 。由上面分析知， $\hat{n} \times E_1 = \hat{n} \times E_2$ ，故在小孔处电场的切线分量是连续的。对于磁场，由图可见， $\hat{n} \times H_2 - \hat{n} \times H_1 = \hat{n} \times H_0$ ，即 $\hat{n} \times H_2 = \hat{n} \times (H_0 + H_1)$ ，故在小孔处磁场的切线分量也是连续的。由此可见，上边电磁场满足所有边界条件。而满足边界条件的场是唯一的。故上述等效原理是正确的。

(2) 磁流等效原理

同样，如图3.6-4所示，波源在波导①中，设 E_0, H_0 是 $z=0$ 处小孔由磁壁封闭时源在波导①中所产生的场，此时在此磁壁上流动的磁流为 $\hat{n} \times E_0$ ；当此磁壁打开时，波导②中的场与在小孔 S_a 上的面磁流密度 $J_{ms} = -\hat{n} \times E_1$ 所辐射的场一样；在波导①中的场则为 E_0, H_0 与 J_{ms} 所辐射场之和。这就是波导小孔耦合的小孔的磁流等效原理。

(3) 小孔耦合波系数公式

现在我们来分析如图3.6-5所示小孔耦合的两个波导的问题，从而找出小孔耦合波系数公式。设当小孔 S_a 为磁壁封闭时，某正规模的场 E_1, H_1 从波导①左方输入，我们来求波导①和波导②中的电磁场。

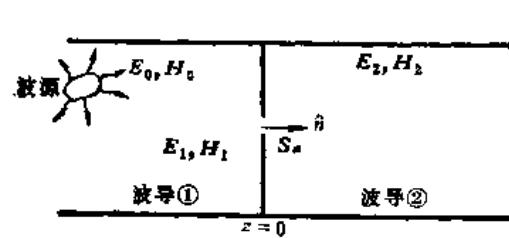


图3.6-4 波导内的小孔耦合

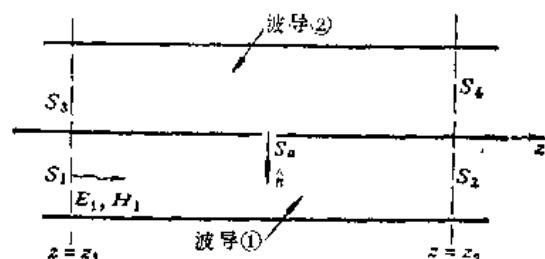


图3.6-5 小孔耦合波导

正规模场 E_1, H_1 自波导①左方输入，当遇到小孔 S_a 的不均匀性时，将在波导①中产生散射场 E_s, H_s ，它们在 S_a 上必须满足如下边界条件：

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r) = 0 \quad \text{和} \quad \hat{n} \cdot (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) = 0$$

但在 S_a 上的切向电场与法向磁场不为零，于是在 S_a 上有如下面磁荷和面磁流分布：

$$\left. \begin{aligned} \rho_m &= \mu_0 \hat{n} \cdot (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r) = \mu_0 \hat{n} \cdot \mathbf{H}_r \\ \mathbf{J}_{ms} &= -\hat{n} \times (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) = -\hat{n} \times \mathbf{E}_r \end{aligned} \right\} \quad (3.6-13)$$

这是因为对于正规模，在小孔处 $\hat{n} \times \mathbf{E}_i = 0$, $\hat{n} \cdot \mathbf{H}_i = 0$ 。散射场 \mathbf{E}_r 、 \mathbf{H}_r 可以用正规模来展开：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_r^+ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{E}_i^+, & \mathbf{H}_r^+ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{H}_i^+ & (z > 0) \\ \mathbf{E}_r^- &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i \mathbf{E}_i^-, & \mathbf{H}_r^- &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i \mathbf{H}_i^- & (z < 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.6-14)$$

\mathbf{E}_r 、 \mathbf{H}_r 应满足麦克斯韦方程（据磁流等效原理，我们舍去 ρ_m ），

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_r &= j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}_r \\ \nabla \times \mathbf{E}_r &= -j\omega \mu_0 \mathbf{H}_r - \mathbf{J}_{ms} \end{aligned} \right\} \quad (3.6-15)$$

应用罗伦兹定理，可以求得在源 \mathbf{J}_{ms} 两边、截面 S_1 和 S_2 上正规模的系数为

$$\left. \begin{aligned} a_i &= -\frac{1}{2z_i} \int_{S_a} \mathbf{H}_i^+ \cdot \mathbf{J}_{ms} ds \\ b_i &= -\frac{1}{2z_i} \int_{S_a} \mathbf{H}_i^- \cdot \mathbf{J}_{ms} ds \end{aligned} \right\} \quad (3.6-16)$$

由式 (3.6-13) 知， $\hat{n} \times \mathbf{E}_r = -\mathbf{J}_{ms}$ ，即表明散射场是由磁流 \mathbf{J}_{ms} 产生的。这样，当 \mathbf{E}_i 、 \mathbf{H}_i 由波导①左方输入，而孔 S_a 用磁壁封闭时，波导①中的合成场为 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$, $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r$ ；当把磁壁打开后，用 $-\mathbf{J}_{ms}$ 代替，则在波导①中将辐射 \mathbf{E}_{r_1} 、 \mathbf{H}_{r_1} ，在波导②中将辐射 \mathbf{E}_{r_2} 、 \mathbf{H}_{r_2} 。因此，在波导①中总的场为 $\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_{r_1}$, $\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_{r_1}$ ，而在波导②中的场则为 \mathbf{E}_{r_2} 、 \mathbf{H}_{r_2} 。

如果波导①和波导②相同，则可以设想 $-\mathbf{J}_{ms}$ 所辐射的场一半进入波导①，另一半进入波导②。这样，波导②中的场可设想为 $-\mathbf{J}_{ms}/2$ 所产生的场，而波导①中的场是入射场 \mathbf{E}_i 、 \mathbf{H}_i 加上 \mathbf{J}_{ms} 的散射场再加上 $-\mathbf{J}_{ms}/2$ 的辐射场，即波导①的场可设想为入射场与 $+\mathbf{J}_{ms}/2$ 所产生的场之和。

现在的问题是要用式 (3.6-16) 来求 a_i 和 b_i 的具体表示式。为此就需要求小孔处的磁场。

假定小孔的尺寸远小于信号波长，选取小孔的坐标如图 3.6-6 所示，小孔 S_a 是由曲线 C 所围成的面积， \hat{n} 是波导①的内法线单位矢量， $\hat{\tau}$ 和 \hat{n}_1 分别表示与小孔围线 C 相切和正交的单位矢量， $\hat{n} = \hat{n}_1 \times \hat{\tau}$ ，而 $\hat{n}_0 = -\hat{n}$ 是波导①指向波导②的单位矢量。可以看出， \mathbf{E}_r 沿 $\hat{\tau}$ 方向的分量为零，即在 C 上 \mathbf{J}_{ms} 的法线分量为零。同时，我们可以看出， S_a 上的总磁荷为零，这是因为 $\hat{n} \cdot (\hat{n} \times \mathbf{E}_r) = 0$ ，则有

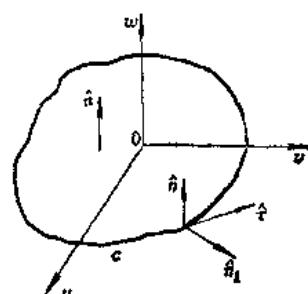


图 3.6-6 小孔的坐标系

$$\int_{S_a} \rho_m ds = \int_{S_a} \mu_0 H_i \cdot \hat{n} ds = - \int_{S_a} \frac{\nabla \times E_i \cdot \hat{n}}{-j\omega} ds = \frac{1}{j\omega} \int_{S_a} E_i \cdot \hat{n} ds = 0$$

故如小孔 S_a 很小，则可以忽略 ρ_m 的影响。

由于小孔的尺寸很小，所以小孔处的磁场 $H_i(u, v)$ 可以用原点“0”的磁场按泰勒级数展开：

$$H_i(u, v) = H_i(0) + \frac{\partial H_i}{\partial u} \Big|_0 u + \frac{\partial H_i}{\partial v} \Big|_0 v + \dots \approx H_i(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) H_i \quad (3.6-17)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \hat{u}u + \hat{v}v \\ \nabla H_i &= \hat{u} \frac{\partial H_i}{\partial u} \Big|_0 + \hat{v} \frac{\partial H_i}{\partial v} \Big|_0 \end{aligned}$$

∇H_i 本身是个并矢，它应是原点处的值。并矢与矢量的标积仍为一个矢量，所以 $\mathbf{r} \cdot \nabla H_i$ 为一矢量。

将式 (3.6-17) 代入式 (3.6-16)，得到

$$\begin{aligned} 2b_i z_i &= \int_{S_a} H_i^+ \cdot J_{m,i} ds = H_i^+(0) \int_{S_a} J_{m,i} ds + \int_{S_a} \{(\mathbf{r} \cdot \nabla) H_i^+\} \cdot J_{m,i} ds \\ &= j\omega \left[\mu_0 H_i^+ \cdot \mathbf{m} - \mathbf{E}_i^+ \cdot \mathbf{p} + \frac{\mu_0}{2} (\nabla H_i^+) : \vec{Q} \right] \end{aligned} \quad (3.6-18)$$

同理可得

$$2a_i z_i = j\omega \left[\mu_0 H_i^- \cdot \mathbf{m} - \mathbf{E}_i^- \cdot \mathbf{p} + \frac{\mu_0}{2} (\nabla H_i^-) : \vec{Q} \right] \quad (3.6-19)$$

式中， \mathbf{m} 为磁偶极子的磁矩；

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\mu_0} \int_{S_a} \mathbf{r} \rho_{m,i} ds$$

\mathbf{p} 为电偶极子的电矩：

$$\mathbf{p} = \int_{S_a} \epsilon_0 \frac{-\mathbf{r} \times \mathbf{J}_{m,i}}{2} ds$$

\vec{Q} 为磁双偶极子（即磁四极子）的磁矩，为一并矢，符号“ $:$ ”表示并矢 ∇H_i 和 \vec{Q} 的双标积。

最后我们得到小孔耦合波系数公式为

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{j\omega}{2z_i} \left[\mu_0 H_i^+ \cdot \mathbf{m} - \mathbf{E}_i^+ \cdot \mathbf{p} + \frac{\mu_0}{2} (\nabla H_i^+) : \vec{Q} \right] \\ b_i &= \frac{j\omega}{2z_i} \left[\mu_0 H_i^- \cdot \mathbf{m} - \mathbf{E}_i^- \cdot \mathbf{p} + \frac{\mu_0}{2} (\nabla H_i^-) : \vec{Q} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.6-20)$$

结果表明，式 (3.6-16) 所表示的小孔耦合的电磁场，等效为一个电偶极子、一个磁偶极子和一个磁四极子的辐射场。不过，在实际应用时，式 (3.6-20) 中最后一项常可略去，因为它是一个和小孔尺寸平方成正比的高阶小量。这样，我们就得到波导①中散射场的系数近似式为

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{j\omega}{2z_i} [\mu_0 H_i^+ \cdot \mathbf{m} - \mathbf{E}_i^+ \cdot \mathbf{p}] \\ b_i &= \frac{j\omega}{2z_i} [\mu_0 H_i^- \cdot \mathbf{m} - \mathbf{E}_i^- \cdot \mathbf{p}] \end{aligned} \right\} \quad (3.6-21)$$

由上面的分析知道，波导①中的扰动散射场是由 S_a 上的 $\mathbf{p}/2$ 和 $\mathbf{m}/2$ 所激发的，而波导②中的辐射场则是等效为 S_a 上的 $-\mathbf{p}/2$ 和 $-\mathbf{m}/2$ 所激发的，而波导②中的场也可

以用正规模展开为

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_{s_2}^+ = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{E}_{i_2}^+ \\ \mathbf{H}_{i_2}^+ = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{H}_{i_2}^+ \\ \mathbf{E}_{i_2}^- = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \mathbf{E}_{i_2}^- \\ \mathbf{H}_{i_2}^- = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \mathbf{H}_{i_2}^- \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (z > 0) \\ (z < 0) \end{array} \quad (3.6-22)$$

式中下标 2 代表波导②。如果波导①和波导②相同，则小孔上的磁流 $-J_{mz}$ 向波导①和波导②辐射的场相同。如上所述，有

$$\left. \begin{array}{l} \hat{n} \times \mathbf{E}_{s_1} = J_{mz}/2 \\ \hat{n} \times \mathbf{E}_{s_2} = -J_{mz}/2 \end{array} \right\} \quad (3.6-23)$$

因此波导②中散射场的系数为

$$\left. \begin{array}{l} c_i = \frac{j\omega}{2z_i} (-\mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_{i_2}^- + \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{i_2}^-) \\ d_i = \frac{j\omega}{2z_i} (-\mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_{i_2}^+ + \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{i_2}^+) \end{array} \right\} \quad (3.6-24)$$

式 (3.6-24) 便是计算通过小孔激发在副波导中产生的耦合波系数的一般公式。

为了计算 c_i 和 d_i ，还需要知道小孔的 \mathbf{m} 和 \mathbf{p} 的表示式。

由电磁场理论知， \mathbf{p} 与入射波电场在小孔处的法线分量成正比，即有

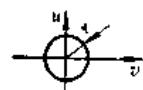
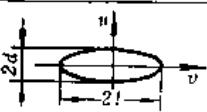
$$\mathbf{p} = P_\omega \epsilon_0 E_\omega \hat{w} \quad (3.6-25)$$

式中比例系数 P_ω 称为电极化率。 \mathbf{m} 则与入射波磁场在小孔处的切线分量成正比，即有

$$\mathbf{m} = M_\nu H_{0u} \hat{u} + M_\nu H_{0v} \hat{v} \quad (3.6-26)$$

式中，比例系数 M_u 和 M_v 称为磁极化率。 P_ω 、 M_u 和 M_v 都只与小孔的形状尺寸有关，与激励场无关，可用静电近似方法求得。表 3.6-1 给出了三种常用的简单形状小孔的极化率公式。

表 3.6-1 小孔的磁极化率 M 和电极化率 P

孔名	孔形	M_u	M_v	P_ω
圆孔		$\frac{4}{3}r^3$	$\frac{4}{3}r^3$	$\frac{2}{3}r^3$
窄长椭圆孔		$\frac{\pi}{3} \frac{l^3}{\ln \frac{4l}{d} - 1}$	$\frac{\pi}{3} l d^2$	$\frac{\pi}{3} l d^2$
矩形孔		≈ 0	$\frac{\pi}{2} l d^2$	$\frac{\pi}{2} l d^2$

4. 小孔耦合原理的应用——矩形波导单孔定向耦合器

下面我们举矩形波导单孔定向耦合器为例来说明式(3.6-24)的应用。

在尺寸相同的两个矩形波导公共壁(宽壁或窄壁)上开孔或短缝,使电磁波从其中一个波导(通常称为主波导)耦合到另一个波导(称为副波导)中,并使其具有一定定向性,便构成波导定向耦合器。小孔耦合原理是分析和计算波导定向耦合器的理论基础。这里只讨论单孔波导定向耦合器。下面分两种情况讨论。

(1) 宽壁单孔定向耦合器

如图3.6-7所示,在两个矩形波导公共宽壁的中心线上开一个半径为 r 的小圆孔,矩形波导尺寸为 $a \times b$ 。设矩形波导中只有TE₁₀模传播,它只有 E_y 、 H_z 和 H_x 三个场分量,其归一化行波场(关于波导中场的归一化问题将在第七章中讨论)为

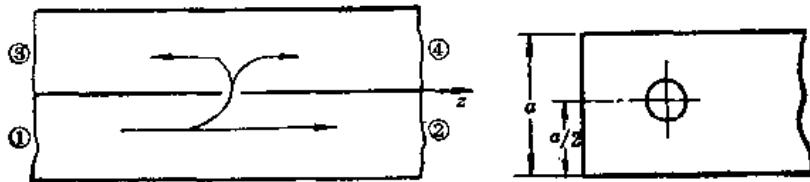


图3.6-7 宽壁小孔定向耦合

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^+ &= -\frac{1}{\sqrt{ab/2}} \frac{\omega \mu_0}{\beta} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{E}^- &= -\frac{1}{\sqrt{ab/2}} \frac{\omega \mu_0}{\beta} \sin \frac{\pi x}{a} e^{j\beta z} \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{H}^+ &= \frac{1}{\sqrt{ab/2}} \left(\sin \frac{\pi x}{a} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\pi}{j\beta a} \cos \frac{\pi x}{a} \hat{\mathbf{z}} \right) e^{-j\beta z} \\ \mathbf{H}^- &= \frac{1}{\sqrt{ab/2}} \left(-\sin \frac{\pi x}{a} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\pi}{j\beta a} \cos \frac{\pi x}{a} \hat{\mathbf{z}} \right) e^{j\beta z} \end{aligned} \right\} \quad (3.6-27)$$

小圆孔的磁偶极矩和电偶极矩分别为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m} &= -\frac{4}{3} r^3 (-\mathbf{H}_{z1}^+ + \mathbf{H}_{z1}^-) = -\frac{4}{3} r^3 \mathbf{H}_{z1}^+ \\ \mathbf{p} &= -\epsilon_0 \left(-\frac{2}{3} r^3 \right) \mathbf{E}_{y1}^+ \end{aligned} \right\} \quad (3.6-28)$$

式中下标1代表主波导中的场。将式(3.6-27)所示场分量和 \mathbf{p} 、 \mathbf{m} 值代入式(3.6-24),得到

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{j\omega}{2z_1} \left\{ -\mu_0 \frac{4}{3} r^3 \left(\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin 90^\circ \right)^2 + \epsilon_0 \left(\frac{2}{3} r^3 \right) \left(\frac{\omega \mu_0}{\beta} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin 90^\circ \right)^2 \right\} \\ &= -j \frac{8\pi r^3}{3ab\lambda_g} \left[-1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

同样可以求得

$$d_1 = j \frac{8\pi r^3}{3ab\lambda_g} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right)^2 \right]$$

为了使副波导中获得定向传输，需将副波导相对于主波导旋转一个 θ 角，以使 $c_1=0$ ，如图3.6-8所示。结果 H_{z_1} 与 H_{z_2} 之间成 θ 角度，故

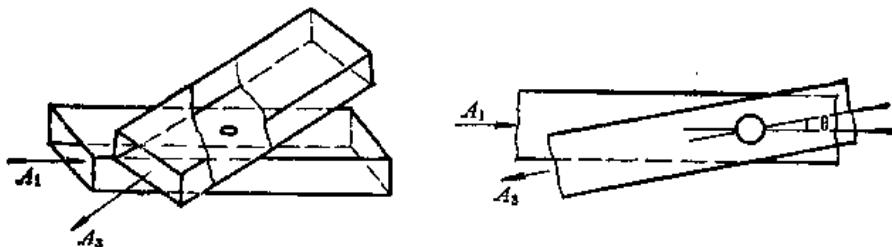


图3.6-8 宽壁小孔定向耦合器

$$c_1 = j \frac{8\pi r^3}{3ab\lambda_g} \left[-\cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right)^2 \right]$$

$$d_1 = j \frac{8\pi r^3}{3ab\lambda_g} \left[\cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right)^2 \right]$$

当 $\cos \theta = -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right)^2$ ，即 $\theta = \arccos \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right)^2 \right]$ 时， $c_1=0$ ，④口无耦合输出，

电磁波经小孔耦合后只沿副波导③口输出。设输入波的振幅为 $A_1=1$ ，则耦合系数为

$$c = 20 \lg \frac{|d_1|}{|A_1|} = 20 \lg \left\{ \frac{8\pi r^3}{3ab\lambda_g} \left[\cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right)^2 \right] \right\}$$

(2) 窄壁单孔耦合

在两个矩形波导公共窄壁上开一个半径为 r 的小圆孔，如图3.6-9所示，取 w, u, v 作为坐标 x, y, z 的顺序。小孔中心坐标为 $y_1=b/2, z_1=0$ 。将场分量(3.6-27)和 m, p 值代入式(3.6-24)，求得此时

$$c_1 = d_1 = -j \frac{2\pi r^3}{3a^2 b}$$

这说明窄壁开单孔得不到定向性。这是容易理解的。因为在公共窄壁附近主波导一侧只有 H_z 分量，它经过小孔耦合后在副波导中要激励起向③、④两个方向传播的波，故无定向性。为了获得定向性，可相隔 $\lambda_g/4$ 开两个孔，或开多个孔，构成窄壁双孔或多孔定向耦合器。

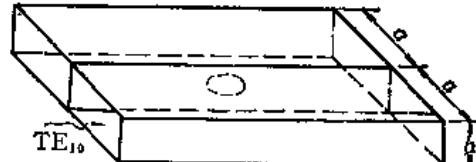


图3.6-9 窄壁小孔耦合器

3.7 规则波导的设计问题

前面我们研究了矩形波导、圆波导中的波型及其场结构，分析了它们的传输特性。在本节中，我们将讨论它们的尺寸设计及与之有关的功率容量和衰减的计算等问题。

1. 规则波导设计的几个共同问题

抑制高次模、耐高功率、损耗小、工作频带宽等是设计规则波导时的基本要求，也是设计中需要解决的几个共同问题。

(1) 抑制高次模问题

由前面的分析知, 波导中的波型有无穷多个, 而实际用作传输微波能量的波导通常以其主模工作, 而需要抑制掉高次模。只有一些特殊用途的微波元器件才以高次模或多模工作。为了保证只传输主模, 就必须满足如下条件:

$$(\lambda_e)_{\text{最近的高次模}} < \lambda < (\lambda_e)_{\text{主模}} \quad (3.7-1)$$

(2) 功率容量问题

通过规则波导横截面的传输功率为

$$P_s = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s} \right\} = \frac{1}{2 \operatorname{Re}(Z_\omega)} \int_S |E_z|^2 ds = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z_\omega) \int_S |H_z|^2 ds \quad (3.7-2)$$

式中, E_z 和 H_z 分别为横截面 S 内的横向电场和横向磁场, $Z_\omega = E_\omega / H_\omega = -E_z / H_z$ 为波型阻抗。

由式 (3.1-17) 和 (3.1-18) 可得: 对于 TM 模,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z &= -\frac{j\beta}{K_e^2} \nabla_z E_z \\ \mathbf{H}_z &= -j \frac{\omega \epsilon}{K_e^2} \hat{z} \times \nabla_z E_z = \frac{\omega \epsilon}{\beta} \hat{z} \times \mathbf{E}_z \end{aligned}$$

对于 TE 模,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_z &= -\frac{j\beta}{K_e^2} \nabla_z H_z \\ \mathbf{E}_z &= j \frac{\omega \mu}{K_e^2} \hat{z} \times \nabla_z H_z = -\frac{\omega \mu}{\beta} \hat{z} \times \mathbf{H}_z \end{aligned}$$

因此, TE 模的传输功率为

$$P_s = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[Z_{TE} \frac{|\beta|^2}{K_e^4} \int_S (\nabla_z H_z \cdot \nabla_z H_z^*) ds \right]$$

利用格林定理第一恒等式的二维形式, 有

$$\int_S (\nabla_z H_z \cdot \nabla_z H_z^*) ds = - \int_S H_z^* \nabla_z^2 H_z ds$$

又由导波波动方程, $\nabla_z^2 H_z = -K_z^2 H_z$, 所以

$$\int_S (\nabla_z H_z \cdot \nabla_z H_z^*) ds = K_z^2 \int_S H_z H_z^* ds$$

故得 TE 模的传输功率为

$$\begin{aligned} P_{s_{TE}} &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[Z_{TE} \frac{|\beta|^2}{K_e^4} \int_S H_z H_z^* ds \right] \\ &= -\frac{1}{2} \eta \frac{\lambda_g}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_e}{\lambda_g} \right)^2 \int_S H_z H_z^* ds = -\frac{1}{2} \eta \frac{\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_e}{\lambda_0} \right)^2 \int_S H_z H_z^* ds \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{Z_{TE}} \left(\frac{f}{f_e} \right)^2 \int_S |H_z|^2 ds \end{aligned} \quad (3.7-3)$$

同样可求得传输 TM 模时的传输功率为

$$P_{s_{TM}} = -\frac{1}{2} \frac{Z_{TM}}{\eta^2} \left(\frac{f}{f_e} \right)^2 \int_S |E_z|^2 ds \quad (3.7-4)$$

式中 $\eta = \sqrt{\mu_0 / \epsilon}$ 是媒质的波阻抗。

例如矩形波导传输TE₁₀模时的传输功率

$$P_{z\text{TE}_{10}} = \frac{\eta^2}{2Z_{\text{TE}_{10}}} \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \int_S |H_z|^2 ds$$

TE₁₀模的H_z分量可写成

$$H_z = j \frac{E_{10}}{\eta} \left(\frac{\lambda}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z}$$

于是

$$P_{z\text{TE}_{10}} = \frac{\eta^2}{2Z_{\text{TE}_{10}}} \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \int_0^a \int_0^b \left(\frac{E_{10}}{\eta} \frac{\lambda}{2a}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx dy = \frac{ab}{4Z_{\text{TE}_{10}}} E_{10}^2 \quad (3.7-5)$$

式中 Z_{TE₁₀} 是 TE₁₀ 模的波阻抗, Z_{TE₁₀} = η / √(1 - (λ/2a)²)。

波导的耐高功率问题包括耐脉冲功率和耐平均功率问题。前者取决于介质的击穿场强, 后者取决于对管壁温升的限度。波导的耐高功率问题主要是耐脉冲功率的问题。金属波导多数情况下是以空气为绝缘介质, 在标准环境条件下, 从米波到毫米波范围内, 空气的击穿场强 E_{br} 约为 30 kV/cm。

规则波导的脉冲功率容量又称极限功率, 是在不发生电击穿情况下波导所能传输的最大功率。式 (3.7-5) 中的 E₁₀ 以介质击穿场强 E_{br} 代替, 则得到 TE₁₀ 模矩形波导的脉冲功率容量为

$$P_{br} = \frac{ab}{480\pi} E_{br}^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (3.7-6)$$

式中 E_{br} 是波导中心 (x = a/2) 处 y 方向最大场强。以空气填充时得到

$$P_{br} = 0.6ab \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (\text{MW}) \quad (3.7-7)$$

式中, a、b 和 λ 的单位用 cm。

这样高的功率电平如空气潮湿或波导内有脏物是不可能达到的。为此, 当需要传输很高功率或对一些易发生击穿的高功率元件 (如旋转铰链、魔 T、裂缝电桥等), 可用加压干燥空气进行密封或充以氮气的办法来实现。

图3.7-1表示矩形波导的功率容量与 λ/λ_c 的关系曲线。

需要指出的是, 上述传输功率是在行波状态下得到的, 而波导的功率容量显然与工作状态有关。当波导中的驻波系数为 ρ 时, 功率容量降低为

$$P = \frac{P_{br}}{\rho} \quad (3.7-8)$$

(3) 损耗问题

前面我们在分析波导中的波型及其传输特性时, 未考虑波导的损耗。实际使用的金属波导总存在损耗, 一般包括波导管壁的

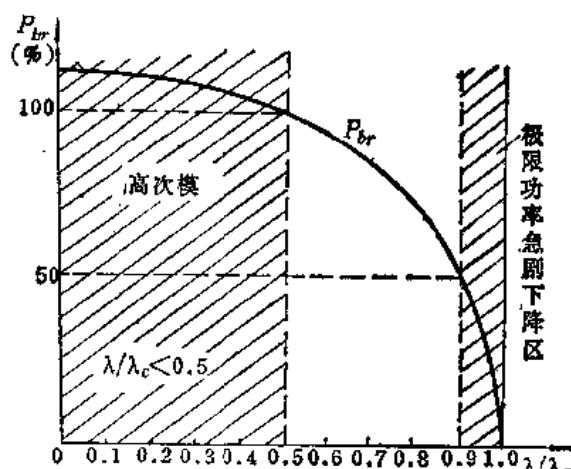


图3.7-1 矩形波导的极限功率与波长的关系曲线

热损耗和波导内的介质损耗。因此，电磁波在波导中传输时，其振幅将逐渐衰减。

当波导有损耗时，沿波导传输的功率将按指数规律衰减，即

$$P_s = P_0 e^{-2\alpha s} \quad (3.7-9)$$

式中 P_0 为无耗波导的传输功率。波导单位长度的功率损耗则为

$$P_t = -\frac{\partial P_s}{\partial z} = 2\alpha P_s$$

由此得到衰减因数

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{P_t}{P_s} \quad (\text{Np/m}) \quad (3.7-10)$$

式 (3.7-10) 是个精确公式。实际计算时，通常取 P_0 代替 P_s ，从而得到 α 的近似公式

$$\alpha \approx -\frac{1}{2} \frac{P_t}{P_0} \quad (\text{Np/m}) \quad (3.7-11)$$

式中 P_t 是波导单位长度的功率损耗。然而，引起功率损耗的原因有导体电阻损耗和介质损耗等，而且一般很难加以分辨。通常使用式(3.7-11)计算导体损耗的衰减因数 α_s ，此时假定介质损耗忽略不计。

a. 导体衰减 α_s

导体损耗是由于管壁电流所引起的热损耗。单位长度内由于管壁电流引起的波导功率损耗为

$$P_t = \frac{1}{2} R_s \oint_L (J_x^2 + J_z^2) dl = \frac{1}{2} R_s \oint_L |H_s|^2 dl \quad (3.7-12)$$

式中， J_s 是沿波导横截面围线 L 的电流， R_s 为金属导体的表面电阻。表3.7-1列出了几种常用金属的表面电阻值。

将式 (3.7-12) 和 (3.7-2) 代入式 (3.7-11) 即得到导体衰减因数的一般公式为

$$\alpha_s = \frac{R_s}{2 \operatorname{Re}\{Z_s\}} \frac{\oint_L |H_s|^2 dl}{\int_S |H_s|^2 ds} \quad (3.7-13)$$

对于矩形波导中的 TE_{mn} 模，其场分量如式 (3.2-16) 所示。则

$$H_{tm}^2|_{x=0} = (H_x^2 + H_y^2)|_{x=0} = \frac{\beta^2}{K_c^4} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 H_{mn}^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) + H_{mn}^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$H_{tm}^2|_{y=0} = (H_x^2 + H_y^2)|_{y=0} = \frac{\beta^2}{K_c^4} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 H_{mn}^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) + H_{mn}^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right)$$

而

$$H_{tm}^2 = H_x^2 + H_y^2 = \frac{\beta^2}{K_c^4} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 H_{mn}^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 H_{mn}^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \right]$$

于是可以求得

$$\oint_L H_{tm}^2 dl = \frac{\beta^2}{K_c^4} H_{mn}^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 a + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 b \right] + H_{mn}^2 (a + b)$$

$$\int_S H_{tm}^2 ds = \frac{\beta^2}{K_c^4} H_{mn}^2 \frac{ab}{4} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]$$

将上述结果代入式(3.7-13), 可以得到矩形波导传输TE_{mn}模时的导体衰减因数为

$$\alpha_{TE_{mn}} = \frac{2R_s}{\eta b} \left\{ \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} m^2 + n^2 \right)}{\left(\frac{b}{a} \right)^2 m^2 + n^2} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \right] + \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \right\} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}} \quad (m, n \neq 0) \text{ (Np/m)} \quad (3.7-14)$$

对于TE_{m0}模, 则为

$$\alpha_{TE_{m0}} = \frac{R_s}{\eta b} \left\{ 1 + 2 \frac{b}{a} \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \right\} \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \text{ (Np/m)} \quad (3.7-15)$$

同样可求得矩形波导中传输TM_{mn}模时的导体衰减因数

$$\alpha_{TM_{mn}} = \frac{2R_s}{\eta b} \cdot \frac{\left(\frac{b}{a} \right)^2 m^2 + n^2}{\left(\frac{b}{a} \right)^2 m^2 + n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \text{ (Np/m)} \quad (3.7-16)$$

矩形波导通常以TE₁₀模工作, 此时

$$\begin{aligned} \alpha_{TE_{10}} &= \frac{R_s}{\eta b} \left[1 + 2 \frac{b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \text{ (Np/m)} \\ &= \frac{8.686 R_s}{\eta b} \left[1 + 2 \frac{b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right] \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \text{ (dB/m)} \end{aligned} \quad (3.7-17)$$

对于圆波导, 传输TE_{mn}模时, 其场分量如式(3.3-13)所示, 则

$$\begin{aligned} H_{tm}^2|_{r=R} &= (H_\varphi^2 + H_z^2)|_{r=R} = \left(\frac{\beta_m}{K_c^2 R} \right)^2 H_{mn}^2 J_m^2(u'_{mn}) \sin^2 m\varphi + H_{mz}^2 J_m^2(u'_{mn}) \cos^2 m\varphi \\ H_{tm}^2 &= H_r^2 + H_\varphi^2 = \frac{\beta^2}{K_c^4} H_{mn}^2 J_m'^2 \left(\frac{u'_{mn}}{R} r \right) \cos^2 m\varphi + \frac{\beta^2 m^2}{K_c^4 r^2} H_{mn}^2 J_m^2 \left(\frac{u'_{mn}}{R} r \right) \sin^2 m\varphi \end{aligned}$$

于是可以求得

$$\begin{aligned} \oint_L H_{tm}^2 dl &= \pi J_m^2(u'_{mn}) H_{mn}^2 \left(R + \frac{\beta^2 m^2}{K_c^4 R} \right) \\ \int_S H_{tm}^2 ds &= \frac{\pi \beta^2}{2 K_c^4} H_{mn}^2 J_m^2(u'_{mn}) (u'^2_{mn} - m^2) \end{aligned}$$

故得到TE_{mn}模圆波导的导体衰减因数为

$$\alpha_{TE_{mn}} = \frac{R_s}{\eta R \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 + \frac{m^2}{u'^2_{mn} - m^2} \right] \text{ (Np/m)} \quad (3.7-18)$$

式中, R 为圆波导的半径, u'_{mn} 为第 m 阶贝塞尔函数导数的第 n 个根值。

同样可以求得圆波导传输TM_{mn}模的导体衰减因数为

$$\alpha_{TM_{mn}} = \frac{R_s}{\eta R} \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \text{ (Np/m)}$$

图3.7-2和图3.7-3分别表示矩形波导和圆波导的衰减因数曲线。由图3.7-2可见，矩形波导中的TE₁₀模衰减最小；由图3.7-3可见，圆波导中TE₀₁模的衰减随频率的升高单调降低。

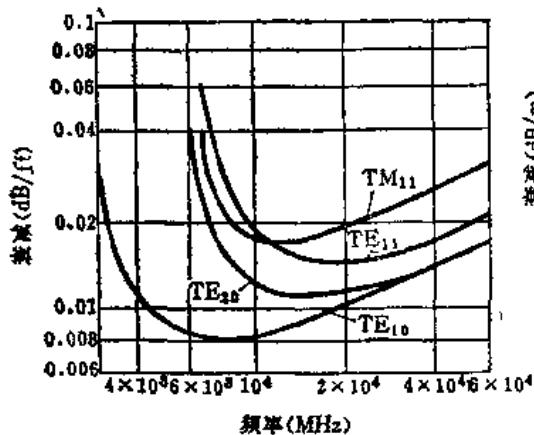


图3.7-2 矩形波导的衰减曲线

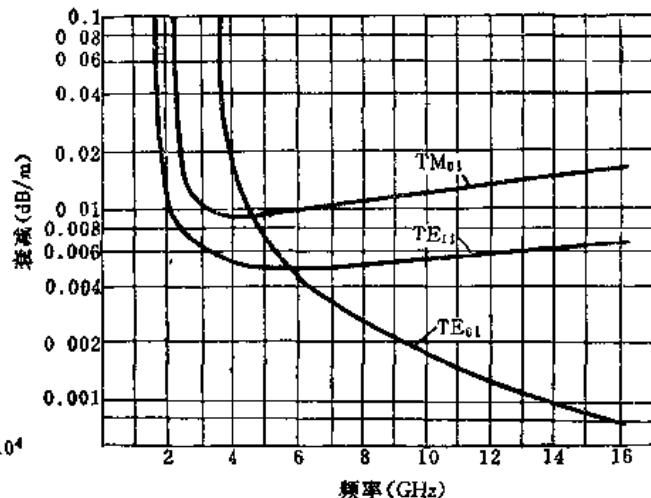


图3.7-3 半径为2.54cm的圆波导的衰减曲线

图3.7-4比较了铜制矩形波导和圆波导的衰减因数。由图可见，圆波导的衰减比矩形波导小。如果不是铜，是其它金属材料，比较时需乘以因子 $\sigma_{\text{铜}}\delta_{\text{铜}}/\sigma_{\text{材}}\delta_{\text{材}}$ 。

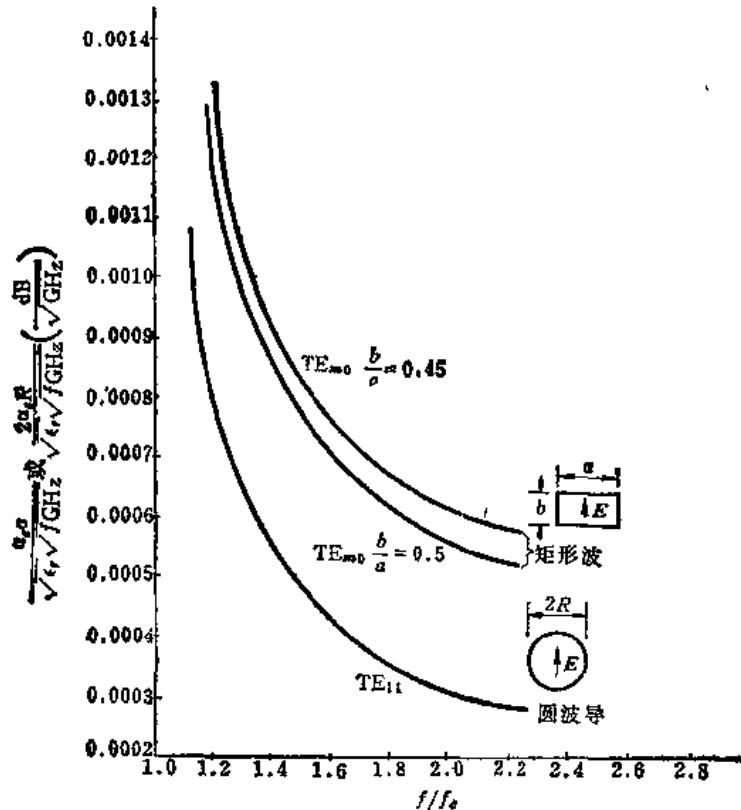


图3.7-4 铜制矩形波导和圆波导的衰减数据比较

b. 介质损耗

当介质有损耗时，其介电常数为复数

$$\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon} \right)$$

于是波导轴向传播因数变为

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{K_t^2 - K^2} = \sqrt{\epsilon_r \mu (\omega_c^2 - \omega^2)} \\ &= \sqrt{\epsilon \mu \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon} \right) (\omega_c^2 - \omega^2)} = \sqrt{\epsilon \mu (\omega_c^2 - \omega^2)} \sqrt{1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}} \end{aligned} \quad (3.7-19)$$

在微波情况下， $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$ ，则上式近似为

$$\gamma \approx \sqrt{\epsilon \mu (\omega_c^2 - \omega^2)} \left(1 + \frac{\sigma}{2j\omega\epsilon} \right) \quad (3.7-20)$$

无耗时波导轴向传播因数为

$$j\beta = \sqrt{\epsilon \mu (\omega_c^2 - \omega^2)}$$

因此式 (3.7-20) 变为

$$\gamma \approx j\beta \left(1 + \frac{\sigma}{2j\omega\epsilon} \right) = \beta \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + j\beta = \alpha_d + j\beta \quad (3.7-21)$$

其实部即为介质损耗引起的波的衰减因数（简称为介质衰减因数）：

$$\begin{aligned} \alpha_d &= \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \beta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \cdot \frac{\pi}{\lambda_g} = \frac{\pi \operatorname{tg} \delta}{\lambda_g} \quad (\text{Np/m}) \\ &= \frac{27.3 \operatorname{tg} \delta}{\lambda_g} \quad (\text{dB/m}) \end{aligned} \quad (3.7-22)$$

式中， $\operatorname{tg} \delta = \sigma/\omega\epsilon$ 是介质的损耗角正切。式 (3.7-22) 就是导波系统介质衰减因数的一般公式。在厘米波段，介质损耗与导体损耗相比一般可以忽略不计。但到毫米波段，介质损耗就不能忽略了，因为介质损耗与频率成正比，而导体损耗与频率的平方根成正比。表3.7-2列出了波导常用填充介质的电性能。

表3.7-2 室温下常用波导填充介质的电性能

材料	ϵ_r	损 耗 正 切 $\operatorname{tg} \delta$			介 质 强 度 (25℃ 时) kV/cm
		100MHz	3 GHz	25GHz	
干燥空气	1.0				30
聚四氟乙烯	2.1	<0.0002	0.00015	0.0006	407~814
聚 乙 烯	2.26	0.0002	0.00031	0.0006	488
聚苯乙烯	2.55	<0.0001	0.00033	0.0012	203~285
氯 化 铝	8.8	0.0003	0.001		

2. 规则波导的尺寸选择

规则波导尺寸选择的一般原则是，在给定的工作频带内保证：(1) 只传输主模；(2) 有足够大的功率容量；(3) 损耗最小。

矩形波导的主模是TE₁₀模。为保证传输TE₁₀模，应使

$$\lambda < (\lambda_c)_{TE_{10}} = 2a$$

又为了保证只传输TE₁₀模，则必须抑制TE₂₀模和TE₀₁模。为此应使

$$\lambda > (\lambda_e)_{TE20} = a$$

$$\lambda > (\lambda_e)_{TE01} = 2b$$

因此得到

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\lambda}{2} < a < \lambda \\ 0 < b < \frac{\lambda}{2} \end{array} \right\} \quad (3.7-23)$$

由图3.7-1可知，为避免出现高次模，又获得较大的功率容量，应使

$$0.5 < \frac{\lambda}{2a} < 0.9 \quad \text{或者} \quad 0.5\lambda < a < \lambda$$

而功率容量与b成正比。显然b需选择大一些好；但考虑到抑制高次模，一般选b=a/2。

再考虑到损耗小的要求，由式(3.7-17)可知，应使λ/2a≤0.7，b/a=0.5。

综上条件，矩形波导尺寸选择为

$$\left. \begin{array}{l} a = 0.7\lambda \\ b = (0.4 \sim 0.5)a \end{array} \right\} \quad (3.7-24)$$

矩形波导现已有标准尺寸，见附录二。

圆波导的尺寸选择则是确定半径R。为保证只传输TE₁₁模，应使

$$2.62R < \lambda < 3.41R \quad \text{或者} \quad \frac{\lambda}{3.41} < R < \frac{\lambda}{2.62}$$

同时考虑到传输功率大和损耗小的要求，一般选取

$$R = \frac{\lambda}{3} \quad (3.7-25)$$

3. 矩形波导的通频带

波导尺寸确定之后，波导的工作频率范围（即通频带）即可确定。事实上，由于在截止波长附近，波导的损耗急剧增加，因此工作波长不应等于(λ_e)_{TE10}；又为了避免出现TE₂₀模，工作波长也不应等于(λ_e)_{TE20}。通常工作波长的上限取比(λ_e)_{TE10}小20%，下限取比(λ_e)_{TE10}大5%，得到矩形波导的工作波长范围为

$$1.05(\lambda_e)_{TE10} \leq \lambda \leq 0.8(\lambda_e)_{TE10} \quad (3.7-26a)$$

即

$$1.05a \leq \lambda \leq 1.6a \quad (3.7-26b)$$

例如WJB-100波导的工作波长范围计算得到为24.003mm≤λ≤36.576mm，其相应的频率范围为8.20GHz~12.5GHz。可见矩形波导的通频带并不宽。这是矩形波导的缺点之一。

为了宽频带工作，可采用如图3.7-5(a)所示脊形波导。这种脊形波导，由于其脊棱边缘电容的作用，使其主模TE₁₀模的截止频率比矩形波导的TE₁₀模低，而且原则上可用减小脊的高度b'获得更低的截止频率，如图3.7-5(b)所示。脊形波导的通频带很宽，可达几个倍频程。同时，脊形波导的等效阻抗低，而且b'愈小，阻抗愈低，适于作高阻抗的矩形波导至低阻抗的同轴线或微带线的过渡。但是，脊形波导的损耗较大，功率容量较低，加工不方便，因此使用受到限制。

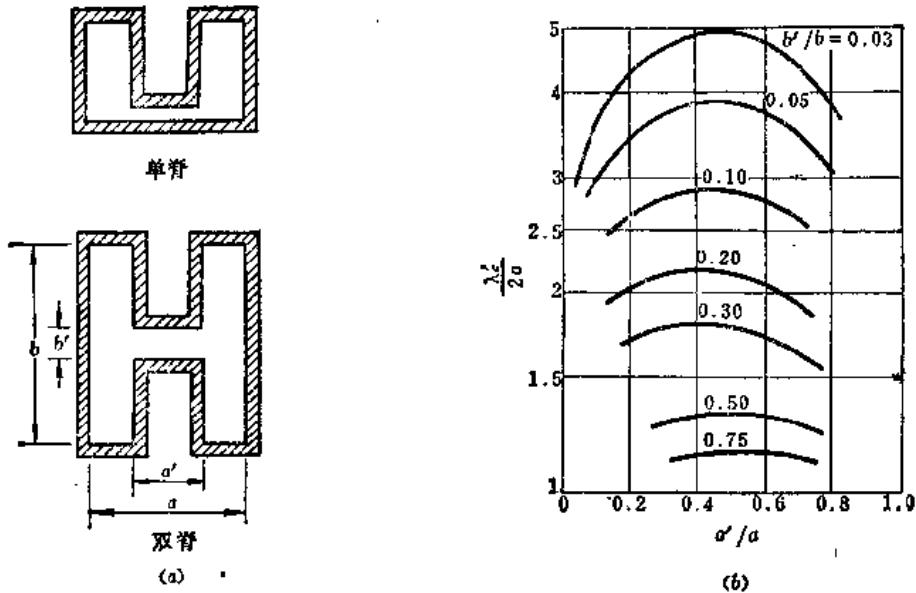


图3.7-5 脊形波导及其截止波长曲线

(a) 脊形波导截面图; (b) 脊形波导主模TE₁₀模的截止波长曲线。

本 章 提 要

1. 本章主要研究了规则金属波导的波型理论, 包括波型的分类、波型的场结构、波型的特性及其沿波导轴向的传输特性。这是微波波导的基本理论, 也是微波和天线工程的理论基础。

2. 波导中导波场的求解可用纵向场方法: 首先求满足边界条件的纵向场 E_z 或 H_z 的波动方程, 得出 E_z 或 H_z , 即求解如下边值问题:

对于TE模,

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_t^2 H_z + K_t^2 H_z = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_{\text{管壁处}} = 0 \end{array} \right\}$$

对于TM模,

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_t^2 E_z + K_t^2 E_z = 0 \\ E_z \Big|_{\text{管壁处}} = 0 \end{array} \right\}$$

然后利用式(3.1-29)求横向场分量。

3. 波导中波的传输必须满足如下条件:

$$\lambda < \lambda_c \quad \text{或者} \quad f > f_c$$

即是说大于信号波长的截止波长所属模才能在波导中得以传输; 或者说小于信号频率的截止频率所属模才能在波导中得以传输。如果 λ_c 是波导主模的截止波长, 则是说 小于波导主模截止波长的信号波长才能在该波导中得以传输; 或者说, 大于波导主模截止频率的信号频率才能在该波导中得以传输。

截止波长 λ_c 或截止频率 f_c 是微波传输线最重要的传输特性参数, 根据 λ_c 或 f_c 才能确定波导中模的存在条件及其传输特性, 根据 λ_c 或 f_c 才能确定波导的尺寸。

4. 根据对矩形波导、圆波导和同轴线传输特性的分析，我们可以得到规则波导传输特性参数的一般公式如下：

(1) 截止频率

$$f_c = \frac{K_0}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$$

截止波长

$$\lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2\pi}{K_0}$$

(2) 相速度

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

群速度

$$v_g = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

$$v_p \cdot v_g = v^2$$

(3) 波导波长

$$\lambda_e = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

$$\lambda_e = \frac{2\pi}{\beta}$$

(4) 波阻抗

TE模的波阻抗：

$$Z_{TE} = \frac{\omega\mu_0}{\beta} = \eta \frac{\lambda_e}{\lambda}$$

TM模的波阻抗

$$Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \eta \frac{\lambda}{\lambda_e}$$

以上各式中， λ 为介质中的波长； v 为介质中的光速； η 为介质的波阻抗。

5. 矩形波导中的最基本场结构模型是TE₁₀、TE₀₁、TE₁₁和TM₁₁。主模是TE₁₀模。

6. 圆波导中常用的模是TE₁₁、TE₀₁和TM₀₁，其中TE₁₁模是圆波导的主模。但TE₁₁模有极化简并现象，因而使圆波导的使用受到限制。

7. 同轴线的主模是TEM模，TE模和TM模为其高次模，应设法抑制。最低型高次模是TE₁₁模，其截止波长为 $\pi(b + a)$ 。故同轴线横截面尺寸选择必须使最小工作波长

$$\lambda_{min} < \pi(b + a)$$

通常取信号频率为TE₁₁模截止频率的95%，即

$$f \lesssim 0.95 f_{cTE_{11}}$$

8. 波导正规模具有对称性和正交性。它们在研究波导的激励和耦合问题及研究波导中的不均匀性问题时很有用。正规模场的正交归一性常用表示式为

$$\int_S \hat{z} \cdot (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n - \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m) ds = \delta_{mn}$$

$$\int_S \hat{z} \cdot (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H}_m) ds = \delta_{mn}$$

式中, $\delta_{mn} = 0$, $m \neq n$ 时; $\delta_{mn} = 1$, $m = n$ 时。

9. 规则波导截面尺寸的选择原则是: (1) 保证单模传输(通常为主模); (2) 传输功率尽量大; (3) 损耗小。

矩形波导尺寸一般选择为:

$$\left. \begin{array}{l} a = 0.7\lambda \\ b = (0.4 \sim 0.5)a \end{array} \right\}$$

参 考 资 料

- 〔1〕 廖承恩、陈达章,《微波技术基础》(上册),国防工业出版社,1979年。
- 〔2〕 黄宏基,《微波原理》(卷 I),科学出版社,1963年。
- 〔3〕 清水俊之、三原義男共著,《マイクロ波工学》,東海大学出版会,1980。
- 〔4〕 Om P. Gandhi,《Microwave Engineering and Applications》,Pergamon Press, 1981.
- 〔5〕 R. E. 柯林,《导波场论》,侯元庆译,上海科学技术出版社,1966年。
- 〔6〕 Herbert P. Neff, Jr., Basic Electromagnetic Fields, Harper & Row, Publishers, Inc., 1981.
- 〔7〕 R. A. 瓦尔特朗,《被导电磁波原理》,徐耀庭译,人民邮电出版社,1977年。
- 〔8〕 Simon Ramo, John R. Whinnery and Theodore Van Duzer, Fields and Waves in Communication Electronics, John Wiley & Sons, 1965.
- 〔9〕 Young L., Advances in Microwave, Vol. 1, Academic, 1966.
- 〔10〕 魏家善,《微波原理》,高等教育出版社,1965年。
- 〔11〕 林为干,《微波理论与技术》,科学出版社,1979年。

习 题

- 3-1 试定性解释为什么波导中不能传输TEM波?
- 3-2 什么叫做截止波长?为什么只有 $\lambda < \lambda_c$ 的波才能在波导中传输?
设矩形波导截面尺寸 a 为 8cm, b 为 4cm, 试求当频率分别为 3000MHz 和 5000MHz 时, 波导中能传输哪些模?
- 3-3 宽边尺寸为 a 、窄边尺寸为 b 的矩形波导 ($a > 2b$), 试求波导内全部为空气、一半空气一半填充 ϵ_r 的介质和全部填充 ϵ_r 介质情况下主模的截止波长, 并比较这三种情况下波导的单模工作波长范围。
- 3-4 今用 WJB-32 波导作馈线:
 - ① 当工作波长为 6cm 时, 波导中能传输哪些模?
 - ② 测得波导中传输 TE₁₀ 模时相邻两节点之间的距离为 10.9cm, 求 λ_0 和 λ_g ;
 - ③ 波导中传输 TE₁₀ 模, 设 λ_0 为 10cm, 求 λ_c 、 λ_g 、 v_p 和 v_g 。
- 3-5 试以 TE₁₀ 模为例, 证明波导中能量传播速度与群速度相等。
- 3-6 在 WBJ-100 波导中传输 TE₁₀ 模, 工作频率为 10GHz:
 - ① 求 λ_c 、 λ_g 、 β 和 Z ;
 - ② 若波导宽边尺寸增大一倍, 上述各量如何变化?
 - ③ 若波导窄边尺寸增大一倍, 上述各量又将如何变化?
 - ④ 若波导尺寸不变, 工作频率变为 15GHz, 上述各量将如何变化?

3-7 用 WJB-100 波导作馈线，问：

① 当工作波长为 1.5cm、3cm、4cm 时，波导中可能存在哪些模？

② 为保证只传输 TE_{10} 模，其波长范围和频率范围应为多少？

3-8 空气圆波导的直径为 5cm：

① 求 TE_{11} 、 TM_{01} 、 TE_{01} 模的截止波长；

② 当工作波长分别为 7cm、6cm 和 3cm 时，波导中可能存在哪些模？

③ 求 λ_0 为 7cm 时主模的波导波长。

3-9 在 WJB-58 波导中填充 ϵ_r 为 2.25 的介质，工作频率为 6000MHz，问波导中能传哪些模？

3-10 试计算 WJB-32 波导在工作频率为 3000MHz，传输 TE_{10} 模时的衰减常数；设波导中填充 ϵ_r 为 2.25 的介质，其 $\operatorname{tg} \delta = 0.0007$ ，求由介质损耗和金属损耗所产生的总衰减常数。

3-11 空气同轴线的尺寸 a 为 1cm， b 为 4cm：

① 计算 TE_{11} 、 TM_{01} 、 TE_{01} 三种高次模的截止波长；

② 若工作波长为 10cm，求 TEM 和 TE_{11} 模的相速度。

3-12 试推导式(3.7-8)。

3-13 求 WJB-100 波导在频率为 10GHz 时的极限功率和衰减常数；如果波导长为 4m，问损耗功率占传输功率的百分之几（设波导材料为黄铜）？

3-14 某发射机工作波长范围为 10~20cm，用同轴线作馈线，要求损耗最小，计算同轴线的尺寸。

3-15 试证明同轴线极限功率最大的条件为 b/a 等于 1.65，衰减最小条件为 b/a 等于 3.591 (b 和 a 分别为同轴线外导体内半径和内导体外半径)。

3-16 空气同轴线尺寸 a 和 b 分别为 1cm 和 4cm，为了保证只传输 TEM 波，工作波长至少应为多少？

3-17 在匹配的无耗同轴线上测得电流和电压有效值分别为 500mA 和 20V，内外导体间填充 ϵ_r 为 2.25 的介质，试求：

① 线上任一点的电场和磁场的振幅；

② 线上任一点的平均功率密度与功率密度最大的半径值；

③ 传输线的波阻抗和特性阻抗。

3-18 设计一同轴线，其传输的最短工作波长为 10cm，要求特性阻抗为 50Ω ，计算其尺寸（介质分别为空气和聚乙烯）。

3-19 设沿空气矩形波导 WJB-100 传输的 TE_{10} 模场分量为：

$$H_z = A \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$H_x = jA \frac{\lambda_e}{\lambda_g} \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$E_y = -jA \frac{\lambda_e}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

试求波导内总平均功率流表示式，并求击穿场强为 3000kV/m 和工作频率为 10GHz 时波导的最大功率。

3-20 某雷达站中心工作波长为 10cm，采用矩形波导作馈线，传输 TE_{10} 模，要求在波段中的最大波长和最小波长所传功率相差不到一倍，试计算 λ_{\max} 、 λ_{\min} 与波导的尺寸。

3-21 WBJ-32 矩形波导以 TE_{10} 模工作在 3GHz，传输 100kW 脉冲功率至匹配的负载，求波导内的最大电场强度；今用波导对天线馈电，天线引起的电压驻波比为 1.08，求此时馈线的最大和最小电场振幅与反射功率。

3-22 某发射机工作波长范围为 7.6~11.8cm，用矩形波导馈电，试计算波导尺寸与相对频带宽度。

- 3-23 某发射机工作频率为 3000MHz，今用矩形波导和圆波导作馈线，均传输主模，试比较波导尺寸大小。
- 3-24 某通讯机工作频率为 5000MHz，用圆波导传输主模，选取 $\lambda/\lambda_c = 0.9$ ，试计算波导的直径、波导波长、相速度和群速度。
- 3-25 有一频率为 14000MHz 的信号，用直径为 51.6mm 紫铜圆波导传输 100m 远，要求全长衰减小于 1dB，问应选择何种工作模式？
- 3-26 设空气填充的半径为 8mm 的同轴波导中， TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模的 E_φ 分量分别为：

$$E_\varphi = j \frac{\omega \mu}{K_c} \cos m\varphi J_m' (K_c r) e^{-j\beta s}$$

$$E_\varphi = j \frac{m\beta}{r K_c^2} \sin m\varphi J_m (K_c r) e^{-j\beta s}$$

试求：

- ① TE_{01} 和 TM_{23} 模的截止频率；
 - ② 主模的截止频率与单模传输的频率范围；
 - ③ 当工作频率为 30GHz 时，波导中可能存在的模式。
- 3-27 设工作波长为 8mm，今需将 WBI-320 矩形波导过渡到传输 TE_{01} 模的圆波导，并要求两者相速一样，试计算圆波导的直径；若过渡到圆波导后传输 TE_{11} 模，也要求相速一样，再计算圆波导的直径。
- 3-28 试分析 $\lambda \gg \lambda_c$ 时，圆波导 TE_{11} 和 TM_0 模的特性。
- 3-29 如图 3-1 所示矩形波导 TE_{10} 模探针天线激励装置，试求向波导右方传输的电场和磁场及探针天线的辐射电阻。

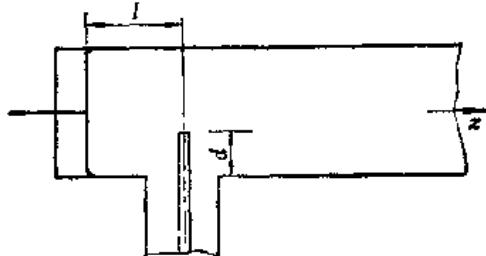


图 3-1 习题 3-29 用图

第四章 微带传输线

微带传输线是五十年代发展起来的一类微波传输线，具有小型、轻量、频带宽、可集成化等优点。随着微波元件和系统的日益小型化、固态化，在那些对体积和重量要求苛刻的场合，可以采用微带传输线取代波导来构成微波电路。用微带线可以组成成本低廉的微波集成电路。微带线技术的特点是各种不同电路可以集成在一块基片上组成平面电路，其电路重复性好，且便于构成各种有源电路。这些特点使微带线在微波技术中得到了日益广泛的应用。

本章主要分析使用最多的带状线、微带、耦合带状线和耦合微带的主要特性及其设计方法。

4.1 概 述

同轴线和波导是使用较早的微波传输线。随着空间电子技术的发展，对微波设备的小型化、可靠性等提出了新的要求。这促使人们研究新的传输线。

早在四十年代末，就有人提出采用微带传输线（以下简称微带线）来传输微波能量。但由于受介质材料（介电常数低）和制造工艺的限制，同时未从理论上解决参数的计算方法，因此当时微带线未能获得实际应用。

五十年代初，为适应空间技术的需要，研制成各种带状线电路。当时的带状线结构是单面或双面聚苯乙烯敷铜箔板，或聚苯乙烯、聚四氟乙烯介质板上贴上用铜箔剪制成的电路图形构成的。

1964年前后，随着集成工艺和微波固体器件的发展以及高介电常数、低损耗介质材料的研制成功，使得适合于集成工艺的微带技术得到了发展和应用。微波固体器件和微带线相结合，致使1965年出现了第一块微波集成电路（MIC）。

微带线的种类很多，如图4.1-1所示。其基本结构型式有两种，即微带和带状线，如图4.1-1(a)、(b)所示。

微带又称标准微带，是一种单接地板固体介质传输线。它可以看成是由双导线演变而成的，如图4.1-2(a)所示。双导线传输的主模是TEM模，若将无限薄导电金属板垂直地插入双导线中间，则根据镜象原理，去掉一根导体后的场型不变。将留下的导体变成带状，并在它与金属板之间加入介质材料，便变成微带。

带状线或称对称微带线，是一种双接地板空气或固体介质传输线。它可以看成是由同轴线演变而成的，如图4.1-2(b)所示。同轴线中传输的主模是TEM模，若将同轴线的内外导体变成矩形，侧壁无限延伸，便变成带状线。

微带线及由微带线构成的电路具有小型、轻量、易于制作、成本低、频带宽、可靠性高等优点；其缺点是损耗较大、Q值低、难以实现微调、功率容量小。目前仅限于中、小功率应用。

微带线电路的设计制作总是从材料的选择开始的，包括中心导体材料、介质材料及

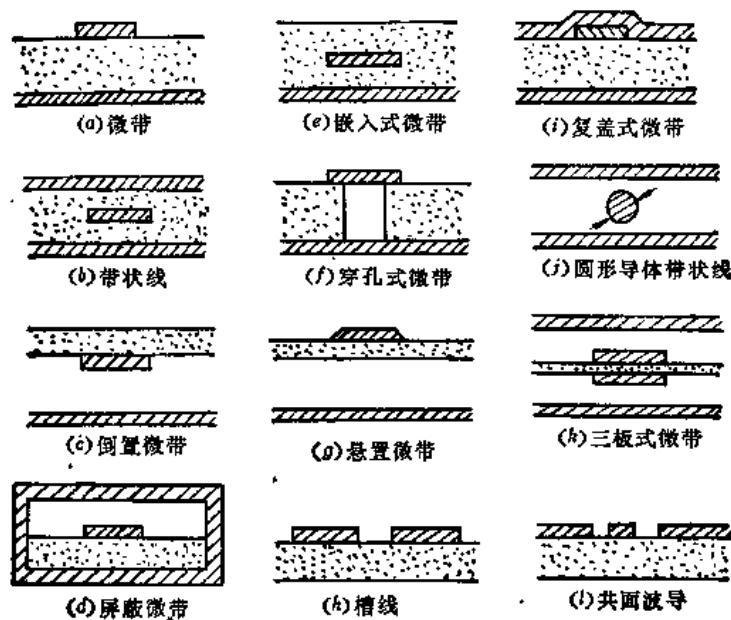


图4.1-1 微带线的种类

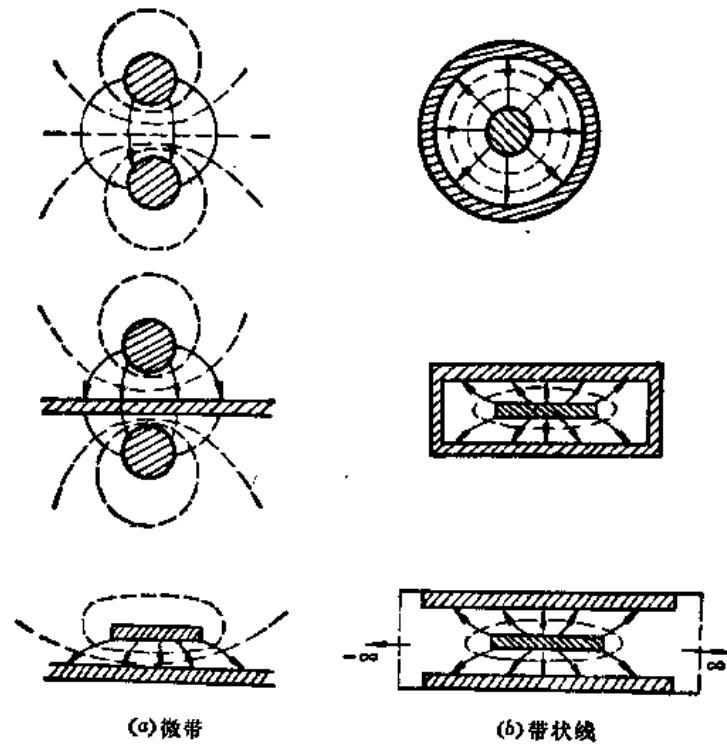


图4.1-2 微带线的演变

外壳材料。微带线电路制造工艺一般采用薄膜技术，最通用是采用真空蒸发沉积金属薄膜。

对介质基片材料的要求主要是：（1）损耗小，（2）介电常数合适，其随频率和温度的变化小，（3）与导体的粘附性好，（4）导热性能好，便于散热，（5）纯度高，均匀性和一致性好，（6）容易研磨和抛光，（7）有一定的机械强度，易于切割、钻孔。表4.1-1列出了常用介质材料的电性能。使用最多的介质基片材料是氧化铝陶瓷、聚四

表4.1-1 常用介质基片材料的高频特性

电性能 材 料	ϵ_r	$\text{tg } \delta$ (10GHz) $\times 10^{-4}$	表面光洁度 (μm)	热传导率 K (W/cm 2 /°C)	介 质 强 度 (kV/cm)	机 械 强 度
氧化铝(99.5%)	10	1~2	2~8	0.3	4×10^3	良好
氧化铝(96%)	9	6	20	0.28	4×10^3	良好
氧化铝(85%)	8	15	50	0.20	4×10^3	良好
蓝宝石	11	1	1	0.4	4×10^3	良好
玻璃	5	20	1	0.01		差
石英	3.78	1	1	0.01	10×10^3	稍差
氧化铍	6.6	1	2~50	2.5		良好
金红石	100	4	10~100	0.02		良好
铁氧体/石榴石	13~16	2	10	0.03	4×10^3	良好
砷化镓	13	6	1	0.3	350	良好
硅	12	10~100	1	0.9	300	良好
聚苯乙烯	2.55	7	1	0.001	≈ 300	良好
聚乙烯	2.26	5	1	0.001	≈ 300	良好
聚四氟乙烯	2.1	4	1	0.001	≈ 300	良好
空气	1	≈ 0		0.00024	30	

表4.1-2 微带线常用导体材料的特性

特性 材料	相对于铜的 直 流 电 阻	趋肤深度 δ (μm) (2GHz时)	表 面 电 阻 率 $\frac{\Omega}{\text{cm}^2} \times 10^{-7} \sqrt{f \text{ (Hz)}}$	热 胀 系 数 $\alpha_T \times 10^{-9}$ °C	对基片的 粘附性	沉 积 方法①
银(Ag)	0.95	1.4	2.5	21	差	E, Sc
铜(Cu)	1.0	1.5	2.8	18	很差	E, P
金(Au)	1.36	1.7	3.0	15	很差	E, P
铝(Al)	1.60	1.9	3.3	26	很差	E
钨(W)	3.20	2.6	4.7	4.6	好	Sp
铂(Mo)	3.3	2.7	4.7	6.0	好	Sp
铬(Cr)	7.6	4.0	7.2	9.0	好	E
钽(Ta)	9.1	4.4	7.9	6.6	很好	Sp

① E = 真空蒸发; Sp = 激射; P = 电镀; Sc = 印制和绕结。

氯乙烯玻璃纤维板。频率高于 12GHz 时可采用石英; 要求散热性能好的较大功率电路可采用氧化铍; 需要制作非互易器件时可嵌入铁氧体基片。

对微带线中心导体带材料的一般要求是: (1) 电导率高, (2) 电阻的温度系数低, 即性能稳定, (3) 与基片的粘附性强, (4) 容易腐蚀和焊接, (5) 易于沉积和电镀。常用金属材料的电性能如表 4.1-2 所示。由表可见, 导电性能好的银、铜、金对基片的粘附性都很差, 而导电性能较差的铬、钽对基片的粘附性却很好。因此, 微带线及其电路的制作是先在加工好的介质基片上蒸发一层很薄(500Å 以下)的铬, 然后在其上蒸发一层金, 再在上面光刻腐蚀好所需电路图形后电镀金到所需厚度(3~5 δ)。其截面(以微带为例)的实际结构如图 4.1-3 所示。

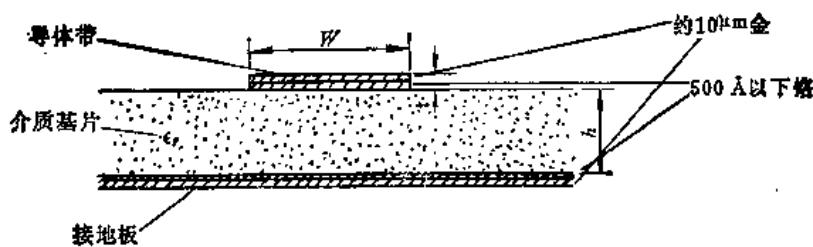


图4.1-3 微带截面的实际结构

4.2 带状线的主要特性

带状线的结构如图 4.2-1(a) 所示, 其主模为 TEM 模。其电磁场结构截面图如图 4.2-1(b) 所示。

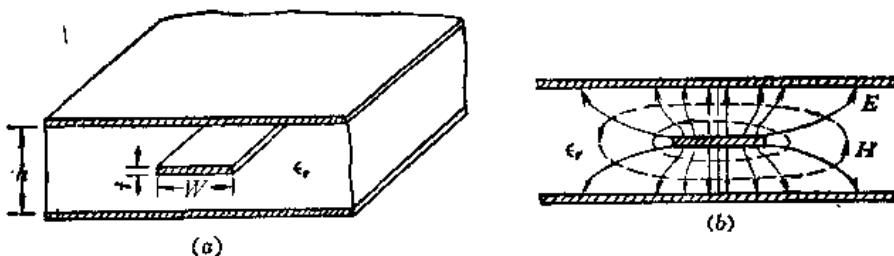


图4.2-1 带状线的结构及其主模场结构

带状线没有辐射, 其损耗与同轴线相当, Q 值较高, 适用于制作高性能 (高 Q 值或高隔离值) 的无源微带线元件, 如滤波器、耦合器等; 但带状线一般不宜于做有源微带线器件。

带状线中传输的主模是 TEM 模, 因此带状线的传输特性可用静电近似方法进行分析。表征带状线的特性参数主要是特性阻抗 Z_0 、衰减常数 α 、相速度、带内波长与功率容量等。下面分别加以讨论。

1. 特性阻抗 Z_0

微带线电路的设计, 关键就在于设法准确地确定所用微带线的特性阻抗值。由 2.3 节的分析知, TEM 模传输线特性阻抗的计算归结为分布参数电容的计算。带状线分布电容的求解方法很多, 这里只介绍两种: 一种是用保角变换法求 $t = 0$ 情况下的平板电容, 从而求得 $t = 0$ 情况下特性阻抗 Z_0 的精确解; 另一种是用部分电容概念求带状线的分布电容, 从而求得其特性阻抗 Z_0 的近似解。

(1) 零厚度导体带特性阻抗的精确解

带状线的特性阻抗可用保角变换方法求得在 $t \rightarrow 0$ 情况下的精确解。

在用保角变换法求微带线的特性阻抗时, 需作如下假设:

- 导体为理想导体;
- 介质为均匀、无耗、各向同性介质;
- 传输线沿 z 向 (轴向) 均匀、无限长;
- 工作模式为 TEM 模, 且横截面尺寸远小于工作波长。

然后当计算微带线的衰减时, 再考虑介质的损耗和导体的有限电导率。

用保角变换方法求得零厚度导体带带状线特性阻抗的精确公式为

$$Z_0 \sqrt{\epsilon_r} = 30 \pi \frac{K(k')}{K(k)} \quad (4.2-1)$$

式中, $K(k)$ 为第一类全椭圆积分, k 为其模数, $K(k')$ 为第一类余全椭圆积分, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ 。式 (4.2-1) 的推导见本节附录。

应用式 (4.2-1) 计算带状线的特性阻抗不方便, 这涉及到椭圆函数的计算。故式 (4.2-1) 很少采用。

(2) 科恩 (Cohn) 的 Z_0 近似公式

目前, 带状线电路设计使用最多的是科恩 (Cohn) 的特性阻抗曲线。这是应用部分电容的概念来求带状线的分布电容, 从而求得带状线的特性阻抗。科恩的特性阻抗解包括两部分, 即低阻抗范围 (对应于宽中心导体带情况) 和高阻抗范围 (对应于窄中心导体带情况)。下面分别加以讨论。

a. 宽导体带情况 ($W/(b-t) > 0.35$)

如图 4.2-2 所示, 在宽中心导体带条件下, 导体带两边的边缘场之间的相互作用可以近似不考虑。此种情况下, 应用部分电容概念,

带状线的分布电容可分解成平板电容 C_p 和边缘电容 C'_t 两部分。平板电容 C_p 对应于带状线中心导体带与接地板之间的均匀电场部分; 边缘电容则对应于导体带边缘与接地板之间的不均匀电场部分。如图 4.2-2 所示, 带状线总的分布电容为

$$C = 2 C_p + 4 C'_t \quad (4.2-2)$$

而平板电容

$$C_p = \frac{\epsilon W}{\frac{b-t}{2}} = \frac{0.0885 \epsilon_r \times 10^{-12} W}{(b-t)/2} \quad (\text{F/cm}) \quad (4.2-3)$$

边缘电容 C'_t 则可用保角变换方法求得为⁽³⁾

$$C'_t = \frac{0.0885 \epsilon_r}{\pi} \left\{ \frac{2}{1-t/b} \ln \left(\frac{1}{1-t/b} + 1 \right) - \left(\frac{1}{1-t/b} - 1 \right) \right. \\ \left. \times \ln \left[\frac{1}{(1-t/b)^2} - 1 \right] \right\} \quad (\text{pF/cm}) \quad (4.2-4)$$

根据式 (4.2-4) 绘制成的曲线如图 4.2-3 所示。

宽导体带带状线总的电容则为

$$C = 2 \frac{0.0885 \epsilon_r W}{\frac{b-t}{2}} + 4 C'_t \quad (\text{pF/cm}) \quad (4.2-5)$$

因此, 宽导体带带状线的特性阻抗为

$$Z_0 = \frac{1}{\sigma C} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{8 \times 10^{10} C} = \frac{94.15}{\sqrt{\epsilon_r} \left(\frac{W/b}{1-t/b} + \frac{C'_t}{0.0885 \epsilon_r} \right)} \quad (\Omega) \quad (4.2-6)$$

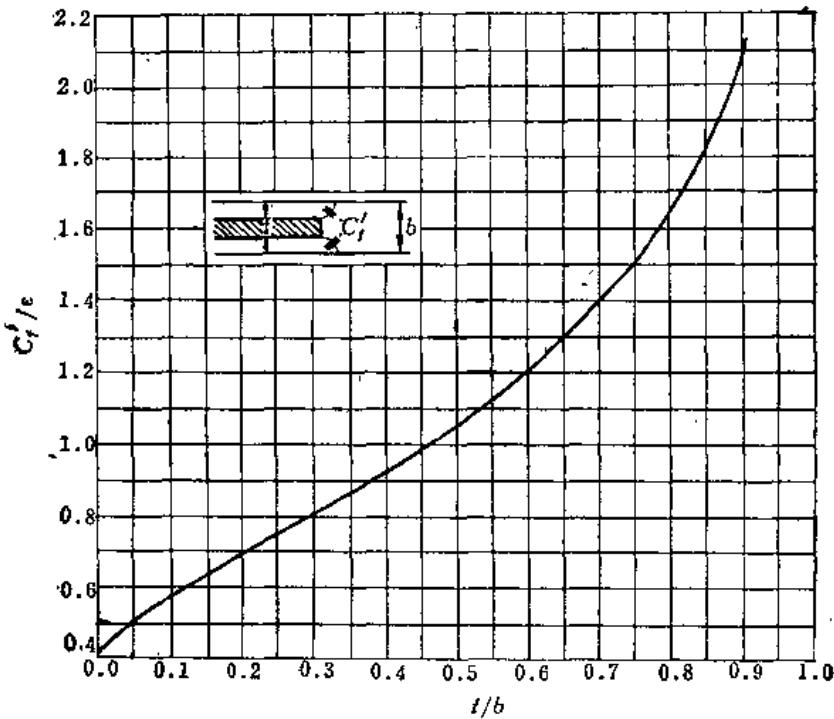


图 4.2-3 单根导体带的边缘电容

式中长度的单位用 cm, 电容的单位为 pF。需要指出注意的是, 式 (4.2-6) 是在导体带为无限宽的假设下得到的, 所以它只是宽导体带条件下的近似式。分析表明, 当

$$\frac{W}{b-t} = \frac{W/b}{1-t/b} \geq 0.35 \quad (4.2-7)$$

时, 边缘场的相互作用引起的总电容的误差小于 1.24%。

b. 窄导体带情况 ($\frac{W}{b-t} < 0.35$)

当中心导体带比较窄, 以至左右两边的边缘场开始相互影响时, 式 (4.2-6) 就不再正确了。此时带状线特性阻抗的计算, 一个办法是修正, 即当不满足条件 (4.2-7) 时, 用新的导体带宽度 W' 来代替原来的 W , 在 $0.1 < \frac{W'/b}{1-t/b} < 0.35$ 范围内, W' 值可由下式求得^[6]:

$$\frac{W'}{b} = \frac{0.07 \left(1 - \frac{t}{b} \right) + \frac{W}{b}}{1.2} \quad (4.2-8)$$

这样引入了 W' 后, 就仍然可以用式 (4.2-6) 来计算窄导体带带状线的特性阻抗值。

当 $\frac{W}{b-t} < 0.35$ 时窄导体带带状线特性阻抗的另一种常用的求值方法是将它的矩形中心导体带等效为圆杆中心导体, 如图 4.2-4 所示。在满足条件 $\frac{W}{b-t} \leq 0.35$ 和 $\frac{t}{b} \leq 0.25$ 时, 窄导体带的特性阻抗接近于圆杆中心导体的特性阻抗。后者为^[4]

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{4b}{\pi d} \quad (\Omega) \quad (4.2-9)$$

式中 d 是等效圆杆中心导体的直径。当 $\frac{t}{W} \leq 0.11$ 时， W 和 d 之间的等效关系为⁽⁸⁾

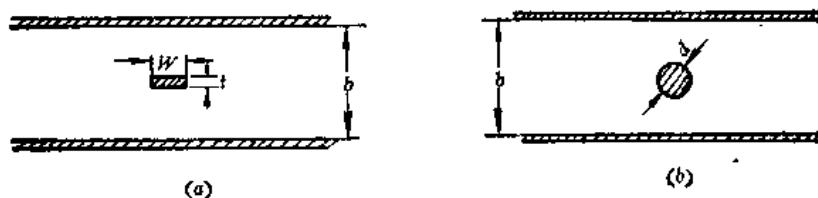


图4.2-4 具有相同特性阻抗的带状线截面

(a) 矩形中心导体; (b) 圆形中心导体。

$$d = \frac{W}{2} \left\{ 1 + \frac{t}{W} \left[1 + \ln \frac{4 \pi W}{t} + 0.51 \pi \left(\frac{t}{W} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.2-10)$$

其等效关系曲线如图 4.2-5 所示。

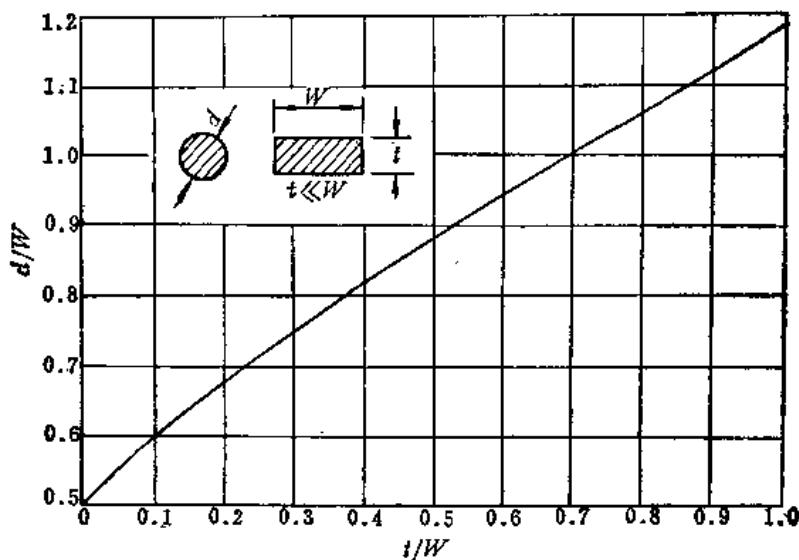


图4.2-5 带状线与圆杆中心导体的截面尺寸等效

由图 4.2-5 可见，当 $t = 0$ 时， $d = W/2$ ，于是得到带状线特性阻抗可表示为

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{8b}{\pi W} \quad (\Omega) \quad (4.2-11)$$

式 (4.2-11) 在 $t = 0$ 时是精确的，在 $W/(b-t) < 0.35$ 和 $t/b < 0.25$ 时的精度不低于 1.2%。

根据以上得到的公式，可以画出带状线特性阻抗与其尺寸的关系曲线，如图 4.2-6 所示。此即常用的科恩的带状线特性阻抗曲线。图中 $t/b = 0$ 的曲线是根据式 (4.2-1) 算得的，因而是精确的；而 $t/b > 0$ 的曲线则是根据式 (4.2-6) 和 (4.2-11) 算得的。图 4.2-7 给出了最常用的 t/b 值带状线特性阻抗曲线⁽⁹⁾。图 4.2-6 和图 4.2-7 的曲线精度约为 1.5%。

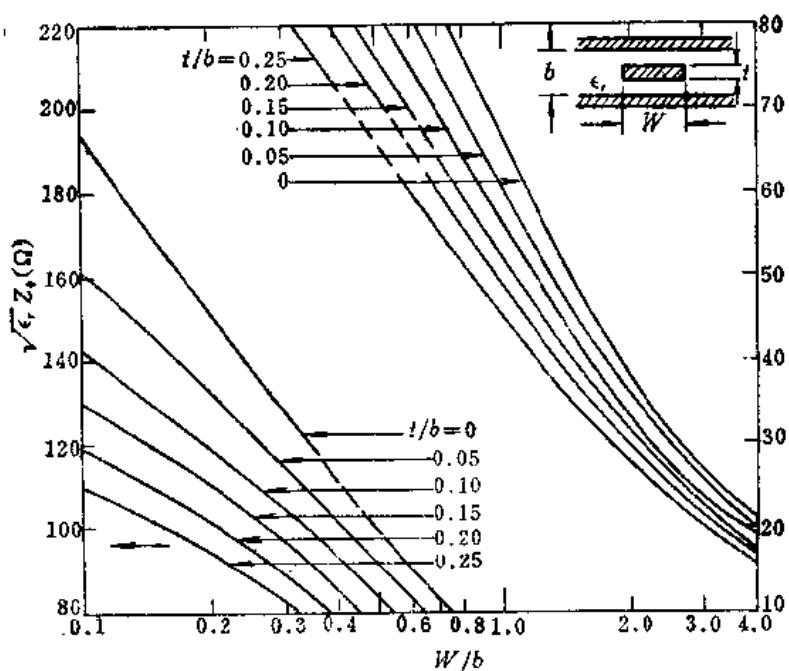
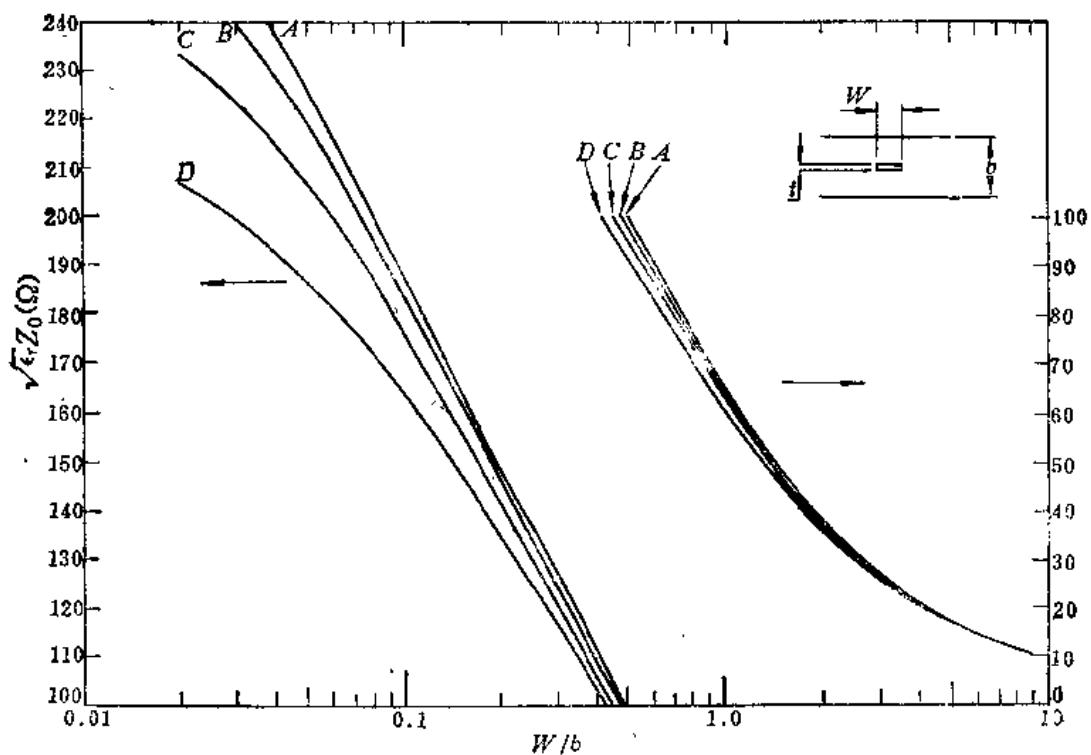


图4.2-6 带状线特性阻抗曲线

图4.2-7 常用 t/b 值的带状线特性阻抗曲线

A— $t/b = 0.0056, b = 6.350\text{ mm}$;

B— $t/b = 0.0112, b = 3.175\text{ mm}$;

C— $t/b = 0.0224, b = 1.575\text{ mm}$;

D— $t/b = 0.0452, b = 1.575\text{ mm}$.

例4.2-1 计算聚四氟乙烯 ($\epsilon_r=2.1$) 敷铜箔板带状线的特性阻抗, 已知 $b=2\text{mm}$, $t=0.1\text{mm}$, $W=1.7\text{mm}$ 。

$$\text{解 } W/b = 1.7/2 = 0.85$$

$$t/b = 0.1/2 = 0.05$$

查图 4.2-6 曲线, 得到

$$\sqrt{\epsilon_r} Z_0 = 66.5$$

故得

$$Z_0 = 46(\Omega)$$

例4.2-2 分别求特性阻抗为 20Ω 、 50Ω 和 120Ω 的聚乙烯敷铜箔板带状线的导体带宽度 W 。设 $t/b = 0.0056$, $b = 6.35\text{mm}$ 。

$$\text{解 因为 } \sqrt{\epsilon_r} Z_{01} = \sqrt{2.1} \times 20 = 28.3(\Omega)$$

$$\sqrt{\epsilon_r} Z_{02} = \sqrt{2.1} \times 50 = 70.7(\Omega)$$

$$\sqrt{\epsilon_r} Z_{03} = \sqrt{2.1} \times 120 = 169.7(\Omega)$$

查图 4.2-7 的曲线, 分别得到

$$\frac{W_1}{b} = 1.27 \quad \text{或者} \quad W_1 = 8.06\text{mm},$$

$$\frac{W_2}{b} = 0.9 \quad \text{或者} \quad W_2 = 5.72\text{mm},$$

$$\frac{W_3}{b} = 0.14 \quad \text{或者} \quad W_3 = 0.89\text{mm}.$$

2. 传播速度与波导波长

由于带状线的主模为 TEM 模, 故波的传播速度为

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.2-12)$$

式中, c 为真空中的光速, ϵ_r 为介质的相对介电常数。

带状线的波导波长 (或称带内波长) 为

$$\lambda_c = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.2-13)$$

式中 λ_0 为自由空间波长。

3. 带状线的损耗和衰减

带状线的损耗包括中心导体带和接地板的电阻损耗与介质损耗。因此

$$\alpha = \alpha_o + \alpha_d \quad (4.2-14)$$

式中, α 为带状线单位长度的衰减; α_o 为带状线单位长度的导体衰减; α_d 为单位长度介质衰减。

(1) 介质衰减

由式 (3.7-22), 得到带状线的介质衰减因数为

$$\alpha_d = \frac{27.3\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} \operatorname{tg} \delta \quad (\text{dB/m}) \quad (4.2-15)$$

例4.2-3 带状线的介质材料损耗正切 $\tan \delta$ 为 6×10^{-4} , $\epsilon_r=2.55$, 工作频率为1GHz。求介质的衰减因数。

解 因为

$$\lambda_0 = \frac{3 \times 10^{13}}{1 \times 10^9} = 30 \text{ (cm)}$$

所以

$$\alpha_d = \frac{27.3\sqrt{2.55}}{30} \times 6 \times 10^{-4} = 0.000873 \text{ (dB/cm)}$$

可见介质衰减很小。

(2) 导体衰减

由传输线理论知, 带状线的导体衰减可由下式求得:

$$\alpha_s = \frac{R}{2 Z_0} \quad (4.2-16)$$

式中, R 为单位长度电阻, Z_0 为特性阻抗。

由式 (4.2-16) 知, 为了求 α_s , 就需要求分布电阻 R 。但由于带状线的电流沿导体横截面周界并非均匀分布, 如要像波导中那样, 先求出电流分布函数, 然后再由电流分布求分布电阻就很复杂。为此, 我们可以采用所谓“增量电感法”来计算趋肤损耗电阻, 进而求导体的衰减因数。

带状线单位长度串联趋肤阻抗为

$$Z_s = R_s + jX_s \quad (4.2-17)$$

式中, R_s 为单位长度电阻, $X_s = \omega L_i$ 是单位长度内感抗。金属导体趋肤效应阻抗

$$Z_s = \frac{1 + j}{\sigma \delta} = R_s + j\omega L_i \quad (4.2-18)$$

式中, σ 和 δ 分别为金属导体的电导率和趋肤深度, L_i 是内电感, 趋肤电阻

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

式 (4.2-18) 表明, 对于金属导体, $R_s = X_s = \omega L_i$ 。于是可得内电感

$$L_i = \frac{R_s}{\omega} = \frac{\mu \delta}{2} \quad (4.2-19)$$

内电感是由外磁场渗透到导体内所引起的, 正如式 (4.2-19) 所表明的, 它是在厚度为 $\delta/2$ 的导体材料层中的电感。此电感可视为外电感的增量。假如是理想导体, 则不存在内电感。想象理想导体面后缩 $\delta/2$, 则相应的增量电感正好就是理想导体做的相同系统的内电感。将此想法推广一下, 假设某给定导体的厚度尺寸为 z_0 , 假如 $z_0 \gg \delta/2$, 则由泰勒级数展开关系, 得到后缩 $\delta/2$ 后的电感

$$L\left(z_0 - \frac{\delta}{2}\right) \approx L(z_0) - \frac{\partial L}{\partial z} \cdot \frac{\delta}{2} + \dots$$

于是得到

$$L_i = L(z_0) - L\left(z_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{\partial L}{\partial z} \quad (4.2-20)$$

故得到

$$R = \omega L_i = \frac{\omega \delta}{2} \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{R_s}{\mu} \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{R_s}{\mu} \frac{\partial L}{\partial n} \quad (4.2-21)$$

此式就是求任意传输线截面趋肤电阻的一般公式，即用增量电感法求分布电阻的一般公式。

由于 $Z_0 = \sqrt{L/C}$ ，而 $v = 1/\sqrt{LC}$ ，于是

$$\frac{\partial L}{\partial n} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c} \frac{\partial Z_0}{\partial n}$$

因此式 (4.2-21) 可表示为

$$R = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r}}{\mu c} \frac{\partial Z_0}{\partial n} = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r}}{120 \pi} \frac{\partial Z_0}{\partial n} \quad (4.2-22)$$

将式 (4.2-22) 代入式 (4.2-16)，得到导体衰减因数

$$\alpha_s = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r}}{240 \pi Z_0} \frac{\partial Z_0}{\partial n} \quad (\text{Np/m}) \quad (4.2-23)$$

对于带状线，有（见图 4.2-8）

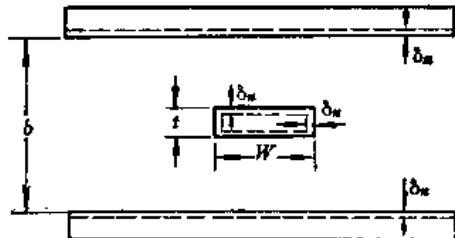


图 4.2-8 高频电流引起的导体表面后缩

$$\frac{\partial Z_0}{\partial n} = 2 \frac{\partial Z_0}{\partial b} - 2 \frac{\partial Z_0}{\partial W} - 2 \frac{\partial Z_0}{\partial t}$$

因此，带状线导体衰减因数

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r}}{120 \pi Z_0} \left(\frac{\partial Z_0}{\partial b} - \frac{\partial Z_0}{\partial W} - \frac{\partial Z_0}{\partial t} \right) \quad (\text{Np/m}) \\ &= \frac{0.0231 R_s \sqrt{\epsilon_r}}{Z_0} \left(\frac{\partial Z_0}{\partial b} - \frac{\partial Z_0}{\partial W} - \frac{\partial Z_0}{\partial t} \right) \quad (\text{dB/m}) \end{aligned} \quad (4.2-24)$$

导体衰减的具体计算公式分两种情况：

a. 宽导体带情况 ($\frac{W}{b-t} \geq 0.35$)：

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \frac{2.02 \times 10^{-6} \sqrt{f \text{ (GHz)}}}{b} Z_0 \epsilon_r \left\{ \frac{1}{1 - \frac{t}{b}} + \frac{2W/b}{(1 - t/b)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 + t/b}{(1 - t/b)^2} \right] \ln \left[\frac{\frac{1}{1 - t/b} + 1}{\frac{1}{1 - t/b} - 1} \right] \right\} \quad (\text{dB/m}) \end{aligned} \quad (4.2-25)$$

b. 窄导体带情况($\frac{W}{b-t} \leq 0.35$, $-\frac{t}{b} \leq 0.25$, $\frac{t}{W} \leq 0.11$):

$$\alpha_e = \frac{0.011402 \sqrt{\epsilon_r f (\text{GHz})}}{\sqrt{\epsilon_r} Z_0 b} \left\{ 1 + \frac{b}{d} \left(\frac{1}{2} + 0.669 \frac{t}{W} - 0.255 \left(\frac{t}{W} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \pi \ln \frac{4 \pi W}{t} \right\} \quad (\text{dB/m}) \quad (4.2-26)$$

式中 d 为窄导体带的等效圆形截面直径。

式 (4.2-25) 和 (4.2-26) 是对铜导体而言; 如果不是铜, 则可按下式换算:

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_e} = \frac{R_s}{R_e} \quad (4.2-27)$$

由上面两式计算得到的铜带状线导体衰减理论曲线如图 4.2-9 所示。图中的 α_e 是在 $\epsilon_r = 1$ 和 b 为 25.4mm、频率为 1 GHz 条件下算得的。当线内填充介质 ϵ_r 时, 带状线总的衰减因数为

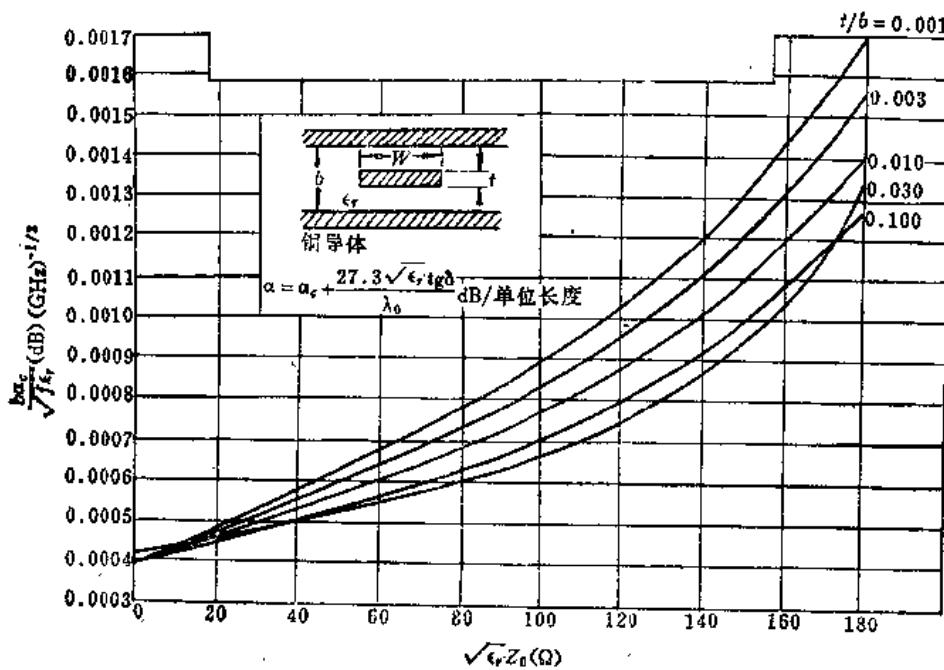


图 4.2-9 铜导体带状线导体衰减理论曲线

$$\alpha = \alpha_e + \frac{27.3 \sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} \operatorname{tg} \delta \quad (\text{dB/m}) \quad (4.2-28)$$

例 4.2-4 已知聚苯乙烯敷铜箔带状线的特性阻抗为 50Ω , ϵ_r 为 2.55, b 为 4 mm, t 为 0.02 mm, 工作频率为 1 GHz, 求其导体衰减。

解 $Z_0 \sqrt{\epsilon_r} = 50 \times \sqrt{2.55} = 80 (\Omega)$

$t/b = 0.005$

查图 4.2-9 曲线得到

$$\frac{b}{\sqrt{\epsilon_r} f(\text{GHz})} \alpha_s = 0.00072$$

由此求得

$$\alpha_s = 0.00288 \quad (\text{dB/cm})$$

与例 4.2-3 的介质衰减相比可以看出，带状线的损耗主要是导体损耗，介质损耗可以忽略。

4. 功率容量

从根本上讲，带状线结构不适于大功率应用，不管是大脉冲功率还是大平均功率，但也不是说它只能用于毫瓦级功率。设计得好的带状线（特别是空气带状线）是可以承受相当功率电平的。

显然，带状线最容易发生电击穿的地方是中心导体的四个边缘棱角处。为了提高脉冲功率容量，可将其倒成圆角，如图 4.2-10 中的图形。经倒圆角的空气带状线的最大峰值击穿功率可表示为⁽³⁾

$$\frac{P_{\max}^0}{b^2 P^2} = \frac{602 \times 10^3}{Z_0} \left[\frac{t}{b} - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \right] \quad (4.2-29)$$

式中， P_{\max} 为最大峰值击穿功率，单位为 kW； ρ 为驻波系数； P 为大气压力（单位为 atm）； b 的单位为 cm。

图 4.2-10 表示空气填充、中心导体带边缘倒圆角的带状线峰值击穿功率理论曲线。如果不是空气，而是固体介质，则可按下式换算：

$$\frac{P_{\max}(\text{介质})}{P_{\max}(\text{空气})} = \frac{1}{\epsilon_r^2} \quad (Z_0 < 150 \Omega) \quad (4.2-30)$$

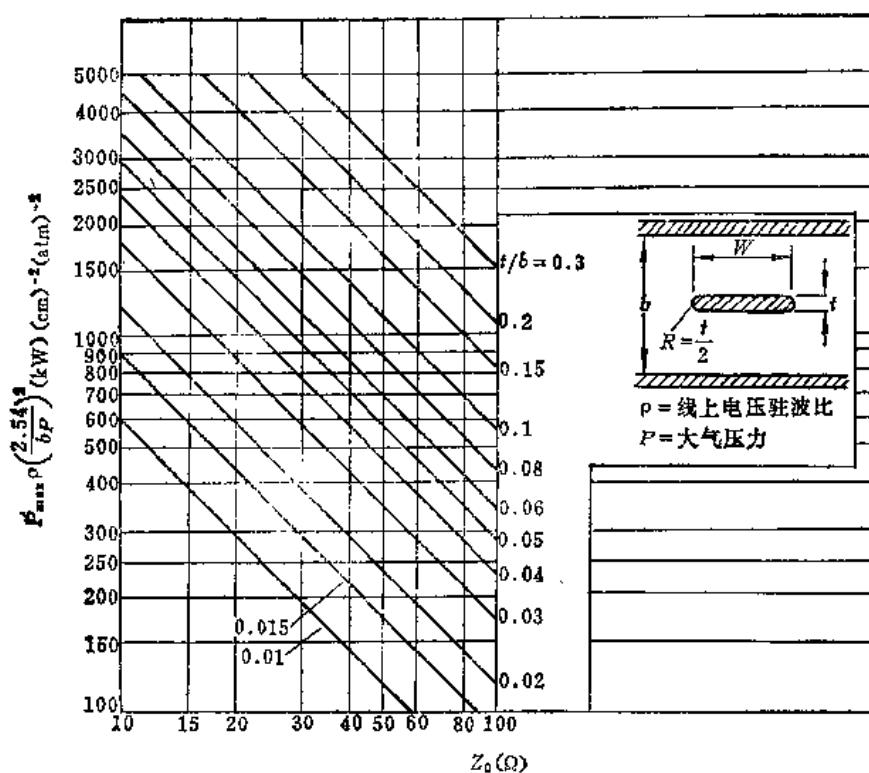


图 4.2-10 空气带状线的理论击穿功率

5. 带状线的尺寸选择

在一定的尺寸条件下，带状线中会出现高次模 TE 模和 TM 模。由于导体带上下介质均匀对称，所以场型也是上下对称的。最低型的 TE_{10} 模场结构如图 4.2-11 所示，其电场、磁场沿 x 方向是变化的，且在 W 宽度内有半个波长的驻波分布，沿 y 方向无变

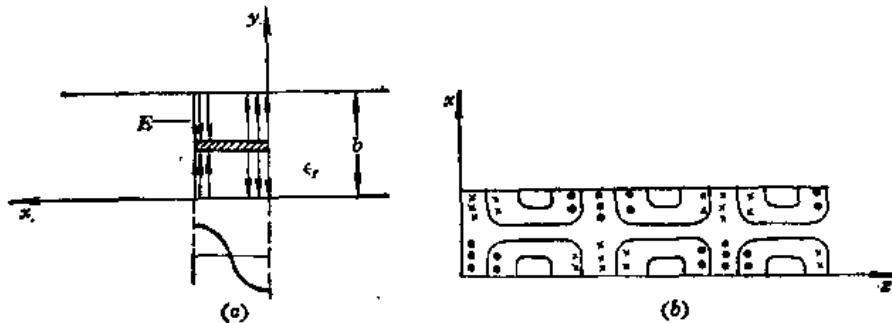


图 4.2-11 带状线中的 TE_{10} 模场结构

化。其截止波长为

$$(\lambda_s)_{TE_{10}} \approx 2W\sqrt{\epsilon_r} \quad (4.2-31)$$

最低型的 TM 模是 TM_{01} 模。其电磁场沿 y 方向是变化的，且在高度 b 内有半个驻波分布，沿 x 方向无变化。其截止波长为

$$(\lambda_s)_{TM_{01}} \approx 2b\sqrt{\epsilon_r} \quad (4.2-32)$$

由式 (4.2-31) 和 (4.2-32) 得到带状线的尺寸应满足

$$\left. \begin{aligned} W &< \frac{\lambda_{min}}{2\sqrt{\epsilon_r}} \\ b &< \frac{\lambda_{min}}{2\sqrt{\epsilon_r}} \end{aligned} \right\} \quad (4.2-33)$$

附录 零厚度导体带带状线特性阻抗的精确解

用保角变换法可以求得零厚度导体带带状线特性阻抗的精确解。带状线横截面如图 4.2A-1(a) 所示，是左右对称的，我们只需研究其一半，如取右半边，如图 4.2A-1(a) 所示，带状线总的电容则为经变换后得到的平板电容之两倍。

用保角变换方法求带状线的特性阻抗实际上是求带状线的分布电容。为此需经过两次变换：第一次，用多角形变换（即许瓦兹变换）将带状线截面的多角形区域 (z 平面)，变换成 t 平面上的实轴及其上半无限区域；第二次，用多角形变换再变换成 W 平

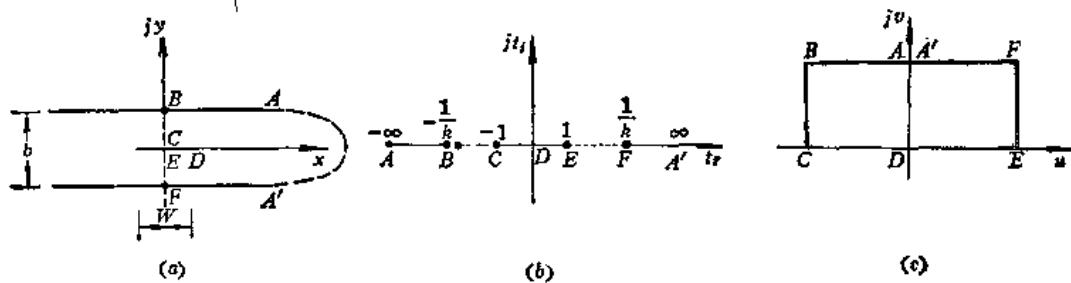


图 4.2A-1 带状线截面的保角变换

(a) 带状线截面的多角形 (z 平面); (b) t 平面; (c) W 平面的矩形区域。

面上的矩形区域，带状线的分布电容便可由此矩形区域的对应坐标求得。

1. z 平面至 t 平面的变换

图 4.2A-1(a) 所示带状线截面的 $ABCDEF A'$ 多角形区域，采用如下式所示变换函数，可变换至 t 平面上的实轴及其上半无限区域：

$$z = A_1 \int_0^t \left\{ \frac{t^2 - \xi^2}{(t^2 - 1)(t^2 - k^2)} \right\}^{1/2} dt \quad (4.2A-1)$$

其对应点的坐标如表 4.2A-1 所示。式 (4.2A-1) 中的待定常数 A_1 和 k 可由两平面对应点关系求出。

表 4.2A-1 $z-t$ 变换对应点坐标和内转角 α

复平面 对应点	A	B	C	D	E	F	A'
z	$\infty + j\frac{b}{2}$	$j\frac{b}{2}$	0	$-\frac{W}{2}$	0	$-j\frac{b}{2}$	$\infty - j\frac{b}{2}$
t	$-\infty$	$-\frac{1}{k}$	-1	0	1	$\frac{1}{k}$	∞
α		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	

2. t 平面至 W 平面的变换

与 $z-t$ 变换相似，利用下式所示变换函数可将图 4.2A-1(c) 所示矩形区域变换为图 4.2A-1(b) 所示实轴及其上半无限区域：

$$W = A_2 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} dt \quad (4.2A-2)$$

其对应点的坐标和内转角如表 4.2A-2 所示。上式中的待定常数 A_2 和 k 可由对应点的关系求出。

表 4.2A-2 $W-t$ 变换对应点坐标和内转角 α

复平面 对应点	A	B	C	D	E	F	A'
t	$-\infty$	$-\frac{1}{k}$	-1	0	1	$\frac{1}{k}$	∞
W	jK'	$-K+jK'$	$-K$	0	K	$K+jK'$	jK'
α		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	

对于点 E ，由式 (4.2A-2) 得到

$$K(k) = A_2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (4.2A-3)$$

由第一类全椭圆积分的定义，

$$K(k) = F\left(-\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (4.2A-4)$$

得到 $A_2 = 1$ 。由点 F ，得到

$$K'(k) = \int_{-1}^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} \quad (4.2A-5)$$

令

$$1 - k^2 t^2 = k'^2 t'^2 \quad (4.2A-6)$$

$$k'^2 = 1 - k^2 \quad (4.2A-7)$$

则

$$1 \leq t \leq \frac{1}{k} \text{ 和 } 0 \leq t' \leq 1 \quad (4.2A-8)$$

$$dt = -\frac{k'^2 t'}{k^2 t} dt'$$

$$t^2 - 1 = \frac{1 - k'^2 t'^2}{k^2} - 1 = \frac{k'^2(1 - t'^2)}{k^2}$$

于是式 (4.2A-5) 变成

$$K'(k) = \int_0^1 \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(1-k'^2 t'^2)}} = K(k') \quad (4.2A-9)$$

此即第一类余全椭圆积分, k' 称为余模数。根据变换得到的 W 平面矩形区域, 我们便可求得其平板电容为

$$C' = \frac{\epsilon_{\text{板面积}}}{\epsilon_{\text{板间距}}} = \frac{\epsilon - (-K)}{K'} = 2\epsilon \frac{K}{K'} \quad (4.2A-10)$$

整个带状线的分布电容则为

$$C = 2C' = 4\epsilon \frac{K(k)}{K'(k)} = 4\epsilon \frac{K(k)}{K(k')} \quad (4.2A-11)$$

因此得到零厚度导体带带状线的特性阻抗为

$$Z_0 = \frac{1}{vC} = \frac{\eta_0}{4\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K(k')}{K(k)} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K(k')}{K(k)} \quad (4.2A-12)$$

此即式 (4.2-1), 式中 $\eta_0 = 120\pi$ 是自由空间的波阻抗。

4.3 微带的主要特性

微带是微波集成电路 (MIC) 中使用最多的一种传输线。这种结构便于外接固体微波器件, 构成各种微波有源固体电路, 而且可以在一块介质基片上制作完整的电路图形, 有利于微波组件和系统的集成化、固化, 提高整机的可靠性和小型化程度。

用微带来制作微波集成电路, 首先是用真空蒸发的方法在研磨抛光好的介质基片 (使用最多的是氧化铝陶瓷基片) 上形成铬-金层, 然后采用光刻、腐蚀技术在铬-金层上制作好电路, 并用电镀办法使电路的导体带和接地板达到所需厚度 (3~5个趋肤厚度), 之后焊接上固体微波器件 (如果需要的话), 装配上同轴-微带接头并封上金属盒, 最后构成微带电路。

本节主要讨论微带的准 TEM 模传输特性及其分析计算方法。

1. 微带的模式

(1) 微带的主模——准 TEM 模

微带是一种双导体传输系统, 如前面所示, 它可以看成是由双导线演变而成的。容易理解, 假如微带的中心导体带 (简称导体带) 与接地板之间没有介质, 或者整个微带

由一种均匀介质所包围，则可以传输 TEM 模。但是，微带中有二种介质，如图 4.3-1 所示，导体带上面为空气，导体带下面为介质基片，存在着空气-介质分界面。正是这种开放式结构，使微带适用于制作微波集成电路，也便于在电路中安装集总的无源元件和有源器件，并且在电路制作后有可能进行微调或调谐；然而，与此同时，这种混合介质系统也就给微带的分析和设计带来了一定的复杂性，而不能象带状线那样简单的按 TEM 模来处理。微带的空气-介质分界面的存在，使微带中不可能存在单纯的 TEM 模，其传输模为非 TEM 模。这可以根据麦克斯韦方程和边界条件来加以证明。

如图 4.3-1 所示，边界条件要求在 $y = h$ 的空气-介质分界面处，电场的切线分量应当连续，即

$$E_x|_d = E_x|_a \quad (4.3-1)$$

足标 d 和 a 分别代表分界面的介质和空气一侧。应用麦克斯韦第一方程，上式可以写成

$$(\nabla \times H)_x|_d = \epsilon_r (\nabla \times H)_x|_a \quad (4.3-2)$$

将式 (4.3-2) 展开，并应用磁场法线分量的连续性条件，可以得到

$$\epsilon_r \frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_a - \frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_d = \epsilon_r \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_a - \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_d = \epsilon_r \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_a - \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_a = (\epsilon_r - 1) \frac{\partial H_y}{\partial z} \Big|_a \quad (4.3-3)$$

