

# 前　　言

本书是西安电子科技大学国家精品课程“微波技术基础”的选用教材，《简明微波》讲义在西安电子科技大学原电磁场与微波技术专业、电子信息工程专业等本科教学中使用多年。

本教材由梁昌洪教授领衔，谢拥军教授、官伯然教授参与编写，并由西安交通大学傅君眉教授担任主审。

电磁场微波技术学科的起源可以追溯至 19 世纪，特别是 20 世纪 30、40 年代后得到了飞跃性的发展。近些年来，随着信息科学技术突飞猛进的发展，特别是无线通信、新型雷达、电子对抗、空间探测等领域的巨大需求，微波技术课程在电子信息等学科的教学内容中的地位越来越重要。但是，微波技术这一课程由于对工程数学和电磁理论基础要求较高，涉及到的数学公式较多也较为晦涩，具体工程问题的分析与传统教材中讲授的基础知识结合不够紧密等特点，再加上课时有限，一直成为学生学习的难点。本书力图系统全面、简明扼要地介绍微波技术的基础知识、工程应用及其工程问题的基本分析方法。

从国内来看，微波技术课程在西安电子科技大学发展较早。20 世纪 60 年代初在毕德显教授的有力指导和系统策划下，出现了蒋同泽编写的《长线》和吕海寰编写的《超高频技术》两本书，这是全国最早的同类教材，对多所高等学校微波技术课程的教学均有大的影响，只是由于当时西安电子科技大学是军校的原因，没有正式出版。文革结束后，廖承恩编写的《微波计算基础》是国内多所高等学校引用和执教的教材。1985 年梁昌洪编写的《计算微波》获全国优秀教材奖。同时由于工程实践的需求也希望把微波集成电路的进展、网络的统一、计算机的应用以及 CAD 等先进手段融入教学。20 世纪 90 年代后期根据上述思想，编写了《简明微波》讲义作为教学改革和课程发展的一次有益尝试。2003 年，本课程成为首届国家级精品课程。

本课程的前修课程为“场论与数理方程”、“复变函数”、“线性代数”、“电路、信号与系统”和“电磁场理论”等。本教材的每一章节基本按照 90 分钟课时设计，方便教师使用和学生做好预复习。在编写上，着重突出了现代性和简明性。在内容、方法的讲述和实施等环节都力争跟上时代的潮流。在内容选择上紧密结合通信等学科的发展，引入微波集成电路、光纤、开腔等实践需求的领域和内容。在方法上复频率法、统一传输线理论、特性阻抗的微扰理论等，都是编写者在教学、科研结合上的创新体会。特别是在简明扼要、通俗易懂上狠下工夫，使内容尽量集中于发展主线、脉络清晰，力求做到：(1)统一性：传输线和波导的统一；圆波导和矩形波导的统一；网络理论对于微波技术基础的主线统一；(2)主题性：大胆实施分讲制，每一讲都有一个主题，有一个“戏

## II 前 言

---

核”,每 5~6 讲为一个单元,每个单元都是一个系统,整个教材有一条主线,即把网络方法和场论方法有机结合起来,这样在教学中便于小结归纳和提纲挈领;(3)少而精:在教材和课程设置中强调少而精,“少则深,多则惑”,把主要内容和方法反映出来,其余的让学生去发掘、创造。

本教材分为两篇 5 章。第一章为微波传输线理论,在建立微波传输线分布参数模型的基础上,利用微分方程方法和矩阵解方法介绍传输线的工作状态、传输特性等,重点在于行波、驻波和行驻波这三种微波传输线的工作状态的特点,反射系数、驻波比和输入阻抗这三种工作参数的定义及相互关系,并突出阻抗匹配的工程概念。第二章在广义传输线理论的基础上,以简正波理论为线索系统介绍了金属空心波导、TEM 波传输线、介质传输线等多种导波结构的工作原理和设计方法。第三章是关于微波元件和微波网络的分析,对常用的微波元件按照其对应微波网络的端口数目分类,利用微波网络的  $A$  参数和  $S$  参数对其进行分析和研究,使得原本对于学生来说头绪繁多、不易理解的各种微波元件纲举目张、条理清晰、便于理解,也使学生看到表达抽象的数学工具在分析具体物理问题时的巨大作用。第四章介绍了微波谐振腔,包括传输线谐振腔和非传输线谐振腔,并介绍了耦合和微扰对于谐振腔的影响。第五章是在前 4 章微波基础知识介绍的基础上,提炼和总结了微波问题分析中涉及到的多种解析方法和数值计算方法。这一章内容适合于在开设课时较多的电子信息工程专业微波方向的教学中选讲,也可供电子信息、通信类专业和其他专业方向的研究生和工程技术人员选读。

本课程的网址是:<http://see.xidian.edu.cn/microwave>,欢迎读者上网浏览本课程的发展动态。感谢曹祥玉、王林年等年轻学者协助编写“几何绕射理论”和“FDTD 方法”章节。

非常感谢高等教育出版社提供这样一个与广大读者交流学习的机会。由于作者水平有限,书中难免存在一些缺点和错误,殷切希望广大读者批评指正。

作 者

2006 年 1 月

# 目 录

绪 微波概念 Microwave Concept ..... 1

## 第一篇 简明微波技术

<b>第一章 传输线理论 Transmission Line Theory</b> .....	11
1-1 传输线方程 Transmission Line Equation .....	11
1-2 传输状态分析( I ) Transmission Analysis( I ) .....	20
1-3 传输状态分析( II ) Transmission Analysis( II ) .....	28
1-4 传输矩阵解 Transmission Matrix Solution .....	36
1-5 例题讲解 Problems .....	48
1-6 Smith 圆图 Smith Chart .....	54
1-7 阻抗匹配 Impedance Matching .....	61
1-8 传输线计算机解 Computation Solutions for Transmission Line .....	70
1-9 例题讲解 Problems .....	76
<b>第二章 导波系统 Guide Wave Systems</b> .....	85
2-1 广义传输线理论 Generalized Transmission Line Theory .....	87
2-2 矩形波导 TE <sub>10</sub> 模( I ) TE <sub>10</sub> Mode in Rectangular Waveguide ( I ) .....	94
2-3 矩形波导 TE <sub>10</sub> 模( II ) TE <sub>10</sub> Mode in Rectangular Waveguide ( II ) .....	103
2-4 矩形波导中的本征模 Eigen Modes in Rectangular Waveguide .....	112
2-5 例题讲解 Problems .....	119
2-6 圆波导 Circular Waveguide .....	128
2-7 同轴线和平板波导 Coaxial Transmission Line and Parallel-Plate Waveguide .....	145
2-8 带线 stripline .....	154
2-9 微带 Microstrip .....	169
2-10 介质波导 Dielectric Waveguide .....	174
2-11 光纤 Optical Fiber .....	183
2-12 耦合传输线 Coupled Transmission-Line .....	189
2-13 复习 Review .....	204

<b>第三章 微波元件与网络分析 Microwave Elements and Microwave Networks</b>	213
3-1 S 参数 S-parameter	214
3-2 单端口元件 One-Port Element	218
3-3 双端口元件 Two-Port Element	223
3-4 多端口元件 Multi-Port Element	232
3-5 不均匀性 Discontinuity	240
<b>第四章 微波谐振腔理论 Microwave Resonators Theory</b>	247
4-1 微波谐振腔 Microwave Resonator	248
4-2 矩形谐振腔 Rectangular Resonator	252
4-3 圆柱谐振腔 Cylindrical Resonator	256
4-4 传输线腔 Transmission Line Cavity	263
4-5 耦合腔 Coupled Cavity	272
4-6 介质谐振器 Dielectric resonator	278
4-7 开式谐振腔 Open Resonator	292
4-8 腔微扰 Perturbation of Cavity	302

## 第二篇 微波分析方法

<b>第五章 微波分析方法 Method of Microwave Analysis</b>	313
5-1 特性阻抗微扰法 Perturbational Method of Characteristic Impedance	313
5-2 广义微扰法 Generalized Perturbational Method	319
5-3 广义保角变换法 Generalized Conformal Mapping Method	326
5-4 广义网络法 Generalized Network Method	333
5-5 微波传输线复相角理论 Complex Phase-angle Theory of Microwave Transmission Line	363
5-6 损耗计算法 Loss Computation Method	368
5-7 模型网络法 Method of Prototype Network	375
5-8 信号流图法 Method of Signal Flow Chart	389
5-9 本征函数法 Method of Eigenfunction	406
5-10 模式匹配法 Method of Mode Matching	432
5-11 共形同轴线变分理论 Variational Theory of Conformal Coaxial Line	447
5-12 任意截面同轴线电容 C 的变分理论 Variational Theory of Capacitance C Of Arbitrarily Shaped Coaxial Line	458
5-13 导体薄片的电容闭式 Closed-Form Formulae For Capacitance Of Conductor Sheet	477
5-14 Green 函数法 Method of Green's Function	485

---

5 - 15	介质 Green 函数法 Method of Dielectric Green's Function .....	503
5 - 16	差分法 Method of Difference .....	513
5 - 17	矩量法 Method Of Moment .....	534
5 - 18	有限元法 Finite-element Method .....	561
5 - 19	时域有限差分法 Finite Difference Time Domain Method .....	587
5 - 20	几何绕射理论 Geometrical Theory of Diffraction .....	626
<b>参考文献 .....</b>		661

# 绪

# 微波概念

## Microwave Concept

对电磁场与微波专业，“简明微波”是一门最重要的基础课程。

究竟什么是微波？这是我们关心的首要问题。

如果把电磁波按频率(或波长)来划分，则可以大致把 300 MHz~3 000 GHz(对应空气中波长  $\lambda$  是 1 m~0.1 mm)这一频段的电磁波称为微波，如图 0-1-1 所示。纵观“左邻右舍”，它处于超短波和红外光波之间。



图 0-1-1 电磁波频谱图

注意：对于任何波，波长和频率与波速相关

$$v = \lambda f \quad (0-1-1)$$

因此，只用一个波长  $\lambda$  还不能确定是何种波。例如，声波在有些情况下也有与微波相近的波长，这样就可构成声波与微波的相互作用。把微波波段单独列出来，必然有它的特殊原因，也必然构成它独特的研究方法。这正是本部分要解决的主要问题。

### 一、Maxwell 方程组的物理意义

从理论上讲，一切电磁波(包括光波)在宏观媒质中都服从 Maxwell(麦克斯韦)方程组。因此，深入研究和考察 Maxwell 方程组，将有助于了解电磁波动的深刻含义。

人类首次进行的 Herz(赫兹)电磁波试验，以现在的眼光来看，只是一个极近距离间的电火花收、发实验，完全不足为奇。然而，当时却轰动了学术界。人们不得不坐下来认真思索：电磁波没有“脚”是怎么走过去的。用学术性的语言则可以说是如何实现超距作用的。于是，历史选择了 Maxwell，一批年轻的学者总结出电磁运动规律，即 Maxwell 方程组。同时，提出了 Newton(牛顿)力学所没有涉及的崭新概念——场。Maxwell 方程组中独立方程主要表现为前面两个，即

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (0-1-2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (0-1-3)$$

这里,首先来探讨一下上述方程所含的哲学思想。

① 这两个方程左边的物理量为磁(或电),而右边的物理量则为电(或磁)。这中间的等号深刻揭示了电与磁相互转化、相互依赖、相互对立、共存于统一的电磁波中。正是由于电不断转换为磁,而磁又不断转换为电,才会发生能量的交换和储存。如图 0-1-2 所示。

在人类对于电磁相互转换的认识上,Faraday(法拉第)起到了关键的作用。Oersted(奥斯特)首先发现电可转换为磁(即线圈等效为磁铁),而 Faraday 坚信磁也可以转换为电,但是无数次实验均以失败告终。在 10 年的无效工作后,沮丧的 Faraday 鬼使神差地把磁铁一拔,奇迹出现了,连接线圈的电流计指针出现了晃动。

这一实验不仅证实了电磁转换,而且知道了只有动磁才能转换为电。

还需要提到:电磁转换为电磁波的出现提供了可能,但不一定就产生电磁波。例如,电磁振荡也是典型的电磁转换,但没有引起电磁波,如图 0-1-3 所示。



图 0-1-2 电磁能量的相互转换



图 0-1-3 电磁振荡

作为力学类比,电磁转换犹如单摆问题中的动能与势能的转换,如图 0-1-4 所示。

② 进一步研究 Maxwell 方程两边的运算,从物理上看,运算反映一种作用。方程的左边是空间的运算——旋度;方程的右边是时间的运算——导数,中间用等号连接。它深刻揭示了电(或磁)场中任一空间的变化会转化成磁(或电)场时间的变化;反过来,电(或磁)场的时间变化也会转化成磁(或电)场的空间变化。正是这种空间和时间的相互变化构成了波动的外在形式,如图 0-1-5 所示。用通俗的话来说,即某一空间出现过的事物,过了一段时间又在另一空间出现了。



图 0-1-4 单摆

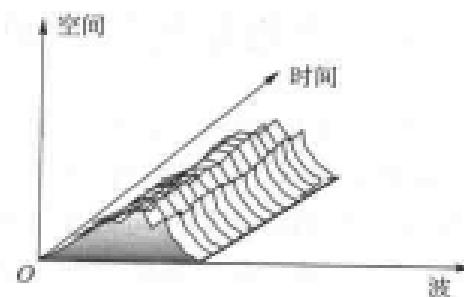


图 0-1-5 波在空间和时间上的变化

③ Maxwell 方程还指出:电磁转换有一个重要条件,即角频率  $\omega$ 。已知单色波频域的 Maxwell 方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \end{array} \right. \quad (0-1-4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \end{array} \right. \quad (0-1-5)$$

任何形式信号的高频分量包含角频率  $\omega$ , 才能确保电磁的有效转换, 直流情况没有电磁的转换。可以这样说, 在高频时因为分布参数的存在, 所以电路有可能变成开放电路。不过很有意思的是频率愈高, 越难输出功率。这也是一个有趣的矛盾。

① 在 Maxwell 方程中还存在另一对矛盾, 即方程(0-1-2)右边有两项, 而方程(0-1-3)右边有一项, 这就构成了 Maxwell 方程本质的不对称性。尽管为了找其对称性而一直在探索单磁极和磁流  $\vec{M}$  的存在, 但到目前为止始终未果。

$\partial \vec{D} / \partial t$  和  $\vec{J}$  构成一对矛盾, 在频域中

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} = (j\omega\epsilon + \sigma) \vec{E} \quad (0-1-6)$$

所以, 也可以说是  $\sigma$  和  $\omega\epsilon$  之间的矛盾, 这一对矛盾主要反映媒质情况。当  $\sigma \ll \omega\epsilon$  时媒质称为良导体, 这种情况下波动性降为次要矛盾, 其情况是波长缩短、波速减慢且波迅速衰减。波一进入导体会“短命夭折”, 如图 0-1-6 所示。这一问题将在波导理论中做详尽讨论。波动性不仅与  $\omega$  有关, 还与媒质有关。

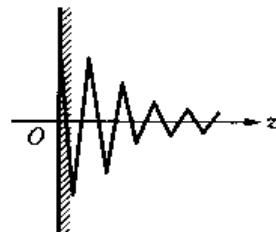


图 0-1-6 波在导体中的衰减

## 二、波动的客观性和主观性

现象是客观存在的, 客观存在的现象一定能表现出来吗? 未必。它的表现与观察者及环境有关。地球是一个圆球(严格地说是似椭圆球), 但直至哥伦布发现新大陆后人们才认清这一点。因为人与地球相比太微小了。现在, 宇航员通过航天飞机清晰地看到了地球。同样, 波动性客观存在, 但是, 观察波动性却与主观和仪器有关、与尺寸有关、与时间有关。

[例 1] 50 Hz 市电, 要用 1:1 示波器观看其相位 90°变化的 1/4 波长, 则示波器幅面要从西安到北京(约 1 500 km)。因为 1 个波长为

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{50 \text{ Hz}} = 6 \times 10^6 \text{ m} = 6000 \text{ km}$$

绕地球一圈只有 3 个波长。不同波段的电磁波长的差距是巨大的, 如图 0-1-7 和图 0-1-8 所示。



图 0-1-7 波长长的情况

图 0-1-8 波长短的情况

[例 2] 光波的存在形式是 Newton 和 Huygens(惠更斯)的著名争论。Newton 一方强调光的粒子的直线性,事实上,日常生活中,光确实表现为粒子的直线性。但是,随着显微镜的发展,要观察极小物体时,即所观察的物体大小与波长可比拟时,则由于波动性的存在而无法观察成功,这是因为光学显微镜的基础是光以直线传播,于是人类发明了电子显微镜。

讨论到这里,对于微波波段有了进一步认识。任何电磁波的波动性是客观存在。但是,微波波段在人体尺寸的范围内表现出强烈的波动性。1.5~2.0 m 是人体的特征尺寸;0.1 mm,约一根半头发丝的粗细,是人体特征尺寸的下限。所以,在微波波段要用 Maxwell 方程——波动力学加以解决。

### 三、场的方法向路的方法转化

上面已经提及,微波问题必须用 Maxwell 方程加以解决。但是,作为偏微分方程组的 Maxwell 方程又很难求解。因此,在微波中又探讨第二种研究方法,即路的方法。

微波可以用路的方法研究有它的客观原因。因为不论是低频还是微波,在工程应用中都十分关心能量的传输情况。既然有着共同的方法本质,就有可能做进一步的研究。

[例 3] 研究无限大无源( $\vec{J} = 0$ )空间的均匀平面波传播问题。设  $\vec{E}$  只有  $x$  分量,  $\vec{H}$  只有  $y$  分量并不失一般性。波只可能在  $\pm z$  方向,且均匀平面波的  $\vec{E}, \vec{H}$  不随  $x, y$  变化,如图 0-1-9 所示。写出 Maxwell 方程组

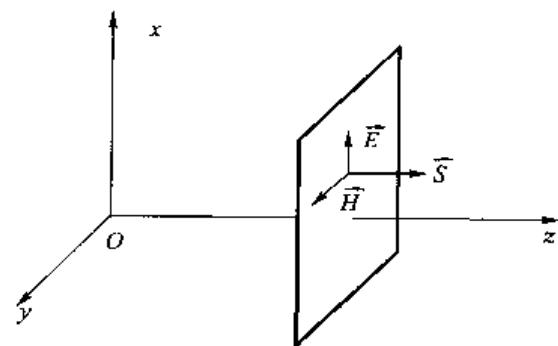


图 0-1-9 均匀平面波传播

$$\begin{array}{l|l} \boxed{\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} & \boxed{\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}} \\ \boxed{\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}} & \boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}} \end{array} \quad (0-1-7)$$

均匀无源媒质                  均匀平面波

上面这两个方程也称为均匀平面波的传播方程。再次求导

$$\begin{array}{l|l} \boxed{\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}} & \boxed{\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}} \\ \boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}} & \boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}} \end{array} \quad (0-1-8)$$

其中,  $c = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$ , 正好是光速,这也是光的电磁学说的重要依据。

采用时谐形式,即设  $e^{j\omega t}$  为时谐因子,可得

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \\ \frac{d^2 H_y}{dz^2} + k^2 H_y = 0 \end{cases} \quad (0-1-9)$$

$$E_z = A_1 e^{-ikz} + A_2 e^{ikz} \quad (0-1-10)$$

思考问题：在上式中哪一项表示向  $z$  方向的入射波？哪一项表示向  $-z$  方向的反射波？联系上  $e^{i\omega t}$  因子，电场的完整表达式为

$$E_z = A_1 e^{i(\omega t - kz)} + A_2 e^{i(\omega t + kz)} \quad (0-1-11)$$

$$E_z(z, t) = \operatorname{Re} E_z = A_1 \cos(\omega t - kz) + A_2 \cos(\omega t + kz)$$

对于第一项的相位因子，考虑等相位面

$$\omega t - kz = \text{constant} \quad (\text{常数}) \quad (0-1-12)$$

对上式全微分

$$\omega dt - k dz = 0 \quad (0-1-13)$$

或者

$$v_t = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = c \quad (0-1-14)$$

因此第一项表示向  $z$  方向的入射波，而第二项等相面表示向  $-z$  方向的反射波。

$$\omega t - kz = \text{constant}$$

$$\omega dt + k dz = 0$$

$$v_t = \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{k} = -c$$

〔讨论〕 上面求解过程说明：

- ① 波传输方程通解由入射波和反射波构成。
- ② 波传输速度是光速。
- ③ 波传输的每一种具体情况表现在入射波与反射波比例不同，而比例的大小由边界媒质情况而定，即所谓边界条件。

〔例 4〕 两种半无限大媒质的反射情况，如图 0-1-10 所示。

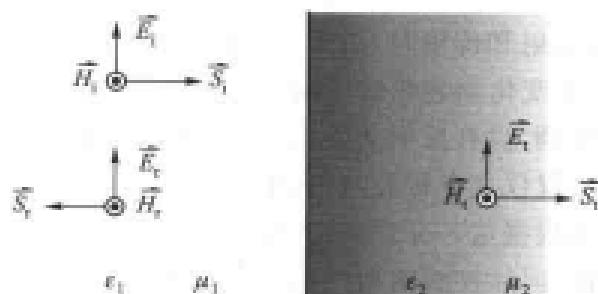


图 0-1-10 无限大分界面上的电磁波

采用  $e^{i\omega t}$  时谐因子

$$\begin{cases} E_i = E_{i0} e^{-ik_1 z} \\ H_i = H_{i0} e^{-ik_1 z} \end{cases} \quad \begin{cases} E_r = E_{r0} e^{+ik_1 z} \\ H_r = -H_{r0} e^{+ik_1 z} \end{cases} \quad \begin{cases} E_i = E_{i0} e^{-ik_2 z} \\ H_i = H_{i0} e^{-ik_2 z} \end{cases}$$

利用  $z=0$  的边界条件，电场切向分量和磁场切向分量必须连续，有

$$\begin{cases} E_i + E_{r0} = E_{i0} \\ H_i - H_{r0} = H_{i0} \end{cases} \quad (0-1-15)$$

也即

$$\frac{E_{i0} + E_{r0}}{H_{i0} - H_{r0}} = \frac{E_{i0}}{H_{i0}} \quad (0-1-16)$$

已经知道电场通解的表达形式

$$E = A_1 e^{-ik_1 z} + A_2 e^{ik_1 z} \quad (0-1-17)$$

代入下式

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} - \mu_1 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu_1 \vec{H} \quad (0-1-18)$$

得到

$$\vec{H} = \frac{k_1}{\omega\mu_1} (A_1 e^{-ik_1 z} - A_2 e^{ik_1 z}) \quad (0-1-19)$$

令  $\frac{1}{\eta_1} = \frac{k_1}{\omega\mu_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}$ , 或  $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$ , 称为波阻抗, 即

$$\begin{cases} \frac{E_{r0}}{H_{r0}} = \frac{E_{i0}}{H_{i0}} = \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \\ \frac{E_{i0}}{H_{i0}} = \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \end{cases} \quad (0-1-20)$$

注意: 在波中出现了阻抗概念, 它与  $R$ 、 $L$ 、 $C$  的低频阻抗有所不同。

$$E_{r0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0} \quad (0-1-21)$$

$$H_{r0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} H_{i0}$$

令  $\Gamma$  为反射系数

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{H_{r0}}{H_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (0-1-22)$$

[讨论] 研究电磁波的反射和传输时, 引入了反射系数  $\Gamma$  和波阻抗  $\eta$ , 波阻抗  $\eta$  与媒质特性 ( $\mu, \epsilon$ ) 相关。换句话说, 媒质的变化影响波的传输。

注意: 在这里应该特别强调, 没有反射条件, 并不表示媒质相同, 而只表示  $\eta_1 = \eta_2$ , 即两者波阻抗相等。这一思想是波(不仅仅是电磁波)研究中的一个飞跃。吃透这一思想的竟是一个著名的科幻小说家——凡尔纳, 他根据这一原理, 首先写出了脍炙人口的科幻小说《隐身人》。值得指出的是, 在 2006 年 5 月 26 日, 国际权威期刊《Science》上报道了美国杜克大学和英国伦敦帝国学院的科学家最近所完成的视觉隐身技术原理性研究。科学家预言, 只要制造出性能合适的材料, 实用的“隐身衣”完全可能在近期问世。因此, 波阻抗是波研究中的重要特征量。

## 四、微波特点

### 1. 微波的两重性

微波的两重性指的是对于尺寸大的物体, 如建筑物、火箭、导弹, 显示出粒子的特点——即似光性或直线性; 而对于相对尺寸小的物体, 又显示出波动性。

### 2. 微波与“左邻右舍”的比较

微波的“左邻”是超短波和短波, 而它的“右舍”则是红外波、光波。

**微波与超短波、短波比较**

微波大大扩展了通信通道,开辟了微波通信和卫星通信。

**微波与光波比较**

光通过雨雾衰减很大,特别是雾大,蓝光、紫光几乎看不见,这正是采用红光作警戒的原因。而微波波段穿透力强。

**3. “宇宙窗口”**

在地球的外层空间,由于日光等复杂的原因形成独特的电离层,它对于短波几乎全部反射,这就是短波的天波通信方式。而在微波波段,则有若干个可以通过电离层的“宇宙窗口”,如图 0-1-11 所示,因而微波是独特的宇宙通信手段。

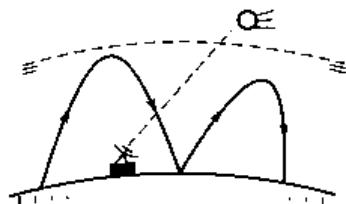


图 0-1-11 微波传播的“宇宙窗口”

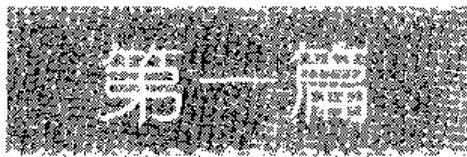
**五、不断拓展的应用领域**

① 不少物质的能级跃迁频率恰好落在微波波段,因此,近年来微波生物医疗和微波催化等已是前沿课题。

② 计算机的运算次数进入十亿次,其频率也是微波频率。超高速集成电路中的互耦问题也可以归结为微波互耦问题进行研究。因此,微波的研究已进入集成电路和计算机领域。

③ 微波研究方法主要有两种:场论的研究方法和网络的研究方法。这也是本门课程要学习的重要方法。其中,场论方法的基础是本征模理论;网络方法的基础是广义传输线理论。





# 简明微波技术

- 第一章 传输线理论 Transmission Line Theory
- 第二章 导波系统 Guide Wave Systems
- 第三章 微波元件与网络分析 Microwave Elements and Microwave Networks
- 第四章 微波谐振腔理论 Microwave Resonators Theory



# 第一章

# 传输线理论

## Transmission Line Theory

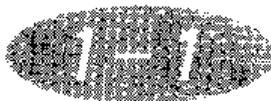
微波传输线理论是微波技术最重要的基础理论之一。

随着频率的不断升高,微波和低频波相比发生了本质的变化,这个质就是波动性已经上升为主要矛盾。英国著名科学家 William Thomson(威廉姆·汤姆逊),也即日后的开尔芬勋爵(1824—1927)而闻名于世的大物理学家,在1856~1866年历时10年的大西洋海底电缆连通过程中,首次发现了微波传输线上电压 $u(z,t)$ 和电流 $i(z,t)$ 不仅是时间的函数,而且也是空间的函数,从而奠定了其相互转换,完成波动的微波传输线方程,也即电报方程的基础。

以波动性为主要矛盾的微波传输线采用微分方程通解加边界条件来解决其波动性问题,并采用反映波动性的反射系数 $\Gamma$ 作主要参数。 $\Gamma$ 和阻抗 $Z$ 的二分之一波长的周期性正是这种波动性的重要体现。

微波信号在微波传输线上存在有三种不同的状态,即行波、驻波和行驻波。这三种状态的存在取决于负载和微波传输线的重要特征量——特性阻抗之间的相互关系。

在此基础上介绍传输线上微波传输特性的基本分析方法,这是微波工程师必须掌握的基本技能,包括输入阻抗、反射系数和驻波比等参数的定义、计算和相互之间的换算关系以及如何利用 Smith(史密斯)圆图和计算机编程来实现阻抗匹配。阻抗匹配是微波工程中的核心概念,读者不仅要学会如何实现阻抗匹配,更要通过阻抗匹配来理解“波”和“场”的运动的特殊性。



## 传输线方程 Transmission Line Equation

微波传输的最明显特征是别树一帜的微波传输线,例如,双导线、同轴线、带线和微带等。很

容易提出一个问题：微波传输线为什么不采用 50 Hz 市电明线呢？

## 一、低频传输线和微波传输线

低频电路有很多课程，唯独没有传输线课程。理由很简单：只有两根线有什么理论可言？这里却要深入研究这个问题。

### 1. 低频传输线

在低频中，主要研究一条线（因为另一条线是作为回路出现的）。低频传输线中的电磁能量传输如图 1-1-1 所示。电流几乎均匀地分布在导线内。电流和电荷可等效地集中在轴线上，如图 1-1-2 所示。

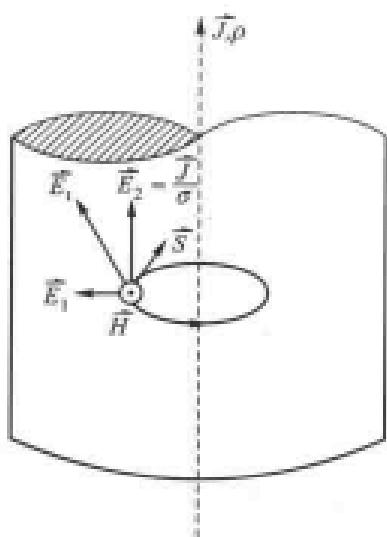


图 1-1-1 低频传输线中的电磁能量传输

$\vec{E}_1$ —库仑电场,  $\vec{E}_2$ —恒流电场,  $\vec{E}_t$ —总电场,

$\vec{S}$ —Poynting 矢量

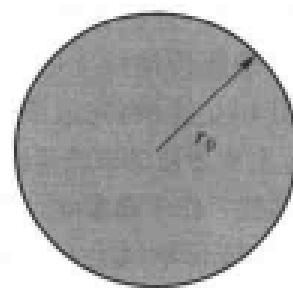


图 1-1-2 低频线中直流电流均匀分布

由分析可知，Poynting(玻印亭)矢量集中在导体内部传播，外部极少。事实上，对于低频，只须用 Ohm(欧姆)定律解决即可，无须用电磁理论。不论导线怎样弯曲，能流都在导体内部和表面附近，这是因为能量分布与距离的平方成反比。

[例 1] 计算半径  $r_0 = 2 \text{ mm} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$  的铜导线单位长度的直流线耗  $R_0$ 。

由于

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$I = \vec{J} \cdot S = \sigma \vec{E} \pi r_0^2$$

$$U = \int \vec{E} dl$$

同时考虑 Ohm 定律

$$R_0 = \frac{U}{I} = \frac{\int \vec{E} dl}{\sigma \vec{E} \pi r_0^2} = \frac{l}{\sigma \pi r_0^2} = \frac{1}{5.8 \times 10^7 \times \pi \times (2 \times 10^{-3})^2} \Omega/\text{m}$$

$$= 1.37 \times 10^{-3} \Omega/m$$

其中铜材料的  $\sigma = 5.8 \times 10^7 S/m$ 。

## 2. 微波传输线

当频率升高时,出现的第一个问题是导体的集肤效应。导体的电流、电荷和场都集中在导体表面,如图 1-1-3 所示。

[例 2] 研究  $f = 10^{10} Hz, \lambda = 3 cm, r_0 = 2 mm$  导线的线耗  $R$ 。

这种情况下,  $J = J_0 e^{-\alpha(r_0 - r)}$

其中,  $J_0$  是  $r = r_0$  的表面电流密度,  $\alpha$  是衰减常数。对于良导体,由电磁场理论可知

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \frac{1}{\Delta}$$

式中,  $\Delta$  称为集肤深度。

$$\begin{aligned} I &= \iint \vec{J} dS = \iint J_0 e^{-\alpha(r_0 - r)} dS = \sigma E_0 \iint e^{-\alpha(r_0 - r)} r dr d\theta \\ &= 2\pi\sigma E_0 e^{-\alpha r_0} \int_0^{r_0} r e^{\alpha r} dr = 2\pi\sigma E_0 e^{-\alpha r_0} \left[ \frac{1}{\alpha} \int_0^{r_0} r de^{\alpha r} \right] \\ &= 2\pi\sigma E_0 e^{-\alpha r_0} \cdot \frac{1}{\alpha} \left[ r_0 e^{\alpha r_0} - \int_0^{r_0} e^{\alpha r} dr \right] = 2\pi\sigma E_0 \left[ \frac{1}{\alpha} r_0 - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha r_0} \right] \end{aligned}$$

在微波波段中,  $\Delta = 1/\alpha$  是一阶小量,对于  $1/\alpha^2$  及以上的高阶量完全可以忽略,则

$$I = 2\pi\sigma E_0 r_0 \Delta$$

而

$$R = \frac{E_0 l}{I} = \frac{l}{2\pi r_0 \sigma \Delta}$$

由于

$$\sigma = 5.80 \times 10^7 S/m, \Delta = 0.066/\sqrt{f}$$

若  $f = 10^{10} Hz$ , 则  $\Delta = 0.66 \times 10^{-6} m$

$$\sigma \Delta = 3.83 \times 10^{-3} S$$

$$R = \frac{1}{2\pi \times 2 \times 10^{-3} \times 3.83 \times 10^{-6}} \Omega/m = 2.07 \Omega/m$$

和直流的同样情况比较

$$\frac{R}{R_0} = \frac{r_0}{2\Delta} = 1.515 \times 10^3$$

从直流到  $10^{10} Hz$ , 损耗要增加 1500 倍。

损耗是传输线的重要指标,如果要将  $r_0 \rightarrow r$ ,使损耗与直流  $R_0$  保持相同,易算出

$$r = \frac{1}{2\pi\sigma\Delta R_0} = 3.03 m$$

也即直径是  $d = 6.06 m$ 。这种情况,已不能称为微波传输线,而应称之为微波传输“柱”比较合适,其粗度超过人民大会堂的主柱。 $2 m$  高的实心微波传输铜柱约 514 t 重(铜的体积质量是  $8.9 t/m^3$ ),按我国古典名著《西游记》记载:孙悟空的金箍棒是东海龙王水晶宫的定海神针,重 10 万 8 千斤,即 54 t。而这里的微波柱是 514 t,约 9 根金箍棒的重量,估计孙悟空是无法拿动的!

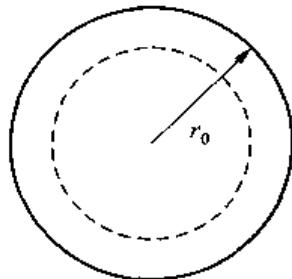


图 1-1-3 微波传输线中的集肤效应

集肤效应带来的第二个直接效果是：柱内部几乎无物，并无能量传输。

看来，微波传输线必须走自己的路。每一种事物都有自己独特的本质，硬把不适合的情况强加给它，必然会出现荒唐的结论。刚才讨论的例子正是因为我们硬设想把微波“关在”铜导线内传播，事实上也不可能。“满园春色关不住，一枝红杏出墙来”，微波功率应该（绝大部分）在导线之外的空间传输，这便是结论。

最简单而实用的微波传输线是双导线，如图 1-1-4 所示，它们与低频传输线有着本质的不同：功率是通过双导线之间的空间传输的。

这时，我们更加明确了微波传输线的含义，导线只是起到引导的作用，而真正的传输是周围空间，但是，没有微波传输线的引导又不行。 $D$  和  $d$  是特征尺寸，对于传输线性质十分重要。

## 二、传输线方程

传输线方程也称电报方程。在沟通大西洋海底电缆时，开尔芬首先发现了长线效应；电报信号的反射、传输都与低频有很大的不同。经过仔细研究，才知道当线长与波长可比拟或超过波长时，必须考虑微波的波动性，这时传输线也称长线，如图 1-1-5 所示。

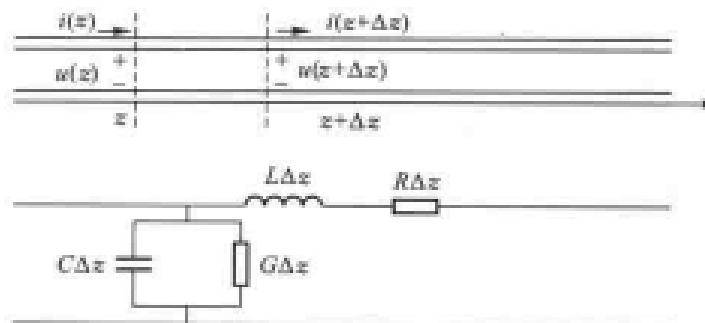


图 1-1-5 微波传输线的长线效应

为了研究无限长传输线的支配方程，定义电压  $u$  和电流  $i$  均是距离和时间的函数，即

$$\begin{cases} u = u(z, t) \\ i = i(z, t) \end{cases} \quad (1-1-1)$$

利用 Kirchhoff(基尔霍夫)定律，有

$$\begin{cases} -u(z + \Delta z, t) + u(z, t) = [Ri(z, t) + L \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}] \Delta z \\ -i(z + \Delta z, t) + i(z, t) = [Gu(z, t) + C \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}] \Delta z \end{cases} \quad (1-1-2)$$

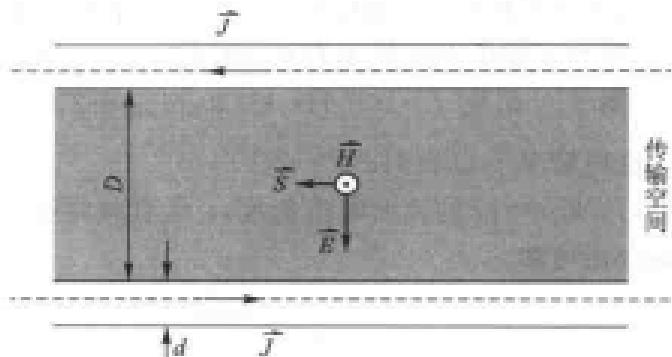


图 1-1-4 双导线

式中,  $L$ 、 $C$ 、 $R$  和  $G$  均为单位长度的电感、电容、线上电阻和线间电导等电参数。

当  $\Delta z \rightarrow 0$  时, 有

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial z} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial z} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (1-1-3)$$

式(1-1-3)是均匀传输线方程(或称为电报方程)。

如果着重研究时谐(正弦或余弦)场的变化情况, 有

$$\begin{cases} u(z, t) = \operatorname{Re}[U(z)e^{j\omega t}] \\ i(z, t) = \operatorname{Re}[I(z)e^{j\omega t}] \end{cases} \quad (1-1-4)$$

式(1-1-4)中,  $U(z), I(z)$  只与  $z$  有关, 表示在传输线  $z$  处的电压或电流的有效幅值。

$$\begin{cases} -\frac{du}{dz} = (R + j\omega L)i = Zi \\ -\frac{di}{dz} = (G + j\omega C)u = Yu \end{cases} \quad (1-1-5)$$

### 三、无耗传输线方程

无耗传输线是我们所研究的最重要条件之一, 可表示为:  $R=0, G=0$ 。

为了帮助读者更好地理解传输线的波动特性, 将电报方程和平面波传播方程做一个类比, 左边方程为无耗传输线方程, 右边为平面波方程。

$$\begin{array}{ccc} \boxed{-\frac{du}{dz} = j\omega Li} & \leftrightarrow & \boxed{-\frac{dE_x}{dz} = j\omega\mu H_y} \\ \boxed{-\frac{di}{dz} = j\omega Cu} & & \boxed{-\frac{dH_y}{dz} = j\omega\epsilon E_x} \end{array} \quad (1-1-6)$$

和均匀平面波类比, 可知

$$u \leftrightarrow \vec{E}, L \leftrightarrow \mu$$

$$i \leftrightarrow \vec{H}, C \leftrightarrow \epsilon$$

二次求导的结果

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\frac{d^2u}{dz^2} + \beta^2 u = 0} & \leftrightarrow & \boxed{\frac{d^2E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0} \\ \boxed{\frac{d^2i}{dz^2} + \beta^2 i = 0} & & \boxed{\frac{d^2H_y}{dz^2} + k^2 H_y = 0} \end{array} \quad (1-1-7)$$

同样, 和均匀平面波类比  $\beta \leftrightarrow k$

$$\beta = \omega \sqrt{LC}, \quad k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

最后, 求解的结果也做了类比:

$$\boxed{\begin{aligned} u(z) &= A_1 e^{-j\beta z} + A_2 e^{j\beta z} \\ i(z) &= \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-j\beta z} - A_2 e^{j\beta z}) \end{aligned}} \leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} E_x(z) &= A_1 e^{-j\beta z} + A_2 e^{j\beta z} \\ H_y(z) &= \frac{1}{\eta} (A_1 e^{-j\beta z} - A_2 e^{j\beta z}) \end{aligned}} \quad (1-1-8)$$

注意：

$$u(z) = A_1 e^{-j\beta z} + A_2 e^{j\beta z}$$

$$-\frac{du(z)}{dz} = j\beta (A_1 e^{-j\beta z} - A_2 e^{j\beta z}) = j\omega L i(z)$$

很易得到

$$i(z) = \frac{\beta}{\omega L} (A_1 e^{-j\beta z} - A_2 e^{j\beta z}) = \sqrt{\frac{C}{L}} (A_1 e^{-j\beta z} - A_2 e^{j\beta z})$$

$$= \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-j\beta z} - A_2 e^{j\beta z})$$

式中，特性阻抗  $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ，在电报方程中它类似于均匀平面波中的波阻抗  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 。

式(1-1-8)是传输线方程的通解。而  $A_1$ 、 $A_2$  的确定还需要边界条件。

#### 四、无耗传输线的边界条件

把通解转化为具体的特解，必须应用边界条件。所讨论的边界条件有：终端条件、源端条件和电源、阻抗条件。所建立的也是两套坐标： $z$  从源出发， $z'$  从负载出发，如图 1-1-6 所示。

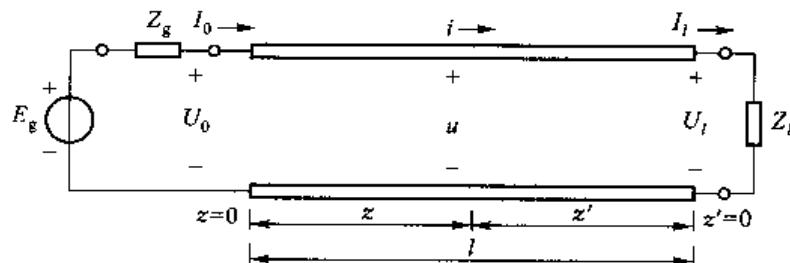


图 1-1-6 边界条件坐标系 ( $z + z' = l$ )

1. 终端边界条件(已知  $U_t$ 、 $I_t$ )

$$\begin{cases} u(l) = U_t \\ i(l) = I_t \end{cases}$$

代入式 1-1-8，有

$$\begin{cases} U_t = A_1 e^{-j\beta l} + A_2 e^{j\beta l} \\ I_t = \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-j\beta l} - A_2 e^{j\beta l}) \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} A_1 = \frac{U_t + Z_0 I_t}{2} e^{j\beta l} \\ A_2 = \frac{U_t - Z_0 I_t}{2} e^{-j\beta l} \end{cases} \quad (1-1-9)$$

代入通解,为

$$\begin{cases} u(z) = \frac{1}{2}(U_0 + Z_0 I_0) e^{j\beta(l-z)} + \frac{1}{2}(U_0 - Z_0 I_0) e^{-j\beta(l-z)} \\ i(z) = \frac{1}{2Z_0}(U_0 + Z_0 I_0) e^{j\beta(l-z)} - \frac{1}{2Z_0}(U_0 - Z_0 I_0) e^{-j\beta(l-z)} \end{cases}$$

对于终端边界条件,常采用 $z'$ (终端出发)作为坐标系,即 $z' = l - z$ ,应用 Euler(欧拉)公式

$$\begin{cases} e^{j\beta z'} = \cos \beta z' + j \sin \beta z' \\ e^{-j\beta z'} = \cos \beta z' - j \sin \beta z' \end{cases}$$

最后得到

$$\begin{cases} u(z') = u(l) \cos \beta z' + j Z_0 i(l) \sin \beta z' \\ i(z') = j \frac{u(l)}{Z_0} \sin \beta z' + i(l) \cos \beta z' \end{cases} \quad (1-1-10)$$

采用矩阵表示,有

$$\begin{bmatrix} u(z') \\ i(z') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta z' & j Z_0 \sin \beta z' \\ j \frac{1}{Z_0} \sin \beta z' & \cos \beta z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(l) \\ i(l) \end{bmatrix} \quad (1-1-11)$$

### 2. 源端边界条件(已知 $U_0$ 、 $I_0$ )

$$\begin{cases} u(0) = U_0 \\ i(0) = I_0 \end{cases}$$

在求解时,用 $l=0$ 代入,形式与终端边界条件相同

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2}(U_0 + Z_0 I_0) \\ A_2 = \frac{1}{2}(U_0 - Z_0 I_0) \end{cases} \quad (1-1-12)$$

$$\begin{cases} u(z) = \frac{1}{2}(U_0 + Z_0 I_0) e^{-j\beta z} + \frac{1}{2}(U_0 - Z_0 I_0) e^{j\beta z} \\ i(z) = \frac{1}{2Z_0}(U_0 + Z_0 I_0) e^{-j\beta z} - \frac{1}{2Z_0}(U_0 - Z_0 I_0) e^{j\beta z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(z) = u(0) \cos \beta z - j Z_0 i(0) \sin \beta z \\ i(z) = -j \frac{u(0)}{Z_0} \sin \beta z + i(0) \cos \beta z \end{cases} \quad (1-1-13)$$

采用矩阵表示,有

$$\begin{bmatrix} u(z) \\ i(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta z & -j Z_0 \sin \beta z \\ -j \frac{1}{Z_0} \sin \beta z & \cos \beta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ i(0) \end{bmatrix} \quad (1-1-14)$$

### 3. 电源、阻抗条件(已知 $E_g$ 、 $Z_g$ 和 $Z_l$ )

已知  $i(0) = I_0$

$$u(0) = E_g - I_0 Z_g$$

$$i(l) = I_l$$

$$u(l) = I_l Z_l$$

先考虑源端条件

$$\begin{cases} u(0) = A_1 + A_2 = E_g - I_0 Z_g \\ Z_0 i(0) = A_1 - A_2 = I_0 Z_0 \\ A_1 + A_2 = E_g - \frac{A_1 - A_2}{Z_0} Z_g \end{cases}$$

即

$$A_1 + A_2 \left( \frac{Z_0 - Z_g}{Z_0 + Z_g} \right) = \frac{E_g Z_0}{Z_0 + Z_g}$$

再考虑终端条件

$$\begin{cases} u(l) = A_1 e^{-j\beta l} + A_2 e^{j\beta l} = Z_l I_l \\ Z_0 i(l) = A_1 e^{-j\beta l} - A_2 e^{j\beta l} = Z_0 I_l \end{cases}$$

所以

$$A_1 e^{-j\beta l} + A_2 e^{j\beta l} = \frac{Z_l}{Z_0} (A_1 e^{-j\beta l} - A_2 e^{j\beta l})$$

即

$$A_1 \left( \frac{Z_0 - Z_l}{Z_0 + Z_l} e^{-j2\beta l} \right) + A_2 = 0$$

构成线性方程组

$$\begin{cases} A_1 - A_2 \Gamma_g = \frac{E_g Z_0}{Z_0 + Z_g} \\ -A_1 \Gamma_l e^{-j2\beta l} + A_2 = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\Gamma_g \\ -\Gamma_l e^{-j2\beta l} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \Gamma_g \Gamma_l e^{-j2\beta l}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{E_g Z_0}{Z_0 + Z_g} & -\Gamma_g \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{E_g Z_0}{Z_0 + Z_g}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{E_g Z_0}{Z_0 + Z_g} \\ -\Gamma_l e^{-j2\beta l} & 0 \end{vmatrix} = \frac{E_g Z_0 \Gamma_l e^{-j2\beta l}}{Z_0 + Z_g}$$

式中,  $\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$ ,  $\Gamma_l = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}$ , 分别为电流和负载的反射系数。

可得

$$\begin{cases} A_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{E_g Z_0}{(Z_0 + Z_g)(1 - \Gamma_g \Gamma_l e^{-j2\beta l})} \\ A_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{E_g Z_0 \Gamma_l e^{-j2\beta l}}{(Z_0 + Z_g)(1 - \Gamma_g \Gamma_l e^{-j2\beta l})} \end{cases} \quad (1-1-15)$$

注意: 传输线方程通解中有  $A_1$  和  $A_2$  两个常数, 而电源、阻抗已知条件为  $E_g$ 、 $Z_g$ 、 $Z_l$ , 有 3 个常数, 这两者之间是否有矛盾?

观察  $A_1$ 、 $A_2$  可知 [见式(1-1-15)], 真正的独立参数为

$$\begin{cases} u^-(0) = \frac{E_g Z_0}{(Z_0 + Z_g)(1 - \Gamma_g \Gamma_i e^{-j2\beta l})} \\ \Gamma(0) = \Gamma_i e^{-j2\beta l} \end{cases} \quad (1-1-16)$$

也只有两个独立量。式中(0)表示源坐标  $z=0$ 。

若进一步引入

$$u^-(0) = \Gamma(0)u^+(0) \quad (1-1-17)$$

则可简洁地写出

$$\begin{aligned} u(z) &= u^+(0)e^{-j\beta z} + u^-(0)e^{j\beta z} \\ i(z) &= \frac{1}{Z_0}(u^-(0)e^{-j\beta z} - u^+(0)e^{j\beta z}) \end{aligned} \quad (1-1-18)$$

其物理意义将在后面讨论。表 1-1-1 给出了常用的微波传输线中的双导线和同轴线的主要电参数。

表 1-1-1 双导线和同轴线的主要电参数

传输线 分布参数	双导线	同轴线
$R/(\Omega/m)$	$\frac{2}{\pi d} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma_2}}$	$\sqrt{\frac{f \mu_0}{4\pi\sigma_2}} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$
$L/(H/m)$	$\frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}$	$\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
$C/(F/m)$	$\pi\epsilon_1 \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}$	$2\pi\epsilon_1 \ln \frac{b}{a}$
$G/(S/m)$	$\pi\sigma_1 \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}$	$2\pi\sigma_1 \ln \frac{b}{a}$

注:  $\epsilon_1$ 、 $\sigma_1$  分别为介质的介电常数和电导率;  $\sigma_2$  为导体的电导率。

## 作业 PROBLEMS 1-1

试分析日常所观察到的一种波现象，并指出它的特点。

无穷大导电媒质的参数为  $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ 、 $\sigma$ ，其中  $\sigma$  极大，这时 Maxwell 方程可写成

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H} \end{cases}$$

试导出它的波动方程，并给出一维波  $\vec{E} = E_x \hat{x} e^{-j\omega t}$  的特点，其中  $\hat{x}$  为单位矢量。

半无限导体面为理想情况 ( $\sigma = \infty$ )，图 1-1-7 所示为半无限导体面上垂直入射的平面波， $\vec{E} = E_x \hat{x} e^{-j\omega t}$ ，求出电磁波传输情况。

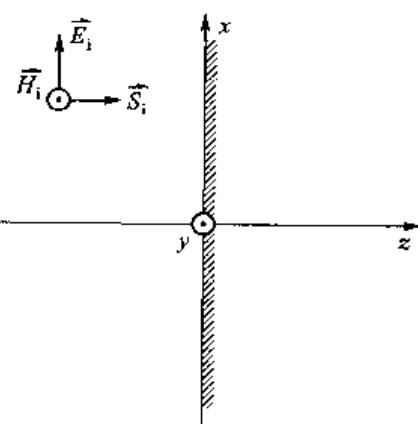


图 1-1-7 半无限导体面上  
垂直入射的平面波

例题 双导线 直径  $d$  为 2 mm, 间距  $D$  为 120 mm, 媒质为空气, 求特性阻抗  $Z_0$  及传输常数  $\beta$ .

$$\left\{ \text{提示: 双导线 } L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d} \right), C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \left( \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d} \right)} \right.$$

例题 同轴线 外径  $b$  为 23 mm, 内径  $a$  为 10 mm, 内部填充  $\epsilon_r = 2.50$  的媒质, 求特性阻抗  $Z_0$  及传输常数  $\beta$ .

$$\left\{ \text{提示: 同轴线 } L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right), C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)} \right.$$



## 传输状态分析(I) Transmission Analysis(I)

先利用框图简要回顾一下上一节讲授的传输线方程的求解。

传输线支配方程

$$\begin{cases} -\frac{du(z)}{dz} = j\omega L i(z) \\ -\frac{di(z)}{dz} = j\omega C u(z) \end{cases}$$

确定  $A_1, A_2$  的边界条件

- 终端条件(已知  $I_t, U_t$ )
- 源端条件(已知  $I_0, U_0$ )
- 电源、阻抗条件(已知  $E_k, Z_k, Z_l$ )

一次特征量

$L$ —单位长度电感

$C$  单位长度电容

终端条件

$$\begin{cases} u(z') = U_t \cos \beta z' + jZ_0 I_t \sin \beta z' \\ i(z') = j \frac{1}{Z_0} U_t \sin \beta z' + I_t \cos \beta z' \end{cases}$$

二次特征量

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \lambda_p = \frac{v_p}{f} = \frac{2\pi}{\beta}$$

源端条件

$$\begin{cases} u(z) = U_0 \cos \beta z - jZ_0 I_0 \sin \beta z \\ i(z) = -j \frac{U_0}{Z_0} \sin \beta z + I_0 \cos \beta z \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(z) = A_1 e^{-j\beta z} + A_2 e^{j\beta z} \\ i(z) = \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-j\beta z} - A_2 e^{j\beta z}) \end{cases}$$

电源、阻抗条件

$$\begin{cases} u(z) = \frac{E_k Z_0}{(Z_k + Z_0)} \cdot \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma_t e^{-j2\beta l} e^{j\beta z}}{(1 - \Gamma_k \Gamma_t e^{-j2\beta l})} \\ i(z) = \frac{E_k}{(Z_k + Z_0)} \cdot \frac{e^{-j\beta z} - \Gamma_t e^{-j2\beta l} e^{j\beta z}}{(1 - \Gamma_k \Gamma_t e^{-j2\beta l})} \end{cases}$$

上面这张表反映了微分方程的典型解法,即支配方程加边界条件。支配方程可求出通解(或普遍解),它已孕育着本征模的思想。凡是受这一支配方程描述的物理规律都有这些解,而且只有这些解。例如

$$u(z) = u^+(z) + u^-(z) \quad (1-2-1)$$

任何传输线上的电压函数只可能是入射波和反射波的叠加。不同传输线的区别仅仅在于入射波和反射波的成分不同。换句话说,通解是完备的,不需要再去找其他解。

边界条件确定  $A_1$  和  $A_2$ 。边界条件的求取过程中,也孕育着一种思想,即网络思想:已知输入求输出;或已知输出求输入。

特别需要指出:本征模思想和网络思想是贯穿本书最重要的两个思想。

## 一、传输线的反射系数 $\Gamma$ 和阻抗 $Z$

反映传输线上任何一点特性的参量是反射系数  $\Gamma$  和阻抗  $Z$ ,如图 1-2-1 所示。

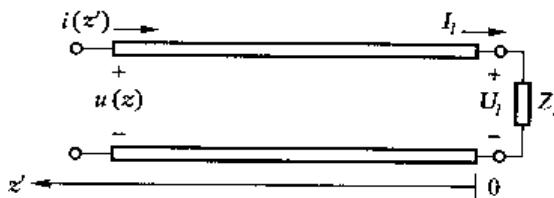


图 1-2-1 端接负载的一段传输线

### 1. 反射系数 $\Gamma$

传输线上的电压和电流可表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} u(z) = A_1 e^{-j\beta z} + A_2 e^{+j\beta z} \\ = \frac{1}{2}(U_l + Z_0 I_l) e^{j\beta z'} + \frac{1}{2}(U_l - Z_0 I_l) e^{-j\beta z'} = u^+(z') + u^-(z') \\ = u^-(0) e^{j\beta z'} + u^-(0) e^{-j\beta z'} \\ i(z) = \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-j\beta z} - A_2 e^{+j\beta z}) \\ = \frac{1}{2Z_0} (U_l + Z_0 I_l) e^{j\beta z'} - \frac{1}{2Z_0} (U_l - Z_0 I_l) e^{-j\beta z'} = i^+(z') + i^-(z') \\ = \frac{u^-(0)}{Z_0} e^{j\beta z'} - \frac{u^-(0)}{Z_0} e^{-j\beta z'} \end{array} \right. \quad (1-2-2)$$

则反射系数的定义可以由下表扼要地给出:

负载电压反射系数定义为 $\Gamma_U(z'=0) = u^-(z'=0)/u^+(z'=0)$ 负载电流反射系数定义为 $\Gamma_I(z'=0) = i^-(z'=0)/i^+(z'=0)$ 两者之间的关系为 $\Gamma_I(z'=0) = -\Gamma_U(z'=0)$	任意点 $z'$ 处的电压反射系数为 $\Gamma(z') = u^-(z')/u^+(z')$ $= \frac{u^-(z'=0) e^{j\beta z'}}{u^-(z'=0) e^{j\beta z'}}$
--	---

续表

负载反射与任意点 $z'$ 处输入反射系数之间的关系 $\Gamma(z') = \Gamma_t e^{-j\beta z'}$
---

应用反射系数定义后线上电压和电流可以表示为 $u(z') = u^+(z')[1 + \Gamma(z')]$ $i(z') = i^+(z')[1 - \Gamma(z')]$
---

从以上的定义中可以看到反射系数具有以下性质：

① 反射系数的模是无耗传输线系统中的不变量

$$|\Gamma(z')| = |\Gamma_t| \quad (1-2-3)$$

② 反射系数呈周期性

$$\Gamma(z' + m\lambda_g/2) = \Gamma(z'), m \text{ 为整数} \quad (1-2-4)$$

③ 反射系数的模不大于 1, 即

$$|\Gamma(z')| \leq 1 \quad (1-2-5)$$

这一性质的深层原因是传输线的波动性, 也称为二分之一波长的重复性。

$$\begin{cases} u^+(z')/i^+(z') \equiv Z_0 \\ u^-(z')/i^-(z') \equiv -Z_0 \end{cases} \quad (1-2-6)$$

上式表明: 入射波电压与入射波电流之比始终是不变量  $Z_0$ , 反射波电压与反射波电流之比是不变量  $-Z_0$ 。

## 2. 阻抗 $Z$

传输线上任意点  $z'$  处的输入阻抗可以由下表定义:

负载阻抗 $Z_t = U_t/I_t$	任意点 $z'$ 处输入阻抗 $Z(z') = u(z')/i(z')$
由任意点 $z'$ 处输入阻抗的定义 $\frac{u(z')}{i(z')} = \frac{U_t \cos \beta z' + jZ_0 I_t \sin \beta z'}{j \frac{1}{Z_0} U_t \sin \beta z' + I_t \cos \beta z'}$ 可以得到输入阻抗与负载阻抗的关系 $Z(z') = Z_0 \frac{Z_t + jZ_0 \tan \beta z'}{Z_0 + jZ_t \tan \beta z'}$	

由上表可以得到输入阻抗的以下性质:

① 负载阻抗  $Z_t$  通过传输线段  $z'$  变换成  $Z(z')$ , 因此微波传输线对于阻抗有变换器(Transformer)的作用。

② 阻抗有周期特性,  $\tan \beta z'$  的周期是  $\pi$ , 即半波的整数倍  $\frac{m\lambda_g}{2}$

$$Z(z' + m\lambda_g/2) = Z(z') \quad (1-2-7)$$

## 3. 反射系数与阻抗的关系

由以上微波传输线反射系数和阻抗的定义中可以得到这两个参数之间的相互转化关系:

任意 $z'$ 情况	终端( $z' = 0$ )情况
$Z(z') = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')}$	$Z_t = Z_0 \frac{1 + \Gamma_t}{1 - \Gamma_t}$
$\Gamma(z') = \frac{Z(z') - Z_0}{Z(z') + Z_0}$	$\Gamma_t = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}$

## 二、传输线的行波状态

如果负载  $Z_t = Z_0$  或无限长传输线, 这时

$$\Gamma_t = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0} = 0 \quad (1-2-8)$$

无反射波, 称之为行波状态或匹配, 如图 1-2-2 所示。根据源条件

$$\begin{cases} u(z) = \frac{1}{2}(U_0 + I_0 Z_0) e^{+j\beta z} = U_0^- e^{-j\beta z} \\ i(z) = \frac{1}{2Z_0}(U_0 + I_0 Z_0) e^{-j\beta z} = I_0^- e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (1-2-9)$$

写成瞬态形式

$$\begin{cases} u(z, t) = |U_0^-| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_0) \\ i(z, t) = |I_0^-| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_0) \end{cases} \quad (1-2-10)$$

式中,  $\varphi_0$  为初相角。

$u(z, t)$  和  $i(z, t)$  的初相角均为  $\varphi_0$  是因为  $Z_0$  是实数。

$$Z(z) = Z_0 \quad (1-2-11)$$

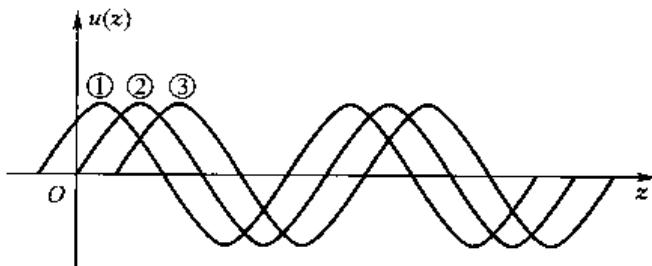


图 1-2-2 传输线行波状态

①  $\omega t = 0$ ; ②  $\omega t = \pi/4$ ; ③  $\omega t = \pi/2$

## 三、传输线的全驻波状态

反射系数的模等于 1 的全反射情况称为全驻波状态。

[定理] 传输线全反射的条件是负载接纯电抗, 即

$$Z_t = jX_t$$

因为

$$\Gamma_t = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}$$

设  $Z_t = R_t + jX_t$

$$\text{则 } |\Gamma_t|^2 = \frac{(R_t - Z_0)^2 + X_t^2}{(R_t + Z_0)^2 + X_t^2} = 1$$

$$\begin{aligned} R_t^2 - 2R_t Z_0 + Z_0^2 + X_t^2 &= R_t^2 + 2R_t Z_0 + Z_0^2 + X_t^2 \\ 4R_t Z_0 &= 0 \end{aligned}$$

又

$$Z_0 \neq 0$$

则证得

$$R_i = 0$$

即

$$Z_i = jX_i$$

(1-2-12)

### 1. 短路状态(对应 $Z_i = 0, J_i' = -1$ )

在短路状态下,有  $\Gamma_i = U_i^-/U_i^+ = -1$ ,此条件说明  $U_i^- = -U_i^+$ 。

$$\begin{cases} u(z') = U_i^+ e^{j\beta z'} + U_i^- e^{-j\beta z'} = U_i^+ e^{j\beta z'} - U_i^+ e^{-j\beta z'} = j2U_i^+ \sin \beta z' \\ i(z') = I_i^+ e^{j\beta z'} + I_i^- e^{-j\beta z'} = I_i^+ e^{j\beta z'} + I_i^+ e^{-j\beta z'} = 2I_i^+ \cos \beta z' \end{cases}$$

则线上电压、电流呈驻波分布,如图 1-2-3 所示,且其阻抗为

$$Z(z') = u(z')/i(z') = jZ_0 \tan \beta z' \quad (1-2-13)$$

短路传输线上会周期性地出现电压和电流的波腹点和波节点,如下所示:

$\beta z' = m\pi \quad z' = m \cdot \lambda_g / 2$	$\beta z' = (2m+1)\pi/2 \quad z' = (2m+1)\lambda_g / 4$
电压波节点 $ u(z')  = 0$ 电流波腹点 $ i(z')  = 2 I_i^+ $	电压波腹点 $ u(z')  = 2 u_i^+ $ 电流波节点 $ i(z')  = 0$

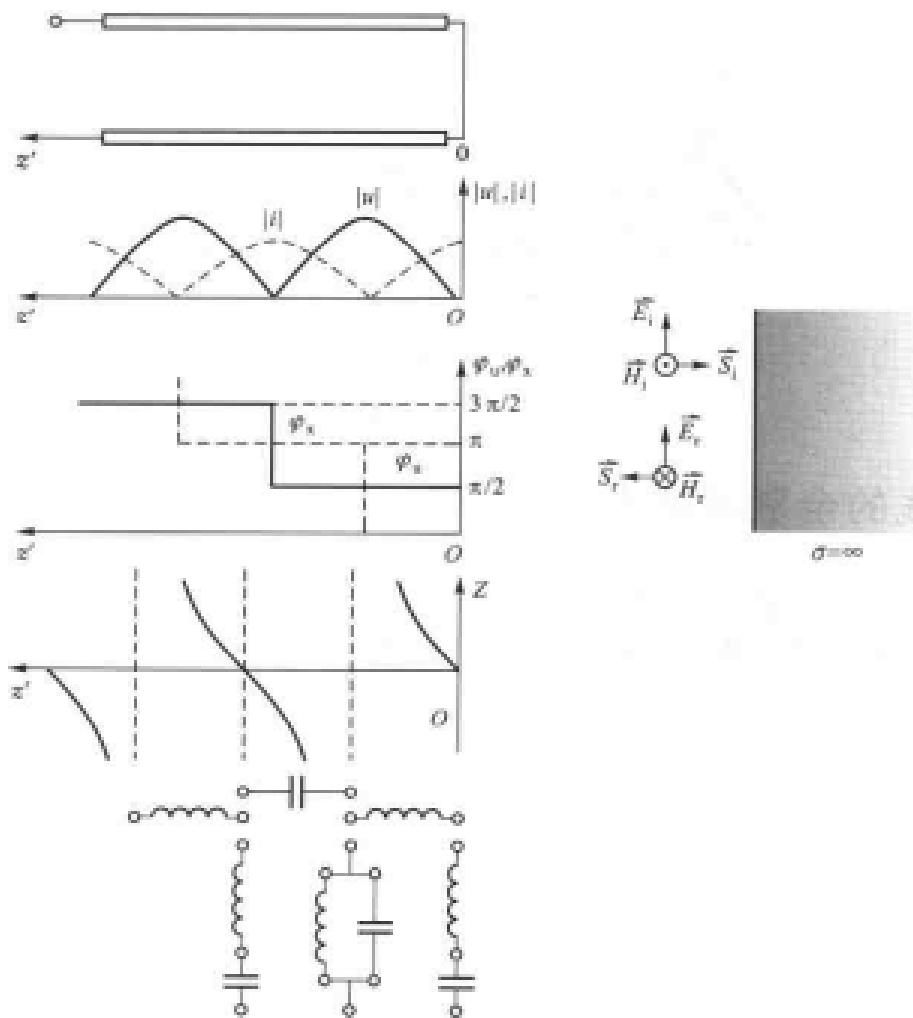


图 1-2-3 传输线短路状态

2. 开路状态(对应 $Z_1=\infty, I^+=1$ )

与短路状态分析相类似,有

$$\begin{cases} u(z') = 2U_l^+ \cos \beta z' \\ i(z') = j2I_l^+ \sin \beta z' \\ Z(z') = -jZ_0 \operatorname{ctan} \beta z' \end{cases} \quad (1-2-14)$$

如图 1-2-4 所示,线上的电压和电流的波腹点和波节点位置如下所示:

$\beta z' = m\pi \quad z' = m\lambda_g/2$	$\beta z' = (2m+1)\pi/2 \quad z' = (2m+1)\lambda_g/4$
电压波腹点 $ u(z')  = 2 U_l^+ $	电压波节点 $ u(z')  = 0$
电流波节点 $ i(z')  = 0$	电流波腹点 $ i(z')  = 2 I_l^+ $

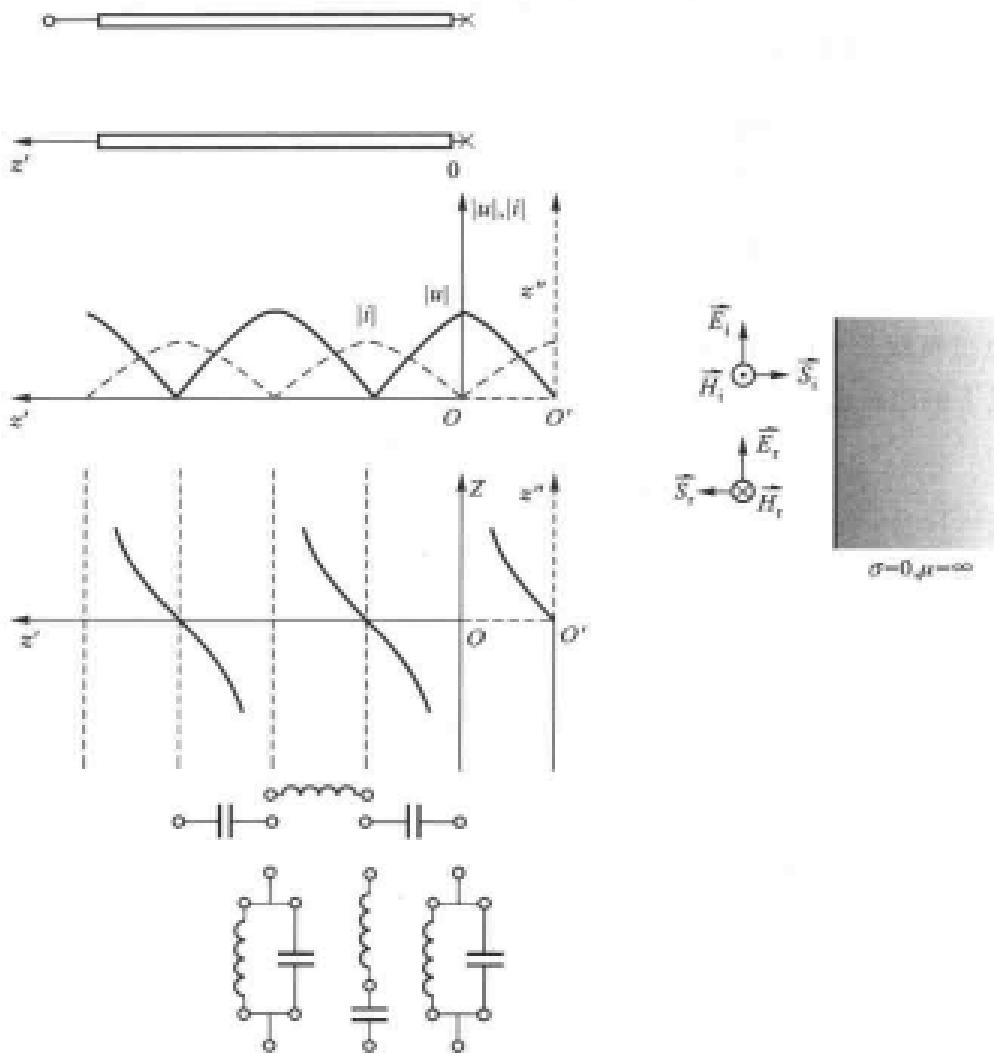


图 1-2-4 传输线开路状态

经过观察可以把开路线看成是短路线移动四分之一波导波长( $\lambda_g/4$ )而成。

<b>短路状态</b> $u(z') = j2U_l^- \sin \beta z'$ $i(z') = 2I_l^- \cos \beta z'$	<b>开路状态</b> $u(z') = 2U_l^+ \cos \beta z'$ $i(z') = j2I_l^+ \sin \beta z'$
--	--

将  $z'' = z' + \frac{1}{4}\lambda_g$  代入开路状态方程, 则

$$u(z'') = j2\tilde{U}_l^+ \sin \beta z''$$

$$i(z'') = 2\tilde{I}_l^+ \cos \beta z''$$

如上框图流程所表示, 做变换  $z'' = z' + \lambda_g/4$ ,  $U_l^+ = j\tilde{U}_l^+$ ,  $I_l^+ = j\tilde{I}_l^+$  即可由开路线转化成短路线。不少教材中疏忽了  $U_l^+ = j\tilde{U}_l^+$  和  $I_l^+ = j\tilde{I}_l^+$  的条件, 严格地说, 长度( $z''$ )移动的条件只对  $|U_l^+|$  和阻抗有效, 相位是不等价的。

<b>短路阻抗</b> $Z(z') = jZ_0 \tan \beta z'$	<b>开路阻抗</b> $Z(z') = -jZ_0 \cot \beta z'$
---	--

将  $z'' = z' + 1/4 \cdot \lambda_g$  代入开路阻抗方程, 则

$$Z(z'') = jZ_0 \tan \beta z''$$

### 3. 任意电抗负载 $Z_l = jX_l$ , $I_l = e^{j\varphi_l}$

一般情况下的阻抗公式

$$\begin{aligned} Z(z') &= Z_0 \frac{Z_l + jZ_0 \tan \beta z'}{Z_0 + jZ_l \tan \beta z'} \\ &= jZ_0 \frac{X_l + Z_0 \tan \beta z'}{Z_0 - X_l \tan \beta z'} \\ &= jZ_0 \frac{\frac{X_l}{Z_0} + \tan \beta z'}{1 - \frac{X_l}{Z_0} \tan \beta z'} \end{aligned}$$

假设

$$\arctan\left(\frac{X_l}{Z_0}\right) = \beta \Delta z \quad (1-2-15)$$

或者

$$\frac{X_l}{Z_0} = \tan \beta \Delta z$$

可得

$$Z(z') = jZ_0 \tan \beta(z' + \Delta z) \quad (1-2-16)$$

式(1-2-16)是广义的阻抗等效长度公式, 可以写出

$$z'' = z' + \Delta z \quad (1-2-17)$$

对于  $X_l = \infty$ , 明显有  $\Delta z = \lambda_g/4$ 。电抗等效长度可正可负。 $X_l$  为感性时,  $\Delta z$  为正;  $X_l$  为容

性时,  $\Delta z$  为负, 如图 1-2-5 所示。

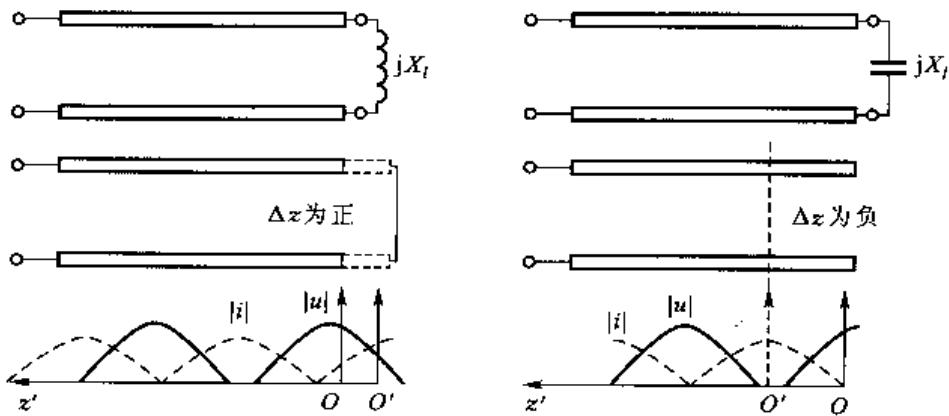


图 1-2-5 以短路状态为标准的等效长度的偏移( $\Delta z$ )

考虑到传输线的波动性—— $\lambda_g/2$  重复性。因此  $\Delta z$  的正、负并非绝对, 严格地说, 应该是  $|\Delta z|$  最小值的正、负性。

注意: 对于等效长度问题, 也可以用反射系数相位  $\varphi_l$  来加以研究。

$$Z(z') = Z_0 \frac{1 + \Gamma_l e^{-j2\beta z'}}{1 - \Gamma_l e^{-j2\beta z'}}$$

以短路状态为标准

$$Z(z') = Z_0 \frac{1 - e^{-j2\beta z'}}{1 + e^{-j2\beta z'}} \quad (1-2-18)$$

再考虑  $\Gamma_l = e^{j\varphi_l}$  的一般情况

$$Z(z') = Z_0 \frac{1 - e^{j(2\beta z' - \varphi_l - \pi)}}{1 + e^{-j(2\beta z' - \varphi_l + \pi)}} \quad (1-2-19)$$

相位因子可重新整理成

$$2\beta \left( z' + \frac{\lambda_g}{4} - \frac{\lambda_g}{4\pi} \varphi_l \right) \quad (1-2-20)$$

于是比较可知

$$\begin{cases} z'' = z' + \frac{\lambda_g}{4} - \frac{\lambda_g}{4\pi} \varphi_l \\ \Delta z = \frac{1}{4} \lambda_g - \frac{\lambda_g}{4\pi} \varphi_l \end{cases} \quad (1-2-21)$$

又由于

$$\Gamma_l = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} = -\frac{1 - j \frac{X_l}{Z_0}}{1 + j \frac{X_l}{Z_0}} \quad (1-2-22)$$

$$\varphi_l = \pi - 2 \arctan \left( \frac{X_l}{Z_0} \right) \quad (1-2-23)$$

$$\Delta z = \frac{\lambda_g}{2\pi} \arctan \left( \frac{X_l}{Z_0} \right) \quad (1-2-24)$$

与前面的结论完全相同。

## 作业 PROBLEMS 1-2

如图 1-2-6 所示电路, 工作波长  $\lambda_g = 10 \text{ cm}$ ,  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ , 微波传输线特性阻抗  $Z_0 = 50 \Omega$ 。现在在负载端接入  $Z_l = 100 \Omega$ 。求  $z' = 2.5 \text{ cm}$  和  $5.0 \text{ cm}$  处的阻抗  $Z(z')$  并求负载反射系数  $\Gamma_l$ 。

如图 1-2-7 所示电路, 工作波长  $\lambda_g = 10 \text{ cm}$ ,  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ , 微波传输线特性阻抗  $Z_0 = 50 \Omega$ , 接负载短路  $Z_l = 0$ , 求  $\Gamma_l$ , 并画出  $Z(z') \sim z'$  的函数图和  $Z(z') - j50 \Omega$  对应的  $z'$ 。

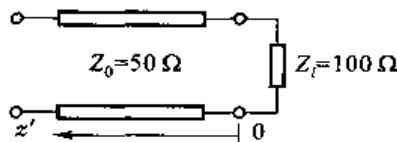


图 1-2-6 第 1 题图

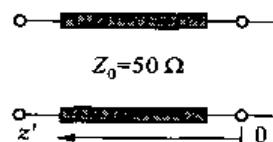


图 1-2-7 第 2 题图

如图 1-2-8 所示电路, 工作波长  $\lambda_g = 10 \text{ cm}$ ,  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ , 微波传输线特性阻抗  $Z_0 = 50 \Omega$ , 传输线长度  $l = 12 \text{ cm}$ , 源  $E_g = 10 \text{ V}$ ,  $Z_g = 100 \Omega$ , 负载  $Z_l = 100 \Omega$ 。试写出  $u(z)$  和  $i(z)$ 。

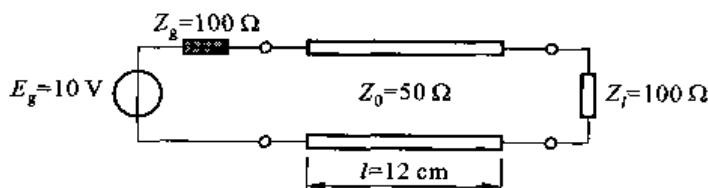


图 1-2-8 第 3 题图

1-3

## 传输状态分析(Ⅱ) Transmission Analysis(Ⅱ)

在前面一节中引进了分析无耗传输线的两个重要工作参数——反射系数  $\Gamma$  和阻抗  $Z$ , 其定义如下:

反射系数  $\Gamma(z')$ 

$$\Gamma(z') = u^-(z')/u^+(z')$$

$$\Gamma(z') = -\Gamma(z=0) e^{j\beta z'}$$

$$\Gamma(z') = \frac{Z(z') - Z_0}{Z(z') + Z_0}$$

 $|\Gamma(z')|$  是系统量阻抗  $Z(z')$ 

$$Z(z') = u(z')/i(z')$$

$$Z(z') = Z_0 \frac{Z_l + jZ_0 \tan \beta z'}{Z_0 + jZ_l \tan \beta z'}$$

$$Z(z') = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')}$$

 $Z(z')$  是空间量

同时也介绍了无耗传输线的两种重要传输状态,即行波和全驻波状态。

• 行波状态

$$\begin{cases} u(z) = U_0^- e^{-j\beta z} \\ i(z) = I_0^- e^{-j\beta z} \end{cases} \quad Z(z') = Z_0 \quad \Gamma(z') = 0$$

• 全驻波状态

$$Z_l = jX_l \quad \Gamma_l = e^{j\varphi_l}$$

$$\text{其中, } \varphi_l = \pi - 2\arctan\left(\frac{X_l}{Z_0}\right)$$

$$\begin{cases} u(z') = U_l^+ (e^{j\beta z'} + \Gamma_l e^{-j\beta z'}) = j2U_l^+ e^{j\frac{1}{2}(\varphi_l - \pi)} \sin\left[\beta\left(z' - \frac{1}{2\beta}(\varphi_l - \pi)\right)\right] \\ i(z') = 2I_l^+ e^{j\frac{1}{2}(\varphi_l - \pi)} \cos\left[\beta\left(z' - \frac{1}{2\beta}(\varphi_l - \pi)\right)\right] \end{cases}$$

$$Z(z') = jZ_0 \tan\left[\beta\left(z' - \frac{1}{2\beta}(\varphi_l - \pi)\right)\right]$$

上表中,采用  $\varphi_l - \pi$  的实质是  $\varphi_l - \varphi_{l0}$ ,而  $\varphi_{l0}$  正是短路状态的反射系数  $\Gamma_l$  的相角。

全驻波状态是用  $z'$  坐标分析的,行波则用  $z$  坐标分析。对于一般情况,以后均采用  $z'$  坐标分析,只是需注意:这时  $e^{j\beta z'}$  表示向  $z$  方向的人射波。

等效长度的概念特别重要,有了等效长度的概念,只要令

$$z'' = z' + \Delta z \quad (1-3-1)$$

一切就与短路传输线类似,也就是只需分析短路传输线,其中

$$\Delta z = \frac{-1}{2\beta}(\varphi_l - \pi) = \frac{\lambda_g}{2\pi} \arctan\left(\frac{X_l}{Z_0}\right) \quad (1-3-2)$$

只要注意在任意情况下,场分布与短路状态相比较,多了一个相位因子

$$e^{j\frac{1}{2}(\varphi_l - \pi)} \quad (1-3-3)$$

短路状态  $\varphi_{l0} = \pi$ ,开路状态  $\varphi_l = 0$ 。

下面在分析工作状态时,将进一步推广等效长度的概念。

## 一、行驻波状态场分布

所谓行驻波状态,即最一般的部分反射情况

$$\begin{cases} \Gamma_l = |\Gamma_l| e^{j\varphi_l}, \text{其中 } |\Gamma_l| \leq 1 \\ Z_l = R_l + jX_l \end{cases} \quad (1-3-4)$$

$$(1-3-5)$$

和全驻波情况类似,分析行驻波情况沿线电压、电流分布,如图 1-3-1 所示。

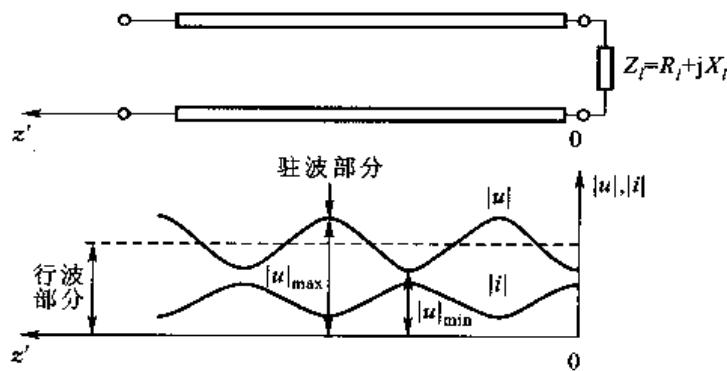


图 1-3-1 行驻波传输线

$$\left\{ \begin{array}{l} u(z') = U_t^+ (e^{j\beta z'} + \Gamma_t e^{-j\beta z'}) \\ \quad = U_t^+ (1 - |\Gamma_t|) e^{j\beta z'} + j2U_t^+ |\Gamma_t| e^{j\frac{1}{2}(\varphi_t - \pi)} \cdot \\ \quad \quad \sin \left[ \beta \left( z' - \frac{1}{2\beta} (\varphi_t - \pi) \right) \right] \\ i(z') = I_t^- (e^{j\beta z'} - \Gamma_t e^{-j\beta z'}) \\ \quad = I_t^- (1 - |\Gamma_t|) e^{j\beta z'} + 2I_t^- |\Gamma_t| e^{j\frac{1}{2}(\varphi_t - \pi)} \cdot \\ \quad \quad \cos \left[ \beta \left( z' - \frac{1}{2\beta} (\varphi_t - \pi) \right) \right] \end{array} \right. \quad (1-3-6)$$

由公式似乎看出：前一部分是行波，而另一部分是全驻波，但事实并非如此，后面将做出讨论。研究任意  $z'$  处的阻抗  $Z(z')$ ，根据定义

$$\begin{aligned} Z(z') &= Z_0 \frac{1 + |\Gamma_t| e^{-j(2\beta z' - \varphi_t)}}{1 - |\Gamma_t| e^{j(2\beta z' - \varphi_t)}} = Z_0 \frac{e^{j(\beta z' - \frac{1}{2}\varphi_t)} + |\Gamma_t| e^{-j(\beta z' - \frac{1}{2}\varphi_t)}}{e^{j(\beta z' - \frac{1}{2}\varphi_t)} - |\Gamma_t| e^{-j(\beta z' - \frac{1}{2}\varphi_t)}} \\ &= Z_0 \frac{(1 + |\Gamma_t|) \cos \left( \beta z' - \frac{1}{2}\varphi_t \right) + j(1 - |\Gamma_t|) \sin \left( \beta z' - \frac{1}{2}\varphi_t \right)}{(1 - |\Gamma_t|) \cos \left( \beta z' - \frac{1}{2}\varphi_t \right) + j(1 + |\Gamma_t|) \sin \left( \beta z' - \frac{1}{2}\varphi_t \right)} \\ &= Z_0 \frac{\left( \frac{1 + |\Gamma_t|}{1 - |\Gamma_t|} \right) + j \tan \left( \beta z' - \frac{1}{2}\varphi_t \right)}{1 + j \left( \frac{1 + |\Gamma_t|}{1 - |\Gamma_t|} \right) \tan \left( \beta z' - \frac{1}{2}\varphi_t \right)} \end{aligned}$$

由上面推导，可引入第三个参数——电压驻波比  $\rho$ ，有时也用 VSWR 表示。

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma_t|}{1 - |\Gamma_t|} \quad 1 \leq \rho \leq \infty \quad (1-3-7)$$

也就是说，对于无耗传输线， $\rho$  不会小于 1。再次写出电压  $u(z')$  表达式

$$u(z') = U_t^+ (1 + \Gamma_t e^{-j2\beta z'}) e^{j\beta z'}$$

于是

$$\left\{ \begin{array}{l} |u(z')|_{\max} = |U_t^+| (1 + |\Gamma_t|) \\ |u(z')|_{\min} = |U_t^+| (1 - |\Gamma_t|) \end{array} \right.$$

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma_t|}{1 - |\Gamma_t|} = \frac{|u(z')|_{\max}}{|u(z')|_{\min}} \quad (1-3-8)$$

可见,电压驻波比的物理意义是电压振幅最大值与最小值之比。很明显,它应大于等于1。对于行波  $\rho=1$ ,对于全驻波  $\rho=\infty$ 。电压驻波比  $\rho$  和  $|\Gamma_t|$  类似,也是系统参量,而不是线上各点的函数。

不同的系统有不同的特性阻抗  $Z_0$ 。为了统一和便于研究,常常提出归一化概念,即阻抗  $Z(z')/Z_0$  称为归一化阻抗

$$\bar{Z}(z') = Z(z')/Z_0 \quad (1-3-9)$$

这样,就把问题的共性(与  $Z_0$  无关的部分)提取出来了。于是有

$$\bar{Z}(z') = \frac{\rho + j \tan \left( \beta z' - \frac{1}{2} \varphi_t \right)}{1 + j \rho \tan \left( \beta z' - \frac{1}{2} \varphi_t \right)} \quad (1-3-10)$$

为了将  $Z_t = R_t < Z_0$  作为标准状态加以比较,式(1-3-10)又可写成

$$\bar{Z}(z') = \frac{1 + j \rho \tan \left[ \beta \left( z' - \frac{1}{2\beta} (\varphi_t - \pi) \right) \right]}{\rho + j \tan \left[ \beta \left( z' - \frac{1}{2\beta} (\varphi_t - \pi) \right) \right]} \quad (1-3-11)$$

再注意到反射系数

$$\Gamma_t = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0} = -\frac{Z_0 - Z_t}{Z_0 + Z_t} = -\frac{(Z_0 - R_t) - jX_t}{(Z_0 + R_t) + jX_t} \quad (1-3-12)$$

对应的反射系数相位

$$\varphi_t = \pi - \left[ \arctan \left( \frac{X_t}{Z_0 + R_t} \right) + \arctan \left( \frac{X_t}{Z_0 - R_t} \right) \right] \quad (1-3-13)$$

## 二、行驻波传输线的标准状态(对应 $Z_t = R_t < Z_0$ 情况)

和全驻波传输线短路状态类似,把  $Z_t = R_t < Z_0$  作为行驻波传输线的标准状态如图 1-3-2 所示。由  $X_t = 0$ ,  $Z_0 - R_t > 0$ , 可知

$$\varphi_t = \pi \quad (1-3-14)$$

$$\begin{cases} u(z') = U_t^- (1 - |\Gamma_t|) e^{j\beta z'} + j2U_t^+ |\Gamma_t| \sin \beta z' \\ i(z') = I_t^+ (1 - |\Gamma_t|) e^{j\beta z'} + 2I_t^- |\Gamma_t| \cos \beta z' \end{cases} \quad (1-3-15)$$

$$Z_s(z') = \frac{1 + j \rho \tan \beta z'}{\rho + j \tan \beta z'} \quad (1-3-16)$$

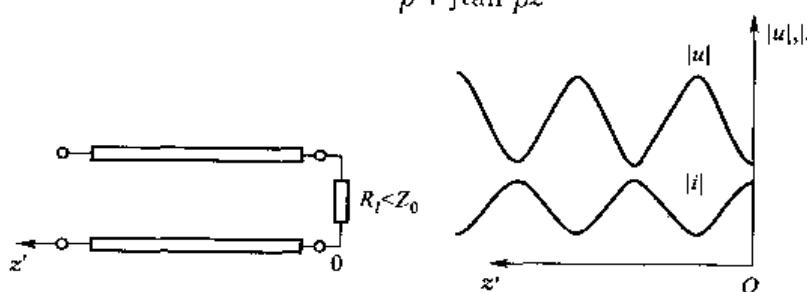


图 1-3-2  $Z_t = R_t < Z_0$  状态

考虑到  $|\Gamma_t| = \frac{Z_0 - R_t}{Z_0 + R_t}$ , 可知这时的电压驻波比

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma_t|}{1 - |\Gamma_t|} = \frac{Z_0}{R_t} = \frac{1}{R_t} \quad (1-3-17)$$

标准状态下电压驻波比  $\rho$  等于归一化负载电阻的倒数。这一点很好记忆, 因为此时归一化负载电阻  $R_t < 1$ , 而  $\rho$  必须大于 1。

### 三、行驻波传输线的纯阻负载大于特性阻抗的状态(对应 $Z_t = R_t > Z_0$ 情况)

行驻波的这一状态与全驻波开路状态类似,  $X_t = 0, Z_0 - R_t < 0$ , 如图 1-3-3 所示。于是,  $\arctan(X_t/(Z_0 + R_t)) = 0, \arctan(X_t/(Z_0 - R_t)) = \pi$ , 即

$$\varphi_t = 0 \quad (1-3-18)$$

$$\begin{cases} u(z') = U_t^+ (1 - |\Gamma_t|) e^{j\beta z'} + 2U_t^- |\Gamma_t| \cos \beta z' \\ i(z') = I_t^+ (1 - |\Gamma_t|) e^{j\beta z'} + j2I_t^- |\Gamma_t| \sin \beta z' \end{cases} \quad (1-3-19)$$

$$Z_s(z') = \frac{\rho + j \tan \beta z'}{1 + j \rho \tan \beta z'} \quad (1-3-20)$$

对比式(1-3-16)和(1-3-20)可知, 在形式上有

$$Z_s(z') = \frac{1}{Z_0(z')} \quad (1-3-21)$$

在这种情况下,  $|\Gamma_t| = \frac{Z_0 - R_t}{Z_0 + R_t}$ , 于是有

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma_t|}{1 - |\Gamma_t|} = \frac{R_t}{Z_0} = R_t \quad (1-3-22)$$

也就是说,  $Z_t = R_t > Z_0$ , 电压驻波比  $\rho$  等于归一化负载电阻  $R_t$ , 与全驻波状态完全类似。可以推广等效长度  $\Delta z$  概念, 令

$$z'' = z' - \frac{1}{2\beta}(\varphi_t - \pi) = z' + \Delta z \quad (1-3-23)$$

那么波节点的坐标是  $z'' = 0$ 。 $\Delta z$  的物理意义是从负载出发到波节点的负距离, 因此到波节点的距离可写为  $d_{mn}$ , 有

$$z'' = d_{mn} + \Delta z \equiv 0 \quad (1-3-24)$$

$$d_{mn} = -\Delta z = \pm \frac{1}{4}\lambda_g \quad (1-3-25)$$

一般取正号。

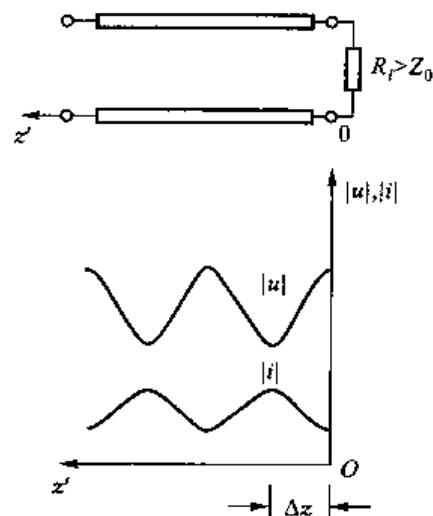


图 1-3-3  $Z_t = R_t > Z_0$  状态

#### 四、行驻波传输线的负载为任意复阻抗的状态(对应 $Z_l = R_l + jX_l$ 情况)

由  $\varphi_l = \pi - [\arctan\left(\frac{X_l}{Z_0 + R_l}\right) + \arctan\left(\frac{X_l}{Z_0 - R_l}\right)]$ , 可知

$$\Delta z = \frac{\lambda_g}{4\pi} \left[ \arctan\left(\frac{X_l}{Z_0 + R_l}\right) + \arctan\left(\frac{X_l}{Z_0 - R_l}\right) \right] \quad (1-3-26)$$

电压、电流沿线分布

$$\begin{cases} u(z') = U_l^+ (1 - |\Gamma_l|) e^{j\beta z'} + j2U_l^- |\Gamma_l| e^{j\frac{1}{2}(\eta_l - \pi)} \sin \beta(z' + \Delta z) \\ i(z') = I_l^+ (1 - |\Gamma_l|) e^{j\beta z'} + 2I_l^- |\Gamma_l| e^{j\frac{1}{2}(\eta_l - \pi)} \cos \beta(z' + \Delta z) \end{cases} \quad (1-3-27)$$

而阻抗  $\bar{Z}(z')$  分布为

$$\bar{Z}(z') = \frac{1 + j\rho \tan \beta(z' + \Delta z)}{\rho + j \tan \beta(z' + \Delta z)} \quad (1-3-28)$$

上面写法是以电阻  $Z_l = R_l < Z_0$  作为标准状态。只要  $\Delta z = 0$ ,  $\varphi_l = \pi$ , 即可完全归于标准状态, 如图 1-3-4 所示。特别的, 对于容性负载和感性负载, 其等效长度如下所示:

容性( $X_l < 0$ )负载情况	感性( $X_l > 0$ )负载情况
$d_{min} = -\Delta z =$ $-\frac{\lambda_g}{4\pi} \left[ \arctan\left(\frac{ X_l }{Z_0 + R_l}\right) + \arctan\left(\frac{ X_l }{Z_0 - R_l}\right) \right]$	$d_{min} = \frac{1}{2}\lambda_g - \Delta z$ $= \frac{1}{2}\lambda_g - \frac{\lambda_g}{4\pi} \left[ \arctan\left(\frac{X_l}{Z_0 + R_l}\right) - \arctan\left(\frac{X_l}{Z_0 - R_l}\right) \right]$

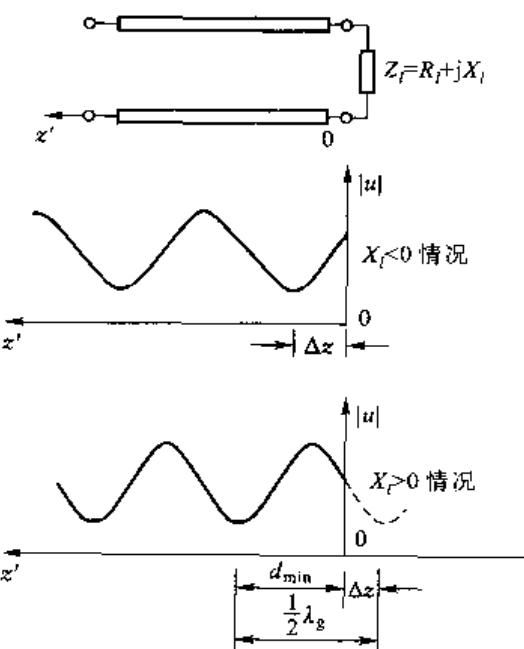


图 1-3-4 任意负载的等效长度

## 五、行驻波阻抗图形

已经导出

$$\bar{Z}(z') = \bar{R}(z') + j\bar{X}(z') = \frac{1 + j\rho \tan \beta(z' + \Delta z)}{\rho + j \tan \beta(z' + \Delta z)}$$

很容易得到

$$\begin{cases} R(z') = \frac{\rho[1 + \tan^2 \beta(z' + \Delta z)]}{\rho^2 + \tan^2 \beta(z' + \Delta z)} \\ X(z') = \frac{\tan \beta(z' + \Delta z)(\rho^2 - 1)}{\rho^2 + \tan^2 \beta(z' + \Delta z)} \end{cases} \quad (1-3-29)$$

画出行驻波阻抗特性图,如图 1-3-5 所示,可以发现其性质:

- ① 行驻波阻抗依然有  $\lambda_g/2$  波长周期性。
- ② 感性和容性(也可以说是串联谐振和并联谐振)电抗有  $\lambda_g/4$  变换性质。
- ③ 在电压波节点上的阻抗为纯阻,但为最小值

$$R_{\min} = \frac{1}{\rho} Z_0 \quad (1-3-30)$$

在电压波腹点上的阻抗也是纯阻,但为最大值

$$R_{\max} = \rho Z_0 \quad (1-3-31)$$

从图形中还可以看出,全驻波传输线阻抗只有电抗,没有电阻,而电抗始终是正斜率,也称 Foster(福斯特)定理。而行驻波传输线的阻抗既有电抗,又有电阻,且电抗(在并联谐振处)出现负斜率。

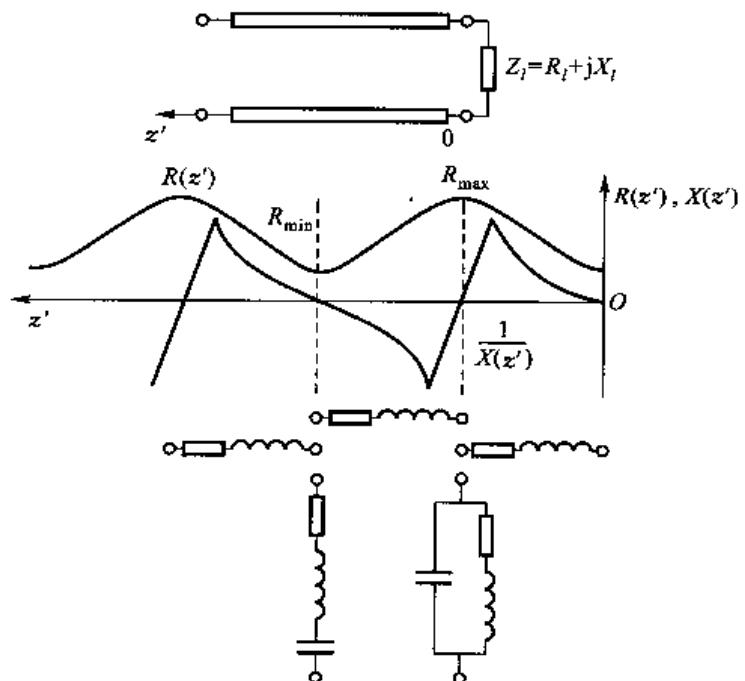


图 1-3-5 行驻波阻抗特性图

## 六、功率关系

由一般行驻波情况下,沿线的电压、电流分布

$$\begin{cases} u(z') = U_l^+ e^{j\beta z'} [1 + \Gamma(z')] \\ i(z') = \frac{U_l^+}{Z_0} e^{j\beta z'} [1 - \Gamma(z')] \end{cases} \quad (1-3-32)$$

可以写出传输功率(注意是实功率,不包括虚功率)的一般表示式

$$\begin{aligned} P(z') &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{u(z') i^*(z')\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{U_l^+ e^{j\beta z'} (1 + \Gamma(z')) \cdot \frac{U_l^{+*}}{Z_0} e^{-j\beta z'} (1 - \Gamma^*(z'))\} \end{aligned} \quad (1-3-33)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{|U_i^+|^2}{Z_0} - \frac{|U_i^-|^2}{Z_0} |\Gamma(z')|^2 + |U_i^-|^2 \frac{\Gamma(z') - \Gamma^*(z')}{Z_0} \right\}$$

注意到上述推导中应用了无耗传输线条件, 其中 \* 表示复共轭,  $Z_0$  假设为实数。

$$P_i(z') = \frac{1}{2} \frac{|U_i^+|^2}{Z_0} \quad (1-3-34)$$

表示入射功率。

$$P_r(z') = \frac{1}{2} \frac{|U_i^-|^2}{Z_0} |\Gamma(z')|^2 \quad (1-3-35)$$

表示反射功率。

$$\operatorname{Re}[\Gamma(z') - \Gamma^*(z')] \equiv 0 \quad (1-3-36)$$

于是

$$P(z') = P_i(z') - P_r(z') = \frac{1}{2} \frac{|U_i^+|^2}{Z_0} (1 - |\Gamma(z')|^2) \quad (1-3-37)$$

式(1-3-37)表明: 传输功率等于入射波功率减去反射波功率, 其中

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ |U_i^+|^2 \frac{\Gamma(z') - \Gamma^*(z')}{Z_0} \right\} = 0$$

表示入射波和反射波没有相互作用, 或者换句话说, 对于无耗传输线, 反射波与入射波是独立的。

① 对于行波传输线  $\Gamma(z') = 0$

$$P(z') = \frac{1}{2} \frac{|U_i^+|^2}{Z_0} = P_i(z') \quad (1-3-38)$$

② 对于全驻波传输线  $|\Gamma(z')| = 1$

$$P(z') = 0 \quad (1-3-39)$$

即全驻波传输线没有传输功率, 或者说, 入射波功率等于反射波功率。

③ 特殊地, 在电压波腹点或波节点上, 由于阻抗是纯阻, 因此电压、电流必然同相

$$\begin{cases} P(z') = \frac{1}{2} |u|_{\max} |i|_{\min} = \frac{1}{2} \frac{|u|_{\max}^2}{\rho Z_0} \end{cases} \quad (1-3-40)$$

$$\begin{cases} P(z') = \frac{1}{2} |u|_{\min} |i|_{\max} = \frac{1}{2} \frac{|i|_{\max}^2 Z_0}{\rho} \end{cases} \quad (1-3-41)$$

可见, 传输线  $\rho$  愈大, 传输功率愈小。

## 作业 PROBLEMS 1-3

● 求如图 1-3-6 所示系统的输入反射系数  $\Gamma$  和沿线电压  $u(z')$  的分布。

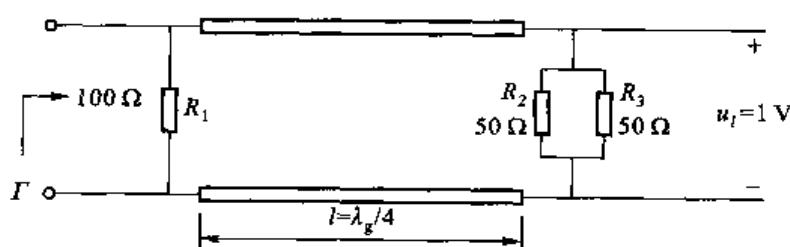


图 1-3-6 第 1 题图

● 要使如图 1-3-7 所示系统的输入反射系数  $\Gamma = 0$ , 已知特性阻抗均为  $50 \Omega$ , 试求传输线长度  $l$  和短路枝节长度  $l_s$ 。

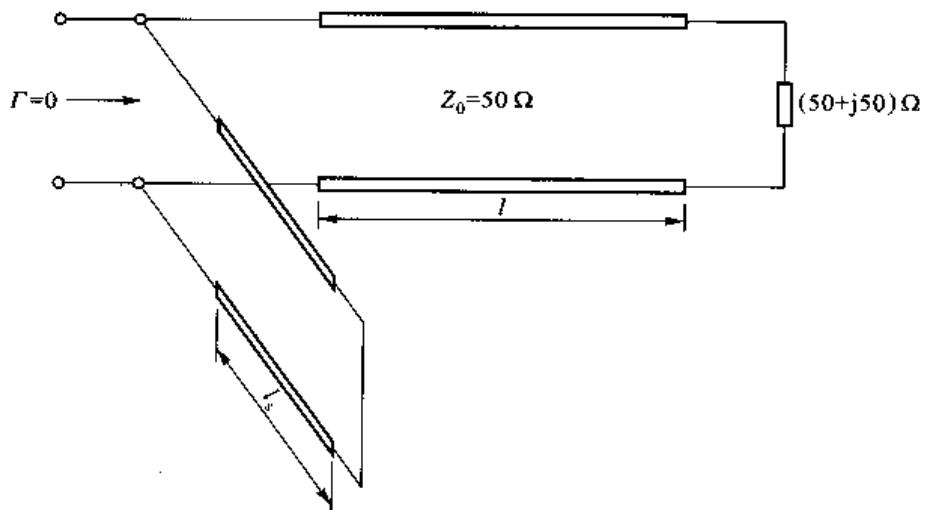
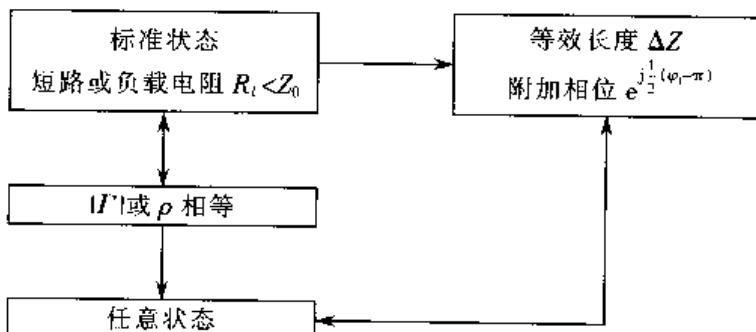


图 1-3-7 第 2 题图

## 传输矩阵解 Transmission Matrix Solution

前面对于全驻波传输线和行驻波传输线引入了标准状态和等效长度  $\Delta z$  的概念。在全驻波传输线中,把短路工作状态作为标准状态;完全类似,在行驻波状态中,则把小负载电阻  $Z_l = R_l < Z_0$  作为标准状态,  $|\Gamma|$  相等的其他状态只是在标准状态下加一个等效长度  $\Delta z$  ( $\Delta z$  可正可负)。当写电压、电流场沿线分布时还需考虑一附加相位。

这种阻抗面移动的思想对于微波工程中的其他问题也有很大的启发,其主要思想可以用框图流程表示。



下面利用图表的形式简要地将前面讲过的传输线工作状态的内容总结一下。如表 1-4-1 和表

1-4-2 所示。

表 1-4-1 传输线的标准状态和任意状态

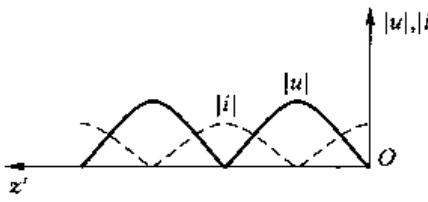
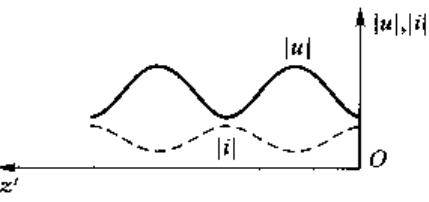
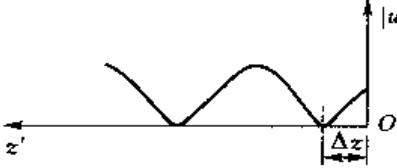
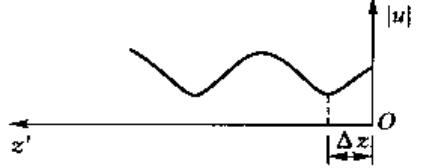
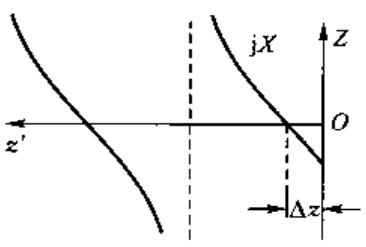
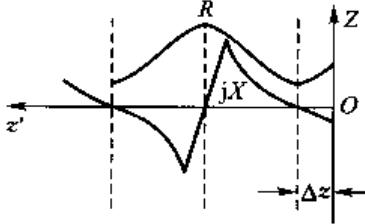
全驻波传输线	行驻波传输线
<p>标准状态——短路 (<math>Z_L = 0</math>)</p> 	<p>标准状态——小电阻 (<math>Z_L = R_L &lt; Z_0</math>)</p> 
<p>任意状态 <math>Z_L = jX_L</math></p>  <p>等效长度 <math>\Delta z = \frac{1}{4} \lambda_s - \frac{\lambda_s}{4\pi} \varphi_i</math></p> <p><math>\varphi_i = \pi - 2 \arctan \left( \frac{X_L}{Z_0} \right)</math></p> <p><math>\Delta z = \frac{\lambda_s}{2\pi} \arctan \left( \frac{X_L}{Z_0} \right)</math></p>	<p>任意状态 <math>Z_L = R_L + jX_L</math></p>  <p>等效长度 <math>\Delta z = \frac{1}{4} \lambda_s - \frac{\lambda_s}{4\pi} \varphi_i</math></p> <p><math>\varphi_i = \pi - \left[ \arctan \left( \frac{X_L}{Z_0 + R_L} \right) + \arctan \left( \frac{X_L}{Z_0 - R_L} \right) \right]</math></p> <p><math>\Delta z = \frac{\lambda_s}{4\pi} \left[ \arctan \left( \frac{X_L}{Z_0 + R_L} \right) + \arctan \left( \frac{X_L}{Z_0 - R_L} \right) \right]</math></p>

表 1-4-2 传输线任意状态的阻抗、电压和电流分布

全驻波传输线	行驻波传输线
<p>任意状态阻抗分布</p> $Z(z') = jZ_0 \tan \beta(z' + \Delta z)$ 	<p>任意状态阻抗分布</p> $Z(z') = Z_0 \frac{1 + j\rho \tan \beta(z' + \Delta z)}{\rho + j \tan \beta(z' + \Delta z)}$ 
<p>任意状态电压、电流分布</p> $u(z') = j2U_L^+ e^{j\frac{1}{2}\varphi_L - \pi} \sin \beta(z' + \Delta z)$ $i(z') = 2I_L^+ e^{j\frac{1}{2}\varphi_L - \pi} \cos \beta(z' + \Delta z)$	<p>任意状态电压、电流分布</p> $u(z') = U_L^+ (1 -  \Gamma_L ) e^{j\varphi_L} + j2U_L^+  \Gamma_L  e^{j\frac{1}{2}(\varphi_L - \pi)} \sin \beta(z' + \Delta z)$ $i(z') = I_L^- (1 -  \Gamma_L ) e^{j\varphi_L} + 2I_L^-  \Gamma_L  e^{j\frac{1}{2}(\varphi_L - \pi)} \cos \beta(z' + \Delta z)$

下面将从更高的立足点来看待传输线问题。

## 一、传输线段的矩阵解

从一般情况看来,传输线的“文章”似乎已经做完,它相当于微分方程的通解加边界条件,如图 1-4-1 所示。

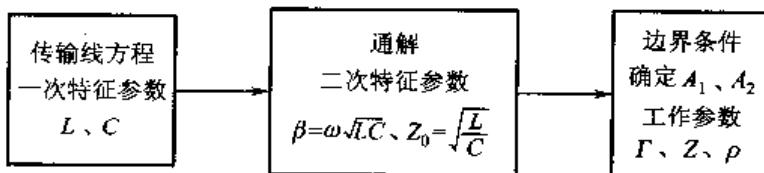
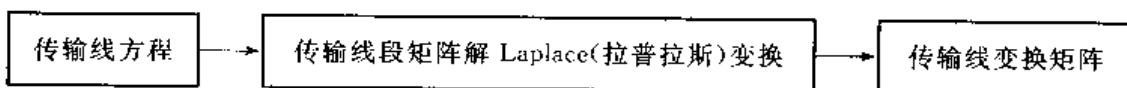


图 1-4-1 传输线一般解法

在上面讨论中有一个重要启示:传输线的各种应用都可以归结为一段长度为  $l$  的传输线段的应用,不管是短路、开路或有任意负载。

传输线段起到变换的作用,而矩阵理论恰恰是表征这种线性变换的最好数学工具。因此,产生了传输线段的矩阵解思想。

变换的另一个特点是在求解中,把两边(输入和输出)边界条件“挂空”。因此,所得到的结果可适合任何边界条件,如下所示:



还是从最一般的无耗传输线方程出发进行讨论。

$$\begin{cases} \frac{du}{dz} = j\omega L i \\ \frac{di}{dz} = j\omega C u \end{cases} \quad (1-4-1)$$

微分方程左边的符号与前面不同是因为这里采用了如图 1-4-2 所示的坐标。

现在引入 Laplace 变换(严格地说是单边变换),它定义为

$$\text{正变换 } \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

$$\text{逆变换 } \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \int_0^\infty F(s) e^{st} ds = f(t)$$

(1-4-2)

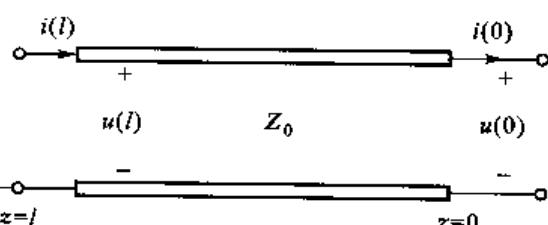


图 1-4-2 Laplace 变换的传输线坐标

$$\begin{cases} U(s) = \int_0^\infty u(z) e^{-sz} dz \\ I(s) = \int_0^\infty i(z) e^{-sz} dz \end{cases} \quad (1-4-3)$$

现在考虑一段长度为  $l$  的传输线段,在这一节,从负载出发的坐标用  $z$  表示,对式(1-4-1)左边作 Laplace 变换

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left(\frac{du}{dz}\right) = sU(s) - u(z=0) \\ \mathcal{L}\left(\frac{di}{dz}\right) = sI(s) - i(z=0) \end{cases} \quad (1-4-4)$$

代入式(1-4-3),有

$$\begin{cases} sU(s) - j\omega L I(s) = u(z=0) \\ -j\omega C U(s) + sI(s) = i(z=0) \end{cases}$$

可以解出

$$\begin{cases} U(s) = \frac{su(z=0) + j\omega L i(z=0)}{s^2 + \omega^2 LC} \\ I(s) = \frac{j\omega C u(z=0) + si(z=0)}{s^2 + \omega^2 LC} \end{cases} \quad (1-4-5)$$

由于 Laplace 逆变换

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) = \sin at \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right) = \cos at \end{cases} \quad (1-4-6)$$

所以对式(1-4-5)施以 Laplace 逆变换,有

$$\begin{cases} u(t) = \cos \beta t u(0) + jZ_0 \sin \beta t i(0) \\ i(t) = j \frac{1}{Z_0} \sin \beta t u(0) + \cos \beta t i(0) \end{cases} \quad (1-4-7)$$

式中,  $\beta = \omega \sqrt{LC}$ ,  $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ 。

又  $\theta = \beta t$  称为电长度,式(1-4-7)的矩阵形式是

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & jZ_0 \sin \theta \\ j \frac{1}{Z_0} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ i(0) \end{bmatrix} \quad (1-4-8)$$

方程(1-4-8)称为传输线段矩阵。可以说,只需记住这一矩阵,即可给出大部分传输线公式。请注意:推导矩阵式(1-4-8)的过程中没有利用任何边界条件。正因为如此,它可以适合任意边界条件。

### [讨论]

① 将式(1-4-8)作为两个线性方程,且注意到

$$\frac{u(t)}{i(t)} = Z(z), \frac{u(0)}{i(0)} = Z_t$$

则有

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_t + jZ_0 \tan \theta}{Z_0 + jZ_t \tan \theta} \quad (1-4-9)$$

② 取式(1-4-9)中  $Z_t = 0$ ,即全驻波短路状态,有

$$Z(z) = jZ_0 \tan \theta \quad (1-4-10)$$

取式(1-4-9)中  $Z_t = \infty$ ,即全驻波开路状态,有

$$Z(z) = -jZ_0 \operatorname{ctan} \theta \quad (1-4-11)$$

令式(1-4-9)中  $Z_l = jX_l$ , 即全驻波任意状态, 有

$$Z(z) = Z_0 \frac{j(X_l + Z_0 \tan \theta)}{Z_0 - X_l \tan \theta} = jZ_0 \left[ \frac{\frac{X_l}{Z_0} + \tan \theta}{1 - \frac{X_l}{Z_0} \tan \theta} \right]$$

令  $\tan \varphi_l = \frac{X_l}{Z_0}$ , 即可导出

$$Z(z) = jZ_0 \tan(\theta + \varphi_l) \quad (1-4-12)$$

这也体现了等效相位的思想。

③ 式(1-4-8)是输入端用负载端表示。如果反过来, 负载端用输入端表示, 又有

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ i(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & jZ_0 \sin \theta \\ j\frac{1}{Z_0} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -jZ_0 \sin \theta \\ -j\frac{1}{Z_0} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

$$(1-4-13)$$

与前面矩阵完全吻合。实际上, 只须用  $-\theta$  取代  $\theta$ , 即可把输入、输出变换位置。

## 二、传输矩阵的普遍理论

进一步推广上述矩阵思想。在上面讨论中, 归结起来是传输线段矩阵把输入电压、电流和输出电压、电流线性地联系起来, 或者说, 通过传输线段矩阵的变换, 把负载电压、电流变成输入电压、电流。

这种思想可做合理的拓广, 即中间的变换矩阵不一定是传输线段——这就是著名的网络思想。一个线性网络, 输入电压、电流  $u_1, i_1$ , 输出电压、电流  $u_2, i_2$ , 可以用传输矩阵  $A$  联系起来, 如图 1-4-3 所示, 且

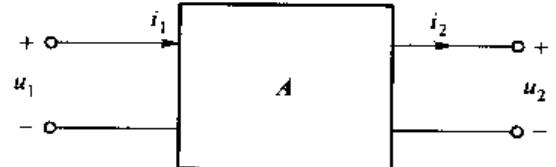


图 1-4-3 传输矩阵

$$\begin{cases} u_1 = A_{11}u_2 + A_{12}i_2 \\ i_1 = A_{21}u_2 + A_{22}i_2 \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (1-4-14)$$

### [性质]

#### 1. 级联性质

如果第 I 个网络的输出端口是第 II 个网络的输入端口, 则称这两个网络级联, 如图 1-4-4 所示。有

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = A_I \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = A_{II} \begin{bmatrix} u_3 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

则可知

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = A_1 A_{\text{II}} \begin{bmatrix} u_3 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (1-4-15)$$

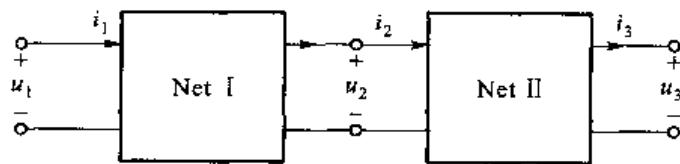


图 1-4-4 网络级联

推广到  $N$  个网络级联，则总的  $A$  矩阵等于各  $A_i$  矩阵依次乘积，即

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^N A_i \begin{bmatrix} u_N \\ i_N \end{bmatrix} \quad (1-4-16)$$

## 2. 对称性质

对称网络（例如，无耗传输线），有

$$A_{11} = A_{22} \quad (1-4-17)$$

## 3. 无耗性质

对于无耗网络，其  $A$  矩阵参数需满足

$$A_{11}, A_{22} \in \text{Real(实数)}$$

$$A_{12}, A_{21} \in \text{Imaginary(虚数)} \quad (1-4-18)$$

## 4. 互易性质

在互易网络中， $A$  矩阵的行列式值等于 1，即

$$\det A = 1 \quad (1-4-19)$$

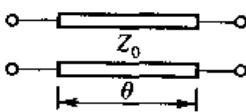
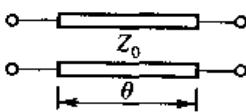
## 5. 阻抗变换性质

$$Z_{in} = \frac{A_{11}Z_t + A_{12}}{A_{21}Z_t + A_{22}} \quad (1-4-20)$$

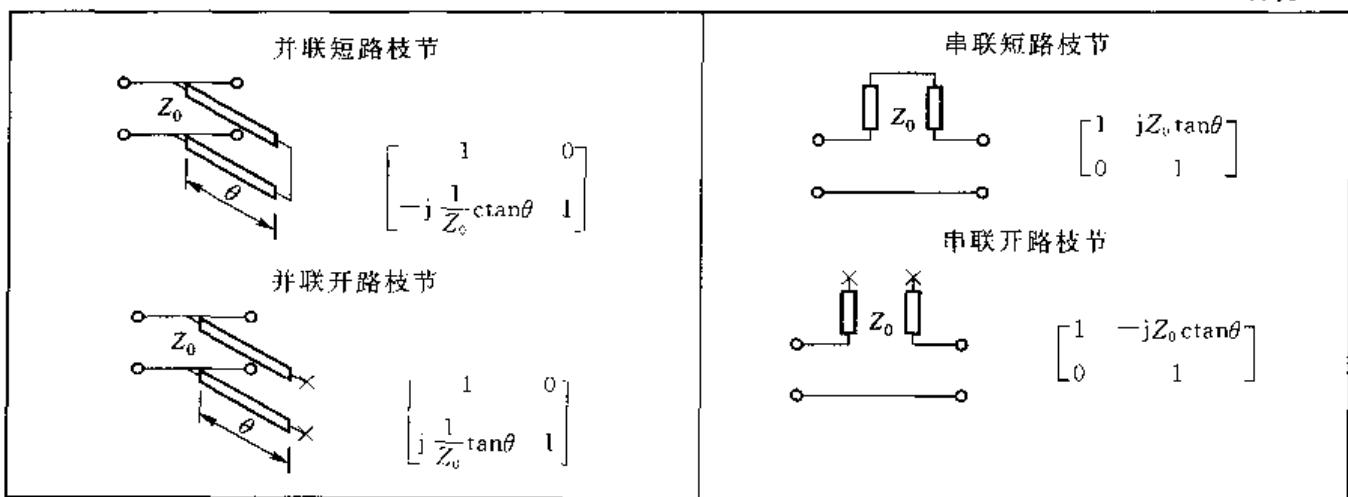
## 三、典型微波元件的 $A$ 矩阵

表 1-4-3 给出了常用的微波元件对应的  $A$  矩阵。

表 1-4-3 常用微波元件的  $A$  矩阵

串联阻抗	传输线段
 $Z$	 $\begin{bmatrix} \cos\theta & jZ_0 \sin\theta \\ j\frac{1}{Z_0} \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
 $Y$	 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$

续表



#### 四、应用举例

[例 1] 如图 1-4-5 所示,  $Z_t = (100 + j200) \Omega$ ,  $L = 0.1 \mu\text{H}$ ,  $C = 20 \text{ pF}$ ,  $Z_0 = 50 \Omega$ ,  $f = 300 \text{ MHz}$ , 求输入驻波比。

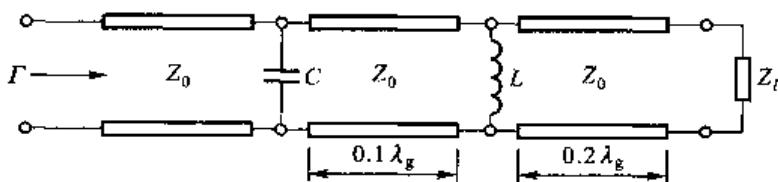


图 1-4-5 例 1 计算模型

[解] 将系统对  $Z_0$  归一化

$$Z_t = Z_t / Z_0 = 2 + j4$$

$$Y_1 = \omega C Z_0 = 2\pi \times 3 \times 10^8 \times 20 \times 10^{-12} \times 50 = 1.885 \text{ S}$$

$$Y_2 = \frac{Z_0}{\omega L} = \frac{50}{2\pi \times 3 \times 10^8 \times 10^{-7}} = 0.265 \text{ S}$$

$$\theta_1 = \beta l_1 = \frac{2\pi}{\lambda_g} \times 0.1 \lambda_g = 36^\circ$$

$$\theta_2 = \beta l_2 = \frac{2\pi}{\lambda_g} \times 0.2 \lambda_g = 72^\circ$$

采用矩阵解, 先不考虑  $Z_t$ , 注意归一化的传输段矩阵为

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & j \sin \theta \\ j \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j1.885 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 36^\circ & j \sin 36^\circ \\ j \sin 36^\circ & \cos 36^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -j0.265 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 72^\circ & j \sin 72^\circ \\ j \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 36^\circ & j \sin 36^\circ \\ j(1.885 \cos 36^\circ + \sin 36^\circ) \cos 36^\circ & -1.885 \sin 36^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -j0.265 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 72^\circ & j \sin 72^\circ \\ j \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \cos 36^\circ + 0.265 3 \sin 36^\circ & j \sin 36^\circ \\ j(1.885 0 \cos 36^\circ + \sin 36^\circ + 1.885 0 \times 0.265 3 \sin 36^\circ - 0.265 3 \cos 36^\circ) & \cos 36^\circ - 1.885 0 \sin 36^\circ \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \cos 72^\circ & j \sin 72^\circ \\ j \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.964 96 & j0.587 79 \\ j2.192 10 & -0.298 96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.309 02 & j0.951 06 \\ j0.951 06 & 0.309 02 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -0.260 83 & j1.099 37 \\ j0.393 07 & -2.177 20 \end{bmatrix} \\
 \bar{Z}_{in} &= \frac{A_{11}\bar{Z}_t + A_{12}}{A_{21}\bar{Z}_t + A_{22}} = \frac{(2+j4)0.260 83 + j1.099 37}{j(2+j4)0.393 07 - 2.177 20} \\
 &= \frac{-0.521 66 - j0.056 05}{-3.749 48 + j0.393 07} \\
 &= \frac{0.521 66 + j0.056 05}{3.749 48 - j0.393 07} \\
 \Gamma &= \frac{\bar{Z}_{in} - 1}{\bar{Z}_{in} + 1} = \frac{3.227 82 - j0.449 12}{4.271 14 - j0.393 07} \\
 |\Gamma| &= \frac{3.258 92}{4.284 42} = 0.760 64 \\
 \rho &= \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 7.355 63
 \end{aligned}$$

[例 2] 如图 1-4-6 所示电路表示双管电调 pin 管衰减器, 两 pin 管等效为  $R_1$  和  $R_2$ , 求输入驻波比为 1 时,  $R_1$  和  $R_2$  两电阻的约束条件。

[解] 采用矩阵来求解

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & 1 \\ 1 + \frac{1}{R_1 R_2} & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{Z}_{in} = \frac{A_{11}\bar{Z}_t + A_{12}}{A_{21}\bar{Z}_t + A_{22}} = \frac{1 + \frac{1}{R_2}}{1 + \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_1}} = 1$$

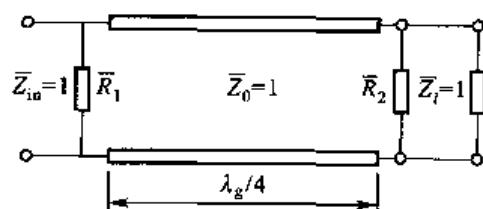


图 1-4-6 双管电调 pin 管衰减器

可得到条件是

$$R_1 = 1 + R_2$$

能保证衰减器输入端匹配。

[例 3] 如图 1-4-7 所示传输线结构。试求出 A-A'、B-B'、C-C' 处的电压  $u$  和电流  $i$ , 并画出阻抗  $Z$  的分布图。

[解] 面 A-A' 处的输入阻抗如图 1-4-8 所示。

把电源与负载之间看成一个网络, 其  $A$  矩阵为

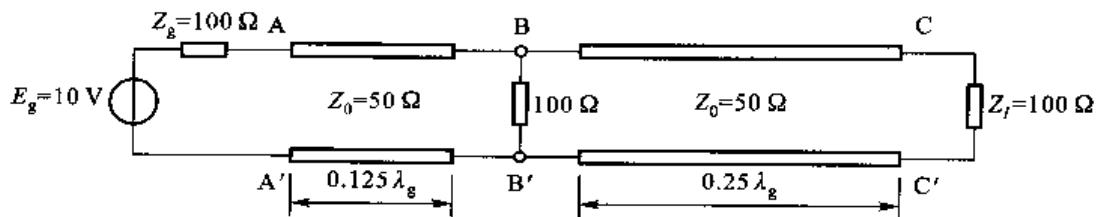


图 1-4-7 传输线结构

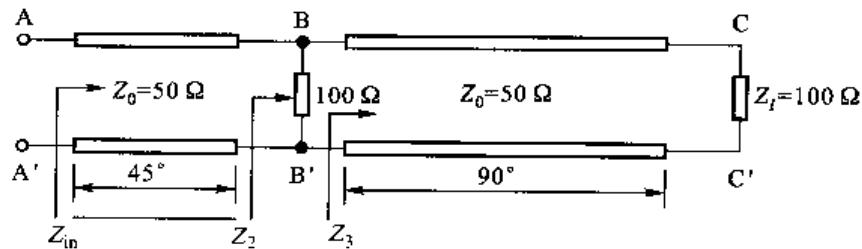


图 1-4-8 面 A~A' 处的输入阻抗

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & j50 \\ j\frac{1}{50} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{100} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & j50 \\ j\frac{1}{50} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1+j\frac{1}{2} & j50 \\ \frac{1}{100}+j\frac{1}{50} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & j50 \\ j\frac{1}{50} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & -25+j50 \\ j\frac{1}{50} & -1+j\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ Z_{in} &= \frac{A_{11}Z_t + A_{12}}{A_{21}Z_t + A_{22}} = \frac{-100-25+j50}{j2-1+j\frac{1}{2}} \Omega = \frac{125-j50}{1-j\frac{5}{2}} \Omega = \frac{250-j100}{2-j5} \Omega = \frac{(250-j100)(2+j5)}{29} \Omega \\ &= \frac{1000+j1050}{29} \Omega = (34.4828+j36.2069) \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{E_g}{Z_s + Z_{in}} = \frac{10}{134.4828+j36.2069} A = \frac{1344.828-j362.069}{19396.56310} A \\ &= (0.069333314-j0.018666657) A = 0.071802176 e^{-j15.068^\circ} A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 10 - I_1 Z_s = (10 - 6.9333314 + j1.8666657) V = (3.0666686 + j1.8666657) V \\ &= 3.59011102 e^{j31.3287^\circ} V \end{aligned}$$

负载  $Z_t$  经  $0.25\lambda_g$  传输线变换的阻抗  $Z_3$  为

$$Z_3 = \frac{Z_t \cos 90^\circ + j Z_0 \sin 90^\circ}{j \frac{1}{Z_0} \cdot Z_t \sin 90^\circ + \cos 90^\circ} = \frac{50j}{j \frac{1}{50} \times 100} \Omega = 25 \Omega$$

阻抗  $Z_3$  与  $100 \Omega$  电阻并联的阻抗  $Z_2$  为

$$Z_2 = \frac{100Z_3}{100+Z_3} = \frac{100 \times 25}{100+25} \Omega = 20 \Omega$$

如图 1-4-9 所示, 取  $\theta = -45^\circ$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -j50 \sin 45^\circ \\ -j\frac{1}{50} \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} u_1 - j50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i_1 \\ i_2 = -j \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{50} u_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} i_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (u_1 - j50i_1) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} [3.0666686 + j1.8666657 - j50(0.069333314 - j0.018666657)] \text{V} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (2.13333575 - j1.6) \text{V} = (1.508496 - j1.13137) \text{V} = 1.88562 e^{-j36.87^\circ} \text{V} \\ i_2 &= \frac{u_2}{20} = 0.09428 e^{-j36.87^\circ} \text{A} \end{aligned}$$

如图 1-4-10 所示, 经电阻变换

$$\begin{cases} u_3 = u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} u_1 - j50 \frac{\sqrt{2}}{2} i_1 \\ i_3 = i_2 - \frac{u_2}{100} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-j\frac{1}{50} - \frac{1}{100}\right) u_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - j\frac{1}{2}\right) i_1 \\ u_3 = u_2 = 1.88562 e^{-j36.87^\circ} \text{V} \\ i_3 = \frac{u_3}{25} = 0.07542 e^{-j36.87^\circ} \text{A} \end{cases}$$

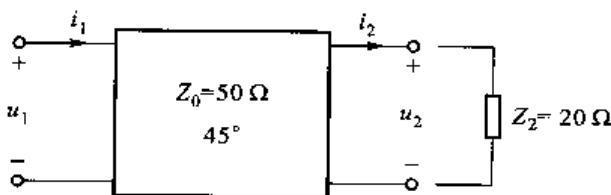


图 1-4-9 0.125  $\lambda_g$  传输线两侧的  
电压、电流转换关系

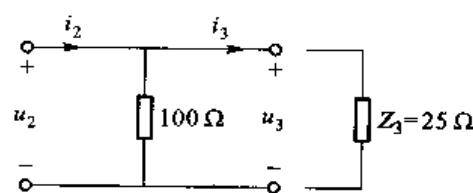


图 1-4-10 并联电阻两侧的  
电压、电流转换关系

如图 1-4-11 所示, 取  $\theta = -90^\circ$

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j50 \\ -j\frac{1}{50} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_4 = -j50i_3 \\ i_4 = -j\frac{1}{50}u_3 \end{cases}$$

$$u_4 = -j50(0.07542 e^{-j36.87^\circ}) \text{V} = 3.77124 e^{-j126.87^\circ} \text{V}$$

$$i_4 = \frac{u_4}{100} = 0.03771 e^{-j126.87^\circ} \text{A}$$

下面求解阻抗的分布:

如图 1-4-12 所示, 负载  $Z_L$  经  $0.25\lambda_g$  传输线变换后的阻抗为

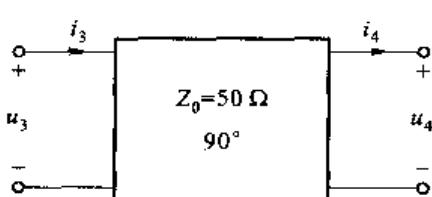


图 1-4-11 0.25  $\lambda_g$  传输线两侧的电压、电流转换关系

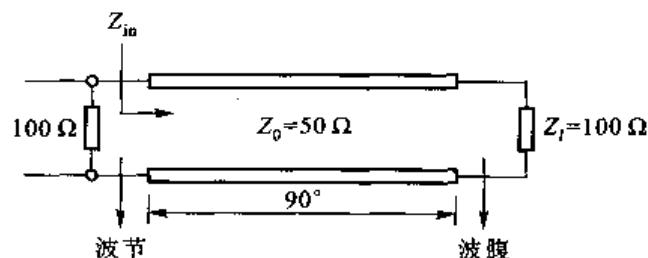


图 1-4-12 阻抗分布

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_t} = 25 \Omega$$

图 1-4-7 所示传输线结构中的 B、C 间阻抗分布如图 1-4-13 所示。

图 1-4-7 所示传输线结构中的 A、B 间阻抗分布如图 1-4-14 所示。

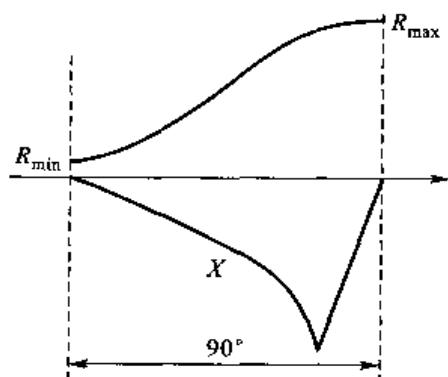


图 1-4-13 B、C 间阻抗分布

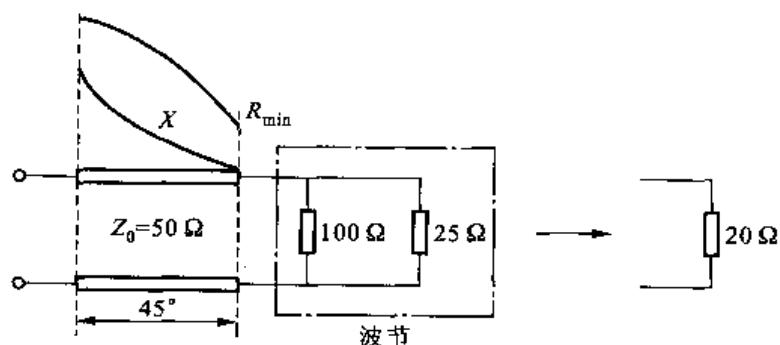


图 1-4-14 A、B 间阻抗分布

## 附录 APPENDIX

### Laplace 变换

#### 1. Laplace 变换导数性质

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

[证明] 由 Laplace 变换定义

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} df(t) = f(t)e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Laplace 变换条件

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-st} = 0$$

因此,有

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

#### 2. 线性方程组求解

$$\begin{cases} sU(s) - j\omega L I(s) = u(z=0) \\ -j\omega C U(s) + sI(s) = i(z=0) \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} s & -j\omega L \\ -j\omega C & s \end{vmatrix} = s^2 + \omega^2 LC$$

$$D_U = \begin{vmatrix} u(z=0) & -j\omega L \\ i(z=0) & s \end{vmatrix} = su(z=0) + j\omega Li(z=0)$$

$$D_I = \begin{vmatrix} s & u(z=0) \\ -j\omega C & i(z=0) \end{vmatrix} = j\omega Cu(z=0) + si(z=0)$$

最后得到

$$\left\{ \begin{array}{l} U(s) = \frac{su(z=0) + j\omega Li(z=0)}{s^2 + \omega^2 LC} \\ I(s) = \frac{j\omega Cu(z=0) + si(z=0)}{s^2 + \omega^2 LC} \end{array} \right.$$

### 3. Laplace 逆变换

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) = \sin at \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right) = \cos at \end{array} \right.$$

[证明] 根据定义

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{s+ja} e^{st} ds &= e^{iat} \int_{-ja}^\infty \frac{1}{s+ja} e^{(s-ja)t} d(s+ja) \\ &= e^{-jat} e^{(s-ja)t} \Big|_{-ja}^\infty = -e^{-jat} \\ \int_0^\infty \frac{1}{s-ja} e^{st} ds &= e^{iat} \int_{ja}^\infty \frac{1}{s-ja} e^{(s-ja)t} d(s-ja) \\ &= e^{iat} e^{(s-ja)t} \Big|_{ja}^\infty = -e^{iat} \end{aligned}$$

于是

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) = \frac{1}{2j}(e^{iat} - e^{-iat}) = \sin at$$

完全类似地, 有

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right) = \cos at$$

### 4. 无耗传输线段解

为了适应逆变换公式, 重新写出

$$\left\{ \begin{array}{l} U(s) = \frac{su(z=0) + j\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \omega \sqrt{LC} i(z=0)}{s^2 + \omega^2 LC} \\ I(s) = \frac{j\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \omega \sqrt{LC} u(z=0) + Si(z=0)}{s^2 + \omega^2 LC} \end{array} \right.$$

令  $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ,  $\beta = \omega \sqrt{LC}$ , 做逆变换有

$$\left\{ \begin{array}{l} u(z) = \cos \beta z u(0) + j Z_0 \sin \beta z i(0) \\ i(z) = j \frac{1}{Z_0} \sin \beta z u(0) + \cos \beta z i(0) \end{array} \right.$$

## 作业 PROBLEMS 1 - 4

图 1-4-15 所示为矩形波导 H 面的 U 形拐角等效电路,  $X$  是归一化电抗,  $B$  是归一化导纳, 已知:  $X=2$ ,  $B=1$ , 若端接匹配负载, 即  $Z_f=1$ , 问:  $\theta$  为何值时能量传输最佳?

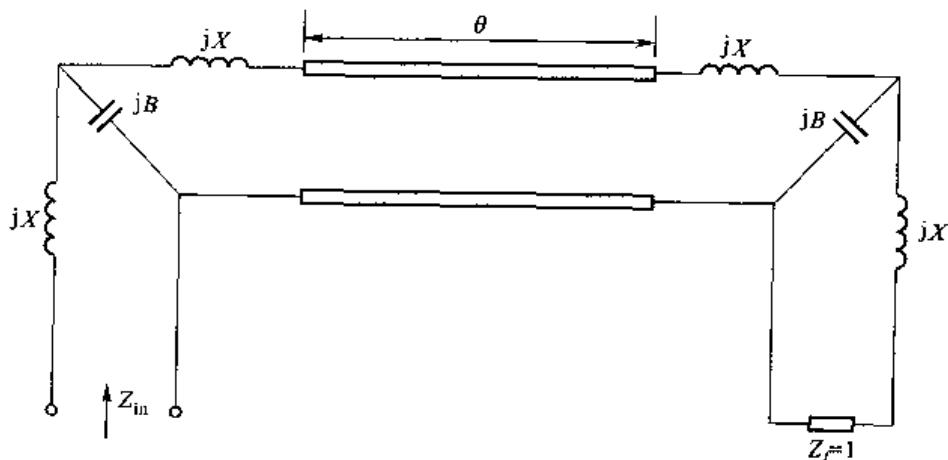


图 1-4-15



## 例题讲解 Problems

### 一、传输线问题的两种解法

前面已经学习了传输线问题的两种解法——微分方程法和矩阵法, 如图 1-5-1 所示。

**方法 1: 微分方程法**——简单地说, 即通解加上边界条件。

通解——是由支配方程决定的, 它反映了事物的普遍性。例如, 对于传输线方程, 不论具体情况如何, 它总是由入射波和反射波构成。

边界条件——反映事物的特殊性。例如, 传输线的边界条件确定了具体情况下入射波和反射波的不同比例或组合。

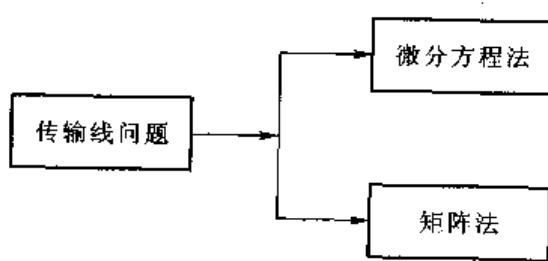


图 1-5-1 传输线问题的两种解法

为了加深这一概念,我们可以观察长江,在四川省的三峡,长江咆哮如虎,而在南京市和镇江市,长江则是一马平川。是否可以这样考虑,从概念上讲,长江符合同一支配微分方程。它们在各地的不同表现完全由当地的边界条件决定。

可以有趣地指出,文章也与边界条件有关,大文豪苏轼说过:“吾文如万斛泉源,不择地而出。在平地滔滔汩汩,虽一日千里无难。及其与山石曲折,随物赋形而不可知也。”大家看写得多么具体,这里的边界条件即当时的时势。

**方法 2:矩阵法**——强调输入、输出的变换关系,对于传输线段,有

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & jZ_0 \sin \theta \\ j\frac{1}{Z_0} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1-5-1)$$

微分方程法正好孕育着本征模思想,而矩阵法则对应网络思想。

传输线问题中,原来的一次特征参数是  $L, C$ ,求解出的二次特征参数是  $Z_0, \beta$ ,工作参数是  $\Gamma, Z, \rho$ ,它们之间的转化关系如表 1-5-1 所示。

表 1-5-1 传输线工作参数间的相互转化关系

	反射系数 $\Gamma(z')$	阻抗 $Z(z')$	$\rho$
$\Gamma(z')$	$\Gamma(z') = \frac{u^-(z')}{u^+(z')} = \Gamma_0 e^{-j\beta z'}$	$\Gamma(z') = \frac{Z(z') - Z_0}{Z(z') + Z_0}$	$ \Gamma(z')  = \frac{\rho - 1}{\rho + 1}$
$Z(z')$	$Z(z') = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')}$	$Z(z') = \frac{u(z')}{i(z')} = Z_0 \frac{Z_i + jZ_0 \tan \theta}{Z_i + jZ_0 \tan \theta}$	$Z(z') = Z_0 \frac{1 + j\rho \tan \beta(z' + \Delta z)}{\rho + j \tan \beta(z' + \Delta z)}$
$\rho$	$\rho = \frac{1 +  \Gamma(z') }{1 -  \Gamma(z') }$	$\rho = \frac{\sqrt{(R_i + Z_0)^2 + X_i^2} + \sqrt{(R_i - Z_0)^2 + X_i^2}}{\sqrt{(R_i + Z_0)^2 + X_i^2} - \sqrt{(R_i - Z_0)^2 + X_i^2}}$	$\rho = \frac{ u(z') _{\max}}{ u(z') _{\min}}$

## 二、传输线的波类比

传输线的基本解是由入射波和反射波构成的。它与分层介质波有着对应的类比。这是因为它们都具有波动性。

[例 1] 电磁波在平面分层的两种介质中的传播如图 1-5-2 所示,左边有垂直入射波,已知  $E_i(0) = E_0$ ,试导出左、右两区域合成波的表达式,并画出合成波幅值  $|E(z)|$  的分布图。

[解] 先分区写出一般解的形式

$$\begin{cases} E(z) = E_{i0} e^{-j\mu z} + E_{r0} e^{j\mu z} \\ H(z) = H_{i0} e^{-j\mu z} - H_{r0} e^{j\mu z} \end{cases} \quad z \leq 0 \text{ 区域}$$

$$\begin{cases} E(z) = E_{i0} e^{-j\mu z} \\ H(z) = H_{i0} e^{-j\mu z} \end{cases} \quad z \geq 0 \text{ 区域}$$

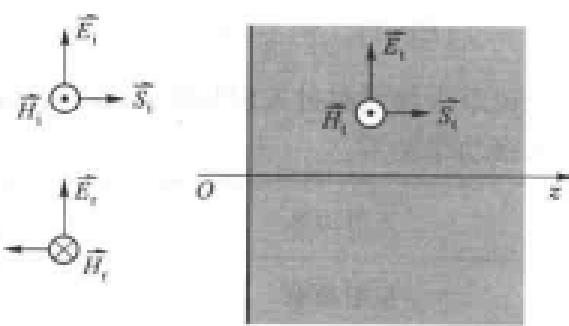


图 1-5-2 无限大界面处电磁波的传播

一般解的写出是基于任何区域解都是由入射波加反射波构成的,所不同的是在  $z \geq 0$  区域无反射波。

再考虑分层界面条件( $z=0$  处电磁场切向分量连续)

$$\begin{cases} E_0 + E_{r0} = E_0 \\ H_0 - H_{r0} = H_0 \end{cases}$$

于是有

$$\frac{E_0 + E_{r0}}{H_0 - H_{r0}} = \frac{E_0}{H_0}$$

又

$$\begin{cases} \frac{E_0}{H_0} = \frac{E_0}{H_{r0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_1 \\ \frac{E_0}{H_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_2 \\ \frac{(E_0 + E_{r0})}{(E_0 - E_{r0})} \eta_1 = \eta_2 \\ \begin{cases} E_{r0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_0 = -\frac{1}{3} E_0 \\ E_{r0} = \frac{2 \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_0 = \frac{2}{3} E_0 \end{cases} \end{cases}$$

左边区域合成场

$$E(z) = E_0 e^{-j k z} - \frac{1}{3} E_0 e^{j k z} = \frac{2}{3} E_0 (\cos k z - j 2 \sin k z)$$

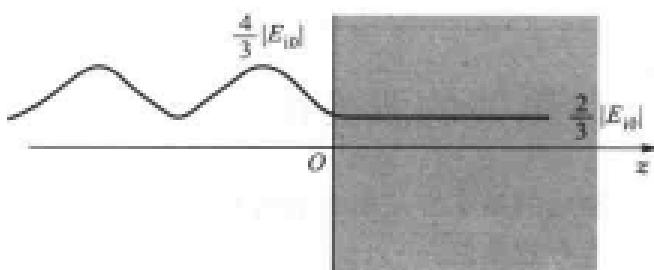
$$|E(z)| = \frac{2}{3} |E_0| \sqrt{1 + 3 \sin^2 k z}$$

而右边区域的合成场

$$E(z) = \frac{2}{3} E_0 e^{-j k z}$$

$$|E(z)| = \frac{2}{3} |E_0|$$

如图 1-5-3 所示,可以明显看出,左边区域的最大场强是



$$|E(z)|_{\max} = \frac{4}{3} |E_0|$$

图 1-5-3 无限大界面附近电场强度幅值的分布

也就是说最大场强超过入射场强  $|E_0|$ 。这并不违反能量守恒定律。

考察功率关系:

入射功率	$P_i = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta_1}$
反射功率	$P_r = \frac{1}{2} \frac{E_{r0}^2}{\eta_1} = \frac{1}{9} \left( \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta_1} \right)$
透射功率	$P_t = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta_1} - \frac{8}{9} \left( \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta_1} \right)$
	$P_i - P_r = P_t$

这个例子的实际应用背景有探地和警报器等实际应用。

### 三、行驻波佯谬

行驻波条件下,电压和电流一般表示式为

$$\begin{cases} u(z') = U_t^+ (e^{j\beta z'} + \Gamma_t e^{-j\beta z'}) \\ i(z') = I_t^+ (e^{j\beta z'} - \Gamma_t e^{-j\beta z'}) \end{cases}$$

至少可以有两种不同的分解方法。

分解方法 I (本章内容)	分解方法 II
$u(z') = U_t^+ (1 -  \Gamma_t ) e^{j\beta z'}$ $+ j2U_t^+  \Gamma_t  e^{-j\frac{1}{2}(\varphi_t - \varphi_s)} \sin \beta(z' + \Delta z)$ $i(z') = I_t^+ (1 -  \Gamma_t ) e^{j\beta z'}$ $+ j2I_t^+  \Gamma_t  e^{-j\frac{1}{2}(\varphi_t - \varphi_s)} \cos \beta(z' + \Delta z)$	$u(z') = U_t^+ (1 -  \Gamma_t ) e^{j\beta z'}$ $+ 2\Gamma_t U_t^+ \cos \beta z'$ $i(z') = I_t^+ (1 -  \Gamma_t ) e^{j\beta z'}$ $+ 2\Gamma_t I_t^+ \cos \beta z'$

事实上,上面两种分解都是形式上的。但是有的教材上认为公式中的第一项表示行波,第二项表示(全)驻波。这个概念是完全错误的。先考察分解方法 II,当  $\Gamma_t = -1$ (即全驻波情况下)时,第一项所谓“行波”场为  $2U_t^+ e^{j\beta z'}$ ,这显然是有问题的。

再看分解方法 I 的第一项电压与电流形成的功率

$$P = \frac{|U_t^+|^2}{Z_0} (1 - |\Gamma_t|)^2 \neq P_i - P_r$$

究其原因,不论把行驻波的电压、电流如何分解,都做不到第一项的电压与第二项的电流(或第二项的电压与第一项的电流)不产生相互作用,继而形成实功率。

结论:行驻波场无法分解成行波场+驻波场。

### 四、阻抗问题

阻抗是传输线问题中最重要的参数之一,其最重要的相关公式可以归结如下:

任意位置输入阻抗和负载阻抗间的关系	输入阻抗和驻波系数之间的关系
$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_t + jZ_0 \tan \beta z'}{Z_0 + jZ_t \tan \beta z'}$ $Z_t = Z_0 \frac{Z_{in} - jZ_0 \tan \beta z'}{Z_0 - jZ_{in} \tan \beta z'}$	$Z(z') = Z_0 \frac{1 + j\beta \tan \beta(z' + \Delta z)}{\rho + j\tan \beta(z' + \Delta z)}$ $Z_t = Z_0 \frac{1 + \Gamma_t}{1 - \Gamma_t} \quad \Gamma_t = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}$ $\rho = \frac{ u _{max}}{ u _{min}} = \frac{1 +  \Gamma_t }{1 -  \Gamma_t }$
当两点间的距离 $z' = \frac{1}{2}\lambda_s$ 时,则 $Z_{in} = Z_t$	$Z_t = R_t > Z_0 \quad \rho = \frac{R_t}{Z_0}$
当两点间的距离 $z' = \frac{1}{4}\lambda_s$ 时,则 $Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_t}$	$Z_t = R_t < Z_0 \quad \rho = \frac{Z_0}{R_t}$

## 1. 阻抗变换问题

[例 2] 典型的两个例子的求解如表 1-5-2 中左、右两列所示。

表 1-5-2 例 2 表

<p>求解如图所示电路的输入阻抗：</p> <p>采用串并联分析方法,可以得到</p> $\begin{cases} Z_A = 2Z_0 \\ Z_B = \frac{Z_0^2}{\frac{1}{2}Z_0} = 2Z_0 \\ Z_C = Z_0 \end{cases}$	<p>求解如图所示电路的输入阻抗：</p> <p>采用四分之一波长的阻抗变换的倒数特性,可以得到</p> $Z_A = \frac{(2Z_0)^2}{4Z_0} = Z_0$ <p>到主传输线即为匹配。</p>
<p>采用矩阵法,同样可以得到相同的解：</p> $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ $\bar{Z}_v = \frac{\bar{A}_{11}\bar{Z}_l + \bar{A}_{12}}{\bar{A}_{21}\bar{Z}_l + \bar{A}_{22}} = Z_0 + 1$	<p>采用矩阵法(对 <math>Z_0</math> 归一化),可以得到相同的解：</p> $\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & j2 \\ j\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ $Z_A = \frac{j2}{j\frac{1}{2} \times 4} = \bar{Z}_n = 1$

上面例子都涉及通过传输线变换,把  $Z_l$  变成  $Z_0$ ,这一方法称为阻抗匹配。

2. 采用网络思想求负载阻抗  $Z_l$ 

网络思想是一种非常普遍的处理问题的方法,它将一线性系统用一个由若干端口对外的未知网络表示。例如,图 1-5-4 给出两个端口的网络。

双端口网络总可以用  $A$  表征

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

它由 4 个未知复参量构成。

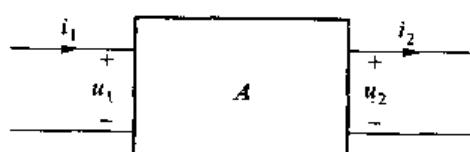


图 1-5-4 网络思想

如果网络互易,由于约束条件只有 3 个未知复参数,所以只要求得这 3 个复参数,即可全部了解该系统。采用不同的输入,测得不同的输出,只需通过三种不同负载的测量即可实现。这种方法就是著名的三点法测量,其原理可以通过下面的例题证明。

[例 3] 无耗传输线段是一种特殊的网络。互易、无耗、对称 3 个约束条件使这个网络只有一个复参数(具体是  $\theta$  和  $Z_0$ )。试证明三点法公式

$$Z_l = Z_{in}^{\text{sc}} \frac{Z_{in}^{\text{sc}} - Z_{in}}{Z_{in} + Z_{in}^{\text{sc}}}$$

[证明] 由一般公式

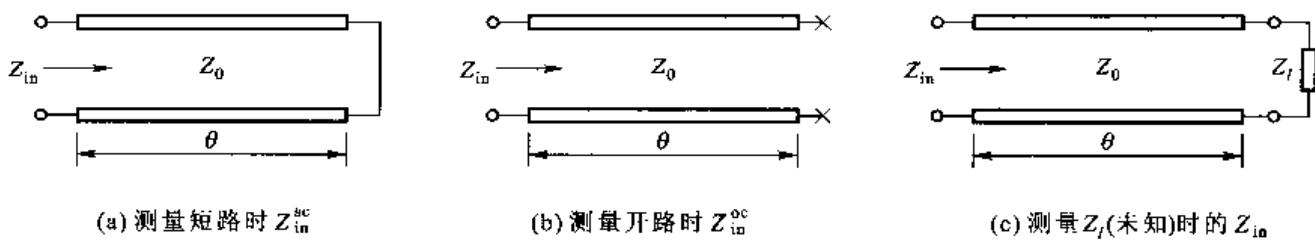


图 1-5-5 例 3 图

$$Z(\theta) = Z_0 \frac{Z_t + jZ_0 \tan \theta}{Z_0 + jZ_t \tan \theta}$$

也即

$$Z_{in} = -jZ_0 \operatorname{ctan} \theta \frac{Z_t + jZ_0 \tan \theta}{-jZ_0 \operatorname{ctan} \theta + Z_t}$$

由于  $Z_{in}^{sc} = jZ_0 \tan \theta$ ,  $Z_{in}^{oc} = -jZ_0 \operatorname{ctan} \theta$ , 代入上式可知

$$Z_t = Z_{in}^{sc} \frac{Z_{in}^{sc} - Z_{in}}{Z_{in} - Z_{in}^{oc}}$$

### 3. 利用最小点(节点)位置 $d_{min}$ 和驻波比 $\rho$ 导出负载阻抗 $Z_t$

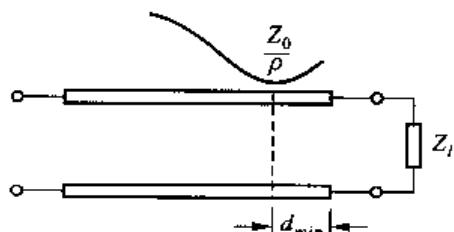
如图 1-5-6 所示, 在行波传输线中, 最小点的阻抗是已知的, 即为  $\frac{Z_0}{\rho}$ 。利用这点与负载的距离, 可求出  $Z_t$ 。

离波节点  $z'$  处的输入阻抗

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + j\rho \tan \beta z'}{\rho + j \tan \beta z'}$$

只需进行替换  $z' \rightarrow -d_{min}$ ,  $Z_i \rightarrow Z_{in}$ , 即有

$$Z_t = Z_0 \frac{1 - j\rho \tan \beta d_{min}}{\rho - j \tan \beta d_{min}}$$

图 1-5-6 利用  $d_{min}$  和  $\rho$  求  $Z_t$ 

注意: 实际测量中可以用短路片找到负载的周期位置。

## 附录 APPENDIX

### 行驻波场讨论

在行驻波情况下, 电压、电流的最一般分解可写为

$$\begin{cases} u(z') = U_l^+ (1 - A) e^{j\beta z'} + U_l^- (A e^{j\beta z'} + \Gamma_l e^{-j\beta z'}) \\ i(z') = I_l^+ (1 - A) e^{j\beta z'} + I_l^- (A e^{j\beta z'} - \Gamma_l e^{-j\beta z'}) \end{cases}$$

其中,  $A$  是一般的复参数, 则实功率分成三部分

$$\text{第一部分场 } P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} U_l^+ I_l^- * |1 - A|^2 = P_i |1 - A|^2$$

$$\text{第二部分场 } P_{II} = P_i (|A|^2 - |\Gamma_l|^2)$$

$$\text{交叉场 } P_{I\perp II} = P_i * 2 \operatorname{Re} [(1 - A)^* A]$$

可见除去  $A=0$ , 一般总有交叉场功率, 作为例子

$$\begin{cases} u(z) = U_t^+ \sqrt{1 - |\Gamma_t|^2} e^{j\beta z} + U_t^+ [(1 - \sqrt{1 - |\Gamma_t|^2}) e^{j\beta z} + \Gamma_t e^{-j\beta z}] \\ i(z) = I_t^- \sqrt{1 - |\Gamma_t|^2} e^{j\beta z} + I_t^- [(1 - \sqrt{1 - |\Gamma_t|^2}) e^{j\beta z} - \Gamma_t e^{-j\beta z}] \end{cases}$$

这种情况下, 初看起来第一项似乎是行波场, 但实际上第二项功率不为 0

$$P_{\perp\parallel} = -[2 \sqrt{1 - |\Gamma_t|^2} (1 - \sqrt{1 - |\Gamma_t|^2})] P_i$$

因此, 它肯定不是驻波。

交叉项

$$P_{\perp\perp} = -P_{\parallel\parallel} = 2 \sqrt{1 - |\Gamma_t|^2} (1 - \sqrt{1 - |\Gamma_t|^2}) P_i$$

可见符合功率关系。

由此可知, 不能把行驻波场分解成行波场 + 驻波场。

## 作业 PROBLEMS 1-5

用公式求解下列各题。

- ① 已知阻抗  $Z = 50 - j50$ ,  $Z_0 = 50$ , 求导纳  $Y$ 。
- ② 已知阻抗  $Z = 1 + j$ , 求反射系数  $\Gamma$  和驻波比  $\rho$ 。
- ③ 已知  $Z_t = 100 + j50$ ,  $Z_0 = 50$ , 离负载距离  $l = 0.24\lambda_g$  处, 求  $Z_{in}$ 。
- ④ 在  $Z_0$  为  $50 \Omega$  的无耗传输线上,  $\rho = 5$ , 电压波节点距负载  $\lambda_g/3$ , 求负载阻抗  $Z_t$ 。

1-6

## Smith 圆图 Smith Chart

在微波工程中, 最基本的运算是计算工作参数  $\Gamma$ 、 $Z$ 、 $\rho$  之间的关系, 它们是在已知特征参数  $Z_0$ 、 $\beta$  和长度  $l$  的基础上进行计算的。

Smith 圆图是把特征参数和工作参数组合成一体, 采用图解法进行微波传输研究的一种专用圆图。自 20 世纪 30 年代出现以来, 已历经 60 年而不衰, 可见其简单、方便和直观。

### 一、Smith 圆图的基本思想

Smith 圆图, 亦称阻抗圆图, 它是求解微波传输的图解方法。其基本思想有三条:

1. 特征参数归一思想

特征参数归一思想是形成统一 Smith 圆图的最关键点, 它使圆图的应用更加普遍、更加统一。归一思想包含了阻抗归一和电角度归一(有时也称为电长度归一)。

阻抗归一

$$\bar{Z}(z') = \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')}$$

$$\bar{Z}(z') = \frac{Z(z')}{Z_0}$$

$$\Gamma(z') = \frac{Z(z') - 1}{\bar{Z}(z') + 1}$$

电角度归一

$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda_g} l = \frac{360^\circ}{\lambda_g} l$$

阻抗千变万化, 极难统一表述。现在用  $Z_0$  归一, 统一起来作为一种情况加以研究。在应用中可以简单地认为  $Z_0 = 1$ 。

电角度归一不仅包含了特征参数  $\beta$ , 而且隐含了角频率  $\omega$ 。

由于上述两种归一使特征参数  $Z_0$  不见了, 而另一特征参数  $\beta$  连同长度均转化为反射系数  $\Gamma$  的角度。

### 2. 采用 $|\Gamma|$ 作为 Smith 圆图的基底

因为在无耗传输线中,  $|\Gamma|$  是系统的不变量。所以以  $|\Gamma|$  从 0~1 的同心圆作为 Smith 圆图的基底, 使我们可能在一有限空间内表示全部工作参数  $\Gamma$ 、 $Z(z')$  和  $\rho$ 。

$$\Gamma(z') = \Gamma_t e^{-j2\beta z'} = |\Gamma_t| e^{j(\varphi_t - 2\beta z')} = |\Gamma_t| e^{j\varphi} \quad (1-6-1)$$

$\varphi$  的周期是  $2\pi$ , 其长度对应  $\frac{1}{2}\lambda_g$ 。这种以  $|\Gamma|$  圆为基底的图形称为 Smith 圆图。

### 3. 把阻抗(或导纳)和驻波比关系套覆在 $|\Gamma|$ 圆上

这样, Smith 圆图的基本思想可描述为: 消去特征参数  $Z_0$ , 把  $\beta$  归于  $\Gamma$  的相位, 工作参数  $\Gamma$  为基底, 套覆  $Z(z')$  和  $\rho$ 。

## 二、Smith 圆图的基本构成

### 1. 反射系数 $\Gamma$ 为圆图基底

反射系数  $\Gamma$  圆最重要的概念是相角走向。

$$\Gamma(z') = \Gamma_t e^{-j2\beta z'}$$

式中  $z'$  是向电源的。因此, 向电源是反射系数的负角方向; 反之, 向负载是反射系数的正角方向, 如图 1-6-1 所示。

### 2. 套覆阻抗圆

$$\text{已知} \quad \bar{Z}(z') = \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')} \quad (1-6-2)$$

$$\text{设} \quad \begin{cases} \Gamma(z') = \Gamma_t + j\Gamma_i \\ \bar{Z}(z') = r + jx \end{cases}$$

且代入式(1-6-2), 有

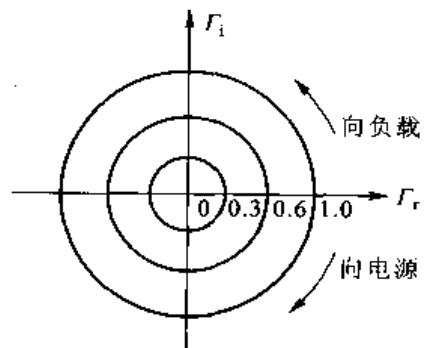


图 1-6-1 反射系数  $\Gamma$  圆

$$r + jx = \frac{1 + (\Gamma_r + j\Gamma_i)}{1 - (\Gamma_r + j\Gamma_i)} = \frac{1 - (\Gamma_r^2 + \Gamma_i^2)}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} + j \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (1-6-3)$$

分开实部和虚部, 得两个方程

$$\begin{cases} r = \frac{1 - (\Gamma_r^2 + \Gamma_i^2)}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \\ x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \end{cases} \quad (1-6-4)$$

先考虑式(1-6-4)中实部方程

$$\begin{aligned} r - 2r\Gamma_r + r\Gamma_r^2 + r\Gamma_i^2 &= 1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2 \\ (1+r)\Gamma_r^2 - 2r\Gamma_r + (1+r)\Gamma_i^2 &= 1 - r \\ \Gamma_r^2 - \frac{2r}{1+r}\Gamma_r + \left(\frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 &= \frac{1-r}{1+r} + \frac{r^2}{(1+r)^2} \end{aligned}$$

得到如图 1-6-2 所示的等电阻圆方程

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \quad (1-6-5)$$

相应的圆心坐标是  $\left(\frac{r}{1+r}, 0\right)$ , 而半径是  $\frac{1}{1+r}$ , 圆心在实轴上。考虑到

$$\frac{r}{1+r} + \frac{1}{1+r} = 1 \quad (1-6-6)$$

电阻圆始终和直线  $\Gamma_r = 1$  相切。下表中给出不同  $r$  值时, 等电阻圆的变化情况, 对应的等电阻圆如图 1-6-2 所示。

$r$	圆心坐标		半径 $\frac{1}{1+r}$
	实部 $= \frac{r}{1+r}$	虚部 $= 0$	
0	0	0	1
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

由式(1-6-4)的虚部方程又可得到方程

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \Gamma_i^2 - \frac{2}{x}\Gamma_i = 0$$

也即

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad (1-6-7)$$

式(1-6-7)是等电抗圆方程, 其圆心是  $(1, \frac{1}{x})$ , 半径是

$\left|\frac{1}{x}\right|$ 。下表中给出不同  $x$  值时, 等电抗圆的变化情况, 对

应的等电抗圆如图 1-6-3 所示。

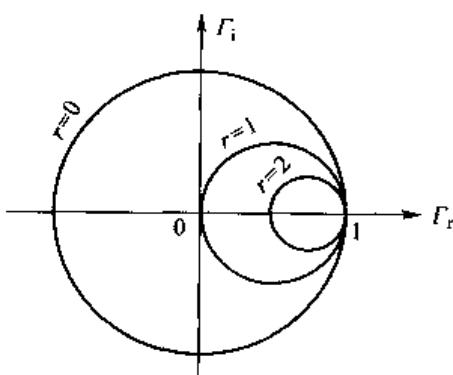


图 1-6-2 等电阻圆

x	圆心坐标		半径 $\left  \frac{1}{x} \right $
	实部 = 1	虚部 $-\frac{1}{x}$	
0	1	$\infty$	$\infty$
$\pm 0.5$	1	$\pm 2$	2
$\pm 1$	1	$\pm 1$	1

### 3. 标定电压驻波比 $\rho$

实轴表示阻抗纯阻点,因此,可由电阻  $r$  对应出电压驻波比  $\rho$ ,如图 1-6-4 所示。因为电压驻波比  $\rho$  对应  $r > 1$  的等电阻圆与实轴  $\Gamma_r$  的交点,因此容易导出

$$\rho = \frac{1 + \Gamma_r}{1 - \Gamma_r} \quad (1-6-8)$$

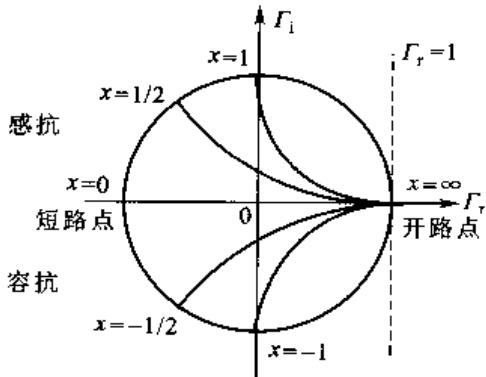


图 1-6-3 等电抗圆

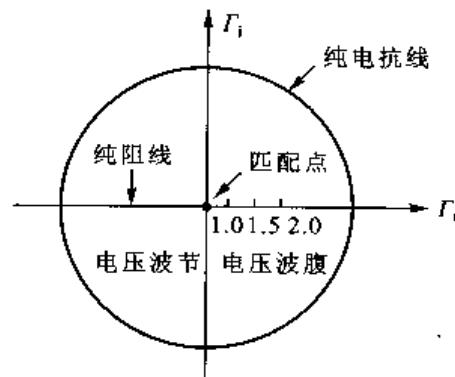


图 1-6-4  $\rho$  的 Smith 圆图

### 4. 导纳情况

$$\bar{Y}(z') = \frac{1 - \Gamma(z')}{1 + \Gamma(z')} \quad (1-6-9)$$

令  $\bar{Y}(z') = g + jb$ , 完全类似, 可导出电导圆方程

$$\left( \Gamma_r + \frac{g}{1+g} \right)^2 + \Gamma_i^2 = \left( \frac{1}{1+g} \right)^2 \quad (1-6-10)$$

其中, 圆心坐标是  $\left( \frac{-g}{1+g}, 0 \right)$ , 半径为  $\frac{1}{1+g}$ 。考虑到

$$-\frac{g}{1+g} - \frac{1}{1+g} = -1 \quad (1-6-11)$$

等电导圆与直线  $\Gamma_r = -1$  相切, 如图 1-6-5 所示。

也可导出电纳圆方程

$$(1 + \Gamma_r)^2 + \left( \Gamma_i + \frac{1}{b} \right)^2 = \left( \frac{1}{b} \right)^2 \quad (1-6-12)$$

其圆心是  $\left( -1, -\frac{1}{b} \right)$ , 半径是  $\left| \frac{1}{b} \right|$ , 也可对应画出等电纳曲线, 如图 1-6-6 所示。

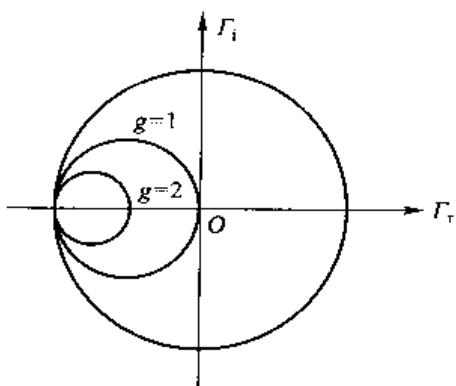


图 1-6-5 等电导圆

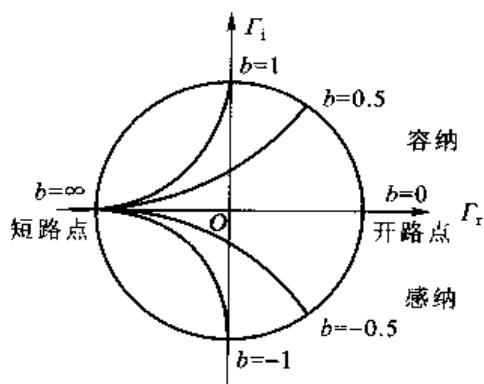


图 1-6-6 等电纳圆

在实际计算时,要用到导纳(特别是对于并联枝节)。对比阻抗和导纳,在归一化情况下,恰好是反演关系。

非归一情况

$$Z_{in}\left(z' + \frac{1}{4}\lambda_g\right) = \frac{Z_0^2}{Z(z')} \quad (1-6-13)$$

归一情况

$$Z_{in}\left(z' + \frac{1}{4}\lambda_g\right) = \frac{1}{\bar{Z}(z')} \quad (1-6-13)$$

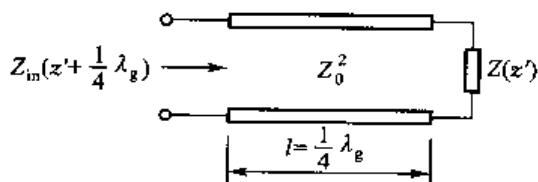
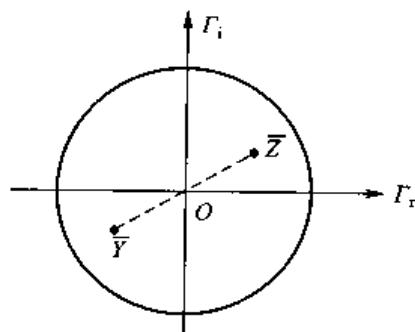
注意到导纳  $\bar{Y}(z')$  与阻抗  $\bar{Z}(z')$  的关系

$$\bar{Y}(z') = \frac{1}{\bar{Z}(z')} \quad (1-6-14)$$

对应如图 1-6-7 所示的  $\frac{1}{4}\lambda_g$  阻抗变换,可知

$$Z_{in}\left(z' + \frac{1}{4}\lambda_g\right) = \frac{1}{\bar{Y}(z')} \quad (1-6-15)$$

也即导纳  $\bar{Y}(z')$  是由 Smith 圆图旋转  $180^\circ$  而成的阻抗  $\bar{Z}_{in}$ ,如图 1-6-8 所示。

图 1-6-7  $\frac{1}{4}\lambda_g$  阻抗变换图 1-6-8 阻抗  $\bar{Z}$  反演——导纳  $\bar{Y}$ 

Smith 圆图是阻抗、导纳兼用的。在作导纳圆图时,注意上半平面是容纳,下半平面是感纳。由于  $R$  面不变,所以短路点和开路点不变。

### 三、Smith 圆图的基本功能

Smith 圆图的基本功能可以归纳为以下四类:

- ① 已知阻抗  $\bar{Z}$ , 求导纳  $\bar{Y}$ (或逆问题)。
- ② 已知阻抗  $\bar{Z}$ , 求反射系数  $\Gamma$  和  $\rho$ (或逆问题)。
- ③ 已知负载阻抗  $\bar{Z}_l$  和  $\theta$ , 求输入阻抗  $Z_{in}$ 。
- ④ 已知驻波比  $\rho$  和最小点  $d_{min}$ , 求  $\bar{Z}_l$ 。

下面采用相应的例题来具体讲述以上的各个功能。

[例 1] 已知阻抗  $Z = (50 + j50) \Omega$ ,  $Z_0 = 50 \Omega$ , 求导纳  $Y$ 。

[解] 如图 1-6-9 所示,首先进行阻抗归一化并找到相应的导纳值  $\bar{Y} = \frac{1}{2}(1 - j)$ , 然后进行反归一并得到导纳值  $Y = \frac{\bar{Y}}{Z_0} = 0.01(1 - j) S$ 。

[例 2] 已知阻抗  $Z = 1 + j$ , 求反射系数  $\Gamma$  和  $\rho$ 。

[解] 如图 1-6-10 所示,首先在圆图上找到归一化阻抗的对应点,利用等反射系数  $|\Gamma|$  对系统处处有效,可以得到  $\rho = 2.60$ , 则有

$$|\Gamma| = \frac{\rho - 1}{\rho + 1} = 0.444$$

$$\varphi = \frac{0.088}{0.5} \times 360^\circ = 63.36^\circ$$

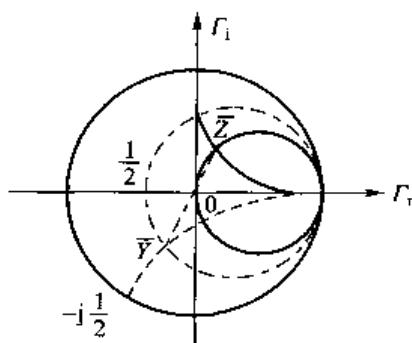


图 1-6-9 例 1 图

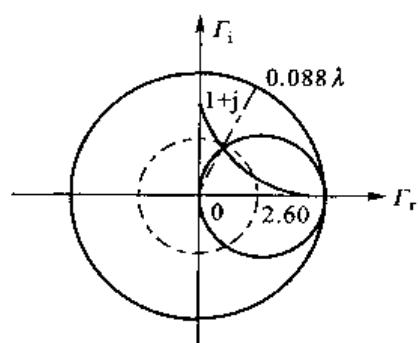


图 1-6-10 例 2 图

注意: 在考虑到反射系数  $\Gamma$  相角时,  $360^\circ$  对应  $0.5\lambda_g$ , 即一个圆周表示二分之一波长。

[例 3] 在图 1-6-11 所示的电路中,已知  $Z_l = (100 + j50) \Omega$ ,  $Z_0 = 50 \Omega$ , 距负载  $l = 0.24\lambda_g$  处求  $Z_{in}$ 。

[解] 如图 1-6-12 所示首先将负载归一化  $\bar{Z}_l = 2 + j1$ , 并在圆图上找到相应点,并向电源方向旋转  $0.24\lambda_g$ , 找到对应的输入阻抗

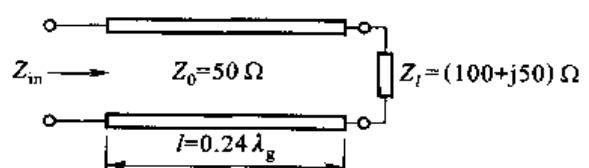


图 1-6-11 例 3 图

$$\bar{Z}_{in} = 0.42 - j0.25$$

然后进行反归一化, 得到

$$Z_{in} = \bar{Z}_{in} Z_0 = (21 - j12.5) \Omega$$

[例 4]  $Z_0$  为  $50\Omega$  的无耗传输线, 已知电压驻波比  $\rho=5$ , 电压波节点距负载  $\lambda_g/3$ , 求负载阻抗  $Z_t$ 。

[解] 如图 1-6-13 所示, 找到对应的波节点

$$Z_{\min} = \frac{1}{\rho} = 0.2$$

向负载旋转  $0.33\lambda_g$  得到

$$\bar{Z}_t = 0.77 + j1.48$$

反归一化后, 可以得到

$$Z_t = Z_t Z_0 = (38.5 + j74)\Omega$$

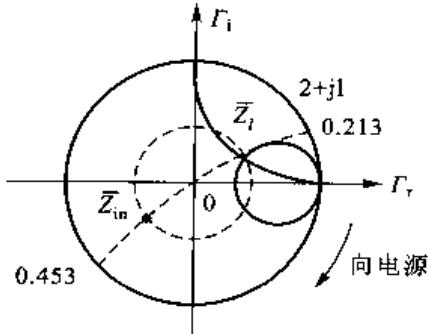


图 1-6-12 例 3 解图

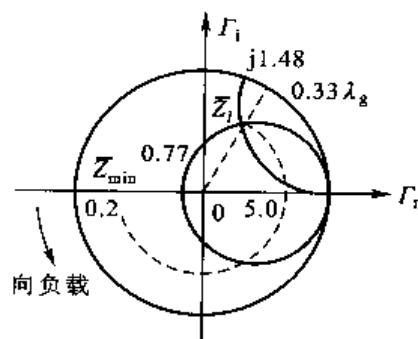


图 1-6-13 例 4 图

## 作业 PROBLEMS 1-6

① 已知特性阻抗  $Z_0 = 50\Omega$ , 负载阻抗  $Z_t = (50 + j35)\Omega$ , 工作波长  $\lambda_g = 10\text{ m}$ , 线长  $l = 12\text{ m}$ 。试求:

- (1) 沿线的  $\rho$ 、 $|\Gamma|$ 。
- (2) 求沿线等效阻抗的极值, 并判断距离负载最近的极值是最大还是最小, 它与负载距离是多少?
- (3) 输入阻抗和输入导纳。

试用计算和查 Smith 圆图两种方法做。

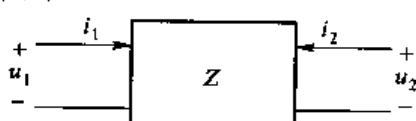
② 已知传输线特性阻抗  $Z_0 = 50\Omega$ , 负载阻抗  $Z_t = (50 + j35)\Omega$ , 工作波长  $\lambda_g = 10\text{ m}$ , 线长  $l = 12\text{ m}$ 。试求:

- (1) 沿线的  $\rho$  和  $|\Gamma|$ 。
- (2) 传输线上纯电阻阻抗的大小与位置, 它与负载的距离。
- (3) 输入阻抗  $Z_{in}$  和输入导纳  $Y_{in}$ 。

试用计算和 Smith 圆图两种方法做。

③ 如图 1-6-14 所示, 可以把电压  $u$  和电流  $i$  用阻抗矩阵联系起来, 即

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$



请注意在这种情况下  $i_1$  和  $i_2$  的对称定义。

(1) 证明: 在互易时有  $Z_{12} = Z_{21}$ 。

图 1-6-14 电路的阻抗矩阵

(2) 证明  $Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{12} + Z_t}$ 。其中  $Z_{in} = \frac{u_1}{i_1}$  表示输入阻抗,  $Z_t = -\frac{u_2}{i_2}$  表示负载阻抗。

(3) 若已知  $Z_t = 0$  时, 终端短路时的输入阻抗值为  $Z_{in}^*$ ;  $Z_t = \infty$  时, 终端开路时的输入阻抗值为  $Z_{in}^*$ ;  $Z_t = Z_0^*$  时, 终端接  $Z_0^*$  时的输入阻抗值为  $Z_{in}^A$ 。求  $Z_{11}$ 、 $Z_{12}$  和  $Z_{22}$  (设网络互易)。

1-7

## 阻抗匹配 Impedance Matching

有人说,微波工程就是微波匹配技术,这话虽然显得过于偏颇,但其中仍透出匹配之重要性;匹配可以使系统调到最佳状态,匹配可以使负载获取最大的功率。

在低频中,最大功率输出定理在电路匹配中占有很重要的地位。

[定理] 如图 1-7-1 所示,若满足

$$Z_t = Z_g^* \quad (1-7-1)$$

则电源达到最大功率输出,即

$$P_t = P_{\max} = \frac{|E_g|^2}{8 \operatorname{Re}(Z_g)} \quad (1-7-2)$$

[证明] 根据欧姆定律

$$I = \frac{E_g}{Z_g + Z_t} = \frac{E_g}{(R_g + R_t) + j(X_g + X_t)} \quad (1-7-3)$$

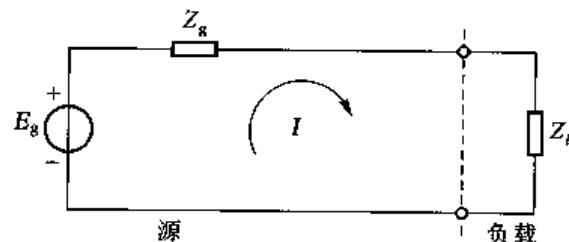


图 1-7-1 最大功率输出定理

而负载吸收的实功率为

$$P_t = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} I I^* R_t \right) = \frac{1}{2} \frac{|E_g|^2 R_t}{(R_g + R_t)^2 + (X_g + X_t)^2} \quad (1-7-4)$$

(1) 首先注意到分母 D 恒正,当

$$X_g + X_t = 0 \quad (1-7-5)$$

时,达到分母的最小值,即  $D_{\min}$

(2) 这时

$$P_t = \frac{1}{2} \frac{|E_g|^2 R_t}{(R_g + R_t)^2} \quad (1-7-6)$$

取  $P_t$  极值

$$2 \frac{dP_t}{dR_t} = |E_g|^2 \frac{(R_g + R_t)^2 - 2R_t(R_g + R_t)}{(R_g + R_t)^4} = 0 \quad (1-7-7)$$

也即相当于

$$R_g^2 - R_t^2 = 0 \quad (1-7-8)$$

由于电阻恒正,有

$$R_g = R_t \quad (1-7-9)$$

综合起来,得

$$Z_t = Z_g^* \quad (1-7-10)$$

即所谓共轭匹配,且

$$P_{\max} = \frac{|E_s|^2}{8\operatorname{Re}(Z_s)} \quad (1-7-11)$$

## 一、匹配网络特性

这里给出一般的匹配网络特性。有一个负载  $Z_l$ ,它和电源  $Z_s$  不匹配。为此,在电源和负载之间加上一个无耗匹配网络。它能完成两个任务:第一是获得系统匹配,使电源把最大功率传输到负载;第二是匹配网络本身不消耗功率。它将满足如下条件。

[定理] 在源和负载间插入无耗互易匹配网络,如图 1-7-2 所示。当系统达到匹配时,有  $Z_{in} = Z_s^*$ ,则必有

$$Z'_{in} = Z_l^* \quad (1-7-12)$$



图 1-7-2 匹配网络特性

[证明] 按照式(1-4-18)给出的无耗网络的条件,首先令无耗网络矩阵  $A$  中各个参数为

$$A_{11} = a_{11} \quad A_{12} = ja_{12}$$

$$A_{22} = a_{22} \quad A_{21} = ja_{21}$$

$$Z_{in} = \frac{a_{11}Z_l + ja_{12}}{ja_{21}Z_l + a_{22}}$$

根据最大功率输出定理,可以把  $Z_{in}$  看做广义负载,即

$$Z_{in} = Z_s^* \quad (1-7-13)$$

于是有

$$Z_l = \frac{a_{22}Z_s^* - ja_{12}}{-ja_{21}Z_s^* + a_{11}} \quad (1-7-14)$$

或者说

$$Z_l^* = \frac{a_{22}Z_s + ja_{12}}{ja_{21}Z_s + a_{11}} \quad (1-7-15)$$

上式已考虑了  $a_{11}$ 、 $a_{22}$ 、 $a_{12}$  和  $a_{21}$  为实数的条件。

另一方面,如图 1-7-3 所示,从网络输出端向电源看

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \quad (1-7-16)$$

以及

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$

代入网络互易条件  $\det A = 1$ ,得

$$\begin{cases} u_2 = A_{22}u_1 + A_{12}(-i_1) \\ (-i_2) = A_{21}u_1 + A_{11}(-i_1) \end{cases} \quad (1-7-17)$$

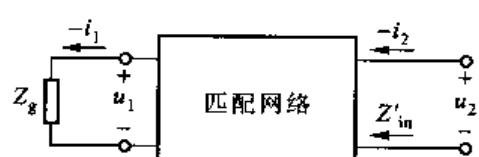


图 1-7-3 逆向网络特性

考虑到

$$Z'_{in} = \frac{u_2}{(-i_2)}, Z'_t = \frac{u_t}{(-i_1)} = Z_g \quad (1-7-18)$$

$$Z'_{in} = \frac{a_{22}Z_g + ja_{12}}{ja_{21}Z_g + a_{11}} \quad (1-7-19)$$

从而证明了

$$Z'_{in} = Z_t^* \quad (1-7-20)$$

如果网络是一段特性阻抗为  $Z_0$  的传输线

$$\begin{cases} Z_g = Z_0 \\ Z_t = Z_0 \end{cases}$$

可以达到无反射匹配,称为行波匹配,如图 1-7-4 所示。

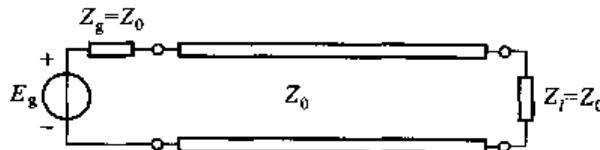


图 1-7-4 行波匹配

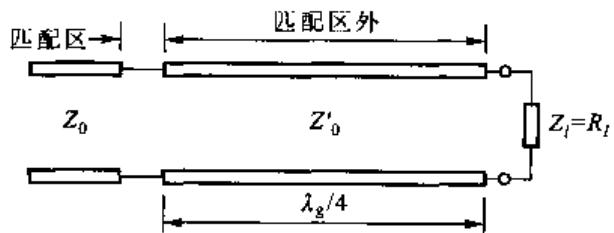


图 1-7-5  $\frac{1}{4}\lambda_g$  匹配段

## 二、电阻性负载匹配

阻抗匹配大致分成两大类: 电阻性负载匹配和任意负载匹配。

电阻性负载的匹配对象是:  $Z_t = R_t \neq Z_0$ 。

调节参数为  $\frac{1}{4}\lambda_g$  段的特性阻抗  $Z'_0$ 。

如图 1-7-5 所示, 可以得到

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & jZ'_0 \sin \theta \\ j\frac{1}{Z'_0} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & jZ'_0 \\ j\frac{1}{Z'_0} & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_{in} = \frac{Z'^2_0}{Z_t} = \frac{Z'^2_0}{R_t} = Z_0$$

或者写成

$$Z'_0 = \sqrt{Z_0 R_t}$$

特别注意:所有匹配问题,在匹配区外是存在驻波的。

[定理] 电抗性负载  $Z_t = R_t + jX_t$

$$\text{通过 } \theta = -\frac{1}{2} \left[ \arctan\left(\frac{X_t}{Z_0 + R_t}\right) + \arctan\left(\frac{X_t}{Z_0 - R_t}\right) \right]$$

转换成纯阻,如图 1-7-6 所示。

$$R'_t = \frac{\sqrt{(Z_0 + R_t)^2 + X_t^2} - \sqrt{(Z_0 - R_t)^2 + X_t^2}}{\sqrt{(Z_0 + R_t)^2 + X_t^2} + \sqrt{(Z_0 - R_t)^2 + X_t^2}} Z_0$$

因为这个问题前面已经讨论过,此处不再论述。

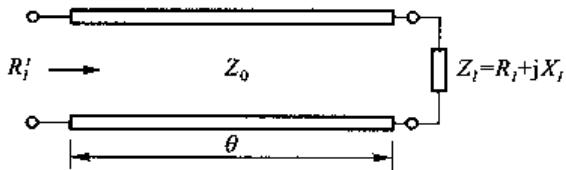


图 1-7-6 电抗性负载向电阻性负载转换段

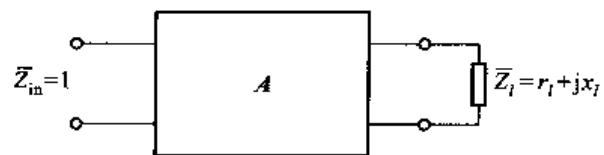


图 1-7-7 网络匹配定理

### 三、电抗性负载匹配

这里的电抗性负载匹配指的是直接用传输线段和并联枝节匹配电抗性负载(不是纯电抗)。

#### 1. 网络匹配定理

首先介绍采用无耗互易网络匹配任意电抗性负载的一般定理,如图 1-7-7 所示。

[定理] 无耗互易网络匹配时网络参数应满足振幅条件

$$(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} - a_{21})^2 = \frac{4|\Gamma_t|^2}{1 - |\Gamma_t|^2} \quad (1-7-21)$$

其中,无耗网络矩阵  $A$  的矩阵参数在归一情况下为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ja_{12} \\ ja_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (1-7-22)$$

且  $a_{11}$ 、 $a_{22}$ 、 $a_{12}$  和  $a_{21}$  均为实数,式(1-7-21)中

$$|\Gamma_t| = \sqrt{\frac{(r_t - 1)^2 + x_t^2}{(r_t + 1)^2 + x_t^2}} \quad (1-7-23)$$

相位条件

$$-\arctan\left(\frac{x_t}{r_t + 1}\right) + \arctan\left(\frac{x_t}{r_t - 1}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{a_{12} + a_{21}}{a_{11} + a_{22}}\right) + \arctan\left(\frac{a_{12} - a_{21}}{a_{11} - a_{22}}\right) \quad (1-7-24)$$

[证明] 匹配网络要求满足约束条件

$$\bar{Z}_m = \frac{a_{11}\bar{Z}_t + ja_{12}}{ja_{21}\bar{Z}_t + a_{22}} = 1 \quad (1-7-25)$$

考虑到  $0 \leq |\Gamma_t| \leq 1$  的有利条件,将上式中  $\bar{Z}_t$  转化为  $\Gamma_t$ ,有

$$\bar{Z}_t = \frac{1 + \Gamma_t}{1 - \Gamma_t} \quad (1-7-26)$$

于是,可重新写出

$$\frac{a_{11}(1 + \Gamma_t) + ja_{12}(1 - \Gamma_t)}{ja_{21}(1 + \Gamma_t) + a_{22}(1 - \Gamma_t)} = 1 \quad (1-7-27)$$

容易得到

$$\Gamma_t = -\frac{(a_{11} - a_{22}) + j(a_{12} - a_{21})}{(a_{11} + a_{22}) - j(a_{12} + a_{21})} \quad (1-7-28)$$

于是有

$$|\Gamma_t|^2 = \frac{(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} - a_{21})^2}{(a_{11} + a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2} \quad (1-7-29)$$

考虑到  $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} = 1$  的互易条件, 进一步有

$$|\Gamma_t|^2 = \frac{1}{1 + \frac{4}{[(a_{11}-a_{22})^2 + (a_{12}-a_{21})^2]}} \quad (1-7-30)$$

即有

$$(a_{11}-a_{22})^2 + (a_{12}-a_{21})^2 = \frac{4|\Gamma_t|^2}{1-|\Gamma_t|^2} \quad (1-7-31)$$

另一方面, 考虑到

$$\Gamma_t = \frac{Z_t - 1}{Z_t + 1} = \frac{(r_t - 1) + jx_t}{(r_t + 1) + jx_t} \quad (1-7-32)$$

又可以得到

$$|\Gamma_t| = \sqrt{\frac{(r_t - 1)^2 + x_t^2}{(r_t + 1)^2 + x_t^2}} \quad (1-7-33)$$

和

$$\varphi_t = -\arctan\left(\frac{x_t}{r_t + 1}\right) + \arctan\left(\frac{x_t}{r_t - 1}\right) \quad (1-7-34)$$

由  $\Gamma_t$  和  $A$  参数关系, 得到相位条件

$$\pi + \arctan\left(\frac{a_{12} + a_{21}}{a_{11} + a_{22}}\right) + \arctan\left(\frac{a_{12} - a_{21}}{a_{11} - a_{22}}\right) = -\arctan\left(\frac{x_t}{r_t + 1}\right) + \arctan\left(\frac{x_t}{r_t - 1}\right) \quad (1-7-35)$$

## 2. 单枝节匹配

单枝节匹配的原理如图 1-7-8 所示。

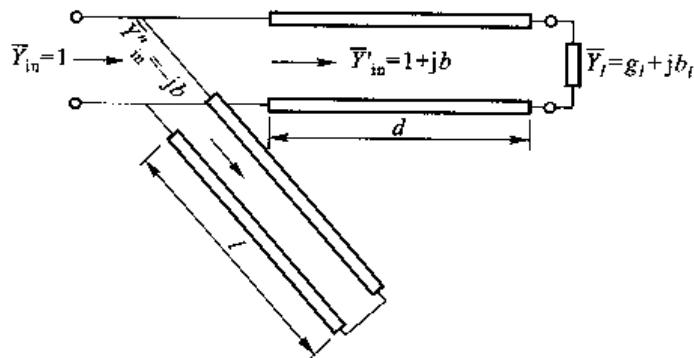


图 1-7-8 单枝节匹配

匹配对象: 任意负载  $Z_l = r_l + jx_l$ , 其中  $r_l \neq 0$ 。

调节参数为枝节距负载距离  $d$  和枝节长度  $l$ 。

分析枝节匹配的方法均采用倒推法——由结果推向原因。另外, 由于短路枝节并联, 全部采用导纳分析更为方便。

结果要求

$$\bar{Y}_{in} = 1.0 + j0 \quad (1-7-36)$$

根据并联网络关系, 有

$$\bar{Y}_{in} = \bar{Y}'_{in} + \bar{Y}''_{in}$$

因此可设

$$\begin{cases} \bar{Y}'_{in} = 1 + jb \\ \bar{Y}_{in} = -jb \end{cases} \quad (1-7-37)$$

利用  $\bar{Y}_i = g_i + jb_i$  和系统的  $|\Gamma|$  不变性, 沿等  $|\Gamma|$  圆转到  $\bar{Y}'_{in} = 1 + jb$ 。专门把  $g=1.0$  的圆称为匹配圆。

单枝节匹配通常有两组解。

[例 1]  $Z_0 = 50 \Omega$  的无耗传输线, 接负载  $Z_i = (25 + j75) \Omega$ , 试采用并联单枝节匹配法进行阻抗匹配。

[解] 并联单枝节匹配图如图 1-7-9 所示。

(1) 负载归一化  $\bar{Z}_i = 0.5 + j1.5$

(2) 采用导纳计算  $\bar{Y}_i = 0.2 - j0.6$  (对应 0.412)

(3) 将  $\bar{Y}_i$  向电源(顺时针)旋转, 与匹配圆( $g=1$ )相交于两点

$$\bar{Y}'_{in(1)} = 1 + j2.2 \quad (\text{对应 } 0.192)$$

$$\bar{Y}'_{in(2)} = 1 - j2.2 \quad (\text{对应 } 0.308)$$

(4) 求出枝节位置

$$\begin{cases} d_1 = [(0.5 - 0.412) + 0.192]\lambda_g = (0.088 + 0.192)\lambda_g = 0.280\lambda_g \\ d_2 = [(0.5 - 0.412) + 0.308]\lambda_g = (0.088 + 0.308)\lambda_g = 0.396\lambda_g \end{cases}$$

(5) 短路枝节长度

由于短路表示  $\bar{Y}_i = \infty$ , 且是纯电纳, 所以要看单位外圆, 如图 1-7-10 所示。

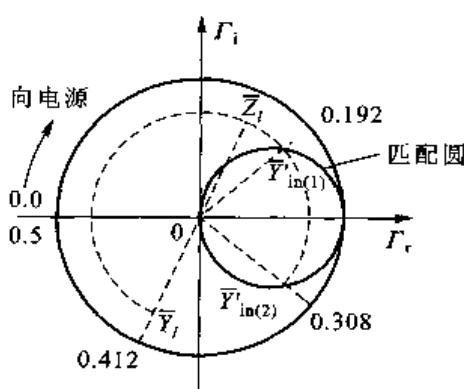


图 1-7-9 并联单枝节  
匹配圆图解

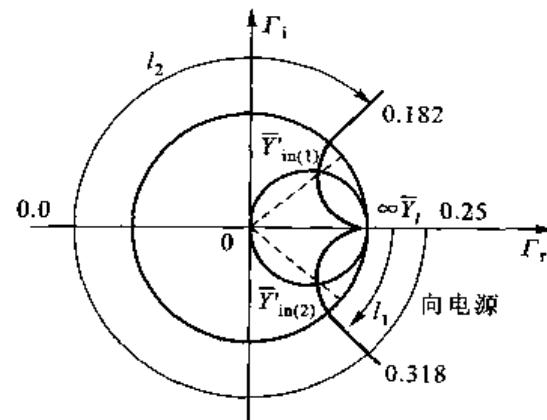


图 1-7-10 短路枝节长度

$$\begin{cases} l_1 = (0.318 - 0.25)\lambda_g = 0.068\lambda_g \\ l_2 = (0.25 + 0.182)\lambda_g = 0.432\lambda_g \end{cases} \quad (\text{注意: 枝节为负导纳 } -jb)$$

共有两组解答, 一般选长度较短的一组。以上解题过程可以用框图流程描述如图 1-7-11 所示:

### 3. 双枝节匹配

刚才已经注意到：单枝节匹配中枝节距离  $d$  是要改变的，为了使它与主馈线位置固定，出现了双枝节匹配。

如图 1-7-12 所示，双枝节匹配网络有两个可变并联短路枝节，中间有一个已知的固定距离  $d = (1/8)\lambda_g$ （个别也有  $(1/4)\lambda_g$  或  $(3/8)\lambda_g$ ）。

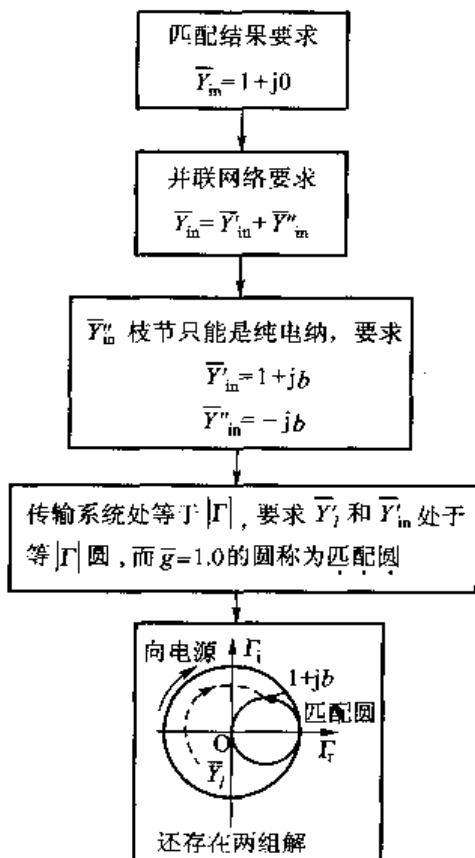


图 1-7-11 单枝节匹配流图

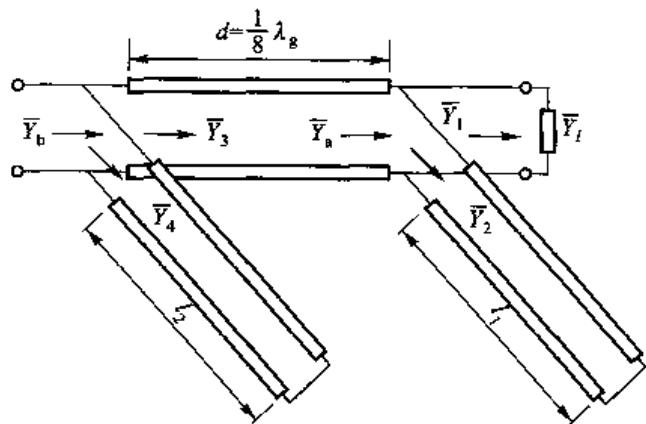


图 1-7-12 双枝节匹配

匹配对象：任意负载  $Z_l = r_l + j x_l$ ，其中  $r_l \neq 0$ 。

调节参数为双枝节长度  $l_1$  和  $l_2$ 。

分析的方法同样采用倒推法，假定已经匹配，则

$$\bar{Y}_b = 1.0 + j0$$

$$\begin{cases} \bar{Y}_3 = 1 + jb_2 \\ \bar{Y}_4 = -jb_2 \end{cases}$$

十分明显， $\bar{Y}_3$  在匹配圆轨迹，通过传输线  $\lambda_g/8$ （也即向负载方向转  $90^\circ$ ）构成  $\bar{Y}_2$  轨迹。其框图流程可以描述如图 1-7-13 所示。

（在双枝节匹配中， $Y_a$  称为辅助圆）。

$$\begin{cases} \bar{Y}_1 = g_l + jb_l = \bar{Y}_l \\ \bar{Y}_2 = -jb' \end{cases} \quad (1-7-38)$$

也即接等  $\bar{g}_l$  圆旋转到辅助圆上，如图 1-7-14 所示，由此算出  $\bar{Y}_2 = -jb'$ 。

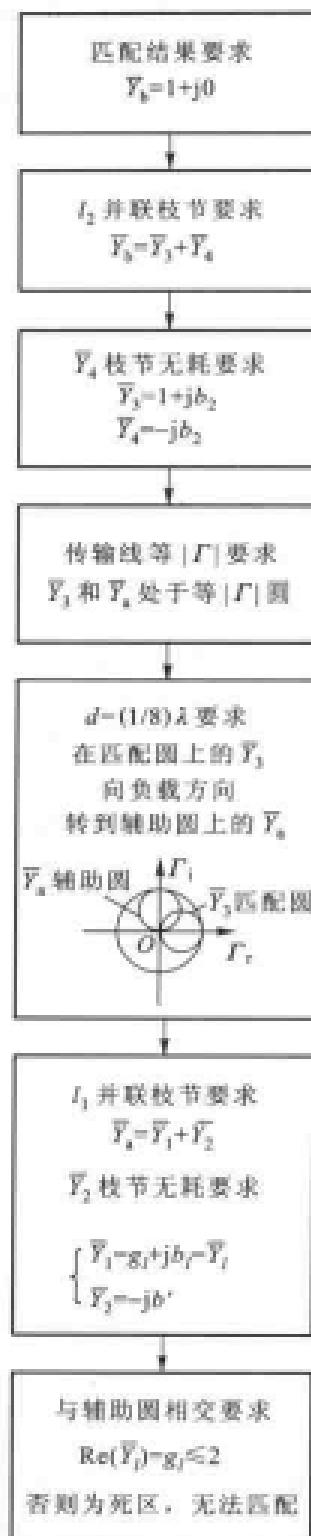


图 1-7-13 双枝节匹配流图

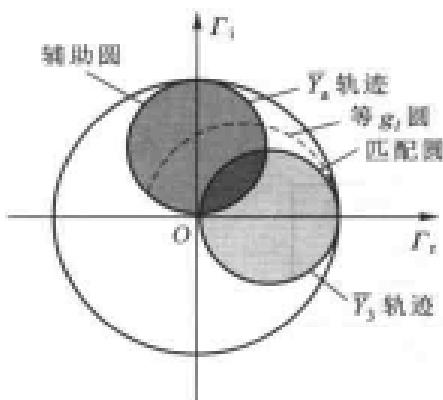


图 1-7-14 双枝节匹配辅助圆

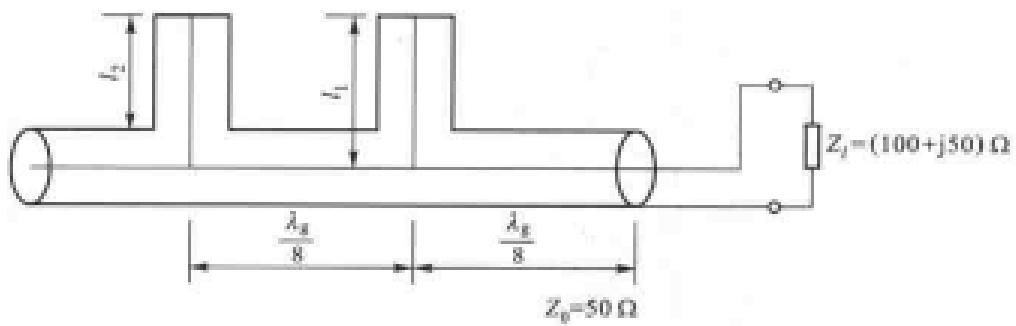


图 1-7-15 特殊双枝节匹配

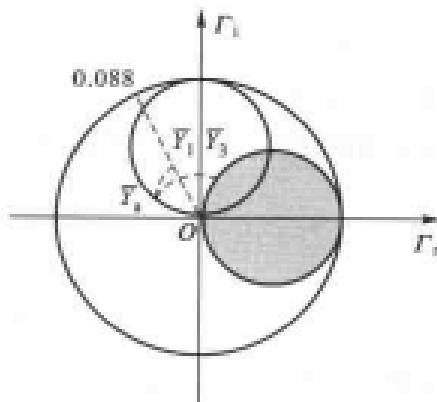


图 1-7-16 双枝节匹配圆图

〔例 2〕 解决如图 1-7-15 所示的特殊双枝节匹配。

〔解〕 双枝节匹配圆如图 1-7-16 所示。

(1) 采用  $Z_0=50 \Omega$  进行归一化

$$\bar{Z}_t = 2 + j1$$

(2) 并联枝节应用导纳处理

$$\bar{Y}_t = 0.4 - j0.2$$

(3) 通过  $\lambda_g/8$  距离(向电源方向)

$$\bar{Y}_1 = 0.5 + j0.5 \quad (\text{对应 } 0.088)$$

(4) 按等电导圆  $\bar{g} = 0.5$  交辅助圆于  $\bar{Y}_2$

$$\bar{Y}_2 = 0.5 + j0.14 = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_t$$

本来应该有两个解,这里只讨论其中一个。

则可得  $\bar{Y}_2 = j0.14 - j0.50 = -j0.36$

$$I_t = (0.445 - 0.25)\lambda_g = 0.195\lambda_g$$

(5) 由  $\bar{Y}_2$  沿等  $|T|$  圆向电源方向转  $90^\circ$ ,与匹配圆交于  $\bar{Y}_3$

$$\bar{Y}_3 = 1 + j0.72 = \bar{Y}_2 - \bar{Y}_t = 1.0 - \bar{Y}_t$$

于是

$$\bar{Y}_3 = -j0.72$$

$$I_t = (0.405 - 0.25)\lambda_g = 0.155\lambda_g$$

另一组解这里未做讨论。

#### 4. 关于“死区”

双枝节匹配的一个主要问题是,对于某些负载  $\bar{Y}_L$  无法匹配,即所谓“死区”问题。例如,若  $d = \lambda_g/8$ , 则

$$g_t > 2 \quad (1-7-39)$$

则无法匹配。一般地

$$g_t \geq \frac{1}{\sin^2 \beta d} \quad (1-7-40)$$

是“死区”。

对于双枝节  $\bar{Y}_s = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$ , 而  $\bar{Y}_2$  是纯电纳。因此,  $\bar{Y}_s$  和  $\bar{Y}_1$  有共同的电导  $\bar{g}$ 。换句话说,  $\bar{Y}_1$  和  $\bar{Y}_s$  在一个等电导圆上。另一方面,  $\bar{Y}_s$  又必须在辅助圆上。这就从反面表明:如果等电导圆不与辅助圆相交,则此类负载无法用双枝节匹配。

如图 1-7-17 所示,若以  $d = \lambda_g/8$  为例,由直角三角形  $AOB$  的几何关系,有

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-r)^2 = \left(\frac{1}{2} + r\right)^2 \quad (1-7-41)$$

其中,  $r$  是“死区”圆的半径。

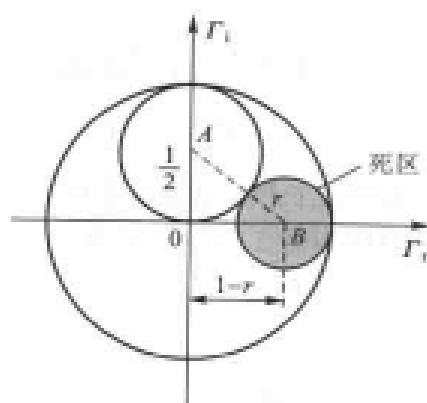


图 1-7-17 “死区”图解

根据反射系数基底下电导圆半径, 很易得到

$$r = \frac{1}{g+1} = \frac{1}{3}$$

显然

$$g=2$$

(1-7-42)

## 作业 PROBLEMS 1-7

① 无耗同轴线的特性阻抗为  $50 \Omega$ , 负载阻抗为  $100 \Omega$ , 工作频率为  $1000 \text{ MHz}$ , 今用  $\lambda_g/4$  线进行匹配, 求此  $\lambda_g/4$  线的特性阻抗和长度。

② 无耗双导线的归一化负载导纳  $\bar{Y}_l$  为  $0.45 + j0.2$ , 用双枝节匹配, 求枝节的长度。

③ 在特性阻抗为  $600 \Omega$  的无耗双导线上测得  $|u_{\max}| = 200 \text{ V}$ ,  $|u_{\min}| = 40 \text{ V}$ ,  $d_{\min} = 0.15\lambda_g$ , 求  $Z_l$ 。今用短路枝节进行匹配, 求枝节的位置和长度。

④ 无耗双导线的特性阻抗为  $600 \Omega$ , 负载阻抗为  $(300 + j300) \Omega$ , 采用双枝节进行匹配, 第一个枝节距负载  $0.1\lambda_g$ , 两枝节的间距为  $\lambda_g/8$ , 求枝节的长度  $l_1$  和  $l_2$ 。



## 传输线计算机解 Computation Solutions for Transmission Line

在应用 Smith 圆图 60 多年后的今天, 计算机的飞速发展促成传输线 CAD 的出现。换句话说, Smith 圆图的全部功能都可以由计算机程序来实现。本节主要讨论用计算机程序计算单枝节匹配和双枝节自动匹配的问题。

### 一、单枝节匹配

单枝节匹配的提法: 已知归一化负载阻抗

$$Z_l = r_l + jx_l$$

求传输线段长度  $l_A$  和枝节长度  $l_B$ 。

具体如图 1-8-1 所示。

由图可知

$$l_A = l_A / \lambda_g, l_B = l_B / \lambda_g$$

通过  $l_A$  时的阻抗

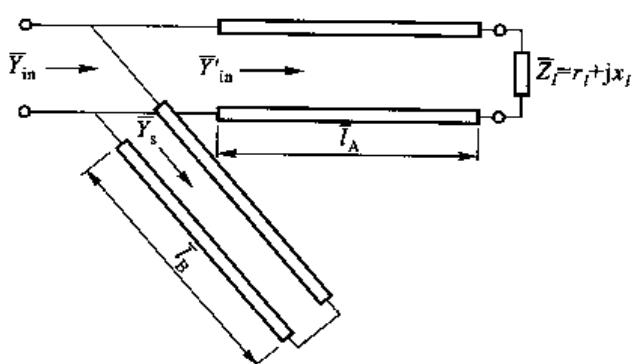


图 1-8-1 单枝节匹配

$$Z'_{in} = \frac{(r_t + jx_t) + jt}{1 + j(r_t + jx_t)t} \quad (1-8-1)$$

式中,  $t = \tan 2\pi l_A$ , 也即阻抗变换公式

$$\bar{Y}'_{in} = \frac{1}{Z'_{in}} = \frac{(1 - x_t t) + j r_t t}{r_t + j(x_t + t)} = g'_{in} + j b'_{in}$$

很容易得到

$$\begin{cases} g'_{in} = \frac{r_t(1 - x_t t) + r_t t(x_t + t)}{r_t^2 + (x_t + t)^2} = \frac{r_t(1 + t^2)}{r_t^2 + (x_t + t)^2} \\ b'_{in} = \frac{r_t^2 t - (1 - x_t t)(x_t + t)}{r_t^2 + (x_t + t)^2} \end{cases} \quad (1-8-2)$$

并联枝节的匹配条件是

$$Y_{in} = \bar{Y}'_{in} + \bar{Y}_s = 1 + j0 \quad (1-8-3)$$

也即

$$\begin{cases} g'_{in} = 1 \\ \bar{Y}_s = -j b'_{in} \end{cases} \quad (1-8-4)$$

解出

$$t = \begin{cases} \frac{x_t \pm \sqrt{r_t[(r_t - 1)^2 + x_t^2]}}{r_t - 1} & r_t \neq 1 \\ -\frac{1}{2}x_t, \infty & r_t = 1 \end{cases} \quad (1-8-5)$$

和

$$Y_s = -j \frac{x_t t^2 + (r_t^2 + x_t^2 - 1)t - x_t}{r_t^2 + (x_t + t)^2} \quad (1-8-6)$$

同时得到  $l_A$  和  $l_B$

$$\bar{l}_A = \begin{cases} \arctan(t)/360^\circ & t \geq 0 \\ [\arctan(t) + 180^\circ]/360^\circ & t < 0 \end{cases} \quad (1-8-7)$$

$$\bar{l}_B = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{b'_{in}}\right)/360^\circ & b'_{in} \geq 0 \\ \left[\arctan\left(\frac{1}{b'_{in}}\right) + 180^\circ\right]/360^\circ & b'_{in} < 0 \end{cases} \quad (1-8-8)$$

利用上述公式编程并不困难。

## 二、双枝节自动匹配

### 1. 问题的提法

已知负载为  $\bar{Z}_L$ , 枝节间距为  $\theta$ 。

① 若此负载能匹配, 则给出  $\bar{l}_A$  和  $\bar{l}_B$ 。

② 若此负载不能匹配(处于死区), 则程序自动加一段  $\bar{l}_D$ , 使之能达到匹配。其模型如图 1-8-2 所示。

## 2. 求解模型

首先不考虑  $\bar{l}_D$ , 认为  $\bar{Y}'_l$  已处于双枝节能匹配的区域, 且把双枝节认为是一个网络(network), 如图 1-8-3 所示。

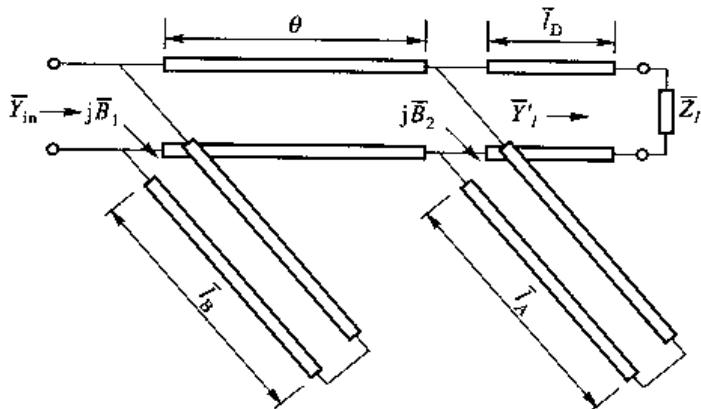


图 1-8-2 双枝节自动匹配模型

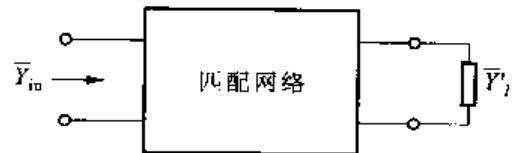


图 1-8-3 求解模型

于是, 双枝节可看成由两个并联导纳之间有一段传输线段  $\theta$  构成。其矩阵  $A$  为

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\bar{B}_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & j\sin \theta \\ j\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\bar{B}_2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta - \bar{B}_2 \sin \theta & j\sin \theta \\ j[(\bar{B}_1 + \bar{B}_2) \cos \theta + (1 - \bar{B}_1 \bar{B}_2) \sin \theta] & \cos \theta - \bar{B}_1 \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上述矩阵  $A$  与负载无关。只求  $\bar{B}_1$  和  $\bar{B}_2$ 。

根据匹配条件

$$Y_{in} = \frac{\bar{A}_{22} Y'_l + \bar{A}_{21}}{\bar{A}_{12} Y'_l + \bar{A}_{11}} = 1 + j0 \quad (1-8-9)$$

代入矩阵  $A$  的参数, 具体展开。作为技巧, 暂时把  $g'_l$  和  $b'_l$  作为未知数得到方程, 其中  $Y'_l = g'_l + jb'_l$ 。

$$\begin{cases} (\cos \theta - \bar{B}_1 \sin \theta) g'_l + (\sin \theta) b'_l = \cos \theta - \bar{B}_2 \sin \theta \\ (\sin \theta) g'_l - (\cos \theta - \bar{B}_1 \sin \theta) b'_l = [(\bar{B}_1 + \bar{B}_2) \cos \theta + (1 - \bar{B}_1 \bar{B}_2) \sin \theta] \end{cases} \quad (1-8-10)$$

联立求解, 得

$$\begin{cases} g'_t = \frac{1}{(\cos \theta - \bar{B}_1 \sin \theta)^2 + \sin^2 \theta} \\ b'_t = \frac{-\bar{B}_2(1 - 2\bar{B}_1 \sin \theta \cos \theta) + \bar{B}_1^2 (\cos \theta - \bar{B}_2 \sin \theta) \sin \theta - \bar{B}_1 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{(\cos \theta - \bar{B}_1 \sin \theta)^2 + \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (1-8-11)$$

注意式(1-8-11)中  $g'_t$  的表达式,由于

$$(\cos \theta - \bar{B}_1 \sin \theta)^2 \geq 0 \quad (1-8-12)$$

可知

$$g'_t \leq \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (1-8-13)$$

这恰好是避开死区的条件,具体分析,若  $l = \frac{1}{8}\lambda_g$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , 有

$$g'_t \leq 2 \quad (1-8-14)$$

与图解法完全吻合。

当  $g'_t$  满足匹配条件时

$$l_D = 0 \quad (1-8-15)$$

于是有

$$g'_t = g_t, b'_t = b_t, \text{且}$$

$$\begin{cases} \bar{B}_1 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \pm \sqrt{\frac{1}{g_t \sin^2 \theta} - 1} \\ \bar{B}_2 = g_t [\bar{B}_1^2 \sin \theta \cos \theta - \bar{B}_1 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] - b_t \end{cases} \quad (1-8-16)$$

设  $x_1 = -\frac{1}{\bar{B}_1}, x_2 = -\frac{1}{\bar{B}_2}$ , 则双枝节长度

$$l_A = \begin{cases} \arctan(x_2)/360^\circ & x_2 \geq 0 \\ [\arctan(x_2) + 180^\circ]/360^\circ & x_2 < 0 \end{cases} \quad (1-8-17)$$

$$l_B = \begin{cases} \frac{\arctan(x_1)}{360^\circ} & x_1 \geq 0 \\ \frac{[\arctan(x_1) + 180^\circ]}{360^\circ} & x_1 < 0 \end{cases} \quad (1-8-18)$$

当  $g_t$  不满足匹配条件时,选择  $l_D$  使

$$g'_t = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (1-8-19)$$

由图 1-8-4 可知

$$\bar{Y}'_t = g'_t + jb'_t = \frac{1 + j\bar{Z}_t \tan(\beta l_D)}{\bar{Z}_t + j \tan(\beta l_D)}$$

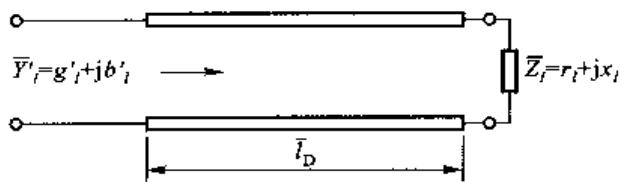


图 1-8-4

由实部方程可解出

$$\tan(\beta \bar{l}_D) = \frac{x_t + \sqrt{(1+r_t^2+x_t^2)r_t \sin^2\theta - r_t^2(1+\sin^2\theta)}}{r_t \sin^2\theta - 1} \quad (1-8-20)$$

由虚部方程, 可得

$$b'_t = \frac{x_t \tan^2(\beta \bar{l}_D) + (r_t^2 + x_t^2 - 1) \tan(\beta \bar{l}_D) - x_t}{r_t^2 + [x_t + \tan(\beta \bar{l}_D)]^2} \quad (1-8-21)$$

已知等效的  $\bar{Y}'_t = g'_t + j b'_t$ , 再求  $\bar{B}_1$  和  $\bar{B}_2$ , 具体的计算流程框图如图 1-8-5 所示:

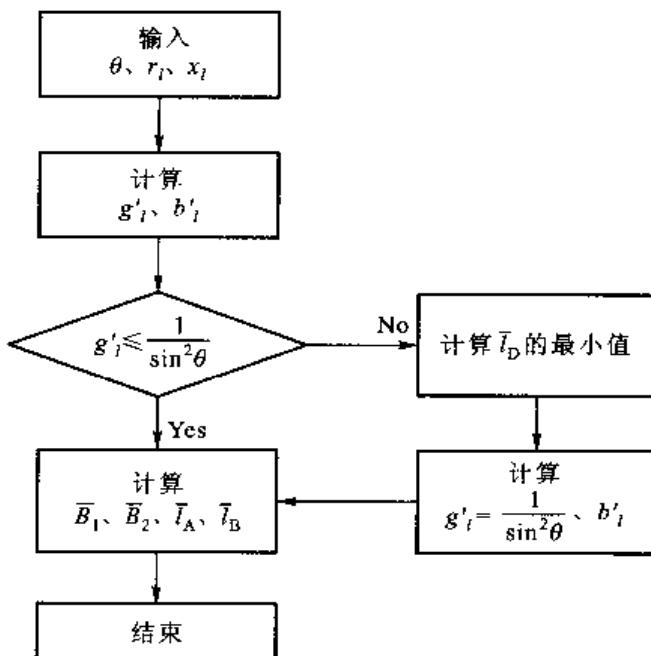


图 1-8-5 计算流程框图

## 附录 APPENDIX

### 关于单枝节匹配的模型处理

在附录中, 再研究一种单枝节匹配的模型处理方法。前面已经讨论过由任意负载  $Z_t = r_t + j x_t$  到纯阻负载  $1/\rho$  的变换, 即定理 1。

[定理 1] 如图 1-8-6 所示,由任意负载  $\bar{Z}_t = r_t + jx_t$  变换到纯阻负载  $R = 1/\rho$  的电长度  $\theta$  为

$$\theta = -\frac{1}{2} \left[ \arctan \left( \frac{x_t}{1+r_t} \right) + \arctan \left( \frac{x_t}{1-r_t} \right) \right]$$

现在,再进一步讨论定理 2。

[定理 2] 如图 1-8-7 所示,由纯阻负载  $\frac{1}{\rho}$  变换到指定导纳实部  $g_0$  的电长度  $\varphi$  为

$$\varphi = \pm \arctan \sqrt{\frac{\rho - g_0}{\rho(\rho g_0 - 1)}}$$

且要求  $\frac{1}{\rho} \leq g_0 \leq \rho$ 。

[证明] 以  $1/\rho$  为负载的  $\bar{Y}_{in}$  一般公式是



图 1-8-6 任意负载到纯阻负载的变换

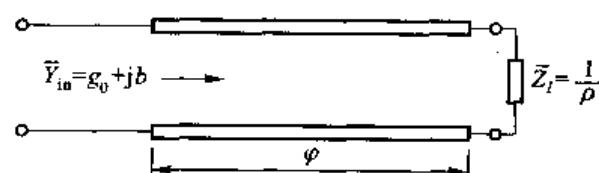


图 1-8-7 纯阻负载到指定导纳实部的变换

$$\bar{Y}_{in} = \frac{\rho + j \tan \varphi}{1 + j \rho \tan \varphi} = \frac{\rho(1 + \tan^2 \varphi)}{1 + \rho^2 \tan^2 \rho} + j \frac{(1 - \rho^2) \tan \varphi}{1 + \rho^2 \tan^2 \varphi} = g_0 + jb$$

由实部方程,可得

$$\varphi = \pm \arctan \sqrt{\frac{\rho - g_0}{\rho(\rho g_0 - 1)}}$$

为确保根号内值非负,必须有  $\frac{1}{\rho} \leq g_0 \leq \rho$ 。

同时也得到

$$b = \mp \sqrt{\frac{(\rho - g_0)(\rho g_0 - 1)}{\rho}}$$

有了上述两个定理,即可用模型处理方法处理单枝节匹配问题。对于匹配情况,有

$$\begin{cases} \varphi = \pm \arctan \sqrt{\frac{1}{\rho}} \\ b = \mp \frac{\rho - 1}{\sqrt{\rho}} \end{cases}$$

[定理 3] 如图 1-8-8 所示,对任意阻抗做单枝节匹配时

$$\theta_1 = \theta + \varphi = -\frac{1}{2} \left[ \arctan \left( \frac{x_t}{1+r_t} \right) + \arctan \left( \frac{x_t}{1-r_t} \right) \right] \pm \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right)$$

$$\theta_2 = \pm \arctan \frac{\sqrt{\rho}}{(\rho - 1)}$$

其中

$$\rho = \frac{\sqrt{(1+r_l)^2 + x_l^2} + \sqrt{(1-r_l)^2 + x_l^2}}{\sqrt{(1+r_l)^2 + x_l^2} - \sqrt{(1-r_l)^2 + x_l^2}}$$

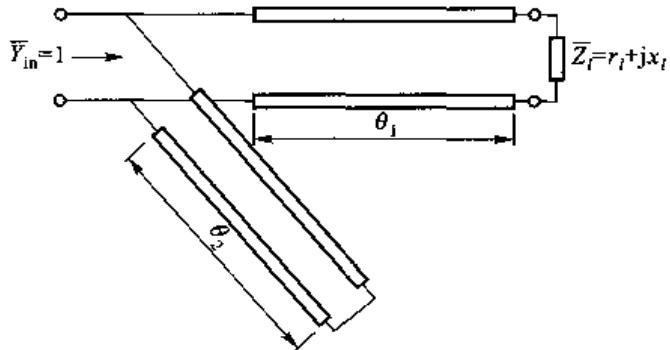


图 1-8-8 单枝节模型

## 作业 PROBLEMS 1-8

如图 1-8-9 所示, 已知特性阻抗  $Z_0 = 50 \Omega$ , 负载  $Z_l = (50-j50)\Omega$ , 编写双枝节自动匹配计算机程序, 求出参数  $l_A$ 、 $l_B$ 。

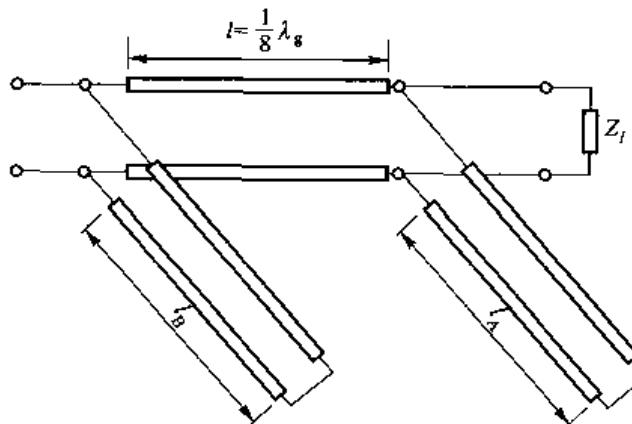


图 1-8-9

1-9

## 例题讲解 Problems

传输线问题这里暂时告一段落, 下面全面回顾一下传输线理论的基本内容和基本方法。

### 1. 传输线的参数研究

无耗微波传输线如图 1-9-1 所示。

无耗传输线的电长度  $\theta = \beta l = \omega \sqrt{LC} l$

第一特征参数  $L, C$

第二特征参数  $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ,  $\beta = \omega \sqrt{LC}$

工作参数  $\Gamma, Z, \rho$

在工作参数中要注意：

- ①  $\Gamma$ ——系统中  $|\Gamma|$  是不变量。
- ②  $Z$ ——阻抗是周期变化的截面量。
- ③  $\rho$ ——与  $|\Gamma|$  对应，是系统量。

### 2. 传输线理论的研究方法

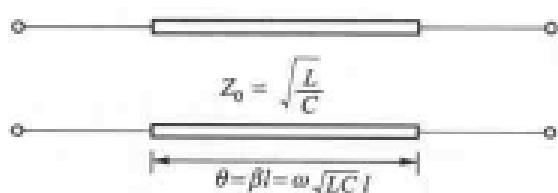


图 1-9-1 无耗微波传输线

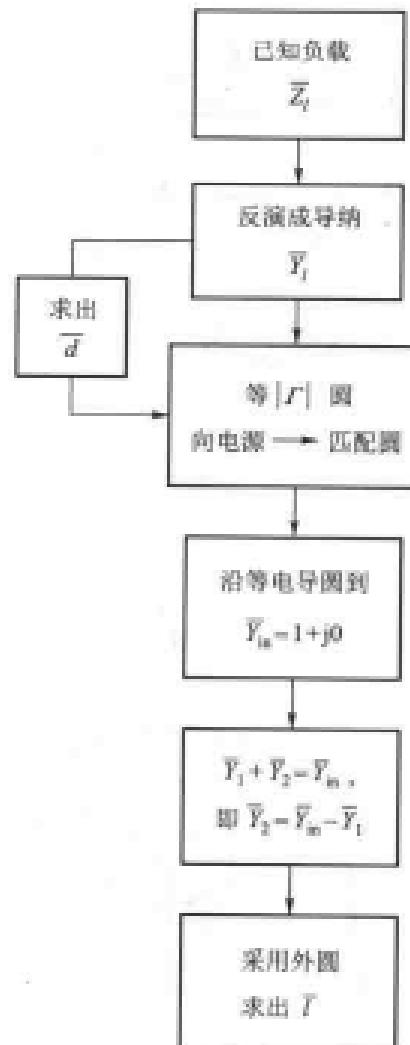
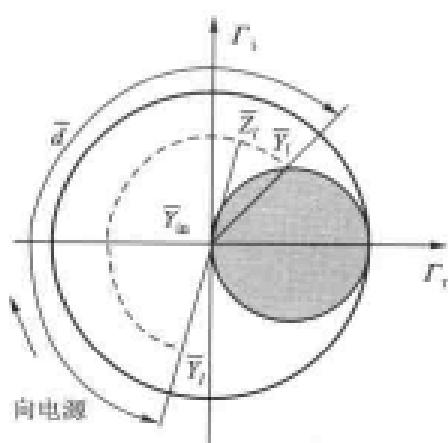
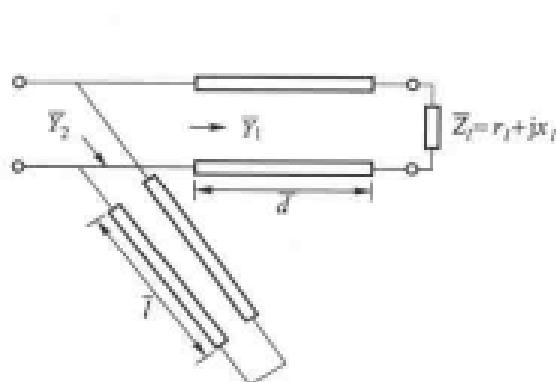


图 1-9-2 单枝节匹配求解流程图

① 微分方程法:采用支配方程+边界条件求出具体解。传输线的通解是入射波+反射波,边界条件给出具体的组合比例。

② 矩阵法:把传输线问题处理成各类矩阵的运算,这些矩阵具有普遍性,与具体边界条件无关。

③ Smith 圆图法:以反射系数  $\Gamma$  圆为基底,覆上  $Z$  和  $\rho$  构成 Smith 圆图。采用阻抗(或导纳)归一、电角度归一,使圆图运算更具普遍性。

④ CAD 法:计算机技术的发展可以把传输线的基本问题转化计算机为程序求解。

应该指出,还有其他传输线理论的研究方法,但以上讨论的几种方法基本概括了主要研究方法。

### 3. 单枝节匹配求解流程图

如图 1-9-2 所示。

### 4. 双枝节匹配求解流程图

如图 1-9-3 所示。

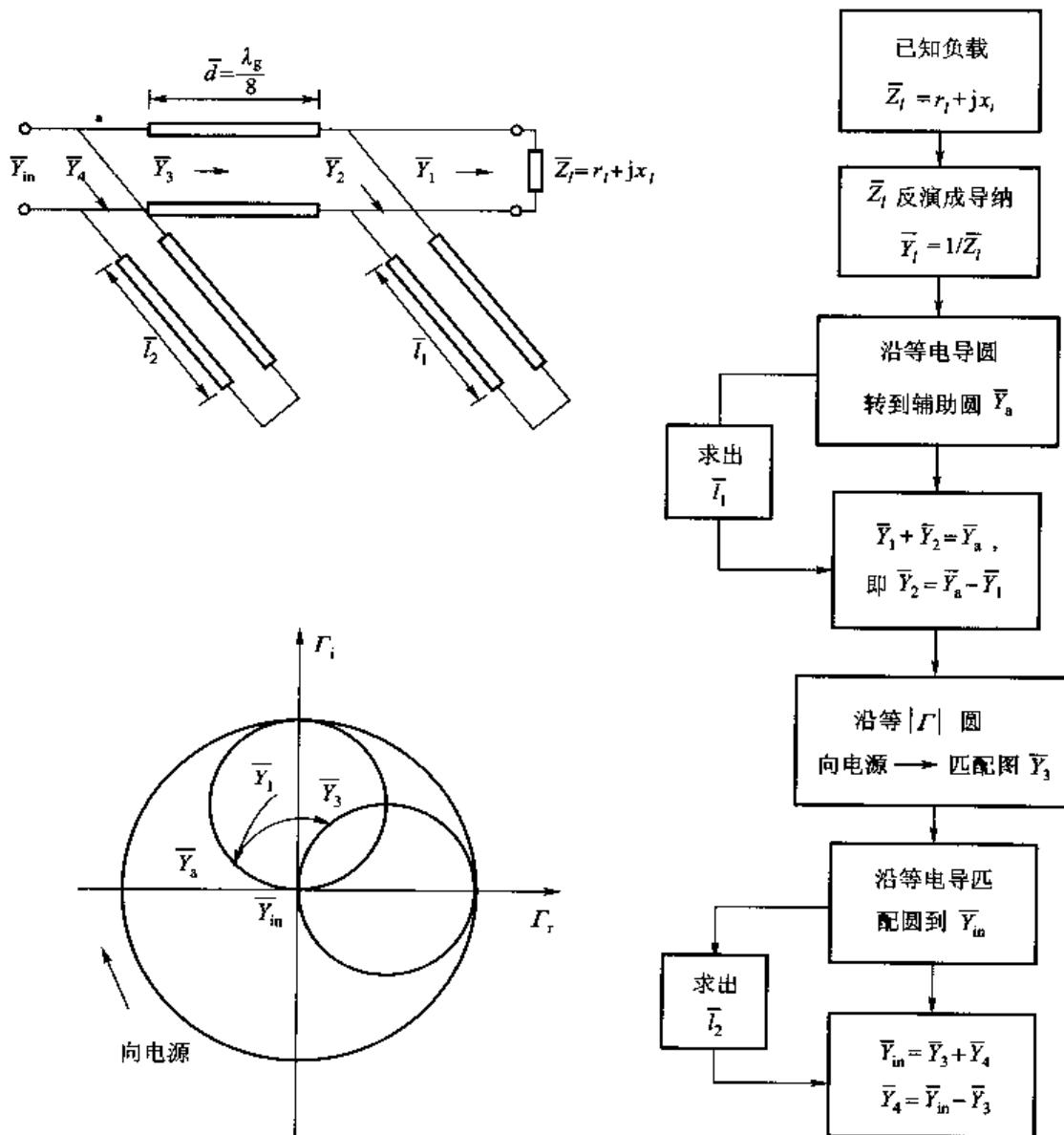


图 1-9-3 双枝节匹配求解流程图

下面选讲一些例题,加深读者对于以上概念和方法的理解。

[例 1] 如图 1-9-4 所示,无耗双导线特性阻抗  $Z_0 = 500 \Omega$ , 工作波长  $\lambda_g = 80 \text{ cm}$ , 现在欲以  $\lambda_g/4$  线使负载与传输线匹配, 求  $\lambda_g/4$  线的特性阻抗  $Z'_0$  和安放位置  $d$ 。

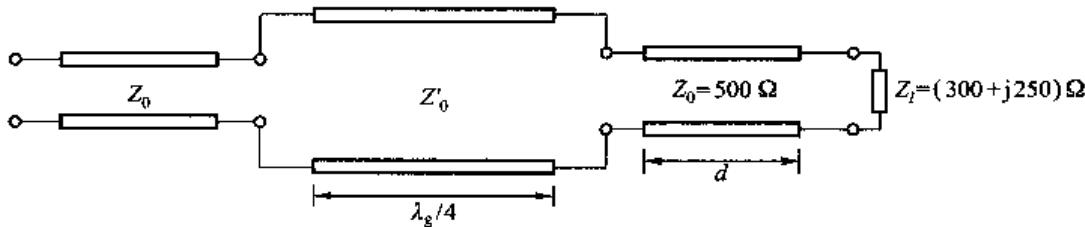


图 1-9-4 例 1 所对应的匹配问题

### [解法 1] 圆图法

Smith 圆图解法如图 1-9-5 所示, 其步骤如下:

(1) 阻抗归一化  $\bar{Z}_l = Z_l / Z_0 = 0.6 + j0.5$  (对应 0.094)

(2) 向电源方向转向纯电阻(波腹)处  $\bar{R} = \rho = 2.20$

(3) 求出  $d = 0.25 - 0.094 = 0.156$

反归一化, 可以得到  $d = d \lambda_g = 12.48 \text{ cm}$

(4) 同时可以查出  $Z'_0 = \sqrt{\bar{R}} = 1.483 2$

进行反归一化, 可以得到  $Z'_0 = \bar{Z}'_0 Z_0 = 741.62 \Omega$

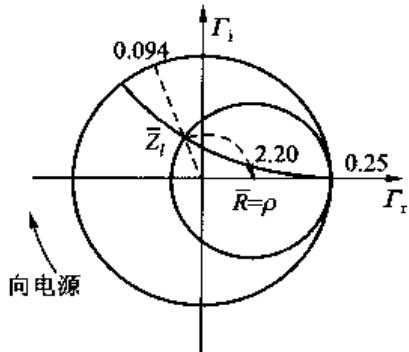


图 1-9-5 例 1 的 Smith 圆图解法

[解法 2] 已经学过由任意负载  $\bar{Z}_l = r_l + jx_l$  变换到纯阻的电长度为

$$\begin{aligned}\theta &= -\frac{1}{2} \left[ \arctan\left(\frac{x_l}{1+r_l}\right) + \arctan\left(\frac{x_l}{1-r_l}\right) \right] \\ &= -68.694^\circ\end{aligned}$$

取正值, 向波腹点变换

$$\varphi_1 = 180^\circ + \theta = 111.306^\circ$$

$$d_1 = 0.1546 \lambda_g = 12.37 \text{ cm}$$

$$\rho = 2.2361$$

$$Z'_0 = \sqrt{\rho} = 1.4953$$

$$Z'_0 = 747.69 \Omega$$

事实上应该还有一组

$$\varphi_2 = 360^\circ + \theta = 291.306^\circ$$

$$d_2 = 0.4046 \lambda_g = 32.37 \text{ cm}$$

$$Z'_0 = \sqrt{\frac{1}{\rho}} = 0.6688$$

$$Z'_0 = 334.38 \Omega$$

[例 2] 在特性阻抗为  $600 \Omega$  的无耗双导线上, 测得  $|u|_{\max} = 200 \text{ V}$ ,  $|u|_{\min} = 40 \text{ V}$ ,  $d_{\min} = 0.15\lambda_g$ 。

问  $Z_t$  为何值? 采用短路并联枝节匹配, 求枝节位置  $\bar{d}$  和长度  $\bar{l}$ 。

[解] 这个问题可以分解成两个部分:(1)已知驻波比  $\rho$  和最小点位置  $d_{\min}$ , 求  $Z_t$ 。(2)已知  $Z_t$ , 用单枝节匹配求  $\bar{d}$  和  $\bar{l}$ 。

(1) 根据定义

$$\rho = \frac{|u|_{\max}}{|u|_{\min}} = \frac{200}{40} = 5$$

$$d_{\min} = 0.15\lambda_g$$

注意波节点  $R = 1/\rho = 0.20$ , 如图 1-9-6 所示, 且向负载旋转  $0.15\lambda_g$ , 可得

$$\bar{Z}_t = 0.46 - j1.22$$

反归一化, 可以得到负载值为

$$Z_t = \bar{Z}_t \cdot Z_0 = (276 - j732) \Omega$$

(2) 已知  $Z_t$ , 要用单枝节匹配求  $\bar{d}$  和  $\bar{l}$ 。

反演成导纳计算

$$\bar{Y}_t = 0.32 + j0.70 \quad (\text{对应 } 0.10)$$

如图 1-9-7 所示, 按等  $|\Gamma|$  圆向电源旋转到匹配圆

$$\begin{cases} \bar{Y}_1 = 1.0 + j1.80 & (\text{对应 } 0.18) \\ \bar{Y}_2 = 1.0 - j1.80 & (\text{对应 } 0.32) \end{cases}$$

枝节距离

$$\begin{cases} d_1 = (0.18 - 0.10)\lambda_g = 0.08\lambda_g \\ d_2 = (0.32 - 0.10)\lambda_g = 0.22\lambda_g \end{cases}$$

枝节长度

$$\begin{cases} l_1 = (0.33 - 0.25)\lambda_g = 0.08\lambda_g \\ l_2 = (0.17 + 0.25)\lambda_g = 0.42\lambda_g \end{cases}$$

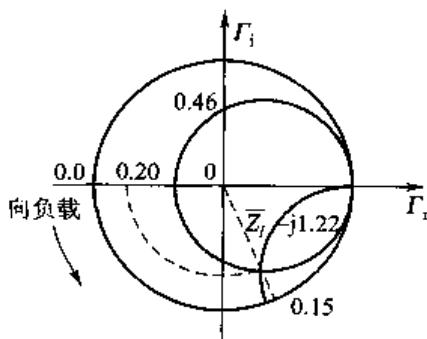


图 1-9-6 例 2 中的负载值  $Z_t$  的 Smith 圆图解法

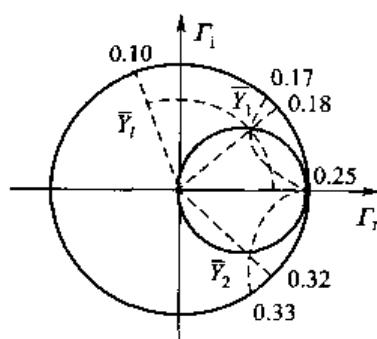


图 1-9-7 例 2 中单枝节匹配的 Smith 圆图解法

## 附录 APPENDIX

### 单枝节匹配的解析和几何关系

对一个典型的课题往往可以从各个侧面加以研究。如图 1-9-8 所示的单枝节匹配便是这种例子。

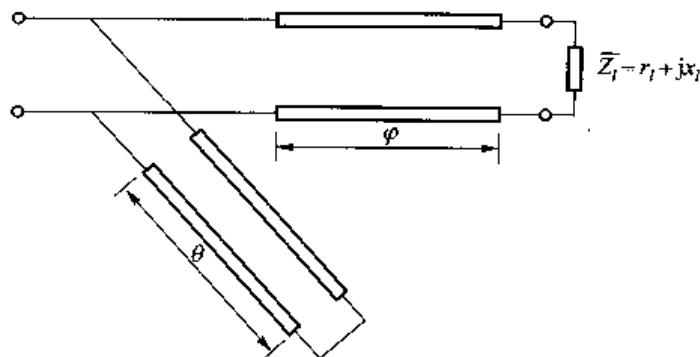


图 1-9-8 单枝节匹配模型

#### 1. 解析关系

如图 1-9-9 所示，不失一般性地，可以假定反射系数  $\Gamma_l$  的相角  $e^{j\phi_l}$  中的  $\phi_l = 0$ 。

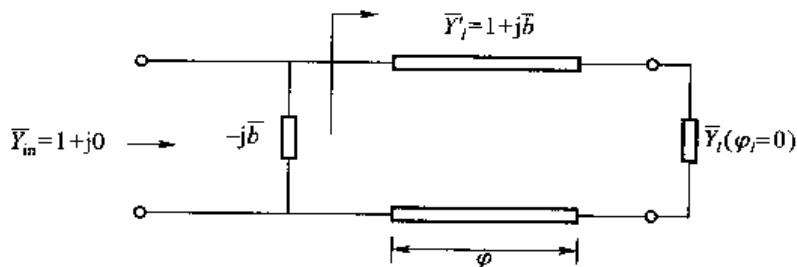


图 1-9-9 单枝节匹配解析法的图解

则有

$$\Gamma'_l = \frac{1 - Y'_l}{1 + Y'_l} = \frac{-jb}{2 + jb} = |\Gamma_l| e^{-j2\varphi}$$

也即

$$\frac{|b|}{\sqrt{4 + |b|^2}} \exp j \left( -\frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{b}{2} \right) \right) = |\Gamma_l| e^{-j2\varphi}$$

于是得到

$$\begin{cases} |\Gamma_l|^2 = \frac{|b|^2}{4 + |b|^2} \\ \frac{\pi}{2} + \arctan \left( \frac{b}{2} \right) = 2\varphi \end{cases}$$

可解出

$$|b| = \frac{2|\Gamma_t|}{\sqrt{1 - |\Gamma_t|^2}}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}n\pi \pm \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{1 - |\Gamma_t|^2}}{|\Gamma_t|}\right)$$

如果用短路枝节给出 $-jb$ , 即

$$-jb = -j\tan \theta$$

可见

$$\theta = n\pi \pm \arctan\left(\frac{1}{|b|}\right) = n\pi \pm \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - |\Gamma_t|^2}}{2|\Gamma_t|}\right)$$

## 2. 几何关系

与上面一致, 不失一般性地可以设 $\varphi_t = 0$

由图 1-9-10 可见  $\tan(\pi - 2\varphi) = \frac{\sqrt{1 - |\Gamma_t|^2}}{|\Gamma_t|}$

于是

$$\varphi = \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{1 - |\Gamma_t|^2}}{|\Gamma_t|}\right)$$

如图 1-9-11 所示,  $OO'$  是反射 $|\Gamma_t|$ 圆与电纳圆的连心线, 设电纳圆半径为 $R$

$$\tan \theta = R/1 = R$$

下面给出,  $R = \frac{1}{|b|} = \frac{\sqrt{1 - |\Gamma_t|^2}}{2|\Gamma_t|}$ , 可知

$$\theta = n\pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - |\Gamma_t|^2}}{2|\Gamma_t|}\right)$$

下面推导圆半径 $R$ (如图 1-9-11 所示)。

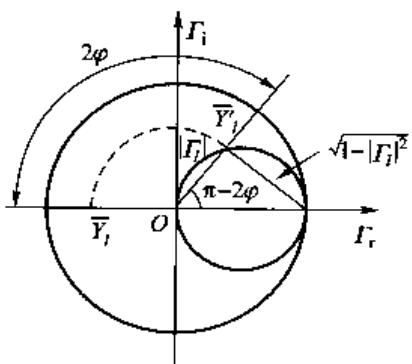


图 1-9-10 单枝节匹配的几何法的图解

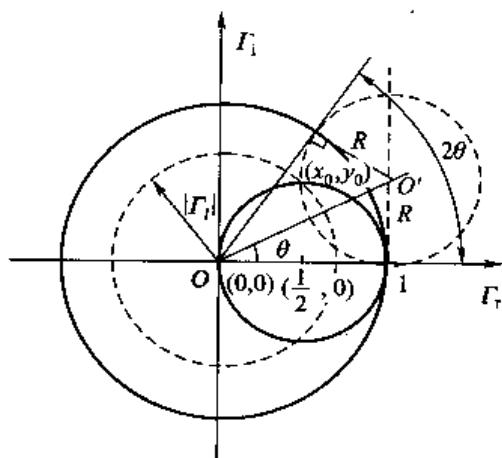


图 1-9-11 单枝节匹配的几何法的图解

设等 $|\Gamma|$ 圆、匹配圆和半径为 $R$ 的电纳圆交于 $(x_0, y_0)$ 。写出3个圆的方程

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = |\Gamma_t|^2 & \text{(等 } |\Gamma| \text{ 圆)} \\ \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + y_0^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \text{(匹配圆)} \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - R)^2 = R^2 & \text{(电纳圆)} \end{cases}$$

由前两个方程,可知

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = |\Gamma_t|^2 \\ x_0^2 - x_0 + y_0^2 = 0 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} x_0 = |\Gamma_t|^2 \\ y_0 = |\Gamma_t| \sqrt{1 - |\Gamma_t|^2} \end{cases}$$

代入电纳圆方程

$$x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 - 2y_0R = 0$$

$$R = \frac{\sqrt{1 - |\Gamma_t|^2}}{2|\Gamma_t|} = \frac{1}{|b|}$$

-----

在本章中,我们系统地学习了传输线理论的基本知识和应用,其知识体系可以简要地用如图1-9-12所示框图表示。

在具体的学习过程中,着重强调以下几个基本概念:

①一个模型:即传输线的四参数模型。微波传输线与低频传输线的本质区别在于其所具有的分布参数效应。这种效应一般采用四参数模型来描述。

②两种方法:微波信号在四参数模型等效的微波传输线上的传输特性可以用电报方程组来描述,电报方程组的求解可以去耦变为二阶波动方程求解,也可以应用拉氏变换方法得到其矩阵的解。

③三种状态:根据不同的边界条件下电报方程组的解的讨论,可知微波信号在传输线上存在行波、驻波和行驻波三种传输状态。

④3个工作参数:反射系数、驻波比和输入阻抗是描述传输线上微波信号特性的3个最重要参数,读者应该对其定义进行深入了解,并掌握相互间的变换关系。

⑤一种网络参数: $A$ 参数,读者会在以后的微波网络的学习中进一步加深对其应用的了解。

⑥一个工程概念:阻抗匹配的概念。阻抗匹配不仅仅是一个技术,阻抗匹配的概念是贯穿

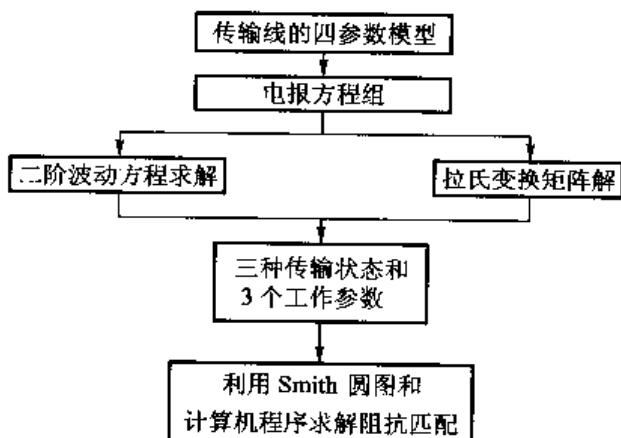


图 1-9-12 本章知识体系

于微波技术之中的一个核心概念,也是一个需要读者在实际工程中反复领会、加深理解的重要概念。

- ⑦ 两个工具:阻抗匹配问题可以利用 Smith 圆图和计算机编程来进行求解。

## 第二章

## 导波系统

### Guide Wave Systems

上一章讨论的“传输线理论”的着眼点是一切微波传输的共性：即在  $z$  方向表现出传输线的共性，入射波和反射波概括了传输的一切可能性，两者之间具体的比例则取决于边界条件。

这一章讨论的“导波系统”将进一步深入分析各种导波系统截面的多样性。导波系统包括三个大类：第一类是传输横电磁模(TEM 模)的双导体传输线，如平板线、双导线、同轴线、带线、微带和共面波导等；第二类是传输色散的横电模(TE 模)或者横磁模(TM 模)的单导体传输线，如矩形波导、圆波导、椭圆波导、脊波导和槽线等；第三类是传输表面波的介质传输线，如介质波导、光纤等。具体如图 2-0-1 所示。

正是上述情况，构成了“导波系统”的研究特点：

① 出发点的普遍性。和传输线理论以路的观点——电报方程作为出发点不同，本章则以最基本的 Maxwell 方程组作为出发点，并把它分解为  $z$  方向的广义传输线理论和  $t$  方向的截止波数  $k_z$  方程，不同的导波系统的区别主要反映在横向方程上。

② 坐标匹配法。为了求解不同形状的导波系统，应该采用合适的坐标系统。这对于分离变量、边界条件的确定和算子分解都有着极大的好处，而  $z$  方向存在有不同导波系统的共性。因此，所谓不同坐标，实际上即不同的柱坐标。

③ 本征模思想。本征模思想贯穿导波系统，甚至是贯穿整个微波领域的重要思想。在工程实践中会遇到各种激励、各种不均匀性和各种问题。本征模思想的最重要一点在于它揭示了导波系统中存在不同模式(即能独立存在的电磁能量形式)，并给出全部可能的模式，表现在求解形式上即采用无源的 Maxwell 方程组。正是无源，使它能解决一切不同源的问题。在导波系统中本征模的正确性和完备性有着重要的意义，而有限域的边界条件构成了离散本征模体系。

④ 传输与调落。导波系统的模式存在着截止波长  $\lambda_c$ ，只有小于截止波长或高于截止频率的模才能在系统中正常传输，这样的模称为传输模；反之，即构成高阶模——调落模。在不均匀性或非理想的条件下会存在各种非传输调落模，它可以阻碍传输，也可以帮助传输。正确地驾驭和利用调落模是微波工程中的一个重要课题。从阻抗的观点看问题，调落模对主模构成纯电抗。

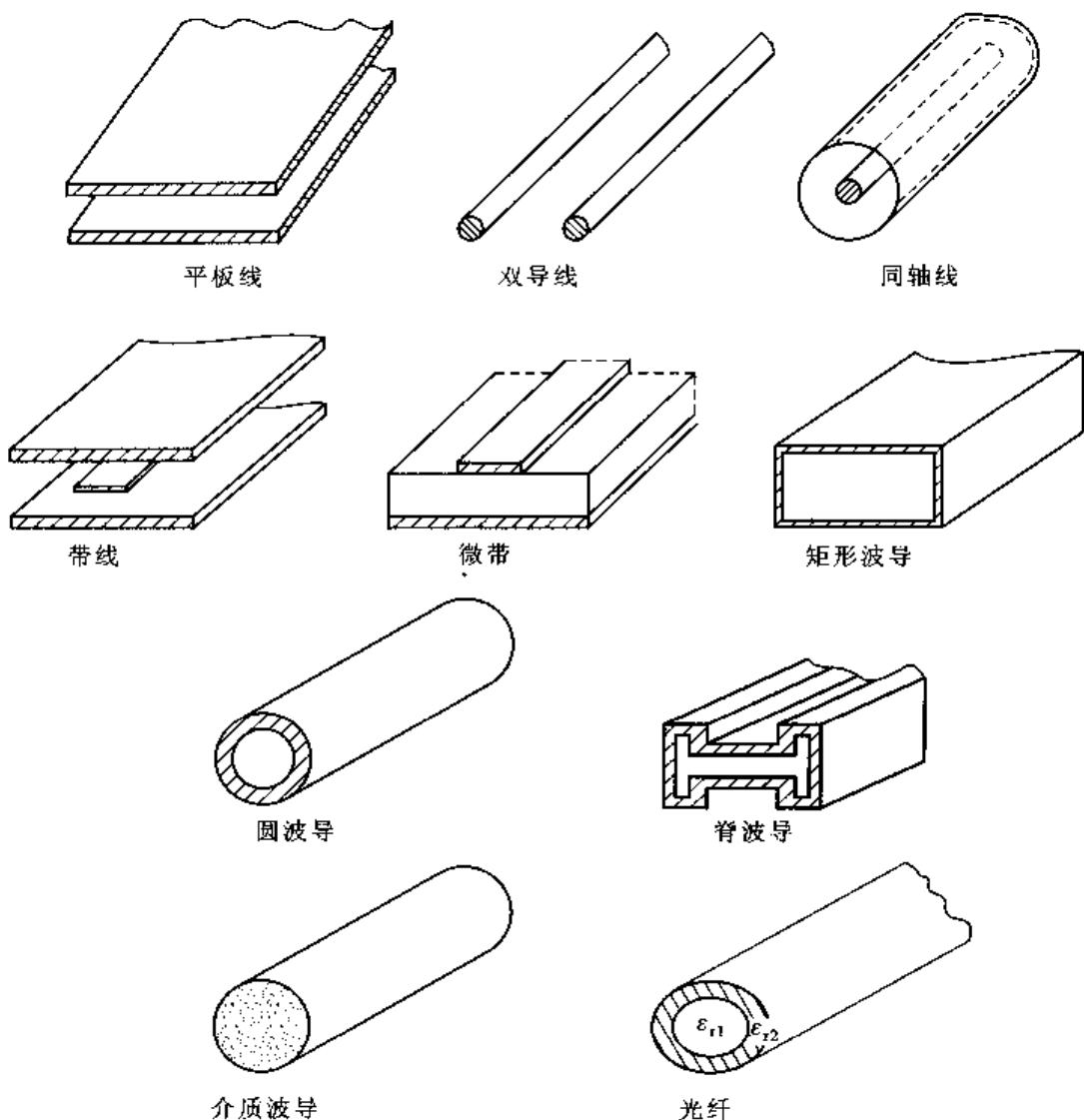


图 2-0-1 导波系统的多样性

⑤ 封闭结构和开放结构。在微波系统中，随着频率的不断升高，封闭结构和开放结构是一个永恒的发展课题。它如辩证法所述，否定之否定不断地螺旋式地向上演进，如图 2-0-2 所示。

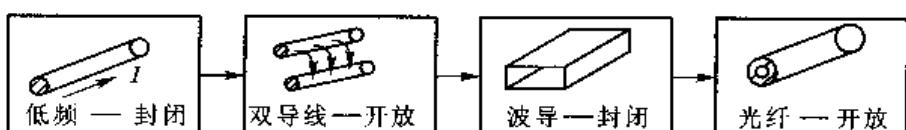


图 2-0-2 导波系统的封闭与开放



## 广义传输线理论 Generalized Transmission Line Theory

本书的一开始就强调：从最宏观的角度来看，微波工程有两种方法——场论的方法和网络的方法。

首先，要把传输线理论推广到波导理论，由微波双导线发展到波导是因为当其他人或物靠近双导线时会产生较大影响。这说明：传输线与外界有能量交换，它带来的直接问题是能量损失和工作不稳定。究其原因是开放造成的特点。

波导，很多书从概念上认为是双导线两侧连续加对称的 $\lambda_g/4$ 枝节，直到构成封闭电路为止，如图 2-1-1 所示。如果其导线的宽度是  $W$ ，则波导的宽边

$$a = W + 2 \cdot \frac{\lambda_g}{4} = W + \frac{\lambda_g}{2} \quad (2-1-1)$$

$$a \geq \lambda_g/2 \text{ 或 } \lambda_g \leq 2a \quad (2-1-2)$$

构成了波导传输的第一个约束条件。

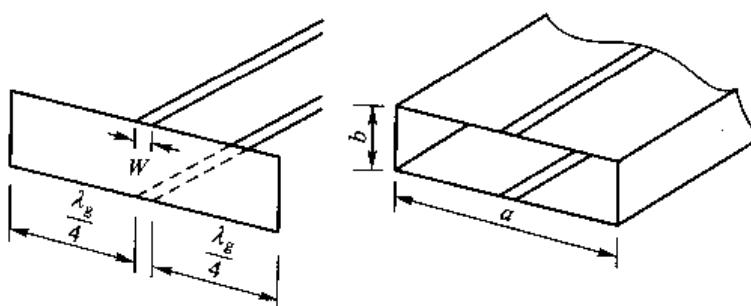


图 2-1-1 从双导线到矩形波导

波导的一般理论包括 3 个部分：广义传输线理论、用纵向分量表示的分离变量法理论和本征模理论，如图 2-1-2 所示。

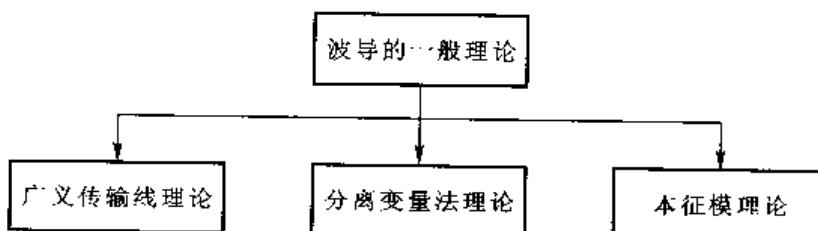


图 2-1-2 波导的一般理论

## 一、问题出发点和假定条件

波导一般解的出发点是频域的 Maxwell 方程组：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{array} \right. \quad (2-1-3)$$

正因为无源、电与磁几乎对称。另外，进一步假设波导具有以下条件，如图 2-1-3 所示：

- ① 波导均匀条件：假定截面不随  $z$  而变化。
- ② 媒质均匀条件：波导内  $\epsilon, \mu$  均匀，波导内壁  $\sigma$  无限大。
- ③ 无源条件：波导内  $\rho, \vec{J} \equiv 0$ 。
- ④ 无限条件：波导在  $z$  方向无限长。

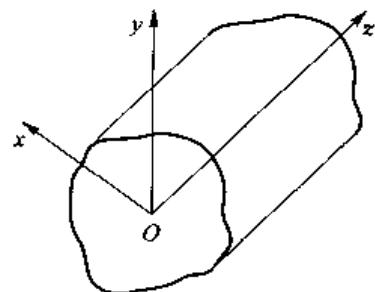


图 2-1-3 波导研究的模型

## 二、广义传输线理论

波导是以否定双导线传输作为出发点的。然而，它又上升到更高的广义传输线理论。

假设

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_t + \hat{z}E_z \\ \vec{H} = \vec{H}_t + \hat{z}H_z \\ \nabla = \nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2-1-4)$$

其中下标 t 均表示横向分量，例如直角坐标系的  $x, y$  分量。

把式(2-1-4)代入式(2-1-3)，得

$$\begin{aligned} \left( \nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\vec{H}_t + \hat{z}H_z) &= j\omega\epsilon(\vec{E}_t + \hat{z}E_z) \\ &= \nabla_t \times \vec{H}_t + \nabla_t \times (\hat{z}H_z) + \hat{z} \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} \end{aligned} \quad (2-1-5)$$

把方程两边的横向分量与纵向分量分开，重新写出前两个 Maxwell 方程，可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_t \times \vec{H}_t = j\omega\epsilon\hat{z}E_z \\ \nabla_t \times (\hat{z}H_z) + \hat{z} \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon\vec{E}_t \end{array} \right. \quad (2-1-6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_t \times \vec{E}_t = -j\omega\mu\hat{z}H_z \\ \nabla_t \times (\hat{z}E_z) + \hat{z} \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\vec{H}_t \end{array} \right. \quad (2-1-7)$$

分三种情况加以讨论。

### 1. TEM(transverse electromagnetic)模情况( $E_z = 0, H_z = 0$ )

TEM 模情况也即电场和磁场都只有横向分量,  $E_x = 0, H_x = 0$ 。  
这时横向方程

$$\begin{cases} \hat{z} \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega \epsilon \vec{E}_t, \\ \hat{z} \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega \mu \vec{H}_t, \end{cases} \quad (2-1-8)$$

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \vec{e}_t u(z) \\ \vec{H}_t = \vec{h}_t i(z) \end{cases} \quad (2-1-9)$$

注意:从场论一开始,就要搞清楚任何一个场(例如电场  $\vec{E}$ )是由两大因素决定:场的方向和变化函数,且这两个因素是相互独立的。例如, $z$  方向的电场  $E_z$  可以随空间位置( $x, y$ )变化。

在式(2-1-9)中  $\vec{e}_t$  表示横向分量是随  $x, y$  的变化函数,而  $u(z)$  表示随  $z$  变化。

式(2-1-9)默认了一种逻辑,即  $\vec{E}_t$  中横向变化分量和纵向变化分量可以分离变量,其中,把  $u(z)$  和  $i(z)$  称之为模式电压与模式电流。

假定归一化约束条件

$$\iint_S \vec{e}_t \times \vec{h}_t \cdot \hat{z} dS = 1 \quad (2-1-10)$$

$$\begin{cases} \hat{z} \times \vec{h}_t \frac{di(z)}{dz} = j\omega \epsilon \vec{e}_t u(z) \\ \hat{z} \times \vec{e}_t \frac{du(z)}{dz} = -j\omega \mu \vec{h}_t i(z) \end{cases} \quad (2-1-11)$$

方程(2-1-11)中第一式两边乘  $\vec{e}_t$ ,再用  $\iint_S dS$  做面积分;第二式两边乘  $\vec{h}_t$ ,也用  $\iint_S dS$  做面积分,得到

$$\begin{cases} \iint_S \hat{z} \times \vec{h}_t \cdot \vec{e}_t dS \frac{di(z)}{dz} = j\omega \epsilon \iint_S \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t dS u(z) \\ \iint_S \hat{z} \times \vec{e}_t \cdot \vec{h}_t dS \frac{du(z)}{dz} = -j\omega \mu \iint_S \vec{h}_t \cdot \vec{h}_t dS i(z) \end{cases} \quad (2-1-12)$$

$\vec{e}_t, \vec{h}_t, \hat{z}$  的方向关系如图 2-1-4 所示。

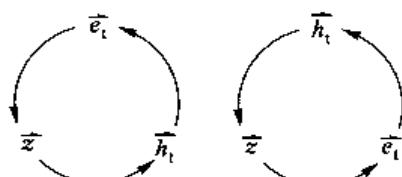


图 2-1-4  $\vec{e}_t, \vec{h}_t, \hat{z}$  的方向关系

由混合积法则,可以得到

$$\begin{cases} \iint_S (\vec{z} \times \vec{h}_1) \cdot \vec{e}_r dS = - \iint_S (\vec{e}_r \times \vec{h}_1) \cdot \vec{z} dS = -1 \\ \iint_S (\vec{z} \times \vec{e}_r) \cdot \vec{h}_1 dS = \iint_S (\vec{e}_r \times \vec{h}_1) \cdot \vec{z} dS = 1 \end{cases} \quad (2-1-13)$$

若令

$$\begin{cases} L = \mu \iint_S \vec{h}_1 \cdot \vec{h}_1 dS \\ C = \epsilon \iint_S \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS \end{cases} \quad (2-1-14)$$

则最后导出

$$\begin{cases} \frac{du(z)}{dz} = -j\omega L i(z) \\ \frac{di(z)}{dz} = -j\omega C u(z) \end{cases} \quad (2-1-15)$$

式(2-1-15)即广义传输线方程。

[例 1] 如图 2-1-5 所示的同轴传输线是典型的 TEM 模传输线。

$$\vec{H}_r = \frac{i(z)}{2\pi r} \hat{\phi} = \vec{h}_1 i(z)$$

其中

$$\vec{h}_1 = \frac{1}{2\pi r} \hat{\phi}$$

$$\vec{E}_r = \frac{\rho(z)}{2\pi r} \hat{r} = \vec{e}_r u(z)$$

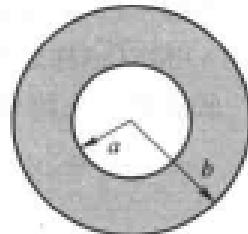


图 2-1-5 同轴传输线

设

$$\vec{e}_r = \frac{1}{\ln(\frac{b}{a})} \hat{r}$$

有

$$u(z) = \frac{\rho(z)}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

很明显, 上述做法使

$$\iint_S (\vec{e}_r \times \vec{h}_1) \cdot \vec{z} dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \frac{r dr}{2\pi r^2} \cdot \frac{1}{\ln(\frac{b}{a})} = 1$$

确实符合归一化条件。

根据定义

$$\begin{cases} L = \mu \iint_S \vec{h}_1 \cdot \vec{h}_1 dS = \mu \iint_S \frac{r dr d\varphi}{4\pi^2 r^2} = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ C = \epsilon \iint_S \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS = \epsilon \iint_S \frac{r dr d\varphi}{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2 r^2} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \\ \beta = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = k \\ Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

可清楚地看出：特性阻抗  $Z_0$  与波阻抗  $\eta$  的共同点是都有  $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  因子；不同点是特性阻抗  $Z_0$  还与传输线的几何因子  $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$  有关，如图 2-1-6 所示。

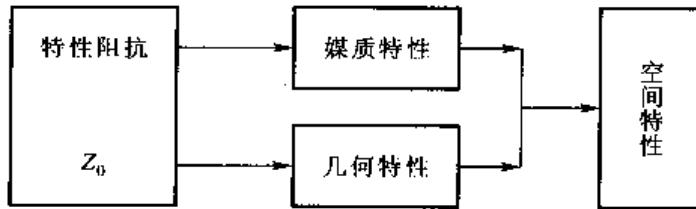


图 2-1-6 特性阻抗

### 2. TE(transverse electric)模情况 ( $E_z = 0$ )

TE 横电模情况下， $z$  方向的电场  $E_z = 0$ 。

由式(2-1-6)和式(2-1-7)，可写出这时的横向方程，为

$$\begin{cases} \hat{z} \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu \vec{H}_t \\ \nabla_t \times (\hat{z} H_z) + \hat{z} \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon \vec{E}_t \end{cases} \quad (2-1-16)$$

$$\nabla_t \times \vec{E}_t = -j\omega\mu \hat{z} H_z \quad (2-1-17)$$

对方程(2-1-17)两边取旋度

$$\nabla_t \times \nabla_t \times \vec{E}_t = \nabla_t (\nabla_t \cdot \vec{E}_t) - \nabla_t^2 \vec{E}_t = -j\omega\mu \nabla_t \times (\hat{z} H_z) \quad (2-1-18)$$

$$\text{其中 } \nabla \cdot \vec{E} = \left( \nabla_t + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{E}_t + \hat{z} E_z) = \nabla_t \cdot \vec{E}_t = 0 \quad (2-1-19)$$

于是可得

$$\nabla_t \times (\hat{z} H_z) = \frac{\nabla_t^2 \vec{E}_t}{j\omega\mu} \quad (2-1-20)$$

把式(2-1-20)代入式(2-1-16)，得

$$\begin{cases} \hat{z} \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon \left( \vec{E}_t + \frac{\nabla_t^2 \vec{E}_t}{k^2} \right) \\ \hat{z} \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu \vec{H}_t \end{cases} \quad (2-1-21)$$

令

$$\begin{cases} L = \mu \iint_S \vec{h}_t \cdot \vec{h}_t dS \\ C = \epsilon \iint_S \left( \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t + \frac{\vec{e}_t}{k^2} \cdot \nabla_t^2 \vec{e}_t \right) dS \end{cases} \quad (2-1-22)$$

同样可得到广义传输线方程，即式(2-1-15)。

### 3. TM(transverse magnetic)模情况 ( $H_z = 0$ )

TM 横磁模情况下, 对应  $z$  方向的磁场  $H_z = 0$ 。

由式(2-1-6)和式(2-1-7), 可写出这时的横向方程为

$$\begin{cases} \hat{z} \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega \epsilon \vec{E}_t, \\ \nabla_t \times (\hat{z} \vec{E}_z) + \hat{z} \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega \mu \vec{H}_t, \end{cases} \quad (2-1-23)$$

$$\nabla_t \times \vec{H}_t = j\omega \epsilon \hat{z} \vec{E}_z, \quad (2-1-24)$$

类似地, 对式(2-1-24)两边取旋度, 得

$$j\omega \epsilon \nabla_t \times (\hat{z} \vec{E}_z) = \nabla_t \times \nabla_t \times \vec{H}_t = \nabla_t (\nabla_t \cdot \vec{H}_t) - \nabla_t^2 \vec{H}_t$$

其中

$$\nabla_t \cdot \vec{H}_t = \left( \nabla_t + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{H}_t + \hat{z} H_z) = \nabla_t \cdot \vec{H}_t = 0$$

于是可以得到

$$\nabla_t \times (\hat{z} \vec{E}_z) = -\frac{\nabla_t^2 \vec{H}_t}{j\omega \epsilon} \quad (2-1-25)$$

把式(2-1-25)代入式(2-1-23), 可得 TM 模的两个方程, 为

$$\begin{cases} \hat{z} \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega \epsilon \vec{E}_t, \\ \hat{z} \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega \mu \left( \vec{H}_t + \frac{\nabla_t^2 \vec{H}_t}{k^2} \right) \end{cases} \quad (2-1-26)$$

令

$$\begin{cases} L = \mu \iint_S \left( \vec{h}_t \cdot \vec{h}_t + \vec{h}_t \cdot \frac{\nabla_t^2 \vec{h}_t}{k^2} \right) dS \\ C = \epsilon \iint_S (\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t) dS \end{cases} \quad (2-1-27)$$

又一次得到广义传输线方程, 即式(2-1-15)。

### 三、从双导线到波导

现在, 可以归纳一下上面导出的数学结果。不论是 TEM 模、TE 模或者 TM 模情况均可写出

$$\begin{cases} L = \mu \iint_S \left( \vec{h}_t \cdot \vec{h}_t + \vec{h}_t \cdot \frac{\nabla_t^2 \vec{h}_t}{k^2} \right) dS \\ C = \epsilon \iint_S \left( \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t + \vec{e}_t \cdot \frac{\nabla_t^2 \vec{e}_t}{k^2} \right) dS \end{cases} \quad (2-1-28)$$

且满足广义传输线方程

$$\begin{cases} \frac{du(z)}{dz} = -j\omega L i(z) \\ \frac{di(z)}{dz} = -j\omega C u(z) \end{cases} \quad (2-1-29)$$

注意:对于 TEM 模情况,可以证明

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \vec{h}_t \equiv 0 \\ \nabla_t^2 \vec{e}_t \equiv 0 \end{cases} \quad (2-1-30)$$

从上面可以看出:波导的任意情况在  $z$  方向都可以作为广义传输线。波导作为对于双导线的一种扩展,是上升到更高程度的广义传输线。所以,双导线的所有分析方法(包括 Smith 圆图)都可以用到波导,如图 2-1-7 所示。

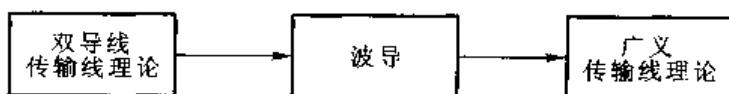


图 2-1-7 传输线理论

[例 2] 试说明波导传输线参量的不确定性和附加约束条件。

解:在一般波导问题中,  $\vec{e}_t$ 、 $\vec{h}_t$  和  $u(z)$ 、 $i(z)$  存在不确定性

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \vec{e}_t u(z) \\ \vec{H}_t = \vec{h}_t i(z) \end{cases}$$

事实上,又可写出(令  $A$  是任意常数)

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \left[ \frac{1}{A} \vec{e}_t \right] \cdot [A u(z)] = \vec{e}'_t u'(z) \\ \vec{H}_t = [A \vec{h}_t] \cdot \left[ \frac{1}{A} i(z) \right] = \vec{h}'_t i'(z) \end{cases}$$

这样假定绝不影响归一化条件

$$\iint_S \vec{e}_t \times \vec{h}_t \cdot \hat{z} dS = 1$$

而

$$\begin{cases} L' = A^2 L \\ C' = \frac{1}{A^2} C \end{cases}$$

且特性阻抗也不唯一

$$Z'_0 = A^2 Z_0$$

为了解决这一问题,常常再加一附加约束条件,例如

$$\left| \frac{\vec{e}_t}{\vec{h}_t} \right| = 1 \quad (2-1-31)$$

使问题确定下来。

## 作业 PROBLEMS 2-1

1. 试证明:在如图 2-1-8 所示的空心波导内部不可能存在 TEM 模。

不同截面的波导在广义传输线理论中有什么不同?

$$\begin{cases} \frac{du(z)}{dz} = -j\omega L i(z) \\ \frac{di(z)}{dz} = -j\omega C u(z) \end{cases}$$

试具体说明之。

证明在 TEM 模情况下

$$\nabla^2 \vec{E}_z = 0$$

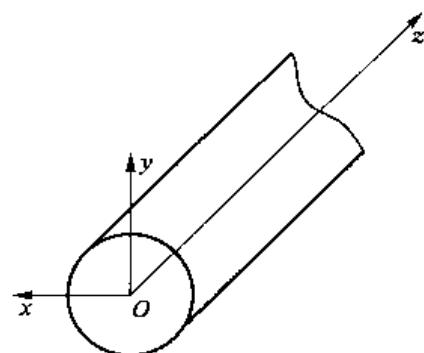


图 2-1-8 空心波导

2-2

## 矩形波导 TE<sub>10</sub> 模(I) TE<sub>10</sub> Mode in Rectangular Waveguide (I)

本节主要讲述矩形波导中的 TE<sub>10</sub> 模, 将先从矩形波导的一般解开始讲起。

### 一、矩形波导的一般解

写出无源  $J=0$  区域的 Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (2-2-1)$$

作为例子, 对式(2-2-1)中第二式两边取旋度

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -j\omega \mu \nabla \times \vec{H} \\ &= \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = k^2 \vec{E} \end{aligned}$$

可以得到支配方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (2-2-2)$$

矩形波导的一般解采用纵向分量法, 其流图如图 2-2-1 所示, 式(2-2-2)也称为 Helm-

holtz 方程。

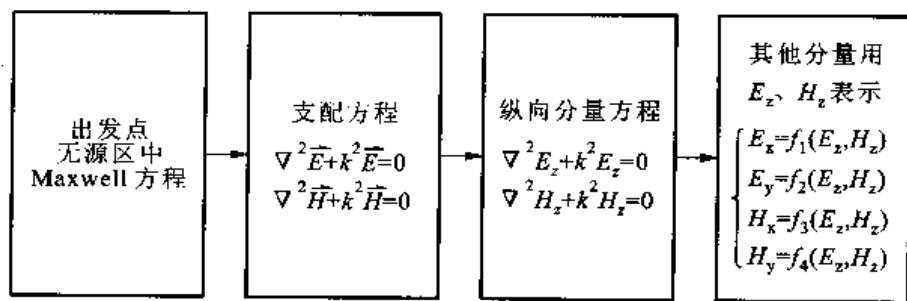


图 2-2-1 纵向分量法流图

### 1. 纵向分量方程

$$\begin{cases} \nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \\ \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \end{cases} \quad (2-2-3)$$

假定  $E_z$ (或  $H_z$ )可分离变量,也即

$$\begin{cases} E_z = E(x, y)Z(z) \\ H_z = H(x, y)W(z) \end{cases} \quad (2-2-4)$$

且

$$\nabla^2 = \nabla_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2-2-5)$$

代入式(2-2-3),可知

$$\frac{\nabla_x^2 E(x, y)}{E(x, y)} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (2-2-6)$$

由于其独立性,上式各项均为常数

$$\begin{cases} \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \gamma^2 \\ \frac{\nabla_x^2 E(x, y)}{E(x, y)} + k_c^2 = 0 \end{cases} \quad (2-2-7)$$

其中

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 \quad (2-2-8)$$

称为截止波数,则式(2-2-7)中第一方程的解是

$$Z(z) = C_1 e^{-\gamma z} + C_2 e^{\gamma z} \quad (2-2-9)$$

十分有趣的是:波导解的  $Z(z)$  函数与传输线解有惊人的相似,也是入射波和反射波的组合,于是只需研究一个模(不论是 TE 模还是 TM 模),而且在形式上只需写入射波,有

$$\begin{cases} E_z = E(x, y)e^{-\gamma z} \\ H_z = H(x, y)e^{-\gamma z} \end{cases} \quad (2-2-10)$$

且

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -\gamma$$

### 2. 横向分量用纵向分量表示

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = j\omega\epsilon (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\epsilon E_x \\ -\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \end{array} \right. \quad (2-2-11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j\omega\mu (H_x \hat{x} + H_y \hat{y} + H_z \hat{z})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega\mu H_x \\ -\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \end{array} \right. \quad (2-2-12)$$

先整理  $E_x, H_y$  方程组, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} j\omega\epsilon E_x - \gamma H_y = \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ -\gamma E_x + j\omega\mu H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{array} \right.$$

$$D = \begin{vmatrix} j\omega\epsilon & -\gamma \\ -\gamma & j\omega\mu \end{vmatrix} = -k^2 - \gamma^2 = -k_c^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} & -\gamma \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & j\omega\mu \end{vmatrix} = \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} j\omega\epsilon & \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ -\gamma & \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{vmatrix} = j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = -\frac{1}{k_c^2} \left( \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ H_y = -\frac{1}{k_c^2} \left( j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (2-2-13)$$

再整理  $E_y, H_x$  方程组, 得

$$\begin{cases} j\omega\epsilon E_y + \gamma H_x = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \gamma E_y + j\omega\mu H_x = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} j\omega\epsilon & \gamma \\ \gamma & j\omega\mu \end{vmatrix} = -k_c^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -\frac{\partial H_z}{\partial x} & \gamma \\ -\frac{\partial E_z}{\partial y} & j\omega\mu \end{vmatrix} = \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} j\omega\epsilon & -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \gamma & -\frac{\partial E_z}{\partial y} \end{vmatrix} = -j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\begin{cases} E_y = \frac{1}{k_c^2} \left( -\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_x = \frac{1}{k_c^2} \left( j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (2-2-14)$$

把式(2-2-13)和式(2-2-14)进一步归纳成矩阵形式, 得

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\epsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\epsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2-2-15)$$

注意:  $E_z$  和  $H_z$  的横向函数要依赖具体的边界条件。

## 二、矩形波导的横向解

在矩形波导中存在 TE 和 TM 两类模, 注意: 矩形波导中不可能存在 TEM 模(推而广之, 任何空心管中都不可能存在 TEM 模)。

这里以 TE 模为例进行讨论, 即  $E_z=0$ , 对于纵向分量只须讨论  $H_z$ 。

在图 2-2-2 所示的矩形波导坐标系中, 由于

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

有

$$\frac{\nabla_1^2 H_z(x, y)}{H_z(x, y)} + k_c^2 = 0$$

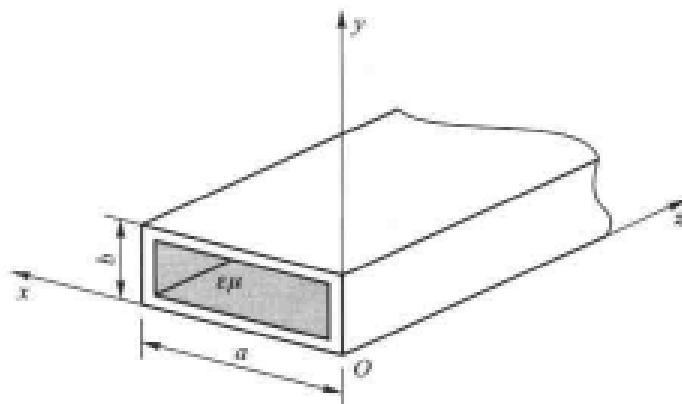


图 2-2-2 矩形波导坐标系

则矩形波导的横向解是

$$\frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial y^2} = -k_z^2 H_z(x, y) \quad (2-2-16)$$

再令  $H_z(x, y)$  可分离变量, 即  $H_z(x, y) = X(x)Y(y)$ , 式(2-2-16)可写为

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_z^2 \quad (2-2-17)$$

可以判断方程(2-2-17)左边每项都是常数, 可得

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \\ k_x^2 + k_y^2 = k_z^2 \end{cases} \quad (2-2-18)$$

一般解为

$$X = A \cos(k_x x + \varphi_x); Y = B \cos(k_y y + \varphi_y)$$

可写出总的纵向磁场

$$H_z = H_0 \cos(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) e^{-j\gamma z} \quad (2-2-19)$$

下面的主要目标是利用边界条件确定  $k_x$ 、 $k_y$ 、 $\varphi_x$  和  $\varphi_y$ 。

请注意:  $H_0$  在问题中认为是未知数, 与具体激励强度有关。

[这里提出一个可思考的问题: 为什么不要求  $\gamma$  ( $\gamma = \sqrt{k_z^2 - k^2}$ )?]

根据横向分量可以用纵向分量表示, 有

$$\begin{cases} E_x = -\frac{j\omega\mu}{k_z^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = H_0 \frac{j\omega\mu}{k_z^2} k_y \cos(k_x x + \varphi_x) \sin(k_y y + \varphi_y) e^{-j\gamma z} \\ E_y = \frac{j\omega\mu}{k_z^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -H_0 \frac{j\omega\mu}{k_z^2} k_x \sin(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) e^{-j\gamma z} \end{cases}$$

利用边界条件, 即在波导的 4 个边壁上电场切向分量为 0, 有

$$\begin{cases} E_x = 0 & x=0, x=a \\ E_y = 0 & y=0, y=b \end{cases}$$

确定  $k_x$ 、 $k_y$ 、 $\varphi_x$  和  $\varphi_y$ , 有

$$\begin{aligned}x=0, E_y=0, \text{可得 } \varphi_x=0 & & k_x=\frac{m\pi}{a}, m \text{ 为整数} \\x=a, E_y=0, \text{可得 } k_x a=m\pi & \\y=0, E_x=0, \text{可得 } \varphi_y=0 & & k_y=\frac{n\pi}{b}, n \text{ 为整数} \\y=b, E_x=0, \text{可得 } k_y b=n\pi & \end{aligned}$$

最后得到

$$\left\{\begin{array}{l}H_z=H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\E_x=j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\E_y=-j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\E_z=0 \\H_x=\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\H_y=\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z}\end{array}\right. \quad (2-2-20)$$

其中,有约束条件

$$k_c^2=k_x^2+k_y^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (2-2-21)$$

上述 TE 模称为  $\text{TE}_{mn}$  模。

其中,  $m$  表示  $x$  方向变化的半周期数;  $n$  表示  $y$  方向变化的半周期数。

关于本征模的讨论:

以矩形波导为例,尽管在  $z$  方向它们只可能是入射波加反射波(即还是广义传输线),但是由于横向边界条件的约束,它们由  $\text{TE}_{mn}$  和  $\text{TM}_{mn}$  模组成并且只能由  $\text{TE}_{mn}$  和  $\text{TM}_{mn}$  模组成(后者称为完备性),矩形波导中这些模的完备集合就是本征模。

任何情况的可能解,只能在本征模中找,具体场合所不同的仅仅是比例和组合系数,事实上,这样就把求复杂场函数的问题变换成为求各个模式的系数问题。

这种思想,最早起源于矢量分析,任何空间矢量的方向与大小均不相同,但是建立  $x$ 、 $y$ 、 $z$  坐标系之后,任一(三维)矢量即归结为了 3 个系数:  $x$ 、 $y$  和  $z$ ,如图 2-2-3 所示。

$$\vec{r}=x \hat{x}+y \hat{y}+z \hat{z}$$

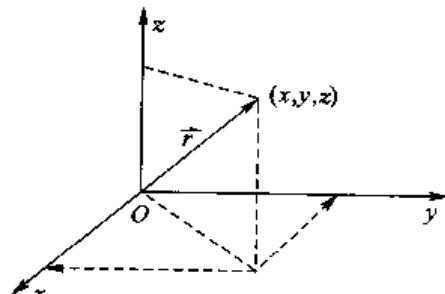


图 2-2-3 矢量的坐标表示

### 三、 $\text{TE}_{10}$ 模

$\text{TE}_{10}$  模,即  $\text{TE}_{mn}$  模中下标  $m=1, n=0$  的情况,是满足  $a>b$  的条件下的矩形波导中截止频率最低的模式,它也正是矩形波导中波传播的主模式。其电磁场的具体形式如下:

$$\begin{cases} H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ E_y = -j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ H_x = \frac{j\beta}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \end{cases}$$

只取其实部解,得

$$\begin{cases} H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta z) \\ E_y = \frac{\omega \mu}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_x = -\frac{\beta}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta z) \end{cases}$$

图 2-2-4 给出了 TE<sub>10</sub> 模对应的场结构,注意在图中:

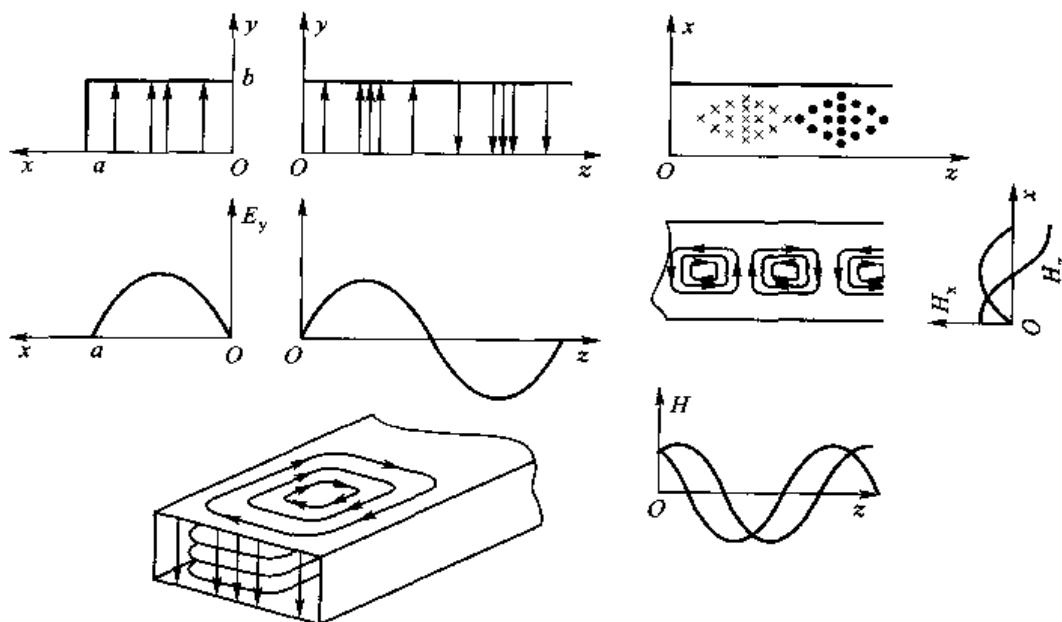


图 2-2-4 TE<sub>10</sub> 模场结构

- ① 场存在方向和大小两个不同概念,场的大小是以力线密度表示的。
- ② 同一点不能有两根以上力线。
- ③ 磁力线永远闭合,电力线与导体边界垂直。
- ④ 电力线和磁力线相互正交。

#### 1. TE<sub>10</sub> 模的截止特性

由于  $k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = k^2 - \beta^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$ , 而传播的相位因子  $e^{-j\beta z}$  中, 如  $\beta$  需要是实数, 必满足  $\beta^2 = k^2 - k_c^2 > 0$  或  $k > k_c$

也即要传播 TE<sub>10</sub> 模必须满足

$$\frac{2\pi}{\lambda} > \frac{\pi}{a} \quad \lambda < 2a \quad (2-2-22)$$

为此定义

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad (2-2-23)$$

其中,  $\lambda_c = 2a$  称为截止波长;  $k_c$  是对应的截止波数。

因此, 在这种意义下, 波导是一个高通滤波器, “低频”信号无法通过。

### 2. 波导波长 $\lambda_g$

波导波长  $\lambda_g$  的定义为

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (2-2-24)$$

很明显, 波导波长  $\lambda_g$  大于自由空间波长  $\lambda$ 。设传播常数  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ , 则有

$$\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2$$

即可推导得

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

### 3. 相速 $v_p$

矩形波导中的相速定义为

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} > c \quad (2-2-25)$$

已知相位因子构成的等相面

$$\begin{aligned} \omega t - \beta z &= \text{常数} \\ v_p = \frac{dz}{dt} &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi c/\lambda}{2\pi/\lambda_g} = c \frac{\lambda_g}{\lambda} \\ &= \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \end{aligned}$$

显然相速  $v_p$  大于自由空间光速, 但相速并不是能量传播速度。

### 4. 群速 $v_g$

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{d\beta} \\ \beta &= \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - k_c^2} \\ \frac{d\beta}{d\omega} &= \frac{1}{2} \frac{2\omega \epsilon \mu}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{k^2 / \omega}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{v_p}{c^2} \end{aligned}$$

于是

$$v_g = \frac{c^2}{v_p} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} < c \quad (2-2-26)$$

且

$$v_R v_p = c^2 \quad (2-2-27)$$

### 5. 波型阻抗 $\eta$

$$\begin{aligned} \eta &= \left| \frac{E_t}{H_t} \right| = \left| \frac{E_y}{H_x} \right| = \eta_0 \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right) \\ &= \frac{\omega \mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}} \end{aligned} \quad (2-2-28)$$

根据定义明显有

$$|E_y| = \eta |H_x| \quad (2-2-29)$$

注意：在  $TE_{10}$  模各参数中唯独波型阻抗  $\eta$  要特别讨论。

前面已经讲过在空间影响波传输和反射的是波阻抗  $\eta_0$ ，在同轴线中影响反射的是特性阻抗  $Z_0$ 。

而  $TE$ 、 $TM$  模的传输线，由于  $Z_0$  缺乏唯一性而增加了其复杂性，矩形波导的特性阻抗

$$Z_0 = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}} \quad (2-2-30)$$

它与波型阻抗相差  $\frac{b}{a}$  因子。

## 作业 PROBLEMS 2-2

图 2-2-5 所示为截面为  $a \times b$  的矩形波导，求其中可能传播的 TM 模的场的表示形式。它与 TE 模有何不同？试加以比较。

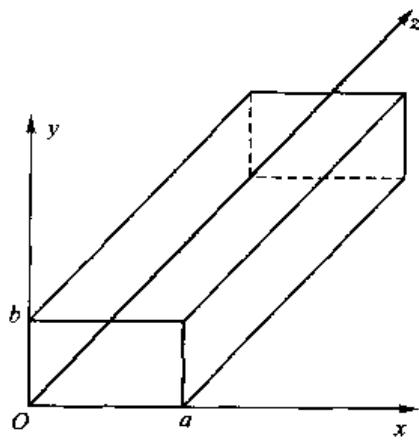


图 2-2-5 第 1 题图

已知均匀空间填充  $\epsilon, \mu$  介质，且电场  $\vec{E}$  只有  $\hat{y}$  分量，即

$$\vec{E} = \hat{y} E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-ipz}$$

试求磁场  $\vec{H}$  的各个分量。

## 2-3

## 矩形波导 TE<sub>10</sub>模(Ⅱ) TE<sub>10</sub> Mode in Rectangular Waveguide (Ⅱ)

回顾一下矩形波导求解思路产生的过程,如图 2-3-1 所示。

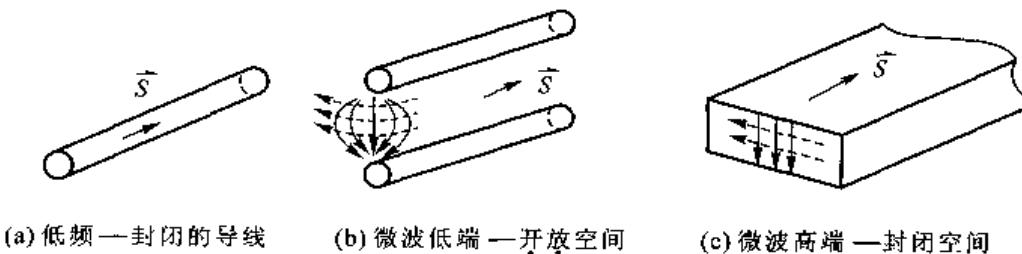


图 2-3-1 微波导波系统的产生和变化

低频传输线的能量主要封闭在导线内部。随着频率的升高,能量开放在导线之间的空间。这是由封闭结构到开放结构的第一过程。

随着频率的进一步升高,开放空间受干扰,影响太大。又开始用枝节再一次封闭起来,使能量在内部传输。这是由开放结构走向封闭结构的第二过程,它是对第一过程的否定。但是这一次所封闭的不是导线内部,而是空间内部。

这种做法使微波能量既在空间传输,又是封闭的。

上一节研究的 TE<sub>10</sub> 模主要特性可以归纳性地总结如下:

场方程:

$$\begin{cases} H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ E_y = -j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ H_x = j \frac{\beta}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \end{cases}$$

场结构如图 2-3-2 所示。

传输条件

$$\lambda < \lambda_c = 2a$$

波导波长

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

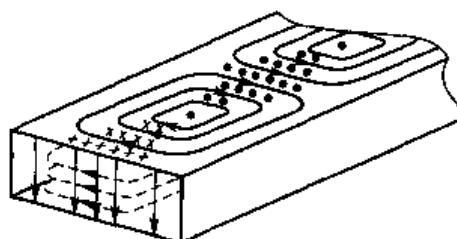


图 2-3-2 TE<sub>10</sub> 模场结构

相速

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

波型阻抗

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

## 一、TE<sub>10</sub>模的另一种表示

上面给出的 TE<sub>10</sub> 模表达式是以  $H_z$  为领矢矢量。然而，在实用上也常有用  $E_y$  作领矢矢量，即设

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \quad (2-3-1)$$

利用 Maxwell 方程

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -j\beta \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = j\beta E_y \hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{z} = -j\omega\mu(H_x \hat{x} + H_y \hat{y} + H_z \hat{z})$$

于是最终得到

$$\begin{cases} E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ H_z = j \frac{1}{\omega\mu} \left(\frac{\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (2-3-2)$$

很明显

$$\left| \frac{E_y}{H_x} \right| = \eta = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

## 二、TE<sub>10</sub>模的功率和容量

根据电磁场理论，传输方向的实功率可写为

$$P = \iint_S \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_S \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^*) \cdot \hat{z} dx dy \quad (2-3-3)$$

其中,  $\vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0)$  是 Poynting(坡印亭)矢量,  $d\vec{\sigma}$  是面积元, 如图 2-3-3 所示。

$$d\vec{\sigma} = \hat{z} dx dy$$

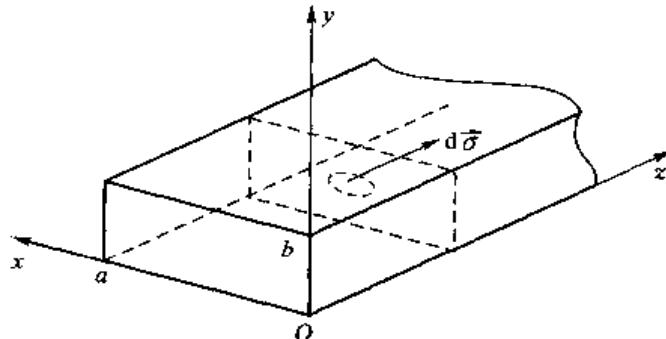


图 2-3-3 计算功率时的面积元

因此功率为

$$\begin{aligned} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx dy \\ P &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} b \int_0^a \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right] dx \\ &= \frac{1}{4} \frac{E_0^2}{\eta} ab \end{aligned} \quad (2-3-4)$$

空气波导  $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi$ , 因此  $P = \frac{E_0^2 ab}{480\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$

非磁介质波导  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ , 因此  $P = \frac{E_0^2 ab \sqrt{\epsilon_r}}{480\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$

注意: 对非磁介质波导,  $\lambda = \frac{\lambda_c}{\sqrt{\epsilon_r}}$  表示介质中的波长。

在实际工程中存在功率容量问题,  $E_0$  不能超过击穿场强  $E_{max}$ , 对应有功率容量  $P_{max}$ 。  
 $P_{max}$  的表达式为

$$\begin{cases} P < P_{max} \\ P_{max} = \frac{E_{max}^2 ab \sqrt{\epsilon_r}}{480\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \end{cases} \quad (2-3-5)$$

**【讨论】** ① 功率容量  $P_{max}$  与波导面积  $ab$  成正比。因为低频雷达的波长长, 波导面积大, 所以低频雷达功率容量大。

② 作为典型数据, 一般空气中的击穿场强  $E_{max} = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ 。

③ 功率容量  $P_{max}$  与  $\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$  有关。

设  $x = \frac{\lambda}{\lambda_c}$ ,  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , 则  $f(x)$  曲线图如图 2-3-4 所示。

很明显,如图 2-3-4 所示,  $x$  愈接近 1, 则功率容量愈低, 且  $x < 0.5$  会出现其他模式。于是, 能取的工作波长范围为

$$0.5 < \frac{\lambda}{\lambda_c} < 0.9 \quad (2-3-6)$$

目前的雷达研制中, 对提高峰值功率容量极为重视。因为在一定意义上, 功率就是作用距离, 所以提高传输线功率容量相当重要。

气体击穿的实质是场拉出的游离电子在撞到气体分子之前已具有足够的动能, 再次打出电子, 形成连锁反应, 以致击穿。如果加大气体密度, 就不会出现很大动能的电子, 所以加大气压和降低温度是增加耐压功率的常用办法。

实验表明: 对于空气, 耐压功率近似与气压的 5 次或 4 次方成正比, 而与绝对湿度和温度成反比。绝对湿度每增加  $2.5 \text{ g/m}^3$ , 耐压功率下降 6%。

在工程中常见的填充波导的气体是  $\text{SF}_6$  和  $\text{CF}_2\text{F}_2$ , 其耐压功率的实验结果如表 2-3-1 和表 2-3-2 所示。

表 2-3-1 不同气体、不同气压时耐压功率实验结果(相对值)

大气压	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
充空气(干)	1.0	1.7	2.4	4.0	5.7
充 $\text{SF}_6$ (干)	4.1	9.0	16.0	21.5	—

表 2-3-2 不同温度时的饱和水汽密度

温度/℃	0	10	20	30	40	50
饱和水汽密度/ $\text{g/m}^3$	4.84	9.4	17.3	30.3	51.2	83.0

上面的讨论认为系统为传输行波, 倘若系统传输驻波, 则耐压功率还会降低。如果令  $P_{\max 0}$  是驻波比为  $\rho$  时的入射功率, 则

$$P_{\max} = P_{\max 0} \frac{(\rho+1)^2}{4\rho^2} \quad (2-3-7)$$

一般地说, 驻波系数影响安全系数, 只要留 4 倍裕量足够。

此外, 在传输过程中, 传输介质的尖端棱角是最容易发生打火击穿的地方, 如图 2-3-5 所示, 在波导传输高功率微波时, 一定要注意去掉金属表面的毛刺。

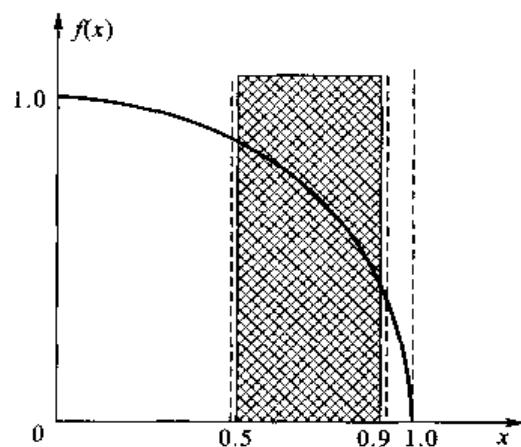


图 2-3-4  $f(x)$  曲线图

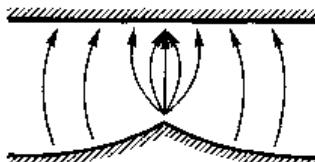


图 2-3-5 尖端效应影响耐压功率

### 三、 $TE_{10}$ 模内壁电流

在电磁理论中已经讲过波导内壁的表面传导电流分布是由壁上磁场的切向分量所决定的，如图 2-3-6 所示。

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_s \quad (2-3-8)$$

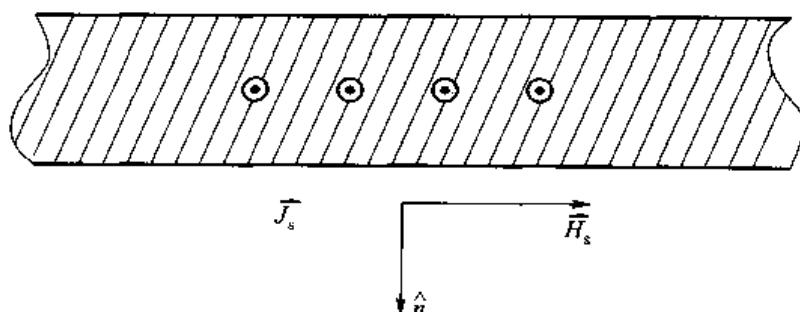


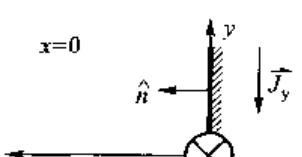
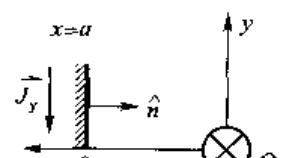
图 2-3-6 波导内壁电流

内壁电流有以下特点：

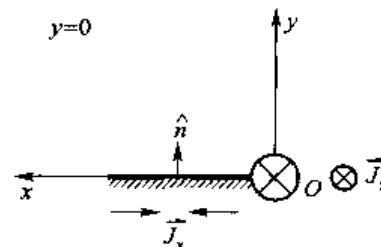
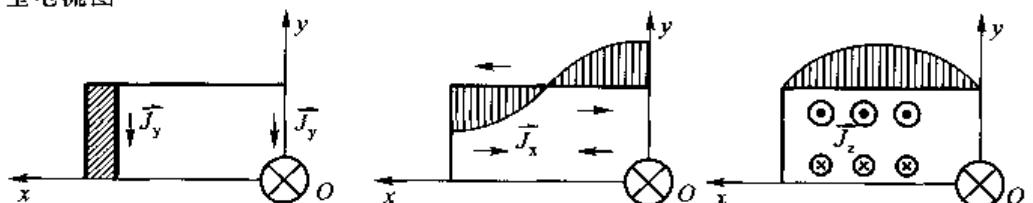
- ① 处于波导内壁。
- ② 大小等于  $|H_s|$ 。
- ③ 方向由  $\hat{n} \times \vec{H}_s$  决定。

矩形波导  $TE_{10}$  模内壁电流的分析如表 2-3-3 所示。

表 2-3-3 矩形波导  $TE_{10}$  模内壁电流

磁场瞬时表达式	
$\begin{cases} H_x = -\frac{a}{\pi} \beta H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta z) \end{cases}$	
	$H_x = 0$ $H_z = H_0 \cos(\omega t - \beta z), \hat{n} = \hat{x}$ $\hat{n} \times \vec{H}_s = \hat{x} \times \hat{z} H_z = -H_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{y}$
	$H_x = 0$ $H_z = -H_0 \cos(\omega t - \beta z), \hat{n} = -\hat{x}$ $\hat{n} \times \vec{H}_s = -\hat{x} \times \hat{z} H_z = -H_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{y}$

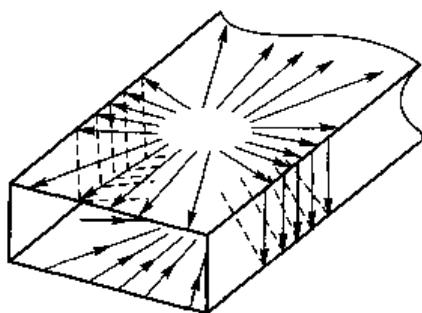
续表

	$\hat{H}_s = (H_x \hat{x} + H_z \hat{z}) _{y=0}, \hat{n} = \hat{y}$ $\hat{n} \times \hat{H}_s = (\hat{y} \times \hat{x})H_x + (\hat{y} \times \hat{z})H_z$ $J_z = -H_x _{y=0} = \frac{\beta a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta z)$ $J_x = H_z _{y=0} = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta z)$
横向和纵向壁电流图	
	

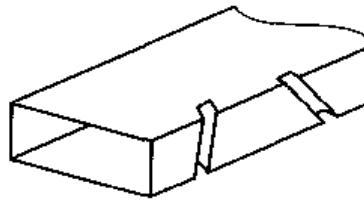
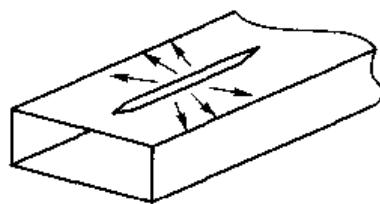
总的内壁电流如图 2-3-7 所示。

中间的源由场的变化——即位移电流  $\partial D / \partial t$  给予连续。

在波导中凡是切割电流都要引起辐射和损耗, 如图 2-3-8 所示, 所以, 波导与波导连接时一定要处理好。



(a) 波导内壁电流分布



(b) 裂缝天线——切割电流

图 2-3-7 波导内壁电流分布

图 2-3-8 不切割电流和切割电流的波导

#### 四、TE<sub>10</sub>模衰减

在矩形波导作为传输线运用时, 功率容量和衰减是一个问题的两个方面。增加功率容量是为了使通信和雷达“看”得远, 减小衰减是为了保证功率不受损失, 一个“增产”, 一个“节支”, 相互依存, 缺一不可。

一般认为波导内媒质是无耗的, 所谓衰减是指电流的壁损耗。如图 2-3-9 所示, 假定  $P_0$  是理想导体波导的传输功率, 则

$$P = P_0 e^{-2\alpha z}$$

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha P_0 e^{-2\alpha z}$$

于是

$$\alpha = \frac{dP/dz}{-2P} = \frac{P_L}{2P} \quad (2-3-9)$$

式中,  $P_L = -\frac{dP}{dz}$  表示单位长度内的功率损耗, 负号代表功率减少。在小衰减的条件下,  $P \approx P_0$ , 于是

$$\alpha \approx \frac{P_L}{2P_0} \quad (2-3-10)$$

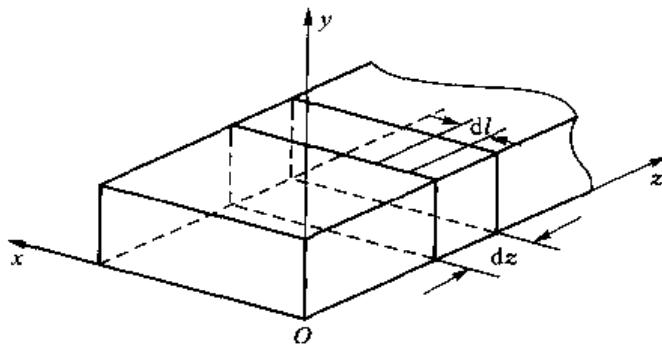


图 2-3-9 衰减计算用图

在波导内壁  $d\sigma = dl/dz$  上衰减功率

$$\delta P_L = \frac{1}{2} J_{sm}^2 R_s dl dz$$

式中,  $J_{sm}$  为表面电流密度;  $R_s$  为表面电阻。

$$\oint_C \delta P_L = \frac{1}{2} \oint_C J_{sm}^2 R_s dl dz = \frac{1}{2} R_s dz \oint_C J_{sm}^2 dl = \frac{1}{2} R_s dz \oint_C H_{sm}^2 dl$$

$$P_L = -\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2} R_s \oint_C H_{sm}^2 dl \quad (2-3-11)$$

其中,  $dP = -dP_L$ , 另一方面

$$P_0 = \frac{1}{2} \iint_S E_{tm} H_{tm} dS = \frac{1}{2} \eta \iint_S H_{tm}^2 dS$$

所以得到

$$\alpha = \frac{P_L}{2P_0} = \frac{R_s}{2\eta} \frac{\oint_C H_{sm}^2 dl}{\iint_S H_{tm}^2 dS} \quad \text{NP/m} \quad (2-3-12)$$

其中

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}, R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (2-3-13)$$

式(2-3-12)给出的单位是 NP/m,一般应采用 dB/m,两者之间的转化关系为

$$\alpha \text{ dB/m} = 8.686 \alpha \text{ NP/m}$$

可见,矩形波导中  $\text{TE}_{10}$  模的衰减

$$\begin{aligned} \oint_C H_{\text{sm}}^2 dl &= 2 \int_0^a (H_x^2 + H_z^2) |_{y=v} dx + 2 \int_0^b (H_x^2 + H_z^2) |_{x=0} dy \\ &= a H_0^2 \left[ \left( \frac{\beta a}{\pi} \right)^2 + 1 \right] + 2b H_0^2 \\ \iint_S H_{\text{tm}}^2 dS &= \int_v^a \int_0^b H_x^2 dx dy = \frac{ab}{2} \left( \frac{\beta a}{\pi} \right)^2 H_0^2 \end{aligned}$$

因此

$$\alpha = \frac{R_s}{2\eta} \frac{\oint_C H_{\text{sm}}^2 dl}{\iint_S H_{\text{tm}}^2 dS} = \frac{R_s}{b \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}} \left[ 1 + \frac{2b}{a} \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]$$

注意

$$\begin{aligned} \frac{\beta a}{\pi} &= \frac{2a}{\lambda_g} \\ \left( \frac{1}{\lambda_g} \right)^2 &= \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 - \left( \frac{1}{2a} \right)^2 \\ \alpha &= \frac{8.686 R_s}{120 \pi b} \frac{1 + \frac{2b}{a} \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}} \text{ dB/m} \end{aligned}$$