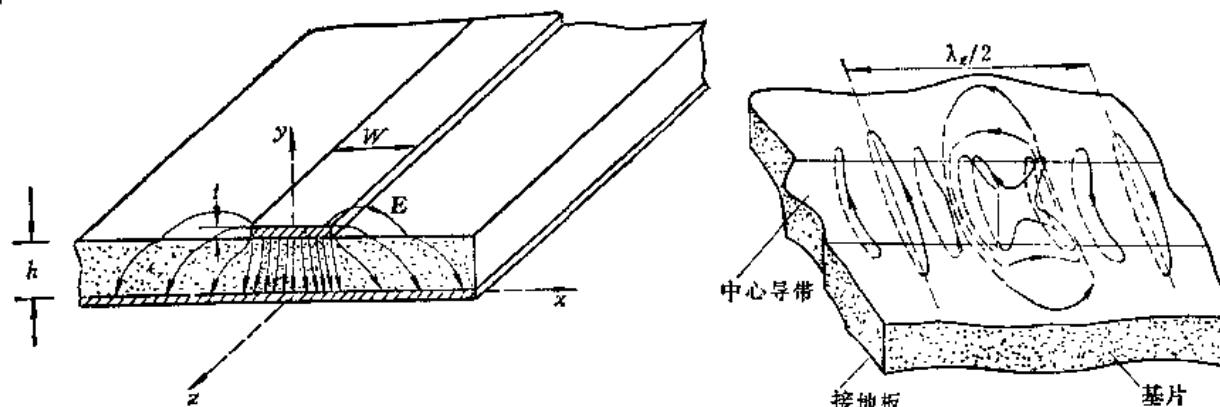


图 4.3-1 微带的结构

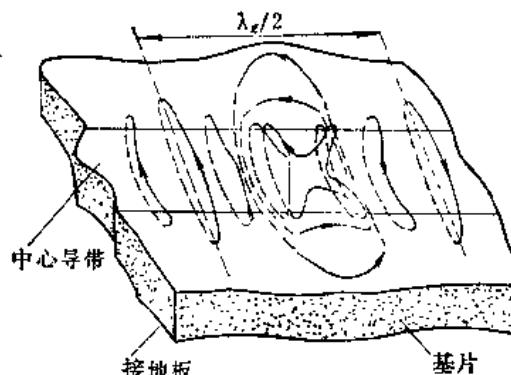


图 4.3-2 微带主模在中心导体带附近的
磁场分布

因为 $\epsilon_r \neq 1$ ，而 $H_y \neq 0$ ，于是式 (4.3-3) 说明，其左边不应等于零。这只有 $H_z \neq 0$ 才成立。由此可见，为使麦克斯韦方程对图 4.3-1 结构成立，磁场的纵向分量 H_z 一定存在。同理可以证明 E_z 存在。因此，微带结构中不可能存在纯 TEM 模。不过，由上面的分析可以看出，微带结构中模式的非 TEM 性质，是由于空气-介质分界面处的边缘场分量 E_z 和 H_z 引起的，而与导体带下面基片中的场量相比，这些边缘场分量很小，所以微带中模的特性与 TEM 模相差很小，称之为准 TEM 模。其磁场分布如图 4.3-2 所示^[7]。由图可见，其磁场分布与 TEM 模相似，但不完全一样。TEM 模的磁力线都与中心导体带相交链，而微带主模（准 TEM 模）的磁力线有一部分不与中心导体带相交链，因而其空间能量分布比 TEM 模分散，传输特性也就有所不同。

微带中的这种主模实际上是一种混合模，是有色散的。不过在低微波频率，微带基

片厚度 h 远小于微带波长，这种模近似为 TEM 模。此时，微带中的大部分能量集中在中心导体带下面的介质基片内，而在此区域内的纵向场分量比较弱，因此可将这种模近似看成 TEM 模。

(2) 微带中高次模

当频率较高，微带的截面尺寸 h 和 W 与波长可相比拟时，微带中还可能出现波导模 (TE 模和 TM 模)，在导体带上还有表面波。TE 模、TM 模和表面波称为微带的高次模。

TE 型高次模中的最低模是 TE_{10} 模，其场结构如图 4.3-3(a) 所示。其截止波长仅与导体带宽度 W 有关：

$$(\lambda_c)_{TE_{10}} = 2W\sqrt{\epsilon_r} \quad (4.3-4)$$

当 $W/h = 1$ 时，还会出现 TE_{01} 模。考虑到边缘效应，上式修正为

$$(\lambda_c)_{TE_{01}} = (2W + 0.8h)\sqrt{\epsilon_r} \quad (4.3-5)$$

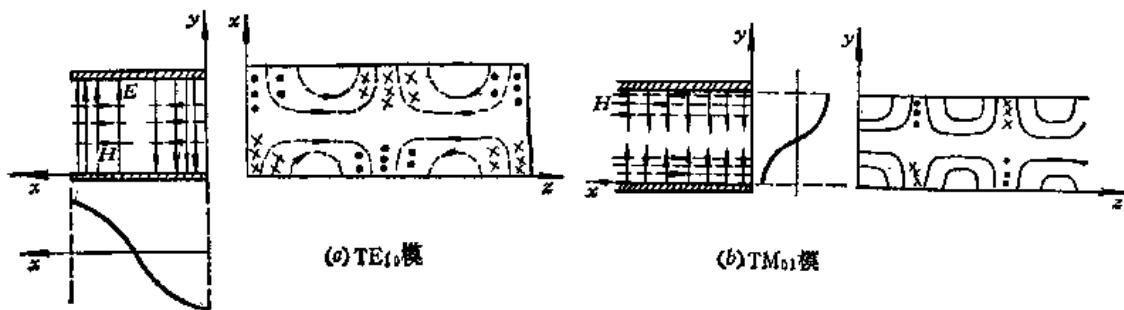


图 4.3-3 微带中的波导模

微带中最低型 TM 模是 TM_{01} 模，其场结构如图 4.3-3(b) 所示。其截止波长仅与 h 有关：

$$(\lambda_c)_{TM_{01}} = 2h\sqrt{\epsilon_r} \quad (4.3-6)$$

微带中的表面波也有 TE 模和 TM 模之分。最低的 TE 和 TM 型表面波的截止波长分别为：

$$(\lambda_c)_{TE_1} = 4h(\epsilon_r - 1)^{1/2} \quad (4.3-7)$$

$$(\lambda_c)_{TM_0} = \infty \quad (4.3-8)$$

可见不论多低的频率，TM 型表面波都可传输。图 4.3-4 表示 TM_0 表面波的电场分布。这样，我们就只要设法避免 TE 型表面波的出现。



图 4.3-4 微带中最底型表面波的电场分布

2. 微带的分析方法

由于微带中的介质是混合介质系统，其传输模为非 TEM 模，因此其分析方法就不能象带状线那样，简单地按 TEM 模处理，用静态场方法求传输特性，与之相适应的分

析方法有很多。这些分析方法可归纳为三种，即准静态方法、色散模型法和全波分析法。准静态法是将微带中的传输模看成纯 TEM 模，用求结构的分布电容来求微带的特性参数。这种方法适用于较低的频率（低于 X 波段）。此时导体带宽度 W 和基片厚度 h 比介质中的波长小得多。色散模型法是计及高次模的影响，找出色散现象的规律，求出在各种微带尺寸和不同基片的 ϵ_r 情况下，微带线的相速 v_p 和特性阻抗 Z_0 与频率的关系。全波分析法则是把微带中的传输模按混合模来处理，用解波动方程边值问题的方法来求微带的色散特性与高次模的分布情况，即求微带的传播因数。每种方法中又有一些不同的方法。在本节中，我们主要介绍准静态方法。

准静态方法是把微带中的模当作 TEM 模来处理。由 2.3 节分析知，TEM 模的电场是一种二维位场，满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \psi = 0$$

可用解二维位场的方法来求解。但微带中的主模不是真正的 TEM 模，而是准 TEM 模，故用二维位场方法求解微带问题称为准静态法。

如上所述，准静态方法是把微带中的传输模式看成纯 TEM 模。这样，微带的两个主要特性参数：特性阻抗 Z_0 和相速度 v_p 就可用微带的分布电容表示为：

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{v_p C} \quad (4.3-9)$$

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.3-10)$$

式中， L 和 C 分别为微带的分布电感和分布电容， c 为真空中光速； ϵ_r 为介质的相对介电常数。

式 (4.3-9) 和 (4.3-10) 是对均匀介质而言。我们知道，一个极板面积为 A 、间距为 d 的平板电容器，若极板间的介质为空气时，其电容为

$$C_{01} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (4.3-11)$$

若极板间填充 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 的介质时，其电容为

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (4.3-12)$$

由此可得

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_{01}} \quad (4.3-13)$$

此式说明，介质的相对介电常数等于填充介质时的电容与充空气时电容之比。

对于微带的混合介质情况，若我们引入有效介电常数为 ϵ_r 的均匀介质来代替此混合介质，则有

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_{01}} \quad (4.3-14)$$

将式 (4.3-14) 代入式 (4.3-9) 和 (4.3-10)，则微带的特性阻抗和相速度可表示为

$$Z_0 = Z_{01} \left(\frac{C_{01}}{C} \right)^{1/2} \quad (4.3-15)$$

式中, C 为实际微带的分布电容; C_{01} 是以空气代替介质基片的微带结构(以下简称空气微带)的分布电容; $Z_{01} = 1/cC_{01}$ 为空气微带的特性阻抗; c 为真空中的光速。

这样, 用准静态方法求解微带的传输特性的问题就归结于求静电电容 C_{01} 和 C 。其方法有很多, 常用的是改进的保角变换法、谱域方法、积分方程法和有限差分法等。前一种是解析法, 后三种是数值计算法。下面分别加以介绍。

(1) 保角变换法

用保角变换方法分析微带的特性是基于 TEM 模的假设, 并认为导体是理想导体, 介质是均匀、无耗、各向同性的, 传输线沿 z 向均匀、无限长。由所采用的方法和选用的变换函数不同, 其解析结果不同。这里先介绍空气微带的特性阻抗求解方法, 空气微带虽然不是一种实用结构, 但却是分析的基础; 然后介绍使用较多的惠勒(Wheeler)的改正保角变换法。

a. 零厚度导体带空气微带特性阻抗的精确解

用保角变换法可以求得零厚度导体带空气微带特性阻抗的精确解析表示式。结果为

$$Z_{01} = 60 \pi \frac{K'(k)}{K(k)} \quad (4.3-16)$$

式中, $K(k)$ 和 $K'(k)$ 为第一类完全椭圆积分, k 为其模数。式(4.3-16)的推导见本节附录一。

式(4.3-16)不便使用, 实用中, 将式中的超越函数开展成幂级数形式, 得到

$$\left. \begin{aligned} Z_{01} &= 60 \ln \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{h}{W} \right)^n \quad (\Omega) \quad W \leq h \\ Z_{01} &= -\frac{120 \pi}{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left(\frac{W}{h} \right)^n} \quad (\Omega) \quad W \geq h \end{aligned} \right\} \quad (4.3-17)$$

式中级数项的 n 值决定计算精度。当精度要求 0.25%, $0 \leq W/h \leq 10$ 时, 近似式为

$$\left. \begin{aligned} Z_{01} &= 60 \ln \left(\frac{8h}{W} + \frac{W}{4h} \right) \quad (\Omega) \quad W \leq h \\ Z_{01} &= -\frac{120 \pi}{\frac{W}{h} + 2.42 - 0.44 \frac{h}{W} + \left(1 - \frac{h}{W} \right)^2} \quad (\Omega) \quad W \geq h \end{aligned} \right\} \quad (4.3-18)$$

当 $W/h > 10$ 时, 上式精度约为 1%。

图 4.3-5 是 Z_{01} 的图解曲线。当手头缺乏微带的数据表而精度要求不高时, 可用图 4.3-5 的曲线很方便地计算微带的特性阻抗。

b. 零厚度导体带空气微带特性阻抗的近似解

式(4.3-16)虽然精确, 但包含有椭圆函数, 使计算比较困难。由推导过程可知, 出现椭圆函数的原因是在多角形变换中出现了内转角为 $\pi/2$ 的情况, 于是在变换式分母中出现平方根所致。为了避免椭圆函数的出现, 可用近似方法, 即采用适当的近似使

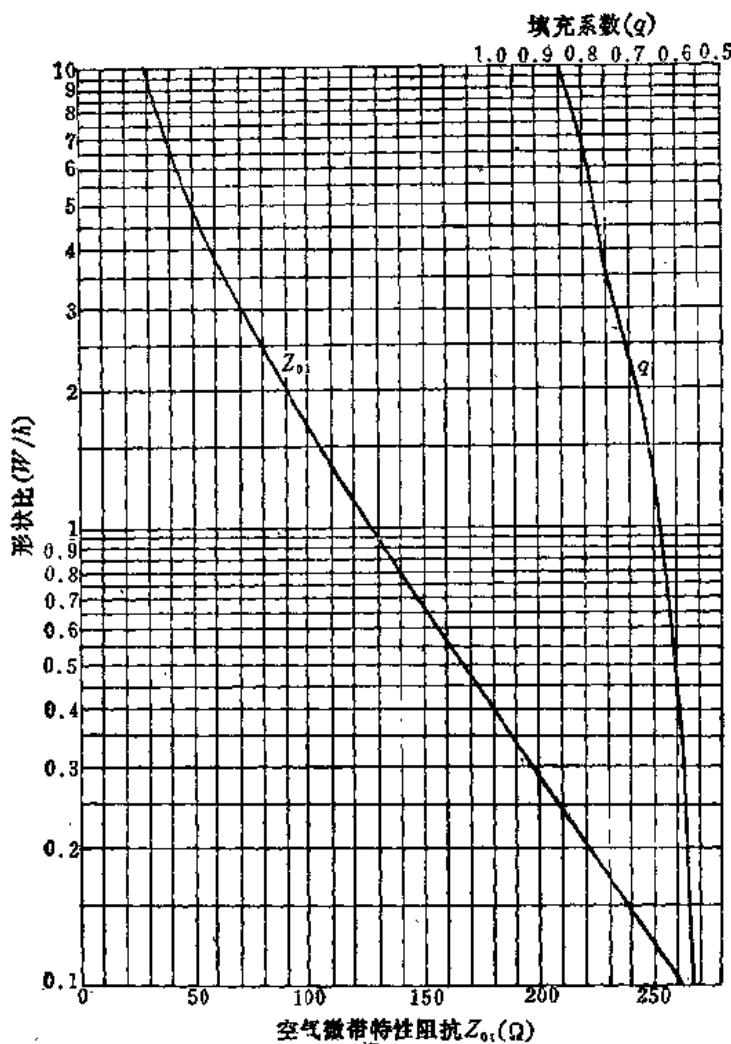


图 4.3-5 微带的分析和综合计算曲线

多角形的内转角为 π (或 2π)，使解能用初等函数形式表示。常用的近似方法有二：一是半无限大导体带法；另一是惠勒近似变换法。

i) 半无限大导体带法

此法是把微带的中心导体带视为半无限大，如图 4.3-6 所示，这样就可以忽略导体带另一边缘对带中间场分布的影响，由此求得变换函数后，取半无限大导体带的 $W/2$ 宽度所具有的分布电容乘以 2，即得到微带的分布电容，从而求得零厚度导体带微带特性阻抗的近似式为

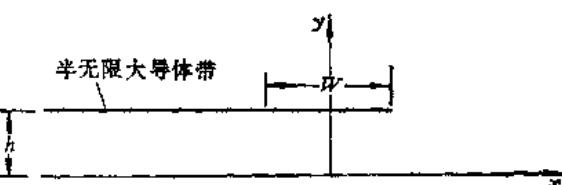


图 4.3-6 半无限大导体带法的近似结构

$$Z_{01} \approx 60\pi^2 \left[1 + \frac{\pi W}{2h} + \ln \left(1 + \frac{\pi W}{2h} \right) \right]^{-1} \quad (W/h \gg 1) \quad (4.3-19)$$

式 (4.3-19) 的推导留作练习 (习题 4-2)。

ii) 惠勒的近似变换法

半无限大导体带法忽略了导体带另一个边缘的影响，因而与真实的电场分布情况不相符，所得到的结果太粗糙。为了改进这一点，惠勒提出让半无限大导体带在适当位置切开，如图 4.3-7(a) 所示，令切口外边部分与接地板等电位，以保证导体带中心的电力线是一根垂直线，使导体带右半边的场与实际的场近似相同，于是得到如图 4.3-7(b) 所示 z 平面多角形，称之为第一页黎曼面；对导体带左半边也作类似的处理，得到第二页黎曼面。总的 z 平面多角形如图 4.3-7(c) 所示。然后应用许瓦兹变换，将 z 平面变换为 t 平面上的实轴及其上半无限区域，再应用许瓦兹变换将 t 平面实轴及其上半无限区域变换为 W 平面的矩形区域，具体来说，就是将第一页黎曼面上的多角形变换为 t 平面上的正实轴及其上半区域，将第二页黎曼面上的多角形变换为 t 平面上的负实轴及其上半区域，再把 t 平面正实轴变换为 W 平面右边的矩形区域，负实轴变换为左边的矩形区域，由此可得空气微带的分布电容，进而求得其特性阻抗。结果为

$$Z_{01} = 60 \pi \left[-\frac{W}{2h} + \frac{1}{h} \ln 2\pi e \left(\frac{W}{2h} + 0.94 \right) \right]^{-1} \quad (4.3-20)$$

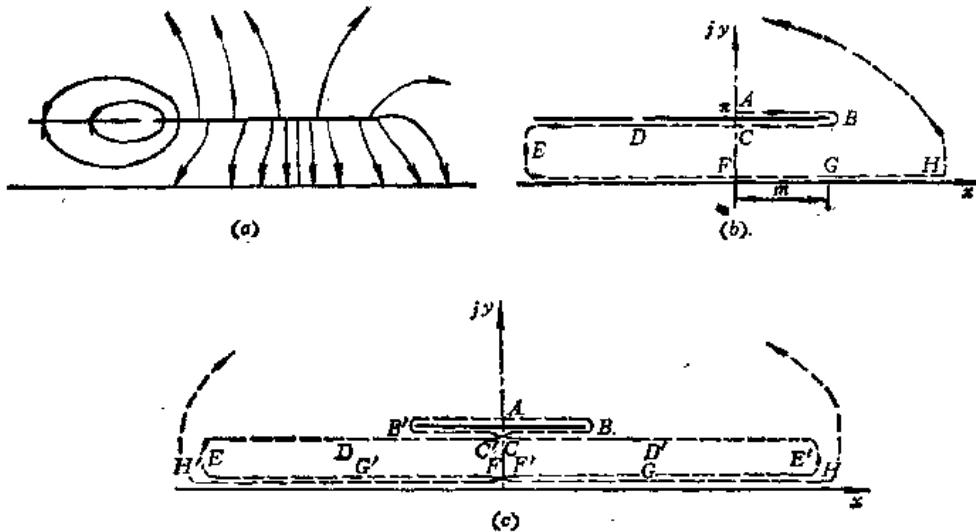


图 4.3-7 惠勒近似变换的 z 平面多角形
(a) 惠勒法的电力线分布；(b) 第一页黎曼面；(c) 总的 z 平面多角形。

上述惠勒近似变换结果是下述的惠勒有效介电常数法的基础。式 (4.3-20) 的推导见本节附录二。

c. 改进的保角变换法

目前，微带分析使用最多的是惠勒的有效介电常数法。这种方法又称为改进的保角变换法。它包括用保角变换法求 C_{01} 值和为求 C 而引入的“有效介电常数 ϵ_r' ”的概念。也就是说，这种方法是在空气微带的惠勒近似变换基础上，再应用有效介电常数概念。求 C_{01} 的保角变换方法与空气微带相同，即用函数

$$z = j\pi + d \operatorname{th}(z'/2) - z' \quad (4.3-21)$$

将微带的 z 平面变换到平板电容器的 W 平面，如图 4.3-8(a)、(b) 所示。式中参量 d 近似等于图 4.3-8(b) 中的 g' 。这里只画出了右半部分。 z 平面上的介质空气分界

线变换到W平面上为弧线①-③。z平面上的线③-⑨是一条电力线，其左边的电力线全部在介质基片内，其右边的电力线，有一部分分散在空气中，一部分在介质基片内，如③-⑧线。此条电力线③-⑨变换到W平面为③-⑨线。由图4.3-8(b)可见，③-⑨线左边的区域内有二种介质填充情况：①-③线上部为介质填充，下部为空气填充。为了计算平板电容方便起见，将此区域近似变成两个平板电容器区域，如图4.3-8(c)、(d)所示。最后我们用有效介电常数为 ϵ_e 的均匀介质来代替微带的混合介质，如图4.3-8(e)所示，并引入填充系数q，它等于介质所占区域 A_2 与整个矩形区域的面积

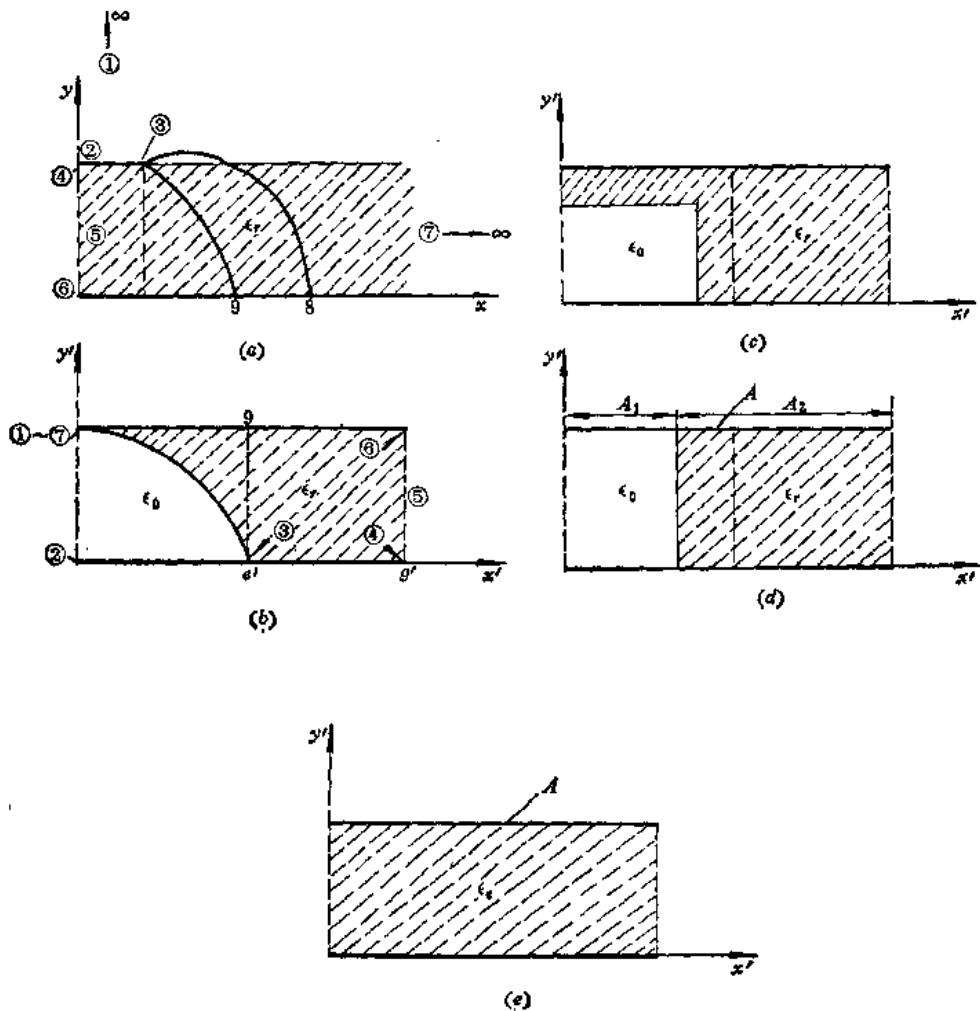


图4.3-8 惠勒的改进保角变换与 ϵ_e 的求值

比，即

$$q = \frac{A_2}{A} \text{ 或者 } A_2 = qA \quad (4.3-22)$$

两者的电容值应该相等，则有

$$\epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{qA}{d} + \epsilon_0 \frac{A - qA}{d} = \epsilon_0 [1 + (\epsilon_r - 1)q] \frac{A}{d}$$

式中d为极板之间的间距。由此可得有效介电常数与填充系数的关系式为

$$\epsilon_s = 1 + (\epsilon_r - 1) q \quad (4.3-23)$$

图 4.3-5 给出了 q 与形状比 W/h 的关系曲线⁽²⁴⁾。利用式 (4.3-23) 和图 4.3-5 所示曲线可以方便地求微带的特性阻抗，或根据特性阻抗求微带的尺寸。其误差小于 3%。综合计算的步骤如下：

- ① 一开始假设 $\epsilon_s \approx \epsilon_r$ ；
- ② 由下式计算空气微带特性阻抗：

$$Z_{01} \approx \sqrt{\epsilon_r} Z_0$$

据 Z_{01} 值由图 4.3-5 的曲线查得 q 值；

- ③ 按下式计算有效介电常数：

$$\epsilon_s = 1 + q(\epsilon_r - 1)$$

④ 将算得的 ϵ_s 值代替步骤②的 ϵ_r ，计算新的 Z_{01} 值，重复步骤②、③直至算出的 ϵ_s 前后两值之差在 1% 以内为止，则最后一个 ϵ_s 即为所求之有效介电常数；

⑤ 将求得的 ϵ_s 计算 $Z_{01} = \sqrt{\epsilon_s} Z_0$ ，此 Z_{01} 值在图 4.3-5 曲线上对应的 W/h 即为所求微带形状比；若 h 已知，则可求得导体带宽度 W 。

因为 q 是 A_2 与 A 之比，所以 q 与 ϵ_s 和形状比 W/h 有关。因此，为了求 q ，就需要画出 ϵ_s 与 ϵ_r 、 W/h 的关系曲线，再用某种函数去逼近，或用近似方法求得。结果得到宽导体带和窄导体带两种不同的 ϵ_s 表达式：

对于宽带 $\left(\frac{W}{h} > 2\right)$ ⁽¹⁰⁾，

$$q = 1 - \frac{1}{d} \ln \frac{d+c}{d-c} + \frac{0.732}{d\epsilon_r} \left[\ln \frac{d+c}{d-c} - \operatorname{arccch}(0.358d + 0.595) \right] \\ + \frac{\epsilon_r - 1}{d\epsilon_r} \left[0.386 - \frac{1}{2(d-1)} \right] \quad (4.3-24)$$

式中， $d = 1 + \sqrt{1+c^2}$ ，而 c 可由下式求得

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{W}{h} = c - \operatorname{arccch} c \quad (4.3-25)$$

对于窄带 ($W/h < 2$)，

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{\ln \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\epsilon_r} \ln \frac{4}{\pi}}{\ln \frac{8h}{W}} \quad (4.3-26)$$

根据 Z_{01} 、 ϵ_s 便可求得微带的特性阻抗如下：

对于宽带 $\left(\frac{W}{h} > 2\right)$ ，

$$Z_0 = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_r}} \left[\frac{W}{h} + 0.883 + \frac{\epsilon_r + 1}{\pi \epsilon_r} \left\{ \ln \left(\frac{W}{2h} + 0.94 \right) + 1.451 \right\} + 0.165 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r^2} \right]^{-1} \quad (4.3-27)$$

对于窄带 ($W/h < 2$)，

$$Z_0 = \frac{377}{2\pi \left(\frac{\epsilon_r + 1}{2} \right)^{1/2}} \left[\ln \left(\frac{8h}{W} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{W}{2h} \right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left\{ \ln \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\epsilon_r} \ln \frac{4}{\pi} \right\} \right] \quad (4.3-28)$$

如果给定特性阻抗，则导体带宽度 W 可由下列式子求得⁽¹¹⁾：

对于宽带 ($W/h > 2$)，

$$\begin{aligned} \frac{W}{2h} \pi &= -\frac{377\pi}{2(\epsilon_r)^{1/2} Z_0} - 1 - \ln \left\{ \frac{377\pi}{(\epsilon_r)^{1/2} Z_0} - 1 \right\} \\ &\quad + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left[\ln \left\{ \frac{377\pi}{2(\epsilon_r)^{1/2} Z_0} - 1 \right\} + 0.293 - \frac{0.517}{\epsilon_r} \right] \end{aligned} \quad (4.3-29)$$

对于窄带 ($W/h < 2$)，

$$\frac{2h}{W} = \frac{1}{4} e^{h'} - \frac{1}{2} e^{-h'} \quad \left. \right\} \quad (4.3-30)$$

式中

$$h' = \left(\frac{\epsilon_r + 1}{2} \right)^{1/2} \frac{Z_0}{60} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(0.226 + \frac{0.120}{\epsilon_r} \right)$$

用上述方法算得的微带特性阻抗和有效介电常数曲线如图 4.3-9 所示。由图可见，当 W/h 增大时，阻抗值下降。

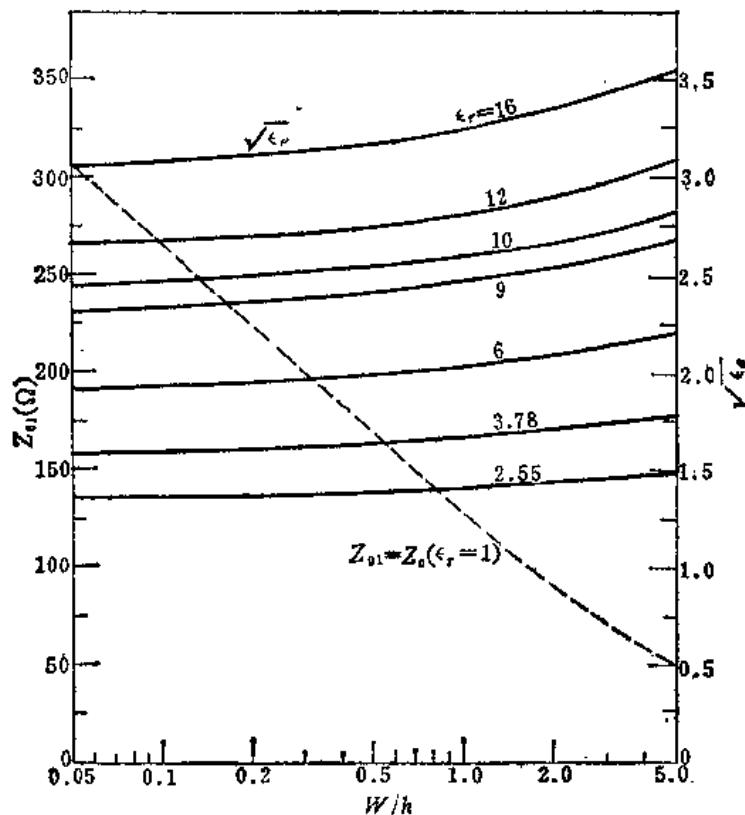


图 4.3-9 用惠勒法得到的 Z_0 和 ϵ_r 曲线

表 4.3-1 给出了用上述方法算得的部分数据，供设计计算参考。

表4.3-1 微带特性阻抗数据表

 $\epsilon_r = 2.22$

W/h	ϵ_r	Z_0	W/h	ϵ_r	Z_0
0.0500	1.6530	236.6581	2.5500	1.8850	56.5952
0.1000	1.6707	203.2641	2.6000	1.8871	55.9037
0.1500	1.6842	183.7372	2.6500	1.8892	55.2291
0.2000	1.6954	169.9053	2.7000	1.8913	54.5709
0.2500	1.7053	159.2016	2.7500	1.8933	53.9284
0.3000	1.7141	150.4811	2.8000	1.8953	53.3011
0.3500	1.7222	143.1322	2.8500	1.8973	52.6884
0.4000	1.7296	136.7894	2.9000	1.8992	52.0899
0.4500	1.7366	131.2169	2.9500	1.9011	51.5051
0.5000	1.7431	126.2536	3.0000	1.9030	50.9336
0.5500	1.7493	121.7843	3.0500	1.9049	50.3748
0.6000	1.7551	117.7241	3.1000	1.9067	49.8284
0.6500	1.7607	114.0085	3.1500	1.9086	49.2941
0.7000	1.7660	110.5871	3.2000	1.9103	48.7713
0.7500	1.7711	107.4201	3.2500	1.9121	48.2597
0.8000	1.7760	104.4755	3.3000	1.9139	47.7591
0.8500	1.7807	101.7268	3.3500	1.9156	47.2690
0.9000	1.7853	99.1524	3.4000	1.9173	46.7891
0.9500	1.7897	96.7338	3.4500	1.9189	46.3192
1.0000	1.7939	94.4557	3.5000	1.9206	45.8589
1.0500	1.7980	92.0765	3.5500	1.9222	45.4079
1.1000	1.8020	89.9390	3.6000	1.9238	44.9660
1.1500	1.8059	87.9428	3.6500	1.9254	44.5328
1.2000	1.8097	86.0701	3.7000	1.9270	44.1082
1.2500	1.8133	84.3063	3.7500	1.9286	43.6919
1.3000	1.8169	82.6388	3.8000	1.9301	43.2837
1.3500	1.8204	81.0573	3.8500	1.9316	42.8833
1.4000	1.8238	79.5527	3.9000	1.9331	42.4904
1.4500	1.8271	78.1174	3.9500	1.9346	42.1050
1.5000	1.8303	76.7449	4.0000	1.9361	41.7268
1.5500	1.8335	75.4296	4.0500	1.9375	41.3555
1.6000	1.8365	74.1666	4.1000	1.9389	40.9911
1.6500	1.8396	72.9516	4.1500	1.9404	40.6332
1.7000	1.8425	71.7811	4.2000	1.9417	40.2818
1.7500	1.8454	70.6517	4.2500	1.9431	39.9367
1.8000	1.8482	69.5608	4.3000	1.9445	39.5976
1.8500	1.8510	68.5058	4.3500	1.9459	39.2645
1.9000	1.8537	67.4846	4.4000	1.9472	38.9372
1.9500	1.8564	66.4952	4.4500	1.9485	38.6155
2.0000	1.8590	65.5357	4.5000	1.9498	38.2993
2.0500	1.8616	64.6047	4.5500	1.9511	37.9885
2.1000	1.8641	63.7008	4.6000	1.9524	37.6829
2.1500	1.8666	62.8225	4.6500	1.9537	37.3823
2.2000	1.8690	61.9687	4.7000	1.9549	37.0867
2.2500	1.8714	61.1383	4.7500	1.9562	36.7960
2.3000	1.8738	60.3303	4.8000	1.9574	36.5099
2.3500	1.8761	59.5437	4.8500	1.9586	36.2285
2.4000	1.8784	58.7777	4.9000	1.9598	35.9516
2.4500	1.8806	58.0315	4.9500	1.9610	35.6790
2.5000	1.8828	57.3042	5.0000	1.9622	35.4107

$\epsilon_r = 2.55$

W/h	ϵ_r	Z_0	W/h	ϵ_r	Z_0
0.0500	1.8297	224.9446	2.5500	2.1243	53.3112
0.1000	1.8521	193.0526	2.6000	2.1270	52.6561
0.1500	1.8692	174.4049	2.6500	2.1297	52.0171
0.2000	1.8835	161.1981	2.7000	2.1323	51.3936
0.2500	1.8960	150.9304	2.7500	2.1349	50.7850
0.3000	1.9073	142.6577	2.8000	2.1375	50.1909
0.3500	1.9175	135.6458	2.8500	2.1400	49.6107
0.4000	1.9270	129.5953	2.9000	2.1425	49.0440
0.4500	1.9358	124.2810	2.9500	2.1449	48.4903
0.5000	1.9441	119.5487	3.0000	2.1473	47.9492
0.5500	1.9520	115.2885	3.0500	2.1497	47.4203
0.6000	1.9594	111.4192	3.1000	2.1520	46.9031
0.6500	1.9665	107.8790	3.1500	2.1543	46.3973
0.7000	1.9732	104.6199	3.2000	2.1566	45.9025
0.7500	1.9797	101.6037	3.2500	2.1588	45.4185
0.8000	1.9859	98.7999	3.3000	2.1610	44.9447
0.8500	1.9919	96.1833	3.3500	2.1632	44.4810
0.9000	1.9977	93.7329	3.4000	2.1654	44.0270
0.9500	2.0033	91.4313	3.4500	2.1675	43.5824
1.0000	2.0087	89.2638	3.5000	2.1696	43.1470
1.0500	2.0139	87.0020	3.5500	2.1717	42.7204
1.1000	2.0190	84.9697	3.6000	2.1737	42.3024
1.1500	2.0239	83.0718	3.6500	2.1758	41.8928
1.2000	2.0287	81.2916	3.7000	2.1778	41.4913
1.2500	2.0333	79.6149	3.7500	2.1797	41.0976
1.3000	2.0379	78.0301	3.8000	2.1817	40.7116
1.3500	2.0423	76.5270	3.8500	2.1836	40.3330
1.4000	2.0466	75.0973	3.9000	2.1855	39.9616
1.4500	2.0508	73.7336	3.9500	2.1874	39.5973
1.5000	2.0549	72.4297	4.0000	2.1893	39.2397
1.5500	2.0589	71.1802	4.0500	2.1911	38.8888
1.6000	2.0628	69.9806	4.1000	2.1929	38.5443
1.6500	2.0667	68.8268	4.1500	2.1947	38.2061
1.7000	2.0704	67.7154	4.2000	2.1965	37.8740
1.7500	2.0741	66.6432	4.2500	2.1982	37.5479
1.8000	2.0777	65.6076	4.3000	2.2000	37.2275
1.8500	2.0812	64.6063	4.3500	2.2017	36.9128
1.9000	2.0847	63.6371	4.4000	2.2034	36.6035
1.9500	2.0881	62.6982	4.4500	2.2051	36.2996
2.0000	2.0914	61.7880	4.5000	2.2067	36.0009
2.0500	2.0947	60.9048	4.5500	2.2084	35.7072
2.1000	2.0979	60.0473	4.6000	2.2100	35.4185
2.1500	2.1010	59.2143	4.6500	2.2116	35.1347
2.2000	2.1041	58.4047	4.7000	2.2132	34.8555
2.2500	2.1071	57.6173	4.7500	2.2148	34.5809
2.3000	2.1101	56.8513	4.8000	2.2164	34.3107
2.3500	2.1131	56.1056	4.8500	2.2179	34.0450
2.4000	2.1160	55.3796	4.9000	2.2194	33.7834
2.4500	2.1188	54.6723	4.9500	2.2209	33.5261
2.5000	2.1216	53.9831	5.0000	2.2224	33.2728

$\epsilon_s = 3.80$

W/h	ϵ_s	Z_0	W/h	ϵ_s	Z_0
0.0500	2.4987	192.4864	2.5500	3.0311	44.6306
0.1000	2.5393	164.8740	2.6000	3.0360	44.0747
0.1500	2.5702	148.7323	2.6500	3.0408	43.5326
0.2000	2.5960	137.3060	2.7000	3.0455	43.0037
0.2500	2.6186	128.4711	2.7500	3.0502	42.4877
0.3000	2.6389	121.2793	2.8000	3.0548	41.9841
0.3500	2.6574	115.2241	2.8500	3.0593	41.4923
0.4000	2.6746	110.0025	2.9000	3.0638	41.0121
0.4500	2.6905	105.4192	2.9500	3.0682	40.5431
0.5000	2.7055	101.3403	3.0000	3.0725	40.0847
0.5500	2.7197	97.6706	3.0500	3.0768	39.6368
0.6000	2.7331	94.3395	3.1000	3.0810	39.1989
0.6500	2.7459	91.2935	3.1500	3.0852	38.7708
0.7000	2.7581	88.4909	3.2000	3.0893	38.3521
0.7500	2.7698	85.8987	3.2500	3.0934	37.9425
0.8000	2.7810	83.4902	3.3000	3.0974	37.5417
0.8500	2.7919	81.2436	3.3500	3.1013	37.1495
0.9000	2.8023	79.1408	3.4000	3.1052	36.7656
0.9500	2.8124	77.1666	3.4500	3.1090	36.3897
1.0000	2.8221	75.3083	3.5000	3.1128	36.0216
1.0500	2.8316	73.3728	3.5500	3.1166	35.6610
1.1000	2.8407	71.6332	3.6000	3.1203	35.3078
1.1500	2.8496	70.0091	3.6500	3.1239	34.9617
1.2000	2.8583	68.4859	3.7000	3.1276	34.6225
1.2500	2.8667	67.0518	3.7500	3.1311	34.2900
1.3000	2.8749	65.6964	3.8000	3.1346	33.9640
1.3500	2.8828	64.4114	3.8500	3.1381	33.6444
1.4000	2.8906	63.1895	3.9000	3.1416	33.3309
1.4500	2.8982	62.0243	3.9500	3.1450	33.0233
1.5000	2.9056	60.9105	4.0000	3.1483	32.7215
1.5500	2.9129	59.8436	4.0500	3.1517	32.4254
1.6000	2.9199	58.8196	4.1000	3.1549	32.1348
1.6500	2.9269	57.8350	4.1500	3.1582	31.8495
1.7000	2.9337	56.8868	4.2000	3.1614	31.5694
1.7500	2.9403	55.9725	4.2500	3.1646	31.2944
1.8000	2.9468	55.0896	4.3000	3.1677	31.0242
1.8500	2.9532	54.2362	4.3500	3.1708	30.7589
1.9000	2.9594	53.4105	4.4000	3.1739	30.4982
1.9500	2.9655	52.6109	4.4500	3.1769	30.2420
2.0000	2.9715	51.8358	4.5000	3.1799	29.9903
2.0500	2.9774	51.0841	4.5500	3.1829	29.7429
2.1000	2.9832	50.3545	4.6000	3.1858	29.4996
2.1500	2.9889	49.6459	4.6500	3.1887	29.2605
2.2000	2.9945	48.9574	4.7000	3.1916	29.0253
2.2500	3.0000	48.2880	4.7500	3.1945	28.7941
2.3000	3.0054	47.6369	4.8000	3.1973	28.5666
2.3500	3.0107	47.0034	4.8500	3.2001	28.3429
2.4000	3.0159	46.3867	4.9000	3.2028	28.1227
2.4500	3.0210	45.7860	4.9500	3.2056	27.9061
2.5000	3.0261	45.2009	5.0000	3.2083	27.6929

$\epsilon_r = 9.50$

W/h	ϵ_e	Z_0	W/h	ϵ_e	Z_0
0.0500	5.5498	129.1587	2.5500	7.1657	29.0269
0.1000	5.6729	110.3081	2.6000	7.1805	28.6588
0.1500	5.7667	99.2947	2.6600	7.1952	28.2999
0.2000	5.8451	91.5058	2.7000	7.2096	27.9500
0.2500	5.9137	85.4895	2.7500	7.2238	27.6086
0.3000	5.9753	80.5972	2.8000	7.2378	27.2755
0.3500	6.0315	76.4824	2.8500	7.2515	26.9505
0.4000	6.0835	72.9378	2.9000	7.2651	26.6331
0.4500	6.1319	69.8295	2.9500	7.2785	26.3232
0.5000	6.1774	67.0660	3.0000	7.2916	26.0205
0.5500	6.2204	64.5821	3.0500	7.3046	25.7247
0.6000	6.2611	62.3294	3.1000	7.3174	25.4357
0.6500	6.3000	60.2714	3.1500	7.3301	25.1531
0.7000	6.3370	58.3793	3.2000	7.3426	24.8769
0.7500	6.3726	56.6308	3.2500	7.3549	24.6067
0.8000	6.4067	55.0074	3.3000	7.3670	24.3425
0.8500	6.4396	53.4943	3.3500	7.3790	24.0839
0.9000	6.4712	52.0791	3.4000	7.3908	23.8309
0.9500	6.5018	50.7514	3.4500	7.4025	23.5833
1.0000	6.5314	49.5024	3.5000	7.4140	23.3408
1.0500	6.5601	48.2051	3.5500	7.4254	23.1033
1.1000	6.5879	47.0387	3.6000	7.4366	22.8708
1.1500	6.6149	45.9500	3.6500	7.4477	22.6430
1.2000	6.6411	44.9294	3.7000	7.4587	22.4198
1.2500	6.6667	43.9688	3.7500	7.4695	22.2010
1.3000	6.6915	43.0613	3.8000	7.4802	21.9866
1.3500	6.7157	42.2013	3.8500	7.4908	21.7764
1.4000	6.7394	41.3838	3.9000	7.5012	21.5702
1.4500	6.7624	40.6046	3.9500	7.5115	21.3681
1.5000	6.7849	39.8602	4.0000	7.5217	21.1697
1.5500	6.8069	39.1474	4.0500	7.5318	20.9752
1.6000	6.8284	38.4636	4.1000	7.5418	20.7842
1.6500	6.8494	37.8064	4.1500	7.5516	20.5969
1.7000	6.8700	37.1738	4.2000	7.5614	20.4129
1.7500	6.8902	36.5641	4.2500	7.5710	20.2324
1.8000	6.9099	35.9756	4.3000	7.5805	20.0550
1.8500	6.9293	35.4071	4.3500	7.5900	19.8809
1.9000	6.9482	34.8572	4.4000	7.5993	19.7098
1.9500	6.9668	34.3250	4.4500	7.6085	19.5418
2.0000	6.9851	33.8093	4.5000	7.6176	19.3767
2.0500	7.0030	33.3094	4.5500	7.6266	19.2144
2.1000	7.0205	32.8244	4.6000	7.6356	19.0549
2.1500	7.0378	32.3536	4.6500	7.6444	18.8982
2.2000	7.0548	31.8963	4.7000	7.6531	18.7440
2.2500	7.0714	31.4519	4.7500	7.6618	18.5925
2.3000	7.0878	31.0198	4.8000	7.6704	18.4435
2.3500	7.1039	30.5995	4.8500	7.6788	18.2969
2.4000	7.1198	30.1905	4.9000	7.6872	18.1527
2.4500	7.1353	29.7924	4.9500	7.6955	18.0108
2.5000	7.1507	29.4046	5.0000	7.7037	17.8712

$\epsilon_r = 10$					
W/h	ϵ_s	Z_0	W/h	ϵ_s	Z_0
0.0500	5.8174	126.1527	2.5500	7.5284	28.3190
0.1000	5.9478	107.7290	2.6000	7.5442	27.9597
0.1500	6.0470	96.9653	2.6500	7.5596	27.8094
0.2000	6.1301	89.3533	2.7000	7.5749	27.2677
0.2500	6.2028	83.4738	2.7500	7.5899	26.9345
0.3000	6.2680	78.6931	2.8000	7.6047	26.6094
0.3500	6.3275	74.6722	2.8500	7.6193	26.2920
0.4000	6.3825	71.2087	2.9000	7.6336	25.9823
0.4500	6.4338	68.1716	2.9500	7.6478	25.6797
0.5000	6.4820	65.4715	3.0000	7.6617	25.3842
0.5500	6.5275	63.0447	3.0500	7.6755	25.0955
0.6000	6.5706	60.8439	3.1000	7.6891	24.8134
0.6500	6.6117	58.8332	3.1500	7.7024	24.5376
0.7000	6.6510	56.9849	3.2000	7.7156	24.2680
0.7500	6.6886	55.2767	3.2500	7.7287	24.0043
0.8000	6.7247	53.6909	3.3000	7.7415	23.7464
0.8500	6.7595	52.2128	3.3500	7.7542	23.4940
0.9000	6.7931	50.8304	3.4000	7.7667	23.2470
0.9500	6.8255	49.5335	3.4500	7.7791	23.0053
1.0000	6.8568	48.3136	3.5000	7.7913	22.7686
1.0500	6.8872	47.0466	3.5500	7.8033	22.5369
1.1000	6.9166	45.9074	3.6000	7.8152	22.3099
1.1500	6.9452	44.8441	3.6500	7.8270	22.0876
1.2000	6.9730	43.8473	3.7000	7.8386	21.8697
1.2500	7.0000	42.9091	3.7500	7.8500	21.6562
1.3000	7.0263	42.0229	3.8000	7.8614	21.4469
1.3500	7.0520	41.1830	3.8500	7.8726	21.2417
1.4000	7.0770	40.3846	3.9000	7.8836	21.0405
1.4500	7.1014	39.6237	3.9500	7.8946	20.8432
1.5000	7.1252	38.8967	4.0000	7.9054	20.6497
1.5500	7.1485	38.2006	4.0500	7.9160	20.4598
1.6000	7.1713	37.5329	4.1000	7.9266	20.2735
1.6500	7.1935	36.8911	4.1500	7.9370	20.0906
1.7000	7.2153	36.2734	4.2000	7.9473	19.9111
1.7500	7.2367	35.6780	4.2500	7.9575	19.7349
1.8000	7.2576	35.1034	4.3000	7.9676	19.5618
1.8500	7.2780	34.5483	4.3500	7.9776	19.3919
1.9000	7.2981	34.0114	4.4000	7.9875	19.2249
1.9500	7.3178	33.4917	4.4500	7.9972	19.0609
2.0000	7.3371	32.9882	4.5000	8.0069	18.8998
2.0500	7.3561	32.5001	4.5500	8.0164	18.7414
2.1000	7.3747	32.0266	4.6000	8.0259	18.5858
2.1500	7.3930	31.5669	4.6500	8.0352	18.4328
2.2000	7.4109	31.1204	4.7000	8.0445	18.2824
2.2500	7.4286	30.6865	4.7500	8.0537	18.1345
2.3000	7.4459	30.2647	4.8000	8.0627	17.9891
2.3500	7.4630	29.8543	4.8500	8.0717	17.8460
2.4000	7.4797	29.4550	4.9000	8.0806	17.7053
2.4500	7.4962	29.0663	4.9500	8.0894	17.5669
2.5000	7.5125	28.6878	5.0000	8.0981	17.4307

(2) 用谱域方法求微带特性

如上所述，微带是混合介质系统，边界条件比较复杂，其内传输的模为非TEM模，难以用解析方法求解。在工程上，常采用数值法进行求解。随着电子计算机的发展和应用，数值解法得到了迅速发展和应用。用以求解微带特性的数值方法有谱域方法、积分方程法和有限差分法等。下面分别作简单介绍。

谱域方法现在愈来愈多地被用于波导边值问题的数值计算中。如3.1节所指出的，波导边值问题是求解二维本征值方程的问题。利用谱域技术可将二维问题化为一维问题，进而用变分法或矩量法进行数值计算，使问题求解简便。

谱域方法也特别适用于微带（包括耦合微带）特性的分析。

下面我们先叙述一下谱域方法的基本原理。

我们知道，微波传输线横截面上的位函数 ϕ 满足如下本征值方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + K_c^2 \phi = 0 \quad (4.3-31)$$

式中 K_c 为截止波数。假如 x 方向的边界是开放的，象微带那样，则当 $|x| \rightarrow \infty$ 时，应有 $\phi = 0$ 和 $\partial \phi / \partial x = 0$ 。

设 $\tilde{\phi}$ 为富里哀积分变换，则

$$\tilde{\phi}(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) e^{j\alpha x} dx \quad (4.3-32)$$

将式(4.3-32)代入式(4.3-31)，则得

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dy^2} + (K_c^2 - \alpha^2) \tilde{\phi} = 0 \quad (4.3-33)$$

这是一个一维常微分方程，其中 α 为连续谱数。

假如 x 轴方向的边界是闭合的（宽度设为 $2a$ ），则在 $|x|=a$ 处应有 $\phi=0$ ，而 $\partial \phi / \partial x \neq 0$ 。此时 α 应是离散谱数，用 α_n 表示之，且可分奇、偶模两种情况，对 ϕ 作有限富里哀积分变换：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{奇模} & \tilde{\phi}(\alpha_n, y) = \int_{-a}^a \phi(x, y) \sin \alpha_n x dx \\ \text{偶模} & \tilde{\phi}(\alpha_n, y) = \int_{-a}^a \phi(x, y) \cos \alpha_n x dx \end{array} \right\} \quad (4.3-34)$$

式中

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi / a & \text{奇模} \\ \alpha_n = n \pi / a & \text{偶模} \end{array} \right\}$$

将式(4.3-34)代入式(4.3-31)，则得到方程

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dy^2} + (K_c^2 - \alpha_n^2) \tilde{\phi} = 0 \quad (4.3-35)$$

此亦为一维常微分方程。式(4.3-33)和(4.3-35)的解分别为：

$$\tilde{\phi} = A_1 e^{\sqrt{\alpha_n^2 - K_c^2} y} + A_2 e^{-\sqrt{\alpha_n^2 - K_c^2} y} \quad (4.3-36)$$

$$\tilde{\phi} = B_1 e^{\sqrt{\alpha_n^2 - K_c^2} y} + B_2 e^{-\sqrt{\alpha_n^2 - K_c^2} y} \quad (4.3-37)$$

其中系数 A_1 、 A_2 或 B_1 、 B_2 可由边界条件确定。求得 $\tilde{\phi}$ 以后，就可用电容变分式⁽¹²⁾

$$-\frac{1}{C} = -\frac{1}{2\pi Q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(\alpha) \tilde{\phi}(\alpha, y) d\alpha \quad (4.3-38)$$

求得微带的分布电容，进而求得微带的特性阻抗。下面以屏蔽微带为例来加以说明。

图 4.3-10 表示屏蔽微带的截面，假定中心导体带厚度为零，导体和介质为无耗， z 向无限大；设导体带电位为 U ，屏蔽盒电位为零。微带中的电位应满足泊松方程 ($K_s = 0$)：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon} \quad (4.3-39)$$

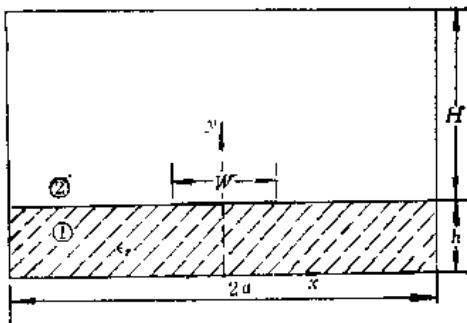


图 4.3-10 屏蔽微带的截面图

我们将式 (4.3-39) 化为谱域上来进行求解。设 ϕ 对中心轴对称，且在 $|x| = a$ 处， $\phi = 0$ ，则 ϕ 的富里哀积分变换为

$$\tilde{\phi}_i(\alpha_n, y) = \int_0^a \phi_i(x, y) \cos(\tilde{\alpha}_n x) dx, \quad i = 1, 2 \quad (4.3-40)$$

式中， $i = 1$ 表示在介质基片中， $i = 2$ 表示在空气中， $\tilde{\alpha}_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi/a$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

式 (4.3-39) 经富里哀变换后化为

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dy^2} - \tilde{\alpha}_n^2 \tilde{\phi} = \frac{\tilde{\rho}(\alpha_n)}{\epsilon} \quad (4.3-41)$$

式中 $\tilde{\rho}(\alpha_n)$ 是导体带上电荷分布 $\rho(x)$ 的富里哀变换。

考虑到 $y = 0$ 和 $h + H$ 处的边界条件，上式的解为

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_1(\alpha_n, y) = A_n \sinh(\tilde{\alpha}_n y) \\ \tilde{\phi}_2(\alpha_n, y) = B_n \sinh(\tilde{\alpha}_n (h + H - y)) \end{cases} \quad (4.3-42)$$

又在 $y = h$ 处有边界条件：

$$\Phi_1(x, h) = \Phi_2(x, h) \quad |x| < a$$

$$\Phi_1(x, h) = U \quad |x| < W$$

$$\epsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \quad W < |x| < a$$

$$\epsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \quad |x| < W$$

将这些条件进行富里哀变换，将式(4.3-42)代入后，消去 A_n 和 B_n ，得到

$$\tilde{G}(\alpha_n) \frac{\tilde{p}(\alpha_n)}{\epsilon_0} = \tilde{\Phi}_i(\alpha_n, h) + \tilde{\Phi}_0(\alpha_n, h) \quad (4.3-43)$$

式中 $\tilde{G}(\alpha_n)$ 为格林函数的富里哀变换，

$$\tilde{G}(\alpha_n) = \frac{1}{\tilde{\alpha}_n \operatorname{cth}(\tilde{\alpha}_n H) + \epsilon_0 \operatorname{cth}(\tilde{\alpha}_n h)} \quad (4.3-44)$$

式(4.3-43)是关于 \tilde{p} 和 $\tilde{\Phi}_0$ 的代数方程式。式中，

$$\tilde{\Phi}_i(\alpha_n, h) = \int_0^W U \cos(\tilde{\alpha}_n x) dx \quad (4.3-45a)$$

为已知，而

$$\tilde{\Phi}_0(\alpha_n, h) = \int_W^a \Phi_i(x, h) \cos(\tilde{\alpha}_n x) dx \quad (4.3-45b)$$

是未知的，但采用矩量法可在求解过程中加以消去，结果只需对 \tilde{p} 求解式(4.3-43)。

应用矩量法求解式(4.3-43)，即根据实际电荷分布形式选取展开函数 $\tilde{p}_m(\alpha_n)$ 来表示未知函数 \tilde{p}

$$\tilde{p}(\alpha_n) = \sum_{m=1}^M C_m \tilde{p}_m(\alpha_n) \quad (4.3-46)$$

式中 C_m 为待定系数，而 \tilde{p}_m 只在 $|x| < W$ 中可以使用函数 $\rho_m(x)$ 的富里哀变换。将式(4.3-36)代入式(4.3-43)，可以得到 C_m 的 M 个联立方程

$$b_s = \sum_{m=1}^M K_{sm} C_m \quad s = 1, 2, \dots, M \quad (4.3-47)$$

式中 b_s 和 K_{sm} 为已知，即

$$\begin{aligned} b_s &= \epsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_s(\alpha_n) (\tilde{\Phi}_i(\alpha_n) + \tilde{\Phi}_0(\alpha_n)) = \epsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_s(\alpha_n) \tilde{\Phi}_i(\alpha_n) \\ &= -\frac{a}{2} \epsilon_0 \int_0^a \Phi_i(x, h) \rho_s(x) dx = -\frac{a}{2} \epsilon_0 U \int_0^W \rho_s(x) dx \end{aligned} \quad (4.3-48)$$

$$K_{sm} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_s(\alpha_n) \tilde{G}(\alpha_n) \tilde{p}_m(\alpha_n) \quad (4.3-49)$$

因为 ρ_s 在 $W < |x| < a$ 中为零，所以含有 $\tilde{\Phi}_0$ 的项被消去。

设 $U = 1$ V，则解式(4.3-43)求得 C_m ，则图4.3-10所示屏蔽微带分布电容为

$$C = 2 \sum_{m=1}^N C_m \int_0^W \rho_m(x) dx = -\frac{4}{a} \sum_{m=1}^N b_m C_m \quad (4.3-50)$$

此为一变分表示式。据此式可用数值计算法求得 C ，从而可求得微带的特性阻抗。

(3) 积分方程法

求解微带特性的积分方程法又称为格林函数法。

由电磁场理论知，微带的分布电容 C 与导体带上单位长度电荷 Q 、导体之间的电压 U 有如下关系：

$$C = \frac{Q}{U} \quad (4.3-51)$$

而电压 U 是给定的，因此求分布电容 C 的问题就归结于求导体带上的电荷分布。这个问题的一种解法是，先写出用电荷密度 ρ 表示电位的公式，再解此式从而求得电荷分布函数 ρ 。

我们知道，单位点电荷（为线电荷分布）（坐标为 x_0, y_0 ）在空间任一点（坐标为 x, y ）产生的电位称为格林函数，用 $G(x, y; x_0, y_0)$ 表示。它满足如下泊松方程

$$\nabla_x^2 G(x, y; x_0, y_0) = -\frac{1}{\epsilon} \delta(y - y_0) \delta(x - x_0) \quad (4.3-52)$$

及相应的边界条件。求得格林函数 G 以后，则任意电荷分布在 (x, y) 点产生的电位为

$$\Phi(x, y) = \int G(x, y; x_0, y_0) \rho(x_0, y_0) dx_0 \quad (4.3-53)$$

式中 $\rho(x_0, y_0)$ 表示导体带上的电荷分布。上式积分在 $y_0 = h$ 的导体带表面上计算。因此问题的求解可分两部分，一是求适当的格林函数 G ，二是将积分方程变成矩阵方程进行求解。相应于式 (4.3-53) 的矩阵方程为

$$[U] = [P][Q] \quad (4.3-54)$$

式中 $[U]$ 和 $[Q]$ 是列矩阵， $[P]$ 是方阵。导体上的电位是给定的，因此 $[U]$ 是已知的，于是由式 (4.3-54) 用求 $[P]$ 的逆矩阵方法可求得 $[Q]$ ，即

$$[Q] = [P]^{-1}[U] = [D][U] \quad (4.3-55)$$

假如导体带上的电位为 1 V，则整个导体带上单位长度电荷为

$$Q = \sum_{j=1}^N q_j = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N D_{ji}$$

微带的分布电容则为

$$C = Q/U = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N D_{ji} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (P^{-1})_{ji} \quad (4.3-56)$$

式中 $(P^{-1})_{ji}$ 是矩阵 $[P]$ 的逆矩阵的第 j 行第 i 列元素。

而微带结构的格林函数 G 可用放置在介质-空气分界面前面的一电荷的镜象原理求得，如图 4.3-11 所示。在此图中，由介质镜象原理可得到反射系数为

$$\Gamma = (1 - \epsilon_r)/(1 + \epsilon_r) \quad (4.3-57)$$

图 4.3-11 所示结构的格林函数可表示为¹⁸³

$$G(h, x) = \frac{1}{2\pi(\epsilon_r + 1)\epsilon_0} \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma^{n-1} \ln \frac{\left[4n^2 + \left(\frac{x-x_0}{h} \right)^2 \right] \left[4n^2 + \left(\frac{x+x_0}{h} \right)^2 \right]}{\left[4(n-1)^2 + \left(\frac{x-x_0}{h} \right)^2 \right] \left[4(n-1)^2 + \left(\frac{x+x_0}{h} \right)^2 \right]} \right\} \quad (4.3-58)$$

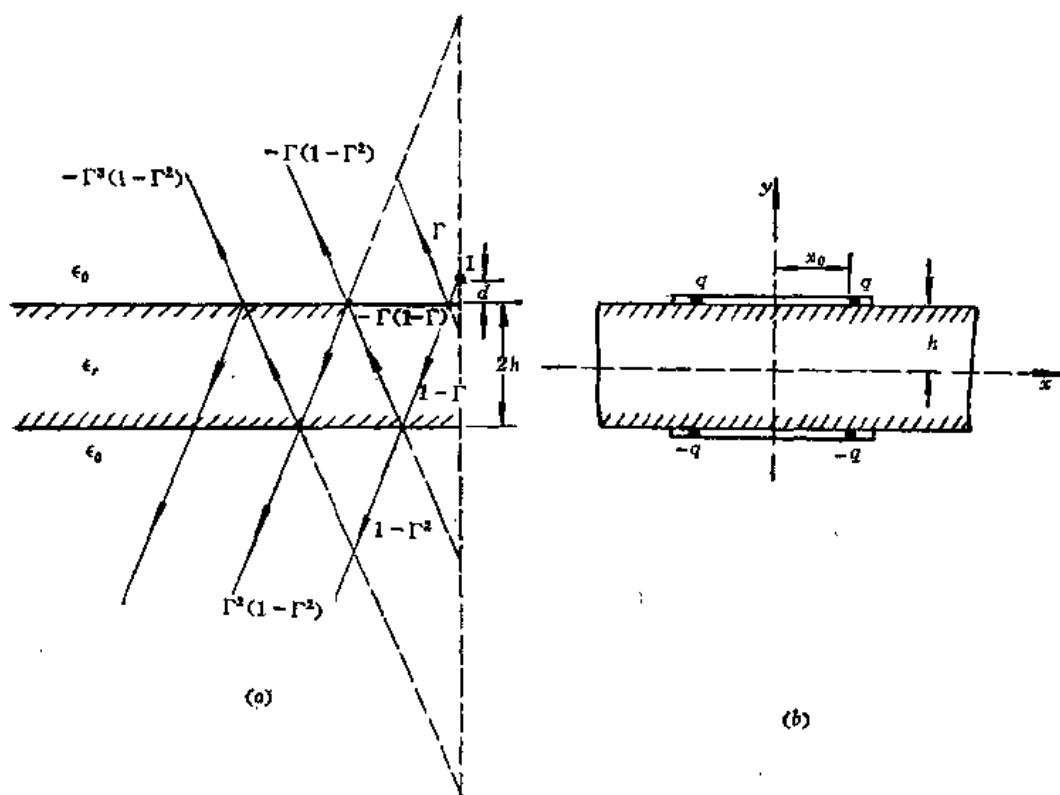


图4.3-11 格林函数法求微带电容用图
(a) 介质板前线电荷的多重镜象; (b) 微带的镜象。

由于 Γ 为小于 1 的负数, 所以式 (4.3-58) 为一收敛级数。计算结果表明, ϵ_r 在 2 和 20 之间, 取 15 到 150 项就可获得良好的精度。

用这种格林函数法也可以计算厚导体带微带和耦合微带的特性。

(4) 有限差分法

有限差分法又称渐近法, 是用电子计算机求解拉普拉斯方程的一种典型方法。顾名思义, 渐近法就是逐步近似法, 实质上就是将原来以连续变量形式的位场方程式, 结合具体边界条件, 化为以离散变量形式的差分方程组求解, 以求得各离散点上位函数的数值解。由于差分方程是位场偏微分方程的近似表示式, 所以有限差分法是一种近似解法。显然, 离散点分布越密, 其数值解越逼近该点位函数的真值, 但相应的所需计算时间也越长。在工程计算中, 一般是根据所要求的精度选择适当的离散点分布密度。为了计算方便, 通常总是使离散点按一定规律分布, 其中最常用的是将场域分割成许多矩形或正方形网格 (或称网孔)。所以有限差分法又称网格法 (或网孔法)。场域中网格的交点通常叫做节点, 网格线与边界线的交点叫做边界节点, 各个节点的位函数即为待求的未知量。计算时, 将网格点上的电位同周围节点的电位相比较进行一次修正, 然后依次类推逐步提高精度。因此, 有限差分法的基本内容主要包括三方面: 差分方程的形成、边界条件的处理和方程组的求解。

这种方法更适合于屏蔽式微带。如图 4.3-12 所示屏蔽微带截面, P 点周围四点的电位可用 P 点的电位来展开:

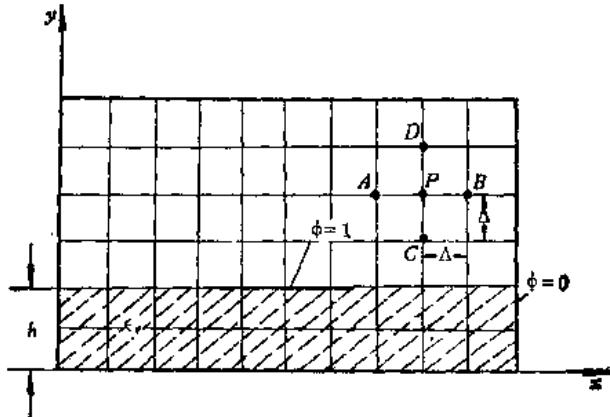


图 4.3-12 用有限差分法分析的屏蔽微带结构

$$\left. \begin{aligned} \Phi_A &= \Phi_P - \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \dots \\ \Phi_B &= \Phi_P + \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \dots \\ \Phi_C &= \Phi_P - \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \dots \\ \Phi_D &= \Phi_P + \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.3-59)$$

忽略四阶以上的项并应用拉普拉斯方程 ($\partial^2 \Phi / \partial x^2 + \partial^2 \Phi / \partial y^2 = 0$)，得到差分方程：

$$\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C + \Phi_D \approx 4\Phi_P \quad (4.3-60)$$

解差分方程 (4.3-60) 最常用的方法是张弛法，即逐次近似法。首先假设一组初始值，然后逐次加以修正：

$$\Phi_P|_{\text{新值}} = \Phi_P|_{\text{旧值}} - \alpha R_P \quad (4.3-61)$$

式中“余项” R_P 为

$$R_P = \Phi_P - (\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C + \Phi_D) / 4 \quad (4.3-62)$$

逐次近似到新值和旧值的差小于某一允许误差为止。这种逐次近似的收敛速率取决于常数 α 。关系 (4.3-62) 对于介质-空气边界附近和周角上的节点需要修正。有关这种方法的详细讨论可参考文献 [14]。用上述方法可求得微带截面内电位分布，进而可计算导体带的电荷与截面内场分布。而电荷为

$$Q = \epsilon \oint_S E_n \cdot ds \quad (4.3-63)$$

积分围绕着导体带表面计算。由电荷与电压的比即可求得分布电容 C_{01} 和 C ，从而可求得微带的特性阻抗。

3. 有限导体带厚度的修正

上面介绍了几种求解微带特性阻抗的准静态方法，所得到的结果多数是假定导体带厚度为零得到的，例如式 (4.3-27)~(4.3-30)。这些结果，在 $t/h \leq 0.005$ ， $2 \leq \epsilon \leq 10$ 和 $0.1 \leq W/h \leq 5$ 的条件下，与实验结果相当一致。但导体带厚度更大时，这些结果就不再适用了。

考虑到导体带的厚度 t 时, 上述零厚度公式可以用有效导体带宽度 $W_e (=W + \Delta W)$ 代替宽度 W 来加以修正。 W_e 的表示式为⁽¹⁵⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{W_e}{h} &= \frac{W}{h} + \frac{\Delta W}{h} \\ \frac{\Delta W}{h} &= \begin{cases} \frac{1.25}{\pi} \frac{t}{h} \left(1 + \ln \frac{4\pi W}{t} \right) & \left(\frac{W}{h} \leq \frac{1}{2\pi} \right) \\ \frac{1.25}{\pi} \frac{t}{h} \left(1 + \ln \frac{2h}{t} \right) & \left(\frac{W}{h} \geq \frac{1}{2\pi} \right) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.3-64)$$

4. 相速度和波导波长

引入有效介电常数 ϵ_e 之后, 微带中波的相速度可表示为

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_e}} \quad (4.3-65)$$

式中 c 为光速。

微带的波导波长 (或称微带波长) 则为

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_e}} \quad (4.3-66)$$

式中 λ_0 为自由空间波长。需要指出注意的是, 由于 ϵ_e 与 W/h 有关, 如图 4.3-9 所示, 所以 λ_g 是 W/h 的函数, 也就是 Z_0 的函数。因此不同阻抗的微带线的长度不同, 例如 25Ω 的 $\lambda/4$ 线段的长度与 100Ω 的 $\lambda/4$ 线段的长度是不同的。这一点在微带电路的设计时应当牢记。

5. 损耗与衰减因数

微带的损耗包括介质损耗和导体损耗, 由损耗引起的波的衰减因数为

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_s \quad (4.3-67)$$

式中, α_d 为介质的衰减因数, α_s 为导体的衰减因数。下面分别加以讨论。

(1) 介质衰减因数

介质损耗是由介质的漏电导引起的, 而微带是部分填充介质。如果不考虑空气的损耗, 则微带的介质损耗是由单位长度有效漏电导 G_e 引起的, 于是

$$\begin{aligned} \alpha_d &= \frac{1}{2} Z_0 G_e = \frac{1}{2} Z_0 q G = \frac{\pi \epsilon_r}{\sqrt{\epsilon_e}} \frac{\epsilon_e - 1}{\epsilon_r - 1} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\lambda_0} \quad (\text{Np/m}) \\ &= 27.3 \frac{\epsilon_r}{\sqrt{\epsilon_e}} \frac{\epsilon_e - 1}{\epsilon_r - 1} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\lambda_0} \quad (\text{dB/m}) \end{aligned} \quad (4.3-68)$$

例4.3-1 求氧化铝陶瓷 ($\epsilon_r = 9.5$) 作衬底的 50Ω 微带的单位长度介质衰减, 设工作频率为 6400MHz 。

解 氧化铝陶瓷的 $\operatorname{tg} \delta$ 约为 0.0001 , 由表 4.3-1 查得 $\epsilon_e \approx 6.52$, 而 $\lambda_0 = 3 \times 10^{10} / 6400 \times 10^6 = 4.6875\text{cm}$, 代入式 (4.3-68) 算得 $\alpha_d \approx 0.00139\text{dB/cm}$ 。可见介质损耗很小。

(2) 导体衰减因数

和带状线一样，微带的导体衰减因数可用增量电感方法求得。对于导体带和接地板为同一种金属材料的微带，其导体衰减因数可求得为^[16]：

当 $W/h \leq \frac{1}{2\pi}$ 时，

$$\alpha_s = \frac{8.68R_s}{2\pi Z_0 h} \left[1 - \left(\frac{W_e}{4h} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{h}{W_e} + \frac{h}{\pi W_e} \left(\ln \frac{4\pi W}{t} + \frac{t}{W} \right) \right] \quad (\text{dB/cm}) \quad (4.3-69 \text{ a})$$

当 $\frac{1}{2\pi} < \frac{W}{h} \leq 2$ 时，

$$\alpha_s = \frac{8.68R_s}{2\pi Z_0 h} \left[1 - \left(\frac{W_e}{4h} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{h}{W_e} + \frac{h}{\pi W_e} \left(\ln \frac{2h}{t} - \frac{t}{h} \right) \right] \quad (\text{dB/cm}) \quad (4.3-69 \text{ b})$$

当 $W/h \geq 2$ 时，

$$\alpha_s = \frac{8.68R_s}{Z_0 h \left\{ \frac{W_e}{h} + \frac{2}{\pi} \ln \left[2\pi e \left(\frac{W_e}{2h} + 0.94 \right) \right] \right\}^2} \cdot \left[\frac{W_e}{h} + \frac{W_e/\pi h}{\frac{W_e}{2h} + 0.94} \right] \\ \cdot \left\{ 1 + \frac{h}{W_e} + \frac{h}{\pi W_e} \left(\ln \frac{2h}{t} - \frac{t}{h} \right) \right\} \quad (\text{dB/cm}) \quad (4.3-69 \text{ c})$$

式中， R_s 为导体材料的表面电阻， W 为零厚度导体带宽度， W_e 为有限厚度导体带的有效宽度。

$$W_e = W + \Delta W \quad (4.3-70)$$

由式 (4.3-69) 可见，当特性阻抗一定时，微带的导体损耗与基本厚度成反比，与频率的平方根成正比。图 4.3-13 表示由式 (4.3-69) 求得的三种 t/h 值的导体衰减与形状比 W/h 的关系曲线，其纵坐标为 $\alpha_s Z_0 h / R_s$ ，横坐标为 W/h 。由图可见，在所计算的范围内， α_s 随 t/h 的变化很小。

例 4.3-2 求陶瓷基片 ($\epsilon_r = 9.5$, $h = 1 \text{ mm}$) 上， t/h 为 0.01， Z_0 为 50Ω 微带的铜导体衰减，设工作频率为 6400 MHz 。

解 由表 4.3-1 查得 Z_0 为 50Ω 的 $W/h \approx 1$ ，则由图 4.3-13 曲线查得 $\alpha_s Z_0 h / R_s \approx 4.7$ 。由表 4.1-2 查得铜的表面电阻 $R_s = 2.6 \times 10^{-7} \sqrt{f}$ ，因此

$$\alpha_s = \frac{4.7 R_s}{Z_0 h} = \frac{4.7 \times 2.6 \times 10^{-7} \sqrt{6400 \times 10^6}}{50 \times 0.1} = 0.0196 \quad (\text{dB/cm})$$

与例 4.3-1 的介质衰减相比较可以看出，导体衰减比介质衰减大得多。

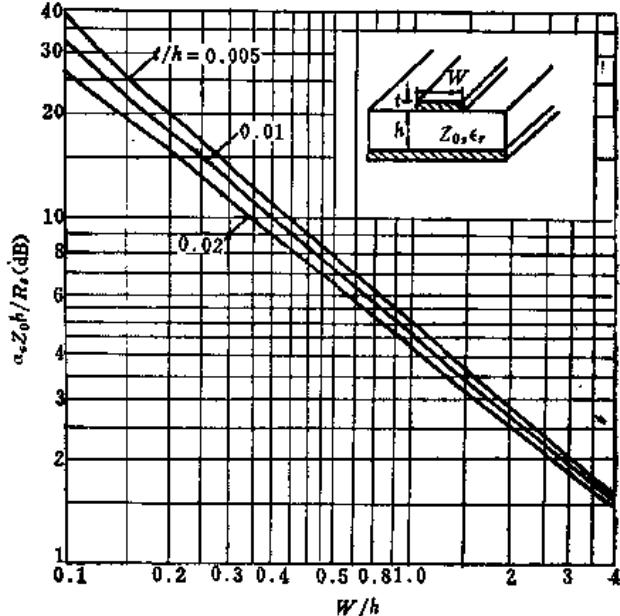


图 4.3-13 微带的理论导体衰减曲线

6. 微带的色散特性与尺寸选择

(1) 色散特性

从根本上说，由于微带中的传输模是混合模，因此微带中波的传播速度将随频率而变化，表现为 Z_0 和 ϵ_e 将随频率变化。这就是微带的色散特性。不过，上述 Z_0 和 ϵ_e 公式是假定微带的传输模为TEM模，用准静态方法得到的。在频率较低时，这样处理结果的近似程度很好；但在频率较高时，就不正确了。实际上，频率越高，相速越小， ϵ_e 越大， Z_0 越低。

微带的色散特性可以用实验方法，也可以用理论方法进行分析，找出色散现象的规律，求出在微带尺寸和基片的 ϵ_r 一定的条件下，微带的相速度 v_p 、特性阻抗 Z_0 、有效介电常数 ϵ_e 等与频率的关系。微带的色散问题是个多波型、复杂边界条件下的电磁场问题，理论求解过程很复杂。这里只作点定性说明，并给出简单的近似计算结果。

容易理解，随着频率的升高，场更集中于介质基片内，因此我们可以定义一个与频率有关的有效介电常数 $\epsilon_e(f)$ 。显然，随频率的升高， $\epsilon_e(f)$ 增大，波的传播速度 v_p 则减小。按照式(4.3-10)，则有

$$\epsilon_e(f) = \left[\frac{c}{v_p(f)} \right]^2 \quad (4.3-71)$$

所以微带的色散问题基本上是求解微带场的速度 $v_p(f)$ 的问题。由式(4.3-71)可以看出，在低频时， $\epsilon_e(f)$ 变成静态TEM模的值，而当频率无限增高时， $\epsilon_e(f)$ 趋近于基片的相对介电常数，即有

$$\epsilon_e(f) \rightarrow \begin{cases} \epsilon_r & \text{当 } f \rightarrow 0 \text{ 时} \\ \epsilon_r & \text{当 } f \rightarrow \infty \text{ 时} \end{cases}$$

$\epsilon_e(f)$ 随频率的变化曲线如图4.3-14所示。

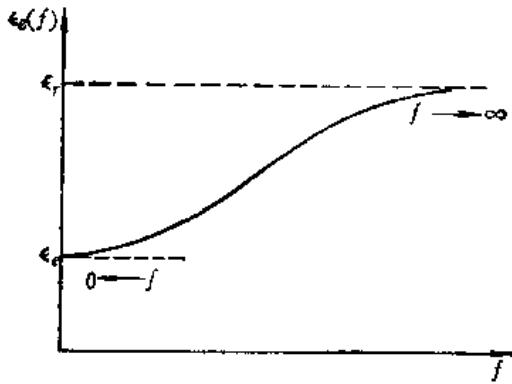


图4.3-14 有效介电常数随频率的变化曲线

分析表明，在 $2 < \epsilon_r < 10$ ， $0.9 \leq W/h \leq 13$ 和 $0.5 \text{ mm} \leq h \leq 3 \text{ mm}$ 的条件下，微带的有效介电常数近似按下式随频率变化：

$$\epsilon_e(f) = 3 \times 10^{-6} (1 + \epsilon_r)(\epsilon_r - 1) h \left[Z_0 \frac{W_e}{h} \right]^{1/2} (f - f_0) + \epsilon_r \quad (4.3-72)$$

式中， Z_0 和 ϵ_r 是不考虑色散时的特性阻抗和有效介电常数， W_e 是考虑导体厚度的导体带有效宽度； f 为工作频率，以GHz为单位； f_0 为一固定频率值，在此频率以下，色散特性可以忽略。 f_0 由下式决定：

$$f_0 = \frac{0.95}{(\epsilon_r - 1)^{1/4}} \sqrt{\frac{Z_0}{h}} \quad (\text{GHz}) \quad (4.3-73)$$

式中 h 以 mm 为单位。

当 $W/h > 4$ 时, 式 (4.3-72) 应修正为

$$\epsilon_s(f) = 3 \times 10^{-6} (1 + \epsilon_r) (\epsilon_r - 1) \left(\frac{Z_0}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{W}{h} \right) (f - f_0) + \epsilon_s \quad (4.3-74)$$

例如对于 ϵ_r 为 9.9, h 为 1 mm 的陶瓷基片上的 50Ω 微带线, 由式 (4.3-73) 算得 f_0 近似为 4 GHz。因此, 当频率低于 4 GHz 时, 色散特性的影响可以忽略; 而当频率高于 4 GHz, 例如工作在 X 波段, 就必须考虑色散的影响。

色散特性对微带电路的性能影响很大。计算和测量结果表明, 到 X 波段, 有效介电常数 $\epsilon_s(f)$ 比不考虑色散特性的值要高 10% 左右, 这样, v_p 和 Z_0 都要比不考虑色散的值低 5% 左右。因此在设计频率比较高的微带电路时, 必须考虑色散效应的修正问题。

(2) 微带的尺寸选择

根据本节开头对微带中模式的分析可知, 为防止高次模的出现, 微带的尺寸应满足如下条件

$$\left. \begin{aligned} 2W + 0.8h &< \frac{\lambda_{min}}{\sqrt{\epsilon_r}} \\ h &< \frac{\lambda_{min}}{2\sqrt{\epsilon_r}} \end{aligned} \right\} \quad (4.3-75)$$

式中 λ_{min} 为最短工作波长。

另外, 分析表明, 在如下频率上, 准 TEM 模与最低型表面波之间出现强烈耦合^[17]:

$$f_T = \frac{c}{2\pi h} \sqrt{\frac{2}{\epsilon_r - 1}} \operatorname{arctg}(\epsilon_r) \quad (4.3-76)$$

对于 $\epsilon_r > 10$, 上式简化为

$$f_T = \frac{10.6}{h \sqrt{\epsilon_r}} \quad (\text{GHz}) \quad (4.3-77)$$

式中 h 的单位用厘米。由此可见, 当 h 和 ϵ_r 增大时, 微带的最高工作频率 f_T (或称截止频率) 减小。计算表明, 基片 ϵ_r 为 9.7 的微带电路, 基片的厚度适用范围为:

对于 2 GHz, $0.23 \leq h \leq 1.8$ cm;

对于 10 GHz, $0.01 \leq h \leq 0.36$ cm;

对于 20 GHz, $0.01 \leq h \leq 0.17$ cm。

微带电路的损耗和 Q 值还受到不连续性辐射损耗的限制。为了防止辐射, 可以加封装。封装盒的高度 H 应当大于 $(3 \sim 5)h$ 。为了减小封装盒对电磁波的反射, 影响电路性能, 可在封装盒盖的内壁上涂以吸收材料。

附录一 零厚度导体带空气微带特性阻抗的求解

用保角变换方法可以求得零厚度中心导体带空气微带特性阻抗的精确解。方法是先

将微带的接地板去掉，代之以中心导体带的镜象，变成对称的宽面耦合带线，如图 4.3 A-1(a) 所示。取其虚折线①~⑧作为 z 平面上的一个多角形，应用许瓦兹-克利斯托夫 (Schwarz-Christoffel) 积分将其变换到 t 平面实轴上，如图 (b) 所示。再把 t 平面上的上半平面变换到 W 平面上的矩形区，如图 (c) 所示，则空气微带单位长度电容即可由此矩形区的对应坐标求得。

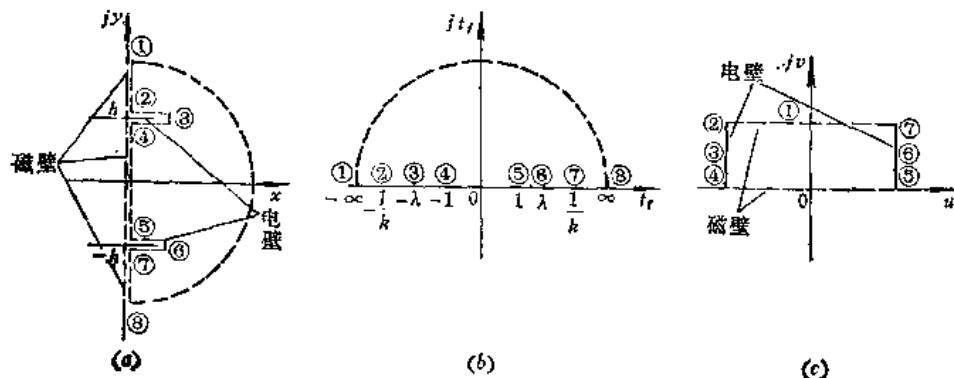


图 4.3A-1 求空气微带分布电容所用的变换

(a) z 平面; (b) t 平面; (c) W 平面。

1. z 平面至 t 平面的变换

此两平面对应点的位置及 z 平面上各顶点的内转角列于表 4.3A-1 中，其中 k 为小于 1 的实数， λ 是大于 1 的实数，都是待定的。在 t 平面上， 1 、 0 、 ∞ 是选定的三个定点值。

根据许瓦兹-克利斯托夫变换式，得到

表 4.3A-1 z 平面和 t 平面对应点位置与内转角 α

顶点号码 i	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	$j\infty$	jh	$\frac{W}{2} + jh$	jh	$-jh$	$\frac{W}{2} - jh$	$-jh$	$-j\infty$
t_i	$-\infty$	$-\frac{1}{k}$	$-\lambda$	-1	1	λ	$\frac{1}{k}$	∞
α_i	2π	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	2π

$$z = C \int_0^t \frac{(t+\lambda)(t-\lambda)dt}{\sqrt{(t+1)(t-1)\left(t+\frac{1}{k}\right)\left(t-\frac{1}{k}\right)}} = \frac{C}{k} \int_0^t \frac{k^2(t^2-\lambda^2)dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

(4.3A-1)

这是一个不能用初等函数表示的积分，称为椭圆积分。事实上，先将分子分成两部分，再令 $t = \sin \varphi$ ，得到

$$\begin{aligned}
z &= -\frac{C}{k} \int_0^t \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt + \frac{C(1-k^2\lambda^2)}{k} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}} \\
&= -\frac{C}{k} \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi + \frac{C(1-k^2\lambda^2)}{k} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}
\end{aligned} \quad (4.3A-2)$$

式中第二个积分即第一类椭圆积分 $F(\varphi, k)$, 第一个积分即第二类椭圆积分 $E(\varphi, k)$, 两者的模数都是 k 。因此上式可写成

$$z = -\frac{C}{k} [E(\varphi, k) - (1-k^2\lambda^2)F(\varphi, k)] \quad (4.3A-3)$$

式中, $\varphi = \arcsin t$; C 、 k 、 λ 是三个待定常数, 可由②、③、④或⑤、⑥、⑦三个点的 z 和 t 的对应值代入上式求得。

将 $z_6 = -jh$, $t_6 = 1$ (即 $\varphi = \pi/2$) 代入式 (4.3A-3), 并注意到当 $\varphi = \pi/2$ 时, $E(\varphi, k)$ 成为第二类完全椭圆积分 $E(k)$, $F(\varphi, k)$ 则成为第一类全椭圆积分 $K(k)$ 。于是得到

$$-jh = -\frac{C}{k} [E(k) - (1-k^2\lambda^2)K(k)]$$

由此求得

$$C = \frac{jhk}{E - (1-k^2\lambda^2)K} \quad (4.3A-3')$$

将 C 的表示式代入式 (4.3A-3), 再将 $z_7 = -jh$, $t_7 = 1/k$ 代入, 则得到

$$\begin{aligned}
-jh &= -jh \frac{E\left(\arcsin\frac{1}{k}, k\right) - (1-k^2\lambda^2)F\left(\arcsin\frac{1}{k}, k\right)}{E - (1-k^2\lambda^2)K} \\
&\quad (4.3A-4)
\end{aligned}$$

式中 $\arcsin 1/k$ 不是实数, 所以需要进一步展开。因为

$$\begin{aligned}
F\left(\arcsin\frac{1}{k}, k\right) &= \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + j \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}
\end{aligned}$$

式中, 右边第一个积分就是第一类完全椭圆积分 $K(k)$, 第二个积分经变换

$$t = \frac{1}{\sqrt[4]{1-k'^2\tau^2}} \quad (k'^2 = 1-k^2)$$

后, 变成

$$\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} = K(k') = K'(k)$$

它是第一类余全椭圆积分, k' 称为余模数。于是得到

$$F\left(\arcsin \frac{1}{k}, k\right) = K(k) + jK'(k) \quad (4.3A-5)$$

又

$$E\left(\arcsin \frac{1}{k}, k\right) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt + j \int_1^{1/k} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt$$

式中，第一个积分是第二类完全椭圆积分 $E(k)$ 。而在第二个积分中，令

$$t = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k'^2 \tau^2}$$

则

$$\begin{aligned} \int_1^{1/k} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt &= \int_0^1 \frac{k'^2 \tau^2 d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2 \tau^2)}} \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2 \tau^2)}} - \sqrt{\frac{1-k'^2 \tau^2}{1-\tau^2}} \right] d\tau \\ &= K'(k) - E'(k) \end{aligned}$$

式中 $E'(k) = E(k')$ ，是第二类余全椭圆积分。于是

$$E\left(\arcsin \frac{1}{k}, k\right) = E(k) + j(K'(k) - E'(k)) \quad (4.3A-6)$$

将式 (4.3A-5) 和式 (4.3A-6) 代入式 (4.3A-4)，则得到

$$1 = \frac{(E + j(K' - E')) - (1 - k^2 \lambda^2)(K + jK')}{E - (1 - k^2 \lambda^2)K}$$

由其虚部得出

$$K' - E' - (1 - k^2 \lambda^2)K' = 0$$

即求得

$$\lambda^2 = \frac{1}{k^2} \frac{E'}{K'} \quad (4.3A-7)$$

将式 (4.3A-3') 和式 (4.3A-7) 代入式 (4.3A-3)，得到

$$z = -jh \frac{K'E(\arcsin t, k) - (K' - E')F(\arcsin t, k)}{EK' - (K' - E')K}$$

由完全椭圆积分公式

$$E'K - EK' - KK' = -\frac{\pi}{2}$$

则上式变成

$$z = -j \frac{2h}{\pi} [K'E(\arcsin t, k) - (K' - E')F(\arcsin t, K)] \quad (4.3A-8)$$

此即从 z 平面到 t 平面的变换关系式，其中模数 k 要由点⑥的对应坐标来确定。

将 $z_6 = \frac{W}{2} - jh$, $t_6 = \lambda$ 代入上式，则得

$$\begin{aligned} \frac{W}{2} - jh &= -j \frac{2h}{\pi} \left[K'E \left(\arcsin \frac{1}{k} \sqrt{\frac{E'}{K'}}, k \right) \right. \\ &\quad \left. - (K' - E') F \left(\arcsin \frac{1}{k} \sqrt{\frac{E'}{K'}}, k \right) \right] \end{aligned} \quad (4.3A-9)$$

式中,

$$\begin{aligned} F \left(\arcsin \frac{1}{k} \sqrt{\frac{E'}{K'}}, k \right) &= \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}\sqrt{\frac{E'}{k'}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} \\ &= K + jK' + j \int_0^{\sqrt{\frac{1-k'^2}{1-k'^2}\frac{E'}{K'}}} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} \\ &= K + jK' + jF \left(\arcsin \sqrt{\frac{1-k'^2}{1-k'^2}\frac{K'}{E'}}, k' \right) \\ E \left(\arcsin \frac{1}{k} \sqrt{\frac{E'}{K'}}, k \right) &= \int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}} - \int_{\frac{1}{k}\sqrt{\frac{E'}{K'}}}^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt \\ &= E' + j(K' - E') - j \left[F \left(\arcsin \frac{1}{k'} \sqrt{1 - \frac{E'}{K'}}, k' \right) \right. \\ &\quad \left. - E \left(\arcsin \frac{1}{k'} \sqrt{1 - \frac{E'}{K'}}, k' \right) \right] \end{aligned}$$

令

$$D' = \frac{K' - E'}{k'^2}, \quad B' = \frac{E' - k'^2 K'}{1 - k'^2}$$

将上述关系代入式 (4.3A-9), 其虚部为一恒等式, 其实部则给出 k' 应满足的方程:

$$\begin{aligned} K' \left[E \left(\sin \sqrt{\frac{D'}{K'}}, k' \right) - F \left(\arcsin \sqrt{\frac{D'}{K'}}, k' \right) \right] - (K' - E') F \left(\arcsin \sqrt{\frac{B'}{K'}}, k' \right) \\ = \frac{\pi}{2h} \cdot \frac{W}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{W}{h} \end{aligned} \quad (4.3A-10)$$

此式为含 k' 的方程式, 由此式可解得 k' 值, 并由 $k = \sqrt{1 - k'^2}$ 可求得 k 值。这样式 (4.3A-9) 中的各常数都已知, 而成为由 z 平面上半平面至 t 平面上半平面的变换式。

2. 由 t 平面上半平面至 W 平面上半平面的变换

由上述变换知, 由 z 平面上的对称带线图形变换到 t 平面上的实轴时, 要用到椭圆积分。现在要从 t 平面上的实轴变换到图 4.3A-1(c) 的 W 平面上的对称矩形图形, 则要用到椭圆积分的反函数, 即雅可比椭圆函数 $S_n(W, k)$ 。

由 t 平面上半平面变换到 W 平面上半平面矩形区的变换中的对应点位置及 W 平面上各顶点的

内转角如表4.3A-2所示。

表4.3A-2 $t-W$ 变换的对应点位置及各内转角

对应点号码 i	1	2	3	4	5	6	7	8
W_i	jb	$-a+jb$		$-a$	a		$a+jb$	jb
t_i	$-\infty$	$-\frac{1}{k}$	$-\lambda$	-1	1	λ	$\frac{1}{k}$	∞
α_i		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$	

根据许瓦兹-克利斯托夫变换可得

$$W = A \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (4.3A-11)$$

这是第一类椭圆积分。将 $W_5 = a$, $t_5 = 1$ 代入得到

$$a = AK$$

再将 $W_7 = a+jb$, $t_7 = 1/k$ 代入, 得到

$$a+jb = A \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = AK + jAK'$$

即得到

$$a = AK, \quad b = AK'$$

为简单起见, 令 $A = 1$, 则 $a = K$, $b = K'$, 于是式 (4.3A-11) 变成

$$W = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = F(\sin^{-1} t, k) \quad (4.3A-12)$$

或者

$$t = S_n(W, k) \quad (4.3A-13)$$

式中 $S_n(W, k)$ 即为以 k 为模数的雅可比椭圆函数。因为 k 为已知数, 故式(4.3A-13)便是由 t 平面到 W 平面上的变换函数。

由此变换即可得到 W 平面上对应点坐标, 如图4.3A-2所示。该区域的电容即空气微带的分布电容:

$$C_{01} = \epsilon_0 \frac{2a}{b} = 2\epsilon_0 \frac{K}{K'} \quad (4.3A-14)$$

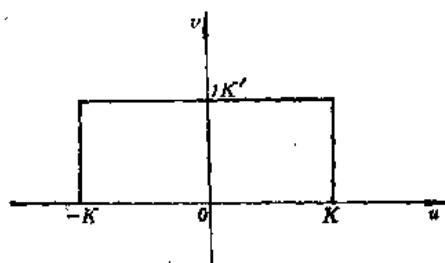


图4.3A-2 W 平面上的矩形区及其坐标

因此，空气微带的特性阻抗为

$$Z_{01} = \frac{1}{vC_{01}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0} - \frac{K'}{2\epsilon_0}}} = 2\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{K'}{K} = 60\pi \frac{K'}{K} \quad (4.3A-15)$$

此即式(4.3-16)。

附录二 惠勒变换与式(4.3-20)的推导

惠勒变换的思路和步骤在前面已经指出过，这里介绍具体的变换关系与分布电容的求值。

1. $z-t$ 变换

为计算方便起见，惠勒把尺寸作了一下变换，即令导体带宽度为 $2m$ ，带距为 π ，则宽高比变成 $2m/\pi$ 。若令

$$m = \frac{\pi}{2} \frac{W}{h} \quad (4.3A-16)$$

则宽高比就和实际微带一样。由于两页黎曼面完全对称，所以只需讨论一页黎曼面（如取第一页黎曼面）的变换关系。

如图4.3-7(d)所示第一页黎曼面多角形有四个内转角，在 B 、 E 、 E' 、 B' 处，其值见表4.3A-3。第一页黎曼面的边界变换为 t 平面的正实轴，第二页黎曼面的边界则变换为 t 平面的负实轴，如图4.3A-3(a)所示。各对应点的坐标和内转角如表4.3A-3所示。其中 z 平面上的点 D 的横坐标 n 需在下一步变换时才能确定。不过 n 的值无需求出。

表4.3A-3 惠勒变换的各平面顶点坐标与内转角

对应点 坐标面	H'	G'	F'	E'	D'	C'	B'	A	B	C	D	E	F	G	H
z 平面	$-\infty$	$-m'$	0	∞	$n+j\pi$	$j\pi$	$-m+j\pi$	$j\pi$	$m+j\pi$	$j\pi$	$-n+j\pi$	$-\infty$	0	m'	∞
t 平面	$-\infty$	$-\mu'$	$-\lambda''$	$-\nu$	$-\nu'$	$-\lambda'$	$-\mu$	0	μ	λ'	ν'	ν	λ''	μ'	∞
W 平面	$j\pi$	$-u_B + j\pi$	$-u_C + j\pi$		$-\infty$	$-u_C$	$-u_B$	0	u_B	u_C	∞		$u_C + j\pi$	$u_B + j\pi$	$j\pi$
z 面内角				0			2π		2π				0		
W 面内角					π						π				

将 B 、 E 、 E' 和 B' 各点的值代入许瓦兹变换式中，得到

$$\frac{dz}{dt} = A_1(t - \mu)(t - \nu)^{-1}(t + \nu)^{-1}(t + \mu) = A_1 \frac{t^2 - \mu^2}{t^2 - \nu^2}$$

积分得到

$$z = A_1 \int \frac{t^2 - \mu^2}{t^2 - \nu^2} dt + A_2 = A_1 \int \left[1 + \frac{\nu^2 - \mu^2}{t^2 - \nu^2} \right] dt + A_2 \quad (4.3A-17)$$

因为 ν 和 μ 未定，为简便起见，令 $\nu^2 - \mu^2 = 2\nu$ ，于是得到

$$z = A_1 \left(t - \ln \frac{t + \nu}{t - \nu} \right) + A_2 \quad (4.3A-18)$$

为了确定常数 A_1 和 A_2 , 我们选取点 A 坐标 $z = j\pi$, $t = 0$, 代入上式定出

$$A_1 = 1 \quad \text{和} \quad A_2 = 0$$

因此得到变换函数

$$z = t - \ln \frac{t + v}{t - v} = t - 2 \operatorname{arcth} \frac{v}{t} = j\pi + t - \ln \frac{1 + t/v}{1 - t/v} = j\pi + t - 2 \operatorname{arcth} \frac{t}{v} \quad (4.3A-19)$$

2. $t-W$ 变换

应用许瓦兹变换可将图4.3A-3(b) W 平面右半部分矩形区域变成图4.3A-3(a) t 平面上的正实轴上半区域, W 平面左半部分矩形区域变成 t 平面的负实轴上半区域。

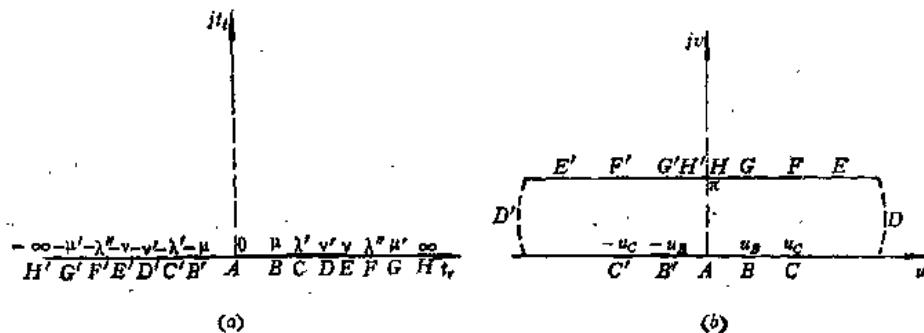


图4.3A-3 惠勒变换

(a) t 平面; (b) W 平面。

W 平面上只有一对顶点 W_D 和 $W_{D'}$, 内转角都是 π , 于是由许瓦兹变换式, 得到

$$\frac{dW}{dt} = A_3 (t - v')^{-1} (t + v')^{-1} = A_3 \frac{1}{t^2 - v'^2}$$

积分得到

$$W = A_3 \int \frac{1}{t^2 - v'^2} dt + A_4 = \frac{A_3}{2v'} \ln \frac{1 - \frac{t}{v'}}{1 + \frac{t}{v'}} + A_4 = \frac{A_3}{v'} \operatorname{arcth} \frac{t}{v'} + A_4$$

根据点 A 坐标, $W_A = 0$, $t_A = 0$, 可得到 $A_4 = 0$; 根据点 H 坐标, $W_H = j\pi$, $t_H = \infty$, 可得到 $A_3 = -2v'$ 。因此得到变换函数

$$W = 2 \operatorname{arcth} \frac{t}{v'} \quad (4.3A-20)$$

或者

$$t = v' \operatorname{th} \frac{W}{2} \quad (4.3A-21)$$

3. 确定变换函数中的 v 和 v'

为了确定变换函数 (4.3A-19) 和 (4.3A-21), 就需要确定该变换函数式中的 v 和 v' 。下面分别求之。

(1) 求 v

前面已经规定 $v^2 - \mu^2 = 2v$, 根据点 B 坐标, $t_B = \mu$, $z_B = m + j\pi$, 代入式 (4.3A-

19), 得到

$$m + j\pi = j\pi + \mu - 2 \operatorname{arcth} \frac{\mu}{v}$$

即

$$m = \mu - 2 \operatorname{arcth} \frac{\mu}{v} = \mu - \ln \frac{v + \mu}{v - \mu} \quad (4.3A-22)$$

而 $\mu = \sqrt{v^2 - 2v} = \sqrt{(v-1)^2 - 1} < v-1$, 于是

$$\begin{aligned} m &= \mu - \ln \left[\frac{v + \sqrt{(v-1)^2 - 1}}{v - \sqrt{(v-1)^2 - 1}} \right] \\ &= \mu - \ln \left[\frac{(v + \sqrt{(v-1)^2 - 1})^2}{(v - \sqrt{(v-1)^2 - 1})(v + \sqrt{(v-1)^2 - 1})} \right] \\ &= \mu - \ln((v-1) + \sqrt{(v-1)^2 - 1}) = \mu - \operatorname{arcch}(v-1) \\ &= \mu - \operatorname{arcsinh} \sqrt{(v-1)^2 - 1} = \mu - \operatorname{arcsinh} \mu \end{aligned} \quad (4.3A-23)$$

式 (4.3A-16) 表示 m 与微带宽高比的关系, 于是用图解法可由式 (4.3A-23) 求得 μ 与微带宽高比的关系。由 $v^2 - \mu^2 = 2v$, 则可得

$$v = 1 + \sqrt{1 + \mu^2} \quad (4.3A-24)$$

下面我们由式 (4.3A-24) 来求 v 与 m 的近似关系。

对于宽带情况, $W/2h > 1$, 则 $m/\pi > 1$ 。当 m 相当时, 由于 $\mu < v-1$, 则由式 (4.3A-23) 可以看出, $v \gg 2$, 可近似取 $\mu \approx v-1$ 。于是得到

$$\ln \frac{v + \mu}{v - \mu} \approx \ln(2v - 1) \approx \ln 2v$$

代入式 (4.3A-22), 得到

$$v = m + 1 + \ln 2v = m + 1 + \ln 2 + \ln v$$

为了作近似估计, 令

$$v = m + 1 + \ln 2 + \ln(m+X)$$

用累试修正法可得 $X \approx 0.94\pi$, 于是得到

$$\begin{aligned} v &\approx m + 1 + \ln 2\pi (m/\pi + 0.94) \\ &= m + \ln 2\pi e (m/\pi + 0.94) \end{aligned} \quad (4.3A-25)$$

(2) 求 v'

将点 C 的坐标和点 F 的坐标:

$$\begin{aligned} W_c &= u_c, & t_c &= \lambda' \\ W_f &= u_c + j\pi, & t_f &= \lambda'' \end{aligned}$$

代入式 (4.3A-21), 分别得到

$$\lambda' = v' \operatorname{th} \frac{u_c}{2}$$

$$\lambda'' = v' \operatorname{th} \frac{u_c + j\pi}{2} = v' \operatorname{cth} \frac{u_c}{2}$$

二式相乘，得到

$$v'^2 = \lambda' \lambda'' \quad (4.3A-26)$$

设 λ 是 λ' 和 λ'' 的算术平均数，并设

$$\lambda' = \lambda - \rho, \quad \lambda'' = \lambda + \rho$$

则

$$v' = \sqrt{\lambda' \lambda''} = \sqrt{(\lambda - \rho)(\lambda + \rho)} = \sqrt{\lambda^2 - \rho^2} \approx \lambda \quad (4.3A-27)$$

因此，为了求 v' ，就需要求 λ 。由点 C 坐标： $z_C = j\pi$, $t_C = \lambda'$ ，代入式 (4.3A-19) 得到

$$\lambda' = 2 \operatorname{arctanh} \frac{\lambda'}{v}$$

即

$$\frac{\lambda - \rho}{v} = \operatorname{th} \frac{\lambda - \rho}{2} \quad (4.3A-28)$$

同样，将点 F 坐标 $z_F = 0$, $t_F = \lambda''$ 代入式 (4.3A-19) 可得

$$\frac{\lambda + \rho}{v} = \operatorname{cth} \frac{\lambda + \rho}{2} \quad (4.3A-29)$$

由式 (4.3A-28) 和 (4.3A-29) 即可解得 λ 和 ρ 。由于 ρ 很小，近似有

$$\begin{aligned} \operatorname{th} \frac{\lambda - \rho}{2} &\approx \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\lambda}{2}} = \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} - \rho \frac{\operatorname{ch} \lambda - 1}{\operatorname{sh}^2 \lambda} \\ \operatorname{cth} \frac{\lambda + \rho}{2} &\approx \operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\lambda}{2}} = \operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} - \rho \frac{\operatorname{ch} \lambda + 1}{\operatorname{sh}^2 \lambda} \end{aligned}$$

代入式 (4.3A-28) 和 (4.3A-29) 并相减、相加，分别得到：

$$\begin{aligned} \frac{2\rho}{v} &= \operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} - \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} - 2\rho \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \lambda} \\ &\approx 1 + 2e^{-\lambda} - (1 - 2e^{-\lambda}) - 2\rho \frac{1}{\frac{1}{4}e^{2\lambda}} \approx 4e^{-\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda}{v} &= \operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} + \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} - 2\rho \frac{\operatorname{ch} \lambda}{\operatorname{sh}^2 \lambda} \\ &\approx 1 + 2e^{-\lambda} + 1 - 2e^{-\lambda} - 2\rho \frac{\frac{1}{2}e^\lambda}{\frac{1}{4}e^{2\lambda}} \approx 2 - 4\rho e^{-\lambda} \end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\lambda}{v} \approx 1 - 4ve^{-2\lambda}$$

可见 $\lambda \approx v$ 。因此得到

$$v' \approx \lambda \approx v (1 - 4ve^{-2v}) \approx v \quad (4.3A-30)$$

(4) Z_0 近似式

图 4.3A-3(b) 中只有 ABC 和 FGH 之间的电容是我们所要求的分布电容 C_{01} 的一半，于是

$$C_{01} = 2\epsilon_0 \frac{u_c}{\pi} \quad (4.3A-31)$$

由点 C 的坐标关系，由式 (4.3A-21)，得到

$$\frac{\lambda'}{v'} = \tanh \frac{u_c}{2}$$

由于 λ' 很接近于 v' ，所以 u_c 值较大；而

$$\tanh \frac{u_c}{2} \approx 1 - 2e^{-u_c}$$

则

$$1 - \frac{\lambda'}{v'} = 2e^{-u_c}$$

因为

$$1 - \frac{\lambda'}{v'} = 1 - \frac{\lambda}{v'} - \frac{\rho}{v'} \approx -\frac{\rho}{\lambda}$$

所以

$$2e^{-u_c} \approx \frac{\rho}{\lambda} \approx 2e^{-\lambda}$$

故得

$$u_c \approx \lambda \approx v \quad (4.3A-32)$$

因此分布电容

$$C_{01} = 2\epsilon_0 \frac{v}{\pi} = 2\epsilon_0 \frac{1}{\pi} \left[m + \ln 2\pi e \left(\frac{m}{\pi} + 0.94 \right) \right] \quad (4.3A-33)$$

最后我们求得空气微带特性阻抗

$$Z_{01} = \frac{1}{cC_{01}} = \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{C_{01}} = 60\pi \left[\frac{W}{2h} + \frac{1}{h} \ln 2\pi e \left(\frac{W}{2h} + 0.94 \right) \right]^{-1} \quad (4.3A-34)$$

此即式 (4.3-20)。

4.4 耦合带状线

两条或多条传输线彼此靠得很近，其间有电磁能量耦合，形成所谓耦合传输线。带状线和微带是一种半开放式传输线，当两条或多条中心导体带彼此靠得很近时，其间必有电磁能量耦合，构成耦合带状线或耦合微带结构。在设计滤波器、定向耦合器等微带元件时，需要使用耦合微带线结构。特别是 $\lambda/4$ 平行耦合线，在微带线电路中是用途最广、使用最多的一种结构，用它可以构成 90° 电桥、定向耦合器、带通或带阻滤波器、移相网络等电路的基本电路，还可用以组成宽带多节耦合电路。在本节中，我们将讨论耦合带状线的特性，下节讨论耦合微带的特性。

1. 耦合带状线的结构

耦合带状线的结构型式很多，根据两条耦合带线的相对位置可分为共面耦合（又称边耦合或侧耦合）和宽面耦合（包括偏置耦合）两种，其中又可分薄带、厚带、夹介质层等形式，如图 4.4-1 所示。使用较多的是图 (a) 所示侧耦合带状线、图 (f) 所示宽面耦合带状线和图 (h) 所示偏置耦合（或称错位耦合）带状线。

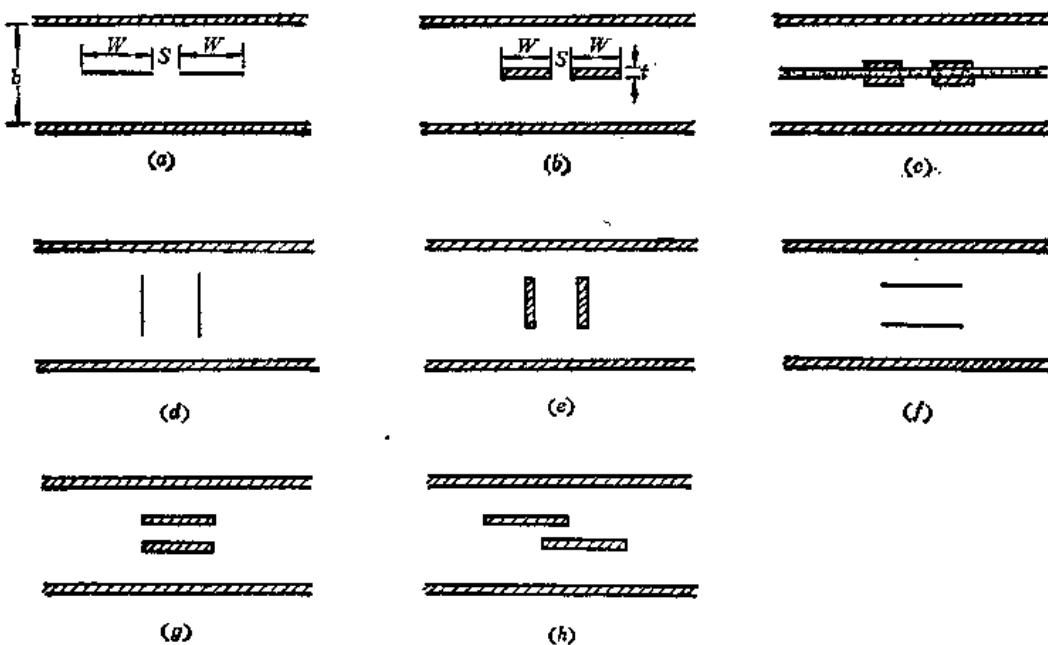


图 4.4-1 耦合带状线的结构型式

(a) 薄带侧耦合；(b) 厚带侧耦合；(c) 夹层侧耦合；(d) 薄带垂直宽面耦合；(e) 厚带垂直宽面耦合；(f) 薄带平行宽面耦合；(g) 厚带平行宽面耦合；(h) 错位耦合。

侧耦合线为弱耦合线，可用于制作窄带滤波器和弱耦合定向耦合器，耦合度小于10 dB，一般为6~8 dB。宽面耦合线为强耦合线，可用于制作90°电桥和宽带电路，一般用于需要较强耦合的情况，如3 dB定向耦合器等。错位耦合线则可用作5~10 dB的中等耦合电路。这里我们只讨论侧耦合线的特性。

2. 薄带侧耦合带状线的主要特性

耦合线之间的电磁耦合将使耦合线上出现两种不同的传输模式，即奇模和偶模。这两种模具有不同的特性阻抗。如果耦合线周围填充均匀介质，则这两种模的速度是相等的，这是电路设计所希望的特性；如果填充的介质不均匀，则这两种模的速度将不相等，这就要影响电路的性能。耦合带状线是均匀填充介质情况，和带状线一样，其传输模为TEM模。因此耦合带状线特性可用准静态方法求解。

(1) 奇模和偶模特性阻抗

耦合带状线中心导体带之间存在两种电磁耦合状态，即奇模耦合和偶模耦合。奇模耦合是在同一截面上，两中心导体带的电压、电流相等，相位相反，其电场相对于垂直轴成奇对称，故称为奇模耦合（或称反相耦合）；偶模耦合则是在同一截面上，两中心导体带的电压、电流相等，相位相同，其电场相对于垂直轴成偶对称，故称为偶模耦合。