对于常用的铜材料,其  $R_s = 2.61 \times 10^{-7} \sqrt{f}$ 。于是有

$$\alpha = \frac{1.90 \times 10^{-4} \sqrt{f_{\text{GC}}}}{b} \frac{\left[ 1 + \frac{2b}{a} \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}} \text{ dB/m} \quad (2-3-14)$$

式中,  $f_{\text{GC}}$  表示以 GHz 为单位的频率值。要使矩形波导衰减小,就要求波导窄边  $b$  大。而且,衰减系数  $\alpha$  对频率而言有最佳值,如图 2-3-10 所示。一般来说,  $\alpha$  的数量级是 0.01 dB/m 左右。为了确保电流损耗小,镀覆金或者银等材料的厚度要超过趋肤深度  $\delta$ 。

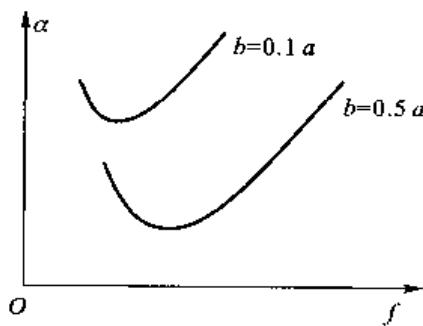


图 2-3-10 衰减系数随频率变化的曲线

## 附录 APPENDIX

### 矩形波导衰减极值

已经知道，在矩形波导 TE<sub>10</sub> 模中

$$\alpha = \frac{8.686 R_s}{120\pi b} \frac{1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \text{ dB/m}$$

可以令  $x = \frac{\lambda}{2a}$ ，且

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi c\mu}{2a\sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

于是，对  $a$  优化时，所考虑的极值函数为

$$f(x) = \frac{1}{b} \frac{1}{\sqrt{x-x^3}} + \frac{2}{a} \frac{x^2}{\sqrt{x-x^3}}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

也即

$$-\frac{1-3x^2}{2b(x-x^3)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8x(x-x^3)}{2a(x-x^3)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2x^2(1-3x^2)}{2a(x-x^3)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

最后得到

$$2bx^4 - (3a+6b)x^2 + a = 0$$

$$x = \sqrt{\left[\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{a}{b}\right)\right]} - \sqrt{\frac{a}{16}\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{28}{16}\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{36}{16}}$$

$\alpha$  极值数据如表 2-3-4 所示。

表 2-3-4  $\alpha$  极值数据

$a/b$	最佳 $x$ 值	$a/b$	最佳 $x$ 值
1	0.337 6	10	0.531 2
2	0.414 2	⋮	⋮
5	0.493 7	$\infty$	$0.577 35 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

其中  $a/b=\infty$  极限值是

$$x = \sqrt{\left[\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{a}{b}\right)\right] - \frac{3}{4}\left(\frac{a}{b}\right) \sqrt{1 + \frac{28}{9}\left(\frac{a}{b}\right)}}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{a}{b}\right)\right] - \frac{3}{4}\left(\frac{a}{b}\right) \left[1 + \frac{14}{9}\left(\frac{a}{b}\right)\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{7}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以,能获得最小衰减的  $\frac{\lambda}{2a}$  和  $a$  的范围为

$$0.3376 \leq \frac{\lambda}{2a} \leq 0.57735$$

$$0.86602\lambda \leq a \leq 1.4810\lambda$$

## 作业 PROBLEMS 2-3

① 矩形波导  $a \times b = 22.86 \times 10.16 \text{ mm}^2$ , 求其中主模  $\text{TE}_{10}$  模的可能工作频率范围。

② 在图 2-3-11 中画出  $\text{TE}_{10}$  模电磁场  $E_y$ 、 $H_x$  和  $H_z$  的具体场型图。

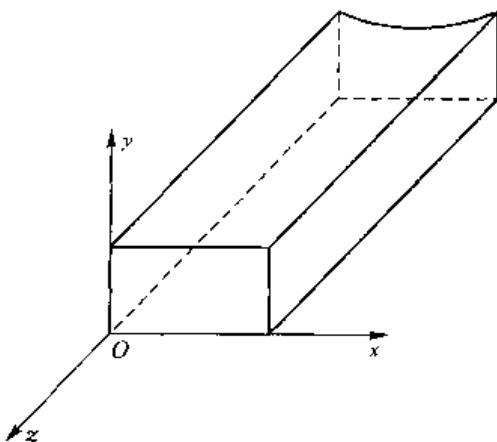


图 2-3-11 第 2 题图

③ 画出宽壁  $y=0$  的表面电流分布图。指出何处  $J_z$  最大。



## 矩形波导中的本征模 Eigen Modes in Rectangular Waveguide

前面几节中矩形波导的研究可以简要归纳如图 2-4-1 所示。

矩形波导的求解运用了典型的微分方程法,通解表明:在  $z$  方向它有广义传输线功能,即是入射波和反射波的叠加;在  $x$ 、 $y$  方向由于边界条件限制形成很多分立的  $\text{TE}_{mn}$  模( $E_z=0$ )和  $\text{TM}_{mn}$  模( $H_z=0$ ),在物理上称为离散谱。其中: $m$  表示  $x$  方向变化的半周期数; $n$  表示  $y$  方向变化的半周期数。

矩形波导中 TE 模和 TM 模的全部波的集合构成本征模。特别需要指出,本征模求解的出发点是无源 Maxwell 方程,因此,它集合了全部解,所以适合任何源的情况。

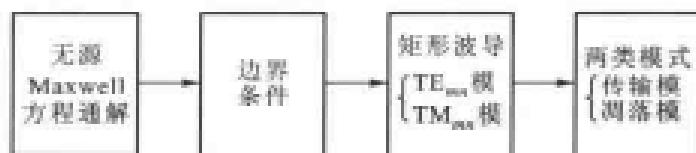


图 2-4-1 矩形波导的研究

## 一、本征模理论

本征模理论主要包括 3 个方面：

### 1. 完备性

矩形波导中不论放置什么障碍物,是什么边界条件或源激励,里边存在的总是  $TE_{mn}$  和  $TM_{mn}$  模式,而且,也只能存在  $TE_{mn}$  和  $TM_{mn}$  模式,具体情况所不同的仅仅是各种模式的比例与组合。

### 2. 正交性

本征模中各个模式是相互正交的,也就是说,它们之间没有功率和能量交换,即各模式相互独立,在 Fourier(傅里叶)分析中表明

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \left\langle \frac{\cos\left(\frac{l\pi}{a}x\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)} \right\rangle dx = 0 & \quad m \neq l \\ \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left\langle \frac{\cos\left(\frac{l\pi}{a}x\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)} \right\rangle dy = 0 & \quad n \neq p \end{aligned} \quad (2-4-1)$$

这就保证了每一模式的独立性。

### 3. 传输模和调落模

选择适当的工作频率,每一种模都有可能成为传输模或调落模,如表 2-4-1 所示。

表 2-4-1 传输模和调落模

$\text{截止波数 } k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda_c}$	
	$\text{截止波长 } \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$
传输模 $\lambda < \lambda_{cut}$	$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$
调落模 $\lambda > \lambda_{cut}$	$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2}$

注意：凋落模（也称截止模）是一种快速衰减的振荡模式。也就是说，在不同的 $z$ 处，有同一相位。当然，凋落模没有功率和能量传播。

当模式不同，但却有相同的 $k_c$ 时，称为简并模式。在矩形波导中， $TE_{mn}$ 模和 $TM_{mn}$ 模是简并的。

## 二、 $TE_{10}$ 模单模存在条件

当 $b < a$ 时， $m=1, n=0$ 的 $\lambda_c$ 最大（或者说 $f_c$ 最低）。

$TE_{10}$ 模称为矩形波导的主模（或者优势模），在绝大多数传输的应用场合都希望只传输 $TE_{10}$ 模，而其他模式都成为凋落模而不传输。

$TE_{10}$ 模单模存在条件是

$$\lambda_{cmn} < \lambda < \lambda_{c10} \quad (2-4-2)$$

其中， $\lambda_{c10} = 2a$ ，阶次最大的 $\lambda_{cmn}$ 将与 $a/b$ 之比值有关。

对于标准波导

$$a/b \approx 2.2 \quad (2-4-3)$$

$$\lambda_{cmn} \approx \frac{2a}{\sqrt{m^2 + 4.84n^2}} \quad (2-4-4)$$

其中， $m, n$ 取任意正整数，显然，对于式(2-4-4)，取 $m=2, n=0$ 比 $n=1, m=0$ 的 $\lambda_c$ 要大。因此，除 $TE_{10}$ 模之外，第二个截止波长最大的模是 $TE_{20}$ 模，即要求

$$a < \lambda < 2a \quad (2-4-5)$$

[例 1] BJ-100 波导， $a \times b = 22.86 \times 10.16 \text{ mm}^2$ ，求单模传输的波长范围和频率范围。

[解] 已经知道单模传输条件是

$$\lambda_{cmn} < \lambda < 2a$$

$$\lambda_{c10} = 2a = 45.72 \text{ mm}$$

$$\lambda_{c20} = a = 22.86 \text{ mm}$$

$$\lambda_{c01} = 2b = 20.32 \text{ mm}$$

$$\lambda_{c11} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = 18 \text{ mm}$$

$$\lambda_{c30} = \frac{2}{3}a = 15.25 \text{ mm}$$

$$\lambda_{c21} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = 15.10 \text{ mm}$$

各模式工作区域如图 2-4-2 所示。十分明显，除最大的 $\lambda_{c10}$ 之外，截止波长最大的模式是 $\lambda_{c20} = 22.86 \text{ mm}$ 。因此，单模传输的条件为

$$\begin{cases} 22.86 \text{ mm} < \lambda < 45.72 \text{ mm} \\ 6.55 \text{ GHz} < f < 13.10 \text{ GHz} \end{cases} \quad (2-4-6)$$

处理单模工作区的另一种办法是图解法，它等价于

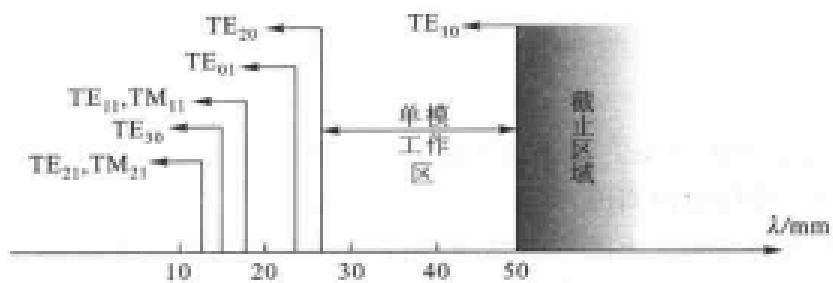


图 2-4-2 各模式工作区域

$$\lambda^2 < \frac{4}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (2-4-7)$$

于是可以写出

$$m^2 x^2 + n^2 y^2 < 4 \quad (2-4-8)$$

其中,  $x = \lambda/a$ ,  $y = \lambda/b$ 。

$TE_{mn}$  模的  $x$ 、 $y$  值范围如表 2-4-2 所示。

表 2-4-2  $TE_{mn}$  模的  $x$ 、 $y$  值范围

$TE_{10}$ 模	$m=1, n=0$	$x < 2$
$TE_{01}$ 模	$m=0, n=1$	$y < 2$
$TE_{21}$ 模	$m=2, n=0$	$x < 1$
$TE_{11}$ 模	$m=1, n=1$	$x^2 + y^2 < 4$ (圆)
$TE_{30}$ 模	$m=3, n=0$	$4x^2 + y^2 < 4$ (椭圆)

〔例 2〕画出工作模式图,以例 1 中的 BJ-100 波导为例,  $a = 22.86$  mm,  $b = 10.16$  mm。

〔解〕  $y = \frac{\lambda}{b} = \frac{\lambda}{a} \left( \frac{a}{b} \right) = 2.25x$

从如图 2-4-3 所示的工作模式图可清楚看出

$$1 < x < 2$$

或者

$$a < \lambda < 2a$$

### 三、高次模

对于矩形波导用做传输线时,  $TE_{10}$  模是主模(传输模), 其他模式都是高次模(调落模)。在均匀波导中, 一定频率范围内不出现任何高次模, 但是一旦波导中有不均匀性, 则在不均匀性周围就有高次模存在。

高次模衰减的模式为  $e^{-ax}$ , 其中

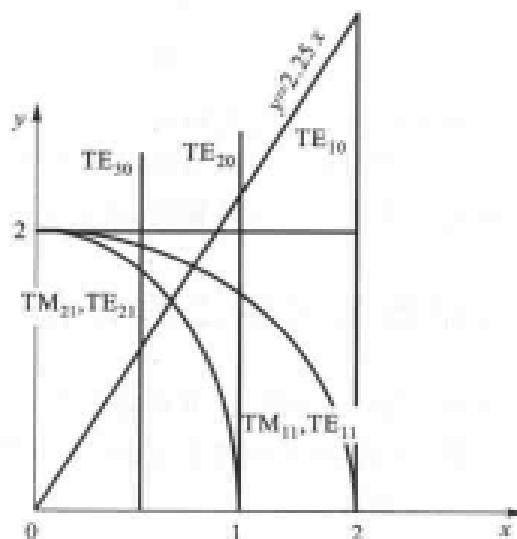


图 2-4-3 工作模式图

$$\alpha = \gamma = \frac{2\pi}{\lambda_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2} \quad (2-4-9)$$

式中,  $\lambda > \lambda_c$ 。

高次模相当于流体中的涡旋。涡旋是不流动的,但是,它对流体的流动却起到十分重要的作用,涡旋也经常出现在障碍物的周围,如图 2-4-4 所示。

注意:涡旋在有些场合有利于流体流动,而在有些场合却阻碍流体流动。

波导中的高次模对于主模  $TE_{10}$  模产生的作用相当于一个电抗,如图 2-4-5 所示。它在有的场合有利于传输,而在有的场合不利于传输,如图 2-4-6 所示。同时,因为高次模是衰减的,而且衰减很快,所以必须是局部的。

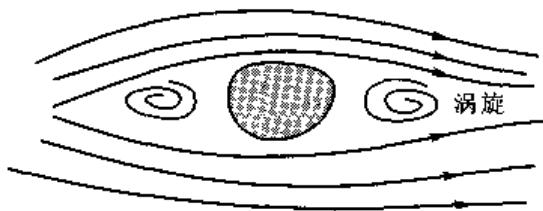


图 2-4-4 流体中的涡旋

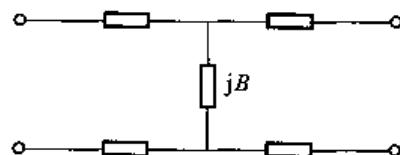
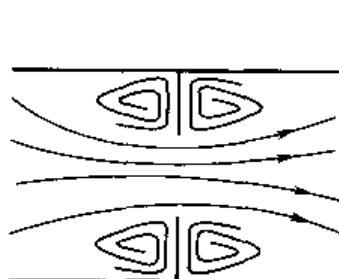
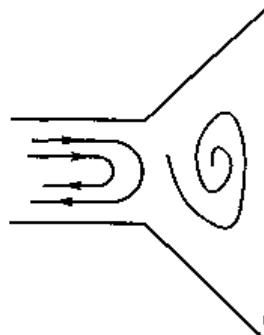


图 2-4-5 不均匀性引起的高次模  
对于主模相当于  $jB$



(a) 谐振窗高次模有利于传输



(b) 喇叭高次模造成反射

图 2-4-6 高次模对于主模传输产生的作用

上面所讨论的是高次模对于主模传输产生的作用。

实际上高次模本身还可起很大作用:当若干高次模传输时构成多模喇叭、多模传输线和多模谐振腔等。当使主模不传输时,则构成截止衰减器——它是绝对定标的。

## 四、矩形波导的工程设计

任何工程设计都是在处理若干个矛盾因素,矩形波导设计中有关的矛盾因素是:单模传输、功率容量、衰减、材料和加工方便、牢固等。

### 1. 功率容量要求

$$P_{max} = \frac{E_{max}^2 ab \sqrt{\epsilon_r}}{480\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

从上面公式可知,要使  $P_{max}$  增大,要求  $a$  尽量大、 $b$  尽量大,且  $\frac{\lambda}{2a} < 0.9$ , 即  $\lambda < 1.8a$ 。

## 2. 衰减要求

$$\alpha = \frac{8.686 R_s}{120\pi b} \frac{1 + \frac{2b}{a} \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}} \text{ dB/m}$$

从衰减角度希望  $b$  尽量大。

## 3. 单模传输要求

为了传输  $TE_{10}$  单模, 最适合范围是

$$a < \lambda < 2a$$

为了加宽频带, 在如图 2-4-7 所示的工作模式图中, 即动态曲线  $m$  的左方

$$\frac{\lambda}{b} \geq 2 \left( \frac{\lambda}{a} \right), \text{ 也即 } \left( \frac{b}{a} \right) \leq \frac{1}{2}$$

## 4. 材料要求

为了节约材料,  $a, b$  尽量小; 为了提高性能, 最好镀银、铜; 如果要节约成本和使重量轻, 则最好用铝或不锈钢(铝是铜重量的  $\frac{1}{3}$ )。

## 5. 加工方便和牢固的要求

从牢固的角度波导壁要厚一些; 而从成本角度则要薄一些。

为了加工方便, 一般对光洁度和公差要求较低。

最后, 可综合列出表 2-4-3。

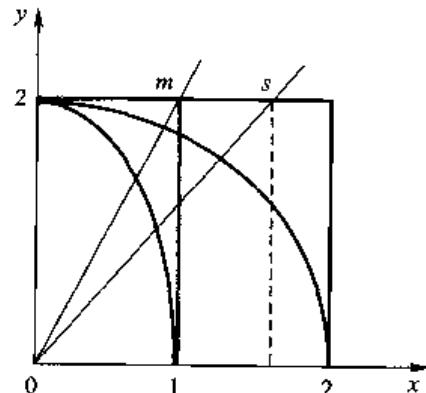


图 2-4-7 工作模式图

表 2-4-3 矩形波导工程设计

	$a$	$b$	$b/a$	波导壁	公差光洁度
功率容量	$a > \frac{\lambda}{1.8}$	大	—	—	—
衰 减	—	大	—	—	光洁度高
单模传输	$\frac{\lambda}{2} < a < \lambda$	—	$(\frac{b}{a}) \leq \frac{1}{2}$	—	—
材料要求	小	小	—	—	铜、铝(镀银)
加工要求	—	—	—	壁厚兼顾成本、牢固	光洁度、公差 要求一般

结论: ①  $0.555\lambda < a < \lambda$ 。

②  $b/a \leq 1/2$ 。

③ 材料铜、铝(镀银)。

④ 壁厚  $1.0 \sim 2.0 \text{ mm}$ 。

所以,一般选择

$$\begin{cases} a = 0.75\lambda \\ b = 0.4\lambda \sim 0.5\lambda \end{cases} \quad (2-4-10)$$

[例 3] 10 cm 标准波导 BJ-32, 其工作频带  $f \in [2.60, 3.95] \text{ GHz}$ , 中心频率为  $3.2 \text{ GHz}$ ,  $a \times b = 72.14 \times 34.04 \text{ mm}^2$ , 检验是否符合波导设计标准。

[解] BJ-32 波导如图 2-4-8 所示。

$$\lambda = 115.298 \sim 75.893 \text{ mm}$$

$$\begin{cases} a > 0.555\lambda_{\max} \\ a < \lambda_{\min} \end{cases} \quad (2-4-11)$$

也即

$$\begin{cases} a > 64 \text{ mm} \\ a < 75.893 \text{ mm} \end{cases}$$

显然,  $a = 72.14 \text{ mm}$  符合上述不等式范围。

这时

$$a \approx 0.72\lambda_0$$

同时,  $b < \frac{1}{2}a = 36.07 \text{ mm}$

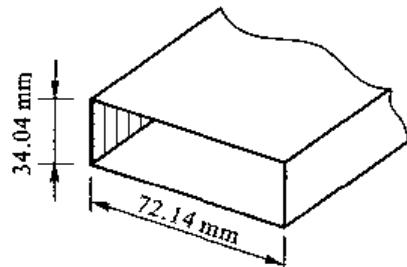


图 2-4-8 BJ-32 波导

显然取  $b = 34.04 \text{ mm}$  也符合此不等式, 壁厚  $t = 2 \text{ mm}$ 。

部分波导的设计标准如表 2-4-4 所示。

表 2-4-4 典型波导的部标准 SJ150—65(国产常用波导)

波段	型号	$f_s \sim f_b / \text{GHz}$	$f_r / \text{MHz}$	$a / \text{mm}$	$b / \text{mm}$	$t / \text{mm}$
S 波段(10 cm)	BJ-32	2.60~3.95	2 077.9	72.14	34.04	2.0
C 波段(5 cm)	BJ-48	3.94~5.99	3 152.4	47.55	22.15	1.5
X 波段(3 cm)	BJ-100	8.20~12.40	6 557.1	22.86	10.16	1.0

在波导传输中,  $P_{\max}$  和  $\alpha$  均优于同轴线, 但频带劣于同轴线。典型波导的功率容量和衰减如表 2-4-5 所示。

表 2-4-5 典型波导的功率容量和衰减

型号	$P_{\max} / \text{MW}$	$\alpha / (\text{dB}/\text{m})$
BJ-32	10.5	0.019 9
BJ-48	4.86	0.031 0
BJ-100	0.99	0.117 0

## 作业 PROBLEMS 2-4

已知  $a \times b$  矩形波导如图 2-4-9 所示。请分别写出  $TE_{11}$  模和  $TM_{11}$  模的一般场方程。若要求它们是调落模, 写出条件。

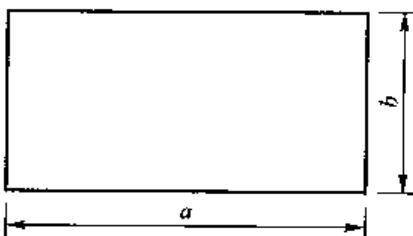


图 2-4-9 第 1 题图

BJ-48 波导工作在 5 cm 波段。 $f \in [3.94 \sim 5.99] \text{ GHz}$ ,  $a \times b = 47.55 \times 22.15 \text{ mm}^2$ , 检验其是否符合波导设计标准。

2-5

## 例题讲解 Problems

前面已经讲过, 从传输线理论到波导理论经历了第二次认识的飞跃, 即由能量在“开放”空间传播变成能量在“封闭”空间传播。

实际上还有一个更本质的变化是由传输 TEM 模变成波导中传输 TE 模或 TM 模。

[例 1] 波导中不能传播 TEM 模。

[解] 根据约定把“空心”管子称为波导(事实上, 广义地说双导体管子也是波导)。现在将证明, 空心波导内不能传播 TEM 模。

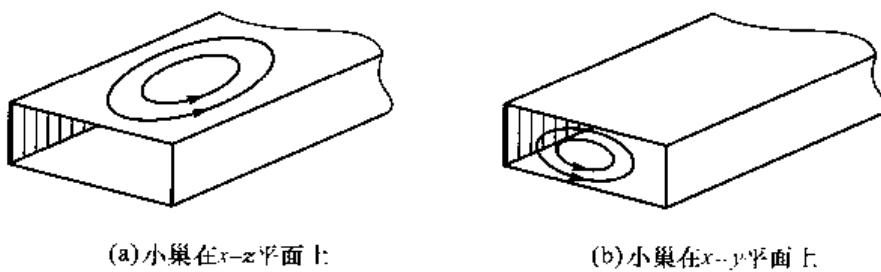
① 由于波导要传输电磁能量, 也就是说, 必须要有  $\hat{z}$  方向的 Poynting 矢量, 所以, 它必须具有横向的电场  $\vec{E}$  和磁场  $\vec{H}$ 。

② 磁场  $\vec{H}$  必须是封闭成圈的, 因而只有如图 2-5-1 所示的两种可能。

③ 根据 Maxwell 方程要求

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

图 2-5-1(a) 所示明显有  $H_z$  分量, 不满足 TEM 模要求, 而图 2-5-1(b) 所示小巢中间要么有传导电流密度  $\vec{j}$ , 要么有  $\vec{E}$ , 如图 2-5-2 所示。图 2-5-2 中情况(a)有中心导体——也即

图 2-5-1  $\vec{H}$  的两种可能

同轴线,它可以传播 TEM 模,但不属于这里讨论的“空心”波导的范围。

情况(b)很明显存在  $E_z$  分量,当然不是 TEM 模。

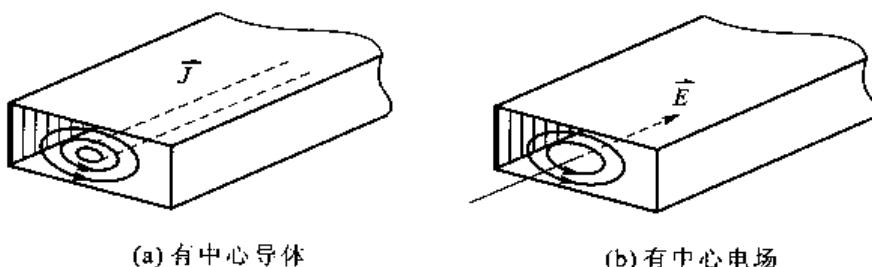


图 2-5-2 空心波导中不能传输 TEM 模

由此归纳出:空心波导不存在 TEM 模。

注意:TEM 模和 TE(或 TM)模的最大区别是 TEM 模工作频率范围可以从  $0 \rightarrow \infty$ ,而 TE(或 TM)模的工作频率范围则是  $f_c \rightarrow \infty$ ,如图 2-5-3 所示。

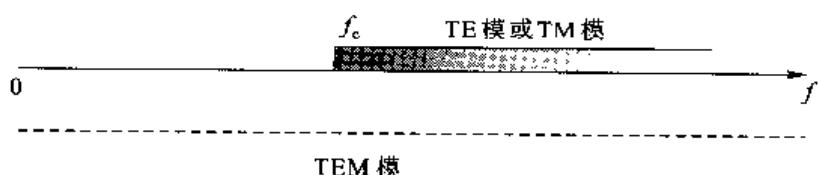


图 2-5-3 TE 模、TM 模有截止频率的高通特性

[例 2] 如图 2-5-4 所示,矩形波导在  $z=0$  处接短路片,求波导内的场。在波导中心  $x=\frac{1}{2}a$  处,振荡按什么规律变化?研究这种情况下功率容量与  $E_0$  的关系。

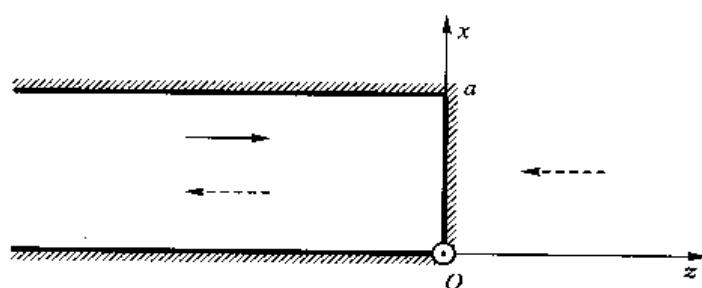


图 2-5-4 终端短路的波导内的场

[解] 这是一个实际问题。因为应用中波导总会接负载,而其中短路负载是最常用的,先写出入射场的方程

$$\begin{cases} E_{y1} = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ H_{x1} = -\frac{E_0 \lambda}{\eta_0 \lambda_g} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ H_{z1} = j \frac{E_0 \lambda}{\eta_0 2a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (2-5-1)$$

短路片就像一面镜子,镜子右边有一虚源发出,反射场是

$$\begin{cases} E_{y2} = E'_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j\beta z} \\ H_{x2} = \frac{E'_0 \lambda}{\eta_0 \lambda_g} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j\beta z} \\ H_{z2} = j \frac{E'_0 \lambda}{\eta_0 2a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j\beta z} \end{cases} \quad (2-5-2)$$

注意:反射场只需写出  $E_{y2}$ ,  $H_{x2}$  和  $H_{z2}$  由 Maxwell 方程得出。

应用  $z=0$  处切向电场为 0 的边界条件

$$E_y|_{x=0} = (E_{y1} + E_{y2})|_{x=0} = 0$$

$$E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + E'_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) = 0 \quad E'_0 = -E_0$$

合成电场

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) [e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}] = j(-2E_0) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\beta z)$$

和传输线的做法类似,如果采用负载坐标  $z'$ ,即  $z' = -z$ ,有

$$E_y = j2E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\beta z') \quad (2-5-3)$$

很明显,如果把波导情况的  $E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$  对应于传输线中的  $U_l^+$ ,即短路线的电场波表达式,

在  $x=\frac{a}{2}$  处

$$|E_y| = \left| 2E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_g} z'\right) \right| \quad (2-5-4)$$

画出驻波分布图,如图 2-5-5 所示。节点方程

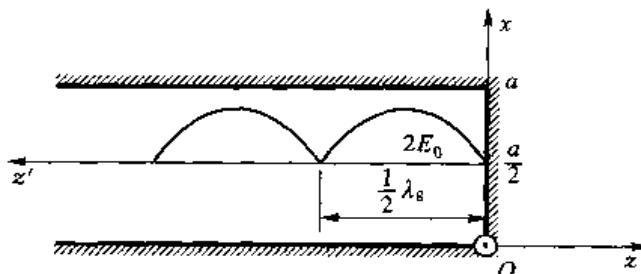


图 2-5-5 短路负载波导的驻波分布图

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}z'\right)=0 \quad z'_1=0 \quad z'_2=\frac{1}{2}\lambda_g$$

两个零点之间的距离

$$z'_2 - z'_1 = \frac{1}{2}\lambda_g \quad (2-5-5)$$

在微波技术中, 测量  $\lambda_g$ (当已知  $a$  时, 也即间接测量  $\lambda$  和  $f$ ) 的最常用办法就是端接短路板。由  $x=a/2$  开槽的测量线, 用探针精确测出两个驻波零点之间的距离, 即  $\lambda_g/2$ , 且

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\lambda_g}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_g}{2a}\right)^2}} \\ f = \frac{c}{\lambda} \end{cases} \quad (2-5-6)$$

同时可确定  $\lambda$  和  $f$ 。

再研究在波导全驻波(短路)条件下的功率容量

$$P = \frac{abE_0^2 \sqrt{\epsilon_r}}{480\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

这里的  $E_0$  表示入射波场强, 在短路情况下

$$E_{\max} = 2E_0$$

可见

$$P_{\max} = \frac{1}{4} \frac{abE_{\max}^2 \sqrt{\epsilon_r}}{480\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = \frac{1}{4} P_{\max 0} \quad (2-5-7)$$

也即入射功率容量小了 4 倍, 原因是最大场强是 2 倍入射场强。

推广到更一般的情况, 若负载反射是  $\Gamma$ , 则

$$E_{\max} = (1 + |\Gamma|)E_0 \quad (2-5-8)$$

计及  $|\Gamma| = (\rho - 1)/(\rho + 1)$

$$E_0^2 = \frac{(\rho + 1)^2}{4\rho^2} E_{\max}^2 \quad (2-5-9)$$

可知

$$P_{\max} = \frac{(\rho + 1)^2}{4\rho^2} P_{\max 0} \quad (2-5-10)$$

从这个例子很明显看出: 只要把场的横向变化看成一个量, 则波导又回到了传输线。不过, 这种返回是辩证的螺旋上升, 这时由  $\lambda_g$  取代了  $\lambda$ , 因为波导波型中  $\lambda_c$  始终起着作用。

从波型特征量的角度分析, 除了  $\beta$  和  $Z_0(\eta)$ , 还要添上  $\lambda_c$ (或  $k_c$ )。

[例 3] 讨论波导中广义传输线理论。

[解] 把广义传输线理论进一步应用于波导之中。这时, 只可能是 TE 或 TM 传播模式。假设归一化条件除

$$\iint_S (\vec{e}_t \times \vec{h}_t) \cdot \hat{z} dS = 1 \quad (2-5-11)$$

之外, 还加上

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_S \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t dS = 1 \\ \iint_S \vec{h}_t \cdot \vec{h}_t dS = 1 \end{array} \right. \quad (2-5-12)$$

作为例子,对于矩形波导中 TE<sub>10</sub> 模有

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_t = \hat{y} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \\ \vec{h}_t = -\hat{x} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{array} \right. \quad (2-5-13)$$

这里主要利用广义传输线理论,求 L、C 和 β、η。

情况 1: TE 模情况 (E<sub>z</sub>=0)

已经知道,波导一般解中,横向函数有

$$\nabla_t^2 \vec{e}_t + k_c^2 \vec{e}_t = 0 \quad (2-5-14)$$

$$\nabla_t^2 \vec{e}_t = -k_c^2 \vec{e}_t \quad (2-5-15)$$

而由分离变量法,又知

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = k^2 - \beta^2$$

也即

$$\beta^2 = k^2 - k_c^2 \quad (2-5-16)$$

很容易得到 TE 模情况下

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \mu \iint_S \vec{h}_t \cdot \vec{h}_t dS = \mu \\ C = \epsilon \iint_S \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t dS \left(\frac{\beta}{k}\right)^2 = \epsilon \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2 \end{array} \right. \quad (2-5-17)$$

于是有

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right) = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad (2-5-18)$$

波型阻抗

$$\eta = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda}\right) \quad (2-5-19)$$

情况 2: TM 模情况 (H<sub>z</sub>=0)

完全类似,有

$$\begin{cases} L = \mu \iint_S (\vec{h}_t \cdot \vec{h}_t) dS \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2 = \mu \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2 \\ C = \epsilon \iint_S (\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t) dS = \epsilon \end{cases} \quad (2-5-20)$$

于是有

$$\begin{cases} \beta = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right) = \frac{2\pi}{\lambda_g} \\ \eta = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right) \end{cases} \quad (2-5-21)$$

注意:

- ① 上述结果适用于任何形状的空心波导,是一个一般性结论。
- ② 对于 TEM 模,  $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$  即特性阻抗,它的结果是唯一的;而对于 TE 模或 TM 模,由于存在不唯一性,  $\eta = \sqrt{\frac{L}{C}}$  为波型阻抗。 $\eta$  与特性阻抗  $Z_0$  相差一与截面相关的几何因子,即

$$Z_0 = G\eta \quad (2-5-22)$$

- ③ 具体对于矩形波导  $TE_{10}$  模,有

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (2-5-23)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (2-5-24)$$

几何因子一般取

$$G = \left(\frac{b}{a}\right) \quad (2-5-25)$$

于是特性阻抗

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (2-5-26)$$

最后再重新深入地审视波导中传播的导波概念。如前所述,任何空心波导内不能传播 TEM 模。那么波导内的导波究竟怎么传播? 它为什么会有如相速  $v_p > c$ , 波导波长  $\lambda_g > \lambda$ , 且只有  $\lambda < \lambda_c$  才能传播的截止特性?

以矩形波导内  $TE_{10}$  模的形成过程为例进行讨论。

以图 2-5-6 为例,研究理想导体面上平面波的斜入射。

首先观察入射波,Poynting 矢量  $\hat{S}_i$  为

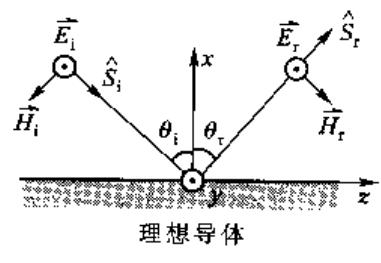


图 2-5-6 导体平面上平面波的斜入射

$$\hat{S}_i = \hat{z}\sin\theta_i - \hat{x}\cos\theta_i \quad (2-5-27)$$

于是有

$$\vec{E}_i = \hat{y}E_{i0}e^{-jk(z\sin\theta_i - x\cos\theta_i)} \quad (2-5-28)$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\eta}(\hat{S}_i \times \vec{E}_i) = \frac{1}{\eta}(\hat{z}\sin\theta_i - \hat{x}\cos\theta_i) \times \hat{y}E_{i0}e^{-jk(z\sin\theta_i - x\cos\theta_i)}$$

具体为

$$\vec{H}_i = \frac{E_{i0}}{\eta}(-\hat{x}\sin\theta_i - \hat{z}\cos\theta_i)e^{-jk(z\sin\theta_i - x\cos\theta_i)} \quad (2-5-29)$$

再考察反射角为  $\theta_r$  的反射波。同样有  $\hat{S}_r$  为

$$\hat{S}_r = \hat{z}\sin\theta_r + \hat{x}\cos\theta_r \quad (2-5-30)$$

于是有

$$\vec{E}_r = \hat{y}E_{r0}e^{-jk(z\sin\theta_r + x\cos\theta_r)} \quad (2-5-31)$$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{\eta}(\hat{S}_r \times \vec{E}_r) = \frac{E_{r0}}{\eta}(\hat{z}\sin\theta_r + \hat{x}\cos\theta_r) \times \hat{y}e^{-jk(z\sin\theta_r + x\cos\theta_r)}$$

具体为

$$\vec{H}_r = \frac{E_{r0}}{\eta}(-\hat{x}\sin\theta_r + \hat{z}\cos\theta_r)e^{-jk(z\sin\theta_r + x\cos\theta_r)} \quad (2-5-32)$$

由导体边界条件可知,  $x=0$  时,  $\vec{E}_t = (\vec{E}_i + \vec{E}_r)|_{x=0} = 0$ , 也即

$$\vec{E}_t = \vec{E}_i(x=0) + \vec{E}_r(x=0) = \hat{y}(E_{i0}e^{-jks\sin\theta_i} + E_{r0}e^{-jks\sin\theta_r}) = 0 \quad (2-5-33)$$

根据式(2-5-33)得到

$$\begin{cases} E_{r0} = -E_{i0} \\ \theta = \theta_i = \theta_r \end{cases} \quad (2-5-34)$$

实质上这也是光学反射定律。重新写出反射波

$$\begin{cases} \vec{E}_r = -\hat{y}E_{i0}e^{-jk(z\sin\theta + x\cos\theta)} \\ \vec{H}_r = \frac{E_{i0}}{\eta}(\hat{x}\sin\theta - \hat{z}\cos\theta)e^{-jk(z\sin\theta + x\cos\theta)} \end{cases} \quad (2-5-35)$$

于是导体上表面的空间总场可写为

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \vec{E}_i + \vec{E}_r = \hat{y}E_{i0}(e^{jkx\cos\theta} - e^{-jkx\cos\theta})e^{-jks\sin\theta} \\ &= \hat{y}j2E_{i0}\sin(kx\cos\theta)e^{-jks\sin\theta} \end{aligned} \quad (2-5-36)$$

$$\vec{H}_t = \vec{H}_i + \vec{H}_r = 2\frac{E_{i0}}{\eta}[-\hat{z}\cos\theta\cos(kx\cos\theta)e^{-jks\sin\theta} - \hat{x}\sin\theta\sin(kx\cos\theta)e^{-jks\sin\theta}] \quad (2-5-37)$$

情况 1: 周期性边界条件

很容易注意到, 合成波在  $x>0$  上半空间呈现周期性边界条件为  $x=0$  时,  $\vec{E}_t=0$ 。而

$$kx\cos\theta = m\pi \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (2-5-38)$$

又周期性地出现  $\vec{E}_t=0$ , 最小周期为  $m=1$ , 即

$$x = \frac{\pi}{k\cos\theta} \quad (2-5-39)$$

在  $x=a$  满足上述条件处再加一导体平面, 将不影响原来的场分布。这时, 即构成了平板波导, 如图 2-5-7 所示。因为在  $y$  方向认为场不变, 即如  $TE_{10}$  模满足  $y$  方向不变一样, 这时在  $b < a$  的任何高度截断导体平面, 即构成矩形波导。

计及  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , 可知

$$x = \frac{\lambda}{2\cos \theta} = a \quad (2-5-40)$$

可以给出

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\lambda}{2a} \\ \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \end{cases} \quad (2-5-41)$$

再代入总场表达式(2-5-36)和式(2-5-37), 令

$$E_0 = j2E_{i0} \quad (2-5-42)$$

$$\text{有 } \begin{cases} \vec{E}_t = \hat{y} E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ \vec{H}_t = -\hat{x} \frac{E_0}{\eta} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} + \hat{z} j \frac{E_0}{\eta} \left(\frac{\lambda}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (2-5-43)$$

式(2-5-43)即为  $TE_{10}$  模的表达式, 其中

$$\beta = k \sin \theta \quad (2-5-44)$$

### 情况 2: 曲折形传播

从平面波斜入射到构成  $TE_{10}$  模的平板波导, 可以清楚看出, 在矩形波导中波实际上是平面波的曲折形传播过程, 如图 2-5-8 所示。

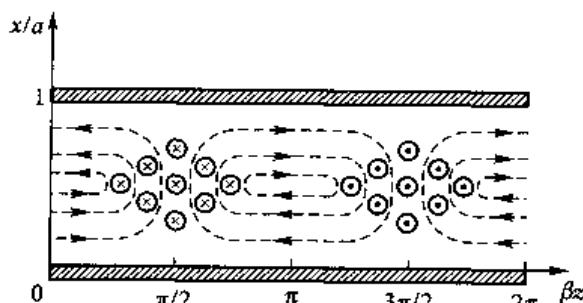


图 2-5-7 周期性边界构成平板波导及场分布

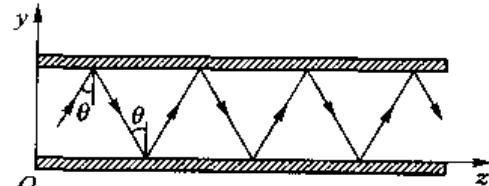


图 2-5-8 平面波曲折形传播过程

显然, 它要比直线传播慢。但是, 我们知道直线传播(TEM 模)是不可能的。只有  $E_y$  和  $H_x$  分量无法在空心波导中传播。

进一步表明,  $\theta$  越小, 波传播得越慢。

### 情况 3: 相速 $v_p$

对于平板波导  $z$  方向的等相位面为

$$\omega t - k z \sin \theta = \text{常数} \quad (2-5-45)$$

将上式两边取微分, 有

$$\omega dt - k \sin \theta dz = 0$$

于是有

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k \sin \theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} > c \quad (2-5-46)$$

相速大于光速  $c$  会使初学者困惑。实质上,由曲折波可知,  $z$  看成等相位面是导体边界条件强制而成的。

由图 2-5-9 可看出,真实的波速  $c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$ ,而在  $z$  方向看,可视等相位的速度是

$$v_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\sin \theta \cdot \Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{c}{\sin \theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} > c \quad (2-5-47)$$

因此,相速超过光速  $c$  并不违反物理定律。

进一步研究 Poynting 矢量在  $\hat{z}$  方向的传播速度,如图 2-5-10 所示。 $\hat{S}$  传播速度是光速  $c$ ,

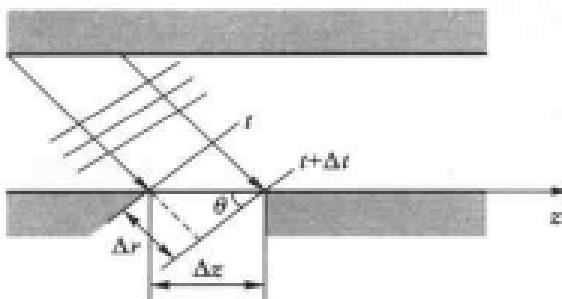


图 2-5-9  $z$  的可视等相位面和相速  $v_p$

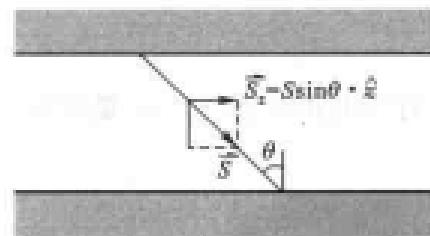


图 2-5-10 Poynting 矢量传播速度

而  $\hat{z}$  方向则是  $\hat{S}$  的  $z$  分量

$$\hat{S}_z = S \sin \theta \hat{z} \quad (2-5-48)$$

若  $\frac{dS}{dt} = c$ , 则

$$v_s = \frac{dS_z}{dt} = \sin \theta \frac{dS}{dt} = c \sin \theta = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (2-5-49)$$

可清楚看出

$$v_p v_s = c^2 \quad (2-5-50)$$

情况 4: 波导波长  $\lambda_g$

有了上述基础,可知  $\lambda_g$  和  $\lambda$  的关系如图 2-5-11 所示。

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} > \lambda \quad (2-5-51)$$

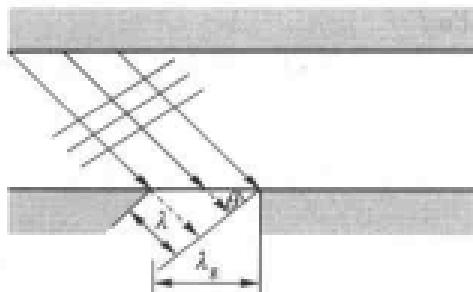
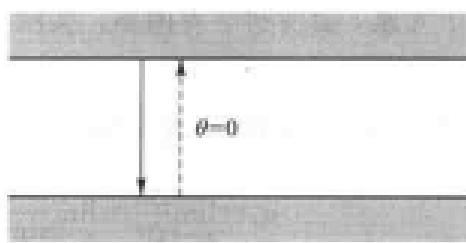
另一方面,由式(2-5-44),令  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ ,注意到  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,同样得到

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

情况 5: 截止概念

前面已经知道:曲折波的传播情况取决于入射角(反射角) $\theta$ ,  $\theta$  愈小,则传播愈慢。

这里讨论当  $\theta=0$  时波无法向前传播, 这种情况称为截止状况。如图 2-5-12 所示, 具体有

图 2-5-11  $\lambda$  和  $\lambda_c$  的关系图 2-5-12 曲折波的截止状态( $\theta=0$ )——此时波无法传播

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = 0 \quad (2-5-52)$$

也即

$$\lambda = \lambda_c = 2a \quad (2-5-53)$$

$\lambda_c = 2a$  称为截止波长。 $\lambda < \lambda_c$  是波导内导波的传输条件。在这个意义上, 波导为一种高通滤波器。

## 2-6

# 圆波导

## Circular Waveguide

与前几节研究的矩形波导相比较, 圆波导有其自身的特点和应用优势。

### 一、圆波导的一些特点

在矩形波导应用之后, 还有必要提出圆波导吗? 当然有必要, 既然要用圆波导, 圆波导必然有其优点存在。主要优点有:

① 圆波导的提出来自实践的需要。例如雷达的旋转搜索, 如果没有旋转关节, 那只好让发射机跟着转, 如图 2-6-1 所示。在这类应用中, 圆波导成了必要的器件。极化衰减器、多模或波纹喇叭, 也都会应用到圆波导。可以说, 几何对称性给圆波导带来广泛的用途和价值。

② 从力学和应力平衡角度, 加工圆波导更为有利, 在误差和方便性



图 2-6-1 旋转关节

等方面均略胜矩形波导一筹。

③ 微波传输线的研究发现：功率容量和衰减是两个十分重要的指标。这个问题从广义上看

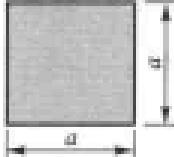
$$\begin{cases} \text{功率容量 } P_{\max} \propto S (\text{其中 } S \text{ 是截面}) \\ \text{衰减 } \alpha \propto L (\text{其中 } L \text{ 是周长}) \end{cases}$$

很容易引出一个品质因数  $F$

$$F = \frac{P_{\max}}{\alpha} = \frac{S}{L} \quad (2-6-1)$$

很明显，数学研究早就指出：在相同周长的图形中，圆面积最大，如表 2-6-1 所示。

表 2-6-1 正方形和圆形的周长和面积

		
周长 $L$	$4a$	$2\pi R_0 = 4a, R_0 = \frac{2a}{\pi}$
面积 $S$	$a^2$	$\pi R_0^2 = \frac{4}{\pi} a^2$

可见，要探索小衰减、大功率传输线，想到圆波导是自然的。

④ 矩形波导中存在的一个矛盾。当深入研究波导衰减时，会发现在矩形波导中  $TE_{10}$  模频率升高时衰减上升很快。仔细分析表明，衰减由两部分组成：一部分为纵向电流衰减，另一部分是横向电流衰减，如图 2-6-2 所示。

当频率升高时，横向电尺寸加大，使横向电流衰减减少，但纵向电流衰减增大。这样所构成的矛盾因素使衰减有了极小值，极小值之后当频率升高时衰减增加。

在圆波导中将会发现，有的模式（圆波导中  $TE_{01}$  模）无纵向电流，如图 2-6-3 所示。因此，采用这种模式会使高频时衰减减小。

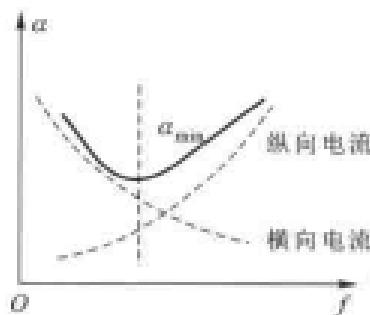


图 2-6-2 矩形波导  $TE_{10}$  族衰减

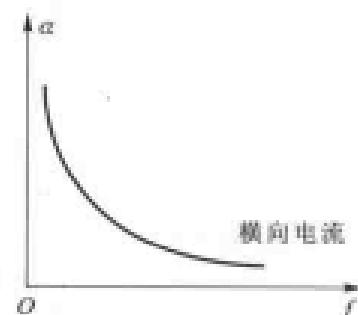


图 2-6-3 圆波导  $TE_{01}$  模衰减

## 二、圆波导一般解( $TE$ 模)

各种波导之间的差异主要是横向边界条件不同，由此可以得到各种不同的模式，很自然，为

了适合圆波导，应该采用如图 2-6-4 所示的圆柱坐标系。

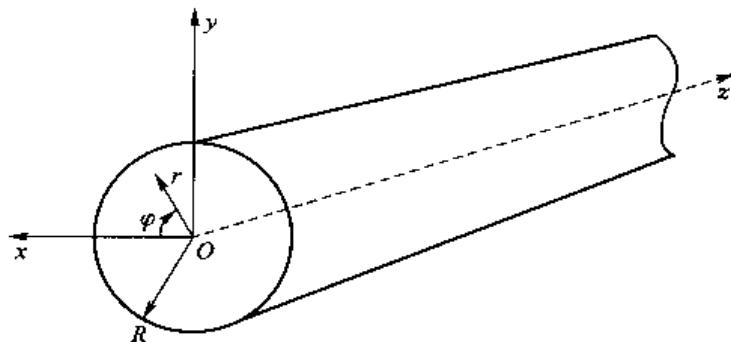


图 2-6-4 圆波导坐标系统

1. 它们也可以划分为 TE 模和 TM 模

$z$  分量分别满足

$$\begin{cases} \nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \\ \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \end{cases} \quad (2-6-2)$$

对于圆柱坐标

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2-6-3)$$

以 TE 模作为例子，这时  $E_z = 0$

假设

$$H_z = R(r)\Phi(\varphi)Z(z) \quad (2-6-4)$$

同样可解出

$$Z(z) = c e^{-\gamma z} \quad (2-6-5)$$

于是

$$H_z = R(r)\Phi(\varphi)e^{-\gamma z} \quad (2-6-6)$$

且满足

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} = -k_c^2 H_z \quad (2-6-7)$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= k_c^2 - k^2 \\ \Phi \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \Phi \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} &= -k_c^2 R \Phi \end{aligned}$$

等式两边除以  $\Phi R$ , 乘上  $r^2$

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + k_c^2 r^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

显然, 可以假设一常数  $m^2$ , 有

$$\begin{cases} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d \varphi^2} = -m^2 \\ r^2 \frac{d^2 R}{d r^2} + r \frac{d R}{d r} + (k_c^2 r^2 - m^2) R = 0 \end{cases} \quad (2-6-8)$$

其解分别是

$$\begin{cases} \Phi(\varphi) = c_1 \cos m\varphi + c_2 \sin m\varphi = \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} \\ R(r) = c_3 J_m(k_c r) + c_4 N_m(k_c r) = \begin{pmatrix} J_m(k_c r) \\ N_m(k_c r) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2-6-9)$$

其中,  $c_1, c_2, c_3, c_4$  为常数,  $m=0, 1, 2, \dots$  为整数。  $J_m(k_c r)$  为第一类  $m$  阶 Bessel 函数,  $N_m(k_c r)$  为第二类  $m$  阶 Bessel 函数, 即 Neumann(纽曼) 函数。

Neumann 函数最大特点是  $x \rightarrow 0$  时,  $N_m(x) \rightarrow \infty$ 。

对空心波导, 中间没有导体不可能出现 Neumann 函数。因此, 可以得到

$$H_z = H_0 J_m(k_c r) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-rz} \quad (2-6-10)$$

## 2. 纵向分量法

圆柱坐标系的旋度 $\nabla \times \vec{A}$		
$(\nabla \times \vec{A})_r$	$(\nabla \times \vec{A})_\theta$	$(\nabla \times \vec{A})_z$
$\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_r}{\partial z}$	$\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$	$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right]$

利用纵向分量表示横向分量

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = j\omega \epsilon E_r \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = j\omega \epsilon E_\varphi \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right] = j\omega \epsilon E_z \end{cases} \quad (2-6-11)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -j\omega \mu H_r \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega \mu H_\varphi \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] = -j\omega \mu H_z \end{cases} \quad (2-6-12)$$

注意:  $\frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$ 。

可以把上面两个 Maxwell 旋度方程分解成两组, 第一组方程为

$$\begin{cases} j\omega \epsilon E_r - \gamma H_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \\ -\gamma E_r + j\omega \mu H_\varphi = \frac{\partial E_z}{\partial r} \end{cases} \quad (2-6-13)$$

$$D = \begin{vmatrix} j\omega \epsilon & -\gamma \\ -\gamma & j\omega \mu \end{vmatrix} = -k_c^2$$

$$D_r = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} & -\gamma \\ \frac{\partial E_z}{\partial r} & j\omega\mu \end{vmatrix} = \frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \gamma \frac{\partial E_z}{\partial r}$$

$$D_\varphi = \begin{vmatrix} j\omega\epsilon & \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \\ -\gamma & \frac{\partial E_z}{\partial r} \end{vmatrix} = j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\gamma}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}$$

得到第一组解

$$\begin{cases} H_\varphi = -\frac{1}{k_c^2} \left( j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\gamma}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \\ E_r = -\frac{1}{k_c^2} \left( \frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \gamma \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (2-6-14)$$

第二组方程为

$$\begin{cases} j\omega\epsilon E_\varphi + \gamma H_r = -\frac{\partial H_z}{\partial r} \\ \gamma E_\varphi + j\omega\mu H_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (2-6-15)$$

$$D = \begin{vmatrix} j\omega\epsilon & \gamma \\ \gamma & j\omega\mu \end{vmatrix} = -k_c^2$$

$$D_\varphi = \begin{vmatrix} -\frac{\partial H_z}{\partial r} & \gamma \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} & j\omega\mu \end{vmatrix} = -j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{\gamma}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}$$

$$D_r = \begin{vmatrix} j\omega\epsilon & -\frac{\partial H_z}{\partial r} \\ \gamma & -\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = -\frac{j\omega\epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial r}$$

得到第二组解

$$\begin{cases} H_r = \frac{1}{k_c^2} \left( \frac{j\omega\epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \\ E_\varphi = \frac{1}{k_c^2} \left( -\frac{\gamma}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (2-6-16)$$

把全部横向分量用矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_\varphi \\ H_r \\ H_\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\epsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\epsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (2-6-17)$$

有了一般情况的矩阵表示。对于 TE 模的特殊情况，有

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_\varphi \\ H_r \\ H_\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\epsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\epsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (2-6-18)$$

代入

$$H_z = H_0 J_m(k_c r) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-\gamma z}$$

有

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \pm H_0 \frac{j\omega\mu m}{k_c^2 r} J'_m(k_c r) \begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix} e^{-\gamma z} \\ E_\varphi = H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c} J'_m(k_c r) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-\gamma z} \\ H_r = -H_0 \frac{\gamma}{k_c} J'_m(k_c r) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-\gamma z} \\ H_\varphi = \pm H_0 \frac{\gamma m}{k_c^2 r} J_m(k_c r) \begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix} e^{-\gamma z} \end{array} \right. \quad (2-6-19)$$

其中,  $J'_m(k_c r)$  是第一类  $m$  阶 Bessel 函数的导数。

### 3. 边界条件

圆波导包含如下三种边界条件

- ① 有限条件  $f(r=0) \neq \infty$ 。
- ② 周期条件  $f(\varphi=0) = f(\varphi=2\pi)$ 。
- ③ 理想导体条件  $E_t(r=R)=0$ , 其中  $t$  表示切向分量, 这里具体为  $E_\varphi, E_z=0$ 。

可见：

- ① 有限条件导致圆波导不出现 Neumann 函数。
- ② 周期边界条件要求  $m$  为整数阶。
- ③ 理想导体边界条件要求  $r=R$  处,  $E_\varphi=0$ (注意到 TE 模的  $E_z=0$ ), 于是有

$$J'_m(k_c R) = 0 \quad (2-6-20)$$

设  $\mu_{mn}$  是第一类  $m$  阶 Bessel 函数导数的第  $n$  个根, 则

$$k_c R = \mu_{mn} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2-6-21)$$

由  $k_c = \frac{\mu_{mn}}{R} = \frac{2\pi}{\lambda_c}$ , 又可知

$$\lambda_c = \frac{2\pi R}{\mu_{mn}} \quad (2-6-22)$$

圆波导中主要的 TE 模的截止波长如表 2-6-2 所示。

表 2-6-2 圆波导中 TE 模截止波长  $\lambda_c$ 

波型	$\mu_{mn}$	$\lambda_c$
TE <sub>11</sub>	1.841	3.41R
TE <sub>21</sub>	3.054	2.06R
TE <sub>01</sub>	3.832	1.64R

最后得到传播波型

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \pm j \frac{\omega \mu m}{k_c r} H_0 J_m \left( \frac{\mu_{mn}}{R} r \right) \left( \begin{array}{c} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array} \right) e^{j\beta z} \\ E_\theta = j \frac{\omega \mu}{k_c} H_0 J'_m \left( \frac{\mu_{mn}}{R} r \right) \left( \begin{array}{c} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right) e^{-j\beta z} \\ E_z = 0 \\ H_r = -j \frac{\beta}{k_c} H_0 J'_m \left( \frac{\mu_{mn}}{R} r \right) \left( \begin{array}{c} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right) e^{-j\beta z} \\ H_\theta = \pm j \frac{\beta m}{k_c r} H_0 J_m \left( \frac{\mu_{mn}}{R} r \right) \left( \begin{array}{c} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array} \right) e^{-j\beta z} \\ H_z = H_0 J_m \left( \frac{\mu_{mn}}{R} r \right) \left( \begin{array}{c} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right) e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (2-6-23)$$

上式是一般的圆波导 TE 模的场方程。

### 三、圆波导一般解 (TM 模)

TM 模的最大特点是  $H_z = 0$ , 其场分量很容易写出, 为

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = -\frac{\gamma}{k_c} E_0 J'_m(k_c r) \left( \begin{array}{c} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right) e^{-\gamma z} \\ E_\theta = \pm \frac{\gamma m}{k_c r} E_0 J_m(k_c r) \left( \begin{array}{c} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array} \right) e^{-\gamma z} \\ E_z = E_0 J_m(k_c r) \left( \begin{array}{c} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right) e^{-\gamma z} \\ H_r = \mp \frac{j \omega \epsilon m}{k_c r} E_0 J_m(k_c r) \left( \begin{array}{c} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array} \right) e^{-\gamma z} \\ H_\theta = -\frac{j \omega \epsilon}{k_c} E_0 J'_m(k_c r) \left( \begin{array}{c} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right) e^{-\gamma z} \end{array} \right. \quad (2-6-24)$$

完全类似, 用边界条件确定  $k_c$ 。

在  $r=R$  处,  $E_\theta=0, E_z=0$ , 也即

$$J_m(k_c R) = 0 \quad (2-6-25)$$

设第一类  $m$  阶 Bessel 函数第  $n$  个根为  $\nu_{mn}$ , 则

$$k_c R = \nu_{mn} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

即可得到

$$k_c = \frac{\nu_{mn}}{R}, \quad \lambda_c = \frac{2\pi R}{\nu_{mn}} \quad (2-6-26)$$

圆波导主要的 TM 模的截止波长如表 2-6-3 所示。

表 2-6-3 圆波导 TM 模截止波长  $\lambda_c$

波型	$\nu_{mn}$	$\lambda_c$
TM <sub>01</sub>	2.405	2.62 R
TM <sub>11</sub>	3.832	1.64 R
TM <sub>21</sub>	5.135	1.22 R

最后写出 TM 模场方程

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = -j \frac{\beta}{k_c} E_0 J'_m \left( \frac{\nu_{mn}}{R} r \right) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \\ E_\varphi = \pm j \frac{\beta m}{k_c^2 r} E_0 J_m \left( \frac{\nu_{mn}}{R} r \right) \begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix} e^{+j\beta z} \\ E_z = E_0 J_m \left( \frac{\nu_{mn}}{R} r \right) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \\ H_r = \mp \frac{j\omega\epsilon m}{k_c^2 r} E_0 J_m \left( \frac{\nu_{mn}}{R} r \right) \begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \\ H_\varphi = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c} E_0 J'_m \left( \frac{\nu_{mn}}{R} r \right) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{+j\beta z} \\ H_z = 0 \end{array} \right. \quad (2-6-27)$$

#### 四、圆波导模式的一般性质

① 圆波导中 TE 模和 TM 模是两大类独立模式，并且存在无限多个根。 $n=0$  表示第 0 个根，也即  $\mu_{m0}=\nu_{m0}=0$ ，也即 TE<sub>m0</sub> 模、TM<sub>m0</sub> 模不存在。但是它却可以存在 TE<sub>0n</sub>、TE<sub>mn</sub>、TM<sub>0n</sub> 和 TM<sub>mn</sub> 模，其中  $m=0$  表示在圆周方向不变化。

② TE 模截止波长取决于第一类  $m$  阶 Bessel 函数导数的第  $n$  个根

$$\lambda_{cTE} = \frac{2\pi R}{\mu_{mn}}$$

TM 模截止波长取决于第一类  $m$  阶 Bessel 函数的第  $n$  个根

$$\lambda_{cTM} = \frac{2\pi R}{\nu_{mn}}$$

各个模式的传播条件具体如图 2-6-5 所示。

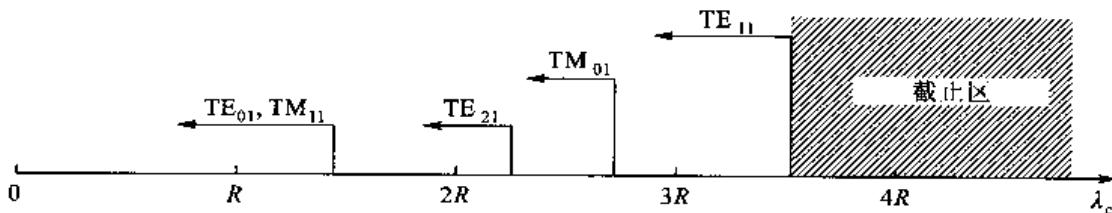


图 2-6-5 圆波导的截止与传播区域

③ 圆波导中的两种极化简并 即  $\sin m\varphi$  和  $\cos m\varphi$  两种, 相互旋转  $90^\circ$ 。圆波导模式的极化简并, 使传输造成不稳定, 这是圆波导应用受到限制的主要原因。

$TM_{1n}$  模和  $TE_{0n}$  模截止波长  $\lambda_c$  相同。这是因为第一类 Bessel 函数有递推公式

$$xJ'_n + nJ_n = xJ_{n-1} \quad (2-6-28)$$

取  $n=0$ , 有

$$J'_0 = -J_1$$

根据前面的讨论,  $TE_{0n}$  是  $J'_0$  的第  $n$  个根的模式,  $TM_{1n}$  是  $J_1$  的第  $n$  个根的模式, 很显然, 这两类模式将发生简并。

注意: 和矩形波导不同, 由于 TE 模、TM 模截止波长的 不同物理意义,  $TE_{mn}$  模和  $TM_{mn}$  模不发生简并。

④ 模式指数  $m, n$  的含义为

$$\begin{cases} m & \text{沿圆周 } \varphi \text{ 分布的整驻波数} \\ n & \text{沿半径 } r \text{ 分布场的最大值个数} \end{cases}$$

## 五、圆波导中三种主要波型

下面将讨论圆波导中三种主要波型, 即  $TE_{11}$  模、 $TE_{01}$  模和  $TM_{01}$  模。

1. 传输主模—— $TE_{11}$  模

在圆波导中,  $TE_{11}$  模截止波长最长,  $\lambda_c = 3.412R$ , 是最低型模, 也即传输主模, 其场结构如图 2-6-6 所示。

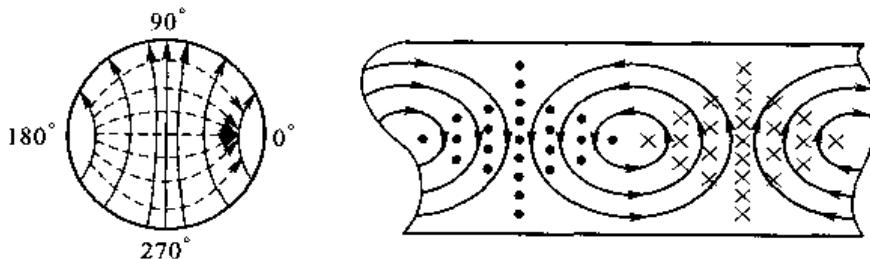


图 2-6-6 圆波导  $TE_{11}$  模

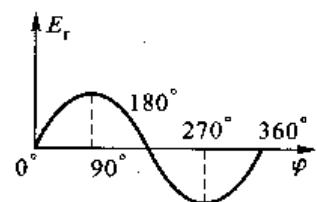
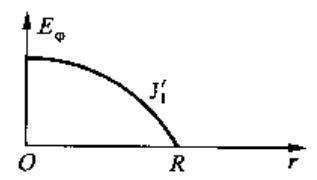
其场分量具体表示为

$$\begin{cases} E_r = j \frac{\omega \mu}{k_c^2 r} H_0 J_1 \left( \frac{\mu_{11}}{R} r \right) \sin \varphi e^{-j\beta z} \\ E_\varphi = j \frac{\omega \mu}{k_c} H_0 J'_1 \left( \frac{\mu_{11}}{R} r \right) \cos \varphi e^{-j\beta z} \\ H_r = -j \frac{\beta}{k_c} H_0 J'_1 \left( \frac{\mu_{11}}{R} r \right) \cos \varphi e^{-j\beta z} \\ H_\varphi = j \frac{\beta}{k_c^2 r} H_0 J_1 \left( \frac{\mu_{11}}{R} r \right) \sin \varphi e^{-j\beta z} \\ H_z = H_0 J_1 \left( \frac{\mu_{11}}{R} r \right) \cos \varphi e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (2-6-29)$$

式中,  $\mu_{11} = 1.841$ 。

$TE_{11}$  模的电场分布如表 2-6-4 所示。

表 2-6-4  $TE_{11}$  模的电场分布

$m=1$	$\varphi=0^\circ \quad E_r=0$ $\varphi=90^\circ \quad E_r \rightarrow \max$ $\varphi=180^\circ \quad E_r=0$ $\varphi=270^\circ \quad E_r \rightarrow -\max$	
$n=1$	$r=0 \quad E_\varphi = \max$ $\downarrow$ $r=R \quad E_\varphi = 0$	

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3.412R}\right)^2}} \quad (2-6-30)$$

注意到圆波导中  $TE_{11}$  模与矩形波导  $TE_{10}$  模极相似, 因此微波工程中方圆过渡均采用  $TE_{11}$  模, 如图 2-6-7 所示。但是,  $TE_{11}$  模有两种极化方向, 因此一般很少用于微波传输线, 而只用于微波元件。

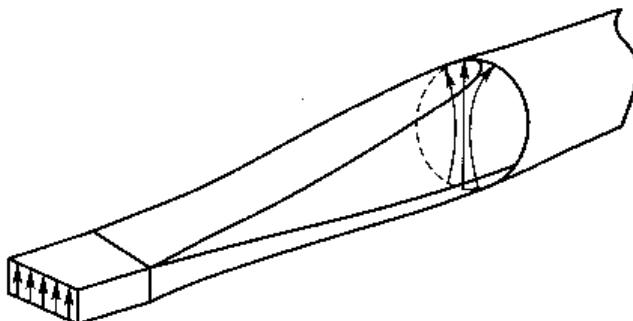


图 2-6-7 方圆过渡

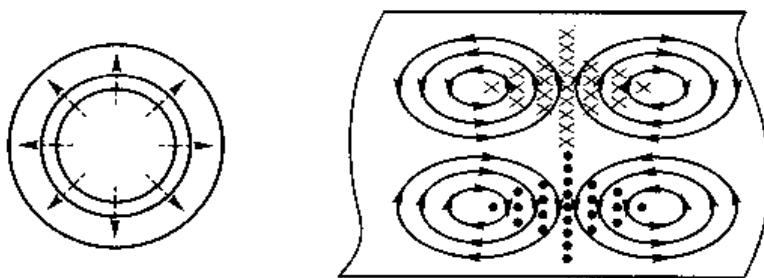
## 2. 损耗最小的模—— $TE_{01}$ 模

$TE_{01}$  模如图 2-6-8 所示。

其场方程是

$$\begin{cases} E_\varphi = -j \frac{\omega \mu R}{3.832} H_0 J_1 \left( \frac{3.832}{R} r \right) e^{-j\beta z} \\ H_r = j \frac{\beta R}{3.832} H_0 J_1 \left( \frac{3.832}{R} r \right) e^{-j\beta z} \\ H_z = H_0 J_0 \left( \frac{3.832}{R} r \right) e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (2-6-31)$$

截止波长

图 2-6-8 圆波导 TE<sub>01</sub> 模

$$\lambda_c = \frac{2\pi R}{3.832} = 1.641 R \quad (2-6-32)$$

TE<sub>01</sub> 模的电场和磁场如表 2-6-5 所示。

表 2-6-5 TE<sub>01</sub> 模的电场和磁场

$m=0$	圆对称, 即在 $\varphi$ 方向不变	
$n=1$	$E_\varphi, H_r$ 沿 $r$ 方向有最大值 $J_1(x)$ 在 $x=1.841$ 有极大值 $\frac{3.832}{R} r = 1.841$ $r = \frac{1.841}{3.832} R \approx 0.48 R$	

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{1.641R}\right)^2}} \quad (2-6-33)$$

为了揭示 TE<sub>01</sub> 模的小衰减特点, 考察其壁电流密度

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_z = -\hat{r}_0 \times \vec{H}_z = |H_z| \hat{\varphi}$$

可见电流只有一个方向分量, 也即 TE<sub>01</sub> 模内壁电流只有横向分量, 衰减系数  $\alpha$  随频率  $f$  上升而下降

$$\alpha_{TE_{01}} = \frac{8.686 R_s}{R \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^3}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad \text{dB/m} \quad (2-6-34)$$

作为对比, 同时给出 TE<sub>11</sub> 模的衰减系数

$$\alpha_{TE_{11}} = \frac{8.686 R_s}{R \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \left[ \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 + 0.42 \right] \quad \text{dB/m} \quad (2-6-35)$$

所以,  $TE_{01}$  模可以用于高  $Q$  谐振腔和毫米波远距离传输。

### 3. 轴对称模式—— $TM_{01}$ 模

虽然  $TE_{01}$  模和  $TM_{01}$  模都是轴对称模, 但  $TM_{01}$  模是截止波长最长的模式, 如图 2-6-9 所示。

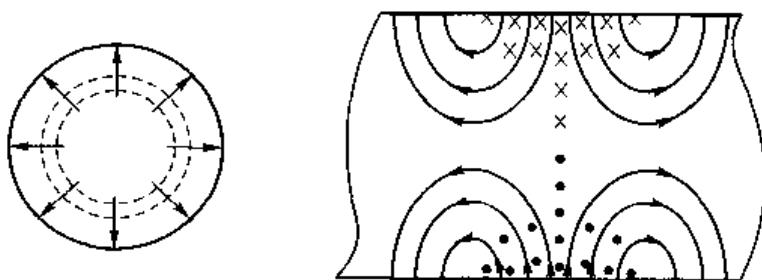


图 2-6-9 圆波导中  $TM_{01}$  模

其场方程为

$$\begin{cases} E_r = -j \frac{\beta}{k_c} E_0 J'_0 \left( \frac{\nu_{01}}{R} r \right) e^{-j\beta z} \\ E_z = E_0 J_0 \left( \frac{\nu_{01}}{R} r \right) e^{-j\beta z} \\ H_\varphi = -j \frac{\omega \epsilon}{k_c} E_0 J'_0 \left( \frac{\nu_{01}}{R} r \right) e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (2-6-36)$$

式中,  $\nu_{01} = 2.405$ ,  $\lambda_c = 2.62 R$ 。

$TM_{01}$  模的电磁场如表 2-6-6 所示。

表 2-6-6  $TM_{01}$  模的电场和磁场

$m=0$	轴对称型 沿 $\varphi$ 方向场分量不变	
$n=1$	$E_r, H_\varphi$ 沿 $r$ 方向有一最大值 $J'_0(x)$ 在 $x=1.841$ 有极大值 $\frac{2.405}{R}r = 1.841$ $r = \frac{1.841}{2.405}R \approx 0.765R$	

$$\lambda_k = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2.62 R} \right)^2}} \quad (2-6-37)$$

由于  $TM_{01}$  模的特点, 常作为雷达的旋转关节, 如图 2-6-10 所示。

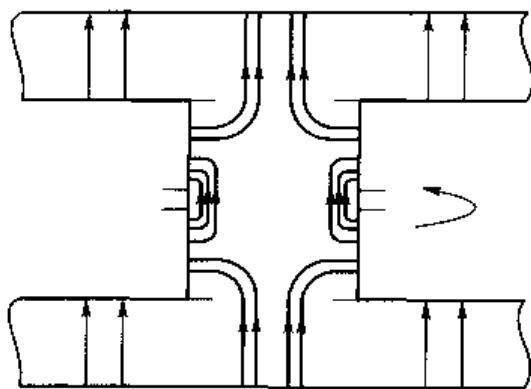


图 2-6-10 旋转关节

$TM_{01}$  模的衰减系数的表达式为

$$\alpha_{TM_{01}} = \frac{8.686 R_s}{R \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2.62R}\right)^2}} \quad \text{dB/m} \quad (2-6-38)$$

## 六、不同工作模式圆波导的设计

圆波导中不同模式的衰减系数随频率的变化曲线如图 2-6-11 所示。

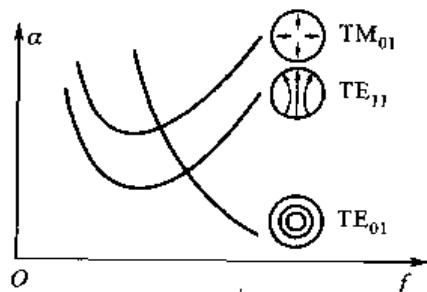


图 2-6-11 圆波导不同模式的衰减曲线

不同工作模式下圆波导的设计可以参考表 2-6-7。

表 2-6-7 圆波导波型设计

$TE_{11}$ 模	$\lambda_{cTM_{01}} < \lambda < \lambda_{cTE_{11}}$ $2.62 R < \lambda < 3.412 R$	$\frac{\lambda}{3.412} < R < \frac{\lambda}{2.62}$ 一般选 $R \approx \frac{1}{3}\lambda$
$TM_{01}$ 模	$\lambda_{cTE_{21}} < \lambda < \lambda_{cTM_{01}}$ $2.06 R < \lambda < 2.62 R$	$\frac{\lambda}{2.62} < R < \frac{\lambda}{2.06}$
$TE_{01}$ 模	$\lambda_{cTM_{21}} < \lambda < \lambda_{cTE_{01}}$ $1.22 R < \lambda < 1.64 R$	$\frac{\lambda}{1.64} < R < \frac{\lambda}{1.22}$

## 附录 I APPENDIX I

### 正交曲线柱坐标中横向分量与纵向分量变换矩阵的不变性

在均匀媒质内, Maxwell 方程组内的电场  $\vec{E}$  和磁场  $\vec{H}$  均满足 Helmholtz(赫姆霍兹)场方程, 即

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (2-6-39)$$

若用  $u, v$  做任意波导横截面的曲线坐标, 则有

$$\begin{cases} \vec{E} = \hat{e}_1 E_u + \hat{e}_2 E_v + \hat{e}_3 E_z \\ \vec{H} = \hat{e}_1 H_u + \hat{e}_2 H_v + \hat{e}_3 H_z \end{cases} \quad (2-6-40)$$

采用传输方向  $\hat{z}$  做领矢矢量, 于是式(2-6-39)的分量方程有

$$\begin{cases} \nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \\ \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \end{cases} \quad (2-6-41)$$

采用分离变量法可具体解出  $E_z$  和  $H_z$ , 因此, 最主要的任务是把  $E_u, E_v, H_u$  和  $H_v$  这 4 个横向分量用纵向分量  $E_z$  和  $H_z$  表示, 考虑 Maxwell 两个旋度方程, 计及正交曲线柱坐标为

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_1 A_u & h_1 A_v & h_1 A_z \end{vmatrix} \quad (2-6-42)$$

具体柱坐标  $h_3 = 1$  且由频域问题  $\frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$ , 可知

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & -\gamma \\ h_1 A_u & h_1 A_v & A_z \end{vmatrix} \quad (2-6-43)$$

其中,  $h_1, h_2$  是  $u, v$  坐标的拉梅系数。

于是由  $\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$ , 可得

$$\begin{cases} \frac{1}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} + \gamma H_v = j\omega\epsilon E_u \\ -\gamma H_u - \frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u} = j\omega\epsilon E_v \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial h_2 H_v}{\partial u} - \frac{\partial h_1 H_u}{\partial v} \right) = j\omega\epsilon E_z \end{cases} \quad (2-6-44)$$

由  $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$ , 得

$$\begin{cases} \frac{1}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial v} + \gamma E_v = -j\omega\mu H_u \\ -\gamma E_u - \frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u} = -j\omega\mu H_v \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial h_2 E_v}{\partial u} - \frac{\partial h_1 H_u}{\partial v} \right) = -j\omega\mu H_z \end{cases} \quad (2-6-45)$$

重新组合成第一组  $E_u$  和  $H_v$  方程

$$\begin{cases} j\omega\epsilon E_u - \gamma H_v = \frac{1}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} \\ -\gamma E_u + j\omega\mu H_v = \frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u} \end{cases} \quad (2-6-46)$$

可解得

$$\begin{cases} E_u = \frac{1}{k_c^2} \left( -\gamma \frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u} - j\omega\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} \right) \\ H_v = \frac{1}{k_c^2} \left( -j\omega\epsilon \frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u} - \gamma \frac{1}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} \right) \end{cases} \quad (2-6-47)$$

两组合成第二组  $E_v$  和  $H_u$  方程

$$\begin{cases} -j\omega\epsilon E_v - \gamma H_u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u} \\ -\gamma E_v - j\omega\mu H_u = \frac{1}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial v} \end{cases} \quad (2-6-48)$$

又解得

$$\begin{cases} E_v = \frac{1}{k_c^2} \left( -\gamma \frac{1}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial v} + j\omega\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u} \right) \\ H_u = \frac{1}{k_c^2} \left( j\omega\epsilon \frac{1}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial v} - \gamma \frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u} \right) \end{cases} \quad (2-6-49)$$

最后得到

$$\begin{bmatrix} E_u \\ E_v \\ H_u \\ H_v \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\epsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\epsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial v} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (2-6-50)$$

因此,在任何正交曲线坐标中,横向分量与纵向分量之间的变换矩阵  $T$

$$T = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\epsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\epsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \quad (2-6-51)$$

是不变的,因此它存在普遍的意义。

## 附录 II APPENDIX II

### 圆波导的衰减极值

#### 1. TE<sub>11</sub>模

$$\alpha_{TE_{01}} = 8.686 \cdot \frac{R_s}{R \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \cdot \frac{\left[ \left( \frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 + 0.42 \right]}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}} \text{ dB/m}$$

令  $x = \frac{\lambda}{\lambda_c}$ , 计及

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi c \mu}{\lambda_c \sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

所以, 其极值函数

$$f(x) = \frac{x^2 + 0.42}{\sqrt{x - x^3}}$$

且取极值范围是  $x < 1$ , 由

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

可知

$$x^4 - 4.26x^2 + 0.42 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{4.26 - \sqrt{(4.26)^2 - 1.68}}}{2} = 0.31778$$

计及  $\lambda_c = 3.412 R$ , 得到最佳情况下

$$\lambda = 1.843 R$$

#### 2. TE<sub>01</sub>模

$$\alpha_{TE_{01}} = \frac{8.686 R_s}{R \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \cdot \frac{\left( \frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}}$$

极值函数

$$g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x - x^3}}$$

由

$$\frac{dg(x)}{dx} = 0 \quad \text{得到}$$

$$x^4 - 3x^2 = 0$$

在  $x < 1$  的区域只有

$$x = 0$$

最佳,也可以说无极值。

### 3. TM<sub>01</sub> 模

$$\alpha_{TM_{01}} = \frac{8.686 R_s}{R \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2.62R}\right)^2}} \text{ dB/m}$$

极值函数

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^3}}$$

由  $dh(x)/dx=0$ , 可知

$$3x^2 - 1 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.57735$$

计及

$$\lambda_c = 2.62 R$$

得到

$$\lambda = 1.513 R$$

衰减最小。

## 作业 PROBLEMS 2-6

① 空气填充的圆波导内传输 TE<sub>01</sub> 模, 已知  $\lambda/\lambda_c = 0.9$ ,  $f = 5 \text{ GHz}$ , 求  $\lambda_g$  和  $\beta$ 。若波导半径扩大一倍,  $\beta$  有何变化?

② 对工作频率为 3 GHz 的发射机, 用矩形波导和圆波导馈电, 均用主模传输, 试比较波导尺寸的大小。

③ 已知半径为  $R$  的圆波导, 电场有唯一分量

$$E_\varphi = E_0 J_1 \left( \frac{3.832}{R} r \right) e^{-j\beta z}$$

(1) 它是 TE, 还是 TM 模式?

(2) 求出磁场  $H$ 。

(3) 试分析它的模式指数  $m, n$ , 并说出其物理意义。

(4) 画出场型图。

④ 已知半径为  $R$  的圆波导, 磁场有唯一分量

$$H_\varphi = H_0 J_0' \left( \frac{v_{01}}{R} r \right) e^{-j\beta z}$$

(1) 它是 TE 还是 TM 波型?

(2) 求出电场  $E$ 。

(3) 试分析它的模式指数  $m, n$ , 并说出其物理意义。

(4) 画出场型图。

⑤ 半圆波导如图 2-6-12 所示, 半径为  $R$ 。解出其中的 TE 模和 TM 模。

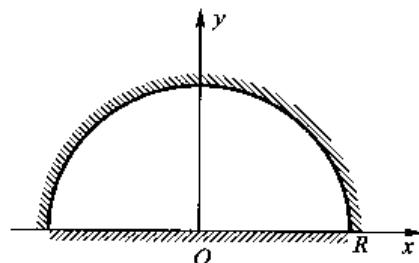


图 2-6-12 半圆波导

## 2-7

## 同轴线和平板波导

### Coaxial Transmission Line and Parallel-Plate Waveguide

有这样一个有趣的现象：愈是简单的事物，认识愈迟。在人类历史上，距离最远的太阳、星球是最早认识的；而距离最近的自己——人的认识，则近年来依然争论极大。

Einstein 说过：我之所以创立相对论，其中一个重要原因之一是少年时思维迟缓。别人一听就懂的东西，我却要考虑半天，结果反而对大家认为最简单的概念，如时间、空间等有了较深入思考。

平板波导、同轴线早就认为是 TEM 传输模式，研究业已结束，但是当把精力转向矩形波导、圆波导时，人们又突然想到既然在波导中可以存在无穷多种模式，那么在同轴线中为什么就不行呢？于是，又对同轴线打“回马枪”。

### 一、同轴线

#### 1. 同轴线主模——TEM 模

同轴线与波导不同，它有着中心导体，如图 2-7-1 所示。因而其主模是 TEM 模，当然，这也同样可以由 Maxwell 方程导出，波导和同轴线之间的不同如下：

波导一般方程

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \vec{E} + k_c^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla_t^2 \vec{H} + k_c^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$$

式中， $k_c^2 = k^2 - \beta^2$ 。

同轴线一般方程 ( $k_c = 0$ )

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla_t^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$$

特别注意到圆同轴线的工作区域为

$$\begin{cases} a \leq r \leq b \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

即不包括  $r = 0$  的区域。

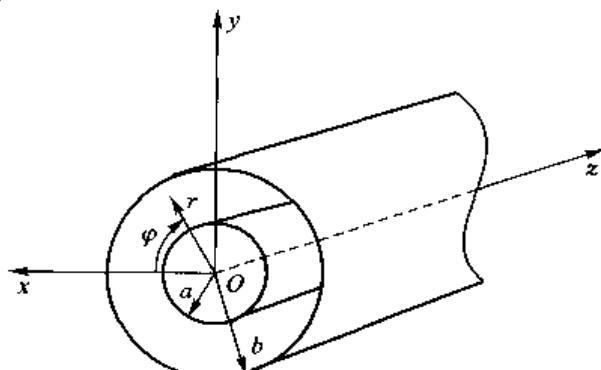


图 2-7-1 圆同轴线

同样建立柱坐标系方程,即

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \varphi^2} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vec{H}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial \varphi^2} = 0 \end{cases} \quad (2-7-1)$$

由算子可交换性质,一般解可写成由位函数表示

$$\vec{E} = -\nabla \Phi(r, \varphi) e^{-j\beta z} = \vec{E}_i(r, \varphi) e^{-j\beta z}$$

于是得到

$$-\nabla \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right] = 0 \quad (2-7-2)$$

考虑到几何对称性、 $\frac{\partial}{\partial \varphi} \rightarrow 0$ ,且选择位函数的任意性,有

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) &= 0 \\ \Phi &= A \ln r + B \end{aligned} \quad (2-7-3)$$

因此场表达式为

$$\begin{cases} E_r = E_0 \frac{a}{r} e^{-j\beta z} \\ H_\varphi = \frac{E_0 a}{\eta r} e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (2-7-4)$$

相应的场结构如图 2-7-2 所示。

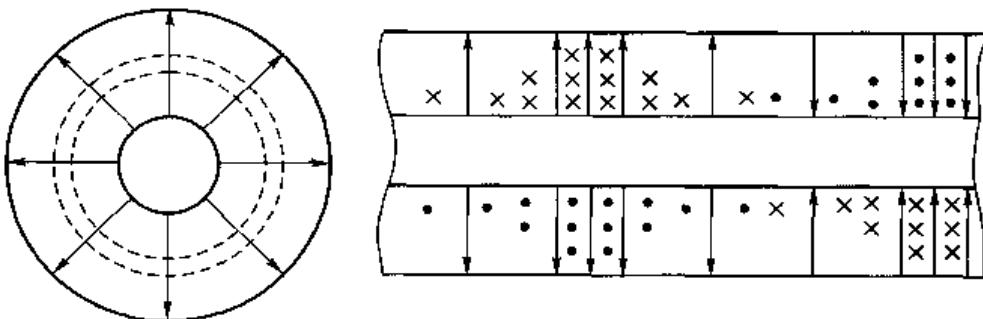


图 2-7-2 同轴线场分布

## 2. 主模参量

同轴线内导体的轴向电流和内、外导体电压可以定义为

$$\begin{cases} I = \oint_i H_\varphi dl = \int_0^{2\pi} H_\varphi r d\varphi = 2\pi r H_\varphi |_{r=a} = \frac{2\pi E_0 a}{\eta} e^{-j\beta z} \\ U = \int_a^b E_r dr = E_0 a \ln \left( \frac{b}{a} \right) e^{-j\beta z} \end{cases}$$

则可以得到各个工作参量如下:

特性阻抗

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \Omega$$

衰減

$$\alpha_c = \frac{8.686 R_s \sqrt{\epsilon_r} \left(1 + \frac{b}{a}\right)}{2\pi b \left(120 \ln \frac{b}{a}\right)} \text{ dB/m}$$

#### 功率容量

$$P_{\max} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{120} E_{\max}^2 a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \text{ W}$$

### 3. 同轴线高次模

根据本征模思想,同轴线一般解与圆波导完全相同,即也分为 TE 模和 TM 模,所不同的只是  $r=0$  已在工作区域之外,因而,其约束条件不复存在。

### (1) TE 模

$$H_z = [A_1 J_m(k_c r) + A_2 N_m(k_c r)] \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-\gamma z} \quad (2-7-5)$$

边界条件要求  $r=a, b$  处,  $\partial H_i / \partial r = 0$

$$\begin{cases} A_1 J'_{-m}(k_c a) + A_2 N'_{-m}(k_c a) = 0 \\ A_1 J'_{+m}(k_c b) + A_2 N'_{+m}(k_c b) = 0 \end{cases} \quad (2-7-6)$$

$$\frac{J'_{-m}(k_c a)}{J'_{-m}(k_c b)} = \frac{N'_{-m}(k_c a)}{N'_{-m}(k_c b)} \quad (2-7-7)$$

式(2-7-7)即同轴线 TE 模的特征方程。

$$\lambda_{\text{cTE}_{m1}} \approx \frac{\pi(b+a)}{m} \quad (m=1,2,\dots) \quad (2-7-8)$$

$$\begin{cases} \lambda_{eTE_{11}} \approx \pi(a+b) \\ \lambda_{eTE_{22}} \approx 2(b-a) \end{cases} \quad (2-7-9)$$

## (2) TM 模

$$E_r = [B_1 J_m(k_c r) + B_2 N_m(k_c r)] \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} e^{-\gamma r} \quad (2-7-10)$$

边界条件要求  $r=a, b$  处,  $E_r=0$ , 即

$$\begin{cases} B_1 J_m(k_c a) + B_2 N_m(k_c a) = 0 \\ B_1 J_m(k_c b) + B_2 N_m(k_c b) = 0 \end{cases} \quad (2-7-11)$$

对应 TM 模的特征方程为

$$\frac{J_m(k_c a)}{J_m(k_c b)} = \frac{N_m(k_c a)}{N_m(k_c b)} \quad (2-7-12)$$

$$\lambda_{\text{cEM}} \approx 2(b-a) \quad (2 = 7 = 13)$$

则同轴线各模式的截止波长如图 2-7-3 所示。

#### 4 同轴线设计原则

同轴线的设计原则可以归结如下：

- ① 保证在给定的工作频带内只传输 TEM 模。
  - ② 衰减小

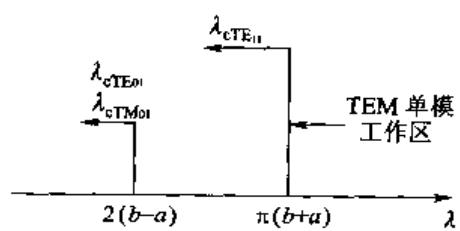


图 2-7-3 同轴线各模式截止波长示意图

③ 功率容量大。

④ 优化的原则是  $b=$  常数, 优化的内、外径比为  $x=\frac{b}{a}$ 。

$x$  的选取如表 2-7-1 所示。

表 2-7-1  $x$  的选取(优化原则为  $b=$  常数)

单模	确保只传输 TEM 模 $\lambda_{\min} \geq \pi(b+a)$ $\frac{1}{x} \leq \left(\frac{\lambda_{\min}}{\pi b} - 1\right)$	优化 $x$ $\frac{1}{x} \approx 0.9 \left(\frac{\lambda_{\min}}{\pi b} - 1\right)$
衰减	$f(x) = \frac{1+x}{\ln x} \quad \frac{df(x)}{dx} = 0$ $\ln x = 1 + \frac{1}{x}$	$x = 3.591\ 125$
功率容量	$g(x) = \frac{1}{x^2} \ln x \quad \frac{dg(x)}{dx} = 0$ $\ln x = \frac{1}{2}$	$x = 1.648\ 72$

根据表 2-7-1, 可以选取典型值  $x \approx 2.3$ 。

表 2-7-1 的优化原则是  $b=$  常数(constant)。实际上, 如果把不出现高阶模作为优化原则, 也即  $a+b=$  常数。令  $y=\frac{c}{a}, c=a+b$ , 则  $x$  的选取如表 2-7-2 所示。

表 2-7-2  $x$  的选取(优化原则为  $a+b=$  常数)

衰减	$K(y) = \frac{y^2}{(y-1)\ln(y-1)}$ $\ln x = \frac{x+1}{x-1}$	优化 $x$ $x = 4.68$
功率容量	$S(y) = \frac{1}{y^2} \ln(y-1)$ $2\ln x = 1 + \frac{1}{x}$	优化 $x$ $x = 2.093\ 5$

## 二、保角变换求解同轴传输线

保角变换方法是复变函数理论在电磁领域中的重要应用, 它的应用是因为有如图 2-7-4 所示的电磁位函数与复解析函数之间的类比。

电容定义为

$$C = \frac{q_2 - q_1}{v_2 - v_1}$$

在如图 2-7-5 所示的  $w=f(z)$  保角变换中, 对应区域电容  $C$  不变, 因此, 如果能够通过保角

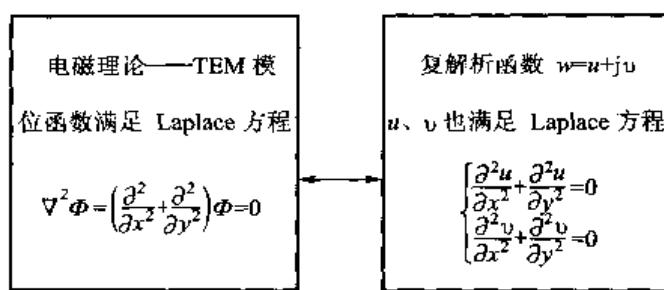


图 2-7-4 电磁位函数与复解析函数之间的类比

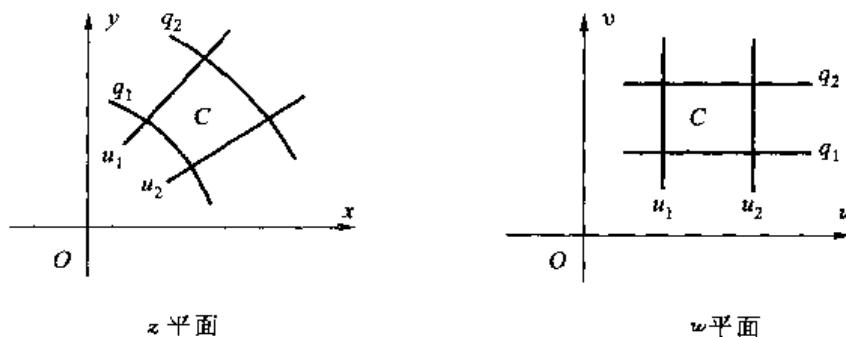


图 2-7-5 保角变换的对应区域

变换把复杂区域变为简单区域,即可计算出电容 \$C\$,从而得到各种 TEM 模传输线的特性阻抗。

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{1}{\omega C}$$

现在求圆同轴线的电容和特性阻抗。

如图 2-7-6 所示的对数保角变换如下

$$\omega = \ln r + j\theta = u + jv$$

于是有

$$\begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases}$$

注意到,在 \$\omega\$ 平面转化为平板电容 \$C\$,有

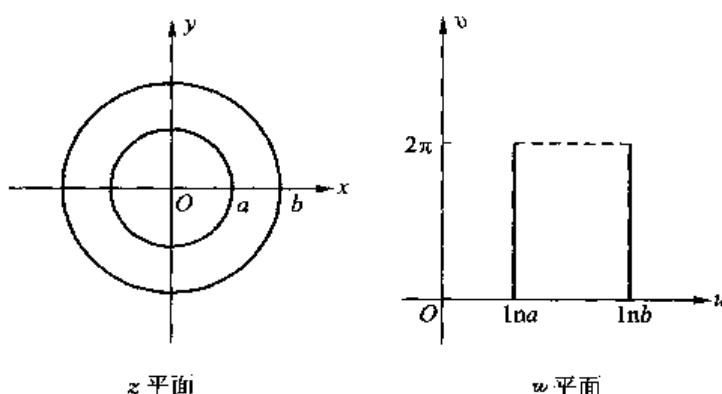


图 2-7-6 对数保角变换

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{\epsilon \cdot 2\pi \cdot 1}{\ln b - \ln a} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

### 三、非均匀填充平板波导

非均匀填充的平板波导如图 2-7-7 所示,位于底板上厚度为  $a$  的填充媒质的介电常数为  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ ,两个相距为  $b$  的平板假设为无限宽。

均匀填充的平板波导是一种典型的双导体结构。但是,非均匀填充的平板波导传播的主模是 TM 模式的电磁波,当频率较低时,可以近似为 TEM 模,而当频率较高时,则会出现色散。

同样按照纵向场方法, TM 模式中纵向电场满足

$$\nabla_z^2 e_z + k_c^2 e_z = 0 \quad (2-7-14)$$

假设在  $x$  方向波导是无限长,因此方程中的横向 Laplace 算子就可以简化为  $\partial^2 / \partial y^2$ 。在空气区域:  $k_c^2 = k_0^2 - \beta^2$ ; 在介质区域:  $k_c^2 = k^2 - \beta^2$ 。要保证在介质-空气界面上的切向电场和磁场相等,因此其中两个区域中的  $\beta$  应该相等。为了方便起见,可以令在介质区域:  $k_c = l$ ; 在空气区域:  $k_c = p$ 。则  $\beta$  相等就可以写为

$$p^2 - k_0^2 = l^2 - k^2$$

或

$$l^2 - p^2 = (\epsilon_r - 1)k_0^2 \quad (2-7-15)$$

同时两个区域中纵向电场分量所满足的方程可以写为

$$\frac{d^2 e_z}{dy^2} + l^2 e_z = 0 \quad 0 \leq y \leq a \quad (2-7-16)$$

$$\frac{d^2 e_z}{dy^2} + p^2 e_z = 0 \quad a \leq y \leq b \quad (2-7-17)$$

以及边界条件

$$e_z(y) = 0 \quad y = 0, b \quad (2-7-18)$$

$e_z(y)$  在  $y=a$  面上保持连续

$$\left. \frac{\epsilon_r}{l^2} \frac{de_z}{dy} \right|_a = \left. \frac{1}{p^2} \frac{de_z}{dy} \right|_a \quad (2-7-19)$$

其中,第三个边界条件对应于在空气和介质的交界面上  $H_x$  保持连续。由横向场和纵向场的关系,可以得到横向场的表达式为

$$E_y = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{de_z}{dy} e^{-j\beta z} \quad (2-7-20)$$

$$H_x = Y_e \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{de_z}{dy} e^{-j\beta z} \quad (2-7-21)$$

其中,波导纳  $Y_e$  在空气部分为  $k_0 Y_0 / \beta$ ,在介质部分为  $k Y / \beta = \epsilon_r k_0 Y_0 / \beta$ 。

为了满足  $y=0$  和  $y=b$  处的边界条件,式(2-7-16)和式(2-7-17)的解可以写为

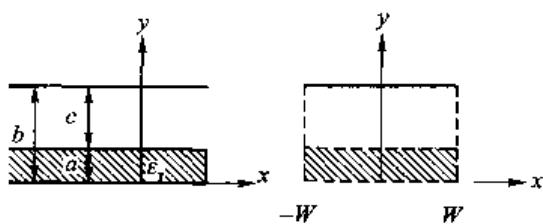


图 2-7-7 非均匀填充的平板波导

$$e_z(y) = C_1 \sin(l_0 y) \quad 0 \leq y \leq a \quad (2-7-22)$$

$$e_z(y) = C_2 \sin[p(b-y)] \quad a \leq y \leq b \quad (2-7-23)$$

其中,  $C_1$  和  $C_2$  是待求的场的幅值。 $e_z(y)$  在  $y=a$  面上保持连续的条件又要求

$$C_1 \sin(l_0 a) = C_2 \sin(p a) \quad (2-7-24)$$

式中,  $c=b-a$ 。最后, 由式(2-7-19)可以得到

$$\frac{\epsilon_r}{l} C_1 \cos(l_0 a) = -\frac{1}{p} C_2 \cos(p a) \quad (2-7-25)$$

如果用式(2-7-24)除以式(2-7-25), 可以得到

$$l \cdot \tan(l_0 a) = -\epsilon_r p \cdot \tan(p a) \quad (2-7-26)$$

联立式(2-7-15)和式(2-7-26)求解  $l$  和  $p$ , 将会得到无穷个解, 对应有无穷多个可能的 TM 模式场的解。由于  $\beta = \sqrt{k_0^2 - p^2} = \sqrt{k^2 - l^2}$ , 因此在  $p > k_0$  的情况下,  $\beta$  为虚数, 对应于调落模的情况。

另外还可以看到, 当  $p$  为虚数时,  $\beta$  的取值位于  $k_0$  和  $k$  之间。那么可以令  $p=jp_0$ , 并记此时的  $l$  为  $l_0$ , 则式(2-7-26)变为

$$l_0 \cdot \tan(l_0 a) = \epsilon_r p_0 \cdot \operatorname{th}(p_0 c) \quad (2-7-27)$$

$$l_0^2 + p_0^2 = (\epsilon_r - 1) k_0^2 \quad (2-7-28)$$

下面分别讨论其在低频和高频近似情况下的解。

### 1. 非均匀填充平板波导低频近似解

在 MHz 量级的低频情况下,  $k_0^2$ 、 $l_0$  以及  $p_0$  均为小量, 如果介质的厚度  $a$  也在 cm 量级的话, 则  $l_0 a$  和  $p_0 c$  也为小量, 因此, 式(2-7-27)中的正切函数和双曲正切函数可以用其自变量来近似代替, 变为

$$l_0^2 a = \epsilon_r p_0^2 c \quad (2-7-29)$$

联合式(2-7-28)和式(2-7-29), 可以得到

$$p_0^2 = \frac{(\epsilon_r - 1) k_0^2 a}{a + \epsilon_r c} \quad (2-7-30)$$

则在低频近似情况下, 传播常数  $\beta$  的解为

$$\beta = \sqrt{k_0^2 + p_0^2} = \sqrt{\frac{\epsilon_r b}{a + \epsilon_r c}} k_0 = \sqrt{\epsilon_r} k_0 \quad (2-7-31)$$

其中,  $\epsilon_r$  称为有效介电常数。

### 2. 非均匀填充平板波导高频近似解

在高频情况下,  $k_0^2$ 、 $l_0$  以及  $p_0$  的值均很大, 相应的  $p_0 c$  的值也很大, 可以用 1 来近似代替式(2-7-27)中的  $\operatorname{th}(p_0 c)$ , 联立式(2-7-27)和式(2-7-28)消去  $p_0$ , 可以看到方程与平板间的距离  $b$  无关。

$$l_0 \cdot \tan(l_0 a) = \epsilon_r \sqrt{(\epsilon_r - 1) k_0^2 + l_0^2} \quad (2-7-32)$$

$e_z$  的解可以近似写为

$$e_z = C_1 \sin(l_0 y) \quad 0 \leq y \leq a \quad (2-7-33)$$

$$\begin{aligned} e_z &= C_2 j \cdot \operatorname{sh}[p_0(b-y)] \\ &= C_1 \sin(l_0 a) \frac{\operatorname{sh}[p_0(b-y)]}{\operatorname{sh}[p_0(b-a)]} \end{aligned} \quad (2-7-34)$$

$$= C_1 \sin(l_0 a) \cdot e^{-p_0(y-a)} \quad a \leq y \leq b$$

可以看到,在空气区,场从介质-空气交界面开始按照指数规律衰减,而且因为  $\rho_0 c = \rho_0 (b-a)$  的值很大,其衰减规律与板间距离  $b$  无关,即使上盖板被移到无穷远,这种类型的电磁场也可以被底板上的介质层导行,并被约束于导行表面的附近,因而被称为表面波模式。

## 附录 APPENDIX

### 常单位矢量和变单位矢量

在常用的三维坐标系中,除  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  直角坐标是常单位矢量外,其余柱坐标系  $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z}$  和球坐标系  $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\theta}$  都是变单位矢量,在微分和积分中须特别注意。

这里以柱坐标系  $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z}$  为例,如图 2-7-8 所示。

柱坐标与直角坐标的变换公式

$$\begin{cases} \hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi \\ \hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi \end{cases} \quad (2-7-35)$$

通过式(2-7-35)的变换,可把  $\hat{r}, \hat{\varphi}$  变矢量转化为固定常单位矢量。

于是有

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = 0 & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} = \hat{\varphi} & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\hat{r} \end{cases} \quad (2-7-36)$$

也即

$$\frac{\partial^2 \hat{r}}{\partial \varphi^2} = -\hat{r} \quad (2-7-37)$$

电场柱坐标的 Laplace 方程

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \varphi^2} \quad (2-7-38)$$

设  $E = \hat{r}E$ , 尽管  $\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$  (TEM 模的对称性), 但仍有  $\frac{\partial^2 \hat{r}}{\partial \varphi^2} = -\hat{r}$ , 可知

$\nabla_{\vec{r}}^2 \vec{E} = 0$  等价于

$$r^2 \frac{d^2 \vec{E}}{dr^2} + r \frac{d \vec{E}}{dr} - \vec{E} = 0 \quad (2-7-39)$$

式(2-7-39)是一个变系数微分方程。这就是要采用位函数求解的原因,即  $\vec{E} = -\nabla \Phi$ 。从而形成标量微分方程。

由此,对于圆波导采用  $E_r, H_z$  作为领矢矢量有了更进一步的理解。因为  $z$  是固定矢量,可移出微分算子之外,使其与标量无异。

需要指出,变矢量对于积分也有类似情况。例如

$$\int_0^{2\pi} \hat{r} d\varphi = \int_0^{2\pi} (\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi) d\varphi = 0 \quad (2-7-40)$$

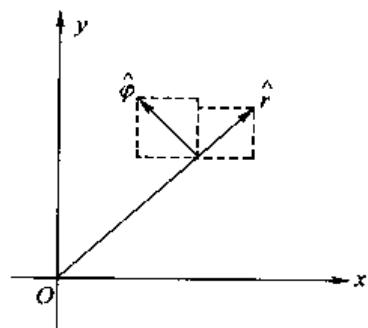


图 2-7-8 柱坐标示意图

在电磁场计算时必须加以考虑。

## 作业 PROBLEMS 2-7

① 论述 TEM 模传输线的主要特点，并说明它们满足什么支配方程。

② 导出圆同轴线的功率  $P$  和导体衰减常数  $\alpha_r$  的表达式。

③ 研究如图 2-7-9 所示半填充圆同轴线。

(1) 电场  $\vec{E}$  和磁场  $\vec{H}$  表达式。

(2) 传输波长  $\lambda$ 。

(3) 波速  $v_p$ 。

(4) 特性阻抗  $Z_0$ 。

④ 如图 2-7-10 所示，有两种不同的圆同轴线  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ ，  
 $a_1 > a_2$ 。

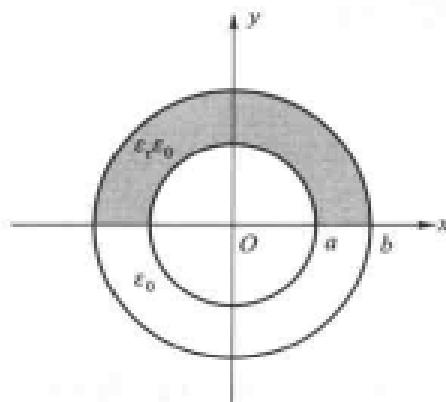


图 2-7-9 半填充圆同轴线

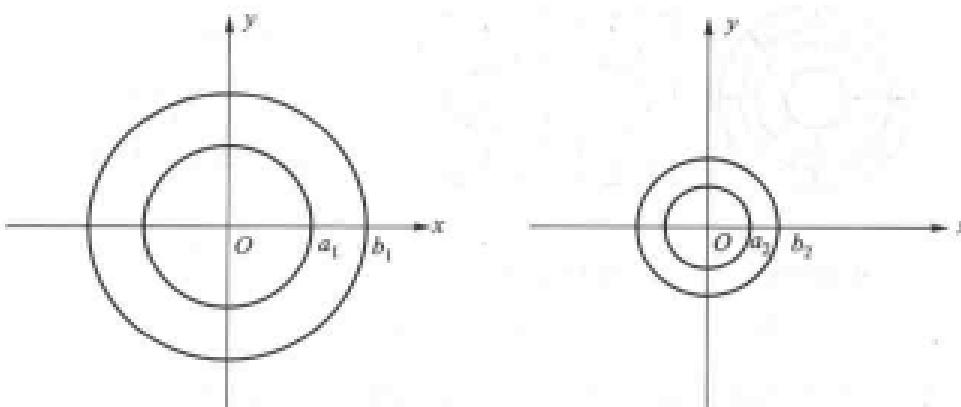


图 2-7-10 两种圆同轴线

(1) 哪种圆同轴线的特性阻抗  $Z_0$  大？

(2) 哪种圆同轴线的波长  $\lambda$  长？

(3) 哪种圆同轴线的功率容量  $P_{max}$  大？

(4) 哪种圆同轴线的 TEM 模频带宽？

⑤ 已知圆同轴线内、外径分别为  $a$  和  $b$ ，如图 2-7-11 所示。

采用  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  和  $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ，求其 TEM 主模。已知圆对称，即  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ ，且  $\vec{E} = \hat{r} E, \vec{H} = \hat{\varphi} H$ 。

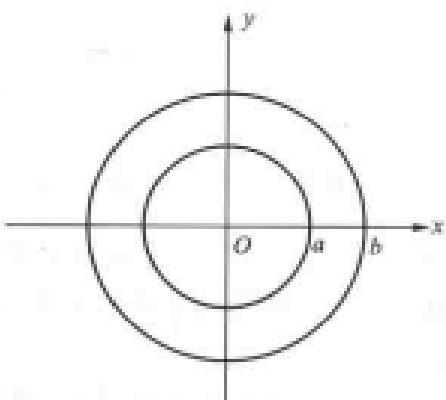


图 2-7-11 圆同轴线

## 2-8

# 带线 Stripline

20世纪60年代以来，在微波工程和微波技术上，出现了一次不小的革命，即出现了所谓的微波集成电路(Microwave Integrated Circuit, MIC)，其特点是体积小、功能多、频带宽，但承受功率小，因此被广泛用于接收机和小功率元器件中，并都传输TEM模。

这一革命的“过渡人物”是带线，它可以看做是同轴线的变形，如图2-8-1所示。

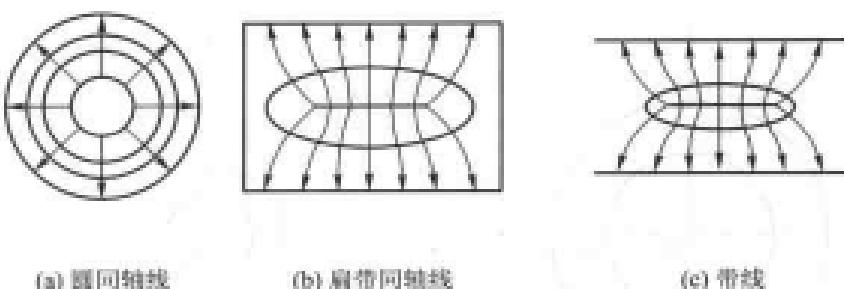


图2-8-1 带线结构——看做是同轴线的变形

带线传输TEM模，特性阻抗是带线研究的主要问题，其求解框图如图2-8-2所示。

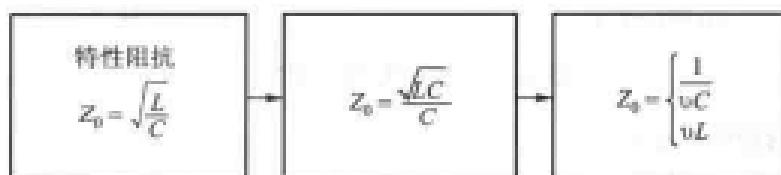


图2-8-2 特性阻抗求解框图

其中， $v$ 是传输线中的光速，一般有  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$ ， $c = 3 \times 10^8$  m/s， $\epsilon_r$ 是所填充介质的介电常数，于是一般的特性阻抗问题可转化为求电容  $C$  的问题，如图2-8-3所示。

带线电容分成板间电容  $C_p$  和边缘电容  $C_t$ 。 $W/b$ 愈大， $C$ 愈大，特性阻抗  $Z_0$  愈小。 $W/b$ 愈大， $C_t$ 影响愈小。

电容的计算可以采用保角变换的方法进行，具体

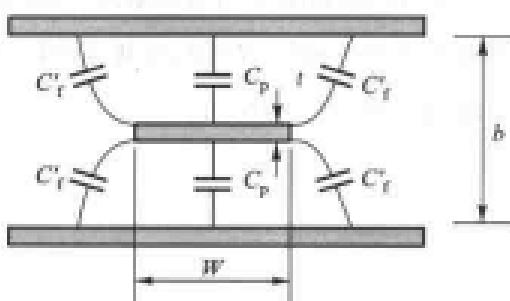


图2-8-3 带线电容  $C$

的内容介绍见本书第五章的相关内容。带线研究的主要内容如图 2-8-4 所示。

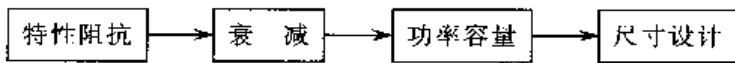


图 2-8-4 带线研究的主要内容

## 一、特性阻抗 $Z_0$ 的闭式

随着微波技术的发展,出现了各种各样的传输线,给计算带来很大的困难,针对这种情况,从 20 世纪 80 年代开始国外做了大量的闭式工作,即仔细算出各种情况,然后用简单的闭式给以拟合、逼近,用计算机程序代替图表曲线。

闭式的工作包括分析和综合两个部分,分析是图 2-8-5 中从左到右的过程,而综合是其逆过程。

### 1. 带线分析

零厚度带线主要由 S. B. Cohn(柯恩)研究,其闭式如下

$$Z_0 \sqrt{\epsilon_r} = 30\pi \frac{K'(k)}{K(k)} \quad (2-8-1)$$

$$k = \operatorname{th}\left(\frac{\pi W}{2b}\right), k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$\frac{K(k)}{K'(k)} = \begin{cases} \left[ \frac{1}{\pi} \ln \left( 2 \frac{1 + \sqrt{k'}}{1 - \sqrt{k'}} \right) \right]^{-1} & 0 \leqslant k \leqslant 0.7 \\ \left[ \frac{1}{\pi} \ln \left( 2 \frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \right) \right] & 0.7 \leqslant k \leqslant 1 \end{cases} \quad (2-8-2)$$

厚带的工作则由 Wheeler(韦勒)完成,具体的公式如下:

$$Z_0 \sqrt{\epsilon_r} = 30 \ln \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \frac{b-t}{W'} \left[ \frac{8}{\pi} \frac{b-t}{W'} + \sqrt{\left( \frac{8}{\pi} \frac{b-t}{W'} \right)^2 + 6.27} \right] \right\} \quad (2-8-3)$$

其中

$$\frac{W'}{b-t} = \frac{W}{b-t} + \frac{\Delta W}{b-t}$$

$$\frac{\Delta W}{b-t} = \frac{x}{\pi(1-x)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \ln \left[ \left( \frac{x}{2-x} \right)^2 + \left( \frac{0.0796x}{W+b+1.1x} \right)^m \right] \right\} \quad (2-8-4)$$

$$m = 2 \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{x}{1-x} \right] \quad (2-8-5)$$

$$x = \frac{t}{b} \quad (2-8-6)$$

上述公式在  $W'/(b-t) < 10$  范围,精度可达 0.5%。

### 2. 带线综合

零厚度带线的综合闭式为

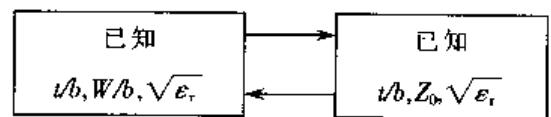


图 2-8-5 闭式的工作

$$\frac{W}{b} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh}(s) = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{1+s}{1-s} \right) \quad (2-8-7)$$

其中

$$s = \begin{cases} \sqrt{1 - \left( \frac{e^A - 2}{e^A + 2} \right)^2} & A \geq \pi \\ \left[ \frac{e^{\frac{A}{2}} - 2}{e^{\frac{A}{2}} + 2} \right]^2 & 0 \leq A \leq \pi \end{cases} \quad (2-8-8)$$

$$A = \frac{Z_0 \sqrt{\epsilon_r}}{30} \quad (2-8-9)$$

有限厚度带线的综合闭式为

$$\frac{W}{b} = \frac{W_0}{b} - \frac{\Delta W}{b} \quad (2-8-10)$$

其中

$$\frac{W_0}{b} = \frac{8(1-x)}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{e^A + 0.568}}{e^A - 1} \quad (2-8-11)$$

## 二、带线的衰减

带线的衰减包括两部分：介质衰减和导体衰减。

### 1. 介质衰减常数 $\alpha_d$

对于介质衰减，任何 TEM 模传输线都有同一形式的公式，所以这里采取平面波传输的办法导出，如图 2-8-6 所示。

写出介质衰减的无源区 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 \vec{E} \end{cases} \quad (2-8-12)$$

这里引入了复介电常数

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - j\epsilon'' = \epsilon_0 \epsilon_r (1 - j\tan \delta) \quad (2-8-13)$$

其中

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon} \quad (2-8-14)$$

称为介质损耗角正切，则可导出

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r (1 - j\tan \delta) \vec{E}$$

设  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ ，则介质内波传播的 Helmholtz 方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \epsilon_r (1 - j\tan \delta) \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (2-8-15)$$

设  $z$  方向的波是

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\gamma z} \quad (2-8-16)$$

其中

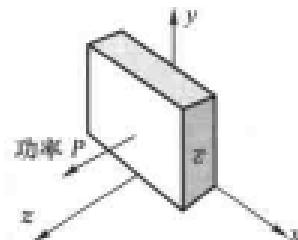


图 2-8-6 介质衰减  $\alpha_d$

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r} (1 - j\tan \delta)^{\frac{1}{2}} \quad (2-8-17)$$

式中,  $\alpha$  为衰减常数;  $\beta$  为传输常数。

对于常见的低耗情况, 可以近似有

$$(1 - j\tan \delta)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}j\tan \delta$$

于是, 可以得到

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r} \tan \delta \\ \beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r} \end{cases} \quad (2-8-18)$$

很明显看出  $\alpha = \frac{1}{2}\beta \tan \delta$ 。另一方面

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r}, \quad \text{其中 } \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

可知

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r} \tan \delta$$

考虑到介质衰减常数  $\alpha_d$  用 dB/m 表示, 则又可写为

$$\alpha_d = \frac{8.686\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r} \tan \delta = \frac{27.3}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r} \tan \delta \quad (2-8-19)$$

[例 1] 99% 的  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (氧化铝陶瓷), 又称 90 瓷。已知其  $\epsilon_r = 9.0$ ,  $\tan \delta = 10^{-4}$ , 求在  $\lambda_0 = 3 \text{ cm}$  时的  $\alpha_d$ 。

$$[\text{解}] \quad \alpha_d = \frac{27.3}{3 \times 10^{-2}} \sqrt{9} \times 10^{-4} \text{ dB/m} = 2.73 \times 10^{-1} \text{ dB/m}$$

## 2. 导体衰减常数 $\alpha_c$

由传输线理论可知, 导体衰减相当于分布的串联电感中有损耗电阻成分, 如图 2-8-7 所示。

传输线的二次特征参数

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha_c + j\beta = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R_1 + j\omega L)(j\omega C)} \\ &= j\omega \sqrt{LC} \left(1 - j \frac{R_1}{\omega L}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx j\omega \sqrt{LC} \left(1 - j \frac{R_1}{2\omega L}\right) \\ &= j\omega \sqrt{LC} + \frac{R_1}{2Z_0} \end{aligned}$$

因此, 在小衰减的情况下

$$\begin{cases} \alpha_c = \frac{R_1}{2Z_0} \\ \beta = \omega \sqrt{LC} \end{cases} \quad (2-8-20)$$

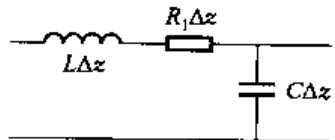


图 2-8-7 导体衰减

对于一般传输线, 场分布很难求出, 因此采用电流分布求出几乎不可能, 具体见本书第五章的相

关内容。

### 三、带线 $Q$ 值

一般情况下,  $Q$  值是谐振腔(或谐振电路)的重要指标。

把  $Q$  值推广到传输线上来: 用单位长度储能比每周单位长度耗能, 即

$$Q = \frac{2\pi \times \text{单位长度储能}}{\text{每周单位长度耗能}} = \frac{2\pi W}{PT} = \frac{\omega W}{P}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_c}$$

其中,  $Q_c$  为导体  $Q$  值, 而  $Q_d$  为介质损耗  $Q$  值。

[定理] 传输线的介质损耗  $Q$  值为

$$Q_d = \frac{1}{\tan \delta} \quad (2-8-22)$$

[证明] 有耗时能量以场的平方规律随时间耗散

$$W = W_0 e^{-2\delta t}$$

$$\frac{dW}{dt} = -2\delta W$$

而消耗功率

$$P_t = -\frac{dW}{dt} = 2\delta W$$

于是有

$$\delta = \frac{P_t}{2W} = \frac{\omega}{2} \left( \frac{P_t}{\omega W} \right) = \frac{\omega}{2} \frac{1}{Q}$$

另一方面, 能量又可随距离衰减

$$W = W_0 e^{-2\alpha z}$$

$$\frac{dW}{dz} = -2\alpha W$$

或者写成

$$\frac{dW}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dz}{dt}} = -2\alpha W$$

$$\delta = \alpha \left( \frac{dz}{dt} \right)$$

根据  $\frac{dz}{dt} = v_p = \frac{\omega}{\beta}$ , 可知

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha}$$

介质衰减常数为

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \beta \tan \delta$$

因此介质损耗  $Q$  值为

$$Q_d = \frac{1}{\tan \delta}$$

总的带线  $Q$  值是

$$Q = \frac{Q_c}{1 + Q_c \tan \delta} \quad (2-8-23)$$

## 四、功率容量和尺寸选择

### 1. 功率容量

倒圆角的空气带线功率容量

$$\frac{P_{\max}}{b^2 P^2} \cdot \frac{4\rho^2}{(\rho+1)^2} = \frac{602 \times 10^3}{Z_0} \left[ \frac{t}{b} - \frac{1}{2} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \right] \quad (2-8-24)$$

上式中,  $P_{\max}$  为最大入射峰值击穿功率, 单位 kW;  $\rho$  为电压驻波比;  $P$  为大气压;  $b$  的单位为 cm。

### 2. 尺寸选择

$$\begin{cases} \lambda_{cTF_{10}} = 2W \sqrt{\epsilon_r} \\ \lambda_{cTM_{10}} = 2b \sqrt{\epsilon_r} \end{cases} \quad (2-8-25)$$

所以带线尺寸的选择原则是

$$\begin{cases} W < \frac{\lambda_{\min}}{2 \sqrt{\epsilon_r}} \\ b < \frac{\lambda_{\min}}{2 \sqrt{\epsilon_r}} \end{cases} \quad (2-8-26)$$

## 五、保角变换和 Schwarz(许瓦尔兹)变换

### 1. 变换和不变性

变换已经为大家所熟悉。但是, 不变性可能不被人们重视。事实上, 变换中的不变性是非常重要的科学思想, 20 世纪的数学王子 Hilbert(希尔伯特)早期的主要业绩之一是对不变量的研究。

坐标旋转时, 如图 2-8-8 所示, 任一矢量  $\vec{A}$  的长度不变, 更一般的表述:  $P = \vec{A} \cdot \vec{B}$  内积不变, 相对论中的 Lorentz(洛伦兹)变换进一步推广成

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \text{常数}$$

四维空间的长度不变, 也是光速不变的体现。

### 2. 保角变换概念

保角变换是复变(解析)函数变换

$$w = f(z) = u + jv$$

保角变换的物理概念表示某一图形从  $z$  平面变到  $w$  平面, 如图 2-8-9 所示, 其中  $w = f(z)$  是

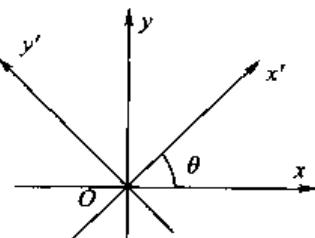


图 2-8-8 坐标旋转

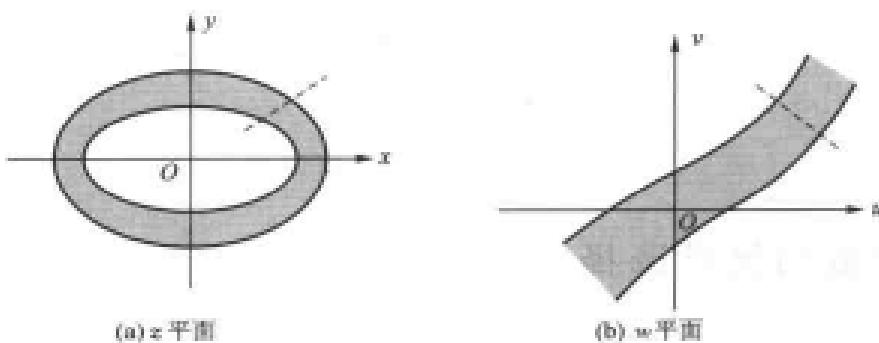


图 2-8-9 保角变换

解析函数。在电磁保角变换中,  $w$  称为复位

$$w = u + jv$$

其中, 若  $u$  表示等位线, 则  $v$  表示力线; 反之,  $u$  表示力线, 则  $v$  表示等位线。

〔性质 1〕 解析函数  $w = u + jv$  满足

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (2-8-27)$$

〔证明〕 解析函数满足 Cauchy-Riemann(柯西-黎曼)条件

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases} \Rightarrow \nabla^2 u = 0$$

同理可证  $\nabla^2 v = 0$

〔性质 2〕  $w = u + jv$  是解析函数, 则等位线  $u(x, y) = c_1$  和力线  $v(x, y) = c_2$  在  $z$  平面上必须相互正交。

〔证明〕 正交条件是

$$\tan \theta_1 \tan \theta_2 = -1 \quad (2-8-28)$$

由图 2-8-10(b) 可见

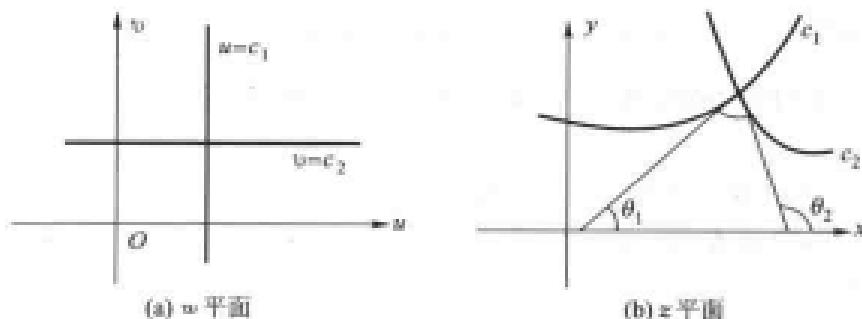


图 2-8-10 性质 2 用图

$$\theta_1 + (\pi - \theta_2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$$

$\tan \theta_2 = -\cot \theta_1$  即为式(2-8-28)

现在

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{c_1} = \tan \theta_1$$

而根据  $u(x, y) = c_1$ , 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{u=c_1} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \tan \theta_1$$

同理可得

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{v=c_2} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = \tan \theta_2$$

于是

$$\tan \theta_1 \tan \theta_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}} = -1$$

上述两个性质说明解析函数可以表征电磁复位, 变换时  $u$ 、 $v$  正交即保角。

[性质 3] 保角变换把  $z$  平面上一个由力线和等位线构成的区域变换到  $w$  平面的一个力线和等位线构成的对应区域, 两者之间电容相等。

[证明] 如图 2-8-11 所示, 因为电容定义

$$C = \frac{q_2 - q_1}{v_2 - v_1} \quad (2-8-29)$$

而变换时等位线和力线一一对应, 即

$$q'_2 - q'_1 = q_2 - q_1, \quad v'_2 - v'_1 = v_2 - v_1$$

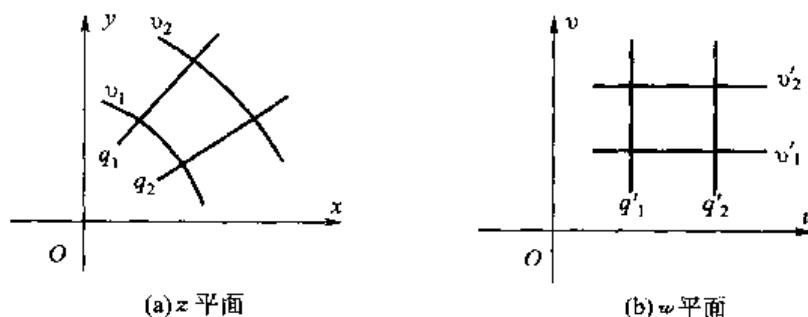


图 2-8-11 性质 3 用图

于是

$$C_z = C_w$$

所以,保角变换的实质是希望利用变换中电容的不变性,把难于计算的复杂区域电容变成便于计算的简单区域电容。

从上面论述中可以总结出保角变换计算电容的条件:

- ① 保角变换必须是二维问题,符合 Laplace 方程(TEM 模传输线)。
- ② 必须在等位问题(注意到导体是等位的)和一定的力线区域内计算。
- ③ 通过某种变换,有可能变成简单区域。

### 3. Schwarz 多角形变换

这是在实际工程中应用最为广泛的一种变换。

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= A(z - a_1)^{\frac{s_1}{s}-1}(z - a_2)^{\frac{s_2}{s}-1} \cdots (z - a_s)^{\frac{s_s}{s}-1} \\ &= A \prod_{i=1}^s (z - a_i)^{\frac{s_i}{s}-1} \end{aligned} \quad (2-8-30)$$

这就是标准的 Schwarz 变换,如图 2-8-12 所示。

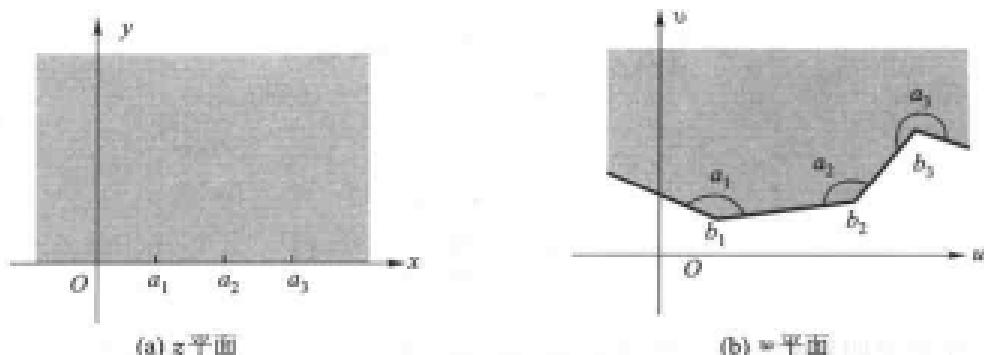


图 2-8-12 Schwarz 变换

## 六、零厚度带线的特性阻抗 $Z_0$

问题的提法:根据  $Z_0 = \frac{1}{iC}$ ,把求特性阻抗的问题转化为求电容的问题,而且考虑到对称性,只需求(并联的) $\frac{1}{2}C$ ,如图 2-8-13 所示,再按两倍电容计算。

### 1. 由 $z$ 平面变换到 $t$ 平面

对应于图 2-8-14 所示的由  $z$  平面到  $t$  平面的变换,各个端点的变换如表 2-8-1 所示。

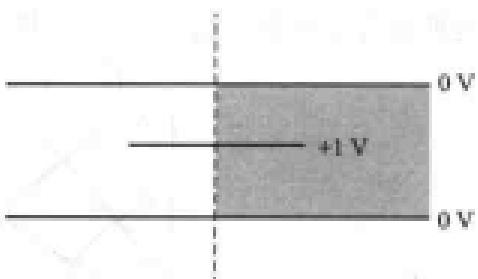


图 2-8-13 电容的对称性

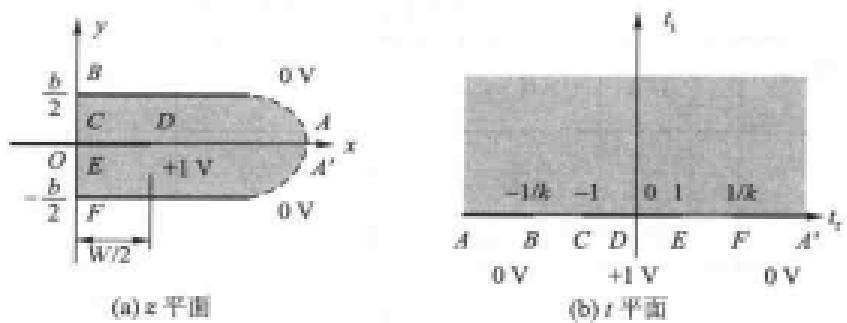


图 2-8-14  $z$  平面到  $w$  平面保角变换

表 2-8-1 从平面到 $\tau$ 平面倾角变换

复平面 对应点	A	B	C	D	E	F	A'
$z$	$\infty + j \frac{b}{2}$	$j \frac{b}{2}$	0	$\frac{W}{2}$	0	$-j \frac{b}{2}$	$\infty - j \frac{b}{2}$
$t$	$-\infty$	$-\frac{1}{k}$	$-1$	0	1	$\frac{1}{k}$	$\infty$
$\theta$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	

其中  $k < 1$ 。

根据 Schwarz 多角形变换, 有

$$z = A_1 \int_0^t \left[ \frac{t^2}{(t^2 - 1)(t^2 - \frac{1}{k^2})} \right]^{\frac{1}{2}} dt + B_1 \quad (2-8-31)$$

## 2. $t$ 平面向 $w$ 平面变换

对于图 2-8-15 所示的  $t$  平面向  $w$  平面的保角变换, 各个端点的变换如表 2-8-2 所示。

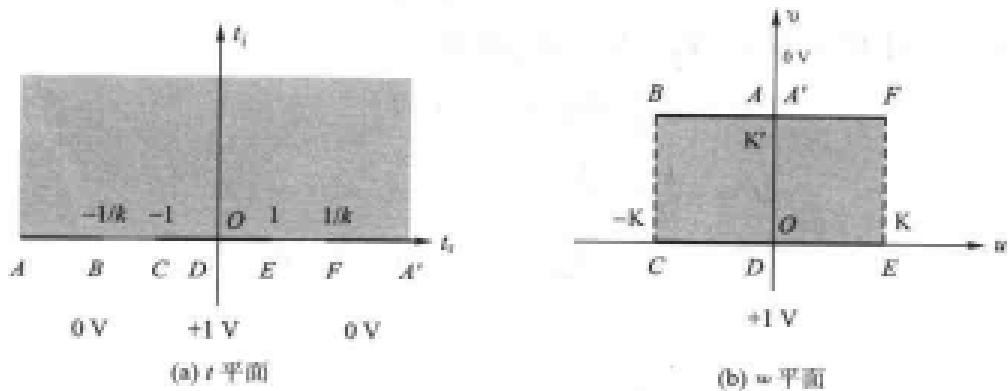


图 2-8-15  $t$  平面到  $w$  平面保角变换

表 2-8-2  $t$  平面到  $w$  平面保角变换

复平面 对应点	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$A'$
$t$	$-\infty$	$-\frac{1}{k}$	-1	0	1	$\frac{1}{k}$	$\infty$
$w$	$jK'$	$-K+jK'$	$-K$	0	$K$	$K+jK'$	$jK'$
$a$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	

又根据 Schwarz 变换

$$w = A_2 \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} + B_2 \quad (2-8-32)$$

其中,  $K$  是第一类完全椭圆积分。定义是

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \quad (2-8-33)$$

对于式(2-8-32), 根据  $D$  点的边界条件

$$B_2 = 0$$

又根据  $E$  点的边界条件

$$K(k) = A_2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

则可知  $A_2 = 1$ 。

再根据  $F$  点的边界条件

$$\begin{aligned} K(k) + jK'(k) &= \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} + j \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2 t^2)}} \end{aligned}$$

于是

$$K'(k) = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2 t^2)}}$$

设  $1-k^2 t^2 = k'^2 t'^2$ , 且  $k'^2 = 1-k^2$ , 称  $k'$  为  $k$  的余模数。

$$1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{k} \text{ 对应 } 0 \leqslant t' \leqslant 1$$

$$dt = -\frac{k'^2 t'}{k^2 t} dt'$$

$$t^2 - 1 = \frac{1 - k'^2 t'^2}{k^2} - 1 = \frac{k'^2 (1 - t'^2)}{k^2}$$

于是

$$K'(k) = \int_0^1 \frac{k'^2 t'}{k^2 t} dt' \frac{1}{\sqrt{\frac{k'^2}{k^2} (1-t'^2) k'^2 t'^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt'}{kt' \sqrt{(1-t'^2)}} = \int_0^1 \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(1-k'^2 t'^2)}}$$

可见,  $K'(k)$  也是第一类完全椭圆积分, 只是模数换成  $k$  的余模数  $k'$ 。

### 3. 电容 $C$ 计算

根据保角变换关于电容  $C$  的不变性, 可以直接由  $w$  平面算出

$$C_w = \epsilon \frac{S}{d} = \epsilon \frac{2K(k)}{K'(k)} \quad (2-8-34)$$

复原到带线全平面

$$C = 2C_w$$

最后特性阻抗

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{1}{vC} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{4\epsilon \frac{K(k)}{K'(k)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{K'(k)}{4K(k)} \\ Z_0 &= \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K'(k)}{K(k)} \quad (2-8-35) \\ k &= \operatorname{th}[\pi W/(2b)] \quad (2-8-36) \end{aligned}$$

实际上, 在微波工程中, 有一个精度很高的近似式

$$\frac{K(k)}{K'(k)} = \begin{cases} \left[ \frac{1}{\pi} \ln \left( 2 \frac{1 + \sqrt{k'}}{1 - \sqrt{k'}} \right) \right]^{-1} & 0 \leq k \leq 0.7 \\ \frac{1}{\pi} \ln \left( 2 \frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \right) & 0.7 \leq k \leq 1 \end{cases} \quad (2-8-37)$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

采用式(2-8-37)可避免计算椭圆积分, 近似度高于  $8/10\,000$ 。

## 附录 I APPENDIX I

证明  $k = \operatorname{th}\left(\frac{\pi W}{2b}\right)$

从  $z-t$  变换可知

$$\begin{aligned} z &= A_1 \int_0^{t_1} \frac{tdt}{\sqrt{(t^2-1)\left(t^2-\frac{1}{k^2}\right)}} + B_1 \\ &= \frac{1}{2} A_1 \int_0^{t_1} \frac{dt^2}{\sqrt{t^4 - \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)t^2 + \frac{1}{k^2}}} + B_1 \end{aligned}$$

由

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left[ 2ax + b + 2\sqrt{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} \right] + C$$

可以知道

$$z = \frac{1}{2} A_1 \left\{ \ln \left[ 2t^2 - \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) + 2 \sqrt{(t^2 - 1)(t^2 - \frac{1}{k^2})} \right] - \ln \left[ - \left( 1 - \frac{1}{k} \right)^2 \right] \right\} + B_1$$

$z-t$  变换的对应点关系如表 2-8-3 所示。

表 2-8-3  $z-t$  变换的对应点关系

条件 1	$t = 0, z = \frac{W}{2}$ $z + B_1 = \frac{W}{2}$	$B_1 = \frac{W}{2}$
条件 2	$t = -1, z = 0$ $z = \frac{A_1}{2} \left\{ \ln \left[ 1 - \frac{1}{k^2} \right] - \ln \left[ - \left( 1 - \frac{1}{k} \right)^2 \right] \right\} + \frac{W}{2} = 0$	$A_1 = \frac{W}{\ln \left[ - \left( 1 - \frac{1}{k} \right)^2 \right] - \ln \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right)}$
条件 3	$t = -\frac{1}{k}, z = j \frac{b}{2}$ $z = \left\{ \frac{A_1}{2} \ln \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right) - \frac{A_2}{2} \ln \left( \frac{1}{k} - 1 \right)^2 + \frac{W}{2} \right\} - j \frac{A_1 \pi}{2}$	$z = -j \frac{A_1 \pi}{2} = j \frac{b}{2}$ $A_1 = -\frac{b}{\pi}$

在这个变换中, 共有 3 个特定常数  $A_1$ 、 $B_1$  和  $k$ , 正好上面有 3 个独立的对应点条件, 因此可求出  $A_1$ 、 $B_1$  和  $k$ 。

根据条件 2、3

$$\frac{\frac{W}{2}}{\ln \left( \frac{1-k}{1+k} \right)} = -\frac{b}{\pi} = A_1$$

于是得到

$$\ln \left( \frac{1-k}{1+k} \right) = -\frac{\pi W}{b}$$

也即

$$k = \operatorname{th} \left( \frac{\pi W}{2b} \right)$$

如果考虑中间步骤有

$$\begin{aligned} \frac{1-k}{1+k} &= e^{-\frac{\pi W}{b}} \\ k &= \frac{1 - e^{-\frac{\pi W}{b}}}{1 + e^{-\frac{\pi W}{b}}} = \frac{e^{\frac{\pi W}{b}} - e^{-\frac{\pi W}{b}}}{e^{\frac{\pi W}{b}} + e^{-\frac{\pi W}{b}}} = \frac{\operatorname{sh} \left( \frac{\pi W}{2b} \right)}{\operatorname{ch} \left( \frac{\pi W}{2b} \right)} = \operatorname{th} \left( \frac{\pi W}{2b} \right) \end{aligned}$$

## 附录 II APPENDIX II

### 厚带保角变换

应用 Schwarz 变换

$$z = \int_0^{w_1} \frac{(1-w^2)^{1/2} dw}{(1-k^2 w^2)^{1/2} (1-k^2 w^2 \sin^2 \alpha)} + B$$

$z$  平面各对应点如图 2-8-16 所示,  $w$  平面各对应点如图 2-8-17 所示。

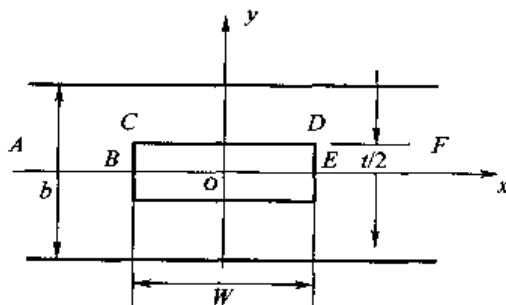


图 2-8-16  $z$  平面

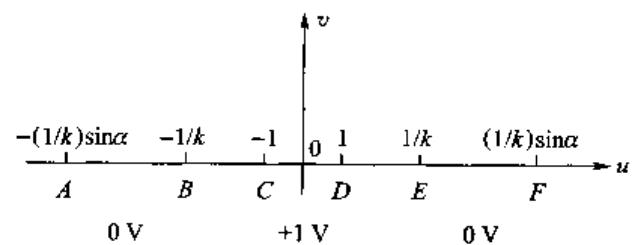


图 2-8-17  $w$  平面

再应用变换

$$w = \operatorname{sn} \xi$$

可以给出

$$\begin{aligned} z &= \int_0^{\xi_1} \frac{(1 - \operatorname{sn}^2 \xi)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 \xi} d\xi + B \\ &= \xi_1 \left[ 1 - \frac{dn\alpha Z(\alpha)}{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha} \right] - \frac{dn\alpha}{2k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha} \ln \left[ \frac{\theta(\xi_1 - \alpha)}{\theta(\xi_1 + \alpha)} \right] + B \end{aligned}$$

其中  $\operatorname{sn}$  函数为雅可比椭圆正弦函数,  $\operatorname{cn}$  函数为雅可比椭圆余弦函数。 $dn$  为雅可比椭圆  $\Delta$  函数。

研究对应点情况:

$$(1) z = jt/2 \sim w = 0, \xi = 0$$

且考虑到

$$\frac{\theta(-\alpha)}{\theta(\alpha)} = 1$$

于是有

$$B = \frac{jt}{2}$$

$$(2) z = \frac{W}{2} + j \frac{t}{2} \sim w = 1/k, \xi = K + jK'$$

并计及

$$\frac{\theta(K + jK' - \alpha)}{\theta(K + jK' + \alpha)} = e^{j\pi K}$$

所以

$$\begin{aligned} W &= 2K \left[ 1 - \frac{dn\alpha Z(\alpha)}{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha} \right] \\ t &= \frac{\pi dn\alpha}{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha} \frac{\alpha}{K} - 2K' \left[ 1 - \frac{dn\alpha Z(\alpha)}{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha} \right] \end{aligned}$$

(3) 在  $w$  面的  $F$  点应考虑为奇点, 则在该点的积分留数为

$$\frac{dn\alpha}{2k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha}$$

于是可导出

$$\frac{b}{2} = \pi \frac{\operatorname{dn}\alpha}{2k^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha}$$

最后得到

$$\begin{aligned} \frac{W}{b} &= \frac{2K}{\pi} \left[ \frac{k^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha}{\operatorname{dn}\alpha} - Z(\alpha) \right] \\ \frac{t}{b} &= \frac{\alpha}{K} - \frac{2K'}{\pi} \left[ \frac{k^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha}{\operatorname{dn}\alpha} - Z(\alpha) \right] \end{aligned}$$

由上式又可求出  $\alpha$  和  $k$ 。

再用变换

$$t = \operatorname{sn}^{-1}(kw, \lambda)$$

把  $w$  平面变到  $t$  平面(如图 2-8-18 所示)

$$w = \operatorname{sn}(x, k)$$

总电容是

$$C = 2\epsilon \frac{2K(\lambda)}{K'(\lambda)}$$

$$Z_0 = \frac{1}{vC} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K'(\lambda)}{K(\lambda)}$$

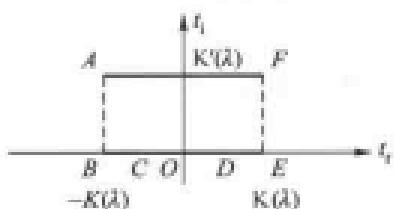


图 2-8-18  $t$  平面

## 作业 PROBLEMS 2-8

- ① 如图 2-8-19 所示,带线  $W \gg b$ ,试采用基本概念得出这种带线的特性阻抗近似式( $\frac{t}{b}=0$  即零厚度)。
- ② 分析如图 2-8-20 所示半填充带线。已知这种带线全部被空气填充时特性阻抗为  $Z_0$ ,求与全空气比较,半填充情况下的

- (1) 波长  $\lambda'$ 。
- (2) 速度  $v_p'$ 。
- (3) 特性阻抗  $z_0'$ 。

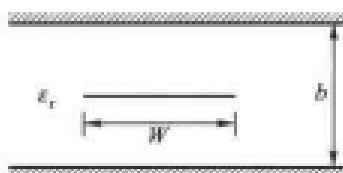


图 2-8-19

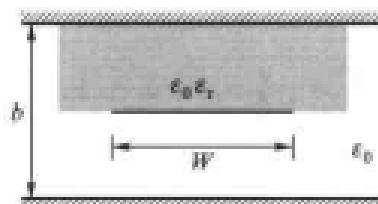


图 2-8-20

2-9

## 微带

## Microstrip

## 一、微带的基本概念

如果说带线可以看成是由同轴线演变而成的,那么,微带则可以看成是由双导线演变而成的,如图 2-9-1 所示。微带的特点如下:

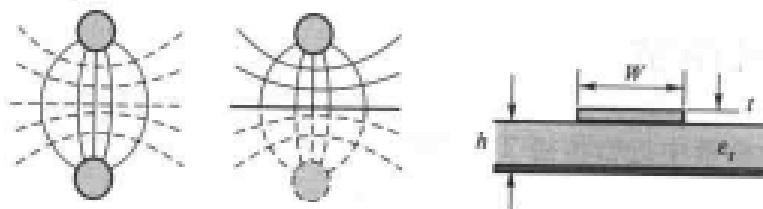


图 2-9-1 从双导线到微带

① 微带的第一个特点是不用机械加工,它采用金属薄膜工艺,而不像带线要进行机械加工,如图 2-9-2 所示。



图 2-9-2 微带工艺

② 一般地说,微带均有介质填充,因此电磁波在其中传播时波长缩短,微带的特点是微。

③ 微带属于不均匀结构。

为了处理方便,经常提到有效介电常数  $\epsilon_{\text{e}}$ (它是全空间填充的),注意  $\epsilon_{\text{e}}$  是相对的,如图 2-9-3 所示。

图 2-9-3(a)和(b)的  $\lambda_g$  相同

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{\text{e}}}} \quad (2-9-1)$$

图 2-9-3(a)和(b)的  $Z_0$  相同

图 2-9-3 微带的有效介电常数  $\epsilon_{\text{e}}$  定义

$$Z_0 = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_{\text{e}}}} \quad (2-9-2)$$

其中,  $Z_0$  是介质微带的特性阻抗,  $Z_{01}$  是空气微带的特性阻抗, 很明显  $Z_{01}$  是一个不随有效介电常数  $\epsilon_r$  变化的不变量。

从概念上, 考虑到局部填充, 显然有

$$\epsilon_r < \epsilon_e \quad (2-9-3)$$

① 严格说来, 微带不是 TEM 模传输线, 可称之为准 TEM 模, 然而作为工程分析, 这种概念和精度已经能满足要求。

⑤ 容易集成。微带常和有源器件构成放大、混频和振荡电路。

常用的微带基片有两种: 一种是氧化铝  $\text{Al}_2\text{O}_3$  陶瓷, 它的  $\epsilon_r$  为 9.0~9.9; 另一种是聚四氟乙烯或聚氯乙烯, 它的  $\epsilon_r$  为 2.50 左右。

与带线的研究相类似, 微带研究的主要问题如图 2-9-4 所示。



图 2-9-4 微带研究的主要问题

## 二、微带的特性阻抗

工程上, 常常认为微带中近似传播 TEM 模

$$Z_0 = \frac{1}{v_p C_1} \quad (2-9-4)$$

其中,  $v_p$  是微带中的相速。根据等价定义:  $v_p = c / \sqrt{\epsilon_r}$ ,

$C_1$  是微带单位长度的电容, 如果令  $C_{01}$  表示空气微带单位长度电容, 则有

$$C_1 = C_{01} \epsilon_r \quad (2-9-5)$$

代入定义式(2-9-4), 有

$$Z_0 = \frac{1}{\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} C_{01} \epsilon_r} = \frac{1}{c C_{01} \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{Z_{01}}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2-9-6)$$

对比可知, 空气微带的特性阻抗为

$$Z_{01} = Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$$

根据上述思路, 问题发生了转化。由求介质微带  $Z_0$  的原问题转化为求解空气微带  $Z_{01}$  和有效介电常数  $\epsilon_r$  的问题。

如图 2-9-5 所示, 微带的电容为

$$C_1 = C_p + 2C_t$$

$W$  越大, 特性阻抗愈低,  $h$  越大, 特性阻抗愈高。

空气微带的特性阻抗的精确计算公式是由 Wheeler(维勒)给出的, 如表 2-9-1 所示。

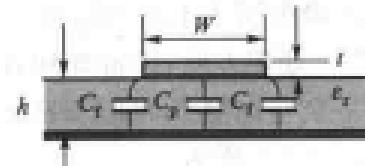


图 2-9-5 微带的电容分布

表 2-9-1 空气微带的特性阻抗  $Z_{01}$ 

<p><b>原问题</b></p> <p><b>镜像法</b></p> <p><b>精确解</b></p> $Z_{01} = 60\pi \frac{K'(k)}{K(k)}$ <p>缺点是 <math>k</math> 和几何尺寸宽、高比 <math>W/h</math> 是复杂的超越函数，一般希望给出普通函数的近似解。</p>	<p><b>宽带近似 <math>W/h \gg 1</math></b></p> $Z_{01} \approx 60\pi^2 \left[ 1 + \frac{\pi W}{2h} + \ln \left( 1 + \frac{\pi W}{2h} \right) \right]^{-1}$
<p><b>第 1 Riemann 面</b></p>	<p><b>二叶 Riemann 面法</b></p> $Z_{01} \approx 60\pi \left[ \frac{W}{2h} + \frac{1}{h} \ln 2\pi e \left( \frac{W}{2h} + 0.94 \right) \right]^{-1}$ <p><b>第 2 Riemann 面</b></p>

### 三、微带分析和综合的闭式

微带的分析和综合的闭式是由 Gupta(古普他)给出的。

#### 1. 分析工作

微带分析的任务如图 2-9-6 所示。

Gupta 给出的闭式结果为

对  $W/h \leq 1$  的窄带情况, 有

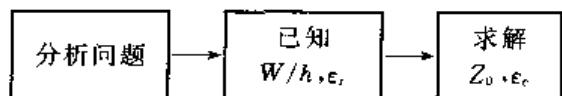


图 2-9-6 微带分析的任务

$$\begin{cases} Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_e}} \ln \left( 8 \frac{h}{W} + 0.25 \frac{W}{h} \right) \\ \epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left[ \left( 1 + 12 \frac{h}{W} \right)^{-1} + 0.04 \left( 1 - \frac{W}{h} \right)^2 \right] \end{cases} \quad (2-9-7)$$

对  $W/h > 1$  的宽带情况, 有

$$\begin{cases} Z_0 = \frac{\frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_e}}}{\frac{W}{h} + 1.393 + 0.667 \ln \left( \frac{W}{h} + 1.444 \right)} \\ \epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{(\epsilon_r - 1)}{2} \left( 1 + 12 \frac{h}{W} \right)^{-1/2} \end{cases} \quad (2-9-8)$$

在  $\epsilon_r = 9.6$ ,  $W/h = 1$  的典型数据时, 可以得出  $Z_0 = 49.69 \Omega$ ,  $\epsilon_e = 6.49$ 。

#### 2. 综合工作

微带综合的任务如图 2-9-7 所示。

Gupta 给出的闭式结果是:

首先判断参数  $A$

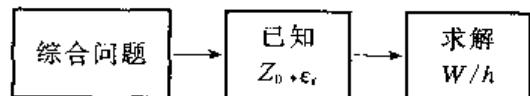


图 2-9-7 微带综合的任务

$$A = \frac{Z_0}{60} \left( \frac{\epsilon_r + 1}{2} \right)^{1/2} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left( 0.23 + \frac{0.11}{\epsilon_r} \right) \quad (2-9-9)$$

当  $A > 1.52$  的窄带情况, 有

$$\frac{W}{h} = \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} \quad (2-9-10)$$

当  $A \leq 1.52$  的宽带情况, 有

$$\frac{W}{h} = \frac{2}{\pi} \left\{ B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left[ \ln(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\epsilon_r} \right] \right\} \quad (2-9-11)$$

其中

$$B = \frac{60\pi^2}{Z_0 \sqrt{\epsilon_r}}$$

### 四、微带的衰减和 $Q$ 值

#### 1. 微带的衰减

微带的衰减还是包括介质衰减和导体衰减两部分,在小衰减情况下认为相互不交叉影响,有

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c$$

式中,  $\alpha_d$  为介质衰减;  $\alpha_c$  为导体衰减。

$$\alpha_d = 27.3 \frac{\epsilon_r \epsilon_e - 1}{\sqrt{\epsilon_e} \epsilon_r - 1} \frac{\tan \delta}{\lambda_0} \quad \text{dB/m} \quad (2-9-12)$$

为了便于记忆, 式(2-9-12)还可以写为

$$\alpha_d = 27.3 \frac{\tan \delta'}{\lambda_g} \quad \text{dB/m} \quad (2-9-13)$$

其中

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}}, \quad \tan \delta' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{\epsilon_e - 1}{\epsilon_e + 1} \tan \delta$$

出现  $\tan \delta'$  是由于局部加载造成的。

导体衰减  $\alpha_c$  用“特性阻抗微扰法”计算, 得到

$$\alpha_c = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_e}}{240 \pi Z_0} \cdot \frac{\partial Z_0}{\partial \hat{n}} \quad (2-9-14)$$

其中,  $\hat{n}$  表示导体单位法矢量。具体导出方式比较复杂, 可参见本书第五章。

## 2. 微带 $Q$ 值

### [定义]

$$Q = \frac{2\pi \times \text{单位长度储能}}{\text{每周单位长度消耗能量}} = \frac{2\pi W}{TP} = \frac{\omega W}{P} \quad (2-9-15)$$

定义传输线端接匹配负载, 即无反射波。

因为, 消耗能量 = 介质损耗 + 导体损耗, 于是有

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} \quad (2-9-16)$$

其中,  $Q_c$  —— 导体损耗  $Q$  值,  $Q_d$  —— 介质损耗  $Q$  值。

和带线推导完全相似, 有

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha}$$

$$\alpha_d = \frac{\beta}{2} \tan \delta$$

于是有

$$Q_d = \frac{1}{\tan \delta} \quad (2-9-17)$$

于是全部  $Q$  值是

$$Q = \frac{Q_c}{1 + Q_c \tan \delta} \quad (2-9-18)$$

这一公式在微带有源电路估计中十分有用。

## 五、微带工作频率限制

微带的工作频率范围同样受到限制, 具体为

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 < \frac{75}{h \sqrt{\epsilon_r - 1}} \text{ (对于宽微带)} \\ f_0 < \frac{106}{h \sqrt{\epsilon_r - 1}} \text{ (对于窄微带)} \end{array} \right. \quad (2-9-19)$$

$$(2-9-20)$$

其中,  $h$  的单位为 mm,  $f$  的单位为 GHz。

[例 1] 要提高微带的工作频率  $f_0$ , 微带基片厚度  $h$  和介电常数  $\epsilon_r$  应减小。设  $\epsilon_r = 9.0$ , 若  $f_0$  要达到 12 GHz, 则  $h$  要小于何值?