(或称同相耦合), 如图 4.4-2 所示。由图可见, 奇模耦合比偶模耦合的耦合更紧。

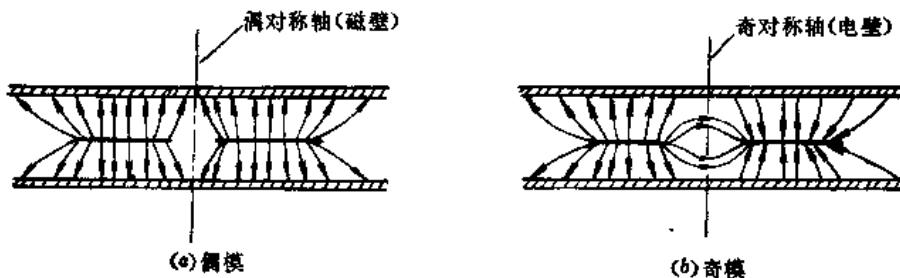


图 4.4-2 耦合带状线的模式

这两种耦合模式的场分布不同, 因而分布电容、分布电感和特性阻抗也不同。所谓奇模特性阻抗就是在奇模场分布时单根中心导体带对地的阻抗, 以 Z_{0o} 表示; 偶模特性阻抗则是在偶模场分布时单根中心导体带对地的阻抗, 以 Z_{0e} 表示。它们可分别表示为

$$Z_{0o} = \frac{1}{vC_{0o}} \quad (4.4-1)$$

$$Z_{0e} = \frac{1}{vC_{0e}} \quad (4.4-2)$$

式中, v 为介质中的光速; C_{0o} 为奇模分布电容, 即在奇模场分布时单根中心导体带对地的电容; C_{0e} 为偶模分布电容, 即在偶模场分布时单根中心导体带对地的电容。

和带状线一样, C_{0o} 和 C_{0e} 可用保角变换方法求得, 进而求得奇、偶模特性阻抗。结果为⁽¹⁸⁾

$$Z_{0o} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K(k'_o)}{K(k_o)} \quad (\Omega) \quad (4.4-3)$$

$$Z_{0e} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K(k'_e)}{K(k_e)} \quad (\Omega) \quad (4.4-4)$$

式中, K 为第一类全椭圆积分, k_o 和 k_e 为其模数, 且有

$$k_o = \operatorname{th}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{W}{b}\right) \operatorname{cth}\left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{W+S}{b}\right)\right]$$

$$k'_o = \sqrt{1 - k_o^2} \quad (4.4-5)$$

$$k_e = \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{W}{b}\right) \operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{W+S}{b}\right)\right]$$

$$k'_e = \sqrt{1 - k_e^2} \quad (4.4-6)$$

式中, W 为中央导体带宽度, S 为两中央导体带之间的距离, b 为两接地板之间的距离, 如图 4.4-1(a) 所示。

图 4.4-3 示出耦合带状线的 Z_{0o} 和 Z_{0e} 与尺寸 W/b 、 S/b 的关系曲线。

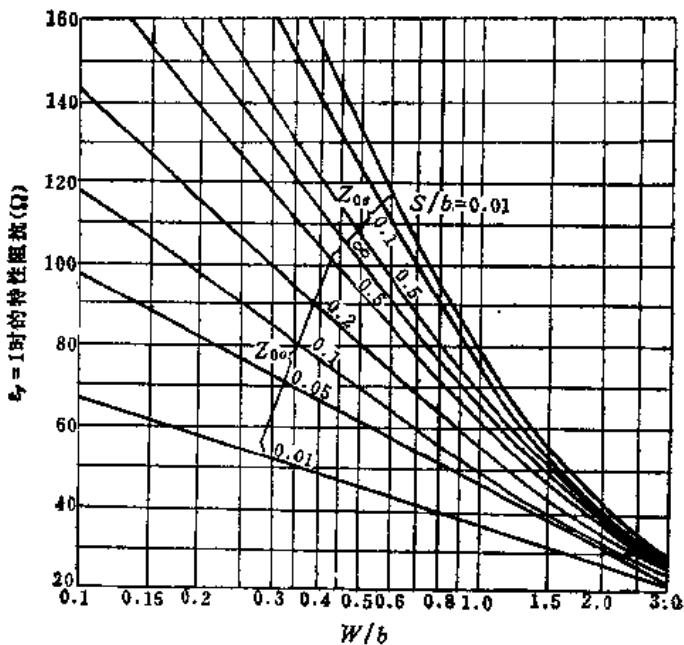


图 4.4-3 Z_{0o} 和 Z_{0e} 与 $\frac{W}{b}$ 和 $\frac{S}{b}$ 的关系曲线

在设计耦合带状线电路时，往往是根据电路性能要求给定了奇、偶模特性阻抗 Z_{0e} 和 Z_{0o} ，而需要计算耦合带状线的尺寸 W 和 S 。此时可用如下综合公式：

$$\frac{W}{b} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \sqrt{k_o k_e} \quad (4.4-7)$$

$$\frac{S}{b} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \left[\frac{1 - k_o}{1 - k_e} \sqrt{\frac{k_e}{k_o}} \right] \quad (4.4-8)$$

实际计算时，可使用图 4.4-4 和图 4.4-5 所示由上述公式绘制成的列线图，由尺寸 W/b 、 S/b 计算 Z_{0e} 和 Z_{0o} ，或由 Z_{0e} 和 Z_{0o} 确定尺寸 W/b 和 S/b 。列线图的使用方法是：先在两侧刻度线上找出所需的 Z_{0e} 和 Z_{0o} 值，连接这两点画一直线与中间的刻度线交点的读数便是 W/b 或 S/b 值。其误差小于 1%。如果接地板间距 b 给定， W 和 S 值便可确定。

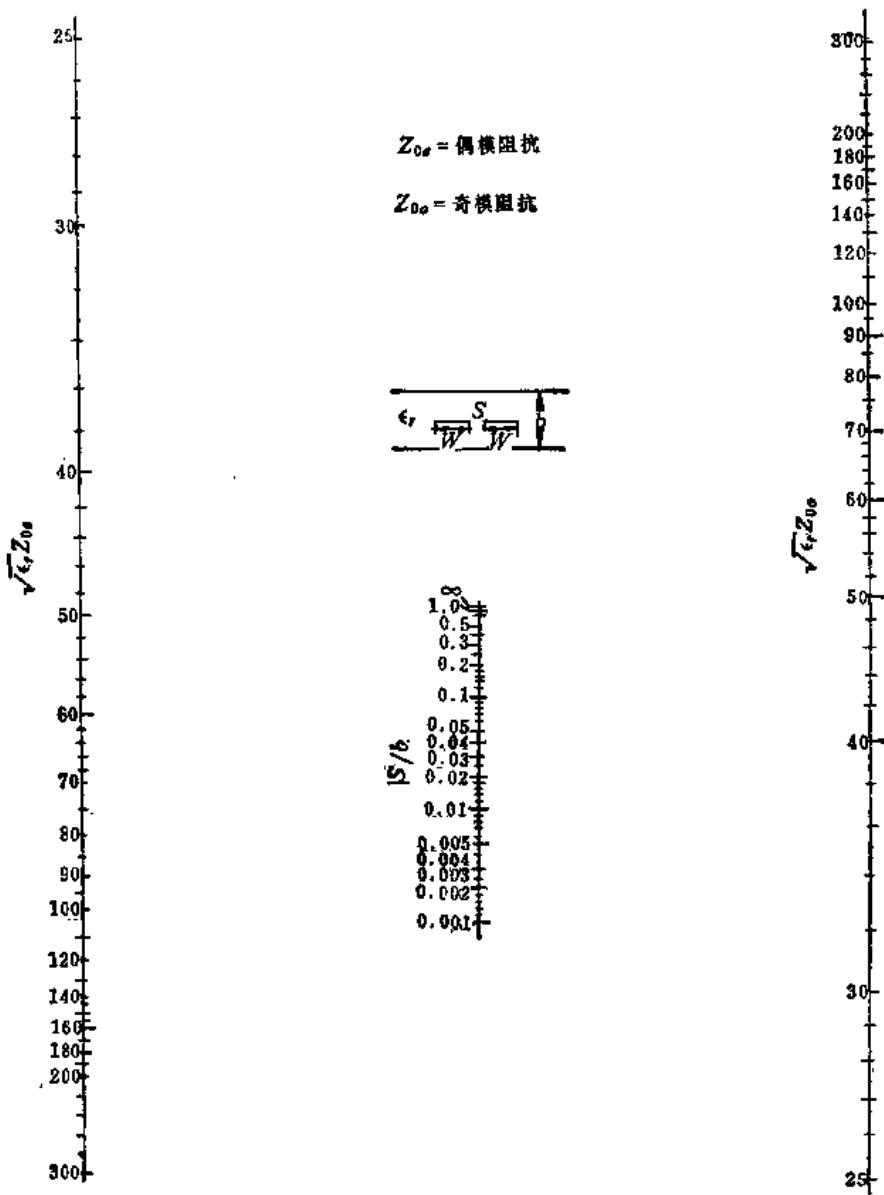
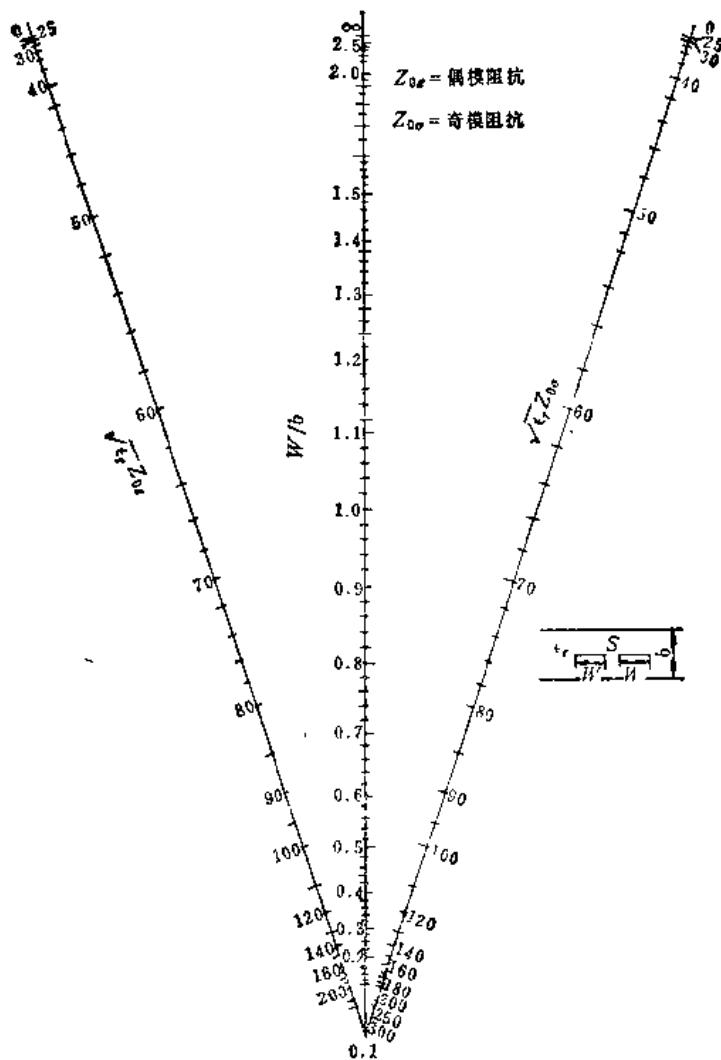


图 4.4-4 耦合带状线 Z_{0e} 和 Z_{0o} 与 S/b 之列线图

图 4.4-5 耦合带状线 Z_{0s} 和 Z_{0o} 与 W/b 之列线图

(2) 相速度与波导波长

耦合带状线中的奇模和偶模，虽然场分布不同，但都是TEM模，而且同时在介电常数为 ϵ_r 的均匀介质中传播，所以两者的相速度相同，即

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.4-9)$$

式中 c 为真空中的光速。

两种模的波导波长（或称带内波长）也是相同的，即

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.4-10)$$

式中 λ_0 为自由空间波长。

3. 厚带侧耦合带状线的电容与尺寸计算

实用的耦合带状线中心导体带总有一定的厚度 t 。这种厚带侧耦合带状线有不对称的和对称的两种形式，如图 4.4-6 所示，前者 $W_a \neq W_b$ ，后者 $W_a = W_b$ 。下面分析不对称侧耦合带状线的各种电容及其尺寸计算。

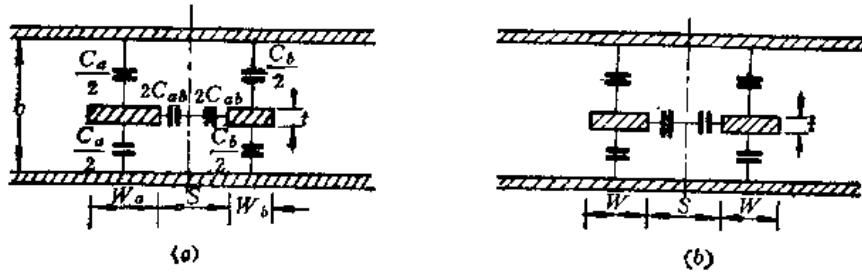


图 4.4-6 厚带侧耦合带状线

(a) 不对称结构；(b) 对称结构。

如图 4.4-6(a) 所示不对称厚带侧耦合带状线，中心导体带宽度分别为 W_a 和 W_b ，间距为 S ，导体带厚度为 t ，接地板间距为 b 。如图所示，耦合带状线的电容包括中心导体带对地的电容 C_a 和 C_b （称为导体带的自电容）与两导体带之间的电容 C_{ab} （称为耦合电容）。于是中心导体带 a 、 b 的奇、偶模电容分别为

$$C_{0o}^a = C_a + 2C_{ab}, \quad C_{0e}^a = C_a \quad (4.4-11)$$

$$C_{0o}^b = C_b + 2C_{ab}, \quad C_{0e}^b = C_b \quad (4.4-12)$$

中心导体带 a 、 b 的奇、偶模特性导纳分别为

$$\left. \begin{aligned} Y_{0o}^a &= vC_{0o}^a = v(C_a + 2C_{ab}) \\ Y_{0e}^a &= v \cdot C_{0e}^a = vC_a \end{aligned} \right\} \quad (4.4-13)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{0o}^b &= vC_{0o}^b = v(C_b + 2C_{ab}) \\ Y_{0e}^b &= vC_{0e}^b = vC_b \end{aligned} \right\} \quad (4.4-14)$$

因此

$$Y_{0o}^a - Y_{0e}^a = 2vC_{ab} \quad (4.4-15)$$

$$Y_{0o}^b - Y_{0e}^b = 2vC_{ab} \quad (4.4-16)$$

由此得到

$$Y_{0o}^a - Y_{0e}^a = Y_{0o}^b - Y_{0e}^b \quad (4.4-17)$$

式 (4.4-17) 表明，在耦合带状线中，两导体带的奇、偶模特性导纳之差是相等的。这是耦合带状线的一个固有性质。

由式 (4.4-13)、式 (4.4-14) 和式 (4.4-15) 可以求得

$$C_a = \frac{Y_{0e}^a}{v}, \quad C_b = \frac{Y_{0e}^b}{v}$$

$$C_{ab} = \frac{Y_{0o}^a - Y_{0e}^a}{2v} = \frac{Y_{0o}^b - Y_{0e}^b}{2v}$$

因为

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon}} = \frac{1}{\eta_0} \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\epsilon}}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

所以得到

$$C_a = \frac{Y_{0e}^a \eta_0 \epsilon}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{或} \quad \frac{C_a}{\epsilon} = \frac{\eta_0 Y_{0e}^a}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.4-18)$$

$$C_b = \frac{Y_{0e}^b \eta_0 \epsilon}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{或} \quad \frac{C_b}{\epsilon} = \frac{\eta_0 Y_{0e}^b}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.4-19)$$

$$C_{ab} = \frac{(Y_{0e}^a - Y_{0e}^b) \eta_0 \epsilon}{2 \sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{或} \quad \frac{C_{ab}}{\epsilon} = \frac{\eta_0 (Y_{0e}^a - Y_{0e}^b)}{2 \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\eta_0 (Y_{0e}^b - Y_{0e}^a)}{2 \sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.4-20)$$

图 4.4-7 示出了不对称厚带侧耦合带状线的平板电容与各种边缘电容。由图可见

$$C_a = 2(C_p^a + C_{fe}^a + C_{fo}^a) \quad (4.4-21)$$

$$C_b = 2(C_p^b + C_{fe}^b + C_{fo}^b) \quad (4.4-22)$$

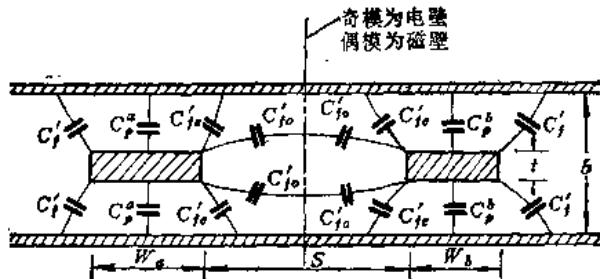


图 4.4-7 不对称厚带侧耦合带状线的各种电容

和

$$C_{ab} = C_{fo}^a - C_{fe}^a \quad \text{或} \quad \frac{C_{ab}}{\epsilon} = \frac{C_{fo}^a}{\epsilon} - \frac{C_{fe}^a}{\epsilon} \quad (4.4-23)$$

式中 C_p^a 和 C_p^b 分别为导体带 a 和 b 与接地板之间的平板电容，且

$$C_p^a = \frac{\epsilon W_a}{b-t}, \quad C_p^b = \frac{\epsilon W_b}{b-t} \quad (4.4-24)$$

如 C_p^a 和 C_p^b 已知，则由上式可求得导体带 a 和 b 的宽度为

$$\frac{W_a}{b} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{b} \right) \frac{C_p^a}{\epsilon}, \quad \frac{W_b}{b} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{b} \right) \frac{C_p^b}{\epsilon} \quad (4.4-25a)$$

由式 (4.4-21) 和式 (4.4-22) 可得

$$\frac{C_p^a}{\epsilon} = \frac{C_a}{2\epsilon} - \frac{C_f^a}{\epsilon} - \frac{C_{fe}^a}{\epsilon} \quad (4.4-26)$$

$$\frac{C_p}{\epsilon} = \frac{C_b}{2\epsilon} - \frac{C'_f}{\epsilon} - \frac{C'_{fe}}{\epsilon} \quad (4.4-27)$$

因此可得

$$\begin{aligned} \frac{W_a}{b} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{b} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{C_a}{\epsilon} - \frac{C'_{fe}}{\epsilon} - \frac{C'_f}{\epsilon} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{b} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{C_{0e}^a}{\epsilon} - \frac{C'_{fe}}{\epsilon} - \frac{C'_f}{\epsilon} \right) \\ \frac{W_b}{b} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{b} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{C_b}{\epsilon} - \frac{C'_{fe}}{\epsilon} - \frac{C'_f}{\epsilon} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{b} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{C_{0e}^b}{\epsilon} - \frac{C'_{fe}}{\epsilon} - \frac{C'_f}{\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (4.4-25 b)$$

式 (4.4-21)~式 (4.4-23) 中的 C'_f 是导体带外边缘与接地板之间的边缘电容，简称为外边缘电容。 C'_f/ϵ 与 $\frac{t}{b}$ 的关系曲线见图 4.2-3。 C'_{fe} 为偶模情况下导体带内边缘与接地板间的边缘电容，简称为偶模边缘电容。图 4.4-8 表示 C'_{fe}/ϵ 与 S/b 的关系曲线。 C'_{fo} 为奇模情况下导体带内边缘与接地板之间的电容，简称奇模边缘电容。图 4.4-9 表示 C'_{fo}/ϵ 与 S/b 的关系曲线。耦合电容 C_{ab}/ϵ 的曲线可从图 4.4-9 曲线族减去图 4.4-8 曲线族得到，如图 4.4-8 之 $\frac{\Delta C}{\epsilon}$ 曲线族。

由式 (4.4-11) 可得每根导体带的奇、偶模电容分别为

$$\frac{C_{0o}}{\epsilon} = 2 \left(\frac{C_p}{\epsilon} + \frac{C'_f}{\epsilon} + \frac{C'_{fo}}{\epsilon} \right) \quad (4.4-28)$$

$$\frac{C_{0e}}{\epsilon} = 2 \left(\frac{C_b}{\epsilon} + \frac{C'_f}{\epsilon} + \frac{C'_{fe}}{\epsilon} \right) \quad (4.4-29)$$

于是耦合电容

$$\frac{C_{ab}}{\epsilon} = \frac{\Delta C}{\epsilon} = \frac{C'_{fo}}{\epsilon} - \frac{C'_{fe}}{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{C_{0o}}{\epsilon} - \frac{C_{0e}}{\epsilon} \right) \quad (4.4-30)$$

奇、偶模特性阻抗可以写成

$$Z_{0o} = \frac{1}{vC_{0o}} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{C_{0o}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r} \frac{C_{0o}}{\epsilon}}$$

$$Z_{0e} = \frac{1}{vC_{0e}} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{C_{0e}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r} \frac{C_{0e}}{\epsilon}}$$

即得

$$\sqrt{\epsilon_r} Z_{0o} = \frac{\eta_0}{\frac{C_{0o}}{\epsilon}} \quad (4.4-31)$$

$$\sqrt{\epsilon_r} Z_{0e} = \frac{\eta_0}{\frac{C_{0e}}{\epsilon}} \quad (4.4-32)$$

代入式 (4.4-30) 得到

$$\frac{\Delta C}{\epsilon} = \frac{\eta_0}{2\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{1}{Z_{0o}} - \frac{1}{Z_{0e}} \right) \quad (4.4-33)$$

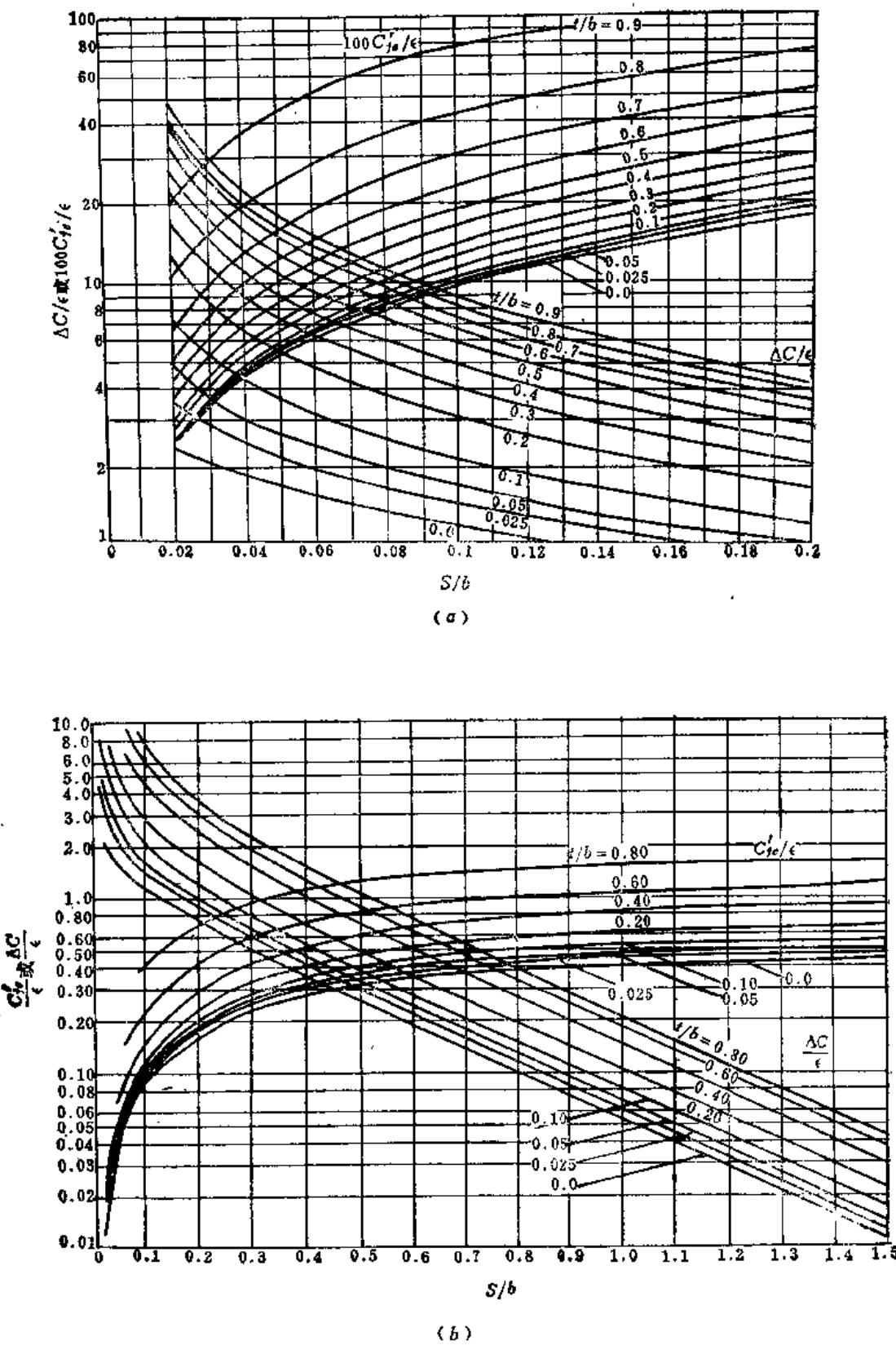


图 4.4-8

(a) 厚带平行耦合带状线的 $\Delta C/\epsilon$ 和 C_{fe}'/ϵ 曲线(S/b 小范围值); (b) 厚带平行耦合带状线的 $\Delta C/\epsilon$ 和 C_{fe}'/ϵ 曲线(S/b 大范围值)。

空气厚带侧耦合带状线常用来设计交指滤波器、梳指滤波器、定向耦合器等元件。此时，根据元件的性能要求给定了 Z_{0o} 和 Z_{0e} ，需要求尺寸 W 和 S 。这就需要计算各种分布电容。其计算步骤是：根据 Z_{0o} 和 Z_{0e} 值，由式(4.4-33)计算 $\frac{\Delta C}{\epsilon}$ 值；因为 $\frac{t}{b}$ 通常选定的，于是可由图4.4-8曲线中确定 $\frac{S}{b}$ 值，再从图4.2-3和图4.4-8曲线中查得相应的 $\frac{C'_f}{\epsilon}$ 和 $\frac{C'_{fe}}{\epsilon}$ ；由式(4.4-32)计算 $\frac{C_{pe}}{\epsilon}$ ，并由式(4.4-29)计算 $\frac{C_p}{\epsilon}$ ，最后由式(4.4-25)计算 $\frac{W}{b}$ 值，通常 b 已知，则 W 和 S 值可以确定。

需要指出的是，图4.2-3、图4.4-8和图4.4-9都是在中心导体带为无限宽的假定下用保角变换方法得到的，因此这些曲线只有在 $\frac{W/b}{1-t/b} \rightarrow \infty$ 时才是精确的。当 $\frac{W/b}{1-t/b} > 0.35$ 时，据此曲线计算得到的 C_{0o}/ϵ 和 C_{0e}/ϵ 值的误差小于1.24%。但是，当 $\frac{W/b}{1+t/b} < 0.35$ 时，需要按下式进行修正

$$\frac{W'}{b} = \frac{0.07(1-t/b) + W/b}{1.20} \quad (4.4-34)$$

并且要求修正后的 W'/b 值满足条件 $0.1 < \frac{W'/b}{1-t/b} < 0.35$ 。

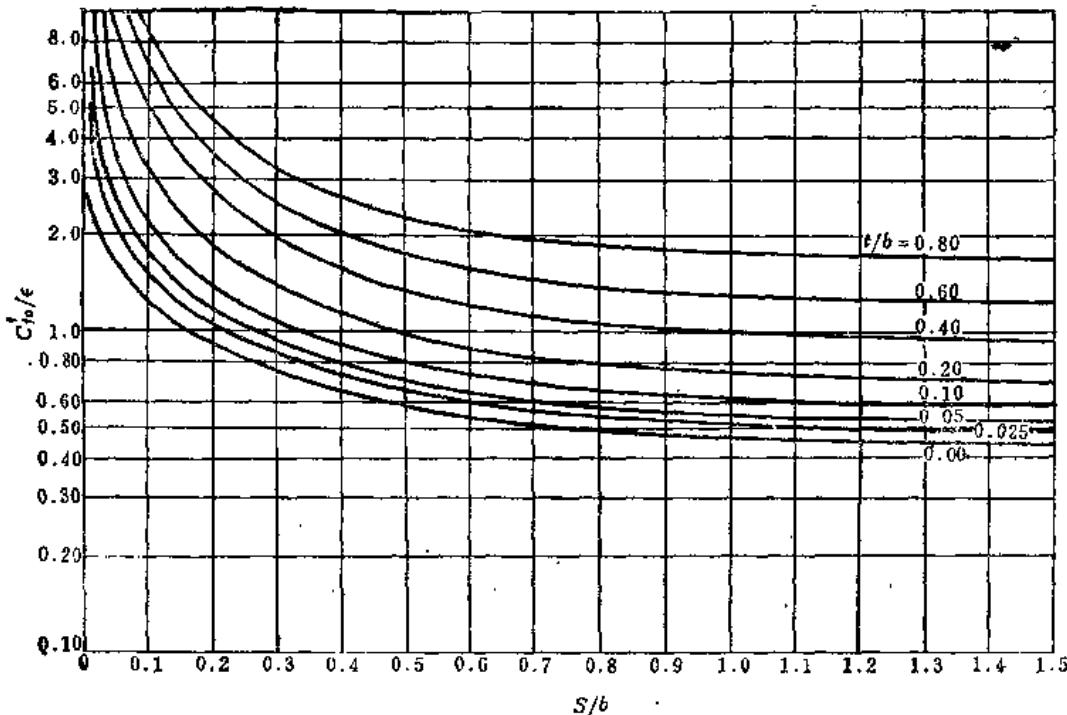


图4.4-9 厚带平行耦合带状线的 C'_{0o}/ϵ 曲线

4.5 耦合微带

耦合微带的结构如图4.5-1所示。它广泛用在微波集成电路中做定向耦合器、滤波器、阻抗匹配网络等。

耦合微带的特性由其奇、偶模分布电容来决定，其主要特性参数是奇、偶特性阻抗、相速度和波导波长。本节主要讨论耦合微带的主要特性及其分析方法。

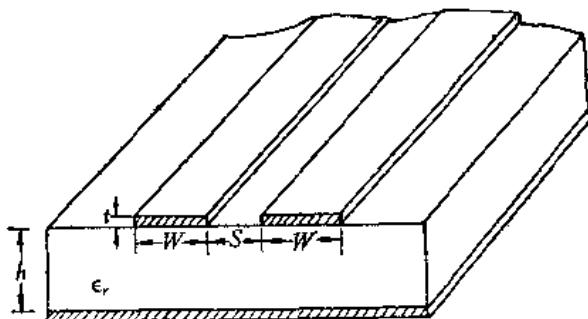


图4.5-1 耦合微带的结构

1. 耦合微带的奇、偶模特性阻抗与分析方法

耦合微带中也存在奇模和偶模耦合状态，其场分布如图 4.5-2 所示。由图可见，奇模状态下的中心对称面为电壁、偶模状态下的中心对称面为磁壁；由图还可以看出，奇模耦合比偶模耦合紧，奇模分布电容比偶模分布电容大，与单根微带相比容易看出，奇模分布电容比单根微带的分布电容大，而偶模分布电容比单根微带的分布电容小。

和单根微带一样，耦合微带中的介质也是不均匀介质，其传输模为混合模，因此耦合微带特性的求解比较复杂，分析方法也很多。和单根微带一样，耦合微带的分析方法也有准静态法、色散模型法和全波分析法三类。每类方法中又有不同的求解方法。这里只介绍有关准静态法。

准静态方法就是将耦合微带中的传输模当成 TEM 模来处理，以计算耦合微带的静电奇、偶模分布电容，从而求其奇、偶模特性阻抗、相速度和波导波长等。几乎单根微带所用的准静态方法都适用于耦合微带的奇、偶模分布电容的求值。目前使用较多的准静态方法有三种：第一种是保角变换法；第二种是介质格林函数法；第三种是“单微带”法。

保角变换法常用的是部分电容法和有效介电常数法。后者是引入奇、偶模有效介电常数 ϵ_{eo} 和 ϵ_{ee} ，它们可表示为

$$\epsilon_{eo} = \frac{C_{eo}(\epsilon_r)}{C_{eo}(1)} = 1 + q_o(\epsilon_r - 1) \quad (4.5-1)$$

$$\epsilon_{ee} = \frac{C_{ee}(\epsilon_r)}{C_{ee}(1)} = 1 + q_e(\epsilon_r - 1) \quad (4.5-2)$$

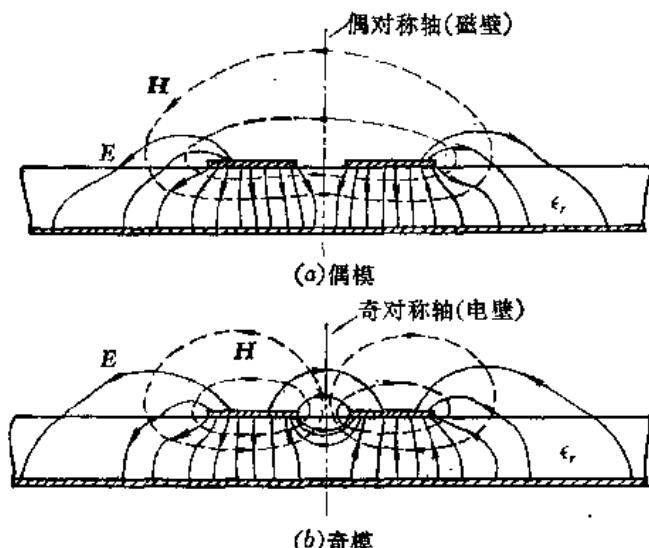


图4.5-2 耦合微带中的奇、偶模场分布

式中, $C_{bo}(\epsilon_r)$ 和 $C_{be}(\epsilon_r)$ 分别为耦合微带的奇、偶模分布电容; $C_{bo}(1)$ 和 $C_{be}(1)$ 分别为空气耦合微带的奇、偶模分布电容; q_o 和 q_e 分别为奇、偶模填充系数。耦合微带的奇、偶模特性阻抗则为

$$Z_{bo} = \frac{Z_{bo1}}{\sqrt{\epsilon_{eo}}} = \frac{1}{v_{po} C_{bo}(\epsilon_r)} \quad (4.5-3)$$

$$Z_{be} = \frac{Z_{be1}}{\sqrt{\epsilon_{ee}}} = \frac{1}{v_{pe} C_{be}(\epsilon_r)} \quad (4.5-4)$$

式中, v_{po} 和 v_{pe} 分别为奇、偶模相速度; Z_{bo1} 和 Z_{be1} 分别为空气耦合微带的奇、偶模特性阻抗, 可用保角变换法求得为^[19]

$$Z_{bo1} = 120 \pi \frac{K(k'_o)}{K(k_o)} \quad (4.5-5)$$

$$Z_{be1} = 120 \pi \frac{K(k'_e)}{K(k_e)} \quad (4.5-6)$$

式中 K 为第一类全椭圆积分, k_o 和 k_e 为相应的模数, 而 $k'_o = \sqrt{1 - k_o^2}$, $k'_e = \sqrt{1 - k_e^2}$ 。

介质格林函数法又称积分方程法。这种方法所得到的结果比较精确, 其过程与单根微带介质格林函数法相似, 但求解过程比较复杂。这种方法的思路是这样: 假设在耦合微带的两根导体带上, 分别加上单位偶模电压(即两根导体带对地电位都是 +1 V)和单位奇模电压(即两根导体带对地的电位分别为 +1 V 和 -1 V), 在此条件下应用介质格林函数, 列出线上电荷分布的积分方程, 用数值计算方法求出奇、偶模的总分布电荷, 即可得到奇、偶模分布电容, 进而求得奇、偶模特性阻抗。

计算结果表明, 当耦合微带的导体带间距 S 较小时, 用保角变换法较精确, 而当 S 较大时, 用介质格林函数法较精确。图 4.5-3、4.5-4 和 4.5-5 示出综合上述两种方法得到的 ϵ 为 1.0、9.0 和 9.6 时的奇偶模特性阻抗曲线。

下面着重介绍一下第三种方法, 即“单微带”方法。这种方法实际上也是保角变换法, 只不过是它可以利用单微带的成果, 得出较简单的解析式和曲线。其思路是把奇、偶模耦合微带等效为相应的单微带, 该单微带的特性阻抗等于相应奇、偶模阻抗的一半, 即

$$\left. \begin{aligned} Z_b^{co} &= Z_{bo}/2 \\ Z_b^{ce} &= Z_{be}/2 \end{aligned} \right\} \quad (4.5-7)$$

上标 “co” 和 “ce” 分别表示相应的奇、偶模单微带; 然后利用现成的单微带的图表或曲线求出相应单微带的宽高比, 即

由 Z_b^{co} 查得 $(W/h)_{co}$

由 Z_b^{ce} 查得 $(W/h)_{ce}$

而 $(W/h)_{co}$ 和 $(W/h)_{ce}$ 与相应奇、偶模耦合微带的尺寸 (W/h) 和 (S/h) 之间的关系式可用保角变换方法求得。

下面简单介绍一下 $(W/h)_{co}$ 与相应的 $(W/h)_o$ 和 $(S/h)_o$ 之间的保角变换。

我们可以注意到, 不管是奇、偶模耦合微带还是单根微带, 取其一半就有图 4.5-6。

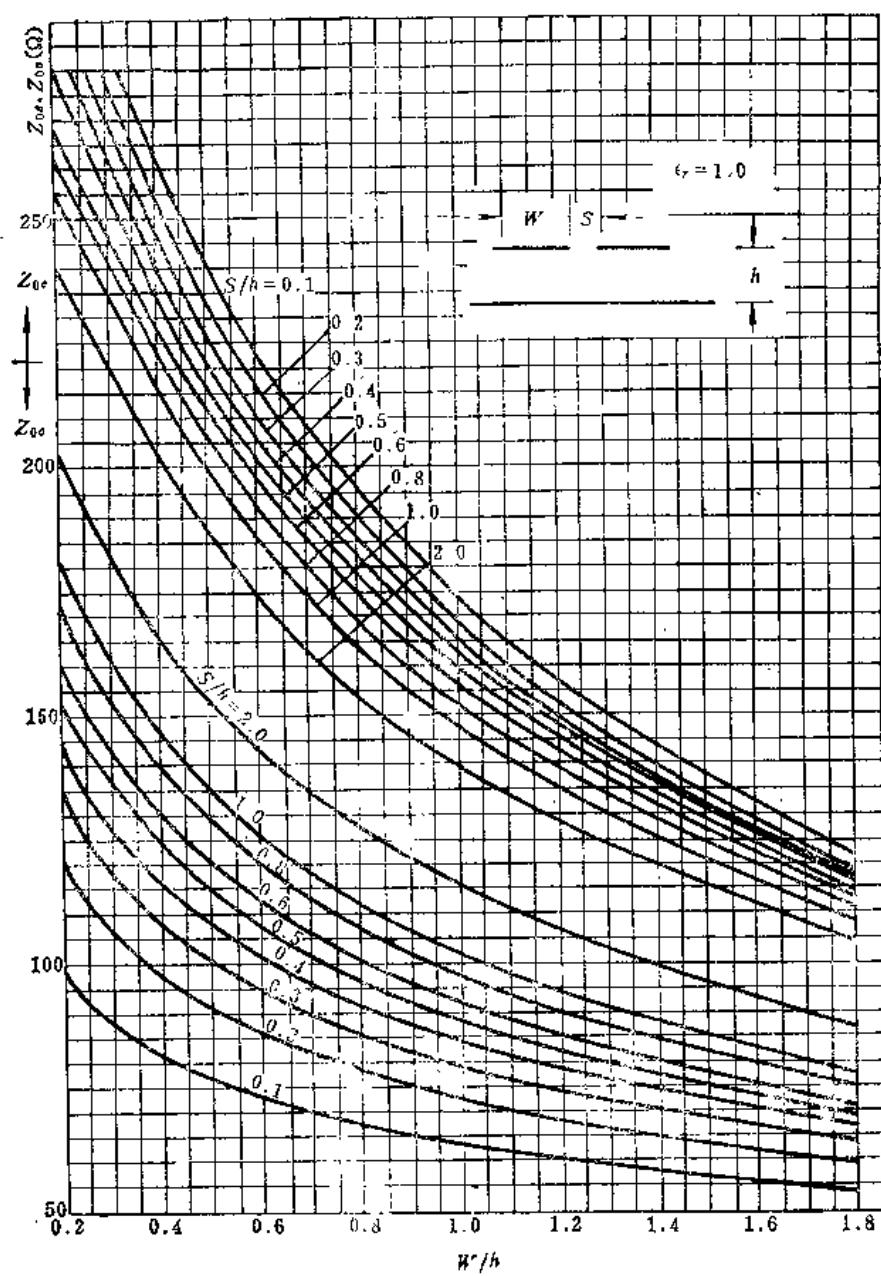


图 4.5-3 $\epsilon_r = 1.0$ 的耦合微带奇偶模特性阻抗

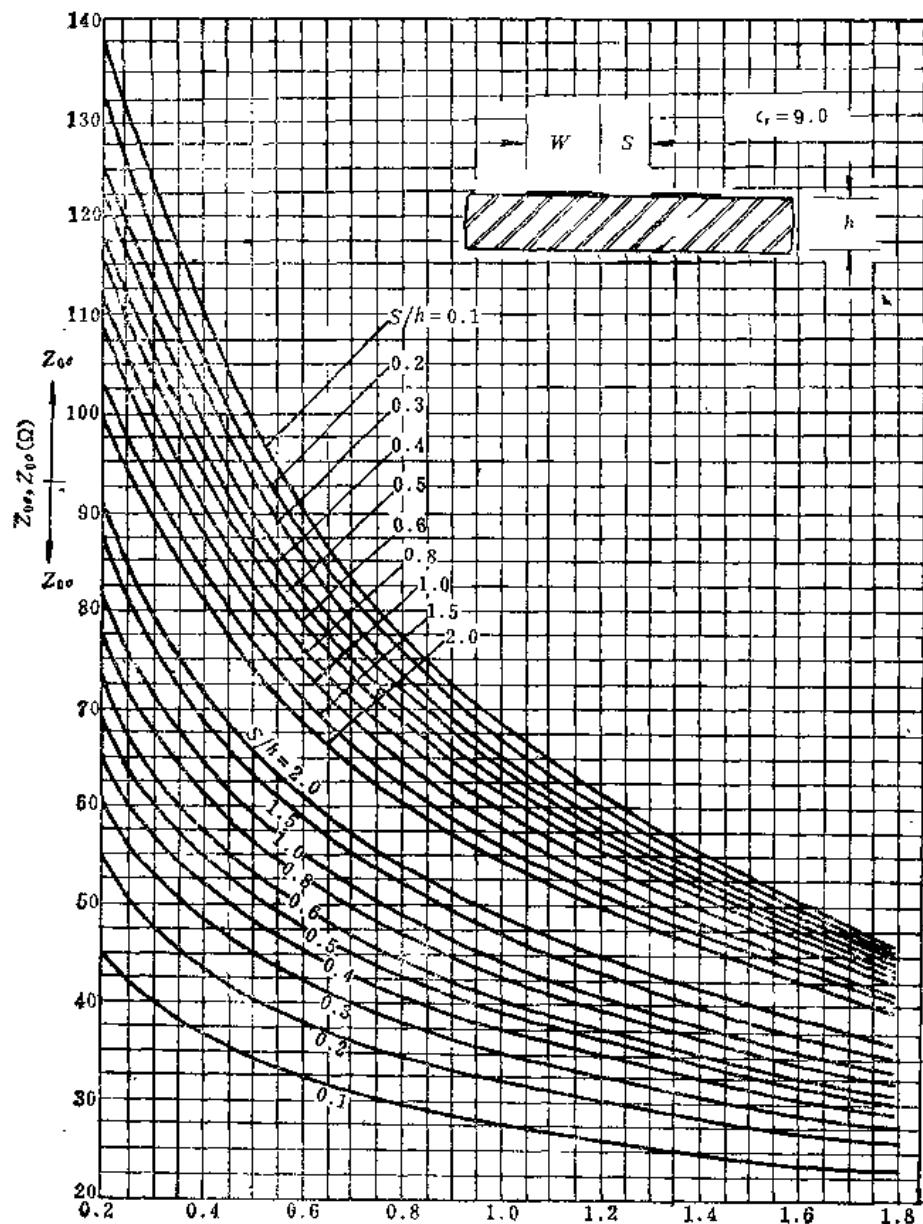
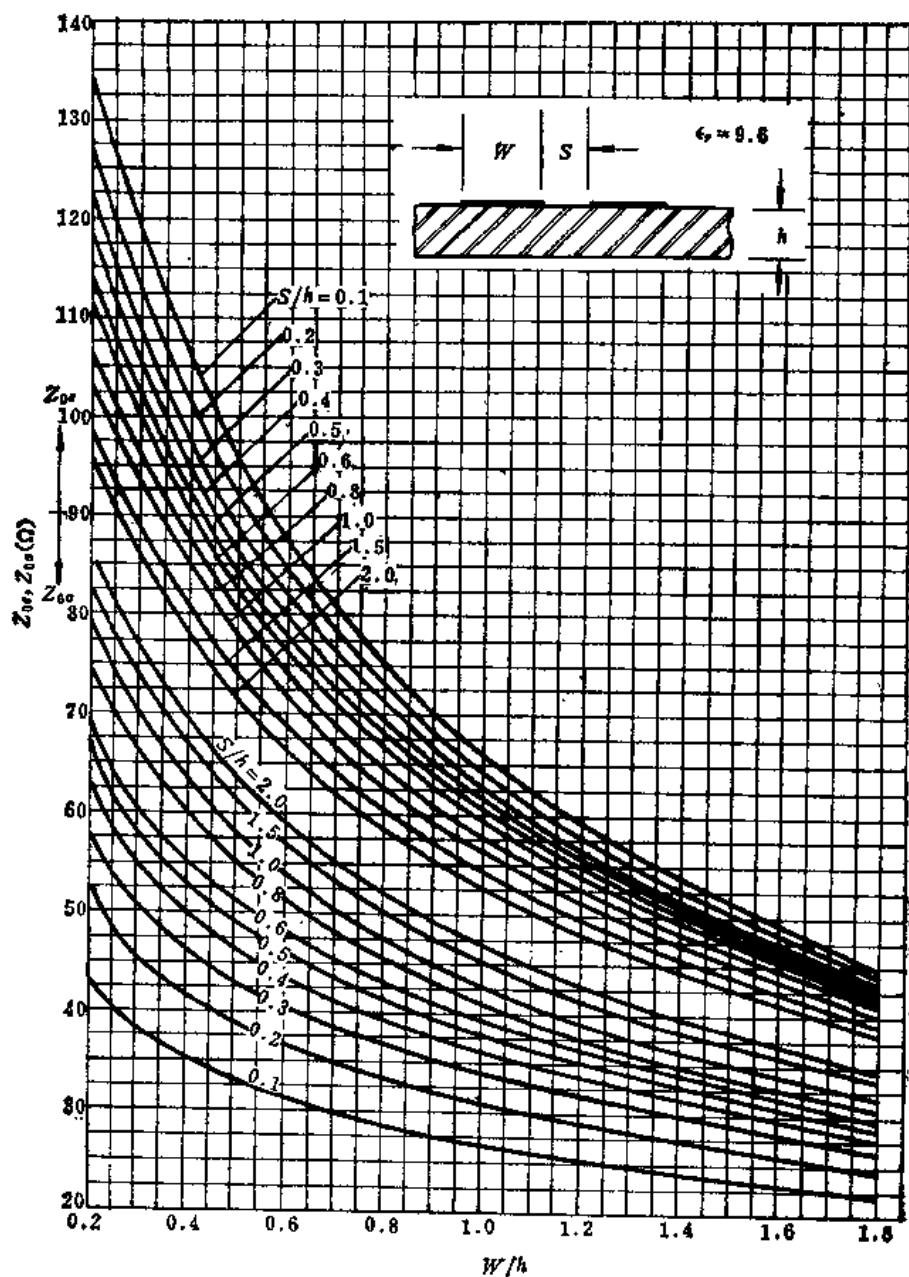


图 4.5-4 $\epsilon_r = 9.0$ 的耦合微带奇偶模特性阻抗

图4.5-5 $\epsilon_r = 9.6$ 的耦合微带奇偶模特性阻抗

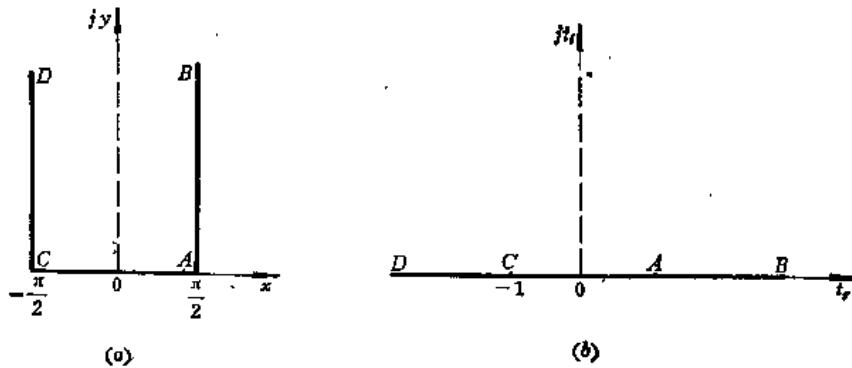


图 4.5-6 耦合微带到单微带所用的基本变换

(a) 所示形状，它可以应用许瓦兹变换式变到 t 平面的实轴及其上半区域，如图 4.5-6 (b) 所示。如图 4.5-6 (a) 所示，顶点只有 A 、 C 两点，其内转角都是 $\pi/2$ ，则由许瓦兹变换，得到

$$\frac{dz}{dt} = A(t+1)^{-1/2}(t-1)^{1/2} = \frac{A}{\sqrt{t^2-1}}$$

积分得到

$$z = A \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + B = A \operatorname{arcsinh} t + B$$

如图所示，当 $z = \pi/2$ 时， $t = 1$ ； $z = -\pi/2$ 时， $t = -1$ ，于是得到

$$A = -j \quad \text{和} \quad B = \pi/2$$

因此得到变换式

$$t = \sin z \quad (4.5-8)$$

下面我们以偶模耦合微带为例来讨论。由图 4.5-2 可以看出，奇模时中心对称面为电壁，偶模时中心对称面为磁壁，它们分别把奇、偶模耦合微带分成两半，每一半可看成单根微带的一半，不同的只是导体带偏移了 $S/2$ 。图 4.5-7 (a)、(b) 分别表示偶模耦合微带和单根微带的横截面，图 (a) 中的 EF 为磁壁面，取它们的一半并旋转 90° 就得到图 4.5-7 (c)、(d) 所示图形，应用式 (4.5-8) 所示变换函数分别可以变换为图 4.5-7 (e)、(f) 所示实轴及其上半区域。图 (e) 和图 (f) 之间的差别仅在于图 (f) 中的 A 、 F 点压缩为一点了。因此，若

$$-g = \sin \left[-\frac{\pi}{2} + j \left(\frac{\pi}{2} - \frac{S}{h} \right) \right]$$

即

$$g = \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{S}{h} \right) \quad (4.5-9)$$

则可用下式实现图 (e) 到图 (f) 的变换：

$$t' = \frac{2t + g - 1}{g + 1} \quad (4.5-10)$$

由式 (4.5-10) 即有： $t = 1$ ，则 $t' = 1$ ； $t = -g$ ，则 $t' = -1$ 。最后我们就得到图 4.5-7 (c) 所示偶模耦合微带到图 (d) 单微带的变换式为

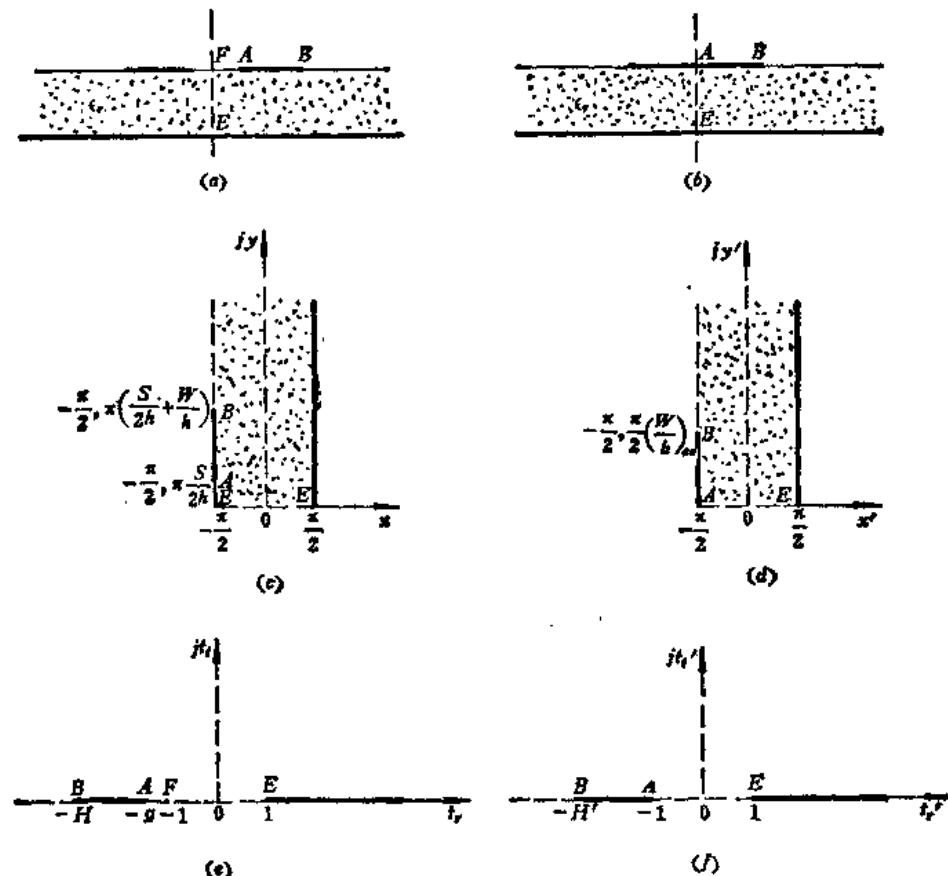


图4.5-7 偶模耦合微带到单微带的变换

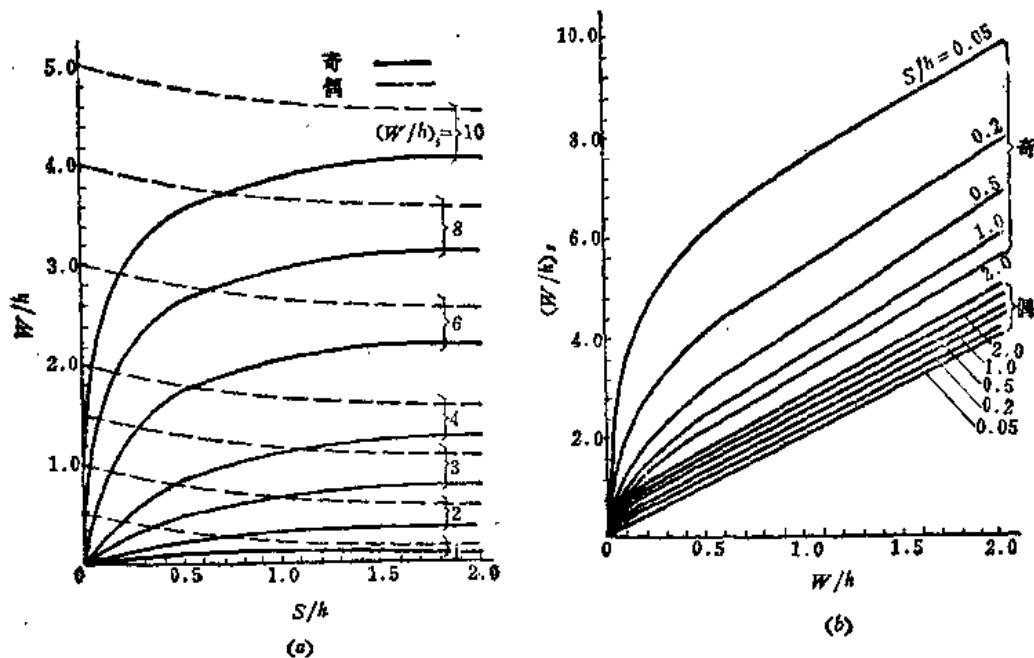
(a) 偶模耦合微带; (b) 单微带; (c) 耦合微带 z 平面; (d) 单微带 z' 平面; (e) t 平面; (f) t' 平面。

图4.5-8 耦合微带与单微带的尺寸关系曲线

$$-\left(\frac{2H-g+1}{g+1}\right) = \sin\left[-\frac{\pi}{2} + j\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{W}{h}\right)_{ee}\right] \quad (4.5-11)$$

即得到

$$\left(\frac{W}{h}\right)_{ee} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2H-g+1}{g+1}\right) \quad (\epsilon_r \geq 6) \quad (4.5-12)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} H &= \operatorname{ch}\left[\pi\left(\frac{W}{h}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{S}{h}\right)\right] \\ g &= \operatorname{ch}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{S}{h}\right) \end{aligned}\right\} \quad (4.5-13)$$

用同样方法可求得奇模耦合微带到单微带的变换式:

$$\left(\frac{W}{h}\right)_{ee} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2H-g-1}{g-1}\right) + \frac{1}{\pi} \operatorname{arcsinh}\left(1 + 2\frac{W/h}{S/h}\right) \quad (\epsilon_r \geq 6) \quad (4.5-14)$$

图 4.5-8 示出由式 (4.5-12) 和 (4.5-14) 求得的耦合微带尺寸与相应单微带尺寸之间的关系曲线。若给定耦合微带的尺寸要求其奇、偶模阻抗，则可先由式 (4.5-12)、(4.5-14) 或图 4.5-8 (b) 求出相应单微带的尺寸 $(W/h)_{ee}$ 和 $(W/h)_{eo}$ ，然后由单微带公式或图表求得相应的单微带特性阻抗 Z_{0e}^{ee} 和 Z_{0o}^{ee} ，两倍之即得到 Z_{0o} 和 Z_{0e} 值。

表 4.5-1 给出由上述方法算得的部分耦合微带奇、偶模阻抗数据，供算题时参考。

表 4.5-1 耦合微带奇、偶模阻抗数据

$\frac{S}{h}$	$\frac{W}{h} = 0.1$		0.5		1.0		1.5		2.0	
	Z_{0o}	Z_{0e}	Z_{0o}	Z_{0e}	Z_{0o}	Z_{0e}	Z_{0o}	Z_{0e}	Z_{0o}	Z_{0e}

$\epsilon_r = 1.00$

0.05	101.16	360.88	69.18	243.44	58.94	175.97	52.94	138.88	48.49	115.17
0.1	121.28	352.64	79.85	239.14	66.64	173.10	59.08	137.54	53.58	114.26
0.5	184.26	315.65	116.09	215.47	91.75	160.75	78.26	129.38	68.94	108.66
1.0	213.02	295.50	134.85	200.85	104.51	152.10	87.68	123.76	76.25	104.72
1.5	227.15	286.28	144.70	194.04	111.24	147.93	92.63	121.00	80.08	102.76
2.0	235.17	282.02	150.57	190.88	115.32	145.98	95.66	119.69	82.43	101.83

$\epsilon_r = 9.00$

0.05	46.30	149.80	31.46	96.86	26.51	67.94	23.51	52.59	21.26	43.00
0.1	55.48	145.98	36.31	94.98	29.93	67.02	26.17	52.04	23.40	42.64
0.5	83.43	129.04	52.37	84.72	40.72	61.59	34.16	48.72	23.58	40.40
1.0	95.33	119.94	60.09	78.46	45.73	58.01	37.67	46.45	32.22	38.84
1.5	100.67	115.81	63.74	76.56	48.09	56.29	39.32	45.34	33.44	38.06
2.0	103.38	113.90	65.66	74.22	49.34	55.49	40.20	44.81	34.09	37.69

(续)

$\frac{S}{h}$	$\frac{W}{h} = 0.1$		0.5		1.0		1.5		2.0	
	Z_{0o}	Z_{0e}	Z_{0o}	Z_{0e}	Z_{0o}	Z_{0e}	Z_{0o}	Z_{0e}	Z_{0o}	Z_{0e}
$\epsilon_r = 9.60$										
0.05	44.88	145.41	30.49	93.96	25.69	65.88	22.78	50.98	20.59	41.68
0.1	53.79	141.70	35.19	92.13	29.01	64.99	25.36	50.45	22.67	41.33
0.5	80.92	125.23	50.77	82.18	39.47	59.72	33.08	47.23	28.66	39.16
1.0	92.48	116.38	58.26	76.10	44.33	56.24	36.51	45.03	31.23	37.64
1.5	97.66	112.37	61.81	73.28	46.61	54.58	38.11	43.95	32.41	36.89
2.0	100.29	110.51	63.67	71.98	47.83	53.80	38.96	43.44	33.04	36.53

耦合微带的奇、偶模阻抗可按如下关系近似求得：

$$\frac{(Z_{0o,0e})_{\text{已知}}}{(Z_{0o,0e})_{\text{未知}}} \approx \sqrt{\frac{(\epsilon_e)_{\text{未知}}}{(\epsilon_e)_{\text{已知}}}} \quad (4.5-14)$$

式中 ϵ_e 为基片的有效介电常数。

2. 相速度和波导波长

由于耦合微带的奇、偶模有效介电常数不同，所以奇、偶模相速度也不同，即有

$$v_{po} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{eo}}} \quad (4.5-15)$$

$$v_{pe} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{ee}}} \quad (4.5-16)$$

式中 c 为真空中光速。由图 4.5-2 所示场分布也可以看出，由于 $\epsilon_{eo} < \epsilon_{ee}$ ，所以 $v_{po} > v_{pe}$ ，而且耦合微带本身也存在色散特性，这样将使由耦合微带做成的电路的性能变坏，工作频带不宽。为了改善其电路性能，就需要采取速度补偿措施，设法减慢奇模速度，使之与偶模速度趋于相等。

奇、偶模波导波长分别为

$$\lambda_{go} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{eo}}} \quad (4.5-17)$$

$$\lambda_{ge} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{ee}}} \quad (4.5-18)$$

式中 λ_0 为自由空间波长。

耦合微带的介质损耗和导体损耗，可用与单根微带相似的公式计算。作为一种近似考虑，输入阻抗为 50Ω 的耦合微带元件的插入损耗可以取奇偶模损耗的平均值。

4.6 微带线的不均匀性

前面各节我们分析了均匀单根带状线、微带和耦合带状线、耦合微带的主要特性。

当用这些微带线结构来制成各种元器件时，必然要遇到一些微带线的不均匀性，而这些不均匀性的如何利用和处理将关系到电路的性能。而且微带线中的不均匀性（或称不连续性）的处理比波导和同轴线中的不均匀性的处理更为重要，因为微带线电路一旦制做好以后，一般就不容易调节或调谐了。

微带线的不均匀性的型式很多，常见的有中心导体带的各种开路端、间隙、宽度突变、直角拐弯、T形接头和十字接头等。

微带线的不均匀性的边界条件一般都很复杂，难以用场的方法求解。由于不均匀性的尺寸通常比微带线中的波导波长小得多，所以可以用集总参数元件等效电路来近似表示，并求解出这些等效电路参数，设计时就按照此等效电路进行计算。而等效电路参数的求解一般是近似的，因此在运用这些等效电路参数设计电路时，应当注意其使用范围和近似程度。

微带线中的不均匀性是由于中心导体带尺寸的突变所产生的。因此容易理解。在不均匀性附近，电场和磁场的分布将改变。这种改变了的电场将引起分布电容的改变，换言之，可以用等效电容来表示电场的改变；而变化了的磁场分布则可以用等效电感来表示。微带线不均匀性的分析就归结于这些等效电容和等效电感的求值。这些不均匀性的等效电容和等效电感一般很小（小于 0.1pF 和 0.1nH ），但它们对电路性能的影响却很大，尤其是在微波频率的高频段（例如 10GHz 以上）。不均匀性等效电容和等效电感的求值方法也有准静态方法和全波分析法两种。本节简单介绍不均匀性的准静态求值方法与一些常见的不均匀性的等效电路及其近似计算公式。

1. 不均匀性的计算方法

(1) 利用矩形波导的计算结果

a. 平板波导模型

前面讲过，用保角变换法可以求得带状线的分布电容，从而求得其特性阻抗公式。通过保角变换，并考虑到导体带的厚度及其边缘电容，实际宽度为 W 的带状线截面转换成宽度为 D 的平板波导截面，如图 4.6-1 所示。变换后的等效带宽 D 与实际带状线尺寸的关系为^[20]：



图 4.6-1 带状线截面及其等效平板传输线

系为^[20]：

$$D = b \cdot \frac{K(k)}{K(k')} + \frac{t}{\pi} \left[1 - \ln \left(\frac{2t}{b} \right) \right] \quad \left(\frac{W}{b} \leq 0.5 \right) \quad (4.6-1a)$$

式中， K 为第一类全椭圆积分，其模数

$$k = \operatorname{th} \left(\frac{\pi W}{2b} \right), \quad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

当 $W/b \geq 0.5$ 时，大致相当于特性阻抗小于 100Ω ， D 的值变为

$$D = W + \frac{2b}{\pi} \ln 2 + \frac{i}{\pi} \left[1 - \ln \left(\frac{2t}{b} \right) \right] \quad \left(\frac{W}{b} \geq 0.5 \right) \quad (4.6-1b)$$

图4.6-1(b)的等效平板传输线结构可以看成背靠背放置的两条完全相同的平板波导。在分析平衡的不均匀性时，若以归一化量来描述时，我们只需要考虑结构的一半就可以了，于是得到图4.6-2所示带状线的近似模型。这种带状线平板波导模型通常称为惠勒(Wheeler)模型。有了这个平板波导模型以后，就可以将矩形波导不均匀性的等效电路和计算公式用来表示带状线的不均匀性，并可直接移植到微带的不均匀性上去。

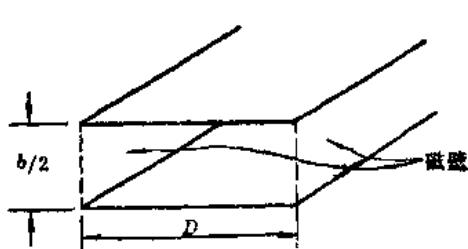
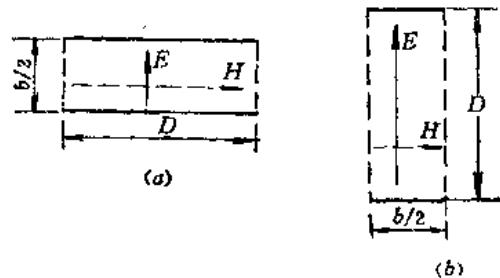


图4.6-2 带状线的近似模型

图4.6-3 带状线的近似模型及其巴比涅特等效
(a) 近似模型; (b) 巴比涅特等效模型。

b. 巴比涅特(Babinet)等效方法

巴比涅特原理是一种对偶原理。它指出，假如电场 E 用磁场 H 代替，而磁场 H 用电场 $-E$ 代替，则经变换后的不均匀性结构的等效电路仅仅是原先不均匀性结构的对偶等效电路，相应的对偶元件的数值是相同的。据此原理可导出带状线的对偶模型。图4.6-3(a)为带状线近似模型的截面图，图4.6-3(b)即为其巴比涅特等效近似模型。

(2) 数值计算法

用数值法求微带线不均匀性等效电路及其参数，主要是用格林函数法，即求不均匀区域内的格林函数。这可以先求出所研究边界值问题的格林函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ，则中心导体带上的电位为

$$\Psi = \int_S \sigma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' \quad (4.6-2)$$

而中心导体带上的电位是已知的， $\Psi = U$ ，即可用数值法求解积分方程(4.6-2)解出 $\sigma(\mathbf{r}')$ 。于是中心导体带上单位长度电荷为

$$Q = \int_S \sigma(\mathbf{r}') ds' \quad (4.6-3)$$

令 $U = 1V$ 即可求得单位长度电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \int_S \sigma(\mathbf{r}') ds' \quad (4.6-4)$$

另一种常用的数值计算法是矩阵法，即把中心导体带分成许多小方块，每个小方块上带有电荷 σ_i ，则导体带上任一点 j 的电位等于每个小方块上的电荷在 j 点产生的电位之和，此和等于导体带上的电压 $U = 1V$ ，即

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i D_{ji} = 1 \quad (4.6-5)$$

式中 D_{ji} 为 i 点上的单位源在 j 点产生的电位，所以式 (4.6-5) 表示导体带上任一点 j 的电位。

式 (4.6-5) 只是对 j 点上的小方块而言。如果将导体带上所有小方块都写出来则可得到一组联立方程式，并可用矩阵表示之，即有

$$\{U\} = \{D\}\{\sigma\} \quad (4.6-6)$$

电荷矩阵 $\{\sigma\}$ 则可求得为

$$\{\sigma\} = \{D\}^{-1}\{U\} \quad (4.6-7)$$

于是中心导体带电容为

$$C = \sum_{i=1}^N \sigma_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D'_{ji} \quad (4.6-8)$$

式中 D'_{ji} 是矩阵 $\{D\}^{-1}$ 的元素。

2. 带状线的不均匀性

(1) 开路端

图 4.6-4(a) 表示带状线中心导体带的开路端。这种开路端不连续性常出现在谐振器、匹配短截线、平行耦合线滤波器等带状线电路中。在开路端将引起电荷的积累，引起电力线的变形，产生边缘电场。这种边缘电场可用一电容来等效，也可用一段开路线 Δl 来表示，如图 4.6-4(b) 所示。此延长的 Δl 可用下式计算^{[21][22]}：

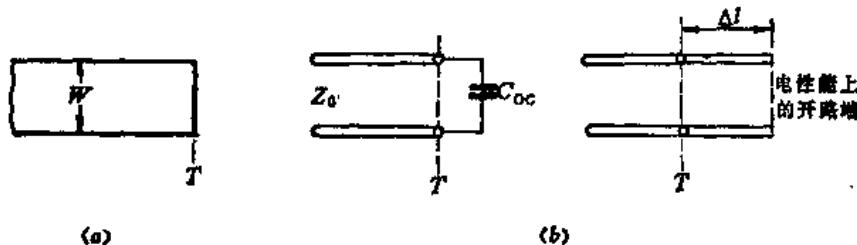


图 4.6-4 开路端及其等效电路

$$\beta\Delta l = \arctg\left(\frac{\delta + 2W}{4\delta + 2W} \operatorname{tg}(\beta\delta)\right) \quad (4.6-9a)$$

式中， W 为中心导体带宽度； δ 为无限宽导体情况下的延长值， $\delta = b \ln 2/\pi$ ； $\beta = 2\pi/\lambda$ ， λ 为带状线中的波长， $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r}$ 。

对于大多数实际尺寸 ($\beta\delta$ 很小)，式 (4.6-9a) 可用下式近似表示：

$$\Delta l = \delta \left(\frac{\delta + 2W}{4\delta + 2W} \right) \quad (4.6-9b)$$

式 (4.6-9) 表明， Δl 近似与频率和 ϵ_r 无关。当 $\beta\delta \leq 0.3$ 时，上两式只相差 3%。计算表明，当 W/b 从 0.15 → 1.95 时， Δl 从 $0.095 b \rightarrow 0.19 b$ ，接近于 $0.22 b$ 。

开路端电容 C_{oe} 则可由 $\beta\Delta l$ 值按下式计算：

$$C_{oe} = \frac{\beta\Delta l}{\omega Z_0} \quad (4.6-10)$$

式中， ω 为角频率， Z_0 是带状线的特性阻抗。

(2) 圆孔

带状线中心导体带上的圆孔并非寄生的不连续性，而纯粹是为了提供带状线电路（如滤波器）所需要的电抗。由于圆孔中激励的模主要是 TM_{01} 模，所以圆孔的电抗主要是串联电感。图 4.6-5(a) 所示圆孔的边缘等效电路如图 4.6-5(b) 所示，其电纳 B_A

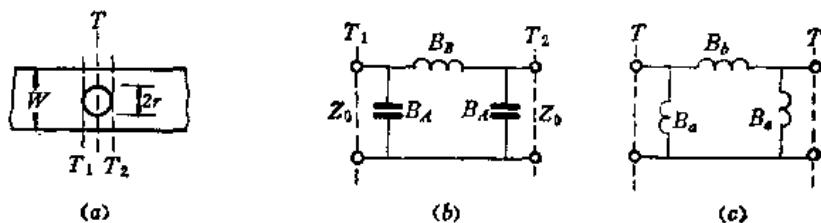


图 4.6-5 导体带上的圆孔及其等效电路

和 B_B 的归一化值分别为⁽²⁰⁾

$$\bar{B}_A = \frac{1 + \bar{B}_a \operatorname{ctg} \beta r}{\operatorname{ctg} \beta r - \bar{B}_a} \quad (4.6-11a)$$

$$2\bar{B}_B = \frac{1 + 2\bar{B}_a \operatorname{ctg} \beta r}{\operatorname{ctg} \beta r - 2\bar{B}_a} - \bar{B}_A \quad (4.6-11b)$$

式中

$$\bar{B}_a = -\frac{3}{16\beta} \frac{bD}{r^3}, \quad \bar{B}_s = \frac{1}{4\bar{B}_a} \quad (4.6-12)$$

也可以采用图 4.6-5(c) 所示中心线等效电路。此种情况下，等效电路中的三个电纳都是电感性的，由式 (4.6-12) 表示。式中 D 由式 (4.6-1) 决定。计算表明，圆孔的半径 r 增大，则 \bar{B}_a 减小， \bar{B}_s 增加。

(3) 间隙

图 4.6-6(a) 所示中心导体带中的间隙在设计隔直流线路、端耦合滤波器以及与谐振器的耦合元件等时需用到。这种不连续性主要是提供容性串联电抗，它与无限宽平板波导上的无限宽隙缝相似。后者可由矩形波导 E 面耦合槽的结果求得。中心导体带中间隙的等效电路如图 4.6-6(b) 所示 II 型网络，其串联电容 C_{12} 由构成间隙的带状导体之间的电场形成，并联电容则由间隙边缘电场的畸变形成。显然，当间隙宽度 S 增大时， C_{12} 减小至零， C_1 则趋于开路端的等效电容。其归一化电纳为⁽²³⁾

$$\bar{B}_A = \frac{1 + \bar{B}_a \operatorname{ctg}(\beta S/2)}{\operatorname{ctg}(\beta S/2) - \bar{B}_a} = \frac{\omega C_1}{Y_0} \quad (4.6-13)$$

$$2\bar{B}_B = \frac{1 + (2\bar{B}_a + \bar{B}_s) \operatorname{ctg}(\beta S/2)}{\operatorname{ctg}(\beta S/2) - (2\bar{B}_a + \bar{B}_s)} - \bar{B}_A = \frac{2\omega C_{12}}{Y_0} \quad (4.6-14)$$

式中

$$\lambda \bar{B}_a = -2b \operatorname{lnch}(\pi S/2b) \quad (4.6-15a)$$

$$\lambda \bar{B}_s = b \operatorname{lnch}(\pi S/2b) \quad (4.6-15b)$$

显然，随着间隙宽度 S 增大， \bar{B}_A 增大， \bar{B}_s 减小。计算得到，对于 $S/W = 1$ 情况， \bar{B}_A 为 0.18， \bar{B}_s 为 0.007。

也可以采用图 4.6-6(c) 所示中心线等效电路，其电纳 \bar{B}_a 和 \bar{B}_s 由式 (4.6-15)

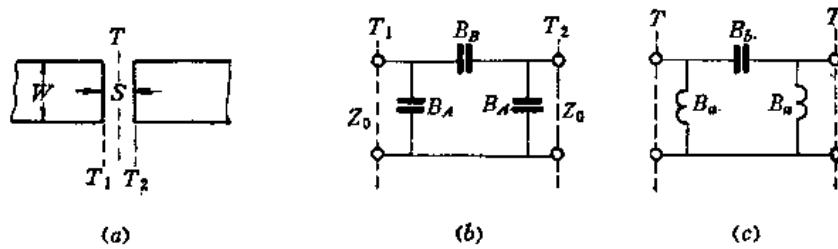


图4.6-6 导体带间隙及其等效电路

表示。

(4) 宽度突变

中心导体带宽度突变又称宽度跃变、宽度阶梯，如图4.6-7(a)所示。这种不连续性是由两种不同宽度即不同阻抗线的接头形成的，在设计匹配变换器、耦合器、滤波器和过渡器等电路时常用到。其等效电路由一串联感抗和两线段 l_1 和 l_2 组成，如图4.6-7(b)所示。长度 l_1 和 $l_2 (=l_1)$ 是考虑到有效接头平面向较小宽度（即高阻抗）的线偏移的结果。参数 X 、 l_1 和 l_2 的近似式为^[18]

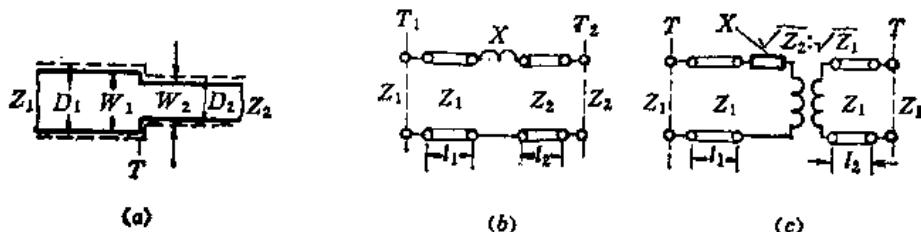


图4.6-7 宽度突变及其等效电路

$$\frac{X}{Z_1} = \frac{2D_1}{\lambda} \ln \csc \left(\frac{\pi D_2}{2D_1} \right) \quad (4.6-16)$$

$$l_1 = -l_2 = \frac{b \ln 2}{\pi}$$

式中

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{Z_{02}}{Z_{01}}$$

Z_{01} 和 Z_{02} 分别为宽度为 W_1 和 W_2 的带状线的特性阻抗， D 是近似模型的等效中心带宽度。如果对端口的阻抗进行归一化，则可用图4.6-7(c)所示包含理想变压器的等效电路来表示。

(5) 弯曲

中心导体带的弯曲和拐角在带状线电路图形布线时常采用，用以改变线路的走向。图4.6-8(a)所示中心导体带的弯曲的等效电路如图4.6-8(b)所示。这种等效电路适用于任意角度的拐弯。 X_a 和 X_b 的理论公式可由平板波导 E 面弯曲通过巴比涅特等效方法求得。对于 90° 拐弯则为^[28]

$$\begin{aligned} \lambda \bar{X}_a &= D \left[1.756 + 4 \left(\frac{D}{\lambda} \right)^2 \right] \\ \lambda \bar{X}_b &= D \left[0.0725 - 0.159 \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.6-17)$$

任意角度弯曲的等效电抗为

$$\left. \begin{aligned} \lambda \bar{X}_a &= 2D \left[\psi(x) + 1.9635 - \frac{1}{x} \right] \\ \bar{X}_b &= -\frac{\lambda}{2\pi D} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.6-18)$$

式中， θ 的单位为度， $x = \frac{1}{2} [1 + \theta / 180]$, $\left(\frac{1}{2} < x < 1 \right)$,

$$\psi(x) = 0.5223 \ln x + 0.394 \quad (4.6-19)$$

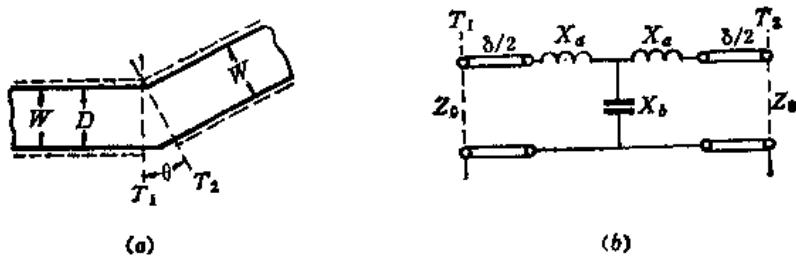


图4.6-8 任意角度的弯曲及其等效电路

需要指出的是，参考面 T_1 和 T_2 分别与弯曲两边的导体带垂直，其交点在等效宽度 D 的连接点处而不是实际导体带宽 W 的连接处，因此在 T 形网络两边应当分别加上一段 $\delta/2$ 的线，这里

$$\delta = (D - W) \operatorname{tg} \theta / 2 \quad (4.6-20)$$

(6) T形接头

T形接头是带状线电路中最重要，使用最多的不连续性，它在大多数电路中都会出现，如阻抗匹配电路、短截线、滤波器和分支线耦合器等。图4.6-9(a) 表示中心导体带的T形接头，其等效电路如图(b) 所示。参数 X_a 、 X_b 和 n 的值，可利用矩形波导 E 面 T形接头的结果，经过巴比涅特等效方法求得为^[21]

$$\frac{X_a}{Z_1} = \bar{X}_a = -\frac{D_s^2}{D_1 \lambda} (0.785n)^2 \quad (4.6-21)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_b}{Z_1} = \bar{X}_b &= -\frac{\bar{X}_a}{2} + \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{B_t}{2Y_1} + \frac{2D_1}{\lambda} \left[\ln 2 + \frac{\pi D_s}{6D_1} + \frac{3}{2} \left(\frac{D_1}{\lambda} \right)^2 \right] \right\} \quad \left(\frac{D_s}{D_1} < 0.5 \right) \\ \frac{X_b}{Z_1} = \bar{X}_b &= -\frac{\bar{X}_a}{2} + \frac{2D_1}{\lambda n^2} \left[\ln \frac{1.43 D_1}{D_s} + 2 \left(\frac{D_1}{\lambda} \right)^2 \right] \quad \left(\frac{D_s}{D_1} > 0.5 \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.6-22)$$

式中，

$$n = \sin(\pi D_s / \lambda) / (\pi D_s / \lambda)$$

$$\frac{B_t}{2Y_1} = \frac{2D_1}{\lambda} \left[\ln \csc \frac{\pi D_s}{2D_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{D_1}{\lambda} \right)^2 \cos^4 \frac{\pi D_s}{2D_1} \right] \quad (4.6-23)$$

在三个端口的阻抗归一化为 1 的情况下，

$$X'_a = X_a / Z_1, \quad X'_b = X_b / Z_1, \quad n' = n \sqrt{Z_1 / Z_3} \quad (4.6-24)$$

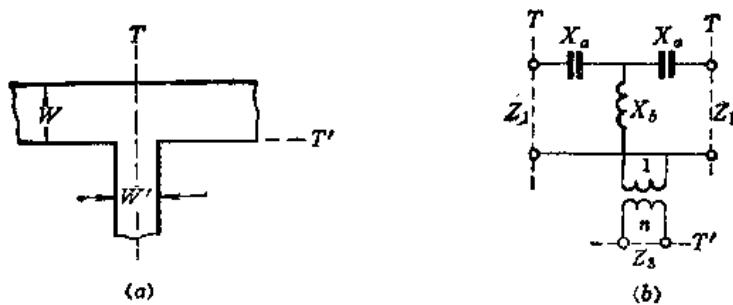


图4.6-9 T形接头及其等效电路

3. 微带的不均匀性

微带中心导体带的各种不均匀性构造及其等效电路与带状线相似。下面分别介绍常见的微带不均匀性及其等效电路参数的近似表示式。

(1) 开路端

微带中心导体带的开路端在谐振器、短截线和平行耦合线谐振器滤波器等微带电路设计时常遇到。其结构与等效电路如图 4.6-4 所示。开路端电容的等效长度 Δl 的近似式为^{[15][26]}

$$\frac{\Delta l}{h} = 0.412 \left\{ \frac{\epsilon_r + 0.3}{\epsilon_r - 0.258} \right\} \left(\frac{W/h + 0.264}{W/h + 0.8} \right) \quad (4.6-25)$$

式中， ϵ_r 为有效介电常数。当 $W/h \geq 0.2$ ， $2 \leq \epsilon_r \leq 50$ 时，上式的计算误差小于 4%。

开路电容 C_{oc} 可由 $\Delta l/h$ 值按下式求得

$$\frac{C_{oc}}{W} = \frac{\Delta l}{h} \cdot \frac{1}{W/h} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{cZ_0} \quad (4.6-26)$$

式中， c 为光速。对于 $\epsilon_r = 9.6$ 陶瓷基片上的 50Ω 线， C_{oc}/W 值求得为 55pF/m 。图 4.6-10 表示开路端电容与形状比 W/h 的关系曲线。

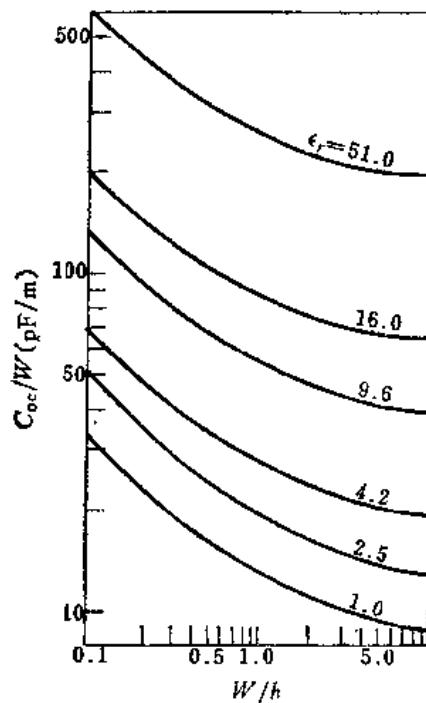


图4.6-10 微带开路端电容曲线

(2) 间隙

微带中心导体带上的间隙常出现在隔直流电流、端耦合滤波器与谐振器等电路中，其等效电路为一Π形网络，如图4.6-11所示。图(b)中的 C_1 和 C_{12} 可用间隙的对称激励电容 C_e 和反对称激励电容 C_o 表示为^[26]

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} C_e \\ C_{12} &= \frac{1}{2} \left(C_o - \frac{1}{2} C_e \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.6-27)$$

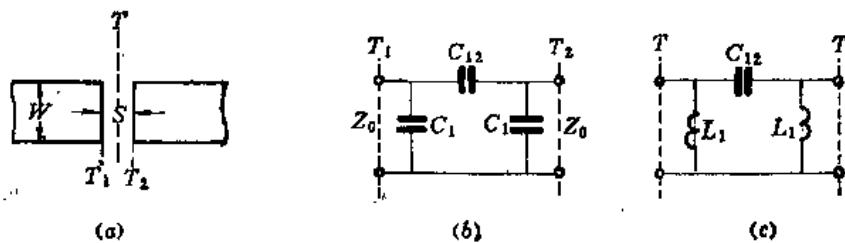


图4.6-11 微带中心导体带间隙及其等效电路

对于 $\epsilon_r = 9.6$, $0.5 \leq W/h \leq 2$ 的情况， C_e 和 C_o 表示式为

$$\frac{C_o}{W} = \left(\frac{S}{W} \right)^{m_o} \exp(K_o) \quad (\text{pF/m}) \quad (4.6-28a)$$

$$\frac{C_e}{W} = \left(\frac{S}{W} \right)^{m_e} \exp(K_e) \quad (\text{pF/m}) \quad (4.6-28b)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} m_o &= \frac{W}{h} \left(0.267 \ln \frac{W}{h} - 0.3853 \right) \\ K_o &= 4.26 - 0.631 \ln \frac{W}{h} \end{aligned} \right\} \quad \left(0.1 \leq \frac{S}{W} \leq 1.0 \right)$$

$$\left. \begin{aligned} m_e &= 0.8675 \\ K_e &= 2.043 \left(\frac{W}{h} \right)^{0.12} \end{aligned} \right\} \quad \left(0.1 \leq \frac{S}{W} \leq 0.3 \right)$$

$$\left. \begin{aligned} m_e &= \frac{1.565}{(W/h)^{0.16}} - 1 \\ K_e &= 1.97 - \frac{0.03}{W/h} \end{aligned} \right\} \quad \left(0.3 \leq \frac{S}{W} \leq 1.0 \right)$$

对于 $2.5 \leq \epsilon_r \leq 15$ 的情况， C_e 和 C_o 可用如下转换关系求得

$$C_e(\epsilon_r) = C_e(9.6)(\epsilon_r/9.6)^{0.8}$$

$$C_o(\epsilon_r) = C_o(9.6)(\epsilon_r/9.6)^{0.8}$$

上述各式误差小于7%。如果 $\epsilon_r = 8.875$, $W = h = 0.508\text{mm}$, 当 S 从 0.02mm 变至 1.0mm 时， C_{12} 值从 0.032 减至 0.0015(pF) 。

图4.6-12表示微带间隙电容与尺寸的关系曲线。

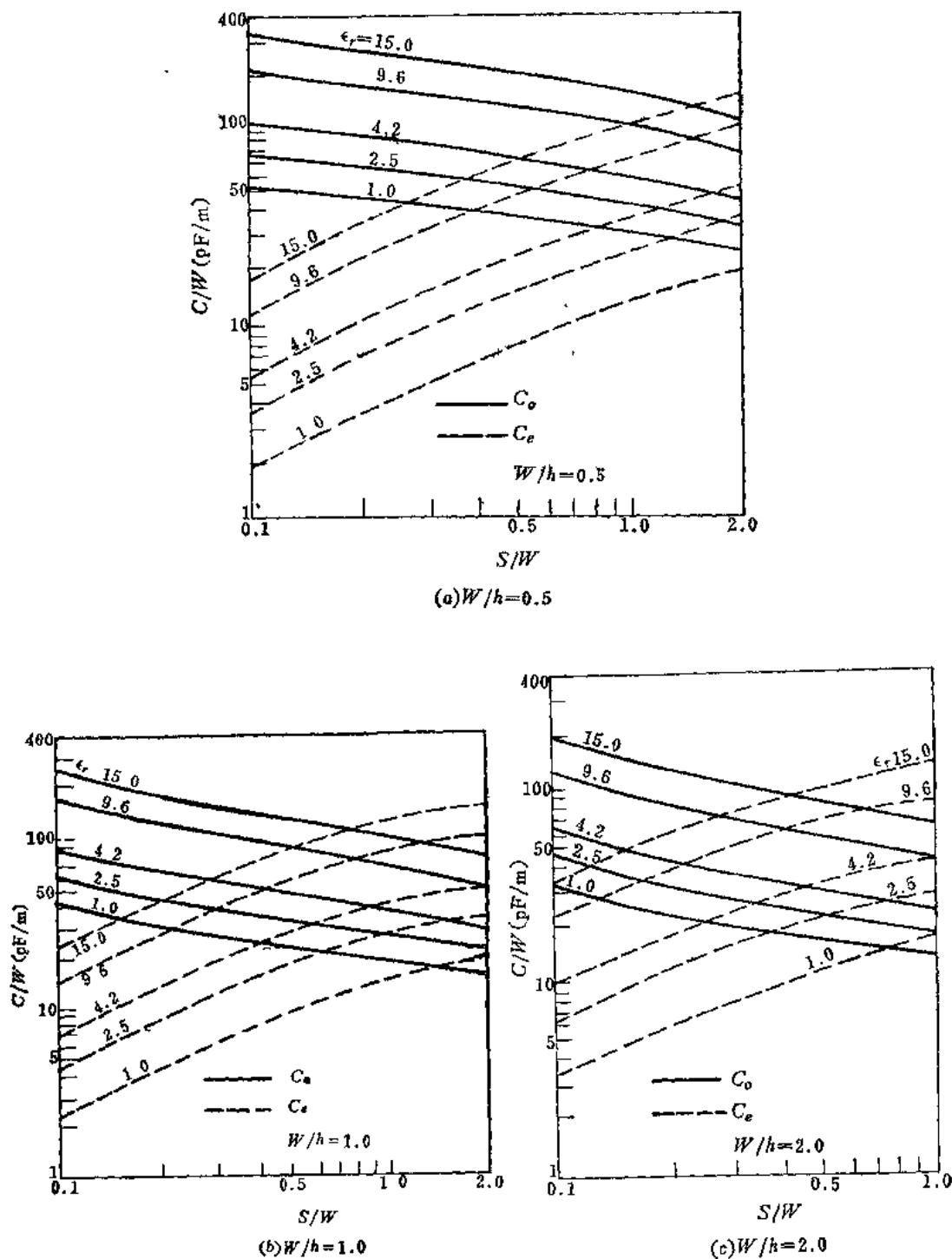


图4-6-12 微带间隙电容曲线

(3) 切口

微带中心导体带上的切口及其等效电路如图4.6-13所示。这种不连续性可用来获得一纯串联电感，可以用来补偿微带电路中的不连续性电容或微调微带的长度作短截线。串联电感 L_N 的值近似计算式为⁽²⁷⁾

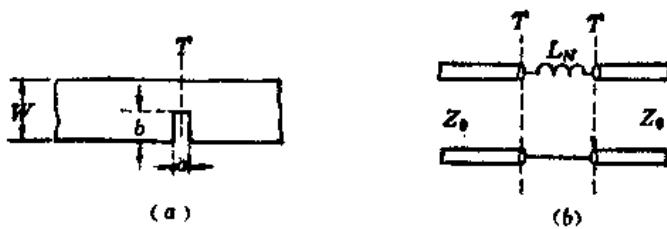


图4.6-13 微带中心导体带切口及其等效电路

$$\frac{L_N}{h} = \frac{\mu_0 \pi}{2} \left[1 - \frac{Z_{01}}{Z'_{01}} \right]^2 \quad (\mu\text{H/m}) \quad (4.6-29)$$

式中, Z_{01} 为宽度为 W 的空气微带特性阻抗; Z'_{01} 为宽度为 $(W - b)$ 的空气微带特性阻抗。上式的适用范围为 $0 \leq b/W \leq 0.9$ 和 $a \leq h$ 。

(4) 宽度突变

微带中心导体带宽度突变及其等效电路如图4.6-14所示。这种不连续性存在于两种不同特性阻抗的微带连接处, 在设计匹配变换器、耦合器、滤波器和过渡器时要用到。需要指出注意的是, 微带宽度突变的等效电路不同于带状线宽度突变的等效电路。它由接头平面内的并联电容 C_t 及其两边的串联电感 L_1 和 L_2 组成。图4.6-15表示对称突变(或称对称阶梯)的参数曲线。 C_t 的表示式为⁽²⁸⁾⁽²⁹⁾

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_t}{\sqrt{W_1 W_2}} = (4.386 \ln \epsilon_r + 2.33) \frac{W_2}{W_1} - 5.472 \ln \epsilon_r - 3.17 \quad (\text{pF/m}) \\ \quad \left(\epsilon_r \leq 10, 1.5 \leq \frac{W_2}{W_1} \leq 3.5 \right) \\ \\ \frac{C_t}{\sqrt{W_1 W_2}} = 56.461 \ln \left(\frac{W_2}{W_1} \right) - 44 \quad (\text{pF/m}) \\ \quad \left(\epsilon_r = 9.6, 3.5 \leq \frac{W_2}{W_1} \leq 10 \right) \end{array} \right. \quad (4.6-30)$$

上式的误差分别小于 10% 和 0.5%。

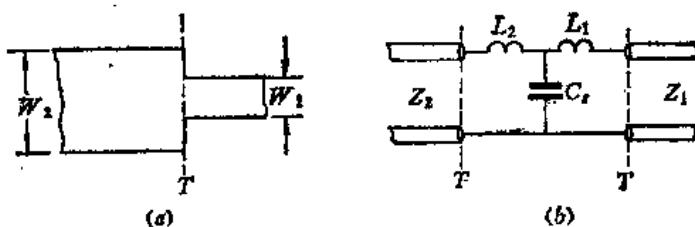


图4.6-14 微带宽度阶梯及其等效电路

电感 L_1 和 L_2 的表示式为

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{L_{\omega_1} - L_t}{L_{\omega_1} + L_{\omega_2}} \\ L_2 &= \frac{L_{\omega_2} - L_t}{L_{\omega_1} + L_{\omega_2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.6-31)$$

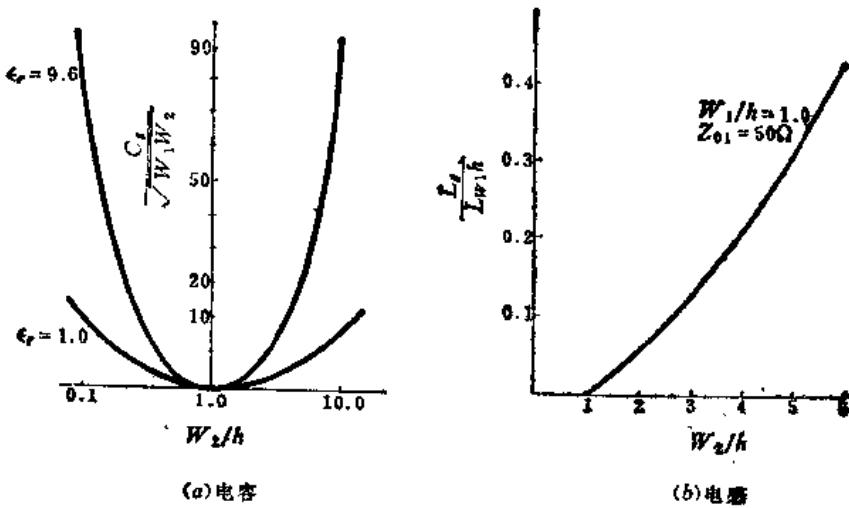


图4.6~15 微带宽度阶梯的电容和电感曲线

式中 L_{w_1} 和 L_{w_2} 分别为宽度 W_1 和 W_2 的微带单位长度电感，且

$$L_w = \frac{Z_0 \sqrt{\epsilon_0}}{c} \quad (\text{H/m}) \quad (4.6-32)$$

式中 c 为光速; L_s 的近似式为⁽²⁰⁾

$$\frac{L_s}{h} = 40.5 \left(\frac{W_2}{W_1} - 1.0 \right) - 32.57 \ln \frac{W_2}{W_1} + 0.2 \left(\frac{W_2}{W_1} - 1 \right)^4 \quad (4.6-33)$$

对于 $W_2/W_1 \leq 5$, $W_1/h = 1.0$ 的情况, 上式的误差小于 5%。计算表明, C_r 和 L_r 都随 W_2/W_1 的增大而增大。对于 $\epsilon_r = 9.6$, $W_2 = 2W_1$ 情况, $C_r/hC_{\infty 1}$ 和 $L_r/hL_{\infty 1}$ 都是 0.5, 而 $C_{\infty 1}$ 是宽度为 W_1 的微带单位长度电容。

(5) 直角拐弯

直角拐弯在微带电路布线设计时常需采用,其结构与等效电路如图 4.6-16 所示。 C_b 和 L_b 近似式如下^[80]:

$$\frac{C_b}{W} \text{ (pF/m)} = \begin{cases} \frac{(14\epsilon_0 + 12.5)W/h - (1.83\epsilon_0 - 2.25)}{\sqrt{W/h}} + \frac{0.02\epsilon_0}{W/h}, & (W/h < 1) \\ (9.5\epsilon_0 + 1.25)W/h + 5.2\epsilon_0 + 7.0, & (W/h \geq 1) \end{cases} \quad (4.6-34)$$

$$\frac{L_b}{L} (\text{ nH/m}) = 100(4\sqrt{W/h} - 4.21) \quad (4.6-35)$$

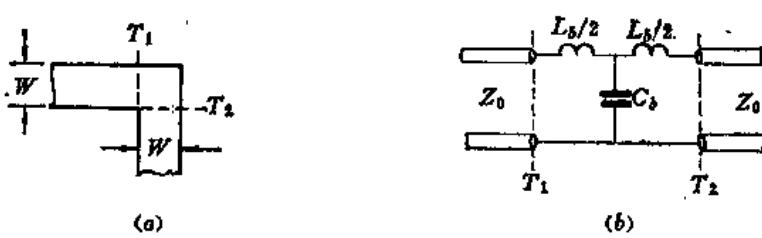


图4.6-16 直角拐弯及其等效电路

对于 $2.5 \leq \epsilon \leq 15$ 和 $0.1 \leq W/h \leq 5$ 情况，式 (4.6-34) 的误差小于 5%，对于 $0.5 \leq W/h \leq 2.0$ ，式 (4.6-35) 的误差约为 3%。

计算表明，对于 $\epsilon=9.9$ ，频率为 5 GHz 时，当 W/h 由 0.1 变至 2.0，则 C_s/W 值由 15.0 变至 200 pF/m， L_b/hL_w 由 0.37 变至 0.5。

在微带电路中，为了获得匹配的直角拐弯，通常将拐角外边切成斜角，以减少拐角电容。目前尚无切角拐弯的理论计算结果。对于 50Ω 微带直角拐弯，通常切成 45° 斜角，切边的长度 W_c 近似为 $1.8W$ ，或者取 $b \approx 0.57W$ ，如图 4.6-17 所示。

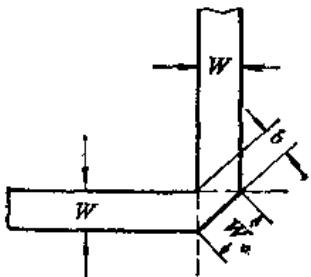
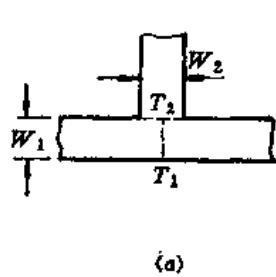
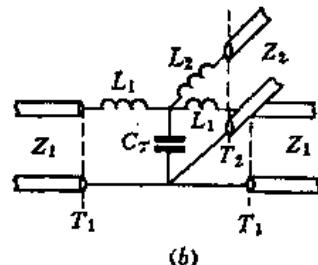


图 4.6-17 匹配直角拐弯



(a)



(b)

图 4.6-18 微带 T 形接头及其等效电路

(6) T形接头

T形接头是微带电路中最重要、使用最多的不连续性，它在大多数微带电路中都会出现，如阻抗匹配器、短截线滤波器和分支线耦合器等。微带的 T形接头与带状线的 T形接头基本上等效，但不完全相同。其结构与等效电路如图 4.6-18 所示。其等效电路由主线串联电感 L_1 、分支线电感 L_2 和接头电容 C_T 组成。在短截线设计时，电感 L_2 起决定短截线长度的重要作用；对于分支线耦合器和高速数字式开关等电路的设计， L_1 和 L_2 同等重要。假如忽略 T形接头的影响，则分支线耦合器的中心频率将偏离计算值约 5%。因此 T形接头的修正在电路设计时必须加以考虑，特别是在频率较高时，由于不连续性电容和电感的影响，将引起接头处参考面的偏移。图 4.6-19 表示 T形接头的不连续性电容和电感曲线。

对于 $\epsilon=9.9$ ，主线阻抗为 50Ω 的 T形接头等效电路参数近似式为^[81]

$$\frac{C_T}{W_1} = \frac{100}{\operatorname{th}(0.0072Z_2)} + 0.64Z_2 - 261 \text{ (pF/m)} \quad (25 \leq Z_2 \leq 100) \quad (4.6-36)$$

式中 Z_2 为分支线的特性阻抗；

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{h} &= -\frac{W_2}{h} \left[\frac{W_2}{h} \left(-0.016 \frac{W_1}{h} + 0.064 \right) + \frac{0.016}{W_1/h} \right] L_{w_1} \text{ (\mu H/m)} \\ &\quad \left(0.5 \leq \left(\frac{W_1}{h}, \frac{W_2}{h} \right) \leq 2.0 \right) \\ \frac{L_2}{h} &= \left\{ \left(0.12 \frac{W_1}{h} - 0.47 \right) \frac{W_2}{h} + 0.195 \frac{W_1}{h} - 0.357 + 0.0283 \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin \left(\pi \frac{W_1}{h} - 0.75\pi \right) \right\} L_{w_2} \text{ (nH/m)} \quad \left(1 \leq \frac{W_1}{h} \leq 2, 0.5 \leq \frac{W_2}{h} \leq 2 \right) \end{aligned} \quad (4.6-37)$$

式中 L_w 为宽度为 W 的微带单位长度电感 (nH/m)，可由式 (4.6-32) 求得。式 (4.6-36) 和 (4.6-37) 的误差小于 5%。对于 $\epsilon=9.9$ 和 $Z_1=50\Omega$ 情况，当 Z_2 从 25 变至 100Ω 时， C_T/W_1 从 300 变至 -20pF/m ；对于 $W_1/h=1.0$ 和 W_2/h 从 0.5 变至 2.0 时，

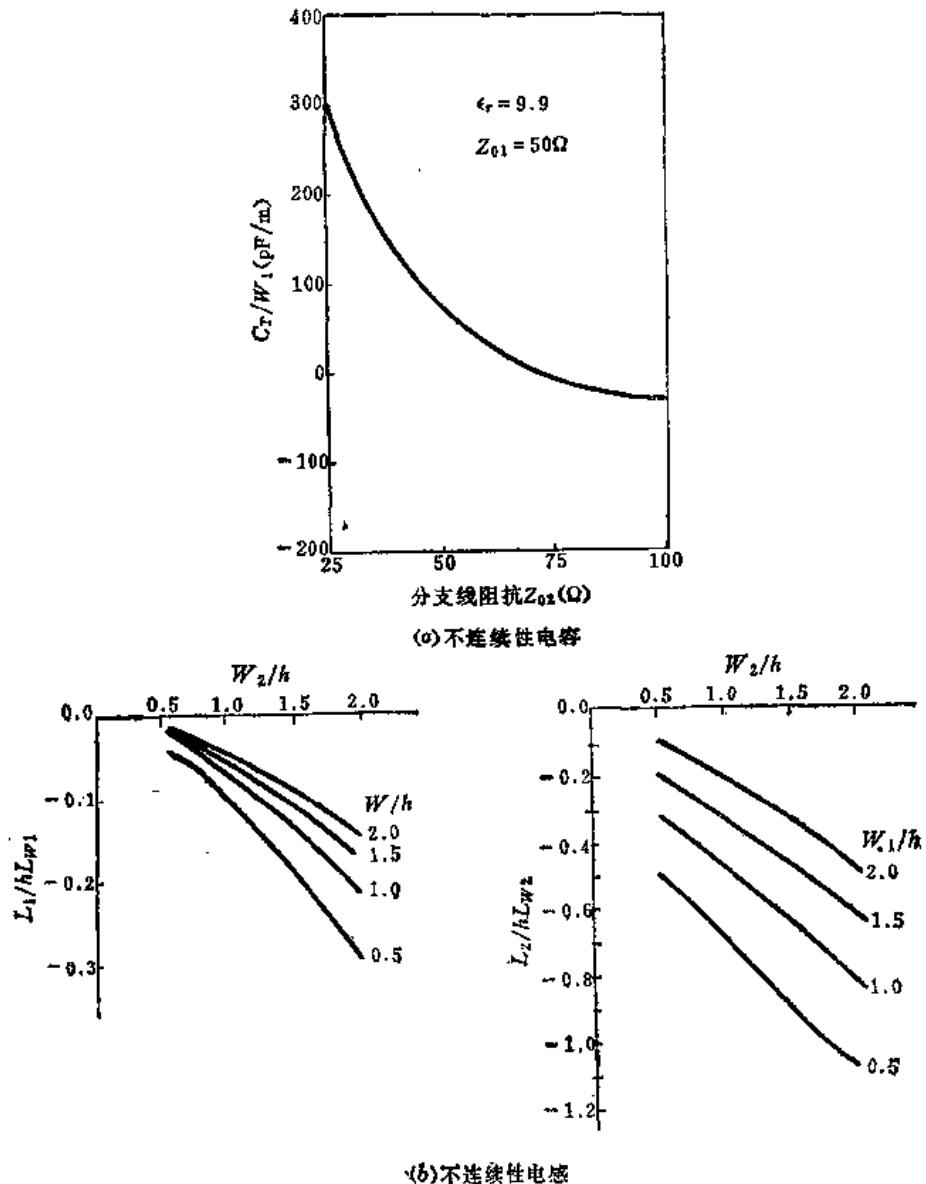


图4.6-19 微带T形接头的电容和电感曲线

L_1/hL_{ω_1} 从 -0.02 变至 -0.22 , 而 L_2/hL_{ω_2} 则从 -0.3 变至 -0.85 。

(7) 十字接头

在微带电路中, 为了实现低阻抗短截线, 常需采用十字接头。例如当一低阻抗短截线的宽度太大, 足以在微带中激励出高次模时, 就可以采用两段短截线并联于主线两边, 此两短截线的阻抗都等于所需模拟短截线阻抗的两倍。十字接头在微带低通滤波器中也要采用。其结构与等效电路如图4.6-20所示, 其不连续性电容和电感曲线如图4.6-21所示。 C 、 L_1 和 L_2 的近似式为^{[20][22]}

$$\begin{aligned} \frac{C}{W_1} &= \frac{1}{4} \left\{ \left[37.61 \frac{W_2}{h} - 13.42 \sqrt{\frac{W_2}{h}} + 159.39 \right] \ln \frac{W_1}{h} + \left(\frac{W_1}{h} \right)^3 + 0.74 \frac{W_2}{h} + 130 \right\} \\ &\cdot \left(\frac{W_1}{h} \right)^{-1/3} - 60 + \frac{0.5}{W_2/h} - 0.375 \frac{W_1}{h} \left(1 - \frac{W_2}{h} \right) \left(\epsilon_r = 9.9, \quad 0.3 \leqslant \frac{W_1}{h} \leqslant 3, \right. \\ &\quad \left. 0.1 \leqslant \frac{W_2}{h} \leqslant 3 \right) \end{aligned} \quad (4.6-38)$$

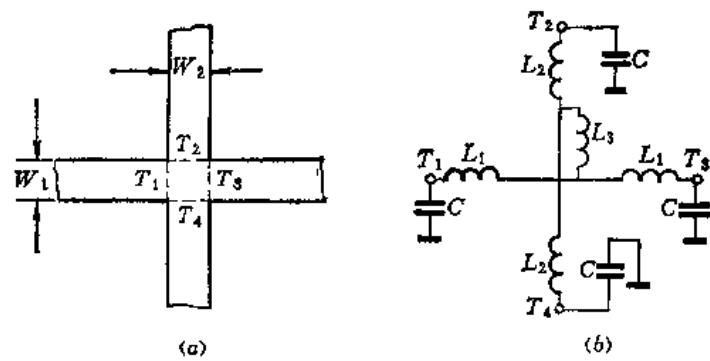


图4.6-20 微带十字接头及其等效电路

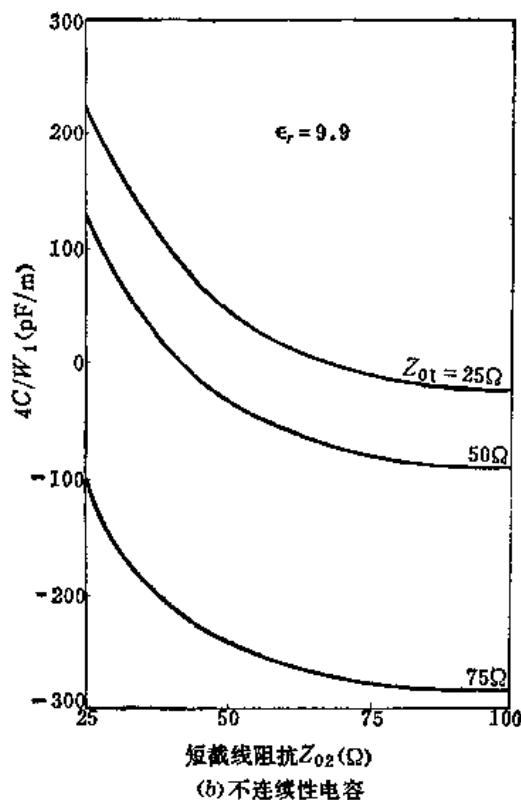
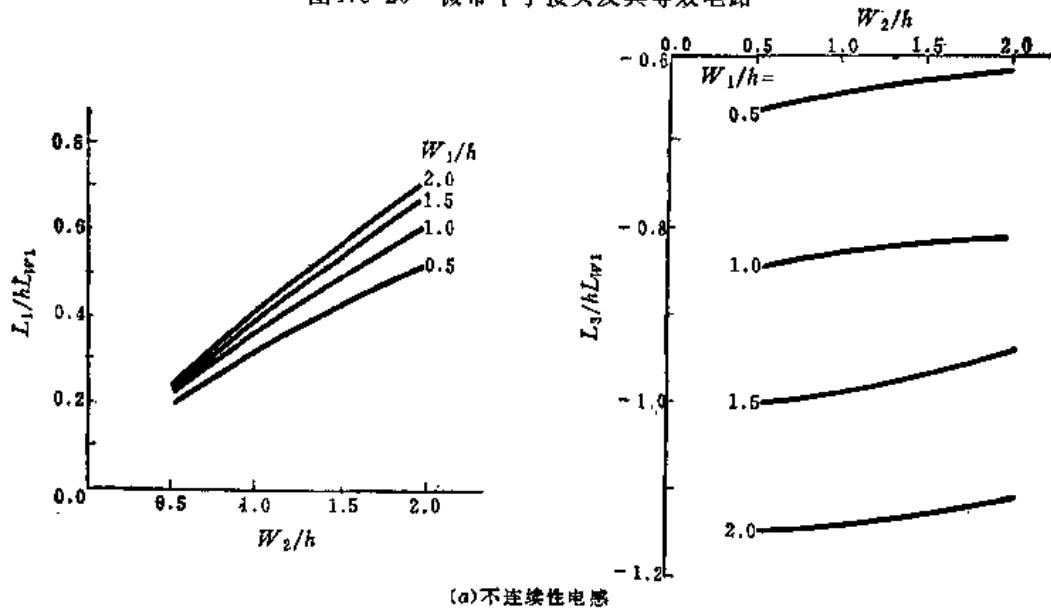


图4.6-21 十字接头的不连续性电容和电感曲线

$$\frac{L_1}{h} = \left\{ \left[165.6 \frac{W_2}{h} + 31.2 \sqrt{\frac{W_2}{h}} - 11.8 \left(\frac{W_2}{h} \right)^2 \right] \frac{W_1}{h} - 32 \frac{W_2}{h} + 3 \right\} \left(\frac{W_1}{h} \right)^{-3/2} \\ \left(0.5 \leq \left(\frac{W_1}{h}, \frac{W_2}{h} \right) \leq 2.0 \right) \quad (4.6-39)$$

$$-\frac{L_3}{h} = 337.5 + \left(1 + \frac{7}{W_1/h} \right) \frac{1}{W_2/h} - 5 \frac{W_2}{h} \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(1.5 - \frac{W_1}{h} \right) \right] \\ \left(0.5 \leq \left(\frac{W_1}{h}, \frac{W_2}{h} \right) \leq 2.0 \right) \quad (4.6-40)$$

C/W_1 的单位为(pF/m), L_1/h 和 L_3/h 的单位为(nH/m)。 L_2/h 的表示式与 L_1/h 相同, 只是用 W_2 代替 W_1 , 用 W_3 代替 W_2 。上述公式的误差小于5%。

计算表明, 对于 $\epsilon=9.9$, $Z_1=50\Omega$ 情况, 当 Z_2 从 25 变至 100Ω 时, C/W_1 值从 32.5 变至 22.5 ; 而当 W_2/h 从 0.5 变至 2.0 ($W_1/h=1.0$)时, L_1/hL_{w_1} 从 0.2 变至 0.6 , L_3/hL_{w_1} 则从 -0.9 变至 -0.8 。

(8) 微带的短路与导体带上的圆孔

在低于 $2\sim 3\text{GHz}$ 的频率时, 微带电路可以通过基片上的一个非金属化圆孔, 用一短导线连接导体带和接地板来提供良好的短路。在频率低于 $2\sim 3\text{GHz}$ 时, 连接导线的寄生电容和电感的影响可以忽略; 但当频率高于 $2\sim 3\text{GHz}$ 时, 其影响就不能忽略。这种结构也就不能做到真正的短路, 不过设计恰当的话, 孔的电抗可以做到在很宽的频带内近似为常数。例如在 $\epsilon=10.1$, $h=0.635\text{mm}$ 的氧化铝基片上, 18Ω 线($W=3\text{mm}$)上打一个直径为 1.52mm 的圆孔, 在频率为 $4\sim 18\text{GHz}$ 范围内测得其电抗 $X < \pm j 0.5\Omega$ 。在微带开路终端的宽带金属化短路孔的条件为(见图4.6-22)^[38]

$$\ln \left(\frac{D}{\pi d_e} \right) \approx \left(\frac{\pi d_e}{D} \right)^2 \quad (4.6-41)$$

式中, D 为等效微带宽度;

$$D = \frac{120\pi h}{Z_0 \sqrt{\epsilon_e}} \quad (4.6-42)$$

而 $d_e=0.03+0.44d$, d 为实际孔的直径。由此算得, 当孔不在开路终端时, 线宽 W 为 3mm 时, 孔的直径为 1.30mm , 稍微小于上述测量的最佳孔径。而在这种基片材料上的 50Ω 线, 线宽只有 0.6mm , 宽带短路孔的直径则应为 0.26mm 。这是难以实现的。因此, 在微带电路中, 通常几乎都以开路来代替短路。

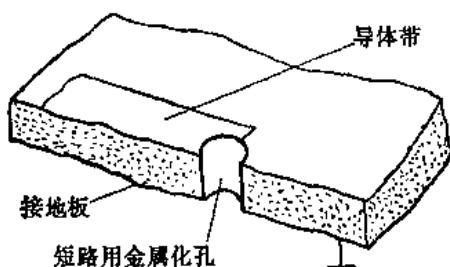


图4.6-22 微带短路用的并联金属化圆孔

本 章 提 要

1. 与波导和同轴线相比，微带传输线具有体积小、重量轻、可集成化和固态化等优点，因此在微波电路中获得了广泛的应用。本章只分析了带状线、微带、耦合带状线和耦合微带的主要特性，并着重讨论了它们的特性阻抗的求值方法，因为特性阻抗是设计微带线电路的关键参数。

2. 带状线中的传输模为TEM模，因此其特性的分析方法比较简单，可以直接用静态场方法进行分析，即用保角变换法求得单位长度的静电电容，从而求得其特性阻抗。目前广泛使用的是科恩的特性阻抗曲线。

3. 微带是一种混合介质系统，其传输模为混合模，其主模为准TEM模。因此微带特性的分析比较复杂，分析方法也就很多。其分析方法可归纳为准静态法、色散模型法和全波分析法三类。通常是采用准静态方法进行分析，即把微带中的传输模当成TEM模来处理，用静态场方法求微带的分布电容，进而求其特性阻抗等。准静态场方法又有好几种，目前使用最多的是惠勒的改进保角变换的结果。

由于微带中的传输模为混合模，因而微带中波的传播速度与频率有关，表现为有效介电常数和特性阻抗将随频率而变化，这就是微带的色散特性。在频率较高时（如高于4 GHz），应考虑微带的色散特性，对有效介电常数和特性阻抗进行修正。

4. 耦合微带线的分析通常采用奇偶模方法，即把耦合微带线分解成奇模和偶模两种工作状态，前者是对耦合微带线进行等幅反相激励；后者则进行等幅同相激励。

耦合带状线中的奇模和偶模都是TEM模，用静态场方法容易求得奇、偶模静电电容，进而求得耦合带状线的奇、偶模特性阻抗、相速度等。目前设计耦合带状线电路使用最多的是科恩^[34]和格特逊格^[35]的结果。耦合带状线的奇、偶模相速度相等，因此耦合带状线电路具有宽频带性能。

耦合微带的奇、偶模都是混合模，通常用准静态方法分析，即假定其模为TEM模，用静态场方法求其奇、偶模电容，从而求得奇、偶模特性阻抗。不过由于耦合微带是混合介质系统，计算比较复杂，计算方法也较多，常用的方法是保角变换法（包括单微带方法）和介质格林函数法。由于是混合介质系统，因而奇、偶模有效介电常数不同，奇、偶模相速度也就不同。因此耦合微带电路的频带不宽。

5. 微带线电路中总包含各种微带线不均匀性，常见的有开路端、间隙、宽度突变、拐弯、T形接头等。微带线不均匀性的处理是否恰当，对电路的性能影响很大。不均匀性的尺寸比波导波长小得多，可用集总参数电容和电感组成的电路来等效。本章给出了微带线各种不均匀性的等效电路及其等效电路参数的近似计算式，可供设计微带线电路参考。

参 考 资 料

- 〔1〕 廖承恩，《微波传输线》，西北电讯工程学院，1976年。
- 〔2〕 S. B. Cohn, "Characteristic Impedance of the Shielded Strip Transmission Line," Trans. I. R. E., vol. MTT-2, pp. 52-57, July 1954.
- 〔3〕 Arthur D. Sills, "Properties of Strip Transmission Line," AD-614035, Oct. 1964.
- 〔4〕 S. Frankel, "Characteristic Functions of Transmission Lines," Communications, pp. 32-35, March

- 1943.
- [5] C. Flammer, "Equivalent Radii of Thin Cylindrical Antennas With Arbitrary Cross Sections," Stanford Research Institute of Technology Report, March 1950.
 - [6] Harlan Howe, Jr., *Stripline Circuit Design*, Artech House, 1974.
 - [7] R. P. Wharton, and G. P. Rodriguez, "A Dominant Mode Analysis of Microstrip," *IEEE Trans.*, vol. MTT-20, pp. 552-554, Aug. 1972.
 - [8] Wheeler, H. A., "Transmission Line Properties of Parallel Wide Strips by Conformal Mapping Approximation," *IEEE Trans.*, vol. MTT-12, 1964, pp. 280-289.
 - [9] Wheeler, H. A., "Transmission Line Properties of Parallel Strips Separated by a Dielectric Sheet," *IEEE Trans.*, vol. MTT-13, 1965, pp. 172-185.
 - [10] Sobol, H., "Application of Integrated Circuit Technology to Microwave Frequencies," *Proc. IEEE*, vol. 59, 1971, pp. 1200-1211.
 - [11] Young, L., and H. Sobol, (eds.), *Advances in Microwaves*, Academic Press, (New York), vol. 8, 1974.
 - [12] Yamashita, E., and R. Mittra, "Variational Method for the Analysis of Microstrip Lines," *IEEE Trans.*, vol. MTT-16, 1968, pp. 251-256.
 - [13] Silvester, P., "TEM Properties of Microstrip Transmission Lines," *Proc. IEE*, vol. 115, 1968, pp. 42-49.
 - [14] Green, H. E., "The Numerical Solution of Some Important Transmission Line Problems," *IEEE Trans.*, vol. MTT-13, 1965, pp. 676-692.
 - [15] Hammerstad, E. O., "Equations for Microstrip Circuits Design," in *Proc. European Microwave Conf.*, 1975, pp. 268-272.
 - [16] Pucel, R. A., et al., "Losses in Microstrip," *IEEE Trans.*, vol. MTT-16, 1968, pp. 342-350. Also see Correction in *IEEE Trans.*, vol. MTT-16, 1968, pp. 1064.
 - [17] I. J. Bahl, and D. K. Trivedi, "A Designer's Guide to Microstrip Line," *Microwaves*, vol. 16, No. 5, May 1977.
 - [18] Oliner A. A., "Equivalent Circuits for Discontinuities in Balanced Strip Transmission Line," *IRE Trans.*, MTT-3, March 1955, pp. 134-143.
 - [19] 刘古, "计算耦合微带参数的一种解析方法", 固体微波情报, 1973年第二期。
 - [20] K. C. Gupta, Ramesh Garg, and Rakesh Chadha, *Computer-Aided Design of Microwave Circuits*, Artech, 1981.
 - [21] Altschuler, H. M., and A. A. Oliner, "Discontinuities in the Center Conductor of Symmetric Strip Transmission Line," *IRE Trans. MTT-8*, May 1960, pp. 328-339.
 - [22] Bahl, I. J., and R. Garg, "A Designer's Guide to Stripline Circuits," *Microwaves*, vol. 17, No. 1, Jan. 1978, pp. 90-96.
 - [23] T. C. Edwards, *Foundations for Microstrip Circuit Design*, John Wiley & Sons, 1981.
 - [24] Presser, A., "RF Properties of Microstrip lines," *Microwaves*, 7, March 1968, pp. 53-55.
 - [25] Silvester, P., and P. Benedek, "Equivalent Capacitances of Microstrip Open Circuits," *IEEE Trans.*, vol. MTT-20, Aug. 1972, pp. 511-516.
 - [26] Benedek, P., and P. Silvester, "Equivalent Capacitances for Microstrip Gaps and Steps," *ibid.*, vol. MTT-20, Nov. 1972, pp. 729-733.
 - [27] Hoefer, W. J. R., "Equivalent Series Inductivity of a Narrow Transverse Slit in Microstrip," *ibid.*, vol. MTT-25, Oct. 1977, pp. 822-824.
 - [28] Farrar, A., and A. T. Adams, "Matrix Methods for Microstrip Three-Dimensional Problems," *ibid.*, vol. MTT-20, Aug. 1972, pp. 497-504.
 - [29] Gopinath, A., et al., "Equivalent Circuits Parameters of Microstrip Change in Width and Cross-Junctions," *ibid.*, vol. MTT-24, March 1976, pp. 142-144.
 - [30] Thomson, A. F., and A. Gopinath, "Calculation of Microstrip Discontinuity Inductances," *ibid.*, vol. MTT-23, Aug. 1975, pp. 648-655.
 - [31] Easter, B., et al., "Theoretical and Experimental Methods for Evaluating Discontinuities in Microstrip," *Radio and Electronic Engineer*, 48, No. 1/2, Jan./Feb. 1978, 73-84.
 - [32] Easter, B., "The Equivalent Circuit of Some Microstrip Discontinuities," *IEEE Trans.*, vol. MTT-23, Aug. 1975, pp. 655-660.
 - [33] Owens, R. P., "The electrical Characteristics of transferred electron device packages and mounts,

- and their effects on Oscillator performance," PhD Thesis, University of London, 1977.
- [34] S. B. Cohn, "Strip Transmission Lines and Components," 2nd Quarterly Progress Report SRI Project No. 1114, Contract No. DA36-039-sc-63232, May 1955.
- [35] W. J. Getsinger, "Coupled Rectangular Bars Between Parallel Plates," IRE Trans., PGMFT-10, pp. 65-72, Jan. 1962.
- [36] Gupta, K. C., Garg Ramesh, and Bahl, I. J., Microstrip Lines and Slotlines, Artech House, Inc., Dedham, Massachusetts, U. S. A., 1979.
- [37] 清华大学《微带电路》编写组,《微带电路》,人民邮电出版社,1976年。

习 题

- 4-1 聚苯乙烯($\epsilon_r = 2.25$)敷铜箔带状线的 b 为3mm, t 为0.15mm, W 为1.2mm, 求其特性阻抗。
- 4-2 试推导式(4.3-19)。
- 4-3 聚四氟乙烯($\epsilon_r = 2.1$)敷铜箔带状线的 b 为4mm, W 为5mm, t 为0.2mm, 求当工作频率为3000MHz时的衰减常数 α_{ce} 。
- 4-4 设微带基片的 ϵ_r 为9, 导体带宽度为1mm, 工作波长为3.2cm, 若要求特性阻抗为50Ω, 问 h 应为多少? 带内波长为多少?
- 4-5 已知微带的导体带宽度为2.5mm, 厚度 $t \rightarrow 0$, 基片厚度为1mm, ϵ_r 为9, 求此微带的有效介电常数、填充系数及特性阻抗。
- 4-6 已知微带基片厚度为1mm, ϵ_r 为9.6, 欲使其特性阻抗分别为20、50、100Ω, 求相应的导体带宽度(设导体带厚度 $t \rightarrow 0$)。
- 4-7 厚度为1mm、 ϵ_r 为9.6的氧化铝陶瓷基片上的微带特性阻抗为50Ω, 导体材料为铜(t/h 为0.02), 工作频率为6GHz, 试求:
- ① 导体衰减和介质衰减;
 - ② 线上一个波长长度内的导体损耗和介质损耗。
- 4-8 设计一个 $\lambda_{go}/4$ 微带阻抗变换器, 使 Z_0 为50Ω的微带与负载20Ω匹配。设工作频率为3GHz, h 为1mm, ϵ_r 为9.6。
- 4-9 设计一薄带共面耦合带状线, 已知 Z_{0e} 和 Z_{0o} 分别为70Ω和30Ω, 接地板间距 b 为4mm, 介质为聚四氟乙烯(ϵ_r 为2.1), 试求耦合带状线的尺寸; 若改用 t/b 为0.1的厚带耦合带状线, 其它条件不变, 再求其尺寸。
- 4-10 已知耦合微带的 W/h 为0.8, S/h 为0.2, 集成在 ϵ_r 为9的陶瓷基片上, ①求 Z_{0e} 和 Z_{0o} ; ②求工作频率为3GHz时的奇、偶模相速度和相波长。
- 4-11 设计一耦合微带电路, 已知基片厚度为3mm, ϵ_r 为9, 奇、偶模特性阻抗分别为48Ω和80Ω, 工作频率为1.15GHz, 试求:
- ① 此耦合微带的尺寸;
 - ② 奇、偶模相速度和相波长。
- 4-12 在 ϵ_r 为9.6, h 为0.635mm的 $25.4 \times 25.4\text{mm}^2$ 陶瓷基片上设计一并联开路短截线使负载阻抗 $75-j50\Omega$ 与50Ω主微带匹配, 并画出实际平面尺寸图(不考虑接头修正)。
- 4-13 如图4-1所示微带带阻滤波器, 设工作频率为6GHz, 基片为陶瓷(ϵ_r 为9.6), h 为1mm, 已知 Z_{0e} 为65Ω, Z_{0o} 为34.8Ω, 试计算此带阻滤波器的尺寸(S 、 W 、 l)。
- 提示: $\lambda_g/4$ 耦合段长度 l 可按下式计算:

$$l = -\frac{1}{4} \frac{2\lambda_{ge}\lambda_{go}}{(\lambda_{go} + \lambda_{ge})} = \frac{\lambda_0}{2(\sqrt{\epsilon_{ee}} + \sqrt{\epsilon_{eo}})}$$

式中, λ_0 为自由空间波长, λ_{ge} 、 λ_{go} 分别为奇偶模波导波长。

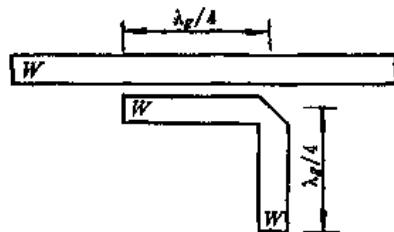


图4-1 习题4-13用图

第五章 介质波导

介质波导是毫米波、亚毫米波以至激光最有应用前途的传输线之一。本章介绍几种主要介质波导的传输特性及其分析方法。首先介绍圆形介质波导的求解及其传输特性，并着重分析阶跃光纤的波动方程求解方法与光纤中的波型；其次介绍矩形介质波导与镜象介质波导的求解方法与传输特性；最后对介质波导与金属波导的特点进行了比较。

5.1 概述

目前，微波技术正在向毫米波、亚毫米波段迅速发展。最近二十多年来，毫米波、亚毫米波技术的研究有了很大进展，并获得了一些实际应用。

毫米波和亚毫米波是介于微波（厘米波）和光波之间的过渡波段，兼有微波和光波的一些特性。与微波相比，毫米波和亚毫米波具有测量目标精度高、分辨能力强、信息容量大、设备尺寸小、重量轻、能穿透等离子体等优点。在通信、雷达、武器制导、无线电天文学、原子和分子结构研究、超导现象的研究、等离子体密度测量等方面都有重大的实用价值。

毫米波和亚毫米波技术研究和应用的一个基本的，而又必须首先解决的问题就是电磁能量的传输问题。在选择传输线时应考虑的主要特性是：①可达到的最大带宽；②低损耗或高Q值；③成本低廉，制造简便，并便于采用集成技术；④固定或连接有源器件简单、可靠；⑤辐射损耗小；⑥抗外界电磁干扰能力强。

在厘米波段，过去主要采用封闭的金属波导管作传输线。在过去的十多年发展了微波集成电路技术，以代替传统的矩形波导和圆波导，越来越多的微波系统用微波集成电路元件制作。在微波集成电路中使用的传输线主要是微带、共面波导和槽线。

但是，到了毫米波、亚毫米波段，普通的金属波导尺寸太小，对加工精度要求太高以致实际上难以达到；同时，金属波导的损耗也高到难以使用的程度，例如截面尺寸为 $0.87 \times 0.43\text{mm}^2$ 的镀银波导，在波长为 $1.45\sim0.9\text{mm}$ 范围内的衰减值达 $11\sim18\text{dB/m}$ 。从历史来看，电子电路是沿着从分立元件到混合集成工艺再到单片集成工艺的方向发展的，但金属波导不便于采用集成工艺。上述缺点使金属波导一般不适用毫米波段。

大多数微带线可用到 60GHz ，而在 $35\sim250\text{GHz}$ 的低毫米波波段，微波集成电路技术还可以扩大其应用。可是，工作频率再高，普通的微波集成电路技术也将遇到愈来愈大的困难：结构尺寸变得太小，欧姆损耗增大以致金属不再是一种良导体，表面光洁度的公差要求也变得愈来愈高；微带线的色散和高次模问题也变得很显著，因此普通的微波集成电路技术也不适用了。

目前，毫米波段使用的传输线主要有悬置带线、鳍线、槽线、共面波导、准光波导、介质波导与镜象线等。亚毫米波段使用的传输线主要有过模波导、H波导、介质波导和波束波导等。激光传输用的光波导形式有光纤、光圈波导、波束波导、介质薄膜波导、带状介质波导等，其中最实用的是光纤和介质薄膜波导，后者是光集成电路的基础。

由此可见，介质波导是毫米波、亚毫米波以至光传输所广泛采用的，最有发展和应用前途的传输线。它也是毫米波集成电路和集成光路的基础。

在高于 35 GHz 的频率时，为克服普通微波集成电路技术上的困难，可采用介质波导型毫米波集成电路（简称介质集成电路）。其基本想法就是用介质波导代替微带或其它印制线作为集成电路来进行设计，其集成电路的结构与集成光学的结构有些相似。

单模介质波导的典型截面尺寸与波导波长具有同一数量级，而微带线的截面尺寸则大约为波导波长的十分之一。介质波导中波传播的机理并不依赖于金属导体的存在，而是与介质分界面上的内部全反射原理有关。由于不存在导体，所以介质波导的传输损耗小于微带线。其损耗主要是介质材料的损耗和辐射损耗，后者主要与波导表面的粗糙、弯曲和接头有关。

介质波导的种类很多，目前使用较多的是圆形介质棒波导、光纤、矩形介质棒波导、矩形介质镜象线、隔离介质波导、带状介质波导和倒置带状介质波导等，如图 5.1-1 所示。

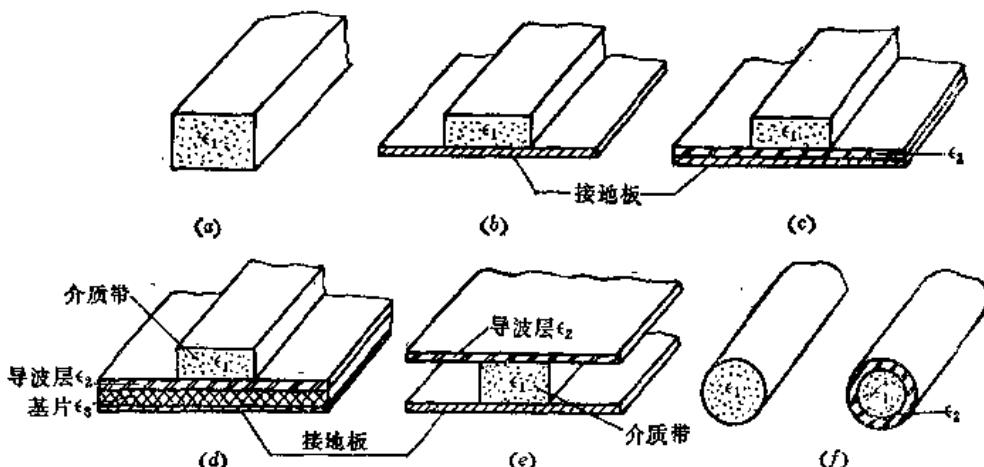


图 5.1-1 常用的介质波导

适用于毫米波介质集成电路的介质波导是矩形介质棒波导及其变型：矩形介质镜象线（简称镜象线）和隔离介质波导（或称隔离镜象波导，简称隔离波导或绝缘波导）。其基本结构是置于自由空间的矩形介质棒，如图 5.1-1(a) 所示。图 (b) 结构称为镜象线，由置于一块大接地板上的矩形介质棒构成。由于接地板产生棒的象使某些模的传输特性与图 (a) 矩形介质波导中的完全相同，故得名“镜象线”。这种镜象线比介质棒波导在电路集成中有更多的优点：第一，由于有接地板，所以电路中的所有波导都可以在同一水平位置上；第二，接地板的引入有利于散热与给电路中的固态器件加直流偏置；第三，镜象线中的模式比介质棒中的少，最低次模 E_{11}^s 和 E_{11}^r 在介质棒波导中成为简并模，而在镜象线中， E_{11}^s 模由于接地板的存在而不存在，只有 E_{11}^r 模，因此镜象线更容易做到单模传输，传输频带更宽。

然而，在镜象线中由于接地板的引入也带来一些实际问题：一个是由需要用粘合剂（它使介质棒粘合在接地板上）而增加损耗；另一个是接地板本身的存在增加了由导

体损耗而产生的波的衰减；再一个是介质棒与接地板之间存在有空气隙，将使系统的传输因数与无空气隙的不同。这种随机的空气隙将严重地影响波导的传输因数。克服空气隙和粘合问题的一种方法是在介质棒和接地板之间引入一种介电常数较低的薄介质层，做成隔离波导，如图 5.1-1(c) 所示，这种结构可以减小导体损耗。典型的隔离波导是用氧化铝陶瓷或其它陶瓷材料做介质棒，用聚四氟乙烯或聚乙烯作隔离层（或称绝缘层）。

图 5.1-1(d) 和 (e) 所示介质波导中波传输的机理与前三种完全不同。图 5.1-1(d) 结构称为带状介质波导（以 SD 表示之），而图 5.1-1(e) 结构则称为倒置带状介质波导（以 IS 表示之）。在这两种结构中，电磁能量集中在导波层 (ϵ_2) 内，此导波层的 ϵ_2 最高，而介质带 ϵ_1 的存在将使场限制在波导中心区域附近。因而在 SD 中波的场主要集中在介质带 (ϵ_1) 下面的那部分导波层内，而在 IS 中则主要集中在介质带 (ϵ_1) 上面的那部分导波层内。在 SD 和 IS 结构中，接地板的引入既有利于散热和加直流偏置，又损耗不大，因为大多数能量是在与接地板隔开的导波层中传播。

与镜象波导结构相比，SD 和 IS 结构具有一定的优点和缺点。其优点是：在 SD 和 IS 结构中，介质带仅用于集中电磁能量和使场的大部分分布在导波层 ϵ_2 中，因而由于表而粗糙产生的辐射损耗较小，而与镜象波导要求的光滑表面相比，构成一导波层结构相对来说要容易；其主要缺点是：SD 和 IS 结构实质上是所谓弱导波结构，与镜象波导相比，场并不是紧紧地限制在 SD 和 IS 结构的波导内，因而在弯曲时的辐射损耗比镜象波导大。

实验结果表明，在较低的毫米波频段，IS 在许多方面比 SD 更实用。在 IS 中只有二个介质区域，而在 SD 中有三个介质区域，因而 IS 的介质损耗较小；而且，在 IS 中可以避免两种介质材料的粘合，减去使用粘合材料引起的损耗。

虽然毫米波介质集成电路与集成光路的想法相似，但两者的结构和应用却有所不同。主要的不同点在于：(1) 介质材料与制造工艺不同。毫米波介质波导的介质材料选择范围较广，常用的有高纯度氧化铝、硼氮化物（氮化硼）、二氧化铍、聚四氟乙烯、聚乙烯及高阻半导体材料（如硅和砷化镓）等；制造方法包括机加工和注入成型。而集成光路中的介质波导系由玻璃或半导体薄膜（如砷化镓）构成的，这种薄膜是采用平而技术（如溅射、离子注入、扩散、离子束和化学腐蚀工艺）形成的；(2) 毫米波介质波导中的介质棒（或介质带）和周围媒质的介电常数之比较高，这样就更加集中；而集成光路中典型的矩形介质波导是埋在 ϵ 稍低一点点的介质基片中，这样可以使传输的模式少或单模传输；(3) 毫米波介质集成电路都采用了金属接地板，而光集成电路不用金属材料，以减小损耗。

表 5.1-1 对毫米波集成电路和光集成电路所用的介质波导作了比较。在此表中，基本上是隔离波导和光矩形波导的比较，但有些性质也适用于 IS。在 IS 中，接地板的存在和制造过程类似于隔离波导，而介电常数比更加低，更类似于光介质波导结构。

介质波导的分析方法主要分两种：一种叫射线理论，一种叫波动理论。前者即几何光学方法，优点是简单、直观，但分析复杂问题时只能得出粗糙的近似结果。对于复杂问题，要得到全面、正确场的解析或数值结果，就需要采用波动理论。本章主要采用波动理论的分析方法。先介绍介质波导的工作原理；然后讨论圆形介质棒波导和矩形介质棒波导的传输特性及其分析方法；最后对介质波导和金属波导的特点进行比较。与金属

表5.1-1 微波和光介质波导的特性比较①

	微 波	光 波
介质材料 (ϵ_1)	氧化铝 半 导 体 塑 料	玻 璃 半 导 体 玻 璃、半 导 体
介电常数 ϵ_2	10~15或更高	2~4; 12
介电常数 ϵ_2	2.5	2~4; 12
折射率比 (ϵ_1/ϵ_2)	2	1.1~1.01
波导宽度 (用 λ_g 表示)	0.5	2~10
简并模 E_{11}^*	不 存 在	存 在
曲率半径 (用 λ_g 表示)	2~5	30~1000

① ϵ_1 是芯子的介电常数; ϵ_2 是基片的介电常数。

波导相比, 介质波导的波动理论分析要复杂得多, 因为介质波导的边界条件比金属波导多而复杂, 而且介质波导是一种开放式波导。

5.2 介质波导的工作原理

象金属波导一样, 介质波导中的波可以看成是两种平面波在介质分界面上反射和折射的结果。这两种平而波之一是含 E_y 、 H_z 和 H_z 的 H 平面波, 之二是含 H_y 、 E_z 和 E_z 的 E 平面波。H 平面波经介质分界面反射的结果沿 z 向 (波导轴向) 有磁场分量, 形成 TE 模 (或称 H 模); E 平面波反射的结果沿 z 向有电场分量, 形成 TM 模。这两种波在分界面上的反射和折射满足斯内尔 (Snell) 定律 (见图 5.2-1):

$$\theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \right)^{1/2} \quad (5.2-1)$$

式中, n_1 和 n_2 分别为介质 1 和介质 2 的折射率, $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$, $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$; θ_i 、 θ_r 和 θ_s 分别为入射角、反射角和折射角。

当入射角 θ_i 大于临界角

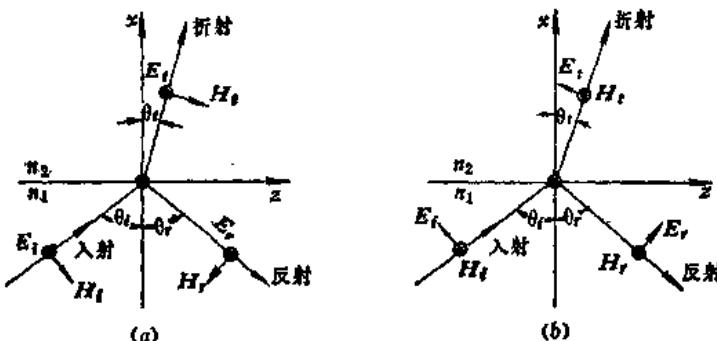


图5.2-1 平面波在介质分界面上的反射和折射
(a) H平面波; (b) E平面波。

$$\theta_s = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (5.2-2)$$

时, H波和E波将在介质分界面上产生全反射。显然, θ_i 在 θ_s 到 90° 时都要产生全反射, 此时要求 $n_1 > n_2$ 。

又当 θ_i 等于布鲁斯特 (Brewster) 角

$$\theta_B = \arctg\left(-\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (5.2-3)$$

时, E平面波将产生全折射。

在金属波导里, 波在金属表面上产生全反射, 且入射点和反射点在同一点上; 而在介质波导中, 波在介质分界面上产生全反射时, 入射点与反射点不在同一点上, 而是有一定的位移, 称之为古斯-亨切 (Goos-Haenchen) 位移, 即是说反射点离开入射点有一定距离, 如图 5.2-2 所示。其位移 z_s 和 x_s 可根据反射系数的相角来确定。由电磁场理论知, H波和E波的反射系数分别为

$$\Gamma_H = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r} \quad (5.2-4)$$

$$\Gamma_E = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r} \quad (5.2-5)$$

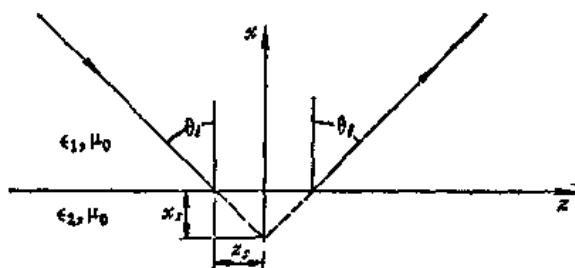


图5.2-2 古斯-亨切位移

全反射时, $\theta_i > \theta_s$, 则

$$\cos \theta_r = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_r} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i} = \pm i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1}$$

从数学上讲, 根号前的 \pm 号都可以取, 但从物理意义上来说, 只能取 “-” 号。这样, 反射系数的相角是超前的。代入 Γ_H 中可得

$$\theta_H = 2 \Phi_H = 2 \arctg \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - (n_2/n_1)^2}}{\cos \theta_i} \quad (5.2-6)$$

由此可求得古斯-亨切位移为

$$\left. \begin{aligned} z_{sH} &= \frac{\operatorname{tg} \theta_i}{K_0 (n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2)^{1/2}} \\ x_{sH} &= z_{sH} \operatorname{ctg} \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (5.2-7)$$

对于 E 波, Γ_E 的相角为

$$\theta_E = 2 \Phi_E = 2 \arctg \frac{(n_1/n_2)^2 \sqrt{\sin^2 \theta_i - (n_2/n_1)^2}}{\cos \theta_i} \quad (5.2-8)$$

由此可求得古斯-亨切位移为

$$\left. \begin{aligned} z_{rE} &= \frac{n_2^2 \operatorname{tg} \theta_i}{K_0 (n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2)^{1/2} (n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2 \cos^2 \theta_i)} \\ x_{rE} &= z_{rE} \operatorname{ctg} \theta_i, \quad K_0 = \omega (\mu_0 \epsilon_0)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (5.2-9)$$

对于折射波, 如图 5.2-3 所示, 其电场可表示成

$$\mathbf{E}_r = E_{rm} e^{j(\omega t - \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{r})} \quad (5.2-10)$$

而

$$\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{z}z$$

$$\mathbf{K}_r = \hat{x}n_r K_0 \cos \theta_r + \hat{z}n_r K_0 \sin \theta_r$$

$$K_0 = 2\pi/\lambda_0$$

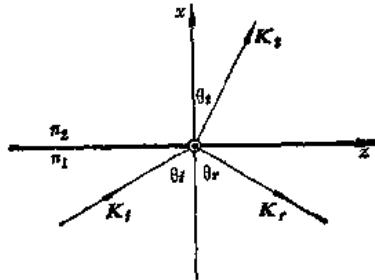


图 5.2-3 平面波的反射和折射

又根据斯内尔定律, $\sin \theta_r = n_1 \sin \theta_i / n_2 = \lambda_2 \sin \theta_i / \lambda_1$, 所以

$$\cos \theta_r = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_r} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_i} \quad (5.2-11)$$

代入式 (5.2-10) 中, 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= E_{rm} \exp \{ j(\omega t - n_r K_0 \cos \theta_r x - n_r K_0 \sin \theta_r z) \} \\ &= E_{rm} \exp \left\{ j\omega t \pm \frac{2\pi}{\lambda_1} \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2} \cdot x - j \frac{2\pi}{\lambda_1} \sin \theta_i z \right\} \quad (5.2-12) \end{aligned}$$

式中右边指数函数里的第三项

$$-j2\pi/\lambda_1 \sin \theta_i z = -jK_0 \sin \theta_i z = -jK_{1z} z$$

代表沿正 z 方向的相移或传播。对于指数函数里的第二项, 分下面三种情况来分析:

(1) 如果 $n_1 > n_2$, 而 $\theta_i > \theta_c$, 则产生全反射, 此时 $\pm 2\pi/\lambda_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - (n_2/n_1)^2}$ 为实数, 其前面有正负号:

a. 若取“-”号, 则表示 E_r 的幅度将随 x 的增大作指数衰减, 其传播方向为正 z 方向, 如图 5.2-4 所示。这种波称为表面波, 其电磁场集中在介质 n_1 表面附近和表面以内。各种介质波导的传输模(即正模)都属于这类波。这种波在无限远处变为零, 满足无限远处的边界条件, 所以也称为正常波。由图 5.2-4 可以看出, 在介质 n_2 中, 等相位面和等振幅面不一致, 但彼此正交。这表明表面波是一种非均匀平面波。又因为波矢量的 z 分量 $K_{1z} = \beta = K_1 \sin \theta_i \geq K_1 n_2/n_1 = K_2$, 所以传播速度 v_p 小于介质 ϵ_2 中的光速, 故表面波是一种慢波。

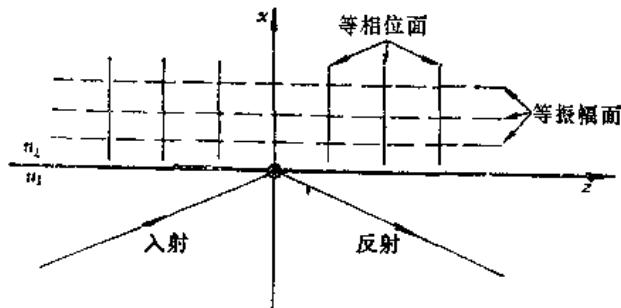


图 5.2-4 表面波的特性

b. 若取“+”号, 则 E_r 将随 x 的增大而增长, 在无限远处变为无限大, 不满足无限远处边界条件, 是非正常波。

(2) 如果 $n_1 > n_2$, 而 $\theta_i < \theta_c$, 则为部分反射, 此时 $\pm 2\pi/\lambda_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - (n_2/n_1)^2}$ 为虚数。它代表沿 x 方向有相移, 其角度 $\arctg K_{1x}/K_{2x} = \arctg K_{1x}/K_{1z}$ 代表向内向外传播, 结果在 x 方向呈驻波分布。这种波称为辐射波。因为 $\sin \theta_i < n_2/n_1$, 则 $K_{1x} = \beta < K_2$, 于是传播速度比 ϵ_2 中的光速快, 故辐射波是一种快波。

(3) 如果 $n_1 < n_2$, 则 $2\pi/\lambda_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - (n_2/n_1)^2}$ 永远是虚数, 介质 ϵ_2 中总有折射波。

除了上述表面波和辐射波外, 当入射波为非均匀平面波时, 还会得到所谓泄漏波。此时 K_{2x} 为复数, 波沿 x 方向不但幅度增长, 而且有相移, 因此沿 x 方向有能量泄漏。

如果有三层介质, 如图 5.2-5 所示, 则当其两个分界面上均满足全反射条件时, 即

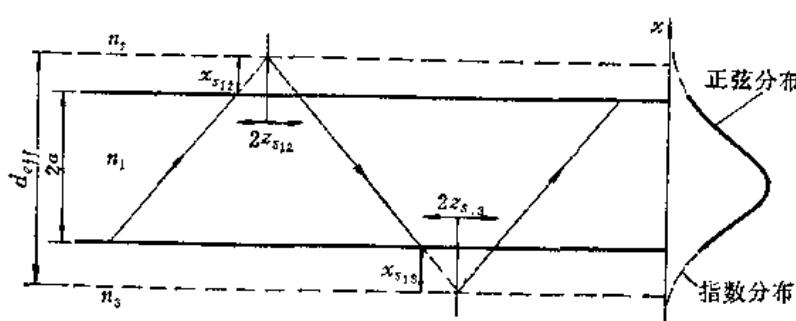


图 5.2-5 波在介质分界面之间的反射与场的横向分布

构成类似于金属平板波导的介质波导。通常在介质 ϵ_1 内，场呈正弦分布，而在 ϵ_2, ϵ_3 内，场呈指型分布。即在介质分界面附近有场分布，故为表面波。但其场的解远比金属波导情况要复杂。波在两个介质分界面上反射时都要产生古斯-亨切位移，即要穿过分界面在 $x_{r_{12}}$ 和 $x_{r_{13}}$ 的面上产生全反射。这相当于增加了介质波导的横向尺寸，因此，可以认为波在如下式所示“有效厚度（或称有效宽度）”为 d_{eff} 的介质波导内传播：

$$d_{eff} = 2a + x_{r_{12}} + x_{r_{13}} \quad (5.2-13)$$

由上面的分析可以看出，介质波导和金属波导的一个不同地方是，在金属波导中，电磁波被封闭在波导里沿 z 向传播，波导外面没有电磁场；而介质波导则不然，在介质波导外面也存在电磁场，只是在介质波导外面的场衰减很快。上述 x 方向的古斯-亨切位移值 x_r 正是电磁场衰减到 $1/e$ 的长度。

5.3 圆形介质波导与阶跃光纤

早在 1910 年，杭德罗斯 (Hondros) 和德拜 (Debye) 就对波在圆柱形介质波导中的传播作过理论研究。但圆形介质波导作为微波传输线的研究和应用是在 1966 年圆形玻璃纤维用作光传输线之后的事。在光纤中满足弱导波条件 $(n_1 - n_2) \ll n_1$ ，这就使分析得以简化。1970 年低损耗（小于 20dB/km）玻璃纤维的获取大大促进了光纤通信的发展和应用，也促进了对圆形介质波导和光纤的研究和发展。在本节中，我们将分析圆形介质棒波导的传输特性，并着重讨论阶跃型光纤的波动方程解法及其传输模式。

1. 圆形介质棒波导中的场及其特征方程

(1) 圆形介质棒波导中的场

如图 5.3-1 所示圆形介质棒波导，设半径为 a ，介质的介电常数为 ϵ_1, μ_0 ，介质波导周围的介质常数为 ϵ_2, μ_0 。采用圆柱坐标系，并使其 z 轴与介质棒的轴重合。

圆形介质棒波导内外的场的求解方法与金属圆形波导一样，可用纵向场方法求得。设波沿 z 向传播， $\partial/\partial z = -j\beta$ 。纵向场分量 E_z 和 H_z 满足标量亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} E_{zi} \\ H_{zi} \end{pmatrix} + K_i^2 \begin{pmatrix} E_{zi} \\ H_{zi} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.3-1)$$

或者

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} E_{zi} \\ H_{zi} \end{pmatrix} + n_i^2 K_0^2 \begin{pmatrix} E_{zi} \\ H_{zi} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.3-2)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} K_i^2 &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_i = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{ri} = K_0^2 n_i^2 \\ K_0^2 &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.3-3)$$

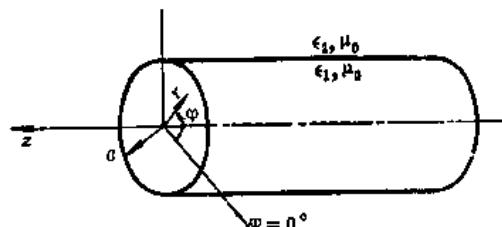


图 5.3-1 圆形介质棒波导及其坐标系

下标

$$i = \begin{cases} 1 & \text{代表圆形介质波导内的场} \\ 2 & \text{代表圆形介质波导外的场} \end{cases}$$

式 (5.3-3) 可改写为

$$\nabla_i^2 \begin{pmatrix} E_{zi} \\ H_{zi} \end{pmatrix} + (n_i^2 K_0^2 - \beta^2) \begin{pmatrix} E_{zi} \\ H_{zi} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.3-4)$$

在圆柱坐标系中，则为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \begin{pmatrix} E_{zi} \\ H_{zi} \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{zi}}{\partial r} \begin{pmatrix} H_{zi} \\ E_{zi} \end{pmatrix} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \begin{pmatrix} E_{zi} \\ H_{zi} \end{pmatrix} + (n_i^2 K_0^2 - \beta^2) \begin{pmatrix} E_{zi} \\ H_{zi} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.3-5)$$

应用分离变量法求解，即令

$$\begin{pmatrix} E_{zi} \\ H_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} R(r) \Phi(\varphi) \quad (5.3-6)$$

代入式 (5.3-5) 可得到两个常微分方程：

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (5.3-7)$$

$$\frac{r^2 d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + [(n_i^2 K_0^2 - \beta^2)r^2 - m^2] R = 0 \quad (5.3-8)$$

式 (5.3-7) 的解为

$$\Phi(\varphi) = C e^{im\varphi} \text{ 或 } C_{\text{cosec}} \quad (5.3-9)$$

式 (5.3-8) 的解就得具体分析。在介质波导内部，正规模的场应是驻波型解， $\beta^2 < n_1^2 K_0^2$ ；而且波传播的区域包括原点，所以解不能取第二类贝塞尔函数。而在介质波导外部，正规模的场沿 r 方向应是衰减的， $\beta^2 > n_2^2 K_0^2$ ，式 (5.3-8) 变成变态贝塞尔方程；而且外部空间包括无限远处，所以不能取第一类而只能取第二类变态贝塞尔函数（或称第二类修正贝塞尔函数）。故得到

$$\left. \begin{array}{l} R_1(r) = D J_m(K_{\epsilon_1} r) \quad (r < a) \\ R_2(r) = D K_m(K_{\epsilon_2} r) \quad (r > a) \end{array} \right\} \quad (5.3-10)$$

式中，

$$\left. \begin{array}{l} K_{\epsilon_1}^2 = -\beta^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 = -\beta^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{r_1} = K_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ K_{\epsilon_2}^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 = \beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{r_2} = \beta^2 - K_0^2 n_2^2 \\ K_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0, \quad n_1 = \sqrt{\epsilon_{r_1}}, \quad n_2 = \sqrt{\epsilon_{r_2}} \end{array} \right\} \quad (5.3-11)$$

在 $r = a$ 处，应有

$$\begin{aligned} R(a) &= D J_m(K_{\epsilon_1} a) = D J_m(u) \\ &= D K_m(K_{\epsilon_2} a) = D K_m(w) \end{aligned}$$

所以

$$D = \frac{R(a)}{J_m(u)} = \frac{R(a)}{K_m(w)} \quad (5.3-12)$$

式中,

$$\left. \begin{array}{l} u = K_{e_1} a = (K_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} a \\ w = K_{e_2} a = (\beta^2 - K_0^2 n_2^2)^{1/2} a \end{array} \right\} \quad (5.3-13)$$

表示 r 方向的传播因数。

将式 (5.3-12) 代入式 (5.3-10), 则得到

$$\left. \begin{array}{l} R(r) = \frac{R(a)}{J_m(u)} \cdot J_m(uR) \quad R = \frac{r}{a} < 1 \\ R(r) = \frac{R(a)}{K_m(w)} \cdot K_m(wR) \quad R = \frac{r}{a} > 1 \end{array} \right\} \quad (5.3-14)$$

最后我们得到 E_s 和 H_s 分别为

$$E_s = \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_{m_1}}{J_m(u)} J_m(uR) e^{im\varphi} e^{-j\beta z} \quad R < 1 \\ \frac{A_{m_2}}{K_m(w)} K_m(wR) e^{im\varphi} e^{-j\beta z} \quad R > 1 \end{array} \right\} \quad (5.3-15)$$

$$H_s = \left\{ \begin{array}{l} \frac{B_{m_1}}{J_m(u)} J_m(uR) e^{im\varphi} e^{-j\beta z} \quad R < 1 \\ \frac{B_{m_2}}{K_m(w)} K_m(wR) e^{im\varphi} e^{-j\beta z} \quad R > 1 \end{array} \right\} \quad (5.3-16)$$

根据式 (3.1-19) 可得横向场分量与纵向场分量的关系为

$$\left. \begin{array}{l} E_r = -\frac{j}{K_e^2} \left[\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + j\omega\mu_0 \frac{m}{r} H_z \right] \\ E_\varphi = -\frac{j}{K_e^2} \left[\frac{jm\beta}{r} E_z - \omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \\ H_r = -\frac{j}{K_e^2} \left[\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - j\omega\epsilon_0 \frac{m}{r} E_z \right] \\ H_\varphi = -\frac{j}{K_e^2} \left[\frac{jm\beta}{r} H_z + \omega\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \end{array} \right\} (i = 1, 2) \quad (5.3-17)$$

式中, $K_{e_i}^2 = K_i^2 - \beta^2$, 在介质波导内, $K_{e_1}^2 = u^2/a^2$, 在介质波导外, $K_{e_2}^2 = -w^2/a^2$ 。

将式 (5.3-15) 和 (5.3-16) 代入式 (5.3-17), 可得到介质波导内外横向场分量分别为

$$\left. \begin{array}{l} E_r = -j \left(\frac{a}{u} \right)^2 \left[\frac{\beta u A_{m_1}}{a J_m(u)} J'_m(uR) + \frac{j\omega\mu_0 m B_{m_1}}{r J_m(u)} J_m(uR) \right] e^{im\varphi} e^{-j\beta z} \\ E_\varphi = -j \left(\frac{a}{u} \right)^2 \left[\frac{j\beta m A_{m_1}}{r J_m(u)} J_m(uR) - \frac{\omega\mu_0 u B_{m_1}}{a J_m(u)} J'_m(uR) \right] e^{im\varphi} e^{-j\beta z} \\ H_r = -j \left(\frac{a}{u} \right)^2 \left[\frac{\beta u B_{m_1}}{a J_m(u)} J'_m(uR) - \frac{j\omega\epsilon_0 m A_{m_1}}{r J_m(u)} J_m(uR) \right] e^{im\varphi} e^{-j\beta z} \\ H_\varphi = -j \left(\frac{a}{u} \right)^2 \left[\frac{j\beta m B_{m_1}}{r J_m(u)} J_m(uR) + \frac{\omega\epsilon_0 u A_{m_1}}{a J_m(u)} J'_m(uR) \right] e^{im\varphi} e^{-j\beta z} \end{array} \right\} (R < 1) \quad (5.3-18)$$

$$\begin{aligned}
 E_r &= j \left(\frac{a}{w} \right)^2 \left[\frac{\beta w A_{m_1}}{a K_m(w)} K'_m(wR) + \frac{j \omega \mu_0 m B_{m_1}}{r K_m(w)} K_m(wR) \right] e^{j m_0} e^{-j \beta r} \\
 E_\theta &= j \left(\frac{a}{w} \right)^2 \left[\frac{j m \beta A_{m_2}}{r K_m(w)} K_m(wR) - \frac{\omega \mu_0 w B_{m_2}}{a K_m(w)} K'_m(wR) \right] e^{j m_0} e^{-j \beta r} \quad (R > 1) \\
 H_r &= j \left(\frac{a}{w} \right)^2 \left[\frac{\beta w B_{m_2}}{a K_m(w)} K'_m(wR) - \frac{j \omega \epsilon_2 m A_{m_2}}{r K_m(w)} K_m(wR) \right] e^{j m_0} e^{-j \beta r} \\
 H_\theta &= j \left(\frac{a}{w} \right)^2 \left[\frac{j \beta m B_{m_1}}{r K_m(w)} K_m(wR) + \frac{\omega \epsilon_2 w A_{m_1}}{a K_m(w)} K'_m(wR) \right] e^{j m_0} e^{-j \beta r}
 \end{aligned} \tag{5.3-19}$$

式中常数 A_{m_1} 、 A_{m_2} 、 B_{m_1} 和 B_{m_2} 须利用边界条件决定。边界条件要求在介质分界面上切向场必须连续，即当 $r = a$ 时，应有

$$\left. \begin{array}{l} E_{z_1} = E_{z_2} \\ H_{z_1} = H_{z_2} \\ E_{\theta_1} = E_{\theta_2} \\ H_{\theta_1} = H_{\theta_2} \end{array} \right\} \tag{5.3-20}$$

将式 (5.3-15)、(5.3-16)、(5.3-18) 和 (5.3-19) 代入式 (5.3-20)，分别得到

$$\left. \begin{array}{l} A_{m_1} = A_{m_2} \\ B_{m_1} = B_{m_2} \\ - \left(\frac{a}{u} \right)^2 \left[\frac{j \beta m A_{m_1}}{a} - \frac{\omega \mu_0 u B_{m_1} J'_m(u)}{a J_m(u)} \right] = \left(\frac{a}{w} \right)^2 \left[\frac{j \beta m A_{m_2}}{a} - \frac{\omega \mu_0 w B_{m_2} K'_m(w)}{a K_m(w)} \right] \\ - \left(\frac{a}{u} \right)^2 \left[\frac{j \beta m B_{m_1}}{a} + \frac{\omega \epsilon_1 u A_{m_1} J'_m(u)}{a J_m(u)} \right] = \left(\frac{a}{w} \right)^2 \left[\frac{j \beta m B_{m_2}}{a} + \frac{\omega \epsilon_2 w A_{m_2} K'_m(w)}{a K_m(w)} \right] \end{array} \right\} \tag{5.3-21}$$

将式 (5.3-21) 前两式代入后两式，得到如下联立方程组：

$$\left. \begin{array}{l} A_{m_1} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \frac{j \beta m}{a} - B_{m_1} \frac{\omega \mu_0}{a} \left[\frac{1}{u} \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{1}{w} \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right] = 0 \\ A_{m_1} \frac{\omega \epsilon_0}{a} \left[\frac{n_1^2}{u} \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{n_2^2}{w} \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right] + B_{m_1} \frac{j \beta m}{a} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) = 0 \end{array} \right\} \tag{5.3-22}$$

A_{m_1} 、 B_{m_1} 要有非零解，则要求由它们的系数所构成的行列式必须为零。由此可得到如下方程：

$$(n_1 + n_2)(K_1^2 \eta_1 + K_2^2 \eta_2) = m^2 \beta^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)^2 \tag{5.3-23}$$

式中，

$$\left. \begin{array}{l} \eta_1 = \frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} \\ \eta_2 = \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)} \end{array} \right\} \tag{5.3-24}$$

$$K_1^2 = K_0^2 n_1^2, \quad K_2^2 = K_0^2 n_2^2$$

由式(5.3-23)可以确定传输模的传播因数 β 。式(5.3-23)称为圆形介质棒波导的特征方程或色散方程。各种模的截止条件也可由此式导出。

(2) 圆形介质棒波导中的模式

由式(5.3-13)可知,

$$\beta^2 = K_1^2 - \left(\frac{u}{a}\right)^2 = K_2^2 + \left(\frac{w}{a}\right)^2 \quad (5.3-25)$$

定义归一化频率 u 为

$$v \equiv (u^2 + w^2)^{1/2} = aK_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \quad (5.3-26)$$

将式(5.3-25)代入式(5.3-23), 得到如下特征方程:

$$(n_1 + n_2)(\epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2) = m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{\epsilon_1}{u^2} + \frac{\epsilon_2}{w^2} \right) \quad (5.3-27)$$

由式(5.3-27), 若给定介质波导的结构(ϵ_1 、 ϵ_2 和 a), 则可得到一组确定的曲线; 若给定频率, 则由此曲线族与圆(5.3-26)的交点即可确定 u 和 w , 从而确定介质波导的归一化频率 v 。

特征方程(5.3-23)或(5.3-27)具体解的性质, 与 m 值有关, 不同的 m 值, 对应着不同的模式。

对于 $m=0$ 的情况, 由式(5.3-27)得到

$$\eta_1(u) = -\eta_2(w) \quad (5.3-28a)$$

或者

$$\eta_1(u) = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \eta_2(w) \quad (5.3-28b)$$

式(5.3-28a)的解对应于 TE_{0n} 模; 式(5.3-28b)的解对应于 TM_{0n} 模。 n 表示场沿半径方向分布的最大值个数。这可以由式(5.3-17)看得出来: 当 $m=0$ 时, 可以分成两套独立的场分量(注意, $\partial/\partial\Phi$ 中包括了 m), 一套为 H_x 、 E_y 、 H_z ; 另一套为 E_x 、 E_y 、 H_y 。前者即为 TE_{0n} 模, 后者即为 TM_{0n} 模。

对于 $m \neq 0$ 的情况, 由式(5.3-17)可见, 此时六个场分量都存在, 为混合模, 且也有两套模, 即混合 HE_{mn} 和 EH_{mn} 模。此时特征方程(5.3-27)的求解比较麻烦, 一般需用数值计算方法求解。

混合模 HE_{mn} 和 EH_{mn} 的区别可由特征方程(5.3-27)来确定。将式(5.3-27)展开得到

$$\epsilon_1 \eta_1^2 + \epsilon_2 \eta_2^2 + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \eta_1 \eta_2 = m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{\epsilon_1}{u^2} + \frac{\epsilon_2}{w^2} \right)$$

或者

$$\eta_1^2 + \frac{n_2^2}{n_1^2} \eta_2^2 + \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2} \right) \eta_1 \eta_2 = m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

即得

$$\eta_1^2 + \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2} \right) \eta_1 \eta_2 + \frac{n_2^2}{n_1^2} \eta_2^2 - m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left[\frac{1}{u^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} - \frac{1}{w^2} \right] = 0$$

建

此为一个二阶代数方程，其解 η_1 为

$$\eta_1 = \frac{-\left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)\eta_2}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^2 \eta_2^2 - 4 \left[\frac{n_2^2}{n_1^2} \eta_2^2 - m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} - \frac{1}{w^2}\right)\right]} \quad (5.3-29a)$$

假如 $n_1 \approx n_2$ ，则上式简化为

$$\eta_1 = -\eta_2 \pm m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \quad (5.3-29b)$$

式 (5.3-29) 中右边正负号取正号时，定义为 EH_{mn} 模，解出的 β 或 u 值属 EH_{mn} 模的；取负号时定义为 HE_{mn} 模，解出的 β 或 u 值属 HE_{mn} 模的。

定义

$$P \equiv -\frac{\omega\mu_0}{\beta} \frac{B_m}{A_m} = \frac{m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right)}{\eta_1 + \eta_2} \quad (5.3-30)$$

则介质波导内的纵向场分量可以表示为

$$\left. \begin{aligned} E_z &= J_m(uR)F_\phi \\ H_z &= -\frac{\beta}{\omega\mu_0} P J_m(uR)F_s \end{aligned} \right\} \quad (5.3-31)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} F_\phi &= -\frac{A_{m1}}{J_m(u)} \cos m\varphi e^{-j\beta z} \\ F_s &= \frac{A_{m1}}{J_m(u)} \sin m\varphi e^{+j\beta z} \end{aligned} \right\} \quad (5.3-32)$$

将式 (5.3-31) 代入式 (5.3-17)，可以得到介质波导内的横向场分量为：

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -j \left(\frac{\beta}{K_{e1}}\right) \left[J'_m(K_{e1}r) - P \left(\frac{m J_m(K_{e1}r)}{K_{e1}r}\right) \right] F_\phi \\ E_\theta &= -j \left(\frac{\beta}{K_{e1}}\right) \left[P J'_m(K_{e1}r) - \left(\frac{m J_m(K_{e1}r)}{K_{e1}r}\right) \right] F_\phi \\ H_r &= j \left(\frac{K_1^2}{\omega\mu_0 K_{e1}}\right) \left[P \left(\frac{\beta^2}{K_1^2}\right) J'_m(K_{e1}r) - \left(\frac{m J_m(K_{e1}r)}{K_{e1}r}\right) \right] F_s \\ H_\theta &= -j \left(\frac{K_1^2}{\omega\mu_0 K_{e1}}\right) \left[J'_m(K_{e1}r) - P \left(\frac{\beta^2}{K_1^2}\right) \left(\frac{m J_m(K_{e1}r)}{K_{e1}r}\right) \right] F_s \end{aligned} \right\} \quad (5.3-33)$$

沿用微波理论中的习惯，当 $P = -1$ 时，称为 HE_{mn} 模；当 $P = +1$ 时称为 EH_{mn} 模。

(3) 截止条件

由以上分析可知，圆形介质波导中可能存在 TE_{mn} 、 TM_{mn} 和 EH_{mn} 、 HE_{mn} 模。象金属波导一样，当介质波导尺寸和工作频率一定时，介质波导内只能有一定的模。哪些

模能够传输，需受到截止条件的限制。

我们知道，金属波导中模式的截止条件是 $K_{e_1} = 0$ ，即由 $\beta^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ 得到。此时沿波导轴向无能量传输。

而模式在介质波导中传输时，在介质波导内外的相位因数需满足式 (5.3-13)，即

$$\left. \begin{aligned} K_{e_1}^2 &= K_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ K_{e_2}^2 &= \beta^2 - K_0^2 n_2^2 \\ K_0^2 &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \end{aligned} \right\}$$

模在介质波导中存在的条件是其横向相位因数 K_{e_1} 和 K_{e_2} 必须为正实数， K_{e_2} 必须为正数。由上式可见，这就要求

$$K_1 \leq \beta \leq K_2 \quad (5.3-34)$$

而模的截止条件则为

$$K_{e_2} = 0 \quad (5.3-35)$$

当 $K_{e_2} < 0$ 时，波沿 r 方向有辐射。可见，与金属波导不同，对于介质波导， $K_{e_2} < 0$ ，波沿 r 方向有辐射，但波沿 z 向仍有传播。这种模称为辐射模；而对于金属波导，当模截止时，波沿 z 向无传播只是振幅衰减。同时注意到，金属波导的截止系要求 $K_{e_1} = 0$ ，而介质波导的截止则要求 $K_{e_2} = 0$ 。这是容易理解的，因为金属波导是封闭波导，波导外本来无电磁场，因此对于介质波导，要波导外无辐射场则应要求 $K_{e_2} \geq 0$ 。

根据截止条件 $K_{e_2} = 0$ ，由特征方程可以求得， $m = 0$ 时的 TE_{0n} 模和 TM_{0n} 模的截止条件为 $J_0(u_{0n}) = 0$ ； $m \neq 0$ 而 $m = 1$ 时的截止条件为 $J_1(u_{1n}) = 0$ 。当 $n = 1$ 时， $u_{11} = 0$ ，即表明 HE_{11} 模无截止波长，即 $(\lambda_s)_{HE_{11}} = \infty$ 。故 HE_{11} 模是圆形介质波导的基本模。

对于介质 2 为空气的情况，在截止条件下，由式 (5.3-17) 得到

$$\beta = K_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

这表明截止时，介质波导中波的传播因数等于自由空间波的传播因数，其传播速度等于光速。

(4) 传播速度

由式 (5.3-13) 可以求得

$$\beta = K_0 \sqrt{\epsilon_{r_1} - \left(\frac{\mu_{mn} \lambda}{2\pi a} \right)^2}$$

故传播速度

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{r_1} - \left(\frac{\mu_{mn} \lambda}{2\pi a} \right)^2}} \quad (5.3-36)$$

式中 μ_{mn} 为 $J_m(K_{e_1} a) = 0$ 的根值，可由特征方程 (5.3-27) 求得。由式 (5.3-36) 可见，当 λ 减小时（即频率升高时）， v_p 趋于 $c / \sqrt{\epsilon_r}$ ，而当截止时， $v_p \rightarrow c$ 。故知介质波导中

波的传播速度介于光速 c 和 $c/\sqrt{\epsilon_r}$ 之间。

圆形介质棒波导可用各种介质材料做成。实验表明，聚丙烯介质的损耗一直到毫米波段都很小，在 $15\sim40\text{GHz}$ 下的 $\tan\delta$ 约为 5×10^{-5} ，很适于做介质波导材料。为了保证其基模（或称主模） HE_{11} 模的群时延失真较小，又使介质波导具有一定的机械强度和合理的尺寸，一般选取圆形介质棒波导的直径 D 为 $(0.5\sim0.68)\lambda_0$ ， λ_0 为自由空间波长。

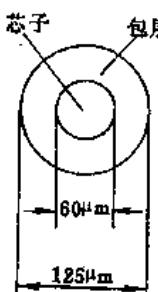
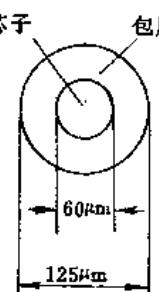
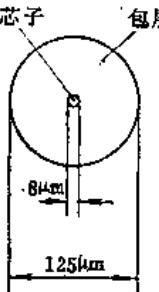
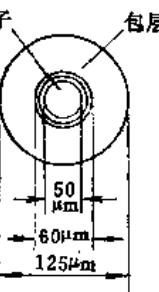
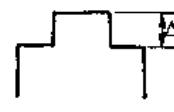
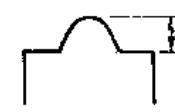
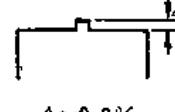
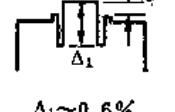
2. 阶跃光纤的波动方程解

光纤即光导纤维，或称光学纤维。它实际上是一种根据全反射原理工作的介质波导，是由透明的光学玻璃拉成纤维作芯子，表面覆一层折射率稍低的玻璃作为套，外面还加高衰减的塑料作保护层而构成的。光纤具有频带宽、损耗小、传输容量大、保密性好、尺寸小、重量轻、不受电磁干扰、材料来源丰富（基本材料是 SiO_2 ，到处都有）、可大量节省金属材料等优点。目前，光纤在大容量信息传输、通信、计算机和电子仪器及光电技术中有着广泛应用。

（1）光纤的结构与种类

光纤的种类按用途可分为照明用光纤、图象传输用光纤和通信用光纤三类。表5.3-1

表5.3-1 通信用光纤的结构与特点●

特性 结构型式	多模光纤		单模光纤	
	阶跃型	梯度型	阶跃型	复合型
形状	 芯子 包层 $60\mu\text{m}$ $125\mu\text{m}$	 芯子 包层 $60\mu\text{m}$ $125\mu\text{m}$	 芯子 包层 $8\mu\text{m}$ $125\mu\text{m}$	 芯子 包层 $50\mu\text{m}$ $60\mu\text{m}$ $125\mu\text{m}$
折射率分布	 $\Delta \approx 1\%$	 $\Delta \approx 1\%$	 $\Delta \approx 0.2\%$	 $\Delta_1 \approx 0.6\%$ $\Delta_2 \approx 0.03\%$
功率分布				
适用光源	LED LD	LD LED	LD	LD
特点	① 与光源耦合效率高 ② 窄频带	① 与光源耦合效率较高 ② 宽频带	① 低损耗 ② 超宽频带	① 有色散补偿作用 ② 超宽频带

● LED = 发光二极管

LD = 激光二极管

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}; \text{ 折射率差比率}$$

列出了通信用光纤的结构型式及其特点。这里只限于讨论通信用阶跃光纤，讨论其波动方程解及其模式。

(2) 阶跃光纤中的模式

阶跃光纤的截面如图5.3-2所示，纤芯半径为 a ，折射率为 n_1 ；包层半径为 b ，折射率为 n_2 。分析时假设：(1) 介质为理想介质，其电导率为零；(2) 介电常数 ϵ 、磁导率 μ 不随时间变化；(3) 电磁场为时谐场，沿 z 向传播。

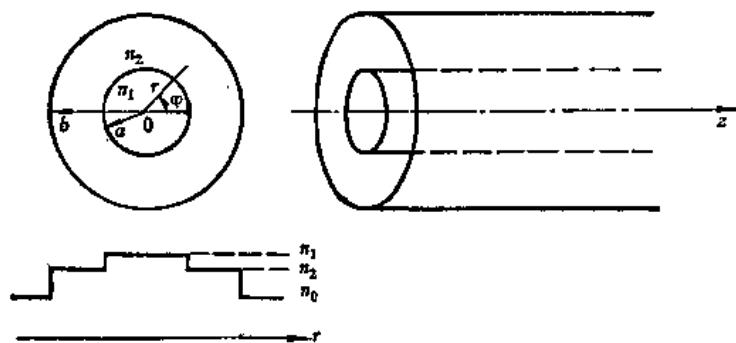


图5.3-2 阶跃光纤的结构及其坐标系
内部为芯子 n_1 ，外加包层 n_2 ，最外面还加3~80μm高衰减塑料保护层。

光纤中的场与传输特性的分析远比金属波导复杂、困难，好在实际光纤的芯子和包层的折射率相差很小， $(n_1 - n_2)/n_1 \ll 1$ ，且折射率在径向一个波长长度上的变化率($\lambda \cdot (dn/dr)$)远小于1。这种光纤称为弱导光纤。实际应用的光纤几乎都可以看成是弱导光纤。对这种光纤，分析时可以作适当近似，使分析得以简化。即由此可以得到简化的特征方程，并据此可得到近截止区和远离截止区本征值的近似解。这些近似解的形式十分简单。同时，这种近似简化分析的结果，得到弱导光纤所特有的一类模式：LP模。

a. 简化特征方程

采用圆柱坐标系进行分析。阶跃光纤芯内和包层内的纵向场分量 E_z 和 H_z 分别如式(5.3-15)和(5.3-16)所示， r 方向的传播因数满足如下关系：

$$v^2 = u^2 + w^2 = \omega^2 a^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \mu_0 = a^2 K_0^2 n_1^2 2\Delta \quad (5.3-37)$$

式中

$$u = (\omega^2 \epsilon_1 \mu_0 - \beta^2)^{1/2} a = (K_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} a \quad (5.3-38)$$

$$w = (\beta^2 - \omega^2 \epsilon_2 \mu_0)^{1/2} a = (\beta^2 - K_0^2 n_2^2)^{1/2} a \quad (5.3-39)$$

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (5.3-40)$$

u 和 w 是光纤的基本参量； v 则决定传输的模数，它与光波的频率成正比，称为归一化频率，是光纤的一个重要参数。

特征方程如式(5.3-27)所示。但对于弱导光纤， $(n_1 - n_2)/n_1 \ll 1$ ， $n_1 \approx n_2$ ，则特征方程简化为

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{u} - \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{1}{w} - \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right] \left[\frac{1}{u} - \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{1}{w} - \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right] \\ & = m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)^2 \end{aligned}$$

即得

$$\frac{1}{u} - \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{1}{w} - \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} = \pm m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (5.3-41)$$

或者

$$\frac{1}{u} - \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} = - \frac{1}{w} - \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \pm m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (5.3-42)$$

而

$$u^2 = K_{\epsilon_1}^2 a^2 = (K_0^2 n_1^2 - \beta^2) a^2$$

$$w^2 = K_{\epsilon_2}^2 a^2 = (\beta^2 - K_0^2 n_2^2) a^2$$

则

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} = \frac{1}{(K_0^2 n_1^2 - \beta^2) a^2} + \frac{1}{(\beta^2 - K_0^2 n_2^2) a^2} \approx 0$$

于是得到简化特征方程（或称近似特征方程）：

$$\frac{1}{u} - \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} \approx - \frac{1}{w} - \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \quad (5.3-43)$$

由贝塞尔函数递推公式：

$$J'_m(u) = \frac{J_{m-1}(u) - J_{m+1}(u)}{2}$$

$$2 \frac{m}{u} J_m(u) = J_{m-1}(u) + J_{m+1}(u)$$

则

$$J'_m(u) = J_{m-1}(u) - \frac{m}{u} J_m(u)$$

$$\frac{1}{u} - \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} = \frac{1}{u} - \frac{\frac{m}{u} J_m(u)}{J_m(u)} = \frac{1}{u} - \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} - \frac{m}{u^2}$$

而由变态贝塞尔函数递推关系：

$$K'_m(w) = - \frac{K_{m-1}(w) + K_{m+1}(w)}{2}$$

$$2 \frac{m}{w} K_m(w) = -K_{m-1}(w) + K_{m+1}(w)$$

则

$$K_{m+1}(w) = K_{m-1}(w) + 2 \frac{m}{w} K_m(w)$$

$$\begin{aligned} K'_m(w) &= -K_{m-1}(w) - \frac{m}{w} K_m(w) \\ -\frac{1}{w} \cdot \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} &= \frac{1}{w} \cdot \frac{-K_{m-1}(w)}{K_m(w)} + \frac{m}{w^2} \end{aligned}$$

将这些结果代入式(5.3-43), 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \cdot \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} - \frac{m}{u^2} &= \frac{1}{w} \cdot \frac{-K_{m-1}(w)}{K_m(w)} + \frac{m}{w^2} \\ \frac{1}{u^2} \left[u \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} - m \right] &= \frac{1}{w^2} \left[w \frac{-K_{m-1}(w)}{K_m(w)} + m \right] \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{(K_0^2 n_1^2 - \beta^2) a^2} \left[u \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} - m \right] = -\frac{1}{(K_0^2 n_2^2 - \beta^2) a^2} \left[w \frac{-K_{m-1}(w)}{K_m(w)} + m \right]$$

因为 $n_1 \approx n_2$, 故有

$$u \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} - m \approx -w \frac{-K_{m-1}(w)}{K_m(w)} + m$$

即得到近似特征方程(即色散方程)

$$u \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = -w \frac{-K_{m-1}(w)}{K_m(w)} \quad (5.3-44)$$

对于 $m = 0$ 情况, 则为

$$u \frac{J_{-1}(u)}{J_0(u)} = -w \frac{K_{-1}(w)}{K_0(w)}$$

或者

$$\frac{u J_1(u)}{J_0(u)} = \frac{w K_1(w)}{K_0(w)} \quad (5.3-45)$$

一旦光纤的结构(即光纤的固有参数 n_1 、 a 、 Δ)和光波波长(或频率)确定后, 就可由式(5.3-37)求出 v , 然后由式(5.3-44)或(5.3-45)求出 u 和 w , 再由式(5.3-38)和(5.3-39)求得各种模的传播因数 β , 从而确定各种正规模的传输特性。

b. 光纤中的模式

和金属波导一样, 光纤也是模式传输, 并有单模和多模。每一个模式代表在光纤中能够单独存在的场结构。

光纤中的传输模, 按其有无纵向场分量可以分为 TE_{0n} 、 TM_{0n} 、 HE_{mn} 和 EH_{mn} 等模; 另外, 对于弱导光纤, 满足相同近似特征方程的简并模组成所谓 LP 模。下面结合特征方程来分别加以讨论。

i. TE_{0n} 和 TM_{0n} 模

如上所述, 当 $m = 0$ 时, 圆形介质波导中的场可以分成两组独立的场分量, 一组为 H_x 、 H_z 和 E_y , 另一组为 E_x 、 E_z 和 H_y 。前者即为 TE_{0n} 模, 后者即为 TM_{0n} 模。

当 $m = 0$ 时, 由式(5.3-27)得到

$$\frac{1}{u} - \frac{J'_0(u)}{J_0(u)} + \frac{1}{w} - \frac{K'_0(w)}{K_0(w)} = 0 \quad (5.3-46a)$$

$$\frac{n_1^2}{u} - \frac{J'_0(u)}{J_0(u)} + \frac{n_2^2}{w} - \frac{K'_0(w)}{K_0(w)} = 0 \quad (5.3-46b)$$

式(5.3-46a)和(5.3-46b)分别是TE_{0n}模和TM_{0n}模的特征方程。

纤芯中TE_{0n}模和TM_{0n}模的场结构与金属圆波导中的场结构相似。图5.3-3(a), (b), (c)分别表示TE₀₁, TE₀₂, TM₀₁模的场结构。

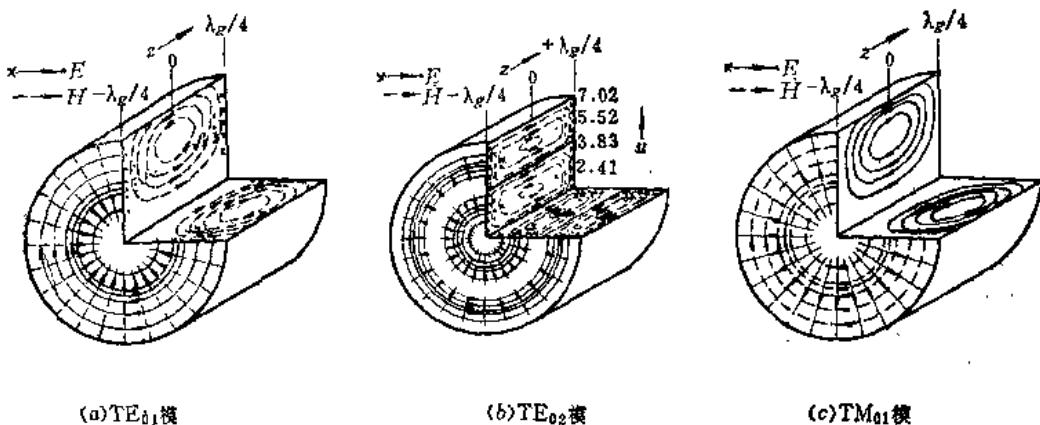


图5.3-3 纤芯内圆对称模的场结构

iii. HE_{mn}模和EH_{mn}模

当m≠0时,由式(5.3-15)、(5.3-16)和(5.3-17)可以看出,六个场分量均存在。如上所述,此时也可以分为两套模,即混合型HE_{mn}模和EH_{mn}模。下标m n分别表示该模的场在θ方向和半径方向变化的次数。此时,考虑到n₁≈n₂,近似特征方程如式(5.3-42)所示。式中m前取“-”号定义为HE_{mn}模,取“+”号定义为EH_{mn}模。

如上所述,HE₁₁模是圆形介质棒波导中的基模,也是阶跃光纤中的基模,其截止频率为零。它类似于金属圆波导中的TE₁₁模,不同的是前者有六个场分量,后者是纯TE模,无E_r分量。

图5.3-4示出HE₁₁、EH₁₁、HE₂₁、HE₁₂和HE₃₁等混合模在纤芯内的场分布。

iii. LP模

对于实用的弱导光纤,满足相同近似特征方程的模式,其相位因数简并,构成一类新的模式,按照格洛奇(Gloge)的建议,将光纤中这种简并模称为LP模,即线极化模(Linearly Polarized Mode),以LP_{mn}表示,而抛弃TE、TM、HE和EH各类模式之间的差别。这类模是波的极化不随时间变化的标量波型。一般的平面波,横向场作sinmφ或cosmφ变化的波型就属于这种类型。当m=0时,LP模按2:1发生简并;m≥1时则按4:1发生简并。LP_{mn}模命名法与TE、TM、HE和EH模名称的关系见表5.3-2。

在光纤通信中采用LP模来描述模的特性有三个优点:(1)容易知道模式的电磁场分布,由计算各个模的电磁场分布就可知道,属于同一LP模的一些模的一个方向(纵向或横向)电场分量(E_z或E_y)的强度分布,能由同一图形表示出。LP(线偏振)

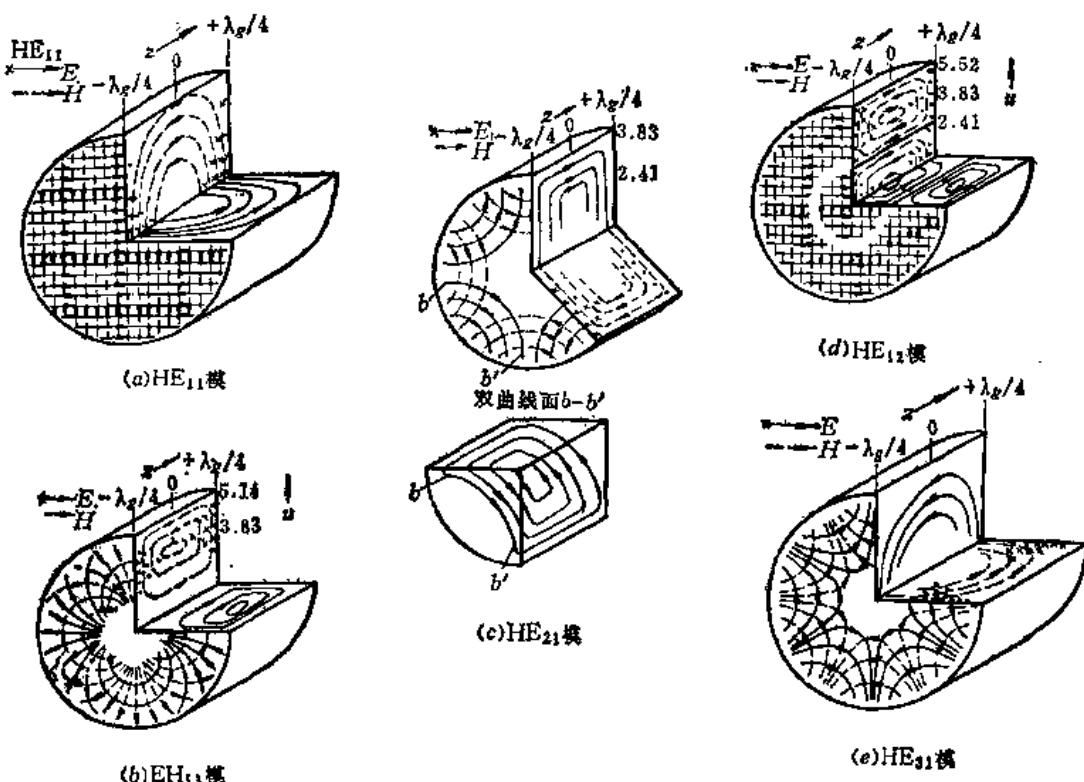


图5.3-4 几种混合模在纤芯内的场分布

表5.3-2 LP模命名法与原有命名法的关系

LP命名法	原有命名法	简并模数①	近似特征方程
LP _{0n} 模 (m=0)	HE _{1n} 模	2	$\frac{J_0(u)}{u J_1(u)} = \frac{1}{w} \frac{K_0(w)}{K_1(w)}$
LP _{1n} 模 (m=1)	TE _{0n} 模 TM _{0n} 模 HE _{2n} 模	4	$\frac{1}{u} \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = -\frac{1}{w} \frac{K_1(w)}{K_0(w)}$
LP _{mn} 模 (m≥2)	EH _{m-1,n} 模 HE _{m+1,n} 模	4	$\frac{1}{u} \frac{J_m(u)}{J_{m-1}(u)} = -\frac{1}{w} \frac{K_m(w)}{K_{m-1}(w)}$

① 对于m≥1的EH_{mn}或HE_{mn}模，都具有sinmφ和cosmφ两个简并模。

的名称，即来源于这一事实；（2）可以简化模的分类和命名；（3）便于研究由线偏振光源进行的激励问题。

因为正规模场分量沿φ方向的变化（即极化方向）可以是cosmφ或sinmφ，所以对于m≥1的EH_{mn}或HE_{mn}模，都具有cosmφ和sinmφ两个简并模，因而对于m≥1的LP_{mn}模可以有四个极化波型图，而LP_{mn}模可由混合HE_{m+1,n}和EH_{m-1,n}模的线性组合来表示，每个混合模又可以是cosmφ或sinmφ变化。因此，用LP_{mn}模表示法就可以代替分开的HE和EH模的组合，从而简化光纤中模式的表示方法。图5.3-5即表示LP₀₁、LP₁₁和LP₂₁这三组模的电场图形及其E_x（横向电场）的强度分布。由图可见，足标m表示沿圆周方向E_x（或E_y）的变化数。

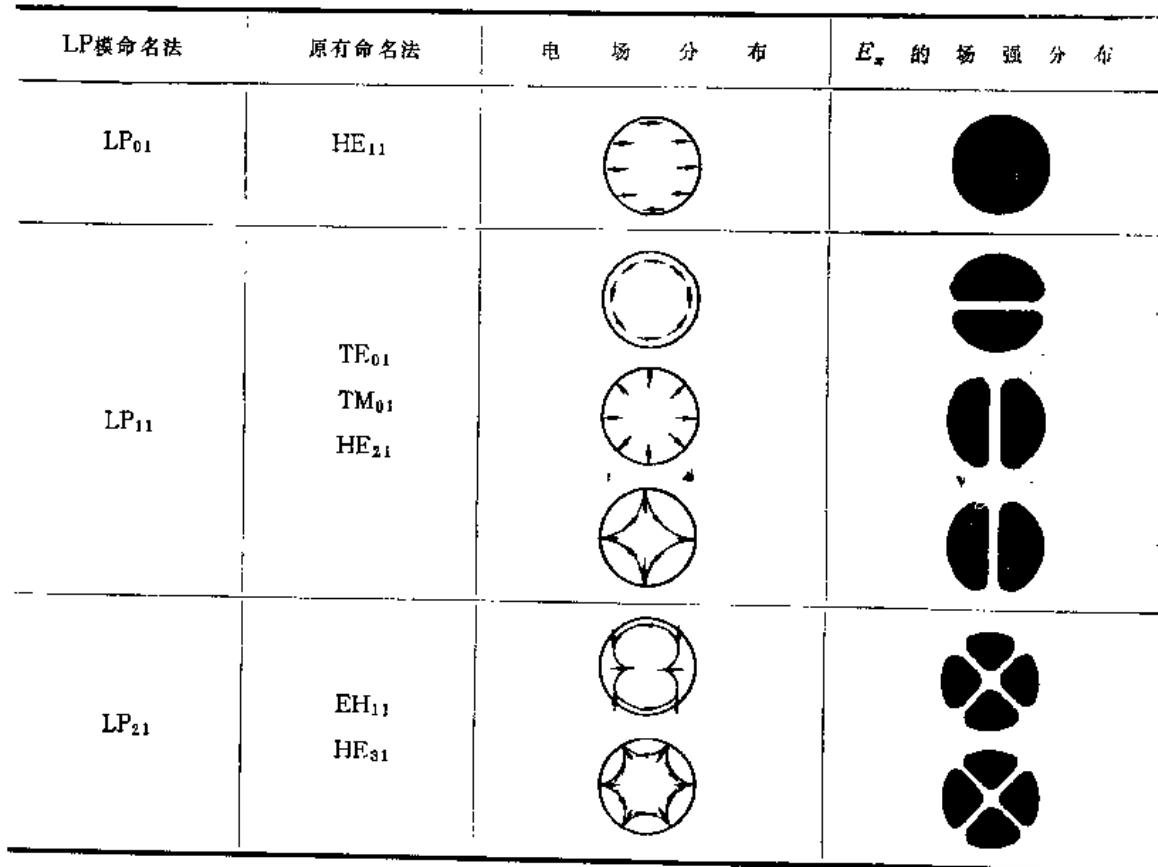


图5.3-5 LP模的场分布关系

(3) 截止条件和截止频率

如上所述，当 $K_0 n_2 < \beta \leq K_0 n_1$ 时，包层内的场将按指数规律衰减，使电磁场能量限制在纤芯内，使正规模得以传输；但当

$$\left. \begin{array}{l} \beta = K_0 n_2 \\ w = 0 \end{array} \right\} \quad (5.3-47)$$

时，包层内的场不再作指数衰减，场的能量将逸出纤芯外，正规模将变成辐射模。称 $\beta = K_0 n_2$ 时由 $w = 0$ 状态所决定的频率为截止频率， $w = 0$ 即代表正规模的截止条件。

由特征方程和 $w = 0$ 可求得各种模的截止条件，如表5.3-3所示。

表5.3-3 各种模的截止条件

m 值	模 式	截 止 条 件
$m = 0$	TE _{0n} TM _{0n} ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$J_0(u) = 0$
$m = 1$	HE _{1n} EH _{1n} (不包括零根)	$J_1(u) = 0$
$m \geq 2$	HE _{mn} EH _{mn} ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$\frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = \frac{u}{m-1} \frac{n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}$ $J_m(u) = 0$ (全部非零根)

由 $J_1(u) = 0$ 的第一个根 $u_{11} = 0$, 可求得 HE_{11} 模的截止波长 $\lambda_c = \infty$, 故 HE_{11} 模是光纤的基模(或称主模)。这与上面圆形介质棒波导的结果一样。图5.3-6表示各种模的截止值, 图5.3-7则表示各种模对应的 u 值范围。

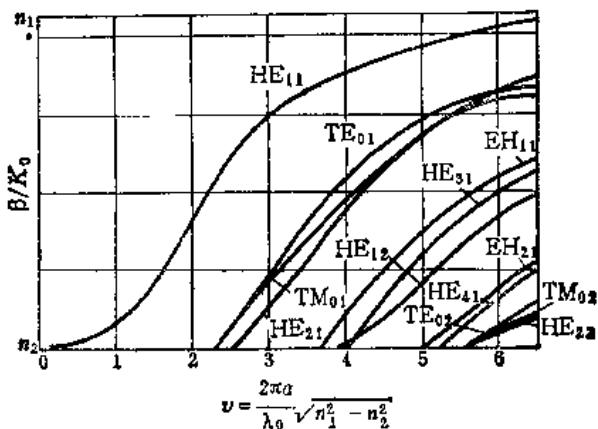
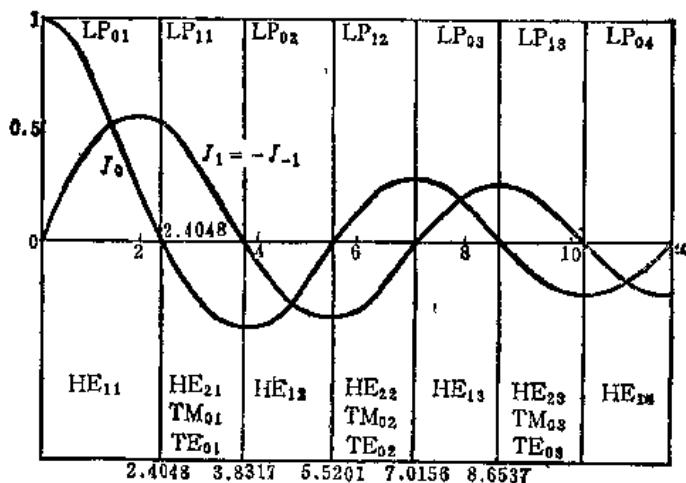


图5.3-6 各种模的截止值

图5.3-7 LP模的 u 值范围

容易理解, 为使正规模能够在光纤中传输, 应 $w \gg 0$ 。此即远离截止条件。将此条件用于特征方程, 可以求得各种模的远离截止条件, 如表5.3-4所示。

表5.3-4 各种模的远离截止条件

m 值	模 式	远 离 截 止 条 件
$m = 0$	TE_{0n} ($n = 1, 2, \dots$)	$J_1(u) = 0$
	TM_{0n}	
$m \geq 1$	HE_{mn} ($n = 1, 2, \dots$)	$J_{m+1}(u) = 0$
	EH_{mn}	$J_{m+1}(u) = 0$

基模 HE_{11} 的远离截止条件为 $J_0(u_{01}) = 0$ 。由此可得

$$u_{01} = 2.40483$$

这正好是 TE_{01} 和 TM_{01} 模的截止条件。因此，为了保证光纤中单模传输，归一化频率 v 必须小于 2.40483， HE_{11} 模的 u 值则在 0 至 2.40483 之间。

TE_{01} 、 TM_{01} 和 HE_{21} 模的远离截止条件均为 $J_1(u) = 0$ ，其第一个根为 3.83171，所以这三个模 u 值的范围都是从 2.40483 到 3.83171。这三个模远离截止时彼此靠拢，波的相位因数几乎相等；截止时， TE_{01} 、 TM_{01} 模的截止值相等，而 HE_{21} 模的截止值几乎与它们相等。由此可见，这三个模在 v 值不大不小时彼此分离，在中间某一点， HE_{21} 模与 TE_{01} 、 TM_{01} 模交叉，如图 5.3-6 所示。

(4) 功率传输

光纤中的功率自然希望大部分集中在纤芯内传输。我们定义纤芯内的功率集中度 η 为

$$\eta = \frac{P_z}{P_a} \quad (5.3-48)$$

式中， P_z 表示纤芯内的功率， P_a 表示模的全部功率。

通过光纤横截面的坡印亭矢量为

$$S_z = -\frac{1}{2} (E_r H_\phi - E_\phi H_r) \\ \propto \begin{cases} \frac{J_{m\neq 1}^2(uR)}{J_{m\neq 1}^2(u)} & R \leq 1 \\ \frac{K_{m\neq 1}^2(wR)}{K_{m\neq 1}^2(w)} & R \geq 1 \end{cases} \quad (5.3-49)$$

式中，“-”号对应于 HE 模，“+”号对应于 EH 模。

P_z 、 P_a 可由下式计算：

$$P_z = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty S_z r dr d\varphi \quad (5.3-50)$$

$$P_a = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty S_a r dr d\varphi \quad (5.3-51)$$

由此可求得功率集中度为

$$\eta = \left(\frac{w}{v}\right)^2 + \left(\frac{u}{v}\right)^2 \frac{K_m^2 K_{m\neq 1}^2}{K_m K_{m\neq 2}} \quad (5.3-52)$$

图 5.3-8 表示各种模功率集中度 η 与归一化频率 v 的关系曲线。由图可见， TM_{0n} 、 TE_{0n} 、 HE_{2n} 模在截止频率时，芯内功率为零，都变成了包层中的功率，而其它模即使在截止频率，其在芯内仍有功率传输。

目前使用的光纤多为多模光纤，其所传输的模式总数 N 由下式决定：

$$N = 2 \left(\frac{\pi a n_1 \sqrt{2\Delta}}{\lambda} \right) \approx \frac{v^2}{2} \quad (5.3-53)$$

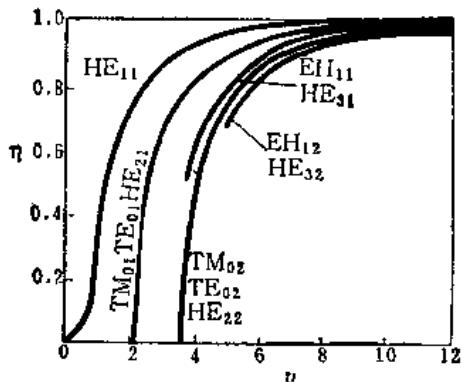


图 5.3-8 纤芯内的功率集中度

例如纤芯半径为 $60\mu\text{m}$, $\Delta = 1\%$ 的多模光纤, 当波长为 $1\mu\text{m}$ 时, 传输的模数 N 约为 760 个。

5.4 矩形介质波导

矩形介质波导的结构如图 5.4-1(a) 所示, 其截面图及其坐标系如图 5.4-1(b) 所示。介质波导芯的折射率为 n_1 , 周围分别与折射率为 $n_2 \sim n_5$ 的媒质相邻, $n_2 \sim n_5$ 都比 n_1 小 (例如为空气)。

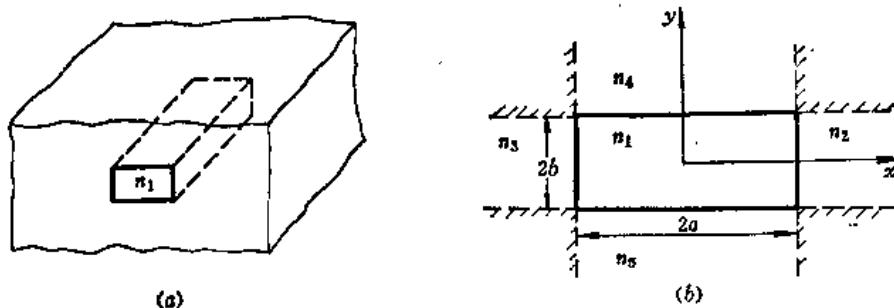


图 5.4-1 矩形介质波导及其坐标系

与矩形金属波导不同, 矩形介质波导中的模式为混合模, 但基本上是 TEM 模, 其纵向电场和磁场分量远小于横向场分量。对这种模传输特性的了解有助于许多集成光路元件的分析。

矩形介质波导不能象圆形介质波导那样得到严格的解析结果, 只能求近似解, 一般只能用数值方法求解。常用的近似方法有马克蒂里 (Marcatili) 分区近似法、戈尔 (Goell) 圆柱空间谐波法、诺克斯-图里奥斯 (Knox-Toulous) 有效介电常数法。这里我们只介绍分区近似法和有效介电常数法。作为理论基础, 首先对介质板波导及其传输特性进行分析。

1. 介质板波导

介质板波导又称介质薄膜波导, 形如图 5.4-2 所示。它由三层构成, 折射率为 n_1 的厚度为 $2a$ 的介质板处于折射率为 n_2 和 n_3 的介质之间。通常

$$n_1 > n_2 \geq n_3 \quad (5.4-1)$$

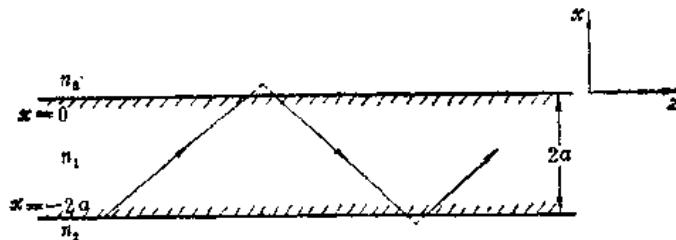


图5.4-2 介质板波导

如 $n_2 \neq n_3$, 则为非对称型结构; 如 $n_2 = n_3$ (例如都是空气) 则为对称型结构。在光集成电路中所用的介质薄膜波导, 中间一层为波导薄膜, 厚度 $2a$ 约为 $1 \sim 10 \mu\text{m}$, 其折射率最大, 光波就在其中传播; 底层为衬底, 其折射率 n_2 稍小, 上层为覆盖层, 其折射率 n_3 最小, 一般为空气。这种光传输用的介质薄膜一般是由沉积在衬底上的一层介质薄膜构成的。它是无源和有源集成的基础结构。

由于介质板的折射率 n_1 大于外面媒质的折射率, 则波在边界面上可以产生全反射 (内反射), 使电磁波限制在介质板内部传输。

介质板波导的分析方法可用射线理论也可用波动理论。这里我们用波动理论方法来求无耗非对称介质波导中的传输模式及其特征方程。我们只限于研究场沿 y 方向无变化的情况, 即 $\partial/\partial y = 0$ 。介质板波导的结果在矩形介质波导的有效介电常数法中需要应用。

假定波沿 z 向传输, 传输因子为 $e^{-j\beta z}$, 则 $\partial/\partial z = -j\beta$, β 为纵向传播因数。在三个区域里的波动方程分别为

$$\text{区域 1} \quad \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} + K_{cz_1}^2 E_1 = 0 \quad (5.4-2a)$$

$$\text{区域 2} \quad \frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} - K_{cz_2}^2 E_2 = 0 \quad (5.4-2b)$$

$$\text{区域 3} \quad \frac{\partial^2 E_3}{\partial x^2} - K_{cz_3}^2 E_3 = 0 \quad (5.4-2c)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} K_{cz_1}^2 &= K_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ K_{cz_2}^2 &= -K_0^2 n_2^2 + \beta^2 \\ K_{cz_3}^2 &= -K_0^2 n_3^2 + \beta^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.4-3)$$

$$K_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$$

三个区域内的磁场有类似的波动方程。

在直角坐标系中, 麦克斯韦方程展开为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega \mu_0 H_z \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial x} &= -j\omega \mu_0 H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial y} &= -j\omega \mu_0 H_x \end{aligned} \right\} \quad (5.4-4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j\omega\epsilon E_z \\ \frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{\partial H_x}{\partial x} &= j\omega\epsilon E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_z}{\partial y} &= j\omega\epsilon E_x \end{aligned} \right\}$$

把 $\partial/\partial y = 0$, $\partial/\partial z = -j\beta$ 代入上式, 得到

$$\left. \begin{aligned} \beta E_y &= -\omega\mu_0 H_x \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -j\omega\mu_0 H_z \\ -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\epsilon E_y \end{aligned} \right\} \text{TE模} \quad (5.4-5a)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta H_y &= \omega\epsilon E_x \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\epsilon E_x \\ j\beta E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} &= j\omega\mu_0 H_y \end{aligned} \right\} \text{TM模} \quad (5.4-5b)$$

这样, 麦克斯韦方程就变成两组独立的方程, 一组仅含有 E_y 、 H_x 、 H_z 三个分量, 另一组只含有 H_y 、 E_x 、 E_z 三个分量。前者即为 H 波 (TE 模), 后者则为 E 波 (TM 模)。这表明介质板波导中可以传输 TE 模和 TM 模两种模。下面分别加以讨论。

(1) TE 模

如上所述, 介质板波导的 TE 模只有 E_y 、 H_x 和 H_z 三个场分量。为简单起见, 我们省略公共因子 $e^{j(\omega t-\beta x)}$, 于是由式 (5.4-5a), 得到

$$H_z = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y, \quad (5.4-6)$$

$$H_x = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (5.4-7)$$

式 (5.4-6) 和 (5.4-7) 是 TE 模的两个非零磁场分量 H_z 、 H_x 与唯一的非零电场 E_y 的关系式。而 E_y 是各区域内波动方程 (5.4-2) 的解, 并且要求在介质层 1-2 和 1-3 之间交界面处的切向场分量 E_y 、 H_x 应当连续。

对于传输模, 要求其功率主要集中在区域 1 中传输。这就要求在区域 1 中的场应当是振荡的 ($K_{ex_1}^2 \geq 0$), 而在区域 2、3 中场应当是衰减的 ($K_{ex_2}^2, K_{ex_3}^2 \geq 0$)。组合这些条件我们得到不等式:

$$n_1 K_0 \geq \beta \geq n_2 K_0 \geq n_3 K_0 \quad (5.4-8)$$

根据上述考虑, 我们可以写出三个区域内 E_y 的解为

$$E_y = \begin{cases} Ae^{-K_{ex_3}x} & x \geq 0 \\ A\cos K_{ex_1}x + B\sin K_{ex_1}x & 0 \geq x \geq -2a \\ (A\cos 2aK_{ex_1} - B\sin 2aK_{ex_1})e^{K_{ex_2}(x+2a)} & -2a \geq x \end{cases} \quad (5.4-9)$$

式中的常数选取已考虑到边界条件的要求，即 E_y 在 $x = 0$ 和 $-2a$ 处应当连续。根据式 (5.4-7)，可求得

$$H_z = \frac{j}{\omega \mu_0} \begin{cases} -K_{ex_3} A e^{-K_{ex_3} x} & x \geq 0 \\ K_{ex_1} (-A \sin K_{ex_1} x + B \cos K_{ex_1} x) & 0 \geq x \geq -2a \\ K_{ex_2} (A \cos 2a K_{ex_1} - B \sin 2a K_{ex_1}) e^{K_{ex_2} (x+2a)} & -2a \geq x \end{cases} \quad (5.4-10)$$

由 H_z 连续条件可以得到两个方程：

$$\text{在 } x = 0 \text{ 处} \quad -K_{ex_3} = K_{ex_1} B$$

$$\text{在 } x = -2a \text{ 处} \quad K_{ex_1} (A \cos 2a K_{ex_1} + B \sin 2a K_{ex_1}) = K_{ex_2} (A \cos 2a K_{ex_1} - B \sin 2a K_{ex_1})$$

由这些方程消去 A/B ，即得到方程

$$\tan(2aK_{ex_1} - N\pi) = \frac{K_{ex_1}(K_{ex_2} + K_{ex_3})}{K_{ex_1}^2 - K_{ex_2} \cdot K_{ex_3}} \quad (5.4-11)$$

此即 TE 模的特征方程。

(2) TM 模

TM 模的非零场分量只有 H_y 、 E_x 和 E_z ，由式 (5.4-5 b) 可得

$$E_x = \frac{\beta}{\omega \epsilon} H_y = \frac{\beta}{\omega \epsilon_0 n_i^2} H_y \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.4-12)$$

$$E_z = -\frac{j}{\omega \epsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\frac{j}{\omega \epsilon_0 n_i^2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.4-13)$$

这是 TM 模三个场分量之关系式，而 H_y 是三个区域波动方程的解：

$$H_y = \begin{cases} C e^{-K_{ex_3} x} & x \geq 0 \\ C \cos K_{ex_1} x + D \sin K_{ex_1} x & 0 \geq x \geq -2a \\ (C \cos 2a K_{ex_1} - D \sin 2a K_{ex_1}) e^{K_{ex_2} (x+2a)} & -2a \geq x \end{cases} \quad (5.4-14)$$

由式 (5.4-13) 可求得 E_x 为

$$E_x = -\frac{j}{\omega \epsilon_0} \begin{cases} \frac{-K_{ex_3} C}{n_3^2} e^{-K_{ex_3} x} & x \geq 0 \\ \frac{K_{ex_1}}{n_1^2} (-C \sin K_{ex_1} x + D \cos K_{ex_1} x) & 0 \geq x \geq -2a \\ \frac{K_{ex_2}}{n_2^2} (C \cos 2a K_{ex_1} - D \sin 2a K_{ex_1}) e^{K_{ex_2} (x+2a)} & -2a \geq x \end{cases} \quad (5.4-15)$$

由 E_x 在 $x = 0$ 和 $-2a$ 处的连续条件，得到

$$\frac{-K_{ex_3} C}{n_3^2} = \frac{K_{ex_1} D}{n_1^2}$$

$$\frac{K_{ex_1}}{n_1^2} (C \sin 2a K_{ex_1} + D \cos 2a K_{ex_1}) = \frac{K_{ex_2}}{n_2^2} (C \cos 2a K_{ex_1} - D \sin 2a K_{ex_1})$$

由此两式消去 C/D , 得到

$$\operatorname{tg}(2aK_{ex_1} - N\pi) = \frac{(n_3^2 K_{ex_2} + n_2^2 K_{ex_3}) n_1^2 K_{ex_1}}{n_2^2 n_3^2 K_{ex_1}^2 - n_1^4 K_{ex_2} K_{ex_3}} \quad (5.4-16)$$

此即 TM 模的特征方程。

(3) 模数与截止

通常以 TE_N 和 TM_N 表示介质板波导中的波型, 下标 N 表示场在介质板波导内的节点数, 其截止条件为

$$\beta = K_0 n_2 \quad (5.4-17)$$

此时场扩散到整个区域 2。下面我们来求介质板波导 TE 和 TM 模的截止频率。

对于 TE 模, 将式 (5.4-17) 代入式 (5.4-3), 则由式 (5.4-11) 得到

$$\operatorname{tg}(2aK_e(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} - N\pi) = \left(\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{1/2} \quad (5.4-18)$$

式中 K_e 为相应的截止波数。我们定义归一化频率 v 为

$$v = aK_e(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \quad (5.4-19)$$

则由式 (5.4-18) 可得到 TE 模的截止归一化频率为

$$v_c = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{n_1^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{1/2} \right] + \frac{N\pi}{2} \quad (5.4-20)$$

式中 arctg 限于 $0 \sim \pi/2$ 范围内取值。上式可用来求正规的 TE 模的数目。如果 N 可为零, 则传输模数 M 为

$$M = \left\{ \frac{1}{\pi} \left(2v - \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{n_1^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{1/2} \right] \right) \right\}_{\text{整数}} \quad (5.4-21)$$

对于 TM 模, 由式 (5.4-16) 可求得截止归一化频率为

$$v_c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{n_1}{n_3} \right)^2 \left(\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{1/2} \right] + \frac{N\pi}{2} \quad (5.4-22)$$

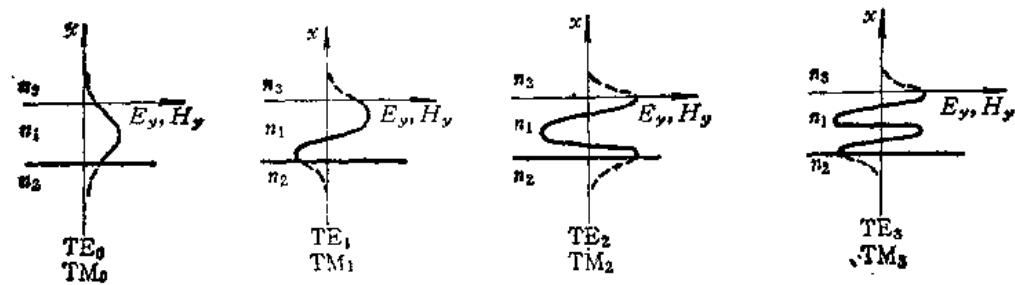
传输模数 M 为

$$M = \left\{ \frac{1}{\pi} \left(2v - \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{n_1}{n_3} \right)^2 \left(\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{1/2} \right] \right) \right\}_{\text{整数}} \quad (5.4-23)$$

图 5.4-3 表示 TE_0 、 TM_0 、 TE_1 、 TM_1 、 TE_2 、 TM_2 、 TE_3 、 TM_3 模的场分布情况。这些沿 x 方向的分布曲线对 TE_N 模代表 E_x , 对 TM_N 模则代表 H_y 。由图可见, 场在介质板内呈余弦分布, 在复层和衬底内呈指数变化。由于 n_3 较小, 则 $K'_{ex_3}^2 = -K_{ex_3}^2$ 就较大, 于是在复层内衰减较快; 而在衬底里, n_2 较大, $K'_{ex_2}^2$ 就较小, 场就衰减慢一些。这就是说, n 差得大, 衰减快, 场集中得越好; 此外, N 越大, β 越小, K'_{ex_2} 越小, 衰减越慢。这表明高次模的场延伸到外部比较远。

(4) 归一化功率流

介质板波导的传输功率

图 5.4-3 $N = 0, 1, 2, 3$ 时 TE_N, TM_N 模的场分布

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S_z dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(E \times H^*)_z dx \quad (5.4-24)$$

对于 TE 模

$$S_z = \frac{-1}{2} E_y H_z^* = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} |E_y|^2 \quad (5.4-25)$$

积分式 (5.4-24) 须分成三层，并以 P_i ($i = 1, 2, 3$) 分别表示各层中的功率，则由式 (5.4-9) 可得到对于 TE 模：

$$P_3 = \left(\frac{\beta}{2\omega\mu_0} \right) \frac{A^2}{2K_{ex_3}} \quad (5.4-26a)$$

$$P_1 = \left(\frac{\beta}{2\omega\mu_0} \right) \frac{A^2}{2} \left(\frac{K_{ex_1}^2 + K_{ex_3}^2}{K_{ex_1}^2} \right) \left[2a + \frac{K_{ex_2}}{K_{ex_1}^2 + K_{ex_2}^2} + \frac{K_{ex_3}}{K_{ex_1}^2 + K_{ex_3}^2} \right] \quad (5.4-26b)$$

$$P_2 = \left(\frac{\beta}{2\omega\mu_0} \right) \frac{A^2}{2K_{ex_2}} \left(\frac{K_{ex_1}^2 + K_{ex_3}^2}{K_{ex_1}^2 + K_{ex_2}^2} \right) \quad (5.4-26c)$$

总的功率则为

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \left(\frac{\beta}{2\omega\mu_0} \right) \frac{A^2}{2} \left(\frac{K_{ex_1}^2 + K_{ex_3}^2}{K_{ex_1}^2} \right) \left[2a + \frac{1}{K_{ex_2}} + \frac{1}{K_{ex_3}} \right] \quad (5.4-27)$$

式 (5.4-27) 右边的方括号中的值即为前述有效宽度 d_{eff} 。这表明， $[2a + 1/K_{ex_2} + 1/K_{ex_3}]$ 是场的幅度在区域 2 和 3 中衰减到 $1/e$ 的两点之间的距离，也就是说， d_{eff} 确实是场渗透到复层和衬底的深度的一种量度。

由式 (5.4-26) 和 (5.4-27) 可得到介质板波导内外的相对功率表示式为

$$\frac{P_x}{P} = \frac{2a + \frac{K_{ex_2}}{K_{ex_1}^2 + K_{ex_2}^2} + \frac{K_{ex_3}}{K_{ex_1}^2 + K_{ex_3}^2}}{2a + \frac{1}{K_{ex_2}^2} + \frac{1}{K_{ex_3}^2}} \quad (5.4-28)$$

$$\frac{P_{x_R}}{P} = \frac{\frac{K_{ex_1}^2}{K_{ex_2}(K_{ex_1}^2 + K_{ex_2}^2)} + \frac{K_{ex_1}^2}{K_{ex_3}(K_{ex_1}^2 + K_{ex_3}^2)}}{2a + \frac{1}{K_{ex_2}^2} + \frac{1}{K_{ex_3}^2}} \quad (5.4-29)$$

功率比 P_i/P ($i = 1, 2, 3$) 代表衰减因数，则有

$$\alpha = \frac{P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + P_3 \alpha_3}{P} \quad (5.4-30)$$

式中, α_1 、 α_2 、 α_3 分别为 1、2、3 区域内的衰减因数, α 为介质板波导总的衰减因数。

对于 TM 模,

$$S_i = \frac{1}{2} H_y^* E_z = \frac{\beta}{2\omega n_i^2 \epsilon_0} |H_y|^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.4-31)$$

由式 (5.4-14) 可求得各层内的功率为

$$P_3 = \left(\frac{\beta}{2\omega n_3^2 \epsilon_0} \right) \frac{C^2}{2K_{ex_3}} \quad (5.4-32a)$$

$$P_1 = \left(\frac{\beta}{2\omega n_1^2 \epsilon_0} \right) \frac{C^2}{2} \left(\frac{K_{ex_1}^2 n_3^4 + K_{ex_3}^2 n_1^4}{K_{ex_1}^2 n_3^4} \right) \left[2a + \frac{K_{ex_2} n_1^2 n_3^2}{K_{ex_1}^2 n_2^4 + K_{ex_2}^2 n_1^4} \right. \\ \left. + \frac{K_{ex_3} n_1^2 n_3^2}{K_{ex_1}^2 n_3^4 + K_{ex_3}^2 n_1^4} \right] \quad (5.4-32b)$$

$$P_2 = \left(\frac{\beta}{2\omega n_2^2 \epsilon_0} \right) \frac{C^2}{2K_{ex_2}} \left(\frac{n_2^4}{n_3^4} \right) \left(\frac{K_{ex_1}^2 n_3^4 + K_{ex_3}^2 n_1^4}{K_{ex_1}^2 n_2^4 + K_{ex_2}^2 n_1^4} \right) \quad (5.4-32c)$$