[解] 
$$h < \frac{106}{f_0 \sqrt{\epsilon_r - 1}} = 3.123 \text{ mm} \quad (2-9-21)$$

可见, 要消除高次模, 在 X 波段, 微带不要超过 3 mm。

## 作业 PROBLEMS 2-9

- ① 证明  $\operatorname{arctanh}(k) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+k}{1-k} \right)$ 。
- ② 如图 2-9-8 所示, 已知  $\epsilon_r = 2.2$ ,  $Z_0 = 50 \Omega$ , 求零厚度带线的  $\frac{W}{b}$ 。
- ③ 比较带线(Stripline)和微带(Microstrip)之间的共同点和不同点。
- ④ 已知微带基片厚  $h = 1 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_r = 9.0$ 。试求出  $100 \Omega$ 、 $50 \Omega$  和  $20 \Omega$  特性阻抗  $Z_0$  所对应的带宽  $W$ 。

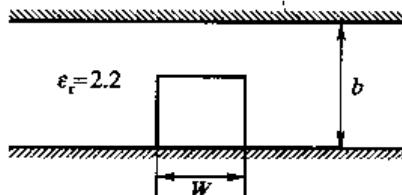


图 2-9-8



## 介质波导 Dielectric Waveguide

从这一节开始将介绍几种毫米波传输线。

从上一节的结论可以看到, 频率升高到毫米波波段后, 微带将出现以下问题: 高次模的出现、色散的影响和衰减的加大。因此, 出现了相应的毫米波传输线。

毫米波、亚毫米波传输线的基本要求为

- ① 频带宽。
- ② 低损耗(传输损耗和辐射损耗)。
- ③ 便于集成。
- ④ 制造简便。

毫米波传输线主要有悬置带线、鳍线、介质波导等, 这里将重点讨论圆柱介质波导, 如图 2-10-1 所示。

介质波导从 1966 年开始作为光纤使用, 从 1970 年开始低耗光纤获得迅速发展。

## 一、圆柱介质波导的场方程

圆柱介质波导属于开波导系统, 因而求解区域是全空间。

圆柱介质波导的研究模型如图 2-10-1 所示, 其半径为  $a$ , 介质的介电常数为  $\epsilon_1, \mu_0$ , 周围空间的介电常数是  $\epsilon_2, \mu_0$ , 所给出的  $z$  轴与圆柱轴重合。

采用

$$i = \begin{cases} 1 & \text{代表圆柱介质波导内场} \\ 2 & \text{代表圆柱介质波导外场} \end{cases} \quad (2-10-1)$$

$z$  分量满足

$$\nabla^2 \left( \frac{E_{zi}}{H_{zi}} \right) + k_i^2 \left( \frac{E_{zi}}{H_{zi}} \right) = 0 \quad (2-10-2)$$

按照一般习惯, 也可写成

$$\nabla^2 \left( \frac{E_{zi}}{H_{zi}} \right) + n_i^2 k_0^2 \left( \frac{E_{zi}}{H_{zi}} \right) = 0 \quad (2-10-3)$$

其中

$$\begin{cases} n_i^2 = \epsilon_{ri} \\ k_i^2 = k_0^2 n_i^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_{ri} \\ k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \end{cases} \quad (2-10-4)$$

$n_i$  也称为折射率, 考虑到波导系统  $\partial/\partial z = -j\beta$  (只考虑入射波), 于是有

$$\nabla^2 = \nabla_i^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_i^2 - \beta^2 \quad (2-10-5)$$

进一步写出

$$\nabla_i^2 \left( \frac{E_{zi}}{H_{zi}} \right) + (k_0^2 n_i^2 - \beta^2) \left( \frac{E_{zi}}{H_{zi}} \right) = 0 \quad (2-10-6)$$

应用分离变量法求解, 在圆柱坐标系中具体为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{E_{zi}}{H_{zi}} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{E_{zi}}{H_{zi}} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{E_{zi}}{H_{zi}} \right) + (n_i^2 k_0^2 - \beta^2) \left( \frac{E_{zi}}{H_{zi}} \right) = 0 \quad (2-10-7)$$

省略  $e^{-j\beta z}$  因子, 同样按照分离变量法, 令

$$\left( \frac{E_{zi}}{H_{zi}} \right) = \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} R(r) \Phi(\varphi) \quad (2-10-8)$$

于是又导出两个常微分方程

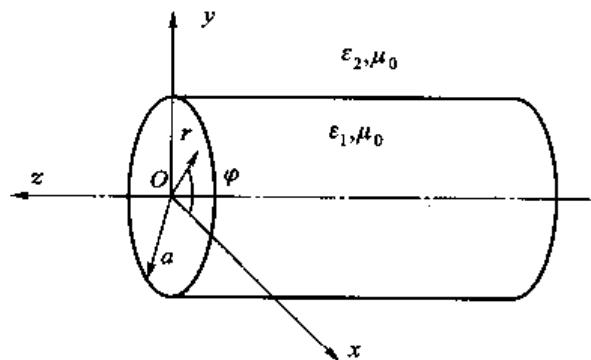


图 2-10-1 圆柱介质波导

$$\begin{cases} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2\Phi(\varphi) = 0 \\ r^2 \frac{d^2R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + [(n_1^2 k_0^2 - \beta^2)r^2 - m^2]R(r) = 0 \end{cases} \quad (2-10-9)$$

因为圆柱介质波导的开波导特点,对于圆柱介质波导内部,有

$$\beta^2 < n_1^2 k_0^2 \quad (2-10-10)$$

必定是驻波型解,只能是第一类 Bessel 函数。

而在介质波导外部,有

$$\beta^2 > n_2^2 k_0^2 \quad (2-10-11)$$

它又必须是衰减场,只能取第二类修正 Bessel 函数。

也就是根据  $r=0$  和  $r=\infty$  的边界条件,省去了  $N_m(r)$ (Neumann) 函数和  $I_m(r)$  函数,如图 2-10-2 所示。

由式(2-10-9)可得

$$\Phi(\varphi) = C \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} = C e^{im\varphi} \quad (2-10-12)$$

$$\begin{cases} R_1(r) = D_1 J_m(k_{c1}r) & (r < a) \\ R_2(r) = D_2 K_m(k_{c2}r) & (r > a) \end{cases} \quad (2-10-13)$$

其中

$$\begin{cases} k_{c1}^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \beta^2 = -\beta^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{r1} = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ k_{c2}^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 = \beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{r2} = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \end{cases} \quad (2-10-14)$$

注意:  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ ,  $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$ ,  $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$

根据  $r=a$  时的边界条件(注意开波导系统边界连续)

$$\begin{cases} R_1(a) = D_1 J_m(k_{c1}a) = D_1 J_m(u) \\ R_2(a) = D_2 K_m(k_{c2}a) = D_2 K_m(w) \end{cases} \quad (2-10-15)$$

于是可以得到

$$\begin{cases} D_1 = \frac{R_1(a)}{J_m(u)} \\ D_2 = \frac{R_2(a)}{K_m(w)} \end{cases} \quad (2-10-16)$$

其中

$$\begin{cases} u = k_{c1}a = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} a \\ w = k_{c2}a = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} a \end{cases} \quad (2-10-17)$$

这样式(2-10-13)变为

$$\begin{cases} R_1(r) = \frac{R_1(a)}{J_m(u)} J_m(uR) & R = \frac{r}{a} < 1 \\ R_2(r) = \frac{R_2(a)}{K_m(w)} K_m(wR) & R = \frac{r}{a} > 1 \end{cases} \quad (2-10-18)$$

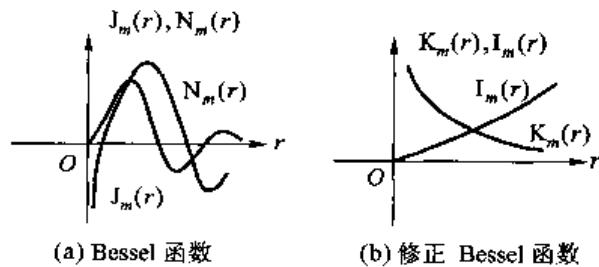


图 2-10-2 Bessel 函数和修正 Bessel 函数

因此,有

$$E(z) = \begin{cases} \frac{A_{m1}}{J_m(u)} J_m(uR) e^{jm\varphi} e^{-j\beta z} & R < 1 \\ \frac{A_{m2}}{K_m(w)} K_m(wR) e^{jm\varphi} e^{-j\beta z} & R > 1 \end{cases} \quad (2-10-19)$$

$$H(z) = \begin{cases} \frac{B_{m1}}{J_m(u)} J_m(uR) e^{jm\varphi} e^{-j\beta z} & R < 1 \\ \frac{B_{m2}}{K_m(w)} K_m(wR) e^{jm\varphi} e^{-j\beta z} & R > 1 \end{cases} \quad (2-10-20)$$

前面讲过横向分量采用纵向分量表示的不变性矩阵,为

$$\begin{bmatrix} E_z \\ E_\varphi \\ H_r \\ H_\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\epsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\epsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial H_r}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (2-10-21)$$

因此,有

$$\begin{cases} E_r = -\frac{j}{k_c^2} \left[ \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + j\omega\mu_0 \frac{m}{r} H_z \right] \\ E_\varphi = -\frac{j}{k_c^2} \left[ \frac{jm\beta}{r} E_z - \omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \\ H_r = -\frac{j}{k_c^2} \left[ \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - j\omega\epsilon_i \frac{m}{r} E_z \right] \\ H_\varphi = -\frac{j}{k_c^2} \left[ \frac{jm\beta}{r} H_z + \omega\epsilon_i \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \end{cases} \quad (2-10-22)$$

式中,  $k_c^2 = k_i^2 - \beta^2$ , 在介质波导内,  $k_c^2 = k_{c1}^2$ ; 在介质波导外,  $k_c^2 = -k_{c2}^2$ 。

边界条件是  $r=a$  时

$$\begin{cases} E_{z1} = E_{z2} \\ H_{z1} = H_{z2} \\ E_{\varphi 1} = E_{\varphi 2} \\ H_{\varphi 1} = H_{\varphi 2} \end{cases} \quad (2-10-23)$$

很容易导出

$$(\eta_1 + \eta_2)(k_1^2 \eta_1 + k_2^2 \eta_2) = m^2 \beta^2 \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)^2 \quad (2-10-24)$$

其中

$$\eta_1 = \frac{J'_m(u)}{u J_m(u)}, \eta_2 = \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)}$$

$$k_1^2 = k_0^2 n_1^2, k_2^2 = k_0^2 n_2^2$$

方程(2-10-24)称为求模数的色散方程或特征方程,由此可导出传播因子  $\beta$ 。

## 二、介质波导模式

已经知道

$$\beta^2 = k_1^2 - \left(\frac{u}{a}\right)^2 = k_2^2 + \left(\frac{w}{a}\right)^2 \quad (2-10-25)$$

因此有

$$\begin{cases} \beta^2 w^2 = k_1^2 w^2 - \left(\frac{u}{a}\right)^2 w^2 \\ \beta^2 u^2 = k_2^2 u^2 + \left(\frac{w}{a}\right)^2 u^2 \end{cases} \quad (2-10-26)$$

两式相加,得

$$\beta^2 (w^2 + u^2) = k_1^2 w^2 + k_2^2 u^2 = k_0^2 (\epsilon_{r1} w^2 + \epsilon_{r2} u^2) \quad (2-10-27)$$

$$\beta^2 \frac{w^2 + u^2}{w^2 u^2} = k_0^2 \frac{\epsilon_{r1} w^2 + \epsilon_{r2} u^2}{w^2 u^2}$$

也即

$$\beta^2 \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) = k_0^2 \left( \frac{\epsilon_{r1}}{u^2} + \frac{\epsilon_{r2}}{w^2} \right) \quad (2-10-28)$$

于是,特征方程(2-10-24)又可改写成

$$(\eta_1 + \eta_2)(\epsilon_{r1} \eta_1 + \epsilon_{r2} \eta_2) = m^2 \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left( \frac{\epsilon_{r1}}{u^2} + \frac{\epsilon_{r2}}{w^2} \right) \quad (2-10-29)$$

引入归一化频率

$$v = (u^2 + w^2)^{1/2} = k_0 a (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \quad (2-10-30)$$

情况 1:  $m=0$  的情况,由特征方程(2-10-29)可得

$$\begin{cases} \eta_1(u) = -\eta_2(w) & \text{TE}_{0n} \text{ 模} \\ \text{或者} \end{cases} \quad (2-10-31)$$

$$\begin{cases} \eta_1(u) = -\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \eta_2(w) & \text{TM}_{0n} \text{ 模} \end{cases} \quad (2-10-32)$$

其中, $n$  表示场沿半径方向分布的最大值个数。

它可以分成两套独立分量:

$$\begin{cases} H_z, E_\phi, H_r & \text{TE}_{0n} \text{ 模} \\ E_z, E_r, H_\phi & \text{TM}_{0n} \text{ 模} \end{cases}$$

情况 2:  $m \neq 0$  的情况,特征方程(2-10-29)可写成

$$\epsilon_{r1} \eta_1^2 + \epsilon_{r2} \eta_2^2 + (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) \eta_1 \eta_2 = m^2 \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left( \frac{\epsilon_{r1}}{u^2} + \frac{\epsilon_{r2}}{w^2} \right)$$

也可写成

$$\eta_1^2 + \frac{n_2^2}{n_1^2} \eta_2^2 + \left( 1 + \frac{n_2^2}{n_1^2} \right) \eta_1 \eta_2 = m^2 \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left( \frac{1}{u^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{w^2} \right)$$

归结起来

$$\eta_1^2 + \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) \eta_1 \eta_2 + \left[ \frac{n_2^2}{n_1^2} \eta_2^2 - m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{w^2}\right) \right] = 0 \quad (2-10-33)$$

式(2-10-33)是以  $\eta_1$  为未知数的二次方程,解出

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\frac{\left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)}{2} \eta_2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^2 \eta_2^2 - 4 \left[ \frac{n_2^2}{n_1^2} \eta_2^2 - m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{w^2}\right) \right]} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) \eta_2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^2 \eta_2^2 + 4m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{w^2}\right)} \end{aligned} \quad (2-10-34)$$

当  $n_1 \approx n_2$  时

$$\eta_1 = -\eta_2 \pm m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \quad (2-10-35)$$

介质波导的最大特点是  $E_z$  和  $H_z$  会同时存在, 存在混合模  $EH_{mn}$  和  $EH_{mn}$  模, 从概念上只有这样才会满足阻抗条件, 这时, 式(2-10-35)

$$\begin{cases} \text{取正号} \rightarrow EH_{mn} \text{ 模} \\ \text{取负号} \rightarrow HE_{mn} \text{ 模} \end{cases}$$

$$P = -\frac{\omega \mu_0 B_m}{\beta A_m} = \frac{m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right)}{\eta_1 + \eta_2} \quad (2-10-36)$$

则介质波导内的纵向场分量可表示为

$$\begin{cases} E_z = J_m(uR) F_c \\ H_z = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} P J_m(uR) F_s \end{cases} \quad (2-10-37)$$

其中

$$\begin{cases} F_c = \frac{A_{m1}}{J_m(u)} \cos(m\varphi) e^{-j\beta z} \\ F_s = \frac{A_{m1}}{J_m(u)} \sin(m\varphi) e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (2-10-38)$$

对应的横向分量

$$\begin{cases} E_r = -j \left(\frac{\beta}{k_{cl}}\right) \left[ J'_m(k_{cl}r) - P \left(\frac{m J_m(k_{cl}r)}{k_{cl}r}\right) \right] F_c \\ E_\varphi = -j \left(\frac{\beta}{k_{cl}}\right) \left[ P J'_m(k_{cl}r) - \left(\frac{m J_m(k_{cl}r)}{k_{cl}r}\right) \right] F_s \\ H_r = -j \left(\frac{k_1^2}{\omega \mu_0 k_{cl}}\right) \left[ P \left(\frac{\beta^2}{k_1^2}\right) J'_m(k_{cl}r) - \left(\frac{m J_m(k_{cl}r)}{k_{cl}r}\right) \right] F_s \\ H_\varphi = -j \left(\frac{k_1^2}{\omega \mu_0 k_{cl}}\right) \left[ J'_m(k_{cl}r) - P \left(\frac{\beta^2}{k_1^2}\right) \left(\frac{m J_m(k_{cl}r)}{k_{cl}r}\right) \right] F_c \end{cases} \quad (2-10-39)$$

观察定义式(2-10-36)和式(2-10-35)的近似关系, 得到

$$\begin{cases} P=+1 & \text{EH}_{mn} \text{ 模} \\ P=-1 & \text{HE}_{mn} \text{ 模} \end{cases} \quad (2-10-40)$$

### 三、截止条件

从前面的分析已经知道,介质波导存在

$\text{TE}_{0n}$ 、 $\text{TM}_{0n}$ 、 $\text{EH}_{mn}$ 、 $\text{HE}_{mn}$  模式

介质波导传播条件是

$$\begin{cases} k_{\text{cl}}^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ k_{\text{c2}}^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \\ k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \end{cases} \quad (2-10-41)$$

要满足上述方程

$$k_2 \leq \beta \leq k_1 \quad (2-10-42)$$

金属波导中截止条件

$$k_{\text{cl}} = 0, \quad \text{即 } \beta^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \quad (2-10-43)$$

介质波导中截止条件

$$k_{\text{c2}} = 0 \quad (2-10-44)$$

金属波导截止时,波沿  $z$  方向无传播只是振幅衰减,同时因为是封闭的,外部无电磁场。介质波导截止时  $k_{\text{c2}} < 0$ ,波沿  $r$  方向有辐射,且沿  $z$  方向仍有传播——称为辐射模。所以  $k_{\text{c2}} \geq 0$  是波导外无辐射场的条件。

情况 1:  $m=0$  时

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} & u = k_{\text{cl}} a \\ \eta_2 = \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)} & w = k_{\text{c2}} a \end{cases} \quad (2-10-45)$$

$\text{TE}_{0n}$  模

$\eta_1(u) = -\eta_2(w)$  可写成

$$\frac{u J_m(u)}{J'_m(u)} = -\frac{w K_m(w)}{K'_m(w)} = 0 \quad (2-10-46)$$

原因是  $k_{\text{c2}} = 0, w = 0$ 。

$\text{TM}_{0n}$  模

$$\eta_1(u) = -\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \eta_2(w) \quad (2-10-47)$$

$$\frac{u J_m(u)}{J'_m(u)} = -\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \frac{w K_m(w)}{K'_m(w)} = 0$$

则  $\text{TE}_{0n}$ 、 $\text{TM}_{0n}$  模截止条件都可写为

$$J_0(u_{0n}) = 0 \quad (2-10-48)$$

情况 2:  $m=1$

特征方程变为

$$(\eta_1 + \eta_2)(\epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2) = \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left( \frac{\epsilon_1}{u^2} + \frac{\epsilon_2}{w^2} \right) \quad (2-10-49)$$

十分明显,有

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{u^2} \\ \eta_2 = \frac{1}{w^2} \end{cases} \quad (2-10-50)$$

计及  $\eta_1$  和  $\eta_2$  定义式,有

$$J'_1(u) = \frac{1}{u} J_1(u) \quad (2-10-51)$$

根据 Bessel 函数递推公式,又有

$$J'_1(u) = J_0(u) - \frac{1}{u} J_1(u) \quad (2-10-52)$$

可知 HE<sub>1n</sub> 模条件是

$$J_1(u_{1n}) = 0 \quad (2-10-53)$$

当  $n=1$  即 HE<sub>11</sub> 模

$$u_{11} = 0 \quad (2-10-54)$$

HE<sub>11</sub> 模无截止波长

$$\lambda_{cHE_{11}} = \infty \quad (2-10-55)$$

HE<sub>11</sub> 模是圆柱介质波长的基模,若  $\epsilon_2 = \epsilon_0$ , 则在截止条件

$$\beta = k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (2-10-56)$$

传播速度是光速。

#### 四、相速

$$\beta = k_0 \sqrt{\epsilon_{rl} - \left( \frac{\mu_{mn}\lambda}{2\pi a} \right)^2} \quad (2-10-57)$$

可得到相速

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{rl} - \left( \frac{\mu_{mn}\lambda}{2\pi a} \right)^2}} \quad (2-10-58)$$

其中,  $\mu_{mn}$  是  $J_m(k_{rl}a)$  的根值。

介质波导中波速在  $c \sim c/\sqrt{\epsilon_{rl}}$  之间。

为了加深对介质波导相关概念的理解,将圆柱金属波导和圆柱介质波导比较如图 2-10-3 所示。

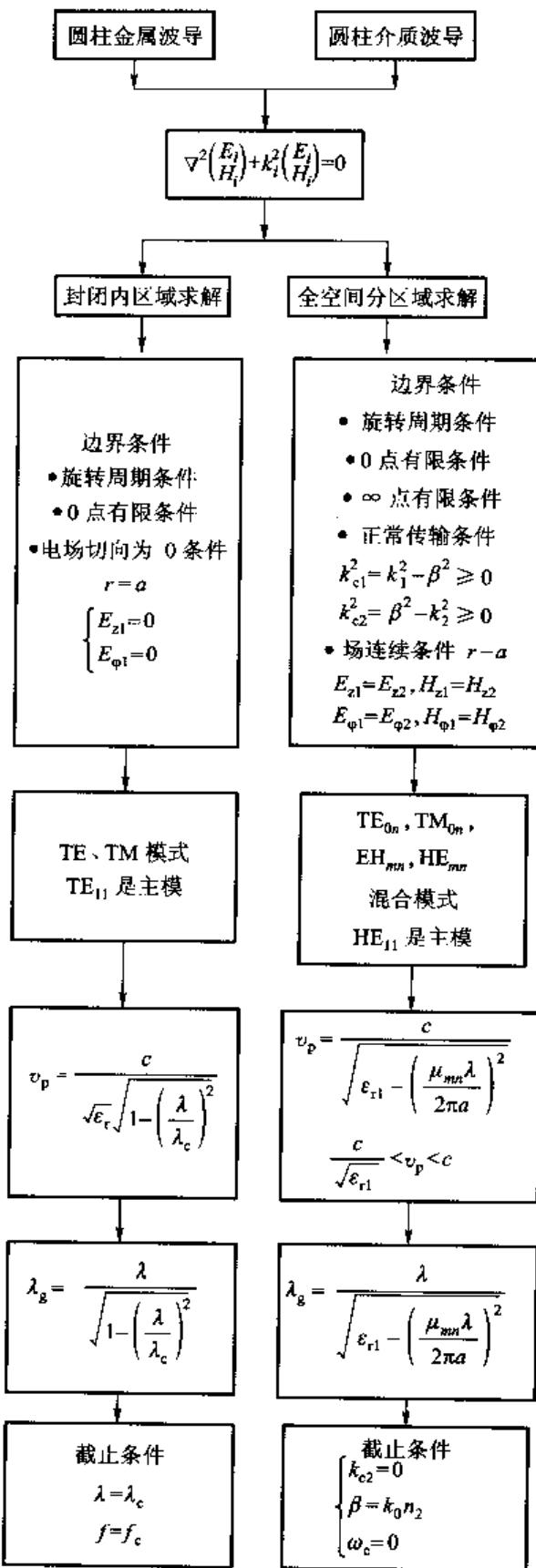


图2-10-3 圆柱金属波导和圆柱介质波导的比较

## 作业 PROBLEMS 2-10

- ① 根据光纤基础的介质波导理论,求解其场方程时,有几个约束条件?试加以分析。
- ② 试解释介质波导的截止条件为什么是  $k_z = 0$ 。

2-11

## 光纤 Optical Fiber

光纤是用来导光的介质纤维,是现代光纤通信系统中的物理传输媒介。一根实用化的光纤由多层介质构成,一般可以分为三部分:折射率较高的纤芯、折射率较低的包层和外面的涂敷层。

光纤的分类方法很多,可以按照光纤截面折射率分为阶跃型光纤和渐变型光纤,或按照光纤中传输模式的数量分为多模光纤和单模光纤,也可以按照工作波长分为短波长光纤、长波长光纤和超长波长光纤。

光纤的制造材料一般为石英、塑料和氧化物,目前通信上使用的是石英光纤,通常有以下三种:阶跃型多模光纤、渐变型多模光纤和阶跃型单模光纤。

光纤的工作原理可以采用射线理论来分析,也可以采用前面章节讲授的波动理论来分析。下面采用波导理论,以阶跃型多模光纤为例来讲解光纤的工作原理。

### 一、阶跃光纤模型

阶跃光纤的简化模型如图 2-11-1 所示,中心纤芯半径为  $a$ ,折射率为  $n_1$ ;包层半径为  $b$ ,折射率为  $n_2$ ;外部空气折射率为  $n_0$ ,并满足

$$\frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1 \quad (2-11-1)$$

实际上波导多模光纤中当  $r > b$  时,认为场已衰减完。注意到近年来已开始研究单模光纤,在这种情况下只需分两层考虑。

利用上面假定,将求近截止区和远离截止区的本征值的简单近似解。

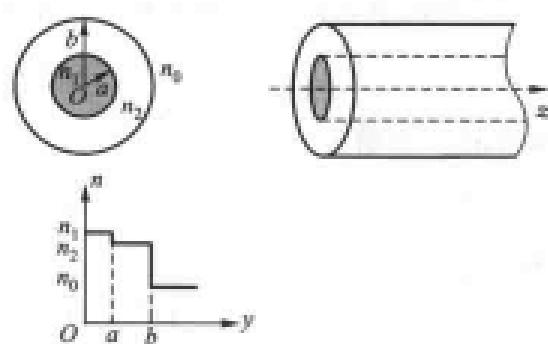


图 2-11-1 阶跃光纤

## 二、近似特征方程

根据两层的特点，完全可用上一节“介质波导”的有关结果。

[定义] 归一化频率

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 + w^2 = k_{c1}^2 a^2 + k_{c2}^2 a^2 = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) a^2 + (\beta^2 - k_0^2 n_2^2) a^2 \\ &= k_0^2 a^2 n_1^2 \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) = k_0^2 a^2 n_1^2 \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2} \end{aligned}$$

如果计及  $n_1 \approx n_2$  为简化条件，则有

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (2-11-2)$$

则

$$v^2 = 2k_0^2 a^2 n_1^2 \Delta \quad (2-11-3)$$

上面推导中已考虑

$$\begin{cases} u^2 = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) a^2 = k_{c1}^2 a^2 \\ w^2 = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2) a^2 = k_{c2}^2 a^2 \end{cases} \quad (2-11-4)$$

$u$  和  $w$  是光纤的基本参量， $v$  决定传输的模数，它与光波频率成正比 ( $v \propto k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ )。

在上一节中已给出特征方程

$$(\eta_1 + \eta_2)(k_1^2 \eta_1 + k_2^2 \eta_2) = m^2 \beta^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right)^2 \quad (2-11-5)$$

其中

$$\eta_1 = \frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} \quad \eta_2 = \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)}$$

且进一步导出了

$$(\eta_1 + \eta_2)(\epsilon_{c1} \eta_1 + \epsilon_{c2} \eta_2) = m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \left(\frac{\epsilon_{c1}}{u^2} + \frac{\epsilon_{c2}}{w^2}\right) \quad (2-11-6)$$

引入弱光导纤维条件  $(n_1 - n_2)/n_1 \ll 1$ ，即  $n_1 \approx n_2$  ( $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$ )，特征方程 (2-11-6) 简化为

$$(\eta_1 + \eta_2)^2 = m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right)^2 \quad (2-11-7)$$

具体给出  $\eta_1$  的解

$$\eta_1 = -\eta_2 \pm m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \quad (2-11-8)$$

或者写成

$$\frac{1}{u} \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} = -\frac{1}{w} \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \pm m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \quad (2-11-9)$$

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} = \frac{u^2 + w^2}{u^2 w^2} = \frac{2\Delta k_0^2 a^2 n_1^2}{u^2 w^2} \approx 0 \quad (2-11-10)$$

最后得到简化特征方程

$$\frac{1}{u} \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} = -\frac{1}{w} \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \quad (2-11-11)$$

由 Bessel 函数递推公式

$$J'_m(u) = \frac{1}{2} [J_{m-1}(u) - J_{m+1}(u)]$$

$$2 \frac{m}{u} J_m(u) = J_{m-1}(u) + J_{m+1}(u)$$

$$J'_m(u) = J_{m-1}(u) - \frac{m}{u} J_m(u)$$

于是

$$\frac{1}{u} \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} = \frac{1}{u} \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} - \frac{m}{u^2} \quad (2-11-12)$$

修正 Bessel 函数也有递推关系

$$K'_m(w) = -\frac{1}{2} [K_{m-1}(w) + K_{m+1}(w)]$$

$$2 \frac{m}{w} K_m(w) = -K_{m-1}(w) + K_{m+1}(w)$$

$$K'_m(w) = -K_{m-1}(w) - \frac{m}{w} K_m(w)$$

可得到

$$\frac{1}{w} \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} = -\frac{1}{w} \frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)} - \frac{m}{w^2} \quad (2-11-13)$$

把式(2-11-12)和式(2-11-13)代入简化特征方程(2-11-11),有

$$\frac{1}{u} \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} - \frac{m}{u^2} = \frac{1}{w} \frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)} + \frac{m}{w^2}$$

$$\frac{1}{u^2} \left[ u \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} - m \right] = \frac{1}{w^2} \left[ w \frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)} + m \right]$$

在弱光导纤维  $n_1 \approx n_2$ 、 $v^2 = u^2 + w^2 \approx 0$  或者  $u^2 \approx -w^2$  时,于是有近似特征方程(色散方程)

$$u \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = -w \frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)} \quad (2-11-14)$$

特别对于  $m=0$  的情况,有

$$u \frac{J_{-1}(u)}{J_0(u)} = -w \frac{K_{-1}(w)}{K_0(w)}$$

它可以简化为

$$u \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = w \frac{K_1(w)}{K_0(w)} \quad (2-11-15)$$

### 三、光纤模式

和金属波导不同,光纤属于介质波导,类型可分为  $TE_{0n}$ 、 $TM_{0n}$ 、 $EH_{mn}$  和  $HE_{mn}$  模式。特别对于弱光导纤维,还有满足相同近似特征方程的简并模组成 LP 模。

情况 1:  $TE_{0n}$  和  $TM_{0n}$  模

$$\begin{cases} \text{TE}_{0n} \text{ 模} & E_\varphi, H_r \text{ 和 } H_z \\ \text{TM}_{0n} \text{ 模} & E_r, H_\varphi \text{ 和 } E_z \end{cases}$$

$\text{TE}_{0n}$  和  $\text{TM}_{0n}$  模的场结构如图 2-11-2 所示。

$$\frac{1}{u} \frac{J'_0(u)}{J_0(u)} + \frac{1}{w} \frac{K'_0(w)}{K_0(w)} = 0 \quad \text{TE}_{0n} \text{ 模} \quad (2-11-16)$$

$$\frac{n_1^2}{u} \frac{J'_0(u)}{J_0(u)} + \frac{n_2^2}{w} \frac{K'_0(w)}{K_0(w)} = 0 \quad \text{TM}_{0n} \text{ 模} \quad (2-11-17)$$

情况 2:  $\text{HE}_{mn}$ 、 $\text{EH}_{mn}$  模

再写出特征方程

$$\frac{1}{u} \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} = -\frac{1}{w} \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \pm m \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)$$

上式取负为  $\text{HE}_{mn}$  模; 取正为  $\text{EH}_{mn}$  模。

$\text{HE}_{11}$  模  $f_{\text{eHE}_{11}} = 0$  是光纤基模, 其场结构如图 2-11-3 所示。

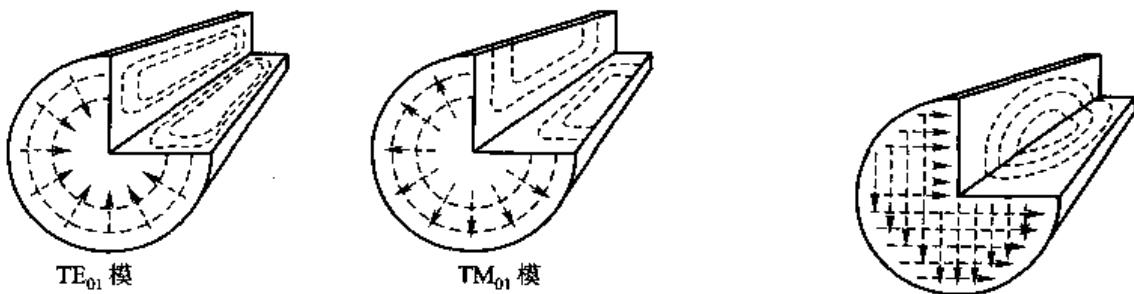


图 2-11-2  $\text{TE}_{0n}$  和  $\text{TM}_{0n}$  模的场结构

图 2-11-3  $\text{HE}_{11}$  模场结构

情况 3: LP 模式

LP(线极化模)是根据满足相同近似特征方程的模的相位周数可以简并而提出的, 具体如表 2-11-1 和表 2-11-2 所示。

表 2-11-1 LP 模命名 [ $\text{EH}_{mn}$ 、 $\text{HE}_{mn}$  ( $m \geq 1$ ) 模均有  $\sin m\varphi$  和  $\cos m\varphi$  简并]

LP 模	原命名	简并模	近似特征方程
$\text{LP}_{0n}$ ( $m=0$ )	$\text{HE}_{1n}$	2	$\frac{J_0(u)}{u J_1(u)} = \frac{1}{w} \frac{K_0(w)}{K_1(w)}$
$\text{LP}_{1n}$ ( $m=1$ )	$\text{TE}_{1n}$ $\text{TM}_{0n}$ $\text{HE}_{2n}$	4	$\frac{1}{u} \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = -\frac{1}{w} \frac{K_1(w)}{K_0(w)}$
$\text{LP}_{mn}$ ( $m \geq 2$ )	$\text{EH}_{m-1,n}$ $\text{HE}_{m+1,n}$	4	$\frac{1}{u} \frac{J_m(u)}{J_{m-1}(u)} = -\frac{1}{w} \frac{K_m(w)}{K_{m-1}(w)}$

表 2-11-2 LP<sub>01</sub>、LP<sub>11</sub> 和 LP<sub>21</sub> 的电场分析

LP 命名	原有命名	电场分布	E <sub>x</sub> 场强分布
LP <sub>01</sub>	HE <sub>11</sub>		
LP <sub>11</sub>	TE <sub>01</sub> TM <sub>01</sub> HE <sub>21</sub>	  	  
LP <sub>21</sub>	EH <sub>11</sub> HE <sub>31</sub>		

#### 四、截止条件和远离截止条件

从上面的论述可以看到,光纤中模式的特性可以用 3 个特征参数  $u$ 、 $w$  和  $\beta$  来描述。 $u$  表示模式场在纤芯内部的横向分布规律, $w$  表示模式场在纤芯外部的横向分布规律, $\beta$  是轴向的相位传播常数。一般根据特征方程确定其中一个参数,然后根据式(2-11-4)求出另外两个参数。但是,各个模式的特征方程是需要数值求解的超越方程。下面讨论两种极限情况,即光纤的截止条件和远离截止条件。

在正常情况下, $k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1$ ,纤芯外层场随指数规律  $K_m(r)$  衰减,这时电磁能量集中在纤芯之内。然而如果

$$\beta \leq k_0 n_2 \quad (2-11-18)$$

这时场能量逸出外层成为辐射模式

$$\begin{cases} \beta = k_0 n_2 \\ w = 0 \end{cases} \quad (2-11-19)$$

称为截止条件,具体如表 2-11-3 所示。

随着光纤的归一化频率  $v$  的增加,传播模式的径向归一化衰减常数  $w$  越来越大,这就意味着模式在包层中的径向衰减越来越快,其能量越来越往纤芯集中。当  $v$  和  $w$  足够大时,传播模式的能量基本上集中于光纤的纤芯之中,这种状态称为远离截止状态。因此, $w \gg 0$  和  $v \gg 0$  的极限情况,称为远离截止条件,具体如表 2-11-4 所示。

表 2-11-3 光纤模式截止条件

$m$	模式	截止条件
$m=0$	$TE_{0n}$	$J_0(u)=0$
	$TM_{0n}$	
$m=1$	$HE_{1n}$	$J_1(u)=0$
	$EH_{1n}$	
$m \geq 2$	$HE_{mn}$	$\frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = \frac{u}{m-1} \frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}$
	$EH_{mn}$	$J_m(u)=0 \quad \text{全部非 } 0 \text{ 根}$

表 2-11-4 远离截止条件

$m$	模式	远离截止条件
$m=0$	$TE_{0n}$	$J_0(u)=0$
	$TM_{0n}$	
$m \geq 1$	$HE_{mn}$	$J_{m-1}(u)=0$
	$EH_{mn}$	$J_{m+1}(u)=0$

特别是基模  $HE_{11}$  模的远离截止条件为  $J_0(u_{01})=0$ ,即

$$u_{01} = 2.40483 \quad (2-11-20)$$

$TE_{01}$ 、 $TM_{01}$  和  $HE_{21}$  的远离截止条件均为  $J_1(u)=0$ ,即

$$u_{11} = 3.83171 \quad (2-11-21)$$

于是可画出工作模式图。

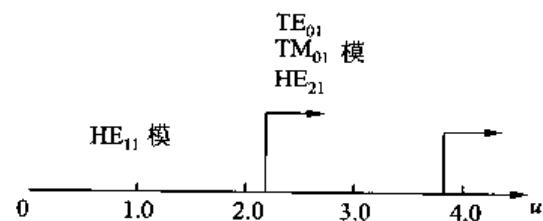


图 2-11-4 工作模式图

## 五、功率传输和模式估算

希望能量能集中于纤芯,因此光纤中一个重要指标是功率集中度。

[定义] 功率集中度

$$\eta = \frac{P_{\text{芯}}}{P_{\text{总}}} \quad (2-11-22)$$

其中, $P_{\text{芯}}$  表示纤芯内的功率, $P_{\text{总}}$  表示全部功率,一般要求  $\eta \rightarrow 1$ 。

光纤横截面( $r \in [0, \infty)$ )的 Poynting 矢量是

$$S_z = \frac{1}{2} (E_r H_\phi - E_\phi H_r) \propto \begin{cases} \frac{J_{m-1}^2(uR)}{J_{m \mp 1}^2(u)} & R \leq 1 \\ \frac{K_{m \mp 1}^2(wR)}{K_{m \mp 1}^2(w)} & R \geq 1 \end{cases} \quad (2-11-23)$$

式中,负号对应  $HE_{mn}$  模;正号对应  $EH_{mn}$  模。

$$\begin{cases} P_{\text{芯}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a S_z r dr d\varphi \\ P_{\text{包}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty S_z r dr d\varphi \end{cases} \quad (2-11-24)$$

积分得到

$$\eta = \left(\frac{w}{v}\right)^2 + \left(\frac{u}{v}\right)^2 \frac{K_m^2 + 1}{K_m K_{m+2}} \quad (2-11-25)$$

特别要提出  $\text{TM}_{0n}$ 、 $\text{TE}_{0n}$  和  $\text{HE}_{2n}$  模在截止时, 纤芯内功率  $P_{\text{芯}}=0$ , 只有包层( $r \in (a, b)$ )中有功率传输; 而主模式截止时, 芯内仍有功率传输。

多模光纤的传输模式总数  $N$  有估计公式

$$N = 2 \left( \frac{\pi a n_1 \sqrt{2\Delta}}{\lambda} \right) \approx \frac{1}{2} v^2 \quad (2-11-26)$$

作为例子, 当  $a=55 \mu\text{m}$ ,  $\Delta=1\%$ ,  $\lambda=2 \mu\text{m}$  时

$$N \approx 24.4 n_1 > 25 \quad (2-11-27)$$

## 作业 PROBLEMS 2-11

● 试根据圆柱介质波导电场方程, 推导特征方程

$$(\eta_1 + \eta_2)(k_1^2 \eta_1 + k_2^2 \eta_2) = m^2 \beta^2 \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)^2$$

● 试比较介质波导中的模与金属波导中的模有何不同。



## 耦合传输线 Coupled Transmission-Line

在本章前面的内容中, 介绍了多种形式导波结构的工作原理。这些导波结构均为单根传输线, 那么, 如果两根传输线放在一起会怎样? 很自然的, 读者会认为这两根传输线间可能会互相影响, 这种相互之间的影响也称为耦合。耦合的两根或者多根传输线中, 每根传输线的特性都和独立单根传输线的特性不同。有时候, 为了完成一定的微波工程应用, 需要采用耦合传输线的结构, 如在微波工程设计中, 由于定向耦合器、滤波器等元器件的实际需要, 提出了耦合带线, 如图 2-12-1 所示。

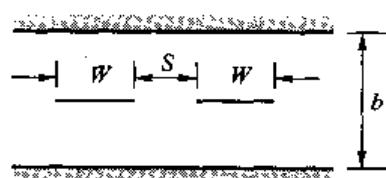


图 2-12-1 耦合带线

## 一、耦合带线

### 1. 电容矩阵和Y矩阵

部分电容的概念是最直观描述耦合结构的一种方法,如图 2-12-2 所示。

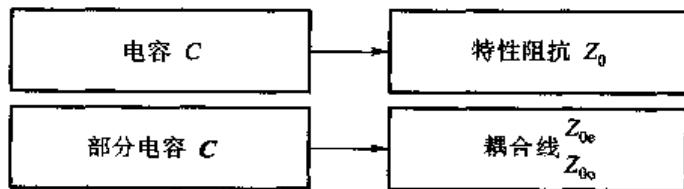


图 2-12-2 电容和部分电容

给出一般耦合传输线的电场和部分电容情况,如图 2-12-3 所示,可以看出有 3 个电容  $C_a$ 、 $C_b$  和  $C_{ab}$ ,都称为部分电容,其中, $C_a$  是 a 的自电容, $C_b$  是 b 的自电容, $C_{ab}$  是 a、b 之间的互电容。

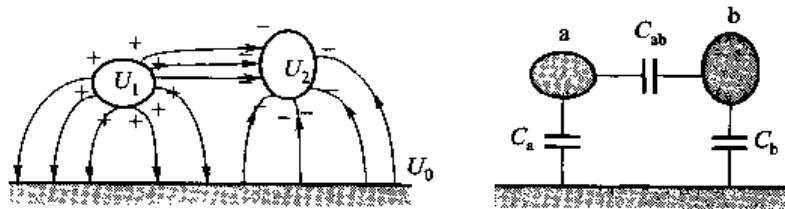


图 2-12-3 部分电容

$$\begin{cases} Q_1 = C_a U_1 + C_{ab} (U_1 - U_2) = (C_a + C_{ab}) U_1 - C_{ab} U_2 \\ Q_2 = C_{ab} (U_2 - U_1) + C_b U_2 = -C_{ab} U_1 + (C_b + C_{ab}) U_2 \end{cases} \quad (2-12-1)$$

写成矩阵形式,注意上面的电容都是单位长度电容

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_a + C_{ab} & -C_{ab} \\ -C_{ab} & C_b + C_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

特性导纳  $Y_0 = \frac{1}{Z_0} = vC$ ,也写成矩阵式

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = v\mathbf{C} \quad (2-12-2)$$

其中

$$\begin{cases} Y_{11} = vC_{11} = v(C_a + C_{ab}) \\ Y_{22} = vC_{22} = v(C_b + C_{ab}) \\ Y_{12} = Y_{21} = -vC_{ab} \end{cases}$$

那么,如果定义  $vQ = I$  有

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2-12-3)$$

式(2-12-3)表示在任意激励  $[U_1, U_2]^T$  的条件下,两条耦合传输线所传输的电流为  $[I_1, I_2]^T$ 。

## 2. 奇偶模分析方法

传统上,耦合传输线的分析方法采用奇偶模分析方法。

耦合传输线的耦合表现在矩阵上有非对角项。奇偶模分析方法的核心是解耦,它来自“对称和反对称”思想。

例如,任意矩阵可以分解成对称与反对称矩阵之和

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\} + \frac{1}{2}\{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\} \quad (2-12-4)$$

完全类似,对于任意激励  $\mathbf{U}$  有

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \\ \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(U_1 - U_2) \\ -\frac{1}{2}(U_1 - U_2) \end{bmatrix} \quad (2-12-5)$$

定义

$$\begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \\ \frac{1}{2}(U_1 - U_2) \end{bmatrix} \quad (2-12-6)$$

$$\begin{bmatrix} U_e \\ -U_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(U_1 - U_2) \\ -\frac{1}{2}(U_1 - U_2) \end{bmatrix} \quad (2-12-7)$$

分别为偶模激励和奇模激励。偶模激励是一种对称激励;奇模激励是一种反对称激励。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_e + U_o \\ U_e - U_o \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_e + I_o \\ I_e - I_o \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2-12-8)$$

其中,关系是

$$U_e = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \quad I_e = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$$

$$U_o = \frac{1}{2}(U_1 - U_2) \quad I_o = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$

不管是哪种激励,它们都是建立在“线性叠加原理”基础上的。

写出变换矩阵

$$\begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

也就是

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_o \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

这样就可以得到

$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_o \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_o \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Y_{11} + Y_{22} + 2Y_{12} & Y_{11} - Y_{22} \\ Y_{11} - Y_{22} & Y_{11} + Y_{22} - 2Y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix}$$

特别对于对称耦合传输线  $Y_{11} = Y_{22}$ , 有

$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ee} & 0 \\ 0 & Y_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix} \quad (2-12-9)$$

其中

$$Y_{ee} = Y_{11} + Y_{12} \quad (2-12-10)$$

$$Y_{oo} = Y_{11} - Y_{12} \quad (2-12-11)$$

分别是偶模导纳和奇模导纳, 这种做法把互耦问题化成两个独立问题——从数学上而言, 也即矩阵对角化的方法, 从几何上而言, 则对应坐标旋转的方法。

$$\begin{cases} I_e = Y_{ee} U_e \\ I_o = Y_{oo} U_o \end{cases} \quad (2-12-12)$$

在技术方面习惯用阻抗

$$\begin{cases} Z_{ee} = \frac{1}{Y_{ee}} \\ Z_{oo} = \frac{1}{Y_{oo}} \end{cases} \quad (2-12-13)$$

分别是偶模阻抗和奇模阻抗。

应该明确偶模激励和奇模激励是一种(外部)激励。这里进一步考察这两种特征激励的物理意义。

偶模激励是磁壁——偶对称轴。

奇模激励是电壁——奇对称轴。

相应的电力线分布如图 2-12-4 所示。

从图 2-12-4 明显看出:

$$C_g > C_e$$

$$C_o > C_e$$

所以

$$Z_{ee} > Z_{eo} \quad (2-12-14)$$

耦合传输线中偶模阻抗大于奇模阻抗, 这是重要的物理概念。

### 3. 奇偶模方法的基础

#### (1) 奇偶模的网络基础

从网络理论来说, 奇偶模是一种广义变换, 其本质是一个“去耦”的过程如图 2-12-5 所示。很明显可看出

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{ee} & 0 \\ 0 & Y_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$[Y] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Y_{ee} + Y_{oo} & Y_{ee} - Y_{oo} \\ Y_{ee} - Y_{oo} & Y_{ee} + Y_{oo} \end{bmatrix} \quad (2-12-15)$$

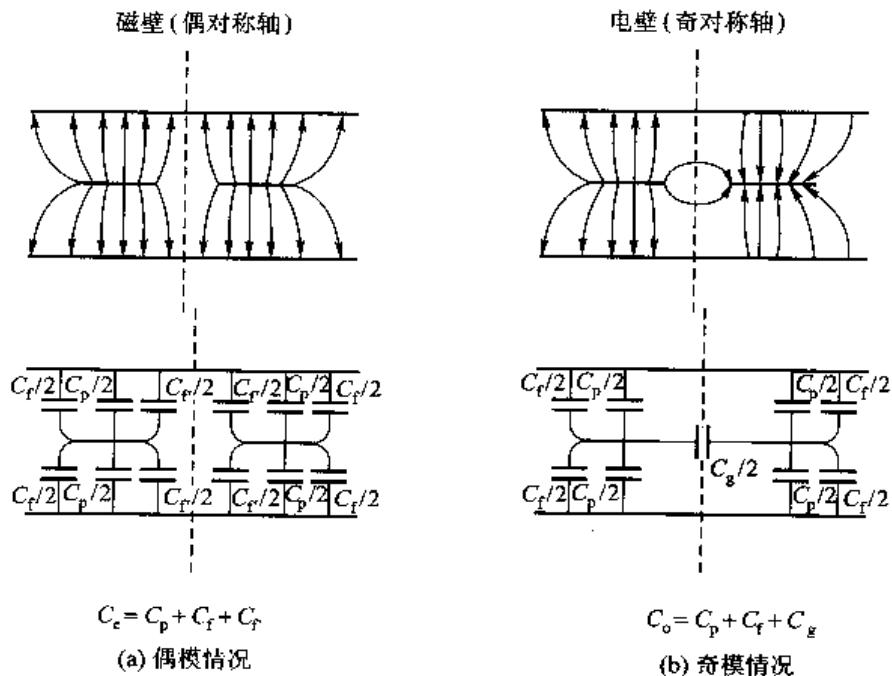


图 2-12-4 奇偶模激励的物理意义

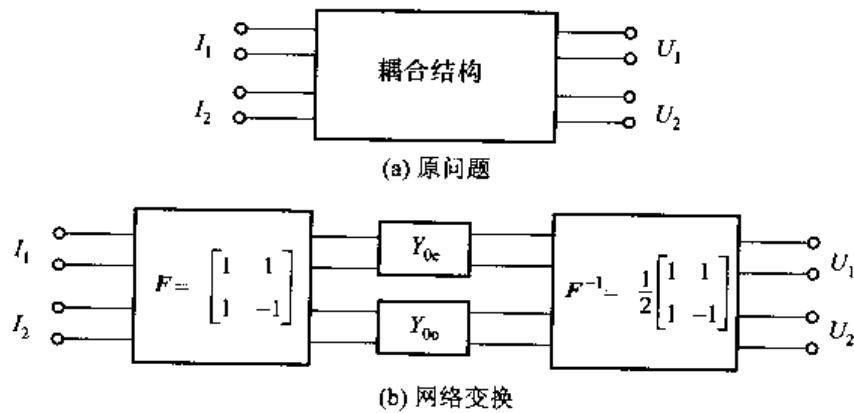


图 2-12-5 奇偶模的网络变换思想

这是几何对称传输线的一种模式。

## (2) 奇偶模的本征值理论

为了把奇偶模方法推广到不对称传输线情况, 要研究奇偶模的本征值理论, 因为矩阵本征化即为“去耦”的一个过程

[定义]

$$YU = \lambda U \quad (2-12-16)$$

称为本征方程, 其中  $\lambda$  为本征值;  $\lambda$  对应的  $U$  称为本征激励。对应双线情况, 有

$$\begin{bmatrix} Y_{11} - \lambda & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2-12-17)$$

$$\lambda^2 - (Y_{11} + Y_{22})\lambda + (Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2) = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ (Y_{11} + Y_{22}) \pm \sqrt{(Y_{11} + Y_{22})^2 - 4(Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2)} \right\} \quad (2-12-18)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (Y_{11} + Y_{22}) \pm \sqrt{(Y_{11} - Y_{22})^2 + 4Y_{12}^2} \right\}$$

情况 1：对称传输线情况  $Y_{11} = Y_{22}$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ (Y_{11} + Y_{22}) \pm 2Y_{12} \right\} \quad (2-12-19)$$

具体可看出

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} (Y_{11} + Y_{22} + 2Y_{12}) = Y_{0e} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} (Y_{11} + Y_{22} - 2Y_{12}) = Y_{0o} \end{cases}$$

在  $\lambda_1$  的条件下，本征方程具体为

$$\begin{bmatrix} Y_{11} - \lambda_1 & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{e1} \\ U_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (Y_{11} - Y_{22} - 2Y_{12}) & Y_{12} \\ Y_{12} & -\frac{1}{2} (Y_{11} - Y_{22} + 2Y_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{e1} \\ U_{e2} \end{bmatrix} = 0$$

也可写出

$$\begin{bmatrix} -Y_{12} & Y_{12} \\ Y_{12} & -Y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{e1} \\ U_{e2} \end{bmatrix} = 0$$

得到

$$\begin{aligned} U_{e1} &= U_{e2} = U_e \\ I_e &= \lambda_1 U_e \end{aligned} \quad (2-12-20)$$

在  $\lambda_2$  的条件下，本征方程具体为

$$\begin{bmatrix} Y_{11} - \lambda_2 & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{o1} \\ U_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (Y_{11} - Y_{22} + 2Y_{12}) & Y_{12} \\ Y_{12} & -\frac{1}{2} (Y_{11} - Y_{22} - 2Y_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{o1} \\ U_{o2} \end{bmatrix} = 0$$

也可写出

$$\begin{bmatrix} Y_{12} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{o1} \\ U_{o2} \end{bmatrix} = 0$$

得到

$$\begin{aligned} U_{o1} &= -U_{o2} = U_o \\ I_o &= \lambda_2 U_o \end{aligned} \quad (2-12-21)$$

情况 2：不对称传输线情况  $Y_{11} \neq Y_{22}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \left\{ (Y_{11} + Y_{22}) - \sqrt{(Y_{11} - Y_{22})^2 + 4Y_{12}^2} \right\} = Y_{0e} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \left\{ (Y_{11} + Y_{22}) + \sqrt{(Y_{11} - Y_{22})^2 + 4Y_{12}^2} \right\} = Y_{0o} \end{cases} \quad (2-12-22)$$

在  $\lambda_1$  条件下，本征方程具体为

$$\begin{bmatrix} Y_{11} - \lambda_1 & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{e1} \\ U_{e2} \end{bmatrix} = 0$$

设  $U_e = U_{e1}$

$$U_{e2} = \frac{1}{2Y_{12}} (-Y_{11} + Y_{22} - \sqrt{(Y_{11} - Y_{22})^2 + 4Y_{12}^2}) U_e = k_e U_e$$

其中

$$\begin{aligned} k_e &= \frac{1}{2Y_{12}} (-Y_{11} + Y_{22} - \sqrt{(Y_{11} - Y_{22})^2 + 4Y_{12}^2}) \\ I_e &= \lambda_1 U_e \end{aligned} \quad (2-12-23)$$

注意：在推导中务必注意到实际上  $Y_{12} < 0$ 。

在  $\lambda_2$  条件下，本征方程具体为

$$\begin{bmatrix} Y_{11} - \lambda_2 & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{o1} \\ U_{o2} \end{bmatrix} = 0$$

设  $U_o = U_{o1}$

$$\begin{aligned} U_{o2} &= \frac{1}{2Y_{12}} [-Y_{11} + Y_{22} + \sqrt{(Y_{11} - Y_{22})^2 + 4Y_{12}^2}] U_o = -k_o U_o \\ I_o &= \lambda_2 U_o \end{aligned}$$

请注意

$$k_e k_o = 1 \quad (2-12-24)$$

因此可写出  $k_e = k$ ,  $k_o = \frac{1}{k}$ 。

因此，有

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -\frac{1}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix} \quad (2-12-25)$$

从而可导出

$$\begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix} = \frac{k}{k^2 + 1} \begin{bmatrix} k & 1 \\ k & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2-12-26)$$

$$k = \frac{1}{2C_{ab}} \{ (C_a - C_b) + \sqrt{(C_a - C_b)^2 + 4C_{ab}^2} \} \quad (2-12-27)$$

$$\begin{cases} Y_{oe} = \frac{1}{2} \{ (C_a + C_b + 2C_{ab}) - \sqrt{(C_a - C_b)^2 + 4C_{ab}^2} \} \\ Y_{oo} = \frac{1}{2} \{ (C_a + C_b + 2C_{ab}) + \sqrt{(C_a - C_b)^2 + 4C_{ab}^2} \} \end{cases} \quad (2-12-28)$$

$$\begin{bmatrix} U_{e1} \\ U_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} U_e$$

$$\begin{bmatrix} U_{o1} \\ U_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{k} \end{bmatrix} U_o \quad (2-12-29)$$

很明显，如图 2-12-6 所示，在不对称传输线的情况下，有 3 个独立参量： $Y_{oe}$ 、 $Y_{oo}$  和  $k$ ，这一点与对称情况完全不同。

#### 4. 耦合带线设计

## (1) 耦合带线分析

这里所介绍的是 S. B. Cohn 做过的工作, 完成的是如图 2-12-7 所示的问题分析。

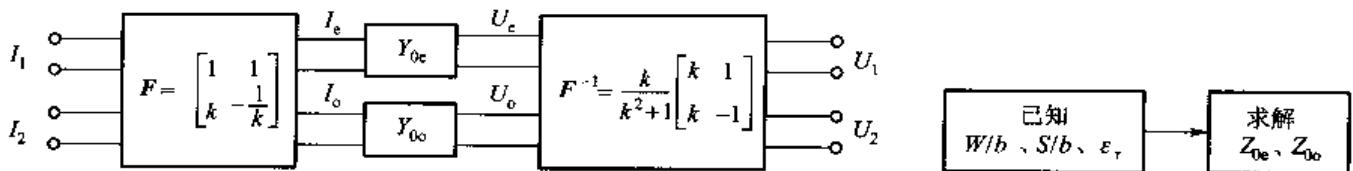


图 2-12-6 不对称的奇、偶模分解

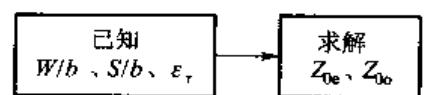


图 2-12-7 问题分析

$$\begin{cases} Z_{0e} = \frac{30\pi K'(k'_e)}{\sqrt{\epsilon_r} K(k_e)} \\ Z_{0o} = \frac{30\pi K'(k'_o)}{\sqrt{\epsilon_r} K(k_o)} \end{cases} \quad (2-12-30)$$

其中

$$\begin{cases} k_e = \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2} \frac{W}{b}\right) \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2} \frac{W+S}{b}\right) \\ k_o = \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2} \frac{W}{b}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{\pi}{2} \frac{W+S}{b}\right) \end{cases} \quad (2-12-31)$$

同样有

$$\frac{K(k)}{K'(k)} = \begin{cases} \left[ \frac{1}{\pi} \ln \left( 2 \frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}} \right) \right]^{-1} & 0 < k \leq 0.707 \\ \frac{1}{\pi} \ln \left( 2 \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right) & 0.707 < k < 1 \end{cases} \quad (2-12-32)$$

## (2) 耦合带线综合

耦合带线综合完成的是如图 2-12-8 所示的综合问题。

$$\begin{cases} \frac{W}{b} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arth} \sqrt{k_e k_o} \\ \frac{S}{b} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arth} \left[ \frac{1-k_e}{1-k_o} \sqrt{\frac{k_e}{k_o}} \right] \end{cases} \quad (2-12-33)$$

$$\begin{cases} k_{e,o} = \sqrt{1 - \left( \frac{e^A - 2}{e^A + 2} \right)^4} & \pi \leq A < \infty \\ k_{e,o} = \left[ \frac{e^{\frac{A}{2}} - 2}{e^{\frac{A}{2}} + 2} \right]^2 & 0 < A < \pi \end{cases} \quad (2-12-34)$$

$$A = \begin{cases} \frac{Z_{0e} \sqrt{\epsilon_r}}{30} & \text{偶模} \\ \frac{Z_{0o} \sqrt{\epsilon_r}}{30} & \text{奇模} \end{cases} \quad (2-12-35)$$

顺便提及在带线内偶模和奇模的速度相同:  $v = v_e = v_o = c/\sqrt{\epsilon_r}$ ; 波长相同:  $\lambda_g = \lambda_{ge} = \lambda_{go} = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r}$ 。

## (3) 耦合带线衰减

耦合带线的衰减额计算也采用 Wheeler 增量电感法,但要分别算出

$$\begin{cases} \alpha_{re}, \alpha_{ro} \\ \alpha_{de}, \alpha_{do} \end{cases}$$

耦合线的真实衰减与具体激励有关,也可以给出分析和计算。

## 5. 耦合系数和奇偶模阻抗的关系

从前文的分析可以得到:耦合传输线间由于互电感和互电容的存在引起相互之间的耦合,而任意激励情况下的耦合传输线的求解可以采用奇偶模分析的方法进行。耦合传输线的奇偶模激励情况下的解是由其结构决定的固有特性,两者之间的差别和两根传输线之间的耦合强度密切相关。

如果设两根传输线间的耦合电感为  $L_m$ ,耦合电容为  $C_m$ ,则耦合传输线的电报方程可以写为

$$dU_1(z)/dz = -j\omega L I_1(z) - j\omega L_m I_2(z) \quad (2-12-36)$$

$$dI_1(z)/dz = -j\omega C U_1(z) + j\omega C_m U_2(z) \quad (2-12-37)$$

$$dU_2(z)/dz = -j\omega L I_2(z) - j\omega L_m I_1(z) \quad (2-12-38)$$

$$dI_2(z)/dz = -j\omega C U_2(z) + j\omega C_m U_1(z) \quad (2-12-39)$$

从而容易得到,在偶模情况下

特性阻抗为

$$Z_{oe} = \sqrt{L(1+K_L)/C(1-K_C)} \quad (2-12-40)$$

相速为

$$v_{pe} = 1/\sqrt{LC(1+K_L)(1-K_C)} \quad (2-12-41)$$

在奇模情况下

特性阻抗为

$$Z_{eo} = \sqrt{L(1-K_L)/C(1+K_C)} \quad (2-12-42)$$

相速为

$$v_{po} = 1/\sqrt{LC(1-K_L)(1+K_C)} \quad (2-12-43)$$

式中,  $K_L = L_m/L$ ,  $K_C = C_m/C$ 。

对称的耦合带状线处于均匀介质中,传输的是 TEM 模,无论是在偶模还是奇模激励下,相速都是介质中的光速,即  $v_{pe} = v_{po} = c/\sqrt{\epsilon_r}$ ,这就要求  $K_L = K_C = K$ ,即其电感耦合系数等于电容耦合系数。

那么,很明显,如果令没有耦合的单根传输线的特性阻抗为  $Z_0$ ,从式(2-12-39)和式(2-12-42)也可以得到

$$Z_{oe} < Z_0 < Z_{eo} \quad (2-12-44)$$

这和式(2-12-14)的结论相同。

同时,还可以得到

$$K = (Z_{oe} - Z_{eo}) / (Z_{oe} + Z_{eo}) \quad (2-12-45)$$

因此,当强耦合时,K 较大,则  $Z_{oe}$  和  $Z_{eo}$  的差值也较大;当弱耦合时,K 较小, $Z_{oe}$  和  $Z_{eo}$  的差值



图 2-12-8 综合问题

也较小,特别是当  $K$  为 0 时,则  $Z_o$  和  $Z_{ss}$  相等,表明当两根耦合传输线相距较远、彼此耦合很弱时,每根独立传输线的特性基本没有变化。

需要特别指出的是,由于以上结论推导的条件是均匀媒质填充的耦合线,所以不适用于下面即将介绍的耦合微带线。

## 二、耦合微带

平常经常遇到的是对称耦合微带,其结构如图 2-12-9 所示。

采用的方法自然还是奇偶模理论,只是在讨论中要强调微带的不均匀性所造成的情况将会与带线情况有所不同。

### 1. 耦合微带分析

仍然是用磁壁和电壁两种情况加以分析,如图 2-12-10 所示。

于是可写出

$$\begin{cases} C_s = C_p + C_t + C_r \\ C_o = C_p + C_t + C_{si} + C_{so} \end{cases} \quad (2-12-46)$$

在上面分析中,  $C_p$  表示平板电容,为

$$C_p = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r W}{h} \quad (2-12-47)$$

作为近似,  $C_r$  可以看作单线微带的边缘电容,有

$$C = C_p + 2C_t \quad (2-12-48)$$

$C$  是单线微带的总电容,如图 2-12-11 所示。

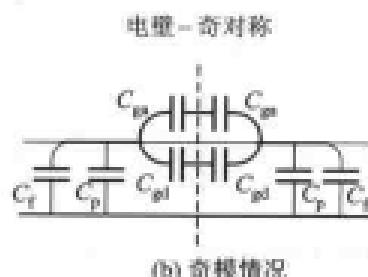
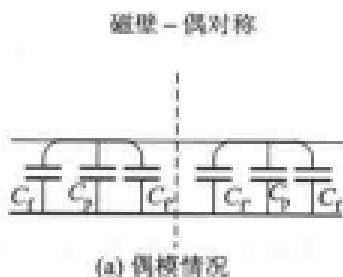


图 2-12-10 耦合微带

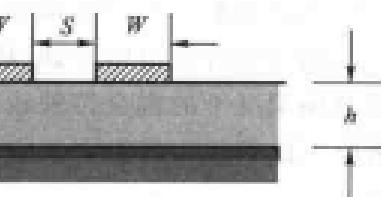


图 2-12-9 对称耦合微带

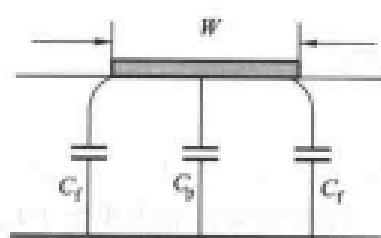


图 2-12-11 单线微带

$$Z_o = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{cC} \quad (2-12-49)$$

于是容易得到

$$C_t = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{cZ_o} - C_p \right) \quad (2-12-50)$$

$C_t$  的求解要依靠经验公式,当然有必要采用数值计算。

$$C_t = \frac{C_t}{1 + A \left( \frac{h}{S} \right) \operatorname{th} \left( \frac{10S}{h} \right)} \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\epsilon_e}} \quad (2-12-51)$$

只需注意到  $\epsilon_e$ , 则可知  $C_t$  是属于单线微带的。且

$$A = \exp \left[ -0.1 \exp \left( 2.33 - \frac{2.53W}{h} \right) \right] \quad (2-12-52)$$

$C_{ga}$  是空气一侧的奇模边缘电容, 为

$$C_{ga} = \epsilon_a \frac{K'(k')}{K(k)} \quad (2-12-53)$$

其中

$$k = \frac{\frac{S}{h}}{\frac{S}{h} + \frac{2W}{h}} \quad (2-12-54)$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$C_{gd}$  是介质片一侧的奇模电容

$$C_{gd} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\pi} \ln \left[ \operatorname{cth} \left( \frac{\pi S}{4h} \right) \right] + 0.65 C_t \left( \frac{0.02}{\frac{S}{h}} \sqrt{\epsilon_r} + 1 - \epsilon_r^{-2} \right) \quad (2-12-55)$$

微带分析问题的任务如图 2-12-12 所示。

为方便起见, 采用  $i$ , 定义为

$$i = \begin{cases} e & \text{表示偶模} \\ o & \text{表示奇模} \end{cases} \quad (2-12-56)$$

$Z_{0i}$ 、 $C_i$  (表示填充介质情况) 和  $C_i^*$  (表示填充空气情况), 则

$$\begin{cases} C_i = \epsilon_0 \epsilon_e^i G \\ C_i^* = \epsilon_0 G \end{cases} \quad (2-12-57)$$

其中,  $G$  是与电容有关的几何因子。

这里, 特别需要说明的是定义  $\epsilon_e^e$  和  $\epsilon_e^o$  为偶模等效介电常数和奇模等效介电常数, 它们不仅与填充介质有关, 而且还与模式有关。很明显可知

$$\epsilon_e^i = \frac{C_i}{C_i^*} \quad (2-12-58)$$

根据偶模阻抗和奇模阻抗定义

$$Z_{0i} = \frac{\sqrt{\epsilon_e^i}}{c C_i} = \frac{\sqrt{C_i}}{c C_i^*}$$

最后得到

$$Z_{0i} = \frac{1}{C \sqrt{C_i C_i^*}} \quad (2-12-59)$$

计算框图如图 2-12-13 所示。

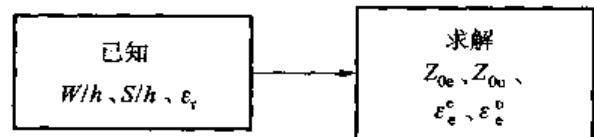


图 2-12-12 微带分析问题的任务

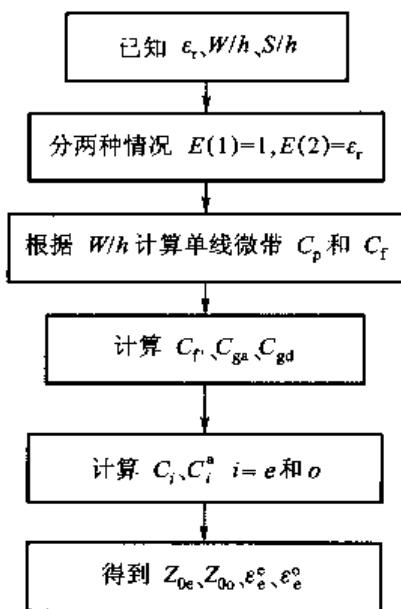


图 2-12-13 耦合微带计算框图

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{h} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arch} \left\{ \frac{\operatorname{ch} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{W}{h} \right)_{se} \right] + \operatorname{ch} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{W}{h} \right)_{se} \right] - 2}{\operatorname{ch} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{W}{h} \right)_{se} \right] - \operatorname{ch} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{W}{h} \right)_{se} \right]} \right\} \\ \frac{W}{h} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arch} \left\{ \frac{\left[ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi}{2} \frac{S}{h} \right) + 1 \right] \operatorname{ch} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{W}{h} \right)_{se} \right] + \operatorname{ch} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{S}{h} \right) \right] - 1}{2} \right\} - \frac{1}{2} \left( \frac{S}{h} \right) \end{array} \right. \quad (2-12-60)$$

其中,  $\left( \frac{W}{h} \right)_{se}$  表示  $Z_0 = \frac{Z_{0e}}{2}$  对应的单线微带  $\frac{W}{h}$ ;  $\left( \frac{W}{h} \right)_{so}$  表示  $Z_0 = \frac{Z_{0o}}{2}$  对应的单线微带的  $\frac{W}{h}$ , 有

$$\left( \frac{W}{h} \right)_{se} = 0.78 \left( \frac{W}{h} \right)_{so} + 0.1 \left( \frac{W}{h} \right)_{se}$$

然后采用优化方法对所得的  $Z_{0e}, Z_{0o}$  加以比较, 具体如图 2-12-15 所示。

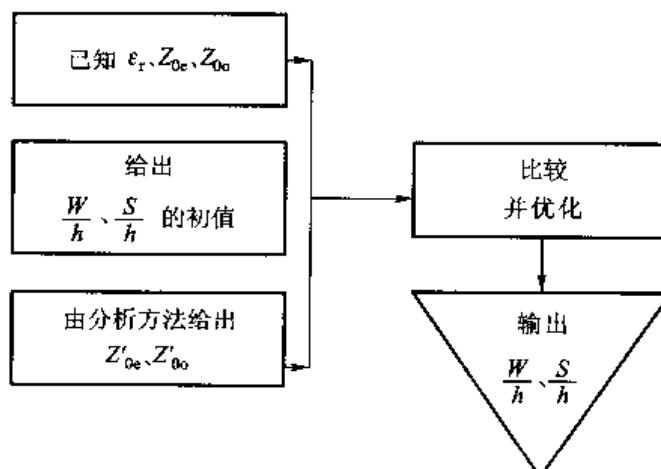


图 2-12-15 耦合微带综合框图

## 2. 耦合微带综合

耦合微带的综合是一个比较困难的课题, 不采用计算机很难达到预定的精度, 综合问题的任务如图 2-12-14 所示。先写出初值

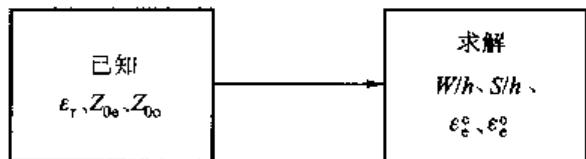


图 2-12-14 耦合微带综合问题的任务

### 3. 奇偶模的网络理论

前面已讨论过奇偶模的  $\mathbf{Y}$  矩阵变换理论, 这里再进一步研究奇偶模的  $\mathbf{A}$  矩阵变换。

如图 2-12-16 所示的双端口网络输入、输出的关系为

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

现在, 把如图 2-12-16 所示的  $\mathbf{A}$  参数推广到如图 2-12-17 所示的  $2N$  端口网络, 表达式为

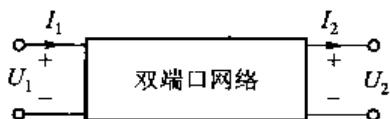


图 2-12-16 双端口网络的  $A$  矩阵

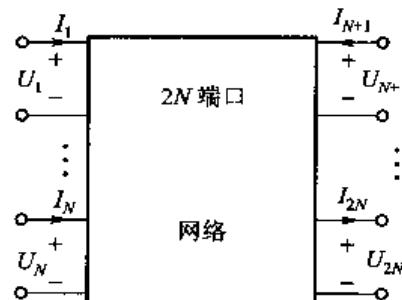


图 2-12-17 2N 端口网络的  $A$  矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U_{\text{II}} \\ I_{\text{II}} \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}, I_1 = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}, U_{\text{II}} = \begin{bmatrix} U_{N+1} \\ \vdots \\ U_{2N} \end{bmatrix}, I_{\text{II}} = \begin{bmatrix} I_{N+1} \\ \vdots \\ I_{2N} \end{bmatrix}$$

$$U_e^1 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2), U_o^1 = \frac{1}{2}(U_1 - U_2)$$

$$I_e^1 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2), I_o^1 = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$

如图 2-12-18 所示, 可见

$$U_1 = U_e^1 + U_o^1, I_1 = I_e^1 + I_o^1$$

$$U_2 = U_e^1 - U_o^1, I_2 = I_e^1 - I_o^1$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^E \begin{bmatrix} U_e^1 \\ I_e^1 \\ U_o^1 \\ I_o^1 \end{bmatrix} \quad (2-12-61)$$

其中

$$\mathbf{A}^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2-12-62)$$

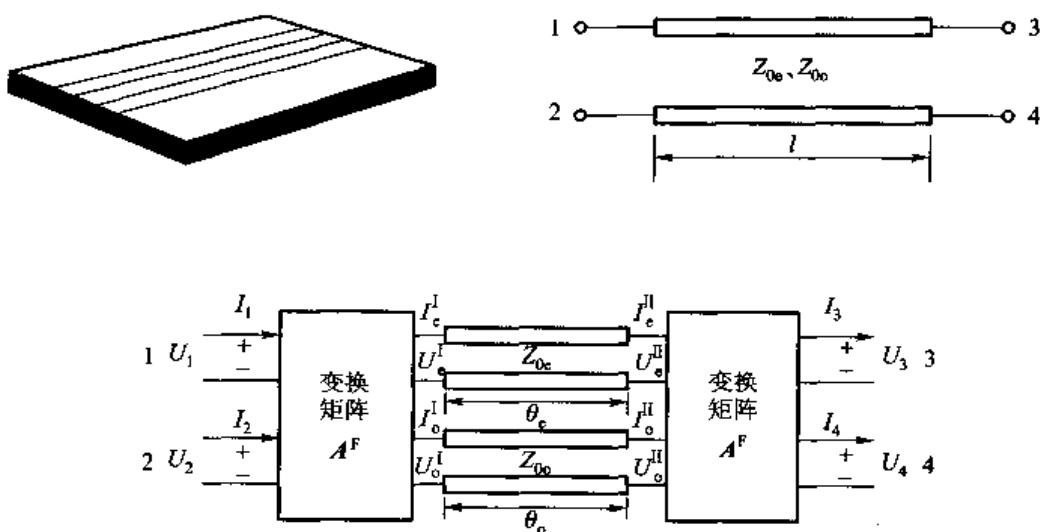


图 2-12-18 桥接微带的 A 矩阵变换

传输线两端的电流、电压关系为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} U_e^I \\ I_e^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & jZ_{0e} \sin \theta_e \\ j\frac{1}{Z_{0e}} \sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e^{II} \\ I_e^{II} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} U_o^I \\ I_o^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_o & jZ_{0o} \sin \theta_o \\ j\frac{1}{Z_{0o}} \sin \theta_o & \cos \theta_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o^{II} \\ I_o^{II} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2-12-63)$$

非常明显,变换进行到式(2-12-63),耦合问题转化为去耦问题,也可联合写成

$$\begin{bmatrix} U_e^I \\ I_e^I \\ U_o^I \\ I_o^I \end{bmatrix} = A^{\text{co}} \begin{bmatrix} U_e^{II} \\ I_e^{II} \\ U_o^{II} \\ I_o^{II} \end{bmatrix} \quad (2-12-64)$$

其中

$$A^{\text{co}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & jZ_{0e} \sin \theta_e & 0 & 0 \\ j\frac{1}{Z_{0e}} \sin \theta_e & \cos \theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_o & jZ_{0o} \sin \theta_o \\ 0 & 0 & j\frac{1}{Z_{0o}} \sin \theta_o & \cos \theta_o \end{bmatrix} \quad (2-12-65)$$

再由奇偶模变回到端口 3 和端口 4

$$U_e^{\text{II}} = \frac{1}{2}(U_3 + U_4) \quad U_o^{\text{II}} = \frac{1}{2}(U_3 - U_4)$$

$$I_e^{\text{II}} = \frac{1}{2}(I_3 + I_4) \quad I_o^{\text{II}} = \frac{1}{2}(I_3 - I_4)$$

写成矩阵形式,有

$$\begin{bmatrix} U_e^{\text{II}} \\ I_e^{\text{II}} \\ U_o^{\text{II}} \\ I_o^{\text{II}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^F \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (2-12-66)$$

其中

$$\mathbf{A}^F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^E)^{-1} \quad (2-12-67)$$

那么, 最后可以得到

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (2-12-68)$$

式(2-12-68)表示耦合微带的矩阵  $\mathbf{A}$  变换

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^E \mathbf{A}^{\text{so}} \mathbf{A}^F$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos \theta_e + \cos \theta_o) & \frac{1}{2}(\cos \theta_e - \cos \theta_o) & j \frac{1}{2}(Z_{ee} \sin \theta_e + Z_{eo} \sin \theta_o) & j \frac{1}{2}(Z_{ee} \sin \theta_e - Z_{eo} \sin \theta_o) \\ \frac{1}{2}(\cos \theta_e - \cos \theta_o) & \frac{1}{2}(\cos \theta_e + \cos \theta_o) & j \frac{1}{2}(Z_{eo} \sin \theta_e - Z_{ee} \sin \theta_o) & j \frac{1}{2}(Z_{eo} \sin \theta_e + Z_{ee} \sin \theta_o) \\ j \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_{ee}} \sin \theta_e + \frac{1}{Z_{eo}} \sin \theta_o \right) & j \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_{ee}} \sin \theta_e - \frac{1}{Z_{eo}} \sin \theta_o \right) & \frac{1}{2}(\cos \theta_e + \cos \theta_o) & \frac{1}{2}(\cos \theta_e - \cos \theta_o) \\ j \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_{eo}} \sin \theta_e - \frac{1}{Z_{ee}} \sin \theta_o \right) & j \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_{eo}} \sin \theta_e + \frac{1}{Z_{ee}} \sin \theta_o \right) & \frac{1}{2}(\cos \theta_e - \cos \theta_o) & \frac{1}{2}(\cos \theta_e + \cos \theta_o) \end{bmatrix} \quad (2-12-69)$$

耦合微带与耦合带线最大的不同是微带的不均匀介质特点, 如表 2-12-1 所示。

因此, 在这种情况下奇偶模的分解不仅是形式上的, 而且是实质上的, 换句话说, 在耦合微带中确实存在两种传播速度不同的波——奇模和偶模(分别对应  $v_e$  和  $v_o$ )。

在实际器件上, 如何使奇偶模  $\theta_e \approx \theta_o$  是一个十分重要的问题, 当  $\theta_e = \theta_o = \theta$  时, 矩阵  $\mathbf{A}$  又会退化成

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & j \frac{1}{2}(Z_{ee} + Z_{eo}) \sin \theta & j \frac{1}{2}(Z_{ee} - Z_{eo}) \sin \theta \\ 0 & \cos \theta & j \frac{1}{2}(Z_{eo} + Z_{ee}) \sin \theta & j \frac{1}{2}(Z_{eo} - Z_{ee}) \sin \theta \\ j \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_{ee}} + \frac{1}{Z_{eo}} \right) \sin \theta & j \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_{ee}} - \frac{1}{Z_{eo}} \right) \sin \theta & j \frac{1}{2} \left( Z_{ee} - Z_{eo} \right) \sin \theta & j \frac{1}{2} \left( Z_{ee} + Z_{eo} \right) \sin \theta \\ j \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_{eo}} - \frac{1}{Z_{ee}} \right) \sin \theta & j \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_{eo}} + \frac{1}{Z_{ee}} \right) \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ & & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-12-70)$$

矩阵(2-12-70)适合耦合带线情况。

表 2-12-1 微带的各参数

$v_e \neq v_o$	$v_e := \frac{c}{\sqrt{\epsilon_e}}$ , $v_o = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_o}}$
$\lambda_e^e \neq \lambda_o^o$	$\lambda_e^e = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_e}}$ , $\lambda_o^o = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_o}}$
$\theta_e \neq \theta_o$	$\theta_e := \beta_e l$ , $\theta_o = \beta_o l$ $\beta_e = \frac{2\pi}{\lambda_e^e}$ , $\beta_o = \frac{2\pi}{\lambda_o^o}$

## 作业 PROBLEMS 2-12

④ 已知对称耦合传输线的偶模阻抗和奇模阻抗分别为  $Z_{oe}$  和  $Z_{oo}$ 。现有两根线的电压激励，分别为  $U_1$  和  $U_2$ ，求出这两根线的  $I_1$  和  $I_2$ 。

⑤ 上题中若  $Z_{oe} = 120 \Omega$ ,  $Z_{oo} = 45 \Omega$ ,  $U_1 = 3 \text{ V}$ ,  $U_2 = 5 \text{ V}$ , 具体求出  $I_1$  和  $I_2$ 。



## 复习 Review

这里将对“导波系统”做一个简单的归纳。

### 一、导波系统的研究特点

大家已经了解，导波系统也是微波传输线。矩形波导、圆波导、介质波导、光纤、同轴线和带线、微带是具体的传输线。

#### 1. 导波系统强调 $z$ 方向的传输入射波和反射波

如图 2-13-1 所示，不论何种导波系统，它的  $z$  方向的运动规律是相同的。即

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \gamma^2 Z(z) \quad (2-13-1)$$

$$Z(z) = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z}$$

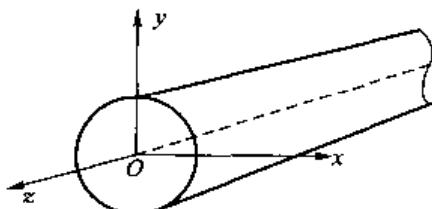


图 2-13-1 波导研究模型

即都是入射波加上反射波。但是，在  $z$  方向的封闭和开放逐层次提高，如图 2-13-2 所示。

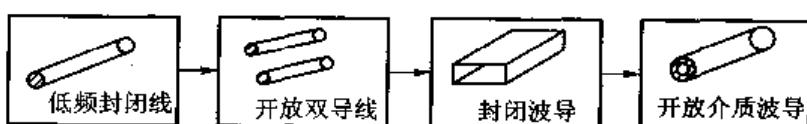


图 2-13-2 微波传输线的发展

与传输线理论相比，导波系统强调从 Maxwell 方程出发，如图 2-13-3 所示。

十分明显，在导波系统中，不仅可以研究  $z$  方向的传输特性，而且可以更深入分析横向  $t$  的具体模式。事实上，由纵向场分量表示横向场分量的不变矩阵正是 Maxwell 方程所给出的结果，如下所示：

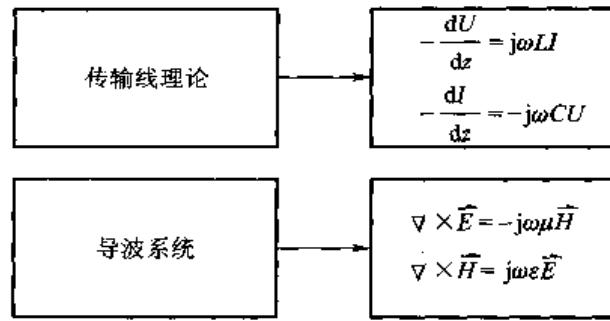


图 2-13-3 传输线理论和导波系统比较

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\epsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\epsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2-13-2)$$

对于圆柱坐标系，上式变为

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_\phi \\ H_r \\ H_\phi \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\epsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\epsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \end{bmatrix} \quad (2-13-3)$$

完全可以说，横向精细结构正是导波系统区别于传输线理论的最重要特点。

## 2. 导波系统强调本征值方法和本征模理论

要解决的肯定也是导波系统的特定激励和特定传输状况。但是为了要解决特定的问题，首先讨论的则是普遍的问题——无源的本征值问题，如图 2-13-4 所示。

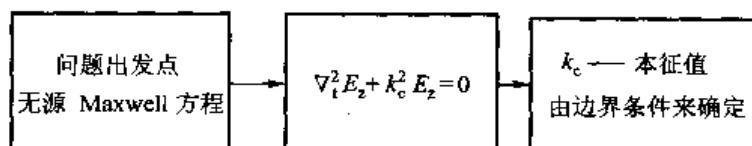


图 2-13-4 导波问题的求解

既然在  $z$  方向有着共性—— $A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z}$ ，那么所谓特定的导波系统，其本质差别在于横向。求解用的是如图 2-13-5 所示的分离变量法

$$E_z = X(x)Y(y) \\ k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \quad (2-13-4)$$

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = k^2 - \beta^2$$

注意:在求解横向方程的基础上,必须提及电磁场的两个要素,如图 2-13-6 所示。

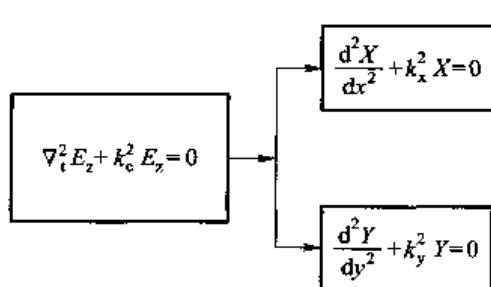


图 2-13-5 导波问题的分离变量法

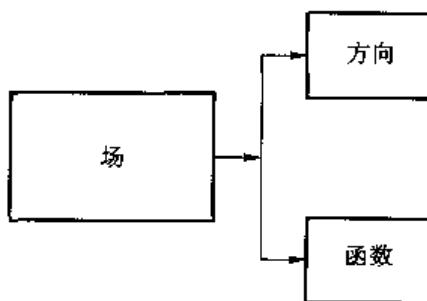
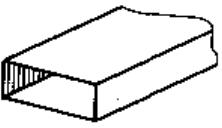
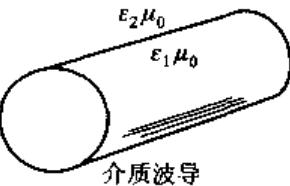
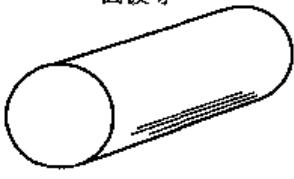


图 2-13-6 电磁场的两个要素

具体波导的求解可以简要归纳如表 2-13-1 所示。

表 2-13-1 具体波导的求解

<p><b>矩形波导</b></p>  <p><b>边界条件</b></p> $x=0, x=a$ $E_z=0, E_y=0$ $y=0, y=b$ $E_z=0, E_x=0$ $k_x^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$ $k_y^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \rightarrow \sin \text{选值}$	<p><b>介质波导</b></p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>• 0 点有限条件 去掉 <math>N_m(r)</math></li> <li>• 无限远有限条件 去掉 <math>I_m(r)</math></li> <li>• <math>\varphi</math> 周期条件 <math>m</math>—整数</li> <li>• <math>r=a</math> 连续条件 <math>E_{z1}=E_{z2}, H_{z1}=H_{z2}</math></li> <li>• 正常传输条件 <math>E_{\varphi1}=E_{\varphi2}, H_{\varphi1}=H_{\varphi2}</math></li> </ul> $k_{c1}^2 = k_1^2 - \beta^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \geq 0$ $k_{c2}^2 = \beta^2 - k_2^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \geq 0$
<p><b>圆波导</b></p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>• 0 点有限条件 去掉 <math>N_m(k_c r)</math></li> <li>• <math>\varphi</math> 周期条件 去掉 <math>m \neq</math> 整数</li> <li>• <math>r=a</math> <math>E_\varphi=0, E_z=0</math></li> </ul> $k_c R = \begin{cases} \mu_{mn} \text{ 导数根 TE} \\ v_{mn} \text{ 函数根 TM} \end{cases}$	$(\eta_1 + \eta_2)(k_1^2 \eta_1 + k_2^2 \eta_2) = m^2 \beta^2 \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)^2$ $u = k_{c1} a \quad w = k_{c2} a$ $\eta_1 = \frac{J'_m(u)}{u J_m(u)}, \quad \eta_2 = \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)}$

### 3. 导波模式

本征模理论的一个重要结论是:模式完备性。各种波导的本征模总结如表 2-13-2 所示,模式参量如表 2-13-3 所示。

表 2-13-2 波导中的本征模

封闭波导	$\text{TE}_{mn}$ --- 正交, 完备(传输模, 漏落模) $\text{TM}_{mn}$ 空心波导无法传输 TEM 模 截止 $\lambda = \lambda_c, f = f_c$
同轴波导	TEM 模 $(r=0$ 不在区域内) $\text{TE}_{mn}$ 模 有 $N_m(r)$ 解 $\text{TM}_{mn}$
开放波导	$\begin{cases} \text{TE}_{0n} \\ \text{TM}_{0n} \\ \text{EH}_{n1} \\ \text{HE}_{n1} \end{cases}$ 存在电磁耦合 截止条件 $k_{cz} = 0$ $\beta = k_0 n_z$ $\omega_c = 0$

导波系统中的各模式参量如表 2-13-3 所示。

表 2-13-3 导波模式参量

$\lambda_c$	截止波长 $k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$
$\lambda_g$	$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$
$v_p$	$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$
$\eta$	波型阻抗 $\eta_{TE} = \eta_0 \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)$ $\eta_{TM} = \eta_0 \left( \frac{\lambda}{\lambda_g} \right) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \left( \frac{\lambda}{\lambda_g} \right)$ $\eta_{TEM} = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

到目前章节为止, 共有三种阻抗的概念被提及, 如表 2-13-4 所示。

表 2-13-4 三种阻抗概念

波阻抗	波型阻抗	特性阻抗
平面波或 TEM 波 $\eta_0 = \left  \frac{E_0}{H_0} \right  = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	TE、TM 波 $\eta = \left  \frac{E_0}{H_0} \right $ $\begin{cases} \eta_0 \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right) & \text{TE} \\ \eta_0 \left( \frac{\lambda}{\lambda_g} \right) & \text{TM} \end{cases}$	$Z_0 = \frac{U}{I}$ TE 模、TM 模 $U, I$ 定义无唯一性

## 二、空心波导的代表——矩形波导 TE<sub>10</sub> 模

$$k_c^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (2-13-5)$$

式中,  $m$  表示  $x$  方向变化的半周期数;  $n$  表示  $y$  方向变化的半周期数。

因此, TE<sub>10</sub> 模就是  $x$  方向半个周期、 $y$  方向不变的一种模式。

主模为截止波长  $\lambda_c$  最长的模式。

### 1. TE<sub>10</sub> 模的场方程

情况 1:  $H_z$  表示法

$$H_z = H_0 \cos \left( \frac{\pi}{a} x \right) e^{-j\beta z} \quad (2-13-6)$$

这时式(2-13-2)可写为

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -j\beta & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -j\beta & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\epsilon & -j\beta & 0 \\ -j\omega\epsilon & 0 & 0 & -j\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{bmatrix}$$

计及  $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -j \frac{\omega\mu}{k_c^2} \left( \frac{\pi}{a} \right) H_0 \sin \left( \frac{\pi}{a} x \right) e^{-j\beta z} \\ H_x = \frac{j\beta}{k_c^2} \left( \frac{\pi}{a} \right) H_0 \sin \left( \frac{\pi}{a} x \right) e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (2-13-7)$$

情况 2:  $E_y$  表示法

$$E_y = E_0 \sin \left( \frac{\pi}{a} x \right) e^{-j\beta z}$$

根据 Maxwell 方程

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$$

把上式展开, 得

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -j\beta \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu \vec{H} = -j\omega\mu (H_x \hat{x} + H_y \hat{y} + H_z \hat{z})$$

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jkz}$$

$$H_z = j \frac{1}{\omega\mu} \left(\frac{\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jkz}$$

## 2. TE<sub>10</sub>模场结构

TE<sub>10</sub>模的场结构如图 2-13-7 所示。

### 3. TE<sub>10</sub>模的各个电参量

#### (1) 传播条件

$$\lambda < \lambda_c = 2a$$

#### (2) 波导波长

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

#### (3) 相速

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

#### (4) 波型阻抗

$$\eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

#### (5) 特性阻抗

$$Z_0 = \frac{\eta_0 \left(\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

## 4. TE<sub>10</sub>模壁电流

TE<sub>10</sub>模壁电流如图 2-13-8 所示。有如下关系式

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_s \quad (2-13-8)$$

### 5. TE<sub>10</sub>模功率

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) dS \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b dy \int_0^a \frac{E_0^2}{\eta} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx \end{aligned}$$

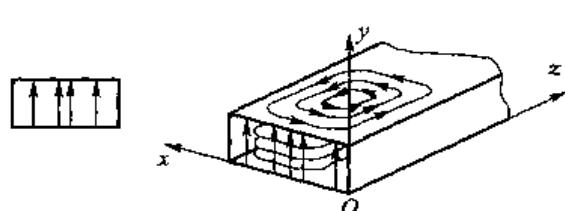


图 2-13-7 TE<sub>10</sub> 模场结构

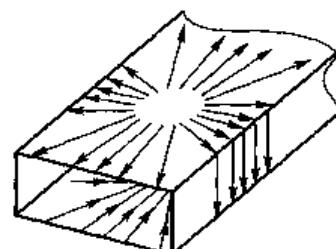


图 2-13-8 TE<sub>10</sub> 模壁电流

$$= \frac{1}{4} \frac{E_0^2}{\eta} ab = \frac{E_0^2 ab}{480\pi} \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (2-13-9)$$

### 6. TE<sub>10</sub>模衰减系数

$$\alpha = \frac{8.686 R_s}{120 \pi b} \frac{1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \text{ dB/m} \quad (2-13-10)$$

## 三、TEM模传输线的代表——同轴线 TEM 模

### 1. TEM模场方程

$$E_r = \frac{E_0 a}{r} e^{-j\beta r} \quad (2-13-11)$$

$$H_\varphi = \frac{E_0 a}{\eta r} e^{-j\beta r}$$

### 2. 同轴线主模场结构

同轴线的场结构如图 2-13-9 所示。

### 3. 同轴线主模的电压、电流

$$U = \int_a^b E_r dr = E_0 a \ln\left(\frac{b}{a}\right) e^{-j\beta r} \quad (2-13-12)$$

$$I = \int_0^{2\pi} H_\varphi r d\varphi = \frac{2\pi E_0 a}{\eta} e^{-j\beta r} \quad (2-13-13)$$

其特性阻抗为

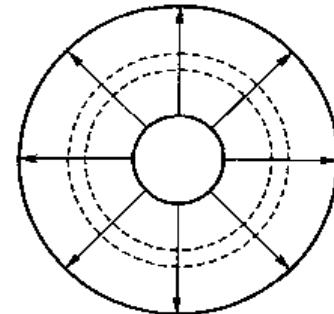


图 2-13-9 同轴线的场结构

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \text{ 单位为 } \Omega \quad (2-13-14)$$

### 4. 同轴线主模的传播功率

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(UI^*) = \frac{1}{2} \frac{2\pi E_0 a}{\eta} \cdot E_0 a \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{单位为 W} \quad (2-13-15)$$

$$= \frac{\pi E_0^2 a^2}{\eta} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{E_0^2 a^2}{120} \sqrt{\epsilon_r} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

### 5. 同轴线主模的衰减

$$\alpha_c = \frac{8.686 R_s}{4\pi b} \frac{1 + \frac{b}{a}}{\frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \text{ dB/m} \quad (2-13-16)$$

## 四、耦合传输线的奇偶模分析

两根传输线间可能会互相影响,即耦合。如图 2-13-10 所示的两根相邻的带线就可以产生耦合。

耦合传输线问题可以采用奇偶模的思想进行求解,如图2-13-11所示。

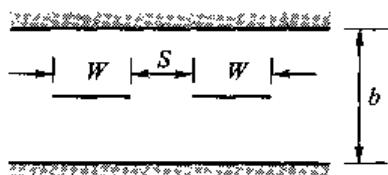


图 2-13-10 耦合带线

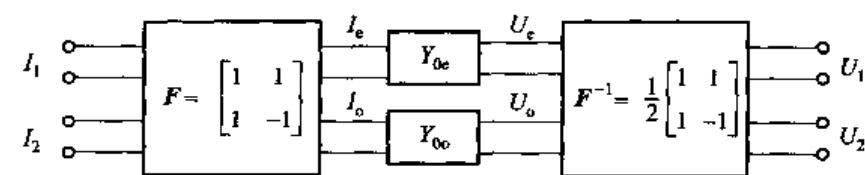


图 2-13-11 奇偶模的网络变换思想

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \\ \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(U_1 - U_2) \\ -\frac{1}{2}(U_1 - U_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_e + U_o \\ U_e - U_o \end{bmatrix}$$

$$U_e = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$$

$$U_o = \frac{1}{2}(U_1 - U_2)$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix} \quad (2-13-17)$$

$$\begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2-13-18)$$

奇偶模方法的核心是“解耦”。从数学上而言,即矩阵对角化的方法;从几何上而言,则对应坐标旋转的方法,如图2-13-12所示。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix}$$

当  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  时,有

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_e \\ U_o \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

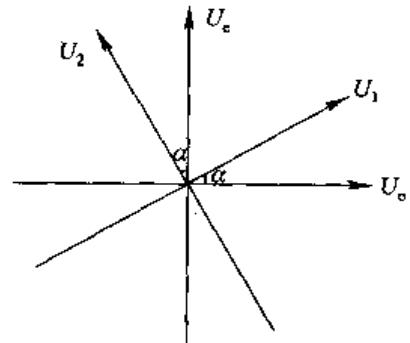


图 2-13-12 坐标旋转

本章从第二节开始以纵向场方法为主线来分析和研究以上所述各种传输线的具体结构、传输模式及其特性。纵向场方法按传输系统中导波的纵向分量对其进行分类,分为TEM、TE和TM等模式的导波,并依照传输线的横截面形状建立横向谐振方程。根据横向谐振方程的解以及边界条件,可以得到导波场的解,这些解表明导波在传输系统中是以模式的形式存在和传播的,而每种模式具有各自的截止频率、波导波长及相速。因此,了解纵向场方法及其在导波问题中的应用方法是本章学习的一个基本要求。

粗略地来说,本章介绍的传输线可以分为空心波导(如矩形波导、圆波导)、TEM 模传输线(如同轴线、带状线和准 TEM 模的微带线)、介质传输线(如介质波导和光纤)以及耦合传输线。在以上各种传输线的学习中,要达到以下基本要求:①了解各种传输线的具体结构。②了解各种传输线中传播的导波模式的特点,掌握主模的特点、场型以及单模传播条件。对于 TEM 模传输线,还要了解其特性阻抗的求解方法。③了解导波系统中主模式功率容量、衰减的估算。④掌握各种传输线设计准则。⑤了解耦合传输线的奇偶模分析方法。

在学习中,要注意比较不同传输线间的异同,抓住“导波”这一核心概念,即电磁场如何利用具体传输线进行传播。一个代表性的例子就是和传播密切相关的“截止”的概念,在空心波导和金属 TEM 模传输线中,截止是传播模和凋落模(不传播)的分界;在介质传输线中,截止是传播模和辐射模的分界,即同一个介质波导作为“波导”和“天线”的分界。

应该说,近些年来随着各种新的工程应用的需求,特别是微波毫米波集成电路发展的需求,出现了很多新型的微波传输线的形式,如脊波导、槽线、鳍线等。这些微波传输线的横截面的形状比本章介绍的传输线更为复杂和不规则,因而其分析方法也更为复杂,但是分析的基础仍然是具体边界条件下 Maxwell 方程组的求解,读者可以参考相关文献。

## 第三章

# 微波元件与网络分析

## Microwave Elements and Microwave Networks

微波元件指的是完成特殊功能的基本单元,其功能又包括对微波信号的产生、滤波、变换、耦合、分配、移相、完成、匹配、放大、振荡、混频等多种功能,其中与频率变换无关的称为线性微波元件,本篇着力讨论无源线性微波元件。

电磁场理论和网络理论代表着不同的两个方面:场是网络的内部原因,而网络则是场的外部表现。微波元件看重功能、看重其外部表现,因此网络分析方法将是本章的重点方法。

这里介绍的主要是不对称型  $A$  传输参数和对称型  $S$  散射参数。采用矩阵表达网络特性,各个端口是开放的。正因为如此,各个端口可以接任意负载、网络或电源,采用网络表征微波元件特征,其全部独立分量都反映在矩阵单元上。

微波元件存在着不同类型的对称性,可以由这些对称性产生新的约束从而减少网络的独立量。这些对称性包括:

① 电磁对称——互易性。互易特性反映了电磁源和负载之间的对称性。如果微波网络中只有各向同性的互易媒质,则各个端口间的场量是可逆的,这种网络称为互易网络。反之,如果填充铁氧体或等离子体等非互易媒质,这种网络则称为非互易网络。

② 空间对称——简称对称性。空间对称包括几何对称和媒质对称。网络可以分为对称网络和非对称网络。

③ 能量对称——无耗特性。若进入网络各端口的能量(或功率)等于网络输出端口的能量(或功率),则这种网络又定义为无耗网络,反之为有耗网络。需要指出:在实际工程中,常常把带微小损耗的微波元件近似为无耗网络来进行分析研究。

## 3-1

# S 参数

## S - parameter

完成特殊功能的网络称为元件。习惯上常常采用网络理论来分析元件。在传输线理论中，已经介绍过  $A$  传输参数，这里将首先研究  $S$  散射参数。

### 一、 $S$ 散射参数(矩阵)

由传输线理论已经导出

$$\begin{cases} u = u^+ e^{-\gamma z} + u^- e^{+\gamma z} \\ i = \frac{1}{Z_0} (u^+ e^{-\gamma z} - u^- e^{+\gamma z}) \end{cases} \quad (3-1-1)$$

直接用入射波和反射波表示，其中

$$\begin{cases} u^+ e^{-\gamma z} = \frac{1}{2} (u + i Z_0) \\ u^- e^{+\gamma z} = \frac{1}{2} (u - i Z_0) \end{cases} \quad (3-1-2)$$

在本节中，首先定义出入射波和散射波( $a$  和  $b$ )。其中，散射波是广义的(理论上可以是任意方向)反射波。

$$\begin{cases} a = \frac{u^+ e^{-\gamma z}}{\sqrt{Z_0}} = \frac{1}{2} \left( \frac{u}{\sqrt{Z_0}} + i \sqrt{Z_0} \right) \\ b = \frac{u^- e^{+\gamma z}}{\sqrt{Z_0}} = \frac{1}{2} \left( \frac{u}{\sqrt{Z_0}} - i \sqrt{Z_0} \right) \end{cases} \quad (3-1-3)$$

把上式中的  $\frac{u}{\sqrt{Z_0}}$  称为归一化电压， $i \sqrt{Z_0}$  称为归一化电流，分别用  $\bar{u}$  和  $\bar{i}$  表示。

$$u = \frac{u}{\sqrt{Z_0}} \quad \bar{i} = i \sqrt{Z_0} \quad (3-1-4)$$

则进一步写出

$$\begin{cases} u = a + b \\ i = a - b \end{cases} \quad (3-1-5)$$

其对应的功率为

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\bar{u} \bar{i}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [(a+b)(a^* - b^*)]$$

$$= \frac{1}{2}(aa^* - bb^*) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(a^*b - ab^*)$$

后一项的实部显然等于 0,于是有

$$p = \frac{1}{2}(aa^* - bb^*) \quad (3-1-6)$$

上式的物理意义是净功率等于入射功率减去散射功率。

### 1. S 散射参数定义

$S$  散射参数与  $A$  参数有两点显著不同:一是  $S$  散射参数适合多端口(当然也满足双端口)网络;二是像任何多端口网络一样,它必须是对称化定义(具体是流进每个端口的均是入射波  $a$ ,流出每个端口的均是散射波  $b$ ),如图 3-1-1 所示。

入射波和散射波构成的矩阵如下:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (3-1-7)$$

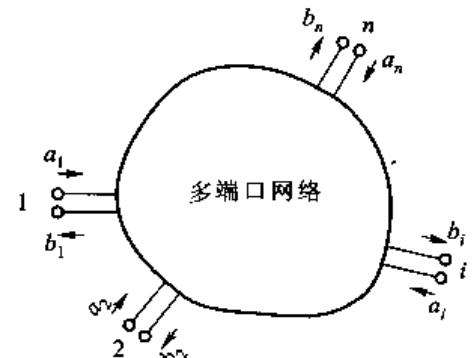


图 3-1-1  $S$  散射参数

定义式(3-1-7)表明: $S$  散射参数联系入射波和散射波,是广义的反射系数。

### 2. S 散射参数性质

$S$  散射参数有如下性质:

① 网络对称时

$$S_{ii} = S_{jj} \quad (i \text{ 端口与 } j \text{ 端口对称}) \quad (3-1-8)$$

② 网络互易时

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (i \text{ 端口与 } j \text{ 端口互易}) \quad (3-1-9)$$

③ 网络无耗时

$$I - S^* S = 0 \quad (3-1-10)$$

其中,  $I$  ——  $n$  阶单位矩阵, 有

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

其中,  $[ ]^+$  为 Hermite(厄米)符号, 表示矩阵的共轭转置或转置共轭

$$[ ]^+ = [ ]^*]^T = ([ ]^T)^*$$

下面证明式(3-1-10)。

[证明] 无耗条件具体为

$$p = 0 \quad \text{或} \quad aa^* - bb^* = 0$$

假如对于双端口网络

$$a_1 a_1^* + a_2 a_2^* = [a_1^* \ a_2^*] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a^* a$$

于是,把多端口网络的无耗条件写成

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} - \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} &= 0 \\ \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{a} &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{a}^\dagger (\mathbf{I} - \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S}) \mathbf{a} = 0$$

考虑到  $\mathbf{a}$  激励的任意性,可知

$$\mathbf{I} - \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = 0$$

④ 对于双端口网络,输入反射系数  $\Gamma_{in}$  和负载反射系数  $\Gamma_L$  有关系

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L} \quad (3-1-11)$$

[证明] 如图 3-1-2 所示,注意到  $\Gamma_{in}$  和  $\Gamma_L$  的不对称性

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1}, \quad \Gamma_L = \frac{a_2}{b_2}$$

且写出双端口网络的  $S$  散射参数

$$\begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \end{cases} \quad (3-1-12) \quad (3-1-13)$$

由式(3-1-12)得到

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + S_{12} \frac{a_2}{a_1}$$

又由式(3-1-13)可知

$$S_{21} \frac{a_1}{a_2} + S_{22} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{1}{\Gamma_L}$$

代入可得

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

### 3. $S$ 散射参数的物理意义

还以双端口网络为例,对于

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

它表示端口 2 匹配时,端口 1 的反射系数。而对于

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0}$$

它表示端口 1 匹配时,由端口 2 到端口 1 的传输系数。

## 二、 $S$ 散射参数与 $A$ 传输参数(矩阵)之间的关系

讨论归一化电流、电压构成的  $A$  传输参数,如图 3-1-3 所示。

$$\begin{cases} u_1 = A_{11} u_2 + A_{12} \bar{i}_2 \\ \bar{i}_1 = A_{21} \bar{u}_2 + A_{22} \bar{i}_2 \end{cases} \quad (3-1-14)$$

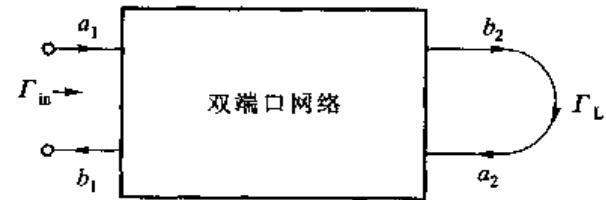


图 3-1-2 双端口网络  $S$  散射参数

很明显,  $A$  传输参数是传输定义或不对称定义。

$$u_1 = a_1 + b_1 \quad u_2 = a_2 + b_2$$

$$i_1 = a_1 - b_1 \quad i_2 = -(a_2 - b_2)$$

代入式(3-1-14), 得

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = A_{11}(a_2 + b_2) - A_{12}(a_2 - b_2) \\ a_1 - b_1 = A_{21}(a_2 + b_2) - A_{22}(a_2 - b_2) \end{cases}$$

可改写为

$$\begin{cases} b_1 - (A_{11} + A_{12})b_2 = -a_1 + (A_{11} - A_{12})a_2 \\ -b_1 - (A_{21} + A_{22})b_2 = -a_1 + (A_{21} - A_{22})a_2 \end{cases}$$

写成矩阵形式, 为

$$\begin{bmatrix} 1 & -(A_{11} + A_{12}) \\ -1 & -(A_{21} + A_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & A_{11} - A_{12} \\ -1 & A_{21} - A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

因此, 散射波和入射波的关系为

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(A_{11} + A_{12}) \\ -1 & -(A_{21} + A_{22}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & A_{11} - A_{12} \\ -1 & A_{21} - A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}} \begin{bmatrix} -(A_{21} + A_{22}) & A_{11} + A_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & A_{11} - A_{12} \\ -1 & A_{21} - A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

这样,  $S$  散射参数为

$$S = \frac{1}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22} & 2 \det A \\ 2 & A_{22} + A_{12} - A_{21} - A_{11} \end{bmatrix} \quad (3-1-15)$$

## 作业 PROBLEMS 3-1

● 如图 3-1-4 所示, 已知双端口网络的  $S$  散射参数为

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

(1) 若网络对称, 写出条件。

(2) 若网络互易, 写出条件。

(3) 给出  $S_{11}$  和  $S_{12}$  的物理意义。

● 如图 3-1-5 所示网络, 给出  $S$  矩阵。

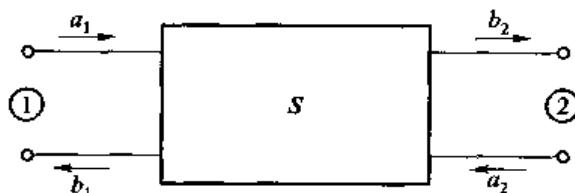
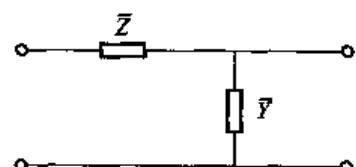


图 3-1-4



图 3-1-3 双端口网络的归一化  $A$  传输参数

图 3-1-5



## 3-2

## 单端口元件 One-Port Element

### 一、网络等效的参考面的概念

微波元件依赖各种传输线与外界相连。把一个微波元件等效为微波网络时，首先要确定所研究网络的参考面。参考面一旦确定后，所对应的微波网络就是微波元件参考面内所包围的区域。对于单模传输域情况，微波网络外界端口数与参考面的数目相等。

原则上参考面的位置是可以任意选择的，但参考面一旦选定，网络就相应确定了，如果再改变参考面的位置，就会影响网络参数的值。另外，选择参考面还应该注意以下两点：

① 在传输线单模传输时，参考面上只考虑主模场强，因此，参考面应该选择在不连续性激励引起的高次模截止场影响范围之外。如果不能够选在高次模截止场影响范围之外，需要判定这种选择是否会影响主模的传输特性的分析。

② 参考面必须与微波传输方向垂直，使场的横向分量与参考面共面，从而使得对应参考面上的电压和电流有明确的定义，流入网络的电流为正向电流，离开网络的电流为负向电流。对于同轴线来说，参考面上的电压指内、外导体之间的电压，参考面上的电流指内导体上流过的总电流；对微带线而言，参考面上的电压指中心导带与接地板之间的电压，参考面上电流指流过导带的总电流；对波导而言，参考面上的电压指等效电压，参考面上的电流指等效电流。

### 二、单端口元件的一般讨论

所谓单端口元件，也就是向外只有一个端口的网络，它是作为负载来应用的。如图 3-2-1 所示，作为网络它只须用一个反射系数  $\Gamma_L$  来表示

$$\Gamma_L = \frac{a}{b} \quad (3-2-1)$$

这里着重讨论三种单端口元件，即：

匹配负载  $\Gamma_L = 0$

短路负载  $\Gamma_L = e^{j\theta}$

失配负载  $|\Gamma_L| = \text{常数}$

这三种单端口元件所要解决的主要矛盾各不相同。

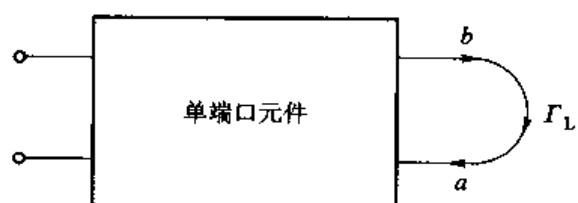


图 3-2-1 单端口元件

匹配负载——解决波反射和吸收两者之间的矛盾。

短路负载——解决理想短路和活动间隙之间的矛盾。

失配负载——解决宽带和反射系数模变化之间的矛盾。

### 三、匹配负载

反射系数  $\Gamma_L = 0$  的负载称为理想的匹配负载, 其功能是吸收功率。作为标准测量元件, 构成无(实际上较小)反射系统。匹配负载的分类如表 3-2-1 所示。

表 3-2-1 匹配负载的分类

按功率划分		小功率匹配负载
		中功率匹配负载
		大功率水负载 水入/水出
按频带划分		宽带匹配负载
		窄带匹配负载
按材料划分	木材、石墨、碳基铁、吸收负载	

匹配负载可以采用  $S$  散射参数进行分析, 实际上任何单端口负载都可以认为是双端口网络接终端(例如短路终端), 如图 3-2-2 所示。

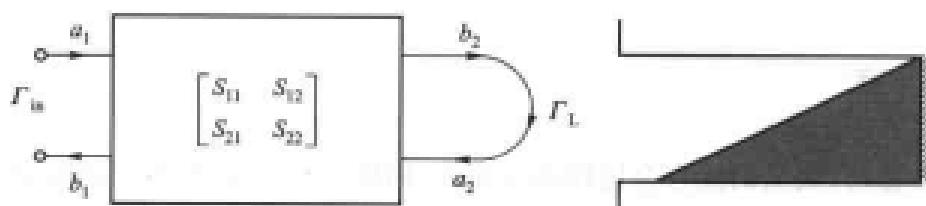


图 3-2-2 匹配负载的  $S$  散射参数分析

已经知道

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

终端接短路负载, 有  $\Gamma_L = -1$ , 且要求  $\Gamma_{in} = 0$ , 考虑到

$$\Gamma_{in} = S_{11} - \frac{S_{12} S_{21}}{1 + S_{22}} \quad (3-2-2)$$

可知应该有两类匹配负载,如表 3-2-2 所示。

表 3-2-2 两类匹配负载

宽带型	$S_{11} \rightarrow 0, \frac{S_{12} S_{21}}{1 + S_{22}} \rightarrow 0$	抵消型	$S_{11} = \frac{S_{12} S_{21}}{1 + S_{22}}$
-----	--	-----	---

不论是宽带型还是抵消型负载,均存在反射  $S_{11}$  和吸收  $\frac{S_{12} S_{21}}{1 + S_{22}}$  之间的矛盾。要减少反射,必须减小  $S_{11}$ ,要增加吸收,必须减小  $S_{12} S_{21}$ ,但是  $S_{12} S_{21}$  的减少必然会增大  $S_{11}$ (材料特性阻抗突变)。相应的措施是采用外形渐变(劈形、楔形),且选取材料的  $Z_0$  变化不能过大。注意:如果限于讨论电损耗,那么首先必须有  $\sigma$  才会有损耗。

$\sigma$  成分愈大则损耗愈大,从这个意义上,理想导体损耗最大。

但是,问题在于波入射到良导体上几乎全部反射了,而根本没有进去。这正体现了反射和损耗之间的矛盾。

讲到这里,不禁想起一则轶事。一位年轻人向 Einstein 自荐一项发明,有一种液体碰上什么物质都会将其腐蚀。Einstein 反问这位青年:那么,这种物质应该用什么“瓶子”来装呢?

但是,科学的进展表明,这种事情是可能发生的。上百甚至上千万度的磁流体真可谓遇到什么物质都能腐蚀。但是它们可以处在磁感线 N,S 之间,什么物质都不碰。

事实上,电磁波在波导中是高损耗材料,可是波像一只飞翔的海燕,它对于波导是“擦翼而过”,而不会沾上“海洋的水滴”,如图 3-2-3 所示。

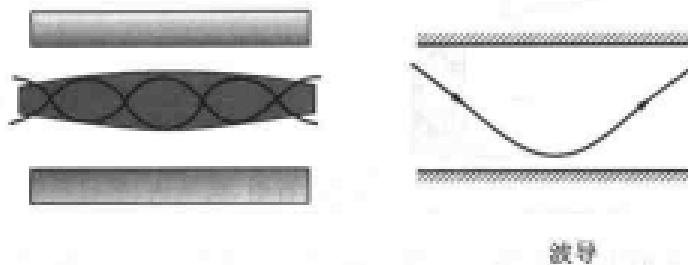


图 3-2-3 磁流体发电和波导的类比

## 四、短路活塞

短路活塞要移动,太紧的配合会使移动不方便,间隙  $\Delta$  又会造成不理想短路。因此,间隙  $\Delta$  和理想短路构成了设计的主要矛盾。

考虑如图 3-2-4 所示的典型的平板活塞,宽边  $a$  的两侧是电场零点,只需考虑旁边间隙  $\Delta$  的影响,间隙  $\Delta$  影响的等效电路如图 3-2-5 所示。

相应的平板活塞的等效网络如图 3-2-6 所示。考虑简化情况,令  $t \rightarrow 0$ ,则可以按照以下步骤求出平板活塞引起的反射驻波比。

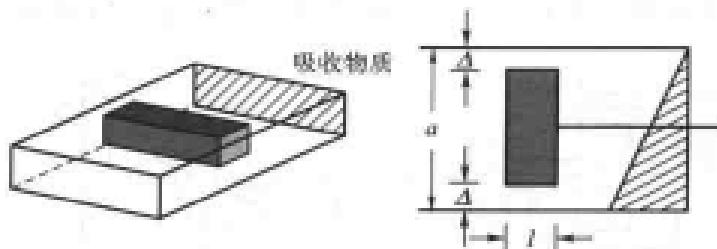
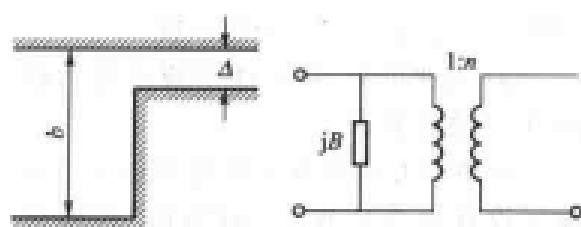


图 3-2-4 平板活塞



$$\text{图 3-2-5} \quad \text{间隙 } \Delta \text{ 等效为 } B = \frac{2b}{\lambda_s} \ln \left( \frac{b}{4\Delta} \right)$$

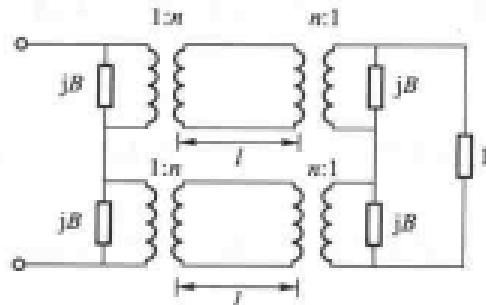


图 3-2-6 平板活塞等效的计算网络

$$Y_m = 1 + jB \quad Z_m = \frac{1}{Y_m} = \frac{1}{1 + jB}$$

$$|\Gamma_m| = \left| \frac{Z_m - 1}{Z_m + 1} \right| = \frac{B}{\sqrt{4 + B^2}}$$

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma_m|}{1 - |\Gamma_m|} = \frac{\sqrt{4 + B^2} + B}{\sqrt{4 + B^2} - B}$$

$$B = \frac{2b}{\lambda_s} \ln \left( \frac{b}{4\Delta} \right), b \text{ 取 } \frac{1}{4}\lambda_s$$

利用以上推导的公式,表 3-2-3 计算了不同大小的间隙引起的反射驻波比。

表 3-2-3 不同大小的间隙引起的反射驻波比

$\Delta/b$	$\ln \left( \frac{b}{4\Delta} \right)$	B	$\sqrt{4 + B^2}$	$\rho$
$\frac{1}{50}$	2.53	1.27	2.37	3.31
$\frac{1}{100}$	3.22	1.61	2.57	4.35
$\frac{1}{1000}$	5.52	2.76	3.41	9.49

由表 3-2-3 中的数据可以看出:

① 若具体是 X 波段(3 cm 波段), $b=10 \text{ mm}$ , 则有

$$\frac{\Delta}{b} = \frac{1}{1000}, \quad \Delta = 10^{-5} \text{ m}$$

② 驻波比  $\rho$  随  $\Delta/b$  减少而增加很慢,  $\Delta/b$  减小为原来的  $1/10$ ,  $\rho$  只增大 1 倍。

③ 平板活塞很短时,即  $l$  减小时,则变压器匝数  $n$  不是主要矛盾而  $B$  是主要矛盾。但  $B$  的对数关系决定了  $B$  的变化很慢。

④ 由此可见,很难用平板活塞达到  $\rho=100$  的要求。

解决的办法是使用扼流活塞或用滤波器设计概念实现的“糖葫芦”短路活塞,如图 3-2-7 所示。

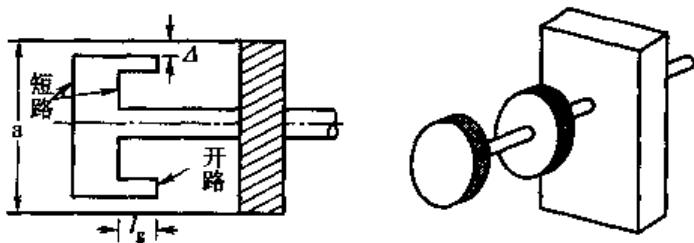


图 3-2-7 扼流活塞和“糖葫芦”短路活塞

## 五、失配负载

失配负载的设计矛盾是要在宽频带条件下使反射系数  $|\Gamma_L| = \text{常数}$ ,下面利用一个例子对失配负载的设计进行讲解。

[例] 设计 C 波段  $\rho=1.20$  的标准失配负载,失配负载的结构和等效网络如图 3-2-8 所示,需要求出满足要求的  $\Delta b$ 。

[解] C 波段波导尺寸为:  $a \times b = 40.40 \times 20.20 \text{ mm}^2$

工作波长设为:  $\lambda_0 = 50 \text{ mm}$

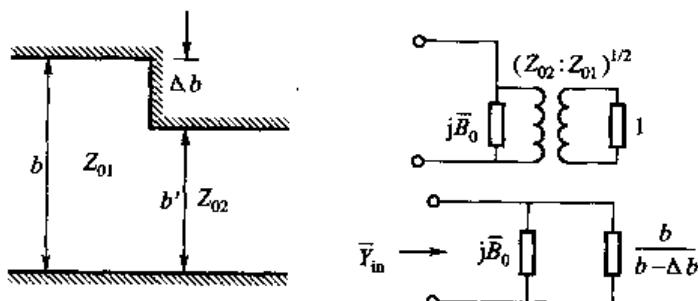


图 3-2-8 失配负载及其等效电路

按照以下步骤可以求出满足要求的  $\Delta b$

$$\rho_0 = 1.20, \quad \bar{B}_0 = \left( \frac{b}{\lambda_g} \right) \left( \frac{\Delta b}{b} \right)^2$$

$$\bar{Y}_{in} = \frac{b}{b - \Delta b} + j \frac{b}{\lambda_g} \left( \frac{\Delta b}{b} \right)^2$$

$$|\Gamma| = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{b}{b - \Delta b}\right)^2 + \left[\frac{b}{\lambda_g} \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2\right]^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{b}{b - \Delta b}\right)^2 + \left[\frac{b}{\lambda_g} \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2\right]^2}}$$

设

$$|\Gamma_0| = \frac{\rho_0 - 1}{\rho_0 + 1}, \quad x = \frac{b}{b - \Delta b}, \quad \xi = \left[ \frac{b}{\lambda_g} \left( \frac{\Delta b}{b} \right)^2 \right]^2$$

则方程可变为

$$x = \frac{1 + |\Gamma_0|^2}{1 - |\Gamma_0|^2} + \sqrt{\left( \frac{1 + |\Gamma_0|^2}{1 - |\Gamma_0|^2} \right)^2 + (-1 - \xi)}$$

采用迭代法可求得  $\Delta b = 3.36 \text{ mm}$ , 带宽很宽。

## 作业 PROBLEMS 3-2

- ① 求图如 3-2-9 所示网络的  $S$  矩阵。

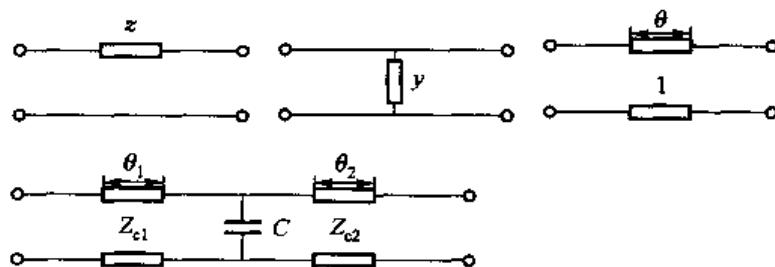


图 3-2-9

- ② 如图 3-2-10 所示, 已知  $S$  散射参数  $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ , 试求  $\Gamma_{10}$  表达式。

- ③ 已知图 3-2-11 所示的同轴-波导转换接头的  $S$  散射参数为  $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ , 求: 2 口接匹配负载时, 1 口的驻波函数; 当 2 口的反射函数为  $\Gamma_2$  时, 1 口的反射函数为多少?

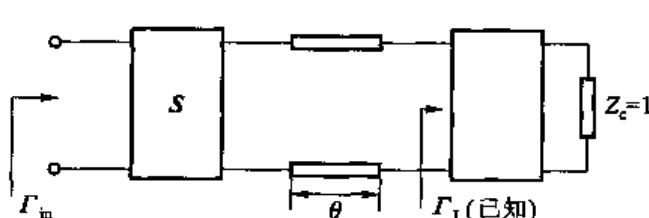


图 3-2-10

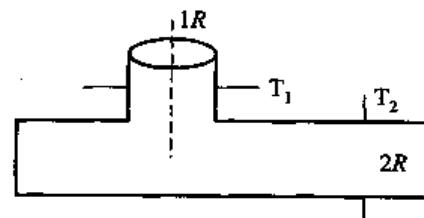


图 3-2-11

**3-3**

## 双端口元件

Two-Port Element

双端口元件是在微波中应用最多的一种元件, 按功能分类如图 3-3-1 所示。与单口元件

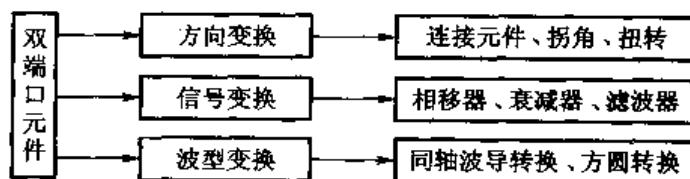


图 3-3-1 双端口元件分类

相似,双口元件一般采用网络理论进行分析。但是,在这里值得指出:元件的网络参数本身还是需要用场论方法求得,或者实际测量得到。从这个意义上讲,场论是问题的内部本质,而网络则是问题的外部特性。

## 一、双端口网络的 $S$ 散射参数

已经知道,如图 3-3-2 所示的双端口网络可以用  $S$  散射参数表示。

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (3-3-1)$$

### 1. 双端口网络的无耗约束

对于一般的  $S^+ S = I$  具体到双端口网络是

$$\begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

展开可得

$$\begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \\ |S_{22}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \\ S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} = 0 \end{cases} \quad (3-3-2)$$

式(3-3-2)具体写为

$$\begin{cases} |S_{11}| = |S_{22}| \\ 2(\varphi_{12} + \varphi_{21}) - (\varphi_{11} + \varphi_{22}) = \pm \pi \end{cases} \quad (3-3-3)$$

上式中第一个式子称为无耗网络的振幅条件,而第二个式子则称为相位条件。

[例 1] 特性阻抗阶跃,如图 3-3-3 所示。如果忽略其不连续电纳  $jB$ ,则构成反对称网络,即

$$S_{22} = -S_{11}$$

[证明] 根据  $S$  参数的定义可知

$$\begin{cases} S_{11} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \\ S_{22} = \frac{Z_{01} - Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} \end{cases}$$

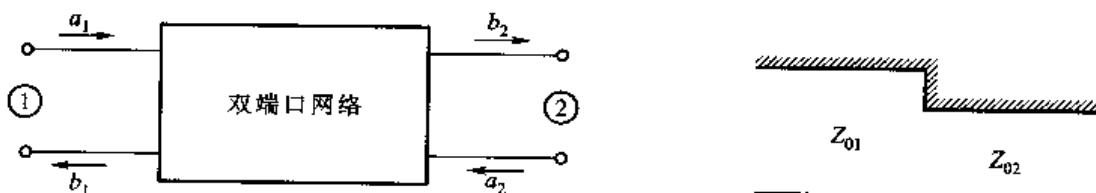


图 3-3-2 双端口网络的  $S$  散射参数

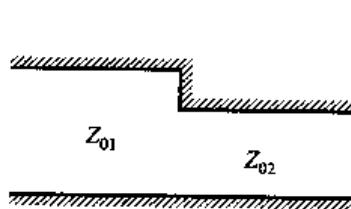


图 3-3-3 反对称网络

很明显有  $S_{22} = -S_{11}$ , 且  $|S_{11}| = |S_{22}|$ 。

## 2. 无耗网络匹配定理

[定理] 在如图 3-3-4 所示的电路中,  $|\Gamma_L| \neq 0$ , 采用无耗网络  $S$  散射参数予以匹配, 其条件是

$$S_{22} = \Gamma_L^* \quad (3-3-4)$$

[证明]  $\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} = 0$

$$|S_{11}| e^{j\varphi_{11}} = \frac{(1 - |S_{11}|^2) e^{j(\varphi_{11} - \varphi_{22})} |\Gamma_L| e^{j\varphi_L}}{1 - |S_{11}| |\Gamma_L| e^{j(\varphi_{22} - \varphi_L)}}$$

简单演算可知

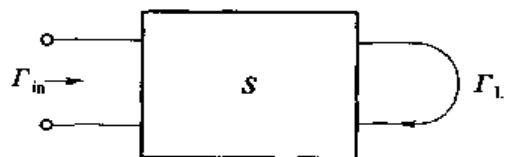


图 3-3-4 无耗网络匹配

$$|S_{11}| = |\Gamma_L| e^{j(\varphi_{22} - \varphi_L)}$$

匹配条件是

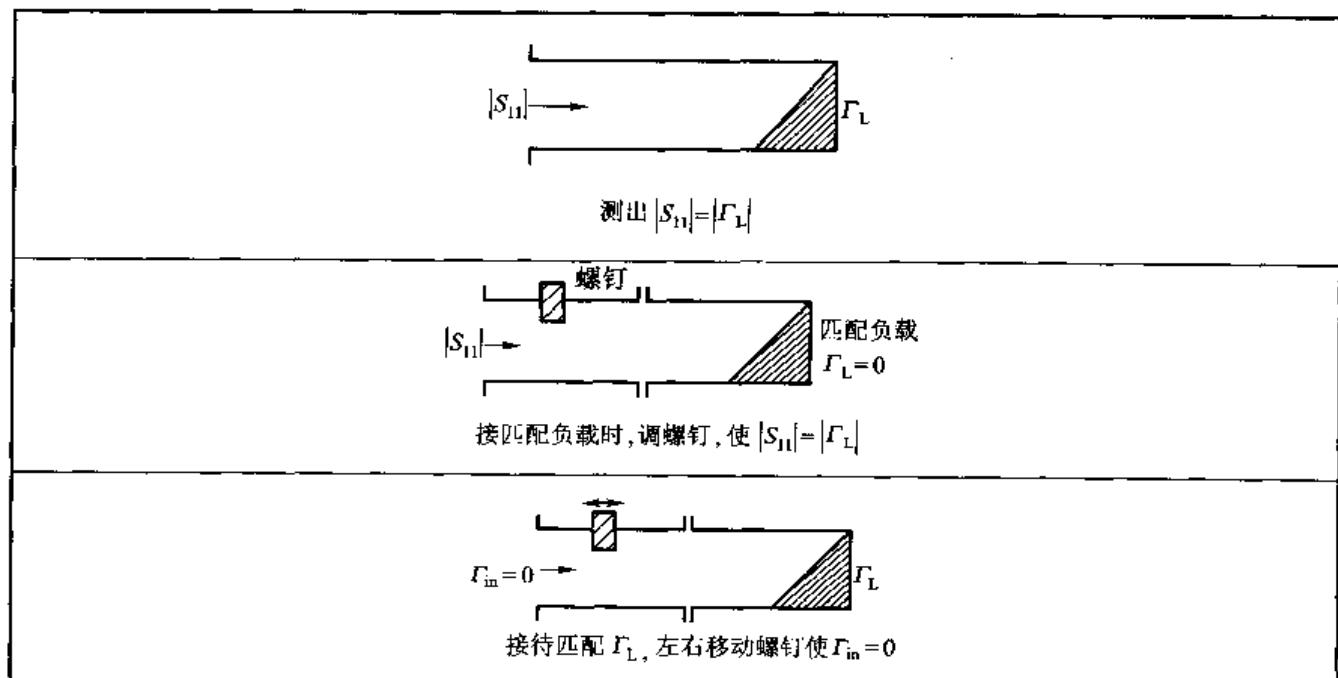
$$\begin{cases} |S_{11}| = |S_{22}| = |\Gamma_L| \\ \varphi_{22} + \varphi_L = n \cdot 2\pi \end{cases}$$

更简洁的形式为

$$S_{22} = \Gamma_L^*$$

特别应该提及, 无耗网络匹配定理不单纯是理论问题, 而且已经应用到实际中。下面做的一个典型微波实验即采用单螺钉调配器匹配  $\Gamma_L$ , 其中, 单螺钉可调深度(即变化  $|S_{22}|$ ), 也可调左右位置(即变化  $e^{j\varphi_{22}}$ ), 具体如表 3-3-1 所示。

表 3-3-1 采用单螺钉调配器匹配  $\Gamma_L$



为了加深印象,进一步讨论共轭匹配的物理意义。首先要看到,所谓匹配仅仅是网络前端无反射波。事实上,失配负载 $\Gamma_L$ 始终是有反射的。因此问题的核心是要把反射的功率,再次“喂给”负载,恰如给婴孩喂食。振幅要恰当,即 $|S_{22}| = |\Gamma_L|$ ,时间要恰当,即相位 $\varphi_{22} = -\varphi_L$ ,才能使它“吃完”,如图 3-3-5 所示。

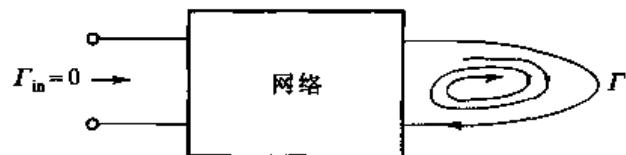


图 3-3-5 多次提供负载的示意图

## 二、方向变换元件

方向变换元件包括连接元件、拐角、扭波导,如图 3-3-6 所示。

[例 2] 矩形波导的直角拐角及其等效电路如图 3-3-7 所示,试用网络方法对其进行分析。

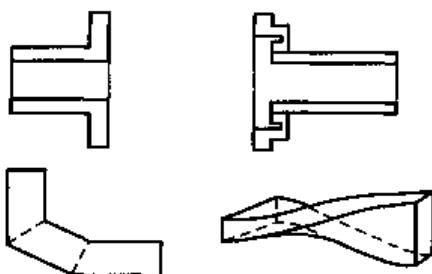
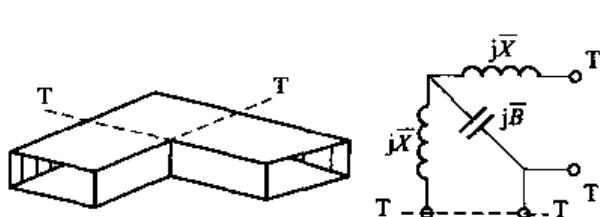


图 3-3-6 方向变换元件

图 3-3-7 矩形波导的直角拐角及其等效电路(典型数据  $\bar{X}=2, \bar{B}=1$ )

[解] 任何微波元件的网络参数都有参考面,即它对参考面等效,在此基础上,元件的网络参数可以利用场论的方法获得的,详见本书第五章。

按照网络级联的分析,可以得到直角拐角的等效网络

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \prod_{i=1}^3 \bar{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & j\bar{X} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\bar{B} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j\bar{X} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \bar{X}\bar{B} & j\bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B}) \\ j\bar{B} & 1 - \bar{X}\bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ j & -1 \end{bmatrix} \\ S &= \frac{1}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22} & 2 \det A \\ -A_{11} + A_{12} - A_{21} + A_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{j}{2-j} & \frac{-2}{2-j} \\ \frac{-2}{2-j} & \frac{j}{2-j} \end{bmatrix} \\ S_{11} &= \frac{j}{2-j} = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{j116.565^\circ}\end{aligned}$$

若拐角接匹配负载,则  $\Gamma = S_{11}$ ,有

$$P_L = P_0 (1 - |\Gamma|^2) = 0.8 P_0$$

分析可得,直角拐角的反射系数  $\frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472$ , 对应驻波比  $\rho = 2.618$ 。

### 三、信号变换元件

信号变换元件的种类最多,下面将对典型的信号变换元件进行讨论。

#### 1. 膜片

膜片可分成感性膜片、容性膜片和谐振窗,如图 3-3-8 所示。

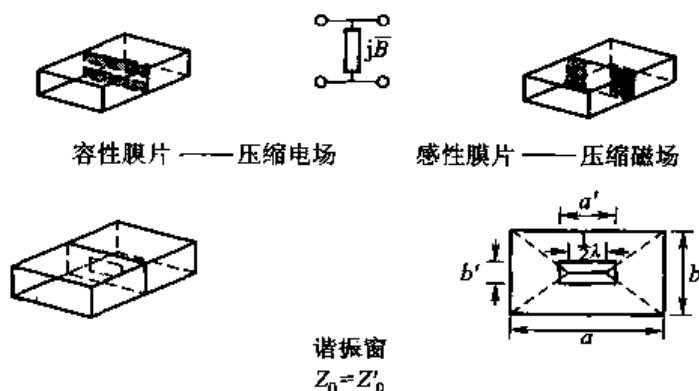


图 3-3-8 膜片与谐振窗

根据要求,容性膜片区域把电场压缩而使  $B > 0$ , 感性膜片区域把磁场压缩使  $B < 0$ , 它们都可成为匹配元件。

谐振窗可以看作是感性膜片和容性膜片的结合,构成无反射元件。谐振窗的特性阻抗等于波导主模的特性阻抗,它在概念上有力地说明有障碍未必有反射。由特性阻抗定义

$$\frac{b}{a} \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = \frac{b'}{a'} \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a'}\right)^2}}$$

也即

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 - \frac{\lambda^2}{4}}} = \frac{b'}{\sqrt{a'^2 - \frac{\lambda^2}{4}}}.$$

这里把  $a'$  和  $b'$  看作动点,即令  $x = \frac{1}{2}a'$ ,  $y = \frac{1}{2}b'$ , 可得

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{b\lambda}{2\sqrt{4a^2 - \lambda^2}}\right)^2} = 1 \quad (3-3-5)$$

谐振窗轨迹是双曲线方程。

[例 3] 在平板波导中,采用保角变换法给出如图 3-3-9 所示的容性膜片的电容  $C$  和归一化电纳  $B$ 。

[解] 这个问题利用对称性,只解其中一半,并应用

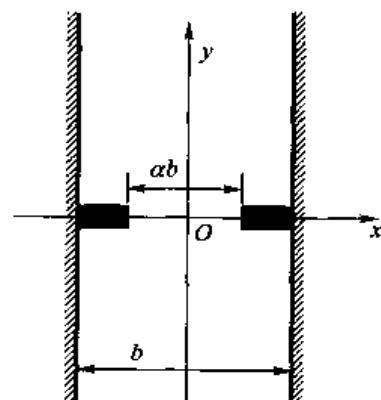


图 3-3-9 容性膜片

Schwarz-Christoffel 多角形变换把  $z$  平面和  $z_2$  平面同时向  $z_1$  平面变换, 如图 3-3-10 所示, 有

$$\begin{cases} z_1 = K \left[ \sin \left( \frac{z}{b} \pi \right) \right] \\ z_1 = \sin \left( \frac{z_2}{b} \pi \right) \end{cases} \quad (3-3-6)$$

实际上, 式(3-3-6)是由下述两个多角形变换构成

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} z = \frac{b}{2} \arcsin \left( \frac{z_1}{K} \right) \\ \frac{\pi}{2} z_2 = \frac{b}{2} \arcsin (z_1) \end{cases}$$

因此, 可消去  $z_1$  直接得到  $z$  与  $z_2$  的变换关系

$$K \sin \left( \frac{\pi z}{b} \right) = \sin \left( \frac{\pi z_2}{b} \right) \quad (3-3-7)$$

注意到  $z_2$  平面已成均匀场。求出变换系数  $K$

$$z = \frac{1}{2} ab, \quad z_1 = 1$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{ab}{2} = \frac{b}{2} \arcsin \left( \frac{1}{K} \right)$$

很容易求出

$$K = \csc \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right) \quad (3-3-8)$$

考察  $y \rightarrow \infty$  和  $y_2 \rightarrow \infty$  时的均匀场, 由于  $z$  平面的电力线弯曲, 有

$$y_2 = y + \delta \quad (3-3-9)$$

其中  $\delta$  正是膜片的电容(只考虑容性膜片的一半), 考虑无穷条件

$$K \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{b}(iy)} - e^{-j\frac{\pi}{b}(iy)}}{2j} = \frac{e^{j\frac{\pi}{b}(iy_2)} - e^{-j\frac{\pi}{b}(iy_2)}}{2j}$$

略去  $e^{-\frac{\pi}{b}y}$  和  $e^{-\frac{\pi}{b}y_2}$  项, 两边取对数

$$\ln K + \frac{\pi}{b} y = \frac{\pi}{b} y_2 \quad (3-3-10)$$

计及式(3-3-9)条件, 得到

$$\delta = \frac{b}{\pi} \ln \left[ \csc \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right) \right] \quad (3-3-11)$$

考虑双边影响后的电容

$$C = \frac{2\epsilon\delta}{b} = \frac{2\epsilon}{\pi} \ln \left[ \csc \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right) \right] \quad (3-3-12)$$

上述结果是平板波导的电容。如要把结果用到矩形波导中去, 则归一化电纳  $B$  为

$$B = \frac{\omega C}{Y_0} = \omega C Z_0$$

$$C = \frac{2\epsilon a}{\pi} \ln \left[ \csc \left( \frac{\pi}{2} \alpha \right) \right]$$

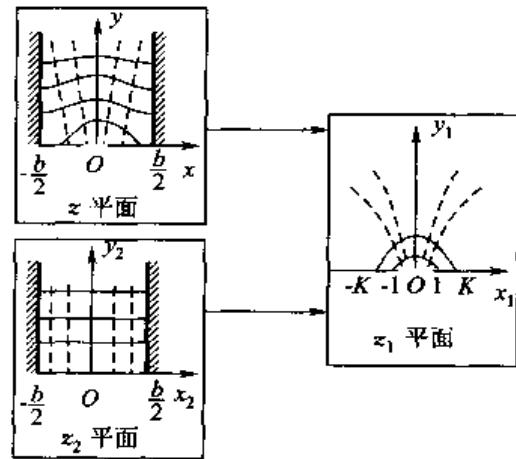


图 3-3-10 Schwarz-Christoffel 多角形变换

$$Z_s = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{\lambda}{\lambda_s} \frac{b}{a}}$$

最后得到

$$B = \frac{4b}{\lambda_s} \ln \left[ \csc \left( \frac{\pi}{2} a \right) \right] \quad (3-3-13)$$

### 2. 相移器和衰减器

相移器和衰减器是最基本的两种元件,它们可以起调节相移和衰减的作用,如图 3-3-11 所示。

对于衰减器,有

$$L = 20 \log \frac{1}{|S_{21}|} \text{ dB}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\alpha t} \\ e^{-\alpha t} & 0 \end{bmatrix}$$

对于相移器,有

$$\Phi = -\arg S_{21}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\Phi} \\ e^{-j\Phi} & 0 \end{bmatrix}$$

### 3. 铁氧体隔离器

铁氧体隔离器也称单向器,其网络参数如图 3-3-12 所示。

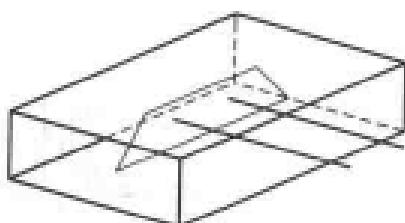


图 3-3-11 相移器和衰减器

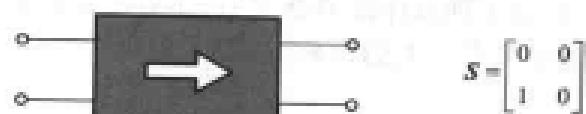


图 3-3-12 隔离器及其网络参数

注意:这是一种非互易网络  $S_{12} \neq S_{21}$ ,一般正向衰减 $<0.5$  dB,反向隔离 $>20$  dB。

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 10^{-\frac{A_f}{10}} \\ 10^{-\frac{A_f}{10}} & 0 \end{bmatrix}$$

**[例 4]** 为了使发射机稳定工作,在一端加铁氧体隔离器,如图 3-3-13 所示。铁氧体隔离器的正、反向驻波特性均为 1.20,正向衰减为 0.5 dB,反向隔离为 20 dB。求在任意负载时,输入端的最大驻波比  $\rho_{max}$ 。

**[解]** (1) 根据正向驻波比 1.20

$$|S_{11}| = |S_{22}| = \frac{\rho - 1}{\rho + 1} = 0.0909$$

(2) 正向衰减定义

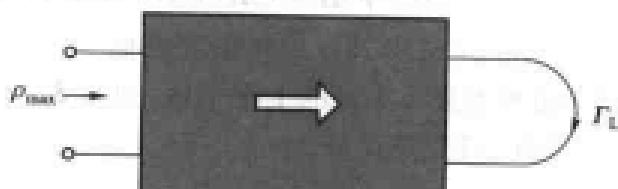


图 3-3-13 隔离器的应用

$$L^+ = 20 \lg \left| \frac{1}{S_{21}} \right| = 0.5 \text{ dB}$$

也即  $|S_{21}| = 10^{-\frac{L^+}{20}} = 10^{-0.0441} = 0.9441$

注意：对于小损耗

$$10^{-\frac{L^+}{20}} = e^{-\frac{2.302L^+}{20}} = e^{-0.1151L^+} = e^{-0.05755} \approx 1 - 0.05755 \approx 0.9424$$

### (3) 反向隔离定义

$$L^+ = 20 \lg \frac{1}{|S_{12}|} = 20 \text{ dB}$$

$$|S_{12}| = 10^{-\frac{L^+}{20}} = 0.1$$

于是写出  $S$  散射参数，但相位均未知。

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.0909e^{j\varphi_{11}} & 0.1e^{j\varphi_{12}} \\ 0.9441e^{j\varphi_{21}} & 0.0909e^{j\varphi_{22}} \end{bmatrix}$$

注意：铁氧体隔离器的  $S_{12} \neq S_{21}$ ，属于典型非互易网络。端接任意负载后，其输入反射系数为

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L}$$

为了达到输入反射系数的最大值，即  $|\Gamma_{in}|_{max}$ ，则  $|S_{11}|$  和  $\frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L}$  必同相。 $|\Gamma_L| = 1$  时，分子最大，分母最小。

于是有

$$|\Gamma_{in}|_{max} = |S_{11}| + \frac{|S_{12}| |S_{21}|}{1 - |S_{22}|} = 0.1948$$

$$\rho_{max} = \frac{1 + |\Gamma_{in}|_{max}}{1 - |\Gamma_{in}|_{max}} = 1.4837 < 1.5$$

所以，加了铁氧体隔离器之后，不管后面的负载如何波动，都不会对发射机产生大的影响。

## 四、波型变换元件

典型的是同轴-波导转换，如图 3-3-14 所示。为了提高转换效率，可调节探针深度和短路活塞位置。

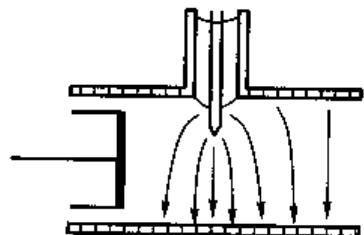


图 3-3-14 同轴-波导转换

## 附录 APPENDIX

### Schwarz-Christoffel(许瓦尔兹-克里斯多夫)多角形变换

Schwarz-Christoffel 多角形变换把  $w$  平面的多角形变成  $z$  平面的上半平面，如图 3-3-15 所示，其变换式是

$$\frac{dw}{dz} = A \prod_{i=1}^n (z - z_i)^{\frac{p_i}{k}-1}$$

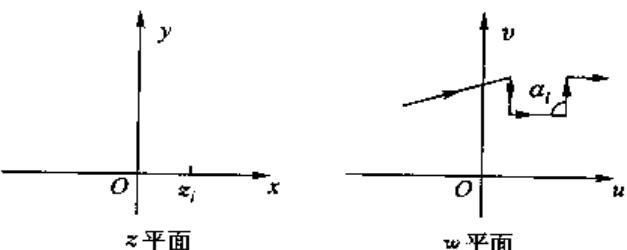


图 3-3-15 Schwarz-Christoffel 多角形变换

具体到本节的例子

$z$	$z_1$	$\alpha_i$
$\frac{b}{2}$	$K$	$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{b}{2}$	$-K$	$\frac{\pi}{2}$

$z_2$	$z_1$	$\alpha_i$
$\frac{b}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{b}{2}$	-1	$\frac{\pi}{2}$

以  $z - z_1$  变换为例

$$\frac{dz}{dz_1} = A(z_1 - K)^{-\frac{1}{2}}(z_1 + K)^{-\frac{1}{2}}$$

$$z = A \int \frac{d\left(\frac{z_1}{K}\right)}{\sqrt{\left(\frac{z_1}{K}\right)^2 - 1}} = A \arcsin\left(\frac{z_1}{K}\right) + C$$

考虑边界条件  $z_1 = 0, z = 0$  可见  $C = 0$

$$z_1 = K, \quad z = \frac{b}{2}$$

即得到

$$\frac{\pi}{2}z = \frac{b}{2} \arcsin\left(\frac{z_1}{K}\right)$$

完全类似有

$$\frac{\pi}{2}z_2 = \frac{b}{2} \arcsin z_1$$

### 作业 PROBLEMS 3-3

- ① 证明如图 3-3-16 所示的无耗双端口网络的  $S$  散射参数，有

$$\begin{cases} |S_{11}| = |S_{22}| \\ |S_{12}| = |S_{21}| \end{cases}$$

- ② 两个直角拐角连接成 U 形拐角，如图 3-3-17 所示，求在 2 端口接匹配负载时，1 端口的反射系数。

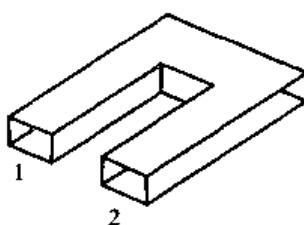
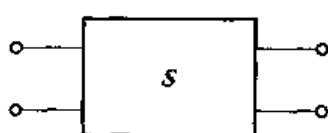


图 3-3-16 无耗双端口网络

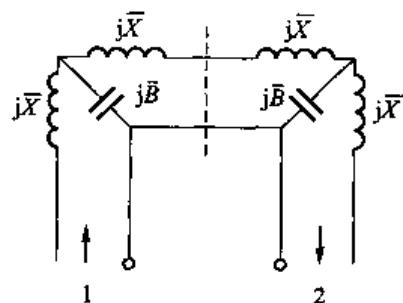


图 3-3-17 U 形拐角及其等效电路

- ③ 已知 S 波段波导  $a \times b = 72.0 \times 34.0 \text{ mm}^2$ 。今要设计一谐振窗  $a' = 60.0 \text{ mm}$ ，如图 3-3-18 所示。求  $b'$  的位置。又问这种波导的最小谐振窗极限是什么？（工作波长  $\lambda_0 = 100 \text{ mm}$ ）

- ④ 已知一铁氧体隔离器，如图 3-3-19 所示，两端驻波比均为  $\rho = 1.20$ ，正向衰减 1.0 dB，反向隔离 20.0 dB。

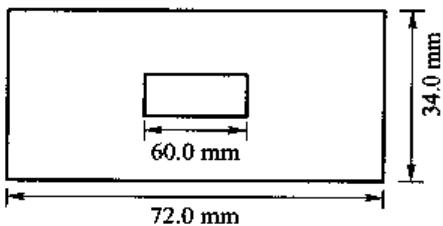


图 3-3-18 波导谐振窗

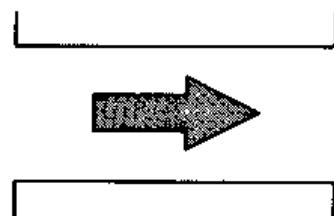


图 3-3-19 铁氧体隔离器示意图

若使用这种隔离器接任意负载  $P_L$ , 如图 3-3-20 所示, 求输入端的最大驻波比  $\rho_{max}$ 。

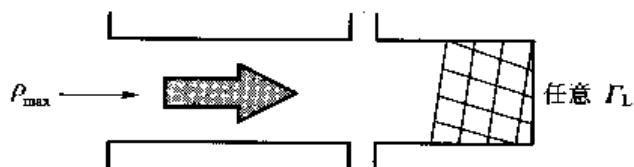


图 3-3-20

### 3-4

## 多端口元件 Multi-Port Element

多端口元件在微波工程中承担分路(功率分配)、和差、环行、耦合等重要功能,如图 3-4-1 所示。

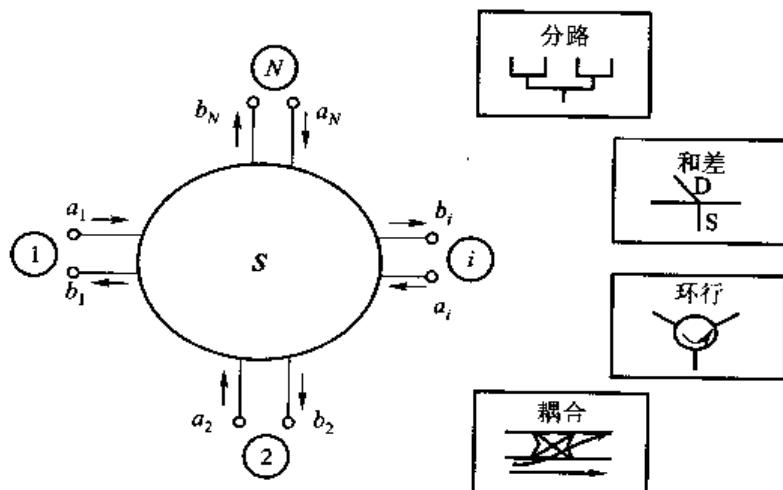


图 3-4-1 多端口元件功能

## 一、三端口网络的一般性质

### 1. 无耗互易网络的么正性

如前文所述, 无耗网络的么正性为

$$\mathbf{S}^+ \mathbf{S} = \mathbf{I}$$

在三端口网络情况下, 并应用互易条件有

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12}^* & S_{13}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{23}^* \\ S_{13}^* & S_{23}^* & S_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-4-1)$$

将上述矩阵展开后可分别得到两组方程, 称为振幅条件和相位条件。

$$\begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\ |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 = 1 \end{cases} \quad \text{振幅条件} \quad (3-4-2)$$

$$\begin{cases} S_{11}^* S_{12} + S_{12}^* S_{22} + S_{13}^* S_{23} = 0 \\ S_{11}^* S_{13} + S_{12}^* S_{23} + S_{13}^* S_{33} = 0 \\ S_{12}^* S_{13} + S_{22}^* S_{23} + S_{23}^* S_{33} = 0 \end{cases} \quad \text{相位条件} \quad (3-4-3)$$

[性质] 如图 3-4-2 所示的无耗互易三端口网络不可能同时匹配, 即无法达到

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$$

[证明] 采用反证法: 假定  $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$ , 由式(3-4-3)可知

$$\begin{cases} S_{13}^* S_{23} = 0 \\ S_{12}^* S_{13} = 0 \\ S_{12}^* S_{23} = 0 \end{cases}$$

于是在  $S_{12}, S_{13}, S_{23}$  中至少有两个为 0, 但这与式(3-4-2)的振幅条件相悖, 得证。

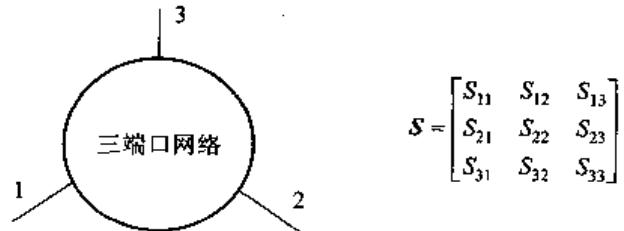


图 3-4-2 无耗互易三端口网络

### 2. 无耗非互易三端口网络

无耗非互易三端口网络的三个端口可以完全匹配, 作为例子, 有

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-4-4)$$

## 二、三端口元件

### 1. E 面 T 和 H 面 T——分路元件

E 面 T 和 H 面 T 的电路和功能如表 3-4-1 所示。

表 3-4-1 E 面 T 和 H 面 T 的电路和功能

E 面 T	H 面 T
 串接元件	 并接元件
①端输入, ②和③端功率平分, 相位相反。 用于和差; ②和③端同相等幅输入, ①端无输出; ②和③端反相等幅输入, ①端输出最大。	④端输入, ②和③端功率平分, 相位相同。 用于和差; ②和③端同相等幅输入, ④端输出最大; ②和③端反相等幅输入, ④端无输出。