总的功率则为

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \\ = \left(\frac{\beta}{2\omega \epsilon_0} \right) \frac{C^2}{2} \left(\frac{K_{ex_1}^2 n_3^4 + K_{ex_3}^2 n_1^4}{K_{ex_1}^2 n_2^4 + K_{ex_3}^2 n_1^4} \right) \left[2a + \frac{n_1^2 n_2^2 (K_{ex_1}^2 + K_{ex_2}^2)}{K_{ex_3} (K_{ex_1}^2 n_2^4 + K_{ex_2}^2 n_1^4)} \right. \\ \left. + \frac{n_1^2 n_3^2 (K_{ex_1}^2 + K_{ex_3}^2)}{K_{ex_3} (K_{ex_1}^2 n_3^4 + K_{ex_3}^2 n_1^4)} \right] \quad (5.4-33)$$

上式右边方括号内的值代表 TM 模介质板波导的有效宽度 d_{eff}

由式 (5.4-32) 和 (5.4-33) 可求得介质板波导内外的相对功率为

$$\frac{P_{ex}}{P} = \frac{2a + \frac{K_{ex_2} n_1^2 n_2^2}{K_{ex_1}^2 n_2^4 + K_{ex_2}^2 n_1^4} + \frac{K_{ex_3} n_1^2 n_3^2}{K_{ex_1}^2 n_3^4 + K_{ex_3}^2 n_1^4}}{2a + \frac{n_1^2 n_2^2 (K_{ex_1}^2 + K_{ex_2}^2)}{K_{ex_3} (K_{ex_1}^2 n_2^4 + K_{ex_2}^2 n_1^4)} + \frac{n_1^2 n_3^2 (K_{ex_1}^2 + K_{ex_3}^2)}{K_{ex_3} (K_{ex_1}^2 n_3^4 + K_{ex_3}^2 n_1^4)}} \quad (5.4-34)$$

$$\frac{P_{ex_3}}{P} = \frac{\frac{K_{ex_1}^2 n_1^2 n_2^2}{K_{ex_2} (K_{ex_1}^2 n_2^4 + K_{ex_2}^2 n_1^4)} + \frac{K_{ex_3}^2 n_1^2 n_3^2}{K_{ex_3} (K_{ex_1}^2 n_3^4 + K_{ex_3}^2 n_1^4)}}{2a + \frac{n_1^2 n_2^2 (K_{ex_1}^2 + K_{ex_2}^2)}{K_{ex_3} (K_{ex_1}^2 n_2^4 + K_{ex_2}^2 n_1^4)} + \frac{n_1^2 n_3^2 (K_{ex_1}^2 + K_{ex_3}^2)}{K_{ex_3} (K_{ex_1}^2 n_3^4 + K_{ex_3}^2 n_1^4)}} \quad (5.4-35)$$

对于 TE 模, 如令其电场 E_z 的最大值

$$E_{ym} = A \frac{(K_{ex_1}^2 + K_{ex_3}^2)^{1/2}}{K_{ex_1}} \quad (5.4-36)$$

则其总的传输功率可表示成

$$P_{TE} = \frac{\beta}{4\omega\mu_0} E_{ym}^2 d_{eff} \equiv \frac{E_{ym} H_{ym}}{4} d_{eff} \quad (5.4-37)$$

对于 TM 模，如令其磁场分量 H_y 的最大值为

$$H_{ym} = C \frac{(K_{ex_1}^2 n_3^4 + K_{ex_3}^2 n_1^4)^{1/2}}{K_{ex_1} n_3^2} \quad (5.4-38)$$

则总的传输功率可表示成

$$P_{TM} = \frac{\beta}{4\omega n_1^2 \epsilon_0} H_{ym}^2 d_{eff} \equiv \frac{E_{ym} H_{ym}}{4} d_{eff} \quad (5.4-39)$$

式 (5.4-37) 和 (5.4-39) 既简单又有明确的物理意义，它表明介质板波导的传输功率可等效为有效宽度 d_{eff} 内的功率。

2. 矩形介质波导的分析方法

(1) 近似模型法

这种方法就是马克蒂里分区近似法。这种方法是认为能量主要集中在波导芯子内，进入周围紧邻的四个区域的能量很少，四个角区域（如图5.4-1(b)的阴影区域）的能量就更少而可以忽略不计。分别求出芯子和紧邻的四个区域内场的表达式，利用边界上切向场连续条件得到特征方程，从而求模的传输因数。同时，在分析时假定矩形介质波导中传输的模可分为 E_{mn}^x 模和 E_{mn}^y 模。前者横截面上的主要场分量是 E_x 和 H_z ，其极化主要在 y 方向；后者主要场分量是 E_y 和 H_z ，其极化主要在 x 方向，其余场分量都很小。这两种模可近似看成 TEM 模。这种近似方法在远离截止频率有较高的精度，其结果能够满足大多数工程应用精度要求。

如图5.4-1(b)所示，采用直角坐标系。此时式 (3.1-29) 可以写成

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{j}{K_{ci}^2} \left(\omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} + \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ E_y &= \frac{j}{K_{ci}^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_z &= \frac{j}{K_{ci}^2} \left(\beta \frac{\partial H_x}{\partial x} - \omega \epsilon_i \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ H_x &= \frac{j}{K_{ci}^2} \left(\omega \epsilon_i \frac{\partial E_x}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (5.4-40)$$

式中

$$K_{ci}^2 = K_0^2 n_i^2 - \beta^2 \quad (5.4-41)$$

而纵向场分量满足标量亥姆霍兹方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{E_z}{H_z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{E_z}{H_z} \right) + (K_{ci}^2 n_i^2 - \beta^2) \left(\frac{E_z}{H_z} \right) = 0 \quad (5.4-42)$$

我们忽略阴影区内的场，则边界条件只需要匹配与芯子相邻的四个边（即 $x = \pm a$, $y = \pm b$ ）上的切向场分量。

下面分别就 E_{mn}^x 模和 E_{mn}^y 模进行分析。

a. E_{mn}^x 模

根据传输特性要求，场在芯内沿 x 和 y 方向按余弦分布，在芯外按指数规律衰减。其纵向电场为

$$E_{z1} = A \cos(K_x(x + \xi)) \cos(K_y(y + \eta)) \quad (5.4-43)$$

式中， A 为常数； ξ 、 η 为广义相位参数。考虑到这种模的极化主要在 x 方向，因而选取 $H_z = 0$ 。则由式 (5.4-40) 第三式可求得

$$H_{z1} = -\frac{A\omega\epsilon_1 K_y}{\beta K_x} \sin(K_x(x + \xi)) \sin(K_y(y + \eta)) \quad (5.4-44)$$

由式 (5.4-40) 可求得其它场分量为

$$E_{x1} = -\frac{jA(K_0^2 n_1^2 - K_x^2)}{\beta K_x} \sin(K_x(x + \xi)) \cos(K_y(y + \eta)) \quad (5.4-45)$$

$$E_{y1} = \frac{jAK_x}{\beta} \cos(K_x(x + \xi)) \sin(K_y(y + \eta)) \quad (5.4-46)$$

$$H_{y1} = \frac{jA\omega\epsilon_1}{K_x} \sin(K_x(x + \xi)) \cos(K_y(y + \eta)) \quad (5.4-47)$$

式中

$$K_{ci}^2 = K_0^2 n_i^2 - \beta^2 = K_x^2 + K_y^2 \quad (5.4-48)$$

假如 $n_2 \sim n_5$ 稍小于 n_1 ，则 $\beta \approx K_0 n_1$ ，上式表明

$$K_x, K_y \ll \beta \quad (5.4-49)$$

将此不等式用于式 (5.4-46)，则可以看出 $E_y \ll E_x$ ，用于式 (5.4-45) 则有 $E_z \ll E_x$ 。于是在这些条件下 E_y 可以忽略不计。因此 E_{mn}^x 模主要在 x 方向极化。

类似的考虑也适用于区域 2 ~ 5 中的场分量。在这些区域内的 E_x 为

$$\text{区域 2} \quad E_{z2} = A \cos(K_x(a + \xi)) \cos(K_y(y + \eta)) e^{-\alpha_2(x-a)} \quad (5.4-50)$$

$$\text{区域 3} \quad E_{z3} = A \cos(K_x(\xi - a)) \cos(K_y(y + \eta)) e^{\alpha_3(x+a)} \quad (5.4-51)$$

$$\text{区域 4} \quad E_{z4} = A \frac{\epsilon_1}{\epsilon_4} \cos(K_x(x + \xi)) \cos(K_y(b + \eta)) e^{-\alpha_4(y-b)} \quad (5.4-52)$$

$$\text{区域 5} \quad E_{z5} = A \frac{\epsilon_1}{\epsilon_5} \cos(K_x(x + \xi)) \cos(K_y(\eta - b)) e^{\alpha_5(y+b)} \quad (5.4-53)$$

其它场分量可由式 (5.4-40) 和条件 $H_z = 0$ 求得。衰减因数 α_i 满足关系：

$$K_{ci}^2 = K_0^2 n_i^2 - \beta^2 = K_x^2 - \alpha_i^2 \quad (i = 2, 3) \quad (5.4-54)$$

$$K_{ci}^2 = K_0^2 n_i^2 - \beta^2 = K_x^2 - \alpha_i^2 \quad (i = 4, 5) \quad (5.4-55)$$

式 (5.4-50)~(5.4-53) 中系数的选择已考虑到 E_x 在 $x = \pm a$ 处的连续条件。同样， E_x 在 $y = \pm b$ 处应当连续。

利用在相应边界处其它切向场分量匹配，可以得到特征方程。由 $x = \pm a$ 处， H_z 和 H_y 连续条件可以得到特征方程

$$\operatorname{tg}(2K_x a) = \frac{n_1^2 K_x (\alpha_2 n_3^2 + \alpha_5 n_4^2)}{(n_2^2 n_3^2 K_x^2 - n_1^2 \alpha_2 \alpha_5)} \quad (5.4-56)$$

同样，由 $y = \pm b$ 处 H_z 连续条件可以得到特征方程

$$\operatorname{tg}(2K_y b) = \frac{K_y (\alpha_4 + \alpha_5)}{K_y^2 - \alpha_4 \alpha_5} \quad (5.4-57)$$

而由式 (5.4-48)、(5.4-54) 和 (5.4-55)，可以得到

$$\alpha_i^2 = (n_1^2 - n_i^2) K_0^2 - K_i^2 \quad (i = 2, 3) \quad (5.4-58)$$

$$\alpha_i^2 = (n_1^2 - n_i^2) K_0^2 - K_y^2 \quad (i = 4, 5) \quad (5.4-59)$$

由特征方程 (5.4-56) 和 (5.4-57) 可求得 K_x 和 K_y ，传播因数则可由式 (5.4-48) 求得为

$$\beta = (K_0^2 n_1^2 - K_x^2 - K_y^2)^{1/2} \quad (5.4-60)$$

b. E_{mn}^y 模

E_{mn}^y 模可用与 E_{mn}^x 模相似的方法求解，只需将 $E \rightarrow H$, $\mu_0 \rightarrow -\epsilon$ ，或相反，就得到 E_{mn}^y 模的相应结果。在一级近似条件下， E_{mn}^y 模只有 E_y 、 E_z 、 H_x 和 H_z 非零，其主要极化在 y 方向。其特征方程为

$$\operatorname{tg}(2K_x a) = \frac{K_x (\alpha_2 + \alpha_5)}{K_x^2 - \alpha_2 \alpha_5} \quad (5.4-61)$$

$$\operatorname{tg}(2K_y b) = \frac{n_1^2 K_y (\alpha_4 n_5^2 + \alpha_5 n_4^2)}{(n_2^2 n_5^2 K_y^2 - n_1^2 \alpha_4 \alpha_5)} \quad (5.4-62)$$

式中， α_i 如式 (5.4-58)、(5.4-59) 所示， β 仍由式 (5.4-60) 定义。

图 5.4-4 表示几种 E_{mn}^y 模和 E_{mn}^x 模的场分布。 E_{11}^y 是矩形介质波导的基模，其场分布如图 5.4-5 所示，图中 $\Delta_i = 1/\alpha_i$ ($i = 2, 3, 4, 5$) 表示场在芯外相邻区域内衰减到 $1/e$ 的长度。图中大致画出了 E_y 或 H_z (对 E_{mn}^y 模为 E_z 或 E_y) 的分布，实线代表区域 n_1 里的余弦分布，它是不对称的；如果 $n_2 = n_3$, $n_4 = n_5$ ，则分布将是对称的。 E_{11}^y 模是 E_{mn}^y 模的最低型模。当 $a = b$ 时， E_{11}^y 和 E_{11}^x 成为简并模。由场分布可以看出，足标 m 、 n 分别表示在 x 和 y 方向场为零的个数 (或最大值的个数)。

对于芯外为一种介质包围的特殊情况， $n_2 = n_3 = n_4 = n_5$ ，上述结果可以简化。对于 $(n_1 - n_2) \ll n_1$ 的弱导情况， E_{mn}^x 模和 E_{mn}^y 模成为简并模，特征方程 (5.4-56)、(5.4-61) 和 (5.4-57)、(5.4-62) 分别相同。此时，假如我们定义：

$$v_x^2 = a^2 K_0^2 (n_1^2 - n_2^2) \quad (5.4-63)$$

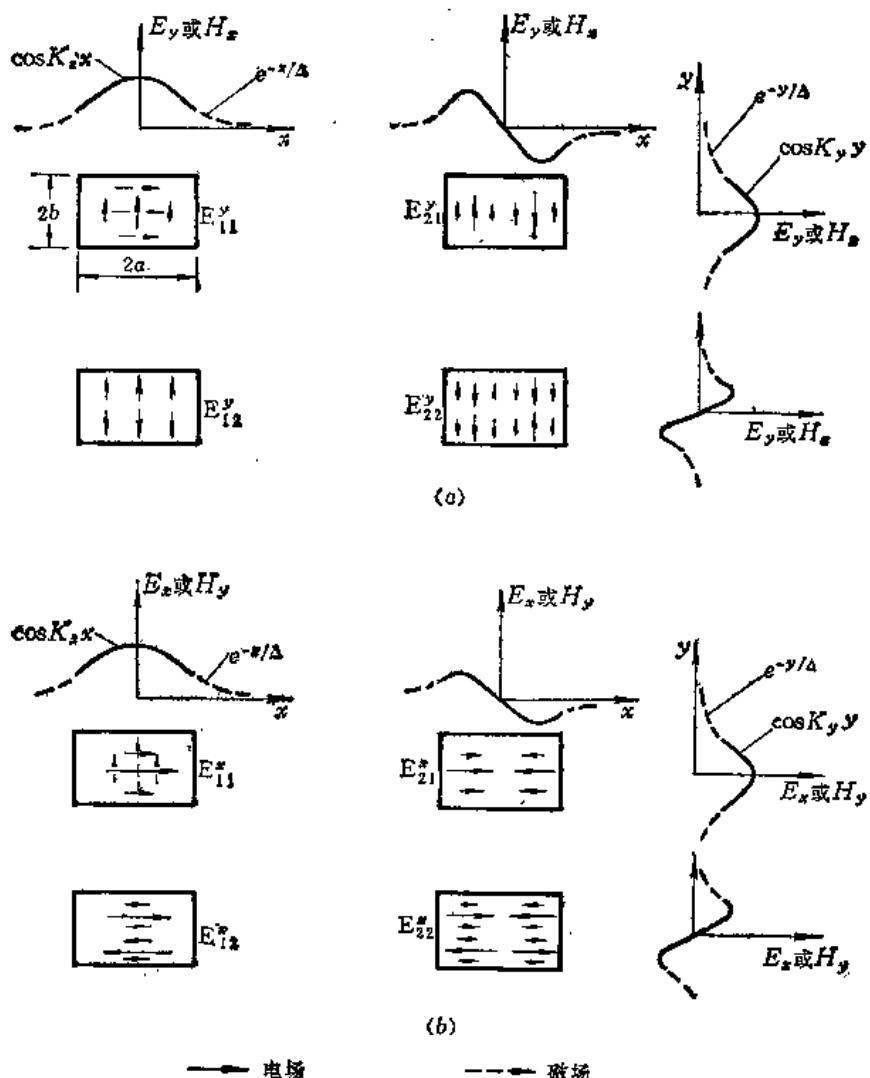
$$v_y^2 = b^2 K_0^2 (n_1^2 - n_2^2) \equiv v_x^2 (b/a)^2 \quad (5.4-64)$$

$$u_x^2 = a^2 K_x^2 \quad (5.4-65)$$

$$u_y^2 = b^2 K_y^2 \quad (5.4-66)$$

$$w_x^2 = a^2 \alpha_2^2 = a^2 \alpha_3^2 = v_x^2 - u_x^2 \quad (5.4-67)$$

$$w_y^2 = b^2 \alpha_4^2 = b^2 \alpha_5^2 = v_y^2 - u_y^2 \quad (5.4-68)$$

图5.4-4 几种 E_{mn}^x 模和 E_{mn}^y 模的场分布

则特征方程变成

$$\tan 2u_x = \frac{2u_x w_x}{u_x^2 - w_x^2} \quad (5.4-69)$$

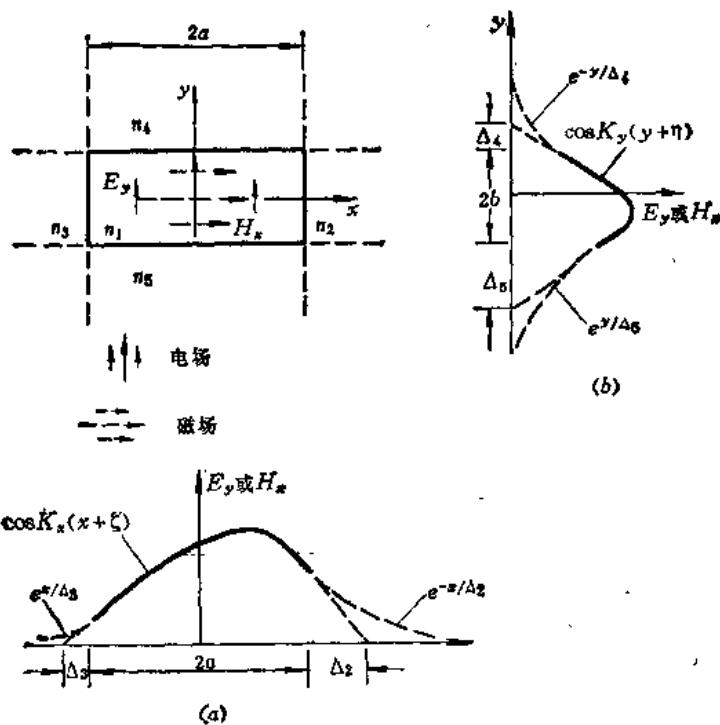
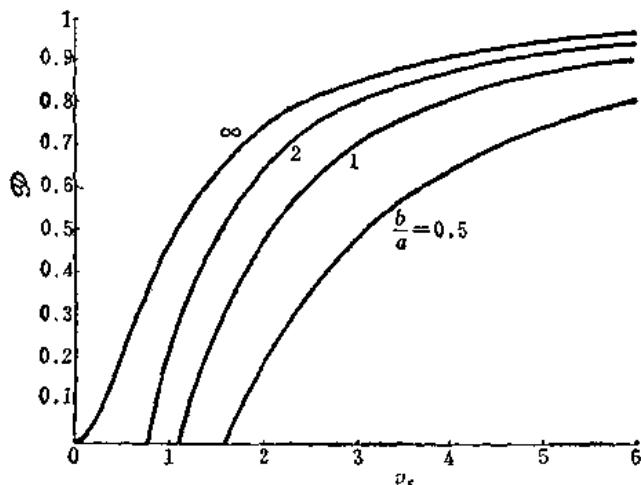
$$\tan 2u_y = \frac{2u_y w_y}{u_y^2 - w_y^2} \quad (5.4-70)$$

定义归一化传播因数 $\mathcal{D} = (\beta^2 - K_0^2 n_2^2) / (K_0^2 n_1^2 - K_0^2 n_2^2)$, 则由式 (5.4-60) 可求得为

$$\mathcal{D} = 1 - \frac{(u_x^2 + u_y^2 (a/b)^2)}{v_x^2} \quad (5.4-71)$$

这样, 每个模的归一化结果都只是 v_x 和参量 b/a 的函数。图5.4-6示出用这种近似方法求得的三种形状比 b/a 情况下, 弱导对称矩形介质波导基模的典型 $\mathcal{D}-v_x$ 曲线, 图中也示出了 $b/a \rightarrow \infty$ 的介质板波导的结果。

上述分析方法与结果也适用于图5.1-1(b)所示矩形介质镜象波导, 此时介质高度

图5.4-5 基模 E_{11}^s 的场分布图5.4-6 弱导矩形介质波导基模的 ν_r - D_r 曲线

为 b 。接地板的引入将使 E_{11}^s 模短路掉，因此镜象波导可获得较大的单模工作带宽。

(2) 有效介电常数法

上述分区近似法假定了功率主要集中于介质波导芯子里。在功率不集中的情况下，其结果误差比较大。为了提高精度，可以采用有效介电常数法。这种方法是把矩形介质波导看成在 x 方向和 y 方向的两个介质板波导问题来处理。这种方法对毫米波介质集成电路和光介质集成电路都适用，还可用来分析耦合介质波导。

对于 E_{mn}^s 模情况，首先考虑如图5.4-7(a)所示 x 方向的传输部分，此时矩形介质

波导的特征方程对应于介质板 TM 模的特征方程, 如式 (5.4-56) 所示 (相当于式 (5.4-16)), 式中 α_2 、 α_3 如式 (5.4-58) 所示。此特征方程的解可用以定义图 5.4-7 (b) 所示介质板波导的有效折射率 n_{eff}^2 :

$$n_{eff}^2 = n_1^2 - \left(\frac{K_x}{K_0} \right)^2 \quad (5.4-72)$$

或有效介电常数 ϵ_{eff} :

$$\epsilon_{eff} = \epsilon_r - \left(\frac{K_x}{K_0} \right)^2 \quad (5.4-73)$$

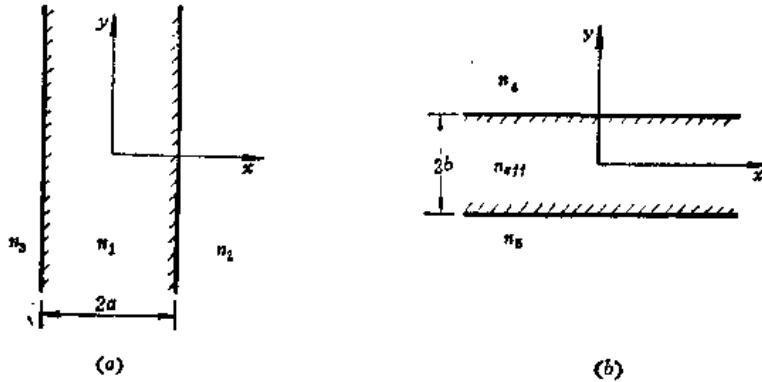


图 5.4-7 有效介电常数法说明图

关系式 (5.4-72) 容易由介质板波导理论得到。事实上, 由式 (5.4-3) 有

$$K_y^2 = K_0^2 n_1^2 - \beta^2$$

即有

$$\beta^2 = K_0^2 n_1^2 - K_y^2 = K_0^2 (n_1^2 - (K_x/K_0)^2) = K_0^2 n_{eff}^2$$

即得到有效折射率 (或称等效折射率)

$$n_{eff} = [n_1^2 - (K_x/K_0)^2]^{1/2}$$

此即式 (5.4-72)。而图 5.4-5(b) 所示介质板波导的特征方程就可以用相应 TE 模的特征方程 (5.4-62) (相当于式 (5.4-11)) 表示为

$$\operatorname{tg}(2K_y b) = \frac{K_y (\alpha_{4e} + \alpha_{5e})}{K_y^2 - \alpha_{4e} \alpha_{5e}} \quad (5.4-74)$$

式中

$$\alpha_{ie}^2 = (n_{eff}^2 - n_i^2) K_0^2 - K_y^2 \quad (i = 4, 5) \quad (5.4-75)$$

由式 (5.4-74) 可求解得到 K_y 。最后我们可以求得传播因数

$$\beta = \sqrt{K_0^2 n_{eff}^2 - K_y^2} = \sqrt{K_0^2 n_1^2 - K_x^2 - K_y^2} \quad (5.4-76)$$

对于 E_{mn}^s 模情况可用类似方法求解。首先从纵向介质板波导 TE 模的特征方程 (5.4-61) 求解得到 K_z 以定义 n_{eff} , 然后求横向介质板波导的特征方程, 得到

$$\operatorname{tg}(2K_z b) = \frac{n_{eff}^2 K_z (\alpha_{4e} n_5^2 + \alpha_{5e} n_4^2)}{(n_4^2 n_5^2 K_z^2 - n_{eff}^2 \alpha_{4e} \alpha_{5e})} \quad (5.4-77)$$

式中 a_{4e} , a_{5e} 如式 (5.4-75) 所示。最后得到与式 (5.4-76) 相似的 β 表示式。

有效介电常数法的结果比分区近似法更精确，特别是在接近截止区时。对于对称媒质 ($n_2=n_3=n_4=n_5$) 和弱导 ($n_1-n_2 \ll n_1$) 情况，利用 (5.4-63)、(5.4-65) 和 (5.4-67) 的定义式可使结果简化。此时 u_x 的特征方程为

$$\operatorname{tg} 2u_x = \frac{2u_x w_x}{u_x^2 - w_x^2} \quad (5.4-78)$$

假如定义

$$v_{ye}^2 = b^2 K_0^2 (n_{eff}^2 - n_2^2) = \left(\frac{b}{a}\right)^2 w_x^2 \quad (5.4-79)$$

$$u_y^2 = b^2 K_y^2 \quad (5.4-80)$$

$$w_{ye}^2 = b^2 a_{4e}^2 = b^2 a_{5e}^2 \equiv v_{ye}^2 - u_y^2 \quad (5.4-81)$$

则可得 u_y 的特征方程

$$\operatorname{tg} 2u_y = \frac{2u_y w_{ye}}{u_y^2 - w_{ye}^2} \quad (5.4-82)$$

此时归一化传播因数 \mathcal{P} 可用式 (5.4-78) 和 (5.4-82) 解得的 u_x 、 u_y 来表示，如式 (5.4-71) 所示。

图 5.4-8 表示用有效介电常数法求得的弱导矩形介质波导基模的 $\mathcal{P}-v_x$ 曲线。

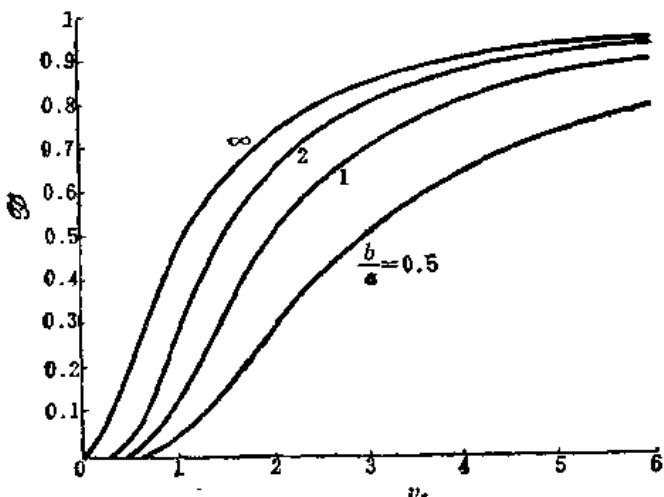


图 5.4-8 有效介电常数法求得的 $\mathcal{P}-v_x$ 曲线

5.5 介质波导与金属波导的特点对比

金属波导是一种封闭式的传输线，介质波导则是一种开放式的传输线。前者主要用于厘米波段，后者则主要适用于毫米波段。金属波导需内部加工，所以一般工艺制造比较复杂；金属波导中传输的模为波导模式 (TE 模和 TM 模)，具有一定的截止频率。介质波导是外部加工，工艺制造简单；介质波导传输的是一种表面波，而且这些表面波，一般存在一种没有截止频率的模。表 5.5-1 中比较了两者的主要优缺点。

在毫米波段，与金属波导相比，介质波导尚有尺寸较大、公差要求不高、加工方便、损耗较小、便于连接等优点。

表5.5-1 介质波导与金属波导的比较

	金 属 波 导	介 质 波 导
优 点	① 无辐射损耗 ② 在厘米波段损耗低 ③ Q 值高 ④ 功率容量大	① 制造工艺简单 ② 体积小、轻便 ③ 适用于毫米波和亚毫米波段 ④ 便于采用集成技术
缺 点	① 体积大、笨重 ② 不便于采用集成技术	① 有辐射损耗 ② 外界干扰影响较大

介质波导也是毫米波集成电路的新技术。采用介质波导的毫米波集成电路是实现低成本毫米波传输系统最有前途的技术之一。它既可模拟集成光学和表面声波技术，又可成为衔接声光电路的桥梁。它与微带线集成电路相比，具有工艺简单、损耗较小、成本低等优点。毫米波介质集成电路的缺点是在波导弯曲时有辐射损耗。因此，在弯曲时需要有适当的曲率半径来限制辐射损耗；同时，介质波导在制造过程中不可避免的尺寸随机偏差会造成不希望的衍射损耗和相位畸变。毫米波介质集成电路中的隔离介质波导具有较好的传输特性。表5.6-2示出它与金属波导和微带的特性对比。

表5.5-2 隔离波导①、金属波导和微带的特性比较

分 类	频 率 (GHz)	波 导 波 长 λ_g (cm)	波 导 宽 边 $2a$ (cm)	厚 度 t (cm)	衰 减 α		无 载 Q 值	
					dB/cm	dB/λ_g	Q_0	$Q_{\text{隔离波导}}/Q_0$
隔 离 波 导 (氧化铝)	15	0.955	0.634	0.053	0.0093	0.0089	3063	1
	30	0.476	0.268	0.027	0.0224	0.0107	2551	1
	60	0.237	0.134	0.013	0.0554	0.0131	2072	1
	90	0.158	0.090	0.009	0.0955	0.0151	1802	1
微 带 (50Ω) (熔凝石英-金)	15	1.210	0.108	0.054	0.0200	0.0242	1124	2.72
	30	0.605	0.054	0.027	0.0562	0.0340	800	3.18
	60	0.302	0.027	0.014	0.1542	0.0466	583	3.15
	90	0.201	0.018	0.009	0.2802	0.0563	483	3.73
矩 形 金 属 波 导 (镀银)	15	2.58	1.580		0.0019	0.0049	5551	0.55
	30	1.40	1.067		0.0066	0.0092	2956	0.86
	60	0.669	0.376		0.0156	0.0104	2615	0.79
	90	0.441	0.245		0.0300	0.0132	2060	0.87

● 隔离波导尺寸见图5.1-1 (c)。

总之，介质波导是一类新型的运用于毫米波或更高频率的传输线，其种类繁多，很有发展和应用前途。但与金属波导相比，如要付诸实用，包括材料、工艺、理论与性能测试等方面都尚有许多问题有待进一步研究解决。

本 章 提 要

1. 介质波导是毫米波、亚毫米波以至激光最有发展和应用前途的传输线。本章讨论了几种主要介质波导中的模式及其分析方法。

2. 圆形介质棒波导是阶跃光纤的基本结构，可用波动理论严格求解。其传输模有圆对称 TE_{0n} 模和 TM_{0n} 模、混合 EH_{mn} 模和 HE_{mn} 模。 HE_{11} 模是圆形介质波导和阶跃光纤的主模（或称基模），其 λ_c 为无限大。对于实用的弱导阶跃光纤，满足相同近似特征方程的一组模的相位因数发生“简并”，这一组模统称为 LP 模（线偏振模），而不考虑 TE、TM、HE 和 EH 的区别。这里要指出注意两点：第一，LP 模概念只对“弱导光纤”的近似条件 ($\Delta \ll 1$) 的情形才有效；第二，对于非弱导情形，特征方程应该用严格的特征方程，则上述简并了的相位因数也就分开了，LP 模就不复存在。

3. 矩形介质棒波导是毫米波介质集成电路的基本结构。它不能严格求解，只能用数值计算方法求近似解，常用的方法是分区近似法、有效介电常数和圆柱空间谐波法。

矩形介质波导中严格说来只存在混合模。但如果频率高，远离截止时， θ_c 大，再如 a/b 大，则横截面上的主要场分量，一种是 E_y, H_z ，另一种是 H_y, E_z 。在极限情况下，一种变成只有 E_y, H_z 的 TEM 波，另一种变成只有 E_z, H_y 的 TEM 波。前者称为 E_{mn}^y 模，后者称为 E_{mn}^z 模，上标 y 或 z 代表电极化方向，下标 m 和 n 代表电磁场沿 x 和 y 方向变化而具有的极值（或零值）个数。其中 E_{11}^y 为基模。

4. 在介质波导中，当波导结构和频率一定时，只存在有限的传输模（一般为多模）；但当波导中存在不连续性时，传输模将被散射。此散射现象的描述，不能只用有限数目的传输模，还应该包括具有连续频谱的辐射模。这种情况与金属波导不一样。在金属波导中，由传输模和消失模（即衰减模）的叠加就可以完全描述散射现象，因为对于金属波导，不存在辐射模。

参 考 资 料

- [1] 廖承恩，《微波传输线》，西北电讯工程学院，1976。
- [2] 叶培大、吴森等，《光波导技术基本理论》，人民邮电出版社，1981。
- [3] 大越孝敬，光学纤维基础，刘时衡、梁民基译，人民邮电出版社，1980。
- [4] N. S. Kapany and J. J. Burke, Optical Waveguides, Academic Press, 1972.
- [5] E. A. J. Marchtili, Dielectric Rectangular Waveguide and Directional Coupler for Integrated Optics, Bell Syst. Tech. J. Vol. 48, No. 7. Sept. 1969. PP. 2071-2102.
- [6] J. E. Goell, A Circular-Harmonic Computer Analysis of Rectangular Dielectric Waveguides, Bell Syst. Tech. J. Vol. 48, No. 7. Sept. 1969. PP. 2133-2160.
- [7] R. M. Knox and P. P. Toullos, Integrated Circuits for the Millimeter Through Optical Frequency Range, Submillimeter Waves, Polytechnic Press, 1971.
- [8] D. Gloge, Weakly Guiding Fibers, Appl. Opt. Vol. 10, No. 10, PP. 2252-2258. Oct. 1971.
- [9] 大原省藏木村達也，光通信，コロナ社，1981。
- [10] Hondros, D., and P. Debye(1910), "Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Drähten," Ann. Physik, 32, 465-476.
- [11] M. J. Adams, An Introduction to Optical Waveguides, John Wiley & Sons, 1981.
- [12] Kenneth J. Button, and James C. Wiltse, Infrared and Millimeter Waves, Vol. 4 Millimeter Systems, Academic Press, Inc., 1981.
- [13] 川上彰二郎，光導波路，朝倉書店，1980。

习 题

- 5-1 试求WBJ-320黄铜波导工作在频率为37.5GHz时的衰减常数。
- 5-2 试从麦克斯韦方程出发，证明可分为两种基本型式的平面波：H波(E_y 、 H_z 和 H_x)和E波(H_y 、 E_z 和 E_x)。
- 5-3 证明当 $n_1 > n_2$ 时全反射相移公式(5.2-6)和(5.2-7)。
- 5-4 用有效介电常数法求隔离介质波导三个半无限条形区的有效介电常数。
- 5-5 何谓LP模？它与普通命名的模的关系如何？
- 5-6 介质波导中的模与金属波导中的模有何不同？
- 5-7 何谓截止条件和截止频率？试推导阶跃光纤中HE₁₁模的截止条件和截止频率。
- 5-8 何谓光纤中的传输模、辐射模和泄漏模？它们是如何产生的？
- 5-9 阶跃光纤纤芯的折射率 n_1 为1.55，包层折射率 n_2 为1.5，工作波长为1.5μm，纤芯半径为40μm，求传输的模数。

第六章 微波谐振器

前面各章讨论的各种微波传输线，其电磁场仅在横向坐标上受到限制，而沿 z 轴为传输轴。即是说在横向坐标上场呈驻波分布，而沿 z 轴为行波。在本章中讨论的微波谐振器则是在三个坐标方向上都受到限制，场沿三个坐标方向都呈驻波分布。微波谐振器在微波技术中起着 LC 振荡回路在低频电路中的相同作用。

本章主要讨论各种微波谐振器的基本特性及其设计计算方法。首先介绍微波谐振器的基本特性与参数，然后分析各种具体微波谐振器的特性及其计算，最后介绍微波谐振器的等效电路与微扰理论。

6.1 概 述

微波谐振器是一种具有储能和选频特性的微波谐振元件，一般是指一个由任意形状的导电壁所封闭的体积，在其内能产生电磁振荡。微波谐振器是微波振荡器和放大器的主要部分，由微波谐振器还可以组成微波带通和带阻滤波器、阻抗匹配网络，用以构成波长计、倍频器、频率预选器、回波箱等。

微波谐振器可以看成是由低频 LC 回路演变而成的。我们知道，当频率较高时， LC 回路的欧姆损耗、介质损耗、辐射损耗都增大，而回路的电感量和电容量则要求很小，难以实现。因此 LC 回路到了分米波段一般就难以适用了。为了适用于更高频率，就需要减小 L 和 C 。要减小 C ，可增大两极板之间的距离；要减小 L ，就要减少线圈的匝数，减少到只有一根导线，然后并联导线以进一步减小 L ，并联的直导线无限增多，极限情况下即变成矩形（或圆形）谐振腔，如图6.1-1所示。显然，这种封闭的谐振腔具有损耗小、结构坚固等优点。

微波谐振器的种类很多，按结构型式可分为传输线型谐振器和非传输线型谐振器两类。

传输线型谐振器是由两端短路或开路的一段微波传输线构成的，如矩形波导空腔谐振器、圆波导空腔谐振器、同轴线谐振器、微带线谐振器、介质谐振器等。非传输线型谐振器或称复杂形状谐振器则不是由简单的传输线段构成，而是一些形状特殊的谐振器，这种谐振器通常是在坐标的一个或几个方向上存在不均匀性，如环形谐振器、混合同轴线型谐振器等。

由于谐振器的种类繁多，因此分析方法也不同。从根本上讲，微波谐振器的求解属于场的边值问题；对于金属波导谐振器则可用驻波法求场的解答；对于TEM模传输线谐振器，还可用分布参数电路理论来分析；对于一些非传输线型谐振器，可用准静态方法求解；对于单模工作的谐振器，可用等效电路来分析；对于谐振腔的微小变形，则可用微扰方法来分析。

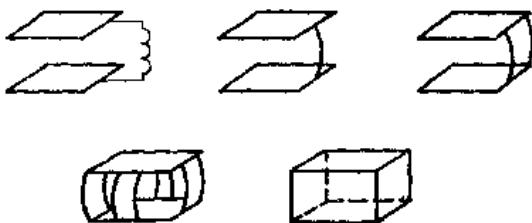


图6.1-1 微波谐振器的形成

6.2 微波谐振器的基本特性与参数

从本质上讲，微波谐振器和低频 LC 回路产生振荡的物理过程都是电场能量和磁场能量相互转换的过程。但两者又有重要的不同之处：① LC 回路是集总参数电路，微波谐振器则是分布参数电路；② LC 回路只有一个谐振频率，而微波谐振器则具有多谐性，当尺寸一定时，可有无限多个谐振频率；③微波谐振器的品质因数很高，比 LC 回路高得多。

1. 任意形状空腔谐振器自由振荡的基本特性

为使我们对空腔谐振器的基本特性有所了解，我们来分析一下任意形状的空腔谐振器，如图 6.2-1 所示。该谐振腔的体积为 V ，表面为 S 。 S 面既可以是电壁（理想导体壁），也可以是磁壁（开路壁），也可是部分电壁，部分磁壁。下面我们以理想导体壁为例来讨论，其它情况的分析，大同小异。设空腔谐振器的体积内填充有理想的均匀介质，其电导率 $\sigma = 0$ ，且腔体内无其它场源。于是体积 V 内的电磁场满足下列麦克斯韦方程：

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \end{array} \right\} \quad (6.2-1)$$

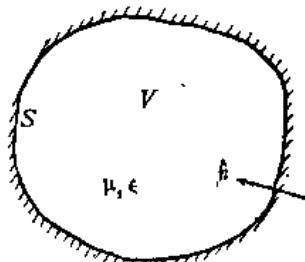


图 6.2-1 任意形状谐振腔

在 S 面上的边界条件是

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E} \times \hat{n} = 0 \\ \mathbf{H} \cdot \hat{n} = 0 \end{array} \right\} \quad (6.2-2)$$

式中 \hat{n} 是 S 面的法向单位矢量。

由式 (6.2-1) 可以求得电磁场的波动方程为

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right\} \quad (6.2-3)$$

为了求解式 (6.2-3)，可以应用分离变量法。对于式 (6.2-3) 第一式，可设

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) E(t) \quad (6.2-4)$$

其中 $E(t)$ 只是时间 t 的函数，是个标量； $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 只是空间位置坐标 \mathbf{r} 的函数，为一矢量。将式 (6.2-4) 代入式 (6.2-3) 第一式可得

$$\frac{\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\mathbf{E}(\mathbf{r})} - \mu \epsilon \frac{E''(t)}{E(t)} = 0 \quad (6.2-5)$$

由于式 (6.2-5) 中左边第二项只是时间的函数，第一项只是空间坐标的函数，此式成立，必须两者都是常数。令

$$\frac{E''(t)}{E(t)} = -\omega_i^2 \quad \text{或者} \quad E''(t) + \omega_i^2 E(t) = 0 \quad (6.2-6)$$

$$\frac{\nabla^2 E(r)}{E(r)} = -\omega_i^2 \mu \epsilon = -K_i^2 \text{ 或者 } \nabla^2 E(r) + K_i^2 E(r) = 0 \quad (6.2-7)$$

式中 $K_i = \omega_i \sqrt{\mu \epsilon}$ 叫做波数，在此是个正实数。

式 (6.2-6) 是个简谐方程，其解为

$$E(t) = E_{0i} e^{j\omega_i t} \quad (6.2-8)$$

式中 E_{0i} 是个常数，由起始条件决定，亦即由空腔的起始激励情况决定。

式 (6.2-7) 是个波动方程，在选定坐标系后，可再用分离变量法求解。设其特解为 $E_i(r)$ ，于是得到式 (6.2-3) 的特解为

$$E = E_i(r) E_{0i} e^{j\omega_i t} \quad (6.2-9)$$

E 的通解则为

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i(r) E_{0i} e^{j\omega_i t} \quad (6.2-10)$$

式中， $E_i(r)$ 是满足边界条件的矢量函数，称为模式矢量函数； E_{0i} 是个任意常数， ω_i 是空腔自由振荡的模式频率， $K_i = \omega_i \sqrt{\mu \epsilon} = \omega_i / v$ 。

对于式 (6.2-3) 第二式，同样可得

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} H_i(r) H_{0i} e^{j\omega_i t} \quad (6.2-11)$$

式中， $H_i(r)$ 也是模式矢量函数； H_{0i} 也是任意常数。由于电场和磁场满足麦克斯韦方程，故当 E_{0i} 决定后， H_{0i} 即可随之决定。如果将电场和磁场归一化，使得

$$\left. \begin{array}{l} \int_V |E_i(r)|^2 dv = 1 \\ \int_V |H_i(r)|^2 dv = 1 \end{array} \right\} \quad (6.2-12)$$

将式 (6.2-10) 和 (6.2-11) 代入麦氏第一、二方程，可以得到

$$E_{0i} = -j\eta H_{0i} \quad (6.2-13)$$

式中 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 是介质中的波阻抗。于是对于空腔中某一特定自由振荡模式，

$$\left. \begin{array}{l} E = E_{0i} E_i(r) e^{j\omega_i t} \\ H = j \frac{E_{0i}}{\eta} H_i(r) e^{j\omega_i t} \end{array} \right\} \quad (6.2-14)$$

同时由式 (6.2-1) 可得

$$\left. \begin{array}{l} H_i(r) = \frac{1}{K_i} \nabla \times E_i(r) \\ E_i(r) = \frac{1}{K_i} \nabla \times H_i(r) \end{array} \right\} \quad (6.2-15)$$

对于空腔中任意一个自由振荡模式，可以证明其最大电场储能等于其最大磁场储能。事实上，电场最大储能为

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} \epsilon |E|^2 dv$$

磁场最大储能为

$$W_m = \int_V \frac{1}{2} \mu |H|^2 dv$$

由式 (6.2-14)

$$\begin{aligned} W_m &= \int_V -\frac{1}{2} \mu \left(\frac{E_{bi}}{\eta} \right)^2 |\mathbf{H}_i(\mathbf{r})|^2 dv \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \left| \frac{E_{bi}}{K_i} \right|^2 \int_V |\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r})|^2 dv \end{aligned} \quad (6.2-16)$$

由于

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{ \mathbf{E}_i^*(\mathbf{r}) \times (\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r})) \} &= \nabla \times \mathbf{E}_i^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \\ - \mathbf{E}_i^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) &= |\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r})|^2 - \mathbf{E}_i^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \int_V |\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r})|^2 dv &= \int_V \nabla \cdot \{ \mathbf{E}_i^*(\mathbf{r}) \times (\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r})) \} dv \\ &\quad + \int_V \mathbf{E}_i^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) dv \\ &= \oint_S \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \times (\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r})) \cdot ds + \int_V \mathbf{E}_i^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) dv \\ &= \int_V \mathbf{E}_i^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) dv = \int_V K_i^2 |\mathbf{E}_i(\mathbf{r})|^2 dv \end{aligned}$$

在腔体内壁, $\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = 0$, 所以式中 $\oint_S = 0$ 。将上式代入式 (6.2-16), 得到

$$W_m = \frac{1}{2} \epsilon \left| \frac{E_{bi}}{K_i} \right|^2 \int_V K_i^2 |\mathbf{E}_i(\mathbf{r})|^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon \int_V |\mathbf{E}|^2 dv = W.$$

综上讨论, 我们可以得到如下结论:

① 空腔谐振器中可以存在无限多不同振荡模式的自由振荡, 不同的振荡模式具有不同的振荡频率。这表明空腔谐振器的多谐性。

② 空腔谐振器中的单模电场和磁场都是正弦波, 其时间相位相差 90° , 电场最大时, 磁场为零; 磁场最大时, 电场为零, 两者最大储能相等。由于空腔内没有能量损耗, 空腔表面也没有能量流出, 能量只在电场和磁场之间不断交换, 形成振荡。

2. 谐振器的基本参数

表示低频 LC 回路的基本参数是 L 、 C 、 R (或 G)。用来描述微波谐振器的基本参数是谐振波长 λ_0 (或谐振频率 f_0)、品质因数 Q_0 和等效电导 G_0 。下面分别讨论这三个参数及其一般表示式。

(1) 谐振波长 λ_0

谐振波长 λ_0 是微波谐振器的重要参数之一。它表征微波谐振器的振荡规律, 即表示微波谐振器内振荡存在的条件。

在波导求解中, 我们得到关系

$$K^2 = K_u^2 + K_z^2 + K_c^2 = K_c^2 + \beta^2 \quad (6.2-17)$$

在波导情况下, 沿 z 向无边界限制, 波沿 z 轴传输。此种情况下, 相位因数 β 的值是连续的, 即波沿 z 向不具有谐振特性。对于谐振器情况, z 向也有边界限制, 如图 6.2-2 所示封闭式波导谐振腔, 波沿 z 向也应呈驻波分布, 且

$$l = p \frac{\lambda_g}{2} \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.2-18)$$

式中 l 是谐振腔的长度, λ_g 为波导波长。由此可得

$$\beta = \frac{p\pi}{l} \quad (6.2-19)$$

代入式 (6.2-17) 可得封闭式波导谐振腔谐振波长一般表示式为

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (6.2-20) \end{aligned}$$

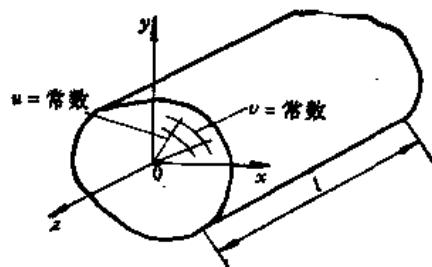


图 6.2-2 任意形状的封闭谐振腔

式中 λ_c 为截止波长。可见谐振波长与谐振腔的形状尺寸和工作模式有关。

(2) 品质因数 Q_0

品质因数 Q_0 是微波谐振器的另一个重要参数, 它表征一个微波谐振系统的频率选择性, 表示谐振器的储能与损耗之间的关系。

Q_0 的定义为

$$Q_0 = 2\pi \frac{W}{W_T} = \omega_0 \frac{W}{P_L} \quad (6.2-21)$$

式中, W 代表谐振腔储能, W_T 代表一周期内谐振腔的能量损耗, P_L 代表一周期内的平均损耗功率。

谐振腔的储能

$$W = W_s + W_m = -\frac{1}{2} \int_V \mu |\mathbf{H}|^2 dv \quad (6.2-22)$$

谐振腔的平均损耗功率

$$P_L = -\frac{1}{2} \oint_S \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{R}_s ds = -\frac{1}{2} R_s \oint_S |\mathbf{H}_t|^2 ds \quad (6.2-23)$$

式中, R_s 为表面电阻率, \mathbf{H}_t 为切线方向磁场。

将式 (6.2-22) 和式 (6.2-23) 代入式 (6.2-21) 得到

$$Q_0 = \frac{\omega \mu}{R_s} \frac{\int_V |\mathbf{H}|^2 dv}{\oint_S |\mathbf{H}_t|^2 ds} = \frac{2}{\delta} \frac{\int_V |\mathbf{H}|^2 dv}{\oint_S |\mathbf{H}_t|^2 ds} \quad (6.2-24)$$

式中 δ 为腔壁导体的趋肤深度。

谐振腔内壁附近的切向磁场总要大于腔内部的磁场, 如近似认为 $|\mathbf{H}|^2 \approx \frac{1}{2} |\mathbf{H}_t|^2$,

则近似得到

$$Q_0 \approx \frac{1}{\delta} \frac{V}{S} \quad (6.2-25)$$

据此近似公式可以估计谐振腔的 Q_0 值。由此式可以看出, 谐振腔的 Q_0 值近似与其体积 V 成正比, 与其内壁表面积 S 成反比, 与趋肤深度成反比。比值 V/S 越大, Q_0 值越高。因此为获得较高的 Q_0 值, 应选择腔的形状使 V/S 大。

需要指出的是，由上面求得的 Q_0 是孤立谐振器的品质因数，称之为无载 Q 值。

(3) 等效电导 G_0

等效电导 G_0 表征一个谐振系统的功率损耗特性。在实用中，为了工程应用的方便，常把单模工作的谐振器在不太宽的频带内等效为振荡回路，用等效电导 G_0 来表示谐振器的功率损耗。

如图 6.2-3 所示微波谐振器 并联等效电路，其损耗功率为

$$P_L = \frac{1}{2} G_0 U_m^2$$

由此可得等效电导

$$G_0 = \frac{2P_L}{U_m^2} \quad (6.2-26)$$

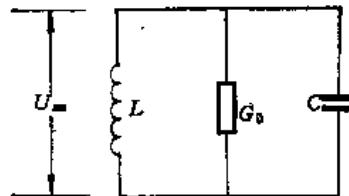


图 6.2-3 微波谐振器的等效电路

式中 U_m 为等效回路两端电压的振幅。 P_L 是可以计算的，若能确定 U_m 则可算出 G_0 。但对于微波谐振器，其内不管那个方向都不属于似稳场，因而两点间的电压与选择的积分路径有关，因此 G_0 不是单值的量。尽管如此，我们还是可以设法选定两计算点间的积分路径 ab ，则其电场强度的线积分为一定值，并称之为计算点间的等效电压，即

$$U_m = \int_a^b E_m dl \quad (6.2-27)$$

因此可得

$$G_0 = R_s \cdot \frac{\oint_S |\mathbf{H}_s|^2 ds}{\left(\int_a^b |\mathbf{E}| dl \right)^2} \quad (6.2-28)$$

由式 (6.2-20)、式 (6.2-24) 和式 (6.2-28) 可以计算谐振器的 λ_0 、 Q_0 和 G_0 ，但需要知道腔内振荡模式及其场分布。这仅对少数形状简单而规则的腔体才是可行的。对于较复杂的腔体就难以计算得到。这便需要利用等效电路概念，通过测量来得到。

这样，不管什么微波谐振器，我们都可以通过计算或测量来获得谐振器的 λ_0 、 Q_0 和 G_0 ，从而求得谐振器等效电路的有关参数，反之亦然。因此，用 λ_0 、 Q_0 和 G_0 可以完全描述微波谐振器的特性。

6.3 金属波导型谐振腔

金属波导型谐振腔是由两端短路的一段金属波导构成，包括矩形波导空腔谐振器和圆波导空腔谐振器。这是最常用的一类微波谐振器。我们可以应用驻波法，利用前面已经得到的相应波导场的解来分析这种谐振腔的场型及其特性。

1. 矩形波导空腔谐振器

如图 6.3-1 所示尺寸为 a 、 b 的矩形波导，在长度为 l 的两端用导体板封闭即构成矩形波导空腔谐振器，简称矩形（谐振）腔。当谐振时

$$l = p \frac{\lambda_s}{2} \quad (6.3-1)$$

式中 λ_s 为矩形波导的轴向波导波长。

由式(6.2-20)和式(3.2-22), 可求得矩形腔的谐振波长为

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}} \quad (6.3-2)$$

(1) 振荡模式及其场分量

与矩形波导相对应, 矩形谐振腔中存在TE型和TM型振荡模式。

对于TE型模式, 由式(3.2-14)并考虑到反射波可以得到

$$H_z = H_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \{C_1 \cos(\beta z) + C_2 \sin(\beta z)\} \quad (6.3-3)$$

由边界条件 $z=0$ 和 l 处 $H_z=0$, 可求得

$$C_1 = 0$$

$$\beta = \frac{p\pi}{l} \quad (p=1, 2, 3, \dots) \quad (6.3-4)$$

于是

$$H_z = H_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \quad (6.3-5)$$

由式(3.2-12), 令 $-\gamma = \frac{\partial}{\partial z}$, 可得

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{-j\omega\mu}{K_e^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ E_y &= \frac{j\omega\mu}{K_e^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_x &= \frac{1}{K_e^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z} \\ H_y &= \frac{1}{K_e^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} \end{aligned} \right\} \quad (6.3-6)$$

将式(6.3-5)代入式(6.3-6), 求得 $\text{TE}_{mn}{}_{\!p}$ 模式的场分量为

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-j\omega\mu n\pi}{K_e^2 b} H_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\ E_y &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-j\omega\mu m\pi}{K_e^2 a} H_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\ E_z &= 0 \\ H_x &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-mp\pi^2}{K_e^2 al} H_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\ H_y &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-np\pi^2}{K_e^2 bl} H_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\ H_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} H_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \end{aligned} \right\} \quad (6.3-7)$$

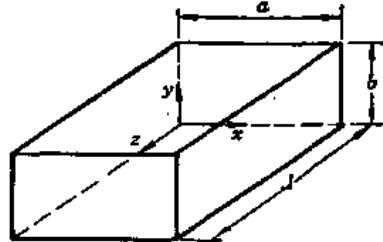


图6.3-1 矩形谐振腔

式中

$$K_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (6.3-8)$$

需要指出的是，式 (6.3-7) 中 m 和 n 不能同时为零。

对于 TM 型模式，用同样方法可求得 TM_{mnP} 模式的场分量为

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left(-\frac{mp\pi^2}{K_c^2 al} \right) E_{mnP} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\ E_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left(-\frac{np\pi^2}{K_c^2 bl} \right) E_{mnP} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\ E_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} E_{mnP} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\ H_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{j\omega\epsilon n\pi}{K_c^2 b} E_{mnP} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\ H_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left(-\frac{j\omega\epsilon m\pi}{K_c^2 a} \right) E_{mnP} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\ H_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3-9)$$

结果表明，矩形谐振腔中可以存在无穷多 TE 型和 TM 型振荡模式。下标 m 、 n 、 p 分别表示场沿 a 、 b 、 l 分布的半驻波个数。

(2) TE_{101} 模式矩形腔

谐振波长 λ_0 最长的振荡模式称为谐振腔的最低振荡模式或主模。由式 (6.3-2) 可以看出，当 $b < a < l$ 时， TE_{101} 模式的谐振波长最长，为矩形腔的主模。通常矩形腔都是以 TE_{101} 模矩形腔有着广泛应用，可用作速调管信号发生器的振荡腔、波长计、接收机预选器、滤波器及固态源的振荡腔等。

TE_{101} 模式的场分量可表示为

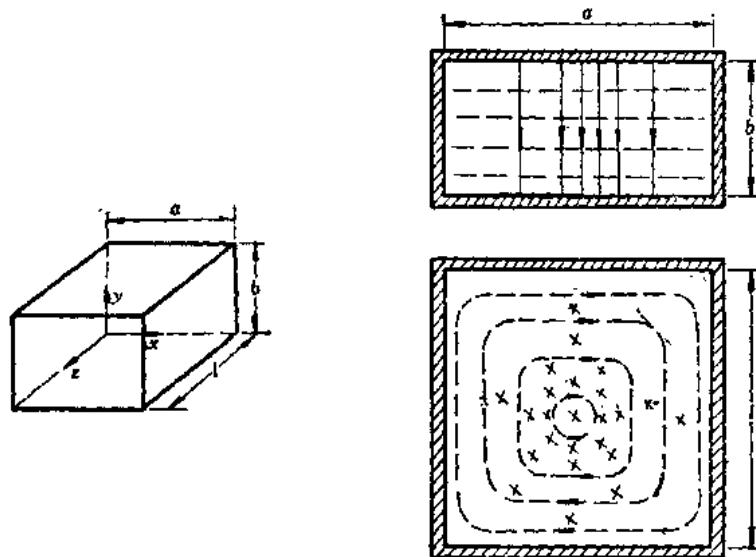
$$\left. \begin{aligned} E_y &= E_{101} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l} \\ H_x &= -j \frac{E_{101}}{\eta} \frac{\lambda_0}{2l} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{l} \\ H_z &= j \frac{E_{101}}{\eta} \frac{\lambda_0}{2a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l} \end{aligned} \right\} \quad (6.3-10)$$

其场结构如图 6.3-2 所示。电场只有 E_y 分量，在腔体中央最强；磁场有 H_x 、 H_z 两个分量，在腔壁附近最强，腔体中央为零。

TE_{101} 模式的谐振波长为

$$\lambda_0 = \frac{2al}{\sqrt{a^2 + l^2}} \quad (6.3-11)$$

需要指出的是，矩形腔三个方向都不传输能量，呈驻波分布，因此坐标的选择具有任意性。同一种场分布，选择不同的坐标轴可以得到不同的模式。例如对于 TE_{101} 模场分布，若以 z 轴作为电场方向来观察，则为 TM_{110} 模；取 x 轴为电场方向则为 TE_{011} 模。如果

图6.3-2 TE₁₀₁模式场结构

$a = b = l$, 则 TE₁₀₁、TE₀₁₁ 和 TM₁₁₀ 模具有相同的谐振波长, 成为简并模。为了消除这种简并现象, 应使谐振腔的尺寸 a 、 b 、 l 明显不等。

腔内总的储能为电能和磁能之和, 但电能最大时, 磁能为零, 于是

$$\begin{aligned} W = (W_e)_{\max} &= \frac{\epsilon}{2} \int_0^l \int_0^b \int_0^a |E_y|^2 dx dy dz \\ &= \frac{\epsilon}{2} \int_0^l \int_0^b \int_0^a E_{101}^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi z}{l} dx dy dz \\ &= \frac{\epsilon E_{101}^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot b \cdot \frac{l}{2} = \frac{\epsilon abl}{8} E_{101}^2 \end{aligned} \quad (6.3-12)$$

为了求腔壁的功率损耗, 需要求腔壁上的电流密度。参考图 6.3-2, 腔壁电流密度为

$$\begin{array}{ll} \text{前壁: } J_y = -H_z|_{z=0} & \text{后壁: } J_y = H_z|_{z=0} \\ \text{左壁: } J_y = -H_z|_{x=0} & \text{右壁: } J_y = H_z|_{x=a} \\ \text{顶壁: } J_x = -H_z, J_z = H_x & \text{底壁: } J_x = H_z, J_z = -H_x \end{array}$$

设导体壁表面电阻率为 R_s , 则由电流所产生的功率损耗为

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{R_s}{2} \left\{ 2 \int_0^b \int_0^a |H_z|_{z=0}^2 dx dy + 2 \int_0^l \int_0^b |H_z|_{z=0}^2 dy dz \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^l \int_0^a (|H_z|^2 + |H_x|^2) dx dz \right\} \end{aligned}$$

将式 (6.3-10) 的二、三式代入并积分得到

$$P_L = \frac{R_s \lambda_0^2}{8 \eta^2} E_{101}^2 \left[\frac{ab}{l^2} + \frac{bl}{a^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{l} + \frac{l}{a} \right) \right] \quad (6.3-13)$$

将式 (6.3-12) 和式 (6.3-13) 代入式 (6.2-21), 得到 TE₁₀₁ 模矩形腔的 Q_0 为

$$Q_0 = \frac{\pi \eta}{4 R_s} \left[\frac{2b(a^2 + l^2)^{3/2}}{al(a^2 + l^2) + 2b(a^2 + l^2)} \right] \quad (6.3-14)$$

假如 $a = l$, 则

$$Q_0 = \frac{1.11 \eta}{R_s \left(1 + \frac{a}{2b} \right)} \quad (6.3-15)$$

假如 $a = b = l$, 则简化为

$$Q_0 = 0.742 \frac{\eta}{R_s} \quad (6.3-16)$$

例6.3-1 设铜制矩形腔尺寸为 $a = l = 0.02\text{m}$, $b = 0.01\text{m}$, 工作模式为 TE_{101} , 腔内为空气, 求 Q_0 值。

解 谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}} = 10.62 \text{ (GHz)}$$

则

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f_0 \mu}{\sigma}} = 2.69 \times 10^{-2} (\Omega)$$

代入式 (6.3-15) 求得

$$Q_0 = 7780$$

如果谐振腔填充有有耗介质, 当频率很高时, 必须考虑介质损耗及其 Q 值。介质损耗的 Q_d 值由下式计算:

$$Q_d = \frac{\omega\epsilon}{\sigma_d} \quad (6.3-17)$$

例6.3-2 在例 6.3-1 的矩形腔内填充聚苯乙烯 ($\epsilon_r = 2.53$, $\sigma_d/\omega\epsilon \approx 4.33 \times 10^{-4}$), 求 Q_0 和 Q_d 。

解 此时谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2} = 6.68 \text{ (GHz)}$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f_0 \mu}{\sigma_d}} = 2.13 \times 10^{-2} (\Omega)$$

因此

$$Q_0 = \frac{1.11 \eta}{R_s (1 + a/2b)} = 6150$$

$$Q_d = \frac{\omega\epsilon}{\sigma_d} = 2309$$

TE_{101} 模的等效电导如选取腔中央顶壁和底壁之间的电场线积分为电压, 则可得

$$G_0 = \frac{2P_L}{(E_{101}b)^2} = \frac{R_s}{\eta^2} \left[\frac{2b(a^2 + l^2) + al(a^2 + l^2)}{2b^2(a^2 + l^2)} \right] \quad (6.3-18)$$

2. 圆波导空腔谐振器

如图 6.3-3 所示由半径为 R , 长度为 l 的圆波导, 两端用导体板封闭构成的谐振器称为圆柱形波导空腔谐振器, 简称圆柱 (谐振) 腔。这种谐振腔构造简单, 加工制造方便, Q 值高, 在微波技术中有着广泛应用。

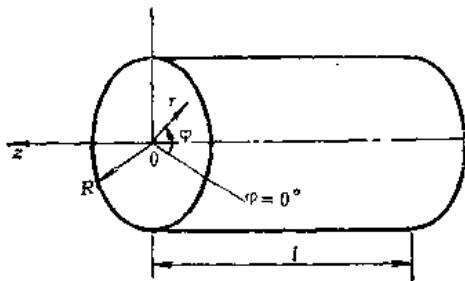


图6.3-3 圆柱形谐振腔

(1) 振荡模式及其场分量

圆柱腔中振荡模式的电磁场分量可用圆波导中的解并考虑反射波而得到。其纵向场分量由式(3.3-12)和(3.3-14)可求得为

$$\left\{ \begin{array}{l} H_z \\ E_z \end{array} \right\} = A_{mn} J_m(K_e r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \cdot \{ C_1 \cos(\beta z) + C_2 \sin(\beta z) \} \quad (6.3-19)$$

式中, 对于 TE_{mn} 模, $K_e = \frac{u'_{mn}}{R}$; 对于 TM_{mn} 模, $K_e = \frac{u_{mn}}{R}$, u_{mn} 和 u'_{mn} 分别为第一类 m 阶贝塞尔函数与其导数的第 n 个根。

利用边界条件 $z = 0$ 和 l 处, $H_z = 0$, 可得

$$C_1 = 0 \quad \text{和} \quad \beta = \frac{p\pi}{l}$$

于是 $H_z = H_{mn} J_m(K_e r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \quad (6.3-20)$

由式(3.3-1), 并考虑到 $-j\beta = \partial/\partial z$, 则腔中 TE 模横向场分量与 H_z 的关系式为

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{j\omega\mu}{K_e^2 r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \\ E_\varphi &= -\frac{j\omega\mu}{K_e^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ H_r &= \frac{1}{K_e^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial z} \\ H_\varphi &= -\frac{1}{K_e^2 r} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi \partial z} \end{aligned} \right\} \quad (6.3-21)$$

将式(6.3-20)代入式(6.3-21)可得到 TE_{mn} 模场分量为

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{j\omega\mu m}{K_e^2 r} H_{mn} J_m(K_e r) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ E_\varphi &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-j\omega\mu}{K_e} H_{mn} J'_m(K_e r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ E_z &= 0 \\ H_r &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi}{K_e l} H_{mn} J'_m(K_e r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ H_\varphi &= \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{mp\pi}{K_e^2 r l} H_{mn} J_m(K_e r) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ H_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} H_{mn} J_m(K_e r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \end{aligned} \right\} \quad (6.3-22)$$

用同样的方法可求得 TM_{mnP} 模式场分量为

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left(-\frac{p\pi}{K_s l} \right) E_{mnP} J'_m(K_s r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ E_\varphi &= \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{mp\pi}{K_s^2 r l} E_{mnP} J_m(K_s r) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ E_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} E_{mnP} J_m(K_s r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ H_r &= \mp \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{j\omega\epsilon m}{K_s^2 r} \right) E_{mnP} J'_m(K_s r) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ H_\varphi &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left(-\frac{j\omega\epsilon}{K_s} \right) E_{mnP} J'_m(K_s r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \\ H_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3-23)$$

结果表明圆柱腔中可以存在无穷多 TE 型模式和 TM 型模式。当谐振时

$$l = p \frac{\lambda_s}{2} \quad (6.3-24)$$

式中 λ_s 为圆波导的轴向波导波长。

由式 (6.2-20) 可求得圆柱腔的谐振波长为：

对于 TE_{mnP} 模式，

$$\lambda_0 = \sqrt{\left(\frac{u'_{mn}}{2\pi R}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2} \quad (6.3-25a)$$

对于 TM_{mnP} 模式，

$$\lambda_0 = \sqrt{\left(\frac{u_{mn}}{2\pi R}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2} \quad (6.3-25b)$$

例如 TE_{111} 模式的谐振波长为

$$(\lambda_0)_{\text{TE}_{111}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3.41R}\right)^2 + \left(\frac{1}{2l}\right)^2} \quad (6.3-26)$$

而 TM_{010} 模式的谐振波长为

$$(\lambda_0)_{\text{TM}_{010}} = 2.62R \quad (6.3-27)$$

比较式 (6.3-26) 和式 (6.3-27) 可知，当 $l < 2.1R$ 时， TM_{010} 模式的谐振波长比 TE_{111} 模式的长。因此，在 $l < 2.1R$ 条件下，圆柱腔的最低型振荡模式是 TM_{010} 模式而不是 TE_{111} 模式。

(2) 圆柱腔的波形因数

由前面分析知，品质因数 Q_0 与腔体的形状尺寸、工作模式及腔壁导体材料的特性、工作波长等都有关，不便用来作普遍性的讨论。为了方便，谐振腔设计中通常引用波形因

数 $P = Q_0 \frac{\delta}{\lambda_0}$ 来表征谐振腔的性质，它只与腔体的形状尺寸和工作模式有关。

TE_{mnP} 模式的波形因数可求得为

$$\left(Q_0 \frac{\delta}{\lambda_0} \right)_{TE_{mnP}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{m}{u'_{mn}} \right)^2 \right] \left[u'_{mn} + \left(\frac{p\pi}{2} \right)^2 \left(\frac{D}{l} \right)^2 \right]^{3/2}}{u'_{mn} + \left(\frac{p\pi}{2} \right)^2 \left(\frac{D}{l} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{2} \right) \left(\frac{D}{l} \right)^2 \left(\frac{m}{u'_{mn}} \right)^2 \left(1 - \frac{D}{l} \right)} \quad (6.3-28)$$

其中 TE_{01P} 模式的波形因数为

$$\left(Q_0 \frac{\delta}{\lambda_0} \right)_{TE_{01P}} = 0.610 \frac{\left[1 + 0.168 p^2 \left(\frac{D}{l} \right)^2 \right]^{3/2}}{1 + 0.168 p^2 \left(\frac{D}{l} \right)^2} \quad (6.3-29)$$

TM_{mnP} 模式的波形因数可求得为

$$\left(Q_0 \frac{\delta}{\lambda_0} \right)_{TM_{mnP}} = \frac{\left[u_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{2} \right)^2 \left(\frac{D}{l} \right)^2 \right]^{1/2}}{2\pi \left(1 + \frac{D}{l} \right)} \quad (6.3-30)$$

式中， δ 为金属导体的趋肤深度， D 为圆波导的直径。

图 6.3-4、图 6.3-5 和图 6.3-6 分别示出铜制圆柱腔 TE_{mnP} 模式、 TE_{01P} 模式和 TM_{mnP} 模式的波形因数曲线。由图可见，对于 TE_{01P} 模式，当 $D/l = 1$ 时波形因数有最大值，且 n 、 p 值愈大，波形因数愈大，即 Q_0 值愈高，而其它模式一般无最大值。故 TE_{01P} 模式常选作高 Q 圆柱腔的工作模式。

(3) 圆柱腔的三种常用模式

在圆柱腔的振荡模式中，有实用价值的是 TM_{010} 、 TE_{111} 和 TE_{011} 三种模式。下面分别加以讨论。

a. TM_{010} 模式

由前面分析知，当 $l < 2.1R$ 时， TM_{010} 模式是圆柱腔中的最低振荡模式。其谐振波长为

$$\lambda_0 = 2.62R \quad (6.3-27)$$

其场分量为

$$\left. \begin{aligned} E_s &= E_{010} J_0(K_s r) \\ H_s &= j \frac{E_{010}}{\eta} J_1(K_s r) \end{aligned} \right\} \quad (6.3-31)$$

式中

$$K_s = \frac{u_{01}}{R} = \frac{2.405}{R} \quad (6.3-32)$$

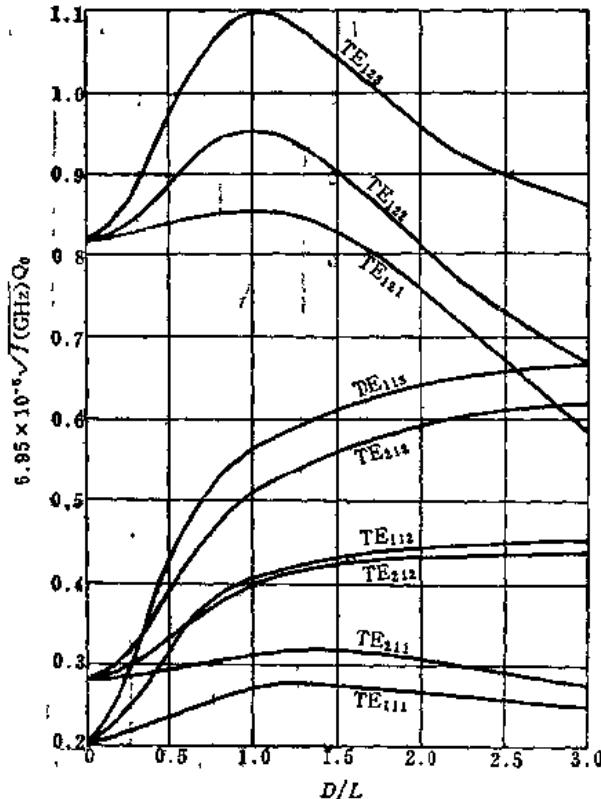


图 6.3-4 圆柱形谐振腔中 TE_{mnP} 模式的波形因数曲线

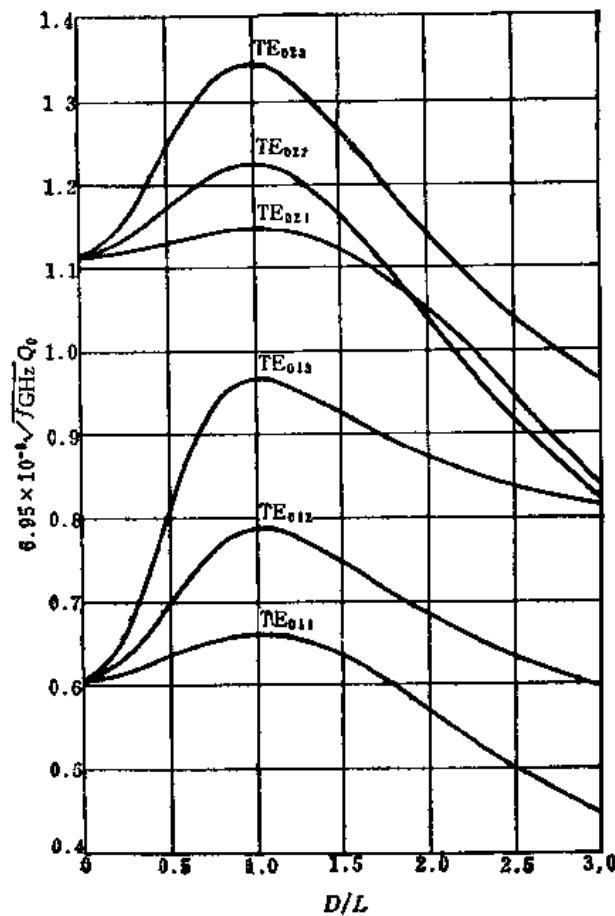
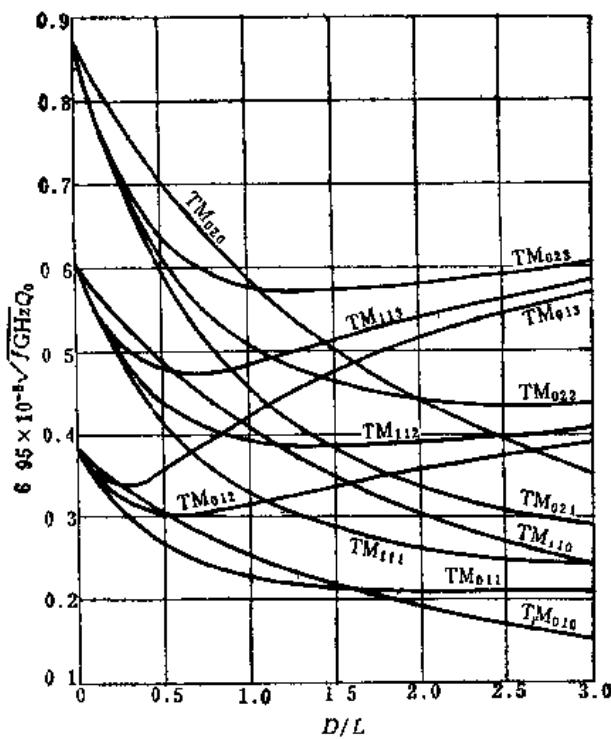
图6.3-5 圆柱形谐振腔中 TE_{0lp} 模式的波形因数曲线图6.3-6 圆柱腔中几种 TM_{mnp} 模式的波形因数曲线

图6.3-7 (a) 表示 TM_{010} 模式的场结构, 其电场只有 E_z 分量, 且在轴心最强; 磁场只有 H_z 分量, 在腔的圆柱壁附近最强, 因而其壁电流在两端面上只有 r 分量, 在柱壁上只有 z 分量。

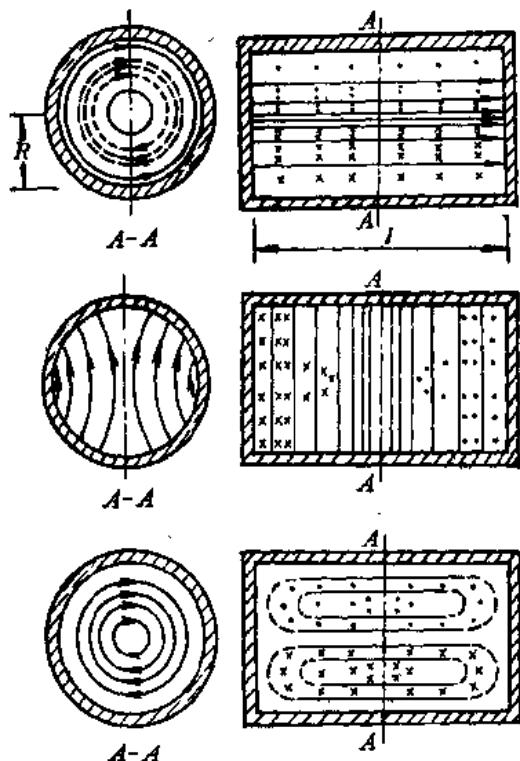


图6.3-7 圆柱形腔中三个常用模式的场结构

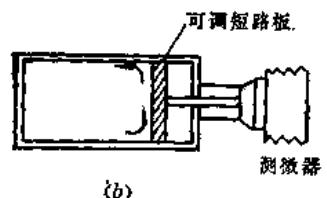
(a) TM_{010} 模式

(b) TE_{111} 模式

(c) TE_{011} 模式



(a)



(b)

图6.3-8 TE_{111} 模式的电流分布与调谐方法

TM_{010} 模圆柱腔的品质因数为

$$Q_t = \frac{\eta}{R_s} \cdot \frac{u_{01}}{2 \left(1 + \frac{R}{l} \right)} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{R}{1 + \frac{R}{l}} \quad (6.3-33)$$

TM_{010} 模式圆柱腔的场结构特别简单, 而且有明显的电场和磁场较集中区。因此这种腔常用作参量放大器的振荡腔, 介质测量的微扰腔及波长计等。

由式 (6.3-27) 可见, TM_{010} 模式的谐振波长与 l 无关。因此不能用短路活塞形式来进行调谐, 调谐比较困难, 使其应用受到一定限制。其调谐方法通常采用中心轴向加调谐杆。

b. TE_{111} 模式

当 $l > 2.1R$ 时, TE_{111} 模式是圆柱腔的最低振荡模式。其谐振波长为

$$\lambda_0 = \sqrt{\left(\frac{1}{3.41R}\right)^2 + \left(\frac{1}{2l}\right)^2} \quad (6.3-26)$$

可见谐振波长与 l 有关, 因此可用短路活塞改变 l 进行调谐, 如图6.3-8所示。

TE_{111} 模式有五个场分量，即

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \pm \frac{j\omega\mu}{K_c^3 r} H_{111} J_1(K_c r) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \\ E_\varphi &= \frac{j\omega\mu}{K_c^3 r} H_{111} J'_1(K_c r) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \\ E_z &= 0 \\ H_r &= \frac{\pi}{K_c^3 l} H_{111} J'_1(K_c r) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right) \\ H_\varphi &= \pm \frac{j\omega\mu}{K_c^2 r l} H_{111} J_1(K_c r) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right) \\ H_z &= H_{111} J_1(K_c r) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \end{aligned} \right\} \quad (6.3-34)$$

其场结构如图6.3-7 (b) 所示。 TE_{111} 模式圆柱腔常用作波长计，但这种模式容易出现极化简并现象，使其应用受到一定限制。

c. TE_{011} 模式

TE_{011} 模式的谐振波长为

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{1.64 R}\right)^2 + \left(\frac{1}{2l}\right)^2}} \quad (6.3-35)$$

其场分量为

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= \frac{j\omega\mu}{K_c^3 r} H_{011} J'_0(K_c r) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \\ H_r &= \frac{\pi}{K_c^3 l} H_{011} J'_0(K_c r) \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right) \\ H_z &= H_{011} J_0(K_c r) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \end{aligned} \right\} \quad (6.3-36)$$

其场结构如图6.3-7 (c) 所示。电场只有 E_φ 分量，在横截面内形成闭合的同心圆，在 $r=0$ 和 R 处为零；磁场在两端面附近只有 H_r 分量，在圆柱壁附近只有 H_z 分量。因此在腔的端面和圆柱壁上都只有 φ 方向管壁电流，无 z 向电流。故 TE_{011} 模式圆柱腔的调谐可做成不接触式活塞，既便于制造，又有利于抑制干扰模式，如图6.3-9所示。



图6.3-9 TE_{011} 模式电流分布与调谐方法

TE_{011} 模式的场沿 φ 方向不变化。它是TE型模式中唯一无简并的模。若空腔有小的变形，对谐振频率的影响不大严重；即使机械加工略有椭圆度，场分布仍然稳定而不会发生模式分裂。这是 TE_{011} 模式能正常工作的重要条件。由于 TE_{011} 模式无 z 向电流，其损耗随频率升高而降低， Q_0 值特别高，故 TE_{011} 模式圆柱腔广泛用作高 Q 波长计、稳频

标准腔等。但 TE_{011} 模式不是最低振荡模式，所以 TE_{011} 模式圆柱腔的体积较大，并且在设计时要设法消除干扰模式。

(4) 模式图与频宽比

由式(6.3-25)可以得到圆柱腔的谐振频率与工作模和腔体尺寸之间的关系如下：

$$(f_0 D)^2 = \left(\frac{c \mu_{mn}}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{c p}{2}\right)^2 \left(\frac{D}{l}\right)^2 \quad (6.3-37)$$

式中， c 为光速； $D=2R$ 为圆柱腔的直径；对于 TE_{mnP} 模式， $\mu_{mn}=u'_{mn}$ ；对于 TM_{mnP} 模式， $\mu_{mn}=u_{mn}$ 。

上式可以写成

$$f_0^2 D^2 = 139.3 \left\{ \left(\frac{\mu_{mn}}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \left(\frac{D}{l}\right)^2 \right\} \quad (6.3-38)$$

式中， f_0 以GHz为单位，尺寸以cm为单位。式(6.3-31)代表一族直线，其横坐标为 $(D/l)^2$ ，纵坐标为 $(f_0 D)^2$ ，如图6.3-10所示。这一族直线图称为圆柱腔的波型图或模式图。它是设计圆柱腔的主要图表。波型图中每一条直线表示一种（或几种）振荡模式的谐振频率与腔长和直径的关系，即代表该模式的调谐曲线。

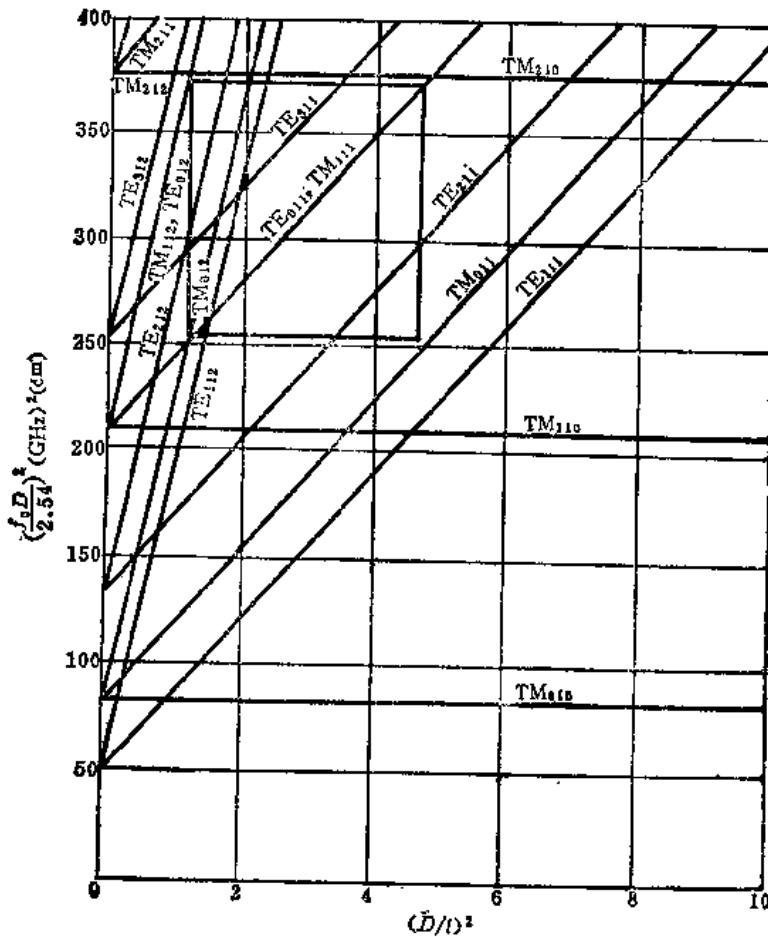


图6.3-10 圆柱形腔波型图

$$F = \frac{\text{最高工作频率}}{\text{最低工作频率}} = \frac{f_{\max}}{f_{\min}} \quad (6.3-39)$$

从避免自干扰模式的角度考虑，由波型图可见，谐振腔的频宽比是由 $(D/l)_{\min}$ 来确定的。图6.3-12示出几种 TE_{01P} 模式的频宽比与 $(D/l)_{\min}$ 的关系曲线。这样，根据频宽比

为了使谐振腔正常工作，就必须选择适当的工作方框。该工作方框是在波型图中以工作模式的直线（称为工作直线）为对角线，由最大和最小的 $(f_0 D)^2$ 及其对应的 $(D/I)^2$ 值所确定的一个区域。图6.3-10所示矩形框即为以 TE_{011} 模式为工作模式的工作方框。在设计圆柱腔时，应在能消除干扰模式的条件下尽量使工作方框扩大。

在工作方框中任何非对角线的模式都是不需要的模式，即干扰模式，如图6.3-11所示，它们对谐振腔的正常工作会产生不同程度的影响。由图6.3-11可以看出，干扰模式可分为以下四种：

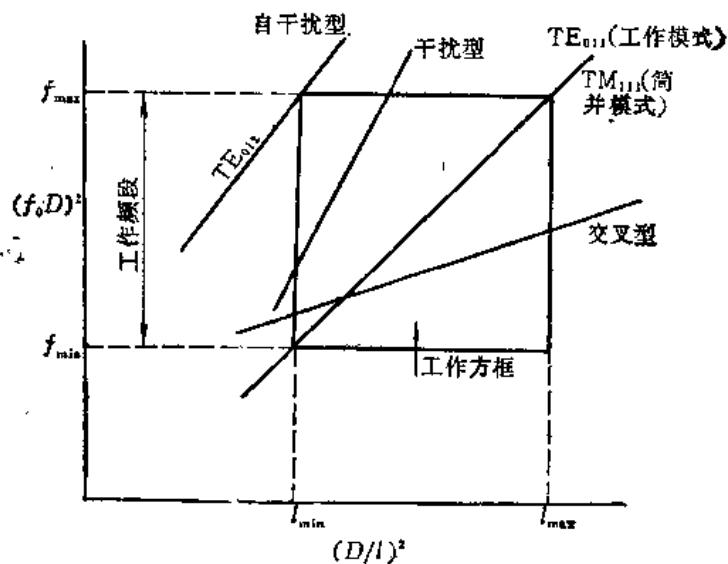


图6.3-11 表明各种干扰模式的波型图（放大图）

a. 干扰型模式：工作方框中不与工作模式直线相交的直线所代表的模式，如 TE_{211} 、 TE_{311} 、 TE_{212} 等模。这种干扰模式的存在，会使腔体在同一频率下在不同的尺寸谐振，或使尺寸一定的腔体在一个以上的频率发生谐振，从而影响测量的正确性。

b. 自干扰型模式：是指横向场分布与工作模式相同的模式，即 m 、 n 值相同而 p 值不同的模式。例如工作模式为 TE_{011} 时，自干扰模式为 TE_{012} 模式。这种干扰模式的存在，同样会影响测量的正确性，而且谐振时，它与工作模式的耦合最强，因此难以识别。故必须严格防止它落入工作方框内。

c. 交叉型模式：是在工作方框内与工作直线相交的直线所代表的模式，如 TE_{112} 。这种干扰模式在交叉点以外区域的影响与干扰型模式相同，而在交叉点附近，它与工作模式同时谐振于一个频率，干扰很强，会严重影响谐振腔的 Q 值，影响测量精度。因此，在选择工作方框时，对难以抑制的交叉型模式，必须避免交叉点落入工作方框内。

d. 简并型（或称伴侣型）模式：在工作方框内与工作直线重迭的模式，即谐振频率完全与工作模式相同的模式，例如 TM_{111} 模。其影响是使 Q 值降低，影响测量精度；但它易于抑制，影响较小。

以上四种干扰模式，除交叉型干扰模式和自干扰型模式必须在选择工作方框时加以避免外，其它干扰模式一般可用选择适当的耦合方式来抑制掉。

为了便于根据谐振频率来确定工作方框，需要引入谐振腔的频宽比概念。它定义为谐振腔所能正常工作的最高频率和最低频率之比值，即

$$F = \frac{\text{最高工作频率}}{\text{最低工作频率}} = \frac{f_{\max}}{f_{\min}} \quad (6.3-39)$$

从避免自干扰模式的角度考虑,由波型图可见,谐振腔的频宽比是由 $(D/l)_{\min}$ 来确定的。图6.3-12示出几种TE_{01P}模式的频宽比与 $(D/l)_{\min}$ 的关系曲线。这样,根据频宽比可求出 $(D/l)_{\min}$ 值,然后在波型图上找出相应的 $(f_0 D)^2_{\min}$,由给定的 f_{\min} 即可确定 D 值,再在波型图上找出与 $(f_0 D)^2_{\max}$ 相应的 $(D/l)_{\max}$,并由此算出 l_{\max} 值,从而确定谐振腔的调谐范围。

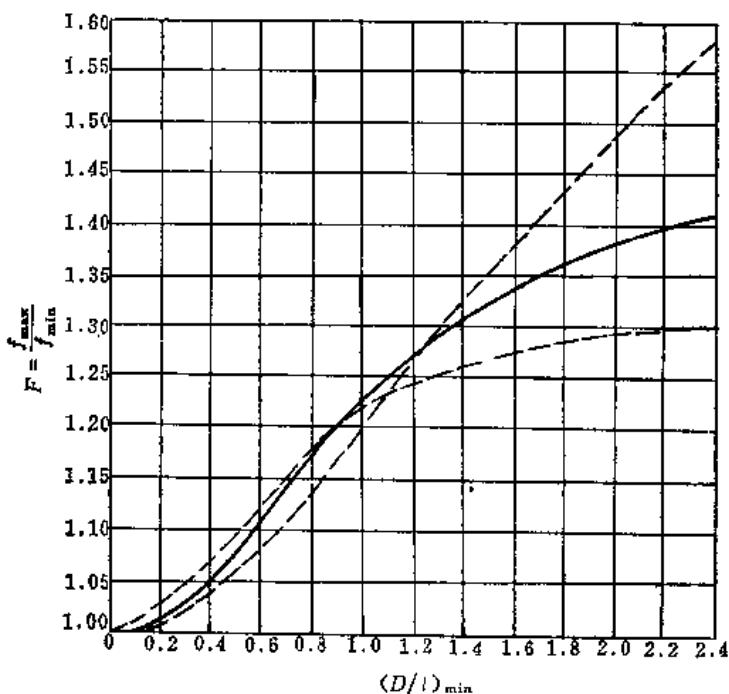


图6.3-12 频宽比 F 与 $(D/l)_{\min}$ 的关系曲线

6.4 传输线谐振器

微波谐振器也常用一段开路或短路的传输线来构成,它既可用同轴线或微带线来实现,也可用波导来实现。波导型前面已经讨论过,这里只讨论同轴线谐振器和微带传输线谐振器。

1. 同轴线谐振器

同轴线的工作波型为TEM模,用同轴线构成的谐振器能宽频带工作。它常用于微波振荡器、倍频器、放大器和波长计中。

同轴线谐振器通常有三种形式:

- ① 一端短路、另一端开路的四分之一波长型同轴腔,其腔长

$$l = (2n - 1) \frac{\lambda_0}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.4-1)$$

实用中,为避免开路端辐射损耗,将外导体做得比内导体长些,构成一小段截止波导,如图6.4-1(a)所示。

- ② 两端短路的长度为二分之一波长整数倍的二分之一波长型同轴腔。其腔长

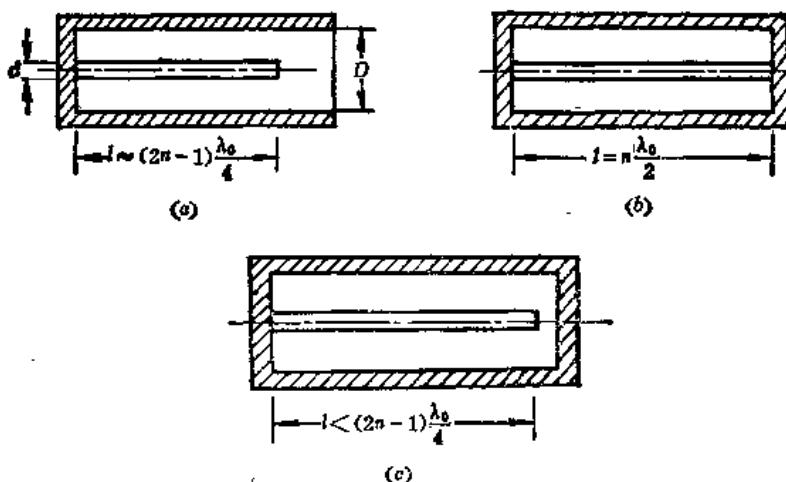


图6.4-1 同轴线谐振器

$$l = n \cdot \frac{\lambda_0}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.4-2)$$

如图6.4-1 (b) 所示。

③ 一端短路，另一端外导体用导体板封闭，内导体与导体板盖有一定距离形成一电容，称为电容负载式同轴腔。其腔长小于 $\lambda_0/4$ 的整数倍，如图6.4-1(c)所示。

同轴线谐振器横向尺寸 d 和 D 的选择与同轴线的选择原则一样，不再重复。

2. 微带线谐振器

微带线谐振器在微波集成电路中广泛用作振荡回路、稳频腔，组成滤波器、阻抗匹配网络等。其结构形式除两端开路或短路的微带线节谐振器外，还有环形谐振器、圆形谐振器等。

(1) 微带线节谐振器

微带线节谐振器可以做成终端短路（或开路）的长度为半波长整数倍的串联（或并联）谐振器，也可以做成终端短路（或开路）的长度为 $\lambda/4$ 奇数倍的并联（或串联）谐振器。这种微带线节谐振器的等效电路及其参量见后面第7节。

微带线的损耗通常包括导体损耗和介质损耗两部分，因而微带线节谐振器的无载 Q_0 值与导体损耗决定的 Q_s 和介质损耗决定的 Q_d 有如下关系：

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_s} + \frac{1}{Q_d} \quad (6.4-3)$$

即

$$Q_0 = \frac{Q_s Q_d}{Q_s + Q_d} \quad (6.4-4)$$

微带线的 Q_0 可求得为（具体推导见后面6.8节）：

$$Q_0 = \frac{27.3}{\alpha_s \lambda_g} \quad (6.4-5)$$

Q_s 为

$$Q_s = \frac{27.3}{\alpha_s \lambda_s} \quad (6.4-6)$$

式中 α 和 α_s 分别为以单位长 dB 数表示的微带线的衰减因数和导体衰减因数。而 Q_s 为

$$Q_s = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - q \tan \delta} \quad (6.4-7)$$

式中, ϵ_r 为有效介电常数, q 为填充因数。

一般情况下, $\alpha_s \gg \alpha_d$, 所以 $Q_s \gg Q_d$, $Q_s \approx Q_{ss}$

对于两端开路的微带线节谐振器, 还需考虑开路端的辐射损耗, 而且这种辐射损耗将是谐振器的主要损耗, 从而使谐振器 Q 值显著降低。

图 6.4-2 表示由式 (6.4-5) 算得的两端短路的铜微带线谐振器的 Q_s 曲线。由图可见, Q_s 随基片厚度增大而增高, 随阻抗增高而降低。

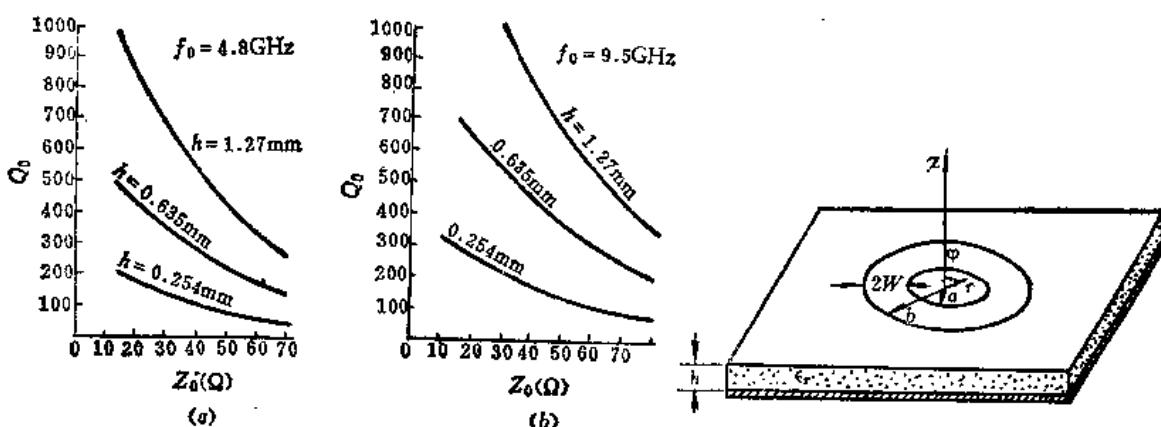


图 6.4-2 两端短路的微带线节谐振器的 Q_s 值

图 6.4-3 微带环形谐振器

微带线节谐振器的尺寸设计计算比较简单, 只需根据给定的谐振频率, 按 Q 值要求适当选择线宽 W , 计算其长度, 并对开路端的终端效应及其它不连续性加以适当修正即可。开路端按经验值一般减去 $0.33h$ 。

(2) 微带环形谐振器

微带线环形谐振器结构如图 6.4-3 所示。利用镜象原理分析表明, 这种谐振器的振荡模式为 TM_{mn0} 模, 主模为 TM_{110} 模, 模式图如图 6.4-4 所示。图 6.4-5 表示几种较低模式的场结构。

微带环形谐振器的尺寸可由图 6.4-4 所示模式图来设计。由图可见, 为了避免高次模, 应选

$$\frac{W}{R} \leq 0.1 \quad (6.4-8)$$

式中 R 为平均半径, $R = (a + b)/2$ 。

TM_{mn0} 模式的谐振波长可由下式计算:

$$\lambda_{e_0} = \frac{2\pi R}{m} \quad (6.4-9)$$

由场结构图可以看出, 主模 TM_{110} 模的场的传播路径基本上闭合, 辐射损耗将很小, 故环形谐振器的无载 Q_s 值近似等于微带线本身的 Q 值, 是微带谐振器中 Q 值较高的一种谐振器。

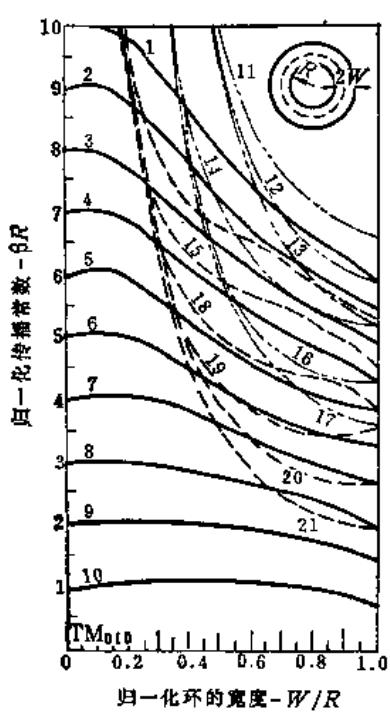


图 6.4-4 微带环谐振器模式图

图中, 1—TM₁₀; 2—TM₉₁₀; 3—TM₈₁₀, 4—TM₇₁₀; 5—TM₆₁₀; 6—TM₅₁₀; 7—TM₄₁₀; 8—TM₃₁₀; 9—TM₂₁₀; 10—TM₁₁₀; 11—TM₂₄₀; 12—TM₁₄₀; 13—TM₀₄₀; 14—TM₂₃₀; 15—TM₄₂₀; 16—TM₁₃₀; 17—TM₀₃₀; 18—TM₃₂₀; 19—TM₂₂₀; 20—TM₁₂₀; 21—TM₀₂₀。

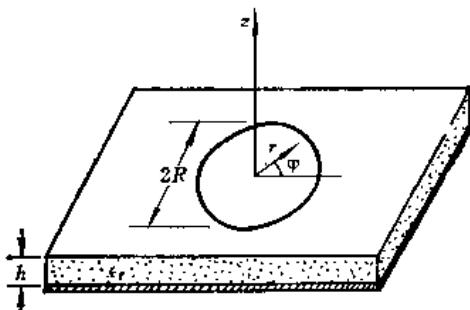


图 6.4-6 微带圆形谐振器

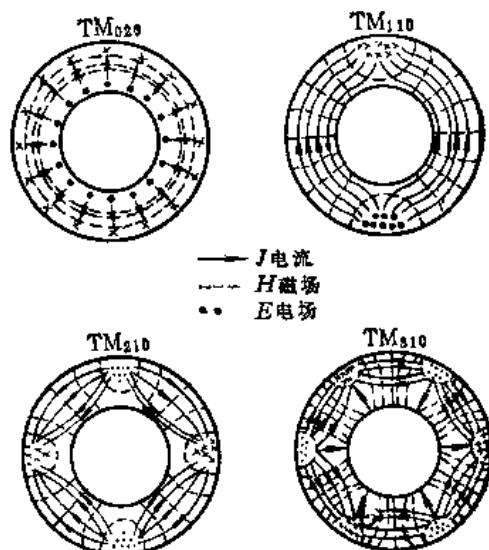
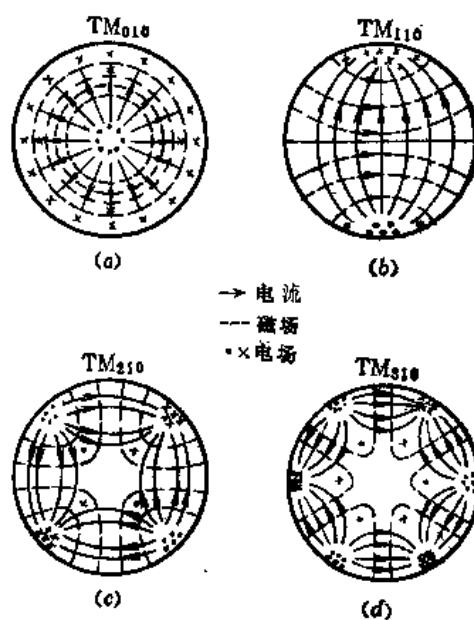


图 6.4-5 几种振荡模式的场结构

图 6.4-7 圆形谐振器中几种 TM_{mno} 模式场结构

(3) 圆形谐振器

微带圆形谐振器的结构如图 6.4-6 所示。它实际上是上述环形谐振器在 $W/R \rightarrow 1$ 的极限情况。其振荡模式也是 TM_{mno} 模，主模是 TM_{110} 模式。几种 TM_{mno} 模式场结构如图 6.4-7 所示。

微带圆形谐振器的结构简单，使用方便，Q值也比较高，适宜于作体效应或雪崩管振荡器的谐振器；但不宜用于倍频器和参量放大器等电路中，因为其振荡模式是非谐波相关的，即一种波型的频率不能由其它两种波型的频率合成得到。

6.5 介质谐振器

早在1939年就有人提出用高 ϵ_r 、低损耗介质材料可以制成微波介质谐振器。但当时由于缺乏这样的介质材料而未获得发展和应用。1962年研制出了用 TiO_2 单晶制造的介质谐振器，但其温度稳定性低，成为实用中的一大难点。直到1971年以后才研制出温度特性符合实用的介质材料，使介质谐振器的研究和应用得到很大的发展。

介质谐振器具有如下特点：（1）体积小。由于其介电常数高，其体积只有波导或同轴谐振器的1/10以下，可以实现电路小型化；（2）其谐振频率的温度稳定性好，可以得到与因瓦合金制作的空腔谐振器同样的频率温度系数；（3） Q_0 值高。在0.1~30GHz范围内， Q_0 可达 10^8 ~ 10^4 ；（4）基本上无频率限制，可以适用到毫米波（高于100GHz）。目前，介质谐振器已用于微波集成电路中作带通和带阻滤波器、慢波结构、振荡器的稳频腔、鉴频器的标准腔等。

介质谐振器的技术指标主要是 ϵ_r 、 Q 值与频率温度系数 η_f 。对介质谐振器材料的要求是 ϵ_r 高、损耗正切($\tan \delta$)小、温度稳定性好。常用的介质谐振器材料及其电性能如表6.5-1所示。

表6.5-1 介质谐振器使用的陶瓷材料

主要成分	ϵ_r	频率温度系数 η_f ($10^{-6}/^\circ C$)	$\tan \delta$ (10^{-4})	测试频率 (GHz)
$2MgO\cdot SiO_2$ (镁橄榄石)	6.0	60	1	7
Al_2O_3 (氧化铝)	9.92	65	0.7	9.8
$MgTiO_3$	16.1	60	0.8	8
$(Ca\cdot La)TiO_3\cdot MgTiO_3$	20.1	2	0.35	2.2
$(Zr\cdot Sr)TiO_4$	36.5	2	0.43	0.8
$(ZrSr)TiO_4$	36.5	2	0.63	1.6
$(ZrSr)TiO_4$	36.5	2	1.6	8
$BaTi_4O_9$	39.5	3	1.4	6
$Ba_2Ti_9O_{20}$	39.8	2	1.3	4
$BaO\cdot 4TiO_2$	80	2	1.6	1.15

在微波集成电路中，介质谐振器的形状通常为矩形、圆柱形和圆环形，如图6.5-1所示。

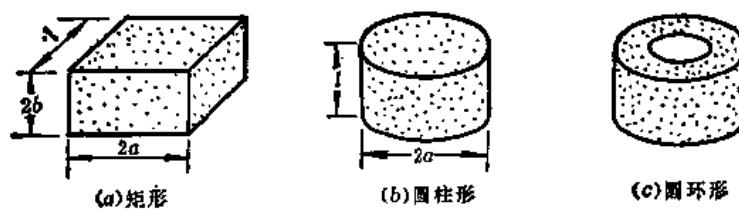


图6.5-1 介质谐振器的形状

介质谐振器可以看成两端开路的一段介质波导，因此介质谐振器中的振荡模式与介质波导中的模式是对应的，有无限多个振荡模式。但与金属波导谐振腔不同，介质谐振器沿轴向的长度 l 不是 $\lambda_g/2$ 的整数倍，因为介质空气分界面上的场不为零，而是按指数规律在空气中逐渐衰减，所以 l 为 $(\delta + p)\lambda_g/2$ ，这里 $\delta < 1$ ， $p = 0, 1, 2, \dots$ 。故介质谐振器的模式通常表示成 $TE_{m,n,b+p}$ ， $TM_{m,n,b+p}$ 和 $HE_{m,n,b+p}$ ， $EH_{m,n,b+p}$ ，相应模式的谐振器长度 l 为

$$p\lambda_g/2 < l < (p+1)\lambda_g/2 \quad (6.5-1)$$

式中 λ_g 为该模式的波导波长。

图 6.5-2 表示圆柱形介质谐振器中最常用的几种振荡模式的电磁场分布。矩形介质谐振器中振荡模式的场分布与之相似。图 6.5-2 所示都是 $p = 0$ 的情况；当 $p \geq 1$ 时，只需在圆柱轴向上将相应的场型延长得之。图 6.5-3 示出振荡模式在圆柱横截面内的电场强度在轴向上的变化情况。

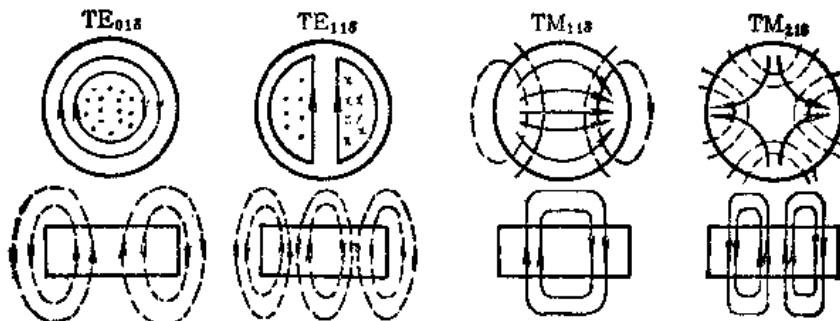


图 6.5-2 介质谐振器中几个主要振荡模式的电磁场分布

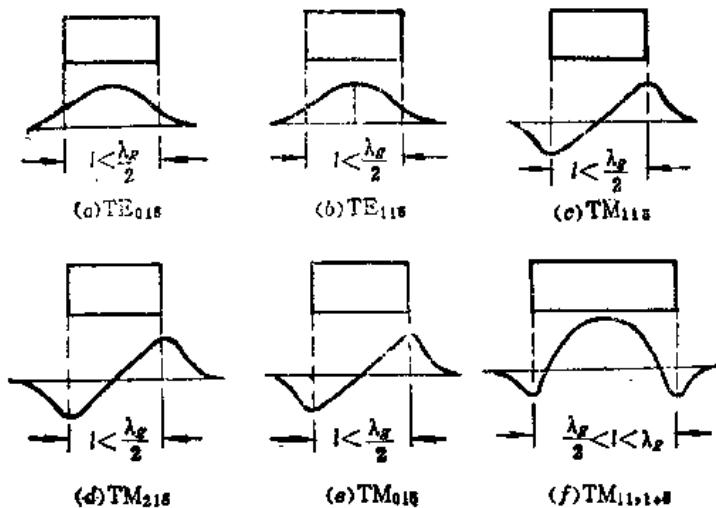


图 6.5-3 振荡模式电场强度横向分量在轴向的变化情况

介质谐振器谐振频率的分析早期是用磁壁模型方法，即把介质谐振器的边界看成磁壁来分析。这种方法的误差大，达 10%。现在较为精确的分析方法有变分法、介质波导模型法（开波导法）、改进的磁壁法等，误差可以小于 1%。下面介绍用改进的磁壁法和介质波导模型法分别对圆柱形介质谐振器和矩形介质谐振器进行分析。

1. 圆柱形介质谐振器

圆柱形介质谐振器如图 6.5-4 所示，设介质为均匀、无耗，其介电常数为 ϵ_1 ，半径为 a ，高度（即长度）为 l 。

1) 改进的磁壁法

这种方法又称磁壁波导模型法或混合磁壁法，它是把圆柱形介质谐振器看成一段圆柱形介质波导，上下的空气区域看成截止波导，介质圆柱面 S_0 看成磁壁，用纵向场方法分别求 TE 模和 TM 模的场分量及其谐振频率。

在大多数应用中，圆柱形介质谐振器是以 TE_{010} 模工作的，所以下面我们只讨论 TE 模式的求解。

注意到在介质谐振器内场沿 z 向应为驻波状态，而在谐振器外为衰减状态，则纵向磁场为

$$\left. \begin{aligned} H_{z1} &= A_m J_m(K_c r) \left(\frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right) \cos(\beta z + \theta) \quad |z| < l/2 \\ H_{z2} &= B_m J_m(K_c r) \left(\frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right) e^{-\alpha(|z|-l/2)} \quad |z| > l/2 \end{aligned} \right\} \quad (6.5-2)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 &= K_0^2 \epsilon_r - K_c^2 \\ \alpha^2 &= K_c^2 - K_0^2 \\ K_0^2 &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.5-3)$$

其它横向场分量可由式 (3.3-1) 求得。

在 $r = a$ 的柱面磁壁上， E_r 和 H_θ 必须为零，则要求

$$J_m(K_c a) = 0$$

由此得到

$$K_{m,n} = \frac{\mu_m}{a} \left(\begin{array}{c} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right) \quad (6.5-4)$$