## 2. 铁氧体环行器——环行元件

铁氧体环行器是典型的非互易元件, 其网络参数如图 3-4-3 所示。

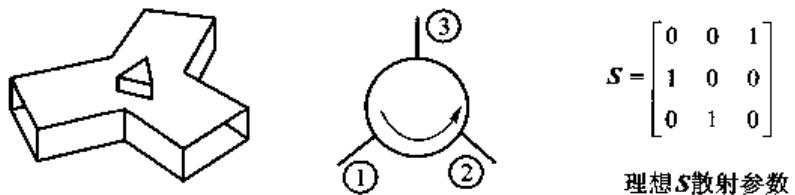


图 3-4-3 铁氧体环行器及其网络参数

[例] 图 3-4-3 中的理想铁氧体环行器端口③接匹配负载  $\Gamma_L \rightarrow 0$ , 即可构成二端口铁氧体隔离器。

[解] 由图 3-4-3 中的  $S$  散射参数定义可写出

$$\begin{cases} b_1 = a_3 \\ b_2 = a_1 \\ b_3 = a_2 \end{cases}$$

而  $\Gamma_L = a_3/b_3$ , 计及这一条件即可导得

$$\begin{cases} b_1 = \Gamma_L b_3 = \Gamma_L a_2 \\ b_2 = a_1 \end{cases}$$

写出双端口网络的  $S$  散射参数为

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_L \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (3-4-5)$$

只要  $\Gamma_L$  很小, 即可得到典型的铁氧体隔离器。

## 三、四端口网络的一般性质

### 1. 定向耦合网络

定向耦合网络是一种常用的四端口网络, 如图 3-4-4 所示, 一般具有以下性质:

① 是无耗互易网络。

② 每对端口相互隔离, 即

$$S_{12} = S_{34} = 0 \quad (3-4-6)$$

③ 其中一对端口匹配, 如

$$S_{11} = S_{22} = 0 \quad (3-4-7)$$

符合上述条件的网络即可称为定向耦合器, 其  $S$  散射参数是

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\ 0 & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 \\ S_{14} & S_{24} & 0 & S_{44} \end{bmatrix}$$

根据么正性又写出

$$\begin{cases} |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \\ |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \\ |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 = 1 \\ |S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{44}|^2 = 1 \end{cases} \quad (3-4-8)$$

要满足上式当且仅当

$$|S_{33}| = |S_{44}| = 0 \quad (3-4-9)$$

此外, 还能得到如下性质

$$\begin{cases} |S_{13}| = |S_{24}| \\ |S_{14}| = |S_{23}| \end{cases} \quad (3-4-10)$$

从相位关系得到的方程是

$$\begin{cases} S_{13}S_{23}^* + S_{14}S_{24}^* = 0 \\ S_{13}S_{14}^* + S_{23}S_{24}^* = 0 \end{cases} \quad (3-4-11)$$

若选择适当的参考面使

$$S_{13} = S_{24} = \alpha \quad (3-4-12)$$

是实数, 则

$$S_{14} = j\beta \quad (3-4-13)$$

而从上面方程能给出

$$S_{23} = S_{14} = j\beta \quad (3-4-14)$$

这样  $S$  散射参数是

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & j\beta \\ 0 & 0 & j\beta & \alpha \\ \alpha & j\beta & 0 & 0 \\ j\beta & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-4-15)$$

也就是说, 理想的定向耦合器, 主路和副路相位相差  $90^\circ$ , 因此也称为  $90^\circ$  定向耦合器。

## 2. 对称定向耦合器网络

下面研究一种四端全对称的定向耦合器网络, 有条件

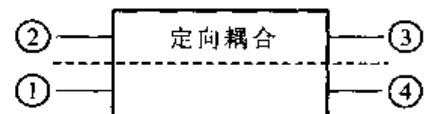


图 3-4-4 定向耦合网络

$$\begin{cases} S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} \\ S_{12} = S_{21} = S_{34} = S_{43} \\ S_{13} = S_{31} = S_{24} = S_{42} \\ S_{14} = S_{41} = S_{23} = S_{32} \end{cases} \quad (3-4-16)$$

于是,  $S$  散射参数可写成

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{11} & S_{14} & S_{13} \\ S_{13} & S_{14} & S_{11} & S_{12} \\ S_{14} & S_{13} & S_{12} & S_{11} \end{bmatrix} \quad (3-4-17)$$

且由无耗的么正性条件写出

$$\begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \\ S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{11}^* + S_{13}S_{14}^* + S_{14}S_{13}^* = 0 \\ S_{11}S_{13}^* + S_{12}S_{14}^* + S_{13}S_{11}^* + S_{14}S_{12}^* = 0 \\ S_{11}S_{14}^* + S_{12}S_{13}^* + S_{13}S_{12}^* + S_{14}S_{11}^* = 0 \end{cases} \quad (3-4-18)$$

把方程(3-4-18)重新排列, 得

$$(S_{11}S_{13}^* + S_{12}S_{14}^*)(S_{11}^*S_{14} + S_{12}^*S_{13}) = (S_{13}S_{11}^* + S_{14}S_{12}^*)(S_{12}S_{13}^* + S_{14}^*S_{11})$$

进一步可简化为

$$(|S_{11}|^2 - |S_{12}|^2)(S_{13}^*S_{14} - S_{13}S_{14}^*) = (|S_{13}|^2 - |S_{14}|^2)(S_{11}^*S_{12} - S_{11}S_{12}^*) \quad (3-4-19)$$

现在讨论一种比较接近实际的情况, 即端口①和端口②理想隔离

$$S_{12} = 0 \quad (3-4-20)$$

则可得到

$$\begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \\ S_{13}S_{14}^* + S_{14}S_{13}^* = 0 \\ S_{11}S_{13}^* + S_{13}S_{11}^* = 0 \\ S_{11}S_{14}^* + S_{14}S_{11}^* = 0 \\ |S_{13}|^2(S_{13}^*S_{14} - S_{13}S_{14}^*) = 0 \end{cases} \quad (3-4-21)$$

对于实际的定向耦合器,  $S_{13} = 0$  和  $S_{14} = 0$  是人们所不希望的, 将它们排除在讨论之外。那么, 要满足式(3-4-21)当且仅当

$$S_{11} = 0 \quad (3-4-22)$$

且式(3-4-21)可进一步简化为

$$\begin{cases} |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \\ S_{13}S_{14}^* + S_{14}S_{13}^* = 0 \end{cases} \quad (3-4-23)$$

由此可得到

$$\cos(\theta_3 - \theta_4) = 0 \quad (3-4-24)$$

或者说

$$\theta_3 - \theta_4 = 90^\circ \quad (3-4-25)$$

从以上分析中可以得到定向耦合器的十分重要的性质:

- ① 定向耦合器的端对隔离和端口固有反射密切相关。  
 ② 定向耦合器的主、副路相位差也和端对隔离密切相关。  
 ③ 因此，在工程中常常采用考察输入反射和路间相位差的方法来判断这类定向耦合器的质量优劣。

### 3. 3 dB 桥网络

把主、副路功率相等的定向耦合器网络称为 3 dB 桥网络，重新写出

$$(|S_{11}|^2 - |S_{12}|^2)(S_{13}^* S_{14} - S_{13} S_{14}^*) = (|S_{13}|^2 - |S_{14}|^2)(S_{11}^* S_{12} - S_{11} S_{12}^*)$$

也即

$$(|S_{11}|^2 - |S_{12}|^2)|S_{13}| |S_{14}| \sin(\theta_3 - \theta_4) = (|S_{13}|^2 - |S_{14}|^2)|S_{11}| |S_{12}| \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (3-4-26)$$

对于理想的 3 dB 桥网络

$$|S_{13}| = |S_{14}| \approx \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (3-4-27)$$

代入式(3-4-26)可知

$$|S_{11}| \approx |S_{12}| \quad (3-4-28)$$

另一方面，由

$$S_{11} S_{12}^* + S_{12} S_{11}^* + S_{13} S_{14}^* + S_{14} S_{13}^* = 0$$

又可得到

$$|S_{11}| |S_{12}| \cos(\theta_1 - \theta_2) + |S_{13}| |S_{14}| \cos(\theta_3 - \theta_4) = 0 \quad (3-4-29)$$

$$|\cos(\theta_3 - \theta_4)| = \frac{|S_{11}| |S_{12}|}{|S_{13}| |S_{14}|} |\cos(\theta_1 - \theta_2)| \quad (3-4-30)$$

考虑最坏可能性，即  $\theta_1 = \theta_2$

$$|\cos(\theta_3 - \theta_4)| \approx 2 |S_{12}|^2 = 2 \times 10^{-\frac{I}{10}} \quad (3-4-31)$$

其中， $I$  是隔离度，定义为  $I = 10 \lg \frac{1}{|S_{12}|^2}$ ，式(3-4-31)可

由相位差确定隔离度，如图 3-4-5 所示。

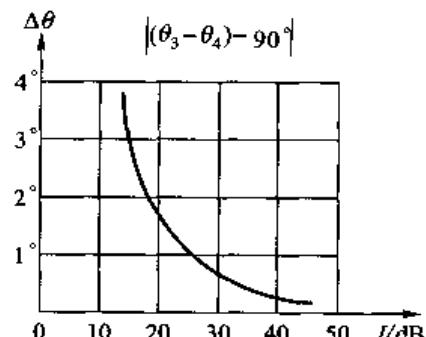


图 3-4-5 隔离度  $I$  与相位差的关系

## 四、定向耦合器

典型的定向耦合器是四端口网络，①-④是主波导，②-③是副波导，主、副波导之间采用孔耦合。

为了加强定向性和耦合度，一般均采用多孔排阵，称为孔阵定向耦合器，如图 3-4-6 所示。波导定向耦合器的结构图 3-4-7 所示。

### 1. 耦合度

$$C = -20 \lg |S_{31}| \text{ dB}$$

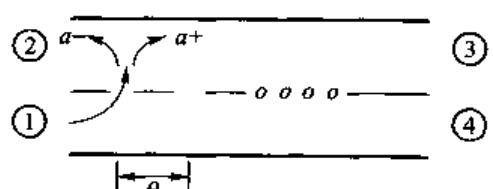


图 3-4-6 孔阵定向耦合器

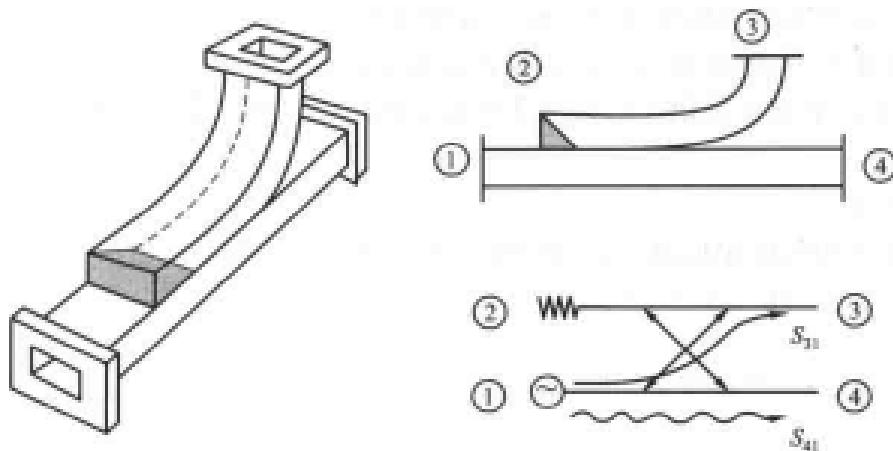


图 3-4-7 波导定向耦合器

## 2. 定向性

$$D = 20 \lg \left| \frac{S_{31}}{S_{21}} \right| \text{dB}$$

一般耦合度为 20 dB, 10 dB, 6 dB, 3 dB,

一般定向性为 30~40 dB, 愈大愈好。

若  $n$  个孔完全相同

$$\begin{aligned} b_s &= a^+ e^{-j\theta(n-1)\theta} + a^+ e^{-j\theta(n-2)\theta} + \dots + a^+ e^{-j\theta n\theta} \\ &= a^+ n e^{-j\theta(n-1)\theta} \end{aligned} \quad (3-4-32)$$

$$\begin{aligned} b_s &= a^- + a^- e^{-j2\theta} + a^- e^{-j4\theta} + \dots + a^- e^{-j2(n-1)\theta} \\ &= a^- (1 + e^{-j2\theta} + e^{-j4\theta} + \dots + e^{-j2(n-1)\theta}) \\ &= a^- \left( \frac{1 - e^{-j2n\theta}}{1 - e^{-j2\theta}} \right) = a^- e^{-j\theta(n-1)\theta} \left( \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right) \end{aligned} \quad (3-4-33)$$

于是耦合度

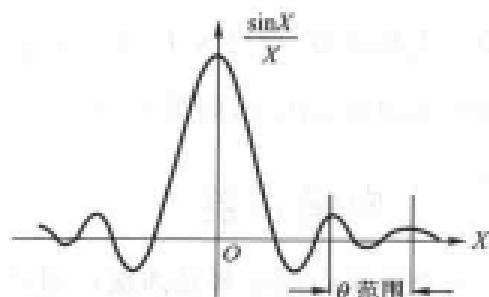
$$C = -20 \lg a^+ - 20 \lg n = C_s - 20 \lg n \quad (3-4-34)$$

其中,  $C_s$  是单孔耦合度。

定向性

$$D = 20 \lg \left| \frac{a^+}{a^-} \right| + 20 \lg \left| \frac{n \sin \theta}{\sin n\theta} \right| = D_s + 20 \lg \left| \frac{n \sin \theta}{\sin n\theta} \right| \quad (3-4-35)$$

其中,  $D_s$  表示单孔定向性, 后项表示阵列定向性, 只要取  $\theta$  在合适的范围,  $D$  可以很大, 如图 3-4-8 所示。

图 3-4-8 孔阵耦合阵列函数 ( $X = \sin \theta$ )

## 五、魔 T 元件

魔 T 元件可以看作是 E 面 T 和 H 面 T 的结合, 也可能看作是特殊的 3 dB 桥, 其结构和网络参数如图 3-4-9 所示。

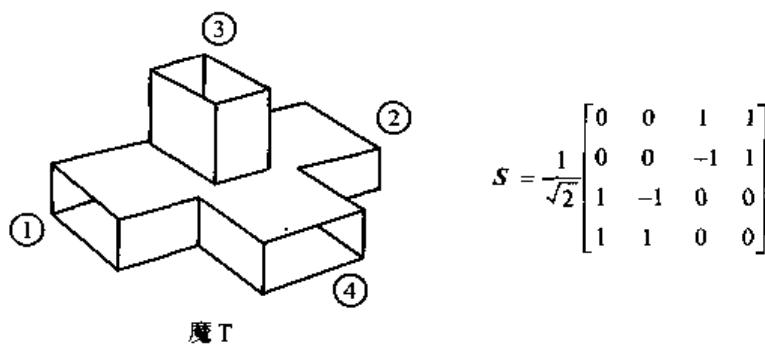


图 3-4-9 魔 T 及其网络参数

如果在魔 T 的①、②端同相输入时,其各个端口的输出特性为

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

若在①、②端反相输入时,其各个端口的输出特性为

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 作业 PROBLEMS 3-4

已知如图 3-4-10 所示的定向耦合器的  $S$  散射参数为

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & j\beta \\ 0 & 0 & j\beta & \alpha \\ \alpha & j\beta & 0 & 0 \\ j\beta & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

现在端口①输入  $a_1 = 1$ ,求各端输出  $b_i$  ( $i=1,2,3,4$ )。

已知如图 3-4-11 所示的魔 T 的  $S$  散射参数为

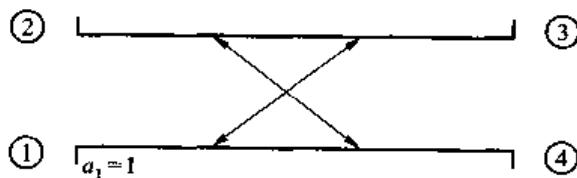


图 3-4-10 定向耦合器

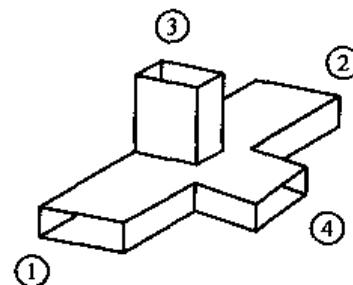


图 3-4-11 魔 T 结构

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

现在端口①输入  $a_1 = 1$ , 求各端输出情况。

### 3-5

## 不均匀性 Discontinuity

可以这样说:微波系统是由传输线加功能电路组成的,这中间会产生大量的不均匀性或者说不连续性。对于不均匀性的研究有两个方面:不均匀性的分析方法和不均匀性的应用。关于不均匀性的分析涉及到的相关计算方法将在第五章进行介绍,这里着重介绍不均匀性的等效电路及网络分析方法。

### 一、带线不均匀性

#### 1. 开路端

带线的开路端由于有电容耦合并不相当于  $Y_L = 0$ ,如图 3-5-1 所示。在设计理想开路端时必须在原长度上考虑加上  $\Delta l$ ,其等效的电容值为

$$C_{oc} = \frac{10\Delta l \sqrt{\epsilon_r}}{3Z_0} \text{ pF} \quad (3-5-1)$$

#### 2. 间隔(Gap)

带线的间隔及其等效网络如图 3-5-2 所示,很容易知道 II 形网络的 A 矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jB_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j\frac{1}{B_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jB_1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -j\frac{1}{B_2} \\ jB_1 & \frac{B_1}{B_2} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jB_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{B_1}{B_2} & -j\frac{1}{B_2} \\ jB_1 \left(2 + \frac{B_1}{B_2}\right) & 1 + \frac{B_1}{B_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-5-2)$$

若后接匹配负载  $Z_0 = 1$ ,则

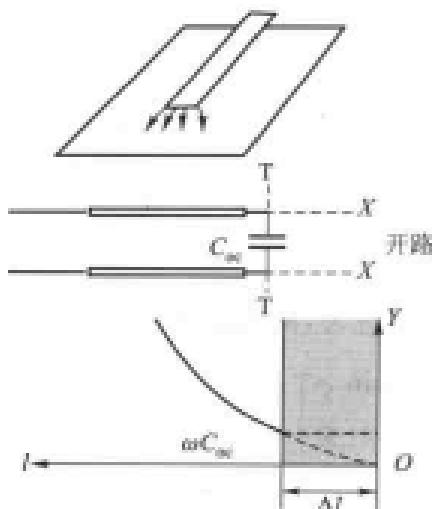


图 3-5-1 开路带线及其等效端电容

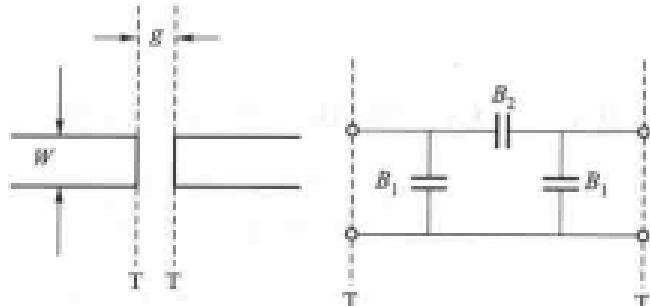


图 3-5-2 带线间隔及其等效网络

$$Z_{in} = \frac{A_{11} + A_{12}}{A_{21} + A_{22}}$$

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - 1}{Z_{in} + 1} = \frac{A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22}}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}} \quad (3-5-3)$$

最后得到输入驻波比

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

### 3. 宽度突变

带线的宽度突变及其等效网络如图 3-5-3 所示，若  $Z_1 = Z_2$ ，则  $Z'_{11} = Z_1 + jX$

$$\Gamma = \frac{Z'_{11} - Z_1}{Z'_{11} + Z_1} = \frac{Z_1 - Z_1 + jX}{Z_1 + Z_1 + jX} \quad (3-5-4)$$

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

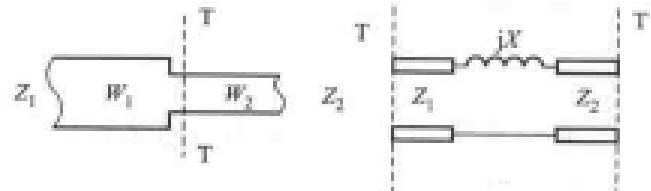


图 3-5-3 宽度突变及其等效网络

### 4. 拐角

带线拐角及其等效网络如图 3-5-4 所示。

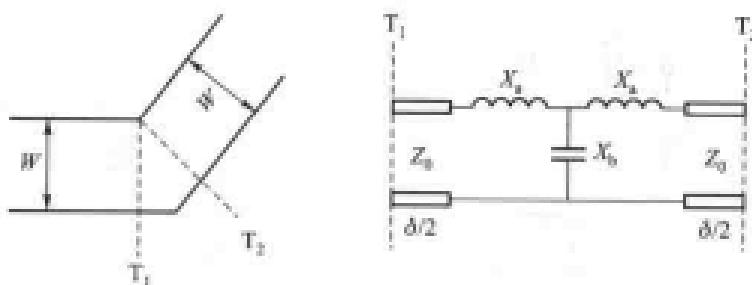


图 3-5-4 带线拐角及其等效网络

若考虑到  $\varphi = \beta(\delta/2)$ ，则拐角可以看成是由 5 个简单网络级联而成

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & j \sin \varphi \\ j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & jX_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -j \frac{1}{X_b} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & jX_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & j \sin \varphi \\ j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3-5-5)$$

先考虑中间 3 个网络

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & ja_{12} \\ ja_{21} & a_{11} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & jX_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -j\frac{1}{X_b} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & jX_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{X_a}{X_b} & jX_a \left( 2 + \frac{X_a}{X_b} \right) \\ -j\frac{1}{X_b} & 1 + \frac{X_a}{X_b} \end{bmatrix} \\ &\quad (3-5-6) \end{aligned}$$

这是一个无耗对称网络。然后把左右两段  $\delta/2$  传输线考虑进去，构成总网络

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & j \sin \varphi \\ j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} a_{11} & ja_{12} \\ ja_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & j \sin \varphi \\ j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cos 2\varphi - \frac{1}{2} (a_{12} + a_{21}) \sin 2\varphi \\ j \left[ -\frac{1}{2} (a_{12} - a_{21}) + a_{11} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (a_{12} + a_{21}) \cos 2\varphi \right] \\ j \left[ +\frac{1}{2} (a_{12} - a_{21}) + a_{11} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (a_{12} + a_{21}) \cos 2\varphi \right] \\ a_{11} \cos 2\varphi - \frac{1}{2} (a_{12} + a_{21}) \sin 2\varphi \end{bmatrix} \\ &\quad (3-5-7) \end{aligned}$$

要使拐角匹配，必须有  $A_{12} = A_{21}$ ，也即  $a_{12} = a_{21}$ 。

很容易得到

$$X_b = -\frac{(1+X_a^2)}{2X_a} \quad (3-5-8)$$

可以看到，式(3-5-8)右边绝对值大于 1。

### 5. T 形接头

T 形接头是三端口网络，不同的资料中参考面不尽相同，这一点在应用时要注意。作为例子，设 T 形接头由直行带线与一并联开路枝节（与直行带线距离为  $l$ ）构成，如图 3-5-5 所示。经过变换，其等效网络可以简化为如图 3-5-6 所示。

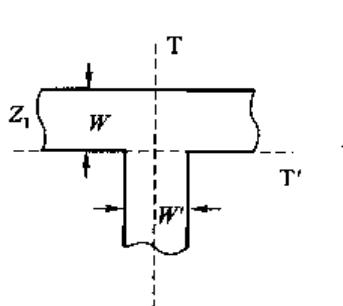


图 3-5-5 T 形接头及其等效网络(1)

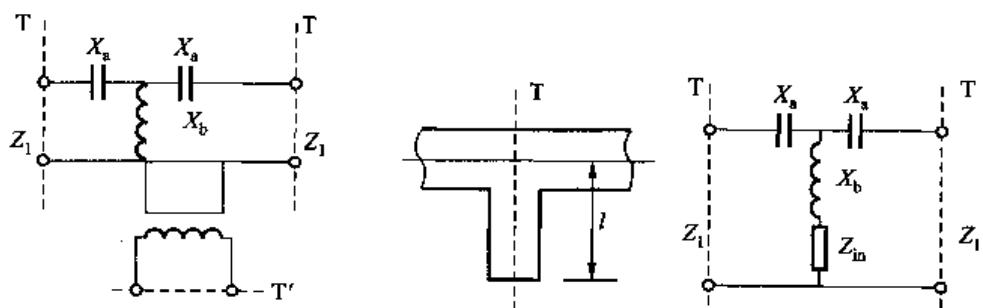


图 3-5-6 T 形接头及其等效网络(2)

其中

$$Z_{in} = -jZ_1 \operatorname{ctan} \beta \left( l + \Delta l - \frac{1}{2} W \right) \quad (3-5-9)$$

且  $\Delta l$  公式见式(3-5-1)。

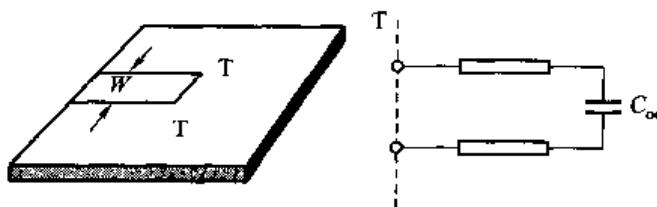
## 二、微带不均匀性

### 1. 微带开路端

微带开路端的等效网络如图 3-5-7 所示。

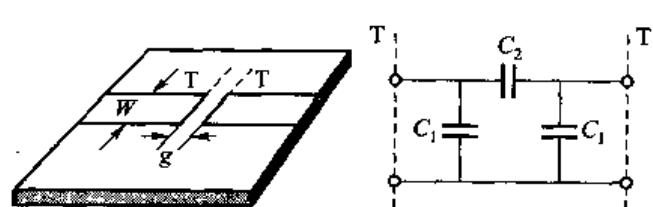
### 2. 串联间隔

微带中的串联间隔及其等效网络如图 3-5-8 所示。



开路端

等效开路电容



串联间隔

Π 形网络

图 3-5-7 微带开路端及其等效网络

图 3-5-8 微带串联间隔及其等效网络

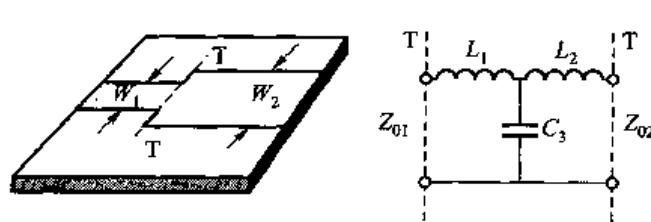
微带的开路端和间隔在形式上与带线的开路端和间隔完全一样,当然具体参数是不同的。

### 3. 阶梯

微带的阶梯及其等效网络如图 3-5-9 所示。

### 4. 直角拐角

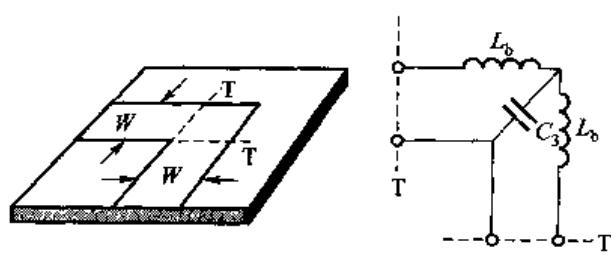
微带的直角拐角及其等效网络如图 3-5-10 所示。



阶梯

T 形网络

图 3-5-9 微带阶梯及其等效网络



拐角

等效网络

图 3-5-10 微带拐角及其等效网络

特别提出匹配拐角概念,如图 3-5-11 所示。

如图 3-5-12 所示的拐角匹配可以理解为两个相同(或不相同)网络中间有一段  $\theta$  传输线构成,以相同宽度  $W$  作为例子,设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & ja_{12} \\ ja_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

具有对称性。

总的矩阵可以写为

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} a_{11} & ja_{12} \\ ja_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & j \sin \theta \\ j \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & ja_{12} \\ ja_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

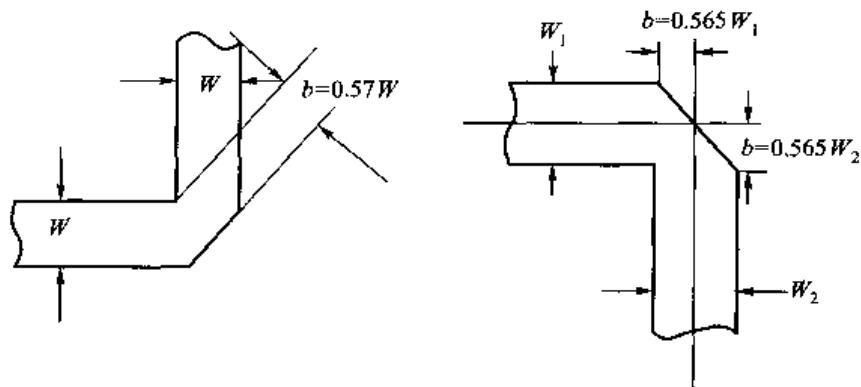


图 3-5-11 匹配拐角

$$= \left[ \begin{array}{l} (a_{11}^2 - a_{12}a_{21})\cos\theta - (a_{11}a_{12} + a_{11}a_{21})\sin\theta \\ j[2a_{11}a_{12}\cos\theta + (a_{11}^2 - a_{12}^2)\sin\theta] \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} j[2a_{11}a_{21}\cos\theta + (a_{11}^2 - a_{21}^2)\sin\theta] (a_{11}^2 - a_{12}a_{21})\cos\theta - (a_{11}a_{12} + a_{11}a_{21})\sin\theta \end{array} \right] \quad (3-5-10)$$

匹配条件归结为

$$A_{T12} = A_{T21} \quad (3-5-11)$$

$$(a_{12}^2 - a_{21}^2)\sin\theta = 2a_{11}(a_{12} - a_{21})\cos\theta$$

容易得到

$$\theta = \arctan\left(\frac{2a_{11}}{a_{12} + a_{21}}\right) \quad (3-5-12)$$

### 5. T 形接头

微带 T 形接头及其等效网络如图 3-5-13 所示。

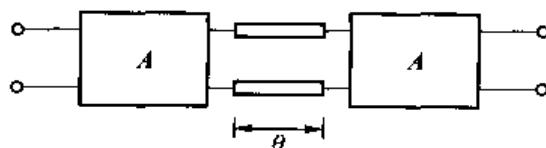


图 3-5-12 两个相同网络的匹配

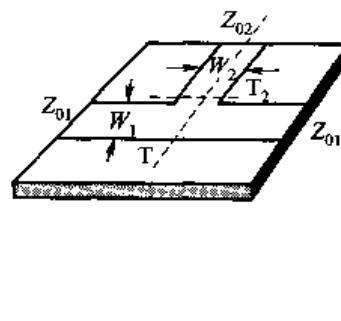


图 3-5-13 微带 T 形接头及其等效网络

### 作业 PROBLEMS 3-5

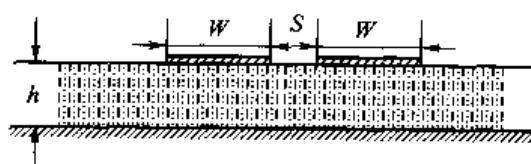
如图 3-5-14 所示,已知对称耦合微带  $W/h = 1.0, S/h = 0.2$ , 填充介质的  $\epsilon_r = 9.60$ , 求奇偶模参数  $Z_{0e}, Z_{0o}, \epsilon_e^c, \epsilon_o^o$ 。

图 3-5-14 作业图

本章把微波元件和网络理论两者紧密地结合起来。首先，网络理论是微波元件的有力指导，它揭示了微波元件的本质特性，具体如下：

① 它指出了每一种微波元件所存在的独立(复)量，并可以采用有限次测量给出。在这种情况下，元件外部接任意源和负载的状态都能够精确地预测。

② 网络理论可判断每一种微波元件的空间对称、互易对称和能量对称。例如，典型的双端口网络，只须

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$$

或者

$$(\varphi_{12} + \varphi_{21}) - (\varphi_{11} + \varphi_{22}) = \pi$$

即可判断其存在无耗对称特性。

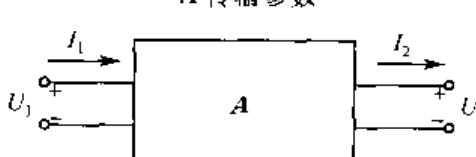
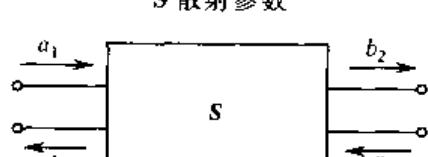
③ 网络理论还可以推导出同一类微波元件的普遍性质。例如，无耗互易的三端口网络无法同时匹配；全对称无耗互易的三端口网络，各端口最好的匹配驻波比为 2 等。

另一方面，微波元件又对网络理论做出检验，并不断地使其发展和创新。近年来，新材料和新的元件不断涌现，它们迫使网络理论走上新的台阶，呈现新的局面。例如，光子带隙(PBG)、电磁带隙(EBG)和左手材料(LHM)元件的出现，拟椭圆函数滤波器、广义 Chebyshev(切比雪夫)滤波器综合的推出都会为这一领域增添新的光彩。

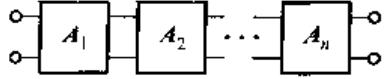
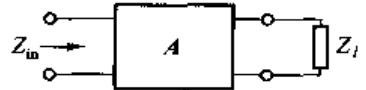
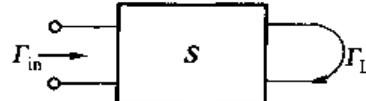
微波元件和网络理论必将相互印证、相互补充，在未来的道路上得到进一步的发展。

本章涉及到的微波网络的核心内容扼要地总结在表 3-5-1 中。需要再次强调的是：网络是场的外部表现；场是网络的内部原因。

表 3-5-1 微波网络的核心内容

A 传输参数	S 散射参数
 不对称型	 对称型
$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>(1) 无耗 <math>A_{11}, A_{22}</math> 实数</li> <li><math>A_{12}, A_{21}</math> 纯虚数</li> <li>(2) 互易 <math>\det A = 1</math></li> <li>(3) 对称 <math>A_{11} = A_{22}</math></li> </ul>	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>(1) 无耗 <math>S^* S = I</math></li> <li>(2) 互易 <math>S_{12} = S_{21}</math></li> <li>(3) 对称 <math>S_{11} = S_{22}</math></li> </ul> <p>注意：<math>S_{11}, S_{12}</math> 的物理意义</p>

续表

<p><b>网络级联定理</b></p>  $A = \prod_{i=1}^n A_i$ <p>注意：次序排列</p> <p><b>阻抗变换定理</b></p>  $Z_{in} = \frac{A_{11}Z_L + A_{12}}{A_{21}Z_L + A_{22}}$	<p><b>反射变换定理</b></p>  $\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L}$
---	--

## 第四章

# 微波谐振腔理论

## Microwave Resonators Theory

谐振标志着“平衡”，是自然界中的普遍现象，也是物质运动存在的一种状态。微波谐振就是微波能量中的电储能和磁储能之间的平衡。

微波频段的谐振一般利用微波谐振腔来实现，微波谐振腔是用短路面、开路面以及其他措施将电磁场约束于一定范围之内的装置。和低频  $LC$  振荡电路中具有明确的储存磁能的电感和储存电能的电容不同，微波谐振腔中电、磁储能的区域是无法截然分开的。

微波谐振腔广泛应用于微波信号源、微波滤波器及微波测量技术中，是一种基本的微波元件，它的结构形式很多，其中一类微波谐振腔是和微波传输线的类型相对应的，如矩形微波谐振腔、圆柱微波谐振腔、同轴微波谐振腔、微带谐振腔、介质谐振器等传输线型谐振腔；另外一类是如开腔谐振器等其他非传输线型的谐振腔。

传输线型微波谐振腔是由传输线端接短微波路面或者开路面构成的。从电磁波的角度来看，微波传输线是在横截面上形成驻波，而传输方向上形成行波，微波谐振腔则是在 3 个方向上均形成驻波。因此，微波传输线的解可以视为电磁波齐次 Helmholtz 方程在横截面上的二维谐振，而谐振是其在微波谐振腔内的三维本征解，其本征值是微波谐振腔的谐振频率。也就是说，有一系列离散的谐振频率上的电磁波可以存在于微波谐振腔中，这一系列满足相应谐振场型的电磁波称为谐振模式。这和在低频  $LC$  谐振电路中，仅有一个由电感  $L$  和电容  $C$  确定的谐振频率不同。与低频谐振电路相类似，微波谐振腔也利用固有品质因数  $Q$  值来描述其储能与损耗的关系，但是，微波谐振腔的  $Q$  值因为没有辐射损耗而相对较高。需要特别指出的是，此时的  $Q$  值是和特定的谐振模式相关的，也就是每个具体谐振模式的固有品质因数  $Q$  值是不同的。

实际上，完全封闭的、与外界没有耦合的微波谐振腔是没有用处的。微波谐振腔在考虑输入、输出耦合情况下的解与在封闭情况下的本征解是不同的，但是这种变化可以在本征解的基础上建模分析。这种变化不仅仅体现在谐振模式的电磁场分布的改变和谐振频率的偏移上，而且实际  $Q$  值也分为固有品质因数、外部品质因数和有载品质因数。

本章首先讨论微波谐振腔的谐振频率和  $Q$  值等基本参数，具体介绍矩形微波谐振腔和圆柱形微波谐振腔，分析了其中可能存在的谐振模式以及谐振基模。并在此基础上研究传输线型微波谐振腔的一般理论、耦合腔和谐振腔的微扰理论。最后介绍开腔谐振器和介质谐振器等非传输线型微波谐振器。

## 4-1

## 微波谐振腔

### Microwave Resonator

前面几章内容中讲述的微波传输线的功能是把微波能量从一个地方传输到另外一个地方,而微波谐振腔的功能是微波能量的存储。如果说微波传输线充当低频的  $R$ 、 $L$ 、 $C$  元件,那么微波谐振腔则相当于低频振荡电路。微波谐振腔是选频、滤波和灵敏测量等应用中所必须涉及的,如图 4-1-1 所示。

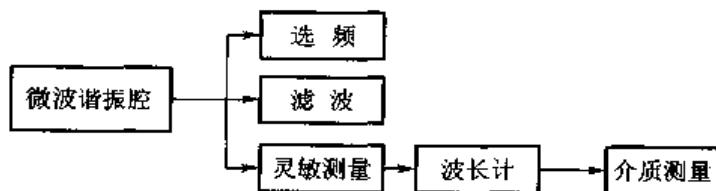


图 4-1-1 微波谐振腔应用

微波谐振腔的主要指标是谐振频率  $\omega_0$ 、品质因数  $Q$  和电导  $G$ 。本章中,微波谐振腔的研究思路是:理想腔—耦合腔—非理想腔,如图 4-1-2 所示。

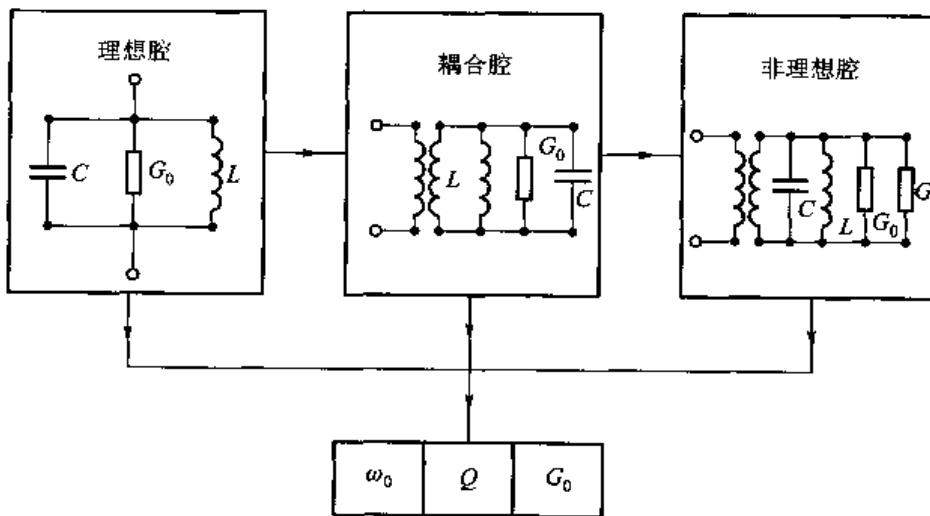


图 4-1-2 微波谐振腔研究的思路框图

在微波工程中所遇到的大多数情况均属于小损耗腔,所以在研究谐振频率  $f_0$  时,采用不计及腔损耗,即腔壁由理想导体构成。但是,当研究品质因数  $Q$  时,则必须考虑损耗的因素。

## 一、三个参数

### 1. 谐振频率 $\omega_0$

微波谐振腔中谐振频率  $\omega_0$  (或  $f_0$ ) 和谐振波长  $\lambda_0$  是最基本的参数,但是要注意  $\omega_0$  是不变量,而  $\lambda_0$  则与媒质  $\epsilon_r \epsilon_0$  有关。

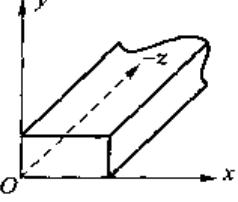
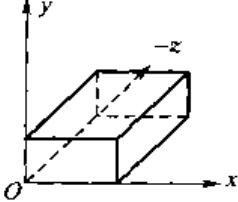
在一个封闭系统中,电能与磁能相等的情况称为谐振。

微波谐振腔的规律同样服从 Maxwell 方程组,可导出 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (4-1-1)$$

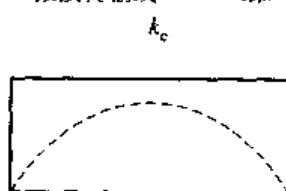
但是在求解时,微波谐振腔与微波传输线不同。在微波传输线中  $z$  是优势方向,即  $e^{-j\beta z}$ 。从概念上讲,  $x$ 、 $y$  方向是驻波,而  $z$  方向假定是行波。微波谐振腔和微波传输线之间的类比如表 4-1-1 所示。

表 4-1-1 微波谐振腔和微波传输线的类比

微波传输线	微波谐振腔
	
$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k_x^2 E_y = 0$ $\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + k_y^2 E_y = 0$ $\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \beta^2 E_y = 0$ $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$ $k^2 = k_c^2 + \beta^2$	$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k_x^2 E_y = 0$ $\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + k_y^2 E_y = 0$ $\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_z^2 E_y = 0$ $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

可见,微波谐振腔在三个方向都是纯驻波,而微波传输线是二维谐振,如图 4-1-3 所示。

微波传输线——二维



微波谐振腔——三维

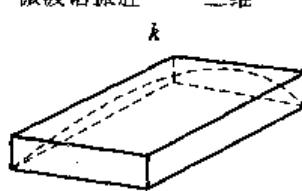


图 4-1-3 二维谐振和三维谐振

从这个意义上讲谐振频率  $\omega_0$  是问题的本征值,而对应的场分布则是本征矢量  $\vec{E}$ 。

对于微波传输线,有

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k_c^2 \vec{E} = 0 \\ \mathcal{L}_c \vec{E} = \lambda_c \vec{E} \end{cases}$$

对于微波谐振腔，有

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \mathcal{L} \vec{E} = \lambda \vec{E} \end{cases} \quad (4-1-2)$$

因此可以进一步深入地用本征值问题加以讨论。

在微波谐振腔内填充空气的条件下

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega_0}{c} \quad (4-1-3)$$

进一步，如果讨论的是传输型微波谐振腔，即

$$\beta l = p\pi \quad (p=1, 2, 3, \dots) \quad (4-1-4)$$

则有

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}} \quad (4-1-5)$$

## 2. 品质因数Q

品质因数又称Q值，它反映微波谐振腔储能与损耗之间的关系。

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_T} = \frac{\omega_0 W}{P_L} \quad (4-1-6)$$

式中，W表示谐振腔的平均储能；W<sub>T</sub>表示一个周期T内微波谐振腔的能量损耗，W<sub>T</sub>=TP<sub>L</sub>，P<sub>L</sub>表示一个周期内平均损耗功率。

式(4-1-6)对于低频和高频均是适用的。

平均储能与谐振时有一个特点，即微波谐振腔内所储存的电能等于所储存的磁能。

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2} \int_V \mu |H|^2 dV \quad (4-1-7)$$

而导体壁损耗功率为

$$P_L = \frac{1}{2} \oint_S |J_s|^2 R_s dS = \frac{1}{2} R_s \oint_S |H_t|^2 dS \quad (4-1-8)$$

式中，R<sub>s</sub>是表面电阻率，R<sub>s</sub>= $\sqrt{\frac{\omega_0 \mu}{2\sigma}}$ ，H<sub>t</sub>为切向磁场。

因此，有限电导率σ所对应的微波谐振腔品质因数Q值为

$$Q = \frac{\omega_0 \mu}{R_s} \frac{\int_V |H|^2 dV}{\oint_S |H_t|^2 dS} = \frac{2}{\delta} \frac{\int_V |H|^2 dV}{\oint_S |H_t|^2 dS} \quad (4-1-9)$$

其中，集肤深度δ= $\sqrt{\frac{\omega_0 \mu \sigma}{2}}$ 。对式(4-1-9)进行估值，令|H|<sup>2</sup>≈ $\frac{1}{2}|H_t|^2$

$$Q \approx \frac{1}{\delta} \frac{V}{S} \quad (4-1-10)$$

可以知道,  $\delta$  小、V/S 大, 是  $Q$  值大的先决条件。理想微波谐振腔的品质因数也称为固有品质因数  $Q_0$  (或无载  $Q$  值)。

$Q$  值无量纲, 只与媒质、腔体几何形状和波型有关。事实上可以有很多损耗源, 例如

$$P_L = \sum_{i=1}^n P_{L,i} \quad (4-1-11)$$

于是也可以定义各种损耗源所对应的  $Q$

$$\frac{1}{Q} = \sum_{i=1}^n \frac{P_{L,i}}{\omega_0 W} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i} \quad (4-1-12)$$

其中,  $Q_i = \omega_0 W / P_{L,i}$  对应第  $i$  个损耗源的  $Q$  值。除了导电壁  $\sigma$  的  $Q$  值以外, 最普遍的是介质  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  对应的  $Q_d$ 。这时储能和损耗功率分别是

$$\begin{cases} W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon' |E|^2 dV \\ P_L = \frac{1}{2} \omega_0 \int_V \epsilon'' |E|^2 dV \end{cases} \quad (4-1-13)$$

于是

$$Q_d = \frac{\omega_0 W}{P_L} = \frac{\epsilon'}{\epsilon''} = \frac{1}{\tan \delta} \quad (4-1-14)$$

可见, 均匀分布的介质  $Q$  值, 即式(4-1-14)是一个普遍适用的公式, 它与波型无关。

### 3. 等效电导 $G_0$

等效电导  $G_0$  用来统一表征谐振系统的损耗, 如图 4-1-4 所示。

导体壁的损耗功率为

$$P_L = \frac{1}{2} G_0 U_m^2 \quad (4-1-15)$$

或者写成  $G_0 = \frac{2P_L}{U_m^2}$ , 若选定

$$U_m = \int_a^b E_m dt \quad (4-1-16)$$

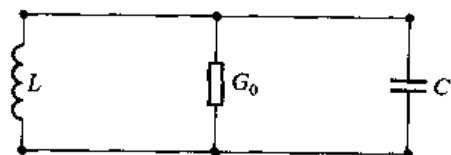


图 4-1-4 谐振腔等效电导  $G_0$

则有

$$G_0 = R_s \frac{\oint |H_z|^2 d\tau}{\left(\int_a^b |E|^2 dt\right)^2} \quad (4-1-17)$$

由于在微波谐振腔中, 电压  $U_m$  定义的不唯一性, 所以现代微波理论中, 对于  $G_0$  这个参量已经比较淡化(只有在 TEM 模, 例如同轴腔才使用), 而强调  $\omega_0$  和  $Q$  这两个参量。

## 二、微波谐振腔的输入、输出耦合

微波谐振腔需要借助输入、输出耦合与外界产生联系, 微波谐振腔的输入和输出是微波传输线与微波谐振腔之间的互相激励。通常, 微波谐振腔外接微波传输线中的波型是已知的, 例如同轴线传输主模 TEM 模, 矩形波导传输主模 TE<sub>10</sub> 模。设计者就是要按照所要激励的微波谐振腔

中谐振模式的电磁场分布波型的要求,选择合适的微波谐振腔输入、输出耦合方式。大体上,这些耦合方式分为三类:①电场耦合,即通过电场使微波谐振腔与外电路相耦合,这一类耦合结构有电容膜片和探针。②磁场耦合,即通过磁场使微波谐振腔与外电路耦合,有时也称为电感耦合,这一类耦合结构有电感膜片和耦合环。③电磁耦合,即通过电场和磁场使微波谐振腔与外电路相耦合,这一类耦合有耦合小孔等。具体如图 4-1-5 所示。



图 4-1-5 微波谐振腔的几种耦合方式

## 4-2

# 矩形谐振腔 Rectangular Resonator

在上一节中讲到,微波谐振就是电、磁储能的平衡。实际工程中,微波谐振腔的工作原理也常常从另外两个角度来理解:①从等效阻抗的角度来看,微波谐振腔等效电路的任一处向该处等效面两侧所“看到”的等效电纳之和为 0。②从波的角度来看,微波谐振腔意味着其中的电磁波沿其传播方向来回全反射形成全驻波。

因此,从原理上说,将一段微波传输线两端短路或开路或端接纯电抗负载均可以构成微波谐振腔。事实上,常用的矩形谐振腔、圆柱形谐振腔、同轴谐振腔等都是基于这一原理而构成的。

矩形谐振腔是由一段两端用导体板封闭起来的矩形波导构成的,如图 4-2-1 所示。矩形谐振腔是几何形状最为简单的一种空腔谐振器。在本节中将会看到,在矩形谐振腔中,与矩形波导相类似,电磁波也是以模式的形式存在的。

一个封闭的矩形空腔中电磁场的求解是一个典型的理想边界下的本征值问题。其支配方程为

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - k^2 \vec{E} = 0 \quad (4-2-1)$$

其中,  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$  就是在封闭金属边界条件下待求的本征值。这种本征值的解应该是一系列的离

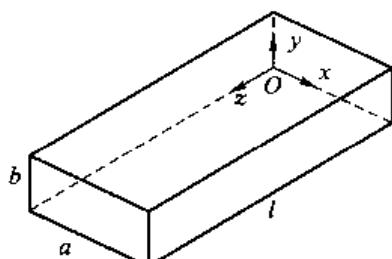


图 4-2-1 矩形谐振腔

散值,在媒质本构参数不变的情况下,这一系列的本征值对应于微波空腔谐振器的一系列谐振频率。

方程(4-2-1)的求解方法有很多种,对于矩形体、圆柱体和同轴体等结构的空腔谐振器可以采用分离变量法等方法求得其解析解,对于形状更为复杂的其他形式的微波谐振腔一般采用数值计算方法。但是,在本节中,视矩形谐振腔中的电磁场是沿矩形波导正、反两个方向传播的行波合成的全驻波场,从矩形波导的电磁场分布出发导出矩形谐振腔的电磁场分布,而不用直接求解方程(4-2-1)的边值问题。

## 一、矩形谐振腔 $TE_{101}$ 模的场和谐振波长 $\lambda_0$

矩形谐振腔  $TE_{101}$  模是最基本、最重要的模式,它是由微波传输线  $TE_{10}$  模在  $z$  方向加两块短路板而构成的金属封闭盒。

已经知道,  $TE_{10}$  模中

$$E_y = E_m \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z} \quad (4-2-2)$$

首先在  $z=0$  处放一块金属板(全反射),则有

$$E_y = E_m \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = -2jE_m \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin \beta z$$

令  $E_0 = -2jE_m$ ,而且在  $z=l$  处放一块金属板(全反射),即  $\sin \beta l = 0$ 。这时有

$$\frac{2\pi l}{\lambda_g} = p\pi \quad (p=1, 2, \dots) \quad (4-2-3)$$

即  $l = \frac{1}{2} p \lambda_g$ ,其中  $\lambda_{min} = \frac{1}{2} \lambda_g$ ,这时对应  $p=1$ 。则

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{\pi}{l}$$

所以,  $TE_{101}$  模  $E_y$  最终写成

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right) \quad (4-2-4)$$

现在采用 Maxwell 方程组解出  $H_x$  和  $H_z$

$$\nabla \times \vec{E} = j\omega_0 \mu H$$

$$\vec{H} = j \frac{1}{\omega_0 \mu} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$H_x = -j \frac{1}{\omega_0 \mu} \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j \frac{E_0}{\omega_0 \mu} \left(\frac{\pi}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right) = -j \frac{E_0 \lambda_0}{\eta 2l} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right)$$

$$H_z = j \frac{1}{\omega_0 \mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} = j \frac{E_0}{\omega_0 \mu} \left(\frac{\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) = j \frac{E_0 \lambda_0}{\eta 2a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)$$

归纳起来,  $TE_{101}$  模的场为

$$\begin{cases} E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l}z\right) \\ H_x = -j \frac{E_0 \lambda_0}{\eta} \frac{1}{2l} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{l}z\right) \\ H_z = j \frac{E_0 \lambda_0}{\eta} \frac{1}{2a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l}z\right) \end{cases} \quad (4-2-5)$$

从概念上来考察矩形波导,  $E_y$  和  $H_z$  在  $z$  方向行波同时出现最大值; 而矩形谐振腔的  $TE_{101}$  模中  $E_y \sim \sin\left(\frac{\pi}{l}z\right)$ ,  $H_x \sim \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ , 电场最大值位置处对应磁场最小值位置。在相位方面,  $TE_{101}$  模的  $E_y$  和  $H_z$  只差一负号, 使  $S_r = \frac{1}{2} E_y H_z^*$ , 有行波传输的实功率; 而  $TE_{101}$  模中相位差  $90^\circ$ , 因此  $S_r$  只有虚功率。 $E_y$  和  $H_z$  也有类似情况。

由于  $k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ , 可知

$$\lambda_0 = \frac{2al}{\sqrt{a^2 + l^2}} \quad (4-2-6)$$

其场结构如图 4-2-2 所示。

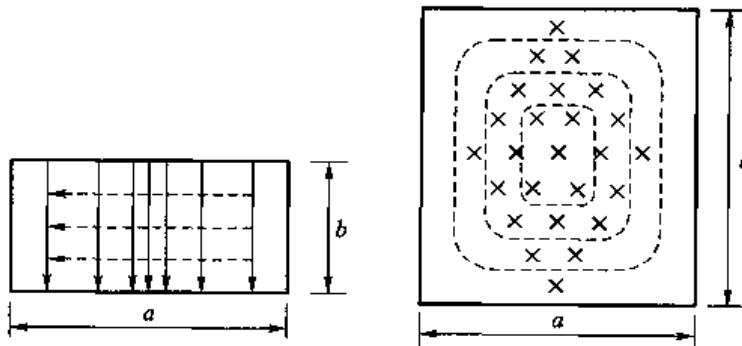


图 4-2-2  $TE_{101}$  模的场结构

注意: 如果是  $TE_{10p}$  模, 只要做代换  $l' = \frac{l}{p} \rightarrow l$  即可, 这时有

$$\lambda_0 = \frac{2al}{\sqrt{(pa)^2 + l^2}} \quad (4-2-7)$$

## 二、 $TE_{101}$ 模的 $Q$ 值

矩形谐振腔  $TE_{101}$  模中的储能为:

$$W = (W_e)_{\max} = \frac{1}{2} \epsilon \int_V |E|^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon \int_0^l \int_0^b \int_0^a E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{l}z\right) dx dy dz = \frac{1}{8} ab l \epsilon E_0^2 \quad (4-2-8)$$

而计算损耗需要考虑 6 个边壁面

$$\begin{aligned}
 P_L &= \frac{1}{2} R_s \left\{ 2 \int_0^b \int_0^a |H_x|_{z=0}^2 dx dy + 2 \int_0^l \int_0^b |H_z|_{x=0}^2 dy dz + 2 \int_0^l \int_0^a (|H_x|^2 + |H_z|^2) dx dz \right\} \\
 \textcircled{1} \quad 2 \int_0^b \int_0^a |H_x|_{z=0}^2 dx dy &= 2 \int_0^b \int_0^a \frac{E_0^2}{\eta^2} \left(\frac{\lambda_0}{2l}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx dy = \frac{\lambda_0^2 E_0^2}{4\eta^2} \frac{ab}{l^2} \\
 \textcircled{2} \quad 2 \int_0^l \int_0^b |H_z|_{x=0}^2 dy dz &= 2 \int_0^l \int_0^b \frac{E_0^2}{\eta^2} \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi z}{l}\right) dy dz = \frac{\lambda_0^2 E_0^2}{4\eta^2} \frac{bl}{a^2} \\
 \textcircled{3} \quad 2 \int_0^l \int_0^a [|H_x|^2 + |H_z|^2] dx dz &= 2 \int_0^l \int_0^a \left(\frac{E_0}{\eta}\right)^2 \left(\frac{\lambda_0}{2l}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{\pi z}{l}\right) dx dz \\
 &\quad + 2 \int_0^l \int_0^a \left(\frac{E_0}{\eta}\right)^2 \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi z}{l}\right) dx dz = \frac{\lambda_0^2 E_0^2}{8\eta^2} \left(\frac{a}{l} + \frac{l}{a}\right)
 \end{aligned}$$

结合上面三种情况可知

$$P_L = \frac{R_s \lambda_0^2}{8\eta^2} E_0^2 \left[ \frac{ab}{l^2} + \frac{bl}{a^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{l} + \frac{l}{a} \right) \right]$$

代入  $Q$  值公式

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= \frac{\omega_0 \frac{\epsilon ab l}{8} E_0^2}{\frac{R_s \lambda_0^2}{8\eta^2} E_0^2 \left[ \frac{ab}{l^2} + \frac{bl}{a^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{l} + \frac{l}{a} \right) \right]} \\
 \omega_0 \epsilon &= \omega_0 \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{k}{\eta} = \frac{2\pi}{\lambda_0 \eta} \\
 Q_0 &= \frac{2\pi \eta abl}{R_s \lambda_0^3 \left[ \frac{ab}{l^2} + \frac{bl}{a^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{l} + \frac{l}{a} \right) \right]} \\
 \lambda_0 &= \frac{2al}{\sqrt{a^2 + l^2}} \\
 Q_0 &= \frac{\pi \eta [a^2 + l^2]^{3/2} b}{4R_s a^2 l^2 \left[ \frac{ab}{l^2} + \frac{bl}{a^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{l} + \frac{l}{a} \right) \right]}
 \end{aligned}$$

最后得到

$$Q_0 = \frac{\pi \eta}{4R_s} \left[ \frac{2b(a^2 + l^2)^{3/2}}{al(a^2 + l^2) + 2b(a^3 + l^3)} \right] \quad (4-2-9)$$

[例] 铜制矩形谐振腔尺寸  $a = l = 2$  cm,  $b = 1$  cm, 设其中工作模式为  $\text{TE}_{101}$  模, 空气填充, 求  $Q_0$  值。

[解] 首先可以求出工作频率  $f_0 = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{l}\right)^2} = 10.62$  GHz, 则有

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega_0 \mu}{2\sigma}} = 2.69 \times 10^{-2} \Omega$$

$$Q_0 = 7780$$

## 作业 PROBLEMS 4 - 2

如图 4-2-3 所示的  $a \times b \times l$  矩形谐振腔内为  $\text{TE}_{101}$  模式。已知  $H_x = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\omega t}$  是传输  $\text{TE}_{101}$  模

的  $H_z$  分量。试求出  $\text{TE}_{01}$  模全部场表示式。

(2) 已知如图 4-2-4 所示的矩形谐振腔  $a=2.2 \text{ cm}$ ,  $b=1.0 \text{ cm}$ ,  $l=9.2 \text{ cm}$ , 内部工作在  $\text{TE}_{01}$  模式(空气填充)。

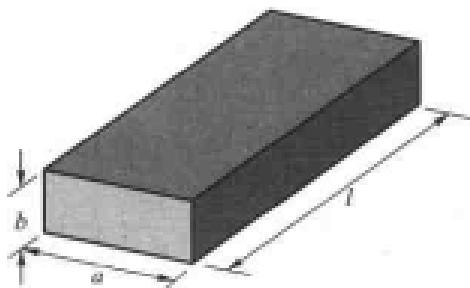


图 4-2-3 矩形谐振腔

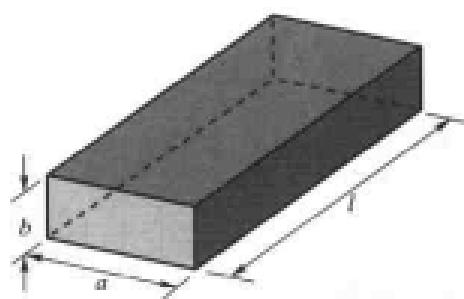


图 4-2-4 矩形谐振腔

- (1) 求工作波长  $\lambda_0$ 。
- (2) 写出腔内电场和磁场的表示式。
- (3) 画出腔内电、磁力线图。

### 4-3

## 圆柱谐振腔 Cylindrical Resonator

### 一、圆柱谐振腔中的场和諧振波长 $\lambda_0$

和矩形谐振腔的情况类似,以圆波导  $\text{TE}_{mn}$  模为例,先研究  $z$  方向行波场——也即微波传输线情况。

$$H_z = A_{mn} J_m(k_r r) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-\beta z} \quad (4-3-1)$$

在  $z=0$  处放一金属板,由  $H_z=0$  的全反射条件,可得

$$\begin{aligned} H_z &= A_{mn} J_m(k_r r) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} (e^{-\beta z} - e^{\beta z}) \\ &= H_{mn} J_{mn}(k_r r) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} \sin \beta z \end{aligned}$$

其中,  $k_r = \mu_{mn}/R$ ,  $\mu_{mn}$  是第一类  $m$  阶 Bessel 函数导数的第  $n$  个根。再在  $z=l$  处放一金属板,又一次构成  $H_z=0$  的全反射条件,如图 4-3-1 所示。

由  $\sin \beta l = 0$  可得到  $\beta = p\pi/l$ , 且

$$H_z = H_{mn\rho} J_m(k_c r) \left( \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right) \sin \left( \frac{p\pi}{l} z \right) \quad (4-3-2)$$

再次看到尽管圆柱谐振腔和矩形谐振腔横向截面完全不同,但是纵向  $\sin \left( \frac{p\pi}{l} z \right)$  因子是一样的,这正是传输线型谐振腔的共同特点。

在波导中,横向分量用纵向分量表示得到不变量矩阵

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_\varphi \\ H_r \\ H_\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\epsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\epsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (4-3-3)$$

于是有

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2 r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \\ E_\varphi = \frac{j\omega\mu}{k_c^2 r} \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ H_r = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ H_\varphi = -\frac{\gamma}{k_c^2 r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \end{array} \right. \quad (4-3-4)$$

注意到圆柱谐振腔与圆波导的不同,重新作变换  $-\gamma \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}$ , 即

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2 r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \\ E_\varphi = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ H_r = \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial z} \\ H_\varphi = \frac{1}{k_c^2 r} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi \partial z} \end{array} \right. \quad (4-3-5)$$

可以得到  $TE_{mn\rho}$  模的场表达式,为

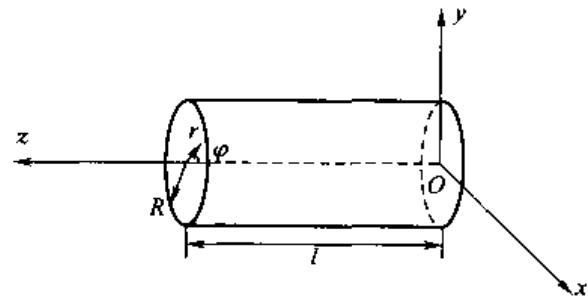


图 4-3-1 圆柱谐振腔

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \pm \frac{j\omega\mu m}{k_c r} H_{mnP} J_m(k_c r) \left( \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \right) \sin \left( \frac{p\pi}{l} z \right) \\ E_\varphi = \frac{j\omega\mu}{k_c} H_{mnP} J'_m(k_c r) \left( \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right) \sin \left( \frac{p\pi}{l} z \right) \\ E_z = 0 \\ H_r = \frac{p\pi}{k_c l} H_{mnP} J'_m(k_c r) \left( \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right) \cos \left( \frac{p\pi}{l} z \right) \\ H_\varphi = \mp \frac{m p \pi}{k_c^2 r l} H_{mnP} J_m(k_c r) \left( \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \right) \cos \left( \frac{p\pi}{l} z \right) \\ H_z = H_{mnP} J_m(k_c r) \left( \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right) \sin \left( \frac{p\pi}{l} z \right) \end{array} \right. \quad (4-3-6)$$

谐振波长  $\lambda_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{2\pi R}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}} \quad \text{TE}_{mnP} \text{ 模} \\ \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{2\pi R}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}} \quad \text{TM}_{mnP} \text{ 模} \end{array} \right. \quad (4-3-7)$$

其中, 最主要的

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda_0)_{TE_{011}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3.412 R}\right)^2 + \left(\frac{1}{2l}\right)^2}} \\ (\lambda_0)_{TM_{010}} = 2.62 R \end{array} \right. \quad (4-3-8)$$

比较可知  $l < 2.1 R$  时,  $(\lambda_0)_{TM_{010}}$  是最低模式。

## 二、圆柱谐振腔的波形因数

定义  $p = Q_0 \frac{\delta}{\lambda_0}$  为波形因数。则有

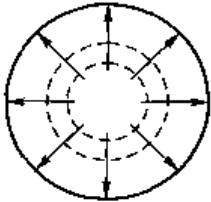
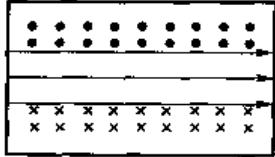
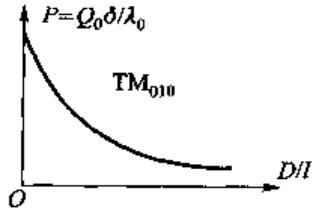
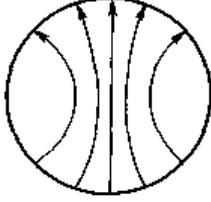
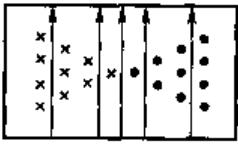
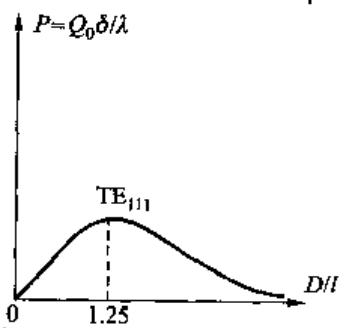
$$\left\{ \begin{array}{l} \left( Q_0 \frac{\delta}{\lambda_0} \right)_{TE_{mnP}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left[ 1 - \left( \frac{m}{\mu_{mn}} \right)^2 \right] \left[ \mu_{mn}^2 + \left( \frac{p\pi}{2} \right)^2 \left( \frac{D}{l} \right)^2 \right]^{3/2}}{\mu_{mn} + \left( \frac{p\pi}{2} \right)^2 \left( \frac{D}{l} \right)^3 + \left( \frac{p\pi}{2} \right) \left( \frac{D}{l} \right)^2 \left( \frac{m}{\mu_{mn}} \right)^2 \left( 1 - \frac{D}{l} \right)} \end{array} \right. \quad (4-3-9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( Q_0 \frac{\delta}{\lambda_0} \right)_{TM_{mnP}} = \frac{\left[ \nu_{mn}^2 + \left( \frac{p\pi}{2} \right)^2 \left( \frac{D}{l} \right)^2 \right]^{1/2}}{2\pi \left( 1 + \frac{D}{l} \right)} \end{array} \right. \quad (4-3-10)$$

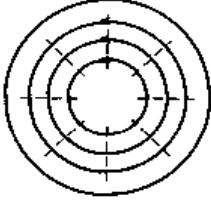
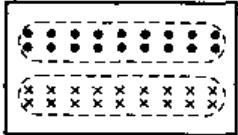
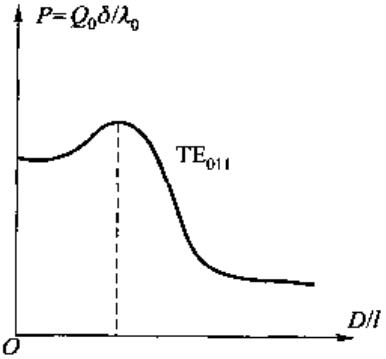
分别表示  $TE_{mnP}$  和  $TM_{mnP}$  的波形因数。

在此基础上, 表 4-3-1 给出了圆柱谐振腔的三种主要工作模式的场结构图和波形因数。

表 4-3-1 圆柱谐振腔三种主要工作模式

<b>TM<sub>010</sub></b>  无法简单调谐 	$\begin{cases} H_\varphi = j \frac{E_{010}}{\eta} J_1(k_c r) \\ E_z = E_{010} J_0(k_c r) \end{cases}$ $k_c = \frac{\nu_0}{R} = \frac{2.405}{R}$ $\lambda_0 = 2.62R$ $Q_0 = \frac{1}{\delta} \frac{R}{1 + \left(\frac{R}{l}\right)}$ 
<b>TE<sub>111</sub></b>  	$\begin{cases} E_r = \pm \frac{j\omega\mu}{k_c^2 r} H_{111} J_1(k_c r) \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \sin \left( \frac{\pi}{l} z \right) \\ E_\varphi = \frac{j\omega\mu}{k_c} H_{111} J'_1(k_c r) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \sin \left( \frac{\pi}{l} z \right) \\ E_z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} H_r = \frac{\pi}{k_c l} H_{111} J'_1(k_c r) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cos \left( \frac{\pi}{l} z \right) \\ H_\varphi = \pm \frac{\pi}{k_c^2 r l} H_{111} J_1(k_c r) \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \cos \left( \frac{\pi}{l} z \right) \\ H_z = H_{111} J_1(k_c r) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \sin \left( \frac{\pi}{l} z \right) \end{cases}$ $k_c = \frac{\mu_0}{R} = \frac{1.841}{R}$ $\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3.412R}\right)^2 + \left(\frac{1}{2l}\right)^2}}$ $Q_0 \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{1}{\mu_{mn}}\right)^2\right] \left[\mu_{mn}^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{D}{l}\right)^2\right]^{3/2}}{\mu_{mn} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{D}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{D}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{\mu_{mn}}\right)^2 \left(1 - \frac{D}{l}\right)}$ 

续表

 <b>TE<sub>011</sub></b> 无纵向电流、品质因数 Q 高、体积大	$\begin{cases} E_\varphi = \frac{j\omega\mu}{k_c} H_{011} J'_0(k_c r) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \\ H_r = \frac{\pi}{k_c r} H_{011} J'_0(k_c r) \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right) \\ H_z = H_{011} J_0(k_c r) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \end{cases}$ $k_c = \frac{\mu_{01}}{R} = \frac{3.832}{R}$ $\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{1.64R}\right)^2 + \left(\frac{1}{2l}\right)^2}}$ $Q_0 \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{0.610 \left[ 1 + 0.168 \left( \frac{D}{l} \right)^2 \right]^{3/2}}{1 + 0.168 \left( \frac{D}{l} \right)^3}$ 	$P = Q_0 \delta / \lambda_0$ 
--	--	--

### 三、工作模式图

画出工作模式图的目的在于选择单模工作的频率范围。

已知谐振波长

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\xi_{mn}}{2\pi R}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}} \quad (4-3-11)$$

其中

$$\xi_{mn} = \begin{cases} \mu_{mn} & \text{TE 模} \\ \nu_{mn} & \text{TM 模} \end{cases} \quad (4-3-12)$$

利用  $\lambda_0 = c/f_0$  和  $D = 2R$ , 可知

$$\frac{f_0^2}{c^2} = \left(\frac{\xi_{mn}}{\pi D}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2$$

适当变换, 即得工作模式方程

$$(f_0 D)^2 = \left(\frac{\xi_{mn} c}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{c p}{2}\right)^2 \left(\frac{D}{l}\right)^2 \quad (4-3-13)$$

工作模式图如图 4-3-2 所示。

明显看出:  $(\frac{D}{l})^2$  与  $(f_0 D)^2$  成线性关系。定义频宽比为

$$F = \frac{f_{\max}}{f_{\min}} \quad (4-3-14)$$

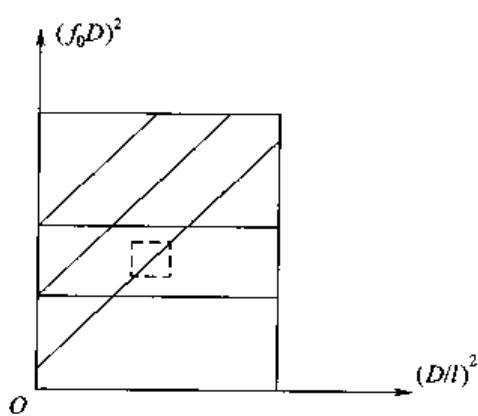


图 4-3-2 工作模式图

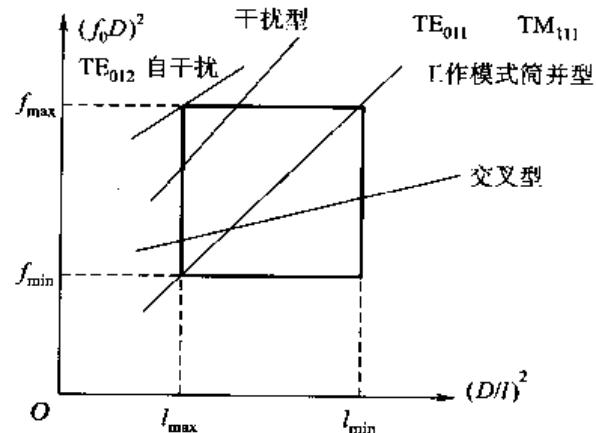


图 4-3-3 干扰模式

则如图 4-3-3 所示有以下干扰模式:

自干扰型——横向场与工作模式相同, 必须划出方框外。

干扰型——不相交, 同一频率、不同尺寸时谐振。

交叉型——在不相交时和干扰型的作用相同, 在相交时干扰很严重。

简并型——TE₀₁₁ 和 TM₁₁₁, Q 值迅速降。

进一步可以研究  $F = f_{\max}/f_{\min}$  与  $(\frac{D}{l})_{\min}$  的关系, 结果如

图 4-3-4 所示。

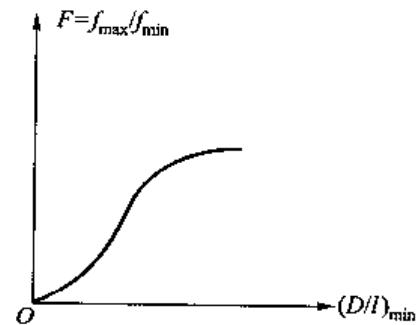


图 4-3-4 频宽关系图

#### 四、矩形谐振腔和圆柱谐振腔比较

比较如图 4-3-5 所示的矩形谐振腔和圆柱谐振腔中的 TE<sub>mnp</sub> 模, 其纵向磁场依次为:



图 4-3-5 矩形谐振腔和圆柱谐振腔

$$H_z = H_{mnp} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right)$$

$$H_z = H_{mnp} J_m(k_c r) \left( \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right)$$

它们的  $z$  方向函数相同, 传输线型微波谐振腔均满足广义传输线理论

$$f(z) = \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right)$$

微波谐振腔内的场均满足 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0$$

但是, 其中的波数并不相同, 依次为

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad k^2 = k_c^2 + k_z^2$$

相应的, 谐振波长  $\lambda_0$  依次为

$$\lambda_0 = \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2} \quad \lambda_0 = \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{2\pi R}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}$$

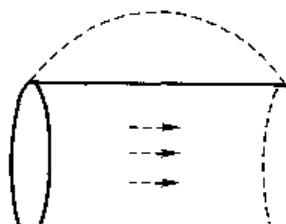
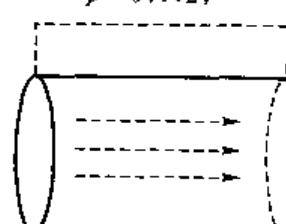
品质因数  $Q_0$  的表示式均为

$$Q_0 = \frac{\omega W}{P_L} = \frac{2}{\delta} \frac{\int_V |H|^2 dV}{\oint_S |H_r|^2 dS}$$

## 五、圆柱谐振腔中 $TE_{mnp}$ 和 $TM_{mnp}$ 推导比较

圆柱谐振腔中的  $TE_{mnp}$  模和  $TM_{mnp}$  模推导过程可以扼要的比较如表 4-3-2 所示。

表 4-3-2 圆柱谐振腔中  $TE_{mnp}$  模和  $TM_{mnp}$  模推导比较

矢量场	$TE_{mnp}$ 模	$TM_{mnp}$ 模
$H_z$	$\begin{pmatrix} H_z \\ E_r \\ E_\varphi \end{pmatrix} = A_{mn} J_m(k_c r) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \\ 0 \end{pmatrix}$	$E_z$ $k_r = \frac{\mu_{mn}}{R}$
$k_r = \frac{\mu_{mn}}{R}$ $\mu_{mn}$ —— 第一类 $m$ 阶 Bessel 函数导数根 $E_r, E_\varphi \rightarrow f(H_z)$ $H_r, H_\varphi$ $p=1, 2, \dots$  $H_z$ 不允许沿 $z$ 方向不变	$k_r = \frac{\nu_{mn}}{R}$ $\nu_{mn}$ —— 第一类 $m$ 阶 Bessel 函数根 $E_r, E_\varphi \rightarrow g(E_z)$ $H_r, H_\varphi$ $p=0, 1, 2, \dots$  $E_z$ 允许沿 $z$ 方向不变	

## 附录 APPENDIX

### $Q_0$ 值概念

前面已经讨论过,从概念上说  $Q_0 \approx \frac{1}{\delta} \frac{V}{S}$ , 在这方面圆柱谐振腔有较大优点。现比较立方体和  $h=2r$  的圆柱体,如图 4-3-6 所示。

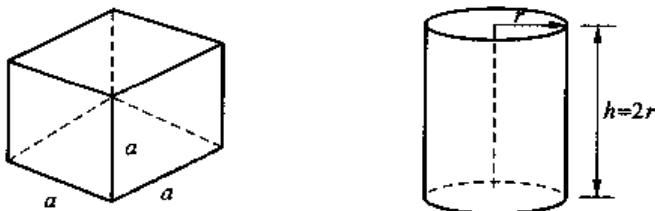


图 4-3-6 立方体和圆柱体

令

$$S_1 = 6a^2, \quad S_2 = 6\pi r^2$$

当  $a=\sqrt{\pi}r$  时, 可达到  $S_1=S_2$

比较体积

$$V_1 = a^3 = \pi^{3/2} r^3 = 5.568r^3$$

$$V_2 = 2\pi r^3 = 6.28r^3$$

即知

$$\frac{V_2}{S_2} > \frac{V_1}{S_1}$$

因此

$$Q_{02} > Q_{01}$$



## 传输线腔 Transmission Line Cavity

### 一、传输线腔的一般理论

传输线腔是理想微波谐振腔的一种,也是最重要、应用最广的一种微波谐振腔。一般理想微

波谐振腔存在三个方向：例如  $x, y, z$  方向，每个方向都是平等的，但是，传输线腔可以看成是由微波传输线在传输方向上截一段再用短路板封闭而构成，于是，其  $z$  方向和其他方向有着质的不同。而且，因为在  $z$  方向只存在反射波和入射波，使一切传输线腔在  $z$  方向的变化有着共性，即

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \\ \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \end{cases}$$

另一方面，微波传输线是一种广义的路，也即对于传输线腔可以采用“广义路理论”的方法给予分析。图 4-4-1 所示的流程框图给出了一般理想微波谐振腔和传输线腔的比较。

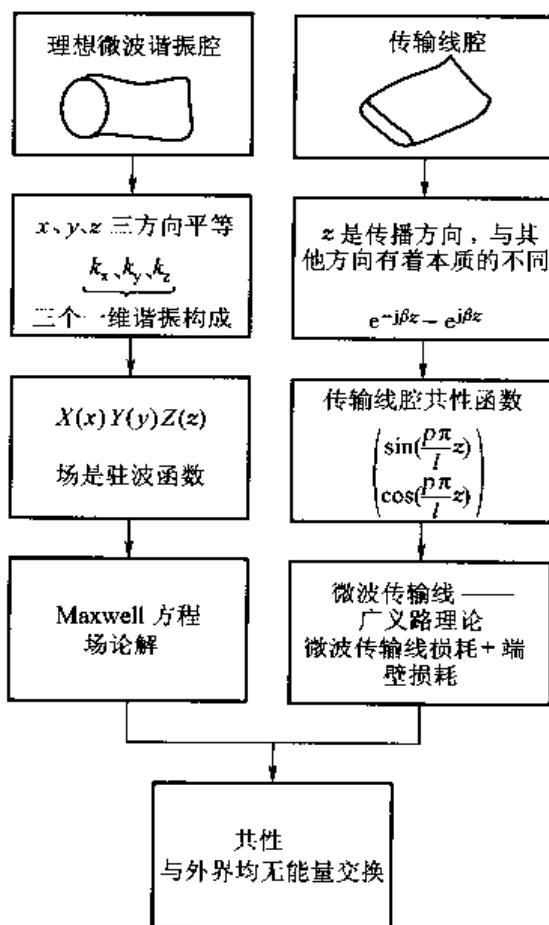


图 4-4-1 理想微波谐振腔和传输线腔的比较

矩形谐振腔和圆柱谐振腔都属于这一类传输线腔，可以把传输线腔作为一类模型总结出来，如图 4-4-2 所示。其中， $Z_m/Z_0 = R_m/Z_0 + jX_m/Z_0$ ，表示两端的端壁损耗。

$\gamma = \alpha + j\beta$  是有耗微波传输线的复传播常数。

不同的传输线腔仅仅是截面和波型不同，可采用复频率法和推广 Cullen(柯伦)网络法进行分析。

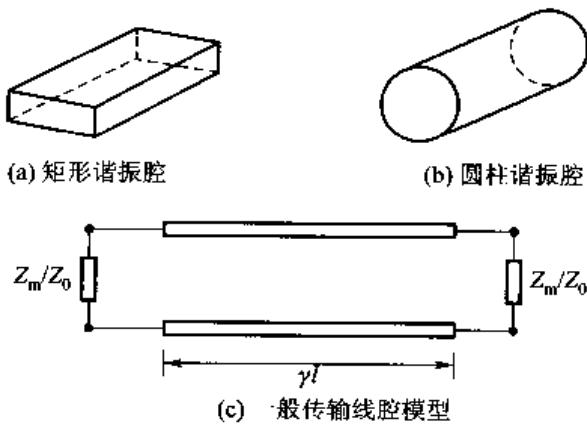


图 4-4-2 传输线腔

## 二、复频率法

在微波谐振腔理论的研究中引入复频率  $\tilde{\omega}$  是一个十分新颖的想法，尽管它的提出比较早，但是真正深入应用并不多见，对于最一般的有耗谐振系统，设

$$\tilde{\omega} = \omega' (1 + j\tau) = \omega' + j\omega'' \quad (4-4-1)$$

其中， $\tilde{\omega}$  的实部  $\omega'$  与电磁振荡有关，而虚部  $\omega''$  则与损耗有关。

于是又写出场的表达式

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{j\bar{\omega}t} = \vec{E}_m e^{j\omega't} e^{-\omega''t} \quad (4-4-2)$$

根据能量是场的平方,又可以写出

$$w = W_m e^{-2\omega''t}$$

而损耗功率则为

$$P_L = -\frac{dw}{dt} = 2\omega''w$$

最后得到

$$\tau = \frac{P_L}{2\omega'w} = \frac{1}{2Q}$$

于是复频率  $\bar{\omega}$  的表达式是

$$\bar{\omega} = \omega' \left( 1 + j \frac{1}{2Q} \right) \quad (4-4-3)$$

换句话说,复频率的虚部与谐振系统的品质因数  $Q$  相关,现在进一步把复频率  $\bar{\omega}$  的概念推广到复  $\bar{\theta}$ ,即设

$$\bar{\theta} = \theta' + j\theta'' \quad (4-4-4)$$

鉴于这里所研究的场为小损耗系统,也就是  $\omega''$  和  $\theta''$  场很小,又属复解析函数,于是又可看出

$$\begin{cases} \Delta\omega = \omega'' \\ \Delta\theta = \theta'' \end{cases} \quad (4-4-5)$$

再写成

$$\frac{\theta''}{\theta'} = \frac{\Delta\theta}{\theta}, \quad \theta = \frac{2\pi}{\lambda_g} l \quad (4-4-6)$$

计及

$$\begin{cases} \frac{\Delta\theta}{\Delta\beta} = l \\ \frac{\Delta\beta}{\Delta\lambda_g} = -\frac{2\pi}{\lambda_g^2} \\ \frac{\Delta\lambda_g}{\Delta\lambda_0} = \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)^3 \\ \left(\frac{\Delta\lambda_0}{\Delta\omega}\right) = -\frac{\lambda_0}{\omega} \end{cases} \quad (4-4-7)$$

于是有

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \left( \frac{\lambda_g}{\lambda_0^2} \right) l$$

也即

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} = \frac{\Delta\omega}{\omega} \left( \frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right)^2$$

或者写出

$$\frac{\theta''}{\theta} = \frac{\omega''}{\omega'} \left( \frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right)^2$$

可以给出

$$\bar{\theta} = \theta' \left[ 1 + j \frac{1}{2Q} \left( \frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right)^2 \right] \quad (4-4-8)$$

在第五章中将会看到

$$\theta'' = \alpha l + \left( \frac{2R_m}{z_0} \right) \quad (4-4-9)$$

表示有耗  $\alpha l$  段和两端端壁损耗。

于是有

$$\theta = - \frac{\pi l}{\left( \alpha l + \frac{2R_m}{z_0} \right)} \left( \frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right)^2 \quad (4-4-10)$$

在计及两端端壁电抗对于谐振频率影响，可得

$$\omega = \omega_0 - \frac{2X_m}{z_0} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \right) \left( \frac{c}{l} \right) \quad (4-4-11)$$

上式适用于一切传输线谐振腔。

### 三、推广 Cullen 网络法

如果谐振电路可以画成如图 4-4-3 所示形式，则有

$$Z_{in} = r + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}$$

$$Z_{total} = Z_{in} + Z_m = R + jX$$

那么谐振条件又可写成  $X=0$ ，结合如图 4-4-4 所示的 Cullen 模型，可得

$$Z_{in} = Z_0 \left( \frac{Z_m + Z_0 \operatorname{th}(\gamma l)}{Z_0 + Z_m \operatorname{th}(\gamma l)} \right) \quad (4-4-12)$$

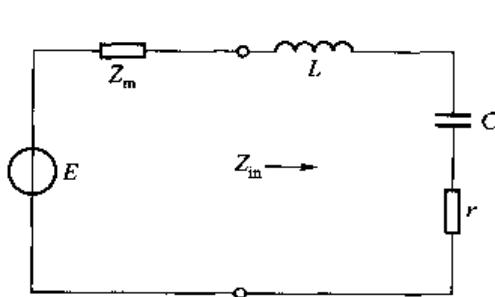


图 4-4-3 谐振电路

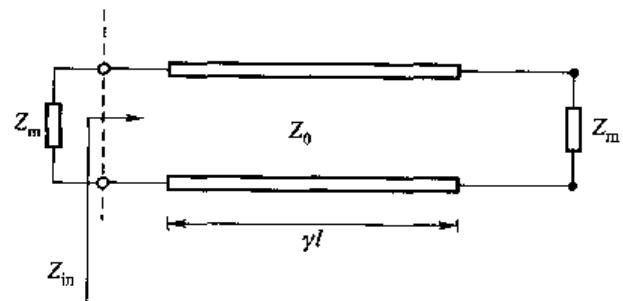


图 4-4-4 Cullen 模型

其中  $\gamma = \alpha + j\beta$  也即

$$\operatorname{th}(\gamma l) = \operatorname{th}(\alpha l + j\beta l) = \frac{\operatorname{th}(\alpha l) + j\operatorname{th}(\beta l)}{1 + j\operatorname{th}(\alpha l)\tan(\beta l)} \approx \alpha l + j\tan(\beta l)$$

注意到  $Z_m = R_m + jX_m$  也是小量

$$Z_{in} \approx Z_0 \frac{(R_m + Z_0 \alpha l) + j(X_m + Z_0 \tan(\beta l))}{(Z_0 - X_m \tan(\beta l)) + jR_m \tan(\beta l)}$$

再计及谐振时， $\tan(\beta l)$  也是小量，上式可化简为

$$\frac{Z_m}{Z_0} \approx \left( \frac{R_m}{Z_0} + \alpha l \right) + j \left[ \tan(\beta l) + \frac{X_m}{Z_0} \right] \quad (4-4-13)$$

那么, 总系统阻抗

$$\frac{Z_{\text{total}}}{Z_0} = \frac{Z_m + Z_{\text{in}}}{Z_0} \approx \left( \alpha l + \frac{2R_m}{Z_0} \right) + j \left( \tan(\beta l) + \frac{2X_m}{Z_0} \right) \quad (4-4-14)$$

谐振条件

$$\tan(\beta l) = -\frac{2X_m}{Z_0}$$

或者写成

$$\beta l = p\pi - \arctan\left(\frac{2X_m}{Z_0}\right) \quad (4-4-15)$$

式(4-4-15)与复频率法导出的式(4-4-11)等价(见附录)。

#### 四、Q值的一般公式

如图4-4-5所示, 如果输入阻抗 $Z_{\text{in}}$ 和输入导纳 $Y_{\text{in}}$ 可表示为

$$\begin{cases} Z_{\text{in}} = R + jX \\ Y_{\text{in}} = G + jB \end{cases} \quad (4-4-16)$$

则 $Q$ 值有下述公式

$$\begin{cases} Q = \frac{\omega_0}{2R} \frac{\partial X}{\partial \omega} \\ Q = \frac{\omega_0}{2G} \frac{\partial B}{\partial \omega} \end{cases} \quad (4-4-17)$$



图4-4-5 微波谐振腔的输入阻抗

##### 1. 低频情况

$$Z_{\text{in}} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX$$

$$\left. \frac{\partial X}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = L + \frac{1}{\omega_0^2 C} = 2L \quad (\text{注意: } \omega_0^2 = \frac{1}{LC})$$

于是

$$\frac{\omega_0}{2R} \frac{\partial X}{\partial \omega} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

其物理意义如图4-4-6所示。

也就是说, 引入电抗斜率扩展了集总参数概念, 以至可使用到分布参数, 如图4-4-7所示。

##### 2. Foster(福斯特)定理

Foster定理又称电抗定理——它专门适用无耗网络, 对于高Q微波谐振腔的问题亦可以用它来处理, 如图4-4-8所示, 其出发点还是Maxwell方程组

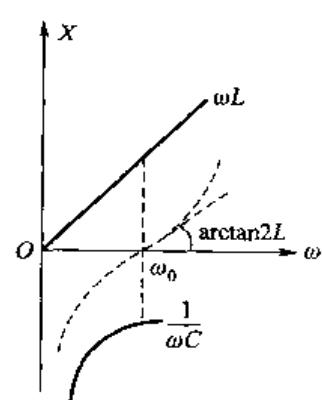


图4-4-6 低频电路电抗斜率

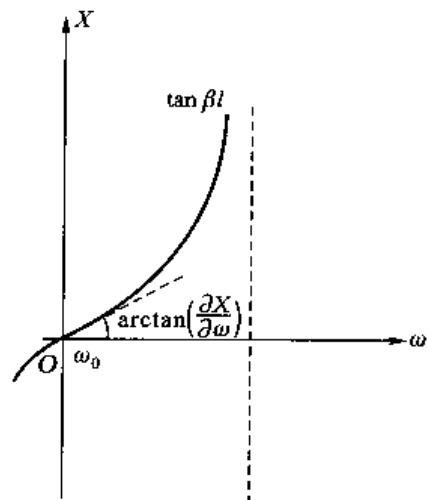


图 4-4-7 微波传输线电抗斜率

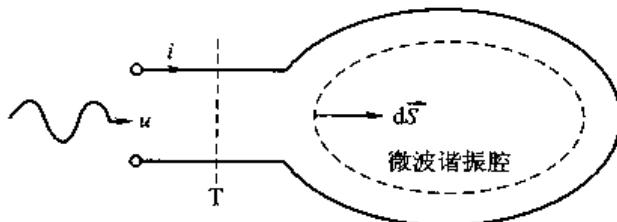


图 4-4-8 Foster 定理的说明用图

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \vec{E}^* = j\omega\mu \vec{H}^* \\ \nabla \times \vec{H}^* = -j\omega\epsilon \vec{E}^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} = j\omega\mu \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + j\vec{H}^* \cdot \frac{\partial \omega\mu}{\partial \omega} \\ \nabla \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} = -j\omega\epsilon \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} - j\vec{E}^* \cdot \frac{\partial \omega\epsilon}{\partial \omega} \end{cases}$$

考虑到下列矢量恒等式

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \times \vec{H} \right) &= \nabla \times \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \\ -\vec{E} \cdot \nabla \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + \nabla \times \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \vec{H} - \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \vec{H} \end{aligned}$$

分项列出如下：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} = -j\omega\mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} \\ -\vec{E} \cdot \nabla \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} = j\omega\epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} + j\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* \\ \nabla \times \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \vec{H} = j\omega\mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + j\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* \\ -\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \cdot \nabla \times \vec{H} = -j\omega\epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \end{cases}$$

于是得到

$$\nabla \cdot \left( \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \times \vec{H} \right) = j(\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^*)$$

对整个传输线腔终端做闭合面积分

$$\oint_S \left( \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \times \vec{H} \right) \cdot d\vec{S} = -4j(W_m + W_e)$$

这里出现负号的原因是积分的面积指向体积内。

因为其他都是导体面，只有端口 T-T 例外

$$\int_T \left( \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \times \vec{H} \right) \cdot \hat{n} dS = u \frac{\partial i^*}{\partial \omega} + \frac{\partial u^*}{\partial \omega} i$$

式中  $u$  和  $i$  为端面的等效电压和等效电流，对于高 Q 微波谐振腔做无耗近似  $u = jX i$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \omega} = -jX \frac{\partial i^*}{\partial \omega} - ji^* \frac{\partial X}{\partial \omega}$$

于是有

$$u \frac{\partial i^*}{\partial \omega} + \frac{\partial u^*}{\partial \omega} i = jXi \frac{\partial i^*}{\partial \omega} - jXi \frac{\partial i^*}{\partial \omega} - jii^* \frac{\partial X}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \omega} = \frac{4(W_m + W_e)}{ii^*}$$

$$\frac{\omega_0}{2R} \frac{\partial X}{\partial \omega} = \frac{\omega_0 (W_m + W_e)}{\frac{1}{2} ii^* R} = \frac{\omega_0 W}{P_L} = Q$$

对偶地有

$$i = jBu, \quad \frac{\partial B}{\partial \omega} = \frac{4(W_m + W_e)}{uu^*}$$

于是又有

$$Q = \frac{\omega_0}{2G} \frac{\partial B}{\partial \omega}$$

## 五、传输线腔的 Q 值公式

传输线腔 Q 值的研究模型如图 4-4-9 所示，设  $Z_{total} = R + jX = Z_{in} + Z_m$   
采用归一化的系统

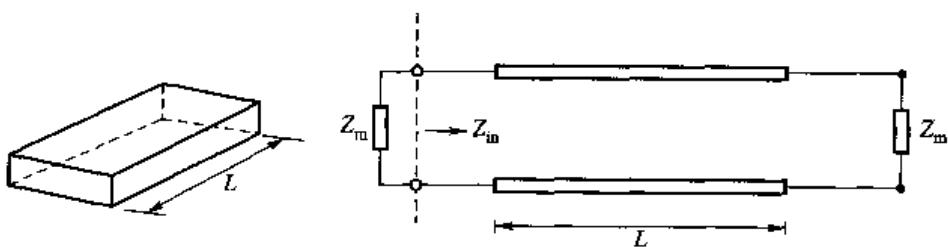


图 4-4-9 传输线腔 Q 值的研究模型

$$\begin{cases} \bar{R} = \frac{2R_m}{Z_0} + \alpha l \\ \bar{X} = \frac{2X_m}{Z_0} + \tan(\beta l) \end{cases} \quad (4-4-18)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \omega} = \left( \frac{\partial X}{\partial (\beta l)} \right) \left( \frac{\partial (\beta l)}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial \beta}{\partial \lambda_g} \right) \left( \frac{\partial \lambda_g}{\partial \lambda} \right) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} \right)$$

按照表 4-4-1 所示的步骤, 可以得到传输线腔的 Q 值公式

表 4-4-1 求 Q 值的步骤

$\frac{\partial X}{\partial (\beta l)}$	$\sec^2(\beta l)$
$\frac{\partial (\beta l)}{\partial \beta}$	$l$
$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda_g}$	$\frac{\partial}{\partial \lambda_g} \left( \frac{2\pi}{\lambda_g} \right) = -\frac{2\pi}{\lambda_g^2}$
$\frac{\partial \lambda_g}{\partial \lambda}$	$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}} \quad \frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}$ $-\frac{2}{\lambda_g^3} d\lambda_g = -\frac{2}{\lambda^3} d\lambda$ $\frac{\partial \lambda_g}{\partial \lambda} = \frac{\lambda_g^3}{\lambda^3}$
$\frac{\partial \lambda}{\partial \omega}$	$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}$ $d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega$ $\frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{2\pi c}{\omega^2} = -\frac{\lambda}{\omega_0}$
$\frac{\partial X}{\partial \omega}$	$\frac{l}{\omega_0} \sec^2(\beta l) \frac{2\pi \lambda_g}{\lambda^2}$

$$Q = \frac{\pi l}{\left( \alpha l + \frac{2R_m}{Z_0} \right) \lambda_g} \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^2 \quad (4-4-19)$$

上式与式(4-4-10)完全等价, 可见复频率法和推广 Cullen 网络法是完全一致的。

## 附录 I APPENDIX I

$$\beta = \frac{p\pi}{l} - \frac{1}{l} \arctan \left( \frac{2X_m}{Z_0} \right) \text{ 与 } \omega = \omega_0 - \frac{2X_m}{Z_0} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \right) \left( \frac{c}{l} \right) \text{ 之等价性}$$

考虑到  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ ,  $\frac{p\pi}{l} = \frac{2\pi}{\lambda_{g_0}}$ , 于是写出

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda_g} &= \frac{2\pi}{\lambda_{g_0}} - \frac{1}{l} \left( \frac{2X_m}{Z_0} \right) \\ \left( \frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 &= \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - \left( \frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2 = \left[ \frac{2\pi}{\lambda_{g_0}} - \frac{1}{l} \left( \frac{2X_m}{Z_0} \right) \right]^2 \\ \left( \frac{2\pi}{\lambda_{g_0}} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2 &= \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \end{aligned}$$

所以

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - 2\left(\frac{2\pi}{\lambda_{g_0}}\right)\left(\frac{1}{l}\right)\left(\frac{2X_m}{Z_0}\right)$$

也就是

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) &= \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right) \sqrt{1 - 2\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{g_0}}\frac{1}{l}\left(\frac{2X_m}{Z_0}\right)} \\ &\approx \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right) - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{g_0}}\right) \frac{1}{l}\left(\frac{2X_m}{Z_0}\right) \\ \frac{\omega}{c} &= \frac{\omega_0}{c} - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{g_0}}\right) \frac{1}{l}\left(\frac{2X_m}{Z_0}\right) \end{aligned}$$

最后得到

$$\omega = \omega_0 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{g_0}}\right) \left(\frac{c}{l}\right) \left(\frac{2X_m}{Z_0}\right) \approx \omega_0 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right) \left(\frac{c}{l}\right) \frac{2X_m}{Z_0}$$

## 附录 II APPENDIX II

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{2X_m}{Z_0} \right)$$

关于  $Q = \frac{\omega_0}{2R} \frac{\partial X}{\partial \omega}$  中, 严格说来

$$X = \tan(\beta l) + \frac{2X_m}{Z_0}$$

因此, 还必须考虑

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{2X_m}{Z_0} \right) = \left( \frac{2X_m}{Z_0} \right) \left( \frac{1}{X_m} \frac{\partial X_m}{\partial \omega} - \frac{1}{Z_0} \frac{\partial Z_0}{\partial \omega} \right)$$

计及

$$\begin{cases} X_m = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \\ Z_0 = A\eta \frac{\lambda_g}{\lambda} \quad (\text{TE 模}) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{2X_m}{Z_0} \right) = \left( \frac{2X_m}{Z_0} \right) \left( \frac{1}{X_m} \frac{\partial X_m}{\partial \omega} - \frac{1}{Z_0} \frac{\partial Z_0}{\partial \omega} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{X_m} \frac{\partial X_m}{\partial \omega} = \frac{1}{2\omega_0} \\ \frac{1}{Z_0} \frac{\partial Z_0}{\partial \omega} = -\left(\frac{\lambda_g}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{\omega_0} \\ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} = -\frac{1}{\omega_0} \end{cases}$$

于是得

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{2X_m}{Z_0} \right) = \left( \frac{2X_m}{Z_0} \right) \left\{ \frac{1}{\omega_0} \left[ \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \right\} \rightarrow 0$$

可以忽略。值得指出: 即使是 TM 模也可类似得到

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{2X_{\omega}}{Z_0} \right) = \left( \frac{2X_m}{Z_0} \right) \left\{ \frac{1}{\omega_0} \left[ \left( \frac{\lambda_s}{\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \right\} \rightarrow 0$$

结论完全相同。

### 作业 PROBLEMS 4-4

如图 4-4-10 所示的低频并联谐振电路。证明谐振条件  $\omega C = \frac{1}{\omega L}$  等价于电磁储能平衡  $W_c = W_m$ 。而  $Q$  值  $\frac{\omega_0 C}{G}$  等价于  $\frac{\omega_0 W}{P_L}$ 。

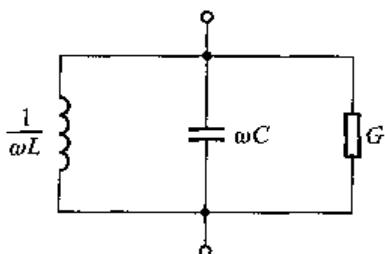


图 4-4-10 低频并联谐振电路

4-5

## 耦合腔 Coupled Cavity

已经把矩形谐振腔、圆柱谐振腔总结成为传输线谐振腔，并采用场论方法（复频率法）和网络方法（推广 Cullen 网络法）做了分析，如图 4-5-1 所示。不论是什么横截面的微波谐振腔，它们都可以归纳为理想微波谐振腔或孤立微波谐振腔，其最主要的特点是四周封闭，与外界不存在能量交换，但是，实际微波谐振腔必须要与外界进行能量交换，如图 4-5-2 所示，这就是讨论耦合腔的必要性。

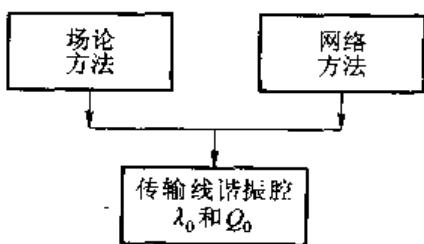


图 4-5-1 两种研究方法

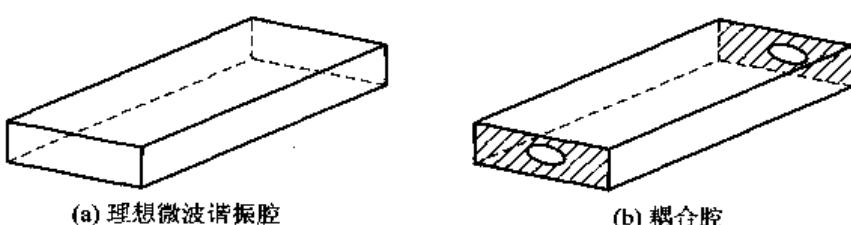


图 4-5-2 理想微波谐振腔与耦合腔

## 一、z 方向导体的端壁损耗

网络方法的特点是把传输线腔的损耗分解成两部分——侧壁有耗微波传输线和端壁导体损耗。为此研究四周为理想导体而中间填充电率为  $\sigma$  媒质的波导, 里面传输  $TE_{10}$  模的情况, 如图 4-5-3 所示。

这时的 Maxwell 方程为

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + \sigma\vec{E} \approx \sigma\vec{E} \end{cases} \quad (4-5-1)$$

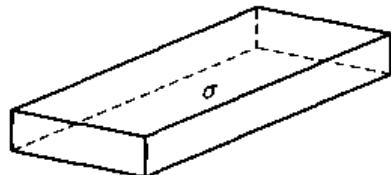


图 4-5-3 充满  $\sigma$  媒质的矩形波导

而对应的 Helmholtz 方程是

$$\nabla^2 H_z + \tilde{k}^2 H_z = 0 \quad (4-5-2)$$

其中

$$\tilde{k}^2 = -j\omega\mu\sigma \quad (4-5-3)$$

根据分离变量法设  $H_z = XYZ$ , 且研究的  $TE_{10}$  模中 Y 为常数。

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} - \gamma^2 Z = 0 \end{cases} \quad (4-5-4)$$

$$\tilde{k}^2 = k_x^2 - \gamma^2$$

$$\gamma^2 = k_x^2 - \tilde{k}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + j\omega\mu\sigma \quad (4-5-5)$$

式(4-5-5)是良导体填充  $\sigma$  的  $TE_{10}$  模精确  $\gamma$  表达式, 考虑到  $|j\omega\mu\sigma| \gg \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$  可知

$$\gamma^2 \approx j\omega\mu\sigma \quad (4-5-6)$$

再一次回忆 Maxwell 方程

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\vec{H}_z = j \frac{1}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ 0 & E_z & 0 \end{vmatrix} = j \frac{\gamma}{\omega\mu} \vec{E}_z$$

于是有

$$-\frac{\vec{E}_z}{\vec{H}_z} = j \frac{\omega\mu}{\gamma} \quad (4-5-7)$$

其中负号是  $\vec{E}$  为  $y$  方向、 $\vec{H}$  为  $x$  方向所致

$$Z_m = -\frac{\vec{E}_z}{\vec{H}_z} = j \frac{\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \sqrt{j} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (1+j)$$

也即

$$Z_m = R_m + jX_m = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j) \quad (4-5-8)$$

由于良导体的近似条件, 导体 TE<sub>10</sub> 模的波阻抗与平面波相同。

## 二、矩形谐振腔 TE<sub>101</sub> 模的 Q 值

这是对一般传输型微波谐振腔 Q 值与场论所得结果的一种验证。也即证明场论公式和传输线型微波谐振腔公式之间的等价性。

场论公式

$$Q = \frac{\pi\eta}{4R_s} \cdot \frac{2b(a^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}{al(a^2+l^2)+2b(a^3+l^3)} \quad Q = \frac{\pi}{\left(\alpha + \frac{2R_m}{Z_0 l}\right)} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda^2}\right)$$

已经知道

$$Q = \frac{\pi}{\left(\alpha + \frac{2R_m}{Z_0 l}\right)} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda^2}\right) \quad (4-5-9)$$

检验矩形微波谐振腔 TE<sub>101</sub> 模

$$\alpha = \frac{R_s}{\eta b} \left[ 1 + 2 \left( \frac{b}{a} \right) \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right] \frac{\lambda_g}{\lambda}$$

代入  $\lambda_g = 2l$ , 则有

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2R_s}{\eta b} \left[ 1 + 2 \left( \frac{b}{a} \right) \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right] \frac{l}{\lambda} \\ \frac{2R_m}{Z_0 l} = \frac{2}{l} R_s \frac{\lambda}{\lambda_g} = \frac{R_s \lambda}{\eta l^2} \end{cases} \quad (4-5-10)$$

将此结果代入 Q 值

$$Q = \frac{\pi}{\frac{2R_s}{\eta b} \left[ 1 + 2 \left( \frac{b}{a} \right) \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right] \frac{l}{\lambda^2} + \frac{R_s}{\eta} \cdot \frac{1}{l^2}} \cdot \left( \frac{2l}{\lambda^2} \right)$$

计及

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2al}{\sqrt{a^2+l^2}} \\ Q &= \frac{\pi\eta}{4R_s} \cdot \frac{2b[a^2+l^2]^{\frac{2}{3}}}{al(a^2+l^2)+2b(a^3+l^3)} \end{aligned} \quad (4-5-11)$$

前面的场论结果与此一致。这也是自然的, 即使是推广 Cullen 网络法, 其中网络参数  $\alpha$  和  $R_m$  也都是由场论计算出来的。

## 三、带孔耦合腔的品质因数 $Q_a$ 和谐振波长 $\lambda_a$

带孔耦合腔如图 4-5-4 所示。

研究通过式微波谐振腔, 前后均有带孔膜片, 一端接电源, 一端接负载。且可以认为两端是

匹配的,膜片等效为并联导纳,如图 4-5-5 所示。

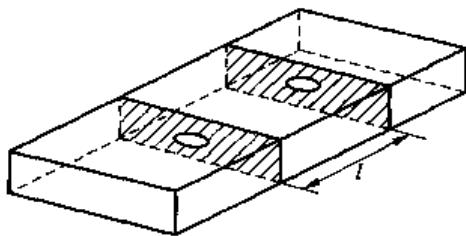


图 4-5-4 带孔耦合腔



图 4-5-5 膜片及其等效电路

### 1. 广义端壁思想

推广 Cullen 网络法的端壁概念,可以将一切复杂耦合场归结为端壁  $Z_m$ ,从而形成广义端壁思想。则对如图 4-5-6 所示的传输线腔可以进行如下研究。

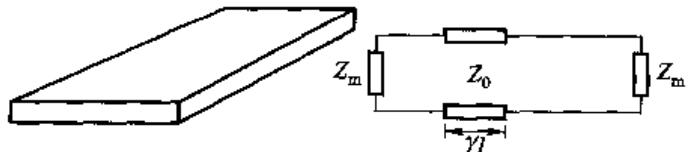


图 4-5-6 传输线腔及其等效电路

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_e}\right)^2 + \left[\frac{p - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{2X_m}{Z_0}\right)}{2l}\right]^2}}$$

$$Q = \frac{\pi l}{\left(\alpha l + \frac{2R_m}{Z_0}\right)\lambda_e} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)^2$$

下面对谐振条件公式作出解释。

已经导出谐振条件为

$$\beta l = p\pi - \arctan\left(\frac{2X_m}{Z_0}\right)$$

$$\frac{2\pi l}{\lambda_g} = p\pi - \arctan\left(\frac{2X_m}{Z_0}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_g} = \frac{p - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{2X_m}{Z_0}\right)}{2l}$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_e}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_e}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_e}\right)^2 + \left[\frac{p - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{2X_m}{Z_0}\right)}{2l}\right]^2$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_e}\right)^2 + \left[\frac{p - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{2X_m}{Z_0}\right)}{2l}\right]^2}}$$

### 2. 带孔腔的品质因数 $Q$ 。

在研究带孔腔时孔损耗与端壁损耗相比,前者是主要矛盾,可以不再计及  $R_m$ ,推广 Cullen

公式

$$Q_a = \frac{\pi l}{2R_i \lambda_g} \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^2 \quad (4-5-12)$$

其中,  $\bar{R}_t$  ——代表归一化损耗电阻, 如图 4-5-7 所示。

$$\bar{Z}'_{in} = \frac{1}{1-j\bar{B}} = \frac{1}{1+B^2} + j \frac{B}{1+\bar{B}^2} = \bar{R}_t + j\bar{X}_t \quad (4-5-13)$$

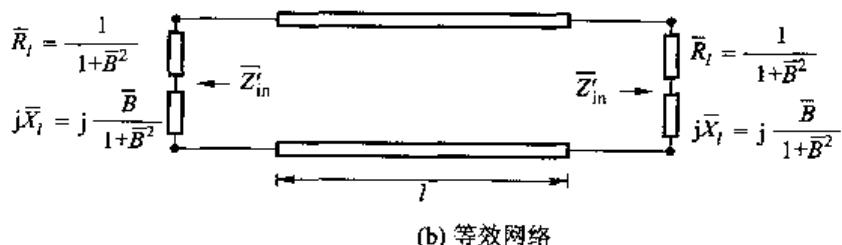
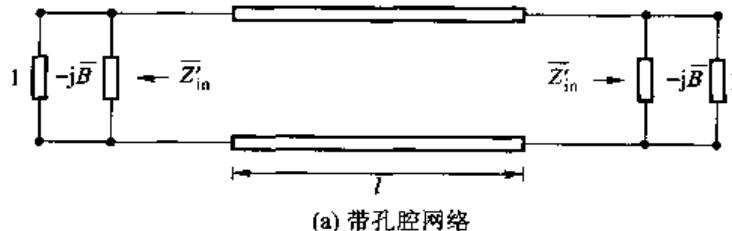


图 4-5-7 带孔腔网络

于是可以得到

$$Q_a = \frac{\pi l}{2\lambda_g} \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^2 (1+B^2) \quad (4-5-14)$$

如果这种情况下, 固有  $Q$  是  $Q_0$ , 则总的  $Q$  为

$$Q = \frac{Q_a Q_0}{Q_a + Q_0} \quad (4-5-15)$$

很明显有  $Q < Q_0$ 。

### 3. 谐振波长 $\lambda_s$

如图 4-5-8 所示, 令两膜片之间的腔长为  $l$ , 对应电角度为  $\theta = \frac{2\pi}{\lambda_s} l$ , 则有

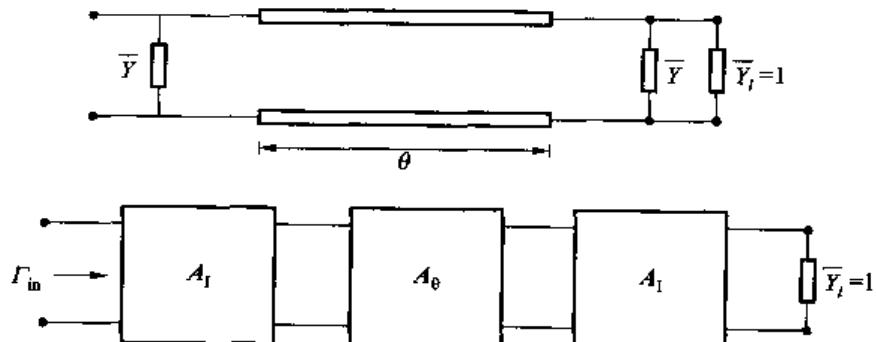


图 4-5-8 带孔腔 A 网络

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & j \sin \theta \\ -j \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta + jY \sin \theta & j \sin \theta \\ 2Y \cos \theta + j(\sin \theta + Y^2 \sin \theta) & \cos \theta + jY \sin \theta \end{bmatrix} \\
 Z_{in} &= \frac{A_{11} \bar{Z}_L + A_{12}}{A_{21} \bar{Z}_L + A_{22}} = \frac{A_{11} + A_{12}}{A_{21} + A_{22}} \\
 \Gamma_{in} &= \frac{\bar{Z}_{in} - 1}{\bar{Z}_{in} + 1}
 \end{aligned}$$

代入可知

$$\Gamma_{in} = \frac{-2Y \cos \theta - jY^2 \sin \theta}{2 \cos \theta (1+Y) + j \sin \theta (Y^2 + 2Y + 2)}$$

谐振时  $\Gamma_{in} = 0$

$$2 \cos \theta + jY \sin \theta = 0$$

计及电感膜片  $Y = -jB$ , 因此有

$$\theta = p\pi - \arctan\left(\frac{2}{B}\right) \quad (4-5-16)$$

把  $\theta = \frac{2\pi}{\lambda_g} l$  代入式(4-5-16), 得

$$l = \frac{1}{2} p \lambda_g - \frac{1}{2\pi} \lambda_g \arctan\left(\frac{2}{B}\right)$$

也即

$$\lambda_g = \frac{l}{\left[ \frac{p}{2} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{2}{B}\right) \right]} \quad (4-5-17)$$

最后得到谐振波长

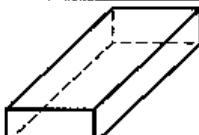
$$\lambda_a = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \left[\frac{p - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{2}{B}\right)}{2l}\right]^2}} \quad (4-5-18)$$

特别地, 此结果还可进一步推广到任意截面传输线型微波谐振腔

$$\lambda_a = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_e}\right)^2 + \left[\frac{p - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{2}{B}\right)}{2l}\right]^2}} \quad (4-5-19)$$

下面总结一下利用场论方法和网络方法研究微波谐振腔的不同特点, 如表 4-5-1 所示。

表 4-5-1 场论方法与网络方法研究微波谐振腔的不同特点

场论方法 Maxwell 方程	 微波谐振腔	网络方法 当成有耗传输线端接负载
--------------------	--	---------------------

续表

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_s}\right)^2}}$$

广义传输线理论

—z方向有相似规律

$$Q = \frac{\omega_0 W}{P_t} = \frac{2}{\delta} \frac{\int_V |H_z|^2 dV}{\int_S |H_z|^2 dS}$$

场积分法

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 + \left[\rho - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{2}{B}\right)\right]^2}}$$

$$Q = \frac{\omega_0 \partial X}{2R \partial \omega}, \frac{\omega_0 \partial B}{2G \partial \omega}$$

$$Q = \frac{\pi l}{\left(\frac{2R_m}{Z_0} + \alpha l\right) \lambda_s} \left(\frac{\lambda_s}{\lambda}\right)^2$$

物理意义清楚：

$$\begin{cases} \alpha l & \text{---侧壁损耗} \\ \frac{2R_m}{Z_0} & \text{---端壁损耗} \end{cases}$$

## 作业 PROBLEMS 4-5

分析如图 4-5-9 所示的耦合腔，其中  $\omega C \ll 1$ 。

(1) 求出谐振条件。

(2) 求出 Q 值。

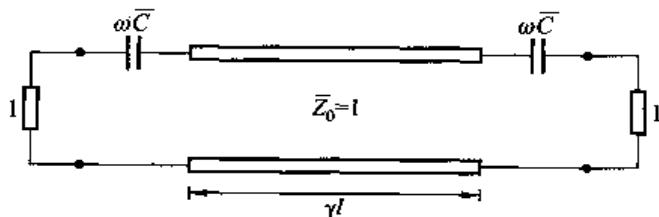


图 4-5-9 耦合腔示意图

4-6

## 介质谐振器 Dielectric resonator

早在 1939 年, R. D. Richtmyer(瑞奇美尔)就指出,一个表面未经金属化的高介电常数介质块,可以和金属谐振腔一样,发生电磁谐振现象,并首次提出了介质谐振器的概念。直到 20 世纪 60 年代人们才重新进行对介质谐振器的探索性的研究活动,而介质谐振器的真正应用和发展,

则是在新材料快速发展之后。随着新材料的快速发展,人们对介质谐振器的谐振频率、工作模式、电路特性以及介质谐振器的设计等进行了深入的研究,使其进入微波电路领域。

常用的介质谐振器的形状通常有圆柱形、矩形柱和圆环形柱等,如图 4-6-1 所示。其中圆柱形结构具有理论分析方便、加工制作简单、电气性能优良等优点,因而成为最常用的一种结构形式。

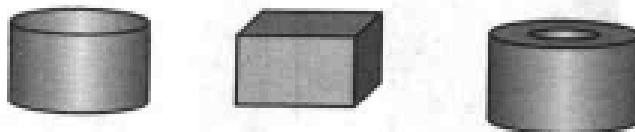


图 4-6-1 介质谐振器的基本形状

决定介质谐振器性能的关键因素是所用的介质材料,而用于介质谐振器的材料的最重要参数是:①介质的损耗,它决定着介质谐振器的  $Q$  值。对高介电常数的介质谐振器, $Q$  值近似等于损耗正切的倒数  $1/\tan \delta$ , $Q$  值越高越利于微波应用。②谐振频率的温度稳定系数  $\tau_f$ ,其中包括介电常数的温度稳定系数以及介质热膨胀效应的共同影响。 $\tau_f$  越小,谐振频率随温度变化越小,谐振器的频率稳定性越高。③适当的介电常数  $\epsilon$ ,其合适的范围应在  $30\sim100$  之间,以保证电磁能量集中在介质谐振器内部及其周围很小的范围之内,从而减小外部环境对介质谐振器特性的影响。最早的介质材料是金红石,后来又出现了多种陶瓷化合物等。

目前,介质谐振器已经应用于微波集成电路,作为带通和带阻滤波器中的谐振元件、慢波结构、振荡器的稳频腔等,具有体积小、重量轻、品质因数高、稳定性好等优点。

介质谐振器在原理上类似于金属波导谐振腔。由于介质与空气交界处几乎呈现开路状态,电磁波在介质内部反射使能量限制在介质中,形成谐振结构。在这种情况下,介质与空气分界面可以近似假定为理想磁导体(PMC),在其表面上磁场切向分量或电场法向分量需要满足为 0 的条件,与理想电导体边界条件完全相反。严格求解介质谐振器的谐振频率比较困难,一般采用近似的方法。磁壁法是将介质谐振器的边界都视为磁壁来分析,这种方法的误差较大,达 10% 以上。较精确的方法有混合磁壁法、开波导法、变分法、有限元法等。

## 一、圆柱形介质谐振器

### 1. 磁壁法

圆柱形介质谐振器结构及磁壁模型的边界条件如图 4-6-2 所示。圆柱形介质谐振器中可能存在 TE 模和 TM 模,应满足的磁壁边界条件为:

在  $r=R$  的侧面上

$$H_r=0 \quad H_\theta=0 \quad (4-6-1)$$

在  $z=0$  和  $z=l$  两端面上

$$H_z=0 \quad H_r=0 \quad (4-6-2)$$

利用齐次圆柱坐标波动方程和磁壁边界条件式(4-6-1)与式(4-6-2),能够求出圆柱形介质谐振器中位函数和场解。其求解过程与方法类似于金属圆形波导和金属圆柱形介质谐振器中电磁场的求解,但应当注意到磁导体与电导体边界条件的不同,这里必须采用磁导体边界条

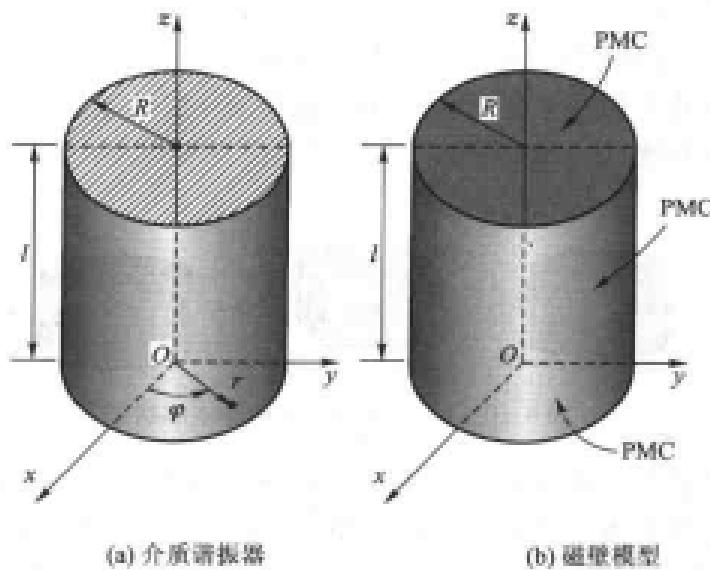


图 4-6-2 圆柱形介质谐振器及磁壁模型

件。这样便能够直接写出 TE 模和 TM 模的场解。

### (1) TE 模

$$E_r = \pm j \frac{\omega \mu_m}{k_c^2 r} H_0 J_m \left( \frac{\mu_m}{R} r \right) \begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \quad (4-6-3)$$

$$E_\varphi = j \frac{\omega \mu_m}{k_c} H_0 J'_m \left( \frac{\mu_m}{R} r \right) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \quad (4-6-4)$$

$$H_z = -j \frac{\beta}{k_c} H_0 J'_m \left( \frac{\mu_m}{R} r \right) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \quad (4-6-5)$$

$$H_r = \pm j \frac{\beta n}{k_c^2 r} H_0 J_m \left( \frac{\mu_m}{R} r \right) \begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \quad (4-6-6)$$

$$H_\varphi = H_0 J_m \left( \frac{\mu_m}{R} r \right) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \quad (4-6-7)$$

根据  $r=R$  时,  $H_r=0$ , 即式(4-6-1)的边界条件, 有

$$J_m(k_c R) = J_m(\mu_m) = 0 \quad k_c = \mu_m/R \quad (4-6-8)$$

由于  $k=\omega/v=\sqrt{k_c^2+\beta^2}$ ,  $\beta=p\pi/l$ , 可得谐振频率 ( $\omega=2\pi f_r$ )

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}} [\left(\mu_m/R\right)^2 + (p\pi/l)^2]^{1/2} \quad m, p=0, 1, 2, \dots \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (4-6-9)$$

式中  $\mu_m$  是第一类  $m$  阶 Bessel 函数的第  $n$  个根。如果  $l/r < 2.03$ ,  $TE_{010}$  模是主模, 其谐振频率等于

$$f_{TE_{010}} = \frac{p_0}{2\pi R \sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{2.4049}{2\pi R \sqrt{\mu\epsilon}} \quad (4-6-10)$$

由式(4-6-3)~式(4-6-7), 圆柱形介质谐振器中存在  $TE_{010}$  模, 而金属圆柱形空腔谐振器不存在  $TE_{010}$  模; 对于  $TE_{01p}$  模, 只有  $H_r, H_\varphi, E_\varphi$  3 个场分量, 其余分量均为 0。

### (2) TM 模

$$E_r = -j \frac{\beta}{k_c} E_0 J'_m \left( \frac{\nu_{mn}}{R} r \right) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \quad (4-6-11)$$

$$E_\varphi = \pm j \frac{\beta m}{k_c^2 r} E_0 J_m \left( \frac{\nu_{mn}}{R} r \right) \begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \quad (4-6-12)$$

$$E_z = E_0 J_m \left( \frac{\nu_{mn}}{R} r \right) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \quad (4-6-13)$$

$$H_r = \mp \frac{j\omega\epsilon m}{k_c^2 r} E_0 J_m \left( \frac{\nu_{mn}}{R} r \right) \begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \quad (4-6-14)$$

$$H_\varphi = -j \frac{\omega\epsilon}{k_c} E_0 J'_m \left( \frac{\nu_{mn}}{R} r \right) \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \quad (4-6-15)$$

根据式(4-6-1)的边界条件,得

$$J'_m(k_c R) = J'_m(\nu_{mn}) = 0 \quad k_c = \nu_{mn}/R \quad (4-6-16)$$

谐振频率等于

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}} [(v_{mn}/R)^2 + (p\pi/l)^2]^{1/2} \quad m=0,1,2,\dots \quad n,p=1,2,3,\dots \quad (4-6-17)$$

式中  $v_{mn}$  是第一类  $m$  阶 Bessel 函数一阶导数的第  $n$  个根。TM 模中主模  $TM_{111}$  模的谐振频率为

$$f_{TM_{111}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}} \left[ \left( \frac{v_{11}}{R} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}} \left[ \left( \frac{1.8412}{R} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4-6-18)$$

由式(4-6-11)~式(4-6-15)看出,圆柱形介质谐振器中不存在  $TM_{010}$  模,而金属圆柱形空腔谐振器有可能有  $TM_{010}$  模。类似于金属圆柱形介质谐振器的判断方法,若  $l/R > 2.03$ ,  $TM_{111}$  模也是 TE 模和 TM 模中的主模。

### (3) $TE_{010}$ 模

虽然当圆柱形介质谐振器的长度与半径比  $l/R < 2.03$  时,由 PMC(理想导磁体)模型得到的振荡模式中  $TE_{010}$  模是主模,但实践中最常用的是  $TE_{010}$  ( $0 < \delta < 1$ ) 模。可以用图 4-6-3 所示模型来说明  $TE_{010}$  模。由 PMC 或 PEC(理想导电体)壁得到的振荡器振荡模式  $TE_{mn0}$  模和  $TM_{mn0}$  模,标数  $p$  总是非负的整数,  $p$  表示场沿  $l$  轴变化的半波数目。由于  $\delta$  是小于 1 的非整数,所以圆柱形介质谐振器中  $TE_{010}$  模的场沿  $l$  轴变化小于半个波长,比较精确的圆柱形介质谐振器模型得到的结果表明,  $\beta l$  应当为

$$\beta l \approx \psi_1/2 + \psi_2/2 + p\pi \quad p=0,1,2,\dots \quad (4-6-19)$$

式中:

$$\psi_1/2 = \arctan \left[ \frac{\alpha_1}{\beta} \coth(\alpha_1 l_1) \right] \quad \alpha_1 = [(p_{01}/R)^2 - \beta_0^2 \epsilon_{r1}]^{1/2} \quad (4-6-20)$$

$$\psi_2/2 = \arctan \left[ \frac{\alpha_2}{\beta} \coth(\alpha_2 l_2) \right] \quad \alpha_2 = [(p_{01}/R)^2 - \beta_0^2 \epsilon_{r2}]^{1/2} \quad (4-6-21)$$

式(4-6-19)中  $p=0$  对应着  $TE_{010}$  模,小于 1 的非整数的  $\delta$  由下式给出,即

$$\delta = (\psi_1/2 + \psi_2/2)/\pi \quad (4-6-22)$$

$\delta$  描述着圆柱形介质振荡器在  $z=0$  和  $z=l$  两端之间场的变化。以上各式是根据图 4-6-3 所示的模型推导出来的,图中在  $z=-l_2$  和  $z=l+l_1$  处放有 PEC 板,空间部分①~⑤区域通常是

空气介质,两块 PEC 板离开圆柱形介质谐振器各端面距离分别为  $l_1$  和  $l_2$ ,其选择范围  $0 \leq (l_1, l_2) \leq \infty$ 。

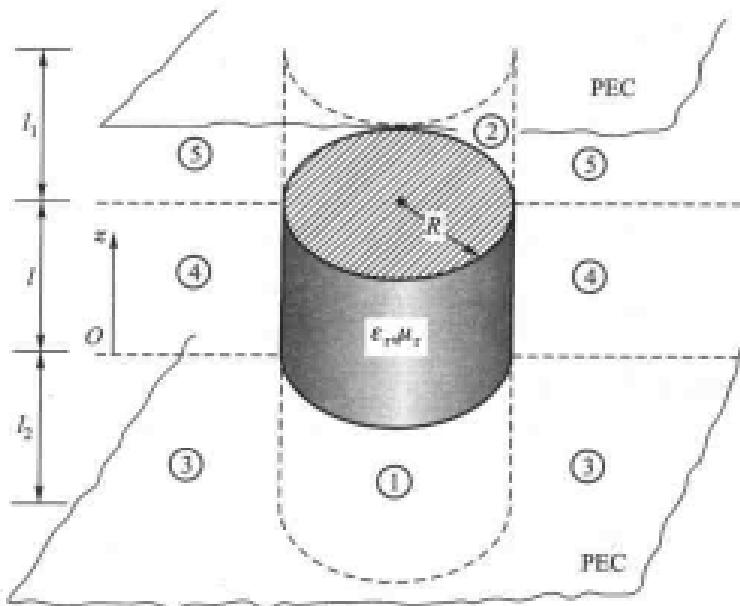


图 4-6-3 圆柱形介质谐振器模型

[例] 由图 4-6-3 所示模型确定  $\text{TE}_{01z}$  模及其谐振频率。令  $l_1=l_2=0$ , 即圆柱形介质谐振器夹在两块 PEC 板之间, 每块 PEC 板放在圆柱形介质谐振器的一个端面上; 圆柱形介质谐振器半径  $R=5.25 \text{ mm}$ , 高度  $l=4.6 \text{ mm}$ , 相对介电常数  $\epsilon_r=38$ 。

[解] 因  $l_1=l_2=0$ , 由式(4-6-20)和式(4-6-21)得

$$\phi_1/2=\phi_2/2=\arctan(\infty)=\pi/2$$

则式(4-6-22)的  $\delta$  等于

$$\delta=(\pi/2+\pi/2)/\pi=1$$

表明  $\text{TE}_{01z}$  模实际是  $\text{TE}_{011}$  模, 于是由式(4-6-19)求出 ( $p=0$ )

$$\beta d=\pi, \quad \beta=\pi/d$$

由 PMC 模型得到的式(4-6-9)计算圆柱形介质谐振器频率  $f$  为

$$\begin{aligned} f_{\text{TE}_{011}} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} [(2.4049/R)^2 + (\pi/d)^2]^{1/2} \\ &= \frac{3 \times 10^11}{2\pi\sqrt{38}} [(2.4049/5.25)^2 + (\pi/4.6)^2]^{1/2} = 6.37 \text{ GHz} \end{aligned}$$

将圆柱形介质谐振器放在自由空间中, 谐振频率的精确值是 4.82 GHz, 本例采用 PMC 模型计算结果是 6.37 GHz, 误差 +32%。若采用图 4-6-3 所示的 PEC 模型, 将两块 PEC 板推向  $\infty$ , 即  $l_1=l_2=\infty$ , 也就是把圆柱形介质谐振器置于自由空间中, 用式(4-6-19)计算的谐振频率低于精确值, 而误差明显减少, 精度有很大提高。

## 2. 混合磁壁法

孤立的圆柱形介质谐振器如图 4-6-4 (a) 所示, 设介质均匀、无耗, 相对介电常数为  $\epsilon_r$ , 半径为  $R$ , 长度为  $l$ 。实用的圆柱形介质谐振器多数以  $\text{TE}_{01z}$  模工作, 下面用混合磁壁法来求解  $\text{TE}$

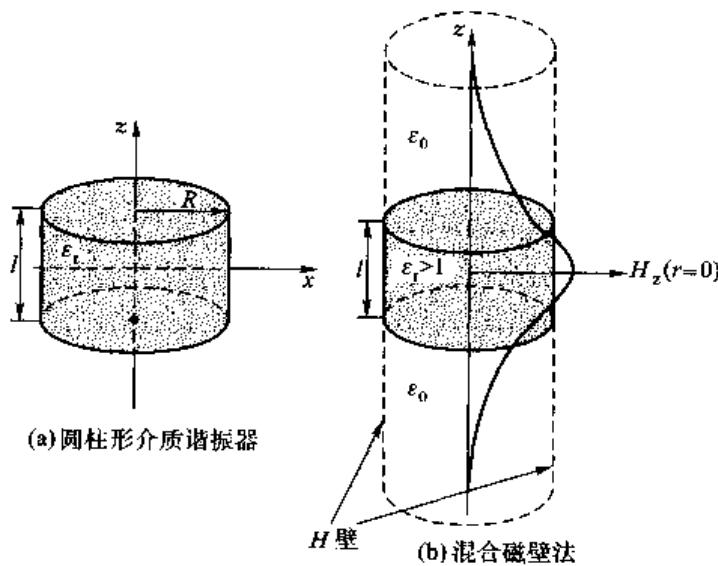


图 4-6-4 混合磁壁法

模的谐振频率。

混合磁壁法是将圆柱形介质谐振器看成一段圆柱形介质波导,上、下的空气区域看成截止波导,假设  $r=R$  的圆柱面为磁壁边界条件,如图 4-6-4(b)所示。

TE 模的  $E_z=0, H_z$  满足如下方程:

$$(\nabla^2 + k^2) H_z = 0 \quad (4-6-23)$$

式中

$$k = \begin{cases} \sqrt{\epsilon_r k_0} & |z| < \frac{l}{2} \\ k_0 & |z| > \frac{l}{2} \end{cases} \quad (4-6-24)$$

横向场分量可由  $H_z$  求得

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2 r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} & E_\varphi &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2 r} \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ H_r &= \frac{1}{k_c^2 r} \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial z} & H_\varphi &= \frac{1}{k_c^2 r} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi \partial z} \end{aligned} \quad (4-6-25)$$

场在介质内应呈驻波分布,在介质外应为衰减状态。用分离变量法可求得式(4-6-23)的解为

$$\begin{aligned} H_{az} &= A_m J_m(k_c r) \left( \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right) \cos (\beta z + \theta) \quad |z| \leq l/2 \\ H_{az} &= B_m J_m(k_c r) \left( \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right) e^{-\alpha(|z| - \frac{l}{2})} \quad |z| \geq l/2 \end{aligned} \quad (4-6-26)$$

式中

$$\beta^2 = \epsilon_r k_0^2 - k_c^2$$

$$\alpha^2 = k_c^2 - k_0^2$$

$$k_c^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \quad (4-6-27)$$

将式(4-6-26)代入式(4-6-25)可求得其他场分量。

已假设  $r=R$  的圆柱面为磁壁, 则该处的  $H_z$  必须为 0, 于是有  $J_m(k_c R) = 0$ 。由此得到

$$k_{cmn} = \frac{\mu_{mn}}{R} \quad m=1, 2, 3, \dots; n=1, 2, 3, \dots \quad (4-6-28)$$

式中,  $\mu_{mn}$  是第一类  $m$  阶 Bessel 函数导数的第  $n$  个零点,  $k_{cmn}$  为相应的截止波数。

在  $|z|=\frac{l}{2}$  的端面上, 切向场必须连续, 即应有  $E_{r1}=E_{r2}, H_{\phi 1}=H_{\phi 2}$  或  $H_{z1}=H_{z2}, \partial H_{z1}/\partial z=\partial H_{z2}/\partial z$ 。由此得到

$$\begin{aligned} A_m \cos(\beta l/2 + \theta) &= B_m \\ A_m \beta \sin(\beta l/2 + \theta) &= \alpha B_m \end{aligned}$$

由上述两式消去  $A_m$  和  $B_m$ , 得到

$$\beta \tan(\beta l/2 + \theta) = \alpha \quad (4-6-29)$$

式中,  $\theta$  为初相角, 考虑到结构的对称性, 场分量  $H_z$  关于  $z=0$  应为偶函数, 于是应取  $\theta=-p\pi/2$  ( $p=0, 1, 2, \dots$ )。因此式(4-6-29)变成

$$\beta \tan(\beta l/2 - p\pi/2) = \alpha$$

由此求得

$$\beta l = p\pi + 2\arctan \frac{\alpha}{\beta} = (p+\delta)\pi \quad (4-6-30)$$

此即圆柱形介质谐振器 TE 模的特征方程。式中  $\delta\pi=2\arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)<\pi$ , 故有  $0<\delta<1$ , 而  $p$  是场沿  $z$  向分布的半驻波数。这样, 圆柱形介质谐振器 TE 模可表示成  $TE_{mn,\delta+p}$ , 最低次模式为  $TE_{010}$  模。图 4-6-5 表示  $TE_{010}$  模的场结构, 其磁力线在子午面上, 而电力线是绕  $z$  轴的同心圆。从远处看这种模式好像一个磁偶极子, 故有时称  $TE_{010}$  模为磁偶极子模。当  $\epsilon_r \approx 40$  时,  $TE_{010}$  模中储存的 95% 以上的电能及 60% 以上的磁能位于圆柱形介质谐振器里面, 其余能量分布在周围空气中, 且随着离圆柱形介质谐振器表面距离的增大而迅速衰减。

实用的圆柱形介质谐振器多选用  $TE_{010}$  模工作。此模式有如下优点: ①电场和磁场都是圆对称的, 与微带线的耦合很方便。②能量在介质谐振器内的集中程度高, 其周围的金属引入的损耗小, 介质谐振器置于微带基片上的  $Q$  值变化较小。③模式容易辨认, 其电性能容易进行比较精确的测量。④ $Q$  值较高。此模式的缺点是频率特性比较陡,  $TE_{010}$  模介质谐振器的稳定调谐带宽比较窄。

由式(4-6-30)和式(4-6-27)、式(4-6-28)求得  $\beta, k_c$  后, 谐振频率则可由下式求得

$$f_v = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{k_c^2 + \beta^2} \quad (4-6-31)$$

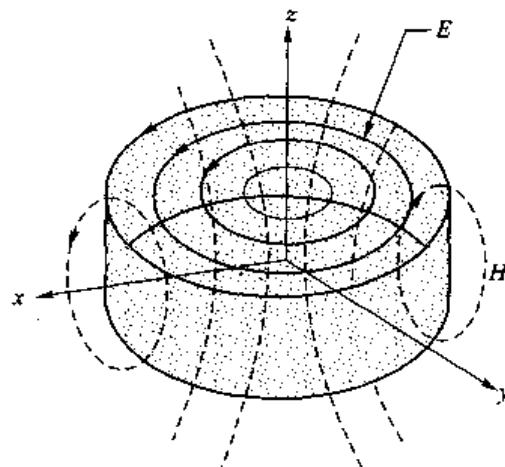


图 4-6-5 孤立圆柱形介质  
谐振器  $TE_{010}$  模的场结构

式(4-6-31)的求值需要使用计算机,不便在工程中使用。Kajfez(卡杰费斯)给出的孤立的TE<sub>01s</sub>模圆柱形介质谐振器谐振频率近似计算式为

$$f_0 = \frac{34}{R \sqrt{\epsilon_r}} \left[ \frac{R}{l} + 3.45 \right] \text{GHz} \quad (4-6-32)$$

式(4-6-32)中介质谐振器的半径  $R$  和高度  $l$  的单位为 mm;在下列范围内,式(4-6-32)的精度约为 2%

$$0.5 < \frac{R}{l} < 2, \quad 30 < \epsilon_r < 50 \quad (4-6-33)$$

孤立介质谐振器的无载  $Q$  值,取决于介质材料本身的  $Q$  值。 $\epsilon_r$  为 100 左右或更高的介质谐振器,其无载  $Q$  值可用下式近似估算

$$Q_0 \approx \frac{1}{\tan \delta} \quad (4-6-34)$$

式(4-6-34)中  $\tan \delta$  为介质材料的损耗正切。介质谐振器常用材料的  $\tan \delta$  典型值为 0.000 1~0.000 2,于是  $Q$  值约为 5 000~10 000。

### 3. 开波导法

实用的介质谐振器都是放在波导中或微带基片上,屏蔽条件的引入将使介质谐振器的谐振频率产生偏移,使其  $Q$  值降低。下面介绍用开波导法求解圆柱形介质谐振器 TE<sub>0m,ε1,ε2</sub> 模的谐振频率。

图 4-6-6(a)表示置于微带基片上的圆柱形介质谐振器的截面图,图 4-6-6(b)为其分区图。图中  $\epsilon_{r1} \gg \epsilon_{r2}, \epsilon_{r1} \gg \epsilon_{r3}, \epsilon_{r3} = 1$ 。阴影区⑤、⑥中的场忽略不计。这种分析方法比混合磁壁法精确,因为混合磁壁法忽略了次壁外四周的电磁场,而开波导法只忽略了一些拐角区域的电磁场,这些区域的电磁场确实是较弱的。式(4-6-23)在各区域中的解为

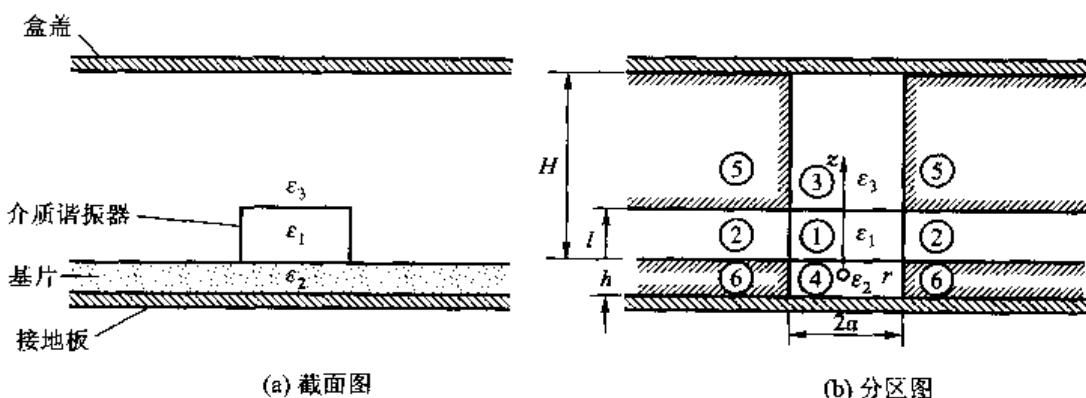


图 4-6-6 屏蔽圆柱形介质谐振器及其分区

$$\begin{aligned} H_{z_1} &= A_1 J_0(k_{c_1} r) \sin(\beta z + \theta) \\ H_{z_2} &= A_2 K_0(k_{c_2} r) \sin(\beta z + \theta) \\ H_{z_3} &= A_3 J_0(k_{c_3} r) \sin[\alpha_3(H-z)] \\ H_{z_4} &= A_4 J_0(k_{c_4} r) \sin[\alpha_4(z+h)] \end{aligned} \quad (4-6-35)$$

式中

$$\begin{aligned}\beta^2 &= k_0^2 \epsilon_{r_1} - k_{c_1}^2 = k_0^2 + k_{c_2}^2 \\ \alpha_3 &= k_{c_1}^2 - k_0^2 \\ \alpha_4 &= k_{c_1}^2 - k_0^2 \epsilon_{r_2} \\ k_0^2 &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0\end{aligned}\quad (4-6-36)$$

$J_0(k_{c_1} r)$  和  $K_0(k_{c_2} r)$  分别为第一类零阶 Bessel 函数和第二类变态 Bessel 函数;  $A_1 \sim A_4$ 、 $\theta$  是待定常数。

横向场分量可由式(4-6-25)求得。TE<sub>0m,θ-p</sub>模只有  $H_z$ 、 $H_r$  和  $E_\phi$  3 个分量。

由  $r=R$  处  $H_z$ 、 $E_\phi$  的连续条件, 可以得到

$$\frac{J'_0(u)}{u J_0(u)} + \frac{K'_0(\omega)}{\omega K_0(\omega)} = 0 \quad (4-6-37)$$

式中,  $u=k_{c_1} R$ ,  $\omega=k_{c_2} R$ , 又由  $z=l$  处  $H_z$ 、 $E_\phi$  的连续条件, 可以得到

$$\beta \tan(\beta l + \theta) = \alpha_3 \coth[\alpha_3(H-l)]$$

或者

$$\beta l + \theta - \frac{\pi}{2} = p\pi + \arctan\left[\frac{\alpha_3}{\beta} \coth \alpha_3(H-l)\right] \quad p=0,1,2,\dots \quad (4-6-38)$$

由  $z=0$  处  $H_z$ 、 $E_\phi$  的连续条件可得到  $\beta \tan \theta = \alpha_4 \coth(\alpha_4 h)$

或者

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{\alpha_4}{\beta} \coth(\alpha_4 h)\right] \quad (4-6-39)$$

由式(4-6-38)和式(4-6-39), 得到方程

$$\beta l = p\pi + \arctan\left[\frac{\alpha_3}{\beta} \coth \alpha_3(H-l)\right] + \arctan\left[\frac{\alpha_4}{\beta} \coth(\alpha_4 h)\right] \quad (4-6-40)$$

由式(4-6-36)、(4-6-37)和式(4-6-40)求得  $k_{c_1}$  和  $\beta$  后, 谐振频率可由下式求得

$$f_0 = \frac{c}{2\pi \sqrt{\epsilon_{r_1}}} \sqrt{k_{c_1}^2 + \beta^2} \quad (4-6-41)$$

式中  $c$  为光速。由式(4-6-40)可见, 谐振频率与屏蔽盒高度  $H$  有关。调节此高度可调整屏蔽介质谐振器的谐振频率。

上述公式不便在工程上使用。Kajfez(卡加夫兹)给出了给定谐振频率时 MIC 中 TE<sub>01g</sub> 模圆柱形介质谐振器几何尺寸的计算方法。

① 谐振器的直径( $d=2R$ )选定在如下范围内:

$$\frac{5.4}{k_0 \sqrt{\epsilon_{r_2}}} > 2R > \frac{5.4}{k_0 \sqrt{\epsilon_{r_1}}} \quad (4-6-42)$$

② 计算  $k_{c_1}$  值

$$k_{c_1} = \frac{2.405}{R} + \frac{Y_0}{2.405R[1 + (2.43/Y_0) + 0.291Y_0]} \quad (4-6-43)$$

式中

$$Y_0 = \sqrt{(k_0 R)^2 (\epsilon_{r_2} - 1) - 2.405^2} \quad (4-6-44)$$

③ 计算 TE<sub>01g</sub> 模的传播常数  $\beta$

$$\beta = \sqrt{k_0^2 \epsilon_{r_1} - k_c^2} \quad (4-6-45)$$

④ 估算衰减常数  $\alpha_3$  和  $\alpha_4$

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \sqrt{k_c^2 - k_0^2} \\ \alpha_4 &= \sqrt{k_c^2 - k_0^2 \epsilon_{r_2}}\end{aligned}\quad (4-6-46)$$

⑤ 求圆柱形介质谐振器的高度  $l$

$$l = \frac{1}{\beta} \left\{ \arctan \left[ \frac{\alpha_3}{\beta} \operatorname{cth} \alpha_3 (H-l) \right] + \arctan \left[ \frac{\alpha_4}{\beta} \operatorname{cth} (\alpha_4 h) \right] \right\} \quad (4-6-47)$$

圆柱形介质谐振器与微带之间的距离则需要根据其间耦合的外部  $Q$  值来确定。当已知圆柱形介质谐振器的几何尺寸时,亦可用上述各式来确定圆柱形介质谐振器的谐振频率。

## 二、矩形介质谐振器

### 1. 磁壁法

利用磁壁模型,参考金属波导的分析过程,容易写出矩形介质谐振器中电磁场及谐振频率表达式。 $\text{TE}_{mnp}$  模场分量为

$$H_z = H_0 \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-rz} \quad (4-6-48)$$

$$E_x = j \frac{\omega \mu n \pi}{k_c^2 b} H_0 \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-rz} \quad (4-6-49)$$

$$E_y = -j \frac{\omega \mu m \pi}{k_c^2 a} H_0 \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-rz} \quad (4-6-50)$$

$$H_x = \frac{\gamma}{k_c^2 a} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-rz} \quad (4-6-51)$$

$$H_y = \frac{\gamma}{k_c^2 a} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-rz} \quad (4-6-52)$$

其中,有约束条件

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2$$

由于  $k^2 = (\omega/v)^2 = k_c^2 + \beta^2$ ,  $\beta = p\pi/l$ , 可以写出谐振频率公式,为

$$f = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} [(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2]^{1/2} \quad (4-6-53)$$

式(4-6-53)不仅适用于  $\text{TE}$  模,也适用于  $\text{TM}$  模。

根据理想磁壁边界条件不难写出矩形介质谐振器中  $\text{TM}$  模的场分量,这里从略。

### 2. 混合磁壁法

图 4-6-7(a)表示在实际中常用的矩形介质谐振器结构。矩形介质谐振器放在具有金属接地板的基片上,  $\epsilon_1 \geq \epsilon_2$ 。矩形介质谐振器上面也放置一块金属板,矩形介质谐振器距上、下金属板的距离分别为  $h_1$  和  $h_2$ ,这两块金属板用来屏蔽矩形介质谐振器。当  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ ,  $h_1$  和  $h_2$  趋于无限大时,图 4-6-7(a)所示的结构就变成了在自由空间里的孤立矩形介质谐振器。

用混合磁壁法求解图 4-6-7(a)所示矩形介质谐振器问题时,先将矩形介质谐振器看作截

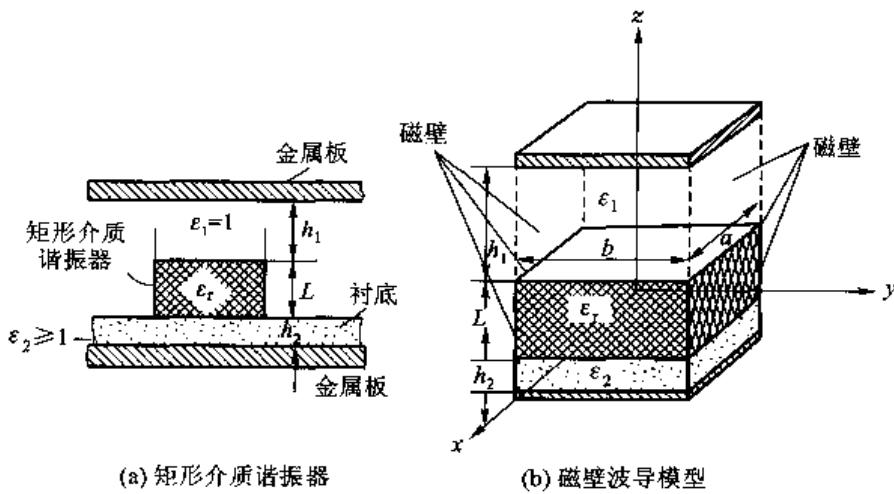


图 4-6-7 矩形介质谐振器及磁壁波导模型

面积为  $a \times b$ , 长度为  $L$  的磁壁波导, 然后将此波导段的四周壁向上、下延伸到金属板, 形成两端短路、中间填充不同介质的三段磁壁波导模型, 如图 4-6-7(b) 所示。由于上述波导的截面积  $a \times b$  较小, 而且  $\epsilon_2$  远小于  $\epsilon_r$ , 因此上、下两端磁壁波导处于截止状态。矩形介质谐振器的振荡模式和谐振频率应由上述三段磁壁波导决定, 具有  $\epsilon_r$  的磁壁波导是传输的, 上、下两端一段短路的磁壁波导是截止的。

对于图 4-6-7(b) 所示的磁壁波导模型, 其中的电磁场可分为 TE 模和 TM 模。解纵向场的 Helmholtz 方程, 可得到各种模式的场分布和谐振频率。

对于 TE 模, 磁场的  $z$  分量应满足 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \quad (4-6-54)$$

应用分离变量法, 并考虑磁壁上的边界条件: 磁场的切向分量  $H_z = 0$  和电场的法向分量  $E_z = 0$ , 则由式(4-6-54)则求出各场分量如下:

$$H_z = A_1 \cos k_x z \cos k_y f(z) \quad (4-6-55)$$

$$H_x = \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z}$$

$$H_y = \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z}$$

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$E_z = 0 \quad (4-6-56)$$

式中,  $A_1$  为积分常数,  $f(z)$  由三段不同的磁壁波导确定。在上、下两段磁壁波导中是衰减场,  $f(z)$  可表示为  $sh ah$  的形式, 在上、下金属板上  $H_z = 0$ , 此时  $f(z) = 0$ ; 矩形介质谐振器内部的场是驻波场, 可表示为  $\cos k_z z$  的形式, 并且在上、下界面上  $H_z$  连续, 即  $f(z)$  连续。根据上述分析, 可得到  $f(z)$

$$f(z) = \begin{cases} \cos(k_z z + \theta) & |z| \leq \frac{L}{2} \\ \frac{\cos\left(\frac{k_z L}{2} + \theta\right)}{\sinh \alpha_1 h_1} \sinh \alpha_1 \left(\frac{L}{2} + h_1 - z\right) & \frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} + h_1 \\ \frac{\cos\left(\frac{k_z L}{2} - \theta\right)}{\sinh \alpha_2 h_2} \sinh \alpha_2 \left(z + \frac{L}{2} + h_2\right) & -\frac{L}{2} - h_2 \leq z \leq -\frac{L}{2} \end{cases} \quad (4-6-57)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{k_c^2 - k_0^2} & \alpha_2 &= \sqrt{k_c^2 - \epsilon_r k_0^2} \\ k_z &= \sqrt{\epsilon_r k_0^2 - k_c^2} & k_0 &= \omega_r \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \end{aligned} \quad (4-6-58)$$

在磁壁上, 利用  $H_z = 0$  的边界条件, 可得

$$\begin{aligned} k_z &= \frac{m\pi}{a} \quad m = 1, 2, \dots \\ k_y &= \frac{n\pi}{b} \quad n = 1, 2, \dots \\ k_c &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \end{aligned} \quad (4-6-59)$$

再利用矩形介质谐振器上、下界面上  $E_x$  (或  $E_y$ )、 $H_x$  (或  $H_y$ ) 的连续条件, 可得到

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{k_z L}{2} + \theta\right) &= \frac{\alpha_1}{k_z} \coth(\alpha_1 h_1) \\ \tan\left(\frac{k_z L}{2} - \theta\right) &= \frac{\alpha_2}{k_z} \coth(\alpha_2 h_2) \end{aligned} \quad (4-6-60)$$

由上式可得到

$$k_z L = s\pi + \arctan\left(\frac{\alpha_1}{k_z} \coth \alpha_1 h_1\right) + \arctan\left(\frac{\alpha_2}{k_z} \coth \alpha_2 h_2\right) \quad s = 0, 1, 2, \quad (4-6-61)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\alpha_1}{k_z} \coth \alpha_1 h_1\right) - \arctan\left(\frac{\alpha_2}{k_z} \coth \alpha_2 h_2\right) \quad (4-6-62)$$

式(4-6-61)又可表示为

$$k_z L = s\pi + \delta\pi = (s + \delta)\pi \quad (4-6-63)$$

式中

$$\delta = \frac{1}{\pi} \left[ \arctan\left(\frac{\alpha_1}{k_z} \coth \alpha_1 h_1\right) + \arctan\left(\frac{\alpha_2}{k_z} \coth \alpha_2 h_2\right) \right] \quad (4-6-64)$$

$\delta$  是在 0~1 之间的数。

由上述分析可知, 矩形介质谐振器的 TE 模可标记为  $TE_{mn(s+\delta)}$  模, 其中下标  $m$  表示微波谐振腔内  $x$  方向的半波数,  $n$  表示  $y$  方向的半波数,  $s$  表示  $z$  方向的半波数。但由于矩形介质谐振器上、下界面不是磁壁, 界面外区域中有衰减场, 因而使  $z$  方向的驻波数不是半波的整数倍, 而有一相位移  $\delta\pi$ 。矩形介质谐振器的  $\epsilon_r$  愈大, 它集中的场能量愈多, 界面外场的衰减愈快。因此, 对于高介电常数的矩形介质谐振器, 其  $\delta$  接近于 1。由此可知, 在矩形介质谐振器 TE 模中,  $TE_{118}$

模是最低次模,其余都是高次模。

根据上述分析,给出矩形介质谐振器的结构尺寸  $a$ 、 $b$ 、 $L$  以及  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  后,利用公式(4-6-58)、式(4-6-59)和式(4-6-61),用迭代法可计算出 TE 模的谐振频率  $f_0$ 。反之,给出谐振频率和  $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$  以及  $h_1$  和  $h_2$  后,可求出矩形介质谐振器的结构尺寸。

对于 TM 模,需先解  $E_z$  的 Helmholtz 方程,并利用磁壁边界条件,同样可得 TM 模的各场分量,并求出 TM 模特征方程。由于推导 TM 模有关参量的过程和求解 TE 模相似,这里不再叙述。现列出有关计算 TM 模谐振频率的公式如下

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{m\pi}{a} \quad m=1,2,\dots \\ k_y &= \frac{n\pi}{b} \quad n=1,2,\dots \\ k_c &= \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \\ k_z &= \sqrt{\epsilon_r k_0^2 - k_c^2} \\ \alpha_1 &= \sqrt{k_c^2 - k_0^2} \\ \alpha_2 &= \sqrt{k_c^2 - \epsilon_2 k_0^2} \\ k_z L &= s\pi + \arctan\left(\frac{\epsilon_r \alpha_1}{k_z} \operatorname{th} \alpha_1 h_1\right) + \arctan\left(\frac{\epsilon_r \alpha_2}{\epsilon_2 k_z} \operatorname{th} \alpha_2 h_2\right) \quad s=0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (4-6-65)$$

TM 模同样可以标记为  $TM_{mn(\epsilon_r-\delta)}$  模,其最低次模为  $TM_{11s}$ ,其余都是高次模。

综上所述,在矩形介质谐振器中可以存在各种 TE 模和 TM 模,它们的最低次模分别为  $TE_{11s}$  模和  $TM_{11s}$  模。这两种最低次模哪一种的谐振频率最低,在  $a \times b$  一定的情况下,将由  $L$  的长度决定。当  $L$  短时,  $TE_{11s}$  模的谐振频率低于  $TE_{11s}$  模,而当  $L$  长时则情况相反。通常选取较短的  $L$  值,保证  $TE_{11s}$  模为工作主模。对于正方形介质谐振器,取  $L/a \geq 0.7$  可以保证  $TE_{11s}$  为主模。

### 3. 开波导法

对于图 4-6-7(a)所示的矩形介质谐振器,当用开波导法求解其场分布和谐振频率时,先将上、下金属板所限定的空间划分为若干个区域,如图 4-6-8 所示,图中除①、②、③、④和⑤区中有电磁场外,其余区域的电磁场被认为是忽略的。在开波导模型中同样可以单独存在 TE 模或 TM 模。这里仅分析 TE 模,因为分析 TM 模的方法与此类似,不再赘述。

求解图 4-6-7 所示矩形介质谐振器中的 TE 模时,先解  $H_z$  的 Helmholtz 方程,并由其边界条件得到各区的  $H_z$  分量为

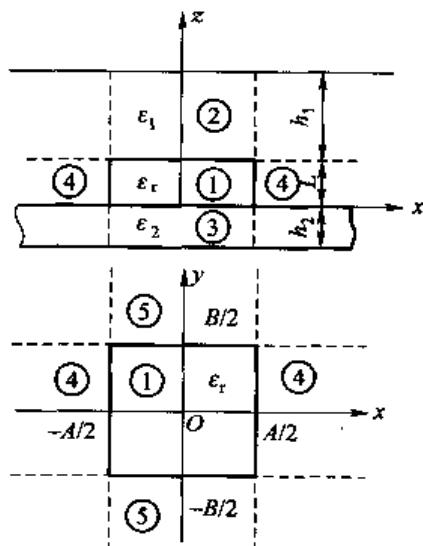


图 4-6-8 开波导法模型

$$\left. \begin{aligned} H_{z1} &= A_1 \cos(k_x x + \theta_x) \cos(k_y y + \theta_y) \cos(k_z z + \theta_z) \\ H_{z2} &= A_2 e^{-\alpha_x(|x| - a/2)} \cos(k_y y + \theta_y) \cos(k_z z + \theta_z) \\ H_{z3} &= A_3 \cos(k_x x + \theta_x) e^{-\alpha_y(|y| - b/2)} \cos(k_z z + \theta_z) \\ H_{z4} &= A_4 \cos(k_x x + \theta_x) \cos(k_y y + \theta_y) \operatorname{sh}[\alpha_4(L + h_1 - z)] \\ H_{z5} &= A_5 \cos(k_x x + \theta_x) \cos(k_y y + \theta_y) \operatorname{sh}[\alpha_5(z + h)] \end{aligned} \right\} \quad (4-6-66)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 &= \epsilon_r k_0^2 \\ -\alpha_x^2 + k_y^2 + k_z^2 &= k_0^2 \\ k_x^2 + k_y^2 - \alpha_4^2 &= k_0^2 \\ k_x^2 + k_y^2 - \alpha_5^2 &= \epsilon_r k_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (4-6-67)$$

其余分量( $E_x, E_y$  和  $H_x, H_y$ )可用式(4-6-56)求出。

根据 $|x|=a/2$ 和 $|y|=b/2$ 处的边界条件,得到

$$\left. \begin{aligned} k_x a &= m\pi - 2\arctan\left(\frac{k_x}{\epsilon_r \alpha_x}\right) \quad m=1,2,\dots \\ k_y b &= n\pi - 2\arctan\left(\frac{k_y}{\epsilon_r \alpha_y}\right) \quad n=1,2,\dots \end{aligned} \right\} \quad (4-6-68)$$

同时由结构的对称性可知,当 $m$ 为奇数时, $\theta_x=0$ ,当 $m$ 为偶数时, $\theta_x=\frac{\pi}{2}$ ;当 $n$ 为奇数时, $\theta_y=0$ ,当 $n$ 为偶数时, $\theta_y=\frac{\pi}{2}$ 。

在 $z=L$ 和 $z=0$ 的边界上,由边界条件可得出

$$k_z L = s\pi + \arctan\left[\frac{\alpha_4}{k_z} \operatorname{cth}(\alpha_4 h_1)\right] + \arctan\left[\frac{\alpha_5}{k_z} \operatorname{cth}(\alpha_5 h_2)\right] \quad (4-6-69)$$

式(4-6-69)与混合磁壁法求出的式(4-6-61)一致。将式(4-6-68)、式(4-6-69)与式(4-6-67)联立,求出 $k_x, k_y$ 和 $k_z$ 后,可计算出矩形介质谐振器 TE 模的谐振频率

$$\omega_r = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (4-6-70)$$

值得提出的是,用开波导法分析矩形介质谐振器仍能得到独立的 TE 模和 TM 模,选取适当的长度 $L$ ,可保证主模为 $\text{TE}_{110}$ 模。但这里的 $\text{TE}_{110}$ 模沿 $x$ 和 $y$ 方向的驻波分布都小于半个波,因为在开波导法中介质外区域 2 和 3 中均有电磁场,这种情况和混合磁壁法不同。

介质谐振器在微波电路中获得十分广泛的应用,图 4-6-9 所示为半圆环介质谐振器和微带耦合构成的微带滤波器。

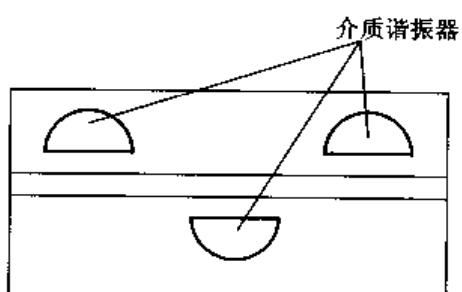


图 4-6-9 半圆环介质谐振器和微带耦合

4-7

## 开式谐振腔 Open Resonator

开式谐振腔，也称为开腔谐振器，是光学谐振结构在微波、毫米波频段的延伸，常用于微波介质材料的测量，也用于准光系统的滤波器、双工器等元件。

若将微波谐振腔的边壁移开，以减小导体损耗和可能的谐振模数，由此即形成由两个平行金属板构成的开式谐振器，亦称为 Fabry-Perot(法布里-珀罗)谐振腔，其原理与光学法布里-珀罗干涉仪相似。与在远红外和可见光的激光应用中的谐振器类似，这种开式谐振腔在毫米波段和亚毫米波段应用很广，在毫米波段频率介质参数测量中也很有用。

### 一、理想开式谐振腔的工作原理

图 4-7-1(a)是理想开式谐振腔的简单示意图，图 4-7-1(b)为其正视图。两块无限大平行导体板的间距为  $d$ ，则在其间可以存在如下 TEM 模驻波场 ( $a \gg \lambda, b \gg \lambda; d \gg \lambda; d < a, d < b$ ，且忽略边缘场)

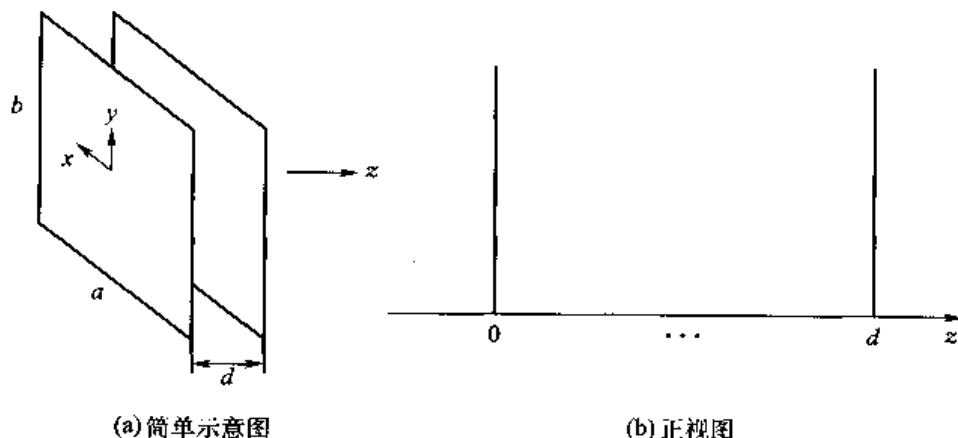


图 4-7-1 理想开式谐振腔

$$E_x = E_0 \sin k_0 z$$

$$E_y = \frac{jE_0}{\eta_0} \cos k_0 z \quad (4-7-1)$$

式(4-7-1)中， $E_0$  为任意振幅常数， $\eta_0 = 377 \Omega$  是自由空间固有阻抗，式(4-7-1)表示的场满足边界条件  $E_x|_{z=0}=0$ ；为了满足另一边界条件  $E_x|_{z=d}=0$ ，则要求

$$k_0 d = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4-7-2)$$

由此可得到谐振频率为

$$f = \frac{ck_0}{2\pi} = \frac{cn}{2d} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4-7-3)$$

在理想开式谐振腔中, 面积为  $1 \text{ m}^2$  的截面的电场储能为

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{4} \int_0^d |E_z|^2 dz = \frac{\epsilon_0 |E_0|^2}{4} \int_0^d \sin^2 \left( \frac{n\pi}{d} z \right) dz = \frac{\epsilon_0 |E_0|^2 d}{8} \quad (4-7-4)$$

面积为  $1 \text{ m}^2$  的截面的磁场储能为

$$W_m = \frac{\mu_0}{4} \int_0^d |H_y|^2 dz = \frac{\mu_0 |E_0|^2}{4 \eta_0^2} \int_0^d \cos^2 \frac{n\pi z}{d} dz = \frac{\mu_0 |E_0|^2 d}{8 \eta_0^2} = \frac{\epsilon_0 |E_0|^2 d}{8} \quad (4-7-5)$$

可见磁场储能等于电场储能。两个导体平板  $1 \text{ m}^2$  的功率损耗为

$$P_c = 2 \left( \frac{R_s}{2} \right) |H_y(z=0)|^2 = \frac{R_s |E_0|^2}{\eta_0^2} \quad (4-7-6)$$

因此, 由导体损耗的  $Q$  值为

$$Q_c = \frac{\omega(W_e + W_m)}{P_c} = \frac{\omega \epsilon_0 d \eta_0^2}{4 R_s} = \frac{\pi f \epsilon_0 d \eta_0^2}{2 R_s} = \frac{c \pi n \epsilon_0 \eta_0^2}{4 R_s} = \frac{\pi n \eta_0}{4 R_s} \quad (4-7-7)$$

结果说明, 这种开式谐振腔的  $Q$  值与模数  $n$  成正比, 即  $Q$  值随模数增多而增大, 其模数  $n$  常为几千或更大。

为使这种开式谐振腔装置有效使用, 两平板必须平行且要足够大, 以保证波在两平板之间来回反射时无明显的辐射。为此, 实用的开式谐振腔都是采用聚焦的球面镜或抛物面镜来限制能量, 如图 4-7-2 所示, 以获得稳定的模式。

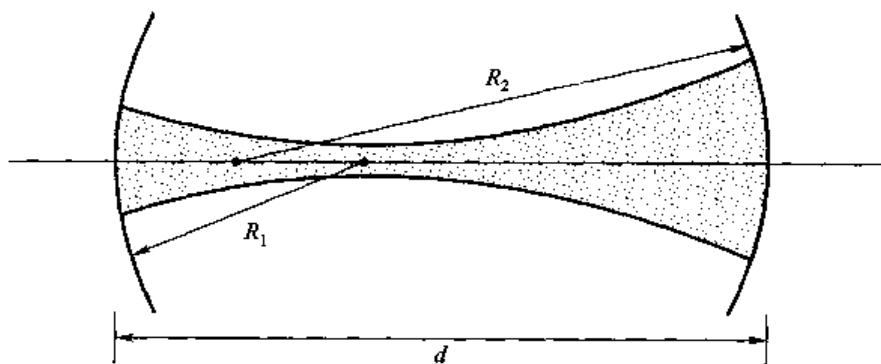


图 4-7-2 用球面镜构成的开式谐振腔

## 二、开式谐振腔

开式谐振腔是由不同曲率半径的凹、凸球面镜所构成, 它的稳定性如图 4-7-3 所示。应选取工作于稳定区的开式谐振腔, 这时波束经镜面反射后能重新聚焦, 以维持开式谐振腔的高  $Q$  的电磁振荡, 否则波束将散开, 而不能形成谐振, 稳定条件是

$$0 < \left(1 - \frac{D}{R_1}\right) \left(1 - \frac{D}{R_2}\right) < 1 \quad (4-7-8)$$

在介质计量学中常用的开式谐振腔如图 4-7-4 所示, 图 4-7-4(a) 为近共焦腔, 即双凹

镜,由于共焦时是不稳定的,故接近共焦,它们的焦点和曲率中心共线;图 4-7-4(b)是由凹镜和平面镜构成的近半共焦腔,将平面镜置于与图 4-7-4(a)的对称面处,便于在平面镜上放置待测样品;图 4-7-4(c)是短双凹腔,两凹镜间距较短;图 4-7-4(d)是近半球腔,也称近共心腔,它也有一个供放置样品的平面镜,用小平面镜比凹镜好,并可缩短腔长。

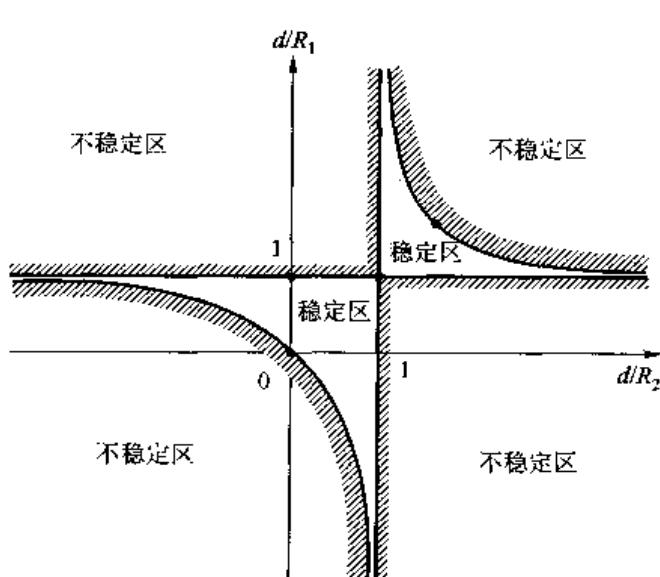


图 4-7-3 开放腔稳定性判别图

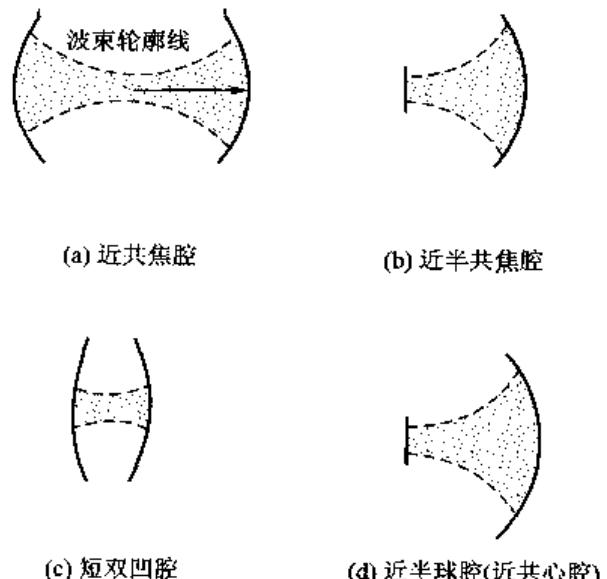


图 4-7-4 常用开式谐振腔

开式谐振腔的理论分析较封闭腔困难,这是由于它的场遍及整个空间(包括腔外空间),需要用电磁绕射理论加以研究。其他还有适合于分析球面镜的束射波理论(标量理论)、较精确的矢量理论和复源点法、迭代本征值方程法以及开端波导正规模法等。

### 1. 开式谐振腔的束射波理论

在实用的近共焦结构中,用球面镜而不用平面镜,这时绕射损耗可略,可用束射波理论进行分析,直角坐标中的波动方程式是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \quad (4-7-9)$$

式中,  $u$  是电磁场的任一  $x, y$  分量, 沿  $z$  方向的行波解为

$$u = \psi(x, y, z) \exp(-jkz) \quad (4-7-10)$$

其中,  $\psi$  是  $z$  的缓变函数, 沿  $z$  的变化主要包含在指数因子中, 这种波束与平面波间的区别是: 非均匀的强度分布; 波束随传播而扩展; 波前弯曲。将式(4-7-10)代入式(4-7-9), 可得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2jk \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (4-7-11)$$

若

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \ll 2k \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (4-7-12)$$

则式(4-7-11)近似为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2jk \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (4-7-13)$$

式(4-7-13)的解代入式(4-7-10)后,可得  $m, n$  模的波函数

$$u_{mn} = \frac{w_0}{w} H_m \left( \sqrt{2} \frac{X}{w} \right) H_n \left( \sqrt{2} \frac{Y}{w} \right) \exp \left[ -j(kz - \varphi) - jk \frac{r^2}{2R} \right] \exp \left( -\frac{r^2}{w^2} \right) \quad (4-7-14)$$

式中

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \quad w^2 = w_0^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right) \\ R &= z \left( 1 + \frac{z_0^2}{z} \right), \quad \varphi = (m+n+1) \arctan \left( \frac{z}{R_0} \right), \quad z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \end{aligned} \quad (4-7-15)$$

式中,  $z_0$  为束射腰位置;  $w_0$  为束射腰半径;  $R(z)$  为波前曲率半径;  $\varphi(z)$  为沿轴线上相位变化。

$H_m$  是  $m$  阶 Hermite 多项式, 它满足下列微分方程

$$\frac{d^2 H_m}{dx^2} - 2x \frac{dH_m}{dx} + 2m H_m = 0 \quad (4-7-16)$$

Hermite 多项式的前几阶为

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x \quad (4-7-17)$$

在圆柱坐标系中的  $p, l$  模的波函数为

$$u_{pl} = \left( \sqrt{2} \frac{r}{w} \right)^l L_p^l \left( 2 \frac{r^2}{w^2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \cos \left[ k \left( z + \frac{r^2}{2R} \right) - \varphi_{lp} \right] \right] \\ \left[ \sin \left[ k \left( z + \frac{r^2}{2R} \right) - \varphi_{lp} \right] \right] \end{array} \right\} \exp \left( -\frac{r^2}{w^2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{array} \right\} \quad (4-7-18)$$

式中,  $L_p^l$  为 Laguerre 多项式,  $p$  为径向模指标,  $l$  为角向模指标, 而  $L_p^l(x)$  满足下列微分方程

$$x \frac{d^2 L_p^l(x)}{dx^2} + (l+1-x) \frac{dL_p^l(x)}{dx} + p L_p^l(x) = 0 \quad (4-7-19)$$

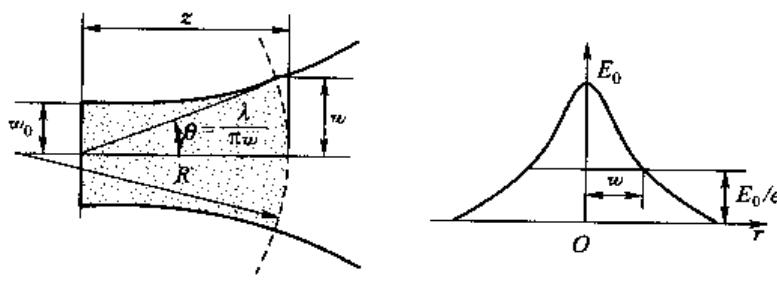
$$\text{又 } L_0^l(x) = 1, L_1^l(x) = l+1-x, L_2^l(x) = \frac{1}{2}(l+1)(l+2) - (l+2)x + \frac{1}{2}x^2$$

$$(4-7-20)$$

对所有模  $w(z)$ 、 $R(z)$  皆相同, 而相移则与模指标有关

$$\varphi(p, l; z) = (2p + l + 1) \arctan \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \quad (4-7-21)$$

由式(4-7-14)和式(4-7-18)可见,  $w(z)$  为  $u$  值降低到轴线上值的  $1/e$  的半径, 故幅度分布呈高斯型,  $w$  为波束半径或称为光斑, 沿  $z$  做抛物线分布。当  $|z|$  很大时,  $w(z)$  趋近于  $\frac{2|z|}{k w_0}$ , 即远方波束呈扇形, 扇形角  $\theta$  和光斑  $w_0$  的积为常数, 如图 4-7-5 所示。从式(4-7-15)可见,

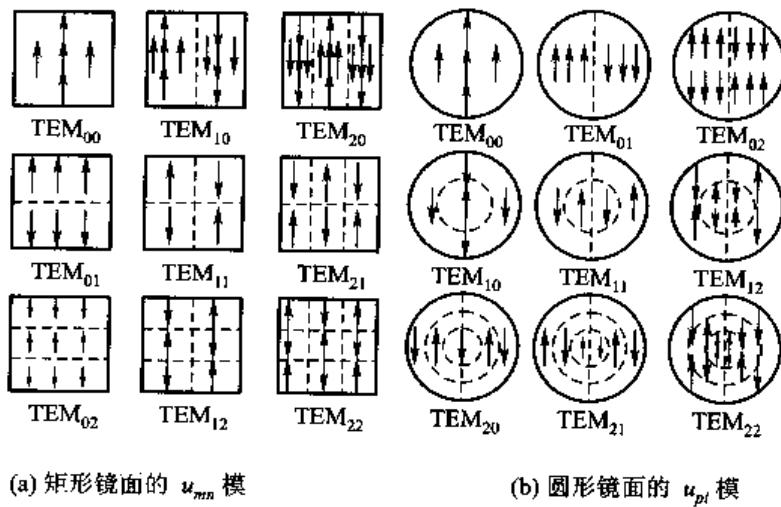


(a) 高斯波束轮廓

(b) 基模的幅度分布

图 4-7-5 高斯波束

等相位面为半径为  $R$  的球面,  $R(-z) = -R(z)$ , 即  $R(z)$  为奇函数(从  $z = -\infty$  看为凹曲面时, 则  $R > 0$ )。 $R(0) = \infty$ , 即在束腰处, 等相位面为平面。 $\varphi(z)$  是附加在自由空间行波  $kz$  上的相角, 它表示高斯波束的相角要比自由空间的大。 $u_{mn}$  和  $u_{pl}$  在横截面内的分布如图 4-7-6 所示。满足镜面边界条件的正、反向行波的叠加, 形成  $\text{TEM}_{mnq}$  或  $\text{TEM}_{plq}$  驻波模。

图 4-7-6  $u_{mn}$  模和  $u_{pl}$  模场分布

在计量学中常用束射波的主模  $\text{TEM}_{00q}$  模, 这时式(4-7-14)变为

$$u_{00} = \frac{w_0}{w} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \exp\left[-j(kz - \varphi) - jk \frac{r^2}{2R}\right] \quad (4-7-22)$$

对于有两个等曲率的镜面所构成的开式谐振腔, 可得到对称的驻波模(偶模)和反对称的驻波模(奇模)。在镜面上, 即  $z = \pm D/2$  处, 边界条件是  $E_t = 0$ 。若  $u = E_x$ , 则在  $r = 0$ (轴)上,  $z = \pm D/2$ ,  $E_x = 0$ 。据式(4-7-22)有

$$\text{偶模 } \cos\left(\frac{kD}{2} - \varphi\right) = 0$$

$$\text{奇模 } \sin\left(\frac{kD}{2} - \varphi\right) = 0$$

再据式(4-7-15), 可得到模谱方程(即谐振频率谱)

$$f_{mnq} = (q+1)f_0 + \left(\frac{f_0}{\pi}\right)(m+n+1)\arccos\left(1 - \frac{D}{R_0}\right) \quad (4-7-23)$$

式中,  $f_0 = \frac{c}{2D}$ , 可见, 当  $D = R_0$  时, 上式变为

$$f_{mnq} = (q+1)f_0 + \frac{f_0}{2}(m+n+1) \quad (4-7-24)$$

即共焦腔存在严重的简并模谱, 不宜采用。用于介质测量的镜面间距, 一般取  $D = (0.4 \sim 0.6)R_0$ , 这样对  $Q$  也几乎无影响。根据以上分析可见  $\text{TEM}_{mnq}$  模或  $\text{TEM}_{plq}$  模有以下特点:

① 波束的横向幅度变化可用 Hermite-Gaussian 函数(矩形孔径)或 Laguerre-Gaussian 函数(圆形孔径)来描述, 基模  $\text{TEM}_{00q}$  模为纯高斯分布。高斯波束是光学谐振器和开式谐振腔中的基本电磁振荡模式。

- ② 沿  $z$  轴, 波束半径  $w(z)$  做抛物线变化, 在腰部  $w_0$  达到最小。  
 ③ 旁轴波前近似球面, 其曲率半径在腰部  $R \rightarrow \infty$ , 为平面波, 在镜面上为  $R_0$ , 由此可确定  $w_0, z_0$  为

$$kw_0^2 = [D(2R_0 - D)]^{\frac{1}{2}} = 2z_0 \quad (4-7-25)$$

由于腰部半径  $w_0$  很小, 故可测小样品, 但在反射体上波束直径较大, 故若反射体孔径太小时, 绕射损耗太大。

- ④ 相位随  $z$  的变化要比平面波大一个  $\varphi$ , 根据式(4-7-21), 对于主模,  $p=l=0$ , 当  $z$  从  $-\infty$  变到  $+\infty$  时,  $\varphi$  由  $-\frac{\pi}{2}$  变到  $+\frac{\pi}{2}$ 。

## 2. 开式谐振腔的复源点理论

据复源点理论: 高斯波束是由位于复坐标  $(0, 0, -jz_0)$  处的源所产生的, 该处电偶极子的赫兹位为

$$\vec{P} = \hat{x}\psi = \hat{x} \frac{1}{r} \exp(-jkr) \quad (4-7-26)$$

式中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + jz_0)^2}^{\frac{1}{2}}$$

故

$$\psi(x, y, z) = \frac{jz_0}{z + jz_0} \exp \left\{ -jkz - jk \frac{x^2 + y^2}{2(z + jz_0)} \right\} \quad (4-7-27)$$

由此可求出开式谐振腔中奇、偶轴向谐振模的驻波解。

奇轴向模的场方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = -j \frac{w_0}{w} \exp \left( -\frac{r^2}{w^2} \right) \left[ \sin \left( kz - \varphi + \frac{kr^2}{2R_0} \right) \right. \\ \left. - \frac{2}{k^2 w w_0} \sin \left( kz - 2\varphi + \frac{kr^2}{2R_0} \right) \right. \\ \left. + \frac{5x^2 + 3y^2}{k^2 w_0^2 w^2} \sin \left( kz - 3\varphi + \frac{kr^2}{2R_0} \right) \right. \\ \left. - \frac{r^4}{k^2 w_0^3 w^3} \sin \left( kz - 4\varphi + \frac{kr^2}{2R_0} \right) \right] \\ E_y = -j \frac{2xy}{k^2 w_0 w^3} \exp \left( -\frac{r^2}{w^2} \right) \sin \left( kz - 3\varphi + \frac{kr^2}{2R_0} \right) \\ E_z = j \frac{2x}{kw^2} \exp \left( -\frac{r^2}{w^2} \right) \cos \left( kz - 2\varphi + \frac{kr^2}{2R_0} \right) \end{array} \right. \quad (4-7-28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{2xy}{k^2 w_0 w^3} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \cos\left(kz - 3\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \\ H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{w_0}{w} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left[ \cos\left(kz - \varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \right. \\ \quad - \frac{2}{k^2 w w_0} \cos\left(kz - 2\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \\ \quad \left. + \frac{3x^2 + 5y^2}{k^2 w_0^2 w^2} \cos\left(kz - 3\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) - \frac{r^4}{k^2 w_0^3 w^3} \cos\left(kz - 4\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \right] \\ H_z = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{2y}{kw^2} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \sin\left(kz - 2\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \end{array} \right. \quad (4-7-29)$$

偶轴向模的场方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{w_0}{w} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left[ \cos\left(kz - \varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) - \frac{2}{k^2 w w_0} \cos\left(kz - 2\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \right. \\ \quad \left. + \frac{5x^2 + 3y^2}{k^2 w_0^2 w^2} \cos\left(kz - 3\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) - \frac{r^4}{k^2 w_0^3 w^3} \cos\left(kz - 4\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \right] \\ E_y = \frac{2xy}{k^2 w_0 w^3} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \cos\left(kz - 3\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \\ E_z = \frac{2x}{kw^2} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \sin\left(kz - 2\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \end{array} \right. \quad (4-7-30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = -j \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{2xy}{k^2 w_0 w^3} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \sin\left(kz - 3\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \\ H_y = -j \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left[ \sin\left(kz - \varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \right. \\ \quad - \frac{2}{k^2 w w_0} \sin\left(kz - 2\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \\ \quad \left. + \frac{3x^2 + 5y^2}{k^2 w_0^2 w^2} \sin\left(kz - 3\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) - \frac{r^4}{k^2 w_0^3 w^3} \sin\left(kz - 4\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \right] \\ H_z = j \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{2y}{kw^2} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \cos\left(kz - 2\varphi + \frac{kr^2}{2R_0}\right) \end{array} \right. \quad (4-7-31)$$

并可求出基模的谐振频率为

$$f_{00q} = f_0 \left\{ q + 1 + \frac{1}{\pi} \arccos \left( 1 - \frac{D}{R_0} \right) - \frac{1}{2\pi k R_0} \right\} \quad (4-7-32)$$

该式比式(4-7-23)多一项, 其精度可达  $(kw_0)^{-6}$  以内, 而式(4-7-23)的精度则为  $(kw_0)^{-4}$ 。

若将厚度为  $2t$  的介质片置于开式谐振腔的对称面上, 这时根据  $z=t$  处轴上  $\frac{E_x}{H_y}$  的匹配条件可得到谐振方程

$$\text{对称模 } \left( \frac{1}{n} \right) \operatorname{ctan}(nk_s t - \varphi_T) = \tan(k_s d - \varphi_D) \quad (4-7-33)$$

$$\text{反对称模 } \left( \frac{1}{n} \right) \tan(nk_s t - \varphi_T) = -\tan(k_s d - \varphi_D) \quad (4-7-34)$$

式中

$$\begin{cases} \varphi_T = \arctan\left(\frac{t}{nz_0}\right) - \arctan\left(\frac{1}{nkR_1(t)}\right) \\ \varphi_D = \arctan\left(\frac{d'}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{1}{kR_0}\right) - \arctan\left(\frac{t}{nz_0}\right) + \arctan\left(\frac{1}{kR_2(t)}\right) \end{cases} \quad (4-7-35)$$

$$\begin{cases} w_i^2(t) = w_i^2 = w_0^2 \left(1 + \frac{t^2}{z_0^2}\right) \\ R_1(t) = t + \frac{n^2 z_0^2}{t} \\ R_2(t) = \frac{t}{n} + \frac{n z_0^2}{t} \\ z_0 = [d'(R_0 + d)]^{1/2} \\ d' = d + \frac{t}{n} \end{cases} \quad (4-7-36)$$

在精密测量  $\epsilon$  时, 可采用频率变化法或腔长变化法。在频率变化法中, 先要建立正确的腔长  $D$ , 为此先测出“空”开式谐振腔的谐振频率  $f_0$ , 据对  $D$  的初步测量, 消去  $q$  的任意性, 然后由式(4-7-32)可求出  $D$ 。然后插入样品测出谐振频率  $f_1$ , 而  $f_1$  和介质加载腔估计初值  $f$  间有下列变分式所导出的关系, 而  $f$  则由式(4-7-33)、式(4-7-34)求得。

$$\frac{f_1}{f} = 1 + \frac{t(n-\Delta)}{n^2 k^2 w_i^2(t\Delta+d)} + \frac{3}{4k^2(t\Delta+d)R_0} \quad (4-7-37)$$

式中,  $\Delta$  对于对称和反对称模分别为

$$\begin{cases} \Delta_s = \frac{n^2}{n^2 \sin^2(nk_s t - \varphi_T) + \cos^2(nk_s t - \varphi_T)} \\ \Delta_a = \frac{n^2}{n^2 \cos^2(nk_a t - \varphi_T) + \sin^2(nk_a t - \varphi_T)} \end{cases} \quad (4-7-38)$$

式(4-7-37)后两项为校正项, 以改进初始估值, 前者为介质交界面校正项, 后者为镜面校正项。先对式(4-7-37)中的  $n$  有一个初始估值, 然后用逐次近似来改进。最后由式(4-7-33)、式(4-7-34)超越方程解出  $n$ 。

在腔长变化法中, 先如前述建立正确的腔长  $D$ , 其半长度为  $d_0$ , 然后插入样品, 这时半长度为  $d+t$ 。要求在同一频率下重新谐振, 将  $d_0$  缩短  $p$ , 这时半长度为

$$d+t = d_0 - p + \frac{t(n-\Delta)}{n^2 k^2 w_i^2} + \frac{3}{4k^2 R_0} \quad (4-7-39)$$

这里测出的长度已用界面和镜面校正项加以改进。其余计算步骤仍按频率变化法, 用式(4-7-33)、式(4-7-34)、式(4-7-35)、式(4-7-36)进行计算。

### 三、开腔 $Q$ 值及其应用

开腔的品质因数  $Q$  是较难研究的一个参数, 然而其重要性又十分明显。

这里将采用频率增量法, 也即由已知的谐振频率  $f_0$  的关系得到  $Q$  值表达式, 这一方法本身也说明了  $f_0$  和  $Q$  值是紧密相连的一对孪生参量。

研究  $R_1 = R_2 = R_0$  的对称电磁开腔  $\text{TEM}_{plq}$  模式, 已知谐振频率在忽略高阶无穷小的情况下, 为

$$f_0 = \frac{C}{2D} \left[ q + 1 + \left( \frac{2p+l \pm 1}{\pi} \right) \arccos \left( 1 - \frac{D}{R_0} \right) + \frac{2p^2 + 2pl - l^2 + 2p + l - 2 \pm 4l}{4\pi k R_0} \right] \quad (4-7-40)$$

式中,  $c$  为光速;  $k$  为波数;  $p$  为径向模数;  $l$  为矢位模数;  $q$  为轴向模数。其中  $\pm$  分别对应  $\text{TEM}_{plq}$  系列 A 和系列 B 模式。

### 1. 导体 $Q_c$ 值和衍射 $Q_s$ 值

电磁开腔的  $Q$  值主要来自三个方面: 由于镜面有限电导率  $\delta_c$  (或  $\sigma_c$ ) 造成的导体  $Q_c$  值, 由于镜面尺寸有限而造成的向外泄漏衍射  $Q_s$  值和小孔耦合  $Q_e$  值。这里主要考虑前两项。

一般情况下, 可近似认为镜面上电场的法向分量为 0, 应用频率增量法, 有

$$Q_c = -\frac{f}{2\sigma_c} \cdot \frac{1}{\partial f / \partial D} \quad (4-7-41)$$

式中,  $\sigma_c$  是镜面导体的集肤深度,  $\partial f / \partial D$  表示镜面沿轴向向外推时谐振频率的变化率, 于是得到

$$Q_c = \frac{D}{2\sigma_c} \cdot \frac{1 + (2p^2 + 2pl - l^2 + 2p + l - 2 \pm 4l) / 4k^2 R_0 D}{1 - (2p + l + 1) / [k \sqrt{D(2R_0 - D)}]} \quad (4-7-42)$$

上式是  $Q_c$  精度较高的一个公式。

衍射  $Q_s$  值可从能量传播速度出发, 得到

$$Q_s = \frac{2\pi D}{\lambda \xi_s} \cdot \frac{1}{1 - (2p + l + 1) / [k \sqrt{D(2R_0 - D)}]} \quad (4-7-43)$$

式(4-7-43)中,  $\xi_s$  表示镜面有限尺寸所造成的衍射损耗(%);  $\xi_s \approx \exp(-2A^2/\omega_{pl}^2)$ ,  $\omega_{pl}$  为  $\text{TEM}_{plq}$  模的波束斑点半圆, 在高次模条件下,  $\omega_{pl} \approx \sqrt{2p + l + 0.5}\omega_{0s}$ ,  $\omega_{0s}$  为对应基模的波束斑点半径, 图 4-7-7 给出  $Q$  值的计算模型。

### 2. 开腔测量介质样品

若将折射率为  $n (= \sqrt{\epsilon_r \mu_r})$  的片状介质样品置于近共焦腔的中心面上, 如图 4-7-8(a) 所示。对开式谐振腔进行了介质加载, 设样品表面是和相应波前重合的

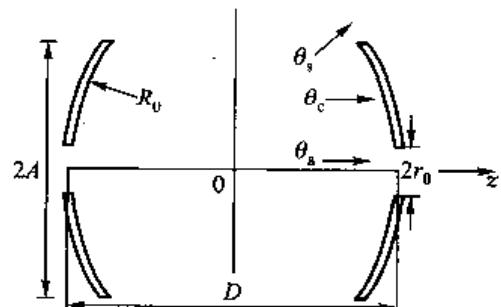
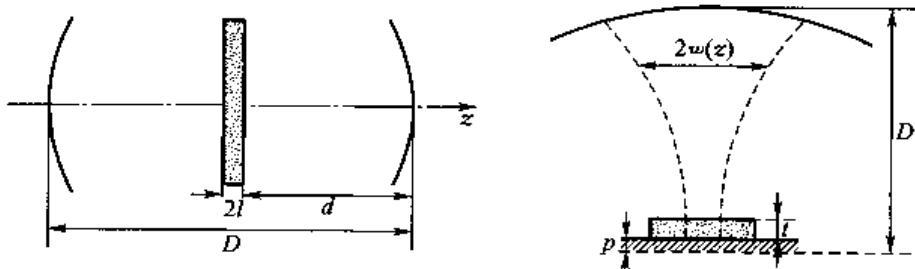


图 4-7-7 开腔  $Q$  值计算模型



(a) 介质加载近共焦腔

(b) 介质加载球共焦腔

图 4-7-8 介质加载球面镜开式谐振腔

球面,据高斯波束理论,  $z=0$  为电场腹点的对称模,其谐振方程是

$$\frac{1}{n} \tan(nk_s t - \varphi_t) = \tan(k_s d - \varphi_d) \quad (4-7-44)$$

对于反对称模,则有

$$\frac{1}{n} \tan(nk_s t - \varphi_t) = -\tan(k_s d - \varphi_d) \quad (4-7-45)$$

式中

$$\begin{cases} \varphi_t = \arctan\left(\frac{2t}{nk\omega_0^2}\right) \\ \varphi_d = \arctan\left\{\frac{2}{k\omega_0^2}\left(d + \frac{t}{n^2}\right)\right\} - \arctan\left(\frac{2t}{n^2 k\omega_0^2}\right) \end{cases} \quad (4-7-46)$$

是非平面波所引起的附加相移。

其中

$$k\omega_0^2 = 2 \sqrt{\left(d + \frac{t}{n^2}\right)\left(R_0 - d - \frac{t}{n^2}\right)} \quad (4-7-47)$$

$n = \sqrt{\epsilon_r}$ ,  $k_s$ 、 $k_a$  为对称和反对称时的波数  $k = \frac{\omega}{c}$ , 从式(4-7-47)可见,  $k\omega_0^2$  与频率无关, 故  $\varphi_t$ 、 $\varphi_d$  也与频率无关, 仅与  $n$  和几何参数有关。

在介质计量学中, 需从实验数据中提取  $n$ , 若  $d$  已知, 则可从式(4-7-44)或式(4-7-45)中解出  $n$ 。对于薄介质片, 式(4-7-44)较为精确, 因介质片处于对称模电场腹点上, 引起的频移要比反对称模大, 为了消除理论假定所引起的误差,  $D$  是由无介质加载时空腔的谐振频率式(4-7-23)计算得出的, 式(4-7-44)可写成超越方程  $f(n)=0$ , 可用 Muller(穆勒)迭代法求解, 经过逐次对分和抛物线插值求得  $n$ 。

实际介质片表面为平面时引起的误差, 可用微扰理论求解样品平面和波前球面间隙中的储能, 由此引起的频移为

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{(\epsilon_r - 1)t \sin^2(kd - \varphi_d)}{\epsilon_r k^2 \omega_0^2 (\Delta t + d)} \quad (4-7-48)$$

式中,  $\Delta$  对于对称和反对称模分别为

$$\begin{cases} \Delta_s = \frac{n^2}{n^2 \sin(nk_s t - \varphi_t) + \cos^2(nk_s t - \varphi_t)} \\ \Delta_a = \frac{n^2}{n^2 \cos^2(nk_a t - \varphi_t) + \sin^2(nk_a t - \varphi_t)} \end{cases} \quad (4-7-49)$$

从式(4-7-31)可得到其上限值为

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \leq \frac{2t}{k^2 \omega_0^2 D} \quad (4-7-50)$$

对于低损耗介质, 用上述无耗介质推导的公式, 在确定  $\epsilon_r$  时, 其误差为  $\frac{1}{4} \tan^2 \delta$ 。

低功率损耗法, 可从介质加载前后测得的  $Q$  值, 计算出介质损耗正切  $\tan \delta$ 。限制开式谐振腔  $Q$  值的功耗主要有: 绕射损耗、镜面有限电导率、激励源和检波器的负载效应、耦合孔的直接辐射等, 其中主要的是镜面电阻损耗和耦合损耗。若空腔包含介电常数相同但无耗样品时的  $Q$

为  $Q_0$ , 插入有耗介质样品后为  $Q_L$ , 介质样品影响储能, 并引入功耗, 定义

$$\frac{1}{Q_e} = \frac{1}{Q_L} - \frac{1}{Q_0}$$

$$Q'_0 = Q_0 \frac{2(\Delta_s + d)}{D(\Delta_s + 1)} \quad (4-7-51)$$

则可求出

$$\tan \delta = \frac{1}{Q_e} \frac{t\Delta_s + d}{t\Delta_s + \frac{1}{2k} \sin 2(kd - \varphi d)} \quad (4-7-52)$$

式中  $1 \leq \Delta_s \leq \epsilon_r$ , 在导出上述公式时, 略去了  $(kw_0)^2$  项, 由此引起的误差  $< 0.5\%$ 。

当测量固态或液态样品时, 采用图 4-7-8(b) 所示的结构较为方便, 这时相当于工作在奇模, 故式(4-7-45)中应取  $d = D - t - p$ , 而  $D$  可据下式用迭代法求出

$$D = \frac{1}{k} \left[ (q+1)\pi + \arctan \left( \frac{D}{k_0 - D} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4-7-53)$$

然后将  $D, t, p$  等代入式(4-7-45)后, 迭代求解  $n$ 。若选取样品厚度接近介质内半波长, 则介质表面上的电场很弱, 因此, 小的不垂直或表面的不平整影响较小, 但平行度的误差应小于  $0.1^\circ$ 。

微波、毫米波段的开式谐振腔, 可用位于球镜中心处的矩形波导  $TE_{10}$  模进行激励, 它相当于磁偶极子向半空间的辐射, 而耦合系数的选取, 则取决于所要求的信噪比和  $Q$  允许恶化的程度。



## 腔微扰 Perturbation of Cavity

在前面已经讨论了两部分: 理想微波谐振腔和耦合腔。现在将进一步讨论非理想微波谐振腔。这里把非理想微波谐振腔特指为腔内放物体、腔形状的改变等。

此类问题严格说来必须从 Maxwell 方程组出发给出新模式。但是, 对任意微波谐振腔建立严格的理论十分困难。

微扰法是认为腔内场模式基本不变, 而所变的只是谐振频率, 由此给出近似结果。微扰法又称为摄动法, 在物理学中得到广泛应用。它是小变化情况下最常用的一种近似方法。

已知原问题

$$L_0(u_0) = g$$

式中,  $L_0$  为原算子;  $U_0$  为原问题解。

现要求

$$L(u) = g$$

$L = L_0 + \Delta L$  算子发生了小的变化

$u = u_0 + \delta u$  解也随之也发生小的变化,  $\delta$  为一阶小量

于是写出

$$(L_0 + \Delta L)(u_0 + \delta u) = g$$

$$L_0(u_0) + L_0(\delta u) + \Delta L(u_0) + \Delta L(\delta u) = g$$

略去  $\Delta L(\delta u)$  的二阶小量, 又计及  $L_0(u_0) = g$ , 可知

$$L_0(\delta u) = -\Delta L(u_0)$$

$$\delta = \frac{-\Delta L(u_0)}{L_0(u)}$$

于是微扰法又可写成

$$u = u_0 - \frac{\Delta L(u_0)}{L_0(u)} u$$

## 一、腔内介质的微扰

未受扰腔和微扰腔分别如图 4-8-1(a)、(b) 所示, 并提出如下的微扰约定:

① 场改变量  $|\vec{E} - \vec{E}_0|$  和  $|\vec{H} - \vec{H}_0|$  是一阶小量。

②  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  是一阶小量。

③  $\Delta\mu\Delta V$  和  $\Delta\epsilon\Delta V$  是一阶小量。

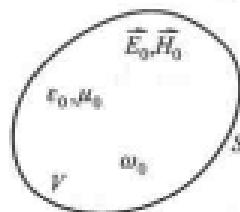
其中第③个微扰约定更加严格地表述了

$\iint_V \Delta\mu dV$  和  $\iint_V \Delta\epsilon dV$  是一阶小量。在处理中将略去二阶以上量。

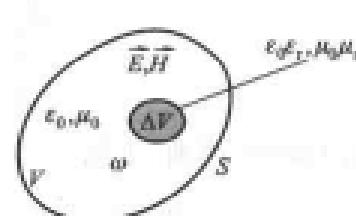
介质微扰可以表示成

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_0 & \notin \Delta V \\ \epsilon_0 \epsilon_r & \in \Delta V \end{cases} \quad (4-8-1)$$

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 & \notin \Delta V \\ \mu_0 \mu_r & \in \Delta V \end{cases} \quad (4-8-2)$$



(a) 未受扰腔



(b) 微扰腔

图 4-8-1 介质微扰腔

写出相应的 Maxwell 方程组

原问题

$$\begin{cases} -\nabla \times \vec{E}_0 = j\omega_0 \mu_0 \vec{H}_0 \\ \nabla \times \vec{H}_0 = j\omega_0 \epsilon_0 \vec{E}_0 \end{cases}$$

微扰问题

$$\begin{cases} -\nabla \times \vec{E} = j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \end{cases}$$

由原问题的 Maxwell 方程组可写出

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E}_0' = j\omega_0 \mu_0 \vec{H}_0' \\ \nabla \times \vec{H}_0' = -j\omega_0 \epsilon_0 \vec{E}_0' \end{cases} \quad (4-8-3)$$

于是由矢量点积可得两组方程

$$\begin{cases} \vec{E}_0^* \cdot \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \\ \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E}_0^* = j\omega_0\mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \end{cases} \quad (4-8-4)$$

$$\begin{cases} \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}_0^* = -j\omega_0\epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \\ \vec{H}_0^* \cdot \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \end{cases} \quad (4-8-5)$$

根据矢量公式

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad (4-8-6)$$

可知

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{H}) &= \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}_0^*) - \vec{E}_0^* \cdot (\nabla \times \vec{H}) \\ &= j\omega_0\mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} - j\omega\epsilon \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (4-8-7)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_0^*) &= \vec{H}_0^* \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}_0^* \\ &= -j\omega\mu \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} + j\omega_0\epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (4-8-8)$$

把上面结果合在一起考虑为

$$\nabla \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{H}) + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_0^*) = j(\omega_0\mu_0 - \omega\mu) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} + j(\omega_0\epsilon_0 - \omega\epsilon) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \quad (4-8-9)$$

再对两边进行体积分

$$\begin{aligned} &\iiint_V [\nabla \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*)] dV \\ &= j \iiint_V [(\omega_0\mu_0 - \omega\mu) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} + (\omega_0\epsilon_0 - \omega\epsilon) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}] dV \end{aligned} \quad (4-8-10)$$

应用 Gauss(高斯)定理

$$\iiint_V [\nabla \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*)] dV = \iint_S [\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*] \cdot \hat{n} dS \quad (4-8-11)$$

和如图 4-8-2 所示的矢量循环关系, 有

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (4-8-12)$$

故有

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\hat{n} \times \vec{E}_0^*) \\ \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_0^*) = \vec{H}_0^* \cdot (\hat{n} \times \vec{E}) \end{cases} \quad (4-8-13)$$

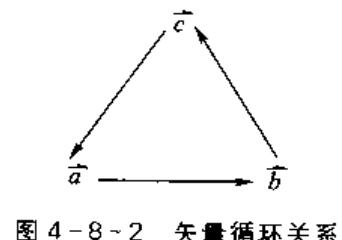


图 4-8-2 矢量循环关系

对于理想导体的 S 壁条件有

$$\begin{cases} \hat{n} \times \vec{E}_0^* = 0 \\ \hat{n} \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (4-8-14)$$

所以得到

$$\iiint_V [(\omega\epsilon - \omega_0\epsilon_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + (\omega\mu - \omega_0\mu_0) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV = 0 \quad (4-8-15)$$

现在利用  $\epsilon, \mu$  在  $\Delta V$  内和  $\Delta V$  外不同的条件

$$\begin{aligned} & \iiint_{V-\Delta V} [(\omega - \omega_0) \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + (\omega - \omega_0) \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV \\ &= - \iiint_{\Delta V} [\omega_0 (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + \omega_0 (\mu - \mu_0) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV \\ & - \iiint_{\Delta V} \Delta\omega [\epsilon \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + \mu \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV \end{aligned} \quad (4-8-16)$$

上式中已计及

$$\begin{cases} \omega\epsilon - \omega_0\epsilon_0 = (\omega_0 + \Delta\omega)\epsilon - \omega_0\epsilon_0 = \omega_0(\epsilon - \epsilon_0) + \Delta\omega\epsilon \\ \omega\mu - \omega_0\mu_0 = (\omega_0 + \Delta\omega)\mu - \omega_0\mu_0 = \omega_0(\mu - \mu_0) + \Delta\omega\mu \end{cases} \quad (4-8-17)$$

对于式(4-8-16)左边  $\Delta V$  可移至右边

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\omega - \omega_0) [\epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV \\ &= - \iiint_{\Delta V} \omega_0 [(\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + (\mu - \mu_0) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV \\ & - \iiint_{\Delta V} (\omega - \omega_0) [(\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + (\mu - \mu_0) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV \end{aligned} \quad (4-8-18)$$

如果令

$$\begin{cases} W = \frac{1}{4} \iiint_V (\epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}) dV \\ \Delta W = \frac{1}{4} \iiint_{\Delta V} [(\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + (\mu - \mu_0) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV \end{cases} \quad (4-8-19)$$

可清楚得到

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = - \frac{\Delta W}{W} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta W}{W}\right)} \quad (4-8-20)$$

只要  $\Delta W$  是一阶小量, 即又有

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx - \frac{\Delta W}{W} \quad (4-8-21)$$

满足  $\Delta W$  是一阶小量的要求是  $\Delta V$  为一阶小量,  $\Delta\epsilon, \Delta\mu$  不很大, 或者说  $\Delta\epsilon, \Delta\mu$  为一阶小量 (这两者只要满足其中一个条件即可)。对于  $V$  积分的能量  $W$ , 总有  $\vec{E} \approx \vec{E}_0, \vec{H} \approx \vec{H}_0$ , 而在  $\Delta V$  内如果相应  $\Delta S$  表面  $\vec{E}$  与  $\vec{E}_0$  均处于切向, 则也有  $\vec{E} \approx \vec{E}_0, \vec{H} \approx \vec{H}_0$  且得到

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = - \frac{\iiint_{\Delta V} [(\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + (\mu - \mu_0) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}_0] dV}{\iiint_V (\epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}_0) dV} \quad (4-8-22)$$

如果在  $\Delta V$  内相应  $\Delta S$  表面  $\vec{E}$  与  $\vec{E}_0$  均处于法向, 则

$$\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0$$

或  $\vec{H}$  与  $\vec{H}_0$  亦处于法向

$$\mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 \vec{H}_0$$

于是

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = - \frac{\iiint_{\Delta V} \left[ \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + \left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right) \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}_0 \right] dV}{\iiint_V (\epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}_0) dV} \quad (4-8-23)$$

上面两种均属讨论的特殊情况, 对于一般公式可写出

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = - \frac{\iiint_{\Delta V} [(\epsilon - \epsilon_0) C_e \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + (\mu - \mu_0) C_m \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}_0] dV}{\iiint_V (\epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}_0) dV} \quad (4-8-24)$$

常见的  $C_e$  和  $C_m$  因子如图 4-8-3 所示。

其中

$$\begin{cases} \vec{E} = C_e \vec{E}_0 \\ \vec{H} = C_m \vec{H}_0 \end{cases}$$

[例 1] 如图 4-8-4 所示, 在  $TE_{101}$  模微波谐振腔的中间放一块宽度为  $d$  的  $\epsilon_r$  介质板, 求  $(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0})$ 。

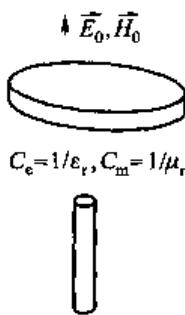


图 4-8-3 介质样品的  $C_e$  和  $C_m$

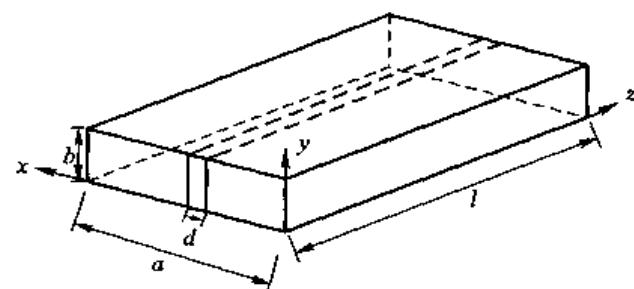


图 4-8-4 填充介质板的微波谐振腔

[解] 由  $\vec{E}_0 = \hat{y} E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l}z\right)$ , 可以得到

$$\begin{aligned} W &= 2 \iiint_{\Delta V} (\epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0) dV \\ &= 2 \int_0^a \int_0^b \int_0^l \epsilon_0 E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{l}z\right) dx dy dz \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} ab l E_0^2 \end{aligned}$$

$$\Delta W = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{4} b d E_0^2 \left[ 1 - \frac{a}{\pi d} \sin \left( \frac{\pi d}{a} \right) \right]$$

则有

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \left( \frac{d}{a} \right) \left[ 1 - \frac{a}{\pi d} \sin \left( \frac{\pi d}{a} \right) \right] (\epsilon_r - 1)$$

[例 2] 如图 4-8-5 所示, 在 TE<sub>101</sub> 模微波谐振腔中, 填一层厚度为  $d$  的介质块, 求  $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ 。

[解] 与例 1 类似, 易知  $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\left(\frac{d}{b}\right)$ 。

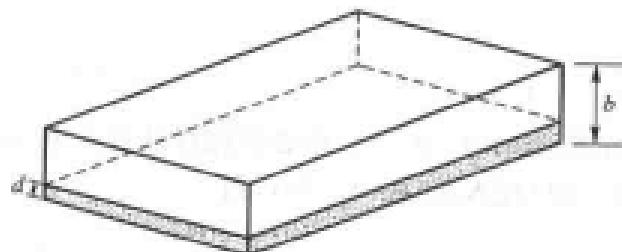


图 4-8-5 填充介质层的微波谐振腔

## 二、介质样品腔

在微波工程中, 矩形 TE<sub>10p</sub> 模微波谐振腔中间放介质样品柱(其中,  $p$  取奇数)即构成介质样品腔, 如图 4-8-6 所示。

对于实际应用的情况是: 利用未放介质样品时微波谐振腔的频率  $\omega_0$  和放介质样品时对应的  $\omega$  求出介质的  $\epsilon_r$ 。

利用未放介质样品时微波谐振腔的品质因数  $Q_0$  和放介质样品对应的  $Q$  值求出介质的  $\tan \delta$ , 已经知道

$$\epsilon = \epsilon_r(1 - j\tan \delta)\epsilon_0 \quad (4-8-25)$$

若写出  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  则有

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \\ \epsilon'' = \epsilon_0 \epsilon_r \tan \delta \end{cases} \quad (4-8-26)$$

实际上介质样品的  $\Delta S$  很小, 应用介质微扰结果

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\iiint_{\Delta V} (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 dV}{\iiint_V (\epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}_0) dV} \quad (4-8-27)$$

上面结果已认为介质是电介质, 也即  $\mu = \mu_0$ , 考虑到谐振时有电能 = 磁能

$$(\epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}_0) = 2\epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 \quad (4-8-28)$$

令  $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\Delta f}{f_0}$  也即  $\Delta f = |f - f_0|$ , 于是

$$\frac{2\Delta f}{f_0} = (\epsilon_r - 1) \frac{\iiint_{\Delta V} \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 dV}{\iiint_V \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 dV} \quad (4-8-29)$$

设  $\vec{E}_0 = \vec{E}_m \sin \left( \frac{\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{p\pi}{l} z \right)$

$$\iiint_V \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 dV = \int_0^a \int_0^b \int_0^l \epsilon_0 E_m^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) dx dy dz = \frac{1}{4} ab l E_m^2 \epsilon_0 = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_m^2 V \quad (4-8-30)$$

$$\iiint_{\Delta V} \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 dV = \epsilon_0 E_m^2 \Delta V \quad (4-8-31)$$

注意在式(4-8-31)中必须把样品放在电场最强处,若在中间则必须令  $p=$  奇数(odd),将式(4-8-31)代入式(4-8-29),得

$$\epsilon_r = 1 + \frac{V}{4\Delta V} \cdot \frac{2\Delta f}{f_0} \quad (4-8-32)$$

式(4-8-32)是普通公式,具体问题有

$$\epsilon_r = 1 + \frac{ab l}{4\Delta V} \cdot \frac{2\Delta f}{f_0} \quad (4-8-33)$$

式(4-8-33)是利用谐振频率的变化求出介质样品  $\epsilon_r$  的公式。

对于一般有耗的复介质,可应用复频率  $\tilde{\omega}$ ,式(4-8-27)变为

$$2 \cdot \frac{\tilde{\omega} - \omega_0}{\omega_0} = - \frac{\iiint_{\Delta V} (\tilde{\epsilon} - \epsilon_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 dV}{\iiint_V \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 dV} \quad (4-8-34)$$

令  $\tilde{\omega} = \omega' + j\omega''$  代入式(4-8-34)有两部分

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \frac{\omega' - \omega_0}{\omega_0} = - \frac{\iiint_{\Delta V} (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 dV}{\iiint_V \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 dV} \\ \frac{2\omega''}{\omega_0} = \frac{\iiint_{\Delta V} \epsilon'' \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 dV}{\iiint_V \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 dV} \end{array} \right. \quad (4-8-35)$$

计及  $\omega'' = \frac{\omega_0}{2Q_{介}}$ ,  $\epsilon'' = \epsilon_0 \epsilon_r \tan \delta$  则有

$$\frac{1}{Q_{介}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \tan \delta E_m^2 \Delta V}{\frac{1}{4} \epsilon_0 E_m^2 V} = \frac{4 \epsilon_r \tan \delta \Delta V}{V} \quad (4-8-36)$$

$$\frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{介}} = \frac{1}{Q} \quad (4-8-37)$$

最后导出

$$\tan \delta = \frac{1}{4} \left( \frac{V}{\Delta V} \right) \frac{1}{\epsilon_r} \left( \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} \right) \quad (4-8-38)$$

式(4-8-38)是利用品质因数的变化求出介质的  $\tan \delta$ 。

### 三、腔壁微扰

下面讨论腔壁微扰,如图 4-8-7 所示。

在问题中假定前后两种情况媒质均为 $\epsilon$ 和 $\mu$ , 只是微扰后导体覆盖 $S' = S - \Delta S$ , 包围 $V' = V - \Delta V$ 。

写出 Maxwell 方程组

$$\begin{aligned} -\nabla \times \vec{E}_0 &= j\omega_0 \mu \vec{H}_0 & -\nabla \times \vec{E} &= j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H}_0 &= j\omega_0 \epsilon \vec{E}_0 & \nabla \times \vec{H} &= j\omega \epsilon \vec{E} \end{aligned} \quad (4-8-39)$$

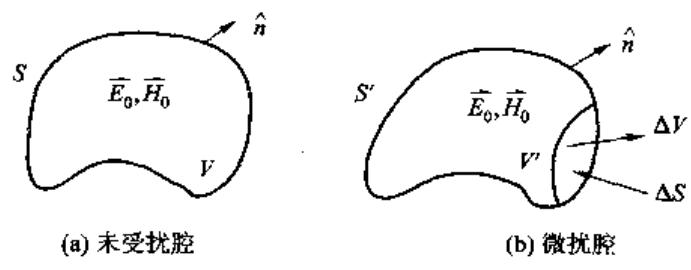


图 4-8-7 腔壁微扰

类似地得到

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E}_0^*) = j\omega \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}_0^* - j\omega_0 \mu \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \\ \nabla \cdot (\vec{H}_0^* \times \vec{E}) = j\omega \mu \vec{H} \cdot \vec{H}_0^* - j\omega_0 \epsilon \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \end{cases} \quad (4-8-40)$$

也进行体积分, 只对体积 $V'$ 作积分, 考虑到在整个 $S'$ 上均有

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \quad (4-8-41)$$

再应用 Gauss 定理可知

$$\oint_S \vec{H} \times \vec{E}_0^* \cdot \hat{n} dS = j(\omega - \omega_0) \iiint_V (\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}_0^* + \mu \vec{H} \cdot \vec{H}_0^*) dV \quad (4-8-42)$$

可应用在整个 $S$ 面上

$$\hat{n} \times \vec{E}_0 = 0 \quad (4-8-43)$$

也即

$$\oint_S \vec{H} \times \vec{E}_0^* \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (4-8-44)$$

于是式(4-8-42)又可改写成

$$\oint_S \vec{H} \times \vec{E}_0^* \cdot \hat{n} dS = \oint_{S - \Delta S} \vec{H} \times \vec{E}_0^* \cdot \hat{n} dS = - \oint_{\Delta S} \vec{H} \times \vec{E}_0^* \cdot \hat{n} dS \quad (4-8-45)$$

作为注记,  $\Delta S$  为单位外法线方向。

$$\omega - \omega_0 = \frac{j \oint_{\Delta S} \vec{H} \times \vec{E}_0^* \cdot \hat{n} dS}{\iiint_V (\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}_0^* + \mu \vec{H} \cdot \vec{H}_0^*) dV} \quad (4-8-46)$$

微扰法

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow \vec{E}_0, \vec{H} \rightarrow \vec{H}_0 \\ \oint_{\Delta S} \vec{H} \times \vec{E}_0^* \cdot \hat{n} dS &\approx \oint_{\Delta S} (\vec{H}_0 \times \vec{E}_0^*) \cdot \hat{n} dS \\ &= j\omega_0 \iiint_{\Delta V} (\epsilon |E_0|^2 - \mu |H_0|^2) dV \end{aligned} \quad (4-8-47)$$

于是有

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{\iiint_V (\mu |H_0|^2 - \epsilon |E_0|^2) dV}{\iiint_V (\mu |H_0|^2 + \epsilon |E_0|^2) dV} \quad (4-8-48)$$

可以简单写为

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{\Delta W_m - \Delta W_e}{W} \quad (4-8-49)$$

式(4-8-48)和式(4-8-49)两式即腔壁微扰公式,它的物理意义是:腔壁向内扰动是磁场  $H$  大的点( $W_m$  占优势),频率  $\omega$  升高;反之,如果是电场  $E$  大的点( $W_e$  占优势),则频率  $\omega$  降低。

事实上,腔壁微扰和介质微扰可以是统一的,在腔壁微扰时  $E_0$  和  $H_0$  必定只有  $\Delta S$  的法向,  $\vec{H}_0$  和  $\vec{E}_0$  必定只有  $\Delta S$  的切向。

$$C_e = \frac{1}{\epsilon_r}, \text{ 而 } C_m = 1$$

只要令  $\epsilon_r \rightarrow \infty$  和  $\mu_r \rightarrow 0$  即可用式(4-8-24)得到(4-8-48)式。

-----

由于微波谐振腔在通信和雷达技术中的重要应用,所以它是目前微波技术研究中最活跃的领域之一。本章系统介绍了微波谐振腔的基本知识,对基本内容学习的要求如下:

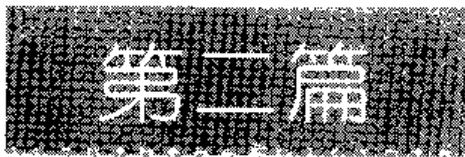
① 建立谐振频率是孤立谐振腔本征解的基本概念,掌握简单谐振腔谐振频率的计算方法。谐振频率是谐振腔最基本的参数,学会其计算方法是分析和设计谐振腔的基础。

② 了解 Q 值的概念以及计算方法。Q 值反映的是实际谐振腔的损耗特性。固有品质因数  $Q_0$  是描述谐振腔选频特性的重要指标。谐振腔的有载品质因数  $Q_L$ 、固有品质因数  $Q_0$  和匹配连接条件下的外电路品质因数  $Q_o$  之间的关系为:

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_o} + \frac{1}{Q_0}$$

③ 了解几种常用微波谐振腔的结构及设计方法。微波谐振腔是微波滤波器、信号源、波长表等微波元器件的核心组成部分,也是微波测量技术的重要手段。读者应该掌握微波谐振腔主要结构参数的设计。

④ 了解谐振腔的输入、输出耦合方法以及输入、输出耦合对于谐振腔影响的分析方法。谐振腔的输入、输出耦合是连接谐振腔和外部电路的桥梁。而且,不同的耦合在设计中,应该深入地研究谐振腔中谐振电磁场模式的分布,根据不同的应用选择合适的输入、输出耦合方式,有时要有意识地利用优先激励和禁戒规则达到抑制非工作模式而使工作模式得到优先激励。



## 微波分析方法

- 第五章 微波分析方法 Method of  
Microwave Analysis



## 第五章

# 微波分析方法

## Method of Microwave Analysis

微波发展的生命力在于创新。

重要的微波概念、新颖的微波思想都需要通过具体的微波分析方法得以实施。这一章将向读者提供 20 种常用的微波分析方法。

从方法论的角度,微波分析方法可以分为解析分析方法和数值分析方法,经典的如本征函数法、Green(格林)函数法、模匹配法等;扩展的如特性阻抗微扰法、广义微扰法、广义保角变换法、模型阻抗法等。近年来发展的有数值分析方法如矩量法、有限元法、FDTD 法等。本书中的方法叙述不同于专著,它的目标定位在用最短的篇幅让初学者迅速了解各种微波分析方法,并为深入实际应用打好必要的基础。

当然,所列出的 20 种方法远远不能取代微波工程中所有重要的方法,希望在今后的研究实践中读者和我们共同补充,进一步完善。

### 特性阻抗微扰法 Perturbational Method of Characteristic Impedance

微波传输线始终是微波工程中的主要问题之一,而特性阻抗  $Z_0$  和衰减常数  $\alpha$  则是微波传输线的两个主要参数。

在研究工作中人们很早就发现特性阻抗  $Z_0$  和衰减常数  $\alpha$  的求解难度很不对称。具体地说,求解  $Z_0$  的方法很多并相对方便,然而对于  $\alpha$  的探索则相对要艰难得多。1942 年,著名学

者 H. A. Wheeler 提出了“增量电感法”，从比较普遍的角度解决了 TEM 模微波传输线衰减常数  $\alpha$  的研究难题<sup>[1]</sup>。其中，把特性阻抗  $Z_0$  和衰减常数  $\alpha$  这两个不同参数联系起来是 Wheeler 研究思想的闪光点。但是，所谓“增量电感法”中引入了内电感  $L_i$  并与集肤深度  $\delta$  相联系，其主体是用直观的方法代替逻辑的严密性，并且文中忽略了应用条件。

这里所提出的特性阻抗微扰法目标有二：一是通过特性阻抗微扰法，把特性阻抗  $Z_0$  和衰减常数  $\alpha$  的联系建立在严格的理论基础上；二是清晰地提出这种方法应用的限制条件。并且，在某些场合可推广到 TM 模的情况。

## 一、特性阻抗微扰法

本节中所研究的任意截面 TEM 模传输线如图 5-1-1 所示。

对于常见的衰减常数  $\alpha$  定义式为

$$\alpha = \frac{P_1}{2P_0} = \frac{R_s \oint_{\ell} |\vec{H}_t|^2 d\ell}{2\operatorname{Re} \left\{ \iint_S \vec{E}_t \times \vec{H}_0 \cdot \hat{n} dS \right\}} \quad (5-1-1)$$

其中， $P_0$  为传输功率； $P_1$  是纵向单位长度的导体损耗功率； $\vec{H}_t$  是微波传输线边界的切向磁场；而  $\hat{n}$  则是单位外法向矢量。

式(5-1-1)中  $R_s$  表示良导体情况下损耗的表面电阻，有

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \quad (5-1-2)$$

式(5-1-2)中  $\sigma$  为导体的导电率，进一步写出

$$\alpha = \frac{R_s}{2\eta} \frac{\oint_{\ell} |\vec{H}_t|^2 d\ell}{\iint_S |\vec{H}_t|^2 dS} \quad (5-1-3)$$

其中， $\eta$  为波阻抗，具体为  $\eta = 120\pi/\sqrt{\epsilon_r}$ ； $\vec{H}_t$  是微波传输线截面  $S$  上的横向磁场。

另一方面，TEM 模特性阻抗  $Z_0$  可写为

$$Z_0 = \frac{P_0}{\frac{1}{2} |I_0|^2} = \frac{\operatorname{Re} \left\{ \iint_S \vec{E}_t \times \vec{H}_0 \cdot \hat{n} dS \right\}}{\left( \oint_{\ell} |\vec{H}_t| d\ell \right)^2} \quad (5-1-4)$$

现在对微波传输线做 法向微扰，即在截面边界上的  $\ell$  的每一点向外法向移动  $d\hat{n}$ ，如图 5-1-1 所示。这时，微分特性阻抗  $dZ_0$  为

$$\frac{dZ_0}{Z_0} = \frac{dP_0}{P_0} - 2 \frac{dI_0}{I_0} \quad (5-1-5)$$

对于 TEM 模微波传输线，有

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\hat{l} = \oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{l} \equiv I_0 \quad (5-1-6)$$

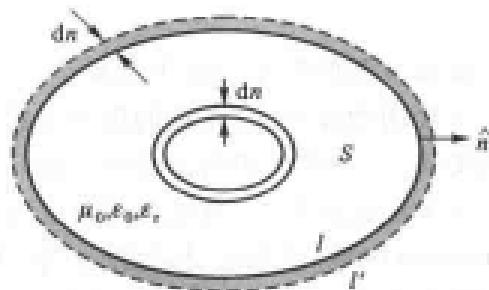


图 5-1-1 任意截面 TEM 模传输线

也即  $dI_0 = 0$ 。计及波阻抗  $\eta$  为常数, 进一步写出

$$\frac{dZ_0}{Z_0} = -\frac{dn \oint_{\ell} |\vec{H}_t|^2 d\ell}{\iint_S |\vec{H}_t|^2 dS} \quad (5-1-7)$$

对比式(5-1-3)和式(5-1-7)两式, 容易得到

$$\alpha = \frac{R_s}{2\eta} \frac{1}{Z_0} \frac{dZ_0}{dn} = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r}}{240\pi} \cdot \frac{1}{Z_0} \frac{dZ_0}{dn} \quad (5-1-8)$$

这一结果与 Wheeler 的“增量电感法”的结果完全相同, 但理论基础要扎实得多。

下面进一步推广到 TM 模情况, 由于此时  $\vec{H}_z = 0$ , 因此与 TEM 模类似, 也只有纵向电流和横向磁场损耗。令这种情况下的特性阻抗为

$$Z_0 = G Z_w \quad (5-1-9)$$

式中,  $Z_w$  表示波型阻抗。对于 TM 模有

$$Z_w = \eta \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \quad (5-1-10)$$

其中,  $\lambda_g$  为波导波长, 有  $\lambda_g = \lambda_0 / \sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_c)^2}$ ,  $\lambda_c$  为模式截止波长。式(5-1-9)中的  $G$  与微波传输线几何形状有关, 称为几何因子。由于对于 TM 模, 特性阻抗  $Z_0$  的定义无唯一性, 因此, 对于  $G$  有可能相差一常数因子, 但这并不影响这里的结果。这时, 式(5-1-3)变成

$$\alpha = \frac{R_s}{2Z_w} \frac{\oint_{\ell} |\vec{H}_t|^2 dt}{\iint_S |\vec{H}_t|^2 dS} \quad (5-1-11)$$

而特性阻抗  $Z_0$  公式(5-1-4)则可写成

$$Z_0 = \frac{\iint_S |\vec{H}_t|^2 dS}{|I_0|^2} = \frac{Z_w N}{|I_0|^2} \quad (5-1-12)$$

式中,  $N$  表示分子, 有  $N = 2P_0/Z_w = \iint_S |\vec{H}_t|^2 dS$ , 且注意到  $Z_w$  与几何参数有关。这时

$$\frac{dZ_0}{Z_0} = \frac{dZ_w}{Z_w} + \frac{dN}{N} - \frac{2dI_0}{I_0} \quad (5-1-13)$$

计及式(5-1-9), 很易导出

$$\left( \frac{dG}{G} + \frac{2dI_0}{I_0} \right) = \frac{dn \oint_{\ell} |\vec{H}_t|^2 dt}{\iint_S |\vec{H}_t|^2 dS} \quad (5-1-14)$$

最后得到

$$\alpha = \frac{R_s}{2Z_w} \left( \frac{1}{G} \frac{dG}{dn} + \frac{2}{I_0} \frac{dI_0}{dn} \right) \quad (5-1-15)$$

式(5-1-15)表示 TM 模微波传输线的衰线常数  $\alpha$  计算方式。十分明显, 由于  $\frac{dI_0}{dn}$  的出现增加了求解困难。

值得指出, 前面所给出的 TEM 模微波传输线衰线常数  $\alpha$  计算公式(5-1-8)和 TM 模计算

公式(5-1-15)表面上看要给出问题的法线方向，并施以法向求导。而在实际应用中已转化为对于参数求导，并施以法线方向，而与具体坐标建立无关。

## 二、TEM模衰减常数 $\alpha$

首先研究如图5-1-2所示两等半径圆柱平行导体微波传输线，十分清楚，要建立问题统一坐标下的双导体法向矢量相当复杂。但是，在事实上，只需要对特性阻抗 $Z_0$ 的参数求导。

两等半径圆柱平行导体的特性阻抗是<sup>[3]</sup>

$$Z_0 = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left[ \frac{D}{2R} + \sqrt{\left( \frac{D}{2R} \right)^2 - 1} \right] \quad (5-1-16)$$

这种情况下，法向参数是 $R$ ，即 $dn = -dR$ ，于是得到

$$\alpha = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r}}{240\pi R} \cdot \frac{1}{\ln \left[ \frac{D}{2R} + \sqrt{\left( \frac{D}{2R} \right)^2 - 1} \right]} \cdot \frac{\frac{D}{2R}}{\sqrt{\left( \frac{D}{2R} \right)^2 - 1}} \quad (5-1-17)$$

特别当 $D \gg R$ 时，进一步有近似公式

$$\alpha = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r}}{240\pi R} \cdot \frac{1}{\ln(D/R)} \quad (5-1-18)$$

下面再研究如图5-1-3所示的偏心单芯电缆微波传输线情况。这时的特性阻抗 $Z_0$ 有如下公式

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \quad (5-1-19)$$

其中

$$\begin{cases} k_1 = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - R_1^2}}{R_1} \\ k_2 = \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 - R_2^2}}{R_2} \end{cases} \quad (5-1-20)$$

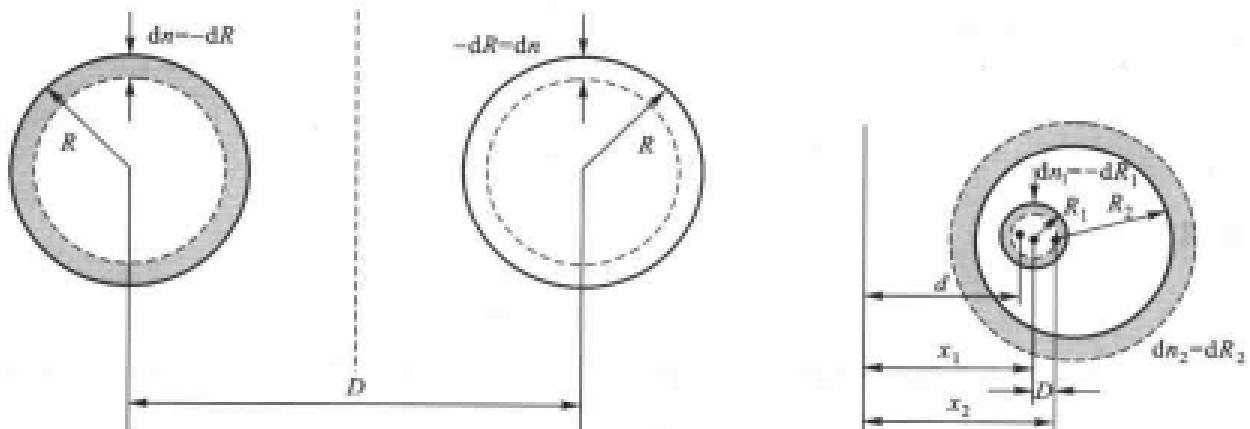


图5-1-2 两等半径圆柱平行导体微波传输线

图5-1-3 偏心单芯电缆微波传输线

且

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} \\ x_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D} \end{cases} \quad (5-1-21)$$

在这种情况下, 法向参数分别是  $R_1$  和  $R_2$ , 也即  $dn_1 = -dR_1$ ,  $dn_2 = dR_2$ , 已知

$$\frac{dZ_0}{Z_0} = \frac{1}{\ln(k_1/k_2)} \left( \frac{dk_1}{k_1} - \frac{dk_2}{k_2} \right) \quad (5-1-22)$$

最后得到

$$a = \frac{R_1 \sqrt{\epsilon_r}}{240\pi} \cdot \frac{1}{\ln(k_1/k_2)} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{D} \left( \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) + \frac{1}{k_1 D} \frac{(x_1 + D + k_1 R_2)}{\sqrt{x_1^2 - R_1^2}} - \frac{1}{k_2 D} \cdot \frac{(x_2 - D + k_2 R_1)}{\sqrt{x_2^2 - R_2^2}} \right] \quad (5-1-23)$$

下面研究更一般的 TEM 模共形同轴线的衰减常数  $a$ 。

### 1. 椭圆共形同轴线

所谓共形同轴线是指从中心到同轴线内外导体之比始终是一个常数  $k$ 。图 5-1-4 所示的是椭圆共形同轴线。

已经知道椭圆共形同轴线电容

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln k} \left( \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{a_1} \right) \quad (5-1-24)$$

于是, 对应的特性阻抗  $Z_0$

$$Z_0 = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r} \left( \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{a_1} \right)} \ln k \quad (5-1-25)$$

其中,  $k$  表示共形比, 有  $k = (a_2/a_1)$ 。椭圆共形同轴线的法线看来相当复杂, 但由于这里所采用的法向微扰, 参数十分简单。对于外导体有

$$dn_1 = da_2 = db_2 \quad (5-1-26)$$

类似地, 对于内导体有

$$dn_2 = -da_1 = -db_1 \quad (5-1-27)$$

共形同轴线约束为

$$G = \left( \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{a_1} \right) = \left( \frac{a_2}{b_2} + \frac{b_2}{a_2} \right) \quad (5-1-28)$$

也即

$$\frac{dG}{da_1} = k \frac{dG}{da_2} \quad (5-1-29)$$

现在可给出

$$\frac{1}{Z_0} \frac{dZ_0}{dn} = \frac{1}{\ln k} \left( \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dn_1} - \frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dn_2} \right) - \frac{1}{G} \frac{dG}{da_1} \frac{da_1}{dn_1} - \frac{1}{G} \frac{dG}{da_2} \frac{da_2}{dn_2} \quad (5-1-30)$$

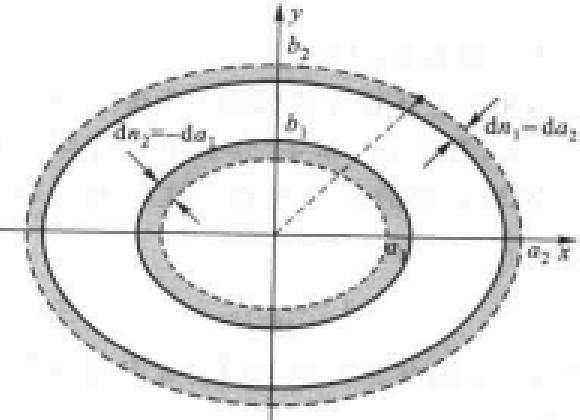


图 5-1-4 椭圆共形同轴线

注意到

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{dn_1} &= -1, \quad \frac{da_2}{dn_1} = 1 \\ \frac{1}{G} \cdot \frac{dG}{da_2} &= \left[ \frac{(a_1 + b_1)(a_1^2 - b_1^2)}{a_2 b_2 (a_2^2 + b_2^2)} \right]\end{aligned}\quad (5-1-31)$$

可进一步写出

$$\frac{1}{Z_0} \left( \frac{dZ_0}{dn} \right) = \frac{1}{\ln k} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + (k-1) \left[ \frac{(a_1 + b_1)(a_1^2 - b_1^2)}{a_2 b_2 (a_2^2 + b_2^2)} \right] \quad (5-1-32)$$

若再引入椭圆参数  $P = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1}$ ，根据 TEM 模同轴线衰减常数的一般公式

$$\alpha = \frac{R_s}{2\eta} \cdot \frac{1}{Z_0} \left( \frac{dZ_0}{dn} \right)$$

最后得到椭圆共形同轴线衰减常数  $\alpha$  公式是

$$\alpha = \frac{R_s}{2\eta a_2} \cdot \left\{ \frac{1+k}{\ln k} + (k-1) \left[ \frac{(1+p)^2(1-p)}{p(1+p^2)} \right] \right\} \quad (5-1-33)$$

特别当  $p=1$  即圆的情况下，式(5-1-33)即表示圆同轴线的衰减常数

$$\alpha = \frac{R_s}{2\eta a_2} \left( \frac{1+k}{\ln k} \right) \quad (5-1-34)$$

## 2. 任意共形同轴线

这里把上述特殊情况进一步推广，研究如图 5-1-5 所示的任意同轴线，依然假定共形比  $k = a_2/a_1$ ，其中， $a_2$  和  $a_1$  分别表示外导体和内导体与  $x$  轴的正向交点。这时电容表示式为

$$C = \frac{\epsilon G}{\ln k} \quad (5-1-35)$$

其中， $G$  表示共形几何因子，与内外导体无关，即

$$G(a_2, b_2) = G(a_1, b_1) \quad (5-1-36)$$

特性阻抗  $Z_0$  为

$$Z_0 = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln k \quad (5-1-37)$$

完全类似可导出

$$\alpha = \frac{R_s}{2\eta a_2} \left[ \frac{1+k}{\ln k} + (k-1) \left( \frac{a_2}{G} \frac{dG}{da_2} \right) \right] \quad (5-1-38)$$

中括号里的第一项是共形比  $k$  衰减；第二项是同轴线几何因子  $G$  衰减。

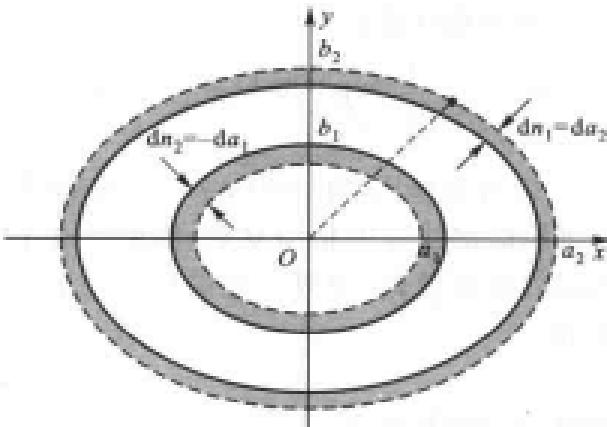


图 5-1-5 任意共形同轴线

## 三、TM 模衰减常数 $\alpha$

把特性阻抗微扰法推广到 TM 模衰减常数  $\alpha$ ，如图 5-1-6 所示。已经知道

$$\alpha = \frac{R_s}{2\eta} \cdot \frac{\lambda_e}{\lambda_0} \left( \frac{1}{G} \frac{dG}{dn} + \frac{2}{I_0} \frac{dI_0}{dn} \right) \quad (5-1-39)$$

在圆波导条件下,  $G$  是与几何参数无关的常数, 即

$$dG=0 \quad (5-1-40)$$

而边界上的切向磁场又可分离变量, 即可写为

$$H_r = H_\varphi(R, \varphi) = f(R) \cdot \Phi(\varphi) \quad (5-1-41)$$

计及曲线积分元  $dl=Rd\varphi$  可知

$$\frac{2}{I_0} \frac{dI_0}{dn} = \frac{2}{f(R)R} \frac{d[f(R)R]}{dR} = \frac{2}{R} + \frac{2f'(R)}{f(R)} \quad (5-1-42)$$

而根据圆波导边界条件可知 TM 模情况下, 有

$$f'(R)=0 \quad (5-1-43) \quad \text{图 5-1-6 圆波导 TM 模情况}$$

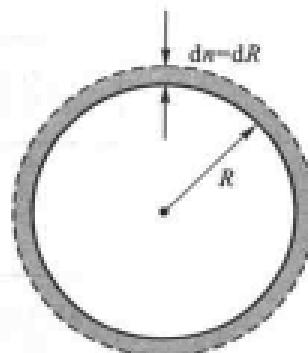
于是得到圆波导 TM 模衰减常数是

$$\alpha = \frac{R_s}{\eta R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_e)^2}} \quad (5-1-44)$$

如果对所研究的微波传输线截面做法向微扰, 那么对应的特性阻抗  $Z_0$  微扰将包含 3 个部分: 波型阻抗  $Z_w$  的微扰、分子部分  $N = \iint_S |H_r|^2 dS$  的微扰和电流  $I_0$  的微扰。

在 TEM 模条件下,  $dZ_w = d\eta = 0, dI_0 = 0$ , 于是微分特性阻抗  $dZ_0$  与  $dZ$  这一部分有关, 所导出的公式与“增量电感法”一致, 但却不引入任何牵强的概念。

特性阻抗微扰法思想还可推广到 TM 模的情况, 问题归结为几何因子  $G$  的微扰和电流  $I_0$  的微扰。文中对于圆波导情况给出了简明的结果。



## 参 考 文 献

- [1] H. A. Wheeler. Formulas for the skin effect. Proc. IRE. 1942, (30), 412-424.
- [2] 毕德显, 吴万春等. 电磁场理论基础. 西安: 西安电子科技大学, 1964.

## 5-2

# 广义微扰法 Generalized Perturbational Method

微扰法是电磁理论中经常运用的一种方法, 其处理思想是把微波问题归结为两个问题: 未受

扰问题(原问题)和微扰问题。而要计算的特征量( $G$ )的变化  $\Delta G$ ,应用原问题的知识可加以求解,其处理框图如图 5-2-1 所示。

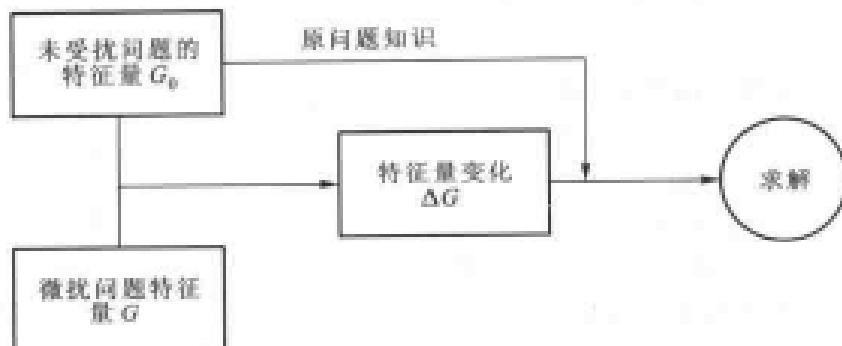


图 5-2-1 微扰法思路框图

但是,目前的文献<sup>[1][2]</sup>在概念上存在某些不足:首先,在微扰上强调发生微扰的原因,如体积微扰、介质微扰、腔壁微扰等,而忽略了特征量微扰这一本质或关键;其次在求解上强调用原问题知识,而忽略了应用微扰问题知识;最后,对于微扰的等级不够清楚,没有提出不变量。

针对所存在的上述问题,归结出三个重要的概念:

① **微扰量**。“微扰”这一术语意味着扰动或微小的改变<sup>[1]</sup>,尽管这种改变可能是介质、体积变化所造成的,但是,所谓微小变化的“微扰量”——特征量, $\Delta G$  变化是特征量。换句话说,例如介质微扰可以  $\Delta V$ (体积变化量)小而  $\Delta \epsilon$ (介质常数变化量)大,或者  $\Delta \epsilon$  小而  $\Delta V$  大。

② **不变量**。电磁理论中的微扰法是以 Maxwell 方程组作为基础的,因此不仅要研究微扰量,还要确定不变量,也即在未受扰原问题和微扰问题中什么是共同的不变量。本节指出:在微波谐振腔问题中,谐振波长  $\lambda_0$  是不变量;而在波导传输中,传输频率  $\omega_0$  是不变量。

③ **逐级处理**。本节将奇异扰动法中逐级处理的思想<sup>[3]</sup>运用到电磁理论的微扰法,以介质微扰为例导出更为精确的微波谐振腔和波导的二级微扰公式。

## 一、微波谐振腔材料微扰

本节将微波谐振腔材料扰动作为典型例子进行处理。问题的模型如图 5-2-2 所示。其中,微扰量是谐振频率的变化量  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ ,它可能是由腔的局部体积或全部体积的材料参数变化  $\Delta\epsilon, \Delta\mu$  造成的。

分别写出来受扰原问题和微扰问题的 Maxwell 方程

$$\begin{cases} -\nabla \times \vec{E}_0 = j\omega_0 \mu \vec{H}_0 \\ \nabla \times \vec{H}_0 = j\omega_0 \epsilon \vec{E}_0 \end{cases} \quad (5-2-1)$$

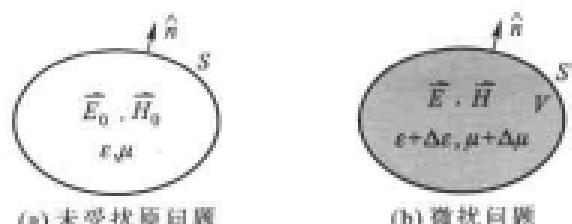


图 5-2-2 微波谐振腔内的材料微扰

$$\begin{cases} -\nabla \times \vec{E} = j\omega(\mu + \Delta\mu) \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega(\epsilon + \Delta\epsilon) \vec{E} \end{cases} \quad (5-2-2)$$

作为例子,这里研究体积  $\Delta V$  很大而  $\Delta\epsilon, \Delta\mu$  是  $\omega$  的一级小量,即

$$\Delta\mu = \mu_1 \Delta\omega, \Delta\epsilon = \epsilon_1 \Delta\omega \quad (5-2-3)$$

将场进行 Taylor(泰勒)级数展开,有

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \Delta\omega + \vec{E}_2 \Delta\omega^2 + \dots \\ \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1 \Delta\omega + \vec{H}_2 \Delta\omega^2 + \dots \\ \omega = \omega_0 + \Delta\omega + \Delta\omega^2 + \dots \end{cases} \quad (5-2-4)$$

把式(5-2-3)和式(5-2-4)代入式(5-2-2),得到

$$\begin{aligned} & -\nabla \times (\vec{E}_0 + \vec{E}_1 \Delta\omega + \vec{E}_2 \Delta\omega^2 + \dots) \\ &= j(\omega_0 + \Delta\omega + \Delta\omega^2 + \dots)(\mu + \mu_1 \Delta\omega)(\vec{H}_0 + \vec{H}_1 \Delta\omega + \vec{H}_2 \Delta\omega^2 + \dots) \end{aligned} \quad (5-2-5)$$

$$\begin{aligned} & \nabla \times (\vec{H}_0 + \vec{H}_1 \Delta\omega + \vec{H}_2 \Delta\omega^2 + \dots) \\ &= j(\omega_0 + \Delta\omega + \Delta\omega^2 + \dots)(\epsilon + \epsilon_1 \Delta\omega)(\vec{E}_0 + \vec{E}_1 \Delta\omega + \vec{E}_2 \Delta\omega^2 + \dots) \end{aligned} \quad (5-2-6)$$

Taylor 级数展开的完备性可写出式(5-2-5)和式(5-2-6)的各级方程,为

$$0 \text{ 级 } \begin{cases} -\nabla \times \vec{E}_0 = j\omega_0 \mu \vec{H}_0 \\ \nabla \times \vec{H}_0 = j\omega_0 \epsilon \vec{E}_0 \end{cases} \quad (5-2-7)$$

$$1 \text{ 级 } \begin{cases} -\nabla \times \vec{E}_1 = j(\omega_0 \mu \vec{H}_1 + \omega_0 \mu_1 \vec{H}_0 + \mu \vec{H}_0) \\ \nabla \times \vec{H}_1 = j(\omega_0 \epsilon \vec{E}_1 + \omega_0 \epsilon_1 \vec{E}_0 + \epsilon \vec{E}_0) \end{cases} \quad (5-2-8)$$

$$2 \text{ 级 } \begin{cases} -\nabla \times \vec{E}_2 = j(\omega_0 \mu \vec{H}_2 + \omega_0 \mu_1 \vec{H}_1 + \mu_1 \vec{H}_0 + \mu \vec{H}_0) \\ \nabla \times \vec{H}_2 = j(\omega_0 \epsilon \vec{E}_2 + \omega_0 \epsilon_1 \vec{E}_1 + \epsilon_1 \vec{E}_0 + \epsilon \vec{E}_0) \end{cases} \quad (5-2-9)$$

方程(5-2-7)、方程(5-2-8)和方程(5-2-9)即为 Taylor 级数展开的广义微扰方程,而这种方法也称广义微扰法。

### 1.1 级微扰

重新写出 1 级方程

$$\begin{cases} -\nabla \times \vec{E}_1 \Delta\omega = j\omega_0 \mu \vec{H}_1 \Delta\omega + \vec{M}_0 \\ \nabla \times \vec{H}_1 \Delta\omega = j\omega_0 \epsilon \vec{E}_1 \Delta\omega + \vec{J}_0 \end{cases} \quad (5-2-10)$$

其中,  $\vec{M}_0$  和  $\vec{J}_0$  分别为 0 级磁流和 0 级电流,有

$$\begin{cases} \vec{M}_0 = j(\omega_0 \mu_1 \vec{H}_0 + \mu \vec{H}_0) \Delta\omega \\ \vec{J}_0 = j(\omega_0 \epsilon_1 \vec{E}_0 + \epsilon \vec{E}_0) \Delta\omega \end{cases} \quad (5-2-11)$$

方程(5-2-10)结合 0 级方程可知在 1 级微扰条件下为

$$\begin{cases} -\nabla \times \vec{E} = j\omega_0 \mu \vec{H} + \vec{M}_0 \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega_0 \epsilon \vec{E} + \vec{J}_0 \end{cases} \quad (5-2-12)$$

类似常规处理得到

$$\nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E}_0^* + \vec{H}_0^* \times \vec{E}) = \vec{J}_0 \cdot \vec{E}_0^* + \vec{M}_0 \cdot \vec{H}_0^* \quad (5-2-13)$$

两边进行微波谐振腔体积分, 计及边界条件

$$\begin{cases} \hat{n} \times \vec{E}_0 = 0 \\ \hat{n} \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \text{在 } S \text{ 上} \quad (5-2-14)$$

具体为

$$\iiint_V (\vec{J}_0 \cdot \vec{E}_0^* + \vec{M}_0 \cdot \vec{H}_0^*) dV = 0 \quad (5-2-15)$$

考虑到方程(5-2-11), 即可得到

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = - \frac{\iiint_V (\Delta\mu \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_0^* + \Delta\epsilon \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) dV}{\iiint_V (\mu \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_0^* + \epsilon \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) dV} \quad (5-2-16)$$

式(5-2-16)即一般文献<sup>[1]</sup>给出的微扰结果, 也即一级微扰。

## 2.2 级微扰

现在来研究2级微扰的情况, 很容易写出

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \Delta\omega + \vec{E}_2 \Delta\omega^2 \\ \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1 \Delta\omega + \vec{H}_2 \Delta\omega^2 \end{cases} \quad (5-2-17)$$

对应的2级微扰Maxwell方程为

$$\begin{cases} -\nabla \times \vec{E} = j\omega_0 \mu \vec{H} + \vec{M}_1 \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega_0 \epsilon \vec{E} + \vec{J}_1 \end{cases} \quad (5-2-18)$$

其中,  $\vec{M}_1$  和  $\vec{J}_1$  分别为1级磁流和1级电流, 有

$$\begin{cases} \vec{M}_1 = j[(\omega_0 \mu_1 + \mu) \vec{H}_0 \Delta\omega + (\mu_1 + \mu) \vec{H}_0 \Delta\omega^2 + \omega_0 \mu_1 \vec{H}_1 \Delta\omega^2] \\ \vec{J}_1 = j[(\omega_0 \epsilon_1 + \epsilon) \vec{E}_0 \Delta\omega + (\epsilon_1 + \epsilon) \vec{E}_0 \Delta\omega^2 + \omega_0 \epsilon_1 \vec{E}_1 \Delta\omega^2] \end{cases} \quad (5-2-19)$$

同样, 按常规处理易得

$$\nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E}_0^* + \vec{H}_0^* \times \vec{E}) = \vec{J}_1 \cdot \vec{E}_0^* + \vec{M}_1 \cdot \vec{H}_0^* \quad (5-2-20)$$

对上式两边进行体积分, 并考虑到边界条件有

$$\iiint_V (\vec{J}_1 \cdot \vec{E}_0^* + \vec{M}_1 \cdot \vec{H}_0^*) dV = 0 \quad (5-2-21)$$

得到

$$(1 + \Delta\omega) \iiint_V (\mu \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_0^* + \epsilon \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) dV =$$

$$-\omega_0 \left\{ \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega}\right) \iiint_V (\mu_1 \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_0^* + \epsilon_1 \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) dV + \Delta\omega \iiint_V (\mu_1 \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_0^* + \epsilon_1 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_0^*) dV \right\} \quad (5-2-22)$$

最后导出结果

$$\frac{\Delta\omega + \Delta\omega^2}{\omega_0} = - \frac{\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \iiint_V (\Delta\mu \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_0^* + \Delta\epsilon \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) dV + \Delta\omega \iiint_V (\Delta\mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_0^* + \epsilon \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_0^*) dV}{\iiint_V (\mu \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_0^* + \epsilon \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) dV} \quad (5-2-23)$$

式(5-2-23)便是要求的2级微扰公式,与1级微扰公式(5-2-16)相比,为了得到有应用价值的结果,它需要提供微扰后的场 $\vec{E}_1$ 与 $\vec{H}_1$ 的信息。

作为实例,研究整个微波谐振腔电介质材料微扰 $\epsilon + \Delta\epsilon$ 的情况,这时 $\Delta\mu = 0$ ,且有精确结果,即

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}}} \quad (5-2-24)$$

假设 $\vec{E}_1 = k_1 \vec{E}_0$ , $\vec{H}_1 = k_2 \vec{H}_0$ ,代入1级方程(5-2-8)得到

$$\begin{cases} k_1 - k_2 = \frac{\mu_1}{\mu} + \frac{1}{\omega_0} \\ k_1 - k_2 = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon} - \frac{1}{\omega_0} \end{cases} \quad (5-2-25)$$

或者

$$k_1 - k_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_1}{\mu} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon} \right) \quad (5-2-26)$$

作为合理的假设,可认为

$$\begin{cases} k_1 \Delta\omega = -\frac{\Delta\epsilon}{2\epsilon} \\ k_2 \Delta\omega = -\frac{\Delta\mu}{2\mu} \end{cases} \quad (5-2-27)$$

把方程(5-2-27)的结果代入式(5-2-23),又得到全腔电介质微扰的结果为

$$1\text{级微扰: } \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\Delta\epsilon}{2\epsilon} \quad (5-2-28)$$

$$2\text{级微扰: } \frac{\Delta\omega(1 + \Delta\omega)}{\omega_0} = -\frac{\Delta\epsilon}{2\epsilon} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \right)^2 \quad (5-2-29)$$

$$\text{精确结果: } \frac{\Delta\omega(1 + \Delta\omega + \dots)}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}}} = -1 \quad (5-2-30)$$

具体数据如表5-2-1所示,图5-2-3给出了相应的曲线。

表 5-2-1 全腔电介质微扰的谐振频率分析

$\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}$	1级微扰解	2级微扰解	精确解
0.10	-0.050	-0.045	-0.0465
0.20	-0.100	-0.080	-0.0871
0.30	-0.150	-0.105	-0.123
0.40	-0.200	-0.120	-0.155
0.50	-0.250	-0.125	-0.184

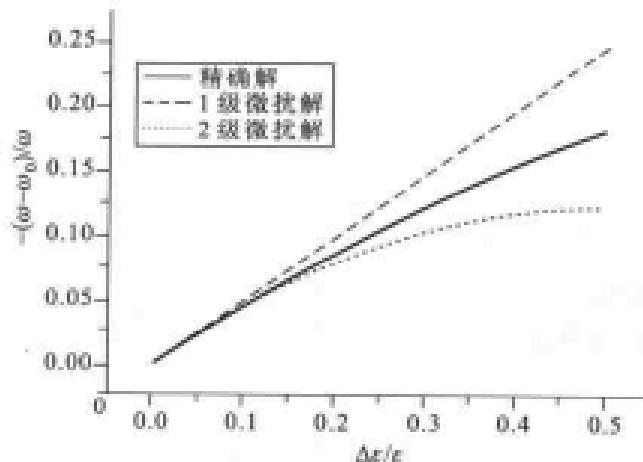


图 5-2-3 全腔电介质材料微扰分析

## 二、波导材料微扰

为了讨论各种情况,把波导材料微扰定位在很小的  $\Delta S$  内材料参数发生变化为  $\Delta\epsilon$ ,微扰量是  $\Delta\beta$ (波导传输常数变化)。因此,在  $\Delta S$  内材料参数的变化  $\Delta\epsilon$  不一定很小,而场的变化也不必是一阶小量,其模型如图 5-2-4 所示,同样注意到这类问题的不变量是波的传输频率  $\omega_0$ 。

由文献<sup>[1]</sup>已经导出

$$\begin{aligned} & (\beta - \beta_0) \iint_S (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) dz dS \\ &= \omega_0 \iint_S (\Delta\epsilon \vec{E}^* + \vec{E}_0^* + \Delta\mu \vec{H} + \vec{H}_0^*) dS \quad (5-2-31) \end{aligned}$$

其中,已设

$$\begin{cases} \vec{E}_0 = \vec{E}_0(x, y) e^{-j\beta_0 z} \\ \vec{H}_0 = \vec{H}_0(x, y) e^{-j\beta_0 z} \end{cases} \quad (5-2-32)$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(x, y) e^{-j\beta z} \\ \vec{H} = \vec{H}(x, y) e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (5-2-33)$$

同样采用逐级微扰的广义微扰思想,令

$$\begin{aligned} \beta - \beta_0 &= \Delta\beta + \Delta\beta' + \dots \\ \Delta S &= S_1 \Delta\beta \end{aligned} \quad (5-2-34)$$

为一阶小量,对于场的最合理假设是

$$\vec{E} = \begin{cases} A_1 \vec{E}_0 & \text{在 } \Delta S \text{ 内} \\ \vec{E}_0 & \text{在 } \Delta S \text{ 外} \end{cases} \quad (5-2-35)$$

$$\vec{H} = \begin{cases} A_2 \vec{H}_0 & \text{在 } \Delta S \text{ 内} \\ \vec{H}_0 & \text{在 } \Delta S \text{ 外} \end{cases} \quad (5-2-36)$$

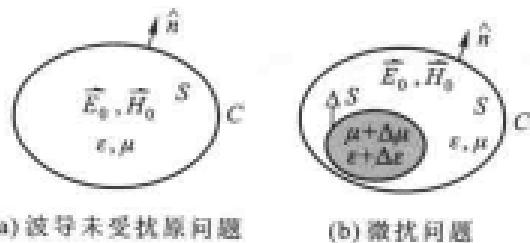


图 5-2-4 波导材料微扰问题

于是波导材料的 1 级微扰公式为

$$\Delta\beta = \omega_0 \frac{\iint_{\Delta S} (A_1 \Delta \epsilon \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* + A_2 \Delta \mu \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_0^*) dS}{\iint_S (\vec{E}_0^* \cdot \vec{H}_0 + \vec{E}_0 \cdot \vec{H}_0^*) dS} \quad (5-2-37)$$

也即一般微扰法给出的结果<sup>[1]</sup>, 而 2 级微扰公式则为

$$\begin{aligned} \Delta\beta + \Delta\beta' &= \omega_0 \left( \iint_{\Delta S} (A_1 \Delta \epsilon \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* + A_2 \Delta \mu \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_0^*) dS \right) / \left( \iint_S (\vec{E}_0^* \cdot \vec{H}_0 + \vec{E}_0 \cdot \vec{H}_0^*) dS \right) \\ &\quad - \iint_{\Delta S} [(1-A_2)(\vec{E}_0^* \times \vec{H}_0) + (1-A_1)(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)] \cdot \hat{z} dS \end{aligned} \quad (5-2-38)$$

作为实例之一, 研究如图 5-2-5 所示的 TE<sub>10</sub>模矩形波导  $y$  方向部分填充情况。已经知道, 1 级微扰公式是<sup>[1]</sup>

$$\beta = \beta_0 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left( \frac{k_1^2 - k_2^2}{2\beta_0} \right) \left( \frac{d}{b} \right) \quad (5-2-39)$$

其中,  $k_1$  和  $k_2$  分别是  $k_1 = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}$ ,  $k_2 = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_2}$ 。考虑到<sup>[1]</sup>电介质微扰等价于  $\Delta\mu = 0$ ,  $A_2 = 0$ , 由式(5-2-38)不难导出

$$\beta = \beta_0 + \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left( \frac{k_1^2 - k_2^2}{2\beta_0} \right) \left( \frac{d}{b} \right)}{1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \left( \frac{d}{b} \right)} \quad (5-2-40)$$

式(5-2-40)即该问题的 2 级微扰结果, 注意到分析时已用到<sup>[1]</sup>

$$A_1 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \quad (5-2-41)$$

波导材料微扰的另一个重要实例是圆波导保持 TE<sub>11</sub> 模, 在中心半径为  $a$  的小区域存在介质微扰, 如图 5-2-6 所示。

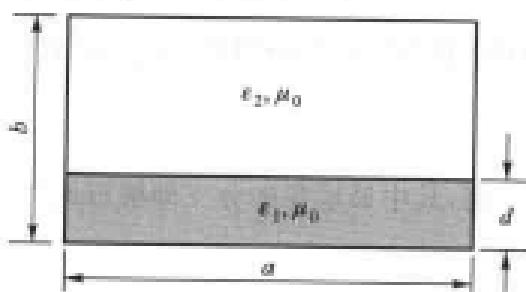


图 5-2-5 矩形波导部分填充情况

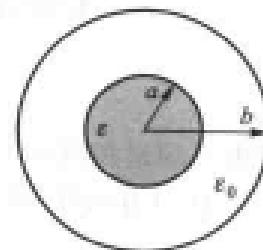


图 5-2-6 圆波导(TE<sub>11</sub>模)中心部分填充情况

已经知道 1 级微扰公式是<sup>[1]</sup>

$$\frac{\Delta\beta}{k_0} = \frac{2.1472}{\sqrt{1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega_c} \right)^2}} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right) \left( \frac{a}{b} \right)^2 \quad (5-2-42)$$

其中,  $\omega_c$  为  $TE_{11}$  模截止频率, 上式中已经用到

$$A_1 = \frac{1}{1 + \epsilon_r} \quad (5-2-43)$$

而应用公式(5-2-38)很容易获得 2 级微扰公式

$$\frac{\Delta\beta + \Delta\beta^2}{k_0} = \frac{2.147 2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2}} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right) \left( \frac{a}{b} \right)^2 \times \left[ \frac{1}{1 - 4.294 6 \left[ \frac{1}{\epsilon_r + 1} - \frac{1}{(\epsilon_r + 1)^2} \right] \left( \frac{a}{b} \right)^2} \right] \quad (5-2-44)$$

上述两个例子可以看出: 微扰量正比于  $\frac{\Delta S}{S}$  (具体分别是  $\frac{d}{b}$  和  $(\frac{a}{b})^2$ )。

本节明确提出微扰量、不变量和逐级处理这些广义微扰法的思想, 并且以微波谐振腔和波导的材料微扰为例做了深入的讨论, 应该指出上述概念完全可以推广到体积微扰、腔壁微扰及有耗情况, 值得进一步研究。

### 参 考 文 献

- [1] 哈林登. 正弦电磁场. 上海: 上海科学出版社, 1964.
- [2] 哈林登. 矩量法. 北京: 国防工业出版社, 1980.
- [3] 黄用宾等. 摆动法简明教程. 上海: 上海交通大学出版社, 1986.

## 广义保角变换法 Generalized Conformal Mapping Method

复变函数在电磁理论和微波工程上得到了广泛的应用, 其中最重要的分支即解析函数。

复变函数  $w = f(z)$  由两部分组成, 即实数和虚数, 有

$$W = u + jv \quad (5-3-1)$$

而解析函数  $u$  和  $v$  是相互有关的, 且满足调和函数方程

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (5-3-2)$$

于是, 满足 Laplace 方程的物理量都可以和解析函数挂起钩来。

例如,电磁理论中的静电位、电通量均可以归在解析函数这一类。

另一方面,保角变换则是解析函数在几何上的反映,若  $w=f(z)$  在  $z_0$  及对应的  $w_0$  点解析,则  $z$  平面上两条夹角为  $\theta$  的曲线  $C_1$  和  $C_2$ ,通过变换到  $w$  平面上  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  曲线,夹角保持不变,依然是  $\theta$ ,如图 5-3-1 所示。

这一性质使在几何上处理静电位和通量问题成为可能。

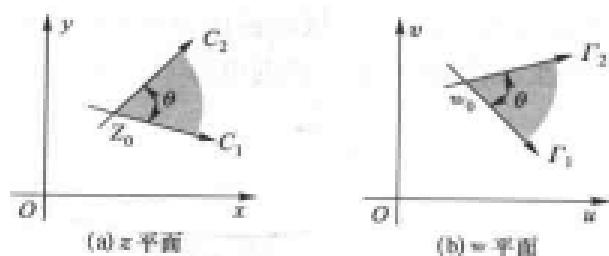


图 5-3-1 解析函数变换的保角性

## 一、保角变换的电容不变定理

电磁保角变换中最重要的问题之一是处理复杂区域的电容  $C$  问题,再一次研究解析函数  $w=f(z)$ 。在几何上,它们是两个平面: $z$  平面和  $w$  平面,问题就转化为复几何保角变换问题。

令  $w$  平面上  $u(x, y) = \Gamma_1$  和  $v(x, y) = \Gamma_2$  为与坐标轴平行的一类曲线,显然,  $\Gamma_1$  与  $\Gamma_2$  正交。前面已经讲过,它们在  $z$  平面上所对应的  $C_1, C_2$  曲线族也相互正交,如图 5-3-2 所示。

根据上面讨论的解析函数的概念可知  $u$  在物理上可以表示等位线,  $v$  则表示电力线;或者反过来,  $u$  表示电力线,而  $v$  表示等位线。

同样,在  $z$  平面对应的也必然是相互正交的等位线和电力线,大家知道,在二维情形下电容器又可表示为

$$C = \frac{q_2 - q_1}{V_2 - V_1} \quad (5-3-3)$$

如图 5-3-2 所示,在  $w$  平面上由等位线和电力线围成的一定区域内构成的电容,则与  $z$  平面相应等位线和电力线构成的电容  $C$  保持相等——此即保角变换中的电容不变性定理。

图 5-3-3 所示为规则的平板电容器。其电容计算公式十分简单,为

$$C_0 = \frac{\epsilon S}{d} \quad (5-3-4)$$

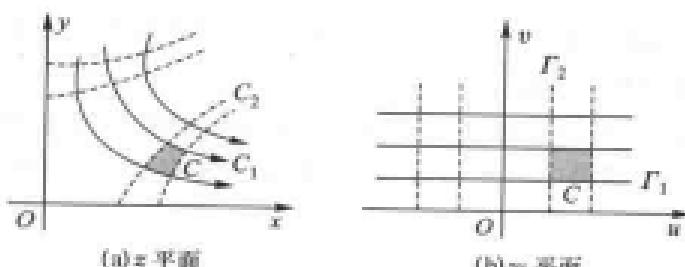


图 5-3-2 对应区域及电容  $C$  的变换性

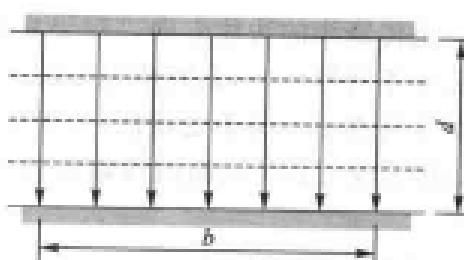


图 5-3-3 平板电容器(虚线表示等位线,带箭头实线表示电力线)

特别注意到,保角变换所处理的均是二维电容  $S=bh$ 。

其中,  $h$  是  $z$  方向(第三方向)的纵深。一般定义  $z$  方向单位长度即  $h=1$  的电容,则有

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 b}{d} \quad (5-3-5)$$

但是,实际上遇到的大多是很难求解的复杂区域围成的电容。因此,保角变换法的精髓在于:通过变换,把复杂区域转换成规则(可计算的)简单区域。依靠电容  $C$  在变换前后相应区域的不变性,而得到复杂区域的电容  $C$ 。图 5-3-4 给出  $w=f(z)$  的区域改变。

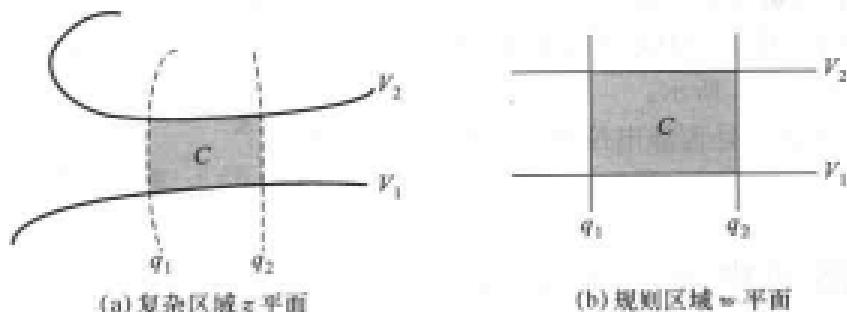


图 5-3-4 保角变换  $w=f(z)$  的区域改变,前后  $C$  保持不变

## 二、广义保角变换

一般讨论的保角变换都是求解 TEM 模微波传输线单位长度电容  $C$  和特性阻抗  $Z_0$ 。下面所讨论的广义保角变换进一步推广求解一类 TEM 模微波传输线的衰减常数  $\alpha$ 。

众所周知,小衰减微波传输线的衰减常数  $\alpha$  的基本公式是

$$\alpha = P_t / (2P_0) \quad (5-3-6)$$

其中,  $P_t$  是传输功率而  $P_0$  为单位长度的导体损耗功率,对于 TEM 模微波传输线,可以写出

$$\alpha = [R_s / (2Z_0)] \int_j j^2 dt / \left( \int_j j dt \right)^2 \quad (5-3-7)$$

式中,  $Z_0$  是微波传输线的特性阻抗;  $R_s = \sqrt{\omega \mu / 2\sigma}$  为导体表面电阻;  $j$  是导体的壁电流密度。但是,对于复杂形状的 TEM 模微波传输线,壁电流密度  $j$  的获得有赖于场的求解,因此将带来不少困难。在 5-1 节中讨论的特性阻抗  $Z_0$  微扰可知衰减常数  $\alpha$  可进一步写成

$$\alpha = [R_s \sqrt{\epsilon_r} / (240\pi Z_0)] (\partial Z_0 / \partial n) \quad (5-3-8)$$

其中  $n$  是传输线的法线方向。对于复杂形状的微波传输线,由于  $\partial Z_0 / \partial n$  的计算困难和不同点的导数完全不同等原因,上面所提出的矛盾依然没有得到彻底的解决。

本节所提出的保角变换法,可求解一类能够变成(或近似变成)正规圆同轴线或平板电容问题的复杂 TEM 模微波传输线的衰减常数  $\alpha$ 。如果结合数值计算,这种方法将有更宽广的应用前景。

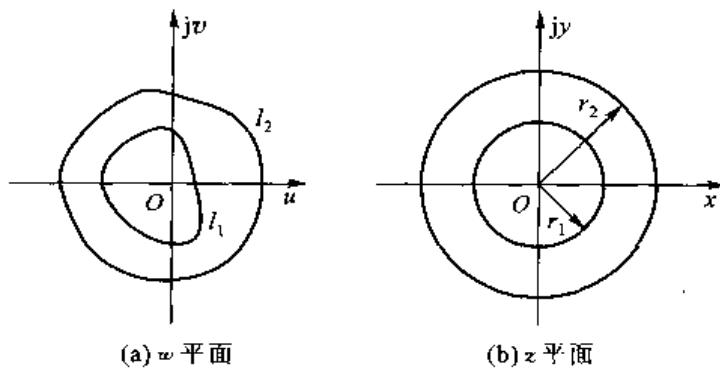
### 1. 基本理论

假定所研究的 TEM 模微波传输线在  $w$  平面上的截面如图 5-3-5(a) 所示,通过复数保角变换  $w=f(z)$  与图 5-3-5(b) 所示的  $z$  平面正规圆同轴线相联系。

根据  $z$  平面和  $w$  平面之间等位线一一对应的原理,可以得到特性阻抗  $Z_0$  为

$$Z_0 = \frac{59.952}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \quad (5-3-9)$$

下面进一步研究  $w$  平面和  $z$  平面之间电力线的对应关系,电荷连续性方程为

图 5-3-5 任意截面同轴线变成正规圆同轴线的保角变换  $w = f(z)$ 

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} = 0 \\ \vec{J} = J e^{i(\omega t - kz)} \\ \vec{\sigma} = \sigma e^{i(\omega t - kz)} \end{cases} \quad (5-3-10)$$

容易得到

$$J = v\sigma \quad (5-3-11)$$

其中,  $v$  是介质中光速, 则式(5-3-7)可进一步改写为

$$\alpha = [R_s/(2Z_0)] \oint_l \sigma^2 dl / \left( \oint_l \sigma dl \right)^2 \quad (5-3-12)$$

假定, 在  $z$  平面上正规同轴线的周界(例如  $r_1$ )上, 电荷密度为  $\sigma_0$ , 所对应的  $w$  平面周界(例如  $l_1$ )上, 密度为  $\sigma$ , 则可以利用保角变换前后力线(通量)的对应关系, 有

$$\sigma = \sigma_0 |dz/dw| = \sigma_0 / |f'(z)| \quad (5-3-13)$$

且考虑到变换前后总的线电荷密度  $\rho_0$  不变, 即

$$\oint_{l_1} \sigma dl = \oint_{r_1} \sigma_0 dl = \rho_0 \quad (5-3-14)$$

容易导出一般 TEM 模的衰减常数  $\alpha$  的公式

$$\alpha = \left\{ R_s \sqrt{\epsilon_r} / [119.904 \ln(r_2/r_1)] \right\} \left( \oint_{r_1} |dz/dw| dl / (4\pi r_1^2) + \oint_{r_2} |dz/dw| dl / (4\pi r_2^2) \right) \quad (5-3-15)$$

只要知道变换关系, 即可利用式(5-3-15)求出  $\alpha$ 。注意到上式中的两个积分分别在  $z$  平面上的  $r_1$  和  $r_2$  上进行。

## 2. 解析结果

本节所提出的理论和方法, 可以使一类复杂截面的 TEM 模微波传输线的衰减常数  $\alpha$  获得解析公式。

首先研究图 5-3-6 所示共焦椭圆同轴线。

它与正规圆同轴线的变换关系是

$$w = f(z) = u + jv = \frac{c}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (5-3-16)$$

其中

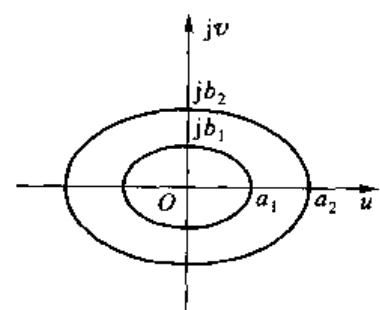


图 5-3-6 共焦椭圆同轴线

$$\begin{aligned} u &= (c/2)x[1+1/(x^2+y^2)] = (c/2)(r+1/r)\cos\varphi = a\cos\varphi \\ v &= (c/2)y[1-1/(x^2+y^2)] = (c/2)(r-1/r)\sin\varphi = b\sin\varphi \end{aligned} \quad (5-3-17)$$

且  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ , 容易看出

$$(u/a)^2 + (v/b)^2 = 1 \quad (5-3-18)$$

和

$$\begin{aligned} a &= (c/2)(r+1/r) \\ b &= (c/2)(r-1/r) \\ c &= (a+b)/\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)/(a-b)} \end{aligned} \quad (5-3-19)$$

在计算衰减常数时, 注意到

$$\begin{aligned} |dz| &= r d\varphi \\ |dw| &= a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \end{aligned} \quad (5-3-20)$$

式中,  $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ 。将式(5-3-19)和式(5-3-20)代入式(5-3-15), 即可得到共焦椭圆同轴线的衰减常数

$$\alpha_e = \{R_s \sqrt{\epsilon_r} / [119.904\pi^2 \ln(a_2/a_1)]\} [K(k_1)/a_1 + K(k_2)/a_2] \quad (5-3-21)$$

其中,  $k_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}/a_1$ ;  $k_2 = \sqrt{a_2^2 - b_2^2}/a_2$ ;  $K(k_1)$  和  $K(k_2)$  分别是以  $k_1$  和  $k_2$  为模数的第一类完全椭圆积分。如果令  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$ , 亦即  $k_1 = k_2 = 0$ 。这时共焦椭圆同轴线退化为圆同轴线。计及  $K(0) = \pi/2$ , 可得

$$\alpha_e = \{R_s \sqrt{\epsilon_r} / [239.808\pi a_2 \ln(a_2/a_1)]\} (1 + a_2/a_1) \quad (5-3-22)$$

此即圆同轴线的衰减常数。为了比较, 可以把共焦椭圆同轴线的衰减常数  $\alpha_e$  与有相同  $a_2$ ,  $a_1$  的正规圆同轴线的衰减常数  $\alpha_c$  之间关系表示出来。只要注意到  $k_1 a_1 = k_2 a_2$  的共焦条件, 即有

$$\alpha_c = \alpha_e \{[2K(k_1 a_1/a_2)/\pi][a_1/a_2 + K(k_1)/K(k_1 a_1/a_2)]/(1 + a_1/a_2)\} \quad (5-3-23)$$

若进一步定义  $\bar{\alpha}_e = \alpha_e/\alpha_c$  为归一化衰减常数, 则可把  $\bar{\alpha}_e$  与  $k_1$ ,  $a_1/a_2$  的关系示于图 5-3-7。把可能获得解析结果的情况列于表 5-3-1, 它们是偏心同轴线和任意双导线的情况。

### 3. 数值方法

对于一些比较复杂的保角变换, 借助于数值方法是必要的, 应该指出, 数值分析和近似保角变换的引入将大大扩展本文方法的应用范围。

作为例子, 给出未展蔽板状线的四分之一(即 ABCD 部分)变换成平板线的情况。如图 5-3-8 所示, 文献[1]已经给出

$$w = f(z) = \{2b/[\pi(1+\lambda)]\} \{ \operatorname{arth}[(z_1 - 1)/(z_1 + a_1)]^{1/2} + \lambda \operatorname{arth}[(z_1 + 1)/(z_1 + a_1)]^{1/2} \} \quad (5-3-24)$$

$$z_1 = c_1(w_2 - 1)/(w_2 + 1) - a_1 \quad (5-3-25)$$

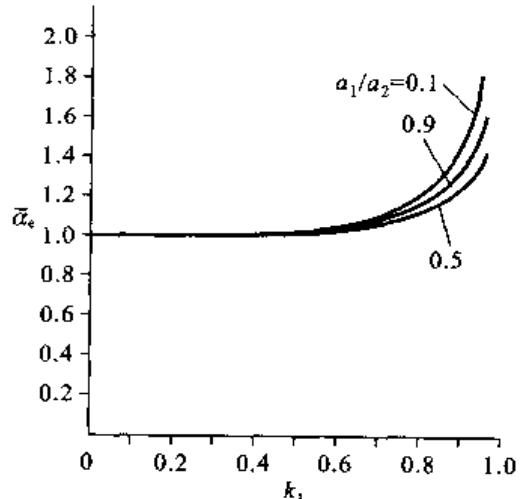
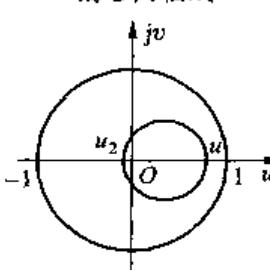
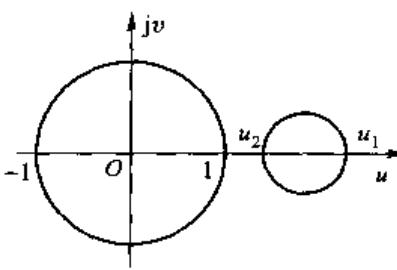
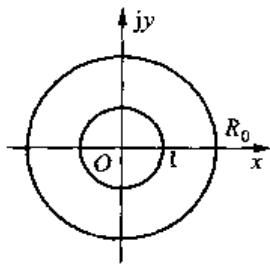
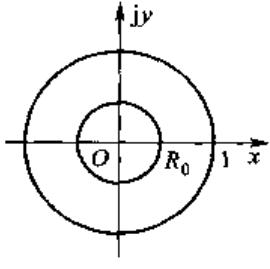


图 5-3-7 共焦椭圆同轴线归一化衰减常数与  $k_1$  和  $a_1/a_2$  的关系

表 5-3-1 偏心同轴线和任意双导线的衰减常数  $\alpha$ 

类型	保角变换	衰减常数 $\alpha$
偏心同轴线		
		
	$w = f(z) = \frac{z-a}{az-1}$ $a = \frac{1+u_1u_2 + \sqrt{(1+u_1^2)(1-u_2^2)}}{u_1+u_2}$ $R_0 = \frac{1-u_1u_2 + \sqrt{(1-u_1^2)(1-u_2^2)}}{u_1+u_2}$ $(-1 < u_1 < u_2 < 1)$	$\alpha = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r} (1+R_0) (a^2 + 1/R_0)}{239.808\pi  a^2 - 1  \ln R_0}$ $\alpha^z = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r} (1+R_0) (a^2 + 1/R_0)}{239.808\pi  a^2 - 1  \ln (1/R_0)}$
	$w = f(z) = \frac{z-a}{az-1}$ $a = \frac{1+u_1u_2 + \sqrt{(u_1^2-1)(u_2^2-1)}}{u_1+u_2}$ $R_0 = \frac{u_1u_2 - 1 + \sqrt{(u_1^2-1)(u_2^2-1)}}{u_1+u_2}$ $(-1 < u_1 < u_2 < 1)$	
		

$$w_z = \operatorname{sn}(z, k_2) \quad (5-3-26)$$

其中,  $\operatorname{sn}(z, k_2)$  是 Jacobi 椭圆正弦函数, 且

$$a_1 = 2 \operatorname{ctan}^2 [\pi c(1+\lambda)/(2b)] + 1 \quad (5-3-27)$$

$$c = 2 \operatorname{ctan} [\pi c(1+\lambda)/(2b)] \operatorname{csc} [\pi c(1+\lambda)/(2b)] \quad (5-3-28)$$

$$k_2 = \operatorname{tan}^2 [\pi c(1+\lambda)/(4b)] \quad (5-3-29)$$

而  $\lambda$  由方程

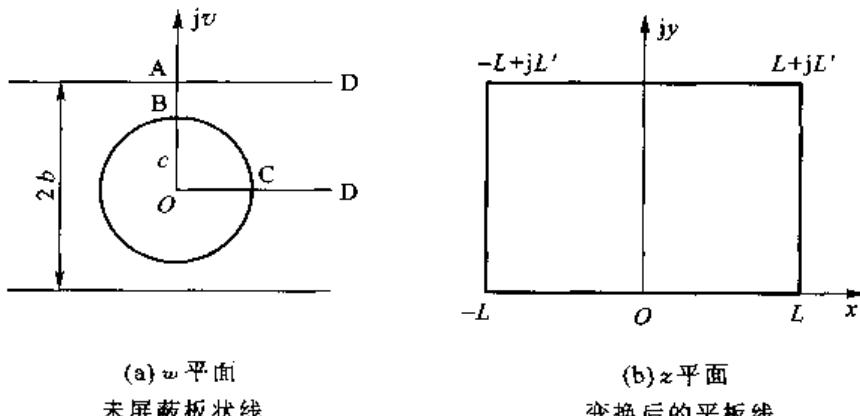


图 5-3-8 未屏蔽板状线(1/4部分)变成平板线

$$\csc[\pi c(1+\lambda)/(2b)] = \operatorname{ctan}[\pi c(1+\lambda)/(2b)] \quad (5-3-30)$$

获得,鉴于平板线上电荷分布的均匀性,再考虑本例子是四分之一对称变换,可知总的衰减常数  $\alpha$  是上述  $\alpha_1$  的四分之一,即

$$\alpha = \alpha_1/4 \quad (5-3-31)$$

且

$$\begin{aligned} \alpha_1 = [R_s/8(L^2 Z_0)] & \int_0^1 [ |1/f'(z)|_{z=z} + |1/f'(z)|_{z=z+jL'} ] + \\ & [ |1/f'(z)|_{z=-z} + |1/f'(z)|_{z=-z+jL'} ] dx \end{aligned} \quad (5-3-32)$$

问题中

$$f'(z) = dw/dz = (dw/dz_1)(dz_1/dw_2)(dw_2/dz) \quad (5-3-33)$$

$$\frac{1}{f'(z)} = \frac{\pi(1+\lambda)}{2bc_1} \frac{(w_2+1)^2 \sqrt{z_1+a_1}}{\operatorname{cn}(z, k_1) \operatorname{dn}(z, k_2)} \frac{\sqrt{z_1-1}}{1+\lambda \sqrt{(z_1-1)(z_1+1)}} \quad (5-3-34)$$

且有  $L=K(k_2)$ ,  $L'=K(k'_2)$ ,  $k'_2 = \sqrt{1-k_2^2}$ , 其中  $\operatorname{cn}(z, k)$ ,  $\operatorname{dn}(z, k)$  分别是 Jacobi 椭圆余弦函数和正切函数,采用数值计算很容易得到结果。为了比较,在表 3-2 中还给出了内径为  $c$ ,外径为  $b$  的正规圆同轴线的衰减常数,即

$$\alpha = (R_s/b)\alpha_0 = (R_s/b)(1+b/c)/[753.379\ln(b/c)] \quad (5-3-35)$$

由表 5-3-2 可见,当  $b$  一定时,未屏蔽板状线在  $c/b=0.3 \sim 0.35$  时衰减最小,而圆同轴线则在  $c/b=0.2785$  时最小。

表 5-3-2 非屏蔽板状线和正规圆同轴线的数值结果 [ $\alpha = (R_s/b)\alpha_0$ ]

$c/b$	$\lambda$	$Z_0$	$\alpha_0$ (板状线)	$\alpha_0$ (同轴线)
0.10	0.983 635	152.532 20	0.005 904 3	0.006 341 1
0.15	0.963 607	128.213 50	0.004 762 3	0.005 366 4
0.20	0.936 221	110.951 70	0.004 307 5	0.004 948 4
0.25	0.902 149	97.540 25	0.004 079 3	0.004 787 4
0.30	0.861 791	86.557 26	0.003 991 3	0.004 777 4
0.35	0.816 204	77.219 78	0.003 987 8	0.004 876 8

续表

$c/b$	$\lambda$	$Z_0$	$\alpha_0$ (板状线)	$\alpha_0$ (同轴线)
0.40	0.765 772	69.072 53	0.004 057 0	0.005 070 2
0.45	0.711 287	61.799 44	0.004 192 5	0.005 356 3
0.50	0.653 257	55.180 10	0.004 397 3	0.005 744 9
0.55	0.592 096	49.043 85	0.004 687 3	0.006 257 1
0.60	0.528 078	43.248 58	0.005 090 8	0.006 929 2
0.65	0.461 338	37.665 74	0.005 647 3	0.007 821 7
0.70	0.391 940	32.171 04	0.006 469 0	0.009 037 8
0.75	0.320 148	26.648 32	0.007 728 3	0.010 766 0
0.80	0.247 185	21.040 10	0.009 783 5	0.013 384 0

本节提出的保角变换法求解 TEM 模微波传输线的基本思想是通过均匀分布问题和变换解决复杂形状微波传输线的衰减常数。根据复变函数理论, 双连通域通过适当的变换均可成为正圆同轴线。因此, 结合数值分析, 这一方法有着广泛的应用前景。

### 参 考 文 献

- [1] 林为干. 未屏蔽平板线的进一步研究. 科学通报, 1989, 31(4): 309 - 312.