式中 μ_m 为第 m 阶第一类贝塞尔函数第 n 个根值。

又在 $|z| = l/2$ 的分界面上，切向场必须连续，即应有： $E_{r1} = E_{r2}$ ， $H_{\varphi 1} = H_{\varphi 2}$ 或 $H_{z1} = H_{z2}$ ， $\partial H_{z1}/\partial z = \partial H_{z2}/\partial z$ 。由此可得

$$\left. \begin{aligned} A_m \cos(\beta l/2 + \theta) &= B_m \\ A_m \beta \sin(\beta l/2 + \theta) &= \alpha B_m \end{aligned} \right\}$$

消去 A_m 和 B_m ，则得

$$\beta \operatorname{tg}(\beta l/2 + \theta) = \alpha \quad (6.5-5)$$

式中初相角 θ ，考虑到结构的对称性， H_z 必须是偶对称的或奇对称的，因此应取 $\theta = -p\pi/2$ ($p = 0, 1, 2, \dots$)。于是式 (6.5-5) 可改写为

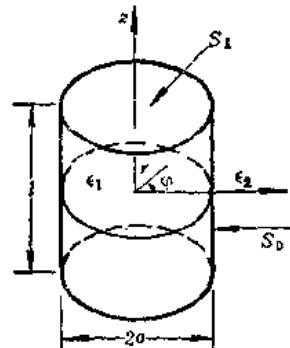


图 6.5-4 孤立的圆柱形介质谐振器

$$\beta \operatorname{tg}(\beta l/2 - p\pi/2) = \alpha$$

由此求得

$$\beta l = p\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = p\pi + \delta\pi = (\delta + p)\pi \quad (6.5-6)$$

此即圆柱形介质谐振器TE模式的特征方程。式中， $\delta\pi = 2 \operatorname{arctg} \alpha/\beta < \pi$ ，因而 $0 < \delta < 1$ ，而 p 是沿 z 向场分布的半波数。圆柱形介质谐振器中的TE振荡模式表示为 $TE_{m,n,\delta+p}$ ，其最低模式为 TE_{010} 模，其余模式都是高次模。用上述改进磁壁法得到的 TE_{010} 模的场分布如图6.5-6(a)所示。

由式(6.5-3)、(6.5-4)和(6.5-6)可求得 K_c 和 β ，则谐振频率可由下式求得：

$$f_0 = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{K_c^2 + \beta^2} \quad (6.5-7)$$

式中 c 为光速。

(2) 介质波导模型法

上述方法误差比较大，它忽略了介质谐振器柱面外面的场。介质波导模型法可提高精度。这种方法类似于矩形介质波导中介绍的分区近似法，不同的是前面是横向分区，现在是纵向分区，如图6.5-5所示，并认为场主要集中在介质波导区①中，其内场为驻波型；壁邻的②、③区内的场很小，认为是衰减型，而在角邻的区域④中的场更小，并忽略不计。与上述改进磁壁法相比，上述方法忽略了区域②和④中的场，而现在只忽略了区域④中的场，可见介质波导模型法较上述方法精确。下面我们只讨论TE模式。

根据上述考虑， H_z 在各个区域中的解应为：

$$\left. \begin{array}{l} \text{区域①} \quad H_{z1} = A_m J_m(K_{c_1} r) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right\} \cos(\beta z + \theta) \\ \text{区域②} \quad H_{z2} = B_m K_m(K_{c_2} r) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right\} \cos(\beta z + \theta) \\ \text{区域③} \quad H_{z3} = C_m J_m(K_{c_1} r) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right\} e^{-\alpha(|z| - l/2)} \end{array} \right\} \quad (6.5-8)$$

式中

$$\left. \begin{array}{l} K_{c_1}^2 = K_0^2 \epsilon_{r_1} - \beta^2 \\ K_{c_2}^2 = \beta^2 - K_0^2 \\ K_{c_1}^2 = \alpha^2 + K_0^2 \end{array} \right\} \quad (6.5-9)$$

将式(6.5-8)代入式(3.3-1)可求得各区横向场分量。

由在 $r = a$, $|z| \leq l/2$ 边界上切向场 E_s , H_s 连续条件可以得到与介质波导相似的特征方程，即

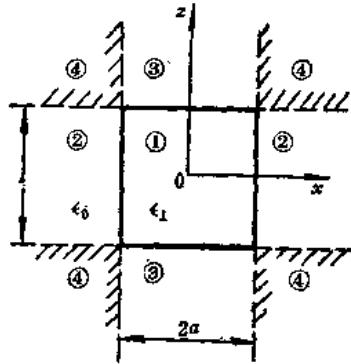


图6.5-5 介质波导模型法说明图

$$\frac{J'_m(K_{\epsilon_1}a)}{K_{\epsilon_1}J_m(K_{\epsilon_1}a)} + \frac{K'_m(K_{\epsilon_2}a)}{K_{\epsilon_2}K_m(K_{\epsilon_2}a)} = 0 \quad (6.5-10a)$$

或者

$$\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} = 0 \quad (6.5-10b)$$

式中, $u = K_{\epsilon_1}a$, $w = K_{\epsilon_2}a$

又在 $|z| = l/2$, $r < a$ 分界面上, 要求 $E_{r1} = E_{r2}$, $H_{\varphi 1} = H_{\varphi 2}$, 由此可得

$$\beta l = p\pi + 2\arctg \alpha / \beta = (\delta + p)\pi \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.5-11)$$

由式 (6.5-9)、(6.5-10) 和 (6.5-11) 可求得 K_{ϵ_1} 和 β , 则谐振频率为

$$f_0 = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_{r1}}} \sqrt{K_{\epsilon_1}^2 + \beta^2} \quad (6.5-12)$$

对于 TE_{010} 模, 谐振频率可由下列方程确定:

$$\left. \begin{aligned} \frac{J_1(u)}{uJ_0(u)} + \frac{K_1(w)}{wK_0(w)} &= 0 \\ \beta l = 2\arctg \alpha / \beta & \\ u^2 = K_0^2 a^2 \epsilon_{r1} - \beta^2 a^2 &= \alpha^2 a^2 + K_0^2 a^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.5-13)$$

由此法求得的 TE_{010} 模的场分布

如图 6.5-6(b) 所示。

(3) 非理想磁壁法

这种方法实际上也是改进的磁壁法。这种方法分四步假设:

- ① 假设全部边界为理想磁壁;
- ② 假设柱面壁 S_0 为理想磁壁, 端面壁 S_1 为非理想磁壁;
- ③ 假设 S_1 为理想磁壁, 而 S_0 为非理想磁壁;
- ④ 假设全部边界 (S_0 和 S_1) 都是非理想磁壁。利用这些假设可以得到两个特征方程, 一个由假设 S_1 为理想磁壁得到, 另一个由假设 S_0 为理想磁壁得到。对于 TE_{010} 模圆柱介质谐振器, 特征方程即为^[7]

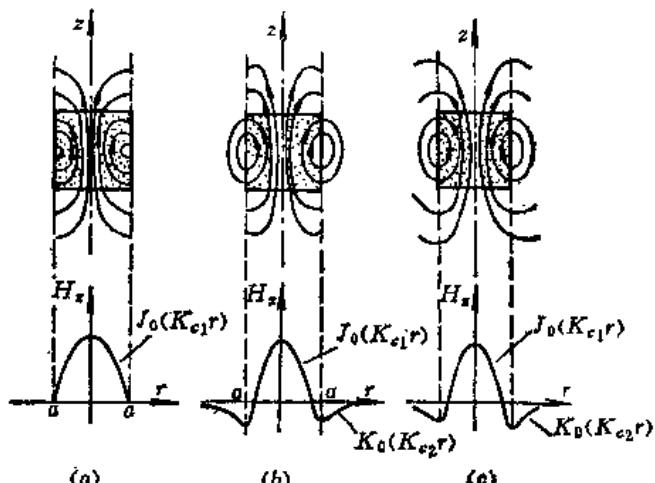


图 6.5-6 TE_{010} 模的场分布

(a) 磁壁波导模型法, (b) 介质波导模型法,
(c) 非理想磁壁法。

$$\left. \begin{aligned} u \frac{J_0(u)}{J'_0(u)} &= -w \frac{K_0(w)}{K'_0(w)} \\ \left(\frac{\beta l}{2}\right)^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta l}{2}\right) &= \left(\frac{2\pi f_0}{c}\right)^2 (\epsilon_{r1} - 1) \end{aligned} \right\} \quad (6.5-14)$$

用数值计算方法即可求得 TE_{010} 模的谐振频率与谐振器参量之间的关系曲线。图 6.5-7 表示 TE_{010} 模的谐振频率曲线。其场分布如图 6.5-6(c) 所示。用此法得到的结果比较精确, 误差小于 1%。

2. 矩形介质谐振器

图6.5-1(a) 所示矩形介质谐振器也可用介质波导模型法、改进的磁壁法、变分法等进行分析。改进磁壁法（即磁壁波导模型法）求解矩形介质谐振器的过程与圆柱形介质谐振器的相似，留给读者作为练习（见习题6-14），下面只介绍介质波导模型法及非理想磁壁法的结果。

(1) 介质波导模型法

这种方法与矩形介质波导分区近似法相似；但现在不仅横向分区，而且纵向也分区。如图6.5-8所示，把介质谐振器所在空间分成五个区域。分析时忽略区域⑤中的场。求解时把介质谐振器中的场分成TE模式和TM模式，用纵向场方法求其场分量，然后利用边界条件求得确定谐振频率的特征方程。下面我们只介绍TE模式的求解。

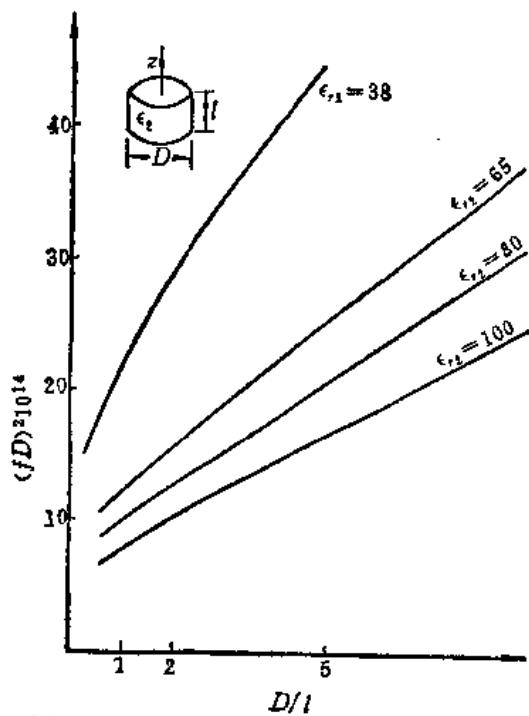
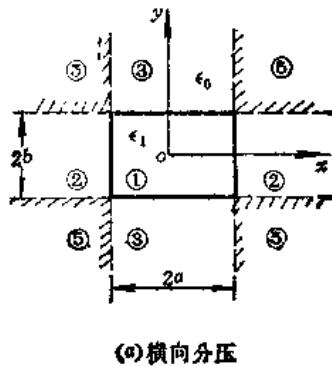


图6.5-7 用非理想磁壁法求得的TE₀₁₈模谐振频率曲线



(a) 横向分区

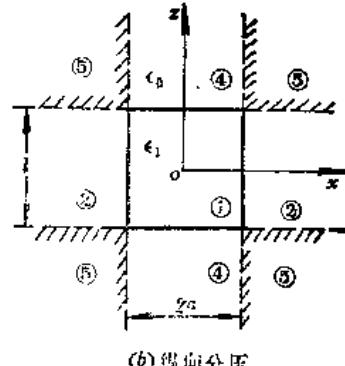


图6.5-8 矩形介质谐振器的介质波导模型法

分析时，把介质谐振器与区域②、③看成一段矩形介质波导，把区域④看成半无限截止波导，忽略区域⑤中的场，把其边界看成磁壁。

对于TE模式，先求H_x分量。根据各区域中场的特性，应有

$$\left. \begin{array}{l} \text{区域①} \quad H_{x1} = A_{m1} \cos(K_x x + \xi) \cos(K_y y + \eta) \cos(\beta z + \delta) \\ \text{区域②} \quad H_{x2} = A_{m2} e^{-\alpha_x (x^2 - a^2)} \cos(K_y y + \eta) \cos(\beta z + \delta) \\ \text{区域③} \quad H_{x3} = A_{m3} \cos(K_x x + \xi) e^{-\alpha_y (y^2 - b^2)} \cos(\beta z + \delta) \\ \text{区域④} \quad H_{x4} = A_{m4} \cos(K_x x + \xi) \cos(K_y y + \eta) e^{-\alpha_z (z^2 - l^2/2)} \end{array} \right\} \quad (6.5-15)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} K_x^2 + K_y^2 + \beta^2 &= \epsilon_r K_0^2 \\ -\alpha_x^2 + K_y^2 + \beta^2 &= K_0^2 \\ K_x^2 - \alpha_y^2 + \beta^2 &= K_0^2 \\ K_x^2 + K_y^2 - \alpha_x^2 &= K_0^2 \\ K_0^2 &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.5-16)$$

各区的横向场分量可由式 (3.2-13) 求得。

由 $|x|=a$, $|y|=b$, $|z|=l/2$ 处边界条件, 可求得如下特征方程,

$$\left. \begin{aligned} K_x a &= \frac{m\pi}{2} - \arctg \frac{K_x}{\alpha_x} \quad (m=1, 2, \dots) \\ K_y b &= \frac{n\pi}{2} - \arctg \frac{K_y}{\alpha_y} \quad (n=1, 2, \dots) \\ \beta l &= p\pi + 2\arctg \frac{\alpha_z}{\beta} \quad (p=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (6.5-17)$$

由式 (6.5-16) 和 (6.5-17) 可解得 K_x 、 K_y 和 β , 从而可求得谐振频率

$$f_0 = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + \beta^2} \quad (6.5-18)$$

矩形介质谐振器的TE模式用 $TE_{m,n,b+p}$ 表示。其最低振荡模式为 TE_{110} 模, 其场分布如图 6.5-9 所示。

(2) 非理想磁壁法

也可以用上述非理想磁壁法来求解矩形介质谐振器的谐振频率。图 6.5-10 表示用此方法求得的 TE_{110} 模谐振频率曲线^[7]。

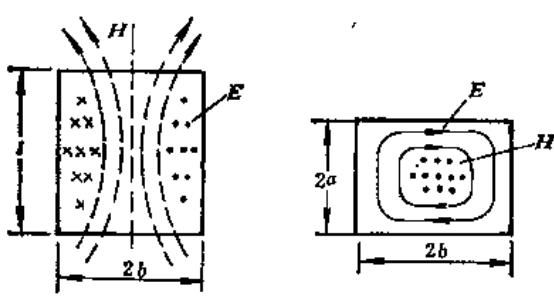


图 6.5-9 矩形介质谐振器
 TE_{110} 模场分布

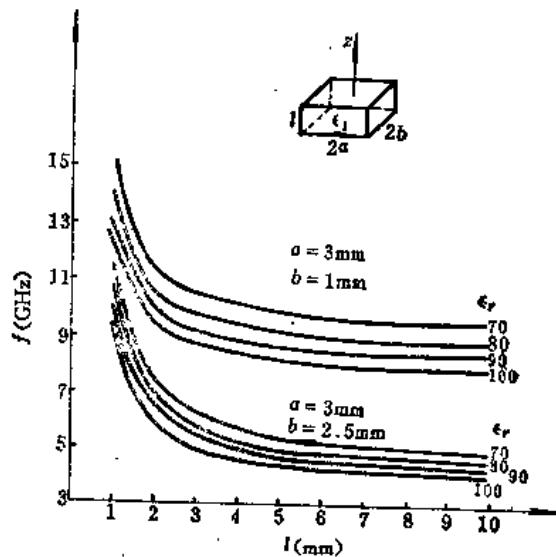


图 6.5-10 矩形介质谐振器 TE_{110}
模谐振频率曲线

3. 屏蔽的介质谐振器

上面分析的是处于自由空间的孤立介质谐振器, 但实际应用的介质谐振器都是放在波导中或微带基片上。在微带电路中的介质谐振器, 上面还有金属屏蔽板(盒盖), 基片下面还有接地板。如果金属板(盖板和接地板)与介质谐振器靠得很近, 则谐振频率将产生偏移, 谐振器的 Q 值将降低。

屏蔽介质谐振器也可以用磁壁波导模型法、介质波导模型法、非理想磁壁法、变分

法等进行分析。如果金属板离介质谐振器比较远，其影响一般可以忽略。

下面我们以介质波导模型法为例来讨论屏蔽圆柱介质谐振器 TE 模式谐振频率的求解方法。

图 6.5-11(a) 表示置于微带电路中的圆柱形介质谐振器的截面图，图 (b) 为其分区图。图中 $\epsilon_r \gg \epsilon_s$, $\epsilon_r \gg \epsilon_3$, $\epsilon_3 = 1$ 。阴影区⑤、⑥中的场忽略不计。我们只讨论 $TE_{0,n,s+p}$ 模式。其在各区域中的 H_z 分量为：

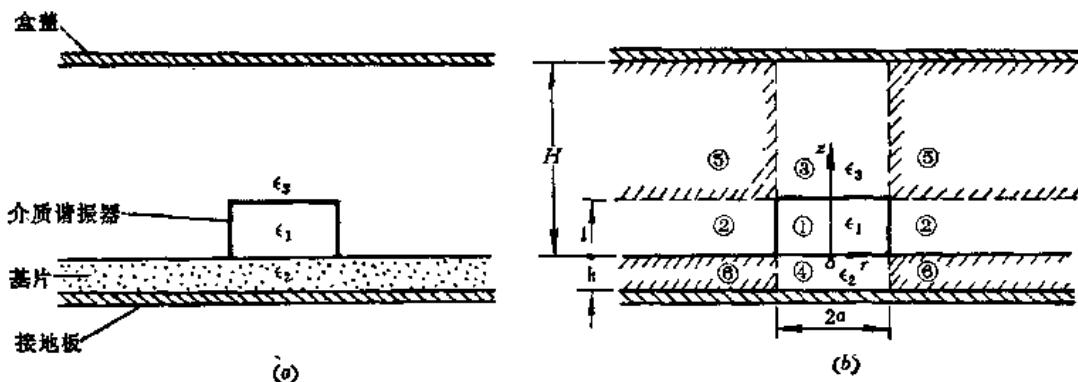


图 6.5-11 屏蔽圆柱介质谐振器及其分区

$$\left. \begin{aligned} H_{z_1} &= A_1 J_0(K_{\epsilon_1} r) \sin(\beta z + \theta) \\ H_{z_2} &= A_2 K_0(K_{\epsilon_2} r) \sin(\beta z + \theta) \\ H_{z_3} &= A_3 J_0(K_{\epsilon_1} r) \sin \alpha_3 (H - z) \\ H_{z_4} &= A_4 J_0(K_{\epsilon_1} r) \sin \alpha_4 (z + h) \end{aligned} \right\} \quad (6.5-19)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 &= K_0^2 \epsilon_1 - K_{\epsilon_1}^2 = K_0^2 + K_{\epsilon_2}^2 \\ \alpha_3^2 &= K_{\epsilon_1}^2 - K_0^2 \\ \alpha_4^2 &= K_{\epsilon_1}^2 - K_0^2 \epsilon_2 \\ K_0^2 &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.5-20)$$

$J_0(K_{\epsilon_1} r)$ 和 $K_0(K_{\epsilon_2} r)$ 分别为零阶贝塞尔函数和第二类变态贝塞尔函数； A_1, A_2, A_3, A_4 和 θ 是待定常数。已知 H_z 后，各区中的横向场分量可由式 (3.3-1) 求得。对于 $TE_{0,n,s+p}$ 模式，只有 H_z, H_r 和 E_ϕ 三个场分量。

由 $r = a$ 处 H_z, E_ϕ 连续条件，可以得到

$$\frac{J'_0(u)}{u J_0(u)} + \frac{K'_0(w)}{w K_0(w)} = 0 \quad (6.5-21)$$

式中， $u = K_{\epsilon_1} a$, $w = K_{\epsilon_2} a$ 。又由 $z = l$ 处 H_r, E_ϕ 连续条件，可以得到

$$\beta \operatorname{ctg}(\beta l + \theta) = \alpha_3 \operatorname{cth} \alpha_3 (H - l)$$

或者

$$\beta l + \theta - \frac{\pi}{2} = p\pi + \operatorname{arctg} \left[\frac{\alpha_3}{\beta} \operatorname{cth} \alpha_3 (H - l) \right] \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.5-22)$$

由 $z = 0$ 处 H_r, E_ϕ 连续条件则可得

$$\beta \operatorname{ctg} \theta = \alpha_4 \operatorname{cth} \alpha_4 h$$

或者

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\alpha_4}{\beta} \operatorname{cth} \alpha_4 h \right) \quad (6.5-23)$$

由式 (6.5-22) 和 (6.5-23) 得到

$$\beta l = p\pi + \operatorname{arctg} \left[\frac{\alpha_3}{\beta} \operatorname{cth} \alpha_3 (H-l) \right] + \operatorname{arctg} \left(\frac{\alpha_4}{\beta} \operatorname{cth} h \right) \quad (6.5-24)$$

由式 (6.5-20)、(6.5-21) 和 (6.5-24) 可求得 K_{ϵ_1} 、 β ，于是谐振频率可由下式求得：

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{K_{\epsilon_1}^2 + \beta^2} \quad (6.5-25)$$

式中 c 为光速。由式 (6.5-24) 可以看出，谐振频率将与盒盖到介质谐振器的距离 H 有关。调节此距离可调整屏蔽介质谐振器的谐振频率。图 6.5-12 示出用非理想磁壁法求得的置于微带基片上的屏蔽圆柱形介质谐振器 TE₀₁₀ 模的谐振频率与距离 $(H-l)$ 的关系曲线。

置于微带电路中的介质谐振器的 Q 值将由于靠近金属导体而降低。因此，在不过份影响微带电路性能的前提下，微带基片的厚度应适当选厚一点。例如用 TiO_2 单晶做介质谐振器构成集成的 10cm、5 cm 和 3 cm 波段窄带带通滤波器时，基片厚度可分别取 2 mm、1.2 mm 和 0.6~0.8 mm。

孤立介质谐振器的无载 Q 值取决于介质材料的 Q 值。对于相对介电常数为 100 左右或者更高的介质谐振器，其无载 Q 值可用下式近似估算：

$$Q_0 \approx \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \quad (6.5-26)$$

式中 $\operatorname{tg} \delta$ 为介质材料的损耗正切。介质谐振器常用材料的 $\operatorname{tg} \delta$ 典型值为 0.0001~0.0002，则 Q_0 值约为 5000~10000。

置于波导中或微带基片上的介质谐振器，由于金属板上将产生传导电流引起导体损耗，所以介质谐振器的 Q 值将降低。设由传导电流引起损耗的 Q 值为 Q_c ，介质损耗的 Q 值为 Q_s ，则介质谐振器总的 Q 值为

$$Q_r = \frac{Q_c Q_s}{Q_c + Q_s} \quad (6.5-27)$$

6.6 非传输线型谐振腔

在微波电子器件或其它的应用中，常需采用形状特殊的谐振腔。它们不是简单地由微波传输线段所构成。称之为非传输线型谐振腔。最常见的是具有缩短部分的波导谐振

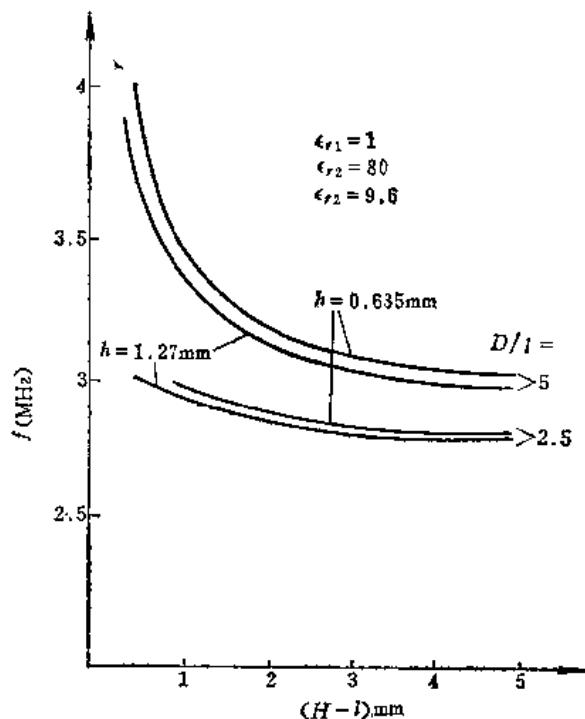


图 6.5-12 不同基片厚度的屏蔽圆柱形介质谐振器 TE₀₁₀ 模的谐振频率曲线

腔、环形谐振腔、径向线腔等。这种腔一般都有明显的电场和磁场集中区域，因此可以用准静态方法近似计算其等效电容和等效电感，从而确定谐振腔的谐振波长。下面我们将以环形谐振腔为例来讨论这种腔的计算方法。

1. 环形谐振腔

环形谐振腔又称重入式谐振腔，如图6.6-1(a)所示。如果 $d \ll l$, $a, b, l \ll \lambda$ 时，则可以认为腔中电场基本上集中于中间的缩短部分（或称窄缝部分），而磁场基本上集中于环形部分，如图6.6-1(b)所示。因此可以按照静电场方法来计算缩短部分的电容，按照恒定电流磁场方法来计算环形部分的电感，从而确定谐振波长。

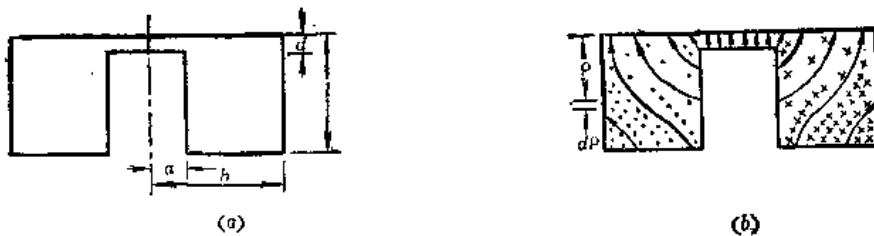


图6.6-1 矩形截面环形腔及其场分布

在一级近似下，缩短部分可看成平板电容器，其电容为

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{\pi a^2}{d} \quad (6.6-1)$$

其环形部分磁场可由安培环路定律求得。设流经内导体壁的总电流为 I ，则

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H_\varphi = I$$

由此求得

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}$$

因而环形部分的磁通为

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_a^b \frac{Il}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

因此，环形部分电感为

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (6.6-2)$$

于是环形谐振腔的谐振波长为

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{LC} = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 l}{2d} \ln \frac{b}{a}} \quad (6.6-3)$$

上述计算忽略了缩短部分的边缘场的影响，即假定腔内电场全部均匀分布在 $r \leq a$ 的窄缝区域内。显然这是与实际场分布情况不完全符合的。实际上在环形腔内 $r > a$ 的环形区域也有一部分电场，呈圆弧形状，如图6.6-1所示。我们把这一部分电场看成窄缝的边缘场。考虑到这部分边缘场，则需对式(6.6-1)所示电容进行修正。

我们近似假设边缘电力线为圆弧形状，并假设窄缝上下壁之间的电压为 U ，如图6.6-1(b)所示，在离边缘点距离为 ρ 的所有点上，电场强度与电压的关系为

$$U = \int_l Edl = E \cdot \frac{2\pi\rho}{4} = \frac{\pi\rho E}{2}$$

由此可得

$$E = \frac{2U}{\pi\rho}$$

而距边缘为 ρ 的腔内壁上面电荷密度为

$$\sigma = D = \epsilon_0 E = \frac{2\epsilon_0 U}{\pi\rho}$$

则在环形空腔内侧表面上（即 $r = a$ 的腔壁上）总的电荷为

$$Q = \int_d^{b-a} d\rho \int_0^{2\pi} \sigma ad\varphi = \int_d^{b-a} \sigma 2\pi ad\rho = 4\epsilon_0 a U \ln \frac{b-a}{d}$$

$$\approx 4\epsilon_0 a U \ln \frac{l}{d}$$

此边缘电场所决定的电容，即边缘电容，则求得为

$$C_1 = \frac{Q}{U} = 4a\epsilon_0 \ln \frac{l}{d} \quad (6.6-4)$$

总的电容应为

$$C = C_0 + C_1 = \epsilon_0 \pi \frac{a^2}{d} + 4a\epsilon_0 \ln \frac{l}{d} \quad (6.6-5)$$

因此得到修正后的谐振波长为

$$\lambda_0 = 2\pi \sqrt{\left(\frac{a^2}{d} + \frac{a}{\pi} \ln \frac{l}{d} \right) \frac{l}{2} \ln \frac{b}{a}} \quad (6.6-6)$$

2. 同轴线环形腔

同轴线环形腔如图6.6-2(a)所示。它实际上是一种电容负载式同轴线腔。这种腔的长度可以在很大范围内调节，如果用这种腔做振荡器的话，则可以获得宽频带的微波振荡功率。这种腔不与外部空间直接连接，因而工作稳定，腔体清洁。常用于微波三极管、速调管和固态源中作振荡腔。

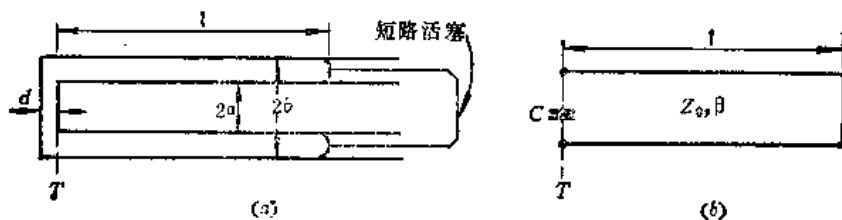


图6.6-2 同轴线环形腔及其等效电路

这种腔可以看成由缩短部分电容和一段短路同轴线组成。其等效电路如图6.6-2(b)所示。分析时应将集总参数电路和分布参数电路结合起来应用。如图6.6-2(b)所示，当谐振时应有

$$Z_0 \operatorname{tg} \beta l = \frac{1}{\omega C} \quad (6.6-7)$$

式中 Z_0 为同轴线的特性阻抗,

$$Z_0 = 60 \ln \frac{b}{a}$$

代入式 (6.6-7), 可以得到

$$\frac{\operatorname{ctg} \beta l}{\beta l} = \left[\frac{60 c}{l} \ln \frac{b}{a} \right] C \quad (6.6-8)$$

式中 c 为光速。由式 (6.6-8) 可以计算同轴线环形腔。式 (6.6-8) 为一超越方程, 可用图解法计算。图 6.6-3 画出了 $\operatorname{ctg} \beta l / \beta l$ 与 βl 之间的关系曲线。

由此曲线可由已知的 $\operatorname{ctg} \beta l$ 值查得 βl 值, 从而求得谐振波长或谐振频率。

式 (6.6-8) 中电容 C 包括平板电容和边缘电容两部分, 即

$$C = C_0 + C_1 = \epsilon_0 \frac{\pi a^2}{d} + 4a \epsilon_0 \ln \frac{a - b}{d} \quad (6.6-9)$$

6.7 微波谐振器与外电路的耦合

上面各节我们所讨论的是孤立的谐振器及其特性。然而, 一个孤立的谐振器是没有任何实用价值的。实际应用的微波谐振器总是要通过一个或几个端口与外电路连接, 以便进行能量变换。谐振器与外电路相连的端口部分就叫做耦合结构。

谐振器与外电路的耦合方式随传输线和谐振器的结构而异。常用的耦合方式有: ①直接耦合; ②探针耦合; ③环耦合; ④孔耦合。

直接耦合常见于微波滤波器中, 如图 6.7-1 所示。图 (a) 是通过微带线间隙电容进行耦合, 图 (b) 是通过波导中的膜片进行耦合。在这种直接耦合结构中, 电磁波经传输线耦合到谐振器的过程中, 不会因耦合结构而改变模式, 耦合结构只起变换器作用, 可用一个变换器来等效。

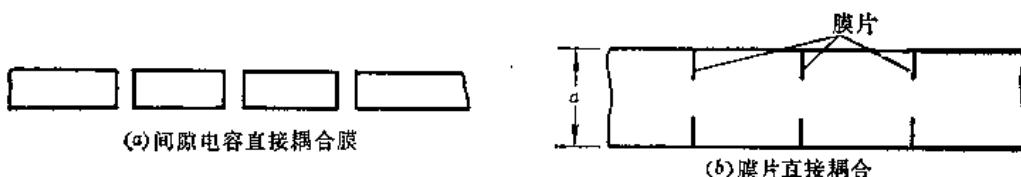


图 6.7-1 谐振器与传输线的直接耦合

探针耦合和环耦合常用于谐振器与同轴线之间的耦合, 如图 6.7-2 所示。由于耦合结构很小, 可以认为探针或环处的电场或磁场是均匀的。图 (a) 所示探针在电场作用下

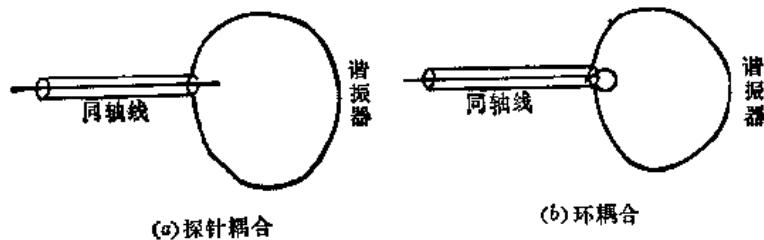


图 6.7-2 谐振器与同轴线的耦合

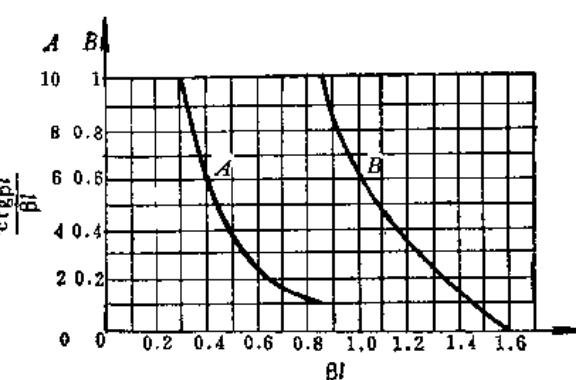


图 6.6-3 同轴线环形腔的计算曲线

成为一个电偶极子，通过电偶极子电矩的作用，使谐振器与同轴线相耦合，故探针耦合又称为电耦合。图(b)所示耦合环在磁场作用下成为一个磁偶极子，通过其磁矩的作用，使谐振器与同轴线耦合起来。故这种环耦合又称为磁耦合。

孔耦合常用于谐振器与波导之间的耦合，如图6.7-3所示。

图(a)的耦合为磁耦合；图(b)的耦合孔很小的话，也主要是磁耦合；图(c)的耦合也是磁耦合。

可见谐振器与波导之间的孔耦合主要是磁场耦合，因为在孔处波导壁附近磁场比较强，而小孔中的模式主要是 TM_{01} 模。

微波谐振器与外电路耦合以后，谐振器的特性将与孤立的谐振器有所不同，外电路要通过耦合结构对谐振器的特性产生影响。其影响有二：一是要在谐振器中引入一个电抗，使谐振器失谐，即使谐振频率改变；另一是在谐振器中引入一个电阻，使谐振器的能量损耗增大，从而使其 Q 值降低。

容易理解，与外电路耦合的谐振器，其功率损耗包括谐振器本身的损耗 P_s 和外电路负载上的损耗 P_e 两部分，即

$$P_L = P_s + P_e$$

有负载时谐振器的 Q 值称为有载 Q 值，以 Q_L 表示，则根据定义

$$Q_L = \omega_0 \frac{W}{P_s + P_e}$$

或者

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{P_s + P_e}{\omega_0 W} = \frac{P_s}{\omega_0 W} + \frac{P_e}{\omega_0 W} = \frac{1}{Q_s} + \frac{1}{Q_e} \quad (6.7-1)$$

式中 Q_e 称为外部 Q 值。

外部 Q_e 值表示外电路（或负载）对谐振器的影响，是谐振器与外电路之间耦合的量度，与耦合结构有关。改变耦合， Q_s 不变， Q_e 却随之改变。定义 Q_s 与 Q_e 之比值为耦合系数 β ，即

$$\beta = \frac{Q_s}{Q_e} \quad (6.7-2)$$

显然， Q_e 越大， β 越小，表示耦合越松；反之， Q_e 越小， β 越大，表示耦合越紧。这样，根据所要求的 Q_e 值（或 β 值）可设计所需耦合结构。

有载 Q 值也可用耦合系数表示为：

$$Q_L = \frac{Q_s Q_e}{Q_s + Q_e} = \frac{Q_s}{1 + \beta} \quad (6.7-3)$$

如果谐振器有 N 个匹配的耦合端口，则谐振器的有载 Q 值为

$$Q_L = \frac{Q_s}{1 + \sum_{i=1}^N \beta_i} \quad (6.7-4)$$

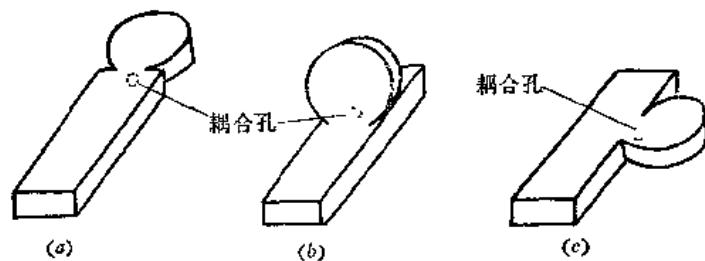


图6.7-3 谐振器与波导的耦合

(a) 波导终端的孔耦合；(b) 波导宽边的孔耦合；
(c) 波导窄边的孔耦合。

6.8 谐振器的等效电路

如上所述，实用的微波谐振器总是具有输入输出耦合装置的复杂的谐振系统，其边界条件比较复杂，要用场的方法严格分析是相当困难的，甚至无法确定其基本参数 Q 、 λ_0 、 G_0 ，而从工程应用角度来考虑，微波谐振器在微波电路中总是作为振荡回路使用的，我们最感兴趣的是它对外电路所呈现的谐振特性及其它外部特性。

由前面的分析知，微波谐振器与集总 LC 回路都是一种储能元件，两者的物理本质是相似的。因此，在设计包含微波谐振器的微波电路时，我们自然希望能将谐振器等效成集总 LC 回路。这样，对于任何复杂的谐振器，就可以运用等效电路方法，并可用测量方法来确定其基本参数，从而分析谐振器的特性。

1. 传输线谐振器的等效电路

由一段短路或开路的传输线构成的传输线谐振器常用于各种微波电路（如微波滤波器）中，并常需用等效电路来表示其谐振特性。

(1) 短路线谐振器

如图6.8-1所示终端短路线谐振器的输入阻抗为

$$Z_{in}^{sc} = Z_0 \operatorname{th}(\alpha + j\beta) l = Z_0 \cdot \frac{\operatorname{th}\alpha l + j \operatorname{tg} \theta}{1 + j \operatorname{tg} \theta \operatorname{th}\alpha l} \quad (6.8-1)$$

式中 $\theta = \beta l$ 为传输线的电长度。由式(6.8-1)可见，产生谐振有两种情况：一是当 $\theta = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$)，即 $l = n\lambda_{g0}/2$ 时， Z_{in}^{sc} 的绝对值最小，产生串联谐振；另一是当 $\theta = (2n - 1)\pi/2$ ($n = 1, 2, \dots$)，即 $l = (2n - 1)\lambda_{g0}/4$ 时， Z_{in}^{sc} 的绝对值最大，产生并联谐振。

对于如图6.8-2(a)所示 $n\lambda_{g0}/2$ 串联谐振器，等效电路如图6.8-2(b)所示。

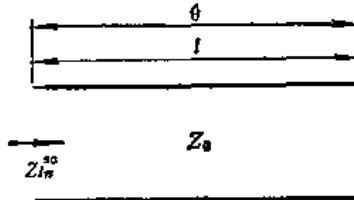


图6.8-1 短路线谐振器

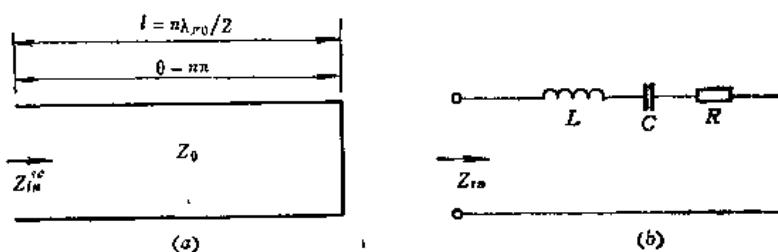


图6.8-2 短路线串联谐振器及其等效电路

假定损耗很小，以致 $\alpha l \ll 1$ ，则 $\operatorname{th}\alpha l \approx \alpha l$ ，而在 ω_0 附近， $\beta l = 2\pi fl/c = 2\pi(f_0 + \Delta f)l/c = n\pi + n\pi\Delta\omega/\omega_0$ ，于是 $\operatorname{tg}\beta l = \operatorname{tg} n\left(\pi + \pi\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \approx n\pi\Delta\omega/\omega_0$ 。故由式(6.8-1)得到

$$Z_{in}^{sc} = Z_0 \cdot \frac{\alpha l + j n \pi \Delta \omega / \omega_0}{1 + j \alpha l n \pi \Delta \omega / \omega_0} \approx Z_0 \left(\alpha l + j n \pi \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \right) = R_{in}^{sc} + j X_{in}^{sc} \quad (6.8-2)$$

而由图6.8-2(b),

$$Z_{in} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \approx R + j 2L(\omega - \omega_0) = R + j 2L\Delta\omega \quad (6.8-3)$$

比较式(6.8-2)和(6.8-3)可得

$$\left. \begin{aligned} R_{in} &= Z_0 \alpha l = \frac{n Z_0 \alpha \lambda_{eo}}{2} \\ X_{in} &= Z_0 \operatorname{tg} \theta \end{aligned} \right\} \quad (6.8-4)$$

又由式(6.8-3)可得谐振频率附近的电抗斜率为

$$\left. \frac{dX}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \approx 2L$$

或者

$$L = \frac{1}{2} \left. \frac{dX}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (6.8-5)$$

则电抗斜率参量为

$$\mathcal{R} = \omega_0 L = \frac{\omega_0}{2} \left. \frac{dX}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (6.8-6)$$

以式(6.8-4)代入可得

$$\mathcal{R} = \frac{n\pi Z_0}{2} \left(\frac{\lambda_{eo}}{\lambda_0} \right)^2 \quad (6.8-7)$$

式中 λ_0 是自由空间波长。于是得到

$$Z_{in}^{\text{eq}} = R + j 2L\Delta\omega = R + j \mathcal{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (6.8-8)$$

此串联回路的无载 Q_0 值按定义可得到

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\pi}{\alpha} \frac{\lambda_{eo}}{\lambda_0^2} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} \quad (6.8-9)$$

这样, 谐振器的 Q_0 值便可通过测量方法来确定。

对于 $(2n-1)\lambda_{eo}/4$ 短路线并联谐振器, 利用导纳来进行分析, 类似地可以得到其等效电路及其参数表示式, 如表6.8-1所示。表中 G 为电导, \mathcal{B} 为电纳斜率参量。

利用对偶关系可得到终端开路线半波长并联谐振器和 $\lambda/4$ 串联谐振器的等效电路及其电路参数, 如表6.8-1所示。

由上面分析可以看出, 集总 LC 回路在谐振频率附近很窄频带内具有如下特点:

① 电导 G (或电阻 R)不随频率变化, 为一常数, 即在谐振频率附近, 电导 G (或电阻 R)恒定不变;

② 电纳 $B(\omega)$ (或电抗 $X(\omega)$)与频率成线性关系, 且 $\frac{dB}{d\omega}$ (或 $\frac{dX}{d\omega}$)>0;

③ 在谐振频率 ω_0 , 电纳 B (或电抗 X)等于零, 即在谐振频率附近窄频带内, 电纳(或电抗)通过零点过渡。

如果一个微波谐振器或其它微波元件, 在某一窄频带内也具有上述特点, 则它可用一集总 LC 回路来等效。上述频率特性也就是谐振器能否等效为 LC 回路的条件。

由上面的分析还可以看出, 在建立了谐振器的 LC 等效回路之后, 两者之间的等效关系便是:

表6.8-1 传输线谐振器等效电路及其电路参量

名 称	谐振器及其等效电路	电 路 参 量
半波长短路线串联谐振器	<p>$I = \frac{n\lambda_{g0}}{2}$</p> <p>$Z_{in}^{sc} \rightarrow Z_0$</p> <p>$T$</p> <p>$\rightarrow L \quad C \quad R$</p> <p>$Z_{in}$</p> <p>$T$</p>	$R = \frac{n}{2} Z_0 \alpha \lambda_{g0}$ $\mathcal{R} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{n\pi Z_0}{2} \left(\frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0} \right)^2$ $Z_{in} = R + j\mathcal{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ $Q_0 = \frac{\mathcal{R}}{R} \approx \frac{\pi \lambda_{g0}}{\alpha \lambda_0^2} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$
半波长开路线并联谐振器	<p>$I = \frac{n\lambda_{g0}}{2}$</p> <p>$Y_{in}^{oc} \rightarrow Y_0$</p> <p>$T$</p> <p>$\rightarrow Y_{in} \quad G \quad C$</p> <p>$T$</p>	$G = -\frac{n}{2} Y_0 \alpha \lambda_{g0}$ $\mathcal{B} = \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \frac{n\pi Y_0}{2} \left(\frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0} \right)^2$ $Y_{in} = G + j\mathcal{B} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ $Q_0 = \frac{\mathcal{B}}{G} \approx \frac{\pi \lambda_{g0}}{\alpha \lambda_0^2} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$
$\frac{1}{4}$ 波长短路线并联谐振器	<p>$I = \frac{(2n-1)\lambda_{g0}}{4}$</p> <p>$Y_{in}^{sc} \rightarrow Y_0$</p> <p>$T$</p> <p>$\rightarrow Y_{in} \quad G \quad C$</p> <p>$T$</p>	$G = \frac{2n-1}{4} Y_0 \alpha \lambda_{g0}$ $\mathcal{B} = \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \frac{2n-1}{4} \pi Y_0 \left(\frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0} \right)^2$ $Y_{in} = G + j\mathcal{B} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ $Q_0 = \frac{\mathcal{B}}{G} \approx \frac{\pi \lambda_{g0}}{\alpha \lambda_0^2} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$
$\frac{1}{4}$ 波长开路线串联谐振器	<p>$I = \frac{(2n-1)\lambda_{g0}}{4}$</p> <p>$Z_{in}^{oc} \rightarrow Z_0$</p> <p>$T$</p> <p>$\rightarrow L \quad C \quad R$</p> <p>$Z_{in} \rightarrow$</p> <p>$T$</p>	$R = \frac{2n-1}{4} Z_0 \alpha \lambda_{g0}$ $\mathcal{R} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{2n-1}{4} \pi Z_0 \left(\frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0} \right)^2$ $Z_{in} = R + j\mathcal{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ $Q_0 = \frac{\mathcal{R}}{R} \approx \frac{\pi \lambda_{g0}}{\alpha \lambda_0^2} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$

① 等效电路的电导 G (或电阻 R) 应等于谐振器在谐振时的输入导纳 (或输入阻抗);

② 等效电路的电纳斜率参量 (或电抗斜率参量) 应等于谐振器的电纳斜率参量

(或电抗斜率参量)。

根据此等效关系即可求得谐振器的等效电路参量 L 、 C 、 G (或 R) 与谐振器特性参数之间的关系式，并据此通过测量方法来确定谐振器的特性参数。例如对于并联谐振器，

$$Q_0 = \frac{\mathcal{B}}{G} = \frac{\omega_0}{2G} \left. \frac{dB}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{\lambda_0}{2G} \left. \frac{dB}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} \quad (6.8-10)$$

对于串联谐振器，

$$Q_0 = \frac{\mathcal{C}}{R} = \frac{\omega_0}{2R} \left. \frac{dX}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{\lambda_0}{2R} \left. \frac{dX}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} \quad (6.8-11)$$

需要指出的是，与集总 LC 回路不同，谐振器的等效电路除与工作模式有关外，还与参考面的选择有关。例如当谐振器作为传输线的终端元件使用时，我们总是选择耦合结构输出端口的参考面 T_2 作为理想谐振器输入端口的参考面，耦合结构输入端口的参考面 T_1 作为传输线输出端口的参考面，如图 6.8-3 所示。通常参考面 T_1 是可接触的，而参考面 T_2 是不可接触的。当谐振器失谐时，如果参考面 T_1 是传输线上电压的波节点，则称 T_1 为失谐短路面；如果 T_1 是电压的波腹点，则称 T_1 为失谐开路面。参考面 T_2 是人为的，不能用测量方法得出；但可以想象，若 T_2 是失谐短路面，则谐振器是并联谐振器，若 T_2 是失谐开路面，则谐振器是串联谐振器。

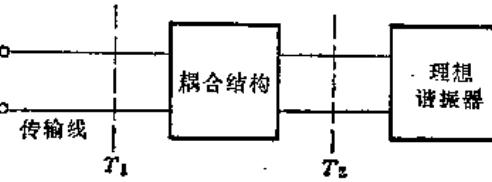


图 6.8-3 耦合谐振器的参考面
面，如果 T_1 是电压的波腹点，则称 T_1 为失谐开路面。参考面 T_2 是人为的，不能用测量方法得出；但可以想象，若 T_2 是失谐短路面，则谐振器是并联谐振器，若 T_2 是失谐开路面，则谐振器是串联谐振器。

2. 耦合谐振器的等效电路

(1) 谐振器与环的耦合

图 6.8-4(a) 表示谐振器通过环与外电路耦合，在谐振器的某谐振频率 f_0 附近的等效电路如图 6.8-4(b) 所示。由图可得

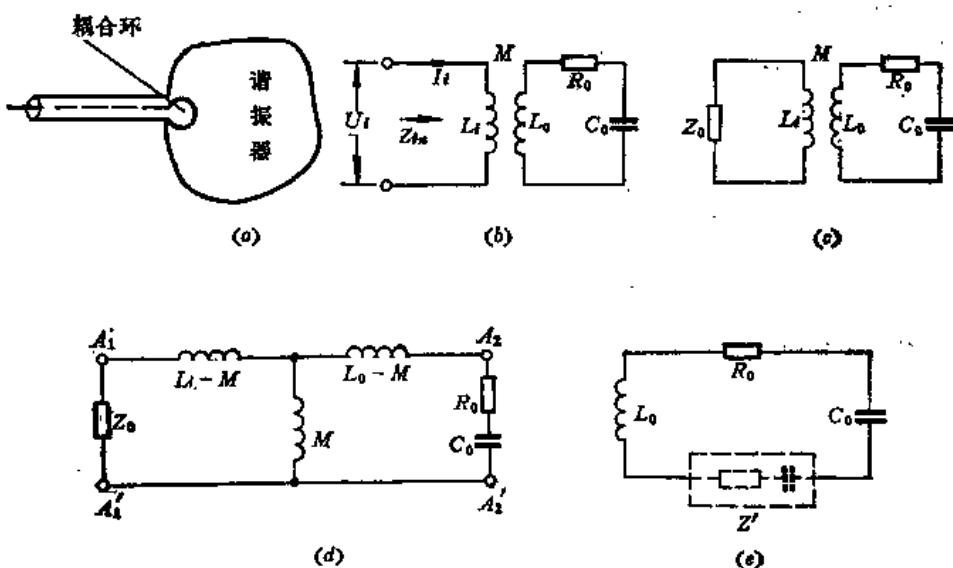


图 6.8-4 谐振器与环耦合的等效电路

(a) 谐振器通过环的耦合；(b) 等效电路；(c) 外电路以特性阻抗 Z_0 端接的等效电路；
(d) 将耦合线圈作为自感的等效电路；(e) 简化等效电路。

$$\left. \begin{aligned} U_i &= j\omega L_i I_i - j\omega M I_0 \\ j\omega M I_i &= \left(R_0 + j\omega L_0 + \frac{1}{j\omega C_0} \right) I_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.8-12)$$

式中, L_i 表示环的电感, R_0 、 L_0 、 C_0 分别表示谐振器在 f_0 时的等效电阻、电感、电容; M 表示环与谐振器耦合的互感。由式 (6.8-12) 消去 I_0 , 可得到谐振器的输入阻抗为

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{U_i}{I_i} = j\omega L_i + \frac{\omega^2 M^2}{R_0 + j\left(\omega L_0 - \frac{1}{\omega C_0}\right)} \\ &= j\omega L_i - j\omega \frac{M^2}{L_0} + \frac{j\omega \omega_0^2 \frac{M^2}{L_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega \omega_0}{Q_0}} - \frac{\omega^2 \omega_0 \frac{M^2}{L_0 Q_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega \omega_0}{Q_0}} \end{aligned} \quad (6.8-13)$$

式中, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ 为谐振角频率, $Q_0 = \frac{\omega_0 L_0}{R_0}$ 为谐振器的无载 Q 值。对于耦合松而 Q_0 高的情况, 式 (6.8-13) 中第二项和第四项可以忽略, 于是近似得到

$$Z_{in} \approx j\omega L_i + \frac{j\omega \omega_0^2 \frac{M^2}{L_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega \omega_0}{Q_0}} \quad (6.8-14)$$

在谐振频率附近, $\omega_0 + \omega \approx 2\omega$, 因此得到

$$Z_{in} \approx j\omega L_i + \frac{j\omega_0 \frac{M^2}{L_0}}{\frac{2(\omega_0 - \omega)}{\omega_0} + j\frac{1}{Q_0}} \quad (6.8-15)$$

当外电路以其特性阻抗 Z_0 端接时, 可得到图 6.8-4(c) 所示等效电路, 如将耦合环以自感表示则得到图 6.8-4(d) 所示等效电路, 最后可得到图 6.8-4(e) 所示简化等效电路, 图中 Z' 为从谐振器向外电路看的阻抗。比较图 (d) 和 (e) 得到

$$Z' + j\omega L_0 = j\omega(L_0 - M) + \frac{j\omega M(Z_0 + j\omega(L_i - M))}{j\omega M + Z_0 + j\omega(L_i - M)}$$

即得到

$$Z' = \frac{Z_0 \omega_0^2 M^2}{Z_0^2 + \omega_0^2 L_i^2} - j \frac{\omega L_i \omega_0^2 M^2}{Z_0^2 + \omega_0^2 L_i^2} \quad (6.8-16)$$

因此, 谐振时谐振器的有载 Q 值为

$$Q_L = \frac{\omega_0 L_0}{R_0 + \frac{Z_0 \omega_0^2 M^2}{Z_0^2 + \omega_0^2 L_i^2}} \quad (6.8-17)$$

或者

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{R_0 + \frac{Z_0 \omega_0^2 M^2}{Z_0^2 + \omega_0^2 L_i^2}}{\omega_0 L_0} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_e} \quad (6.8-18)$$

式中

$$Q_e = \frac{Z_0^2 + \omega_0^2 L_i^2}{Z_0 \omega_0 \frac{M^2}{L_0^2}} \quad (6.8-19)$$

为外部 Q 值。由式 (6.8-18) 可以看出，为了提高 Q_L 值，可将耦合变松（即使 M^2/L_0^2 变小）。为此环应做得小一点。

另一方面，谐振器与外电路耦合时，如图 (e) 所示，当谐振时，谐振频率由下式决定：

$$\omega L_0 - \frac{1}{\omega_0 C} - \frac{\omega L_i \omega_0^2 M^2}{Z_0^2 + \omega_0^2 L_i^2} = 0 \quad (6.8-20)$$

由此可得谐振频率近似为：

$$\omega \approx \omega_0 \left[1 + \frac{\omega_0^2 L_i \frac{M^2}{L_0^2}}{2(Z_0^2 + \omega_0^2 L_i^2)} \right] \quad (6.8-21)$$

可见谐振器通过环与外电路耦合后的谐振频率比自由谐振频率 ω_0 稍有增大。

(2) 谐振器与波导的耦合

考虑如图 6.8-5(a) 所示通过窗孔 W 与波导耦合的波导谐振器，波导内部的窗孔一般起并联电容作用，可用电感 L_w 来等效，当谐振器长度 l 等于 $\lambda g_0/2$ 整数倍时，可用串联回路来等效，于是包含窗的 AB 间谐振器部分的等效电路如图 6.8-5(b) 所示。由表 6.8-1 可得：

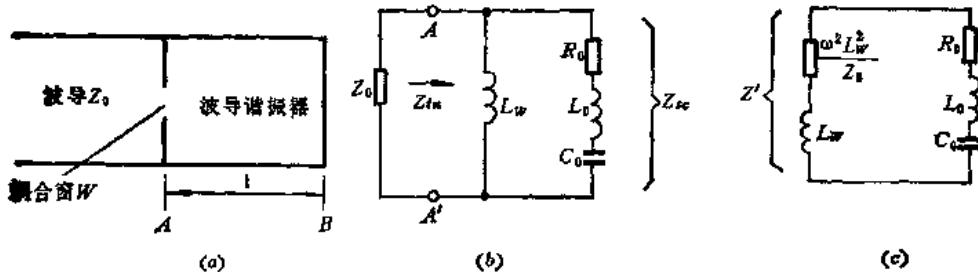


图 6.8-5 谐振器与波导的耦合

(a) 谐振腔与波导的耦合；(b) 耦合谐振器的等效电路；(c) 简化等效电路。

$$\begin{cases} R_0 \approx Z_0 \alpha l \\ L_0 \approx \frac{n\pi Z_0}{2} \left(\frac{\lambda g_0}{\lambda_0} \right)^2 \frac{1}{\omega_0} \\ C_0 \approx \frac{2}{Z_0 n \pi} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda g_0} \right)^2 \frac{1}{\omega_0} \end{cases} \quad (6.8-22)$$

式中， Z_0 和 α 为波导的特性阻抗和衰减因数； λ_{g0} 和 λ_0 分别为谐振器谐振时的波导波长和谐振波长， ω_0 为谐振角频率。

由图 (b) 可见， L_w 和外电路 Z_0 的并联阻抗为

$$Z' = \frac{j\omega L_w Z_0}{Z_0 + j\omega L_w} = \frac{Z_0 \omega^2 L_w^2}{Z_0^2 + \omega^2 L_w^2} + j \frac{Z_0^2 \omega L_w}{Z_0^2 + \omega^2 L_w^2} \quad (6.8-23)$$

假如窗孔很小，则 $\omega L_w \ll Z_0$ ，则近似得

$$Z' \approx \frac{\omega^2 L_w^2}{Z_0} + j\omega L_w \quad (6.8-24)$$

于是得到如图6.8-5(c) 所示简化等效电路。由此可得到谐振器的有载 Q_L 值为

$$Q_L = \frac{\omega_0(L_0 + L_w)}{R_0 + \frac{\omega_0^2 L_w^2}{Z_0}} \quad (6.8-25)$$

由于窗孔很小， $L_w \ll L_0$ ，则由式 (6.8-25) 得到

$$\frac{1}{Q_L} \approx \frac{R_0 + \frac{\omega_0^2 L_w^2}{Z_0}}{\omega_0 L_0} = \frac{1}{Q_0} + \frac{\omega_0 \frac{L_w^2}{L_0}}{Z_0} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_e} \quad (6.8-26)$$

式中 Q_e 为外部 Q 值。设 Y_0 为波导特性导纳，谐振时窗孔 W 的电纳为 $-B_0$ ，则

$$-B_0 = -\frac{1}{\omega_0 L_w} \quad (6.8-27)$$

因此可得

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L_0}{R_0} \approx \frac{n\pi}{2al} \left(\frac{\lambda_{x0}}{\lambda_0} \right)^2 \quad (6.8-28)$$

$$Q_e = \frac{Z_0}{\omega_0 \frac{L_w^2}{L_0}} \approx \left(\frac{B_0}{Y_0} \right)^2 \frac{n\pi}{2} \left(\frac{\lambda_{x0}}{\lambda_0} \right)^2 \quad (6.8-29)$$

又由图6.8-5(b) 可以看出，包含窗孔的波导谐振器的输入导纳为

$$\begin{aligned} Y_{in} &= \frac{1}{Z_{in}} = -j \frac{1}{\omega_0 L_w} + \frac{1}{Z_s} = -jB_0 + \frac{Y_0(1 + j\alpha l \operatorname{tg} \beta l)}{\alpha l + j\operatorname{tg} \beta l} \\ &\approx \frac{Y_0 \alpha l}{\operatorname{tg} \beta l} - j \left(B_0 + \frac{Y_0}{\operatorname{tg} \beta l} \right) \end{aligned} \quad (6.8-30)$$

而输入导纳 Y_{in} 与外电路 Z_0 并联，谐振时，式 (6.8-30) 中第二项应等于零，于是得到

$$\operatorname{tg} \beta l = -\frac{Y_0}{B_0} \quad (6.8-31)$$

由此式确定的长度 l 要比波导谐振器本身的谐振长度（即 $n\lambda_{x0}/2$ ）要稍短一些。

将式 (6.8-31) 代入式 (6.8-30)，得到谐振时的输入导纳为

$$\left(\frac{Y_{in}}{Y_0} \right)_{\alpha l = 0} = \alpha l \left(\frac{B_0}{Y_0} \right)^2 \quad (6.8-32)$$

当谐振器与外电路匹配时， $(Y_{in}/Y_0)_{\alpha l = 0} = 1$ ，由此得到窗孔 W 的电纳应为

$$B_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha l}} Y_0 \quad (6.8-33)$$

据此可计算耦合窗孔 W 的尺寸。

6.9 谐振腔的微扰理论

实际使用的微波谐振器常有微小的变形或其它微小变化，例如为了微调谐振频率，常在谐振器电场集中处插入调谐金属棒；又如在谐振器电场或磁场集中处放入介质材料

样品，测量此材料的 ϵ_r 或 μ_r 。要求这种具有微小变化的谐振器的严格解是很困难的。通常求其近似解，即求这些微小变化对谐振器特性参数的影响。这便是微扰方法所要解决的问题。

通常，微扰法的问题包含两个问题：一个是未微扰的问题。这种情况下电磁场的解答一般是已知的；另一个是微扰后的问题，它一般是借助于未微扰的已知解来近似求得。容易理解，谐振器的微小变化将使其谐振频率和 Q_0 值发生变化。

谐振腔的微扰方式主要有三种：（1）腔体内的媒质发生变化；（2）腔体尺寸、形状发生变化；（3）腔壁材料发生变化。下面我们先求微波谐振腔微扰的基本公式，然后据此分别讨论腔体内介质的微扰、腔壁形状的微扰和腔壁材料的微扰。

1. 谐振腔微扰基本公式

如图6.9-1(a)所示谐振腔，微扰前的体积为 V ，内壁面积为 S ，腔内介质的介质常数为 ϵ_0, μ_0 ，腔内电场、磁场和谐振频率分别为 E_0, H_0, ω_0 ；微扰后，腔体内有一小体积 ΔV ，其介质常数为 ϵ, μ ，微扰后腔内电场、磁场和谐振频率分别为 E, H 和 ω ，如图6.9-1(b)所示。设电磁场为时谐场，则

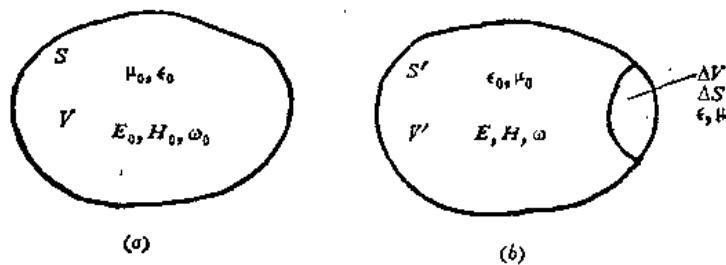


图6.9-1 微波谐振腔的微扰问题

(a) 未微扰腔；(b) 微扰后腔。

微扰前：

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times H_0 = j\omega_0 \epsilon_0 E_0 \\ \nabla \times E_0 = -j\omega_0 \mu_0 H_0 \end{array} \right\} \quad (6.9-1)$$

微扰后：

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times H = j\omega \epsilon_0 E \quad (\Delta V \text{ 外}) \\ \nabla \times H = j\omega \epsilon E \quad (\Delta V \text{ 内}) \end{array} \right\} \quad (6.9-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times E = -j\omega \mu_0 H \quad (\Delta V \text{ 外}) \\ \nabla \times E = -j\omega \mu H \quad (\Delta V \text{ 内}) \end{array} \right\} \quad (6.9-3)$$

用 E_0^* 点乘式(6.9-2)，得到

$$\left. \begin{array}{l} E_0^* \cdot \nabla \times H = j\omega \epsilon_0 E_0^* \cdot E \quad (\Delta V \text{ 外}) \\ E_0^* \cdot \nabla \times H = j\omega \epsilon E_0^* \cdot E \quad (\Delta V \text{ 内}) \end{array} \right\} \quad (6.9-4)$$

用 H_0^* 点乘式(6.9-3)，得到

$$\left. \begin{array}{l} H_0^* \cdot \nabla \times E = -j\omega \mu_0 H_0^* \cdot H \quad (\Delta V \text{ 外}) \\ H_0^* \cdot \nabla \times E = -j\omega \mu H_0^* \cdot H \quad (\Delta V \text{ 内}) \end{array} \right\} \quad (6.9-5)$$

又对式(6.9-1)分别用 E 和 H 点乘得到

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_0^* = -j\omega_0 \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0^* \\ \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_0^* = j\omega_0 \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0^* \end{array} \right\} \quad (6.9-6)$$

将 $((\mathbf{E}_0^* \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_0^*) - (\mathbf{H}_0^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_0^*))$ 对体积 V 积分, 得到

$$\begin{aligned} & \int_V [(\mathbf{E}_0^* \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_0^*) - (\mathbf{H}_0^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_0^*)] dv \\ &= \int_{V - \Delta V} [j\epsilon_0(\omega - \omega_0)\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E} + j\mu_0(\omega - \omega_0)\mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H}] dv \\ &+ \int_{\Delta V} [j(\omega\epsilon - \omega_0\epsilon_0)\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E} + j(\omega\mu - \omega_0\mu_0)\mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H}] dv \end{aligned} \quad (6.9-7)$$

应用矢量公式 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$, 可将上式左边写成

$$\begin{aligned} & \int_V [(\mathbf{E}_0^* \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_0^*) - (\mathbf{H}_0^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_0^*)] dv \\ &= - \int_V [\nabla \cdot (\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}) + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_0^*)] dv \\ &= \oint_S [(\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}) + (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_0^*)] \cdot \hat{n} ds \end{aligned} \quad (6.9-8)$$

式中 \hat{n} 为腔体内壁的单位法线矢量。因为在腔体内壁附近, $\hat{n} \times \mathbf{E} = 0$, 所以式(6.9-8)右边面积分等于零, 因此由式(6.9-7), 得到

$$\begin{aligned} & \int_{V - \Delta V} [j\epsilon_0(\omega - \omega_0)\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E} + j\mu_0(\omega - \omega_0)\mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H}] dv \\ &+ \int_{\Delta V} [j(\omega\epsilon - \omega_0\epsilon_0)\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E} + j(\omega\mu - \omega_0\mu_0)\mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H}] dv = 0 \end{aligned}$$

由于 ΔV 很小, 则对 $(V - \Delta V)$ 的体积分可近似以 V 代替, 且近似取

$$(\omega\epsilon - \omega_0\epsilon_0) \approx \omega_0(\epsilon - \epsilon_0)$$

$$(\omega\mu - \omega_0\mu_0) \approx \omega_0(\mu - \mu_0)$$

可得

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\int_{\Delta V} [(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E} + (\mu - \mu_0)\mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H}] dv}{\int_V (\epsilon_0\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E} + \mu_0\mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H}) dv} \quad (6.9-9)$$

此即微波谐振腔微扰基本公式。

2. 介质微扰

此时图6.9-1中 ΔV 为一小块介质。由于 ΔV 很小, 则可以近似认为在 ΔV 以外, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ 。于是式(6.9-9)分母变为

$$\int_V (\epsilon_0\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E} + \mu_0\mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H}) dv \approx \int_V (\epsilon_0|\mathbf{E}_0|^2 + \mu_0|\mathbf{H}_0|^2) dv = 4W$$

式中

$$W = \frac{1}{4} \int_V (\epsilon_0|\mathbf{E}_0|^2 + \mu_0|\mathbf{H}_0|^2) dv \quad (6.9-10)$$

为腔体内全部电磁场储能。因此得到

$$\begin{aligned}\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} &= -\frac{\int_{\Delta V} [(\epsilon - \epsilon_0)E_0^* \cdot E + (\mu - \mu_0)H_0^* \cdot H] dv}{4W} \\ &= -\frac{\int_{\Delta V} (\Delta\epsilon E_0^* \cdot E + \Delta\mu H_0^* \cdot H) dv}{4W}\end{aligned}\quad (6.9-11)$$

当 $\Delta\epsilon, \Delta\mu \ll 1$ 时, 则 $E \approx E_0, H \approx H_0$, 于是得到

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx -\frac{\int_{\Delta V} (\Delta\epsilon |E_0|^2 + \Delta\mu |H_0|^2) dv}{4W} \quad (6.9-12)$$

当 $\Delta\epsilon, \Delta\mu \ll 1$, 而且 ΔV 很小, 其内的 E 和 H 可认为是恒定的时, 则可得

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx -\frac{\Delta\epsilon E_0^* \cdot E \Delta V_s + \Delta\mu H_0^* \cdot H \Delta V_m}{4W} \quad (6.9-13)$$

式中, ΔV_s 是产生 $\Delta\epsilon$ 的小体积, ΔV_m 是产生 $\Delta\mu$ 的小体积。

图6.9-2表示谐振腔内常用的四种介质样品形状, 其介质内的场取一级近似为

$$E = C_e E_0, H = C_m H_0 \quad (6.9-14)$$

式中 C_e 和 C_m 为比例系数, 已标注在图6.9-2中。将式(6.9-14)代入式(6.9-13), 得到

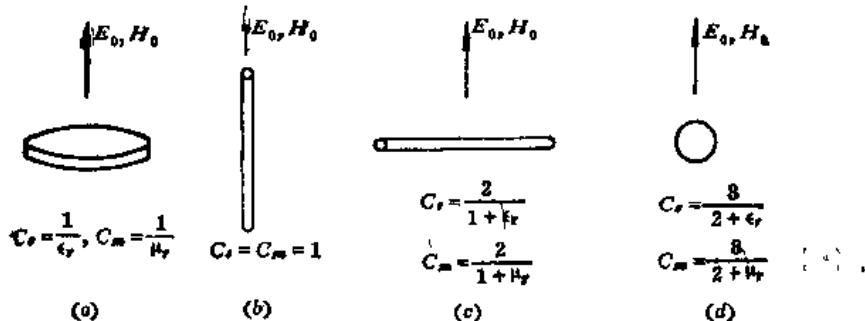


图6.9-2 四种特殊形状介质样品的内外电场

(a) 薄板; (b) 细棒; (c) 粗棒; (d) 球。

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\Delta\epsilon C_e |E_0|^2 \Delta V_s + \Delta\mu C_m |H_0|^2 \Delta V_m}{4W} \quad (6.9-15a)$$

如果微扰发生在 $H_0 = 0$ 处, 则

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\Delta\epsilon C_e |E_0|^2 \Delta V_s}{4W} \quad (6.9-15b)$$

如果微扰发生在 $E_0 = 0$ 处, 则

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\Delta\mu C_m |H_0|^2 \Delta V_m}{4W} \quad (6.9-15c)$$

3. 腔壁形状微扰

如图6.9-1所示, 设腔壁向内推进一小体积 ΔV , 其 $\epsilon \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0$, 则由式(6.9-9), 得到

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = - \frac{\int_{\Delta V} [\epsilon_0 |E_0|^2 + \mu_0 |H_0|^2] dV}{4W} = \frac{\Delta W_m - \Delta W_e}{4W} \quad (6.9-16)$$

式中 ΔV 和 ΔW_m 分别为 ΔV 中所包含的电场能量和磁场能量。

假如 ΔV 很小，则 ΔW_e 和 ΔW_m 可近似用 ΔV 乘该处的能量密度来代替，从而得到

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{(\omega_m - \omega_e) \Delta V}{4W} = C \frac{\Delta V}{V} \quad (6.9-17)$$

式中 C 为比例常数，与腔体的形状及微扰发生的位置有关。

由上面的分析可以得到结论：当腔壁内表面或其一部分朝内推入时（变化的结果是减小一部分体积 ΔV ），如果发生微扰部分的磁场较强时，则频率将升高；如果电场较强时，频率将降低。反之，腔内壁或其一部分朝外推出（变化的结果是腔体增大一部分体积 ΔV ），如果微扰发生在磁场较强处，则频率将降低；如果发生在电场较强处，则频率将升高。显然，如果微扰发生在电场（或磁场）最大，而磁场（或电场）为零处，频率变化将最大。

例 6.9-1 求 TE_{101} 模式矩形腔壁形状微扰公式。

解 对于 TE_{101} 模式，

$$\begin{aligned} E_x &= E_{101} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l} \\ H_z &= -j \frac{\lambda}{2l} \frac{E_{101}}{\eta} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{l} \\ H_x &= j \frac{\lambda}{2a} \frac{E_{101}}{\eta} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l} \end{aligned}$$

可以求得

$$4W = \frac{\epsilon_0}{4} |E_{101}|^2 V$$

假如微扰发生在电场最强处 ($x = \frac{a}{2}$, $z = l/2$)，则

$$\begin{aligned} \Delta W_e &= \frac{\epsilon_0}{2} |E_{101}|^2 \Delta V \\ \Delta W_m &= 0 \end{aligned}$$

于是得到

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -2 \frac{\Delta V}{V}$$

假如微扰发生在磁场最强处 ($z = l/2$, $x = 0$ 、 a 处)，则

$$\begin{aligned} \Delta W_m &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 |E_{101}|^2}{2 \left(1 + \frac{l^2}{a^2}\right) \Delta V} \\ \Delta W_e &= 0 \end{aligned}$$

于是得到

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{2}{1 + \left(\frac{l}{a}\right)^2} \frac{\Delta V}{V}$$

4. 腔壁材料微扰

假设未微扰腔内壁材料为理想导体，微扰后腔壁材料一部分 ΔS 的表面阻抗为 Z ，则在此 ΔS 腔壁上，电磁场应满足边界条件：

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = Z \mathbf{H} \quad (6.9-13)$$

式中 \hat{n} 为内壁的单位法线矢量。

设微扰前后的谐振频率分别为 ω_0 和 ω ，则可求得

$$\begin{aligned} \Delta\omega = \omega - \omega_0 &= j \frac{\int_{\Delta S} Z \mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H} ds}{\int_V (\epsilon_0 \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H}) dv} \\ &\approx j \frac{\int_{\Delta S} Z \mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H} ds}{4W} \end{aligned} \quad (6.9-19)$$

象低频 LC 振荡回路的品质因数一样，微波谐振器的品质因数是谐振器在自由振荡状态下保持储能 W 能力的一种量度。事实上，在时间 dt 内的能量损耗为

$$dW = -P_L dt = -\frac{1}{Q_0} \omega_0 W dt$$

由此得到储能 W 的微分方程

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega_0 W}{Q_0} \quad (6.9-20)$$

其解为

$$W = W_0 e^{-\frac{\omega_0}{Q_0} t} \quad (6.9-21)$$

式中 W_0 为 $t = 0$ 时刻腔内的储能。由此可见，由于腔体的损耗，腔体内储能将随时间按指数规律减小。由于电场强度正比于储能的平方根，而 $\omega_0 = 2\pi/T_0$ ，此处 T_0 为振荡周期，于是得到

$$E_m = E_{m0} e^{-\frac{\omega_0}{2Q_0} t} = E_{m0} e^{-\frac{\pi t}{Q_0 T_0}} \quad (6.9-22)$$

式(6.9-22)表明，在时间 $t = Q_0 T_0$ 内场强振幅将减小 $e^{-\pi} \approx 23$ 倍。可见品质因数 Q_0 决定场强振幅减小23倍所需的周期数。品质因数 Q_0 越高，谐振腔内自由振荡的能量保持的时间就越久。

而式(6.9-19)则表明，腔壁材料（阻抗壁） Z 所引起的 $\Delta\omega$ 为一复数。一般情况下， $Z = R + jX$ ，则

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = -\frac{\int_{\Delta S} X \mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H} ds}{4W} + j \frac{\int_{\Delta S} R \mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H} ds}{4W} \quad (6.9-23)$$

由式(6.9-21)和(6.9-22)可以看出，阻抗壁 Z 的电抗部分将引起谐振频率的偏移，其电阻部分将引起谐振腔振荡的衰减，即引起 Q_0 值下降。 $\Delta\omega$ 的虚部即代表场强振幅衰减至 $1/e$ 所持续的振荡次数。事实上，由式(6.9-19)可设

$$\Delta\omega = \Delta\omega_1 + j\Delta\omega_2$$

则有

$$\Delta\omega_1 = - \frac{\int_{\Delta S} X H_0^* \cdot H ds}{4W} \quad (6.9-24a)$$

$$\Delta\omega_2 = - \frac{\int_{\Delta S} R H_0^* \cdot H ds}{4W} \quad (6.9-24b)$$

根据品质因数与衰减的关系 $Q = \omega_0 / 2\Delta\omega_2$, 则可以得到

$$\frac{1}{Q_{\Delta S}} = \frac{2\Delta\omega_2}{\omega_0} = \frac{\int_{\Delta S} R H_0^* \cdot H ds}{2\omega_0 W} \quad (6.9-25)$$

对于金属导体,

$$Z = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_r}}$$

则式 (6.9-25) 变为

$$\frac{1}{Q_{\Delta S}} = \frac{\int_{\Delta S} \mu \delta H_0^* \cdot H ds}{2 \int_V \mu H_0^* H dv} \quad (6.9-26)$$

当 μ 和 σ_r 为常数, 并考虑到 $H \approx H_0$ 时, 可得

$$\frac{1}{Q_{\Delta S}} = \frac{\delta}{2} \frac{\int_S |H|^2 ds}{\int_V |H_0|^2 dv} \quad (6.9-27)$$

式中 δ 为金属导体的趋肤深度。此结果与式 (6.2-24) 相似。

本 章 提 要

1. 微波谐振器是一种具有储能和选频特性的微波谐振元件, 其作用相当于低频集总 LC 振荡回路。本章主要分析微波谐振器的基本特性及各种微波谐振器的设计计算方法。

2. 微波谐振器的基本原理是使微波电磁场在谐振器内各个方向形成驻波, 在其内维持电磁能量振荡。其基本参数是 f_0 (或 λ_0)、 Q_0 和 G_0 。谐振器的谐振频率与谐振器参数的一般关系由下式决定

$$K_0 = \sqrt{K_c^2 + \beta^2}$$

故谐振频率

$$f_0 = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{K_c^2 + \beta^2}$$

式中, c 为光速, K_c 为谐振器横向截止波数。

3. 金属波导谐振腔包括矩形腔、圆柱形腔和同轴腔(同轴腔又可称为传输线型腔)。常用的矩形腔是 TE_{101} 模式腔, TE_{101} 模式是矩形腔的主模。

常用的圆柱形腔是 TE_{111} 模式腔、 TE_{011} 模式腔和 TM_{010} 模式腔。当 $l < 2.1R$ 时，圆柱形腔的主模是 TM_{010} 模式；当 $l > 2.1R$ 时，主模为 TE_{111} 模式。 TE_{011} 模式并非圆柱形腔的主模，但由于其损耗随频率升高反而降低，因此 TE_{011} 模式圆柱形腔常用作高Q腔，在微波技术中有着广泛应用。但 TE_{011} 模式腔的设计须借助于模式图以消除自干扰模式和交叉干扰模式，确定腔体的尺寸。

4. 传输线型谐振器分半波长终端短路串联谐振器和终端开路并联谐振器与四分之一波长终端短路并联谐振器和终端开路串联谐振器。可用等效电路方法来分析这种谐振器。这些等效电路及其参数表示式在微波电路设计中常需应用。

5. 介质谐振器是一种新型微波谐振器，具有体积小、损耗小、Q值高、频率温度系数小等优点，可用于使微波电路小型化。这类谐振器无严格解析解，通常用数值计算法求近似解。常用的方法有磁壁波导模型法、介质波导模型法、变分法等。

6. 谐振腔微扰理论可用于分析谐振腔的各种微小变化对谐振频率和Q值的影响，也可用于介质参数的测量。

7. 谐振器可等效为集总LC回路，但这种等效与振荡模式及参考面的选择有关。

参 考 资 料

- [1] 《微波无源元件的原理与设计》，第四章微波传输线空腔谐振器，西北电讯工程学院，1977.7。
- [2] R. E. 柯林著，《微波工程基础》吕楚尧译，人民邮电出版社，1981年。
- [3] 万嘉若译编，“高Q值谐振腔的设计”，《电子学译丛》，第3辑，上海市科学技术编译馆。
- [4] Simon Ramo, John R. Whinnery, and Theodore Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, John Wiley & Sons, Inc. 1965.
- [5] 小西良弘，《电磁波电路》，卢慈等译，人民邮电出版社，1981。
- [6] 廖承恩，《微波技术基础》，（下册），西北电讯工程学院，1979年。
- [7] P. Guillon and Y. Garault, Accurate Resonant Frequencies of Dielectric Resonators, IEEE Trans. on MTT-25, 1977. PP. 916-922.
- [8] George L. Matthaei, Leo Young, and E. M. T. Jones, *Microwave Filters, Impedance-Matching Networks, and Coupling Structures*, McGraw-Hill, 1964.
- [9] Jerome L. Altman, *Microwave Circuits*, D. Van Nostrand Company, 1964.
- [10] 小口文一，マイクロ波およびミリ波回路，丸善株式会社，1964。
- [11] H. B. 列别捷夫，《超高频技术和器件》，刘盛纲译，上海科学技术出版社，1965。
- [12] 吴万春，《微波、毫米波与光集成电路的理论基础》，西北电讯工程学院，1983年。

习 题

- 6-1 求尺寸 a 、 b 、 l 分别为5cm、3cm和6cm的 TE_{101} 模式矩形腔的谐振波长和无载Q值（设内壁材料为镀银）。
- 6-2 试以矩形腔的 TE_{101} 模式和 TM_{010} 模式为例，证明谐振腔内电场能量与磁场能量相等，并分别求此两种腔的总的电磁储能。
- 6-3 设圆柱腔 TM_{010} 模式的谐振波长为10cm，试求此圆柱腔的半径，推导其 Q_0 值表示式。
- 6-4 有一半径为5cm，长度分别为10cm和12cm的圆柱腔，试求其最低振荡模式的谐振频率。
- 6-5 求半径为5cm，长度为15cm的圆柱腔最低振荡模式的谐振频率和无载Q值（设腔内壁镀金）。
- 6-6 设计一个 TM_{010} 模式圆柱腔，要求谐振波长为7.5cm。
- 6-7 已知圆柱腔的直径为3cm，对同一频率，谐振模式为 TM_{012} 时比 TM_{011} 时的腔长长2.32cm，求此谐振频率。

- 6-8 已知 TE_{011} 模式圆柱腔的直径为 3cm，直径与长度之比平方的可变范围为 1.5~3，求其频率调谐范围。
- 6-9 设计一个 TE_{011} 模式圆柱腔，要求 Q_0 值尽量高，谐振频率为 3.6GHz，求 Q_0 值。
- 6-10 有一 $\lambda/4$ 型同轴线腔，腔内介质为空气，特性阻抗为 100Ω ，开路端的杂散电容为 $1.5nF$ ，采用短路活塞调谐，当调到 l 为 $0.22\lambda_0$ 时谐振，求其谐振频率。
- 6-11 ϵ_r 为 9.6 陶瓷基片 (h 为 1mm) 上微带环形谐振器，其内径 a 为 3.3mm，外径 b 为 3.7mm，工作频率为 5300MHz，振荡主模为 TM_{110} ，求其谐振波长和环阻抗。
- 6-12 基片 ϵ_r 为 9、 h 为 0.635mm 上的微带圆形谐振器工作于 TM_{110} 模式，谐振频率为 6000MHz，设导体材料为金，求此谐振器的半径与无载 Q 值。
- 6-13 介质谐振器的振荡模式及其场分布与金属波导谐振腔有何不同？
- 6-14 试用磁壁波导模型法求矩形介质谐振器的谐振频率表示式。
- 6-15 铜制空气 TE_{101} 模式矩形腔的尺寸 a 和 l 都是 0.02m， b 是 0.01m，求其无载 Q 值；在其内填充 ϵ_r 为 2.53 的介质， $\sigma_d/\omega\epsilon$ 为 4.33×10^{-4} ，求 Q_0 、 Q_d 和 Q_L 。
- 6-16 电容负载式同轴线腔的负载电容为 $0.1nF$ ，同轴线的特性阻抗为 50Ω ，求谐振波长为 10cm 时最短的两个谐振长度。
- 6-17 若在长度为 l 的两端短路同轴线腔中央插入一金属螺钉，其电纳为 B ，问：
- ① 加螺钉之后的谐振频率如何改变？为什么？
 - ② 谐振频率表示式如何？
- 6-18 有一直径为 32mm，长度为 24.9mm 的 TM_{010} 模式圆柱形腔，求其谐振频率；今在腔内底面中心沿轴放置直径和长度均为 2mm 的介质样品，谐振频率改变了 1%，求此介质样品的 ϵ_r 。
- 6-19 在直径为 3.81cm，长度为 2.54cm TM_{010} 模式圆柱形腔顶盖中央旋入一个小金属螺钉，其体积 ΔV 为原体积的 3%，试求螺钉旋入前后的谐振频率值。
- 6-20 电容负载式同轴线腔的内外导体半径分别为 0.5cm 和 1.5cm，负载电容为 $1nF$ ，谐振频率为 3000MHz，求腔长。
- 6-21 试推导 $\lambda/4$ 型终端短路传输线谐振器的等效电路及其参数表示式。

第七章 广义传输线与波矩阵

由规则波导中正规模的性质可知，波导传输问题可等效为传输线问题。应用这种等效关系，不少波导问题，在电磁场理论分析基础上，或者在实验的基础上，就可以应用传输线理论或低频网络理论来处理，从而使问题得到解决，而且运算简便得多，同时也可采用模拟低频传输线测量技术和方法来研究波导的测量问题。

在这一章，我们先从场的波动方程导出广义传输线方程，然后求矩形波导的等效电路与波导接头的等效网络，最后讨论各种微波网络参数的特性与应用，并着重讨论 S 参数的性质与 T 参数的应用。

7.1 广义传输线方程

由第三章的分析表明，规则波导中一般存在两类波，一类是横电波（或称磁波），另一类是横磁波（或称电波），其场结构决定于波导截面的具体形状和尺寸以及工作模式。

由第三章的分析还表明，规则波导中的各种波型尽管在波导横截面内的场结构不一样，但它们都以一定的速度沿波导轴向传输，不管传输到哪里，其场结构始终保持不变。因此，我们可以把任何一种波型的电磁场在横截面内的场结构与其沿波导轴向的传输情况分开来研究，即把波导的横向问题和纵向问题分开来研究。在规则波导横截面上，各种波型的场是一种驻波分布状态，而在波导轴方向上，场则是一种行波传输状态，其幅度变化情况满足与分布参数电路中电压、电流相同的微分方程。

我们已经知道，柱形规则波导中各种波型的场分量求解可以由纵向场分量 E_z 或 H_z 导出，而 E_z 和 H_z 满足相同的标量亥姆霍兹方程。对于柱形规则波导，广义柱形坐标系的 $h_3=1$ ， h_2 和 h_3 与 z 无关。我们用 L 来代表 E_z 或 H_z ，则 L 满足标量亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 L + K^2 L = 0 \quad (7.1-1)$$

应用分离变量法求解，令

$$L(u, v, z) = L_r(u, v) Z(z) \quad (7.1-2)$$

式中 $L_r(u, v)$ 只是横向坐标 u 和 v 的函数， $Z(z)$ 只是坐标 z 的函数，并称为场量的幅度函数。将式 (7.1-2) 代入式 (7.1-1) 得到

$$\nabla_r^2 L_r(u, v) Z(z) + \frac{\partial^2 L_r(u, v)}{\partial z^2} Z(z) + K^2 L_r(u, v) Z(z) = 0$$

或者

$$\frac{\nabla_r^2 L_r(u, v)}{L_r(u, v)} = - \left[\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + K^2 \right] \quad (7.1-3)$$

此式左边只是 u 和 v 的函数，右边只是 z 的函数，为使两边恒等，则两边应等于与 u 、 v 、 z 无关的常数。令此常数为 $-K_r^2$ ，则得到两个方程：

$$\nabla_r^2 L_r(u, v) + K_r^2 L_r(u, v) = 0 \quad (7.1-4)$$

和

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \gamma^2 Z(z) = 0 \quad (7.1-5)$$

式中 $\gamma^2 = K_t^2 - K_z^2$ 。结果表明, $L_t(u, v)$ 满足横向坐标 u 和 v 的二维亥姆霍兹方程, 而 $Z(z)$ 满足和传输线方程相同的方程。式 (7.1-5) 即称为广义传输线方程, 它决定各种波型的轴向传输特性。对于无限长规则波导, 其解为

$$Z(z) = A e^{-\gamma z}$$

因此

$$L(u, v, z) = A L_t(u, v) e^{-\gamma z} \quad (7.1-6)$$

由上面的分析可以看出, 尽管 $Z(z)$ 适合与传输线一样的方程, 但其轴向传输因数 γ 与传输线并不相同。TEM 波传输线的 γ 与传输线的形状和尺寸无关, 而波导的 γ 包括两项 ($-\gamma^2 = K_t^2 - K_z^2$), 这说明波导中波的传输因数 γ 不仅与波导中的媒质特性有关, 还和波导的横截面形状和尺寸有关。

7.2 模式电压、模式电流与模式函数

任何一个实际的微波元件或系统, 除了规则波导(或称均匀波导)以外, 总包含有不均匀性。分析这种带不均匀性的微波元件或系统的方法一般有两种: 一种是场的方法, 即利用场方程结合边界条件求解边值问题, 求出其内部各点场的表示式, 从而对元件或系统进行分析或设计; 另一种是路的方法, 它是把微波元件或系统用一个网络来等效, 采用低频网络理论对其进行分析或综合。用路的方法(即微波网络方法)处理波导问题, 就是把均匀波导等效为双线, 用分布参数电路理论研究其中主模(或其它模)的传输情况; 把不均匀性(下称波导接头)等效为集总参数网络, 用网络参数分析不均匀性对均匀波导中主模(或其它模)能量传输特性的影响。

在上节我们得到了广义传输线方程, 表明波导中波的轴向变化(传输)满足类似的传输线方程。我们知道, 传输线的能量传输由电压、电流决定, 而波导中的轴向能量传输则由横向电场和横向磁场决定, 而且因模式而异。因此, 为了建立波导及其不均匀性与传输线及其网络之间的等效关系, 我们首先需要定义波导的模式电压、模式电流与模式函数。

如图 7.2-1 所示均匀波导, 设电源在负无限远处; 负载在正无限远处; 波导中的电场和磁场为 E 和 H , 沿 $+z$ 方向传输, 它们满足麦克斯韦方程:

$$\nabla \times H = j\omega \epsilon E \quad (7.2-1)$$

$$\nabla \times E = -j\omega \mu H \quad (7.2-2)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (7.2-3)$$

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (7.2-4)$$

E 和 H 可分解为横向分量和纵向分量, 即

$$E = E_t(u, v, z) + \hat{z} E_z(u, v, z) \quad (7.2-5)$$

$$H = H_t(u, v, z) + \hat{z} H_z(u, v, z) \quad (7.2-6)$$

哈米顿算子可表示成

$$\nabla = \nabla_r + \nabla_z = \nabla_r + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_r - j\beta \hat{z} \quad (7.2-7)$$

代入式(7.2-2)中得到

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= (\nabla_t - j\beta\hat{z}) \times (\mathbf{E}_t + \hat{z}E_z) = \nabla_t \times \mathbf{E}_t - j\beta\hat{z} \times \mathbf{E}_t + \nabla_t \times \hat{z}E_z \\ &= -j\omega\mu(\mathbf{H}_t - \hat{z}H_z)\end{aligned}$$

由此可得

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = -j\omega\mu\hat{z}H_z \quad (7.2-8)$$

$$\nabla_t \times \hat{z}E_z - j\beta\hat{z} \times \mathbf{E}_t = -j\omega\mu\mathbf{H}_t \quad (7.2-9)$$

同样，由式(7.2-1)可以得到

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t = j\omega\epsilon\hat{z}E_z \quad (7.2-10)$$

$$\nabla_t \times \hat{z}H_z - j\beta\hat{z} \times \mathbf{H}_t = j\omega\epsilon\mathbf{E}_t \quad (7.2-11)$$

又由式(7.2-3)和式(7.2-4)可得

$$\nabla_t \cdot \mathbf{H}_t = j\beta H_z \quad (7.2-12)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = j\beta E_z \quad (7.2-13)$$

1. 位函数与模式分解

由场论知道，任一标量梯度的旋度等于零，任一矢量旋度的散度等于零。设 \mathbf{A}_t 为无旋矢量， \mathbf{A}_s 为有旋矢量，即假定

$$\mathbf{A}_t \equiv -\nabla\varphi \quad \text{和} \quad \mathbf{A}_s \equiv \nabla \times \mathbf{H}$$

则

$$\nabla \times \mathbf{A}_t \equiv 0 \quad (7.2-14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_s \equiv 0 \quad (7.2-15)$$

由场论的亥姆霍兹定理可知，任意一个矢量 \mathbf{A} 可以分解成无旋矢量 \mathbf{A}_t 和有旋矢量 \mathbf{A}_s 之和，即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_t + \mathbf{A}_s = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{H}$$

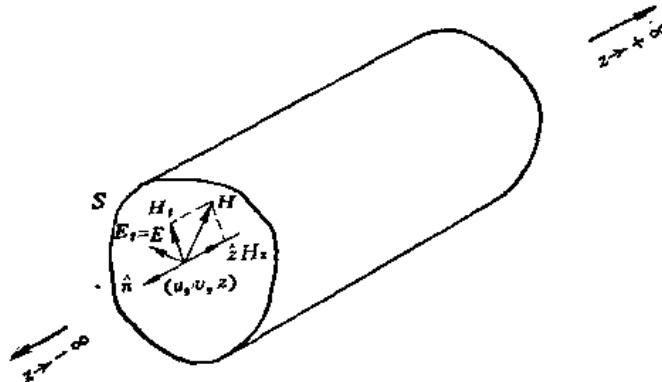


图7.2-1 均匀无耗波导中的电磁场(图示为TE模)

例如波导中的TE模，由于 $E_z = 0$ ，由式(7.2-10)和式(7.2-13)，则有 $\nabla_t \times \mathbf{H}_t = 0$ ， $\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = 0$ ；而对于波导中的TM模，由于 $H_z = 0$ ，则由式(7.2-8)和式(7.2-12)， $\nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0$ ， $\nabla_t \cdot \mathbf{H}_t = 0$ 。这说明，波导中TE模的横向磁场矢量为无旋场，横向电场矢量为有旋场；而TM模的横向磁场矢量为有旋场，横向电场矢量为无旋场。因此波导中总的 \mathbf{E}_t 和 \mathbf{H}_t 可表示成

	有旋场	无旋场
$\mathbf{E}_t =$	E_{tr}	$+ E_{tt}$
$\mathbf{H}_t =$	H_{tr}	$+ H_{tt}$

波导中总的电场和磁场则可表示成

	TE 模	TM 模
$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \hat{z}E_z =$	E_{tr}	$+ E_{tt} + \hat{z}E_z$
$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + \hat{z}H_z =$	$H_{tr} + \hat{z}H_z$	$+ H_{tt}$

(7.2-16)

由此可见，波导中的电磁场可以分解成 TE 模和 TM 模之和。但这并不意味着 TE 模和 TM 模都能够同时存在。何种模能在波导中存在，要由传输条件来决定，即应满足 $\lambda < \lambda_c$ (或 $\lambda > f_c$) 的条件。

2. 模式电压、模式电流与模式函数

下面我们用位函数来导出模式电压、模式电流和模式函数表示式。

我们用脚注 h 来标志 TE 模。由式 (7.2-8)~式 (7.2-13) 得到

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = -j\omega\mu\hat{z}H_z \quad (7.2-17)$$

$$-j\beta_h \hat{z} \times \mathbf{E}_t = -j\omega\mu\mathbf{H}_t \quad (7.2-18)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t = 0 \quad (7.2-19)$$

$$\nabla_t \times \hat{z}H_z - j\beta_h \hat{z} \times \mathbf{H}_t = j\omega\epsilon\mathbf{E}_t \quad (7.2-20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_t = 0 \quad (7.2-21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_t = j\beta_h H_z \quad (7.2-22)$$

根据式 (7.2-19)，我们可以定义 \mathbf{H}_t 的标量位 Ψ_h ；根据式 (7.2-21)，可以定义 \mathbf{E}_t 的矢量位 Π_h 。这样，TE 模的场便可用 Ψ_h 或 Π_h 来描述。为简便起见，下面我们用 Ψ_h 来进行分析。

由式 (7.2-19) 可知， \mathbf{H}_t 是关于坐标 (u, v) 的无旋场，若采用标量位，则可将坐标 (u, v) 与 z 进行分离变量，于是得到

$$\mathbf{H}_t(u, v, z) = \sqrt{2} I_h(z) \mathbf{h}_h(u, v) \quad (7.2-23)$$

其中 $I_h(z)$ 称为 TE 模的模式电流，它只是 z 的函数； $\mathbf{h}_h(u, v)$ 则称为 TE 模 \mathbf{H}_t 的模式函数（或本征函数），它与 Ψ_h 的关系是

$$\mathbf{h}_h(u, v) = -\nabla_t \Psi_h(u, v) \quad (7.2-24)$$

另一方面，将式 (7.2-18) 两边乘以 \hat{z} ，得到

$$\hat{z} \times \mathbf{E}_t \times \hat{z} = \mathbf{E}_t = \frac{\omega\mu}{\beta_h} \mathbf{H}_t \times \hat{z} \quad (7.2-25)$$

将式 (7.2-23) 代入，则得

$$\mathbf{E}_t(u, v, z) = \sqrt{2} U_h(z) \mathbf{e}_h(u, v) \quad (7.2-26)$$

式中

$$U_h(z) = \frac{\omega\mu}{\beta_h} I_h(z) = Z_h I_h(z) \quad (7.2-27)$$

称为 TE 模的模式电压，而

$$\mathbf{e}_h(u, v) \equiv \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \Phi_h(u, v) = \mathbf{h}_h \times \hat{\mathbf{z}} \quad (7.2-28)$$

是 TE 模 \mathbf{E}_t 的模式函数（或本征函数），

$$Z_h = \frac{U_h(z)}{I_h(z)} = \frac{\omega \mu}{\beta_h} \quad (7.2-29)$$

称为 TE 模的波阻抗。

由式(7.2-28)可以看出， $\mathbf{e}_h \cdot \mathbf{h}_h = 0$ ，因此 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{H}_t + 0 \cdot \mathbf{H}_s = \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{H}_t = 0$ ，这表明各种模的电场和磁场互相正交。

其次，将式(7.2-26)代入式(7.2-17)可得

$$\begin{aligned} H_s(u, v, z) &= \frac{[\nabla_t \times \mathbf{E}_t]}{-j\omega \mu \hat{\mathbf{z}}} = -\frac{[\nabla_t \times \sqrt{2} U_h(z) \cdot \mathbf{e}_h(u, v)]}{j\omega \mu \cdot \hat{\mathbf{z}}} \\ &= \frac{\sqrt{2} U_h(z)}{j\omega \mu} \left[-\frac{\nabla_t \times \mathbf{e}_h(u, v)}{\hat{\mathbf{z}}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2} I_h(z)}{j\beta_h} \left\{ -\nabla_t^2 \Phi_h(u, v) \right\} \end{aligned} \quad (7.2-30a)$$

另一方面，由式(7.2-20)叉乘 $\hat{\mathbf{z}}$ ，并由式(7.2-23)和式(7.2-28)，得到

$$\hat{\mathbf{z}} \times [\nabla_t \times \hat{\mathbf{z}} H_s - j\beta_h \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_t] = j\omega \epsilon \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t$$

由此可得

$$H_s(u, v, z) = \frac{\sqrt{2} I_h(z)}{j\beta_h} (\omega^2 \epsilon \mu - \beta_h^2) \Phi_h(u, v) \quad (7.2-30b)$$

比较式(7.2-30a)和式(7.2-30b)可得

$$\nabla_t^2 \Phi_h(u, v) + K_{ch}^2 \Phi_h(u, v) = 0 \quad (7.2-31)$$

式中

$$K_{ch}^2 = K^2 + Y_h^2 = \omega^2 \epsilon \mu - \beta_h^2 \quad (7.2-32)$$

式(7.2-31)称为 $\Phi_h(u, v)$ 的亥姆霍兹方程。对应于一个 K_{ch} 值，可以得到一个解 $\Phi_h(u, v)$ 。 $\Phi_h(u, v)$ 称为 TE 模的本征函数， K_{ch} 称为 TE 模的本征值。

式(7.2-23)的 \mathbf{H}_t 和式(7.2-30a)的 H_s 满足式(7.2-22)。事实上，

$$\begin{aligned} \nabla_t \cdot \mathbf{H}_t &= \nabla_t \cdot \sqrt{2} I_h(z) \mathbf{h}_h(u, v) = \sqrt{2} I_h(z) \nabla_t \cdot (-\nabla_t \Phi_h(u, v)) \\ &= \sqrt{2} I_h(z) \{-\nabla_t^2 \Phi_h(u, v)\} = j\beta_h H_s(u, v, z) \end{aligned}$$

因此，上面由 $\Phi_h(u, v)$ 求得的 \mathbf{E}_t 、 \mathbf{H}_t 和 H_s ，即 TE 模的电磁场，完全满足麦克斯韦方程式(7.2-1)~(7.2-4)。

理想导体边界条件要求在壁面上 \mathbf{E}_t 的切线分量为零，或 \mathbf{H}_t 的法线分量为零。对于 TE 模应有

$$\left(\frac{\partial \Phi_h}{\partial n} \right)_{\text{壁面上}} = 0 \quad (n \text{ 为壁面外向法线}) \quad (7.2-33)$$

对于 TM 模 ($H_s = 0$)，我们用脚注 e 标志之。用同样的方法，由式(7.2-8)~式

(7.2-13) 可以得到

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0 \quad (7.2-34)$$

$$\nabla_t \times \hat{z} E_z - j\beta_e \hat{z} \times \mathbf{E}_t = -j\omega \mu \mathbf{H}_t \quad (7.2-35)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_t = j\omega \epsilon \hat{z} \cdot \mathbf{E}_z \quad (7.2-36)$$

$$j\beta_e \hat{z} \times \mathbf{H}_t = -j\omega \epsilon \mathbf{E}_z \quad (7.2-37)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = j\beta_e E_z \quad (7.2-38)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{H}_t = 0 \quad (7.2-39)$$

根据式 (7.2-34), 我们可以定义 \mathbf{E}_t 的标量位 $\varphi_e(u, v)$ 来描述 TM 模的场。其分析方法与 TE 模完全一样。结果示于表 7.2-1 中。边界条件要求在壁面上 $E_z = 0$, 于是对于 TM 模, 应有

$$(\varphi_e)_{\text{壁面上}} = 0 \quad (7.2-40)$$

表 7.2-1 用模式电压、模式电流与模式函数表示波导中的场

参数	模式	TE 模	TM 模
横向电场 \mathbf{E}_t		$\sqrt{2} v_h(z) \mathbf{e}_h(u, v)$	$\sqrt{2} V_e(z) \mathbf{e}_e(u, v)$
\mathbf{E}_t 的模式函数 \mathbf{e}		$\mathbf{e}_h = \mathbf{h}_h \times \hat{z}$	$\mathbf{e}_e = -\nabla_t \varphi_e = \mathbf{h}_e \times \hat{z}$
横向磁场 \mathbf{H}_t		$\sqrt{2} I_h(z) \mathbf{h}_h(u, v)$	$\sqrt{2} I_e(z) \mathbf{h}_e(u, v)$
\mathbf{H}_t 的模式函数 \mathbf{h}		$\mathbf{h}_h = -\nabla_t \varphi_h = \hat{z} \times \mathbf{e}_h$	$\mathbf{h}_e = \hat{z} \times \mathbf{e}_e$
波阻抗 Z		$Z_h = \frac{j\omega \mu}{\gamma_h} = \frac{\omega \mu}{\beta_h}$	$Z_e = \frac{\gamma_e}{j\omega \epsilon} = \frac{\beta_e}{\omega \epsilon}$
z 向电场 E_z		0	$\varphi_e \frac{K_{ce}^2}{j\omega \epsilon} \sqrt{2} I_e(u)$
z 向磁场 H_z		$\varphi_h \frac{K_{ch}^2}{j\omega \mu} \sqrt{2} U_h(z)$	0
亥姆霍兹方程		$\nabla_t^2 \varphi_h + K_{ch}^2 \varphi_h = 0$	$\nabla_t^2 \varphi_e + K_{ce}^2 \varphi_e = 0$
边界条件		$\left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial n} \right)_{\text{壁面上}} = 0$	$(\varphi_e)_{\text{壁面上}} = 0$

作为例子, 我们来求矩形波导中 TE_{mn} 模的模式电压和模式电流表示式。由式 (3.2-17) 知

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_t &= \hat{x} H_x + \hat{y} H_y = \hat{x} \left[j \frac{\beta_{hmn}}{K_{cmn}^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) H_{mn} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta_{hmn} z} \right] \\
 &\quad + \hat{y} \left[j \frac{\beta_{hmn}}{K_{cmn}^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) H_{mn} \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta_{hmn} z} \right] \\
 &= \boxed{\frac{j\beta_{hmn}}{K_{cmn}^2} e^{-j\beta_{hmn} z}} \cdot \boxed{\left\{ -\nabla_t \left(\boxed{H_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}} \right) \right\}} \\
 &\quad \boxed{\varphi_h(x, y)} \\
 &\quad \boxed{\mathbf{h}_h(x, y)}
 \end{aligned} \quad (7.2-41)$$

和

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_h &= \hat{x}E_x + \hat{y}E_y = \hat{x}\left[-\frac{j\omega\mu}{K_{cmn}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)H_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_{hmn}z}\right] \\
 &\quad + \hat{y}\left[\frac{-j\omega\mu}{K_{cmn}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)H_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_{hmn}z}\right] \\
 &= \boxed{Z_h \frac{j\beta_{hmn}}{K_{cmn}^2} e^{-j\beta_{hmn}z}} \cdot \boxed{\hat{x}\left(-\frac{\partial\Phi_h}{\partial y}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial\Phi_h}{\partial x}\right)} \\
 &\quad \parallel \quad \boxed{(-\nabla_i\Phi_h) \times \hat{z} = \mathbf{e}_h} \\
 &\quad \sqrt{2}U_h(z)
 \end{aligned} \tag{7.2-42}$$

而

$$H_z = H_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_{hmn}z} = \Phi_h(x, y)e^{-j\beta_{hmn}z} \tag{7.2-43}$$

用同样的方法可求得矩形波导中 TM_{mn} 模的模式电压、模式电流和模式函数。结果列于表 7.2-2 中。

表7.2-2 矩形波导的模式电压和模式电流

参数	模式	TE_{mn} 模	TM_{mn} 模
本征函数 Φ	$\Phi_h = H_{hmn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$	$\Phi_e = H_{emn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$	
本征值 K_c	$K_{chmn} = K_{cesmn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$		
传输因数 Y	$Y_h = Y_e = \sqrt{K_{cmn}^2 - \omega^2\mu\epsilon}$		
模式电压 $U(z)$	$\sqrt{2}U_h(z) = Z_h \frac{j\beta_h}{K_{ch}^2} e^{-j\beta_h z}$	$\sqrt{2}U_e(z) = \frac{j\beta_e}{K_{ce}^2} e^{-j\beta_e z}$	
模式电流 $I(z)$	$\sqrt{2}I_h(z) = \frac{j\beta_h}{K_{ch}^2} e^{-j\beta_h z}$	$\sqrt{2}I_e(z) = Y_e \frac{j\beta_e}{K_{ce}^2} e^{-j\beta_e z}$	

7.3 均匀波导的等效电路

本节讨论均匀波导的等效电路问题，首先从能量传输特性上定出波导等效为传输线的等效条件，然后讨论波导的等效阻抗概念，最后求出与波导传输模横向场相应的等效传输线方程，从而得到均匀波导的等效电路。

1. 等效条件

在上节中，我们得到了波导中场的模式电压和模式电流一般表示式。前面我们已经指出过，波导与传输线的等效只是轴向能量传输特性上的等效。为了唯一地确定模式电压和模式电流，需作如下规定：

- (1) 对某一波导模式而言，电压与该模横向电场成正比，电流与横向磁场成正比；
- (2) 电压和电流的共轭乘积的实部代表该模式的传输功率；
- (3) 电压与电流之比等于该模式的等效阻抗。

这三条规定便是波导等效为传输线的等效条件。根据此规定确定波导的模式电压和模式电流之后，利用场量之间的关系式便可导出相应的传输线方程，从而得出该模式的均匀波导的等效电路。

根据规定(1), 有

$$\left. \begin{aligned} E_t(u, v, z) &= \sqrt{2} U(z) e(u, v) \\ H_t(u, v, z) &= \sqrt{2} I(z) h(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (7.3-1)$$

根据规定(2), 应有

$$\operatorname{Re}[U(z)I^*(z)] = -\frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re}(E_t \times H_t^*) ds$$

式中积分限 S 为整个波导横截面积。以式(7.3-1)代入上式, 得到

$$\operatorname{Re}[U(z)I^*(z)] = \operatorname{Re}[U(z)I^*(z)] \int_S [e(u, v) \times h^*(u, v)] \cdot ds$$

于是要求

$$\int_S [e(u, v) \times h^*(u, v)] \cdot ds = 1 \quad (7.3-2)$$

此即式(3.5-14)所示归一化条件。

根据规定③, 有

$$\frac{U(z)}{I(z)} = Z_e \quad (7.3-3)$$

式中 Z_e 为波导的等效特性阻抗(简称为等效阻抗)。以式(7.3-1)代入, 得到

$$\frac{e(u, v)}{h(u, v)} = \frac{1}{Z_e} \quad \frac{E_t}{H_t} = \frac{Z_w}{Z_e} \quad (7.3-4)$$

由式(7.3-2)和(7.3-4), 可由 E_t 和 H_t 确定 $e(u, v)$ 和 $h(u, v)$, 从而确定 $U(z)$ 和 $I(z)$ 。

例7.3-1 求矩形波导中 TE_{10} 模的模式电压和模式电流。

解 矩形波导中 TE_{10} 模的横向场分量为:

$$\left. \begin{aligned} E_t &= \hat{y} E_y = \hat{y} E_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta z} \\ H_t &= \hat{x} H_x = -\hat{x} \frac{E_{10}}{Z_{\text{TE}_{10}}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta z} \end{aligned} \right\} \quad (7.3-5)$$

式中 $Z_{\text{TE}_{10}} = \omega \mu / \beta$, 是 TE_{10} 模的波阻抗。

比较式(7.3-5)和(7.3-1), 得到

$$e(x, y) = \frac{E_{10}}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \hat{y} \quad (7.3-6)$$

由式(7.3-4)和(3.2-32), 得到

$$\frac{e(x, y)}{h(x, y)} = -\frac{1}{Z_e} \quad Z_{\text{TE}_{10}} = -\frac{a}{b} \quad (7.3-7)$$

又由式(7.3-2),

$$\begin{aligned} \int_S [e(x, y) \times h^*(x, y)] \cdot ds &= \frac{E_{10}^2}{2} \frac{b}{a} \int_S \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx dy \\ &= \frac{E_{10}^2}{2} \frac{b}{a} \int_0^b \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx dy = \frac{E_{10}^2}{2} \frac{b}{a} \cdot \frac{ab}{2} \\ &= \frac{1}{4} E_{10}^2 b^2 = 1 \end{aligned}$$

由此求得

$$E_{10} = \frac{2}{b}$$

代入式 (7.3-6), 即得到

$$\left. \begin{aligned} e(x, y) &= \hat{y} \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \\ h(x, y) &= -\hat{x} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \end{aligned} \right\} \quad (7.3-8)$$

由式 (7.3-1) 最后得到 TE_{10} 模的模式电压和模式电流为

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= e^{-j\beta z} \\ I(z) &= -\frac{a}{b} - \frac{1}{Z_{TE_{10}}} e^{-j\beta z} \end{aligned} \right\} \quad (7.3-9)$$

2. 波导的等效阻抗概念

在 3.2 节中指出过, 传输 TE_{10} 模的两段宽边尺寸 a 相同, 而窄边尺寸 b 不同的矩形波导的波阻抗相等。换言之, TE_{10} 模矩形波导的波阻抗与窄边尺寸 b 无关。显然, 用波阻抗相等不能处理 a 边相同而 b 边不同的矩形波导的匹配问题。为此, 需要引入波导的等效阻抗概念。