## 广义网络法 Generalized Network Method

微波课程中最重要的两种分析工具为: 以 Maxwell 方程组为基础的场论分析方法和以线性系统为基础的网络分析方法。

根据端口的特性参量, 网络有  $A$ 、 $Z$ 、 $Y$  和  $S$ 、 $T$  矩阵的区分。但是, 作为一个线性系统它可以提出更为广义的网络思想——即把网络看作是一种线性变换和黑盒子“Black Box”的处理方法, 本节把模式变换网络、极化变换网络和横向谐振网络作为典型加以较深入的讨论。

### 一、模式变换网络

在双根(或多根)微波传输线问题中, 讨论的模式比较复杂。然而, 可以定义本征激励, 使耦

合微波传输线达到“解耦”的效果,对称耦合微波传输线的奇偶模方法即是一种典型。

在耦合微带中已对此做过初步的讨论,模式变换网络的基本思想如图 5-4-1 所示。

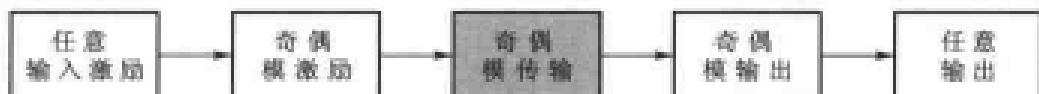


图 5-4-1 模式变换网络的基本思想

十分明显,通过变换研究的是(去耦)奇偶模传输,而变换——即模式变换网络,就是一种典型的广义网络。

[例 1] 研究耦合微波传输线的四端口  $A$  矩阵,耦合微波传输线(例如平行耦合线),其各端口相互耦合,如图 5-4-2 所示。

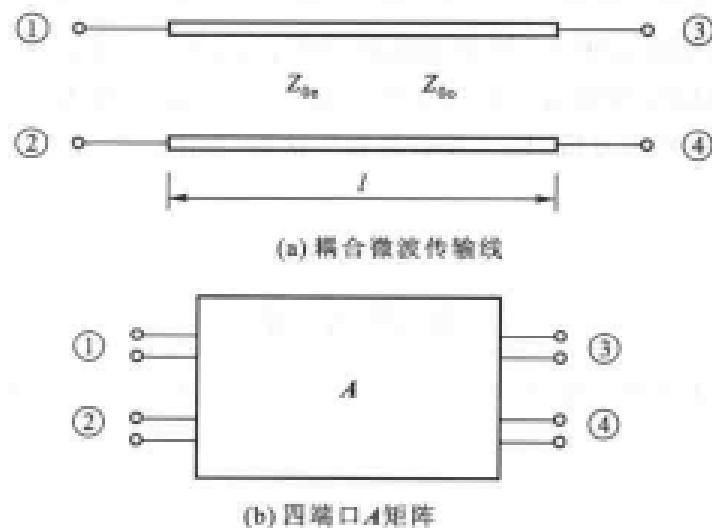


图 5-4-2 耦合传输线和它的四端口  $A$  矩阵

[解] 采用模式变换网络——即广义网络的思想解决这一问题,如图 5-4-3 所示。

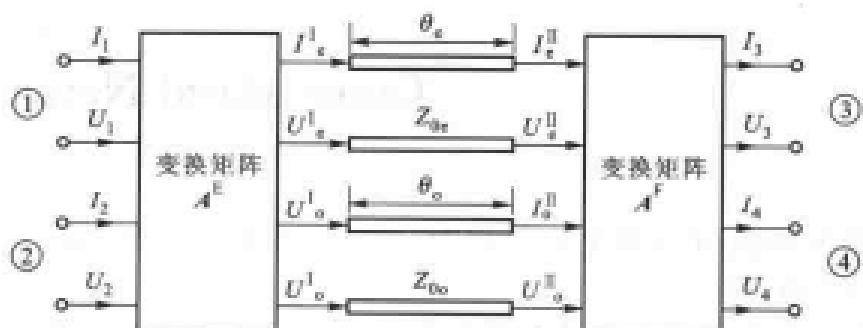


图 5-4-3 奇偶模法处理耦合传输线问题

首先给出由任意输入激励( $U_1, I_1, U_2, I_2$ )向输入奇偶模的模式转换:

$$\begin{aligned}
 U_e^I &= \frac{1}{2}(U_1 + U_2), U_o^I = \frac{1}{2}(U_1 - U_2) \\
 I_e^I &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2), I_o^I = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)
 \end{aligned} \tag{5-4-1}$$

于是,可以写出

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^E \begin{bmatrix} U_e^I \\ I_e^I \\ U_o^I \\ I_o^I \end{bmatrix} \quad (5-4-2)$$

其中,变换矩阵  $\mathbf{A}^E$  为

$$\mathbf{A}^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5-4-3)$$

$U_e^I, I_e^I$  和  $U_o^I, I_o^I$  构成偶模传输线;  $U_o^H, I_o^H$  和  $U_e^H, I_e^H$  则构成奇模传输线。这两者可看成是独立的四端口网络。因为

$$\begin{bmatrix} U_e^I \\ I_e^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & jZ_{0e} \sin \theta_e \\ j\frac{1}{Z_{0e}} \sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e^H \\ I_e^H \end{bmatrix} \quad (5-4-4)$$

$$\begin{bmatrix} U_o^I \\ I_o^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_o & jZ_{0o} \sin \theta_o \\ j\frac{1}{Z_{0o}} \sin \theta_o & \cos \theta_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o^H \\ I_o^H \end{bmatrix} \quad (5-4-5)$$

注意到式中  $\theta_e = \beta_e L, \theta_o = \beta_o L$ 。对于非 TEM 模微波传输线,偶模和奇模传播速度一般是不同的。现在可以写出

$$\begin{bmatrix} U_e^I \\ I_e^I \\ U_o^I \\ I_o^I \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{eo} \begin{bmatrix} U_e^H \\ I_e^H \\ U_o^H \\ I_o^H \end{bmatrix} \quad (5-4-6)$$

其中

$$\mathbf{A}^{eo} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & jZ_{0e} \sin \theta_e & 0 & 0 \\ j\frac{1}{Z_{0e}} \sin \theta_e & \cos \theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_o & jZ_{0o} \sin \theta_o \\ 0 & 0 & j\frac{1}{Z_{0o}} \sin \theta_o & \cos \theta_o \end{bmatrix} \quad (5-4-7)$$

作为以上过程的可逆过程,再研究由奇偶模输出向一般激励输出的模式反变换

$$\begin{bmatrix} U_e^H \\ I_e^H \\ U_o^H \\ I_o^H \end{bmatrix} = \mathbf{A}^F \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (5-4-8)$$

$$\mathbf{A}^F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5-4-9)$$

总的耦合微波传输线  $\mathbf{A}$  矩阵为三者级联, 即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^F \mathbf{A}^{eo} \mathbf{A}^F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos \theta_e + \cos \theta_o) & \frac{1}{2}(\cos \theta_e - \cos \theta_o) & j \frac{1}{2}(Z_{oe} \sin \theta_e + Z_{oo} \sin \theta_o) & j \frac{1}{2}(Z_{oe} \sin \theta_e - Z_{oo} \sin \theta_o) \\ \frac{1}{2}(\cos \theta_e - \cos \theta_o) & \frac{1}{2}(\cos \theta_e + \cos \theta_o) & j \frac{1}{2}(Z_{oe} \sin \theta_e - Z_{oo} \sin \theta_o) & j \frac{1}{2}(Z_{oe} \sin \theta_e + Z_{oo} \sin \theta_o) \\ j \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_{oe}} \sin \theta_e + \frac{1}{Z_{oo}} \sin \theta_o\right) & j \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_{oe}} \sin \theta_e - \frac{1}{Z_{oo}} \sin \theta_o\right) & \frac{1}{2}(\cos \theta_e + \cos \theta_o) & \frac{1}{2}(\cos \theta_e - \cos \theta_o) \\ j \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_{oe}} \sin \theta_e - \frac{1}{Z_{oo}} \sin \theta_o\right) & j \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_{oe}} \sin \theta_e + \frac{1}{Z_{oo}} \sin \theta_o\right) & \frac{1}{2}(\cos \theta_e - \cos \theta_o) & \frac{1}{2}(\cos \theta_e + \cos \theta_o) \end{bmatrix} \quad (5-4-10)$$

作为特例, 比如带状耦合线,  $\theta = \theta_e = \theta_o$ , 则式(5-4-10)可进一步简化为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & j \frac{1}{2}(Z_{oe} + Z_{oo}) \sin \theta & j \frac{1}{2}(Z_{oe} - Z_{oo}) \sin \theta \\ 0 & \cos \theta & j \frac{1}{2}(Z_{oe} - Z_{oo}) \sin \theta & j \frac{1}{2}(Z_{oe} + Z_{oo}) \sin \theta \\ j \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_{oe}} + \frac{1}{Z_{oo}}\right) \sin \theta & j \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_{oe}} - \frac{1}{Z_{oo}}\right) \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ j \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_{oe}} - \frac{1}{Z_{oo}}\right) \sin \theta & j \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_{oe}} + \frac{1}{Z_{oo}}\right) \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5-4-11)$$

[例 2] I型线网络的广义传输如图 5-4-4 所示, 求它的广义  $\mathbf{A}$  矩阵。

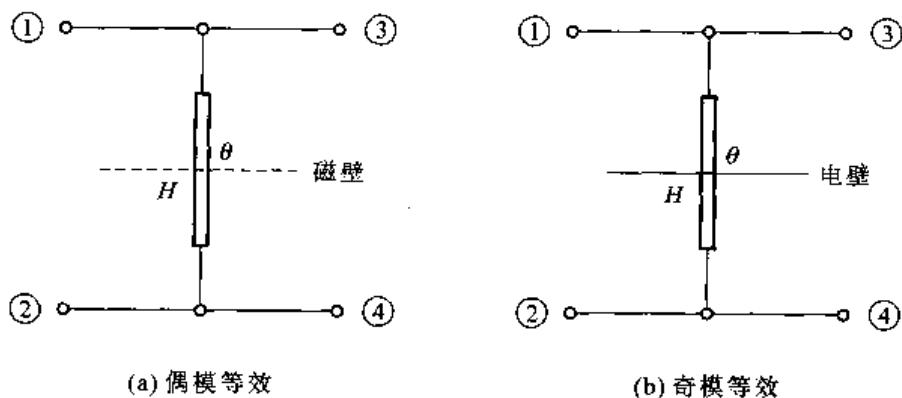


图 5-4-4 I型线网络的奇偶模分析方法

[解] 本题采用奇偶模分析。如图 5-4-4 所示, 图中  $H$  为中央线的特性导纳。偶模网络相当于传输线上并联电长度为  $\theta/2$  的开路导纳, 而奇模网络则相当于短路导纳。于是可写出

$$\mathbf{A}^{eo} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ jH\tan\left(\frac{1}{2}\theta\right) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -jH\cot\left(\frac{1}{2}\theta\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (5-4-12)$$

采用与例 1 同样的变换网络, 得到总的  $\mathbf{A}$  为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^F \mathbf{A}^{eo} \mathbf{A}^F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -j\frac{H}{\tan\theta} & j\frac{H}{\sin\theta} & 1 & 0 \\ j\frac{H}{\sin\theta} & -j\frac{H}{\tan\theta} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-4-13)$$

[例 3] 求分支线网络的广义  $\mathbf{A}$  矩阵。分支线网络如图 5-4-5 所示。 $K$  和  $H$  分别表示主线与分支线的特性导纳。

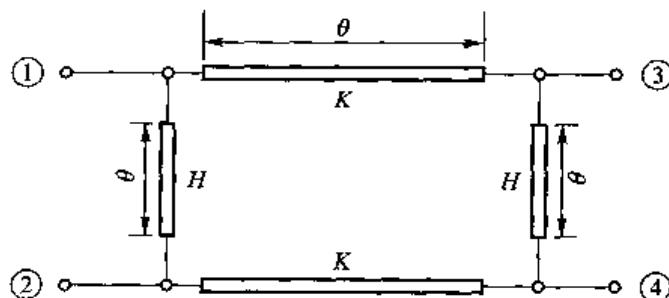


图 5-4-5 分支线网络

[解] 分支线网络可看作是两个 L 型线与独立微波传输线三个网络级联而成, 即

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -j\frac{H}{\tan\theta} & j\frac{H}{\sin\theta} & 1 & 0 \\ j\frac{H}{\sin\theta} & -j\frac{H}{\tan\theta} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & j\sin\theta/K & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & j\sin\theta/K \\ jK\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & jK\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -j\frac{H}{\tan\theta} & j\frac{H}{\sin\theta} & 1 & 0 \\ j\frac{H}{\sin\theta} & -j\frac{H}{\tan\theta} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{H}{K}\right)\cos\theta \\ -\frac{H}{K} \\ -j\frac{H}{\sin\theta} \left[2\cos^2\theta + \frac{H}{K}(1 + \cos^2\theta) - \frac{K}{H}\sin^2\theta\right] \\ \frac{j2H}{\tan\theta} \left(1 + \frac{H}{K}\right) \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{H}{K} \\ \left(1+\frac{H}{K}\right)\cos\theta \\ j\frac{2H}{\tan\theta}\left(1+\frac{H}{K}\right) \\ -j\frac{H}{\sin\theta}\left[2\cos^2\theta+\frac{H}{K}(1+\cos^2\theta)-\frac{K}{H}\sin^2\theta\right] \end{array} \right| \begin{array}{l} j\sin\theta/K \\ 0 \\ \left(1+\frac{H}{K}\right)\cos\theta \\ -\frac{H}{K} \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ j\sin\theta/K \\ -\frac{H}{K} \\ \left(1+\frac{H}{K}\right)\cos\theta \end{array} \quad (5-4-14)$$

## 二、极化变换网络

铁氧化非互易 Farady(法拉第)器件是一个典型的极化变换网络。它的最基本的原理在于圆波导中放置纵向(即  $z$  方向)磁化的铁氧体之后,分裂出左旋极化和右旋极化两个本征模式,从而可以构成性能奇特的很多器件。

下面先分析铁氧体中的本征模式;再应用极化变换网络给出各种器件的作用原理与性能指标。

### 1. 铁氧体中本征磁导率和本征模式

电磁波在铁氧体中肯定会发生与材料之间的相互作用。首先从无限媒质的均匀平面波情况着手。所谓均匀平面波即认为波的振幅与垂直于传播方向的平面无关。在电磁波理论中已经知道,无耗的各向同性媒质可能传播的均匀平面波,其相移常数  $\beta$  为

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \mu_r \epsilon_r} \quad (5-4-15)$$

在铁氧体媒质中,波的传播情况将变得复杂。由于张量磁导率的各向异性,而可能存在各种相移常数的电磁波。

深入地研究后发现:尽管波的传播情况比较复杂,但是其中存在着几种基本的传输模式,其他复杂情况都是它们不同的线性组合。这几种基本模式的共同特点是:都存在独立的传播常数  $\beta$ ;均有非零解的场; $\beta$  均与一定的磁导率有关。把这几种基本模式称为在铁氧体媒质内传播的本征模,而把本征模相移常数  $\beta$  所对应的磁导率称为本征磁导率。

下面将证明:铁氧体的本征磁导率,就是对张量磁导率  $\mu$  横向(即垂直于传播方向)本征化所求得的本征值。

在无穷大铁氧体媒质中,波传播所遵循的 Maxwell 方程是

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (5-4-16)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (5-4-17)$$

再对式(5-4-17)取旋度,可得

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \mu_r \vec{H} \quad (5-4-18)$$

假定

$$\vec{H} = \vec{H}_m e^{-j\beta \cdot \vec{r}} \quad (5-4-19)$$

式中, $\vec{r}$  为矢径; $\beta$  为某传播方向的相移常数; $\vec{H}_m$  是常矢量。利用矢量恒等式

$$\nabla \times (\varphi \vec{f}) = (\nabla \varphi) \times \vec{f} + \varphi \nabla \times \vec{f} \quad (5-4-20)$$

式中,  $\varphi$  表示标量;  $\vec{f}$  表示一般矢量。于是有

$$\nabla \times \vec{H} = (\nabla e^{-j\beta \cdot \vec{r}}) \times \vec{H}_m \quad (5-4-21)$$

若令

$$\vec{\beta} \cdot \vec{r} = u \quad (5-4-22)$$

则由矢量恒等式

$$\nabla \varphi(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \nabla u \quad (5-4-23)$$

可得

$$\nabla e^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}} = -je^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}} \nabla (\vec{\beta} \cdot \vec{r}) \quad (5-4-24)$$

又有

$$\nabla (\vec{\beta} \cdot \vec{r}) = \vec{\beta} \quad (5-4-25)$$

因此

$$\nabla \times \vec{H} = -j(\vec{\beta} \times \vec{H}) \quad (5-4-26)$$

又根据矢量-张量恒等式

$$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot \nabla \vec{f} - (\nabla \cdot \vec{f}) \vec{g} - \vec{f} \cdot \nabla \vec{g} + (\nabla \cdot \vec{g}) \vec{f}$$

可知

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = [-\vec{\beta} \cdot \nabla \vec{H} + (\nabla \cdot \vec{H}) \vec{\beta}] \cdot (-j) \quad (5-4-27)$$

最后得到

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \vec{H}(\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{H}) \quad (5-4-28)$$

把场分解成平行于传播方向的  $\vec{H}_t$  和垂直于传播方向的  $\vec{H}_\perp$ , 即

$$\vec{H} = \vec{H}_t + \vec{H}_\perp \quad (5-4-29)$$

将式(5-4-29)代入式(5-4-18), 得两个矢量方程

$$\begin{cases} \vec{H}_t(\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_t \{\mu \vec{H}\}, \\ \vec{H}_\perp(\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{H}) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_t \{\mu \vec{H}\}. \end{cases} \quad (5-4-30)$$

式中,  $\{\cdot\}_t$  和  $\{\cdot\}_\perp$  分别表示矢量的横向分量和纵向分量。式(5-4-30)也可改写为

$$\beta^2 \vec{H}_t - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_t \{\mu \vec{H}\}_t = 0 \quad (5-4-31)$$

要使此矢量方程成立, 一定有

$$\{\mu \vec{H}\}_t = \lambda \vec{H}_t \quad (5-4-32)$$

其中,  $\lambda$  为比例常数。式(5-4-32)也可写为

$$\{\mu \vec{H}\}_t = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{H} \quad (5-4-33)$$

即

$$\left\{ \left[ \boldsymbol{\mu} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \vec{H} \right\}_z = 0 \quad (5-4-34)$$

于是,使  $\vec{H}$  场有非零解的条件为

$$\det \left\{ \boldsymbol{\mu} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (5-4-35)$$

式(5-4-35)称为本征方程。又把式(5-4-32)结果代入式(5-4-31),得

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \lambda}$$

此相移常数所对应的波称为铁氧体媒质的本征波,而  $\lambda$  称为本征磁导率。

式(5-4-35)说明平面波的传播,其传输参数只与横向空间媒质特性密切有关。注意:习惯上把波的传播方向规定为  $z$  方向。下面以具体例子加以说明。

### (1) 外场 $H_0$ 与传播方向 $z$ 平行

这种情况称为纵向磁化,也即稍后要重点讨论的铁氧体 Farady 效应,磁导率矩阵为

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & jk & 0 \\ -jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix}$$

这时本征方程具体为

$$\det \begin{bmatrix} \mu - \lambda & jk & 0 \\ -jk & \mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix} = 0$$

即

$$(\mu - \lambda)^2 - k^2 = 0 \quad (5-4-36)$$

解得

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu + k \\ \lambda_2 = \mu - k \end{cases} \quad (5-4-37)$$

在实际应用中,常把  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  两个本征磁导率分别用  $\mu_+$ 、 $\mu_-$  表示,也即

$$\begin{cases} \mu_+ = \mu + k \\ \mu_- = \mu - k \end{cases} \quad (5-4-38)$$

本征值  $\mu_+$  所对应的本征矢量为

$$\begin{bmatrix} h \\ -jh \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-4-39)$$

而本征值  $\mu_-$  所对应的本征矢量为

$$\begin{bmatrix} h \\ jh \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-4-40)$$

因此,可以说在纵向磁化时,对应有两个本征波,一个是式(5-4-39)所表示的  $xoy$  平面的右旋(相对  $H_0$ )圆极化波,其本征磁导率  $\mu_+ = \mu + k$ ;另一个是式(5-4-40)所表示的  $xoy$  平面的左旋(相对  $H_0$ )圆极化波,其本征磁导率  $\mu_- = \mu - k$ 。注意到所用的符号中,时间变化均取  $e^{j\omega t}$ ,而瞬时值取其实部。

这两个本征波的相移常数是不同的,据式(5-4-38)可知:右旋圆极化波相移常数为

$$\beta_+ = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_f (\mu + k)} \quad (5-4-41)$$

而左旋圆极化波相移常数为

$$\beta_- = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_f (\mu - k)} \quad (5-4-42)$$

上面两式均假定了

$$\mu > k \quad (5-4-43)$$

## (2) 外场 $H_0$ 与传播方向 $z$ 垂直

这种情况称为横向磁化。可假定  $H_0$  为  $y$  方向。于是张量磁导率矩阵具体为

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & -jk \\ 0 & \mu_{11} & 0 \\ jk & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (5-4-44)$$

这时本征方程具体为

$$\det \begin{bmatrix} \mu - \lambda & 0 & -jk \\ 0 & \mu_{11} - \lambda & 0 \\ jk & 0 & \mu \end{bmatrix} = 0 \quad (5-4-45)$$

即

$$(\mu - \lambda)(\mu_{11} - \lambda)\mu - k^2(\mu_{11} - \lambda) = 0 \quad (5-4-46)$$

解得

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu} \\ \lambda_2 = \mu_{11} \end{cases} \quad (5-4-47)$$

本征值  $\lambda_1$  所对应的本征矢量为

$$\begin{bmatrix} h \\ 0 \\ -j \frac{k}{\mu} h \end{bmatrix} \quad (5-4-48)$$

本征值  $\lambda_2$  所对应的本征矢量为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-4-49)$$

它们一个表示椭圆极化波;另一个表示线极化波。其相移常数分别为

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_f \left( \frac{\mu^2 - k^2}{\mu} \right)} \quad (5-4-50)$$

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r (\mu_r)} \quad (5-4-51)$$

以后讨论中,特别将  $\lambda_1$  称为  $\mu_r$ ,即本征磁导率。

## 2. 极化变换网络

铁氧体的外磁场  $H_0$  与波的传播方向  $z$  平行(方向一致或方向相反),则会出现所谓 Faraday 效应。

在互易媒质的导波系统中,存在一对互相垂直的线极化波。例如,圆波导中的 TE<sub>11</sub>奇模和 TE<sub>11</sub>偶模;矩形波导中的 TE<sub>10</sub>模和 TE<sub>01</sub>模;无穷大平面的  $E_x$  线极化波和  $E_y$  线极化波等。它们之间是相互正交独立的,并且在一定条件下(例如,矩形波导的两边  $a, b$  相等的情况)是简并的,具有同样的相移常数。但是,如果波导系统填充有纵向磁化的铁氧体媒质,由于张量磁导率的非对角线项,这两种模式不再正交独立,也就是说,这种情况下线极化波不再是本征波。它们之间发生了相互耦合,同时重新组合出新的本征波——右旋极化波和左旋极化波。因为纵向器件中波反向传输时和正向传输时的张量磁导率  $\mu$  不同,从而构成一非互易网络。

图 5-4-6(a)、(b) 所示分别为两个相互垂直的线极化波输入的一般导波系统和填充有纵向磁化铁氧体媒质的导波系统。

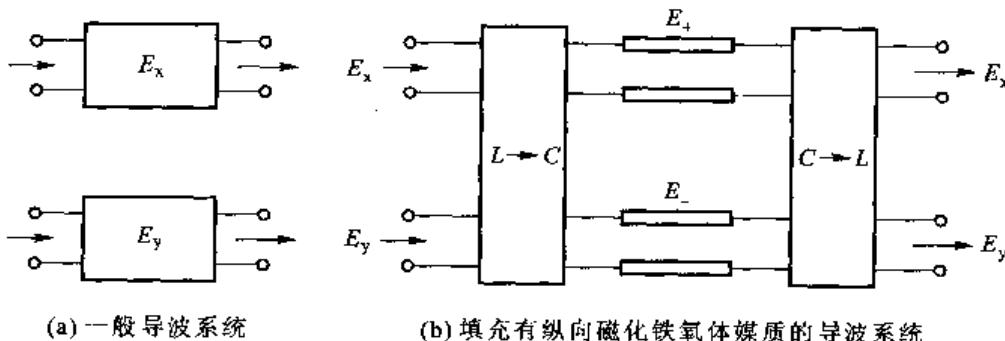


图 5-4-6 极化变换网络

显然,它们是一种广义网络输入,输出量用电场  $E$  作极化标志。实际上在纵向磁化条件下,采用  $H$  表示极化是完全一一对应的。图中,  $E_+$ 、 $E_-$  分别表示右旋(正圆)极化和左旋(负圆)极化。于是,图 5-4-6 所表示的即极化变换网络。

可以看出,研究纵向磁化情况,如果输入输出均为线极化波,则是由三部分传输网络级联而成: $L \rightarrow C$  网络,即线极化波转换成圆极化波网络;正圆极化波传输网络和负圆极化波传输网络; $C \rightarrow L$  网络,即圆极化波转换成线极化波网络,如图 5-4-6(b) 所示。这种网络称为耦合模网络。因为正向传输和反向传输时  $E_+$ 、 $E_-$  的相移常数不同,因此构成非互易网络。下面,将分别叙述这三个网络。

### (1) $L \rightarrow C$ 网络,线极化波转换成圆极化波网络

根据能量守恒和一个线极化波可以分解成两个等幅的圆极化波,很容易得到

$$\begin{bmatrix} E_+ \\ E_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (5-4-52)$$

若设

$$\mathbf{T}_{L \rightarrow C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \quad (5-4-53)$$

则有

$$\begin{bmatrix} E_+ \\ E_- \end{bmatrix} = T_{L \rightarrow C} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (5-4-54)$$

### (2) C→L 网络, 圆极化波转化为线极化波网络

它的导出更为直接, 由  $E_x, E_y$  分解成两个相反圆极化波可知

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{\sqrt{2}} E_+ + \frac{1}{\sqrt{2}} E_- \\ E_y = -j \frac{1}{\sqrt{2}} E_+ + j \frac{1}{\sqrt{2}} E_- \end{cases} \quad (5-4-55)$$

于是

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_+ \\ E_- \end{bmatrix} \quad (5-4-56)$$

若设

$$T_{C \rightarrow L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \quad (5-4-57)$$

则有

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = T_{C \rightarrow L} \begin{bmatrix} E_+ \\ E_- \end{bmatrix} \quad (5-4-58)$$

很容易发现

$$T_{C \rightarrow L} = T_{L \rightarrow C}^{-1} \quad (5-4-59)$$

它们互为逆矩阵。把  $T_{C \rightarrow L}$  和  $T_{L \rightarrow C}$  均称为极化变换网络。

### (3) 正圆极化波和负圆极化波传输网络

这是纵向磁化铁氧体所特有的网络。因为, 只有在这时, 正、负圆极化波才是传输系统的本征波。这两种波有独立的相移常数。因此可以写出

$$\begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\theta_+} & 0 \\ 0 & e^{-\theta_-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix}$$

式中  $E_i^+, E_i^-$  分别表示正、负圆极化波, 下标  $i$  为 1 和 2, 其中 2 代表输出量, 而 1 代表输入量, 如图 5-4-7 所示。而

$$\theta_+ = \beta_+ l \quad (5-4-60)$$

$$\theta_- = \beta_- l \quad (5-4-61)$$

其中,  $l$  是纵向磁化系统的长度。

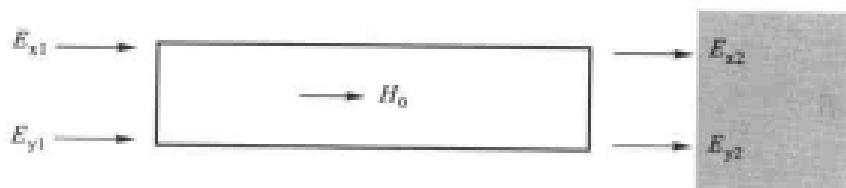


图 5-4-7 正圆极化波和负圆极化波传输网络

注意到这里的传输矩阵与第一篇中论述的有所不同。虽然它也是联系输入量与输出量之间

的关系,但是在表示上左边表示输出量,而右边代表输入量。另外不管是输入量还是输出量,它并不是端口的入射波和反射波,而是两个不同模式的入射波。因此属于多模耦合网络的传输矩阵。若令

$$\mathbf{T}_g = \begin{bmatrix} e^{-j\theta_+} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_-} \end{bmatrix} \quad (5-4-62)$$

如果是正向传输,即外加磁场与传输方向一致,则

$$\begin{cases} \beta_r = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_f \mu_+} \\ \beta_- = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_f \mu_-} \end{cases} \quad (5-4-63)$$

在完全填充铁氧体的导波系统中

$$\begin{cases} \mu_+ = \mu + k \\ \mu_- = \mu - k \end{cases} \quad (5-4-64)$$

如果是反向传输,则情形刚刚相反,因为这时外加磁场与传输方向相反,有

$$\begin{cases} \mu_+ = \mu - k \\ \mu_- = \mu + k \end{cases} \quad (5-4-65)$$

部分填充铁氧体的导波系统, $\mu_+$ 、 $\mu_-$ 表示式比较复杂。

#### [例 4] 理想 Farady 效应网络

如图 5-4-8 所示,一段有纵向磁化铁氧体材料的导波系统,所加外磁场比较低(也即  $k$  为负值),同时不计反射,认为终端负载是匹配的。假设外磁场方向与传播方向相同。如果输入一线极化波,分析网络的输出情况。

[解] 从上面的一般理论分析,很容易知道有

$$\begin{bmatrix} E_{x2} \\ E_{y2} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{bmatrix} \quad (5-4-66)$$

其中

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{L \rightarrow C} [\mathbf{T}_0] \mathbf{T}_{C \rightarrow L} \quad (5-4-67)$$

由于在低外场情况下  $\theta_- > \theta_+$ , 因此

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\theta_+} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} = e^{-j(\frac{\theta_+ - \theta_-}{2})} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5-4-68)$$

式中

$$\theta = \frac{1}{2} (\theta_- - \theta_+) \quad (5-4-69)$$

从数学观点上看

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

是坐标旋转变换矩阵,而且是右旋变换。请特别注意,在上述结论的推导过程中  $\theta_- > \theta_+$  的条件起了很重要的作用,这是因为在低外场应用时, $k$  为负值, $\mu_- > \mu_+$  而造成的。

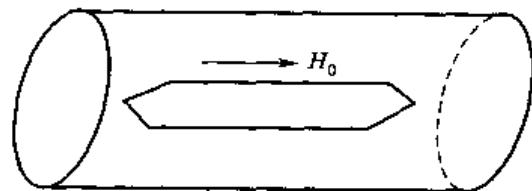


图 5-4-8 纵向磁化铁氧体导波系统

如果假定输入端的线极化波为  $x$  方向,且  $E_x = 1$ ,这并不失去一般性,即有

$$\begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-4-70)$$

则 2 端口的输出量为

$$\begin{bmatrix} E_{x2} \\ E_{y2} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-j\left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}\right)} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (5-4-71)$$

结果如图 5-4-9 所示。即正向传输时,极化面右旋了  $\theta$  角。通常把通过纵向磁化铁氧体网络后线极化波发生极化面旋转的这一现象称为 Farady 效应,而这类网络亦称为 Farady 效应网络。

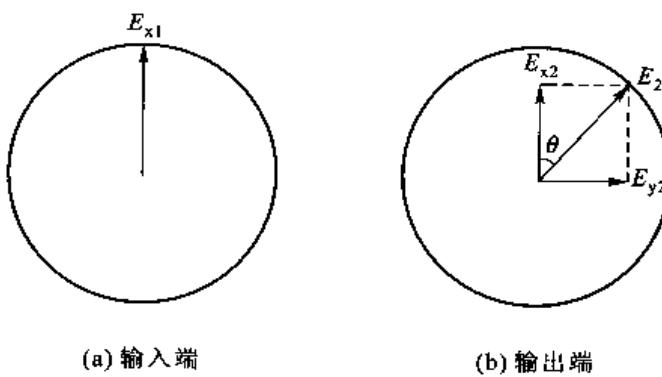


图 5-4-9 正向 Farady 效应

[例 5] 研究反向传输时,理想的 Farady 效应网络。

[解] 这是指外加磁场与传播方向相反的情况。由于这时张量磁导率的非对角元素  $jk$  和  $-jk$  互换位置,因此使  $\mathbf{T}_\theta$  变化成  $\mathbf{T}'_\theta$ ,即

$$\mathbf{T}'_\theta = \begin{bmatrix} e^{-j\theta_-} & 0 \\ 0 & e^{j\theta_-} \end{bmatrix} \quad (5-4-72)$$

注意,式中的  $\theta$ 、 $\theta_-$  为正向传输时的相应参量。而总的

$$\begin{bmatrix} E_{x2} \\ E_{y2} \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{bmatrix} \quad (5-4-73)$$

在式(5-4-73)中,仍规定 2 端口是反向传输时的输出端口,而 1 端口则是相应的输入端口。

于是有

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T}_{C-L} \mathbf{T}'_\theta \mathbf{T}_{L-C} = e^{-j\left(\frac{\theta_- + \theta_+}{2}\right)} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5-4-74)$$

注意到其中

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

是坐标的左旋变换。对于输入  $E_{x1} = 1, E_{y1} = 0$ ,即

$$\begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-4-75)$$

其输出量为

$$\begin{bmatrix} E_{x2} \\ E_{y2} \end{bmatrix} = e^{-j\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (5-4-76)$$

如图 5-4-10 所示。由此可知, 反向传输时, 极化面左旋(相对反向传输的  $z$  方向)  $\theta$  角。很显然, 纵向磁化铁氧体所造成的是一个典型的非互易网络。其网络流图如图 5-4-11 所示。

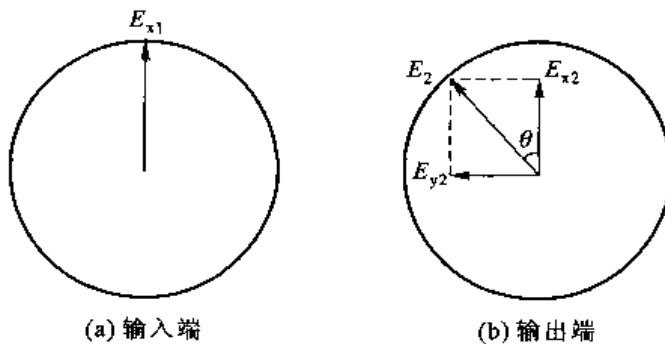


图 5-4-10 反向 Faraday 效应

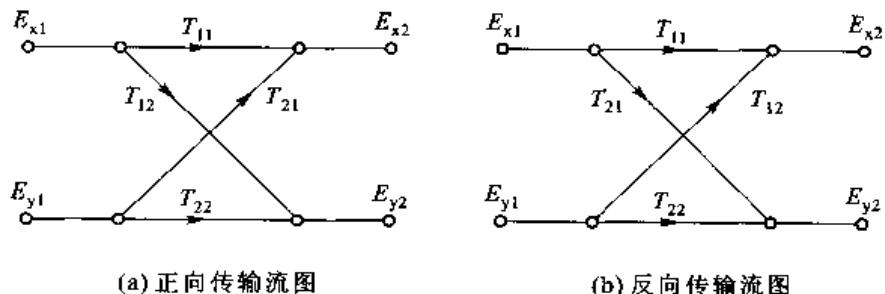


图 5-4-11 Faraday 效应网络传输流图

[例 6] 研究实际的 Faraday 效应网络。

[解] 以上两例所讨论的, 不管是正向传输情况, 还是反向传输情况, 均属理想网络。即在分析时并不考虑反射、材料损耗以及终端负载的性质。作为实际情况, 这里画出普遍情况下的 Faraday 效应网络, 如图 5-4-12 所示。其中, 两个圆极化波的散射矩阵为

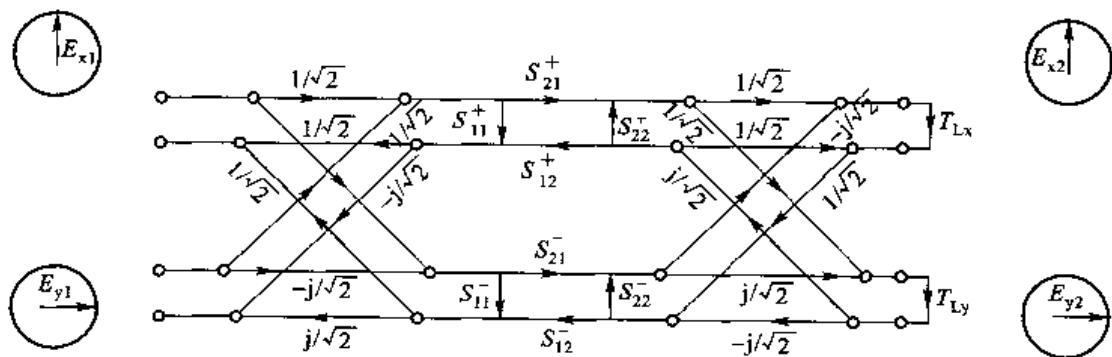


图 5-4-12 普遍情况下的 Faraday 效应网络

$$S_{\pm} = \begin{bmatrix} S_{11}^{\pm} & S_{12}^{\pm} \\ S_{21}^{\pm} & S_{22}^{\pm} \end{bmatrix} \quad (5-4-77)$$

$$\mathbf{S}_{\perp} = \begin{bmatrix} S_{11}^- & S_{12}^- \\ S_{21}^- & S_{22}^- \end{bmatrix} \quad (5-4-78)$$

如果材料无损耗, 网络无反射, 则式(5-4-77)和式(5-4-78)变为

$$\mathbf{S}_{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-4-79)$$

$$\mathbf{S}_{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & e^{+j\theta} \\ e^{+j\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-4-80)$$

现在概括一下上面的结果。填充有纵向磁化铁氧体媒质的导波系统, 当输入线极化波时, 会发生极化面偏转, 这就是所谓 Farady 效应。当外磁场和传输方向相同时, Farady 偏转是右旋的; 而当外磁场和传输方向相反时, 则是左旋的。注意到上述结论必须在外磁场较低的条件下才能成立, 而实际情况均是如此。

采用耦合模网络分析, 可以使旋转方向和物理概念比较清晰。更重要的是, 它可以分析许多实际情况。例如: 负载不匹配情况、网络有损耗、有反射情况以及它们和其他网络组合的情况。这些都是用其他方法难于分析的。在实际运用时, 要注意到对同一负载, 可以有两个反射系数, 例如  $\Gamma_x, \Gamma_y$ 。

可以清楚看出: 铁氧体张量磁导率的非互易性, 在纵向磁化的具体条件下转化为  $\sin \theta$  和  $-\sin \theta$  的非互易性。

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

均可称为 Farady 旋转矩阵。它们与通常坐标旋转变换矩阵完全一致。而  $e^{-j(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2})}$  是普通的互易相移。造成 Farady 旋转的本质是正旋和负旋两种本征模式的相移常数不同而造成模式间的差相移。这与以后将要论述的横向磁化情况下, 同一模式的来回差相移是完全不同的。

主要问题是在实用系统中(例如, 在圆波导部分加载纵向磁化铁氧体系统中), 由于与平面波情况不同, 其  $\beta_+$  和  $\beta_-$  表达式与式(5-4-63)~(5-4-65)不同。由耦合模理论分析表明: Farady 旋转角  $\theta$  在铁氧体棒很细时( $b \ll a$ )有

$$\theta = 1.05 \beta_{11} |k| \left( \frac{b}{a} \right)^2 l \quad (5-4-81)$$

式中,  $a$  为圆波导半径;  $b$  为铁氧体棒半径;  $l$  为铁氧体棒长;  $\beta_{11}$  为空气圆波导相移常数;  $|k|$  为张量导磁率  $\mu$  的非对角元素的绝对值。

Farady 旋转角  $\theta$  在铁氧体棒很粗时( $b \approx a$ )有

$$\theta = 0.42 \frac{|k|}{\mu} \beta_{11} l \quad (5-4-82)$$

注意到式(5-4-81)和式(5-4-82)中  $\theta$  均以弧度为单位, 相应的  $\beta_{11}$  单位也是弧度/米。

在实际器件中, 通常选  $\left(\frac{b}{a}\right)$  约  $0.2 \sim 0.4$  的部分加载圆波导, 如图 5-4-13 所示。

利用纵向磁化铁氧体的 Farady 效应可做成很多有用的器件。下面将用几个典型例子加以说明。

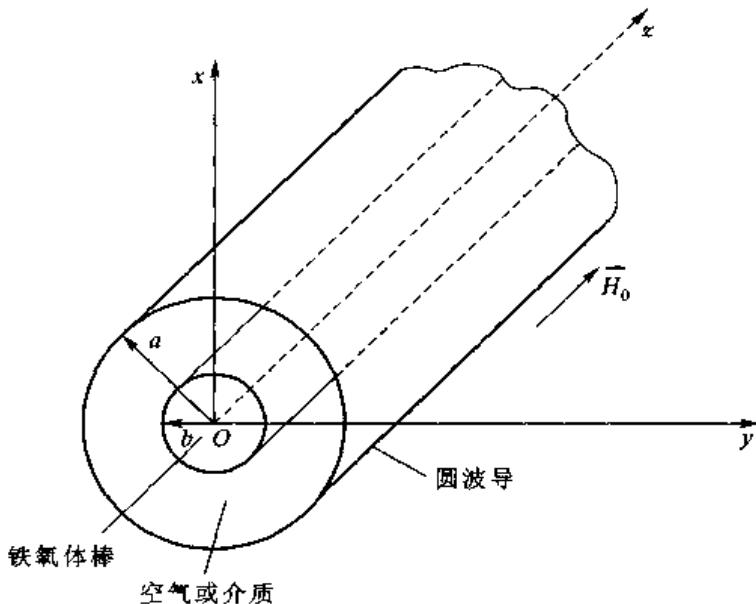


图 5-4-13 部分加载铁氧体的圆波导

[例 7] Farady 旋转式隔离器如图 5-4-14 所示。试分析其工作原理。

[解] Farady 旋转式隔离器一般是双端口网络。它的正向传输衰减很小, 而反向传输衰减很大。根据定义, 其正向损耗为

$$L = 20 \lg \frac{1}{|S_{21}|} \quad (5-4-83)$$

而反向隔离为

$$D = 20 \lg \frac{1}{|S_{12}|} \quad (5-4-84)$$

式(5-4-83)和式(5-4-84)中  $L$  和  $D$  单位均为分贝。由此可知, 隔离器必定是非互易网络, 即  $S_{12} \neq S_{21}$

Farady 旋转式隔离器由 3 部分组成: 水平电阻片、铁氧体棒、 $45^\circ$  电阻片。假定  $x$  方向如图 5-4-14 所示。这里采用网络分析的方法。水平电阻片的理想网络为

$$\begin{bmatrix} e_{x2} \\ e_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{bmatrix} \quad (5-4-85)$$

这是因为电阻片吸收平行于片的分量。

中间一段为纵向磁化的铁氧体棒, 可知

$$\begin{bmatrix} e_{x3} \\ e_{y3} \end{bmatrix} = e^{-j\left(\frac{\theta_r + \theta_l}{2}\right)} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x2} \\ e_{y2} \end{bmatrix} \quad (5-4-86)$$

同样道理输出段的电阻片网络也吸收平行于片的分量。

$$\begin{bmatrix} e_{x4} \\ e_{y4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x3} \\ e_{y3} \end{bmatrix} \quad (5-4-87)$$

因此

$$\begin{bmatrix} e_{x4} \\ e_{y4} \end{bmatrix} = e^{-j\left(\frac{\theta_r + \theta_l}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{bmatrix}$$

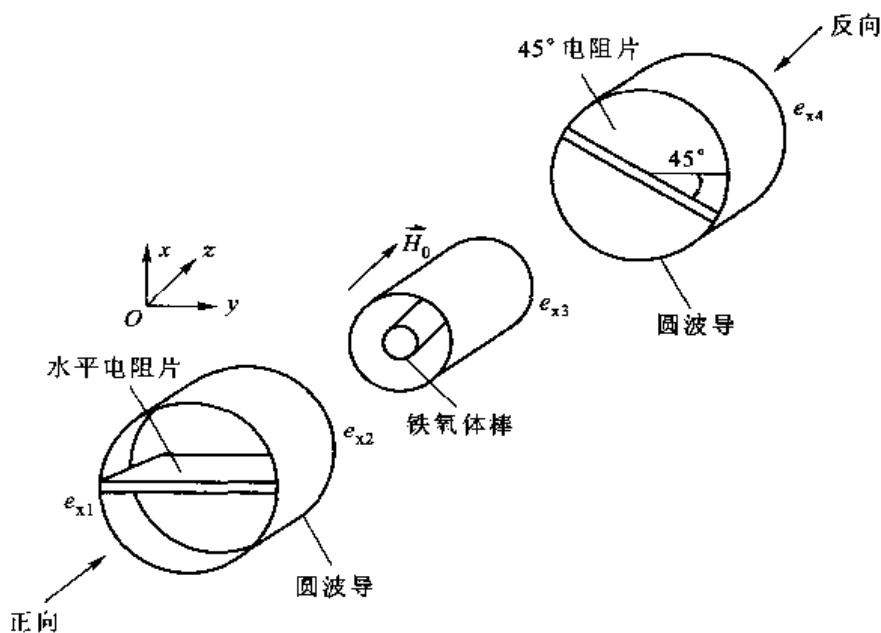


图 5-4-14 Faraday 旋转式隔离器

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\left(\frac{\theta_1 + \theta}{2}\right)} \begin{bmatrix} \sin(45^\circ + \theta) & 0 \\ \sin(45^\circ - \theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{bmatrix} \quad (5-4-88)$$

若输入  $e_{x1} = 1, e_{y1} = 0$ , 即  $x$  方向极化波

$$\begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-4-89)$$

则

$$\begin{bmatrix} e_{x4} \\ e_{y4} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\left(\frac{\theta_1 + \theta}{2}\right)} \begin{bmatrix} \sin(45^\circ + \theta) \\ \sin(45^\circ - \theta) \end{bmatrix} \quad (5-4-90)$$

只要选择好纵向磁化铁氧体棒段的 Farady 旋转角  $\theta = 45^\circ$ , 即可知输出极化波旋转  $45^\circ$  而无损耗。

下面研究反向传输情况。为了方便起见, 仍采用正向时的  $(x, y, z)$  坐标, 这样, 所有网络矩阵都毫无变化。

$$\begin{bmatrix} e_{x2} \\ e_{y2} \end{bmatrix} = e^{-j\left(\frac{\theta_1 + \theta}{2}\right)} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x3} \\ e_{y3} \end{bmatrix} \quad (5-4-91)$$

$$\begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x2} \\ e_{y2} \end{bmatrix} \quad (5-4-92)$$

$$\begin{bmatrix} e_{x3} \\ e_{y3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x4} \\ e_{y4} \end{bmatrix} \quad (5-4-93)$$

于是

$$\begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} e^{-j\left(\frac{\theta_1 + \theta}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x4} \\ e_{y4} \end{bmatrix}$$

也即

$$\begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} e^{-j\left(\frac{\theta_1 + \theta}{2}\right)} \begin{bmatrix} \cos \theta - \sin \theta & \cos \theta + \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x4} \\ e_{y4} \end{bmatrix} \quad (5-4-94)$$

若反向以  $45^\circ$  极化输入, 即

$$\begin{bmatrix} e_{x4} \\ e_{y4} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-4-95)$$

则

$$\begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j(\frac{\theta_1+\theta}{2})} \begin{bmatrix} \cos(45^\circ + \theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-4-96)$$

同样, 只要选择 Farady 旋转角  $\theta = 45^\circ$ , 则反向输出为 0。注意到反向不论是何种极化输入, 对  $\theta = 45^\circ$  时, 输出始终为 0, 对一般的  $\theta$ , 很容易得到反向隔离比为

$$D = 20 \lg \sqrt{2} \left| \frac{1}{\cos(45^\circ + \theta)} \right| = 20 \lg |\sec(45^\circ + \theta)| + 3 \text{ dB} \quad (5-4-97)$$

若要使  $D \geq 20 \text{ dB}$ , 设  $\theta = 45^\circ - \Delta\theta$ , 则可算出

$$\Delta\theta \leq 8^\circ 7' \quad (5-4-98)$$

也就是说, 要使隔离度大于  $20 \text{ dB}$ , 则 Farady 旋转角误差必须保持在  $45^\circ \pm 8^\circ$  左右。至于在实际器件中, 电阻片对水平分量的衰减不是无穷大, 各段的接头处略有反射以及负载不理想等因素, 只需将上述网络矩阵略加修改, 即可分析, 这一点留给读者自己考虑。

这种 Farady 旋转式隔离器的结构简图如图 5-4-15 所示。

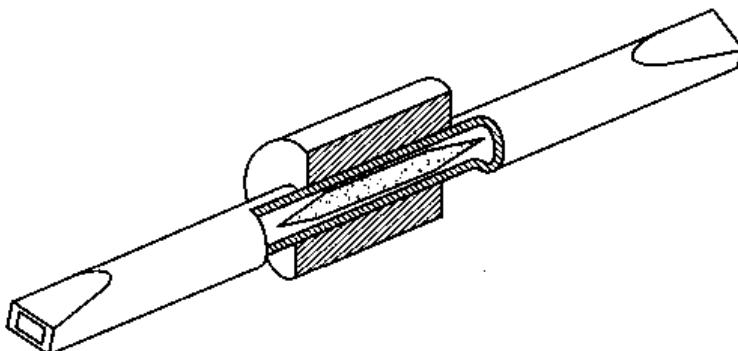


图 5-4-15 Faraday 旋转式隔离器

[例 8] 图 5-4-16 所示为一般的四端口环行器。图 5-4-17 所示为 Faraday 旋转式环行器。试分析其工作原理。

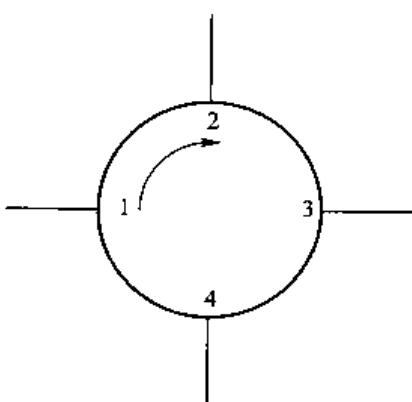


图 5-4-16 四端口环行器

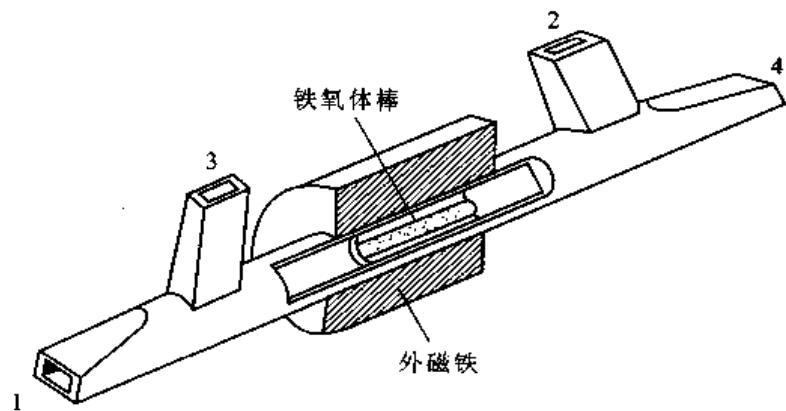


图 5-4-17 Faraday 旋转式环行器

[解] 在一般的四端口环行器中,如果环行方向是 $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4$ ,最后 $4 \rightarrow 1$ ,理想情况下不存在其他输出关系。以1端口输入为例,其正向损耗定义为

$$L = 20 \lg \frac{1}{|S_{21}|} \quad (5-4-99)$$

而反向隔离端口很多,以1端口与4端口隔离为例,反向隔离比定义为

$$D = 20 \lg \frac{1}{|S_{41}|} \quad (5-4-100)$$

Farady 旋转式环行器如图 5-4-17 所示,它有 4 个不同角度的端口(相对于纵向轴垂直平面内呈不同角度),中间配有纵向磁化铁氧体棒。

这个问题也很容易由网络理论加以解决。首先,在每个端口建立自己的  $x$  坐标,即均与端口本身窄边相平行。于是各端口  $x$  之间只要经过坐标变换即可达到。为方便,同时给出  $y$  坐标,但需注意这时  $y$  是形式参量,并无实际意义。因此各端口均为  $x$  方向极化输入输出。

根据上述原则可以得知,例如 1 端口与 2 端口有

$$\begin{bmatrix} e_{x2} \\ e_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{bmatrix} \quad (5-4-101)$$

式(5-4-101)相当于坐标的旋转变换。若有铁氧体棒,则

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_{x2} \\ e_{y2} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2})} \begin{bmatrix} \cos \theta + \sin \theta & \cos \theta - \sin \theta \\ -(\cos \theta - \sin \theta) & \cos \theta + \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-4-102)$$

输入  $e_{x1}=1, e_{y1}=0$

$$\begin{bmatrix} e_{x2} \\ e_{y2} \end{bmatrix} = e^{-j(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2})} \begin{bmatrix} \cos(45^\circ - \theta) \\ \sin(45^\circ - \theta) \end{bmatrix} \quad (5-4-103)$$

同样方法分析其他端口情况,易知

$$S = e^{-j(\frac{\theta_+ - \theta_-}{2})} \begin{pmatrix} 0 & \sin(45^\circ - \theta) & 0 & \cos(45^\circ - \theta) \\ \cos(45^\circ - \theta) & 0 & \sin(45^\circ - \theta) & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ - \theta) & 0 & \sin(45^\circ - \theta) \\ \sin(45^\circ - \theta) & 0 & \cos(45^\circ - \theta) & 0 \end{pmatrix} \quad (5-4-104)$$

可知道这类环行器 1 端口与 4 端口隔离比为

$$D = 20 \lg \left| \frac{1}{S_{41}} \right| = 20 \lg |\cos(45^\circ - \theta)| \quad (5-4-105)$$

在理想情况下,若选择 Farady 旋转角  $\theta=45^\circ$ ,则  $D \rightarrow \infty$ 。若 Farady 旋转角

$$\theta = 45^\circ - \Delta\theta \quad (5-4-106)$$

则

$$D = 20 \lg |\csc \Delta\theta| \quad (5-4-107)$$

例如,若要求反向隔离  $D > 20$  dB,则有

$$\Delta\theta \leqslant 5^\circ 44' \quad (5-4-108)$$

### 三、横向变换网络

一般网络研究的是波的传输方向——也即称为纵向。然而事实上，波在横向也可以组成网络，并在某种意义上是一个二维微波谐振腔，因此有人也把横向变换网络称之为横向谐振法。

先从矩形波导横向磁化铁氧体片加载为例开始研究。

#### 1. 矩形波导横向磁化铁氧体加载

假定完全填充横向磁化铁氧体的矩形波导系统如图 5-4-18 所示。外场  $\vec{H}_0$  为  $y$  方向。这时张量磁导率为

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & -jk \\ 0 & \mu_{11} & 0 \\ jk & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (5-4-109)$$

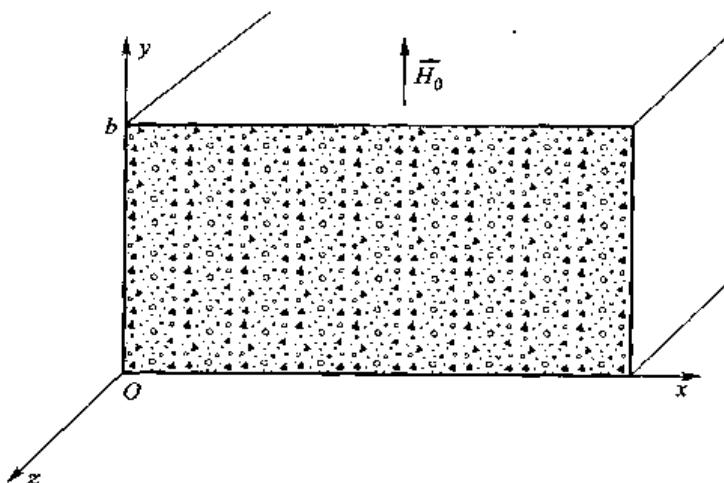


图 5-4-18 完全填充横向磁化铁氧体的矩形波导系统

一般情况下， $\mu_{11} \approx 1$ ，于是可写出

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & -jk \\ 0 & 1 & 0 \\ jk & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (5-4-110)$$

首先研究完全填充的情况，对于  $TE_{m0}$  波，其中电场  $\vec{E}$  可写成

$$\vec{E} = \hat{y} E(x) e^{-j\beta z} \quad (5-4-111)$$

代入 Maxwell 方程组，得

$$\left\{ \nabla \times \hat{y} [E(x) e^{-j\beta z}] = -j\omega \mu_0 \boldsymbol{\mu} \vec{H} \right. \quad (5-4-112)$$

$$\left. \nabla \times \vec{H} = \hat{y} j\omega \epsilon_0 \epsilon_r E(x) e^{-j\beta z} \right. \quad (5-4-113)$$

简化得

$$\left\{ -j\omega \mu_0 \mu H_x - k\omega \mu_0 H_z = j\beta E(x) e^{-j\beta z} \right. \quad (5-4-114)$$

$$\left. k\omega \mu_0 H_x - j\omega \mu_0 \mu H_z = \frac{dE(x)}{dx} e^{-j\beta z} \right. \quad (5-4-115)$$

由方程(5-4-113)和方程(5-4-114),可得

$$H_x = \frac{1}{\omega^2 \mu_0 (\mu^2 - k^2)} \left[ -\beta \omega \mu E(x) - k \omega \frac{dE(x)}{dx} \right] e^{-j\beta x} \quad (5-4-116)$$

$$H_z = \frac{1}{\omega^2 \mu_0 (\mu^2 - k^2)} \left[ j\beta k \omega E(x) + j\omega \mu \frac{dE(x)}{dx} \right] e^{-j\beta x} \quad (5-4-117)$$

从上面分析可知,对  $TE_{m0}$  模,有  $E_y, H_x, H_z$  三个分量,再利用式(5-4-112),有

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + [\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \mu_r - \beta^2] E(x) = 0 \quad (5-4-118)$$

上式中

$$\mu_r = \frac{\mu - k^2}{\mu} \quad (5-4-119)$$

它也就是横向磁化时的本征磁导率式(5-4-47)。在矩形波导条件下不出现另一本征磁导率  $\lambda_2$ ,是由于这时没有平行于外场  $\vec{H}_0$  的  $H_z$  分量。所以只有一个本征波起作用。常把  $\mu_r$  称为横向磁化的有效磁导率。若令

$$k_m^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \mu_r - \beta^2 \quad (5-4-120)$$

那么从式(5-4-118)可知横向磁化铁氧体内部电场为

$$E_y = (A \sin k_m x + B \cos k_m x) e^{-j\beta x} \quad (5-4-121)$$

由于边界条件的限制,可把  $\cos k_m x$  项舍去,也即

$$E_y = A \sin(k_m x) e^{-j\beta x} \quad (5-4-122)$$

图 5-4-19 表示在矩形波导  $x_1 \sim x_2$  处加载一片铁氧体段,其他部分为空气波导。这是实际中经常遇到的情况,因为完全填充的横向磁化铁氧体波导的特性是互易的。只有部分非对称加载的情况下,才有可能构成非互易元件。

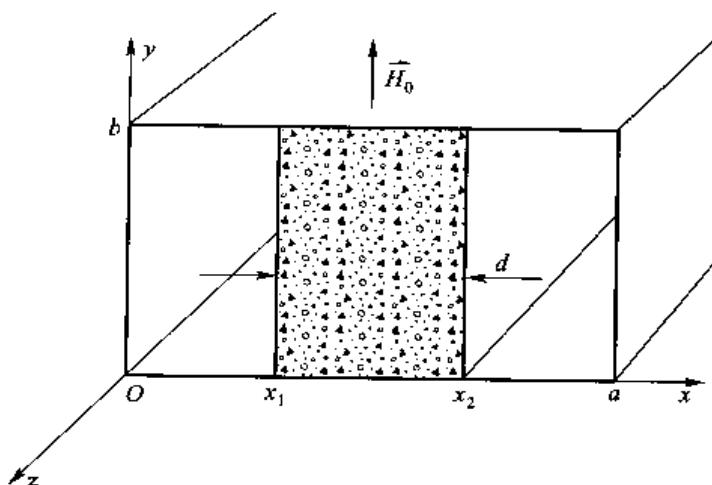


图 5-4-19 横向磁化铁氧体片加载波导

在部分加载条件下,可以把铁氧体区中的电场考虑为

$$E_y = C \sin k_m (x - x_1) + D \sin k_m (x - x_2) \quad (5-4-123)$$

它有两个待定三角函数型的常数。在  $x_1$  处电场  $E_y(x_1)$  为

$$E_y(x_1) = -D \sin k_m d \quad (5-4-124)$$

式中

$$d = x_2 - x_1 \quad (5-4-125)$$

而  $x_2$  这点电场为

$$E_y(x_2) = C \sin k_m d \quad (5-4-126)$$

又根据式(5-4-117), 可知

$$H_z(x_1) = \frac{1}{\omega^2 \mu_0 (\mu^2 - k^2)} [j\beta k \omega (-D \sin k_m d) + j\omega \mu (Ck_m + Dk_m \cos k_m d)] \quad (5-4-127)$$

$$H_z(x_2) = \frac{1}{\omega^2 \mu_0 (\mu^2 - k^2)} [j\beta k \omega (C \sin k_m d) + j\omega \mu (Ck_m \cos k_m d + Dk_m)] \quad (5-4-128)$$

考虑  $H_z$  分量是因为在边界条件中它是切向分量, 必须保持其连续。根据式(5-4-126)

$$C = \frac{E_y(x_2)}{\sin k_m d} \quad (5-4-129)$$

又据式(5-4-128)和式(5-4-129)两式, 有

$$D = \left( \cos k_m d - \frac{\beta}{k_m \mu} \sin k_m d \right) E_y(x_2) + \frac{j\omega \mu_0 \mu_e}{k_m} H_z(x_2) \quad (5-4-130)$$

如果用矩阵把  $x_1$  处的切向(电场和磁场)分量与  $x_2$  处切向(电场和磁场)分量联系起来, 则有

$$\begin{bmatrix} E_y(x_1) \\ H_z(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & B_m \\ C_m & D_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y(x_2) \\ H_z(x_2) \end{bmatrix} \quad (5-4-131)$$

式中

$$A_m = \cos k_m d - v \sin k_m d \quad (5-4-132)$$

$$B_m = j Z_m \sin k_m d \quad (5-4-133)$$

$$C_m = j \frac{1}{Z_m} (1 + v^2) \sin k_m d \quad (5-4-134)$$

$$D_m = \cos k_m d + v \sin k_m d \quad (5-4-135)$$

而

$$v = -\frac{\beta}{k_m \mu} \quad (5-4-136)$$

$$Z_m = \frac{\omega \mu_0 \mu_e}{k_m} \quad (5-4-137)$$

称式(5-4-137)中的  $Z_m$  为铁氧体媒质中波的横向阻抗。若令

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} A_m & B_m \\ C_m & D_m \end{bmatrix} \quad (5-4-138)$$

则  $\mathbf{A}_t$  称为变换矩阵。它把横截面上铁氧体边界两端的切向场相互联系起来。

如果考虑有  $d_1$  厚度的空气区, 只要令铁氧体变换矩阵式(5-4-138)中

$$\epsilon_t = 1 \quad (5-4-139)$$

$$\mu_e = 1 \quad (5-4-140)$$

同时截止波数用  $k_0$  表示为

$$k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta^2 \quad (5-4-141)$$

可得空气变换矩阵为

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 d_1 & jZ_0 \sin k_0 d_1 \\ j\frac{1}{Z_0} \sin k_0 d_1 & \cos k_0 d_1 \end{bmatrix} \quad (5-4-142)$$

式中

$$Z_0 = \frac{\omega \mu_0}{k_0} \quad (5-4-143)$$

注意到空气变换矩阵相当于特性阻抗为  $Z_0$ , 长度为  $d_1$  的短截线  $\mathbf{A}$  矩阵。特殊的地方仅在于目前的特性阻抗为横向阻抗式(5-4-143)。

同样, 如果有一条宽为  $d_2$  的无限长  $\epsilon_r$  介质片加载, 也可把铁氧体变换矩阵中

$$\epsilon_l = \epsilon_r \quad (5-4-144)$$

$$\mu_l = 1 \quad (5-4-145)$$

获得介质片变换矩阵

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_r d_2 & jZ_r \sin k_r d_2 \\ j\frac{1}{Z_r} \sin k_r d_2 & \cos k_r d_2 \end{bmatrix} \quad (5-4-146)$$

式中

$$k_r^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r - \beta^2 \quad (5-4-147)$$

$$Z_r = \frac{\omega \mu_0}{k_r} \quad (5-4-148)$$

## 2. 横向变换网络

从上面讨论中可以看出: 不论是  $\mathbf{A}_f$ , 还是  $\mathbf{A}_0$ 、 $\mathbf{A}_r$ , 这些变换矩阵均是联系本层左边和本层右边切向场之间的关系。所以, 有了这些横向变换矩阵, 即可研究如图 5-4-20 所示的广义的多层结构, 其中每一层可以是空气, 也可以是介质或铁氧体。

在多层结构中, 每一层媒质均为满高度。而矩形波导中所传输的波应该有一个统一的相移常数  $\beta$ 。利用横向变换矩阵, 主要想建立多层结构波导中统一的  $\beta$  的本征方程。

设各层的变换矩阵分别为  $\mathbf{A}_1$ 、 $\mathbf{A}_2$ 、 $\cdots$ 、 $\mathbf{A}_i$ 、 $\cdots$ 、 $\mathbf{A}_n$ , 共有  $n$  层结构, 左边边界的切向场为

$$\begin{bmatrix} E_y(0) \\ H_z(0) \end{bmatrix} \quad (5-4-149)$$

右边边界的切向场为

$$\begin{bmatrix} E_y(a) \\ H_z(a) \end{bmatrix} \quad (5-4-150)$$

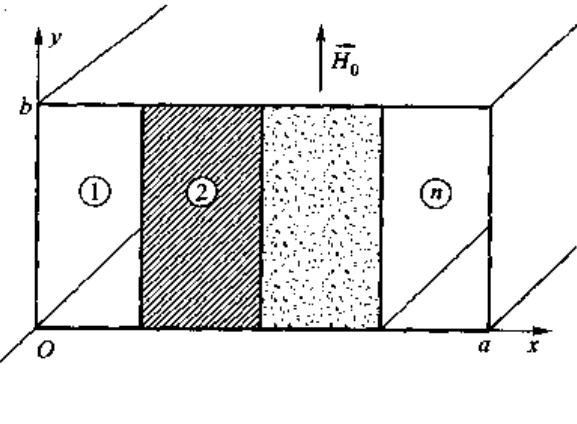


图 5-4-20 多层结构波导加载

则很容易由级联网络理论得出

$$\begin{bmatrix} E_y(0) \\ H_z(0) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} E_y(a) \\ H_z(a) \end{bmatrix} \quad (5-4-151)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n \mathbf{A}_i \quad (5-4-152)$$

当波导为理想导体时,有

$$E_y(0) = E_y(a) = 0 \quad (5-4-153)$$

由式(5-4-151),可知

$$B = 0 \quad (5-4-154)$$

式(5-4-154)即多层结构相移常数  $\beta$  的本征方程,这种求取  $\beta$  的方法常称为横向变换网络法,也称为横向变换矩阵法或简称为矩阵法。

实用上,还常常遇到对称多层结构,如

图 5-4-21 所示。如果以  $x = \frac{1}{2}a$  为中心线对剖,左右是对称的,这时只要处理一半变换矩阵即可求取  $\beta$ 。

如果采用一半数目的变换矩阵,即

$$\begin{bmatrix} E_y(0) \\ H_z(0) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{1/2} \begin{bmatrix} E_y\left(\frac{a}{2}\right) \\ H_z\left(\frac{a}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (5-4-155)$$

式(5-4-155)中

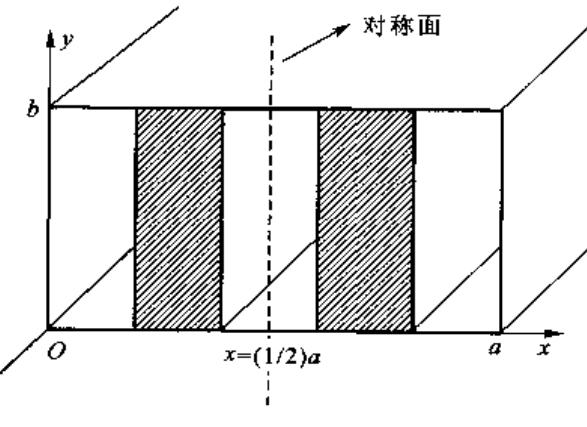


图 5-4-21 对称多层结构

$$\mathbf{A}_{1/2} = \begin{bmatrix} A_{1/2} & B_{1/2} \\ C_{1/2} & D_{1/2} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} \mathbf{A}_i \quad (5-4-156)$$

其中

$$\left[ \frac{1}{2}n \right] = \text{INT} \left[ \frac{1}{2}n \right] + 1 \quad (5-4-157)$$

$\text{INT}(x)$  表示取  $x$  的整数部分。此处所讨论的还是  $n$  层结构,只是需特别注意:在采用对称结构对剖法处理变换矩阵时,若在  $x = \frac{a}{2}$  左右最靠近  $\frac{a}{2}$  处为同一层结构,则说明  $n$  为奇数,只能取  $\frac{n}{2}$  的整数部分,再加上 1,作为用于计算的变换矩阵的数目。

在对称线  $x = \frac{1}{2}a$  处,对  $\text{TE}_{m0}$  模的场可分两种情况:一种是奇模(例如  $\text{TE}_{10}$  模),则  $x = \frac{1}{2}a$  处电场  $E_y$  最强,磁场  $H_z = 0$ ;另一种是偶模(例如  $\text{TE}_{20}$  模), $x = \frac{1}{2}a$  处磁场  $H_z$  最强,而电场  $E_y = 0$ 。因此对称结构的相移常数  $\beta$  的本征方程分别为

$$\begin{cases} A_{1/2} = 0 & \text{对于奇模(例如 } \text{TE}_{10} \text{ 模)} \\ B_{1/2} = 0 & \text{对于偶模(例如 } \text{TE}_{20} \text{ 模)} \end{cases} \quad (5-4-158)$$

$$(5-4-159)$$

另外,实际应用中为了方便,均采用阻抗归一的方法,即所有的横向阻抗均归一于空气区的 $Z_0$ ,这时各横向变换矩阵分别为

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & \bar{B}_0 \\ \bar{C}_0 & \bar{D}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 d_1 & j \sin k_0 d_1 \\ j \sin k_0 d_1 & \cos k_0 d_1 \end{bmatrix} \quad (5-4-160)$$

$$\bar{A}_r = \begin{bmatrix} \bar{A}_r & \bar{B}_r \\ \bar{C}_r & \bar{D}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_r d_2 & j \frac{Z_r}{Z_0} \sin k_r d_2 \\ j \frac{Z_0}{Z_r} \sin k_r d_2 & \cos k_r d_2 \end{bmatrix} \quad (5-4-161)$$

$$\bar{A}_t = \begin{bmatrix} \bar{A}_t & \bar{B}_t \\ \bar{C}_t & \bar{D}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_m d \mp v \sin k_m d & j \xi \sin k_m d \\ j \eta \sin k_m d & \cos k_m d \pm v \sin k_m d \end{bmatrix} \quad (5-4-162)$$

式(5-4-162)中, $v$ 前面的两个符号,上面的一个表示外磁场 $H_0$ 方向为 $y$ 的正方向;下面一个符号表示外磁场 $H_0$ 方向为 $y$ 的反方向。其中

$$\xi = \frac{Z_m}{Z_u} = \frac{\mu_e k_0}{k_m} = \mu_e \frac{(1 - \bar{\beta}^2)^{1/2}}{(\epsilon_i \mu_e - \bar{\beta}^2)^{1/2}} \quad (5-4-163)$$

$$\eta = \frac{Z_u}{Z_m} (1 + v^2) = \frac{\epsilon_i \mu - \bar{\beta}^2}{\mu (1 - \bar{\beta}^2)^{1/2} (\epsilon_i \mu_e - \bar{\beta}^2)^{1/2}} \quad (5-4-164)$$

而

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{k_0} = \frac{\beta}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (5-4-165)$$

把 $\bar{\beta}$ 称为归一化相移常数。在后面应用中,为了简便,常略去字母上的一横。

[例 9] 采用横向变换网络法分析场移式铁氧体隔离器。

[解] 已经知道:隔离器的网络为双端口网络,正向损耗很小,而反向隔离很大。理想的隔离器的 $S$ 散射参数为

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-4-166)$$

其隔离比为

$$D = 20 \lg \left| \frac{1}{S_{12}} \right| \quad (5-4-167)$$

图 5-4-22 所示为隔离器网络的一般示意图。

场移式隔离器的具体结构如图 5-4-23 所示。它是一个多层结构,共由四层组成,即在两个空气区之间有一层厚度为 $d$ 的铁氧体,以及忽略厚度的电阻 $Z$ 镀层。这种隔离器的最基本原理是通过铁氧体的非互易张量磁导率 $\mu$ 和高介电常数 $\epsilon_i$ ,使

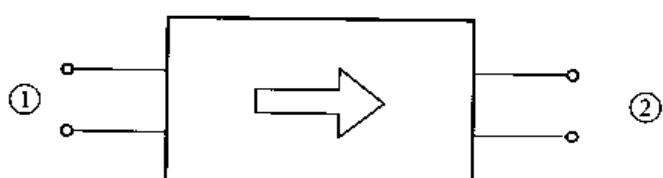


图 5-4-22 隔离器网络

正、反向场有完全不同的分布,如图 5-4-24 所示。因此电阻层对正、反向波的衰减也完全不同,可以选择适当参数使正向损耗很小而反向很大。这里采用变换矩阵法分析其特性,自左至右分析各层结构。图 5-4-23 所示空气区 I 的横向变换矩阵为

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & j \sin \alpha_1 \\ j \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (5-4-168)$$

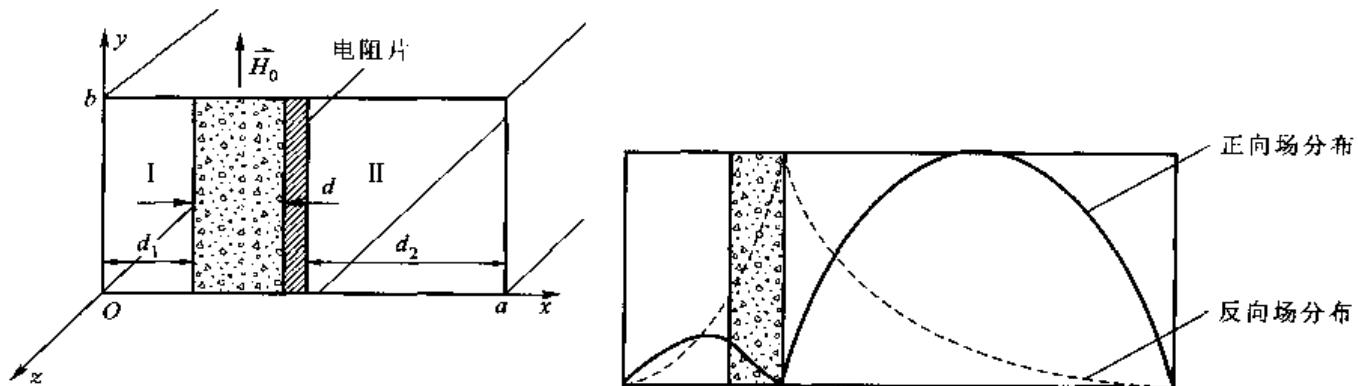


图 5-4-23 场移式隔离器

图 5-4-24 隔离器正、反向场分布

铁氧体区的横向变换矩阵为

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos \delta \pm v \sin \delta & j \xi \sin \delta \\ j \eta \sin \delta & \cos \delta \pm v \sin \delta \end{bmatrix} \quad (5-4-169)$$

电阻片的变换矩阵为

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \quad (5-4-170)$$

空气区 II 的横向变换矩阵为

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & j \sin \alpha_2 \\ j \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (5-4-171)$$

式中

$$Z = \frac{R_s k_0}{\omega \mu_0} \quad (5-4-172)$$

而  $R_s$  为表面电阻

$$\alpha_1 = k_0 d_1 = \frac{2\pi d_1}{\lambda_0} (1 - \beta^2)^{1/2} \quad (5-4-173)$$

$$\alpha_2 = k_0 d_2 = \frac{2\pi d_2}{\lambda_0} (1 - \bar{\beta}^2)^{1/2} \quad (5-4-174)$$

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (\epsilon_r \mu_r - \bar{\beta}^2)^{1/2} \quad (5-4-175)$$

令

$$\mathbf{A} = \prod_{i=1}^4 \mathbf{A}_i \quad (5-4-176)$$

并取式(5-4-176)中

$$B=0 \quad (5-4-177)$$

式(5-4-177)即本征方程,具体展开得

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{j}{Z} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + v \tan \delta \left[ \pm \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{j}{Z} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \right] + \\ \tan \delta \left[ \xi \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + j \frac{\xi}{Z} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \eta \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \right] = 0 \quad (5-4-178) \end{aligned}$$

实际的场移式隔离器往往是铁氧体很靠近  $x=0$  的侧壁,即  $\alpha_1$  很小,这时式(5-4-178)为

$$\tan \alpha_2 \approx - \left[ \frac{(\xi - \eta \alpha_1) + j \frac{\xi}{Z} \alpha_1}{1 \pm v \tan \delta + j \frac{\xi}{Z} \alpha_1 (1 - v \tan \delta)} \right] \tan \delta = L \tan \delta \quad (5-4-179)$$

式(5-4-178)和式(5-4-179)中正、负号分别代表正、反向的传输情况。这两个方程是含  $\beta$  的隐函数本征方程。数值解将由计算机作出。但是,有一点必须指出:由于电阻片的引入,实际上传输常数是复数,即

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (5-4-180)$$

其中  $\alpha$  为衰减常数,它将与电阻片的阻值、铁氧体片的厚度及其位置有关。而

$$D = 8.686(\alpha - l) \quad (5-4-181)$$

即为这类隔离器的隔离比。其中  $l$  是材料的有效长度。可以看出:在场移式隔离器中,铁氧体不是直接吸收能量,而是通过非互易的场移,使电阻片基本上吸收反向波能量,而让正向波通过,这是与其他形式隔离器不同的。

[例 10] 采用横向变换网络法分析铁  
氧体双板型非互易移相器,其一般结构示  
意如图 5-4-25 所示。

[解] 通常的非互易移相器均为双端  
口网络,其双向的传输常数不同,用  $\beta_+$  和  
 $\beta_-$  表示,因此,如果器件的有效长度为  $l$ ,则可以产生的非互易相移为

$$\theta = (\beta_+ - \beta_-)l \quad (5-4-182)$$

特别需要注意,这个非互易相移是同一模式的不同传播方向的差相移。

理想的移相器  $S$  散射参数为

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta_+ l} \\ e^{j\theta_- l} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-4-183)$$

这里所讨论的双片非互易铁氧体移相器如图 5-4-26 所示。特别注意到,只有在两侧两片铁氧体所加外磁场  $H_0$  反向时,它们才是对称结构。可以利用对剖法,求一半数目的横向变换矩阵  $A_{1/2}$ ,即

$$A_{1/2} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & j \sin \alpha_1 \\ j \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta - v \sin \delta & j \xi \sin \delta \\ j \eta \sin \delta & \cos \delta + v \sin \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & j \sin \alpha_2 \\ j \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (5-4-184)$$

式中

$$\alpha_1 = k_0 d_1 = \frac{2\pi d_1}{\lambda_0} (1 - \bar{\beta}^2)^{1/2} \quad (5-4-185)$$

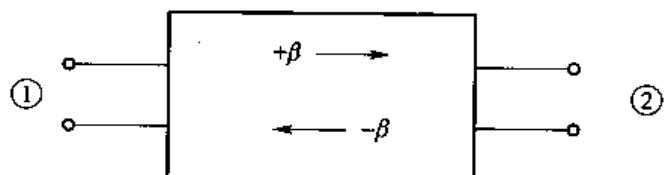


图 5-4-25 非互易移相器

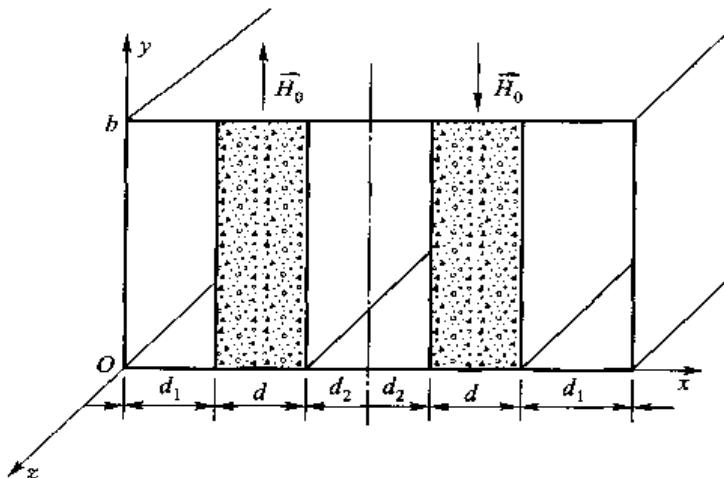


图 5-4-26 双片非互易铁氧体移相器

$$\alpha_2 = k_0 d_2 = \frac{2\pi d_2}{\lambda_0} (1 - \beta^2)^{1/2} \quad (5-4-186)$$

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (\epsilon_r \mu_r - \beta^2)^{1/2} \quad (5-4-187)$$

对于  $TE_{10}$  模, 应符合

$$A_{1/2} = 0 \quad (5-4-188)$$

展开整理, 可得  $\beta$  的本征方程为

$$\operatorname{ctan} \delta = \frac{\nu(1 + \operatorname{ctan} \alpha_1 \operatorname{ctan} \alpha_2) + \xi \operatorname{ctan} \alpha_1 + \eta \operatorname{ctan} \alpha_2}{\operatorname{ctan} \alpha_1 \operatorname{ctan} \alpha_2 - 1} \quad (5-4-189)$$

对于  $TE_{20}$  模, 则有

$$B_{1/2} = 0 \quad (5-4-190)$$

这时  $TE_{20}$  模的  $\beta$  本征方程为

$$\operatorname{ctan} \delta = \frac{\nu(\operatorname{ctan} \alpha_1 - \operatorname{ctan} \alpha_2) - \xi \operatorname{ctan} \alpha_1 \operatorname{ctan} \alpha_2 + \eta}{\operatorname{ctan} \alpha_1 + \operatorname{ctan} \alpha_2} \quad (5-4-191)$$

在分析器件的性能时,  $TE_{10}$  模本征方程是主要的。且对于正向波和反向波分别对应

$$\nu = \pm \frac{\beta}{k_m \mu} \quad (5-4-192)$$

将此结果代入式(5-4-189)可得出相移常数  $\beta_+$  和  $\beta_-$ 。在应用时, 当中心缝隙  $d_2$  很小时,  $TE_{10}$  模相移常数的本征可简化为

$$\operatorname{ctan} \delta = \nu + \eta \tan \alpha_1 \quad (5-4-193)$$

当然, 不管哪种情况,  $\beta$  的本征方程都是隐函数型的超越方程。但采用计算机是很易解决的。这里再次强调: 在横向磁化铁氧体波导中所指的非互易相移是同一模式正反传输时的不同相移; 而纵向磁化铁氧体所讨论的则是两个耦合模式的相互关系。因此, 两者的概念是不同的。

### 3. 脊波导横向网络

脊波导完全可以看作是矩形波导的宽边  $a$  弯曲变形而成。其中的电磁模式, 尤其是主模与

矩形波导十分相似,  $TE_{10}$  模工作带宽较宽, 因此在实际应用中受到青睐。

最典型的脊波导的截面图如图 5-4-27 所示。

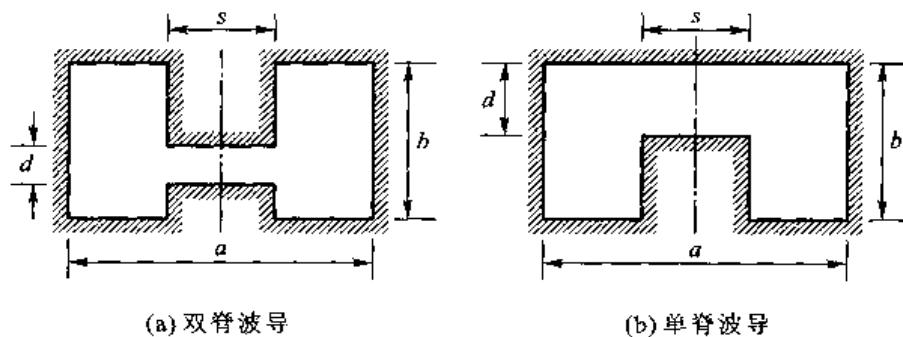


图 5-4-27 脊波导截面图

脊波导可以用典型的二维传输微波谐振腔进行分析。对于具体模式, 有两种情况

### (1) 奇模横向谐振

奇模(例如  $TE_{10}$ 、 $TE_{30}$  模等), 在奇对称的中心面电场(对应电压)最大, 即是开路面, 如图 5-4-28 所示。

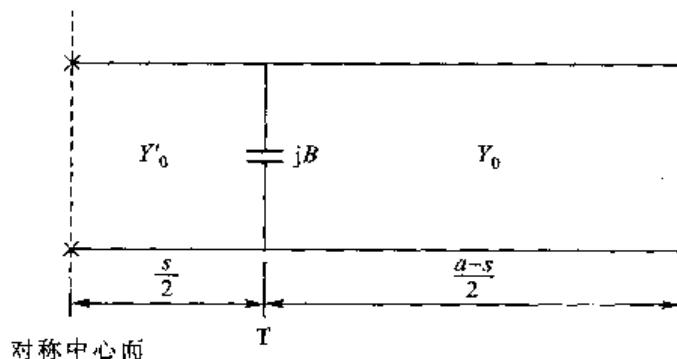


图 5-4-28 奇模横向谐振

在参数面 T 处谐振时总导纳为 0, 有

$$\frac{Y'_0}{Y_0} \tan\left(\frac{\pi}{\lambda_c} s\right) + \frac{B}{Y_0} - \text{ctan}\left[\frac{\pi}{\lambda_c}(a-s)\right] = 0 \quad (5-4-194)$$

方程(5-4-194)即二维谐振波长(也即三维情况的截止波长) $\lambda_c$  的本征方程, 其中

$$\frac{Y'_0}{Y_0} = \frac{b}{d} \quad (5-4-195)$$

而  $\frac{B}{Y_0}$  是归一化于  $Y_0$  的参考面 T 处突变导纳。

### (2) 偶模横向谐振

偶模(例如  $TE_{20}$ 、 $TE_{40}$  模等), 在偶对称的中心面电场(对应电压)最小, 即为短路面, 如图 5-4-29 所示。

同样在参考面 T 处谐振时总导纳为 0, 又有

$$-\frac{Y'_0}{Y_0} \text{ctan}\left(\frac{\pi}{\lambda_c} s\right) + \frac{B}{Y_0} - \text{ctan}\left[\frac{\pi}{\lambda_c}(a-s)\right] = 0 \quad (5-4-196)$$

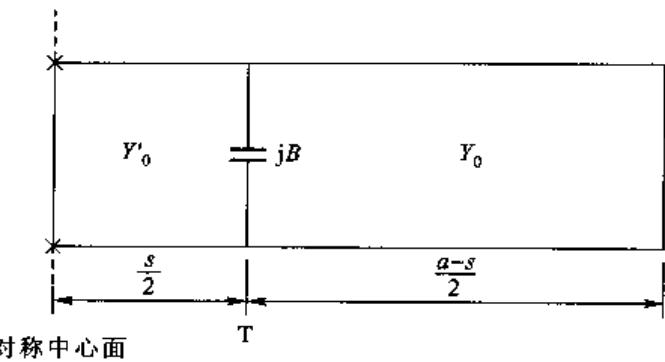


图 5-4-29 偶模横向谐振

若令  $\frac{Y'_0}{Y_0} = \frac{b}{d} = p$ , 则矩形波导阶跃突变的电纳可写为

$$\frac{B}{Y_0} = \frac{2b}{\lambda_g} \left[ \ln \left( \frac{1-p^2}{4p} \right) + \left( \frac{1+p}{1-p} \right)^{\frac{1}{2}(p+\frac{1}{p})} + 2 \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{\alpha\beta - \gamma^2} + \left( \frac{b}{4\lambda_c} \right)^2 \left( \frac{1-p}{1+p} \right)^{4p} \left( \frac{5p^2-1}{1-p^2} + \frac{4p^2\gamma}{3d} \right)^2 \right] \quad (5-4-197)$$

其中

$$\alpha = \left( \frac{1+p}{1-p} \right)^{2p} \frac{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{b}{\lambda_g} \right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left( \frac{b}{\lambda_g} \right)^2}} - \frac{1+3p^2}{1-p^2} \quad (5-4-198)$$

$$\beta = \left( \frac{1+p}{1-p} \right)^{2/p} \frac{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{b}{\lambda_g} \right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left( \frac{b}{\lambda_g} \right)^2}} + \frac{1+3p^2}{1-p^2} \quad (5-4-199)$$

$$\gamma = \left( \frac{4p}{1-p^2} \right)^2 \quad (5-4-200)$$

在实际近似中, 只要满足  $(a-s)/2a \geq 1$ , 则对双脊波导  $\lambda_g \approx \lambda_c$ , 而单脊波导则有  $\lambda_g \approx \lambda_c/2$ 。不难用计算机给出数值解。

[例 11] 已知双脊波导截面尺寸  $a = 18.29$  mm,  $b = 8.15$  mm,  $s = 4.39$  mm,  $d = 2.57$  mm, 求  $\lambda_{cTE_{10}}$ 。

[解] 求出  $\lambda_{cTE_{10}} = 56$  mm

根据推荐的带宽

$$\Delta f = f_{\max} - f_{\min} = 0.98f_{c20} - 1.185f_{c10} \approx 11.8 \text{ GHz}$$

其中,  $\lambda_{cTE_{20}} = 16.3$  mm。



## 微波传输线复相角理论 Complex Phase-angle Theory of Microwave Transmission Line

微波传输线在微波工程领域占有十分重要的地位,其分析又是比较多样而繁复的一个问题,特别是接有任意负载的微波传输线更是分别要对行波、全驻波和行驻波逐个进行讨论。

本节提出的微波传输线复相角理论,统一了终端短路模型,把任意负载归结到微波传输线的复相角  $\theta$  中去。它不仅是简明扼要的理论分析,而且也存在深刻的物理含义。

### 一、复相角理论

问题中的无耗微波传输线令  $Z_0=1$  并不失一般性,电长度(相角)为  $\theta$ ,端接任意归一化负载  $\bar{Z}_l=r_l+jx_l$ 。如图 5-5-1 所示,下面来研究输入阻抗  $\bar{Z}_{in}$ 。

假设负载反射系数  $\Gamma_l$  和输入反射系数  $\Gamma_{in}$  分别为

$$\begin{cases} \Gamma_l = |\Gamma_l| e^{j\varphi_l} \\ \Gamma_{in} = \Gamma_l e^{-j2\theta} \end{cases} \quad (5-5-1)$$

很容易看出

$$\begin{cases} |\Gamma_l| = \sqrt{\frac{(1-r_l)^2+x_l^2}{(1+r_l)^2+x_l^2}} \\ \varphi_l = \pi - \left[ \arctan\left(\frac{x_l}{1+r_l}\right) + \arctan\left(\frac{x_l}{1-r_l}\right) \right] \end{cases} \quad (5-5-2)$$

最后导出输入阻抗  $\bar{Z}_{in}$  的表示式是

$$\bar{Z}_{in} = \frac{1+\Gamma_{in}}{1-\Gamma_{in}} = \frac{\rho_l + j \tan\left(\theta - \frac{1}{2}\varphi_l\right)}{1 + j \rho_l \tan\left(\theta - \frac{1}{2}\varphi_l\right)} \quad (5-5-3)$$

式中,  $\rho_l$  表示负载的电压驻波比,为

$$\rho_l = \frac{1+|\Gamma_l|}{1-|\Gamma_l|} = \frac{\sqrt{(1+r_l)^2+x_l^2} + \sqrt{(1-r_l)^2+x_l^2}}{\sqrt{(1+r_l)^2+x_l^2} - \sqrt{(1-r_l)^2+x_l^2}} \quad (5-5-4)$$

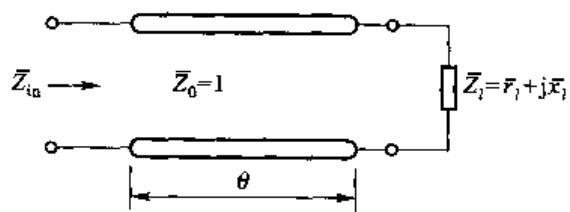


图 5-5-1 无耗微波传输线端接任意负载  $\bar{Z}_l$

进一步引入参量  $\Delta\varphi_l$ , 其定义是

$$\Delta\varphi_l = \pi - \varphi_l = \arctan\left(\frac{x_l}{1+r_l}\right) + \arctan\left(\frac{x_l}{1-r_l}\right) \quad (5-5-5)$$

且令  $Z_{in} = r_{in} + jx_{in}$ , 则可写出

$$Z_{in} = \frac{1+j\rho_l \tan\left(\theta + \frac{1}{2}\Delta\varphi_l\right)}{\rho_l + j \tan\left(\theta + \frac{1}{2}\Delta\varphi_l\right)} \quad (5-5-6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{in} = \frac{\rho_l [1 + \tan^2(\theta + \frac{1}{2}\Delta\varphi_l)]}{\rho_l^2 + \tan^2(\theta + \frac{1}{2}\Delta\varphi_l)} \\ x_{in} = \frac{(\rho_l^2 - 1) \tan(\theta + \frac{1}{2}\Delta\varphi_l)}{\rho_l^2 + \tan^2(\theta + \frac{1}{2}\Delta\varphi_l)} \end{array} \right. \quad (5-5-7)$$

式(5-5-6)是微波传输线在最一般行驻波状态下用电压驻波比  $\rho_l$  和参量  $\Delta\varphi_l$  表示系统输入阻抗  $\bar{Z}_{in}$  随相角  $\theta$  变化的最简洁表示式, 而式(5-5-7)则分别是它们的实部和虚部表示式。

现在引入一个新的概念——复相角  $\tilde{\theta}$ , 它定义为

$$\tilde{\theta} = \theta' + j\theta'' \quad (5-5-8)$$

其中,  $\theta'$  和  $\theta''$  均为实参量, 进一步令输入阻抗

$$\bar{Z}_{in} = j \tan \tilde{\theta}^* \quad (5-5-9)$$

式(5-5-9)中,  $*$  表示复共轭。将式(5-5-9)作复展开, 可得到

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{in} = \frac{\left(\frac{1}{\tanh \theta''}\right)(1 + \tan^2 \theta')}{\left(\frac{1}{\tanh \theta''}\right)^2 + \tan^2 \theta'} \\ x_{in} = \frac{\left[\left(\frac{1}{\tanh \theta''}\right)^2 - 1\right] \tan \theta'}{\left(\frac{1}{\tanh \theta''}\right)^2 + \tan^2 \theta'} \end{array} \right. \quad (5-5-10)$$

比较式(5-5-7)和式(5-5-10)两式, 显然可见

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta' = \theta + \frac{1}{2}\Delta\varphi_l \\ \theta'' = \operatorname{arth}\left(\frac{1}{\rho_l}\right) \end{array} \right. \quad (5-5-11)$$

结合式(5-5-9)和式(5-5-11)两式, 由于引入了  $\tilde{\theta}$  复相角, 可以把任意负载的微波传输线统一为端接短路的状态, 负载的虚部, 使  $\tilde{\theta}$  产生一相移  $\frac{1}{2}\Delta\varphi_l$ , 而负载的实部则使相角  $\tilde{\theta}$  存在虚部  $j\theta''$ , 如图 5-5-2 所示。

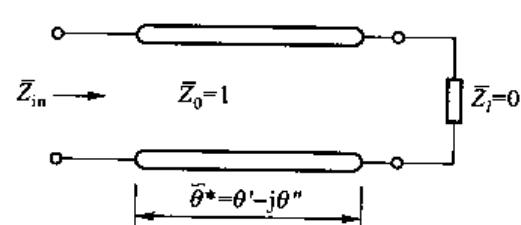


图 5-5-2 微波传输线复相角模型

式(5-5-9)和式(5-5-11)是复相角理论的基本公式。注意：当引入了复相角  $\tilde{\theta}$  后，其模型在形式上又复归于无耗。

## 二、传输线腔

这里，把微波传输线的复相角  $\tilde{\theta}$  理论运用到传输线腔中去。

众所周知，传输线腔是应用极广且研究最多的一种谐振系统。对于它的谐振条件和品质因数  $Q$  已有大量经典文献做出论述<sup>[1]-[3]</sup>。但是，深入研究将发现这些研究工作存在若干不足和缺陷。首先，必须清楚传输线腔已进入分布参数系统。但是现有的研究仍按传统的电路理论分成串联型谐振和并联型谐振。对于前者在高  $Q$  条件下，结合无耗 Foster 定理近似可得

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2R} \frac{\partial X}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (5-5-12)$$

而对于后者则有

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2G} \frac{\partial B}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (5-5-13)$$

其中，微波传输线的输入阻抗和输入导纳分别为  $Z=R+jX$  和  $Y=G+jB$ 。很容易提出这样的问题：如果该分布传输线腔处于串并联的中间状态，应如何处理？其次，现有的理论中，研究的品质因数  $Q$  均不言而喻地为谐振  $Q$  值。但是根据  $Q = \frac{\omega W}{R_i}$  的基本公式，它完全可以扩展到其他频率状态。此外，对于任意复杂传输线腔的谐振研究需要一种统一的处理方法。

为了把以上的复相角  $\tilde{\theta}$  理论应用于实际问题中，还需要做两项工作：一是把原来的无耗微波传输线推广到小损耗微波传输线，即

$$\theta \rightarrow \theta - j\theta_a \quad (5-5-14)$$

其中， $\theta = \beta l$ ;  $\theta_a = \alpha l$ ;  $\alpha$  和  $\beta$  分别是微波传输线的衰减常数和传输常数； $l$  是微波传输线长度。二是构成完整传输线腔的应该为全电路系统，即输入阻抗  $Z_{in}$  应包括输入端等效源的归一阻抗  $Z_g = r_g + jx_g$ ，具体如图 5-5-3 所示。

应用复相角理论，可导出

$$\begin{cases} \theta' = \theta + \frac{1}{2} \Delta\varphi \\ \theta' \approx \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{\rho_g} + \frac{1}{\rho_l}\right) + \theta_a \end{cases} \quad (5-5-15)$$

其中， $\Delta\varphi = \Delta\varphi_g + \Delta\varphi_l$ ，且

$$\begin{cases} \rho_g = \frac{\sqrt{(1+r_g)^2+x_g^2} + \sqrt{(1-r_g)^2+x_g^2}}{\sqrt{(1+r_g)^2+x_g^2} - \sqrt{(1-r_g)^2+x_g^2}} \\ \Delta\varphi_g = \arctan\left(\frac{x_g}{1+r_g}\right) + \arctan\left(\frac{x_g}{1-r_g}\right) \end{cases} \quad (5-5-16)$$

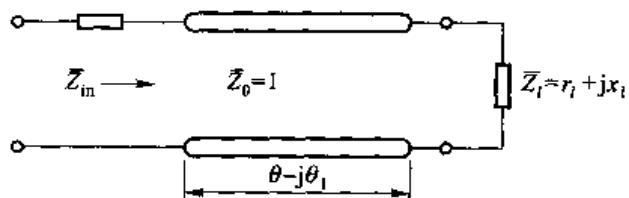


图 5-5-3 传输线腔模型

文献[1]~[3]引入了复频率  $\tilde{\omega}$ , 为

$$\tilde{\omega} = \omega' \left( 1 + j \frac{1}{2Q} \right) \quad (5-5-17)$$

其中,  $Q$  是系统的品质因数, 考虑到在 TEM 模传输线腔中  $\tilde{\theta} = \frac{\tilde{\omega}}{c}$ , 因此, 完全可以推广到 TE 模、TM 模和其他不同模式的传输线腔, 令

$$\tilde{\theta} = \theta' \left( 1 + j \frac{k}{2Q} \right) \quad (5-5-18)$$

式(5-5-18)中,  $k$  是待定常数, 由几个典型例子即可得到。对于一般情况可写出

$$k = \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\varphi}{\theta'} \right) \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^2 \quad (5-5-19)$$

其中,  $\left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^2$  是模式因子, 在 TEM 模情况下,  $\left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^2 = 1$ 。于是, 可以写出采用复相角理论的任意传输线腔的谐振条件为

$$\begin{cases} \theta' = n\pi \\ \theta' = \frac{k\theta'}{2Q} \end{cases} \quad (5-5-20)$$

最后可以写出谐振时的  $\theta$  和品质因数  $Q$  为

$$\begin{cases} \theta = \theta' - \frac{1}{2} \Delta\varphi = n\pi - \frac{1}{2} \Delta\varphi \\ Q = \frac{\pi l}{\left[ \operatorname{arcth} \left( \frac{1}{\rho_g} + \frac{1}{\rho_i} \right) + \theta_a \right] \lambda_g} \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^2 \end{cases} \quad (5-5-21)$$

式(5-5-21)是传输线腔的最一般的表达式, 作为两个特殊例子, 有:

情况 1: 负载接近短路(串联谐振)

这时又写出

$$\begin{cases} \theta = n\pi - [\operatorname{arctan}(x_g) + \operatorname{arctan}(x_i)] \\ Q = \frac{\pi l}{(r_g + r_i + \alpha l) \lambda_g} \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^2 \end{cases} \quad (5-5-22)$$

情况 2: 负载接近开路(并联谐振)

又可写出

$$\begin{cases} \theta = (n\pi - \frac{1}{2}\pi) - [\operatorname{arctan}(x_g) + \operatorname{arctan}(x_i)] \\ Q = \frac{\pi l}{(r_g + r_i + \alpha l) \lambda_g} \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^2 \end{cases} \quad (5-5-23)$$

上式中, 负载导纳为  $y_i = g_i + jb_i$ 。这里再一次强调: 式(5-5-21)清楚表明: 在传输线腔中并不存在严格的串联和并联谐振之分。它可以适合任何情况。换句话说, 复相角理论把各类谐振统一了起来。

### 三、复杂传输线腔

从上面的讨论可知,复相角理论不仅概念简单,而且物理意义也比较明确,并可推广到较普遍的情况。这里进一步以在腔中心波腹处加载的复杂传输线腔为例进行研究。具体如图 5-5-4 所示,其中  $\bar{Z}_b$  很大,而  $\bar{Z}_a$  很小。

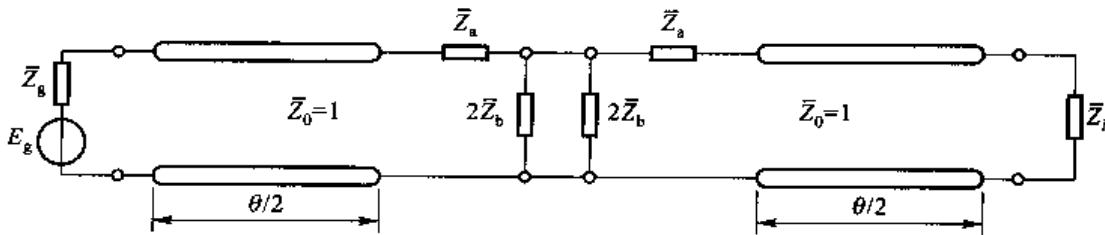


图 5-5-4 复杂传输线腔

将传输线腔中心波腹处剖开。设左右两半处于同一谐振频率。波腹导纳为

$$y_m = \frac{1}{\bar{Z}_a + 2\bar{Z}_b} = \frac{\bar{Z}_a^* + 2\bar{Z}_b^*}{|\bar{Z}_a + 2\bar{Z}_b|^2} \quad (5-5-24)$$

进一步设  $\bar{Z}_a = r_a + jx_a$ ,  $\bar{Z}_b = r_b + jx_b$ , 且令

$$\Delta = \frac{x_a + 2x_b}{|\bar{Z}_a + 2\bar{Z}_b|^2} \quad (5-5-25)$$

根据同一谐振条件,又可写出左右两部分分别是

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\theta' - \frac{1}{2}\Delta\phi_t + \Delta \\ \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\theta' - \frac{1}{2}\Delta\phi_g + \Delta \end{cases} \quad (5-5-26)$$

两式相加可知

$$\theta = \theta' - \frac{1}{2}(\Delta\phi_g + \Delta\phi_t - 4\Delta) \quad (5-5-27)$$

最后给出谐振频率  $\omega'$  和  $Q$  值分别为

$$\begin{cases} \omega' = \omega_0 - \left[ x_g + x_t - \frac{2(x_a + 2x_b)}{|\bar{Z}_a + 2\bar{Z}_b|^2} \right] \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \right) \left( \frac{c}{l} \right) \\ Q = \frac{\pi l}{\left[ \alpha l + r_g + r_t + \frac{2(r_a + 2r_b)}{|\bar{Z}_a + 2\bar{Z}_b|^2} \right] \left( \frac{\lambda_g}{\lambda_0^2} \right)} \end{cases} \quad (5-5-28)$$

式中,  $c$  表示光速。

这里所给出的复相角理论,  $\tilde{\theta} = \theta' + j\theta''$ , 有别于通常数学上的复开拓。因为它有着真实的物理意义和强大的应用背景。具体有式(5-5-20)所示  $\theta'' = \frac{k\theta'}{2Q}$ 。它反映系统中的损耗水平,因此

可以方便地采用复相角理论来研究各类传输线腔以及有耗传输器件。由于复相角  $\tilde{\theta}$  的引入,使  $Q$  值的意义更加普遍,即包括了非谐振的一般情况。研究表明:在系统由谐振转为非谐振状态时, $Q$  值的本身变化并不像人们想像的那么剧烈。这些问题值得进一步探讨。

## 参 考 文 献

- [1] R. E. Collin. Field theory of Guided Waves. 2<sup>nd</sup> ed., New York: IEEE Press, 1991.
- [2] R. F. Harrington. Time Harmonic Electromagnetic Fields. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [3] C. H. Liang, Y. J. Xie. The accurate variational analysis for the measurement of the complex dielectric constant of a sample rod inserted in a cavity. Microwave and Optical Technology Letters, May 1992, 5(5): 209 - 211.

## 损耗计算法 Loss Computation Method

损耗是微波元件的重要指标,而又是比较难于分析和计算的一个参量。平时接触到且实际上有用的,大多是小损耗元件。本节将介绍两种典型的小损耗情况分析计算方法:复本征方程法和有耗 Poynting 定理,并给出实例。

### 一、复本征方程法

复本征方程法也称为有耗本征方程法,它适用于相当普遍的波传输系统。传输系统可以给出传输常数  $\beta$  所满足的约束方程,也称之为传输本征方程,简称本征方程。

$$f(\beta) = 0 \quad (5-6-1)$$

一般传输系统如图 5-6-1 所示。

如果把问题推广到小损耗情况,即复传输常数  $\gamma$  取代了  $\beta$ ,有

$$\gamma = \beta - j\alpha \quad (5-6-2)$$

其中,  $\alpha$  是一阶小量,作为微扰近似认为方程(5-6-1)在复传输常数  $\gamma$  情况依然成立。

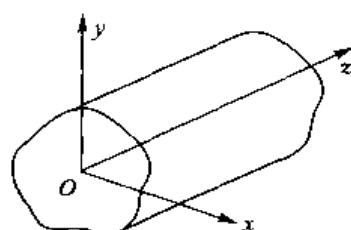


图 5-6-1 一般传输系统

$$f(r) = f_1(\beta, \alpha) + j f_2(\beta, \alpha) = 0 \quad (5-6-3)$$

于是复本征方程满足

$$\begin{cases} f_1(\beta, \alpha) = 0 \\ f_2(\beta, \alpha) = 0 \end{cases} \quad (5-6-4)$$

常称  $f_2(\beta, \alpha) = 0$  为有耗本征方程，并由此可得到器件的衰减常数  $\alpha$ 。

[例 1] 试用复本征方程法分析 5-4 节中[例 10]的铁氧体双板型非互易移相器损耗情况，如图 5-6-2 所示。

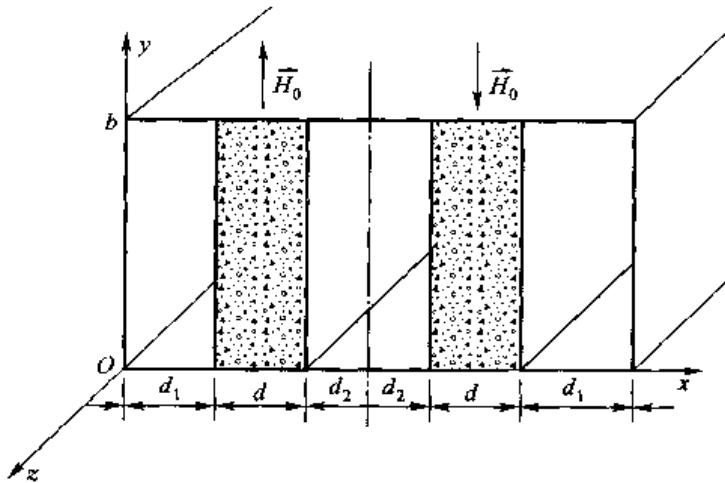


图 5-6-2 铁氧体双板型非互易移相器

[解] 由于这种移相器中铁氧体介电常数较大。其电场主要集中于铁氧体材料，这时矩形波导内侧窄壁导体板变得可有可无(处于几乎零场区)。有条件

$$d_1 \sqrt{\beta^2 - 1} \gg 1 \quad (5-6-5)$$

式(5-6-5)也称为强场集中条件。其中， $\beta$  是归一化传输常数。实际表明，采用这种方法的近似解与精确解吻合很好。这时本征方程可简化成

$$\operatorname{ctan} \delta = v + \eta \quad (5-6-6)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (\epsilon_r \mu_r - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \\ v = \pm \frac{\beta}{k_m \mu} k \end{array} \right. \quad (5-6-7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{\epsilon_r \mu_r - \beta^2}{\mu (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} (\epsilon_r \mu_r - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right. \quad (5-6-8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{\epsilon_r \mu_r - \beta^2}{\mu (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} (\epsilon_r \mu_r - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right. \quad (5-6-9)$$

现在，假定材料有耗，即

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_r (1 - j\tan \delta_e) \quad (5-6-10)$$

$$\mu = \mu' - j\mu'' \quad (5-6-11)$$

$$k = k' - jk'' \quad (5-6-12)$$

$$\mu'' = 1 \quad (5-6-13)$$

且

$$\mu_e = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu} \quad (5-6-14)$$

为有效磁导率。由于损耗使归一化传输常数  $\bar{\beta}$  演变成  $\bar{\gamma}$ 。为了方便,省略了  $\bar{\gamma}$  上的归一化符号,设

$$\gamma = \beta - j\alpha \quad (5-6-15)$$

特别注意到这时的  $\beta$  与原  $\beta$  数值已有不同。这种情况下,式(5-6-6)变成为复本征方程。

首先考虑方程的左边,有

$$\begin{aligned} \operatorname{ctan}[d(\epsilon\mu_e - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}] &= \operatorname{ctan}[d(\epsilon'\mu'_e - j\epsilon'\mu''_e - j\epsilon''\mu'_e - \beta^2 + 2j\beta\alpha)^{\frac{1}{2}}] \\ &= \operatorname{ctan}\{d[(\epsilon'\mu'_e - \beta^2) + j(2\beta\alpha - \epsilon'\mu''_e - \epsilon''\mu'_e)]^{\frac{1}{2}}\} \\ &= \operatorname{ctan}\left[d(\epsilon'\mu'_e - \beta^2)^{\frac{1}{2}} + j\frac{1}{2}d\frac{2\beta\alpha\epsilon'\mu''_e - \epsilon''\mu'_e}{(\epsilon'\mu'_e - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}\right] \end{aligned} \quad (5-6-16)$$

假定小损耗情况,即有

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \ll \beta \\ \mu'' \ll \mu' \\ k'' \approx 0 \\ \epsilon'' \ll \epsilon' \\ \mu''_e \ll \mu'_e \end{array} \right. \quad (5-6-17)$$

当  $\Delta$  很小的情况下,采用 Taylor 级数展开,即

$$f(a + \Delta) \approx f(a) + f'(a)\Delta \quad (5-6-18)$$

这时式(5-6-16)虚部可以写成

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{\operatorname{ctan}[d(\epsilon\mu_e - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}]\} &= -\frac{1}{2}d[1 + \operatorname{ctan}^2 d(\epsilon'\mu'_e - \beta^2)^{\frac{1}{2}}] \frac{2\beta\alpha - \epsilon'\mu''_e - \epsilon''\mu'_e}{(\epsilon'\mu'_e - \beta^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (5-6-19)$$

采用类似方法简化复本征方程(5-6-6)右边,又有其虚部为

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{v + \eta\} &= \left[k\beta + \frac{\epsilon' - \beta^2}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}\right] \left[ \frac{-\frac{1}{2} \frac{2\beta\alpha - \epsilon'\mu''_e - \epsilon''\mu'_e}{(\epsilon'\mu'_e - \beta^2)^{1/2}} + \mu''}{(\epsilon'\mu'_e - \beta^2)^{1/2}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(\epsilon'\mu'_e - \beta^2)^{1/2}} \left[ -k\alpha + \frac{\frac{\epsilon'\beta\alpha - \beta^2\alpha}{\beta^2 - 1} - \epsilon'\mu'' - \epsilon'' + 2\beta\alpha}{(\beta^2 - 1)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (5-6-20)$$

如果使式(5-6-19)和式(5-6-20)相等,则可得到有耗本征方程。注意到

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu''_e = (1 + k^2)\mu'' \\ \epsilon' = \epsilon_1 \end{array} \right. \quad (5-6-21)$$

若令

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_m \quad (5-6-22)$$

式中,  $\alpha_e$ 、 $\alpha_m$  分别表示电损耗常数和磁损耗常数,则可表示出

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_e = \frac{\frac{1}{2}\epsilon_f(1-k^2)P_1 + P_4\epsilon_f}{\beta(P_1+P_2)} \tan \delta_e \\ \alpha_m = \frac{\frac{1}{2}\epsilon_f(1+k^2)P_1 + P_3}{\beta(P_1+P_2)} \mu'' \end{array} \right. \quad (5-6-23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_e = \frac{\frac{1}{2}\epsilon_f(1-k^2)P_1 + P_4\epsilon_f}{\beta(P_1+P_2)} \tan \delta_e \\ \alpha_m = \frac{\frac{1}{2}\epsilon_f(1+k^2)P_1 + P_3}{\beta(P_1+P_2)} \mu'' \end{array} \right. \quad (5-6-24)$$

其中

$$P_1 = [1 + \text{ctan}^2 d (\epsilon_f \mu_e - \beta^2)^{\frac{1}{2}}] d - \frac{k\beta + \frac{\epsilon_f - \beta^2}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}}{\epsilon_f \mu_e - \beta^2} \quad (5-6-25)$$

$$P_2 = -\frac{k}{\beta} + \frac{2}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\epsilon_f - \beta^2}{(\beta^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (5-6-26)$$

$$P_3 = -k\beta + \frac{\beta^2}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (5-6-27)$$

$$P_4 = \frac{1}{(\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (5-6-28)$$

对于铁氧体非互易移相器, 特别注意到对于正反两个方向,  $\beta_+$  和  $\beta_-$  是不同的。于是对应的损耗中:  $\alpha_e^+$ 、 $\alpha_m^+$  和  $\alpha_e^-$ 、 $\alpha_m^-$  亦不相同。由此也可以清楚看出, 复本征方程最大的特点之一为可同时求出正、反两个方向不同的损耗水平。

在讨论复本征方程的最后指出: 复本征方程和 5-5 节所论述的复相角  $\theta$  理论有着深层次的联系和相关。这一方面的工作值得进一步深入探讨。

## 二、有耗传输系统的 Poynting 定理

在有耗传输系统中, 传输功率  $P$  可写成

$$P = P_0 e^{-2\alpha z} \quad (5-6-29)$$

式中,  $z$  为传输方向;  $\alpha$  表示衰减常数。具体如图 5-6-3 所示。

对式(5-6-29)中  $z$  求导, 可知

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha P \quad (5-6-30)$$

也即

$$\alpha = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz} \quad (5-6-31)$$

式中,  $-dP/dz$  是由于系统的损耗造成  $dz$  段功率的减少率。根据 Maxwell 方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \mu \vec{H} \end{array} \right. \quad (5-6-32)$$

在式(5-6-32)中,  $\epsilon$  是绝对介电常数。由此可知

$$\vec{H}^* \cdot \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{H}^* \cdot \mu_0 \mu \vec{H} \quad (5-6-33)$$

$$\vec{E}^* \cdot \nabla \times \vec{H}^* = -j\omega \epsilon^* \vec{E}^* \cdot \vec{E}^* \quad (5-6-34)$$

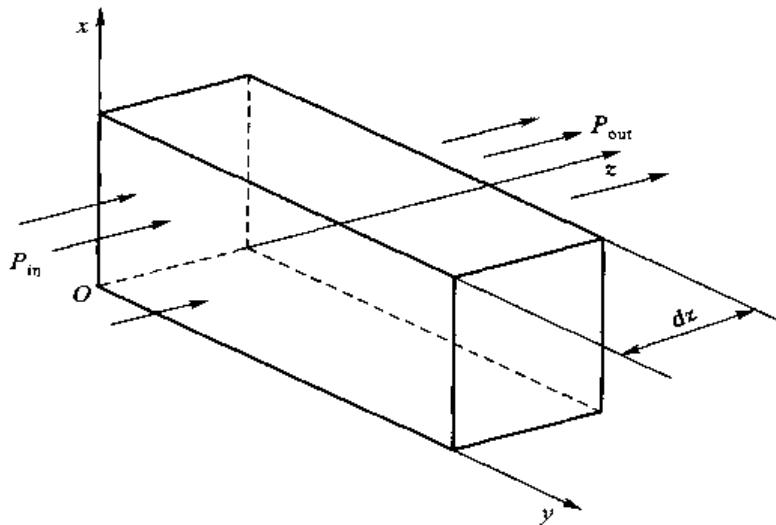


图 5-6-3 一般有耗传输系统

将式(5-6-33)和式(5-6-34)两式相减得

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = -j\omega(-\epsilon^* \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \vec{H}^* \cdot \mu_0 \mu \vec{H}) \quad (5-6-35)$$

由于

$$S = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (5-6-36)$$

式中,  $S$  为 Poynting 矢量的时间平均值。因此将式(5-6-35)对体积  $V$  进行积分, 可得

$$\oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} dS = -j\omega \int_V \frac{1}{2}(\vec{H}^* \mu_0 \mu \vec{H} - \epsilon^* \vec{E} \cdot \vec{E}^*) dV \quad (5-6-37)$$

若假定波导传输系统中, 如图 5-6-3 所示的周围侧壁为理想导体, 损耗可以忽略, 则有

$$\oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} dS = P_{in} - P_{out} = dP = [\operatorname{Re}(dP) + j\operatorname{Im}(dP)] \quad (5-6-38)$$

又

$$\vec{H}^* \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* + j\mu_0 k(H_x H_z^* - H_x^* H_z) \quad (5-6-39)$$

很容易证明

$$H_x H_z^* - H_x^* H_z = 2j\operatorname{Im}(H_x H_z^*) \quad (5-6-40)$$

是—纯虚数, 因此

$$-\frac{dP}{dz} = j\omega \iint \left[ \frac{1}{2} \mu_0 \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \frac{1}{2} \epsilon^* \vec{E} \cdot \vec{E}^* - \mu_0 k \operatorname{Im}(H_x H_z^*) \right] dx dy \quad (5-6-41)$$

取上式的实部表示损耗功率, 即

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{dP}{dz}\right) = \omega \iint \left[ \frac{1}{2} \mu_0 \mu'' \vec{H} \cdot \vec{H}^* + \frac{1}{2} \epsilon'' \vec{E} \cdot \vec{E}^* - \mu_0 k'' \operatorname{Im}(H_x H_z^*) \right] dx dy \quad (5-6-42)$$

将这结果代入式(5-6-30), 可得

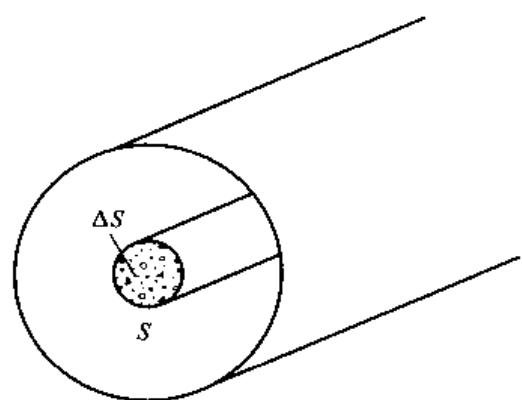
$$\alpha = \frac{\omega}{2P} \iint \left[ \frac{1}{2} \mu_0 \mu'' \vec{H} \cdot \vec{H}^* + \frac{1}{2} \epsilon'' \vec{E} \cdot \vec{E}^* - \mu_0 k'' \operatorname{Im}(H_x H_z^*) \right] dx dy \quad (5-6-43)$$

式(5-6-43)即我们要求的有耗 Poynting 定理与衰减常数  $\alpha$  的关系。然而, 问题的全部困难在于, 要求解出  $\alpha$ , 必须首先知道有耗系统的场分布, 而这往往是极困难的。所以, 在实用中, 对低

耗系统,常以无耗时对应的场分布作为近似值,求解有耗系统的衰减常数。

一种典型情况是如图 5-6-4 所示波导局部介质加载情况。特别当媒质所占的  $\Delta S$  与整个波导截面  $S$  相比很小时,采用有耗 Poynting 定理尤为方便。下式给出中心加载铁氧体材料的有耗 Poynting 定理,为

$$\alpha = \frac{\omega}{2} \frac{\iint_{\Delta S} [\mu_0 \mu'' \vec{H} \cdot \vec{H}^* + \epsilon'' \vec{E} \cdot \vec{E}^* - \mu_0 k'' \operatorname{Im}(H_x H_x^*)] dx dy}{\iint_S (\vec{E}^* \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dS}$$



(5-6-44) 图 5-6-4 加载媒质材料的导波系统

通常微扰法有公式如下:

$$\beta = \beta_0 + \frac{\omega}{2} \frac{\iint_{\Delta S} (\vec{H}_0^* \mu_0 (\mu - 1) \vec{H}_0 + \vec{E}_0^* (\epsilon - 1) \vec{E}_0) dS}{\iint_S (\vec{E}_0^* \times \vec{H}_0) \cdot \hat{n} dS} \quad (5-6-45)$$

如果把式(5-6-45)左边的  $\beta$  广义理解成复数,两边取虚部求  $\alpha$ ,则结果与有耗 Poynting 定理所得式(5-6-44)完全相同。由此可见,有耗 Poynting 定理与微扰法亦有共通之处。

[例 2] 研究图 5-6-5 所示的典型的矩形波导铁氧体共振式隔离器。

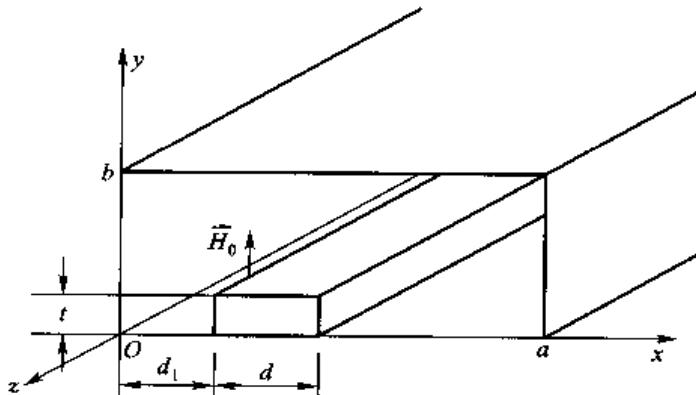


图 5-6-5 矩形波导铁氧体共振式隔离器

[解] 这种隔离器完全利用铁氧体材料本身吸收反向波的能量,因此在研究这类器件机理时,必须考虑材料内部的损耗。利用有耗 Poynting 定理,且取空气波导场作为近似场,即

$$E \approx E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin k_0 x \\ 0 \end{bmatrix} e^{-j\beta z} \quad (5-6-46)$$

$$\vec{H} \approx \vec{H}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_0}{\omega \mu_0} \sin k_0 x \\ 0 \\ j \frac{k_0}{\omega \mu_0} \cos k_0 x \end{bmatrix} e^{-j\beta z} \quad (5-6-47)$$

其中

$$k_0^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta_0^2 \quad (5-6-48)$$

按通常实际情况,忽略铁氧体材料的电损耗,即认为

$$\epsilon'' = 0 \quad (5-6-49)$$

因为

$$-2k''\mu_0 \iint_{\Delta S} \text{Im}(H_s H_s^*) dS = -\frac{2k'' k_0 \beta_0}{\omega^2 \mu_0} \Delta S \sin k_0 d_1 \cos k_0 d_1 \quad (5-6-50)$$

$$\mu_0 \mu'' \iint_{\Delta S} \vec{H} \cdot \vec{H}^* dS = \frac{\mu'' \Delta S}{\omega^2 \mu_0} [\beta_0^2 \sin^2 k_0 d_1 + k_0^2 \cos^2 k_0 d_1] \quad (5-6-51)$$

而

$$\iint_S (\vec{E}_0^* \times \vec{H}_0) \cdot \hat{n} dS = \frac{\beta_0}{2\omega\mu_0} ab \quad (5-6-52)$$

将式(5-6-50)~式(5-6-52)的结果代入式(5-6-43),可得

$$\alpha_{\perp} = \frac{\Delta S}{ab\beta_0} [\beta_0^2 \mu'' \sin^2 k_0 d_1 + k_0^2 \mu'' \cos^2 k_0 d_1 \mp 2k'' k_0 \beta_0 \sin k_0 d_1 \cos k_0 d_1] \quad (5-6-53)$$

只要注意到在求取反向  $\alpha_{\perp}$  时  $k''$ 换成  $-k''$ ,即可得式(5-6-53)中正反向衰减常数  $\alpha_{\pm}$ 。隔离器的隔离化为

$$D = 8.686(\alpha_{\perp} l) = 8.686\alpha_{\pm} l \left(\frac{\alpha_{-}}{\alpha_{+}}\right) \quad (5-6-54)$$

也可改写成

$$D = 8.686\alpha_{\pm} l R \quad (5-6-55)$$

其中

$$R = \frac{\alpha_{-}}{\alpha_{+}} \quad (5-6-56)$$

很容易看出:要提高隔离器的隔离比,必须提高  $R$ 。考虑到式(5-6-53),有

$$R = \frac{\alpha_{-}}{\alpha_{+}} = \frac{\beta_0^2 \mu'' \tan^2 k_0 d_1 + k_0^2 \mu'' + 2k_0 \beta_0 k'' \tan k_0 d_1}{\beta_0^2 \mu'' \tan^2 k_0 d_1 + k_0^2 \mu'' - 2k_0 \beta_0 k'' \tan k_0 d_1} \quad (5-6-57)$$

显然, $R$  为  $\tan k_0 d_1$  的函数。设

$$x = \tan k_0 d_1 \quad (5-6-58)$$

则

$$R(x) = \frac{\mu'' \beta_0^2 x^2 + k_0^2 \mu'' + 2k_0 \beta_0 k'' x}{\mu'' \beta_0^2 x^2 + k_0^2 \mu'' - 2k_0 \beta_0 k'' x} \quad (5-6-59)$$

将式(5-6-59)对  $x$  求导,从而得  $R(x)$  比值的最佳位置,即由

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad (5-6-60)$$

得到。可知

$$x = \tan k_0 d_1 = \frac{k_0}{\beta} \quad (5-6-61)$$

或

$$d_1 = \frac{1}{k_0} \arctan \left( \frac{k_0}{\beta} \right) \quad (5-6-62)$$

式(5-6-62)所对应的  $d_1$  为共振式隔离器铁氧体片的最佳位置。这时对应的

$$R_{\max} = \frac{\mu'' + k''}{\mu'' - k''} \quad (5-6-63)$$

例如,典型的共振式隔离器正向损耗 0.5 dB,要求反向隔离大于 20 dB,即

$$\begin{cases} D = 8.686 \alpha, IR \geq 20 \text{ dB} \\ 8.686 \alpha, I = 0.5 \text{ dB} \end{cases} \quad (5-6-64)$$

可估算出

$$R = \frac{\mu'' + k''}{\mu'' - k''} > 40 \quad (5-6-65)$$

在损耗研究中,讨论了两种典型方法:复本征方程法和有耗传输系统的 Poynting 定理。需要指出,这一工作的前提是损耗比较小,不足以影响原先无耗情况的场分布。如果不满足这一条件,则问题会变得异常复杂,不在这里深入讨论。



## 模型网络法 Method of Prototype Network

解决微波工程问题最重要的两种工具是场论方法和网络方法。本书中波导和微波谐振腔 Maxwell 方程求解是典型的场论方法。

网络方法则来自于电路理论,其主要研究的外部参数为电压  $U$  和电流  $I$ 。直到出现  $S$  散射参数,把外部参数变为入射波  $a$  和散射波  $b$ ,这种情况方才得到了改变。

但是,在网络综合中人们依然是把 LC 低通模型作为研究的一种规范<sup>[1]</sup>,因此要把现有的网络理论应用于微波情况,还有很多工作需要展开,其中,以 Mattahaei(马塔哈依)为代表的模型网络思想是一种比较先进的微波网络处理方法<sup>[2]</sup>。

模型网络是一种在网络分析和综合中的先进技术思想,它从实际的元器件要求出发提炼出普遍的功能网络,然后,再用集总元件或分布元件加以等效,如图 5-7-1 所示。



图 5-7-1 模型网络思想

## 一、功能网络

功能网络的思想是模型网络概念的精髓。在低频电路条件下  $L$ 、 $R$ 、 $C$  是功能元件，它们不仅发挥阻抗的作用，而且各自有特定的频率关系，但是，在微波情况下，问题就复杂得多，它不可能总结出相应的元件。而正是 Mattahaci 认为阻抗变换（或导纳变换）是最重要的微波功能之一，并由此归纳出  $K$ 、 $J$  变换器。

在滤波器设计中，提炼出  $\theta=90^\circ$ （理论上可以  $\pm 90^\circ$ ）线和变压器网络级联作为典型的功能网络。

[定理]  $\pm 90^\circ$  微波传输线与变压器网络的  $\bar{A}$  矩阵为

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \pm jn \\ \pm j \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-7-1)$$

网络如图 5-7-2 所示。

先看变压器网络

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}, \frac{I_1}{I_2} = n$$

可以列出方程

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{n} U_2 + 0 I_2 \\ I_1 = 0 U_2 + n I_2 \end{cases}$$

于是有

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

又当  $\theta=\pm 90^\circ$  时，微波传输线  $A$  网络

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & j \sin \theta \\ j \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm j \\ \pm j & 0 \end{bmatrix}$$

于是总  $\bar{A}$  矩阵

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \pm j \\ \pm j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm jn \\ \pm j \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$$

在此基础上定义功能网络—— $K$ 、 $J$  变换器。

[定义]  $K$  变换器，又称为阻抗变换器，其  $\bar{A}$  矩阵定义为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \pm jK \\ \pm j \frac{1}{K} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-7-2)$$

变换器表示如图 5-7-3 所示。

$K$  变换器的网络功能相当于阻抗变换器。式(5-7-2)具体为

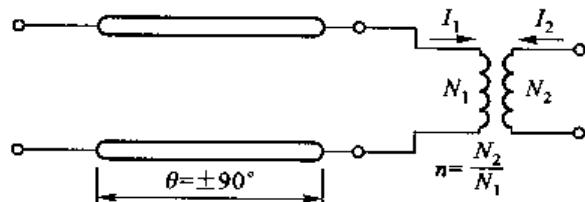


图 5-7-2  $\theta = \pm 90^\circ$  与变压器网络级联

$$\begin{cases} U_1 = \pm jKI_2 \\ I_1 = \pm j \frac{U_2}{K} \end{cases} \quad (5-7-3)$$

于是有

$$Z_{in} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{KI_2}{\frac{U_2}{K}} = \frac{K^2}{Z_t} \quad (5-7-4)$$

很明显,其网络功能相当于  $\lambda/4$  阻抗变换器,如图 5-7-4 所示。

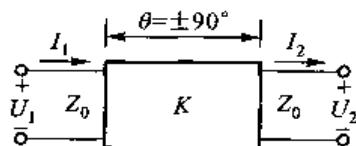


图 5-7-3 K 变换器

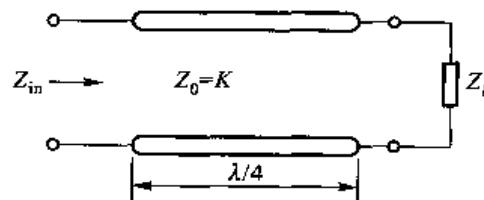


图 5-7-4  $\frac{\lambda}{4}$  阻抗变换器

[定义] 作为  $K$  变换器的对偶元件,  $J$  变换器又称为导纳变换器, 其  $A$  矩阵定义为

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \pm j \frac{1}{J} \\ \pm j J & 0 \end{bmatrix} \quad (5-7-5)$$

变换器表示如图 5-7-5 所示。

$J$  变换器的网络功能相当于导纳变换器, 式(5-7-5)具体为

$$\begin{cases} I_1 = \pm j J U_2 \\ U_1 = \pm j \frac{I_2}{J} \end{cases} \quad (5-7-6)$$

于是有

$$Y_{in} = \frac{I_1}{U_1} = \frac{J U_2}{\frac{I_2}{J}} = \frac{J^2}{Y_t} \quad (5-7-7)$$

很明显,与  $K$  变换器完全对偶地,其网络功能相当于  $\lambda/4$  导纳变换器,如图 5-7-6 所示。

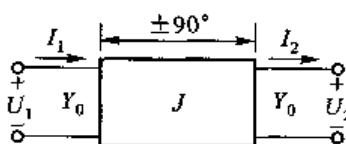


图 5-7-5 J 变换器

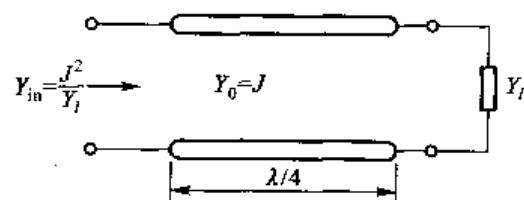


图 5-7-6  $\frac{\lambda}{4}$  导纳变换器

## 二、网络等效

网络等效主要解决由功能网络演变为具体元件的问题。

[网络等效定理] 两网络的功能矩阵(不论是  $A$  传输参数、 $S$  散射参数或其他矩阵)对应相等, 则这两个网络等效。如图 5-7-7 所示。

十分明显, 根据实际情况网络等效可分为点频等效、频带等效和全域等效。

先导出  $A$  传输参数和  $S$  散射参数的等价关系:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (5-7-8)$$

由定义可知

$$\begin{aligned} U_1 &= a_1 + b_1 & U_2 &= a_2 + b_2 \\ I_1 &= a_1 - b_1 & -I_2 &= a_2 - b_2 \end{aligned} \quad (5-7-9)$$

其中,  $a_1, a_2$  为归一化入射波;  $b_1, b_2$  为归一化散射波。代入式(5-7-8), 得

$$\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 + b_2 \\ -(a_2 - b_2) \end{bmatrix} \quad (5-7-10)$$

又根据  $S$  散射参数定义

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (5-7-11)$$

即可导得

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11} = \frac{A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22}}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}} \\ S_{21} = \frac{2}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}} \\ S_{12} = \frac{2 \det[A]}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}} \\ S_{22} = \frac{-A_{11} + A_{12} - A_{21} + A_{22}}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}} \end{array} \right. \quad (5-7-12)$$

很容易知道  $K, J$  变换器的  $S$  散射参数如表 5-7-1 所示。

表 5-7-1  $K, J$  变换器的  $S$  散射参数

	$K$ 变换器	$J$ 变换器
		
$S$	$\begin{bmatrix} \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} & \frac{j2K}{K^2 + 1} \\ \frac{j2K}{K^2 + 1} & \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1 - J^2}{1 + J^2} & \frac{j2J}{J^2 + 1} \\ \frac{j2J}{J^2 + 1} & \frac{1 - J^2}{1 + J^2} \end{bmatrix}$

### 1. 集总参数等效电路

十分清楚,  $K$ (或  $J$ )变换器是从传输抽象和推演出来的一类广义模型, 它可起到阻抗(或导

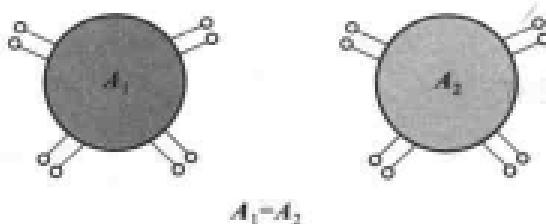


图 5-7-7 网络等效

纳)的变换作用。把它称为模型网络,在微波的实际应用中用各种元件或结构与其等效。首先讨论集总元件等效。

图 5-7-8 所示为一种集总元件的  $K$  阻抗变换器。

根据网络等效定理,先给出图 5-7-8 所示网络的  $A$  传输参数

$$A = \begin{bmatrix} 1 & jX_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -j\frac{1}{X_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & jX_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{X_1}{X_2} & jX_1 \left( 2 + \frac{X_1}{X_2} \right) \\ \frac{1}{jX_2} & 1 + \frac{X_1}{X_2} \end{bmatrix} \quad (5-7-13)$$

令式(5-7-13)与  $K$  变换器定义式(5-7-2)相等,可得

$$\begin{cases} 1 + \frac{X_1}{X_2} = 0 \\ \frac{1}{jX_2} = \pm \frac{1}{K} \end{cases} \quad (5-7-14)$$

最后得到条件

$$\begin{cases} X_1 = -X_2 \\ X_2 = \pm K \end{cases} \quad (5-7-15)$$

而对偶的集总元件  $J$  变换器如图 5-7-9 所示。

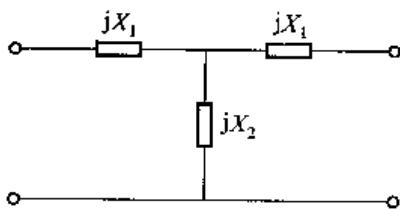


图 5-7-8 集总元件网络实现  $K$  变换器

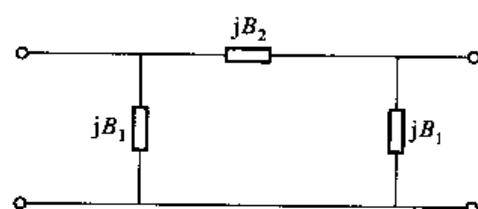


图 5-7-9 集总元件网络实现  $J$  变换器

利用对称性即知

$$\begin{cases} B_1 = -B_2 \\ B_2 = \pm J \end{cases} \quad (5-7-16)$$

注意到,  $K$  和  $J$  必须取正值, 而  $X_2$  和  $B_2$  则可正可负。

图 5-7-10 所示为具体  $K$ (或  $J$ )变换器的  $L$ 、 $C$  集总参数等效电路。

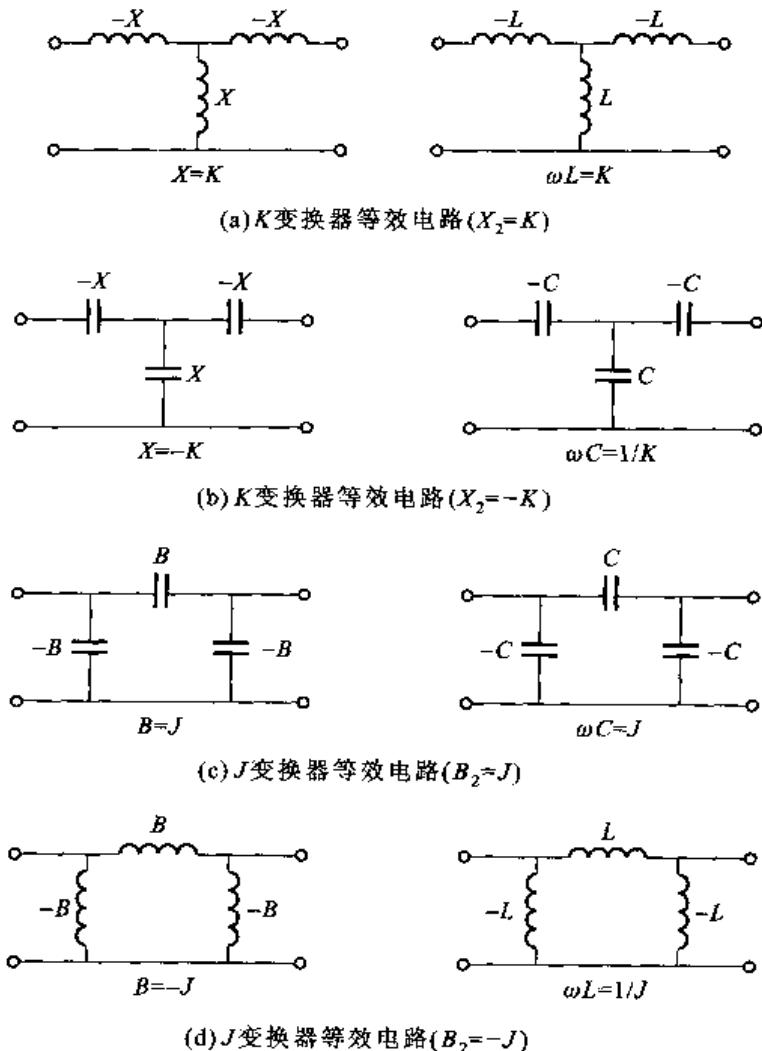
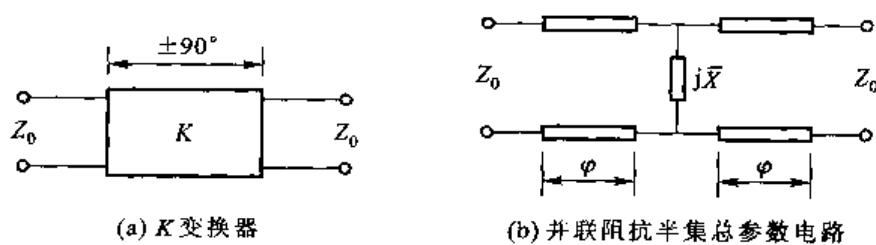
## 2. 半集总参数等效电路

半集总参数等效电路如图 5-7-11 所示。

很容易得到图 5-7-11(b)所示电路的  $S$  散射参数,有

$$S = \begin{bmatrix} -e^{-j2\varphi} & j2Xe^{-j2\varphi} \\ 1+j2X & 1+j2\bar{X} \\ j2Xe^{-j2\varphi} & -e^{-j2\varphi} \\ 1+j2\bar{X} & 1+j2X \end{bmatrix}$$

与表 5-7-1 中  $K$  变换器的  $S$  散射参数对比可知

图 5-7-10  $K$ (或  $J$ )变换器的  $L$ 、 $C$  集总等效参数电路图 5-7-11  $K$ 变换器与并联阻抗半集总参数电路

$$\frac{-e^{-j2\varphi}}{1+j2X} = \frac{K^2-1}{K^2+1} \quad (5-7-17)$$

且知  $\bar{X}=X/Z_0$  是归一化并联阻抗, 要满足式(5-7-17)需

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{1+(2\bar{X})^2}} = \frac{K^2-1}{K^2+1} \\ e^{-j(2\varphi + \arctan(2\bar{X}))} = 1 \end{array} \right. \quad (5-7-18)$$

在上式中已经假定  $K < 1$ 。最后得到

$$\left\{ \begin{array}{l} |X| = \frac{K}{1-K^2} \\ \varphi = n\pi - \frac{1}{2} \arctan(2X) \end{array} \right. \quad (5-7-19)$$

对偶地,  $J$  变换器与串联电纳半集总参数电路等效, 如图 5-7-12 所示。

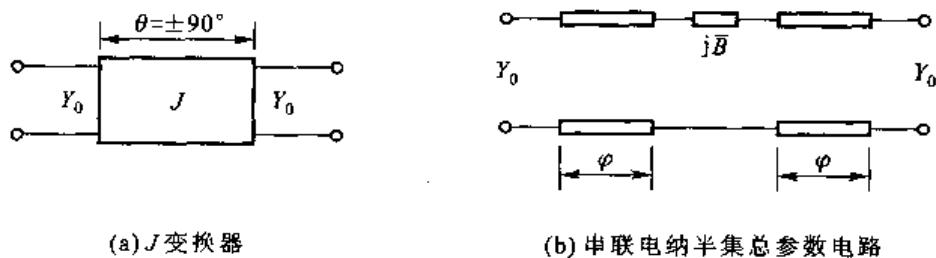


图 5-7-12  $J$  变换器和串联电纳半集总参数电路

完全和  $K$  变换器等效, 且令  $B = B/Y_0$ , 称为归一化电纳, 有

$$\begin{aligned} |B| &= \frac{J}{1-J^2} \\ \varphi &= n\pi - \frac{1}{2} \arctan(2B) \end{aligned} \quad (5-7-20)$$

注意: 上述等效模型显然是点频等效。

### 3. 分布元件等效电路

$K$ 、 $J$  变换器的分布电路等效是  $\lambda/4$  微波传输线, 如表 5-7-2 所示。

表 5-7-2  $K$ 、 $J$  变换器与  $\lambda/4$  微波传输线的等效

$K$ 变换器	$\lambda/4$ 微波传输线
$J$ 变换器	$\lambda/4$ 微波传输线

这里要特别指出： $K$ 、 $J$  变换器从集总参数等效发展到半集总参数等效是一种质的飞跃。由于在等效过程中传输线段  $\theta$ (或  $\varphi$ )的出现,给滤波器的综合理论带来了极大的方便,尤其是在理论中引出的电长度可正可负,使应用更为灵活。

[例 1]  $K$ 、 $J$  变换器是关于耦合的一种模型网络。可以把任意耦合看作是  $K$  变换器。

[解]

情况 1: 腔与外界耦合的外界  $Q_e$ , 如图 5-7-13 所示。

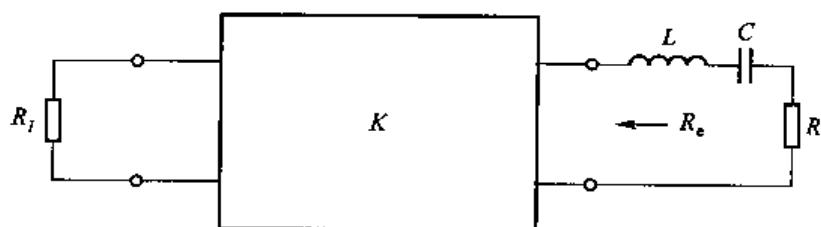


图 5-7-13 外界  $Q_e$

$$R_e = \frac{K^2}{R_t}, Q_e = \frac{x_{斜}}{K^2/R_t} \quad (5-7-21)$$

其中,  $x_{斜}$  称为电抗斜率, 它等于  $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial x}{\partial \omega}$ 。

情况 2: 最佳传输, 希望  $\bar{Z}_{in}=1$ , 如图 5-7-14 所示。

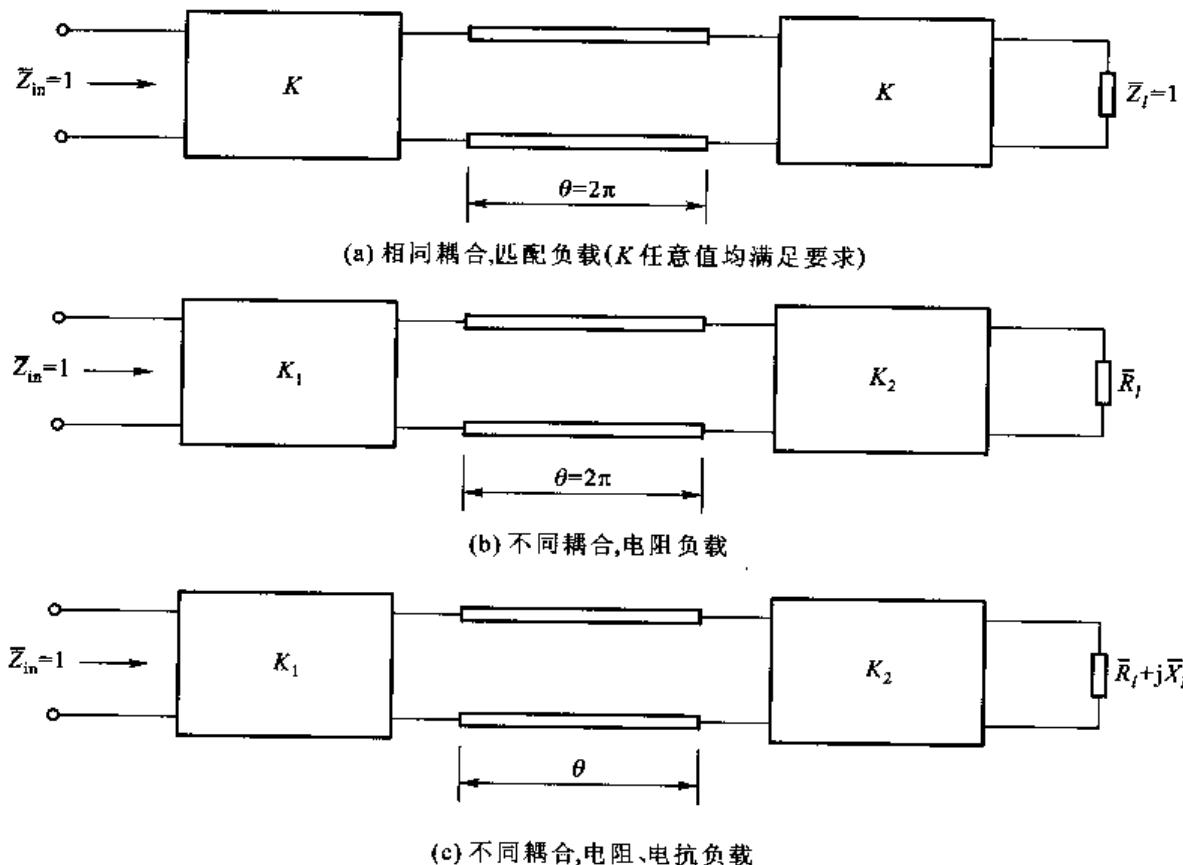


图 5-7-14 最佳传输例

匹配条件是

$$\left(\frac{K_1}{K_2}\right) = \frac{1}{\sqrt{R_t}}$$

请思考下述例子:  $K_1$ 、 $K_2$  以及  $\theta$  的条件。

[例 2] 研究  $H$  面波导拐角和波导膜片, 等效成  $K$  变换器。

[解]

情况 1:  $H$  面波导拐角

$H$  面波导拐角及其等效网络如图 5-7-15 所示。

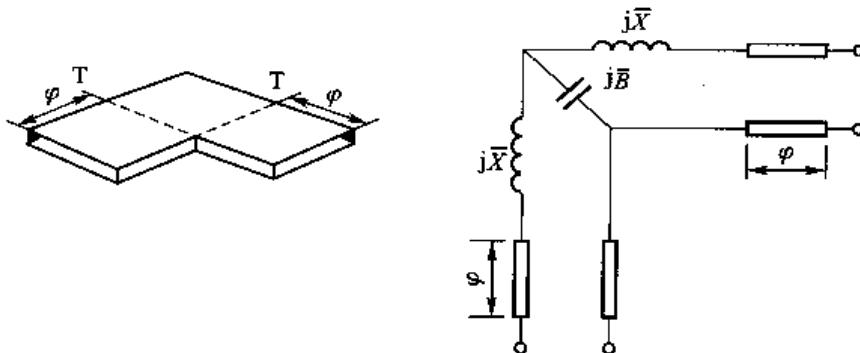


图 5-7-15  $H$  面波导拐角及其等效网络

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & j \sin \varphi \\ j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \bar{X}\bar{B} & j\bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B}) \\ j\bar{B} & 1 - \bar{X}\bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & j \sin \varphi \\ j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - XB)\cos \varphi - B\sin \varphi & j[\bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})\cos \varphi + (1 - \bar{X}\bar{B})\sin \varphi] \\ j[(1 - \bar{X}\bar{B})\sin \varphi + \bar{B}\cos \varphi] & (1 - \bar{X}\bar{B})\cos \varphi - \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})\sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & j \sin \varphi \\ j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - XB)(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - [\bar{B} + \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})]\sin \varphi \cos \varphi \\ j[(1 - \bar{X}\bar{B})2\sin \varphi \cos \varphi - \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})\sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi] \end{bmatrix} \\ &\quad j[(1 - \bar{X}\bar{B})2\sin \varphi \cos \varphi + \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})\cos^2 \varphi - \bar{B} \sin^2 \varphi] \\ &\quad (1 - \bar{X}\bar{B})(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - [B + \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})]\sin \varphi \cos \varphi \\ &= \begin{bmatrix} (1 - XB)\cos 2\varphi - \frac{1}{2}[\bar{B} + \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})]\sin 2\varphi \\ j[(1 - \bar{X}\bar{B})]\sin 2\varphi + \frac{1}{2}[\bar{B} + \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})]\cos 2\varphi + \frac{1}{2}[\bar{B} - \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})] \\ j[(1 - \bar{X}\bar{B})]\sin 2\varphi + \frac{1}{2}[\bar{B} + \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})]\cos 2\varphi - \frac{1}{2}[\bar{B} - \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})] \\ (1 - \bar{X}\bar{B})\cos 2\varphi - \frac{1}{2}[\bar{B} + \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})]\sin 2\varphi \end{bmatrix} \quad (5-7-22) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - XB)\cos 2\varphi - \frac{1}{2}[\bar{B} + \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})]\sin 2\varphi = 0 \\ (1 - \bar{X}\bar{B})\sin 2\varphi + \frac{1}{2}[\bar{B} + \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})]\cos 2\varphi - \frac{1}{2}[\bar{B} - \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})] = n \\ (1 - \bar{X}\bar{B})\sin 2\varphi + \frac{1}{2}[\bar{B} + \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})]\cos 2\varphi + \frac{1}{2}[\bar{B} - \bar{X}(2 - \bar{X}\bar{B})] = \frac{1}{n} \end{array} \right. \quad (5-7-23)$$

容易解得

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\varphi = \arctan \left[ \frac{2(1-XB)}{B+X(2-XB)} \right] \\ K = \sqrt{\frac{\sqrt{4(1-XB)^2 + [B+X(2-XB)]^2} - [B+X(2-XB)]}{\sqrt{4(1-XB)^2 + [B+X(2-XB)]^2} + [B+X(2-XB)]}} \end{array} \right. \quad (5-7-24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\varphi = \arctan \left[ \frac{2(1-XB)}{B+X(2-XB)} \right] \\ K = \sqrt{\frac{\sqrt{4(1-XB)^2 + [B+X(2-XB)]^2} - [B+X(2-XB)]}{\sqrt{4(1-XB)^2 + [B+X(2-XB)]^2} + [B+X(2-XB)]}} \end{array} \right. \quad (5-7-25)$$

代入典型数据  $X=2$ 、 $B=1$ , 有

$$2\varphi = 116.565\ 012^\circ \quad (5-7-26)$$

$$K = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\ 033\ 988$$

### 情况 2: 波导膜片

波导膜片及其等效网络如图 5-7-16 所示, 注意到图中给出了膜片的具体参数  $X$

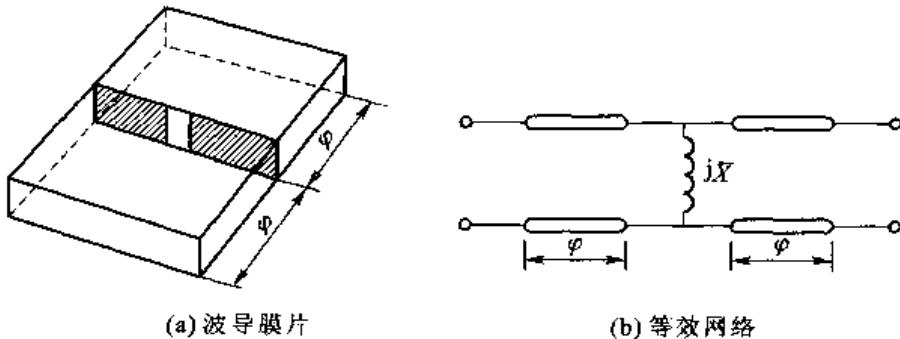


图 5-7-16 波导膜片  $\bar{X} = \frac{1}{5}$

同样可写出其  $A$  矩阵

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & j \sin \varphi \\ j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -j \frac{1}{X} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & j \sin \varphi \\ j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\varphi + \frac{1}{2X} \sin 2\varphi & j \left( -\frac{1}{2X} \cos 2\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{2X} \right) \\ j \left( -\frac{1}{2X} \cos 2\varphi + \sin 2\varphi - \frac{1}{2X} \right) & \cos 2\varphi + \frac{1}{2X} \sin 2\varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5-7-27)$$

要使式(5-7-27)变成理想  $K$  变换器, 有条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 2\varphi + \frac{1}{2X} \sin 2\varphi = 0 \\ \frac{1}{2X} \cos 2\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{2X} = K \\ -\frac{1}{2X} \cos 2\varphi + \sin 2\varphi - \frac{1}{2X} = \frac{1}{K} \end{array} \right. \quad (5-7-28)$$

$$\begin{cases} 2\varphi = -\arctan(2X) \\ K = \frac{\sqrt{1+4X^2}+1}{2X} \end{cases} \quad (5-7-29)$$

具体计及  $\bar{X} = \frac{1}{5}$ , 得

$$\begin{cases} 2\varphi = 158.1985905^\circ \\ K = 5.192582404 \end{cases} \quad (5-7-30)$$

[讨论] ① 结果与最佳传输研究的结果完全一致。

②  $K$  大, 表示耦合紧, 可以看出膜片比拐角耦合紧得多。

### 三、广义阻抗变换器的模型

上面讨论的模型网络有两点不足: ①只限于集总元件类型。②只限于对称型。作者在 1993 年发展了广义阻抗变换器模型。它包括对称型和反对称型两种, 它们都是由最一般的无耗  $\bar{A}$  网络和左、右各一段理想  $\theta, \varphi$  短截线构成, 如

图 5-7-17 所示, 其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & ja_{12} \\ ja_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (5-7-31)$$

且  $a_{11}, a_{22}, a_{12}$  和  $a_{21}$  均为实数, 这是无耗约束要求。

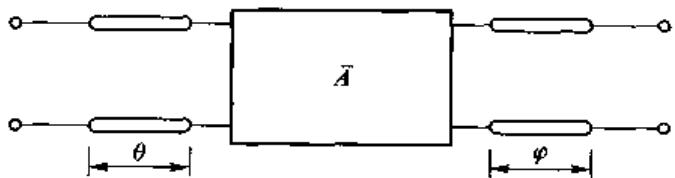


图 5-7-17 广义阻抗变换器模型

对称型定义与原  $K$  变换器相同, 即总的  $\bar{A}_K$  为

$$\bar{A}_K = \begin{bmatrix} a(K)_{11} & a(K)_{12} \\ a(K)_{21} & a(K)_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm jK \\ \pm j \frac{1}{K} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-7-32)$$

注意到  $a(K)_{11} = a(K)_{22} = 0$ 。

反对称型定义为  $N$  变换器, 即总的  $\bar{A}_N$  为

$$\bar{A}_N = \begin{bmatrix} a(N)_{11} & a(N)_{12} \\ a(N)_{21} & a(N)_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & \pm N \end{bmatrix} \quad (5-7-33)$$

注意到  $a(N)_{12} = a(N)_{21} = 0$ 。

不论是  $\bar{A}_K$  还是  $\bar{A}_N$  均可统一地写为

$$\begin{aligned} \bar{A}_{K,N} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & j \sin \theta \\ j \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & ja_{12} \\ ja_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & j \sin \varphi \\ j \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cos \theta \cos \varphi - a_{12} \cos \theta \sin \varphi - a_{21} \sin \theta \cos \varphi - a_{22} \sin \theta \sin \varphi \\ j(a_{11} \sin \theta \cos \varphi - a_{12} \sin \theta \sin \varphi + a_{21} \cos \theta \cos \varphi + a_{22} \cos \theta \sin \varphi) \\ j(a_{11} \cos \theta \sin \varphi + a_{12} \cos \theta \cos \varphi - a_{21} \sin \theta \sin \varphi + a_{22} \sin \theta \cos \varphi) \\ -a_{11} \sin \theta \sin \varphi - a_{12} \sin \theta \cos \varphi - a_{21} \cos \theta \sin \varphi + a_{22} \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-7-34)$$

注意到这里  $\theta$  和  $\varphi$  可正可负。

### 情况 1: K 变换器

根据定义(5-7-32)可知

$$\begin{cases} \tan(\theta + \varphi) = \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{21} + a_{12}} \\ \tan(\theta - \varphi) = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{21} - a_{12}} \end{cases} \quad (5-7-35)$$

也即

$$\begin{cases} \theta = \frac{1}{2} \left[ \arctan\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{a_{21} + a_{12}}\right) + \arctan\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{21} - a_{12}}\right) \right] \\ \varphi = \frac{1}{2} \left[ \arctan\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{a_{21} + a_{12}}\right) - \arctan\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{21} - a_{12}}\right) \right] \end{cases} \quad (5-7-36)$$

且

$$K = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{21} - a_{12})^2} \right] \quad (5-7-37)$$

若  $\bar{A}_K$  网络互易, 则可进一步简化为

$$K = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\rho^2 + 2} + \sqrt{\rho^2 - 2} \right] \quad (5-7-38)$$

其中

$$\rho^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \quad (5-7-39)$$

### 情况 2: N 变换器

根据定义(5-7-33)可知

$$\begin{cases} \tan(\theta + \varphi) = -\frac{a_{21} + a_{12}}{a_{11} + a_{22}} \\ \tan(\theta - \varphi) = -\frac{a_{21} - a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \end{cases} \quad (5-7-40)$$

于是有

$$\begin{cases} \theta = \frac{1}{2} \left[ \arctan\left(-\frac{a_{21} + a_{12}}{a_{11} + a_{22}}\right) + \arctan\left(-\frac{a_{21} - a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right) \right] \\ \varphi = \frac{1}{2} \left[ \arctan\left(-\frac{a_{21} + a_{12}}{a_{11} + a_{22}}\right) - \arctan\left(-\frac{a_{21} - a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right) \right] \end{cases} \quad (5-7-41)$$

且

$$N = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{21} - a_{12})^2} \right] \quad (5-7-42)$$

若  $\bar{A}_N$  网络互易, 则同样简化为

$$N = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\rho^2 + 2} - \sqrt{\rho^2 - 2} \right] \quad (5-7-43)$$

[讨论]

① 阻抗变换比只与  $A$  传输参数有关, 而与  $\theta, \varphi$  无关。在具体问题中,  $\bar{A}$  表示实际不连续性, 也即不连续性决定阻抗变换比。

②  $\theta$  和  $\varphi$  所起的作用: 由于不连续性可以是任意的, 所以实数阻抗变换比不能反映在任意参考面上。所以  $\theta$  和  $\varphi$  的作用在于确定广义阻抗变换器的参考面, 其正负角分别对应土  $jK$  或土  $N$ 。

③ 对称型  $\theta_K, \varphi_K$  和反对称型  $\theta_N, \varphi_N$  有如下关系

$$\varphi_N = \varphi_K \pm n\pi \text{ 和 } \theta_N = \theta_K + \frac{2}{\pi} \pm n\pi \quad (5-7-44)$$

或者

$$\varphi_N = \varphi_K + \frac{2}{\pi} \pm n\pi \text{ 和 } \theta_N = \theta_K \pm n\pi \quad (5-7-45)$$

换句话说, 相同的  $A$  传输参数在  $N$  变换器(或  $K$  变换器)前或后加上  $\lambda/4$  微波传输线即转化为  $K$  变换器(或  $N$  变换器)。

④ 对称型  $K$  和反对称型  $N$  之间的关系:

对于互易网络, 在相同  $\bar{A}$  传输参数时, 有

$$N = \frac{1}{K} \quad (5-7-46)$$

于是问题进一步有了统一的模式。

⑤ 当  $\theta$  微波传输线特性阻抗为  $Z_{01}$ ,  $\varphi$  微波传输线特性阻抗为  $Z_{02}$  时, 参数将做如表 5-7-3 所示的变换。

表 5-7-3 不同特性阻抗时参数变换式

	求 $\theta, \varphi$ 角的变换式	求 $K$ (或 $N$ )的变换式
$a_{11}$	$A_{11} Z_{02}$	$A_{11} \sqrt{Z_{02}/Z_{01}}$
$a_{12}$	$A_{12}$	$A_{12} \sqrt{Z_{01}/Z_{02}}$
$a_{21}$	$A_{21} Z_{01} Z_{02}$	$A_{21} \sqrt{Z_{01}/Z_{02}}$
$a_{22}$	$A_{22} Z_{01}$	$A_{22} \sqrt{Z_{01}/Z_{02}}$

⑥ 根据对偶原理, 对称型  $K$  变换器可以推广到  $J$  变换器; 同样, 反对称型  $N$  变换器也可以推广到  $M$  变换器。

[设计举例 1] 对不熟悉的  $N$  变换器进行讨论。

阶梯阻抗变换器如图 5-7-18 所示。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & jA_{12} \\ jA_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jB & 1 \end{bmatrix} \quad (5-7-47)$$

很易得到

$$N = \frac{1}{2 \sqrt{Z_{01} Z_{02}}} \left[ \sqrt{(Z_{01} + Z_{02})^2 + B^2 Z_{01}^2 Z_{02}^2} - \sqrt{(Z_{01} - Z_{02})^2 + B^2 Z_{01}^2 Z_{02}^2} \right] \quad (5-7-48)$$

特别当  $B \rightarrow 0$ (即不计阶梯不连续性), 且  $Z_{02} > Z_{01}$ (这不失一般性), 则

$$N = \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \quad (5-7-49)$$

式(5-7-49)即众所周知的阻抗变压器公式, 又

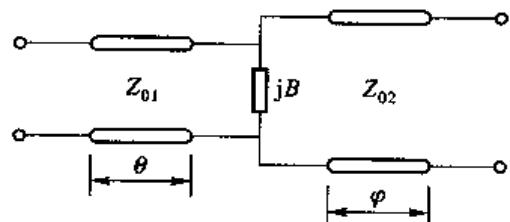


图 5-7-18 阶梯阻抗变换器

$$\begin{cases} \theta = \frac{1}{2} \left[ \arctan \left( -\frac{B}{Y_{01} + Y_{02}} \right) + \arctan \left( -\frac{B}{Y_{01} - Y_{02}} \right) \right] \\ \varphi = \frac{1}{2} \left[ \arctan \left( -\frac{B}{Y_{01} + Y_{02}} \right) - \arctan \left( -\frac{B}{Y_{01} - Y_{02}} \right) \right] \end{cases} \quad (5-7-50)$$

这里原来要用繁杂的高低阻抗面处理,而现在则是一般结果的表述。

### 〔设计举例 2〕 多节微带型阶梯阻抗变换器。

典型的二节微带型阶梯阻抗变换器如图 5-7-19 所示。微带基片厚  $h=1$  mm, 带厚  $t=$

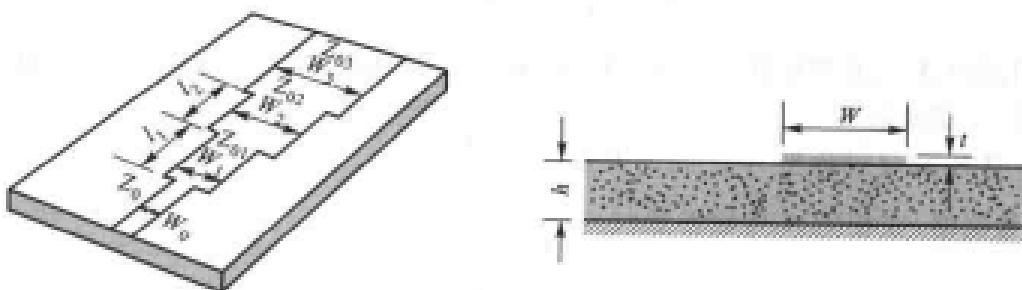


图 5-7-19 二节微带型阶梯阻抗变换器

0.1 mm, 填充介质  $\epsilon=9.60$ , 设计中要求相对带宽  $W_s=0.6$ , 阻抗比为 5:1(即输入  $Z_0=50 \Omega$ , 输出  $Z_m=10 \Omega$ ), 带内驻波比  $\rho \leqslant 1.23$ 。设计采用 Chebyshev(切比雪夫)型。阶梯不连续性采用微带阶梯连续性网络, 如图 5-7-20 所示。

理想设计和采用广义阻抗变换器模型设计的数据如表 5-7-4 所示。两者性能对比曲线和不计及不连续性的理想曲线如图 5-7-21 所示。注意到这种方法已计及全部可能的频率特性。此外还要指出, 由于存在复杂的不连续性, 广义阻抗变换器模型设计的阻抗变化与规定的 Chebyshev 型会产生极小的变化, 但是, 这种数量级的变化在工程上是完全可以忽略的。

表 5-7-4 两种设计的参数对比表

	理想设计		广义阻抗变换器模型设计	
$W_0$	0.8595 mm		0.8595 mm	
$W_1$	2.0790 mm		2.0790 mm	
$W_2$	5.6937 mm		5.6937 mm	
$W_3$	9.9254 mm		9.9254 mm	
$L_1, \theta_1$	$r_1 = 5.5676 \text{ mm}$	$\theta_1 = 0.2500\pi$	$r_1 = 5.6673 \text{ mm}$	$\theta_1 = 0.2545\pi$
$L_2, \theta_2$	$r_2 = 5.5676 \text{ mm}$	$\theta_2 = 0.2500\pi$	$r_2 = 5.6277 \text{ mm}$	$\theta_2 = 0.2527\pi$

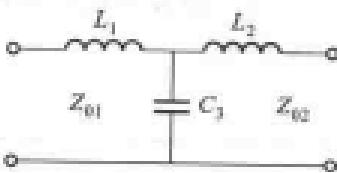


图 5-7-20 微带阶梯  
连续性网络

理想设计与广义阻抗变换器模型设计指标如下:

节数:二节

形式:Chebyshev 型

变换比:5:1

阻抗比:5.000 : 3.1765 : 1.5741 : 1.000

相对带宽: $W_s=0.6$

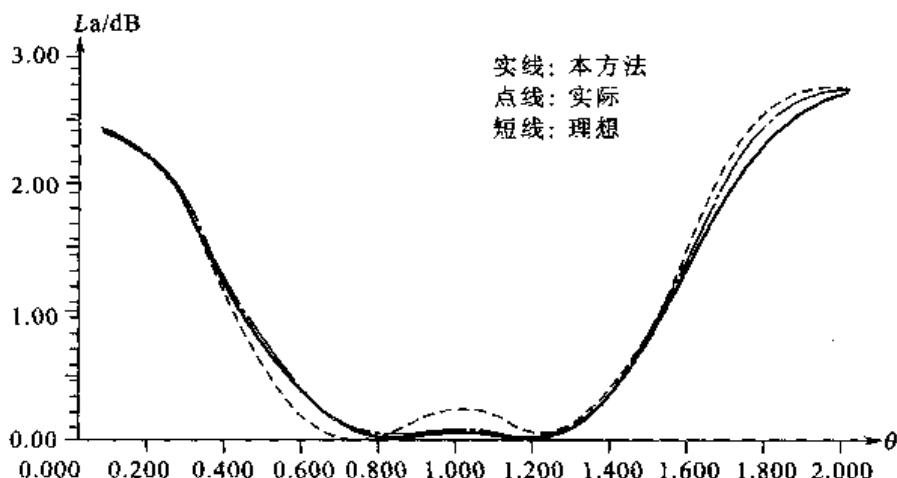


图 5-7-21 多节阶梯阻抗变换器性能曲线

微带结构:  $h = 1.00 \text{ mm}$ ,  $t = 0.10 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_r = 9.60$

中心频率:  $f_0 = 5 \text{ GHz}$

由表 5-7-4 中看出, 两种参数相当接近。

### 参 考 文 献

- [1] Cobn S B. Direct-coupled-resonator filters. Proc IRE, 1957, (45): 187 ~ 196.
- [2] Mattahaei G L, Leo Y, Jones E M T. Microwave filters impedance-matching bnetworks, and coupling structures. New York: McGraw-Hill book company, 1964.