由上述规定 (3), 我们定义了传输一定模式时波导的等效阻抗, 即

$$\frac{U(z)}{I(z)} = Z_e$$

并且得到传输 TE_{10} 模的矩形波导

$$Z_e = -\frac{b}{a} Z_{TE_{10}} = -\frac{b}{a} \sqrt{\frac{\eta}{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (7.3-10)$$

由式 (7.3-1) 可以看出, 式 (7.3-10) 所示等效阻抗是按电压和电流的有效值得到的。而波导的等效阻抗还可按振幅值定义的电压、电流和功率来定义, 即有

$$\left. \begin{aligned} Z_e &= \frac{U_m}{I_m} \\ Z_e &= \frac{U_m^2}{2P} \\ Z_e &= \frac{2P}{I_m^2} \end{aligned} \right\} \quad (7.3-11)$$

我们仍以常用的 TE_{10} 模矩形波导为例来讨论。如定义波导横截面中心从底面到顶面电场的线积分为等效电压; 定义顶面上总的纵向电流为等效电流, 则由式 (7.3-8) 可得

$$\left. \begin{aligned} U_m &= \int_0^b E_y|_{x=a/2} dy = bE_{10} \\ I_m &= \int_0^a J_x dx = - \int_0^a H_z dx = \frac{2aE_{10}}{\pi Z_{TE_{10}}} \end{aligned} \right\} \quad (7.3-12)$$

传输 TE_{10} 模时的平均功率为

$$P = \frac{ab}{4Z_{TE_{10}}} E_{10}^2 \quad (7.3-13)$$

代入式(7.3-11)分别求得

$$Z_{e(U-P)} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (7.3-14)$$

$$Z_{e(P-P)} = \frac{U_m^2}{2P} = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (7.3-15)$$

$$Z_{e(P-I)} = \frac{2P}{I_m^2} = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (7.3-16)$$

式中 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 为媒质中的波阻抗。比较式(7.3-10)、(7.3-14)、(7.3-15)和(7.3-16)可以看出,用不同定义求得的矩形波导的等效阻抗只是数字系数不同,与波长和波导尺寸的关系是相同的。实际应用时,选用何种定义式,则需根据传输特性的要求来决定。而在波导的实际工程计算时,一般并不要求波导的绝对阻抗,只需计算相对值。此时,为简化起见,通常取式(7.3-10)作为 TE₁₀ 模矩形波导的等效阻抗,且令 $\eta = 1$,即取

$$Z_e = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (7.3-17)$$

作为矩形波导传输 TE₁₀ 模时的无量纲等效阻抗。这种规定与上述等效条件的规定(3)是一致的。

3. 等效电路

对于传输 TE 模情况,假定波导中只有 TE_{mn} 一个模,其场为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \sqrt{2} U_{hmn}(z) \mathbf{e}_{hmn}(u, v) \\ \mathbf{H} &= \sqrt{2} I_{hmn}(z) \mathbf{h}_{hmn}(u, v) + \hat{z} \Phi_{hmn}(u, v) \frac{K_c^2 h_{mn}}{j\omega\mu} \sqrt{2} U_{hmn}(z) \end{aligned} \right\} \quad (7.3-18)$$

由式(3.1-29),

$$\left. \begin{aligned} E_u &= -\frac{1}{K_c^2} \frac{j\omega\mu}{h_2} \frac{\partial H_v}{\partial v} \\ E_v &= -\frac{1}{K_c^2} \frac{j\omega\mu}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u} \\ H_u &= -\frac{1}{K_c^2} \frac{j\beta}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u} \\ H_v &= -\frac{1}{K_c^2} \frac{j\beta}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (7.3-19)$$

而

$$\mathbf{E}_t = \hat{u} E_u + \hat{v} E_v$$

$$\mathbf{H}_t = \hat{u} H_u + \hat{v} H_v$$

则

$$\frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = \hat{u} \frac{\partial E_u}{\partial z} + \hat{v} \frac{\partial E_v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = \hat{u} \frac{\partial H_u}{\partial z} + \hat{v} \frac{\partial H_v}{\partial z}$$

其模为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_t}{\partial z} &= \sqrt{\left(\frac{\partial E_u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial E_v}{\partial z}\right)^2} \\ \frac{\partial H_t}{\partial z} &= \sqrt{\left(\frac{\partial H_u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_v}{\partial z}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (7.3-20)$$

由式 (7.3-19), 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_u}{\partial z} &= -\frac{1}{K_c^2} \frac{j\omega\mu}{h_2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial v \partial z} = -\frac{\omega\mu\beta}{K_c^2 h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} \\ \frac{\partial E_v}{\partial z} &= \frac{1}{K_c^2} \frac{j\omega\mu}{h_1} \frac{\partial^2 H_z}{\partial u \partial z} = \frac{\omega\mu\beta}{K_c^2 h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u} \\ \frac{\partial H_u}{\partial z} &= -\frac{j\beta}{K_c^2 h_1} \frac{\partial^2 H_z}{\partial u \partial z} = -\frac{\beta^2}{K_c^2 h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u} \\ \frac{\partial H_v}{\partial z} &= -\frac{j\beta}{K_c^2 h_2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial v \partial z} = -\frac{\beta^2}{K_c^2 h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} \end{aligned}$$

代入式 (7.3-20), 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t}{\partial z} &= \pm \sqrt{\left(-\frac{\omega\mu\beta}{K_c^2 h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\omega\mu\beta}{K_c^2 h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u}\right)^2} \\ &= \pm \frac{\omega\mu\beta}{K_c^2} \sqrt{\left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u}\right)^2} \end{aligned}$$

以式 (3.1-29) 代入, 则得

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t}{\partial z} &= \pm \frac{\omega\mu\beta}{K_c^2} \sqrt{\left(\frac{K_c^2}{j\beta} H_v\right)^2 + \left(\frac{K_c^2}{j\beta} H_u\right)^2} \\ &= \pm \frac{\omega\mu\beta}{K_c^2} \left(\mp j \frac{K_c^2}{\beta} \right) H_t = -j\omega\mu H_t \end{aligned} \quad (7.3-21a)$$

同理可得

$$\frac{\partial H_t}{\partial z} = -j \frac{\beta_{hmn}^2}{\omega\mu} E_t \quad (7.3-21b)$$

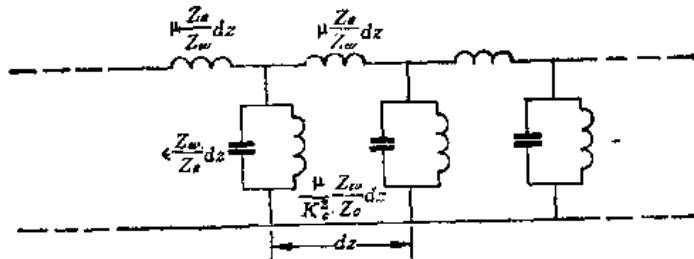
以式 (7.3-1) 代入式 (7.3-21), 并考虑到式 (7.3-4), 则得到传输 TE_{mn} 模时均匀波导的等效传输线方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_h(z)}{dz} &= -j\omega\mu \frac{Z_e}{Z_w} I_h(z) = -ZI_a(z) \\ \frac{dI_h(z)}{dz} &= -j \frac{\beta_{hmn}^2}{\omega\mu} \frac{Z_w}{Z_e} U_h(z) = -YU_h(z) \end{aligned} \right\} \quad (7.3-22)$$

式中 Z 和 Y 分别为等效传输线的单位长度串联阻抗和并联导纳, 且有

$$\left. \begin{aligned} Z &= j\omega\mu \frac{Z_e}{Z_w} \\ Y &= j \frac{\beta_{hmn}^2}{\omega\mu} \frac{Z_w}{Z_e} = j \left(\omega\epsilon - \frac{K_c^2 \beta_{hmn}}{\omega\mu} \right) \frac{Z_w}{Z_e} \end{aligned} \right\} \quad (7.3-23)$$

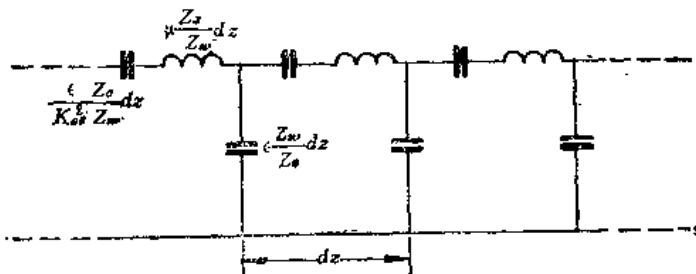
据此我们可以画出传输 TE_{mn} 模时均匀波导的等效电路, 如图 7.3-1 所示。

图 7.3-1 传输 TE_{mn} 模时均匀波导的等效电路

用同样的方法可以求得传输 TM_{mn} 模时均匀波导的等效传输线方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_e(z)}{dz} &= -j\left(\omega\mu - \frac{K_c^2 \epsilon_{mn}}{\omega\epsilon}\right) \frac{Z_e}{Z_w} I_e(z) = -ZI_e(z) \\ \frac{dI_e(z)}{dz} &= -j\omega\epsilon \frac{Z_w}{Z_e} U_e(z) = -YU_e(z) \end{aligned} \right\} \quad (7.3-24)$$

据此则可画出传输 TM_{mn} 模时均匀波导的等效电路，如图 7.3-2 所示。

图 7.3-2 传输 TM_{mn} 模时均匀波导的等效电路

由上面的分析可知，以某一模式传输的均匀波导可等效为一对传输线（以双线表示之）。这样，只要求得等效传输线的传输因数和归一化等效阻抗（或归一化等效导纳），便可应用传输线理论和圆图进行工程计算，因而使波导问题的分析和计算变得简单、方便。

7.4 波导接头的等效网络

在上节中，我们得到了均匀波导的等效电路。然而，仅仅讨论无限长均匀波导等效为一双传输线（双线）是没有什么实用意义的，也不能使运算简化；波导与传输线的等效性或等效原理，只有当讨论波导系统的不均匀性或分析波导元件时才显示其重要性。为此就需要求波导不均匀性（即波导接头）的等效网络。

如图 7.2-1 所示，假设 S 面左边接有不均匀波导（即波导接头），我们来计算通过面 S 向负载传输的复数功率。显然在 S 面上除传输模外，还存在非传输型模。当波导壁为理想导体时，从 S 面向负载传输的复数功率，由电磁场理论知

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \hat{n} ds = -\frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \hat{z} ds \\ &= P_R + j2\omega(W_m - W_e) \end{aligned} \quad (7.4-1)$$

式中， P_R 为平均损耗功率， W_m 和 W_e 分别为磁场和电场的平均储能。

将式 (7.2-5) 和式 (7.2-6) 代入上式，则

$$P = \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) \cdot \hat{z} ds \quad (7.4-2)$$

而 \mathbf{E}_t 和 \mathbf{H}_t 可用模式函数展开成:

$$\mathbf{E}_t = \sqrt{2} \sum_m \sum_n U_{hmn} \mathbf{e}_{hmn} + \sqrt{2} \sum_m \sum_n U_{emn} \mathbf{e}_{emn} \quad (7.4-3a)$$

$$\mathbf{H}_t = \sqrt{2} \sum_m \sum_n I_{hmn} \mathbf{h}_{hmn} + \sqrt{2} \sum_m \sum_n I_{emn} \mathbf{h}_{emn} \quad (7.4-3b)$$

于是

$$P = \sum_m \sum_n U_{hmn} I_{hmn}^* + \sum_m \sum_n U_{emn} I_{emn}^* \quad (7.4-4)$$

而

$$U_{hmn} = Z_{hmn} I_{hmn} \quad \text{或} \quad I_{hmn} = Y_{hmn} U_{hmn}$$

$$U_{emn} = Z_{emn} I_{emn} \quad \text{或} \quad I_{emn} = Y_{emn} U_{emn}$$

代入式 (7.4-4) 得到

$$\begin{aligned} P &= \sum_m \sum_n Z_{hmn} |I_{hmn}|^2 + \sum_m \sum_n Z_{emn} |I_{emn}|^2 \\ &= \sum_m \sum_n Y_{hmn} |U_{hmn}|^2 + \sum_m \sum_n Y_{emn} |U_{emn}|^2 \end{aligned} \quad (7.4-5)$$

设 P_p 为传输模的复功率, P_n 为非传输模的复功率, 则

$$P_p = \sum_P Z_{hmn} |I_{hmn}|^2 + \sum_P Z_{emn} |I_{emn}|^2 = P_{kp} + 2j\omega(W_{mp} - W_{ep}) \quad (7.4-6a)$$

$$P_n = \sum_n Z_{hmn} |I_{hmn}|^2 + \sum_n Z_{emn} |I_{emn}|^2 = P_{Rn} + 2j\omega(W_{mn} - W_{en}) \quad (7.4-6b)$$

式中求和号 Σ 下面的 p 、 n 分别表示传输模及非传输模之和。根据式 (7.4-1), 应有

$$\begin{cases} P = P_p + P_n \\ P_R = P_{kp} + P_{Rn} \\ W_{mp} - W_{ep} = (W_{mp} + W_{mn}) - (W_{ep} + W_{en}) \end{cases} \quad (7.4-6c)$$

1. 传输模的复功率

由于传输模的波阻抗为正实数, 所以由式 (7.4-6a) 可知, P_p 为正实数, 于是

$$P_p = P_{kp} > 0, \quad W_{mp} = W_{ep} \quad (7.4-7)$$

这表明传输模的复功率为实功率, 虚功率为零, 磁场平均储能等于电场平均储能。对于传输模, 在理想波导无源处, 能流从波导一个截面流进, 从另一个截面流出, 最终被负载全部吸收。

2. 非传输模的复功率

我们已经知道, 非传输模的波阻抗为纯电抗, 非传输型 TE_{mn} 模的波阻抗 Z_{hmn} 为感性电抗, 非传输型 TM_{mn} 模的波阻抗 Z_{emn} 为容性电抗, 因此 P_n 为纯虚数:

$$\begin{cases} P_n = j2\omega(W_{mn} - W_{en}) \\ = j \left\{ \sum_n |Z_{hmn}| |I_{hmn}|^2 - \sum_n |Z_{emn}| |I_{emn}|^2 \right\} \\ P_{Rn} = 0 \end{cases} \quad (7.4-8)$$

当非传输模以TE模为主时, $W_{mn} > W_{en}$; TM模为主时, $W_{mn} < W_{en}$ 。因此, 当同时存在传输模和非传输模时, 总的复功率为

$$\begin{aligned} P &= P_R + j2\omega(W_m - W_e) \\ &= P_R + j2\omega(W_{mn} - W_{en}) \end{aligned} \quad (7.4-9)$$

其中, 实功率 P_R 是传输模传输的结果, 虚功率则是非传输模产生的。

3. 波导接头的等效电路

上面的分析是对一般情况而言, 实际上遇到较多的是波导中只传输一种模的情况。如图 7.4-1(a) 所示, 假定波导中只传输一种 TE_{mn} 模, 在波导接头处将产生非传输型模。这些非传输型模随着与接头距离的增大而按指数规律急剧衰减, 在参考面 S_1 、 S_2 处就只有传输型 TE_{mn} 模。

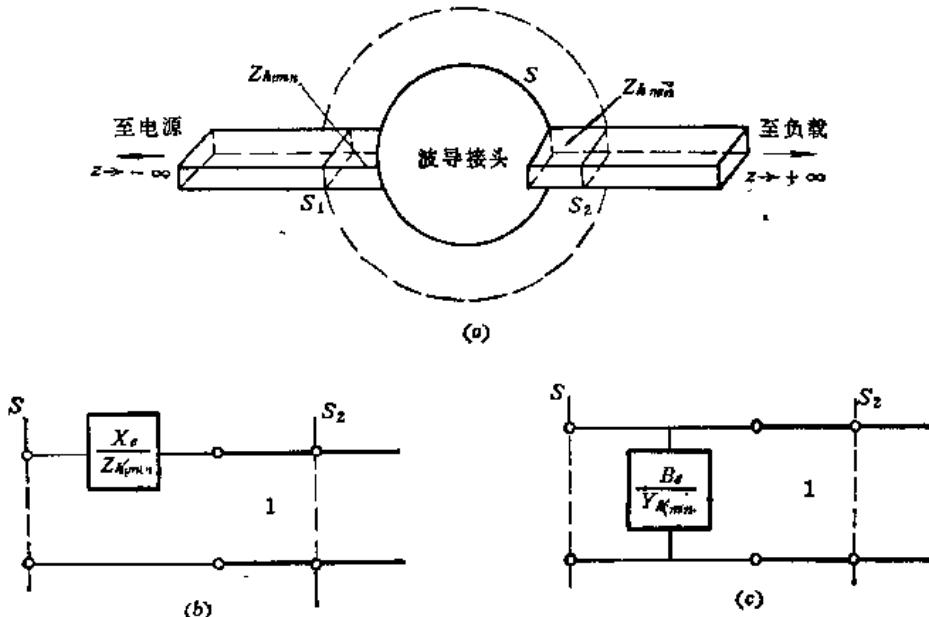


图 7.4-1 波导接头及其等效电路
(a) 波导接头及其参考面; (b) 阻抗等效电路; (c) 导纳等效电路。

由接头 S 面向两边看时, 其相应的集总参数电路可以这样来决定: 设电路中的电阻(或电导)为 R_e (或 G_e), 电抗(或电纳)为 X_e (或 B_e), 则阻抗(或导纳)为

$$Z_e = R_e + jX_e, \quad Y_e = G_e + jB_e$$

则功率为

$$\begin{aligned} P &= R_e |I_{hmn}|^2 + jX_e |I_{hmn}|^2 \\ &= G_e |U_{hmn}|^2 + jB_e |U_{hmn}|^2 \end{aligned}$$

由式 (7.4-5) 和 (7.4-9) 可得

$$R_e = Z_{hmn}, \quad G_e = Y_{hmn} \quad (7.4-10a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_e = \frac{2\omega(W_{mn} - W_{en})}{|I_{hmn}|^2} \\ B_e = \frac{2\omega(W_{en} - W_{mn})}{|U_{hmn}|^2} \end{array} \right. \quad (7.4-10b)$$

用 TE_{mn} 模的波阻抗 Z_{hmn} 归一化, 则得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{Z_e}{Z_{hmn}} &= \frac{R_e}{Z_{hmn}} + j \frac{X_e}{Z_{hmn}} = 1 + j \frac{2\omega(W_{mn} - W_{en})}{U_{hmn} I_{hmn}^*} \\ \frac{Y_e}{Y_{hmn}} &= \frac{G_e}{Y_{hmn}} + j \frac{B_e}{Y_{hmn}} = 1 + j \frac{2\omega(W_{en} - W_{mn})}{U_{hmn} I_{hmn}^*} \end{aligned} \right\} \quad (7.4-11)$$

于是我们可以画出图 7.4-1(a) 面 S 向右看的等效电路, 如图 7.4-1(b)、(c) 所示。具体采用哪一种等效电路, 视其结构及分析时的方便与否而定。

波导接头处的非传输模中如果 TE 模占优势, $W_{mn} > W_{en}$, 则 $X_e = X_L$ ($B_e = -B_L$), 这里 X_L 为非传输模的等效感性电抗, B_L 表示感性电纳; 如果 TM 模占优势, $W_{mn} < W_{en}$, 则 $X_e = -X_c$ ($B_e = B_c$), X_c 和 B_c 分别表示非传输模的等效容性电抗和容性电纳。因此, 对于图 7.4-1(b) 情况, 可用 $\omega L_s = X_L$ 来定义等效电感 L_s , 用 $C_s^{-1} = \omega X_c$ 来定义等效电容, 对于图 7.4-1(c) 情况, 则可用 $\omega C_s = B_c$ 定义等效电容 C_s , 用 $L_s^{-1} = \omega B_L$ 定义等效电感。

一般情况下, L_s 、 C_s 、 C_B 、 L_B 是 ω 的函数, 所以集总参数电路中的 L 、 C 将随 ω 而变; 但是在微波技术中所考虑的频带一般比较窄, 所以上述 L_s 等随 ω 变化不大。

根据上述分析可知, 具有不均匀性的波导, 如果参考面 S_1 和 S_2 远离不均匀性, 则 S_1 以左和 S_2 以右分别只有一个往左和往右的传输模, 非传输型模在 $S_1 \sim S_2$ 以内。我们并不要求了解它们的具体分布情况, 只关心它们对传输模传输的影响, 此时则可用一个集总二端口网络来等效之。

7.5 波导接头的波矩阵

根据上面的分析可知, 如图 7.5-1(a) 所示 N 端口波导接头, 可用图 7.5-1(b) 所示 N 端口网络来等效, 其中与接头连接的 N 个端口波导等效为 N 条双线, 接头则等效为

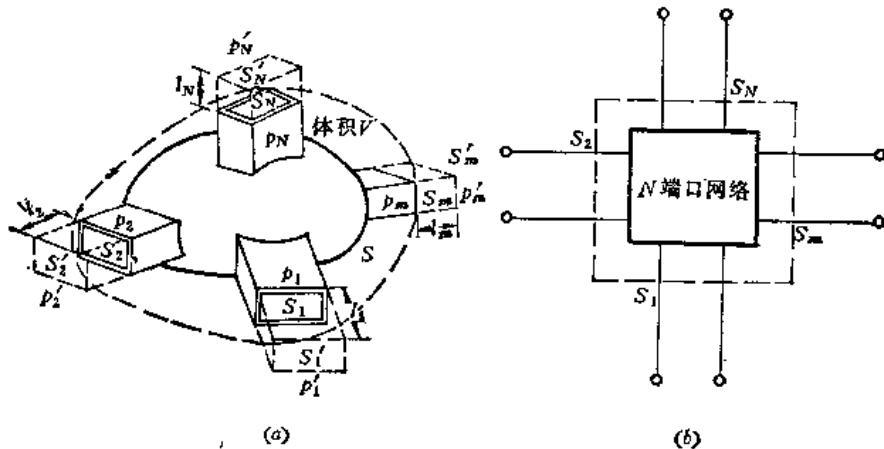


图 7.5-1 N 端口波导接头及其等效网络

集总参数电路。其中端口参考面 S_1 、 S_2 、 \dots S_N 应选取在离接头足够远处, 使得在 S_1 、 S_2 、 \dots S_N 处, 非传输型模已衰减掉, 只有端口波导的传输模。既然波导接头等效成集总参数电路, 它便会对端口波导中的传输模产生反射、透射等影响。这种影响可以用参考面上的电压、电流或入射波、反射波来表示, 而等效电路中的集总参数则可用计算或测量方法获得。波导接头一边的电压、电流或入射波、反射波同另一边的电压、电流或入

射波、反射波之间的关系就可以用适当的阻抗、导纳、转移或传输矩阵联系起来。此阻抗、导纳等矩阵(称之为波导接头的波矩阵)可用来确定一个等效集总参数网络，以描述此波导接头的性质。

1. 波导接头的Z、Y、A矩阵

与2.12节所述相似，当适当地规定参考面处电压和电流时，波导接头的特性可用阻抗(Z)矩阵、导纳(Y)矩阵或转移(A)矩阵来描述。下面以二端口接头为例来加以讨论。

如图7.5-2(a)所示二端口波导接头，可以等效为图7.5-2(b)所示二端口网络。图中 U_1 、 I_1 为输入端参考面 S_1 处的电压和电流， U_2 和 I_2 为输出端参考面 S_2 处的电压和电流。我们已经假定波导中的媒质是线性的，则参考面上的电压和电流之间的关系也是线性的。

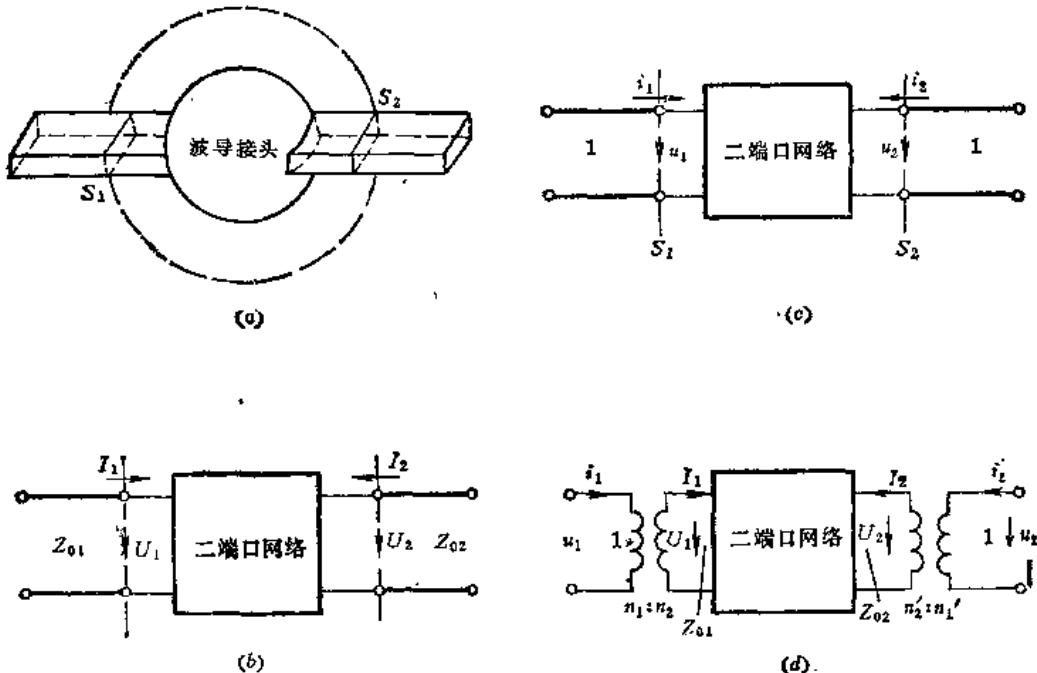


图7.5-2 二端口波导接头及其等效网络

电压 U_i 和电流 I_i 同阻抗矩阵(Z)、导纳矩阵(Y)、转移矩阵(A)之间的关系如下：

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

或者

$$(U) = (Z)(I) \quad (7.5-1)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

或者

$$(I) = (Y)(U) \quad (7.5-2)$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

或者

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = (A) \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (7.5-3)$$

如果互易关系成立，则

$$Z_{12} = Z_{21} \quad (7.5-4)$$

$$Y_{12} = Y_{21} \quad (7.5-5)$$

$$\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1 \quad (7.5-6)$$

假如接头是对称的，则

$$Z_{11} = Z_{22} \quad (7.5-7)$$

$$Y_{11} = Y_{22} \quad (7.5-8)$$

$$A_{11} = A_{22} \quad (7.5-9)$$

波导接头的端口波导的型式有时不同，即接不同传输线情况。在此种情况下，为计算简便和通用起见，需将各端口的电压、电流、阻抗进行归一化，使网络的矩阵参数与端口波导的等效阻抗无关。所谓归一化是指把网络各端口的阻抗对其等效阻抗归一化。令

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = \frac{U_1}{\sqrt{Z_{01}}} = U_1 \sqrt{Y_{01}}, \quad i_1 = I_1 \sqrt{Z_{01}} \\ u_2 = \frac{U_2}{\sqrt{Z_{02}}} = U_2 \sqrt{Y_{02}}, \quad i_2 = I_2 \sqrt{Z_{02}} \end{array} \right\} \quad (7.5-10)$$

则可得到：

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (7.5-11)$$

式中

$$\left. \begin{array}{l} z_{11} = \frac{Z_{11}}{Z_{01}} \\ z_{22} = \frac{Z_{22}}{Z_{02}} \\ z_{12} = \frac{Z_{12}}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} \\ z_{21} = \frac{Z_{21}}{\sqrt{Z_{02}Z_{01}}} \end{array} \right\} \quad (7.5-12)$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (7.5-13)$$

式中

$$\left. \begin{array}{l} y_{11} = Y_{11}Z_{01} \\ y_{22} = Y_{22}Z_{02} \\ y_{12} = Y_{12}\sqrt{Z_{01}Z_{02}} \\ y_{21} = Y_{21}\sqrt{Z_{02}Z_{01}} \end{array} \right\} \quad (7.5-14)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad (7.5-15)$$

式中

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} = A_{11} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \\ a_{22} = A_{22} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \\ a_{12} = \frac{A_{12}}{\sqrt{Z_{01} Z_{02}}} = A_{12} \sqrt{Y_{01} Y_{02}} \\ a_{21} = A_{21} \sqrt{Z_{02} Z_{01}} \end{array} \right\} \quad (7.5-16)$$

归一化后的等效网络如图7.5-2(c)所示。此时，输入、输出端口的阻抗归一化为1。归一化的结果，相当于在网络的输入端口和输出端口分别加上一个匝数比为 $\sqrt{Z_{01}} : 1$ 和 $\sqrt{Z_{02}} : 1$ 的理想变压器，如图7.5-2(d)所示。

转移(A)矩阵又称为链矩阵，其元素无明确的物理意义，但特别适用于分析网络的级联情况，故使用较多。如图7.5-3所示，

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^N \begin{bmatrix} (A_{11})_i & (A_{12})_i \\ (A_{21})_i & (A_{22})_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{N+1} \\ I_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_{\text{总}} \begin{bmatrix} U_{N+1} \\ I_{N+1} \end{bmatrix} \quad (7.5-17)$$

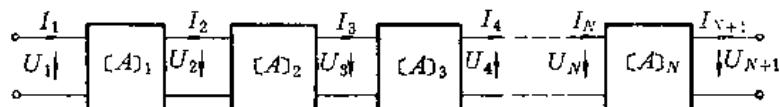


图7.5-3 N 个二端口网络的级联

于是得到

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_{\text{总}} = \prod_{i=1}^N \begin{bmatrix} (A_{11})_i & (A_{12})_i \\ (A_{21})_i & (A_{22})_i \end{bmatrix} = (A)_1 (A)_2 (A)_3 \cdots (A)_N \quad (7.5-18)$$

即是说，级联网络总的 A 矩阵等于各单个网络 A 矩阵之积。需要指出的是，矩阵乘法是不满足交换律的，因此，在求矩阵乘积时，矩阵的前后次序必须同级联网络的排列次序完全一致。

A 矩阵可以很方便地用来求级联二端口网络的输入阻抗。事实上，当终端接负载阻抗 Z_L 时， $U_{N+1}/I_{N+1}=Z_L$ ，则级联二端口网络的输入阻抗为

$$Z_{in} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{11}Z_L + A_{12}}{A_{21}Z_L + A_{22}} \quad (7.5-19a)$$

假如 $I_{N+1}=0$ ，即终端开路，则

$$Z_{in} = \frac{A_{11}U_{N+1}}{A_{21}U_{N+1}} = \frac{A_{11}}{A_{21}} \quad (7.5-19b)$$

假如 $U_{N+1}=0$ ，即终端短路，则

$$Z_{in} = \frac{A_{12}I_{N+1}}{A_{22}I_{N+1}} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad (7.5-19c)$$

表 7.5-1 给出了几种基本二端口电路的 Z 、 Y 、 A 矩阵。

2. 散射 (S) 矩阵及其性质

上述 Z 、 Y 、 A 矩阵都是用电压和电流来表示接头特性的。但是，电压和电流概念在微波频率已失去明确的物理意义，而用电压和电流定义的 Z 参数、 Y 参数和 A 参数在微波频率也难以测量，因为测量所需参考面的开路和短路条件在微波情况下往往难以实现。为了研究微波电路的特性，设计微波电路的结构，就需要一种在微波频率能用测量方法确定的网络矩阵参数。这样的参数便是散射参数，简称 S 参数。

除了用电压、电流以外，我们还可以用入射波和反射波来表示波导接头的特性。采用入射波和反射波表示的波矩阵有散射矩阵和传输矩阵。

(1) 散射矩阵的定义

由式 (2.2-21) 知，传输线上任一点的电压和电流为

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z} \\ I(z) &= \frac{U^+ e^{-\gamma z} - U^- e^{\gamma z}}{Z_0} \end{aligned} \right\} \quad (7.5-20)$$

式中 U^+ 和 U^- 分别代表入射波电压和反射波电压。由上式可得

$$\left. \begin{aligned} U^+ e^{-\gamma z} &= \frac{1}{2} [U(z) + Z_0 I(z)] \\ U^- e^{\gamma z} &= \frac{1}{2} [U(z) - Z_0 I(z)] \end{aligned} \right\} \quad (7.5-21)$$

两边除以 $\sqrt{Z_0}$ ，定义如下归一化入射波和归一化反射波：

$$\left. \begin{aligned} a &\equiv \frac{U^+ e^{-\gamma z}}{\sqrt{Z_0}} = \frac{1}{2} \left[\frac{U(z)}{\sqrt{Z_0}} + \sqrt{Z_0} I(z) \right] \\ b &\equiv \frac{U^- e^{\gamma z}}{\sqrt{Z_0}} = \frac{1}{2} \left[\frac{U(z)}{\sqrt{Z_0}} - \sqrt{Z_0} I(z) \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.5-22)$$

显然

$$\frac{b}{a} = \frac{U^- e^{\gamma z}}{U^+ e^{-\gamma z}} = \frac{U^-}{U^+} e^{2\gamma z} = \Gamma(z) \quad (7.5-23)$$

由式 (7.5-22) 解得

$$\left. \begin{aligned} U &= (a + b)\sqrt{Z_0} \\ I &= \frac{(a - b)}{\sqrt{Z_0}} \end{aligned} \right\} \quad (7.5-24a)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} u &= a + b \\ i &= a - b \end{aligned} \right\} \quad (7.5-24b)$$

而线上任一点的功率为

$$P = \operatorname{Re} \{UI^*\} = aa^* - bb^* = |a|^2 - |b|^2 \quad (7.5-25)$$

这表明线上任一点的净功率为入射波功率和反射波功率之差。

S 矩阵的定义式为 (见图 7.5-4)，

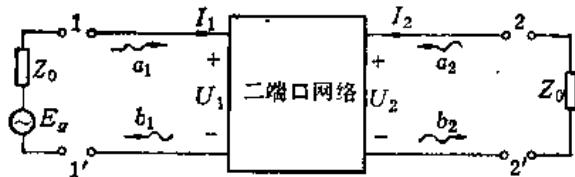


图7.5-4 二端口网络的入射波和反射波

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{array} \right\} \quad (7.5-26 \text{ a})$$

或者

$$[b] = [S][a] \quad (7.5-26 \text{ b})$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (7.5-27)$$

称为散射矩阵，简称S矩阵。其元素 S_{11} 、 S_{12} 、 S_{21} 、 S_{22} 称为散射(S)参数。

散射参数有明确的物理意义：

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} = \Gamma_1, \text{ 表示端口②匹配时端口①的反射系数}$$

$$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} = \Gamma_2, \text{ 表示端口①匹配时端口②的反射系数}$$

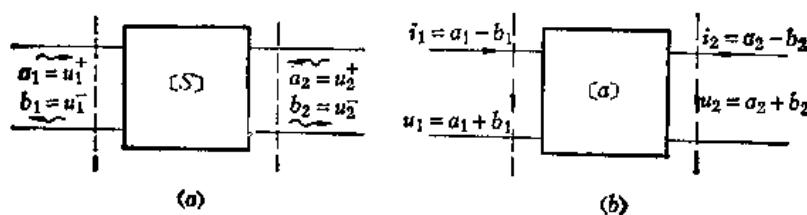
$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} = t_{21}, \text{ 表示端口①匹配时端口②到端口①的传输系数}$$

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = t_{12}, \text{ 表示端口②匹配时端口①到端口②的传输系数}$$

由此可见，S参数代表反射系数或传输系数，是矢量。由于匹配条件在微波频率容易实现，故S参数容易测量。S矩阵是分析和设计微波电路的有力工具，被广泛用于微波网络的分析和综合中。

(2) S参数与z、y、a参数的关系

在分析和计算微波网络问题时，往往需要将S参数转换成z、y、a参数，或相反。在微波网络的分析和综合中应用最多的是S参数与a参数之间的转换关系。下面我们来求二端口网络的S参数与a参数之间的关系。

图7.5-5 $[S]$ 与 $[a]$ 之间的等效

如图7.5-5所示，对应于式(7.5-15)有：

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 = a_{11}(a_2 + b_2) + a_{12}(b_2 - a_2) = (a_{11} - a_{12})a_2 + (a_{11} + a_{12})b_2 \\ a_1 - b_1 = a_{21}(a_2 + b_2) + a_{22}(b_2 - a_2) = (a_{21} - a_{22})a_2 + (a_{21} + a_{22})b_2 \end{array} \right.$$

即

$$\begin{cases} b_1 - (a_{11} + a_{12})b_2 = -a_1 + (a_{11} - a_{12})a_2 \\ -b_1 - (a_{21} + a_{22})b_2 = -a_1 + (a_{21} - a_{22})a_2 \end{cases}$$

或者

$$\begin{bmatrix} 1 & -(a_{11} + a_{12}) \\ -1 & -(a_{21} + a_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & (a_{11} - a_{12}) \\ -1 & (a_{21} - a_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

由此得到

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & (a_{11} - a_{12}) \\ -1 & (a_{21} - a_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -(a_{11} + a_{12}) \\ -1 & -(a_{21} + a_{22}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

与 $[S]$ 方程比较即得到

$$\begin{aligned} [S] &= \begin{bmatrix} -1 & (a_{11} - a_{12}) \\ -1 & (a_{21} - a_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -(a_{11} + a_{12}) \\ -1 & -(a_{21} + a_{22}) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}} \begin{bmatrix} (a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}) & 2 \det[a] \\ 2 & (a_{22} + a_{12} - a_{21} - a_{11}) \end{bmatrix} \quad (7.5-28a) \end{aligned}$$

对于互易网络, $\det[a] = 1$, 则

$$[S] = \frac{1}{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}} \begin{bmatrix} (a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}) & 2 \\ 2 & (a_{22} + a_{12} - a_{21} - a_{11}) \end{bmatrix} \quad (7.5-28b)$$

用同样的方法可求得 $[S]$ 与 $[z]$ 、 $[y]$ 之间的转换关系, 结果见表 7.5-2。

(3) 散射矩阵的性质

散射矩阵有几个很重要的性质。这些性质在微波电路特性的分析中有着重要的应用。

① 互易网络散射矩阵的对称性

一般而言, 对于 N 端口网络

$$\left. \begin{array}{l} u_m = a_m + b_m \\ i_m = a_m - b_m \end{array} \right\} \quad (7.5-29)$$

则

$$\left. \begin{array}{l} a_m = \frac{1}{2} (u_m + i_m) \\ b_m = \frac{1}{2} (u_m - i_m) \end{array} \right\} \quad (7.5-30)$$

假如各端口的等效阻抗均相等, 则由阻抗矩阵方程可得, $u_m = \sum_{k=1}^N z_{mk} i_k$ 。代入上式得

$$\left. \begin{array}{l} a_m = \frac{1}{2} \sum_k (z_{mk} + \delta_{mk}) i_k \\ b_m = \frac{1}{2} \sum_k (z_{mk} - \delta_{mk}) i_k \end{array} \right\} \quad (7.5-31)$$

式中 δ_{mk} 为 δ 函数, 当 $k \neq m$ 时, $\delta_{mk} = 0$; 当 $k = m$ 时, $\delta_{mk} = 1$ 。于是上式可用矩阵表

示成

$$\left. \begin{aligned} (a) &= -\frac{1}{2}((z) + (1))(i) \\ (b) &= -\frac{1}{2}((z) - (1))(i) \end{aligned} \right\} \quad (7.5-32)$$

式中 (1) 为单位矩阵。

由式 (7.5-32) 求得

$$(b) = ((z) - (1))((z) + (1))^{-1}(a)$$

因此得到

$$(S) = ((z) - (1))((z) + (1))^{-1}$$

令

$$\left. \begin{aligned} (G) &= (z) + (1) \\ (F) &= (z) - (1) \end{aligned} \right\}$$

则

$$(S) = (F)(G)^{-1} \quad (7.5-33)$$

而

$$\begin{aligned} (F)(G) &= ((z) - (1))((z) + (1)) \\ &= (z)^2 + (z)(1) - (1)(z) - (1)^2 \\ &= (z)^2 - (1) \\ (G)(F) &= ((z) + (1))((z) - (1)) \\ &= (z)^2 - (z)(1) + (1)(z) - (1)^2 \\ &= (z)^2 - (1) \end{aligned}$$

故有

$$(F)(G) = (G)(F) \quad (7.5-34)$$

在此式两边的左右都乘 $(G)^{-1}$, 得到

$$(G)^{-1}(F)(G)(G)^{-1} = (G)^{-1}(G)(F)(G)^{-1}$$

因为 $(G)(G)^{-1} = (G)^{-1}(G) = (1)$, 因而

$$(G)^{-1}(F) = (F)(G)^{-1}$$

代入式 (7.5-33), 得到

$$(S) = (G)^{-1}(F)$$

取转置, 并注意到 (F) 、 (G) 都是互易的, 则得

$$\begin{aligned} (S)^T &= ((G)^{-1}(F))^T = (F)^T((G)^T)^{-1} \\ &= (F)(G)^{-1} = (G)^{-1}(F) = (S) \end{aligned} \quad (7.5-35)$$

由此可见, 散射矩阵是对称矩阵。其元素

$$S_{mk} = S_{km} \quad (7.5-36)$$

需要注意的是, 假如电路各端口的阻抗不相同时, 则

$$(S) \neq (S)^T, \quad S_{mk} \neq S_{km}$$

② 无源微波电路的耗散矩阵 $(D) = (1) - (S)^T(S)$ 为非负厄米矩阵, 且 $|S_{mk}| \leq 1$ 。

输入 N 端口接头的复功率为

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{i=1}^N U_i I_i^* = (U)^T (I)^* = (I)^T (U) \\
&= ((a) - (b))^{T*} ((\sqrt{Z_0})^T)^{-1} (\sqrt{Z_0}) ((a) + (b)) \\
&= ((a)^T - (b)^T) ((a) + (b)) \\
&= (a)^T ((1) - (S)^T) ((1) + (S)) (a) \\
&= (a)^T ((1) - (S)^T (S)) (a) - (S)^T ((S) - (S)^T) (a) \\
&= (a)^T (D)(a) + (a)^T (Q)(a) \quad (7.5-37)
\end{aligned}$$

式中

$$(D) = (1) - (S)^T (S) \text{ 称为耗散矩阵} \quad (7.5-38)$$

$$(Q) = (S) - (S)^T \quad (7.5-39)$$

由于

$$(D)^T = (1) - ((S)^T (S)^*)^T = (1) - (S)^T (S) = (D)$$

$$(Q)^T = (S)^T - (S) = -(Q)$$

所以 (D) 为厄米矩阵，而 (Q) 为反厄米矩阵。则式 (7.5-37) 中右边第一项，由厄米矩阵性质知

$$(a)^T (D)(a) = \text{实数}$$

而根据反厄米矩阵性质， (Q) 可用厄米矩阵乘以 $j (= \sqrt{-1})$ 来表示，因此

$$(a)^T (Q)(a) = \text{虚数}$$

将式 (7.5-37) 与式 (7.4-1) 比较则得

$$\left. \begin{array}{l} (a)^T (D)(a) = P_k \geq 0 \\ (a)^T (Q)(a) = 2j\omega(W_m - W_n) \end{array} \right\} \quad (7.5-40)$$

可见 $(D) = (1) - (S)^T (S)$ 为非负厄米矩阵，即为半正定的。其元素

$$\left. \begin{array}{l} D_{mk} = D_{km}^* = \sum_{i=1}^N S_{im}^* S_{ik} \quad (k \neq m) \\ D_{mm} = 1 - \sum_{i=1}^N |S_{im}|^2 \leq 1 \quad (k = m) \end{array} \right\} \quad (7.5-41)$$

由于 (a) 为任意矢量，如果 $(a) = (0, \dots, 0, a_m, 0, \dots, 0)^T$ ，则由式 (7.5-40) 第一式知， $D_{mm} \geq 0$ ，于是有

$$\sum_{i=1}^N |S_{im}|^2 \leq 1 \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (7.5-42)$$

这表明，在无源微波电路中， S 参数的绝对值 $|S_{mk}|$ 不能大于 1，即

$$|S_{mk}| \leq 1 \quad (m, k = 1, 2, \dots, N) \quad (7.5-43)$$

③ 无耗微波电路散射矩阵的么正性

所谓散射矩阵的么正性是指当电路无耗时，

$$(S)^T (S) = (1) \quad (7.5-44)$$

如果电路又可逆，则

$$(S)^*(S) = [1] \quad (7.5-45)$$

此性质在微波电路特性的分析中很有用，可用电磁场原理来加以证明。

如图7.5-1(a)所示波导接头，设其内填充的媒质为均匀各向同性，电场和磁场强度各为 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} ，则应满足麦克斯韦方程：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (7.5-46)$$

为了证明 (S) 的么正性，需要导出电路中的电磁场能量关系，为此，将复数坡印亭矢量取散度，并应用矢量代数关系式，得到

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = -\frac{1}{2} (\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^*)$$

将式(7.5-46)代入得到

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= -\frac{1}{2} [\mathbf{H}^* \cdot (-j\omega\mu\mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot (-j\omega\epsilon\mathbf{E}^* + \sigma\mathbf{E}^*)] \\ &= -\frac{1}{2} \sigma\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* - \frac{1}{2} j\omega(\mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \epsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \\ &= -\frac{1}{2} \sigma|\mathbf{E}|^2 - \frac{1}{2} j\omega(\mu|\mathbf{H}|^2 - \epsilon|\mathbf{E}|^2) \\ &= -P_R - j2\omega(w_m - w_e) \end{aligned}$$

即

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = P_R + j2\omega(w_m - w_e) \quad (7.5-47)$$

式中， w_m 和 w_e 分别代表时间平均磁能密度和电能密度， P_R 代表单位体积的电阻损耗。将上式取体积积分，并应用高斯散度定理，得到

$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = P_R + j2\omega(W_m - W_e) \quad (7.5-48)$$

此即电磁能量守恒定律。它表示流进某一封闭表面的功率等于该表面所包围体积里的电阻损耗与磁场和电场的储能变化率。将此关系应用到图7.5-1所示N端口接头，因为网络与外面交换能量只能通过几个端口，亦即 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ 的积分只在几个端口截面上才有值，且等于各个端口的电压、电流的乘积之和，即

$$\sum_{i=1}^N \int_{S_i} U_i I_i^* \mathbf{e}_i \times \mathbf{h}_i \cdot \hat{n} ds = \sum_{i=1}^N U_i I_i^* = P_R + j2\omega(W_m - W_e) \quad (7.5-49)$$

将式(7.5-24)代入式(7.5-49)，得到

$$\sum_{i=1}^N (a_i + b_i)(a_i - b_i)^* = P_R + j2\omega(W_m - W_e)$$

将左边乘积展开，并分开实部与虚部，得到

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N (a_i a_i^* - b_i b_i^*) &= P_R \\ \sum_{i=1}^N (a_i^* b_i - a_i b_i^*) &= j2\omega(W_m - W_e) \end{aligned} \right\} \quad (7.5-50)$$

式(7.5-50)第一式用矩阵表示为

$$[a_i^*]^T \cdot [a_i] - ([S]^* [a_i]^*)^T \cdot [S] [a_i] = P_R$$

对于无耗微波电路, $P_R = 0$, 则

$$[a_i]^T \cdot [1] [a_i] - ([S]^* [a_i]^*)^T \cdot [S] [a_i] = 0$$

$$[a_i]^T \cdot [1] [a_i] - [a_i]^T \cdot [S]^T \cdot [S] [a_i] = 0$$

$$[a_i]^T \cdot \{[1] - [S]^T [S]\} [a_i] = 0$$

即得

$$[1] - [S]^T [S] = 0$$

或

$$[S]^T [S] = [1]$$

此即 $[S]$ 的么正性。对于可逆网络, 转置矩阵即等于其本身, 则有

$$[S]^* [S] = [1]$$

④ 参考面移动时 S 参数的幅值不变

如图 7.5-1 所示, 如果将端口 m 的参考面 S_m 向外移动 l_m 后得到新的参考面 S'_m , 设新参考面处的入射波和反射波分别为 a'_m 和 b'_m , 则有

$$\left. \begin{array}{l} a_m = e^{-j\beta_m l_m} a'_m = p_m a'_m \\ b'_m = e^{j\beta_m l_m} b_m = p_m b_m \end{array} \right\} \quad (7.5-51)$$

式中

$$p_m = e^{-j\beta_m l_m}$$

用矩阵表示为

$$\left. \begin{array}{l} [p] = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & p_2 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots p_N \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (7.5-52)$$

亦即 $[p]$ 为一对角矩阵。则式(7.5-51)可表示为

$$\left. \begin{array}{l} [a] = [p] [a'] \\ [b'] = [p] [b] \end{array} \right\} \quad (7.5-53)$$

参考面为 S_m 和 S'_m 时网络的散射矩阵分别为 $[S]$ 和 $[S']$, 则有

$$\left. \begin{array}{l} [b] = [S] [a] \\ [b'] = [S'] [a'] \end{array} \right\} \quad (7.5-54)$$

以式(7.5-53)代入式(7.5-54)第二式, 得到

$$[S'] [a'] = [p] [S] [a] = [p] [S] [p] [a']$$

将此式两边乘以 $[a']^{-1}$, 由于 $[a'] [a']^{-1} = [1]$, 因此得到

$$[S'] = [p] [S] [p] \quad (7.5-55)$$

其参数之间的关系为

$$S'_{ij} = S_{ij} e^{-j(\theta_i l_i + \theta_j l_j)} \quad (7.5-56)$$

由此可见, 当参考面移动时, S 参数的幅值不变, 只是相位发生变化, 新的散射参数可由简单的相位关系得到。

3. 传输 (T) 矩阵与网络的级联

传输矩阵(简称 T 矩阵)的定义式为

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = (T) \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (7.5-57)$$

式中 T_{11} 、 T_{12} 、 T_{21} 、 T_{22} 称为传输参数(简称 T 参数)。对于互易网络，则有

$$\det(T) = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1 \quad (7.5-58)$$

如果网络是对称的，则

$$T_{12} = -T_{21} \quad (7.5-59)$$

几个基本二端口电路的 S 矩阵和 T 矩阵如表 7.5-1 所示。

和 A 矩阵一样， T 参数也无明确的物理意义，但传输矩阵对分析和计算分布参数网络的级联非常方便。事实上，如图 7.5-6 所示，级联二端口网络的 T 矩阵方程为



图 7.5-6 N 个网络的级联

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} &= (T)_1 (T)_2 (T)_3 \cdots \cdots (T)_N \begin{bmatrix} b_{N+1} \\ a_{N+1} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^N (T)_i \begin{bmatrix} b_{N+1} \\ a_{N+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{N+1} \\ a_{N+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.5-60)$$

因此

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^N (T)_i \quad (7.5-61)$$

亦即级联网络总的 T 矩阵等于各单个网络 T 矩阵之积。因此，对于由许多基本元件组成的微波组件或系统，可以很方便地求得该组件或系统的 T 矩阵。但为了分析该组件或系统的特性，通常需求出其散射参数，为此就需要知道 T 参数与 S 参数之间的转换关系。这可根据 T 参数的定义来求得。即有

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \frac{a_1}{b_2} \Big|_{a_2=0} = \frac{1}{S_{21}} \\ T_{12} &= \frac{a_1}{b_2} \Big|_{b_2=0} = -\frac{S_{22}}{S_{21}} \\ T_{21} &= \frac{b_1}{b_2} \Big|_{a_2=0} = \frac{S_{11}}{S_{21}} \\ T_{22} &= \frac{b_1}{b_2} \Big|_{b_2=0} = S_{12} - \frac{S_{11}S_{22}}{S_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (7.5-62)$$

表7.5-1 基本二端口电路的矩阵表示

电 压, 电 流 (U, I)		混抗矩阵 [Z]		导纳矩阵 [Y]		移阻矩阵 [A]		散射矩阵 [S]		入射波, 出射波 (a, b)	
		Z_{11}	Z_{12}	Y_{11}	Y_{12}	A_{11}	A_{12}	S_{11}	S_{12}	T_1	T_{12}
		Z_{21}	Z_{22}	Y_{21}	Y_{22}	A_{21}	A_{22}	S_{21}	S_{22}	T_2	T_{22}
	</										

(续)

电 压, 电 流 (U, I)				入射波, 出射波 (a, b)					
$\frac{1}{Y}$		$\frac{1}{Y}$		$\frac{-y}{2+y}$		$\frac{1+y}{2}$			
T_1, T_2 并联端纳		$\frac{1}{Y}$		$1 \quad 0$	$\frac{2+y}{2+y}$	$1 + \frac{y}{2}$	$\frac{y}{2}$		
T_1, T_2 串联阻抗		$\frac{1}{Y}$		$Y \quad 1$	$\frac{-y}{2+y}$	$-\frac{y}{2}$	$1 - \frac{y}{2}$		
设 有				$\frac{-1}{Z} \sim$	$\frac{1}{Z}$	$\frac{z}{2+z}$	$\frac{2}{2+z}$		
设 有				$-\frac{1}{Z}$	$\frac{1}{Z}$	$\frac{2}{2+z}$	$\frac{2}{2+z}$		
设 有				$1 \quad Z$	$\frac{z}{2+z}$	$\frac{2}{2+z}$	$1 + \frac{z}{2}$		
设 有				$0 \quad 1$	$\frac{2}{2+z}$	$\frac{2}{2+z}$	$1 - \frac{z}{2}$		
不同特性阻抗的传输线连接				$1 \quad 0$	$\frac{Z_{02}-Z_{01}}{Z_{02}+Z_{01}} \quad \frac{2\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}{Z_{02}+Z_{01}}$	$\frac{Z_{01}+Z_{02}}{2\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}$	$\frac{Z_{02}-Z_{01}}{2\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}$		
				$0 \quad 1$	$\frac{2\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}{Z_{02}+Z_{01}} \quad \frac{Z_{01}-Z_{02}}{Z_{02}+Z_{01}}$	$\frac{Z_{02}-Z_{01}}{2\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}$	$\frac{Z_{01}+Z_{02}}{2\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}$		

表7.5-2 二端口网络各种网络参数矩阵换算表①

$[z]$	$[y]$	$[s]$	$[s]$	$[T]$
$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{ y } \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{21}} \begin{bmatrix} a_{11} & a \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}$	$z_{11} = \frac{1 + S_{11} - S_{22} - S }{1 - S_{11} - S_{22} + S }$	$z_{11} = \frac{T_{11} + T_{12} + T_{21} + T_{22}}{T_{11} + T_{12} - T_{21} - T_{22}}$
$[z]$			$z_{12} = \frac{2 S_{12}}{1 - S_{11} - S_{22} + S }$	$z_{12} = \frac{2 T }{T_{11} + T_{12} - T_{21} - T_{22}}$
			$z_{21} = \frac{2 S_{21}}{1 - S_{11} - S_{22} + S }$	$z_{21} = \frac{2}{T_{11} + T_{12} - T_{21} - T_{22}}$
			$z_{22} = \frac{1 - S_{11} + S_{22} - S }{1 - S_{11} - S_{22} + S }$	$z_{22} = \frac{T_{11} - T_{12} - T_{21} + T_{22}}{T_{11} + T_{12} - T_{21} - T_{22}}$

$\{y\}$	$\frac{1}{ z } \begin{bmatrix} z_{12} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$y_{11} = \frac{1 - S_{11} + S_{22} - S }{1 + S_{11} + S_{22} + S }$ $y_{12} = \frac{-2S_{12}}{1 + S_{11} + S_{22} + S }$ $y_{21} = \frac{-2S_{21}}{1 + S_{11} + S_{22} + S }$ $y_{22} = \frac{1 + S_{11} - S_{22} - S }{1 + S_{11} + S_{22} + S }$	$y_{11} = \frac{T_{11} - T_{12} - T_{21} + T_{22} - 2 T }{T_{11} - T_{12} + T_{21} - T_{22}}$ $y_{12} = \frac{T_{11} - T_{12} - T_{21} - T_{22}}{T_{11} - T_{12} + T_{21} - T_{22}}$ $y_{21} = \frac{T_{11} + T_{12} + T_{21} + T_{22}}{T_{11} - T_{12} + T_{21} - T_{22}}$ $y_{22} = \frac{T_{11} - T_{12} - T_{21} + T_{22}}{T_{11} - T_{12} + T_{21} - T_{22}}$
	$\frac{1}{a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & - a \\ -1 & a_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$a_{11} = \frac{1}{2S_{21}} (1 + S_{11} - S_{22} - S)$ $a_{12} = \frac{1}{2S_{11}} (1 + S_{11} + S_{22} + S)$ $a_{21} = \frac{1}{2S_{21}} (1 - S_{11} - S_{22} + S)$ $a_{22} = \frac{1}{2S_{11}} (1 - S_{11} + S_{22} - S)$	$a_{11} = \frac{1}{2} (T_{11} + T_{12} + T_{21} + T_{22})$ $a_{12} = \frac{1}{2} (T_{11} - T_{12} + T_{21} - T_{22})$ $a_{21} = \frac{1}{2} (T_{11} + T_{12} - T_{21} - T_{22})$ $a_{22} = \frac{1}{2} (T_{11} - T_{12} - T_{21} + T_{22})$
$\{a\}$	$\frac{1}{z_{21}} \begin{bmatrix} z_{11} & z \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$S_{11} = \frac{ z + z_{11} - z_{22} - 1}{ z + z_{11} + z_{22} + 1}$ $S_{12} = \frac{2z_{12}}{ z + z_{11} + z_{22} + 1}$ $S_{21} = \frac{2z_{21}}{ z + z_{11} + z_{22} + 1}$ $S_{22} = \frac{ z - z_{11} + z_{22} - 1}{ z + z_{11} + z_{22} + 1}$	$S_{11} = \frac{1 - y_{11} + y_{22} - y }{1 + y_{11} + y_{22} + y }$ $S_{12} = \frac{-2y_{21}}{1 + y_{11} + y_{22} + y }$ $S_{21} = \frac{-2y_{12}}{1 + y_{11} + y_{22} + y }$ $S_{22} = \frac{1 + y_{11} + y_{22} + y }{1 + y_{11} + y_{22} + y }$
	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$S_{11} = \frac{a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}}{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}$ $S_{12} = \frac{2 a }{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}$ $S_{21} = \frac{2 a }{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}$ $S_{22} = \frac{-a_{11} + a_{12} - a_{21} + a_{22}}{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}$	$S_{11} = \frac{1}{T_{11}} \begin{bmatrix} T_{21} & T \\ T & -T_{12} \end{bmatrix}$ $S_{12} = \frac{1}{T_{11}} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$
$\{S\}$	$\frac{1}{z} \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$T_{11} = \frac{- y - y_{11} - y_{22} - 1}{2y_{21}}$ $T_{12} = \frac{- y + y_{11} - y_{22} + 1}{2y_{21}}$ $T_{21} = \frac{ y + y_{11} - y_{22} - 1}{2y_{21}}$ $T_{22} = \frac{ y - y_{11} - y_{22} + 1}{2y_{21}}$	$T_{11} = \frac{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}{2}$ $T_{12} = \frac{a_{11} - a_{12} + a_{21} - a_{22}}{2}$ $T_{21} = \frac{a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}}{2}$ $T_{22} = \frac{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}{2}$
	$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$T_{11} = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & - S \end{bmatrix}$	

① 表中 $|z|$, $|y|$, $|a|$, $|S|$, $|T|$ 分别为 $[z]$, $[y]$, $[a]$, $[S]$, $[T]$ 所对应的行列式。

反之则可得到

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{T_{21}}{T_{11}} \\ S_{12} &= T_{22} - \frac{T_{12}T_{21}}{T_{11}} \\ S_{21} &= \frac{1}{T_{11}} \\ S_{22} &= -\frac{T_{12}}{T_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (7.5-63)$$

表 7.5-2 给出了二端口网络各种网络参数矩阵之间的换算关系。

7.6 N 端口波导接头及其网络描述

前面主要讨论的是二端口波导接头及其波矩阵，在实际应用中也常遇到多端口(N 端口)的波导接头，如由几个传输线构成的微波接头、具有多个端口的微波元件与多模传输的元件等，这种 N 端口波导接头可用 N 端口网络来等效，如图 7.5-1 所示。本节将讨论 N 端口波导接头的网络描述方法。

如图 7.5-1 所示 N 端口波导接头，设端口 p_i 上的复功率为 P_i ，则从体积 V 流出的全部复功率为

$$P = \sum_{i=1}^N P_i = P_R + 2j\phi(W_m - W_s) \quad (7.6-1)$$

而

$$P_i = -\frac{1}{2} \int_{S_i} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)_{n_i} ds_i \quad (7.6-2)$$

式中 n_i 表示端口 p_i 的外向法线， P_R 是 P 的实部，是体积 V 内消耗的功率， W_m 和 W_s 分别为体积内磁场和电场的储能。对于无源系统， $P_R \geq 0$ 。假定所有端口波导都是标准波导，各端口波导中传输的模式为相应的主模；设第 i 个端口波导中主模的模式电压和模式电流分别为 U_i 和 I_i ，则

$$P_i = U_i I_i^* \quad (7.6-3)$$

图 7.5-1(a) 所示 N 端口接头可用图 7.6-1 所示 N 端口网络来等效。



图 7.6-1 N 端口网络

1. N 端口接头的波矩阵

图 7.6-1 所示 N 端口网络的电压和电流可用矩阵表示为：

$$(\mathbf{U}) = [U_1, U_2, \dots, U_N]^T \quad (7.6-4)$$

$$[I] = [I_1, I_2, \dots, I_N]^T \quad (7.6-5)$$

式中符号“ T ”表示转置。于是复功率 P 和有效功率 P_R 可写成

$$P = \sum_{i=1}^N U_i I_i^* = [U]^T [I]^* = [I]^T [U] \quad (7.6-6)$$

$$P_R = \operatorname{Re} P = -\frac{1}{2}([I]^T [U] + [U]^T [I]) \geq 0 \quad (7.6-7)$$

$[U]$ 与 $[I]$ 之间有如下关系：

$$[U] = [Z][I], \quad [Z] = [Z_{ij}] \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (7.6-8)$$

$$[I] = [Y][U], \quad [Y] = [Y_{ij}] \quad (7.6-9)$$

$$[Z][Y] = [Y][Z] = [1] \quad (7.6-10)$$

式中， $[Z]$ 和 $[Y]$ 分别为 N 端口的阻抗矩阵和导纳矩阵， $[1]$ 为单位矩阵。

令

$$\left. \begin{array}{l} U_i \sqrt{Y_{ii}} = a_i + b_i \\ I_i \sqrt{Z_{ii}} = a_i - b_i \end{array} \right\} \quad (7.6-11)$$

式中， Z_{ii} 和 Y_{ii} 分别为端口波导 i 的特性阻抗和特性导纳， a_i 和 b_i 分别代表第 i 个端口波导参考面 S_i 上的归一化入射波和归一化出射波。对于 N 端口网络，

$$[a] = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$$

$$[b] = [b_1, b_2, \dots, b_N]^T$$

则有

$$[b] = [S][a] \quad (7.6-12)$$

$[S]$ 即为 N 端口网络的散射矩阵。由式(7.6-12)可以得到端口 p_i 上的出射波为

$$b_i = S_{i1}a_1 + S_{i2}a_2 + \dots + S_{ii}a_i + \dots + S_{iN}a_N$$

其中 $S_{ii}a_i$ 为端口 p_i 上的反射波， $S_{ij}a_j$ 为从端口 p_j 到端口 p_i 的传输波，可见在 b_i 中同时包含有反射波和传输波。

设各端口波导的特性阻抗为 $Z_{01}, Z_{02}, \dots, Z_{0N}$ ，则

$$\begin{aligned} [Z_0^{1/2}] &= \operatorname{diag} \cdot [Z_{01}^{1/2}, Z_{02}^{1/2}, \dots, Z_{0N}^{1/2}] \\ &= \operatorname{diag} \cdot [Z_{01}^{-1/2}, Z_{02}^{-1/2}, \dots, Z_{0N}^{-1/2}]^{-1} \\ &= [Y_0^{1/2}] \end{aligned} \quad (7.6-13)$$

式中符号 diag 代表对角线矩阵。则与式(7.6-11)对应的，对于 N 端口网络，应有

$$\left. \begin{array}{l} [Y_0^{1/2}][U] = [a] + [b] \\ [Z_0^{1/2}][I] = [a] - [b] \end{array} \right\} \quad (7.6-14)$$

即有

$$\left. \begin{array}{l} [u] = [a] + [b] \\ [i] = [a] - [b] \end{array} \right\} \quad (7.6-15)$$

$[u]$ 和 $[i]$ 分别为归一化电压矩阵和归一化电流矩阵。由式(7.6-15)、(7.6-12)、(7.6-8)、(7.6-9)和(7.6-10)可求得 $[z]$ 、 $[y]$ 和 $[S]$ 之间的关系式如下：

$$[S] = ([z] - [1])([z] + [1])^{-1} \quad (7.6-16)$$

$$[z] = ([1] + [S])([1] - [S])^{-1} \quad (7.6-17)$$

$$[S] = ([1] - [y])([1] + [y])^{-1} \quad (7.6-18)$$

$$[y] = ([1] - [S])([1] + [S])^{-1} \quad (7.6-19)$$

当 N 为偶数 (即 $m = N/2$) 时, 有关系

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N/2} \\ I_1 \\ \vdots \\ I_{N/2} \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} U_{\frac{N}{2}+1} \\ \vdots \\ N_N \\ I_{\frac{N}{2}+1} \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \quad (7.6-20)$$

和

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{N/2} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N/2} \end{pmatrix} = [T] \begin{pmatrix} b_{\frac{N}{2}+1} \\ \vdots \\ b_N \\ a_{\frac{N}{2}+1} \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad (7.6-21)$$

其中 $[A]$ 和 $[T]$ 分别为 N 端口网络的转移矩阵和传输矩阵。

对于 N 端口网络, 为了运算简便起见, 常采用分块矩阵 (或称子矩阵) 形式来表示。例如式 (7.6-12) 可用分块矩阵写成:

$$\begin{matrix} m \{ \begin{bmatrix} b_a \\ \vdots \\ b_b \end{bmatrix} \} & = & m \{ \begin{bmatrix} \overset{m}{\overbrace{S_{aa}}} & \overset{n}{\overbrace{S_{ab}}} \\ S_{ba} & S_{bb} \end{bmatrix} \} \begin{bmatrix} a_a \\ \vdots \\ a_b \end{bmatrix} \} m \\ n \{ \begin{bmatrix} b_a \\ \vdots \\ b_b \end{bmatrix} \} & = & n \{ \begin{bmatrix} \overset{m}{\overbrace{S_{aa}}} & \overset{n}{\overbrace{S_{ab}}} \\ S_{ba} & S_{bb} \end{bmatrix} \} \begin{bmatrix} a_a \\ \vdots \\ a_b \end{bmatrix} \} n \end{matrix} \quad (m+n=N) \quad (7.6-22)$$

式中 (见图 7.6-1):

$$[b_a] = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

$$[b_b] = (b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_N)^T$$

$$[a_a] = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$$

$$[a_b] = (a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_N)^T$$

$$[S_{aa}] = \begin{bmatrix} S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1m} \\ S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2m} \\ \dots \\ S_{m1}, S_{m2}, \dots, S_{mm} \end{bmatrix}$$

$$[S_{ab}] = \begin{bmatrix} S_{1,m+1}, \dots, S_{1N} \\ S_{2,m+1}, \dots, S_{2N} \\ \dots \\ S_{m,m+1}, \dots, S_{mN} \end{bmatrix}$$

$$[S_{ba}] = \begin{bmatrix} S_{m+1,1}, \dots, S_{m+1,m} \\ \dots \\ S_{N,1}, \dots, S_{N,m} \end{bmatrix}$$

$$[S_{bb}] = \begin{bmatrix} S_{m+1,m+1}, \dots, S_{m+1,N} \\ \dots \\ S_{N,m+1} \dots S_{NN} \end{bmatrix}$$

同样，式(7.6-21)可用分块矩阵表示成

$$\begin{aligned} m \left\{ \begin{bmatrix} a_a \\ \vdots \\ b_a \end{bmatrix} \right\} &= m \left\{ \begin{bmatrix} \overset{m}{T_{aa}} & \overset{n}{T_{ab}} \\ \vdots & \vdots \\ T_{ba} & T_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_b \\ \vdots \\ a_b \end{bmatrix} \right\} m \quad (m+n=N) \\ n \left\{ \begin{bmatrix} b_a \\ \vdots \\ a_b \end{bmatrix} \right\} &= n \left\{ \begin{bmatrix} \overset{m}{T_{aa}} & \overset{n}{T_{ab}} \\ \vdots & \vdots \\ T_{ba} & T_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_b \\ \vdots \\ a_b \end{bmatrix} \right\} n \end{aligned} \quad (7.6-23)$$

此时 $m = N/2$ 。

由式(7.6-22)和(7.6-23)可求得 $[T]$ 与 $[S]$ 之间的关系为：

$$[T] = \begin{bmatrix} [S_{ba}]^{-1} & -[S_{ba}]^{-1}[S_{bb}] \\ ([S_{aa}][S_{ba}]^{-1} - [S_{ab}]) - [S_{aa}][S_{ba}]^{-1}[S_{bb}] \end{bmatrix} \quad (7.6-24)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} [T_{ba}][T_{aa}]^{-1} & [T_{bb}] - [T_{ab}][T_{aa}]^{-1}[T_{ba}] \\ ([T_{aa}]^{-1} - [T_{ab}]^{-1}[T_{ba}]) \end{bmatrix} \quad (7.6-25)$$

下面我们来讨论不同性质网络的矩阵表示方法。

(1) 无源网络

对于不包含电源的 N 端口网络，由式(7.6-7)和(7.6-8)可得

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{2} \{([I])^T ([U]) + ([U])^T ([I])\} \\ &= -\frac{1}{2} \{([I])^T ([Z]) [I] + ([Z] [I])^T ([I])\} \\ &= [I]^T ([Z_H]) [I] \geq 0 \end{aligned} \quad (7.6-26)$$

式中

$$[Z_H] = -\frac{1}{2} \{([Z]) + ([Z])^T\} \quad (7.6-27)$$

称为 $[Z]$ 的厄米矩阵。

同样可求得

$$P_R = ([U])^T ([Y_H]) [U] \geq 0 \quad (7.6-28)$$

$$[Y_H] = -\frac{1}{2} \{([Y]) + ([Y])^T\} \quad (7.6-29)$$

式中 $[Y_H]$ 是 $[Y]$ 的厄米矩阵。可见在无源 N 端口网络中， $[Z_H]$ 、 $[Y_H]$ 为半正定的。

将式(7.6-15)代入式(7.6-7)，并利用式(7.6-12)，可得

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{2} \{((a)^T - (b)^T)(a) + (a)^T(b) + ((a)^T + (b)^T)(a - b)\} \\ &= ((1) - [S]^T [S])(a)^T a = [a]^T [D] [a] \geq 0 \end{aligned} \quad (7.6-30)$$

式中

$$[D] = (1) - [S]^T [S] \quad (7.6-31)$$

称为耗散矩阵，为半正定的。

根据式(7.6-31)，将 $[D]$ 的元素用 S 参数表示，则得

$$d_{ij} = d_{ji}^* = \sum_{k=1}^N S_{ki}^* S_{kj} \quad (i \neq j) \quad (7.6-32a)$$

$$d_{ii} = 1 - \sum_{k=1}^N |S_{ki}|^2 \leq 1 \quad (7.6-32b)$$

因为 $[a]$ 为任意矢量, 如果 $[a] = [0, \dots, 0, a_i, 0, \dots, 0]^T$, 则由式 (7.6-30) 可知, $d_{ii} \geq 0$, 于是有

$$\sum_{k=1}^N |S_{ki}|^2 \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (7.6-32c)$$

这表明, 在无源网络中, S 参数的绝对值 $|S_{ij}|$ 不能大于 1, 即

$$|S_{ij}| \leq 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (7.6-33)$$

(2) 无耗网络

对于内部无电阻性元件的无耗 N 端口网络, 由于 $P_R = 0$, 则由式 (7.6-26)、(7.6-28) 和 (7.6-30), 可得

$$[Z] + [Z]^T * = 0 \quad (7.6-34)$$

$$[Y] + [Y]^T * = 0 \quad (7.6-35)$$

$$[S]^T * [S] = [1] \quad (7.6-36)$$

这表明, 对于无耗网络, S 矩阵为么正矩阵, 由式 (7.6-36) 则有

$$\sum_{k=1}^N S_{ki}^* S_{kj} = \delta_{ij} \quad (7.6-37)$$

(3) 可逆网络

当 N 端口网络内部的媒质为各向同性时, 其 ϵ 、 μ 、 σ 为常数, 此时互易定理成立。设模式函数归一化后, 各端口上的模式电压和模式电流为 $U^{(i)}$ 和 $I^{(i)}$ 。为讨论网络的可逆性, 令 $i = 1, 2$, 则有

$$-\frac{1}{2} \int_S (\mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{H}^{(2)})_n ds = ([U^{(1)}])^T [I^{(2)}] \quad (7.6-38)$$

$$-\frac{1}{2} \int_S (\mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{H}^{(1)})_n ds = ([U^{(2)}])^T [I^{(1)}] \quad (7.6-39)$$

由斯托克斯定理

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{H}^{(2)})_n ds &= \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{H}^{(2)}) dv \\ &= \int_V (\mathbf{H}^{(2)} \cdot \nabla \times \mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(1)} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^{(2)}) dv \end{aligned}$$

当 N 端口网络内部的媒质不是理想媒质时, $\sigma \neq 0$, 由麦克斯韦方程:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}$$

于是式 (7.6-38) 变成

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{H}^{(2)}(-j\omega\mu) \mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{E}^{(1)} \cdot (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}^{(2)}) dv \\ &= ([U^{(1)}])^T [I^{(2)}] \end{aligned} \quad (7.6-40)$$

同理，式(7.6-39)变成

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_V \langle \mathbf{H}^{(1)} \cdot (-j\omega\mu) \mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{E}^{(2)} \cdot (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}^{(1)} \rangle dv \\ & = ([U^{(2)}])^T [I^{(1)}] \end{aligned} \quad (7.6-41)$$

由于 ϵ 、 μ 、 σ 为常数，则有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}^{(2)} \cdot (-j\omega\mu) \mathbf{H}^{(1)} &= \mathbf{H}^{(1)} \cdot (-j\omega\mu) \mathbf{H}^{(2)} \\ \mathbf{E}^{(1)} \cdot (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}^{(2)} &= \mathbf{E}^{(2)} \cdot (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (7.6-42)$$

将式(7.6-40)和(7.6-41)代入，得到

$$([U^{(1)}])^T [I^{(2)}] - ([U^{(2)}])^T [I^{(1)}] = 0$$

因为 $[U^{(i)}] = [Z] [I^{(i)}]$, $[I^{(i)}] = [Y] [U^{(i)}]$, 又

$$\begin{aligned} [I^{(2)}]^T [Z]^T [I^{(1)}] &= [I^{(1)}]^T ([I^{(2)}]^T [Z]^T)^T \\ &= [I^{(1)}]^T [Z] [I^{(2)}] \end{aligned}$$

因此得到

$$[I^{(1)}]^T ([Z]^T - [Z]) [I^{(2)}] = 0$$

同样可得

$$[U^{(1)}]^T ([Y]^T - [Y]) [U^{(2)}] = 0$$

由于 $[U^{(i)}]$ 和 $[I^{(i)}]$ 完全是任意的，所以对于可逆网络，有

$$[Z] = [Z]^T \quad (7.6-43)$$

$$[Y] = [Y]^T \quad (7.6-44)$$

另外，由 S 矩阵的特性知，可逆 N 端口网络的 S 矩阵为对称矩阵，即有

$$[S] = [S]^T \quad (7.6-45)$$

(4) 无耗可逆网络

对于无耗可逆 N 端口网络，由式(7.6-43)、(7.6-44)、(7.6-34)和(7.6-35)，可得

$$[Z] + [Z]^* = 2 \operatorname{Re}[Z] = 0 \quad (7.6-46)$$

$$[Y] + [Y]^* = 2 \operatorname{Re}[Y] = 0 \quad (7.6-47)$$

这表明，对于无耗可逆网络， Z_{ij} 和 Y_{ij} 都是纯虚数。由式(7.6-45)和(7.6-36)，则有

$$[S^*][S] = [1] \quad (7.6-48)$$

即 S 矩阵为对称么正矩阵，此时

$$\sum_{j=1}^N S_{ij}^* S_{kj} = \sum_{j=1}^N S_{ji}^* S_{jk} = \delta_{ik} \quad (7.6-49)$$

这表明， S 矩阵的各行各列成为正交归一化的矢量系。

2. 无耗可逆 N 端口网络的性质

根据散射矩阵的么正性可以分析 N 端口网络的一些重要性质。当然，实际的网络不可能是绝对无耗的，但只要其功率损耗足够小，我们还是可以把它当作无耗网络来分析。

这里只分析无耗可逆 N 端口网络的基本性质。

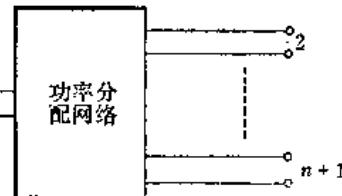
(1) n 路功率分配网络的性质

如图 7.6-2 所示 n 路功率分配器网络 ($1 + n = N$)，功率从端口 1 输入，从端口 $2, 3, \dots, n+1$ 输出。设

$$\begin{aligned} S_{11} &= 0 \\ S_{ii} &= T \quad (i = 2, 3, \dots, n+1) \\ S_{ii} &= \Gamma \quad (i = 2, 3, \dots, n+1) \\ S_{ij} &= I \quad (i \neq j, i, j = 2, 3, \dots, n+1) \end{aligned}$$

则其散射矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & T & T & T \cdots T \\ T & \Gamma & I & I \cdots I \\ T & I & \Gamma & I \cdots I \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T & I & I & I \cdots I \end{bmatrix} \quad (7.6-50)$$



由 $[S]$ 的么正性可得

$$n|T|^2 = 1 \quad (7.6-51\text{a})$$

$$|T|^2 + |\Gamma|^2 + (n-1)|I|^2 = 1 \quad (7.6-51\text{b})$$

$$T^* \Gamma + (n-1) T^* I = 0 \quad (7.6-51\text{c})$$

图 7.6-2 n 路功率分配器网络

由此可得

$$|T| = \sqrt{\frac{1}{n}} \quad (7.6-52)$$

$$|I| = \frac{1}{n} \quad (7.6-53)$$

$$|\Gamma| = \frac{n-1}{n} \quad (7.6-54)$$

结果表明，输入端匹配的对称 n 路功率分配器传输系数的模为 $\sqrt{1/n}$ ，输出各路的反射系数的模为 $(n-1)/n$ ，输出各路之间的隔离度值为 $1/n$ 。

(2) $2n$ 端口网络的性质

如图 7.6-3 所示 $2n$ ($2n = N$) 端口网络，其散射矩阵为

$$\left(\begin{array}{c|c} S_{11} \cdots S_{1n} & S_{1,n+1} \cdots S_{1,2n} \\ \cdots & \cdots \\ S_{n1} \cdots S_{nn} & S_{n,n+1} \cdots S_{n,2n} \\ \hline S_{n+1,1} \cdots S_{n+1,n} & S_{n+1,n+1} \cdots S_{n+1,2n} \\ \cdots & \cdots \\ S_{2n,1} \cdots S_{2n,n} & S_{2n,n+1} \cdots S_{2n,2n} \end{array} \right) = \begin{bmatrix} S_1 & S_1 \\ S_1 & S_W \end{bmatrix} \quad (7.6-55)$$

式中 S_1, S_1, S_1 和 S_W 为分块矩阵。由 $[S]$ 的么正性可得

$$\sum_{i=-1}^{2n} S_{ij}^* S_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{当 } j = k \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } j \neq k \text{ 时} \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots, 2n) \quad (7.6-56)$$

假如 $[S_1] = 0$ ，则有

$$\sum_{i=1}^n S_{ij}^* S_{ik} = 0 \quad (j, k = 1, \dots, n) \quad (7.6-57)$$



图7.6-3 2n端口网络

由式(7.6-56)和(7.6-57)可得

$$\sum_{i=n}^{2n} S_{ij}^* S_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{当 } j = k \\ 0 & \text{当 } j \neq k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

即

$$[S_1^*]^T [S_1] = [1] \quad \text{或} \quad [S_1] [S_1^*]^T = [1] \quad (7.6-58)$$

由于假定网络是可逆的，则 $[S] = [S]^T$ ，故 $[S_1] = [S_1^*]$ 。因此得到

$$[S_1^*]^T [S_1] = [S_1^*] [S_1]^T = ([S_1] [S_1^*]^T)^T = [1]^T = [1]$$

即有

$$\sum_{i=1}^n S_{ij}^* S_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{当 } j = k \\ 0 & \text{当 } j \neq k \end{cases} \quad (j, k = n+1, \dots, 2n) \quad (7.6-59)$$

由式(7.6-56)和(7.6-59)可得

$$\sum_{i=n+1}^{2n} S_{ij}^* S_{ik} = 0 \quad (j, k = n+1, \dots, 2n) \quad (7.6-60a)$$

即得到

$$[S_2] = 0 \quad (7.6-60b)$$

假如 $[S_2] = 0$ ，且 $|S_{ij}| = |T_i|$ ($i = n+1, \dots, 2n$, $j = 1, \dots, n$)，则由式(7.6-58)可得

$$n |T_i|^2 = 1$$

即得到

$$|T_i| = \sqrt{\frac{1}{n}} \quad (7.6-61)$$

上述分析得到的结果表明：(1)若2n端口网络的1至n端口均匹配且互相隔离，则n+1至2n端口也一定都匹配且互相隔离；(2)若1至n端口均匹配且互相隔离，则当功率从1至n任一端口输入，要求在n+1至2n端口上功率分配规律相同(相角不要求相同)，则必为等功率分配。

3. N端口网络的简化

在N端口网络的任一端口上接上负载，则可得到一个用其余端口表示的新的N-1端口网络；如果在N-m ($m < N$)个端口上接上负载，则可得到一个m端口网络。这种方法称为端口的简化。网络端口简化的概念和方法，在理论上和实践中都非常有用。

如图7.6-1所示N端口网络，设在端口 p_N 上接上负载 Z_N ，则端口 p_N 的电压 U_N

和电流 I_N 的关系为 $U_N = -Z_N I_N$ 。根据阻抗方程可得

$$\begin{aligned} \{U_A\} &= \left\{ \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1,N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N-1,1} & \cdots & Z_{N-1,N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N,1} & \cdots & Z_{N,N+1} \end{bmatrix}}_{\{Z_{AA}\}} \left[\begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{N-1} \\ I_N \end{bmatrix} \right] \} \{I_A\} \\ \{U_B\} &= 0 \left\{ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{AN} + Z_N \\ \vdots \\ Z_{NN} + Z_N \end{bmatrix}}_{\{Z_{BB}\}} \left[\begin{bmatrix} I_N \end{bmatrix} \right] \} \{I_B\} \end{aligned} \quad (7.6-62)$$

利用上式中所注分块矩阵，可得

$$\begin{aligned} \{U_A\} &= \{Z_{AA}\} \{I_A\} + \{Z_{AB}\} \{I_B\} \\ 0 &= \{Z_{BA}\} \{I_A\} + \{Z_{BB}\} \{I_B\} \end{aligned} \quad (7.6-63)$$

由此可得

$$\begin{aligned} \{U_A\} &= \{Z'\} \{I_A\} \\ \{Z'\} &= \{Z_{AA}\} - \{Z_{AB}\} \{Z_{BB}\}^{-1} \{Z_{BA}\} \end{aligned} \quad (7.6-64)$$

$\{Z'\}$ 即是简化后所得到的 $N-1$ 端口的阻抗矩阵，其中 $\{Z_{BB}\}$ 是一行一列矩阵， $\{Z_{BB}\}^{-1} = \{Z_{NN} + Z_N\}^{-1}$ 。

同样，如果将端口 p_N 用 Y_N 端接，简化后得到的 $N-1$ 端口的导纳矩阵 $\{Y'\}$ 满足关系：

$$\begin{aligned} \{I_A\} &= \{Y'\} \{U_A\} \\ \{Y'\} &= \{Y_{AA}\} - \{Y_{AB}\} \{Y_{BB}\}^{-1} \{Y_{BA}\} \end{aligned} \quad (7.6-65)$$

也可以用 S 矩阵来讨论端口的简化。当端口 p_N 接上负载 Z_N 时，负载反射系数为

$$\Gamma_N = \frac{Z_N - Z_{0N}}{Z_N + Z_{0N}} = -\frac{Y_N - Y_{0N}}{Y_N + Y_{0N}}$$

由 Z_N 引起的反射波为 $a_N = \Gamma_N b_N$ ，它变成向端口 p_N 的入射波。当 $\Gamma_N \neq 0$ 时，代入散射方程后可以得到

$$\begin{aligned} \{b_A\} &= \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1,N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N-1,1} & \cdots & S_{N-1,N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N,1} & \cdots & S_{N,N+1} \end{bmatrix}}_{\{S_{AA}\}} \left[\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix} \right] \} \{a_A\} \\ \{b_B\} &= 0 \left\{ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{NN} - \Gamma_N^{-1} \\ \vdots \\ S_{NN} - \Gamma_N^{-1} \end{bmatrix}}_{\{S_{BB}\}} \left[\begin{bmatrix} a_N \end{bmatrix} \right] \} \{a_B\} \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \{b_A\} &= \{S'\} \{a_A\} \\ \{S'\} &= \{S_{AA}\} - \{S_{AB}\} \{S_{BB}\}^{-1} \{S_{BA}\} \end{aligned} \quad (7.6-66)$$

$\{S'\}$ 即为简化后的 $N-1$ 端口网络的 S 矩阵。由于

$$\{S_{BB}\} = \frac{\Gamma_N}{S_{NN} \Gamma_N - 1}$$

故 $\{S'\}$ 的元素为

$$S'_{ij} = S_{ij} - \frac{\Gamma_N}{S_{NN}\Gamma_N - 1} S_{IN}S_{NI} \quad (7.6-67)$$

当 $\Gamma_N = 0$ 时, $[S'] = [S_{AA}]$ 。

上面讨论的只是简化一个端口的情况, 对于简化 m 个端口情况, $[Z_{BB}]$ 、 $[Y_{BB}]$ 和 $[S_{BB}]$ 则变成 m 阶矩阵, 而矩阵的形式仍然相同。

4. N 端口网络的匹配

匹配是微波系统中特别重要的问题。我们可以用 S 矩阵来讨论 N 端口网络的匹配问题。前面已经指出, S 参数是相对于端口波导的特性阻抗定义的, 因此连接于端口波导的电源电路和负载电路的反射情况都会直接影响到所有端口的工作。下面我们分别就电源和负载的匹配问题加以讨论。

(1) 电源的匹配

如图 7.6-4 所示连接电源电路的 N 端口网络, 图中 $[\Gamma]$ 是电源电路的 S 矩阵。 $[\Gamma] = 0$ 的电源电路称为匹配电源电路。对于独立电源情况, $[\Gamma]$ 的非对角线元素为零, 此时 $[Z_g] = \text{diag} \cdot [Z_{g1}, Z_{g2}, \dots, Z_{gN}]$ 。当电源电路匹配时, $[\Gamma]$ 的对角元素为零, 此时必须是 $[Z_g] = [Z_0]$ 。

如图 7.6-4 所示, 如果电源不匹配, 则网络入射波 a 中包含有电源提供的 1 次功率入射波 a_0 和电源不匹配引起的反射波 a_1 , 即

$$[a] = [a_0] + [a_1] = [a_0] + [\Gamma][b]$$

于是, 由 $[b] = [S][a]$ 可以得到如下关系:

$$[b] = ((1) - [S][\Gamma])^{-1}[S][a_0] \quad (7.6-68)$$

通常微波传输系统所传输的电磁波并非单纯的正弦波, 而是调制的连续波或脉冲波。在这种情况下, 延迟后的反射波加到网络的入射波上, 对微波多路通信、测量等传输系统的性能都很不利。因此, 在实际工作中都必须使电源电路对端口波导加以匹配。与此同时, 还在电源与输入端口波导之间插入固定衰减器或隔离器, 以便进一步消除反射波的影响。

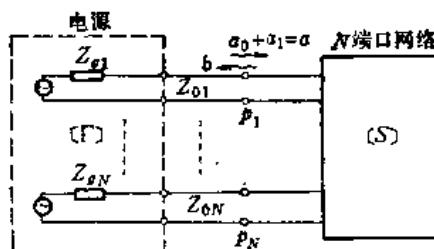
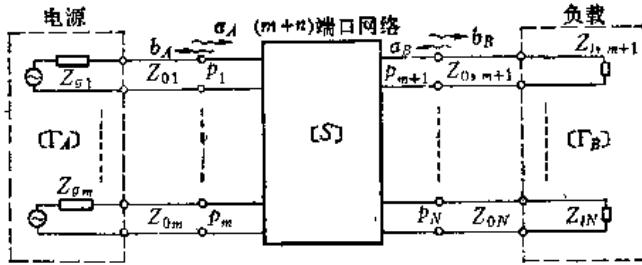


图 7.6-4 连接电源电路的 N 端口网络

(2) 负载的匹配

如图 7.6-5 所示连接电源网络和负载网络的 $m + n$ 端口网络 ($m + n = N$), 输入端口从 p_1 至 p_m 有 m 个, 输出端口从 p_{m+1} 至 p_N 有 n 个, 其 S 矩阵可表示成:

$$\begin{matrix} m & n \\ \underbrace{m}_{m} \left[\begin{matrix} b_A \\ b_B \end{matrix} \right] & = \underbrace{n}_{n} \left(\begin{matrix} S_{AA} & S_{AB} \\ S_{BA} & S_{BB} \end{matrix} \right) \left[\begin{matrix} a_A \\ a_B \end{matrix} \right] \end{matrix} \quad (m + n = N) \quad (7.6-69)$$

图 7.6-5 连接电源网络和负载网络的 N 端口网络

在图 7.6-5 中, $[\Gamma_A]$ 是相对于输入端口波导电源网络的 S 矩阵。设 $[\Gamma_A] \equiv 0$; $[\Gamma_B]$ 是相对于输出端口波导负载网络的 S 矩阵, 对于各输出端口之间无耦合的独立负载情况, $[\Gamma_B]$ 为对角线矩阵。一般情况下, 由于负载的反射, $[a_B] \neq 0$; 对负载而言, $[b_B]$ 为入射波矩阵, $[a_B]$ 为反射波矩阵。于是

$$[a_B] = [\Gamma_B][b_B] \quad (7.6-70)$$

由式 (7.6-69) 可以得到

$$[b_B] = [S_{BA}][a_A] + [S_{BB}][a_B] = [S_{BA}][a_A] + [S_{BB}][\Gamma_B][b_B]$$

即得到

$$[b_B] = ((1) - [S_{BB}][\Gamma_B])^{-1}[S_{BA}][a_A] \quad (7.6-71)$$

式中 (1) 为 n 阶单位矩阵。当 $[\Gamma_B] = 0$ 时, 负载与输出端口波导匹配。此时负载为独立的电阻负载, 其电阻值与输出端口波导的特性阻抗相等。此时, 由式 (7.6-70) 可知, $[a_B] = 0$, 于是有

$$[b_B] = [S_{BA}][a_A] \quad (7.6-72)$$

即表示由负载产生的反射功率等于零。

显然, 要做到负载完全匹配是不可能的。所谓完全匹配, 只能在某特定频率上 (多半是工作频带中心) 近似地实现。因此, 负载通常总是工作在有反射的状态下。

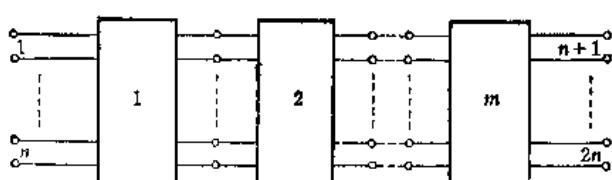
5. N 端口网络的级联

(1) $2n$ 端口网络的级联

前面我们分别用 A 矩阵和 T 矩阵讨论了二端口网络的级联, 结果得到级联网络的 A (或 T) 矩阵等于单个网络的 A (或 T) 矩阵之乘积。这个结果可以推广到 $2n$ 端口网络的级联。

如图 7.6-6 所示 m 个 $2n$ 端口网络级联后总的网络 A 矩阵应为:

$$[A]_A = [A_1][A_2] \cdots [A_m] \quad (7.6-73)$$

图 7.6-6 $2n$ 端口网络的级联

总的级联网络的 T 矩阵应为

$$[T]_a = [T_1][T_2] \cdots [T_m] \quad (7.6-74)$$

两式中所有的 A (或 T) 矩阵均为 2^n 阶方阵。

(2) 级联 n 路一端口网络的 N 端口网络

如图 7.6-7 所示 N 端口网络，其中第 $m+1$ 至第 N 端口均接了一端口网络，共接了 n 个一端口网络，于是 N 端口网络退化为 m 端口网络。

N 端口网络的 S 矩阵可写成：

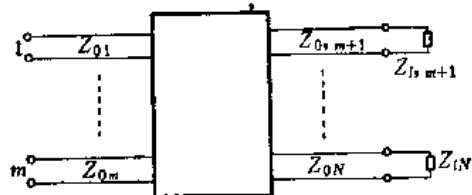


图 7.6-7 接 n 路一端口网络的 N 端口网络

$$\begin{bmatrix} b_A \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{m}{n} \left\{ \begin{bmatrix} S_{AA} & S_{AB} \\ S_{BA} & S_{BB} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} a_A \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (m+n=N) \quad (7.6-75)$$

由于第 $m+1$ 至第 N 端口均接以一端口网络，所以有

$$[a_B] = [\Gamma_L] [b_B] \quad (7.6-76)$$

式中

$$[\Gamma_L] = \begin{bmatrix} \Gamma_{L_{m+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Gamma_{L_{m+2}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Gamma_{LN} \end{bmatrix} \quad (7.6-77)$$

$\Gamma_{L_{m+1}}, \dots, \Gamma_{LN}$ 为相应一端口网络的反射系数。

将式 (7.6-76) 代入式 (7.6-75)，可得

$$\begin{aligned} (b_A) &= \{(S_{AA}) + (S_{AB})(\Gamma_L)((1) - (S_{BB})(\Gamma_L))^{-1}(S_{BA})\}(a_A) \\ &= [S]_m(a_A) \end{aligned} \quad (7.6-78)$$

式中

$$[S]_m = [S_{AA}] + [S_{AB}](\Gamma_L)((1) - [S_{BB}](\Gamma_L))^{-1}[S_{BA}] \quad (7.6-79)$$

即为级联 n 个一端口网络后的 m 端口网络的散射矩阵。

(3) 任意端口级联的网络

如图 7.6-8 所示部分端口级联的 N 端口网络，其中第 $1 \sim m$ 端口未级联，第 $m+1$ 至第 N 端口为级联端口。我们称未级联之所有网络组成的（假想的） N 端口网络散射矩阵为全矩阵，它可以写成式 (7.6-75)。

由图 7.6-8 所示，其级联网络的端口按顺序排列，即第 $(m+1)$ 端口与 $(m+2)$ 端口相联，第 $(m+3)$ 端口与第 $(m+4)$ 端口相联，依此类推，一直到第 $(n-1)$ 端口与第 n 端口相联 ($N-m=n$ 为偶数)，则有

$$[a_B] = [\beta] [b_B] \quad (7.6-80)$$

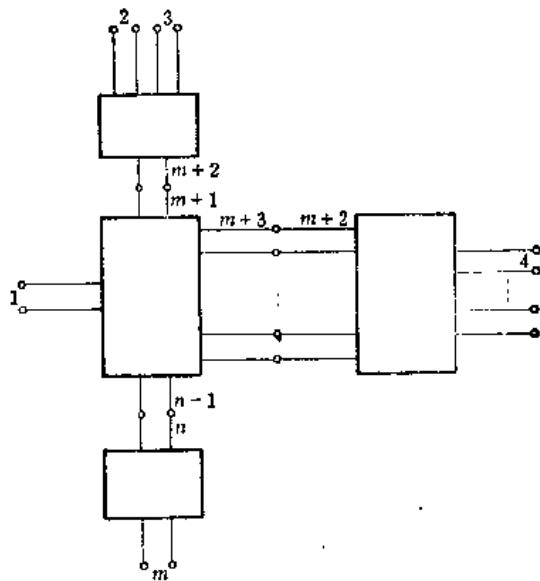


图7.6-8 任意端口级联的N端口网络

式中

$$[\beta] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \cdots & & & \ddots 0 \end{pmatrix} \quad (7.6-81)$$

为n阶方阵。按 $[\beta]$ 的性质，有

$$[\beta][\beta] = [1] \text{ 即 } [\beta] = [\beta]^{-1}$$

因此由式(7.6-75)可以求得图7.6-8中各网络级联后的新的m端口网络的散射矩阵为

$$[S]_m = [S_{AA}] + [S_{AB}]([\beta] - [S_{BB}])^{-1}[S_{BA}] \quad (7.6-82)$$

式(7.6-73)、(7.6-74)、(7.6-79)和(7.6-82)在多端口元件和微波系统的分析中非常有用，而且不论网络是否无耗、是否可逆均适用。

本 章 提 要

1. 本章主要讨论规则波导（或称均匀波导）的等效原理和波导不均匀性（或称波导接头）的描述方法。它是微波网络理论的基础知识。研究结果表明，从能量传输特性上来说，规则波导等效为一对传输线（以双线表示之），而这种等效是与传输的模式有关的，传输一个模式的波导等效为一对传输线，传输多模时等效为多对传输线；如果各个模彼此无关，则等效为多对无耦合的传输线，如果各个模之间有耦合，则等效为多对耦合传输线。

仅仅讨论规则波导等效为传输线，并无实用价值，这只是说明两者能量传输特性上的相似性；但是，规则波导这种等效与波导不均匀性的等效电路结合起来运用时，就具有极重要的理论和实用意义，即构成微波网络理论和微波电路的工程计算的基础。

2. 波导不均匀性可用集总参数电路元件组成的网络来等效，进而可用波矩阵来描述不均匀性（即接头）对规则波导中主模传输特性的影响。

3. 用电压和电流表示的波矩阵，常用的有 Z 、 Y 、 A 矩阵。其中 Z 、 Y 矩阵参数有明确的物理意义， A 矩阵参数无明确物理意义，但它便于网络的级联运算。

用入射波和反射波表示的波矩阵，常用的有 S 矩阵和 T 矩阵。其中 S 矩阵参数有明确的物理意义且便于在微波频率下进行测量，广泛用于分析和设计微波电路； T 矩阵参数无明确的物理意义，但它也便于网络的级联运算。在分析和设计微波组件和系统时，常需利用 T 或 A 矩阵进行运算，然后转换成 S 矩阵，从而分析该组件或系统的特性，设计其电路。

参 考 资 料

- [1] 廖承恩，《微波元件》，西北电讯工程学院，1982年。
- [2] 黄宏嘉，《微波原理》，科学出版社，1963。
- [3] R.E. 柯林，《导波场论》，侯元庆译，上海科学技术出版社，1966。
- [4] 小西良弘，《电磁波电路》，卢慈等译，人民邮电出版社，1981。
- [5] Lawrence N. Dworsky, Modern Transmission Line Theory and Applications, John Wiley & Sons, 1979.
- [6] 板倉清保，熊谷信昭，超高周波回路，才一ム社，1963。
- [7] 小口文一，マイクロ波すよりミリ波回路，丸善株式会社，1964。
- [8] Jerome L. Altman, Microwave Circuits, D. Van Nostrand Company, 1964.

习 题

- 7-1 对于波导中的TE模，由 $\nabla \cdot E = 0$ 和 $E(u, v, z) = \nabla \times \Pi_h(u, v, z)$ 定义了矢量位函数 Π_h ，试求其与标量位函数 Ψ_h 的关系式。
- 7-2 对于波导中的TM模，由 $\nabla \cdot H = 0$ 和 $H(u, v, z) = \nabla \times \Pi_e(u, v, z)$ 定义了矢量位函数 Π_e ，试求其与标量位函数 Ψ_e 的关系式。
- 7-3 试求矩形波导TE₁₀模的归一化本征函数 Ψ ，模式函数 h, e 。
- 7-4 假定矩形波导TE₁₀模的模式电压和模式电流取如下形式：

$$U(z) = - \int_0^b (E_y)_{x=a/2} dy = \text{宽壁中心处的电压}$$

$$I(z) = \int_0^a H_x dx = \text{一个宽壁上总的 } z \text{ 向电流}$$

试导出此波导的等效电路。

- 7-5 求图7-1各电路的 A 矩阵。

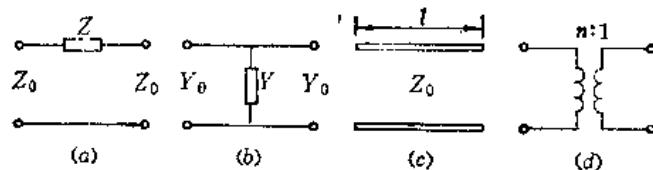


图7-1 习题7-5用图

- 7-6 求图7-2中各电路的 S 矩阵。

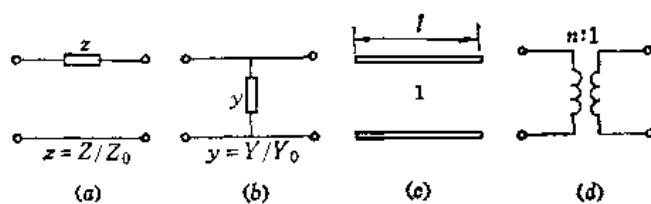


图7-2 习题7-6用图

7-7 如图7-3所示波导阶梯：

- ① 求阶梯处的 T 和 a 矩阵及其等效电路；
- ② 求电长度为 θ_1 和 θ_2 的参考面 S_1 和 S_2 之间电路总的 T 矩阵和 a 矩阵。

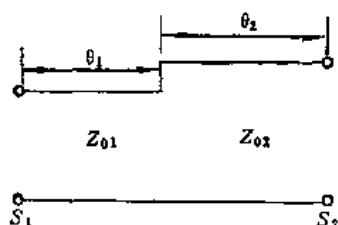


图7-3 习题7-7用图

7-8 如图7-4所示三端口网络，当参考面为 T_1 、 T_2 、 T_3 时的散射矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

若 T_1 外移 $\lambda_{g1}/2$ ， T_2 外移 $\lambda_{g2}/4$ ，分别得到新的参考面 T'_1 和 T'_2 ，试求参考面移动后三端口网络的散射矩阵。

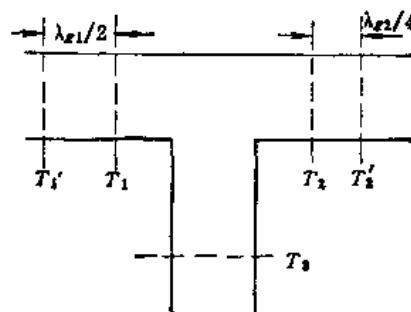


图7-4 习题7-8用图

7-9 如图7-5所示同轴波导转换接头，已知其散射矩阵为：

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

- (1) 求端口②匹配时端口①的驻波系数；
- (2) 求当端口②接负载产生的反射系数为 Γ_2 时，端口①的反射系数；
- (3) 求端口①匹配时端口②的驻波系数。

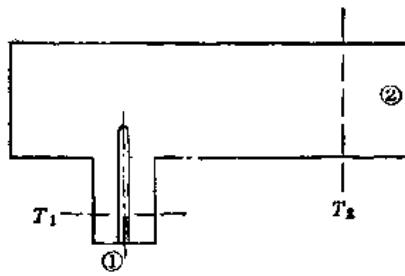


图 7-5 习题 7-9 用图

7-10 如图 7-6 所示微波接头等效电路，今测得

$$S_{11} = -\frac{1 + j}{3 + j}, \quad S_{22} = \frac{1 - j}{3 + j}$$

求理想变压器的匝数比 n 、接头处电纳 B 及 S_{12} 值。

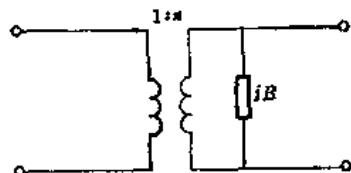


图 7-6 习题 7-10 用图

第八章 微波元件

任何一个微波系统都是由许多作用不同的微波元件和器件组成的。在这一章中将介绍在微波技术中一些常用的微波元件。

我们知道，低频电路中的基本元件是电阻、电容和电感，它们属于集总参数元件。但是，当频率到了微波波段，这些集总参数元件不再适用了。这是因为到了微波波段，这些元件中的寄生参数的影响不能再忽略了，甚至会完全改变其集总参数的性质。因此，到了微波波段必须使用与集总参数元件完全不同的微波元件。

微波元件的种类繁多，按传输线型式可分为波导型、同轴线型、微带线型等；按工作波型可分为单模元件和多模元件；按作用可分为连接元件、终端元件、匹配元件、衰减与相移元件、分路元件、波型变换元件、滤波元件等。在本章中，我们只介绍一些常用元件，并着重定性地分析元件的工作原理与基本特性。

8.1 一端口元件

只有一个端口波导的元件称为一端口元件，其耗散矩阵(D)和散射矩阵(S)都变成标量。由式(7.6-32 b)和(7.6-32 c)得到

$$0 \leq 1 - |S_{11}|^2 = d_{11} \leq 1 \quad (8.1-1)$$

式中 S_{11} 为反射系数。对于无耗一端口元件，由于 $d_{11} = 0$ ，因此 $|S_{11}| = 1$ 。

一端口元件的种类不多，常用的有短路负载、匹配负载和失配负载。下面分别加以介绍。

1. 短路负载

短路负载又称短路器，其作用是将电磁波能量全部反射回去。将波导或同轴线的终端短路（用金属导体全部封闭起来）即构成波导或同轴线短路器。实用中的短路器都做成可调的，称为可调短路活塞。

对短路活塞的主要要求是：（1）保证接触处的损耗小，其反射系数的模应接近1；（2）当活塞移动时，接触损耗的变化要小；（3）大功率运用时，活塞与波导壁（或同轴线内外导体壁）间不应发生打火现象。

可调短路器可用作调配器、标准可变电抗，在微波测量中有着广泛的应用。

短路器的输入阻抗为

$$Z_{in} = jZ_0 \operatorname{tg} \theta \quad (8.1-2)$$

式中， Z_0 为波导或同轴线的特性阻抗， $\theta = 2\pi l/\lambda_s$ ， l 是短路面与参考面之间的长度， λ_s 为波导波长。

短路器的输入端反射系数为

$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{jZ_0 \operatorname{tg} \theta - Z_0}{jZ_0 \operatorname{tg} \theta + Z_0} = -\frac{1 - j \operatorname{tg} \theta}{1 + j \operatorname{tg} \theta} = -e^{-j2\theta} \quad (8.1-3)$$

这表明短路器的输入端反射系数的模应等于1，而相角是可变的。

为了保证反射系数接近于 1，在结构上，短路活塞可做成接触式和扼流式两种形式。

(1) 接触式活塞

在小功率时，常采用直接接触式短路活塞。它由细弹簧片构成，如图 8.1-1 所示。弹簧片长度应为 $\lambda_g/4$ ，使接触处位于高频电流的节点，以减小损耗。

接触式活塞的优点是结构简单；缺点是活塞移动时接触不恒定，弹簧片会逐渐磨损，大功率时易发生打火现象。目前接触式活塞已很少采用。

(2) 扼流式活塞

早期的扼流活塞如图 8.1-2 所示。其有效短路面不在活塞与传输线内壁直接接触处，而是向左移动了半波长。由图 8.1-2 (c) 所示等效电路可以得到 ab 面的输入阻抗为

$$(Z_{in})_{ab} = \frac{Z_{01}^2}{(Z_{in})_{ad}} = R_k \left(\frac{Z_{01}}{Z_{02}} \right)^2 \quad (8.1-4)$$

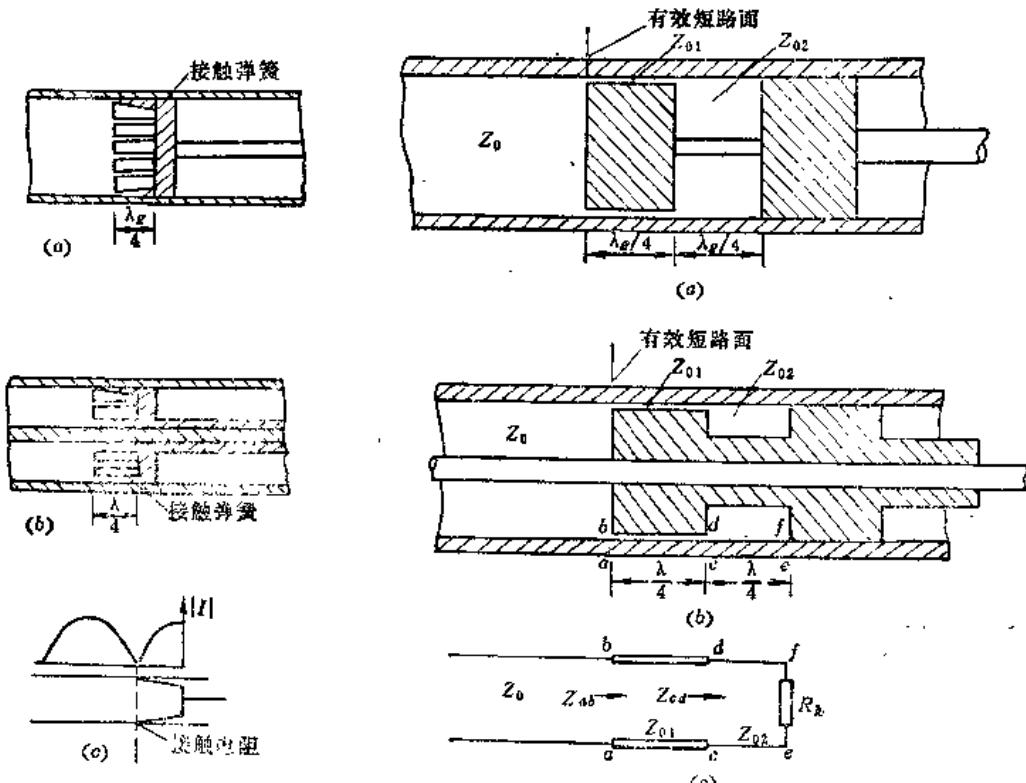


图 8.1-1 接触式短路活塞

(a) 波导活塞; (b) 同轴线活塞;
(c) 作用原理图。

图 8.1-2 扼流活塞的早期结构

(a) 波导型; (b) 同轴线型;
(c) 等效电路。

式中， R_k 为接触电阻。由图可知， $Z_{01} \ll Z_{02}$ ，故 $(Z_{in})_{ab}$ 很小，使活塞与波导（或同轴线）有良好的电接触。

图 8.1-2 所示扼流活塞的优点是损耗小，且损耗稳定；缺点是活塞太长。为了减小长度，可采用图 8.1-3 所示活塞。在这种活塞中，具有较大特性阻抗的第二段被“卷入”第一段活塞内部。此时接触电阻 R_k 不在高频电流波腹处，而是在波节处，因此可使损耗减至最小。实验表明，这种活塞的驻波比可做到大于 100，且当活塞移动时，接触的

稳定性也令人满意。

在同轴元件中，广泛采用S型（或称Z字型）扼流活塞，如图8.1-3（d）所示。S型活塞的频带宽，其最大特点是活塞与同轴线完全分开，因此同轴线内外导体是分开的。这种结构特别适用于需要加直流偏置的有源同轴器件。

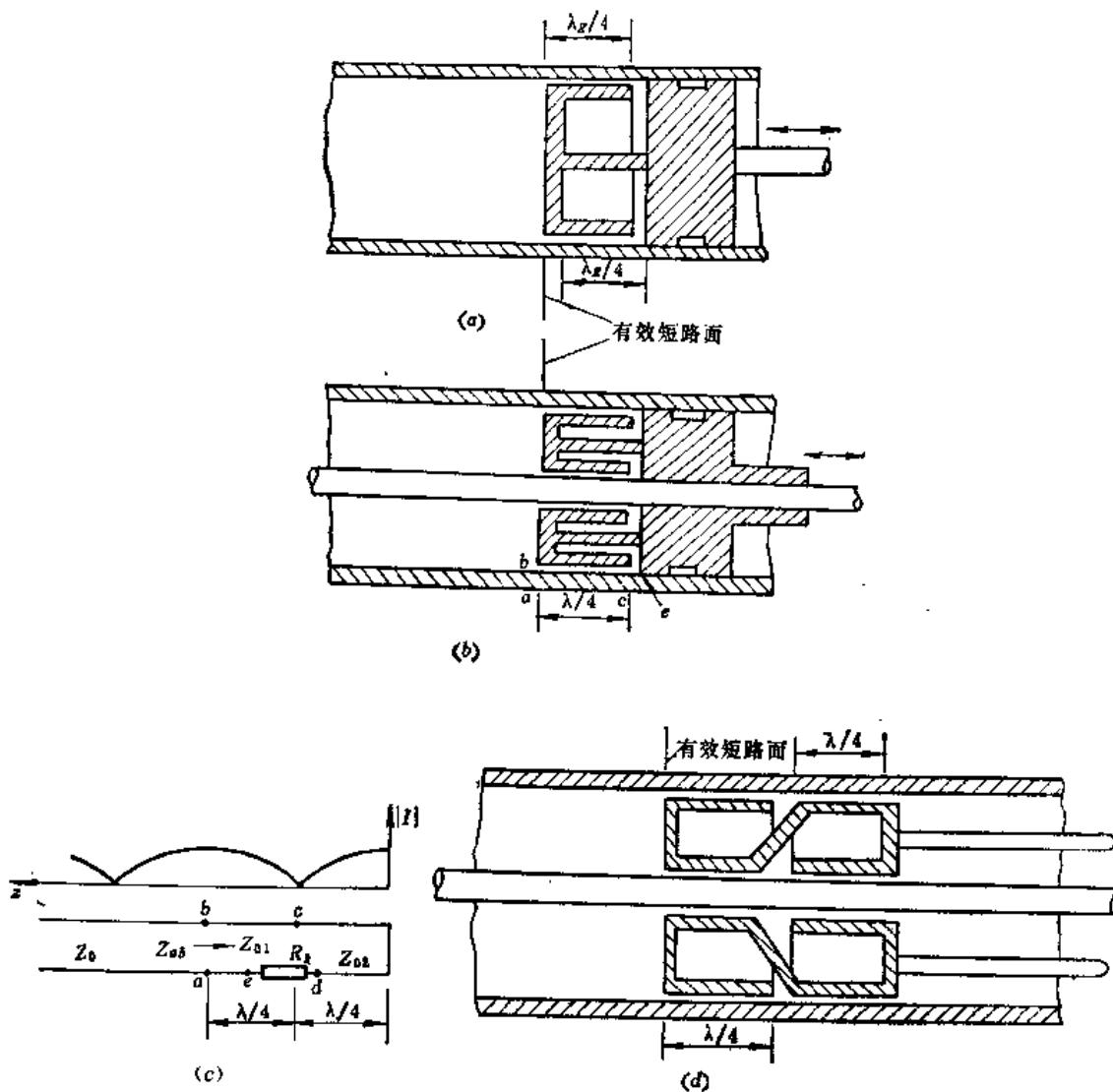


图8.1-3 山字型和S型扼流活塞

(a) 山字型波导活塞；(b) 山字型同轴活塞；(c) 作用原理图；(d) S型同轴活塞。

扼流活塞的缺点是频带窄，一般只能做到10~15%的带宽。

2. 匹配负载

匹配负载是一种能全部吸收输入功率的一端口元件。它是一段终端短路的波导或同轴线，其中放有吸收物质。匹配负载在微波测量中常用作匹配标准，在调整仪器和机器（例如调整雷达发射机）时，常用作等效天线。匹配负载的主要技术指标是工作频带、输入驻波比和功率容量。

根据所吸收的功率大小，匹配负载分为低功率负载（小于1W）和高功率负载（大于1W）。

低功率负载一般用于实验室作终端匹配器，对其驻波比要求较高，在精密测量中，要求其驻波比小于 1.01 以下。

低功率波导匹配负载为一段终端短路的波导，在其里面沿电场方向放置一块或数块劈形吸收片或楔形吸收体，如图 8.1-4 所示。吸收片是由薄片状介质（如陶瓷片、玻璃、胶木片等）上面涂以金属碎末或炭末制成的。其表面电阻的大小需根据匹配条件用实验确定。吸收片劈面长度应是 $\lambda_g/2$ 的整数倍。楔形吸收体则是用羟基铁和聚苯乙烯混合物做成的。低功率波导匹配负载通常可在 10~15% 频带内驻波比做到小于 1.01。

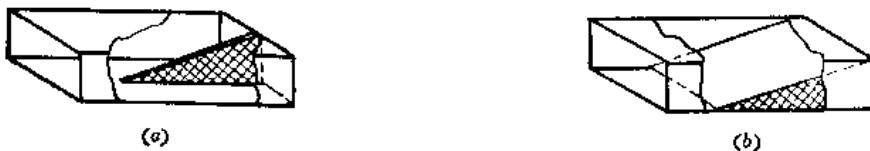


图 8.1-4 低功率波导匹配负载
(a) 劈形吸收片；(b) 有耗楔形吸收体。

同轴线匹配负载是在内外导体之间放入圆锥形或阶梯形吸收体，如图 8.1-5 所示。

高功率匹配负载的构造原理与低功率负载一样，但在高功率时需要考虑热量的吸收和发散问题。吸收物质可以是固体（如石墨和水泥混合物）或液体（通常用水）。利用水作吸收物质，由水的流动携出热量的终端装置，称为水负载，如图 8.1-6 所示。它是在波导终端安置劈形玻璃容器，其内通以水，以吸收微波功率。流进的水吸收微波功率后温度升高，根据水的流量和进出水的温度差可测量微波功率值。

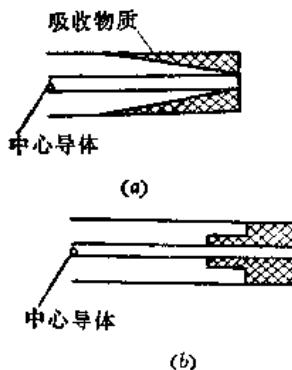


图 8.1-5 低功率同轴匹配负载
(a) 锥形吸收体；(b) 阶梯形吸收体。

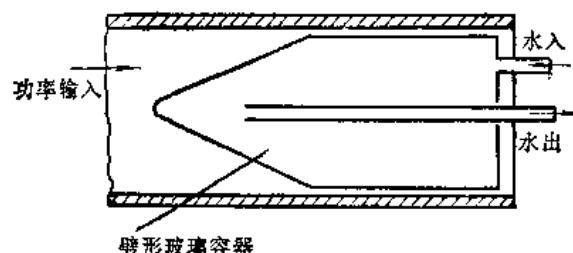


图 8.1-6 高功率波导水负载示意图

3. 失配负载

短路负载是一种全反射负载，匹配负载则是一种全吸收负载。既吸收一部分功率又反射一部分功率的负载称为失配负载。实用中的失配负载都做成标准失配负载，具有某一固定的驻波比。失配负载常用于微波测量中作标准终端负载。

失配负载的结构与匹配负载一样，只是波导口径的 b 不同而已。

由传输线理论知，驻波比 ρ 与反射系数 Γ 的关系为

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (8.1-5)$$

设 b_0 为标准波导的窄边尺寸， b 为失配负载波导的窄边尺寸。由于

$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad (8.1-6)$$

式中, Z_0 为标准波导的等效特性阻抗, Z 为失配负载波导的等效特性阻抗, 则

$$\rho = \frac{Z}{Z_0} = \frac{b}{b_0} \left(\text{或 } \frac{b_0}{b} \right) \quad (8.1-7)$$

可见对应于不同的 b 可得到不同的驻波比。例如 3 厘米波段标准波导 WBJ-100 的 b_0 为 10.16mm, 如果 ρ 分别要求为 1.1 和 1.2, 则 b 分别应为 9.236mm 和 8.407mm, 依此可构成不同的失配负载。

8.2 二端口元件

大多数微波元件是二端口元件。这里只介绍常用的连接元件、匹配元件、衰减和相移元件、波型变换元件。

1. 无耗二端口网络的基本性质

二端口元件可等效为二端口网络, 其耗散矩阵(D)为

$$(D) = \begin{bmatrix} 1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2 & S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} \\ S_{12}^* S_{11} + S_{22}^* S_{21} & 1 - |S_{22}|^2 - |S_{12}|^2 \end{bmatrix} \quad (8.2-1)$$

由式 (7.6-32c), 由对角线元素得到

$$\left. \begin{array}{l} |S_{11}|^2 + |S_{22}|^2 \leq 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 \leq 1 \end{array} \right\} \text{振幅关系} \quad (8.2-2a)$$

对于无耗二端口网络, 则为

$$\left. \begin{array}{l} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \end{array} \right\} \quad (8.2-2b)$$

又根据无耗二端口网络 S 矩阵的特性, 得到

$$\left. \begin{array}{l} S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} = 0 \\ S_{12}^* S_{11} + S_{22}^* S_{21} = 0 \end{array} \right\} \text{相位关系} \quad (8.2-3)$$

于是, 对于无耗可逆二端口网络, 可得到

$$\begin{aligned} |S_{11}| &= |S_{22}| \\ 2\arg S_{12} - (\arg S_{11} + \arg S_{22}) &= \pm \pi \end{aligned}$$

若 $S_{11} = 0$, 则 $|S_{12}| = |S_{21}| = 1$, $S_{22} = 0$; 若 $|S_{12}| = 1$, 则 $S_{11} = S_{22} = 0$, 或相反。因此得到如下无耗可逆二端口网络的基本性质:

- (1) 若一个端口匹配, 则另一个端口自动匹配;
- (2) 若网络是完全匹配的, 则必然是完全传输的, 或相反;
- (3) S_{11} 、 S_{12} 和 S_{22} 的相角只有两个是独立的, 已知其中两个相角, 则第三个相角便可确定。

对于有耗情况, 如果网络完全匹配, 则有

$$|S_{11}| < 1, |S_{22}| < 1$$

对于一般的二端口网络, 通常定义反射系数 S_{11} 或 S_{22} 的倒数为相应端口的影象传输系数 $T_j^{(j)}$ ($j = 1, 2$), 则

$$\gamma_i^{(j)} = \lg T_i^{(j)} = -\lg S_{jj} \equiv \alpha_i^{(j)} + j\beta_i^{(j)} \quad (j = 1, 2) \quad (8.2-4)$$

$$\alpha_i(\text{Np}) = \ln|T_i| \quad (8.2-5)$$

$$\alpha_i(\text{dB}) = 10 \lg|T_i|^2 \quad (8.2-6)$$

式中, $\gamma_i^{(j)}$ 称为端口 j ($j = 1, 2$) 的影象传输量, $\alpha_i^{(j)}$ 和 $\beta_i^{(j)}$ 分别称为相应端口的影象衰减量和影象相移量。对于无耗可逆二端口网络, 因为 $|S_{11}| = |S_{22}|$, 所以 $\alpha_i^{(1)} = \alpha_i^{(2)} = \alpha_i$ 。

对于可逆二端口网络, 通常定义传输系数 $S_{12} = S_{21}$ 的倒数为工作传输系数, 以 T_A 表示之, 则

$$\gamma_A = \lg T_A = \lg T_{11} = -\lg S_{21} \equiv \alpha_A + j\beta_A \quad (8.2-7)$$

$$\alpha_A(\text{Np}) = \ln|T_A| \quad (8.2-8)$$

$$\alpha_A(\text{dB}) = 10 \lg|T_A|^2 \quad (8.2-9)$$

γ_A 称为工作传输量, α_A 和 β_A 分别称为工作衰减量和工作相移量。

对于无耗二端口网络, 由式 (8.2-2b) 可得

$$e^{-2\alpha_i} + e^{-2\alpha_A} = 1 \quad (8.2-10)$$

α_i 和 α_A 都可以用作无耗可逆二端口网络的设计指标, 多数是采用 α_A 。

2. 连接元件

连接元件的作用是将作用不同的微波元器件连接成完整的系统, 其主要指标要求是: 接触损耗小、驻波比小、功率容量大、工作频带宽。这里只介绍单纯起连接作用的接头、拐角、弯曲和扭转元件。

(1) 波导接头

波导连接方法分接触连接和扼流连接两种。它们是借助于焊在待连接波导端口上的法兰盘来实现的。法兰盘结构形式分平法兰盘和扼流式法兰盘两种, 如图 8.2-1 所示。两个平接头连接时用螺栓和螺帽旋紧, 或用弓形夹夹紧。



图 8.2-1 波导接头

(a) 平接头; (b) 扼流接头。

扼流式接头是由一个刻有扼流槽的法兰和一个平法兰对接而成, 如图 8.2-1 (b) 所示, 扼流槽短路端到波导宽边中心的距离近似为 $\lambda_0/2$, λ_0 为信号波长, 因此在波导端口呈电接触。

平接头的优点是加工方便、体积小、频带宽, 主要用于宽带波导元件和测试装置中, 其驻波比可以做到小于 1.002。扼流接头的优点加工简单、安装方便、功率容量大, 常用于雷达的天线馈电设备中, 其主要缺点是频带较窄, 其驻波比在中心频率的典型值为 1.02。

(2) 拐角、弯曲和扭转元件

在微波传输系统中，为了改变电磁波的传输方向，需要用到拐角和弯曲元件；为了改变电磁波的极化方向而不改变其传输方向时，则需要用到扭转元件。对这些元件的要求是：引入的反射尽小能小、工作频带宽、功率容量大。

这些元件的结构如图 8.2-2 所示。为了使反射最小，图 8.2-2 (a) 和 (b) 的拐角和扭转段长度 l 应为 $(2n+1)\lambda_g/4$ 。对于 E 面波导弯曲的曲率半径应满足 $R \geq 1.5 b$ ， H 面波导弯曲则应满足 $R \geq 1.5 a$ 。

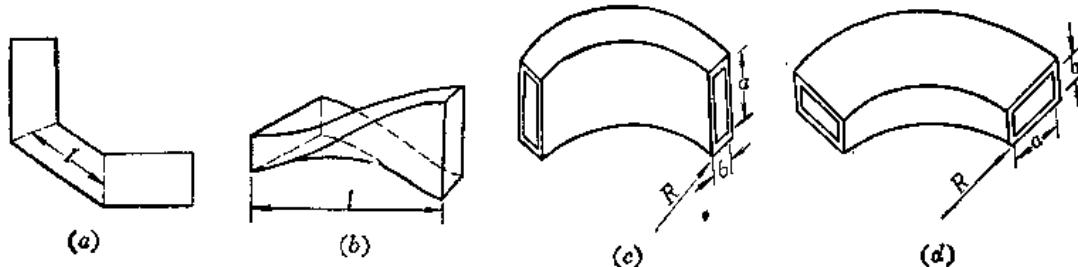


图 8.2-2 波导拐角、扭转和弯曲元件
(a) 波导拐角；(b) 波导扭转；(c) E 面弯曲；(d) H 面弯曲。

3. 匹配元件

匹配元件的种类很多，这里只介绍膜片、销钉和螺钉匹配器。

(1) 膜片

波导中的膜片是垂直于波导管轴放置的薄金属片，有对称和不对称之分，如图 8.2-3 所示。膜片是波导中常用的匹配元件。一般在调匹配时多用不对称膜片，而当负载要求对称输出时，则需用对称膜片。

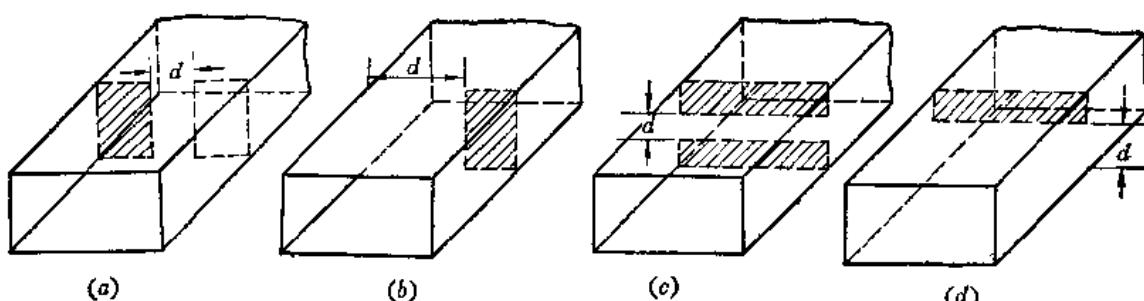


图 8.2-3 波导中的膜片
(a) 对称感性膜片；(b) 不对称感性膜片；(c) 对称容性膜片；(d) 不对称容性膜片。

显然，在波导中放入膜片后必将引起波的反射，反射波的大小和相位随膜片的尺寸及位置不同而变化。利用膜片进行匹配的原理便是利用膜片产生的反射波来抵消由于负载不匹配所产生的反射波。

膜片的分析方法与其厚度有关。当膜片比较厚，与波导波长相比不能忽略时，应将膜片当作一段短波导来分析；通常膜片很薄，如忽略其损耗，则可等效为一并联电纳。

如图 8.2-3 (a)、(b) 所示薄膜片，将使波导中的 TE_{10} 模的磁场在膜片处集中而得以加强，呈现电感性。这种膜片称为电感性膜片。薄的对称电感膜片相对电纳的近似式为^[6]

$$\bar{b} = \frac{B}{Y_0} \approx -\frac{\lambda_g}{a} \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi d}{2a} \right) \quad (8.2-11)$$

如图 8.2-3 (c)、(d) 所示薄膜片，将使波导中的 TE_{10} 模的电场在膜片处集中而得以加强，呈现电容性。这种膜片称为电容性膜片。其相对电纳的近似式为

$$\bar{b} = \frac{B}{Y_0} \approx \frac{4b}{\lambda_g} \ln \left(\csc \frac{\pi d}{2b} \right) \quad (8.2-12)$$

将感性膜片和容性膜片组合在一起便得到如图 8.2-4 (a) 所示谐振窗，它对某一固定频率产生谐振，电磁波可以无反射地通过。其等效电路相当于并联谐振回路。这种谐振窗常用于大功率波导系统中作充气用的密封窗，也常用于微波电子器件中作为真空部分和非真空部分的隔窗。窗孔的形状也可做成圆形、椭圆形、哑铃形等，如图 8.2-4 (b)、(c)、(d) 所示。谐振窗的常用材料是玻璃、聚四氟乙烯、陶瓷片等。



图 8.2-4 波导谐振窗

(2) 销钉

销钉是垂直对穿波导宽边的金属圆棒，如图 8.2-5 所示。它在波导中起电感作用，可用作匹配元件和谐振元件，常用于构成波导滤波器。

销钉的相对感纳与棒的粗细有关，棒越粗，电感量越小，其相对电纳越大；同样粗细的棒，根数越多，相对电纳越大。

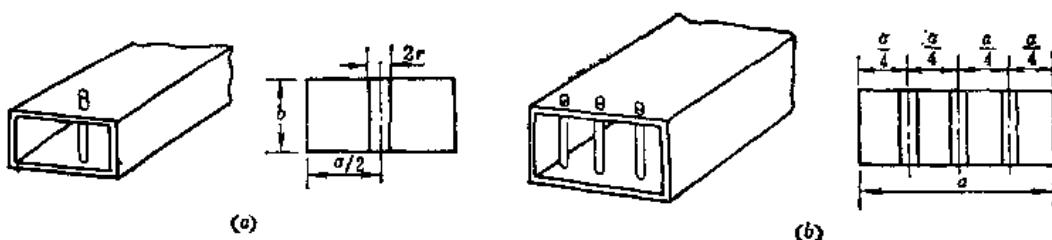


图 8.2-5 波导中的销钉

置于 $a/2$ 处的单销钉相对电纳的近似式为^[5]

$$\bar{b} = \frac{B}{Y_0} \approx -\frac{2\lambda_g}{a} \left\{ \ln \left(\frac{\pi r}{2a} \right) - 2 \right\} \quad (8.2-13)$$

式中 r 为销钉的半径。

(3) 螺钉匹配器

用膜片和销钉匹配时，膜片和销钉在波导中的位置固定后就不容易再进行调整，因而使用不方便。采用如图 8.2-6 所示螺钉则调整方便。螺钉是低功率微波设备中普遍采用的调谐和匹配元件。

如图 8.2-6 所示，当螺钉旋入波导的深度 $l < 3b/4 \approx \lambda_0/4$ (λ_0 为自由空间波长) 时，在它附近集中了电场，具有容性电抗；同时，波导宽边上的轴向电流要流进螺钉产

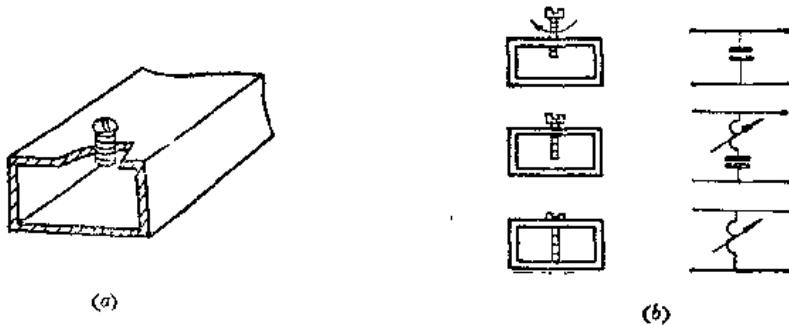


图8.2-6 波导中的螺钉及其电抗性质的变化

生磁场，使螺钉具有一定的电感量，但当旋入的深度较短时，电感量较小，螺钉呈容性；随着螺钉旋入深度的增加，其电感量和电容量都增加，当 l 约为 $\lambda_0/4$ 时，容抗和感抗相等，等效为串联谐振电路，使波导短路；螺钉旋入深度再增加，当 $l/b > 3/4$ 时，螺钉等效为电感。实用时，为了避免波导短路和击穿，通常设计螺钉呈容性，作可变电容用。

螺钉匹配器分单螺钉、双螺钉、三螺钉和四螺钉匹配器，其作用原理与支节匹配器相似，所不同的只是螺钉只能当电容用。

4. 衰减与相移元件

衰减与相移元件分别是用来改变传输线中电磁波场强的幅度和相位的，衰减器和相移器联合使用，可以调节传输线中电磁波的传输因数 γ 。因此，衰减器和相移器是基本元件。

衰减器和相移器的结构都可以做成固定式和可变式。在一般情况下，设计衰减器时并不苛求其相位关系，而设计相移器时则要求不引入附加的衰减。

理想的衰减器应该是一个相移为零，衰减量可变的二端口网络，其散射矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\alpha l} \\ e^{-\alpha l} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.2-14)$$

式中， α 为衰减因数， l 为衰减器长度。

理想的相移器应该是一个具有单位振幅，相移量可变的二端口网络，其散射矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.2-15)$$

式中 $\theta = \beta l$ ，为相移器的相移量。

衰减器的种类很多，使用最多的是吸收式衰减器。它是在一段矩形波导中平行于电力线放置衰减片而构成的，衰减片的位置可以调节，如图8.2-7所示。衰减片一般是由胶布板表面涂复石墨或在玻璃片上蒸发很薄的电阻膜做成的。为了消除反射，衰减片两端通常做成渐变形。

由 $\theta = \beta l$ 可知，利用改变传输线的相移因数 β （ $= \omega/v_p$ ）可以改变相移，而相移因数 β 与 $\sqrt{\epsilon_r}$ 成正比。因此，将图8.2-7所示衰减器的衰减片换成介质片便可构成可调相移器。由 $\theta = \beta l$ 也可知，改变传输线的等效长度也可以改变相移，为此可在波导宽边中心加一个或几个螺钉，构成螺钉相移器，因为它可以改变波导的等效长度。

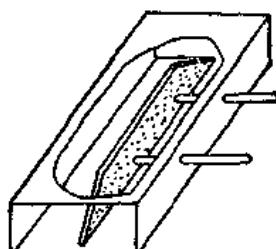


图8.2-7 吸收式波导衰减器

5. 波型变换元件

一个微波系统常需用到几种不同的传输线，并由许多作用不同的元件所组成，每种传输线的主模都不同，每个元件都有一定的工作模式。因此，为了从一种传输线元件过渡到另一种传输线元件，或过渡到同种传输线的另一种元件并要求产生所需要的工作模式，就需要采用所谓波型变换元件（或称波型变换器）。

对波型变换器的主要要求是阻抗匹配、频带宽、功率容量大，不存在杂模。

设计波型变换器的一般原则是抑制杂模的产生与阻抗匹配。因为变换器是两种波型的过渡装置，容易产生杂模，引起反射，所以当变换器不同波型的两部分的等效阻抗相同或接近时，主要应尽量减少杂模的激励，同时应选择适当的形状使一种波型缓慢地过渡到另一种波型，其尺寸亦应逐渐过渡（渐变过渡或阶梯过渡）；若变换器两部分的等效阻抗不相同，便需加调配元件或选择变换器的形状和尺寸，使各处产生的反射波在一定频带内相互抵消，或采取阻抗匹配方法使其阻抗相等。

波型变换器的种类很多，这里只介绍同轴-矩形波导过渡器和线-圆极化变换器。

（1）同轴-矩形波导过渡器

这是使用最多的一种波型变换器。同轴线的主模是 TEM 模，矩形波导的主模是 TE_{10} 模，因此设计同轴-矩形波导过渡器就要求由同轴线到矩形波导几何形状改变的同时，相应地使 TEM 模转换成 TE_{10} 模。

根据频带和功率的不同要求，同轴-矩形波导过渡器有很多的结构型式。图 8.2-8 (a) 是一种最简单的同轴-矩形波导过渡器。为了加宽频带，增大功率容量，可将同轴线外导体做成锥形过渡，如图 8.2-8 (b) 所示。这种结构可在 20% 的带宽内获得优于 1.1 的驻波比。我们可以将这种同轴-矩形波导过渡器看成一种特殊的阻抗变换器，其变换比可以通过改变短路活塞位置 l_1 和探针深度 l_2 来进行调节。根据这一原理可以设计宽带同轴-矩形波导过渡器。

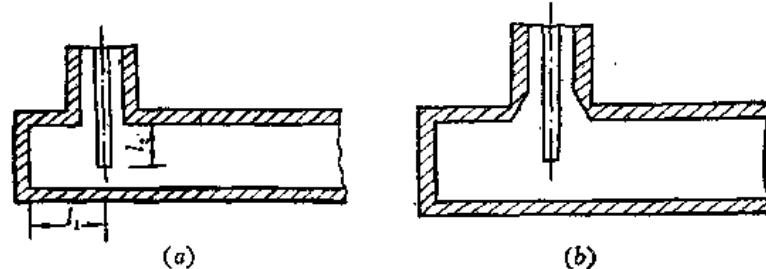


图 8.2-8 同轴-矩形波导过渡器

（2）线圆极化变换器

在雷达、通讯和电子对抗等设备中，常需用到圆极化波。而一般馈电系统多采用矩形波导，主模 TE_{10} 模是线极化波。为了获得圆极化波，需要应用线圆极化变换器。其原理图如图 8.2-9 (a) 所示，首先用方圆过渡使矩形波导的 TE_{10} 模转换成圆波导的 TE_{11} 模，然后在圆波导中与 TE_{11} 模的电场 $E_{z\parallel}$ 成 45° 角放置长度为 l 的薄介质板， $E_{z\parallel}$ 可分解成两部分，即平行于介质板的分量 E_x 和垂直于介质板的分量 E_y 。 E_x 基本上不受介质板的影响，以与空的圆波导中相同的相速度传播，而 E_y 受介质板影响，传播速度变慢。假如介质板足够长，使 E_x 和 E_y 的相位差 90° ，即可获得一圆极化波。极化波导段也可用方形波导，并将介质板沿对角线放置而做成，如图 8.2-9 (b) 所示。



图8.2-9 线圆极化变换器

8.3 三端口元件

三端口元件是具有三个端口波导（或同轴线、微带线）的接头，在微波技术中用作分路元件或功率分配器和合成器，常用的有 $E-T$ 、 $H-T$ 和 Y 分支。在本节中，先分析无耗三端口网络的基本性质，然后讨论 $E-T$ 、 $H-T$ 和 Y 分支元件的特性。

1. 无耗三端口网络的基本性质

三端口元件可等效为三端口网络。其网络的散射矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (8.3-1)$$

由前面的分析知，对于线性、无源、无耗三端口网络，不论其是否可逆，由散射矩阵的么正性可以得到：

$$\left. \begin{array}{l} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \\ |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 = 1 \end{array} \right\} \quad \text{振幅关系} \quad (8.3-2)$$

和

$$\left. \begin{array}{l} S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} + S_{31}^* S_{32} = 0 \\ S_{11}^* S_{13} + S_{21}^* S_{23} + S_{31}^* S_{33} = 0 \\ S_{12}^* S_{13} + S_{22}^* S_{23} + S_{32}^* S_{33} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{相位关系} \quad (8.3-3)$$

$$\det[S] = 1 \quad (8.3-4)$$

无耗三端口网络具有如下两个重要性质：

性质 1：无耗可逆三端口网络不可能完全匹配，即是说，三个端口不可能同时都匹配；

性质 2：无耗非可逆三端口网络能够完全匹配，并且适当地选择参考面，其正、反旋散射矩阵可表示为

$$[S_T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad [S_R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.3-5)$$

下面我们来证明这两个性质。

首先假定无耗三端口网络完全匹配，即假定 $S_{11}=S_{22}=S_{33}=0$ ，则由式(8.3-3)和(8.3-4)可以得到

$$|S_{12}S_{23}S_{31} + S_{13}S_{32}S_{21}| = 1 \quad (8.3-6)$$

$$S_{12}S_{23} = S_{13}S_{32} = S_{31}S_{21} = 0 \quad (8.3-7)$$

对于可逆网络，由式 (8.3-6)，则得

$$2|S_{12}S_{23}S_{31}| = 1$$

这与式 (8.3-7) 相矛盾。这是由于假定了 $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$ 所致，即此假定不应成立，故知可逆无耗三端口网络不可能完全匹配。性质 1 得证。

对于非可逆情况，由式 (8.3-6) 可知，它与式 (8.3-7) 不矛盾，即式 (8.3-7) 条件实际上存在。这可有两种情况，即如果

$$(1) S_{12} = S_{23} = S_{31} = 0, \text{ 则 } \det(S) = |S_{13}S_{32}S_{21}| = 1,$$

或者

$$(2) S_{13} = S_{21} = S_{32} = 0, \text{ 则 } \det(S) = |S_{12}S_{23}S_{31}| = 1.$$

由此可知，无耗非可逆三端口网络能够完全匹配。

又由 S 矩阵么正性条件 $\sum_{k=1}^N S_{ki}^* S_{kj} = \delta_{ij}$ 可知，对于 $i = j$ 情况，可得到

对应于情况 (1)：

$$|S_{13}| = |S_{32}| = |S_{21}| = 1$$

因此

$$S_{13} = e^{j\theta_{13}}, \quad S_{32} = e^{j\theta_{32}}, \quad S_{21} = e^{j\theta_{21}}$$

对应于情况 (2)：

$$|S_{12}| = |S_{23}| = |S_{31}| = 1$$

因此

$$S_{12} = e^{j\theta_{12}}, \quad S_{23} = e^{j\theta_{23}}, \quad S_{31} = e^{j\theta_{31}}$$

如果将各个端口的参考面向外移动 l_i ，则 $j\theta_i = j\beta_i l_i$ ($i = 1, 2, 3$)，于是得到情况 (1) 条件下的 S 矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{j(\theta_{13}-\theta_1-\theta_3)} \\ e^{j(\theta_{21}-\theta_2-\theta_1)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j(\theta_{32}-\theta_3-\theta_2)} & 0 \end{bmatrix}$$

如果选取参考面，使得

$$\theta_1 = -\frac{1}{2}(\theta_{13} + \theta_{21} - \theta_{32})$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2}(-\theta_{13} + \theta_{21} + \theta_{32})$$

$$\theta_3 = -\frac{1}{2}(\theta_{13} - \theta_{21} + \theta_{32})$$

即得到

$$[S] = [S_R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

同样可以证明情况 (2) 条件下的 S 矩阵为

$$[S] = [S_T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是性质 2 得证。

由上述 $[S_T]$ 和 $[S_R]$ 表示的非可逆无耗三端口元件称为无耗完全匹配的理想三端口环行器。对于 $[S] = [S_R]$ 情况, $S_{21} = 1$ 表示由端口 1 输入的功率完全传输至端口 2, 而 $S_{31} = 0$, 表示端口 3 无输出, 其余类推, 如图 8.3-1(a) 所示。同理, 图 8.3-1(b) 表示 $[S] = [S_T]$ 的情况。

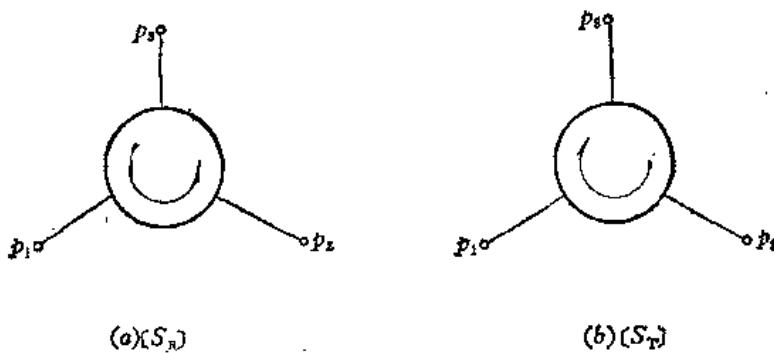


图 8.3-1 三端口环行器的 S 矩阵

此外, 对于无耗可逆三端口网络, 若其中二个端口完全匹配, 则第三个端口与之完全隔离。此时网络实质上退化为一个匹配的二端口网络。于是有如下性质:

性质 3: 如果在一端口接以短路活塞, 则总可以找到活塞的一个位置, 使其它两端口之间没有能量传输。

性质 4: 如果三端口网络对于接有短路活塞的端口波导是对称的, 则总可以找到活塞的一个位置, 使能量在其它两端口之间无反射地完全传输。

性质 3 和性质 4 的证明留给读者作为练习。

2. 三端口分路/合成元件

在微波系统中, 有时需要将传输功率分几路传送到不同的负载中去, 或将几路功率合成为一路功率, 以获得更大的功率。此时便需要应用三端口分路/合成元件。对这种元件的基本要求是损耗小、驻波比小、频带宽。

三端口分路/合成元件的结构型式很多, 这里只介绍 $E-T$ 、 $H-T$ 、对称 Y 分支元件。

(1) T 形接头

T 形接头又称 T 形分支, 简称单 T , 是在波导某个方向上的分支。矩形波导 T 形接头分 $E-T$ 接头和 $H-T$ 接头, 如图 8.3-2 所示。当分支波导宽面与 TE_{10} 模电场 E 所在平面平行者称为 E 面 T 形接头, 简称 $E-T$ 接头; 当分支波导宽面与 TE_{10} 模磁场 H 所在平面平行者, 称为 H 面 T 形接头, 简称 $H-T$ 接头。下面分别讨论它们的特性。

a. $E-T$ 接头

假定各端口波导中只有 TE_{10} 模传输, $E-T$ 接头具有如下特性 (见图 8.3-3):

1) 当信号由端口①输入时, 端口②和③都有输出且同相, 如图 8.3-3(a) 所示;

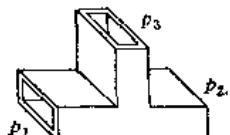
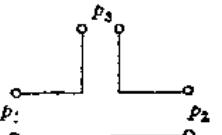
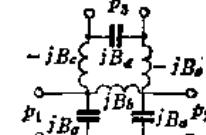
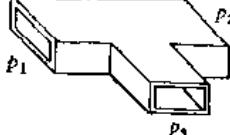
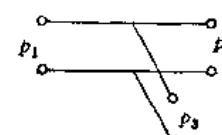
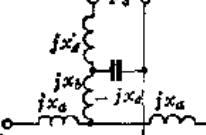
	T 分 支	等 效 电 路 1	等 效 电 路 2
E面(串联) 分 支			
H面(并联) 分 支			

图8.3-2 T形接头及其等效电路

- 2) 当信号由端口②输入时, 端口①和③都有输出且同相, 如图8.3-3(b)所示;
- 3) 当信号由端口③输入时, 端口①和②都有输出且反相, 如图8.3-3(c)所示;
- 4) 当信号由端口①和②同相输入时, 在端口③的对称面上可得电场的驻波波腹, 端口③输出最小; 如果①、②信号振幅也相等, 则端口③的输出为零, 如图8.3-3(d)所示;
- 5) 当信号由端口①和②反相输入时, 在端口③的对称面上可得到电场的驻波波节, 端口③输出最大, 如图8.3-3(e)所示。

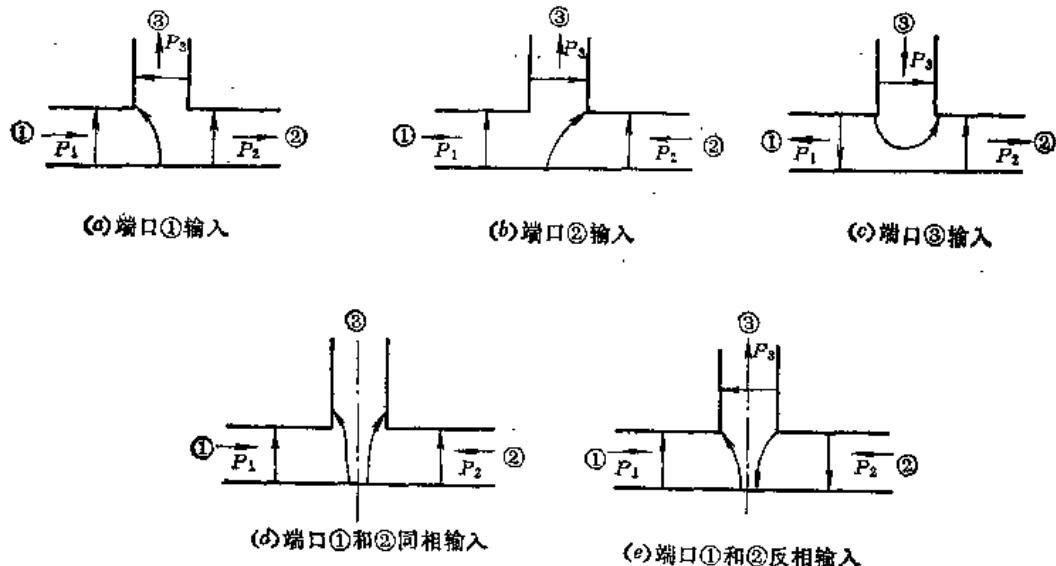


图8.3-3 E-T接头的特性

由波导的管壁纵向电流分布容易看出, 分支波导③相当于串联在主传输线上, 得到如图8.3-2中所示等效电路1; 如考虑到接头处高次模的影响, 则等效电路如图8.3-2中的等效电路2。

E-T接头的特性可用S矩阵来表示。E-T接头使用时多由端口③输入, 假定端口③匹配 ($S_{33}=0$), 由于结构对称, 端口①和②的驻波比应相等 ($S_{11}=S_{22}$)。于是E-

T 的 S 矩阵可以写成

$$(S) = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{11} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.3-8)$$

又由 $E-T$ 的特性，有

$$S_{13} = -S_{23} \quad (8.3-9)$$

根据无耗网络 S 矩阵的么正性，有

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \quad (8.3-10)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{11}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \quad (8.3-11)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \quad (8.3-12)$$

$$S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{11}^* + S_{13}S_{23}^* = 0 \quad (8.3-13)$$

$$S_{11}S_{13}^* + S_{13}S_{11}^* = 0 \quad (8.3-14)$$

$$S_{12}S_{13}^* + S_{13}S_{23}^* = 0 \quad (8.3-15)$$

由式 (8.3-9) 和 (8.3-12)，得到

$$S_{13} = -S_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \quad (8.3-16)$$

因为 $|S_{13}|^2 = |S_{23}|^2$ ，所以式 (8.3-10) 和 (8.3-11) 完全一样。于是

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 - |S_{13}|^2 = \frac{1}{2} \quad (8.3-17)$$

由式 (8.3-14)，得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}}S_{11} - \frac{1}{\sqrt{2}}S_{12} = 0, \text{ 即 } S_{11} = S_{12} \quad (8.3-18)$$

合并式 (8.3-17) 和 (8.3-18)，得到

$$S_{11} = S_{12} = -\frac{1}{2} \quad (8.3-19)$$

因此得到由端口③输入时 $E-T$ 的 S 矩阵为

$$(S) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.3-20)$$

由式 (8.3-20) 可知，由端口③输入且匹配时，端口①和②并不匹配，具有 $(1 + |S_{11}|)/(1 - |S_{11}|) = 3$ 的驻波比。

一般情况下， $E-T$ 的三个端口不匹配，但由于结构对称， $|S_{13}| = |S_{23}|$ ， $S_{11} = S_{22}$ ，故其 S 矩阵一般为

$$(S) = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{11} & -S_{13} \\ S_{13} & -S_{13} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (8.3-21)$$

b. H-T接头

H-T接头的特性和E-T接头相似，其主要特性是，当信号由端口③输入时，端口①和②有等幅同相输出， $S_{13}=S_{23}=1/\sqrt{2}$ ，如图8.3-4所示。因此，H-T接头可用作功率分配器或功率合成器。和E-T接头一样，H-T接头端口③匹配时，端口①和②将不匹配，其驻波比等于3。H-T接头的S矩阵与E-T的式(8.3-20)和(8.3-21)相似，只须注意 $S_{13}=S_{23}$ 。

H-T接头的分支波导③相当于并联在主波导上，其简化等效电路与考虑接头处高次模的等效电路如图8.3-2所示。

(2) 对称Y分支

矩形波导对称Y分支结构及其等效电路如图8.3-5所示，分E面分支和H面分支两种，前者为串联分支，后者为并联分支。

由图可见，这种对称Y分支，各个端口都具有对称性，由等效电路1各个端口电压的方向可以看出， $S_{11}=S_{22}=S_{33}$ ，其次，如以相同功率分别输入到端口 p_1 (p_2 、 p_3)，则在端口 p_2 (p_3 、 p_1)的输出功率相等，于是有 $S_{11}=S_{22}=S_{33}$ 。同理有 $S_{31}=S_{12}=S_{23}$ 。因此得到E面和H面对称Y分支的S矩阵相同，即

$$[S]_Y = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} \\ S_{13} & S_{13} & S_{11} \end{bmatrix} \quad (8.3-22)$$

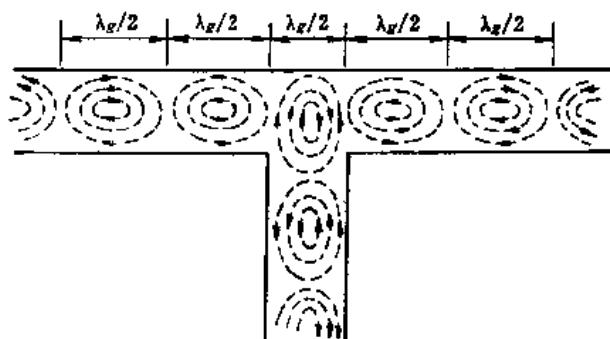


图8.3-4 H-T接头的特性

	对称Y分支	等效电路1	等效电路2
E面（串联） 分支			
H面（并联） 分支			

图8.3-5 波导对称Y分支及其等效电路

由性质1知，对称Y分支不可能完全匹配，则有

$$0 < |S_{11}|$$

显然最佳状态是 $|S_{11}|$ 为最小而 $|S_{12}|$ 为最大，且

$$\left. \begin{array}{l} |S_{11}|_{\min} = \frac{1}{3} \\ |S_{12}|_{\max} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \quad (8.3-23)$$

对称Y分支任一端口的最大影象衰减量可求得为

$$(\alpha_i)_{\max} = 10 \lg |S_{11}|^{-2} = 10 \lg 9 \approx 9.55 \text{ (dB)}$$

从任一端口到其它端口的最小工作衰减量则可求得为

$$(\alpha_A)_{\min} = 10 \lg |S_{12}|^{-2} = 10 \lg (9/4) \approx 3.96 \text{ (dB)}$$

如要求功率二等分，则要求 $|S_{11}| = 0$ ，此时

$$\alpha_A = 10 \lg 2 \approx 3 \text{ (dB)}$$

两者之差为0.96 (dB)，显然是由于输入端口不匹配而引起的。

图8.3-6表示三种作功率分配器用的波导Y分支。图(a)所示Y分支是在TE₁₀模矩形波导内与电场垂直的平面内插入一块薄金属片，把高度为b的波导分成高度分别为 b_1 和 b_2 的两个分支波导。由于在高度b方向上电场是均匀分布的，所以两个分支波导上的电压之和等于主波导上的电压。两个电压之比为

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{E_y b_1}{E_y b_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad (8.3-24)$$

两个分支波导内的磁场分布与主波导相同，故管壁电流彼此相等，因而分支波导与主波导是串联连接，分配给分支波导的功率与其高度成正比。因此，适当地选择高度 b_1 和 b_2 就可以得到任意的功率分配比。图(b)和(c)的分支波导与主波导相同，为此，需采用 $n\lambda_g/2$ 渐变波导进行过渡，使高度由 b_1 （或 b_2 ）渐变至b。

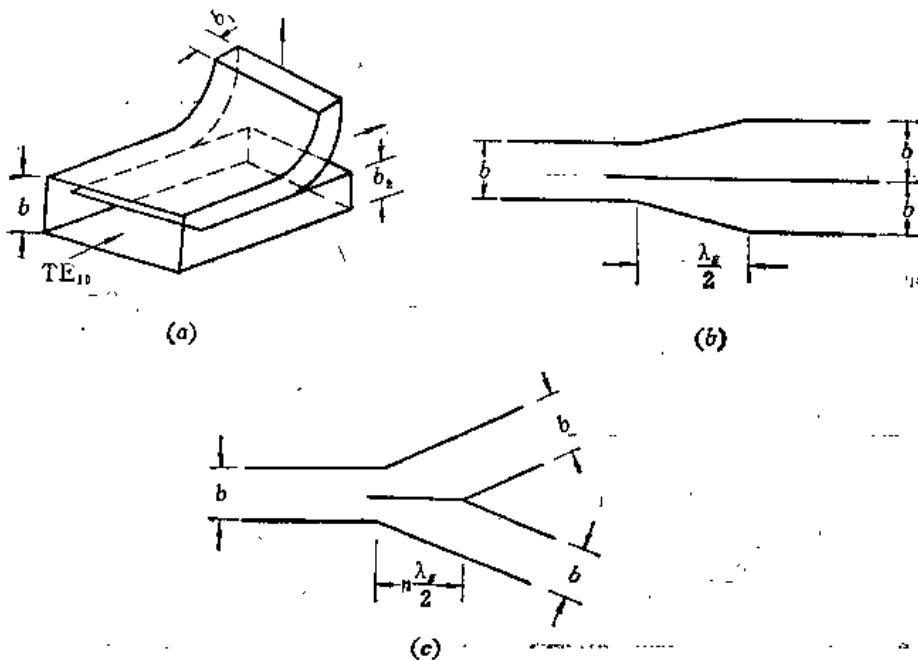


图8.3-6 三种波导Y形功率分配器

8.4 四端口元件

本节先讨论无耗可逆四端口网络的基本性质，然后分析双T、魔T和定向耦合器的

特性。

1. 无耗可逆四端口网络的基本性质

对于无耗可逆四端口网络，其 S 矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (8.4-1)$$

按照习惯，规定端口①为输入端口，其它三个都可为输出端口或隔离端口，它们的 S 矩阵分别用 $[S_{02}]$ 、 $[S_{03}]$ 和 $[S_{04}]$ 表示之，如图 8.4-1 所示。

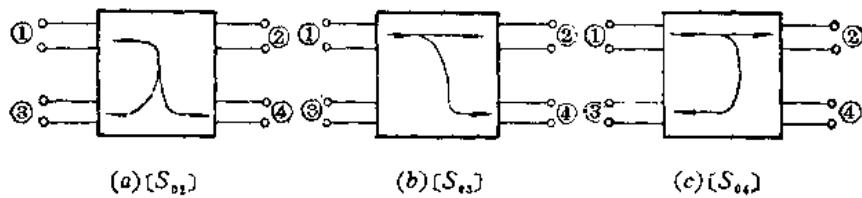


图 8.4-1 无耗可逆四端口网络的 S 矩阵

无耗可逆四端口网络具有如下重要性质：

性质 1：无耗可逆四端口网络可以完全匹配，且为一理想定向耦合器。

这可由无耗可逆四端口网络 S 矩阵的么正性得到证明。事实上，先假定其中三个端口匹配，即假定

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$$

则由式 (8.4-1) 的么正性，可以得到

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \quad (8.4-2)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \quad (8.4-3)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \quad (8.4-4)$$

$$|S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{34}|^2 + |S_{44}|^2 = 1 \quad (8.4-5)$$

$$S_{13}^* S_{23} + S_{14}^* S_{24} = 0 \quad (8.4-6)$$

由式 (8.4-3) 减去式 (8.4-2)，得到

$$(|S_{23}|^2 + |S_{24}|^2) - (|S_{13}|^2 + |S_{14}|^2) = 0 \quad (8.4-7)$$

由式 (8.4-6) 得到

$$|S_{13}| |S_{23}| = |S_{14}| |S_{24}| \quad (8.4-8)$$

则式 (8.4-7) 可以写成

$$\begin{aligned} (|S_{23}|^2 + |S_{24}|^2) - \frac{|S_{13}|^2 |S_{23}|^2 + |S_{14}|^2 |S_{24}|^2}{|S_{23}|^2} \\ = (|S_{23}|^2 + |S_{24}|^2) - \frac{|S_{14}|^2 |S_{24}|^2 + |S_{14}|^2 |S_{23}|^2}{|S_{23}|^2} \\ = (|S_{23}|^2 + |S_{24}|^2) \left(1 - \frac{|S_{14}|^2}{|S_{23}|^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (8.4-9)$$

显然，当

$$|S_{14}| = |S_{23}| \quad (8.4-10)$$

时, 式 (8.4-9) 成立, 则由式 (8.4-8) 可得

$$|S_{13}| = |S_{24}| \quad (8.4-11)$$

将式 (8.4-10) 代入式 (8.4-2), 并与式 (3.4-6) 比较, 得到

$$|S_{12}| = |S_{34}| \quad (8.4-12)$$

将式 (8.4-11)、(8.4-12) 和 (8.4-2) 代入式 (8.4-5), 得到

$$\begin{aligned} |S_{44}|^2 &= 1 - (|S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{34}|^2) \\ &= 1 - (|S_{14}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{12}|^2) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

故得

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 0 \quad (8.4-13)$$

因此得到无耗可逆四端口网络的 S 矩阵为

$$[S_0] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4-14)$$

利用式 (8.4-10)、(8.4-11) 和 (8.4-12), 由式 (8.4-14) 所示 S_0 矩阵的么正性得到

$$\left. \begin{array}{l} |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \\ S_{12}S_{14}^* + S_{14}S_{13}^* = 0 \\ S_{12}S_{14}^* + S_{14}S_{12}^* = 0 \\ S_{12}S_{13}^* + S_{13}S_{12}^* = 0 \end{array} \right\} \quad (8.4-15)$$

若要上式成立, 即若四个端口完全匹配, 则 S_{12} 、 S_{13} 和 S_{14} 中必须有一个为零。这就是说, 此四端口网络必定具有定向性, 即为定向耦合器。若 $S_{12} = 0$, 则式 (8.4-14) 变成

$$[S_{02}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\ 0 & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & 0 \\ S_{14} & S_{24} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4-16)$$

式 (8.4-16) 即表示图 8.4-1(a) 的完全匹配网络的 S 矩阵; 若 $S_{13} = 0$, 则式 (8.4-14) 变成

$$[S_{03}] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & 0 \\ 0 & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & 0 & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4-17)$$

式 (8.4-17) 即表示图 8.4-1(b) 的 S 矩阵; 若 $S_{14} = 0$, 则得到图 8.4-1(c) 的 S 矩阵为

$$[S_{04}] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{24} \\ S_{13} & 0 & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4-18)$$

由上面的分析可知，无耗可逆四端口元件可以完全匹配，其 S 矩阵只有 $[S_{11}]$ 、 $[S_{33}]$ 和 $[S_{44}]$ 三种形式，且均为一理想定向耦合器，分别称为双向定向耦合器、同向定向耦合器和反向定向耦合器。

性质 2：有理想定向性的无耗可逆四端口网络不一定四个端口均匹配，故四个端口匹配是定向耦合器的充分条件，而不是必要条件。

事实上，按照理想定向性要求，若 $S_{12}=S_{34}=0$ ，则由么正性可得

$$|S_{11}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \quad (8.4-19)$$

$$S_{13}^* S_{23} + S_{14}^* S_{24} = 0 \quad (8.4-20)$$

$$S_{13}^* S_{14} + S_{23}^* S_{24} = 0 \quad (8.4-21)$$

$$S_{11}^* S_{13} + S_{13}^* S_{33} = 0 \quad (8.4-22)$$

$$S_{11}^* S_{14} + S_{14}^* S_{44} = 0 \quad (8.4-23)$$

$$S_{22}^* S_{23} + S_{23}^* S_{33} = 0 \quad (8.4-24)$$

$$S_{22}^* S_{24} + S_{24}^* S_{44} = 0 \quad (8.4-25)$$

将式 (8.4-20) 除以式 (8.4-21)，得

$$|S_{14}| = |S_{23}| = C \quad (8.4-26)$$

式中 C 为一常数。将式 (8.4-26) 代入式 (8.4-20)，得到

$$|S_{13}| = |S_{24}| = T \quad (8.4-27)$$

式中 T 亦为一常数。由式 (8.4-22)~(8.4-24)，可得

$$|S_{11}| = |S_{22}| = |S_{33}| = |S_{44}| = \Gamma \quad (8.4-28)$$

式中 Γ 为常数。由式 (8.4-19)、(8.4-26)~(8.4-28)，可得

$$|C| = \sqrt{1 - |T|^2 - |\Gamma|^2} \quad (8.4-29)$$

于是得到散射矩阵

$$[S] = \begin{bmatrix} \Gamma e^{j\theta_{11}} & 0 & T e^{j\theta_{13}} & C e^{j\theta_{14}} \\ 0 & \Gamma e^{j\theta_{22}} & C e^{j\theta_{23}} & T e^{j\theta_{24}} \\ T e^{j\theta_{13}} & C e^{j\theta_{23}} & \Gamma e^{j\theta_{33}} & 0 \\ C e^{j\theta_{14}} & T e^{j\theta_{24}} & 0 & \Gamma e^{j\theta_{44}} \end{bmatrix} \quad (8.4-30)$$

选择参考面使 $\theta_{11}=\theta_{22}=\theta_{33}=\theta_{44}$ ，由式 (8.4-22)~(8.4-25) 知， θ_{13} 、 θ_{14} 、 θ_{23} 、 θ_{24} 可为 $\pi/2$ 或 $-\pi/2$ ，但为了同时满足式 (8.4-20) 和 (8.4-21)， θ_{13} 、 θ_{14} 、 θ_{23} 和 θ_{24} 中必须有一个与其余三个反号，如令 $\theta_{13}=\theta_{14}=\theta_{24}=\pi/2$ ， $\theta_{23}=-\pi/2$ ，则散射矩阵变为

$$[S] = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & jT & jC \\ 0 & \Gamma & -jC & jT \\ jT & -jC & \Gamma & 0 \\ jC & jT & 0 & \Gamma \end{bmatrix} \quad (8.4-31)$$

于是性质 2 得证。

性质 3：有二个端口匹配且互相隔离的无耗可逆四端口电路必为一理想定向耦合器。

设端口①和②是匹配的且互相隔离，则散射矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\ 0 & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (8.4-32)$$

由么正性得到

$$|S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \quad (8.4-33)$$

$$|S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \quad (8.4-34)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \quad (8.4-35)$$

$$|S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{34}|^2 + |S_{44}|^2 = 1 \quad (8.4-36)$$

将式(8.4-35)和(8.4-36)相加，并将式(8.4-33)和(8.4-34)代入，得到

$$|S_{33}|^2 + |S_{44}|^2 + 2|S_{34}|^2 = 0$$

于是应有 $S_{33} = S_{44} = S_{34} = 0$ 。性质3得证。

2. 双T和魔T

由具有共同对称平面的E-T和H-T接头组合在一起即构成双T接头，如图8.4-2所示。通常称3臂为E臂，4臂为H臂，1、2臂为平分臂或侧臂，3、4臂为隔离臂。由E-T和H-T接头的特性可知，双T具有如下特性：

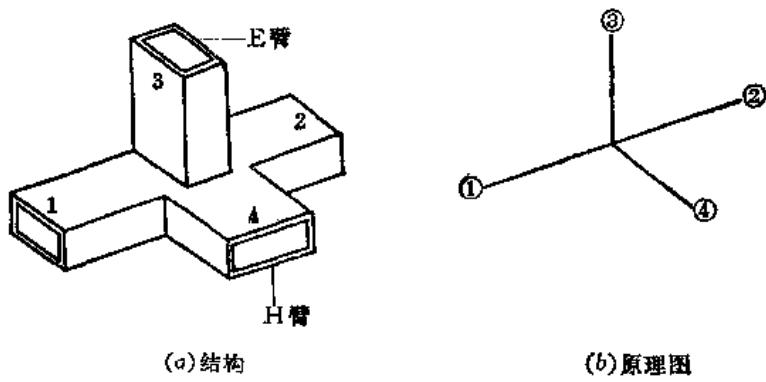


图8.4-2 双T接头

- (1) 由E臂输入的功率将由侧臂反相等分输出，而不进入H臂；
- (2) 由H臂输入的功率将由侧臂同相等分输出，而不进入E臂；
- (3) 如果E和H臂接匹配负载，功率由两侧臂输入，如果输入信号的场强在共同对称面上为同相时（即为电场波腹时），则功率进入H臂而不进入E臂；如果对称面上为反相时（即为电场波节时），则功率进入E臂而不进入H臂。

双T的上述特性用S矩阵表示为

$$\{S\} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{11} & -S_{13} & S_{14} \\ S_{13} & -S_{13} & S_{33} & 0 \\ S_{14} & S_{14} & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \quad (8.4-37)$$

双T的一个重要应用是作调配元件。这时在E和H臂中接短路活塞，2臂接待匹配的负载，可以证明，对于任意负载，只要适当调节两个短路，总可以使①端呈现匹配状态（习题8-11）。

然而，上述双T即便是各臂都接匹配负载，在接头处仍不能达到匹配。例如当功率由两侧臂输入时，即使E、H臂接匹配负载，在两侧臂中也有反射。这说明双T不是完全匹配的，其两侧臂是不隔离的。为了得到理想的双T特性，通常在接头处加入匹配元件（螺钉、膜片或锥体）来消除反射。经匹配后的双T称为魔T。它具有如下重要特性：

- (1) 魔T接头是可逆的，即 $S_{jk} = S_{kj}$
- (2) 由E臂输入的功率由两侧臂反相等分输出，不进入H臂，即 $S_{13} = -S_{23}$, $S_{43} = 0$ ；
- (3) 由H臂输入的功率由两侧臂同相等分输出，不进入E臂，即 $S_{14} = S_{24}$, $S_{34} = 0$ ；
- (4) 四个端口是完全匹配的。

魔T的上述特性可用散射矩阵表示为(习题8-12):

$$(S) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4-38)$$

可见魔T是一个3 dB耦合器，它在微波技术中有着广泛的应用，可用以组成微波阻抗电桥、平衡混频器、和差器、平衡天线收发开关、相移器等。

3. 定向耦合器

定向耦合器是一种具有定向传输特性的四端口元件，它是由耦合机构联系在一起的两对传输线构成的，如图8.4-3所示，1-2为主线，3-4为另一条传输线，称为副线。耦合机构的型式各种各样，一般为孔（或槽缝）、分支波导、耦合线段等。定向耦合器在微波技术中的应用非常广泛，常用作功率测量或监视装置，组合成反射计等。

理想的定向耦合器应具有如下特性：当功率由主线的端口①向端口②传输时，如果端口②、③、④都接匹配负载，则副线中只有一个端口（如端口④）有耦合输出，另一端口（如端口③）无输出。副线中功率传输方向取决于主线中波的传输方向与定向耦合器的结构。如前面所述，图8.4-1所示三个S矩阵($[S_{12}]$ 、 $[S_{34}]$ 、 $[S_{14}]$)中的任一个所表示的无耗可逆四端口网络都可称为完全匹配的理想定向耦合器。通过采用图8.4-1(b)的形式，并称端口①为输入端，端口②为直通端，端口④为耦合端，端口③为隔离端。

对于图8.4-3所示理想定向耦合器，由 $[S_{12}]$ 的么正性可得

$$|S_{12}| = |S_{32}| \quad (8.4-39)$$

$$|S_{12}| = |S_{21}| \quad (8.4-40)$$

实际应用时，定向耦合器需与信号源和负载连接，如图8.4-4所示。设端口②、③、④接负载后产生的反射系数为 Γ_2 、 Γ_3 、 Γ_4 ，则其反射波矩阵可由 $[S_{12}]$ 求得为

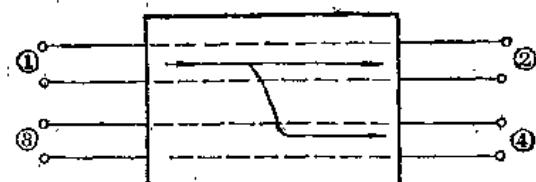


图8.4-3 定向耦合器网络

$$[b_{12}] = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right.$$

$$- \left[\begin{bmatrix} 0 & S_{23} & 0 \\ S_{23} & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_4 \end{bmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{bmatrix} S_{12} \\ 0 \\ S_{14} \end{bmatrix} \right] \alpha_1 \quad (8.4-41)$$

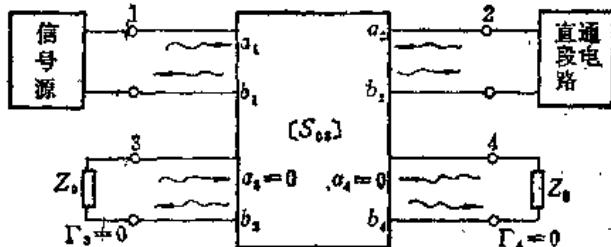


图 8.4-4 连接信号源和负载的理想定向耦合器

当端口③和④接匹配负载时, $\Gamma_3 = \Gamma_4 = 0$, 于是

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} S_{12} \\ S_{13}S_{23}\Gamma_2 \\ S_{14} \end{bmatrix} \quad (8.4-42)$$

即得到

$$b_2 = S_{12}a_1 \quad (8.4-43)$$

$$b_3 = S_{12}S_{23}\Gamma_2 a_1 = S_{23}a_1 \quad (8.4-44)$$

$$b_4 = S_{14}a_1 \quad (8.4-45)$$

因此端口③和④反射波的幅值为

$$|b_3| = |S_{23}| |a_1| = |S_{14}| |a_1| \quad (8.4-46)$$

$$|b_4| = |S_{14}| |a_1| \quad (8.4-47)$$

这表明端口③和④的反射波分别由不同入射波所引起, 却受到等量的衰减, 如果在端口③和④接上匹配检波器则可以分别检测出来。所以利用定向耦合器可以构成反射计。这样, 由主线上电磁波的不同传输方向, 在副线中可得到不同端口的耦合输出。这正是定向耦合器名称的来由。

实际应用的定向耦合器的性能指标是:

(1) 耦合度 C : 定义为副线耦合输出功率 P_{40} 与主线输入功率 P_{11} 之比的分贝数, 即

$$C = 10 \lg \frac{P_{40}}{P_{11}} = 20 \lg |S_{41}| \quad (\text{dB}) \quad (8.4-48)$$

由于 $P_{40} < P_{11}$, 所以耦合度为负值; 但习惯上定向耦合器的耦合度只称它的绝对值。

(2) 隔离度 I : 定义为输入功率 P_{11} 与副线隔离端的功率 P_{30} 之比的分贝数, 即

$$I = 10 \lg \frac{P_{11}}{P_{30}} = 20 \lg \frac{1}{|S_{31}|} \quad (\text{dB}) \quad (8.4-49)$$

反映定向耦合器隔离度的指标有时用定向性 D , 它定义为副线耦合输出功率 P_{40} 与隔离端功率 P_{30} 之比的分贝数, 即

$$\begin{aligned} D &= 10 \lg \frac{P_{40}}{P_{30}} = 10 \lg \frac{P_{40}}{P_{11}} \cdot \frac{P_{11}}{P_{30}} = 20 \lg \left| \frac{S_{41}}{S_{31}} \right| \quad (\text{dB}) \\ &= I \quad (\text{dB}) - C \quad (\text{dB}) \end{aligned} \quad (8.4-50)$$

可见定向性等于隔离度与耦合度之差。

(3) 输入驻波比: 它是指端口②、③、④都接匹配负载时, 主线输入端的驻波比。

(4) 工作频带宽度: 它是指满足上述三个指标时的工作频率范围。

对于图 8.4-3 所示定向耦合器, 其 S 矩阵为 $[S_{41}]$, 如式 (8.4-17) 所示。由其公

正性可得

$$\left. \begin{array}{l} |S_{12}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\ |S_{23}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \\ |S_{14}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \end{array} \right\} \quad (8.4-51)$$

和

$$S_{12}S_{14}^* + S_{23}S_{34}^* = S_{12}S_{23}^* + S_{14}S_{34}^* = 0 \quad (8.4-52)$$

由式(8.4-51)和(8.4-52)得到

$$S_{12} = S_{34} = C_1 \quad (8.4-53)$$

则由式(8.4-52), 得到

$$S_{14} = S_{23} = jC_2 \quad (8.4-54)$$

而 $C_1^2 + C_2^2 = 1$ 。因此得到定向耦合器的 S 矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & 0 & jC_2 \\ C_1 & 0 & jC_2 & 0 \\ 0 & jC_2 & 0 & C_1 \\ jC_2 & 0 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4-55)$$

定向耦合器的结构型式很多, 有波导型、同轴线型、微带线型等。图 8.4-5 表示几种波导定向耦合器。图 8.4-5(a) 为双孔矩形波导定向耦合器, 孔可开在公共宽壁上也可开在公共窄壁上, 两孔相距 $\lambda_g/4$ 。如图所示, 设由端口①输入一单位振幅的波, 由第一个孔向端口③和④耦合波的振幅分别为 a^- 和 a^+ 。 a^- 和 a^+ 也表示耦合场与入射场之比, 故称为孔耦合系数。对于孔耦合系数值很小的情况下, 第二个孔处的场近似为 $e^{-j\beta d}$ 。因此端口③和④总的波的振幅为

$$a_3 = a^- + a^- e^{-j\beta d} e^{-j\beta_1 d} \quad (8.4-56)$$

$$a_4 = a^+ e^{+j\beta_1 d} + a^+ e^{-j\beta d} \quad (8.4-57)$$

式中 β_1 是副波导在信号频率时的传播常数; 假如主副波导的尺寸相同, 则 β_1 和 β 相等。于是得到双孔波导定向耦合器的耦合度为

$$C = -20 \lg(2a^+) \quad (8.4-58)$$

定向性为

$$D = 20 \lg \frac{2|a^+|}{|a^-| \cdot |e^{j\beta d} + e^{-j\beta d}|} = 20 \lg \left| \frac{a^+}{a^-} \right| + 20 \lg |\sec \beta d| \quad (8.4-59)$$

可见定向性 D 等于单孔的固有定向性 (它一般很小且随频率变化不大) 加上双孔阵的定向性。由于 $\sec \beta d$ 随频率而变, 在 $d = \lambda_g/4, 3\lambda_g/4, 5\lambda_g/4$ 等频率时为无限大, 所以这种定向耦合器的定向性随频率变化很大, 在上述特定频率上达到最大。可见这种双孔定向耦合器在中心频率的定向性可以做到很高, 但频带特性不好。

图 8.4-5(b) 所示多孔定向耦合器可以在较宽的工作频带内做到耦合度近似不变, 定向性也相当高。为此, 各个孔的直径应该不同并要求按一定的规律分布。

另一种有用的波导定向耦合器是莫雷诺十字孔定向耦合器和斯文格反向耦合器, 如图 8.4-5(c)、(d) 所示。在此耦合器中, 一个孔辐射的场与另一个孔辐射的场相位差 180° 。参考图 8.4-5(a), 第一个孔辐射的场为 a^+, a^- , 而第二个孔辐射的场则为 $-a^+, -a^-$ 。

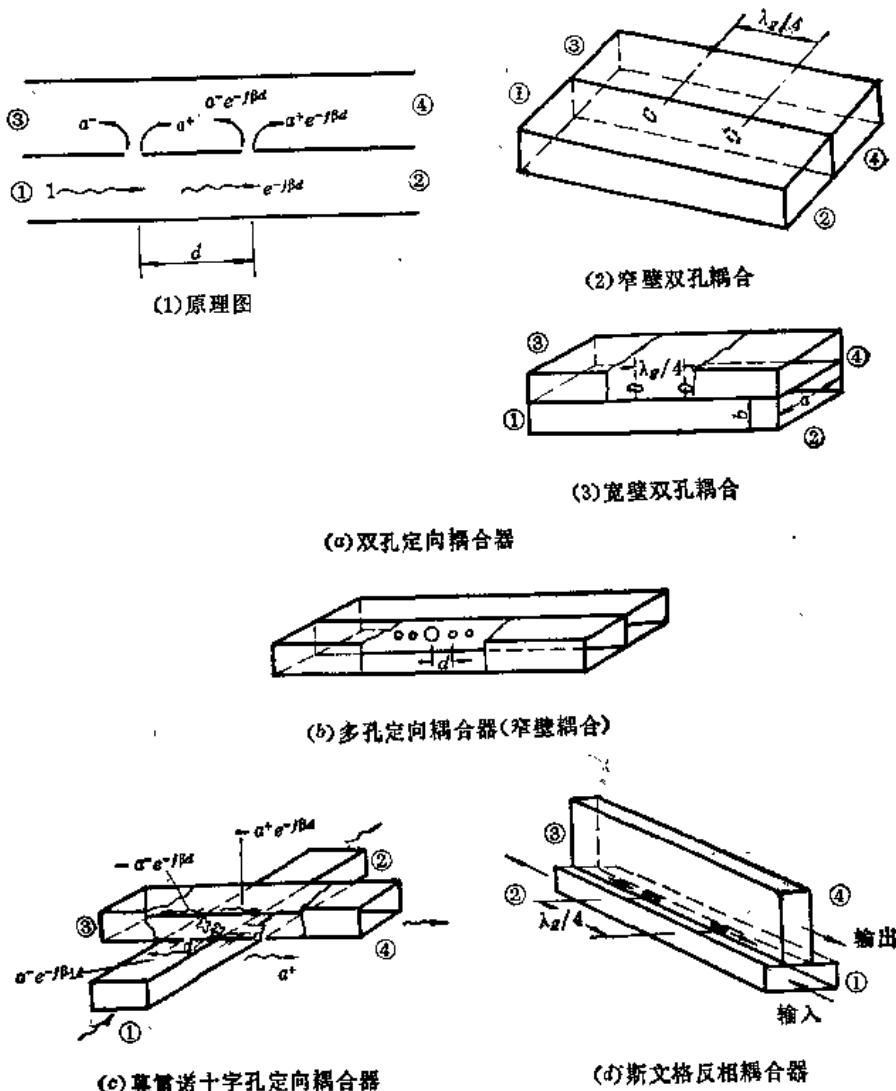


图8.4-5 几种波导定向耦合器

$-a^-$, 因此图(c)和(d)端口③和④波的振幅为

$$a_3 = a^- e^{-j\beta_1 d} - a^- e^{-j\beta d} \quad (8.4-60)$$

$$a_4 = a^+ - a^+ e^{-j\beta d} e^{-j\beta_1 d} \quad (8.4-61)$$

如果主副波导尺寸相同, 则 $\beta_1 = \beta$, $a_3 = 0$, 而 $a_4 = e^{-j\beta d} 2 j a^+ \sin \beta d$ 。故端口①和④之间的耦合度为

$$C = -20 \lg 2 |a^+ \sin \beta d| \quad (8.4-62)$$

当 $d = \lambda_g/4$ 时 C 具有最大值。可见, 这两种耦合器的定向性 D 理论上为无限大且与频率无关, 而耦合度也随频率变化很慢, 特别是在 $\beta d \approx \pi/2$ 的频率。这两种定向耦合器在标准波导的带宽内可以提供相当均匀的耦合, 耦合度典型值为 $20 \sim 40 \text{ dB} \pm 1.5 \text{ dB}$, 最小定向性为 20 dB , 最大驻波比约为 1.05; 采用适当的波导, 这两种定向耦合器的频率可从 S 波段一直到 V 波段 (40.0GHz)。

8.5 微波铁氧体隔离器和环行器

前面讨论的都是可逆元件。在本节中, 我们将讨论两个常用的不可逆元件: 微波铁氧体隔离器和环行器。

1. 微波铁氧体的旋磁特性

铁氧体又名铁淦氧磁物(简称铁淦氧)，是一种非金属的铁磁性材料。其分子式为 $MO\cdot Fe_2O_3$ ，式中M代表Zn(锌)、Ni(镍)、Mn(锰)、Mg(镁)等二价金属离子。就M的种类不同，铁氧体分为镍铁氧体、锰铁氧体等。铁氧体的生产过程、外观及成品加工都类似于陶瓷材料，所以铁氧体制成品又名磁性瓷。按其特性和用途，铁氧体分软磁、永磁、旋磁、矩磁和压磁铁氧体五类。微波波段使用的是旋磁铁氧体，其磁导率为张量。

我们知道，金属磁性材料在交变场中会产生涡流损耗和趋肤效应，而且随场的频率升高而更加严重。因此微波电磁场不能渗透到金属内部，但微波却能渗透到铁氧体内部，因为铁氧体是一种非金属铁磁性材料，其电阻率很高。微波铁氧体的电阻率约为 $10^7 \sim 10^{11} \Omega \cdot cm$ ，比铁的电阻率($10^{-6} \Omega \cdot cm$)大 $10^{12} \sim 10^{16}$ 倍。这正是铁氧体能应用到微波领域的先决条件。

我们知道，在直流磁场 H_0 (设 H_0 在z方向)和微波场 \vec{h} 同时作用下，铁氧体的磁导率为一非对称张量⁽⁷⁾，即有

$$\vec{b} = \mu_0(1 + \vec{\chi})\vec{h} = \vec{\mu}\vec{h} \quad (8.5-1)$$

式中

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu' & -jk' & 0 \\ jk' & \mu' & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.5-2)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu &= 1 + \frac{\omega_0\omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ k &= -\frac{\omega\omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (8.5-3)$$

ω 是微波场的角频率； $\omega_0 = -\gamma_e H_0$ 是自旋电子在 H_0 作用下的进动频率； $\omega_m = -\gamma_s M_0$ ， M_0 是铁氧体的饱和磁化强度； γ_s 称为回磁比($= -\frac{1}{2} \frac{e}{m}$)， e 和 m 分别为电子的电量和质量)。

式(8.5-2)所示相对磁导率的本征值可求得为

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \mu_r^+ = \mu - k \\ \mu_2 &= \mu_r^- = \mu + k \\ \mu_3 &= \mu_s = 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.5-4)$$

相应的本征矢量为

$$\vec{H}_1 = \vec{h}_r^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} h_0 \\ -jh_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{H}_2 = \vec{h}_r^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} h_0 \\ jh_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{H}_3 = \vec{h}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_0 \end{bmatrix} \quad (8.5-5)$$

此本征矢量相当于传输系统中某传输模式的正、反旋圆极化波，铁氧体对它们所呈现的磁导率不同，因而传播因数不同，即有

$$\gamma_{\pm} = j\omega \sqrt{\epsilon\mu_0(\mu \mp k)} \quad (8.5-6)$$

因此，当微波在这种张量磁导率铁氧体中传播时，将发生回磁共振现象、法拉第旋转效应、场移效应等旋磁特性。微波铁氧体元件则是利用这些特性而设计的。

(1) 回磁共振现象

由式(8.5-3)可见, 当 $\omega_0 = \omega$ 时, μ 和 k 都趋于无限大, 因而 μ_r^+ 为无限大。这种现象称为铁氧体的回磁共振现象, μ_r 随 H_0 的变化曲线如图8.5-1所示。

最常用的情况是微波磁场 h 与直流磁场 H_0 垂直。如图8.5-2所示, 设 h 在 xy 平面内, 为一线极化波, 它可分解为正、反旋圆极化波, 且

$$\left. \begin{array}{l} \text{正旋波 } h_y^+ = -jh_x^+ \\ \text{反旋波 } h_y^- = jh_x^- \end{array} \right\} \quad (8.5-7)$$

将式(8.5-7)代入式(8.5-1), 可以得到

$$\left. \begin{array}{l} b_x = \mu_0(\mu - k)h_x = \mu_0\mu_r^+h_x \\ b_y = \mu_0(\mu - k)h_y = \mu_0\mu_r^-h_y \\ b_z = \mu_0h_z \end{array} \right\} \quad (\text{正旋波}) \quad (8.5-8)$$

和

$$\left. \begin{array}{l} b_x = \mu_0(\mu + k)h_x = \mu_0\mu_r^-h_x \\ b_y = \mu_0(\mu + k)h_y = \mu_0\mu_r^+h_y \\ b_z = \mu_0h_z \end{array} \right\} \quad (\text{反旋波}) \quad (8.5-9)$$

式中 μ_r^+ 和 μ_r^- 为标量, 分别称为正、反旋圆极化波的相对磁导率, 且

$$\left. \begin{array}{l} \mu_r^+ = \mu - k = 1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega} \\ \mu_r^- = \mu + k = 1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 + \omega} \end{array} \right\} \quad (8.5-10)$$

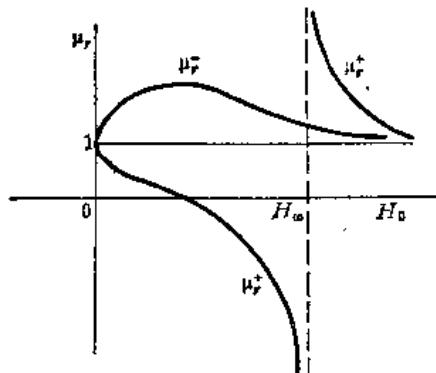


图8.5-1 μ_r^+ 和 μ_r^- 随 H_0 的变化曲线

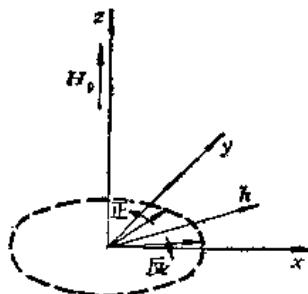


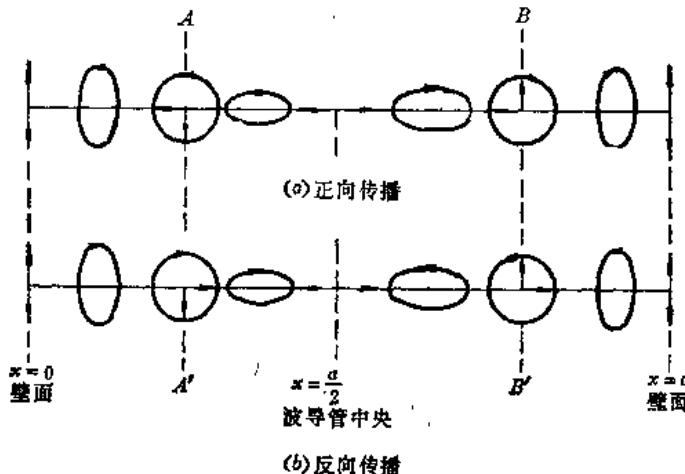
图8.5-2 铁氧体中的正、反旋圆极化波

由此可见, 铁氧体对正、反旋波所呈现的相对磁导率不同, 这两种波在铁氧体中传播时所受到的影响将不同; 当 $\omega = \omega_0$ 时, μ_r^+ 具有共振特性, 而 μ_r^- 为有限值, 无共振特性。

对于常用的TE₁₀模矩形波导, 由场分量

$$\left. \begin{array}{l} H_x = H_{10} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z} \\ H_z = j\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right) H_{10} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z} \\ E_y = -j\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{10} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z} \end{array} \right\}$$

可以看出， H_x 和 H_z 在时空上都相差 90° ，于是在由条件 $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{a} = \lambda_g / \lambda_e$ 所确定的位置 x ，两者振幅相等，呈圆极化波。此位置在波导中心线两边，如图 8.5-3 所示。如在 AA' 或 BB' 处放置磁化的铁氧体片，当 $H_0 = H_a$ 时，铁氧体将对正旋圆极化波产生共振吸收，使波强烈衰减而不能通过，而反旋圆极化波则可无衰减地通过，从而使电磁波单向传输。

图 8.5-3 TE₁₀模矩形波导截面内磁场极化图象

(2) 法拉第旋转效应

当直流磁场与波传播方向一致时，波方程为

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{h} \quad (8.5-11)$$

假定波在无限大铁氧体媒质中传播，沿 z 向传播，在横截面内不变化，

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \times \nabla = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \gamma^2$$

则由式 (8.5-11)，得到

$$\gamma^2 \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \begin{bmatrix} \mu & -jk \\ jk & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} \quad (8.5-12)$$

由此方程的系数行列式为零，可以得到

$$\gamma_{\pm}^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 (\mu \mp k) \quad (8.5-13)$$

相应的场为

$$h_y^{\pm} = \mp j h_x^{\pm} \quad (8.5-14)$$

这表明，此时波方程的解为两个传播因数为 γ_{\pm} 的沿相反方向旋转的平面圆极化波。为了得到波在此种情况下的传播特性，我们取此圆极化波的线性组合，得到

$$\left. \begin{aligned} h_x(z) &= h_x^+(z) + h_x^-(z) = \frac{1}{2} e^{-j\beta_+ z} + \frac{1}{2} e^{-j\beta_- z} \\ h_y(z) &= h_y^+(z) + h_y^-(z) = \frac{-j}{2} e^{-j\beta_+ z} + \frac{j}{2} e^{-j\beta_- z} \end{aligned} \right\} \quad (8.5-15)$$

在 $z = 0$ 处, $h_x(0) = 1$, $h_y(0) = 0$, 于是

$$\left. \begin{aligned} h_x(z) &= \cos\left(\frac{\beta_+ - \beta_-}{2}\right) z \cdot e^{-j\left(\frac{\beta_+ + \beta_-}{2}\right)z} \\ h_y(z) &= \sin\left(\frac{\beta_+ - \beta_-}{2}\right) z \cdot e^{-j\left(\frac{\beta_+ + \beta_-}{2}\right)z} \end{aligned} \right\} \quad (8.5-16)$$

式中

$$\beta_{\pm} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r^{\pm}} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 (\mu_r \mp k)} \quad (8.5-17)$$

可见, 由该两圆极化波合成的线极化波传播距离 l ($z = l$), 磁场的极化方向相对于 H_0 的指向顺时针方向旋转了一个角度 θ , 如图 8.5-4(a) 所示, 即有

$$\theta = \frac{1}{2}(\beta_+ - \beta_-)l \quad (8.5-18)$$

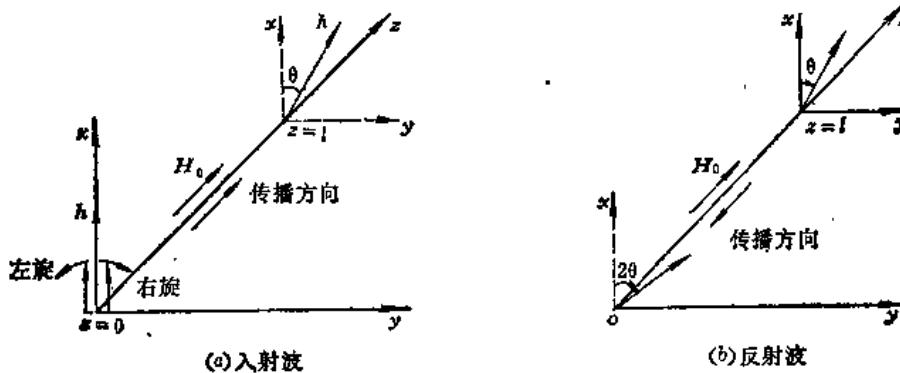


图 8.5-4 法拉第旋转效应

如果波反方向传播, 即从 $z = l$ 向 $z = 0$ 传播, 到达 $z = 0$ 时, 磁场极化方向也顺时针旋转 θ 角度, 而并未恢复原来的方向, 如图 8.5-4(b) 所示, 因此是不可逆的。这种极化面随波传播不断以前进方向为轴旋转的现象称为法拉第旋转效应, 角度 θ 称为法拉第旋转角。

实际应用时, 是将纵向磁化铁氧体棒置于圆波导中心, 则 TE_{11} 模在传播过程中将产生法拉第旋转, 其旋转角度由圆波导尺寸和长度、铁氧体棒半径、微波的频率及饱和磁化强度 M_s 决定。

(3) 场移效应

当直流磁场方向与波传播方向和微波磁场极化面垂直时, 将产生所谓场移效应。

为了直接应用式 (8.5-2) 所示张量磁导率, 我们仍假定直流磁场沿 z 方向, 而波沿 y 向传播, 则由麦克斯韦方程, 有

$$\nabla \times E = -j\omega \mu_0 \vec{\mu}_r h \quad (8.5-19)$$

$$\nabla \times h = j\omega \epsilon E \quad (8.5-20)$$

即有

$$\gamma \begin{bmatrix} -E_x \\ 0 \\ E_x \end{bmatrix} = -j\omega \mu_0 \begin{bmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} \quad (8.5-21)$$

$$\gamma \begin{bmatrix} -h_x \\ 0 \\ h_x \end{bmatrix} = j\omega \epsilon \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (8.5-22)$$

由此可得

$$\left. \begin{array}{l} \gamma E_z = j\omega \mu_0 (\mu h_x - jkh_y) \\ 0 = -j\omega \mu_0 (jkh_x + \mu h_y) \\ \gamma E_x = -j\omega \mu_0 h_x \end{array} \right\} \quad (8.5-23)$$

$$\left. \begin{array}{l} -\gamma h_x = j\omega \epsilon E_x \\ 0 = E_y \\ \gamma h_z = j\omega \epsilon E_z \end{array} \right\} \quad (8.5-24)$$

上面的方程可分为两组：第一组只有 h_z 和 E_z 分量，为TEM波；

$$\left. \begin{array}{l} \gamma E_z + j\omega \mu_0 h_z = 0 \\ j\omega \epsilon E_z + \gamma h_z = 0 \end{array} \right\} \quad (8.5-25)$$

第二组有 h_x 、 h_z 和 E_z 三个分量，为TE模：

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\gamma^2}{j\omega \epsilon} h_x = j\omega \mu_0 (\mu h_x - jkh_y) \\ jkh_x + \mu h_y = 0 \end{array} \right\} \quad (8.5-26)$$

这是一正旋椭圆极化波。由式(8.5-25)和(8.5-26)可求得这两个波的传播因数分别为

$$\gamma_1 = \pm j\omega \sqrt{\epsilon \mu_0 \mu_1} = \pm j\omega \sqrt{\epsilon \mu_0} \quad (8.5-27)$$

$$\gamma_2 = \pm j\omega \sqrt{\epsilon \mu_0 \mu_2} = \pm j\omega \sqrt{\epsilon \mu_0 \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}} \quad (8.5-28)$$

式中

$$\mu_1 = 1 \quad (8.5-29)$$

$$\mu_2 = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu} \quad (8.5-30)$$

分别为铁氧体对上述TEM波和TE波的相对磁导率。由于相对磁导率不同，所以铁氧体对这两个波的折射率也不同。因此，当波从空气以一定角度入射到铁氧体上时，在铁氧体内将出现两个折射角。这种现象称为双折射效应。

直流磁场与微波磁场和波传输方向垂直的情况，多见于矩形波导中。此时横向磁化铁氧体棒或片置于波导内，如图8.5-5所示。

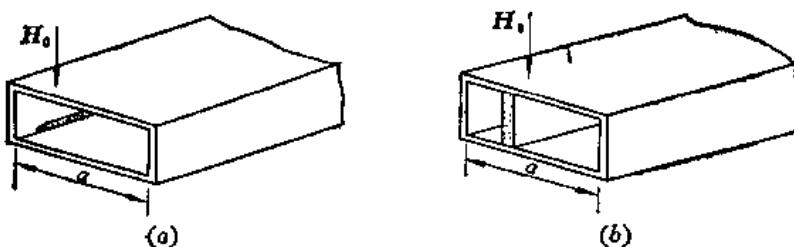


图8.5-5 置有横向磁化铁氧体棒或片的矩形波导

由图8.5-6所示矩形波导TE₁₀模磁场结构可以看出，当波正向传输时，在AA'位置，由A向A'看时为正旋圆极化波，在BB'位置、由B向B'看时为反旋圆极化波；当波反向传输时，则相反。如果在AA'或BB'处放置横向磁化铁氧体片或棒，则对正、反向传输

的波将由于 μ 不同而有不同的相移因数。据此可构成不可逆相移器等。

矩形波导中放置横向磁化铁氧体片还可出现不可逆场移效应。如图 8.5-7 所示，在波导中接近圆极化磁场处放置横向磁化铁氧体片，使直流磁场小于 H_0 ，如图 8.5-1 所示，此时 $\mu_r \gg \mu_s$ ，因此，当波正向传输时，电磁场能量集中于波导中，但由于 μ_s 很小而使能量离开铁氧体，使场强最大值位置稍有偏移；而当波反向传输时，由于 μ_s 很大而使电磁场能量集中于铁氧体附近，也使 TE_{10} 模的场强发生了移动。这种由横向磁化铁氧体引起的电场最强位置偏移的现象称为场移效应。这种效应也是不可逆的。利用这种效应可做成铁氧体场移式隔离器和环行器。

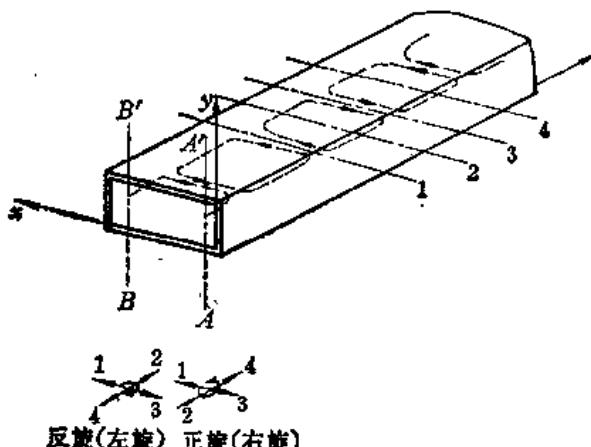


图 8.5-6 矩形波导中 TE_{10} 模的圆极化现象

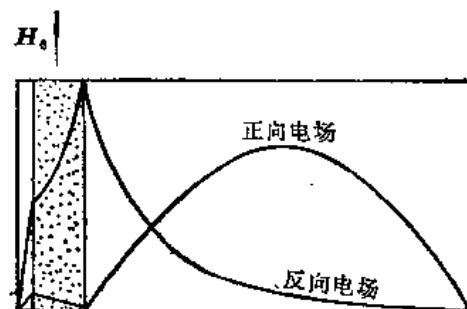


图 8.5-7 不可逆场移效应

2. 隔离器

隔离器又称单向器，是一种使正向传输波几乎无衰减地通过，而使反向传输波衰减很大的不可逆元件，广泛用于传输系统和测量系统起隔离或消除反射的作用。

微波铁氧体隔离器按原理可分为场移式、谐振吸收式和法拉第旋转式三种。下面分别加以介绍。

(1) 场移式隔离器

利用上述不可逆场移效应可以做成场移式隔离器。如图 8.5-8 所示，在矩形波导接近圆极化位置放入横向磁化铁氧体片，则对反向波，由于 $\mu_r \gg \mu_s$ 而使电磁场能量集中于铁氧体附近。如果在铁氧体表面贴上电阻片，则反向波将被衰减掉，而正向波将几乎无衰减地通过。

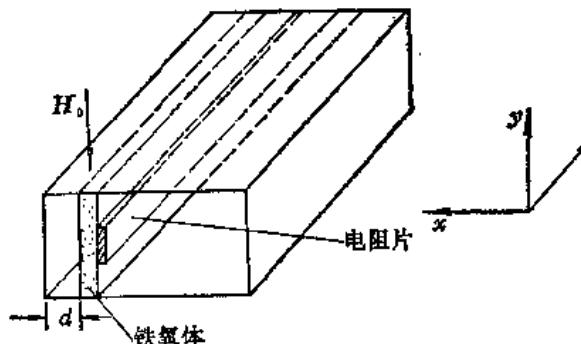


图 8.5-8 场移式隔离器

场移式隔离器容易做到较高反向衰减和很低的正向衰减，但一般只适用于低功率，因为其电阻片只能承受较低的功率。这种隔离器的工作磁场较低，故可以做到体积小、轻便，适宜于实验室使用。

场移式隔离器中的铁氧体片距波导窄壁约为 $a/20$ ，其厚度约为 $a/8$ 。电阻片的阻值由实验确定。为了易于匹配，铁氧体片的高度 h 要略低于波导高度，一般取 h/b 为 $3/4$ ，并将其输入端磨成尖劈形状。这种隔离器的带宽一般约为 8%。为了加宽频带，可用介质

加载，即在铁氧体片另一边加一块与铁氧体形状相同的低耗介质片。

(2) 谐振式隔离器

利用上述回磁共振现象可以做成隔离器。如图 8.5-9 所示，在矩形波导圆极化位置放入铁氧体片，直流磁场取等于 H_0 ，则正向传输时，铁氧体片处为反旋波，因而没有衰减；反向传时，铁氧体对正旋波产生共振吸收，使波受到很大衰减。

谐振式隔离器的设计容易，但所需直流磁场高因而体积大、笨重。这种隔离器多用于高功率情况。铁氧体片可用单片也可用双片，并紧贴于波导上下宽壁内表面，以便于散热，如图 8.5-9(b) 所示。为了加宽频带，可在铁氧体片一边加介质片。

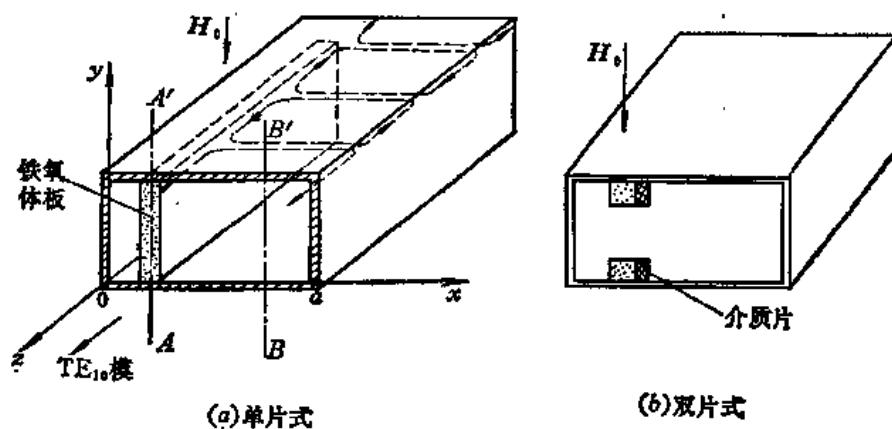


图 8.5-9 谐振式隔离器

(3) 法拉第旋转式隔离器

图 8.5-10 表示应用法拉第旋转效应做成的隔离器。图中铁氧体棒放在圆波导轴上，并设计其长度 l 满足法拉第旋转角

$$\theta = \frac{(\beta_- - \beta_+) l}{2} = \frac{\pi}{4}$$

沿轴向外加直流磁场 H_0 ，其输入和输出端均为矩形波导，但它们的口面相对于 z 轴互成 45° 角。在这种隔离器中，反向波在输出端矩形波导中将被截止。如图 8.5-10(b) 所示，左边矩形波导沿 z 轴正向传输的 TE_{10} 模，由过渡波导变换成圆波导的 TE_{11} 模，电阻片 1 与电场极化面垂直，所以电磁波无衰减地向磁化铁氧体传输，通过铁氧体后极化面旋转

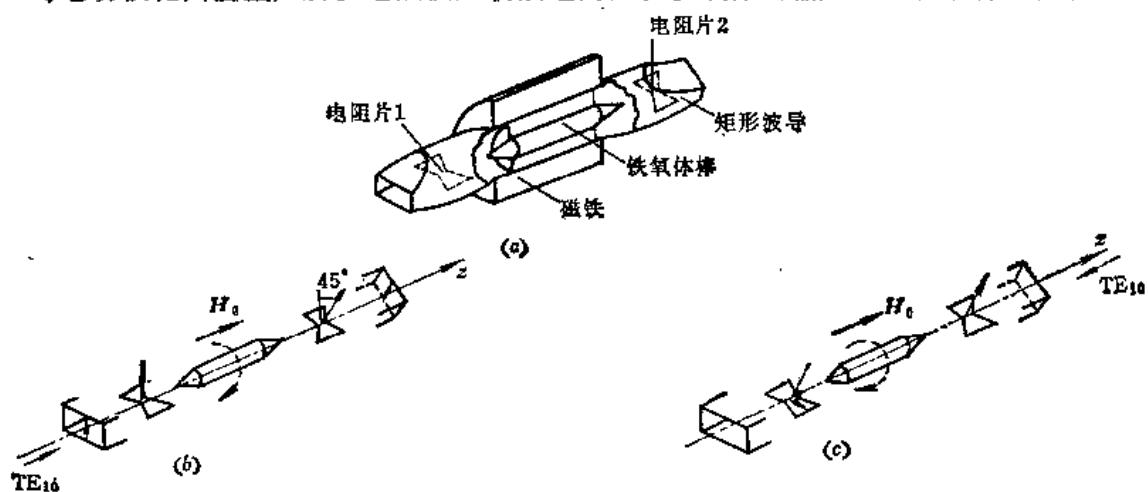


图 8.5-10 法拉第旋转式隔离器
(a) 结构图; (b) 正向传输图; (c) 反向传输图。

转了 $\pi/4$ 法拉第旋转角，其极化面为右旋的，电阻片2与其电场极化面垂直，故电磁波不会受到衰减，然后经过渡波导变换成TE₁₀模由矩形波导输出。而从图8.5-10(c)右边矩形波导反向传输的TE₁₀模，经过铁氧体后旋转了45°角，其极化面为左旋的，结果其电场极化面与电阻片1平行，电磁波将受到很大衰减，且由于左边的矩形波导宽边与电场极化面平行，因此反向波得不到输出。

法拉第旋转式隔离器的功率容量低，机械结构较复杂，且隔离器较长，故很少用。但它可用在弱直流磁场的场合，因而适用于回磁共振磁场高的毫米波波段。

3. 微波铁氧体环行器

环行器又名环流器，如图8.5-11所示。图中标有序号的每个臂相当于一个微波支路，箭头表示能流的方向。理论上讲，环行器的臂数可以不限，但实用的只有四臂环行器和三臂环行器两种。

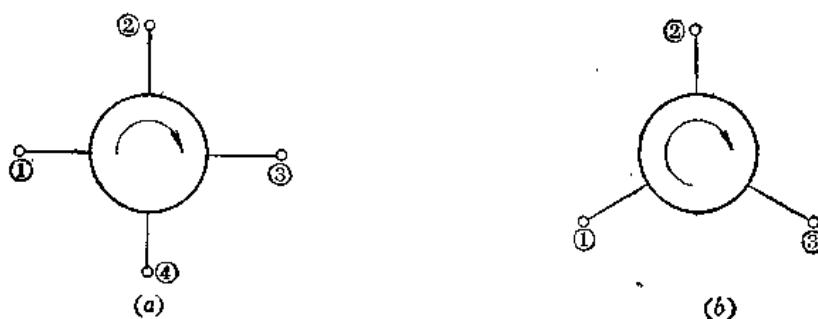


图8.5-11 环行器示意图
(a) 四臂环行器；(b) 三臂环行器。

对于一理想四臂环行器，由臂①输入功率时，只由臂②输出，臂③和④无输出；如果功率由臂②输入，则只由臂③输出，臂④和①无输出；余类推。

环行器的应用非常广泛，可在雷达中作天线收发转换开关，在负阻放大器中分离输入和输出信号；在传输系统或测量系统中作隔离器；构成反射式相移器、分路滤波器等。

环行器的主要技术指标是正向衰减 α_A 、隔离度 I 、输入端驻波比和工作频带宽度。对三端环行器而言，设端口①输入功率为 P_1 ，端口②、③的输出功率分别为 P_2 、 P_3 ，则

$$\alpha_A = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} \quad (\text{dB}) \quad (8.5-31)$$

$$I = 10 \lg \frac{P_1}{P_3} \quad (\text{dB}) \quad (8.5-32)$$

输入端驻波比是指端口②、③接匹配负载时，端口①测得的驻波比。

频带宽度是指上述指标都满足时的工作频率范围。

环行器的种类很多，主要有相移式环行器、法拉第旋转式环行器、场移式环行器和结环行器等。目前应用最多的是结环行器，但限于篇幅，这里只介绍一种不可逆相移式四端环行器。

这种环行器由不可逆相移器、魔T和3dB电桥组成。图8.5-12(a)表示它的一种典型结构。工作原理见图(b)：由端口①输入的电磁波在魔T两侧臂的截面b处分成两个等幅同相的波，通过不可逆相移器后在截面c处有90°相位差。这两个波通过3dB电桥后又有90°相位差，结果到达截面d处时，在臂2中相位相同而叠加，由端口②输出，

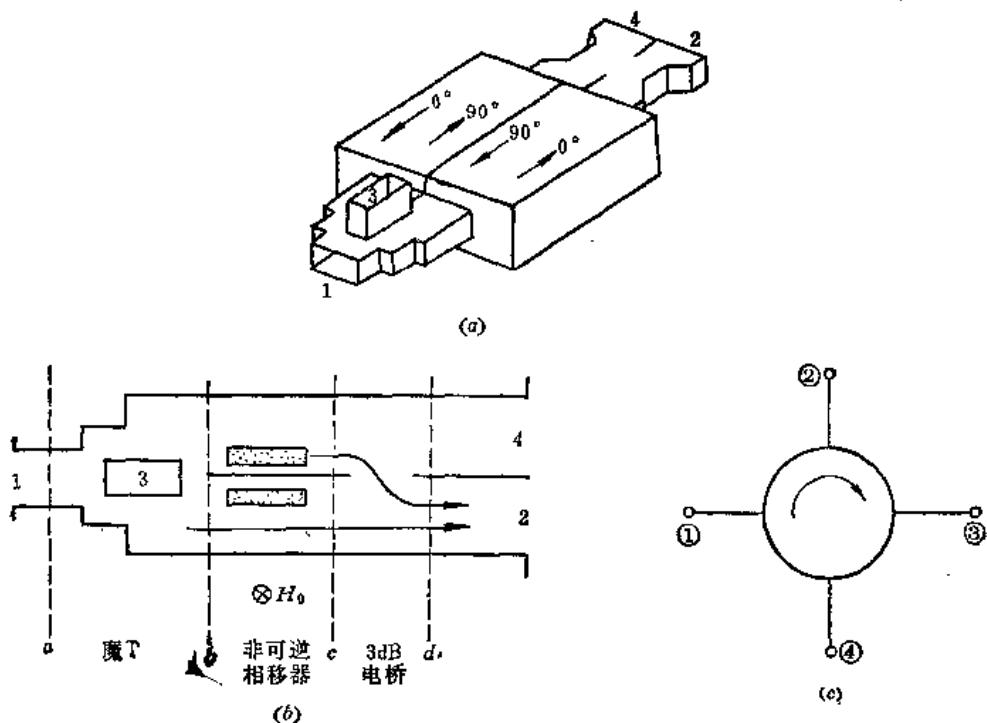


图8.5-12 不可逆相移式四端环行器

(a) 结构; (b) 原理图; (c) 等效电路。

而在臂4中相位相反而互相抵消，故端口④无输出；根据魔T特性，端口①和③相互隔离。因此，由端口①输入的波只由端口②输出，端口③、④无输出；同样，由端口②输入的波，只由端口③输出，端口④、①无输出；余类推。其等效电路如图8.5-12(c)所示。

这种环行器的工作磁场较低，磁路结构比较简单、紧凑，并具有宽频带特性；又由于铁氧体片靠近波导壁，散热好，故适于高功率使用。

本章提要

- 微波元件的种类很多，而且不同的元件组合起来又可以构成新的元件或部件。本章按元件的端口数分类讲述了一些常用元件的基本特性与应用，这样既能了解各类元件的共性，又能熟悉各种元件的个性。本章只定性分析了一些常用的一、二、三、四端口元件的基本特性。在微波技术中也用到五端口、六端口等多端口元件；而微波铁氧体元件还有相移器、开关、调制器等，限于篇幅，这里未作介绍。

- 微波元件的结构和特性与所采用的传输线型式有密切关系。本章主要介绍了有关波导元件，与之相应的有同轴元件、微带线元件等。波导元件的主要优点是结构牢固、功率容量大，缺点是工作频带窄。同轴元件优点是工作频带很宽，缺点是功率容量较低、损耗较大。微带线元件的优点是体积小、重量轻、可集成化；缺点是功率容量低、损耗较大、不便调节。在设计微波元件时，应根据条件和要求，选择合适的传输线型式和结构。

- 本章对微波元件的分析主要是用等效网络方法，并用S矩阵来描述元件的特性。由本章的讨论可以看出，等效网络法是一种分析微波元件有效的方法；S参数有明确的物理意义；S矩阵非常适用于分析无耗可逆元件，能给出无耗可逆元件的基本特性。需

要指出的是，等效网络方法还可以对元件进行网络综合，设计出满足技术要求的微波元件，或对元件进行优化设计。有关这方面内容，请参考有关资料。

参 考 资 料

- [1] 廖承恩，《微波元件》，西北电讯工程学院，1982年。
- [2] Om P. Gandhi, *Microwave Engineering and Applications*, Pergamon Press, 1981.
- [3] Samuel Y. Liao, *Microwave Devices and Circuits*, Prentice-Hall, 1980.
- [4] 范树礼，《微波元件及测量》，人民教育出版社，1961年。
- [5] R. E. 柯林，《微波工程基础》，吕继尧译，人民邮电出版社，1981年。
- [6] 板倉清保、熊谷信昭，超高周波回路，才一社，昭和38年。
- [7] 吴培亨，《微波电路》，科学出版社，1980年。
- [8] 黄宏嘉，《微波原理》(卷Ⅰ)，科学出版社，1964年。

习 题

- 8-1 有一矩形波导，终端接匹配负载，并在负载处插入一可调螺钉后，测得驻波比为1.94，第一个电场驻波最小点至螺钉的距离为 $0.1\lambda_g$ ，求此时负载的反射系数与螺钉的归一化电纳值。
- 8-2 已知矩形波导尺寸为 $58 \times 10\text{mm}^2$ ，工作频率为3.9GHz，其中插有一对称容性膜片（厚度忽略不计）， d/b 等于0.4，求膜片的归一化电纳值。
- 8-3 在端接负载的WBJ-32波导中测得行波系数为0.29，第一个电场波腹点距负载5.7cm，工作波长为10cm，今采用膜片进行匹配，求膜片的尺寸与放置的位置。
- 8-4 在已匹配波导中插入一归一化电纳为 $j3$ 的膜片，问在何处再插入一相同的膜片可以恢复阻抗匹配，并求出两膜片间的驻波系数为多少？
- 8-5 矩形波导尺寸为 $22.86 \times 10.16\text{mm}^2$ ，工作波长为3.2cm，波导终端不匹配，测得驻波比为2.4，第一个电场波节距终端的相位为 67.5° ，欲用单螺钉进行匹配，所用螺钉直径为1.3mm，求螺钉的归一化电纳值、放置的位置及插入的深度。
- 8-6 有一双螺钉匹配装置，终端接匹配负载和容性膜片，如图8-1所示。若已知矩形波导尺寸为 $22.86 \times 10.16\text{mm}^2$ ，工作波长为3.2cm，螺钉直径为1.3mm，两螺钉间距为 $\lambda_g/8$ ，容性膜片至第一个螺钉的距离为7.5cm，容性膜片的归一化电纳为1.5，试求：(1) 两螺钉需旋入多深才能达到匹配？(2) 匹配装置各处的驻波比等于多少？

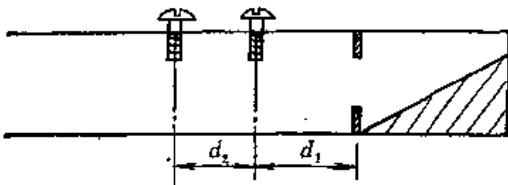


图8-1 习题8-6用图

- 8-7 有一双螺钉匹配器，终端接有归一化阻抗 $(0.35 - j0.5)$ 的负载，螺钉间距为 $\lambda_g/8$ ，求当第一个螺钉至负载的距离分别为 $0.1\lambda_g$ 和 $0.2\lambda_g$ 时：(1) 此双螺钉匹配器能否实现匹配？(2) 匹配时每个螺钉的容纳为多少？(3) 匹配时螺钉匹配器各处的驻波比为多少？
- 8-8 试解释为什么双螺钉匹配器存在得不到匹配的禁区？画出螺钉间距为 $\lambda_g/8$ 、 $\lambda_g/4$ 和 $3\lambda_g/8$ 的禁区范围。
- 8-9 在三分支接头中，假定端口①、②匹配，试证明：适当选择参考面可使其散射矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 8-10 如图8-2所示E-T分支，其臂2接短路活塞，问短路活塞与对称中心面的距离l为多少时，臂3的负载得到最大功率或得不到功率？

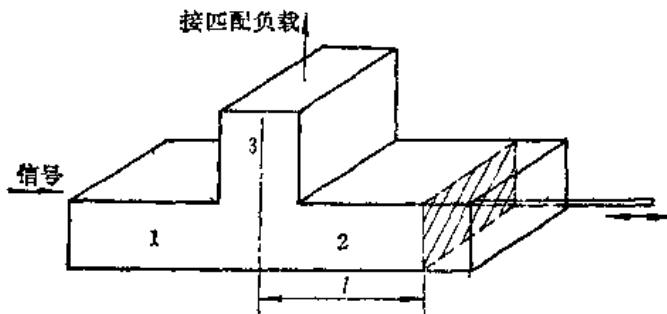


图8-2 习题8-10用图

- 8-11 在双T的E臂和H臂接短路活塞做成调配器，调节短路活塞至接头处的距离 l_3 和 l_4 ，可调节端口②的输出大小。为了使端口②输出最大， l_3 和 l_4 的关系应如何？若使端口②输出为零， l_3 和 l_4 的关系应如何？并证明

$$\Gamma_2 = \frac{\Gamma_3 + \Gamma_4}{2\Gamma_3\Gamma_4} = \frac{1}{2}(e^{-j\theta_3} + e^{-j\theta_4})$$

- 8-12 试推导式(8.4-38)。

- 8-13 有一个E-T结构的波导环形桥路，如图8-3所示，若从分支①和②输入同频率的等幅信号，且 l_1 等于 l_2 ，试求波导中传输TE₁₀模时分支③和④输出信号的大小。

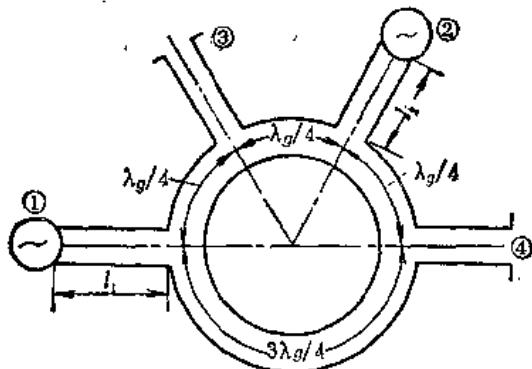


图8-3 习题8-13用图

- 8-14 用双T调配器匹配阻抗为 $20 + j 90 \Omega$ 的负载，信号中心频率为10GHz，矩形波导为WBJ-100，试计算E臂和H臂短路活塞的长度 l_3 和 l_4 及匹配前负载的驻波比。

- 8-15 试求矩形波导传输TE₁₀模时圆极化磁场矢量的位置。

- 8-16 试比较场移式隔离器和谐振式隔离器的异同点。

- 8-17 如图8-4所示结构是什么元件？说明其工作原理，并画出其等效电路。

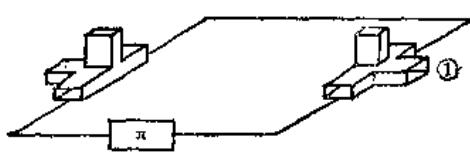


图8-4 习题8-17用图

全书的结论

就方法论而言，本课程涉及无线电和电子学科学技术工作者需要熟悉和掌握的三种方法（或称三种理论），即场的方法、分布参数电路方法和集总参数电路方法。纵观全书的讨论，我们可以得到这样两个结论：

1. 规则波导问题的求解归结于求满足一定边界条件的麦克斯韦方程的解，即归结于求解边值问题。波导的边值问题是以二维特征值方程为基础，即归结于求解如下标量亥姆霍兹方程：

$$\nabla_z^2 \Phi + K_c^2 \Phi = 0$$

式中 Φ 可以是标量位函数或纵向场分量。对于 TEM 模传输线， $K_c^2 = 0$ ；则变成求解拉普拉斯方程：

$$\nabla_z^2 \Phi = 0$$

2. 波导不均匀性（或称波导接头）总是和一定的规则波导联系在一起的。规则波导可以等效为双线，不均匀性本身则可用集总参数元件（通常为电感 L 和电容 C ）电路来等效，不均匀性对波导中主模传输特性的影响则可用网络来描述。这样，就可以把波导场的问题化为路的问题来处理，从而使微波问题的分析和计算得以简化。但微波电路的问题需要将分布参数电路理论（即传输线理论）和集总参数电路理论结合起来进行解决。