## 信号流图法 Method of Signal Flow Chart

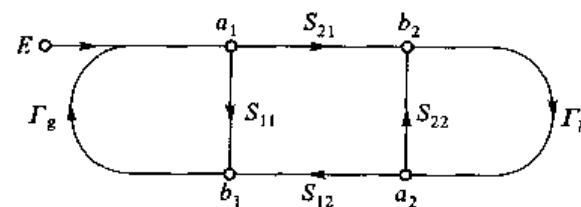
信号流图法是近年来网络分析的一种有力工具。尤其在微波测量和微波工程现场中应用更为普及, 其概念十分清晰。

### 一、信号流图及拓扑变换

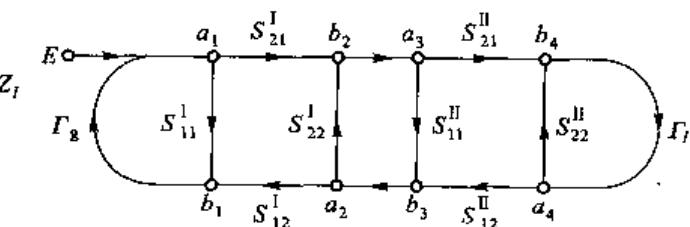
信号流图是线性方程组的一种图论解法。方程组中每一个变数据(信号)可以用一个结点加

以表示，而每一个独立变数的系数(信号的传输系数)则用一条带箭头的线→来表示。箭头表示信号的流通方向。这样一条有方向的线路，称为一条路。而上面的系数则称为路的值。

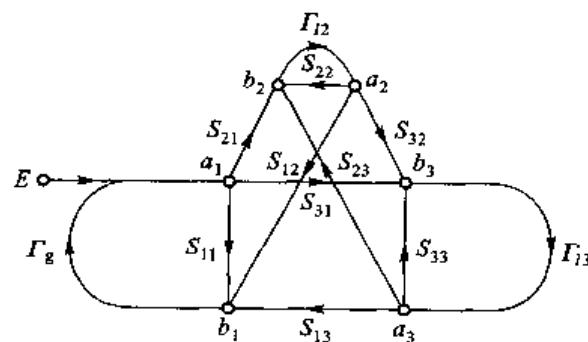
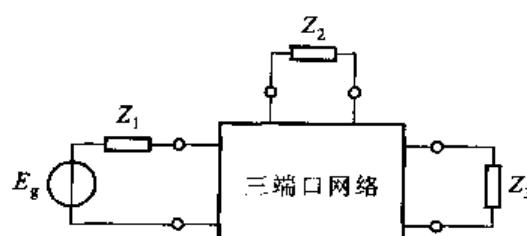
图 5-8-1 所示为几种典型的信号流图。



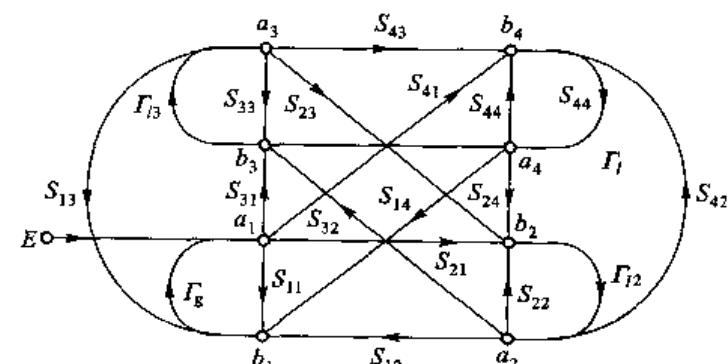
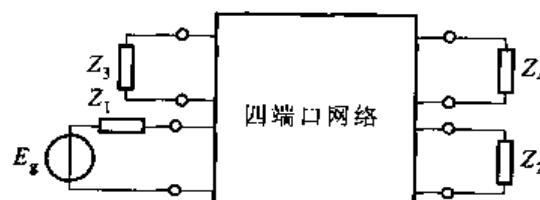
(a) 双端口网络的信号流图



(b) 级联网络的信号流图



(c) 三端口网络的信号流图



(d) 四端口网络的信号流图

图 5-8-1 几种基本网络的信号流图

拓扑变换是简化信号流图的一种法则。它包括如下 4 个基本规则：

### 1. 串联支路相乘法则

两个串联支路可以合并简化，从而消去中间结点。合并后的支路的系数为两个串联支路系数的乘积，如图 5-8-2 所示。

证明十分简单：根据信号流图定义  $a_2 = Aa_1$ ,  $a_3 = Ba_2$  可知

$$a_3 = ABa_1 \quad (5-8-1)$$

### 2. 并联支路相加法则

两个并联支路可合并在一起，合并后支路的系数为原两个并联支路系数之和，如图 5-8-3 所示。如图 A、B 两支路并联，显然有

$$a_2 = Aa_1 + Ba_1 = (A+B)a_1 \quad (5-8-2)$$

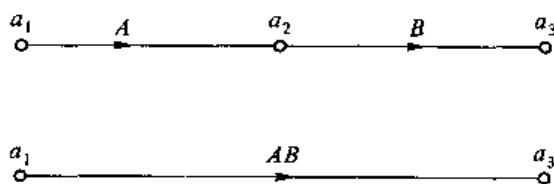


图 5-8-2 串联支路相乘法则

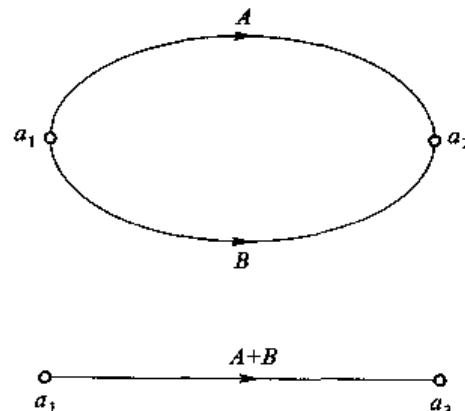


图 5-8-3 并联支路相加法则

### 3. 自闭环消除法则

如图 5-8-4 所示，Q 为一自闭环。它可以进行如下简化：把所有进入单环的支路均除以  $(1-Q)$ ，即可把此环消除。

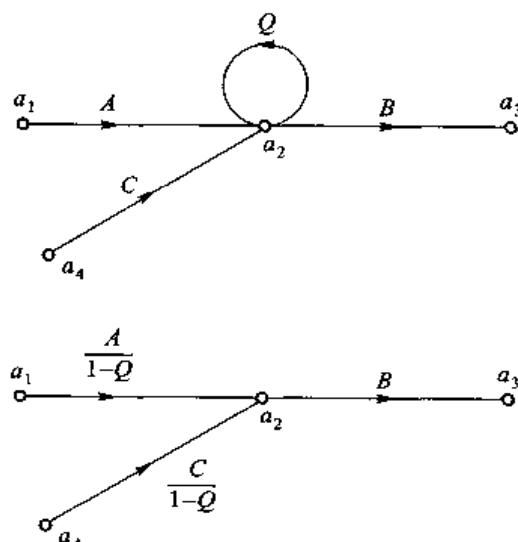


图 5-8-4 自闭环消除法则

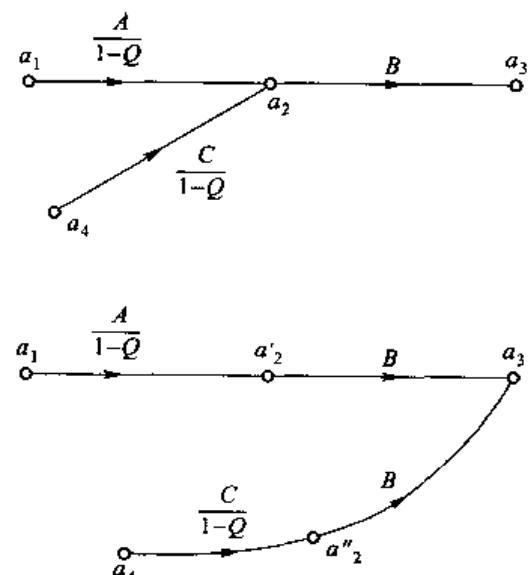


图 5-8-5 结点分裂法则

从图 5-8-4 中看出:  $a_2 = Aa_1 + Ca_4 + Qa_2$ , 于是有

$$a_2 = \frac{A}{1-Q}a_1 + \frac{C}{1-Q}a_4 \quad (5-8-3)$$

#### 4. 结点分裂法则

沿着所要求的路的方向, 可依次消去或分裂不需要的结点(即中间变量)。分裂时, 一个结点可以变成几个。但变换后其余结点的输入输出关系保持不变。先消除或分裂内环, 后消除外环。例如, 图 5-8-5 所示的路中,  $a_2$  可以分为  $a'_2$  和  $a''_2$ , 由于式(5-8-3)和  $a_3 = Ba_2$ , 得到

$$a_3 = \frac{AB}{1-Q}a_1 + \frac{BC}{1-Q}a_4 \quad (5-8-4)$$

[例 1] 求如图 5-8-6 所示的路值  $T = \frac{w}{x}$ 。

[解] 注意在本例中结点分裂应沿着  $x \rightarrow w$  的路依次吸收  $y, z$  点, 如图 5-8-7 所示。

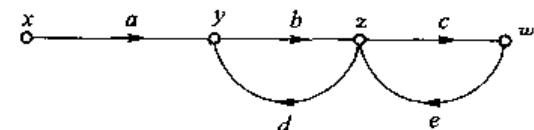


图 5-8-6 双环信号流图

(a)  $y$  点结点分裂

(b) 自闭环消除

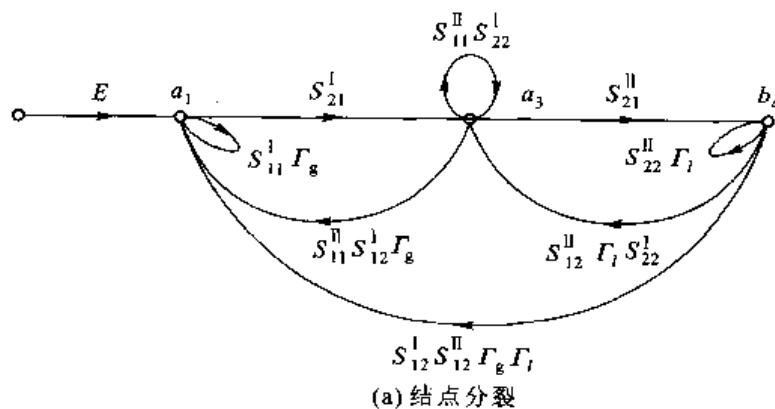
(c)  $z$  点结点分裂

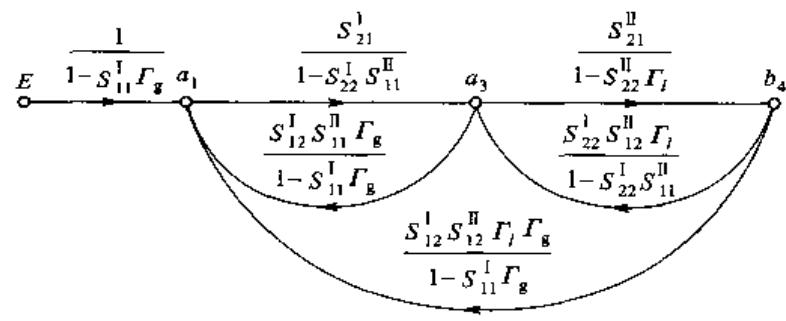
(d) 自闭环消除

图 5-8-7 双环信号流图解

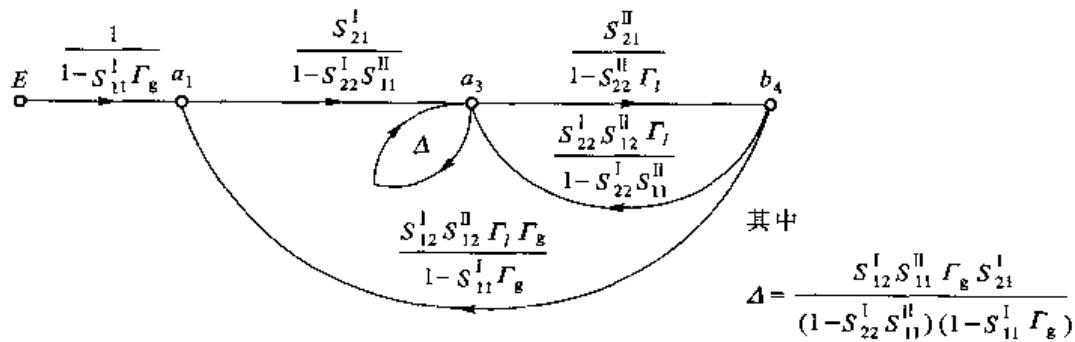
[例 2] 两个网络级联, 如图 5-8-1(b) 所示, 求路值  $T = b_4/E$ 。

[解] 把整个信号流图的求解过程如图 5-8-8 所示。注意先分裂出环结点, 由内向外。最后得到

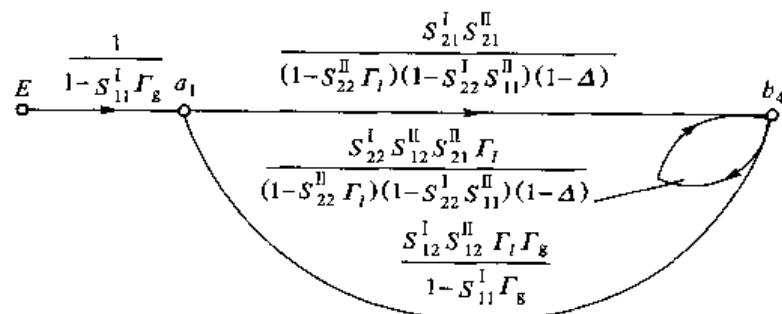




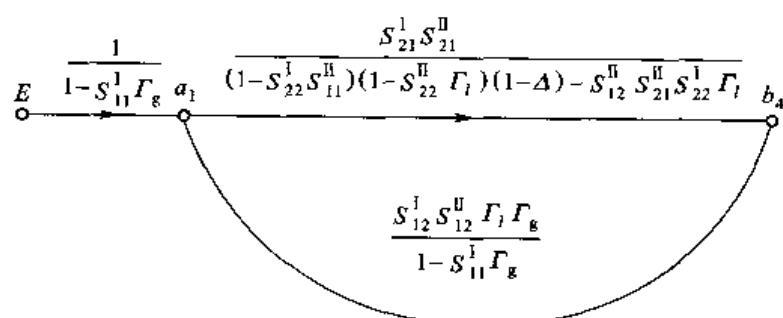
(b) 小环消除



(c) 结点分裂



(d) 结点再分裂



(e) 环消除

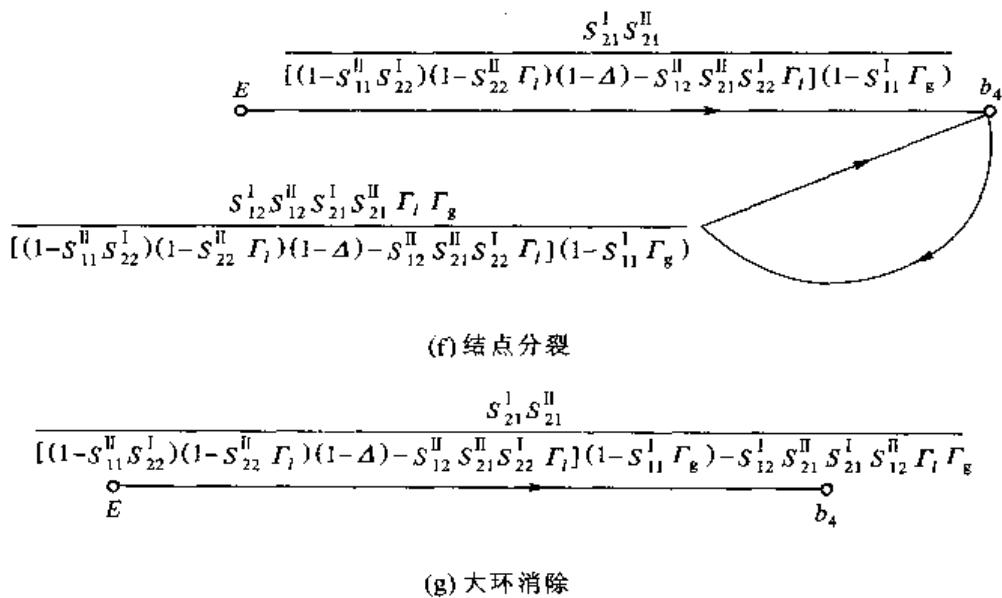


图 5-8-8 级联网络信号流图解

$$T = \frac{b_4}{E} = \frac{S_{21}^I S_{21}^{II}}{[(1 - S_{22}^{II} \Gamma_t)(1 - S_{11}^{II} S_{22}^I)(1 - \Delta) - S_{12}^{II} S_{21}^{II} S_{22}^I \Gamma_t](1 - S_{11}^I \Gamma_g) - S_{12}^I S_{21}^I S_{12}^{II} S_{21}^{II} \Gamma_t \Gamma_g]} \quad (5-8-5)$$

其中

$$\Delta = \frac{S_{12}^I S_{21}^I S_{11}^{II} \Gamma_g}{(1 - S_{22}^I S_{11}^{II})(1 - S_{11}^I \Gamma_g)} \quad (5-8-6)$$

设式(5-8-5)的分母为  $D$ , 可以证明

$$D = (1 - S_{11}^{II} S_{22}^I)(1 - \Gamma_g \Gamma_t)(1 - S_{22} \Gamma_t) \quad (5-8-7)$$

其中

$$\Gamma_t = S_{11}^I + \frac{S_{12}^I S_{21}^I \left( S_{11}^{II} + \frac{S_{12}^{II} S_{21}^{II} \Gamma_t}{1 - S_{22}^{II} \Gamma_t} \right)}{1 - S_{22}^I \left( S_{11}^{II} + \frac{S_{12}^{II} S_{21}^{II} \Gamma_t}{1 - S_{22}^{II} \Gamma_t} \right)} \quad (5-8-8)$$

$$S_{22} = S_{22}^{II} + \frac{S_{12}^{II} S_{21}^{II} S_{22}^I}{1 - S_{11}^{II} S_{22}^I} \quad (5-8-9)$$

于是

$$T = \frac{b_4}{E} = \frac{S_{21}^I S_{21}^{II}}{(1 - \Gamma_g \Gamma_t)(1 - S_{22} \Gamma_t)(1 - S_{11}^{II} S_{22}^I)} \quad (5-8-10)$$

## 二、信号流图的 Macon(梅森)法则

Macon 法则,又称信号流图的不接触环法则。

在信号流图中,一条闭合的路称为“一阶环”,两个互不接触的一阶环,构成一个“二阶环”。二阶环的值等于两个互不接触的一阶环之乘积,三个互不接触的一阶环,构成一个三阶环,三阶

环的值等于三个互不接触的一阶环之乘积,……以此类推,可定义到  $n$  阶环。不过需要指出:在微波领域中,高阶环往往表示系统的多次反射,其影响常常可以忽略。

Macon 法则指出:在信号流图中任意两结点的信号比  $T$  可表示为

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \Delta_i}{\Delta} \quad (5-8-11)$$

其中,  $T$  是结点  $B$  与  $A$  的信号比,即  $T=B/A$ ;  $p_i$  是由结点  $A$  到  $B$  的第  $i$  条路值

$$\Delta = 1 - \sum L(1) + \sum L(2) - \sum L(3) + \dots$$

$$\Delta_i = 1 - \sum L(1)^i + \sum L(2)^i - \sum L(3)^i + \dots$$

$\sum L(1)$  是所有一阶环值之和;  $\sum L(2)$  是所有二阶环值之和;  $\sum L(3)$  是所有三阶环值之和;  $\sum L(1)^i$  是所有不与  $p_i$  相接触的一阶环值之和;  $\sum L(2)^i$  是所有不与  $p_i$  相接触的二阶环值之和;  $\sum L(3)^i$  是所有不与  $p_i$  相接触的三阶环值之和……Macon 法则的证明从略。

[例 3] 求如图 5-8-1(a) 所示的双端口网络,求传输分数  $T=\frac{b_2}{E}$ 。

[解] 由 Macon 不接触环法则

$$p_1 = S_{21}$$

$$\sum L(1) = S_{11}\Gamma_g + S_{22}\Gamma_t + S_{12}S_{21}\Gamma_g\Gamma_t, \sum L(2) = S_{11}S_{22}\Gamma_g\Gamma_t$$

$$\sum L(3) = \sum L(4) = \dots = 0, \sum L(1)^i = \sum L(2)^i = \dots = 0$$

由此看出

$$\Delta = 1 - \sum L(1) + \sum L(2) = 1 - (S_{11}\Gamma_g + S_{22}\Gamma_t + S_{12}S_{21}\Gamma_g\Gamma_t) + S_{11}S_{22}\Gamma_g\Gamma_t$$

$$\Delta_i = 1$$

于是,可求出信号比

$$T = \frac{S_{21}}{(1 - S_{11}\Gamma_g)(1 - S_{22}\Gamma_t) - S_{12}S_{21}\Gamma_g\Gamma_t} \quad (5-8-12)$$

[例 4] 研究典型定向耦合器网络,如图 5-8-9 所示,求其简化的信号流图。

[解] 采用 Macon 不接触环法则,可以把图 5-8-9(b) 所示信号流图简化为图 5-8-10。其中,  $C$  为有效耦合系数;  $CD$  为有效定向系数;  $T_1$ 、 $T_2$  为有效传输系数。

$$(1) \Gamma_1 = \frac{b_1}{a_1}$$

如图 5-8-9(b) 所示,可知有五条通路

$$P_1 = S_{11}$$

$$P_2 = S_{41}S_{14}\Gamma_d$$

$$P_3 = S_{12}S_{21}\Gamma_t$$

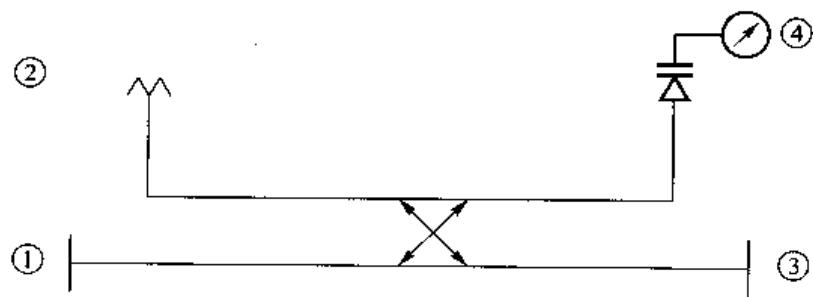
$$P_4 = S_{41}\Gamma_d S_{24}\Gamma_t S_{12}$$

$$P_5 = S_{21}\Gamma_t S_{42}\Gamma_d S_{14}$$

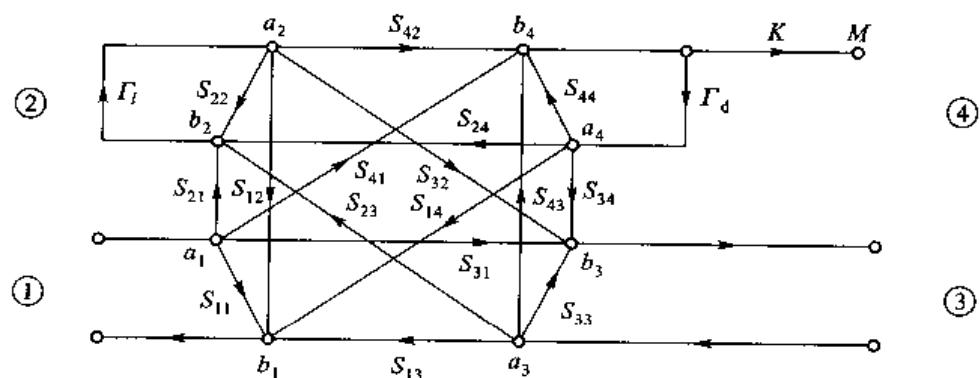
$$\sum L(1) = S_{22}\Gamma_t + S_{44}\Gamma_d + S_{24}S_{42}\Gamma_t\Gamma_d$$

$$\sum L(2) = S_{22}S_{44}\Gamma_d\Gamma_t$$

所有的一阶环均不与  $P_1$  接触;不与  $P_2$  接触的一阶环为  $L(1)^2 = S_{22}\Gamma_t$ ;不与  $P_3$  接触的一阶环为  $L(1)^3 = S_{44}\Gamma_d$ 。 $P_4$  与  $P_5$  和任何环都接触,于是有



(a) 定向耦合器



(b) 信号流图

图 5-8-9 定向耦合器及信号流图

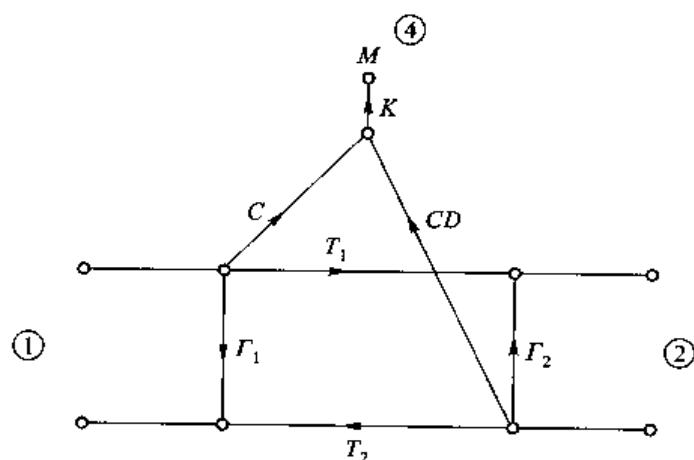


图 5-8-10 定向耦合器简化信号流图

$$\Gamma_1 = \frac{S_{11} + \Gamma_d S_{14} S_{41} (1 - S_{22} \Gamma_d) + \Gamma_d S_{12} S_{21} (1 - S_{44} \Gamma_d) + S_{41} \Gamma_d S_{24} \Gamma_d S_{12} + S_{21} \Gamma_d \Gamma_d S_{42} S_{14}}{(1 - S_{22} \Gamma_d)(1 - S_{44} \Gamma_d) - S_{24} S_{42} \Gamma_d \Gamma_d} \quad (5-8-13)$$

(2)  $\Gamma_2 = b_3/a_3$ , 完全类似, 它也有五条通路

$$P_1 = S_{33}$$

$$P_2 = S_{43} S_{34} \Gamma_d$$

$$\begin{aligned}P_3 &= S_{23}S_{22}\Gamma_t \\P_4 &= S_{23}\Gamma_t S_{42}\Gamma_d S_{34} \\P_5 &= S_{43}\Gamma_d S_{24}\Gamma_t S_{32}\end{aligned}$$

可以写出

$$\Gamma_2 = \frac{S_{33} + \Gamma_d S_{43} S_{34} (1 - S_{22} \Gamma_t) + \Gamma_t S_{32} S_{23} (1 - S_{44} \Gamma_d) + S_{23} \Gamma_t S_{42} \Gamma_d S_{34} + S_{43} \Gamma_d S_{24} \Gamma_t S_{32}}{(1 - S_{22} \Gamma_t)(1 - S_{44} \Gamma_d) - S_{24} S_{42} \Gamma_t \Gamma_d} \quad (5-8-14)$$

(3)  $T_1 = b_3/a_1$ , 它有五条通路

$$\begin{aligned}P_1 &= S_{31} \\P_2 &= S_{21}\Gamma_t S_{32} \\P_3 &= S_{41}\Gamma_d S_{31} \\P_4 &= S_{41}S_{24}S_{32}\Gamma_t\Gamma_d \\P_5 &= S_{21}S_{42}\Gamma_d\Gamma_t S_{31}\end{aligned}$$

可以写出

$$T_1 = \frac{S_{31} + S_{41}S_{24}S_{32}\Gamma_t\Gamma_d + S_{21}\Gamma_t S_{42}\Gamma_d S_{34} + S_{21}S_{32}\Gamma_t(1 - S_{22}\Gamma_t) + S_{41}S_{34}\Gamma_d(1 - S_{44}\Gamma_d)}{(1 - S_{22}\Gamma_t)(1 - S_{44}\Gamma_d) - S_{24}S_{42}\Gamma_t\Gamma_d} \quad (5-8-15)$$

(4)  $T_2 = b_1/a_3$ , 它也有五条通路

$$\begin{aligned}P_1 &= S_{13} \\P_2 &= S_{43}S_{14}\Gamma_d \\P_3 &= S_{23}\Gamma_t S_{12} \\P_4 &= S_{23}\Gamma_t S_{42}\Gamma_d S_{14} \\P_5 &= S_{43}\Gamma_d S_{24}\Gamma_t S_{12}\end{aligned}$$

可以写出

$$T_2 = \frac{S_{13} + S_{23}\Gamma_t S_{42}\Gamma_d S_{14} + S_{43}\Gamma_d S_{24}\Gamma_t S_{12} + S_{43}\Gamma_d S_{14}(1 - S_{22}\Gamma_t) + S_{23}\Gamma_t S_{12}(1 - S_{44}\Gamma_d)}{(1 - S_{22}\Gamma_t)(1 - S_{44}\Gamma_d) - S_{24}S_{42}\Gamma_t\Gamma_d} \quad (5-8-16)$$

(5)  $C = b_4/a_1$ , 只有两条通路

$$\begin{aligned}P_1 &= S_{41} \\P_2 &= S_{21}\Gamma_t S_{42}\end{aligned}$$

可以写出

$$C = \frac{S_{41}(1 - S_{22}\Gamma_t) + S_{21}S_{42}\Gamma_t}{(1 - S_{22}\Gamma_t)(1 - S_{44}\Gamma_d) - S_{24}S_{42}\Gamma_t\Gamma_d} \quad (5-8-17)$$

(6)  $CD = b_4/a_3$ , 也只有两条通路

$$\begin{aligned}P_1 &= S_{43} \\P_2 &= S_{23}\Gamma_t S_{42}\end{aligned}$$

可以写出

$$CD = \frac{S_{43}(1 - S_{22}\Gamma_t) + S_{23}S_{42}\Gamma_t}{(1 - S_{22}\Gamma_t)(1 - S_{44}\Gamma_d) - S_{24}S_{42}\Gamma_t\Gamma_d} \quad (5-8-18)$$

于是有

$$D = \frac{CD}{C} = \frac{S_{43}(1 - S_{22}\Gamma_t) + S_{23}S_{42}\Gamma_t}{S_{41}(1 - S_{22}\Gamma_t) + S_{21}S_{42}\Gamma_t} \quad (5-8-19)$$

显然,当  $\Gamma_t=0$  时,  $D=S_{43}/S_{41}$ ,此即理想定向系数的定义。进入检波器的信号是

$$M = K(Ca_1 + CDa_3) \quad (5-8-20)$$

### 三、信号流图的 CAD 方法

由上面讨论可以清楚地看出:不论是拓扑变换,还是 Mason 法则,采用图来解决问题均十分复杂。很自然希望采用计算机的 CAD 方法,把工程技术人员从繁重的劳动中解放出来。

要讨论信号流图的 CAD 方法,首先要了解代数的矩阵解和图论解的异同点。从本质上来说,不管是矩阵解法还是图论方法,其对象都是线性方程组系统。就这一点来说,两者是相同的,但是,很多实际的微波工程问题只需要求出一条路值或几条路值。也就是说,只要求得到线性方程组的局部未知数解。这时,图论将显出其优越性。

但是,线性方程组的局部解同样可采用代数法。这将是讨论的信号流图 CAD 方法的理论基础。然而,应该注意到采用矩阵求解图论问题有它的特殊性。

① 用矩阵表述图时,必然构成有向矩阵。例如

$$Sa = b \quad (5-8-21)$$

表示  $b$  结点矩阵是由  $a$  结点矩阵通过路值矩阵  $S$  流入的。这时不能写成  $S^{-1}b = a$ 。而要另找电源、负载矩阵关系,这一点将在下面讨论。

② 若要求结点  $a_1$  到结点  $a_2$  的路值,图论归结为两个方程,而不是一个方程。即

$$\begin{cases} Aa_1 = a_2 \\ Ba_2 = a_1 \end{cases} \quad (5-8-22)$$

其中,式(5-8-22)表示结点  $a_1$  通过路值  $A$  流入  $a_2$  结点;而式(5-8-23)则表示结点  $a_2$  通过路值  $B$  流入  $a_1$  结点。具体关系如图 5-8-11 所示。最后得到

$$\frac{A}{1-AB}a_1 = a_2 \quad (5-8-24)$$

现在研究如图 5-8-12 所示的一般系统,注意到各个端口均已接上负载和电源。

对于  $b$  结点的输入关系从上面已经知道:  $Sa = b$ 。对于  $a$  结点的输入关系是通过负载或电源反馈得到的。可以写为

$$H \begin{bmatrix} b \\ E \end{bmatrix} = a \quad (5-8-25)$$

式中,  $E$  表示电源矩阵。将式(5-8-21)和式(5-8-25)联合起来考虑,可简写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & H \\ S & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \quad (5-8-26)$$

其中

$$c = \begin{bmatrix} b \\ E \end{bmatrix} \quad (5-8-27)$$

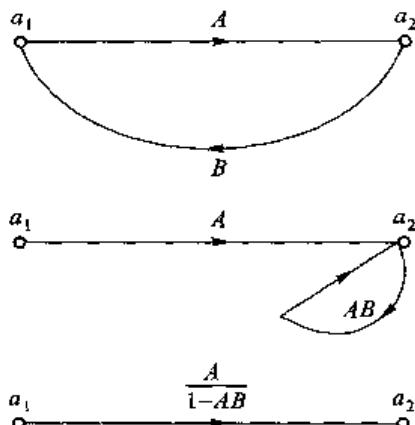


图 5-8-11 信号流图双结点的一般关系

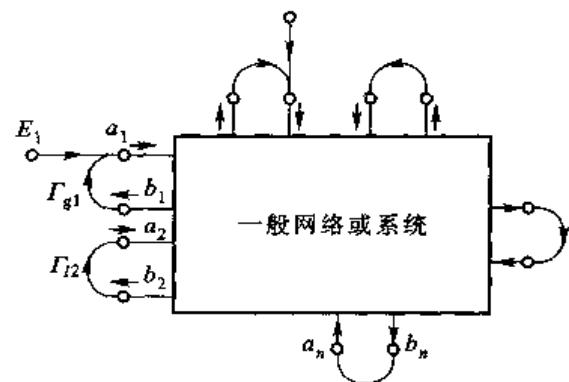


图 5-8-12 信号流图研究的一般系统

假设要求  $i \rightarrow j$  的路值。变换式(5~8~26)未知数的位置:把起始结点放在  $n-1$  位置,而把终止结点放到最后  $n$  的位置。写出

$$WU = U \quad (5-8-28)$$

又设

$$P = W^{-1} I \quad (5 - 8 - 29)$$

现在,可以得到

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n-1,1} & P_{n-1,2} & \cdots & P_{n-1,n} \\ P_{n,1} & P_{n,2} & \cdots & P_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-8-30)$$

问题要求  $U_{n-1} \rightarrow U_n$  的传输关系。利用 LU 消元(即 LU 矩阵分解), 容易变成

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & & a_{n,n} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (5-8-31)$$

这时能得到  $U_{n-1}$  和  $U_n$  两个结点方程

$$\left\{ -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} U_n = U_{n-1} \right. \quad (5-8-32)$$

$$-\frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}}U_{n-1} = U_n \quad (5-8-33)$$

根据上面所得的式(5-8-24)可知

$$\frac{a_{n-1,n-1}a_{n,n-1}}{a_{n-1,n}a_{n,n-1}-a_{n,n}a_{n-1,n-1}}U_{n-1}=U_n \quad (5-8-34)$$

也就是说

$$\Gamma = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{a_{n-1,n-1}a_{n,n-1}}{a_{n-1,n}a_{n,n-1} - a_{n,n}a_{n-1,n-1}} \quad (5-8-35)$$

最后归纳出的方程(5-8-35)是信号流图 CAD

方法的主要公式。

[例 5] 讨论如图 5-8-13 所示双端口网络的输入反射系数。

$$\Gamma = b_1/a_1$$

[解] 根据输入关系有

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

于是可写成

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_I \\ S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (5-8-36)$$

重新排列次序, 得到

$$\begin{bmatrix} -1 & \Gamma_I & 0 & 0 \\ S_{22} & -1 & S_{21} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_{12} & 0 & S_{11} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-8-37)$$

对系数矩阵做变换, 得到

$$\begin{bmatrix} 1 & -\Gamma_I & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-S_{21}}{1-S_{22}\Gamma_I} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_I}{1-S_{22}\Gamma_I} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-8-38)$$

由方程(5-8-35), 可知

$$\Gamma = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_I}{1-S_{22}\Gamma_I} \quad (5-8-39)$$

[例 6] 讨论如图 5-8-1(a)所示双端口网络的传输系数  $T = b_2/E$ 。

[解] 先写出结点输入关系

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{22} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Gamma_I & 0 & 1 \\ 0 & \Gamma_I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

适当排列次序, 构成标准形式有

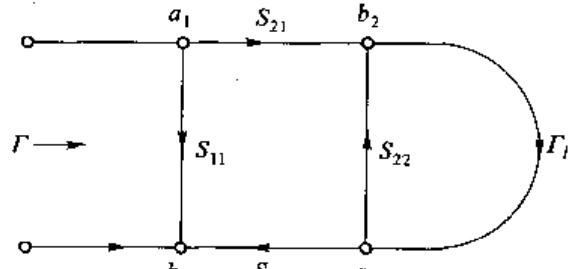


图 5-8-13 双端口网络的输入反射系数  $\Gamma$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \Gamma_g & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \Gamma_t \\ S_{11} & S_{12} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ E \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-8-40)$$

进行变换后,得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Gamma_g & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\Gamma_t \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{S_{11}}{1-\Gamma_g S_{11}} & \frac{S_{12}\Gamma_t}{1-S_{11}\Gamma_g} \\ 0 & 0 & 0 & S_{21} + \frac{S_{11}S_{21}\Gamma_g}{1-S_{11}\Gamma_g} & \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_g\Gamma_t}{(1-S_{11}\Gamma_g)} - (1-S_{22}\Gamma_t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ E \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-8-41)$$

计及式(5-8-35),得到

$$T = \frac{b_2}{E} = \frac{S_{21}}{(1-S_{11}\Gamma_g)(1-S_{22}\Gamma_t)-S_{12}S_{21}\Gamma_g\Gamma_t} \quad (5-8-42)$$

就实质上来说,信号流图的 CAD 方法即 Gauss 消元法解线性方程组的前一半,它省略了回代过程,因此计算量要小得多。

#### 四、有向矩阵的广义信号流图

在这里进一步把信号流图的概念推广到有向矩阵系统<sup>[1]</sup>,把研究对象扩展到分块矩阵方程组

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned} \quad (5-8-43)$$

##### 1. 广义信号流图的拓扑法则

[定义] 分块矩阵方程组也可以用图解表示。方程中每一信号矩阵用结点表示(例如  $a$  或  $b$ )。每一个独立信号矩阵的系数矩阵(例如  $S$ )用一带箭头的线→表示,如图 5-8-14 所示。

注意:广义信号流图与一般信号流图不同。一

图 5-8-14 广义信号流图的基本方法

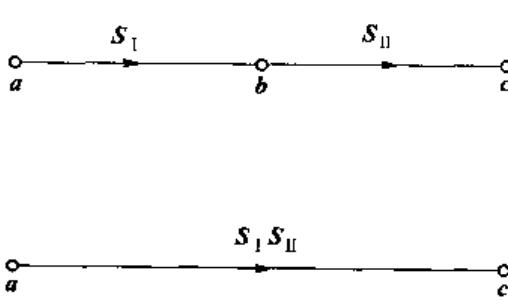


图 5-8-14 广义信号流图的基本方法

般信号流图强调流进关系,而广义信号流图则强调流出关系。同时,由于所讨论的对象均为矩阵,所以乘积次序要仔细给出。

广义信号流图的四个拓扑法则依次介绍如下:

- ① 串联相乘法则,如图 5-8-15 所示。
- ② 并联相加法则,如图 5-8-16 所示。
- ③ 自闭环消除法则,如图 5-8-17 所示。

图 5-8-15 串联相乘法则

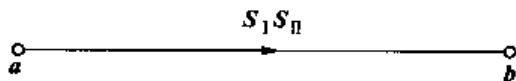
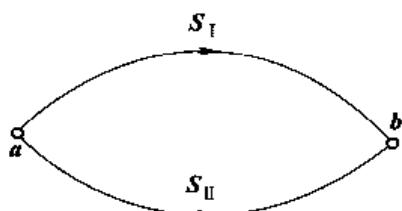


图 5-8-16 并联相加法则

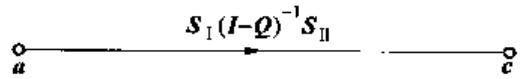
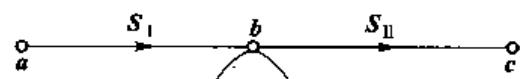


图 5-8-17 自闭环消除法则

所有流出环支路的系数矩阵左乘 $(I-Q)^{-1}$ 。其中， $I$  为单位矩阵， $Q$  为环值矩阵。

证明十分简单。按广义信号流图意义写出

$$\begin{cases} a = S_I b \\ b = S_{II} c + Qb \end{cases}$$

以上第二式即

$$(I-Q)b = S_{II}c$$

很易得出

$$a = S_I (I-Q)^{-1} S_{II} c$$

由证明过程也可看出其左乘原则。

④ 结点分裂法则，如图 5-8-18 所示。

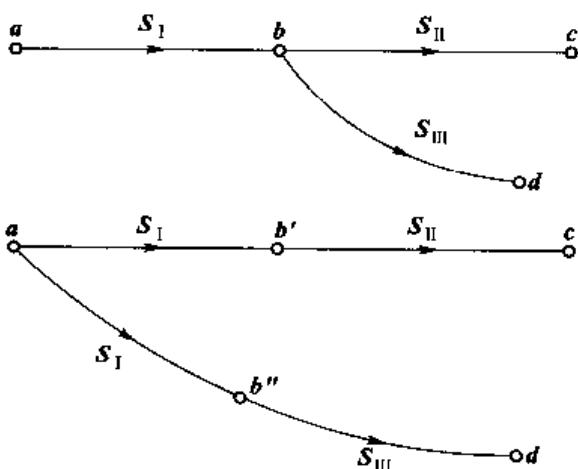


图 5-8-18 结点分裂法则

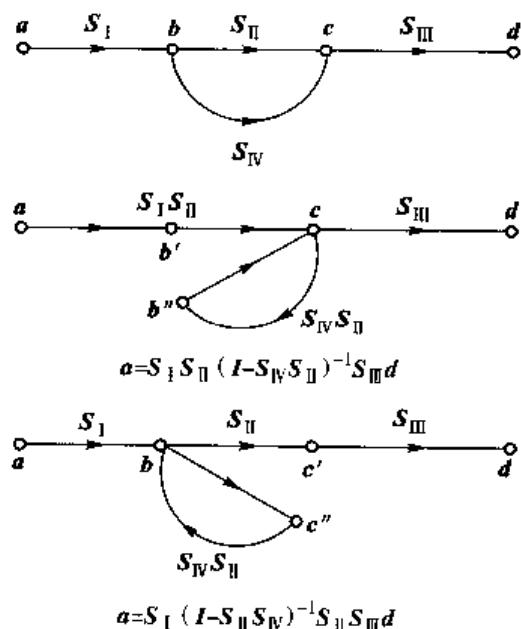


图 5-8-19 环支路分裂的两种等价结果

一个结点可以分裂为两个(或多个)结点。分裂后图形仍保持原来的输入输出关系。

[推论] 如图 5-8-19 所示环路 b 或 c 点分裂可以得到完全一致的结果。

[证明]  $(I - S_{\text{II}} S_{\text{N}}) S_{\text{II}} = S_{\text{II}} (I - S_{\text{N}} S_{\text{II}})$

两边求逆, 有

$$S_{\text{II}}^{-1} (I - S_{\text{II}} S_{\text{N}})^{-1} = (I - S_{\text{N}} S_{\text{II}})^{-1} S_{\text{II}}^{-1}$$

于是得到

$$(I - S_{\text{II}} S_{\text{N}})^{-1} S_{\text{II}} = S_{\text{II}} (I - S_{\text{N}} S_{\text{II}})^{-1}$$

得证。具体如图 5-8-19 所示。

## 2. 复杂网络实例

[例 7] 接有若干负载的多端口复杂网络系统的化简过程如图 5-8-20 所示。

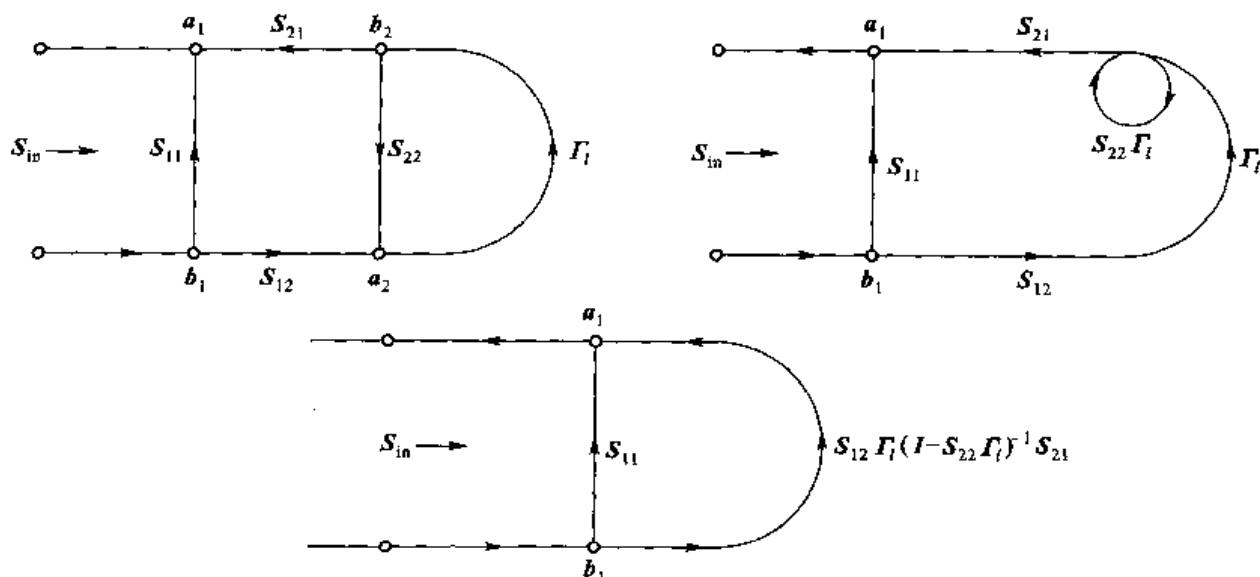


图 5-8-20 接有若干负载的多端口复杂网络系统

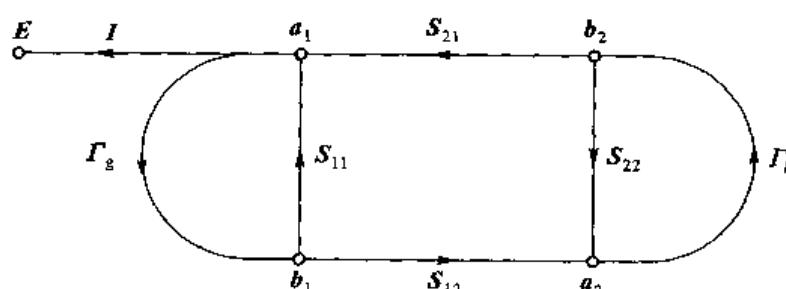
最后得到如前面同样的结果

$$S_{\text{in}} = S_{11} + S_{12} \Gamma_l (I - S_{22} \Gamma_l)^{-1} S_{21} \quad (5-8-44)$$

[例 8] 研究接若干电源和负载的多端口复杂网络系统的传输矩阵, 如图 5-8-21 所示。

最后容易得到

$$\mathbf{b}_2 = \{I - [(I - S_{22} \Gamma_l)^{-1} S_{21} (I - \Gamma_g S_{11})^{-1} \Gamma_g S_{12} \Gamma_l]\}^{-1} (I - S_{22} \Gamma_l)^{-1} S_{21} (I - \Gamma_g S_{11})^{-1} \mathbf{E} \quad (5-8-45)$$



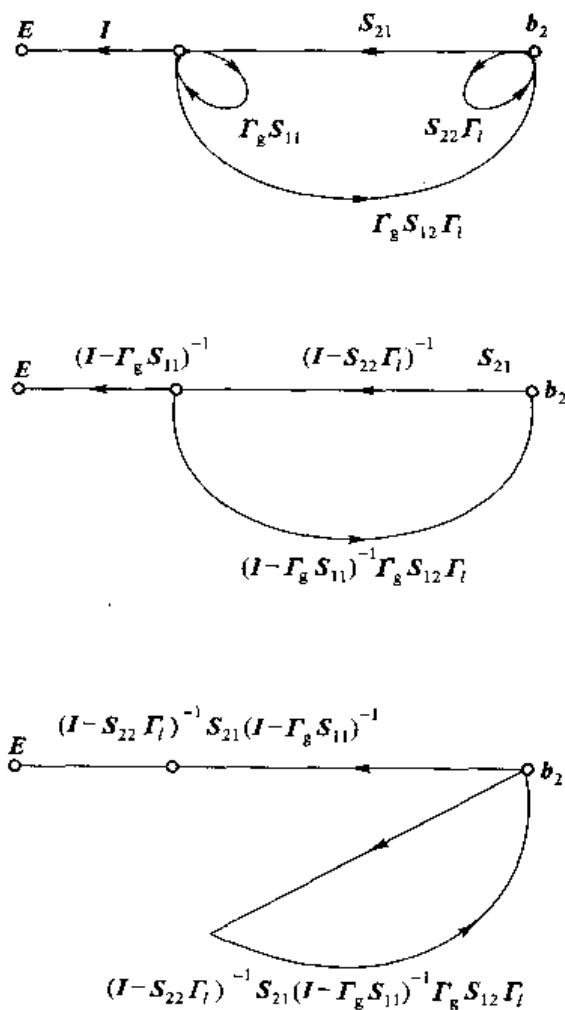


图 5-8-21 接有若干电源和负载的多端口  
复杂网络的传输系数矩阵

[例 9] 研究复杂网络级联, 如图 5-8-22 所示。

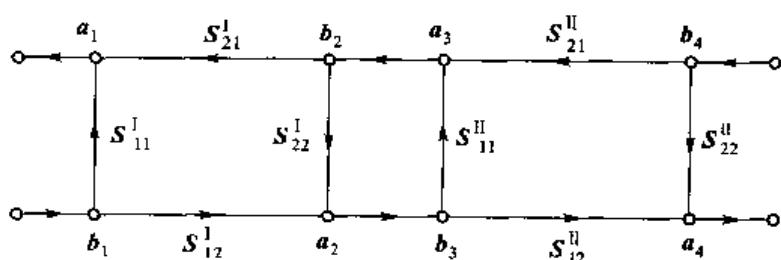


图 5-8-22 复杂网络级联

[解]

利用广义信号流图, 很容易得到

$$\begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_4 \\ b_4 = S_{21} a_1 + S_{22} a_4 \end{cases} \quad (5-8-46)$$

其中

$$\begin{cases} S_{11} = S_{11}^{\perp} + S_{12}^{\perp} S_{11}^{\parallel} (I - S_{22}^{\parallel} S_{12}^{\parallel})^{-1} S_{21}^{\perp} \\ S_{12} = S_{12}^{\perp} (I - S_{11}^{\parallel} S_{11}^{\perp})^{-1} S_{12}^{\parallel} \\ S_{21} = S_{21}^{\parallel} (I - S_{22}^{\perp} S_{12}^{\perp})^{-1} S_{22}^{\perp} \\ S_{22} = S_{22}^{\parallel} + S_{21}^{\perp} S_{22}^{\parallel} (I - S_{11}^{\parallel} S_{22}^{\parallel})^{-1} S_{12}^{\perp} \end{cases} \quad (5-8-47)$$

上式中,各矩阵的乘积顺序不能任意变动。

广义信号流图在网络实际应用时,可能有两类矩阵方程:网络流图构成内部矩阵方程组,而电源或负载则构成外部矩阵方程组。

一般信号流图往往只应用于  $S$  散射参数。外部信号流图与内部流图构成环流关系,不会产生混淆。可以用前面给出的 4 个拓扑法则统一处理。但是,如果研究其他参数(例如  $Z$  参数),它会出现内部流图与外部流图是同向关系的情况,则还需要补充以下拓扑法则。

[内外流图同向时简化法则]

如图 5-8-23 所示,其中虚线表示外部底图。

$$\text{内部流图} \quad b = Z_1 a + Z_{\text{II}} c \quad (5-8-48)$$

$$\text{外部流图} \quad b = -Z_{\text{III}} c \quad (5-8-49)$$

很容易得到

$$C = -(Z_{\text{II}} + Z_{\text{III}})^{-1} Z_1 a \quad (5-8-50)$$

[例 10] 研究多端口复杂网络  $Z$  的输入阻抗矩阵  $Z_{\text{in}}$ ,如图 5-8-24 所示。

[解] 很容易给出

$$Z_{\text{in}} = Z_{11} - Z_{12} (Z_{22} + Z_L)^{-1} Z_{21} \quad (5-8-51)$$

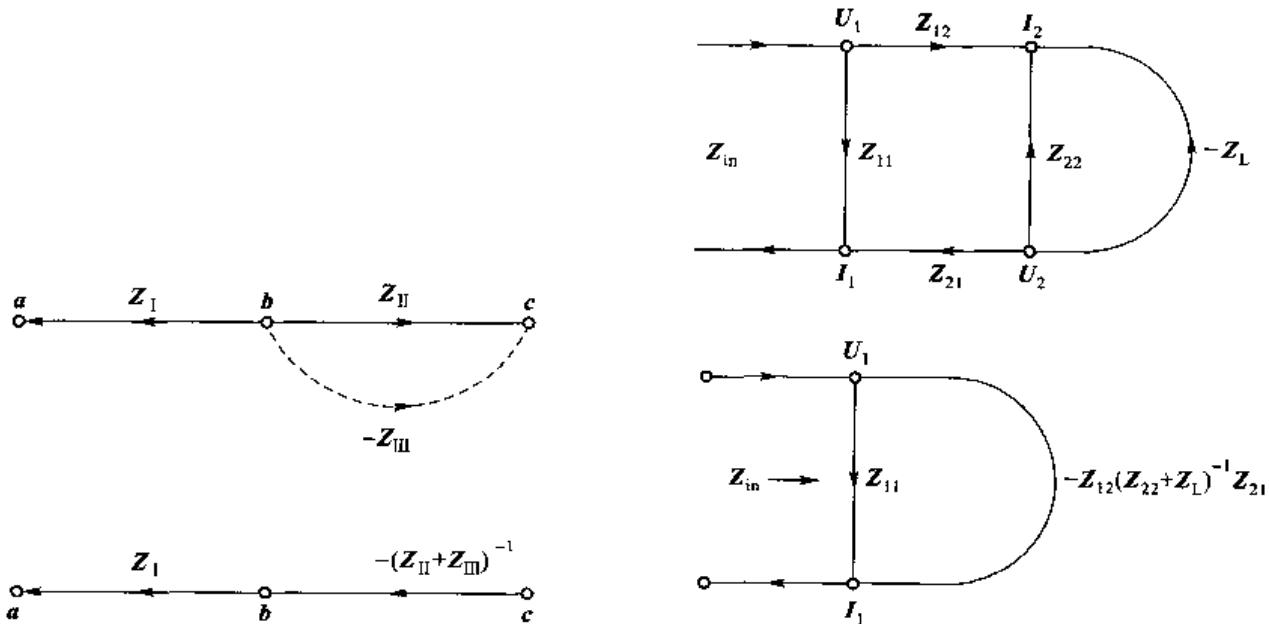


图 5-8-23 内外流图同向时简化法则

图 5-8-24 多端口复杂网络的输入阻抗矩阵

广义信号流图尽管是一般信号流图的有向矩阵形式下的推广,但是通过深入分析可以更清楚地看到原来理论的缺陷和不足。

值得指出:普通信号流图能适用的 Mason 不接触环法则,在这种情况下完全失效。因此,很多方面值得进一步研究。

### 参 考 文 献

- [1] 梁昌洪,史小卫.有向矩阵的广义讯号流图.电子学报,1995,23(3):92~95.

5-9

## 本征函数法 Method of Eigenfunction

不论是在电磁工程上,还是在其他领域,很多问题归结起来都是希望求解一个数学问题,例如非齐次算子方程

$$L(u) = g \quad (5-9-1)$$

其中,  $L$  是线性算子,已知激励  $g$  而求取函数  $u$ ,若能给出逆算子,则问题迎刃而解

$$u = L^{-1}(g) \quad (5-9-2)$$

可惜的是,绝大多数问题都无法得知逆算子  $L^{-1}$ 。于是产生了各种求解方法,本征函数法是其中一种重要的求解方法。

### 一、本征函数法

对于实际的复杂问题,任何一种求解方法说到底都是寻找适合算子  $L$  的基础解系。本征函数  $\{u_n\}$  正是一种特殊的解系集合,它符合

$$L(u_n) = \lambda_n u_n \quad n=1,2,\dots \quad (5-9-3)$$

其中,符合式(5-9-3)的解为本征方程,  $\{u_n\}$  是本征函数系,而  $\lambda_n$  称为本征值,如果  $\{u_n\}$  能说成算子  $L$  定义域的全空间,也就是构成  $L$  空间的完备基,则对于任意  $g$  和  $u$  总可以按  $\{u_n\}$  展开,即

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \quad (5-9-4)$$

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n \quad (5-9-5)$$

将式(5-9-4)和式(5-9-5)两式代入式(5-9-1)可知

$$L\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n L(u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n$$

计及本征方程(5-9-3),产生

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n$$

则可得到

$$\alpha_n = \frac{\beta_n}{\lambda_n} \quad (5-9-6)$$

于是采用本征函数法求算子方程(5-9-1)的解  $u$  为

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\lambda_n} u_n \quad (5-9-7)$$

在实际计算中,如果所要求的解十分接近其中一个本征函数(例如,微波波导中的主模遇到小的不均匀性微扰),则采用这种方法十分优越,也即构成了微波理论中的重要分支——本征函数论,反之,级数的收敛速度则可能比较缓慢。

若进一步在算子  $L$  域引入内积  $\langle a, b \rangle$ ,则假设本征函数系正交归一,即

$$\langle u_m, u_n \rangle = \delta_{mn} \quad (5-9-8)$$

其中,  $\delta_{mn}$  是 Kronecker(克罗内克)- $\delta$  符号,有

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (5-9-9)$$

重新考虑算子方程(5-9-1)

$$L\left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \lambda_m u_m = g \quad (5-9-10)$$

对式(5-9-10)两边乘  $u_n$  并取内积,计及正交归一性式(5-9-8)得到

$$\alpha_n \lambda_n = \langle g, \tilde{u}_n \rangle \quad (5-9-11)$$

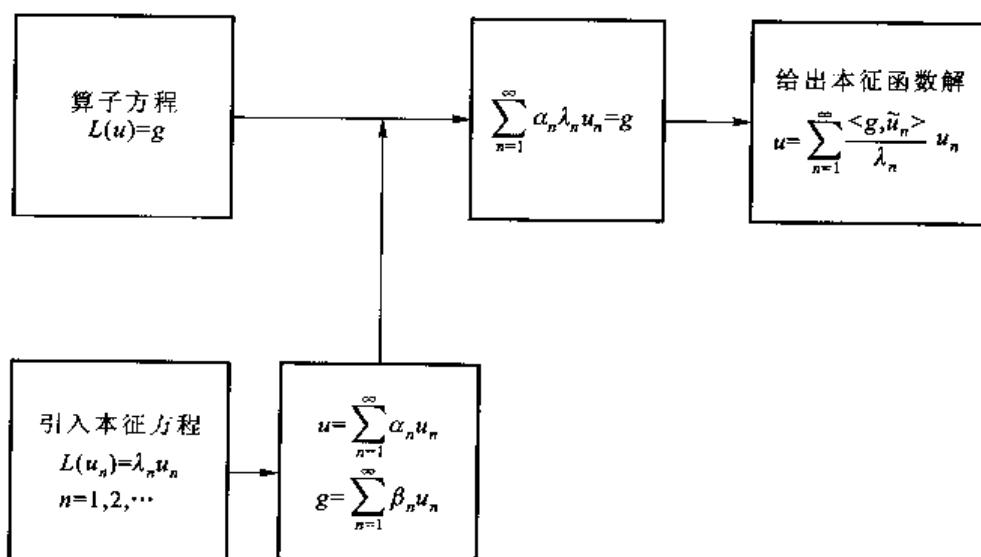


图 5-9-1 本征函数解的思路过程

$\hat{u}_n$  在内积中的波浪号表示内积对源点起作用, 这时, 算子方程的本征函数解可进一步写为

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, \hat{u}_n \rangle}{\lambda_n} u_n \quad (5-9-12)$$

图 5-9-1 给出本征函数解的思路过程。

很明显,  $\{u_n\}$  是问题的基础解系, 本征方程和原方程共同点是具有同一算子  $L$ , 而与特定的激励  $g$  无关。

从另一方面来看, 本征方程也可认为是一种特殊的激励, 在算子  $L$  的作用下, 它只使函数  $u_n$  起到伸缩作用, 而不改变其“方向”, 如图 5-9-2 所示。

[例 1] 研究  $L(u) = g$ , 其中  $g = 1 + 4x^2$ ,  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ , 采用本征函数法。

[解] 具体写出本征方程

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \lambda_n u_n = 0 \\ u_n(0) = u_n(1) = 0 \end{cases} \quad (5-9-13)$$

$$(5-9-14)$$

很易给出本征矢(本征函数)

$$u_n = a_n \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5-9-15)$$

其中,  $a_n$  是正交归一系数, 由条件

$$\langle u_n, u \rangle = \int_0^1 a_n^2 \sin^2(n\pi x) dx = 1$$

具体得到

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{2} \sin(n\pi x) \\ \lambda_n = n^2 \pi^2 \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (5-9-16)$$

由式(5-9-12)给出

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \langle 1 + 4x^2, \sin(n\pi x) \rangle \sin(n\pi x)$$

其中

$$\begin{aligned} \langle 1 + 4x^2, \sin(n\pi x) \rangle &= \int_0^1 (1 + 4x^2) \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left\{ 1 - 5(-1)^n - \frac{8}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \right\} \end{aligned}$$

最后的本征函数解结果为

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \left\{ 1 - 5(-1)^n - \frac{8}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \right\} \sin(n\pi x) \quad (5-9-17)$$

十分巧合, 式(5-9-17)正好是  $u(x)$  的 Fourier 展开, 令

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

则必有

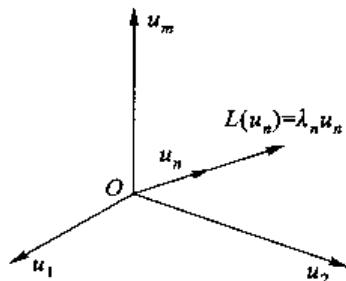


图 5-9-2 本征矢和本征值  
(在算子  $L$  作用下不改变方向)

$$b_n = 2 \int_0^1 g \sin(n\pi x) dx$$

因为此例有精确解是

$$u_0(x) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^4 \quad (5-9-18)$$

采用本征函数法收敛相对比较慢。

从算子方程求解的正确性来分类,可以把求解方法分成两类:一类是自校准的,即使在求解过程中由于种种原因出现错误,它也可以通过检验自行校准。例如,在后面要论述的差分迭代法就是这样一种方法;而另一类是无法自校准的,本节所涉及的本征函数法即为典型,从本质上讲,本征方程左右平衡是这一方法的核心。因此即使缺解、漏解也能达到某种平衡而无法自己查出。

在上面例子中,若假设不完备的  $u(x)$  表达式为

$$u = a_1 \sin \pi x + a_2 \sin 2\pi x$$

同样存在,但它并不正确

$$u = \frac{2}{\pi^3} \left( 6 - \frac{16}{\pi^2} \right) \sin \pi x - \frac{1}{\pi^3} \sin 2\pi x \quad (5-9-19)$$

关于本征函数法的这一特点,甚至连有些著名学者也出现过失误,值得大家注意和警惕。

## 二、本征值泛函和变分稳定

由上述讨论可知,对于某一特定算子  $L$ ,本征函数法的关键即要求解本征方程(5-9-3),并得到基础解系本征函数  $\{u_n\}$  和对应的本征值  $\{\lambda_n\}$ 。

但是,在很多微波工程问题中一方面算子  $L$  的本征方程极难求解;另一方面最关心的参数往往是本征值  $\lambda$ ,它反映谐振频率  $\omega$ 、增益  $G$  等等,因此如何求解本征值  $\lambda$  成了关键问题之一。

这里所研究的算子  $L$  有 3 个重要性质:

①  $L$  算子正定

$$\langle u^*, L(u) \rangle > 0 \quad (5-9-20)$$

②  $L$  算子自伴

$$\langle v, L(u) \rangle = \langle u, L(v) \rangle \quad (5-9-21)$$

③  $L$  为实算子

$$L^* = L \quad (5-9-22)$$

式中,  $^*$  表示复共轭, 内积采用显式, 即

$$\langle u, v \rangle = \iint_v uv dv \quad (5-9-23)$$

### 1. 本征值泛函和变分稳定

$$\lambda(u) = \frac{\langle u^*, L(u) \rangle}{\langle u^*, u \rangle} \quad (5-9-24)$$

式(5-9-24)是算子  $L$  的本征值泛函, 它比本征值  $\lambda$  的含义更为广泛, 重新写出本征方程, 为

$$L(u) = \lambda u$$

两边取  $u^*$  的内积, 可知

$$\langle u^*, L(u) \rangle = \lambda \langle u^*, u \rangle$$

只要  $u$  是非零元素, 必有  $\langle u^*, u \rangle = \|u\|^2 > 0$ , 而算子正定保证  $\langle u^*, L(u) \rangle > 0$ , 即得式(5-9-24), 且有

$$\lambda > 0 \quad (5-9-25)$$

本征值泛函是正实的, 本征值泛函包含准确的本征值, 也包含任意  $u$  所对应的  $\lambda(u)$ , 下面的重要定理保证准确的本征值  $\lambda$  是本征值泛函的变分极值。

〔定理〕 正定、自伴、实算子  $L$  的本征值  $\lambda$  使本征值泛函  $\lambda(u)$  的驻值稳定。

〔证明〕 只需证明, 若本征值所对应的本征矢量  $u$  有一阶扰动, 即

$$u' = u + \varepsilon v \quad (5-9-26)$$

其中  $\varepsilon$  是一阶小量, 则造成本征值  $\lambda$  将是二阶扰动, 即为本征值的一个驻点, 已知式(5-9-24), 再设

$$\lambda' = \frac{\langle u'^*, L(u') \rangle}{\langle u'^*, u' \rangle} \quad (5-9-27)$$

首先研究分子

$$\begin{aligned} \langle u'^*, L(u') \rangle &= \langle u^* + \varepsilon^* v^*, L(u) + \varepsilon L(v) \rangle \\ &= \langle u^*, L(u) \rangle + \varepsilon^* \langle v^*, L(u) \rangle + \varepsilon \langle u^*, L(v) \rangle \\ &\quad + |\varepsilon|^2 \langle v^*, L(v) \rangle \end{aligned}$$

由  $L(u) = \lambda u$  可知  $L^*(u^*) = \lambda^* u^*$ , 进一步有  $L(u^*) = \lambda u^*$ , 则可知

$$\begin{aligned} \langle u'^*, L(u') \rangle &= \lambda \langle u^*, u \rangle + \varepsilon^* \lambda \langle v^*, u \rangle + \varepsilon \lambda \langle u^*, v \rangle + |\varepsilon|^2 \langle v^*, L(v) \rangle \\ &= \lambda (\langle u^*, u \rangle + \varepsilon^* \langle v^*, u \rangle + \varepsilon \langle u^*, v \rangle + |\varepsilon|^2 \langle v^*, v \rangle) + |\varepsilon|^2 (\langle v^*, L(v) \rangle - \lambda \langle v^*, v \rangle) \end{aligned} \quad (5-9-28)$$

再研究分母

$$\langle u'^*, u' \rangle = \langle u^*, u \rangle + \varepsilon^* \langle v^*, u \rangle + \varepsilon \langle u^*, v \rangle + |\varepsilon|^2 \langle v^*, v \rangle \quad (5-9-29)$$

将式(5-9-28)和式(5-9-29)两式代入式(5-9-27)得到

$$\lambda' = \lambda + |\varepsilon|^2 \frac{\langle v^*, L(v) \rangle - \lambda \langle v^*, v \rangle}{\langle u^*, u \rangle + \varepsilon^* \langle v^*, u \rangle + \varepsilon \langle u^*, v \rangle + |\varepsilon|^2 \langle v^*, v \rangle} \quad (5-9-30)$$

〔讨论〕 ① 式(5-9-30)清楚表明, 当本征函数  $u$  做一阶扰动时, 所对应的本征值泛函  $\lambda$  做二次扰动。特别当  $v = u$  时, 也即  $u'$  就在  $u$  的(正负)方向做变动, 则进一步有

$$\lambda' = \lambda \quad (5-9-31)$$

② 再考察一下本征值泛函  $\lambda(u)$  变分稳定的几何意义。正定矩阵的本征值与椭圆主值有关, 由图 5-9-3 可知当本征矢  $u(x, y)$  变动到  $u(x', y')$  时, 本征值  $\lambda' \sim \lambda$  变化相当稳定。

③ 关于这一结论的影响也涉及“最优化理论”。因为目标函数接近谷底(或谷峰), 类似于椭圆本征值。所以各种优化方法较难设计参数组(本征矢)中找到精确值, 而却几乎可以得到同样的目标函数。从这一点来看其影响是负面的。

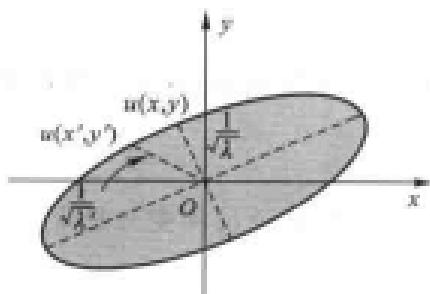


图 5-9-3 本征值泛函  $\lambda(u)$  变分稳定的几何意义

[例 2] 与[例 1]相同,研究算子  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ ,且满足边界条件  $u(0)=u(1)=0$ 。

已经知道本例中的  $\lambda$  有精确值,即式(5-9-16)

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, n=1, 2, \dots$$

试采用本征值泛函  $\lambda(u)$  的变分理论求其逼近解。

[解] 我们将式(5-9-24)具体化,其步骤为

$$\begin{aligned}\langle u, L(u) \rangle &= \int_0^1 -u \frac{d^2 u}{dx^2} dx = - \int_0^1 u d\left(\frac{du}{dx}\right) \\ &= -u \left(\frac{du}{dx}\right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx\end{aligned}$$

很清楚看出

$$\langle u, L(u) \rangle = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx > 0 \quad (5-9-32)$$

符合正定算子条件,于是

$$\lambda = -\frac{\int_0^1 u \frac{d^2 u}{dx^2} dx}{\int_0^1 u^2 dx} \quad (5-9-33)$$

式(5-9-33)满足驻值稳定条件,下面做试探函数假设。

情况 1:

设

$$u=x(1-x) \quad (5-9-34)$$

这一近似函数假设仅满足边界条件,但没有调节参数,所以不是 Ritz(里茨)思想,具体有

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^2 dx &= \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \frac{1}{30} \\ -\int_0^1 u \frac{d^2 u}{dx^2} dx &= \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{3} \\ \lambda_1 &= 10 \quad (5-9-35)\end{aligned}$$

对应精确值

$$\lambda_{10} = \pi^2 = 9.8696 \quad (5-9-36)$$

情况 2:

设

$$u=x(1-x)(\alpha+x^2) \quad (5-9-37)$$

明显注意到式(5-9-37)中有一调节参数  $\alpha$ ,类似 Ritz 思想。计算得到

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{5}\alpha + \frac{3}{35}}{\frac{1}{30}\alpha^2 + \frac{2}{105}\alpha + \frac{1}{252}} \quad (5-9-38)$$

根据 Ritz 思想,取  $\lambda$  极值,有

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = \frac{-N}{\left(\frac{1}{30}\alpha^2 + \frac{2}{105}\alpha + \frac{1}{252}\right)^2} = 0$$

上式中  $N$  可以写出

$$\left(\frac{1}{150} - \frac{2}{315}\right)\alpha^2 + \left(\frac{1}{175} - \frac{1}{378}\right)\alpha + \left(\frac{2}{1225} - \frac{1}{1260}\right) = 0$$

解得

$$\begin{cases} \alpha_1 = -9.385\ 064\ 209 \\ \alpha_2 = -0.281\ 602\ 457 \end{cases} \quad (5-9-39)$$

代入式(5-9-38), 得到

$$\begin{cases} \lambda_1 = 9.984\ 300\ 29 \\ \lambda_2 = 44.742\ 972\ 65 \end{cases} \quad (5-9-40)$$

它们所对应的精确值

$$\begin{cases} \lambda_{10} = \pi^2 = 9.869\ 6 \\ \lambda_{20} = 4\pi^2 = 39.478\ 4 \end{cases} \quad (5-9-41)$$

很明显地注意到所有逼近值均大于真值, 这是变分理论的一个特点, 也是变分理论的一个优点。

情况 3:

如果将本例推广到一般情况, 即

$$u = \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i \quad (5-9-42)$$

这时得到的本征值泛函具体是

$$\lambda(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \langle u_i, L(u_j) \rangle}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \langle u_i, u_j \rangle} \quad (5-9-43)$$

它将转化为广义本征值泛函, 即 Rayleigh(瑞利)商式, 将在后面做出讨论。

## 2. 电磁特征参数变分

很多重要的电磁特征参数, 可以写出本征值泛函  $\lambda(u)$  的形式, 并且可以用变分方法得出解答。这里将先讨论电容  $C$  和谐振频率  $\omega$ , 而把天线陈列增益  $G$  放到 Rayleigh 商式中进行讨论。

### (1) 电容 $C$ 的变分稳定式

电容  $C$  是一个重要的电磁参量, 对于二维情况, 它进一步与微波传输线的特性阻抗  $Z_0$  相联系, 电容  $C$  的变分稳定公式可分为两种情况进行讨论。

#### 情况 1: 电容 $C$ 的下界公式

在静电物体中, 已知电场储能

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \iint_S G(x', y'/x, y) \sigma(x', y') dS' \quad (5-9-44)$$

其中

$$G(x', y'/x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (5-9-45)$$

即今后将要专门讨论的静电场 Green 函数, 可以写出

$$\frac{1}{C} = \frac{\iint_S \iint_{S'} \sigma(x, y) G(x', y'/x, y) \sigma(x', y') dS dS'}{\iint_S \iint_{S'} \sigma(x, y) \sigma(x', y') dS dS'} \quad (5-9-46)$$

由最一般的本征值泛函  $\lambda(u)$  公式(5-9-24)得出以下对应关系。

$$\begin{aligned} u &\leftrightarrow \sigma(x, y) \\ L(u) &\leftrightarrow G(x', y'/x, y) \sigma(x', y') \\ \langle u, v \rangle &= \iint_S \iint_{S'} u v dS dS' \end{aligned}$$

于是得到

$$\frac{1}{C} = \frac{\langle u, L(u) \rangle}{\langle u, u \rangle} \quad (5-9-47)$$

计算  $\langle u, L(u) \rangle = 2W > 0$ , 即算子正定在这里的物理背景是能量恒正, 十分深刻, 再根据 Thomson(托马森)最小能量原理进行计算——即位的真实分布必保持电场储能最小, 也即真实的  $\lambda_0$  取极小值。

$$\begin{cases} \lambda > \lambda_0 \\ C < C_0 \end{cases} \quad (5-9-48)$$

这就是说, 用式(5-9-46)变分理论所算得的电容  $C$  总是小于真实电容  $C_0$ , 式(5-9-46)常称为电容  $C$  的变分下界公式。

### 情况 2: 电容 $C$ 的上界公式

完全类似, 这里再从另一角度研究电容  $C$  的变分公式, 又一次写出电场储能

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma(x, y) \varphi(x, y) dS \quad (5-9-50)$$

$$\sigma(x, y) = -\epsilon \nabla^2 \varphi(x, y) \quad (5-9-51)$$

考虑如图 5-9-4 的双导体系统。

于是

$$W = -\frac{1}{2} \epsilon \iint_S \varphi (\nabla^2 \varphi) dS = \frac{1}{2} \epsilon \iint_S (\nabla \varphi)^2 dS \quad (5-9-52)$$

必须注意式(5-9-52)中积分域  $S$  表示的是两个导体系统之间的截面。

另外, 两导体之间的电压  $U_0$  有

$$U_0^2 = \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^{r_2} \nabla \varphi(r, \theta) \nabla \varphi(r', \theta') dr dr' \quad (5-9-53)$$

于是构成电容  $C$  的另一公式

$$C = \frac{2W}{U_0^2} = \frac{\epsilon \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla \varphi(r, \theta) \nabla \varphi(r', \theta') \delta(r - r', \theta - \theta') dr dr' r d\theta d\theta' d\theta' d\theta'}{\int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^{r_2} \nabla \varphi(r, \theta) \nabla \varphi(r', \theta') dr dr'} \quad (5-9-54)$$

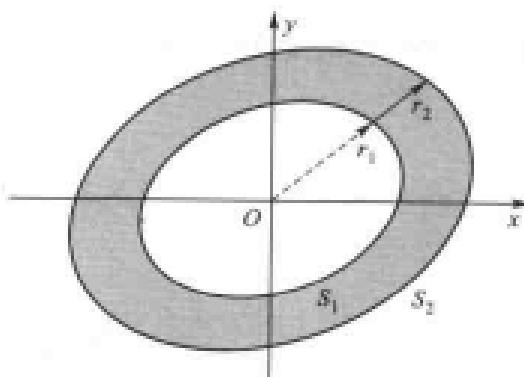


图 5-9-4 双导体系统

又可列出电容  $C$  的本征值泛函  $\lambda(u)$  对应如下。

$$\begin{aligned} u &\leftrightarrow \nabla \varphi(r, \theta) \\ L(u) &\leftrightarrow \epsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(r - r', \theta - \theta') \nabla \varphi(r' \theta') r d\theta' r' d\theta' \\ \langle u, v \rangle &\leftrightarrow \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1}^{r_2} uv dr dr' \end{aligned}$$

于是得到

$$C = \frac{\langle u, L(u) \rangle}{\langle u, u \rangle} \quad (5-9-55)$$

同样道理,  $L$  是正定算子, Thomson 最小能量原理保证  $\lambda > \lambda_0$ , 且

$$C > C_0 \quad (5-9-56)$$

这样电容  $C$  的变分稳定公式(5-9-54)也称为上界公式,一般情况下,主要写成

$$C = \epsilon \frac{\iint (\nabla \varphi)^2 dx dy}{\left( \int_{r_1}^{r_2} \nabla \varphi \cdot dl \right)^2} \quad (5-9-57)$$

[例 3] 采用变分稳定式(5-9-57)计算圆同轴线电容  $C$ ,如图 5-9-5 所示。

[解] 设  $\varphi$  的试探函数为

$$\varphi = kr + b \quad (5-9-58)$$

根据边界条件  $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = U_0$  可写出

$$\varphi = \frac{U_0}{b-a}(r-a)$$

$$\nabla \varphi = \frac{U_0}{b-a} \hat{r} \quad (5-9-59)$$

具体写出电容  $C$  的变分稳定式

$$C = \epsilon \frac{\int_0^{2\pi} \int_a^b (\nabla \varphi)^2 r dr d\varphi}{\left( \int_a^b \nabla \varphi \cdot dl \right)^2} \quad (5-9-60)$$

计算给出

$$C = 2\pi\epsilon \frac{\frac{1}{2}(b^2 - a^2)}{(b-a)^2} = \pi\epsilon \left( \frac{b+a}{b-a} \right) \quad (5-9-61)$$

已知圆同轴线单位长度的精确公式是

$$C_0 = 2\pi\epsilon / \ln \left( \frac{b}{a} \right) \quad (5-9-62)$$

当  $b > a$  时

$$\ln \left( \frac{b}{a} \right) = 2 \left[ \left( \frac{b-a}{b+a} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{b-a}{b+a} \right)^3 + \dots \right] > 2 \left( \frac{b-a}{b+a} \right) \quad (5-9-63)$$

也即

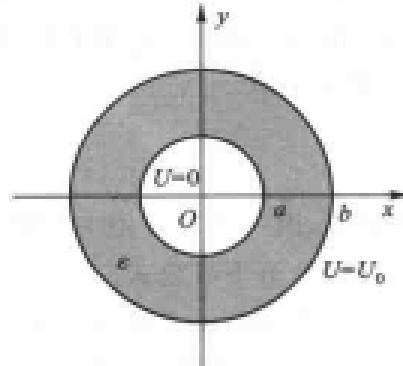


图 5-9-5 圆同轴线电容

$$C = \pi \epsilon \left( \frac{b+a}{b-a} \right) > C_0 = \frac{2\pi \epsilon}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)} \quad (5-9-64)$$

可以看出, 变分确是上界分式。

### (2) Collin(柯林)原则

采用变分理论计算电容  $C$  时, R. E. Collin 在其名著《导波场论》中提出过一条十分重要的原则。

〔Collin 原则〕 如图 5-9-6 所示, 设  $S_1$  和  $S_2$  之间的电容为  $C_0$ , 且  $S'_1$  处于  $S_1$  内部。再进一步设  $S'_1$  和  $S_2$  之间的电容为  $C$ , 则有

$$C < C_0 \quad (5-9-65)$$

〔证明〕 根据变分上界公式(5-9-57), 设  $S_1$  和  $S_2$  之间的精确电容为  $C_0$ , 这时所对应的精确分布为  $\varphi_0(x, y)$ 。

又假设  $S'_1$  和  $S_2$  之间的近似(或试探)电位分布是

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi_0(x, y) & \text{在 } S_1 \text{ 和 } S_2 \text{ 之间} \\ 0 & \text{在 } S'_1 \text{ 和 } S_2 \text{ 之间} \end{cases} \quad (5-9-66)$$

再一次利用式(5-9-57)算得电容为  $C_0$ , 根据以上讨论, 它必是大于精确电容  $C$ , 即有

$$C_0 > C$$

### (3) 微波谐振腔谐振频率 $\omega$ 的变分稳定式

微波谐振腔的谐振频率  $\omega$  是要研究的另一重要参量, 对于一般如图 5-9-7 所示理想导电壁  $S$  的微波谐振腔, 由 Maxwell 方程所得的波动方程为

$$\begin{cases} \nabla \times u^{-1} \nabla \times \vec{E} - \omega^2 \epsilon \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \epsilon^{-1} \nabla \times \vec{H} - \omega^2 \mu \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (5-9-67)$$

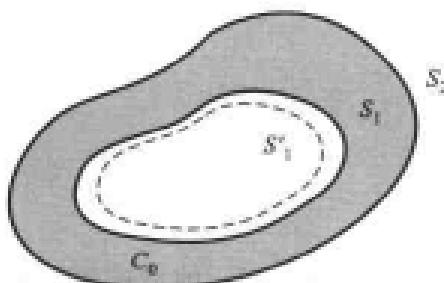


图 5-9-6 Collin 原则

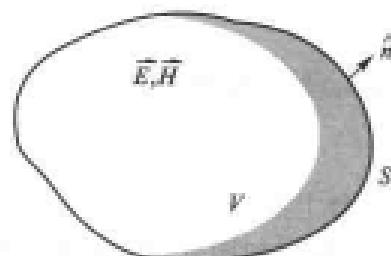


图 5-9-7 理想导电壁微波谐振腔

在式(5-9-67)点乘  $\vec{E}$  再体积分, 得到

$$\omega^2 = \frac{\iiint_V \vec{E} \cdot \nabla \times u^{-1} \nabla \times \vec{E} dV}{\iiint_V \epsilon |\vec{E}|^2 dV} \quad (5-9-68)$$

点乘  $\vec{H}$  再体积分, 又得

$$\omega^2 = \frac{\iiint_V \vec{H} \cdot \nabla \times \epsilon^{-1} \nabla \times \vec{H} dV}{\iiint_V \mu + \vec{H}^2 dV} \quad (5-9-69)$$

应用恒等式

$$\iiint_V \vec{E} \cdot \nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \vec{E} dV = \iiint_V \mu^{-1} \nabla \times \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{E} dV + \oint_S [(\mu^{-1} \nabla \times \vec{E}) \times \vec{E}] \cdot dS \quad (5-9-70)$$

计算在  $S$  面上  $\hat{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \vec{E}) = 0$ , 式(5-9-70)右边第二项为 0。

给出

$$\omega^2 = \frac{\iiint_V \mu^{-1} |\nabla \times \vec{E}|^2 dV}{\iiint_V \epsilon + \vec{E}^2 dV} \quad (5-9-71)$$

完全类似, 计算  $S$  面上  $\hat{n} \times (\epsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}) = 0$ , 又有

$$\omega^2 = \frac{\iiint_V \epsilon^{-1} |\nabla \times \vec{H}|^2 dV}{\iiint_V \mu + \vec{H}^2 dV} \quad (5-9-72)$$

式(5-9-71)和式(5-9-72)即微波谐振腔的变分稳定式, 且式(5-9-72)试探场不受  $S$  面上边界条件的限制。

以式(5-9-68)为例做出本征值泛函  $\lambda(u)$  的对应如下。

$$\begin{aligned} u &\leftrightarrow \vec{E}(x, y, z) \\ L(u) &\leftrightarrow \nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \vec{E}(x, y, z) \\ \langle u, v \rangle &= \iiint_V \epsilon u \cdot v dV \end{aligned}$$

可以证明  $L(u)$  是正定算子, 且

$$\omega^2 = \frac{\langle u, L(u) \rangle}{\langle u, u \rangle} \quad (5-9-73)$$

$\omega^2 > \omega_0^2$  是变分上界公式。

[例 4] 研究如图 5-9-8 所示理想导体壁圆柱谐振腔的主模  $TM_{010}$  的谐振频率  $\omega$  的变分公式( $l < 2a$ )。

[解] 已知在腔长<直径条件下, 圆柱谐振腔的主模式是  $TM_{010}$ , 且有

$$\omega_0 = \frac{2.4048}{a \sqrt{\epsilon \mu}} \quad (5-9-74)$$

且真实的场可以用第一类 Bessel 函数表示

$$\begin{cases} E_r = -j \frac{\omega \mu}{\epsilon} J_0 \left( 2.4048 \frac{r}{a} \right) \\ H_\varphi = \frac{2.4048}{a} J_1 \left( 2.4048 \frac{r}{a} \right) \end{cases} \quad (5-9-75)$$

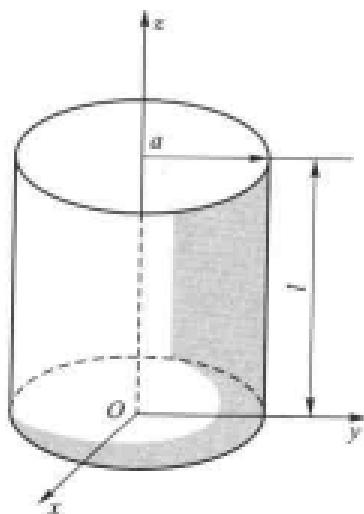
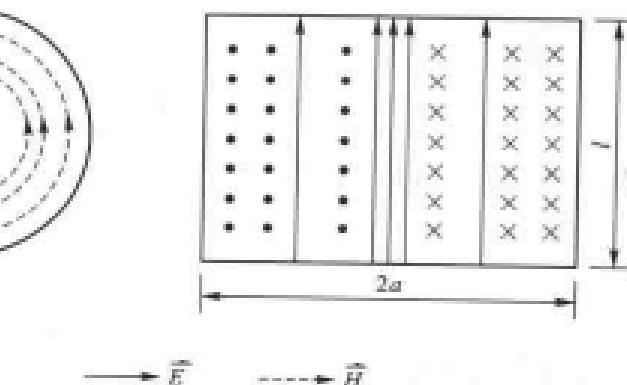
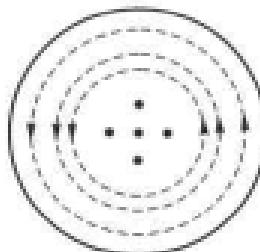
图 5-9-9 给出  $\text{TM}_{010}$  的场分布。

图 5-9-8 理想导体壁圆柱谐振腔

图 5-9-9  $\text{TM}_{010}$  场分布图 ( $l \leq 2a$ )

情况 1:

采用不要求边界条件约束的式(5-9-72), 设试探场

$$\vec{H} = r\hat{\phi}, \quad \nabla \times \vec{H} = 2\hat{z}$$

代入式(5-9-72), 可知

$$\omega^2 = \frac{\int_0^a 4rdr}{\epsilon\mu \int_0^a r^2 dr} = \frac{8}{\epsilon\mu a^2}$$

给出结果

$$\omega \approx \frac{\sqrt{8}}{a \sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{2.818}{a \sqrt{\epsilon\mu}} \quad (5-9-76)$$

这时相对误差约 16%。

情况 2:

还采用式(5-9-74), 但仔细选择试探场使 S 面上的理想导体边界条件得到满足, 即  $\hat{n} \times \vec{E} = 0$ , 设

$$\vec{H} = \left(r - \frac{2r^2}{3a}\right)\hat{\phi}, \quad \nabla \times \vec{H} = 2\left(1 - \frac{r}{a}\right)\hat{z}$$

代入式(5-9-72)为

$$\omega^2 = \frac{\int_0^a 4\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 r dr}{\epsilon\mu \int_0^a \left(r - \frac{2r^2}{3a}\right)^2 r dr} = \frac{180}{\epsilon\mu a^2 31}$$

这时的变分稳定值

$$\omega \approx \frac{2.410}{a \sqrt{\epsilon\mu}} \quad (5-9-77)$$

其相对误差仅 0.2%，这说明，由物理经验对于试探场的选择十分重要，可以说，它也是变分理论的关键之一。

情况 3：

现在采用电场变分式(5-9-71)，注意此公式的试探函数  $\vec{E}$  必须满足  $S$  面上的边界条件  $\hat{n} \times \vec{E} = 0$ ，假设

$$\vec{E} = \left(1 - \frac{r}{a}\right)\hat{z}, \quad \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{a}\hat{\varphi}$$

代入式(5-9-71)，得到

$$\omega^2 = \frac{\int_0^a \frac{r}{a^2} dr}{\epsilon\mu \int_0^a \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 r dr} = \frac{6}{\epsilon\mu a^2}$$

这时变分稳定值

$$\omega \approx \frac{2.449}{\sqrt{\epsilon\mu a}} \quad (5-9-78)$$

相对误差约 1.8%，由此也看出：对于 TM<sub>010</sub> 主模情况，磁场变分稳定式比电场变分稳定式的精度高。有很多问题值得深入研究，如图 5-9-10 所示。

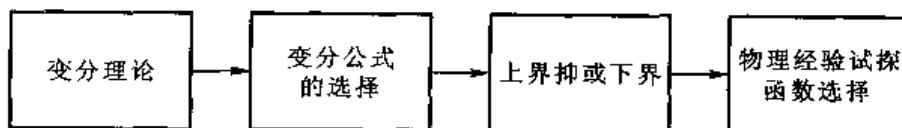


图 5-9-10 变分理论中的选择

### 3. 极值定理

下面进一步深化变分理论。

[极值定理] 设  $L$  是离散谱的自伴算子，本征值泛函  $\lambda(u)$  是

$$\lambda(u) = \frac{\langle u^*, L(u) \rangle}{\langle u^*, u \rangle}$$

$\lambda_1$  是  $L$  的最小本征值，则  $\lambda(u)$  的极小值即  $\lambda_1$ ，且此值在  $\lambda_1$  所对应的本征函数（本征矢量） $u = u_1$  时达到。

[证明] 把算子  $L$  所对应的本征值按从小到大的顺序排列

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$$

所对应的本征函数分别为  $u_1, u_2, u_3, \dots$ ，且这些本征函数张成全空间，于是任意函数  $u$  可按  $\{u_i\}$  展开，即

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i \\ L(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i u_i \end{cases}$$

假定： $\langle u_i^*, u_j \rangle = \delta_{ij}$ ，则可知

$$\langle u^*, L(u) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |a_i|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_1) |a_i|^2 \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 = \lambda_1 \langle u^*, u \rangle$$

于是证得

$$\lambda(u) = \frac{\langle u^*, L(u) \rangle}{\langle u^*, u \rangle} \geq \lambda_1$$

注意到,正是这个极值定理构成了[例 2]中 Ritz 法的基础。

[李政道推广定理] 在平行六面体  $B$  内考虑一任意有限容积  $R'$ ,其曲面为  $S$ ,如图 5-9-11 所示。

设算子  $L = -\nabla^2$  作用于定义在容积  $R'$  内的函数,并假定对属于容许函数类的  $\varphi$  在  $S$  边界上满足

$$\varphi = 0 \quad (5-9-79)$$

则在  $R'$  内有

$$L(\varphi) = \lambda' \varphi \quad (5-9-80)$$

类似地,在平行六面体  $B$  内部也设  $L = -\nabla^2$ ,且在边界  $B$  上同样有  $\varphi = 0$  和

$$L(\varphi) = \lambda \varphi \quad (5-9-81)$$

现在把式(5-9-80)和式(5-9-81)两式的本征值集合排列成

$$\begin{cases} \lambda'_1 \leq \lambda'_2 \leq \lambda'_3 \leq \dots \\ \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \end{cases} \quad (5-9-82)$$

则定理将表明:对于任意  $n$ ,都有

$$\lambda'_n \geq \lambda_n \quad (5-9-83)$$

十分明显,李政道推广定理是 Collin 原则的进一步扩展,但必须有限制条件  $L = -\nabla^2$ 。

[证明] 采用  $\varphi'$  表示下列函数

$$\varphi' = \begin{cases} \varphi & \text{在 } R' \text{ 内} \\ 0 & \text{在 } S \text{ 和 } B \text{ 之间} \end{cases} \quad (5-9-84)$$

此外有

$$\lambda(\varphi') = -\frac{\iiint_B (\varphi')^* \nabla^2 \varphi' dV}{\iiint_B (\varphi')^* \varphi' dV} = \frac{\iiint_B |\nabla \varphi'|^2 dV}{\iiint_B (\varphi')^* \varphi' dV} \quad (5-9-85)$$

$$\lambda'(\varphi) = -\frac{\iiint_B |\nabla \varphi|^2 d\tau}{\iint_B \varphi^* \varphi d\tau} \quad (5-9-86)$$

因为在  $R$  内  $\nabla \varphi = \nabla \varphi'$ ,又在  $S$  外两函数为 0,于是

$$\lambda'(\varphi) = \lambda(\varphi') \quad (5-9-87)$$

用  $G$  表示由所有  $\varphi$  组成的函数类;而用  $G'$  表示由所有  $\varphi'$  组成的函数类,已知

$$\lambda(\varphi)_{\min} = \lambda_1 \quad \varphi \in G \text{ 时} \quad (5-9-88)$$

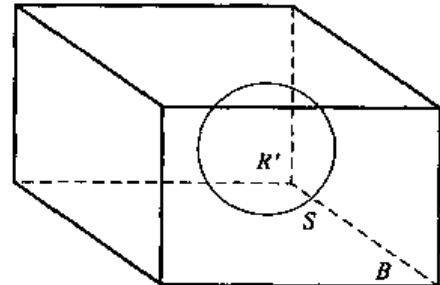


图 5-9-11 平行六面体  $B$   
内的有限容积  $R'$

而

$$\lambda(\varphi')_{\min} = \lambda'_1 \quad \varphi' \in G' \text{ 时} \quad (5-9-89)$$

由于  $G' \subset G$  (即  $G'$  是  $G$  的子集), 于是  $G$  比  $G'$  有更多的函数, 可写出

$$\lambda(\varphi)_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda(\varphi')_{\min} = \lambda'_1 \quad (5-9-90)$$

进一步证明  $\lambda_2$  和  $\lambda'_2$  也有类似关系, 用

$$\lambda_2 = \lambda(\varphi)_{\min} \quad (5-9-91)$$

表示由所有与  $\varphi_1$  正交且属于  $G$  的  $\varphi$  所得到的  $\lambda(\varphi)$  的极小值;

$$\lambda'_2 = \lambda(\varphi')_{\min}$$

表示由所有与  $\varphi'_1$  正交且属于  $G'$  的  $\varphi'$  所得到的  $\lambda(\varphi')$  的极小值。

任取函数  $f_1$ , 假定  $m'(f_1)$  是由属于  $G'$  且正交于  $f_1$  的所有  $\varphi'$  所得到的  $\lambda(\varphi')$  的极小值; 而  $m(f_1)$  是由属于  $G$  且正交于  $f_1$  的所有  $\varphi$  的所得到的  $\lambda(\varphi)$  的极小值, 即有

$$\begin{cases} m'(f_1) = \lambda(\varphi')_{\min} \\ m(f_1) = \lambda(\varphi)_{\min} \end{cases} \quad (5-9-92) \quad (5-9-93)$$

因为所有  $\varphi$  和  $\varphi'$  都正交于同一函数, 故正交于  $f_1$  的所有  $\varphi$  集合应包含正交于  $f_1$  的所有  $\varphi'$  为其子集, 即

$$m'(f_1) \geq m(f_1) \quad (5-9-94)$$

要求  $\varphi$  正交于  $f_1$ , 至少应有两个条件, 记

$$L(\varphi_i) = \lambda_i \varphi_i$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^2 a_i \varphi_i$$

于是

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \sum_{i=1}^2 a_i \lambda_i \varphi_i \\ \iiint_B \varphi \cdot L(\varphi) dV &= \sum_{i=1}^2 |a_i|^2 \lambda_i \\ \iiint_B \varphi^* \varphi dV &= \sum_{i=1}^2 |a_i|^2 \end{aligned}$$

得到

$$\lambda(\varphi) = \frac{\sum_{i=1}^2 |a_i|^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^2 |a_i|^2} \leq \lambda_2 \quad (5-9-95)$$

于是

$$[m'(f_1)]_{\max} = \lambda'_2 \geq [m(f_1)]_{\max} = \lambda_2$$

### 三、Rayleigh 商式

完全可以认为, 本节所讨论的 Rayleigh 商式是广义本征值泛函, 并有着重要的实用价值。

### 1. Hermite 矩阵和 Hermite 算子

这里先引入重要的矩阵和算子概念。

#### (1) 对称矩阵和反对称矩阵

在实践中,对称矩阵和反对称矩阵的概念十分重要。

[定义] 用  $\mathbf{A}^T$  表示转置,则若有

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \quad (5-9-96)$$

则称  $\mathbf{A}$  为对称矩阵。若有

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \quad (5-9-97)$$

则称  $\mathbf{A}$  为反对称矩阵,反对称矩阵的对角元素必定为 0。

[推论] 任一实矩阵均可表示为对称矩阵和反对称矩阵之和。

证明十分简单,只须计算

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\} \quad (5-9-98)$$

即为所求,在上式中,前一项为对称矩阵,而后一项则为反对称矩阵。

[注释] 数学概念和物理思想往往在很多方面有共通之处。在微波工程上,对称微波传输线的传输模式可以分解为偶模与奇模之和,其中偶模即为对称模式;而奇模则对应反对称模式。

#### (2) Hermite 矩阵和 Hermite 二次型

可以把 Hermite 矩阵看作是对称矩阵在复域的一种推广。

[定义] 若矩阵  $\mathbf{A}$  满足

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \quad (5-9-99)$$

则称  $\mathbf{A}$  为 Hermite 矩阵,其中  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{*\top} = \{\mathbf{A}^T\}^*$ 。

类似地,若有

$$\mathbf{A}^- = -\mathbf{A} \quad (5-9-100)$$

则称  $\mathbf{A}$  为反 Hermite 矩阵。

[推论] 任一复矩阵均可分解为 Hermite 矩阵和反 Hermite 矩阵之和。

简单写出

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \{\mathbf{A} + \mathbf{A}^-\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{A} - \mathbf{A}^-\} \quad (5-9-101)$$

即为所求,其中

$$\{\mathbf{A} + \mathbf{A}^-\}^+ = \mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger$$

是 Hermite 矩阵,而

$$\{\mathbf{A} - \mathbf{A}^-\}^- = -\{\mathbf{A} - \mathbf{A}^-\}$$

是反 Hermite 矩阵。

[定义] 若  $\mathbf{A}$  是 Hermite 矩阵,则

$$H = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (5-9-102)$$

称为 Hermite 二次型。

[性质 1] Hermite 二次型的  $H$  是实数,即有

$$H^* = H \quad (5-9-103)$$

[证明] 将二次型写成和号形式

$$\left\{ \begin{array}{l} H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^* a_j A_{ij} \\ H^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j^* A_{ij}^* \end{array} \right. \quad (5-9-104)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^* a_j A_{ij} \\ H^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j^* A_{ij}^* \end{array} \right. \quad (5-9-105)$$

把式(5-9-105)中  $i$  和  $j$  的指标互换, 即令  $i' = j$  而  $j' = i$ , 有

$$H^* = \sum_{j'=1}^n \sum_{i'=1}^n a_{j'} a_{i'}^* A_{j'i'} \quad (5-9-106)$$

根据 Hermite 矩阵性质有

$$A_{ji}^* = A_{ij} \quad (5-9-107)$$

将式(5-9-107)代入式(5-9-106), 且去掉打撇号, 得到

$$H^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^* a_j A_{ij} = H$$

[性质 2] Hermite 矩阵的本征值  $\lambda$  是实数。

[证明] 设  $A$  是 Hermite 矩阵, 其本征方程是

$$Aa = \lambda a$$

于是很容易产生

$$a^* Aa = \lambda a^* a$$

或者写成

$$\lambda = \frac{a^* Aa}{a^* a}$$

上面已证明

$$H = a^* Aa = H^*$$

是实数, 而

$$a^* a = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 > 0$$

也为实数。

可显见  $\lambda$  必为实数, 尤其当  $H > 0$  即  $H$  为 Hermite 正定二次型, 则进一步有  $\lambda$  为正实数。

### (3) Hermite 算子

[定义] 若二次内积泛函

$$H = \langle u^*, L(u) \rangle \quad (5-9-108)$$

对算子  $L$  的全部定义域元素  $u, H$  均为实数, 则称算子  $L$  为 Hermite 算子, 十分明显, Hermite 算子是 Hermite 矩阵的推广。

[性质] Hermite 算子的本征值  $\lambda$  是实数。

[证明] 十分清楚,  $L$  算子的本征方程是

$$L(u) = \lambda u$$

易得

$$\langle u^*, L(u) \rangle = \lambda \langle u^*, u \rangle$$

写成

$$\lambda = \frac{\langle u^*, L(u) \rangle}{\langle u^*, u \rangle} \quad (5-9-109)$$

即为所求。

## 2. Rayleigh 商式

在大量工程技术问题中, 常遇到如下形式的本征值问题:

求  $\lambda$  值其满足

$$Ax = \lambda Bx \quad (5-9-110)$$

有非零解  $x$ , 其中矩阵  $A$  和  $B$  已知, 式(5-9-110)即称为广义本征方程, 特别当  $B=I$ , 则问题退化为本征方程。

在研究的问题中, 对于  $A$  和  $B$  还有 Hermite 正定的约束。

另一方面, 在微波工程中, 很多标志性能的特征量均可表述为

$$\rho(a) = \frac{a^\top Aa}{a^\top Ba} \quad (5-9-111)$$

其中,  $\rho$  是待求的特征量, 如增益  $G$ 、信噪比  $N$ 、品质因数  $Q$  和效率  $\eta$  等。 $a$  是未知的列矩阵(矢量)。于是, 问题的提法是: 要求  $\rho$  的最大值  $\rho_{\max}$  和其对应的  $a$ 。

式(5-9-111)表示的  $\rho(a)$  是广义本征值泛函, 与本征值泛函类似, 它亦存在极值定理。

[定理]  $\rho_{\max}$  是以下广义本征方程的最大广义本征值。

$$Aa = \rho Ba$$

其解可归结为

$$\det(A - \rho B) = 0 \quad (5-9-112)$$

把广义本征值泛函的式(5-9-111)称为 Rayleigh 商式, 其极值与广义本征方程(5-9-110)联系紧密。数学上, 也把  $\{A - \rho B\}$  称为规则笔(Regular pencil), 可以说 Rayleigh 商式的核心问题是求最优化。

[证明] 注意到  $\rho(a)$  的分子、分母都是二次型, 换句话说, 它们都是一个数。因此, 很容易采用一般求导取极值的办法。然而, 问题在于式(5-9-111)是一个复数表示式, 而  $a^\top Aa$  和  $a^\top Ba$  均为 Hermite 二次型, 均表示实数, 解释这一矛盾的办法是将  $a$  拆解为实部和虚部, 即令

$$\begin{cases} a'_i = \operatorname{Re}(a_i) \\ a''_i = \operatorname{Im}(a_i) \end{cases} \quad (5-9-113)$$

也就是

$$a'_i = a'_i + ja''_i \quad (5-9-114)$$

于是,  $\rho$  的极值应满足

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial a'_i} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial a''_i} = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5-9-115)$$

求导的链式法则表明

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial a_i'} = \frac{\partial \rho}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial a_i'} + \frac{\partial \rho}{\partial a_i^*} \frac{\partial a_i^*}{\partial a_i'} \\ \frac{\partial \rho}{\partial a_i''} = \frac{\partial \rho}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial a_i''} + \frac{\partial \rho}{\partial a_i^*} \frac{\partial a_i^*}{\partial a_i''} \end{cases} \quad (5-9-116)$$

计算  $a_i^* = a_i' - ja_i''$  得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial a_i'} &= 1 & \frac{\partial a_i}{\partial a_i''} &= j \\ \frac{\partial a_i^*}{\partial a_i'} &= 1 & \frac{\partial a_i^*}{\partial a_i''} &= -j \end{aligned}$$

代入式(5-9-116)得到

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial a_i'} = \frac{\partial \rho}{\partial a_i} + \frac{\partial \rho}{\partial a_i^*} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial a_i''} = j \left( \frac{\partial \rho}{\partial a_i} - \frac{\partial \rho}{\partial a_i^*} \right) = 0 \end{cases} \quad (5-9-117)$$

很明显,式(5-9-117)等价于

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial a_i} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial a_i^*} = 0 \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5-9-118)$$

注意到,式(5-9-118)是解析函数的复导数,现在把 Rayleigh 商式写成

$$\rho = \frac{N}{D} = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j^* a_k A_{jk}}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j^* a_k B_{jk}} \quad (5-9-119)$$

于是有

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_i} = \frac{1}{D^2} \left\{ D \sum_{j=1}^n a_j^* A_{ji} - N \sum_{j=1}^n a_j^* B_{ji} \right\} = 0 \quad (5-9-120)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_i^*} = \frac{1}{D^2} \left\{ D \sum_{k=1}^n A_{ik} a_k - N \sum_{k=1}^n B_{ik} a_k \right\} = 0 \quad (5-9-121)$$

可以证明式(5-9-120)和式(5-9-121)两式等价,这里考虑式(5-9-121)有

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} a_k - \frac{N}{D} \sum_{k=1}^n B_{ik} a_k = 0$$

即在极值的条件下,Rayleigh 商式广义本征值满足

$$\mathbf{Aa} = \rho \mathbf{Ba}$$

[例 5] 算子  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ 。研究本征值泛函:  $\lambda(u) = \frac{\langle u, L(u) \rangle}{\langle u, u \rangle}$ 。

设

$$u = \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i$$

则可把

$$\lambda(\alpha) = \frac{\alpha^T A \alpha}{\alpha^T B \alpha} \quad (5-9-122)$$

的 Rayleigh 商式(广义本征值泛函)问题, 其中

$$\begin{cases} a_{ij} = \langle u_i, L(u_j) \rangle \\ b_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle \end{cases} \quad (5-9-123)$$

现具体设

$$u_i = x^i (1-x) \quad (5-9-124)$$

采用

$$\det \{A - \lambda B\} = 0 \quad (5-9-125)$$

具体给出其变分极值。

[解] 分三种情况进行讨论。

情况 1:  $N=1$

$$\begin{aligned} u_1 &= x(1-x) = x - x^2 \\ L(u_1) &= 2 \\ \langle u_1, u_1 \rangle &= \int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \int_0^1 (x^2 + x^4 - 2x^3) dx \\ &= \frac{1}{30} \\ \langle u_1, L(u_1) \rangle &= \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \frac{1}{3} \\ \lambda_1 &= 10 \end{aligned}$$

情况 2:  $N=2$

$$\begin{aligned} u_2 &= x^2(1-x) = x^2 - x^3 \\ L(u_2) &= 6x - 2 \\ \langle u_2, u_2 \rangle &= \int_0^1 (x^2 - x^3)^2 dx = \int_0^1 (x^4 + x^6 - 2x^5) dx \\ &= \frac{1}{105} \\ \langle u_1, u_2 \rangle &= \langle u_2, u_1 \rangle = \int_0^1 (x - x^2)(x^2 - x^3) dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 2x^4 + x^5) dx = \frac{1}{60} \\ \langle u_1, L(u_2) \rangle &= \langle u_2, L(u_1) \rangle = \int_0^1 2(x - x^2)(3x - 1) dx \\ &= 2 \int_0^1 (4x^2 - 3x^3 - x) dx = \frac{1}{6} \\ \langle u_2, L(u_2) \rangle &= \int_0^1 (x^2 - x^3)(6x - 2) dx \\ &= 2 \int_0^1 (-x^2 + 4x^3 - 3x^4) dx = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

于是可写出

$$\lambda(u) = \frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{A} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^\top \mathbf{B} \mathbf{u}}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{60} & \frac{1}{105} \end{bmatrix}$$

对应广义本征值泛函  $\lambda(u)$  的变分极值可写出

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{30}\lambda & \frac{1}{6} - \frac{1}{60}\lambda \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{60}\lambda & \frac{2}{15} - \frac{\lambda}{105} \end{bmatrix} = 0$$

对应本征方程

$$\lambda^2 - 52\lambda + 420 = 0$$

也即

$$(\lambda - 10)(\lambda - 42) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 42 \end{cases}$$

情况 3:  $N=3$

$$u_3 = x^3(1-x) = x^3 - x^4$$

$$L(u_3) = 12x^2 - 6x$$

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_3 \rangle &= \int_0^1 (x - x^2)(x^3 - x^4) dx \\ &= \int_0^1 (x^4 - 2x^5 + x^6) dx = \frac{1}{105} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u_2, u_3 \rangle &= \int_0^1 (x^2 - x^3)(x^3 - x^4) dx \\ &= \int_0^1 (x^5 - 2x^6 + x^7) dx = \frac{1}{168} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u_3, u_3 \rangle &= \int_0^1 (x^3 - x^4)^2 dx \\ &= \int_0^1 (x^6 - 2x^7 + x^8) dx = \frac{1}{252} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u_1, L(u_3) \rangle &= 6 \int_0^1 (2x^2 - x)(x^3 - x^4) dx \\ &= 6 \int_0^1 (-x^2 + 3x^3 - 2x^4) dx = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\langle u_2, L(u_3) \rangle = 6 \int_0^1 (2x^2 - x)(x^2 - x^3) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= 6 \int_0^1 (-x^3 + 3x^4 - 2x^5) dx = \frac{1}{10} \\
 \langle u_3, L(u_3) \rangle &= 6 \int_0^1 (2x^2 - x)(x^3 - x^4) dx \\
 &= 6 \int_0^1 (-x^4 + 3x^5 - 2x^6) dx = \frac{6}{70}
 \end{aligned}$$

与情况 2 类似, 写出

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{6}{70} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{105} \\ \frac{1}{60} & \frac{1}{105} & \frac{1}{168} \\ \frac{1}{105} & \frac{1}{168} & \frac{1}{252} \end{bmatrix}$$

对应行列式为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{30} & \frac{1}{6} - \frac{\lambda}{60} & \frac{1}{10} - \frac{\lambda}{105} \\ \frac{1}{6} - \frac{\lambda}{60} & \frac{2}{15} - \frac{\lambda}{105} & \frac{1}{10} - \frac{\lambda}{168} \\ \frac{1}{10} - \frac{\lambda}{105} & \frac{1}{10} - \frac{\lambda}{168} & \frac{6}{70} - \frac{\lambda}{252} \end{bmatrix} = 0$$

由此, 可得本征值数值结果如下表 5-9-1 所示。

表 5-9-1 不同 N 对应的本征值数值解

	N=4	N=5	N=10
$\lambda_1$	9.869 750	9.869 604	9.869 604
$\lambda_2$	39.501 553	39.501 553	39.478 418
$\lambda_3$	102.130 250	89.173 624	88.826 449
$\lambda_4$	200.498 447	200.498 447	157.914 040
$\lambda_5$	-	350.956 772	247.041 149
$\lambda_6$	-	-	356.633 317
$\lambda_7$	-	-	531.542 710
$\lambda_8$	-	-	725.070 863
$\lambda_9$	-	-	1 850.960 399
$\lambda_{10}$	-	-	2 547.989 284

### 3. 阵列增益最优化

作为 Rayleigh 商式的实际应用,下面主要介绍 D. K. Cheng 的研究结果<sup>[1]</sup>。一般天线阵列的增益  $G$  可以写为

$$G = \frac{|E(\theta_0, \varphi_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |E(\theta, \varphi)|^2 g(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta} \quad (5-9-126)$$

其中,  $g(\theta, \varphi)$  为单元功率方向图,设每个单元方向图因子均相同。

式(5-9-126)给出了  $G(\theta_0, \varphi_0)$  方向的功率增益。

$$E(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N I_n \exp \{j(\varphi_n + kr_n \cos \alpha_n)\} \quad (5-9-127)$$

式中,  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $I_n$  为正实数表示振幅;  $\varphi_n$  为电流  $n$  单元的相位;  $kr_n \cos \alpha_n$  为阵差。

单元方向为

$$\cos \varphi_n \sin \theta_n \hat{x} + \sin \varphi_n \sin \theta_n \hat{y} + \cos \theta_n \hat{z}$$

辐射方向为

$$\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

因此

$$\cos \alpha_n = \sin \theta \sin \theta_n \cos(\varphi - \varphi_n) + \cos \theta \cos \theta_n \quad (5-9-128)$$

具体阵如图 5-9-12 所示。

现在假定电流矩阵为

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \exp(j\varphi_1) \\ I_2 \exp(j\varphi_2) \\ \vdots \\ I_n \exp(j\varphi_n) \end{bmatrix} \quad (5-9-129)$$

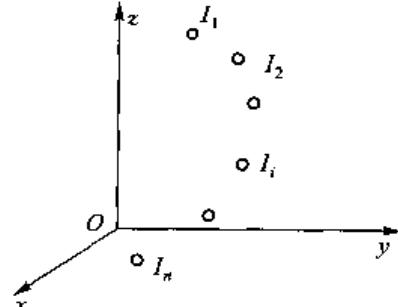


图 5-9-12 具有相同单元方向  
图因子的  $n$  元天线阵列

这样,可以写出

$$\begin{aligned} |E(\theta_0, \varphi_0)|^2 &= \left| \sum_{n=1}^N I_n \exp \{j(\varphi_n + kr_n \cos \alpha_{n0})\} \right|^2 \\ &= \left( \sum_{n=1}^N I_n \exp \{j(\varphi_n + jkr_n \cos \alpha_{n0})\} \right) \left( \sum_{m=1}^N I_m^* \exp \{j(\varphi_m + kr_m \cos \alpha_{m0})\} \right)^* \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N I_n^* I_m \exp \{j[(\varphi_n - \varphi_m) + k(r_n \cos \alpha_{n0} - r_m \cos \alpha_{m0})]\} \end{aligned} \quad (5-9-130)$$

再引入阵差因子  $\epsilon$  有

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \exp(-jkr_1 \cos \alpha_{10}) \\ \exp(-jkr_2 \cos \alpha_{20}) \\ \vdots \\ \exp(-jkr_n \cos \alpha_{n0}) \end{bmatrix} \quad (5-9-131)$$

把  $n \times n$  阶矩阵  $A$  定义为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \exp(-jkr_1 \cos \alpha_{10}) \\ \exp(-jkr_2 \cos \alpha_{20}) \\ \vdots \\ \exp(-jkr_n \cos \alpha_{n0}) \\ \cdots \exp(jkr_n \cos \alpha_{n0}) \end{bmatrix} [\exp(jkr_1 \cos \alpha_{10}), \exp(jkr_2 \cos \alpha_{20}), \dots, \exp(jkr_n \cos \alpha_{n0})] \quad (5-9-132)$$

$= \mathbf{e} \mathbf{e}^\top$

于是分子即写成

$$|E(\theta_0, \varphi_0)|^2 = \mathbf{I}^\top \mathbf{A} \mathbf{I} \quad (5-9-133)$$

计算  $|E(\theta_0, \varphi_0)|^2 \geq 0$ , 可知  $\mathbf{A}$  是半正定的 Hermite 二次型, 类似地, 再引入  $\mathbf{B}$  矩阵到分母中, 令  $B_{mn}$  元素为

$$B_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi g(\theta, \varphi) \exp\{-jk(r_m \cos \alpha_m - r_n \cos \alpha_n)\} \sin \theta d\theta \quad (5-9-134)$$

则分母有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |E(\theta, \varphi)|^2 g(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N I_m^* e^{j\varphi_m} I_n e^{j\varphi_n} \left( \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi g(\theta, \varphi) \exp\{-jk(r_m \cos \alpha_m - r_n \cos \alpha_n)\} \sin \theta d\theta \right) = \mathbf{I}^\top \mathbf{B} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (5-9-135)$$

矩阵  $\mathbf{B}$  是正定 Hermite 二次型, 这也等价于要证明: 对任何非零的  $\mathbf{x}$  有

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{B} \mathbf{x} > 0 \quad (5-9-136)$$

[证明] 很易写出

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\top \mathbf{B} \mathbf{x} &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N x_m^* B_{mn} x_n \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi g(\theta, \varphi) \sin \theta x_m^* x_n \\ &\quad \exp\{-jk(r_m \cos \alpha_m - r_n \cos \alpha_n)\} d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi g(\theta, \varphi) \left| \sum_{n=1}^N x_n \exp(jr_n \cos \alpha_n) \right|^2 \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (5-9-137)$$

由于  $\mathbf{x}$  为任意非零矢量, 有

$$\left| \sum_{n=1}^N x_n \exp(jr_n \cos \alpha_n) \right|^2 > 0 \quad (5-9-138)$$

在  $\theta \in (0, \pi)$  域内

$$\sin \theta > 0 \quad (5-9-139)$$

而  $g(\theta, \varphi)$  表示单元功率方向图因子, 不小于 0, 且不会处处为 0, 即式(5-9-137)积分为正, 式(5-9-136)成立, 证明了  $\mathbf{B}$  的正定性。

现在可以把天线阵列  $G$  写成 Rayleigh 商式形式, 为

$$G(I) = \frac{\mathbf{I}^\top \mathbf{A} \mathbf{I}}{\mathbf{I}^\top \mathbf{B} \mathbf{I}} \quad (5-9-140)$$

工程中最感兴趣的问题是  $I$  为何种条件时, 可获得  $G_{\max}$ , 也即阵列增益最优化。

[预备定理] 若令  $A$  和  $B$  分别是  $m \times n$  和  $n \times m$  矩阵, 则下式成立

$$(-1)^{m-n} \rho^n \det \{AB - \rho I_m\} = \rho^m \det \{BA - \rho I_n\} \quad (5-9-141)$$

其中,  $I_m$  和  $I_n$  分别是  $m$  阶和  $n$  阶单位矩阵。

[证明] 先列出如下恒等式

$$\begin{bmatrix} AB - \rho I_m & A \\ 0 & \rho I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho I_m & A \\ \rho B & \rho I_n \end{bmatrix} \quad (5-9-142)$$

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho I_m & A \\ 0 & BA - \rho I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho I_m & A \\ \rho B & \rho I_n \end{bmatrix} \quad (5-9-143)$$

式(5-9-143)中各元素均表示分块矩阵, 很易给出

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} AB - \rho I_m & A \\ 0 & \rho I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix} \right\} = \det \left\{ \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho I_m & A \\ 0 & BA - \rho I_n \end{bmatrix} \right\} \quad (5-9-144)$$

已经知道, 对于方阵  $M$  和  $N$  有

$$\det \{MN\} = \det M \det N \quad (5-9-145)$$

所以得到

$$\det \begin{bmatrix} AB - \rho I_m & A \\ 0 & \rho I_n \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & -I_n \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \rho I_m & A \\ 0 & BA - \rho I_n \end{bmatrix} \quad (5-9-146)$$

注意到

$$\det \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix} = \det[-I_m] \det[I_n] = (-1)^m$$

$$\det \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & -I_n \end{bmatrix} = \det[I_m] \det[-I_n] = (-1)^n$$

$$\det \begin{bmatrix} AB - \rho I_m & A \\ 0 & \rho I_n \end{bmatrix} = \det(AB - \rho I_m) \det(\rho I_n) = \rho^m \det(AB - \rho I_m)$$

$$\det \begin{bmatrix} \rho I_m & A \\ 0 & BA - \rho I_n \end{bmatrix} = \det(\rho I_m) \det(BA - \rho I_n) = \rho^m \det(BA - \rho I_n)$$

计算式(5-9-146)即证得预备定理式(5-9-141)。现在, 把预备定理结果用于 Rayleigh 商式给出天线阵列的增益  $G$  最优化。

[天线阵列增益  $G$  最大化定理]

在天线阵列增益的 Rayleigh 商式

$$G(x) = \frac{\mathbf{I}^+ \mathbf{A} \mathbf{I}}{\mathbf{I}^+ \mathbf{B} \mathbf{I}}$$

中, 若  $\mathbf{A} = \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^\top$ , 且  $\boldsymbol{\varepsilon}$  是  $n \times 1$  的列向量, 则

$$G_{\max} = \boldsymbol{\varepsilon}^\top \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5-9-147)$$

对应的电流分布

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5-9-148)$$

[证明] Rayleigh 商式的极值定理表明,  $\mathbf{G}$  的变分最大值应满足

$$\det \{\mathbf{A} - \mathbf{GB}\} = 0 \quad (5-9-149)$$

因为  $\mathbf{B}$  非异, 可知

$$\det \{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{GB}^{-1} \mathbf{B}\} = 0 \quad (5-9-150)$$

代入  $\mathbf{A} = \mathbf{ee}^+$  条件有

$$\det \{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{ee}^+ - \mathbf{GI}_n\} = 0$$

应用预备定理, 把  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}$  看作一整体矩阵, 而  $\mathbf{e}^+$  看作另一整体矩阵,  $m=1$ , 得到

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-m} \rho^{n-1} \det \{\mathbf{e}^+ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} - \mathbf{GI}_1\} \\ & = \rho \det \{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{ee}^+ - \mathbf{GI}_n\} \end{aligned} \quad (5-9-151)$$

所以有

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-m} \rho^{n-1} \det \{\mathbf{e}^+ \mathbf{B} \mathbf{e} - \mathbf{GI}_1\} \\ & = \det \{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{ee}^+ - \mathbf{GI}_n\} = 0 \end{aligned} \quad (5-9-152)$$

也即

$$\rho^{n-1} \det \{\mathbf{e}^+ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} - \mathbf{GI}_1\} = 0 \quad (5-9-153)$$

可是, 天线阵列增益  $G$  的广义本征方程(也称规则法)共  $n$  个根中, 只有一个非 0 本征值即

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}^+ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} \quad (5-9-154)$$

现在, 要证明  $G > 0$ , 则即为最大增益。

设  $\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}$  为非零向量, 也即

$$\mathbf{e} = \mathbf{Bx}$$

$$\mathbf{e}^+ = \mathbf{x}^+ \mathbf{B}^+$$

由于  $\mathbf{B}$  是 Hermite 矩阵, 故有  $\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}$ , 则

进一步得到

$$\mathbf{e}^+ = \mathbf{x}^+ \mathbf{B}$$

已知

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}^+ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} = \mathbf{x}^+ \mathbf{Bx} > 0$$

可见式(5-9-147)成立, 确为  $G_{\max}$ 。

下面进一步证明本征矢  $\mathbf{I}_n = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}$ 。因为若此式成立, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{AI}_n &= \mathbf{ee}^+ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} \\ &= \mathbf{eG} = \mathbf{GBB}^{-1} \mathbf{e} \\ &= \mathbf{GBI}_n \end{aligned}$$

即满足广义本征方程式(5-9-149)。

这一方法的应用相当普遍。因为它可以适合任何天线时间、不等间距、非各向同性单元的阵列, 而且能解决各种天线阵列的增益  $G$  最优化问题。

作为例子, 研究等间距各向同性单元的 8 元端射阵( $\theta_0 = 0$ ), 单元以中心线对称配置。习惯上, 为了增加  $G$  采用 Hansen-Woodyard(汉

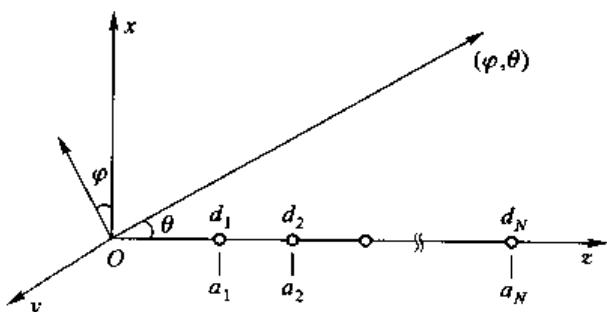


图 5-9-13  $N$  元等间距线阵

森-伍德雅德)条件,但这里采用的理论显然又使增益有明显提高,线阵如图5-9-13所示,结果由表5-9-2给出。

表5-9-2 等间距各向同性单元的8元端射阵增益最优化

$N=8$ 关于中心线对称配置				
$d=0.425\lambda \quad G_{\max}=22.0$				
原始 $G=12.5$ (等振幅)				
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
振幅	1.00	1.32	1.56	1.69
相位	0°	-170°	-341°	-514°
$N=8$ 关于中心线对称配置				
$d=0.95\lambda \quad G_{\max}=10.1$				
原始 $G=9.8$ (等振幅)				
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
振幅	1.00	1.07	1.12	1.15
相位	0°	-345°	-691°	-1037°

### 参 考 文 献

- [1] D. K. Cheng, F. L. Tseng. Gain optimization for Arbitrarg Antoenna Arrays. IEEE Trans. AP, Nov 1965, 13:973-974.

## 模式匹配法 Method of Mode Matching

计算机和计算技术的飞速发展,给人类和社会带来了革命性的变化。以前无法解决的复杂微波场论问题,现在已有了成熟的数值分析方法和成套的商业软件。当然,这一事实也带来若干负面效应,即不少人已淡化和轻视基础理论和基本概念,他们甚至连宽微带还是窄微带的特性阻抗究竟哪个更大这类重要问题都难以作出正确判断。由此可见,对于大多数准备进入微波领域的学习者,建立基础概念和掌握基本方法显得特别重要。

在 20 世纪 40、50 年代,以美国 MIT 辐射实验室为代表的一流专家群体为实现雷达及相关技术而发展出来的本征模式匹配法是场论基本方法的主要核心之一,且至今仍有着重要的意义。

## 一、模式匹配法概念

模式匹配法主要基于下述的思想:

①任何一个规则无耗的传输系统或者系统,它们的内部只可能存在无穷多个离散频率的本征模。这些本征模的总体构成完备系。如果把传输系统的横向截面广义地看作一个二维微波谐振腔,那么本征模理论在更高的层面和角度上统一起来,就这个意义上来说问题,模式匹配法也即本征函数法,具体如图 5-10-1 所示。

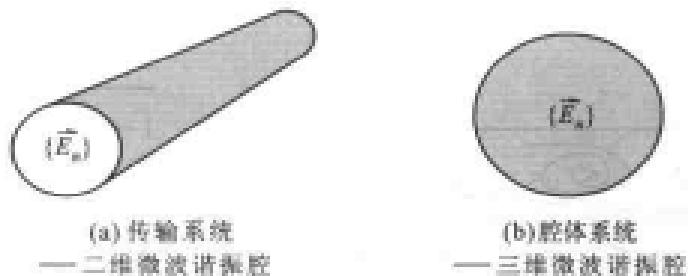


图 5-10-1 本征模理论

②在大多数实用情况中,均匀传输系统中传输单一模式——主模(如矩形波导中的  $TE_{10}$  模)。也即,除主模而外,其他模式均因不满足传输条件而构成凋落模式,并随距离增加而迅速衰减。现在,假设在均匀传输系统中突然遇到不均匀性或不连续性,广义地说遇到了边界条件的变化。十分明显,在这种情况下,单一模式已经不能满足突变处的边界条件。

③模式匹配法的主要思想即假定突变处左边场为人射主模,反射主模加上高阶模;右边场为传输主模加上高阶模,并在突变边界条件处使两边场相互匹配,从而满足场的连续性方程,具体如图 5-10-2 所示。

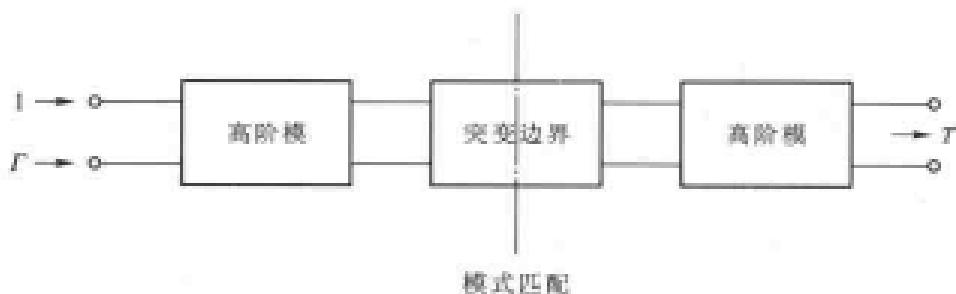


图 5-10-2 模式匹配法

④应该指出:左边和右边的模式相互匹配并没有给问题的解决带来本质的变化,因为在中间——突变边界上的场依然未知,所以模式匹配法的关键之一是要假定中间场,例如采用变分理

论,构成泛函稳定表达式。

⑤ 由上述讨论可知,不连续性(边界突变)影响主模传输的最终结果是在突变处附近产生了很多为了满足边界条件而存在的高阶模,如图 5-10-3 所示。



图 5-10-3 不连续性影响主模传输的过程

需要注意,高阶模也是一种物质,它的最大作用在于影响原主模传输,而且,这一影响有两种可能:既可能不利于传输,造成主模强反射(例如膜片);也可能改善传输,使主模在复杂边界条件下也能顺利通过(例如谐振窗),图 5-10-4 给出了高阶模影响主模传输的示意图。

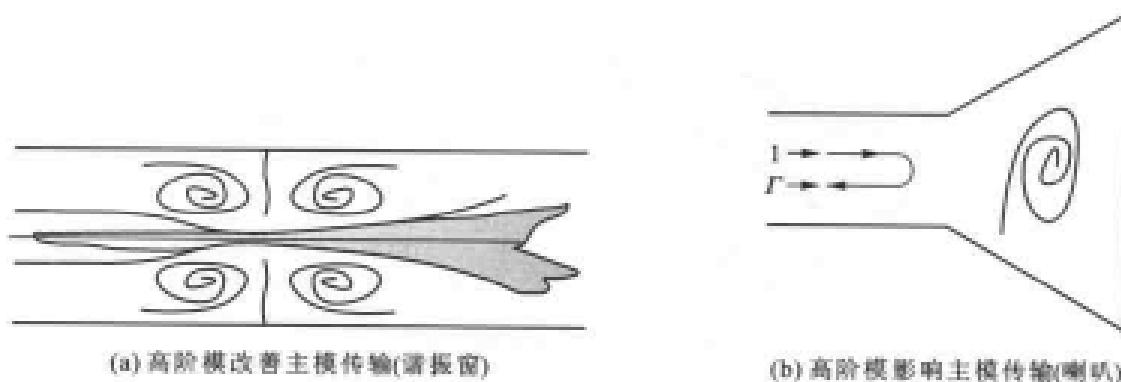


图 5-10-4 高阶模分主模传输

## 二、电容性膜片

本节,将以电容性膜片作为典型例子,论述模式匹配法和变分理论。首先,研究如图 5-10-5 所示的无限宽平行板微波传输线上的电容性膜片。

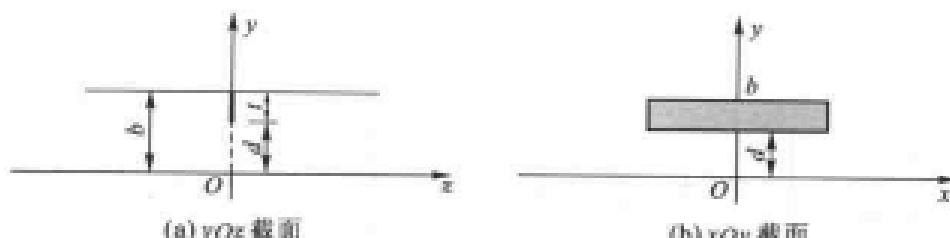


图 5-10-5 平行板微波传输线上的电容性膜片

考虑到平行板微波传输线在  $x$  方向均匀变化,所有波型均与  $x$  无关。而  $z < 0$  处入射的主模又与  $y$  无关,于是写出

$$\vec{E}_r = a_0 e^{-j k_r z} \hat{y} \quad (5-10-1)$$

容易给出  $z < 0$  处左边电磁场表示式:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y = a_0 [\exp(-jk_0 z) + \Gamma \exp(jk_0 z)] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp(\gamma_n z) \end{array} \right. \quad (5-10-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = -a_0 Y_0 [\exp(-jk_0 z) - \Gamma \exp(jk_0 z)] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Y_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp(\gamma_n z) \end{array} \right. \quad (5-10-3)$$

同样,右边电磁场的表达式:在  $z>0$  处有

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y = Ta_0 \exp(-jk_0 z) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp(-\gamma_n z) \end{array} \right. \quad (5-10-4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = -Ta_0 Y_0 \exp(-jk_0 z) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n Y_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp(-\gamma_n z) \end{array} \right. \quad (5-10-5)$$

在式中,  $\Gamma$  是传输主模的反射系数,而  $T$  则是相应的传输系数。 $Y_0$  表示主模波型导纳,有

$$Y_0 = \frac{1}{\eta} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{u_0}} \quad (5-10-6)$$

而  $Y_n$  则是高阶模的波型导纳,为

$$Y_n = \frac{jk_0}{\gamma_n} \quad (n>0) \quad (5-10-7)$$

其中,  $\gamma_n^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k_0^2$ 。当高阶模为调落模式时,  $\gamma_n$  为实数,则波型导纳呈现为电纳。

模式匹配法的关键是在突变面接口(对于本问题即  $z=0$  所对应的横截面)令左右场相互匹配,由此满足口径面上的连续性方程。

前面已经论述,由式(5-10-2)~式(5-10-5)中给出的全部模式是完备的。因此,只需满足匹配条件,此解必为正确解。先写出电场  $E_y$  的匹配条件。

$$(1+\Gamma)a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = Ta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad 0 \leq y \leq b \quad (5-10-8)$$

注意到,总的横向电场  $E_y$  处于  $y \in [d, b]$  区域时即膜片区域,在左边或右边都为 0,所以式(5-10-8)适用于  $y \in [0, b]$  的全部横截面区域。

再写出磁场  $H_x$  的匹配条件

$$(1-\Gamma)a_0 Y_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n Y_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = Ta_0 Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n Y_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad 0 \leq y \leq d \quad (5-10-9)$$

式(5-10-9)所适用的区域显然与式(5-10-8)不同。切向磁场  $H_x$  在  $y \in [d, b]$  区域左右不连续,由此构成膜片上的电流。

必须指出:左右场的模式匹配并不能求出膜片所等效的电纳  $jB$ 。因为无法确定( $z=0$ )口径场究竟是什么。于是引出了变分思想——把口径场作为试探场定义为  $\epsilon(g)=0$ ,且在  $z=0$  而  $y \in [d, b]$  处的膜片上  $\epsilon(y)=0$ 。

模式匹配法的突出优点是,在规则传输系统中,各模式间相互正交(或加权正交)。特别对于本问题。平行板微波传输线的模式相当于 Fourier 序列。利用  $y \in [0, b]$  域内 Fourier 正交分析,易得

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(1+\Gamma) = Ta_0 = \frac{1}{b} \int_0^b \epsilon(y') dy' \\ a_n = b_n = \frac{2}{b} \int_0^b \epsilon(y') \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dy' \end{array} \right. \quad (5-10-10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(1+\Gamma) = Ta_0 = \frac{1}{b} \int_0^b \epsilon(y') dy' \\ a_n = b_n = \frac{2}{b} \int_0^b \epsilon(y') \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dy' \end{array} \right. \quad (5-10-11)$$

将式(5-10-9)右边的  $T$  用  $(1+\Gamma)$  取代可知

$$-2Ia_0Y_0 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n Y_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad 0 \leq y \leq d \quad (5-10-12)$$

在式(5-10-12)中计及

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{(1+\Gamma)b} \int_0^b \epsilon(y') dy' \\ a_n = \frac{2}{b} \int_0^b \epsilon(y') \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dy' \end{array} \right. \quad (5-10-13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{(1+\Gamma)b} \int_0^b \epsilon(y') dy' \\ a_n = \frac{2}{b} \int_0^b \epsilon(y') \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dy' \end{array} \right. \quad (5-10-14)$$

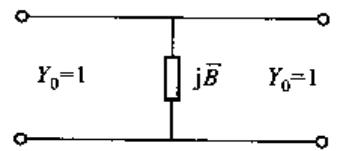
最后得到

$$-\left(\frac{2\Gamma}{1+\Gamma}\right)y_0 \int_0^b \epsilon(y') dy' = 4 \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \int_0^b \epsilon(y') \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dy' \quad 0 \leq y \leq d \quad (5-10-15)$$

现在, 把电容膜片的归一化等效电纳假设为  $j\bar{B}$ , 这也等价于令系统的特性导纳  $Y_0=1$ , 如图 5-10-6 所示。

由微波传输线理论可知反射系数

$$F = \frac{1 - \bar{Y}_{in}}{1 + \bar{Y}_{in}} = -\frac{jB}{2 + jB} \quad (5-10-16)$$



于是给出

$$j\bar{B} = -\frac{2\Gamma}{1+\Gamma} \quad (5-10-17)$$

比较式(5-10-15)和式(5-10-17)两式可以看出, 其中已包括所要求解的  $jB$ 。现在, 把式(5-10-15)两边乘以  $\epsilon(y)$ , 并在口径处做  $y \in [0, d]$  积分, 得到

$$\bar{B} = 4k_0 \frac{\int_0^d \int_0^d \epsilon(y) \epsilon(y') \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \right] dy dy'}{\left[ \int_0^d \epsilon(y) dy \right]^2} \quad (5-10-18)$$

式(5-10-18)正是根据模式匹配法要求的电容性膜片归一化等效电纳  $jB$  的变分稳定式, 其中,  $\epsilon(y)$  依然是未知的。然而变分稳定性告诉我们, 即使  $\epsilon(y)$  不太正确, 即作一阶扰动时, 所得的  $\bar{B}$  则为二阶以上扰动。这也就是说, 并不需要很精确的  $\epsilon(y)$ , 依然能得到比较好的结果。

在 1940 年~1945 年期间, 著名学者 Schrödinger(施瓦格)首先给出模式匹配变分法。具体对于式(5-10-18), 他提出变量变换, 把分子被积函数中的级数转换为一个主级数和另一个快速收敛的修正级数, 即

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \\ &= \frac{b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\gamma_n} - \frac{b}{n\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \end{aligned} \quad (5-10-19)$$

由三角公式易知

$$\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{b}(y-y')+\cos\frac{n\pi}{b}(y+y')\right] \quad (5-10-20)$$

于是级数主项可得到

$$\begin{aligned} & \frac{b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \\ & =\frac{b}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{b}(y-y')+\frac{b}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{b}(y+y') \end{aligned} \quad (5-10-21)$$

由附录IV可给出

$$\frac{b}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{b}(y-y')=-\frac{b}{2\pi}\ln\left[2\sin\frac{\pi}{2b}(y-y')\right] \quad (5-10-22)$$

$$\frac{b}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{b}(y+y')=-\frac{b}{2\pi}\ln\left[2\sin\frac{\pi}{2b}(y+y')\right] \quad (5-10-23)$$

计及式(5-10-21)有

$$\begin{aligned} & \frac{b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \\ & =-\frac{b}{2\pi}\ln\left\{4\left[\sin\frac{\pi}{2b}(y-y')\sin\frac{\pi}{2b}(y+y')\right]\right\} \end{aligned} \quad (5-10-24)$$

再由三角函数积化和差得到

$$\begin{aligned} & \frac{b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \\ & =-\frac{b}{2\pi}\ln\left\{2\left(\cos\frac{\pi y}{b}-\cos\frac{\pi y'}{b}\right)\right\} \end{aligned} \quad (5-10-25)$$

下面再引入新变量  $\theta$  和  $\theta'$ , 定义为

$$\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)=A_1+A_2\cos\theta \quad (5-10-26)$$

$$\cos\left(\frac{\pi y'}{b}\right)=A_1+A_2\cos\theta' \quad (5-10-27)$$

其中,  $A_1$  和  $A_2$  为待定常数, 规定边界条件

$$\begin{cases} y=0, & \theta=0 \\ y=d, & \theta=\pi \end{cases} \quad (5-10-28)$$

这样使  $\theta$  在  $y \in [0, d]$  域构成 Fourier 正交系, 很易求出

$$\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ A_1-A_2=\cos\left(\frac{\pi d}{b}\right) \end{cases} \quad (5-10-29)$$

最后求出

$$A_1-\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi d}{b}\right)\right]=\cos^2\left(\frac{\pi d}{2b}\right) \quad (5-10-30)$$

$$A_2=1-A_1=\sin^2\left(\frac{\pi d}{2b}\right) \quad (5-10-31)$$

把式(5-10-26)、式(5-10-27)、式(5-10-30)和式(5-10-31)四式代入式(5-10-25),最后给出

$$\begin{aligned} & \frac{b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y'\right) \\ & = -\frac{b}{2\pi} [\ln A_2 + \ln 2(\cos \theta - \cos \theta')] \\ & = -\frac{b}{\pi} \ln \left[ \sin\left(\frac{\pi d}{2b}\right) \right] + \frac{b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\theta \cos n\theta' \end{aligned} \quad (5-10-32)$$

现在的问题是式(5-10-19)右边第二项修正级数给不出一般结果。不过由于它收敛很快,可逐项给出变换且只取为数不多的项数已经足够了。例如第二项

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right) &= 2 \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) - 1 = 2(A_1 + A_2 \cos \theta)^2 - 1 \\ &= A_2^2 \cos 2\theta + 4A_1 A_2 \cos \theta + 2A_1^2 + A_2^2 - 1 \end{aligned} \quad (5-10-33)$$

由式(5-10-26),有

$$-\frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) dy = -A_2 \sin \theta d\theta \quad (5-10-34)$$

又能获得

$$\begin{aligned} dy &= \frac{b}{\pi} A_2 \csc\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin \theta d\theta \\ &= \left(\frac{dy}{d\theta}\right) d\theta \end{aligned} \quad (5-10-35)$$

于是,可以把  $\epsilon(y)dy$  变换成  $\epsilon(y)(dy/d\theta)d\theta$  的形式,进一步定义

$$F(\theta) = \epsilon(y) \left(\frac{dy}{d\theta}\right) \quad (5-10-36)$$

把自变量全部更换成  $\theta$  的函数,而各项  $\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$  则自然成为  $\cos(m\theta)$  的一个级数,其中  $m$  从 0 到  $n$ ,即有

$$\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \sum_{m=0}^n P_{nm} \cos m\theta \quad (5-10-37)$$

式(5-10-37)中  $P_{nm}$  是相应的系数,把上述变换代入式(5-10-18)得到膜片电纳变分稳定式

$$\begin{aligned} B &= \frac{4k_b b}{\pi \left[ \int_0^\pi F(\theta) d\theta \right]^2} \int_0^\pi \int_0^\pi F(\theta) F(\theta') \left[ \ln \left( \csc\left(\frac{\pi d}{2b}\right) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\theta \cos n\theta' \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi}{b\gamma_n} - \frac{1}{n} \right) \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n P_{nm} P_{np} \cos m\theta \cos p\theta' \right] d\theta d\theta' \end{aligned} \quad (5-10-38)$$

式(5-10-38)和式(5-10-18)相同的一点是它也有变分稳定性作为最简单的选择,令试探函数

$$F(\theta) = 1 \quad (5-10-39)$$

事实证明,这种选择在实用参数区域结果出乎意料地准确。由于三角函数的 Fourier 正交性,积分非零项只有常数项,即

$$\bar{B} = \frac{4k_0 b}{\pi} \left[ \ln \left( \csc \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi}{b\gamma_n} - \frac{1}{n} \right) P_m^2 \right] \quad (5-10-40)$$

上式中  $P_m^2 < 1$ , 且由于修正级数按  $n^{-3}$  快速收敛, 所以只要取很少几项即可满足要求。式 (5-10-40) 是膜片电纳的变分上界。

如果利用口径上的磁场(或膜片上的电流)则进一步可得膜片电纳的变分下界, 考虑到式 (5-10-18) 中修正级数贡献恒正, 则略去修正级数, 即为下界之一种。可设  $F(\theta)$  用三角展开, 即

$$F(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos m\theta \quad (5-10-41)$$

略去修正项的式 (5-10-38) 为

$$B = \frac{4k_0 b}{\pi C_0^2} \left[ C_0^2 \ln \left( \csc \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right) + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2}{m} \right] \quad (5-10-42)$$

为求变分极值, 设

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial C_m} = 0 \quad (5-10-43)$$

很易给出

$$C_m = 0 \quad (m > 0) \quad (5-10-44)$$

则这时的变分下界为

$$\bar{B} = \frac{4k_0 b}{\pi} \ln \left( \csc \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right) \quad (5-10-45)$$

如果进一步提高精度, 考虑一项修正级数, 则

$$\bar{B} = \frac{4k_0 b}{\pi} \left[ \ln \left( \csc \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right) + \frac{\left( \frac{\pi}{b\gamma_1} - 1 \right) A_1^2}{1 + \left( \frac{\pi}{b\gamma_1} \right) A_2^2} \right] \quad (5-10-46)$$

这是膜片电纳  $\bar{B}$  较精确的变分下界。

图 5-10-7 所示曲线给出了式 (5-10-40) 和式 (5-10-46) 的变分上界和变分下界。其中

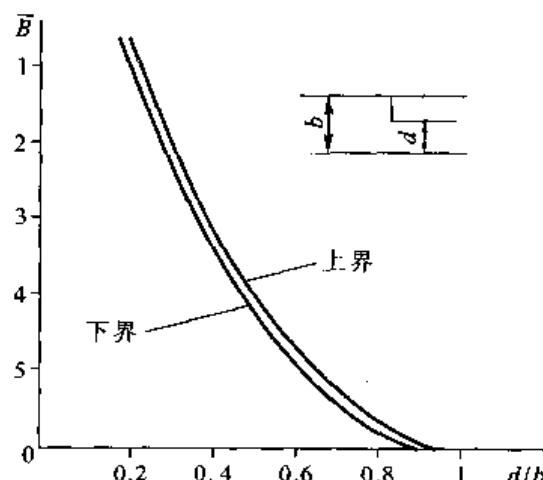


图 5-10-7 归一化电容性膜片电纳  $\bar{B}$

$(b=0.4\lambda_0)$

$b = 0.4\lambda_0$ , 而式(5-10-40)中的  $P_m$  见附录Ⅲ。

### 三、矩形波导膜片

上面所讨论的场为平行板微波传输线,而实用中则以矩形波导为主,如图 5-10-8 所示。这时所要做的变换是把原平行板微波传输线参数

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 \rightarrow \beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \\ \gamma_s^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k_0^2 \end{array} \right. \quad (5-10-47)$$

$$(5-10-48)$$

即可,于是得到

$$B = \frac{8b}{\lambda_0} \left\{ \ln \left( \csc \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi}{b\gamma_s} - \frac{1}{n} \right) P_m^2 \right\} \quad (5-10-49)$$

是变分上界,而

$$\bar{B} = \frac{8b}{\lambda_0} \left\{ \ln \left( \csc \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right) + \frac{\left( \frac{\pi}{b\gamma_s} - 1 \right) A_1^2}{1 + \left( \frac{\pi}{b\gamma_s} - 1 \right) A_1^2} \right\} \quad (5-10-50)$$

则为矩形波导膜片电纳的变分下界。

进一步把结果推广到矩形波导对称电容膜片,如图 5-10-9 所示,计及对称性,只须把式(5-10-49)和式(5-10-50)中

$$\left\{ \begin{array}{l} b \rightarrow \frac{1}{2}b \\ d \rightarrow \frac{1}{2}d \end{array} \right. \quad (5-10-51)$$

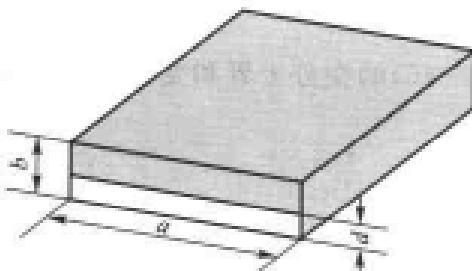


图 5-10-8 矩形波导膜片

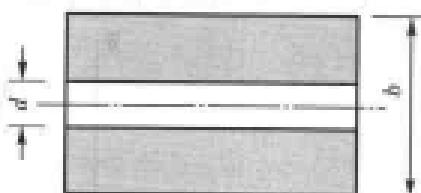


图 5-10-9 矩形波导中对称电容膜片

即可,于是有这种情况下

$$\gamma_s = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{b}\right)^2 - k_0^2} \quad (5-10-52)$$

最后结果为

$$B = \frac{4b}{\lambda_0} \left\{ \ln \left( \csc \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\pi}{b\gamma_s} - \frac{1}{n} \right) P_m^2 \right\} \quad (5-10-53)$$

是变分上界,而

$$\bar{B} = \frac{4b}{\lambda_g} \left\{ \ln \left( \csc \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right) + \frac{\left( \frac{2\pi}{b\gamma_1} - 1 \right) A_1^2}{1 + \left( \frac{2\pi}{b\gamma_1} - 1 \right) A_2^2} \right\} \quad (5-10-54)$$

为对称膜片电纳的变分下界。

## 附录 I APPENDIX I

### 膜片电纳的保角变换法

作为各种方法的相互对比,这里给出膜片电纳  $\bar{B}$  的保角变换法。众所周知,保角变换的前提是满足 Laplace(拉普拉斯)方程,因此所求的必定是静场电容  $C$  主项所对应的归一化电纳  $B$ 。研究二维平行板微波传输线,如图 5-10-10 所示。

$$\left( \alpha = \frac{d}{b} \right)$$

为求解这一问题,把  $z$  平面和  $z_2$  平面同时向  $z_1$  平面作保角变换,即

$$\begin{cases} z_1 = k \sin \left( \frac{\pi}{b} z \right) \\ z_2 = \sin \left( \frac{\pi}{b} z_2 \right) \end{cases} \quad (5-10-55)$$

$$(5-10-56)$$

很易得到

$$k \sin \left( \frac{\pi z}{b} \right) = \sin \left( \frac{\pi z_2}{b} \right) \quad (5-10-57)$$

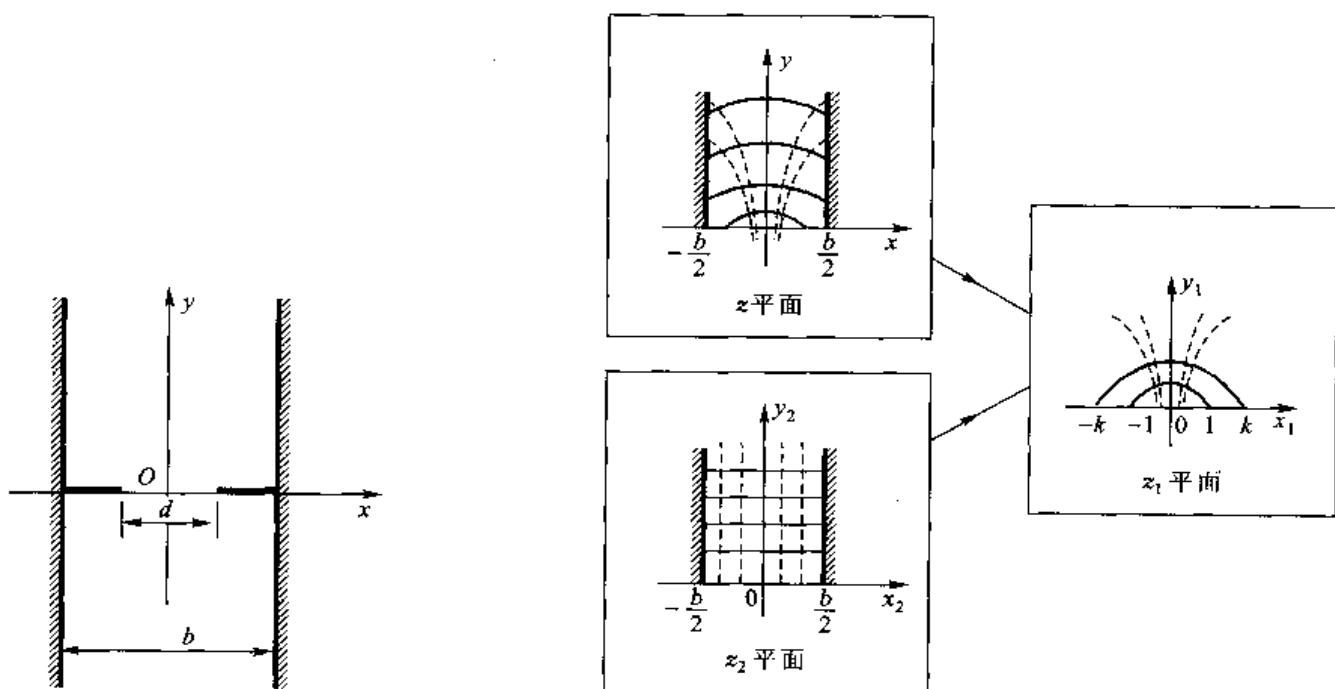


图 5-10-10 二维平行板微波  
传输线中对称膜片

图 5-10-11  $z$  平面和  $z_2$  平面同时向  $z_1$  平面变换

注意到变换到  $z_2$  平面之后, 已成为均匀场, 如图 5-10-11 所示。

相互变换的对应点如表 5-10-1 所示。

表 5-10-1  $z-z_1, z_2-z_1$  保角变换对应点

$z$	$z_1$	$\alpha_s$	$z_2$	$z_1$	$\alpha_r$
$\frac{b}{2}$	$k$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{b}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{b}{2}$	$-k$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{b}{2}$	-1	$\frac{\pi}{2}$

\* 表中,  $\alpha_s$  表示变换时多角形的转角。

利用变换点条件

$$z=\frac{1}{2}ab \text{ 时 } z_1=1 \quad (5-10-58)$$

于是有

$$\frac{\pi}{2} + \frac{ab}{2} = \frac{b}{2} \arcsin(k) \quad (5-10-59)$$

可得

$$k = \csc\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \quad (5-10-60)$$

为了求出膜片电容转化成均匀平板电容中所包含的贡献, 进一步考虑 $\infty$ 条件: 不论是  $z$  平面还是  $z_2$  平面当  $y \rightarrow \infty$  和对应  $y_2 \rightarrow \infty$  时都趋向均匀场, 由于  $z$  平面在  $y$  较小时发生电力线弯曲, 又在均匀场时

$$y_2 = y + \delta \quad (5-10-61)$$

这一块  $\delta$  正是膜片电容(计及问题有  $y \rightarrow \pm\infty$  两边是一半), 考虑 $\infty$  条件为

$$k \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{b}(iy)} - e^{-j\frac{\pi}{b}(iy)}}{2j} = \frac{e^{j\frac{\pi}{b}(iy_2)} - e^{-j\frac{\pi}{b}(iy_2)}}{2j} \quad (5-10-62)$$

无穷条件时可略去  $e^{\frac{\pi}{b}y}$  和  $e^{-\frac{\pi}{b}y_2}$  两项, 两边取对数

$$\ln k + \frac{\pi}{b}y = \frac{\pi}{b}y_2 \quad (5-10-63)$$

再注意到式(5-10-61), 得到

$$\delta = \frac{b}{\pi} \ln \left[ \csc\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right] \quad (5-10-64)$$

考虑  $y = \pm\infty$  双边电容的影响, 给出

$$C = \frac{2\epsilon\delta}{b} = \frac{2\epsilon}{\pi} \ln \left[ \csc\left(\frac{\pi d}{2b}\right) \right] \quad (5-10-65)$$

现在进一步研究矩形波导膜片的归一化导纳

$$B = \omega C / Y_0 = \omega CZ_0 \quad (5-10-66)$$

且特性阻抗  $Z_0$  为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda_c b}{\lambda_g a} \quad (5-10-67)$$

于是矩形波导膜片电容

$$C = \frac{2\epsilon_0}{\pi} \ln \left[ \csc \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right] \quad (5-10-68)$$

而膜片归一化电纳为

$$B = \frac{4b}{\lambda_s} \ln \left[ \csc \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right] \quad (5-10-69)$$

它即是问题的静场贡献主项。

## 附录 II APPENDIX II

### 膜片电纳的 Rayleigh 商式解

重新写出式(5-10-18)基本变分公式

$$B = 4k_0 \frac{\int_0^d \int_0^d \epsilon(y)\epsilon(y') \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y'\right) \right] dy dy'}{\left[ \int_0^d \epsilon(y) dy \right]^2} \quad (5-10-70)$$

$$\text{令 } G(y, y') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y'\right) \quad (5-10-71)$$

把  $y \in [0, d]$  离散化

$$y_1 < y_2 < y_3 \cdots < y_m = d \quad (5-10-72)$$

设列矩阵

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon(y_1) \Delta y_1 \\ \epsilon(y_2) \Delta y_2 \\ \vdots \\ \epsilon(y_m) \Delta y_m \end{bmatrix} \quad (5-10-73)$$

$$\mathbf{G} = [G_y] \quad (5-10-74)$$

其中

$$G_y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y_i\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y_j\right) \quad (5-10-75)$$

再次写出  $B$  的 Rayleigh 商式

$$\bar{B} = 4k_0 \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{E} \mathbf{e}} \quad (5-10-76)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{H}^T$$

分子、分母均为二次型，且

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} > 0 \quad (5-10-77)$$

是正定二次型。由 5-9 节可知唯一的最优解是闭式

$$\text{Opt} \bar{B} = 4k_0 (\mathbf{I}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{I}) \quad (5-10-78)$$

其中 Opt 是表示最优值的符号；

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-10-79)$$

式(5-10-78)即膜片电纳的 Rayleigh 商式解。它的最大好处是只要已知  $G, \epsilon(y)$  的函数形式无须知道。当然, 实际运算时  $G_y$  中的  $n$  要做有限截断。

要进一步改善收敛, 结合附录 I 的保角变换法结果可以给出膜片导纳  $\bar{B}$  的改进公式

$$\text{Opt}\bar{B} = \frac{4k_0 b}{\pi} \ln \left[ \csc \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right] + 4k_0 (\mathbf{I}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{I}) \quad (5-10-80)$$

其中

$$\mathbf{H} = [H_y] \quad (5-10-81)$$

而

$$H_y = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\gamma_n} - \frac{b}{n\pi} \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y_i \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y_j \right) \quad (5-10-82)$$

当然, 具体计算时也做有限截断。不过, 式(5-10-82)只需少数几项, 即能获得较精确的结果。

### 附录 III APPENDIX III

#### $P_{n0}$ 系 数

已知

$$\cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) = \sum_{m=0}^n P_{nm} \cos m\theta \quad (5-10-83)$$

其中

$$y = A_1 + A_2 \cos \theta \quad (5-10-84)$$

可以采用 Chebyshev 正逆多项式解决这个问题, 即

$$\cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) = T_n \left( \cos \frac{\pi y}{b} \right) = T_n(A_1 + A_2 \cos \theta) \quad (5-10-85)$$

而 Chebyshev 正逆多项式是按  $\cos \left( \frac{\pi y}{b} \right)$  的幂级数排列的, 如表 5-10-2 所示。

表 5-10-2 Chebyshev 正逆多项式

$u = \cos x$	$T_n(u) = T_n(\cos x) = \cos nx$
$T_1(u)$	$u$
$T_2(u)$	$2u^2 - 1$
$T_3(u)$	$4u^3 - 3u$
$T_4(u)$	$8u^4 - 8u^2 + 1$
$T_5(u)$	$16u^5 - 20u^3 + 5u$
$T_6(u)$	$32u^6 - 48u^4 + 18u^2 - 1$
$\vdots$	$\vdots$
$T_n(u)$	$2uT_{n-1} - T_{n-2}$

续表

$u = \cos x$	$T_n(u) = T_n(\cos x) = \cos nx$
$u$	$T_1(u)$
$u^2$	$\frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}$
$u^3$	$\frac{1}{4}T_3 + \frac{3}{4}T_1$
$u^4$	$\frac{1}{8}T_4 + \frac{1}{2}T_2 + \frac{3}{8}$
$u^5$	$\frac{1}{16}T_5 + \frac{5}{16}T_3 + \frac{5}{8}T_1$
$u^6$	$\frac{1}{32}T_6 + \frac{3}{16}T_4 + \frac{15}{32}T_2 + \frac{5}{16}$

情况 1:  $n=1$ 

$$\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) = A_1 + A_2 \cos \theta = \sum_{m=0}^1 P_{1m} \cos m\theta \quad (5-10-86)$$

$$P_{10} = A_1 \quad (5-10-87)$$

情况 2:  $n=2$ 

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) &= T_2 \left( \cos \frac{\pi y}{b} \right) = 2(A_1 + A_2 \cos \theta)^2 - 1 \\ &= (2A_1^2 - 1) + 4A_1 A_2 \cos \theta + 2A_2^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

再引用逆 Chebyshev 多项式

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \quad (5-10-88)$$

得到

$$\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) = (2A_1^2 + A_2^2 - 1) + 4A_1 A_2 \cos \theta + A_2^2 \cos 2\theta \quad (5-10-89)$$

于是有

$$P_{20} = 2A_1^2 + A_2^2 - 1 \quad (5-10-90)$$

情况 3:  $n=3$ 

$$\cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) = T_3 \left( \cos \frac{\pi y}{b} \right) = 4(A_1 + A_2 \cos \theta)^3 - 3(A_1 + A_2 \cos \theta) \quad (5-10-91)$$

展开即知

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) &= (4A_1^3 - 3A_1) + (12A_1^2 A_2 - 3A_2) \cos \theta + 3A_1 A_2^2 \cos^2 \theta + A_2^3 \cos^3 \theta \\ & \quad (5-10-92) \end{aligned}$$

计及逆变换

$$\begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \\ \cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta \end{cases} \quad (5-10-93)$$

可以写出

$$\cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) = (4A_1^3 + 6A_1 A_2^2 - 3A_1) + (12A_1^2 A_2 + 3A_2^3 - 3A_2) \cos \theta + 6A_1 A_2^2 \cos 2\theta + A_2^3 \cos 3\theta \quad (5-10-94)$$

很易得到

$$P_{30} = 4A_1^3 + 6A_1 A_2^2 - 3A_1 \quad (5-10-95)$$

情况 4:  $n=4$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) &= T_4(A_1 + A_2 \cos \theta) \\ &= 8(A_1 + A_2 \cos \theta)^4 - 8(A_1 + A_2 \cos \theta)^2 + 1 \end{aligned} \quad (5-10-96)$$

完全类似, 可推导给出

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{4\pi y}{b}\right) &= (8A_1^4 + 3A_2^4 + 24A_1^2 A_2^2 - 8A_1^2 - 4A_2^2 + 1) + (32A_1^3 A_2 - 16A_1 A_2 + 24A_1 A_2^3) \cos \theta \\ &\quad + (24A_1^2 A_2^2 - 4A_2^2 + 4A_2^4) \cos 2\theta + 8A_1 A_2^3 \cos 3\theta + A_2^4 \cos 4\theta \end{aligned} \quad (5-10-97)$$

最后得到

$$P_{40} = (8A_1^4 + 3A_2^4 + 24A_1^2 A_2^2 - 8A_1^2 - 4A_2^2 + 1) \quad (5-10-98)$$

$n=4$  对于常用的计算来说精度已经足够。

## 附录 IV APPENDIX IV

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp(jnx) = -\ln \left[ 2 \sin \frac{x}{2} \right] + j \frac{1}{2}(\pi - x)$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx) = -\ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} [\text{证明}] \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp(jnx) &= \sum_{n=1}^{\infty} j \int_{j\infty}^x \exp(jnx) dx \\ &= j \int_{j\infty}^x \sum_{n=1}^{\infty} \exp(jnx) dx \\ &= j \int_{j\infty}^x \{ \exp(jx) + \exp(jzx) + \dots \} dx \\ &= j \int_{j\infty}^x \frac{\exp(jx)}{1 - \exp(jx)} dx \\ &= -\ln [1 - \exp(jx)] \\ &= -\ln \left[ e^{j(\frac{\pi-x}{2})} + 2 \left( \frac{e^{j\frac{x}{2}} - e^{-j\frac{x}{2}}}{2j} \right) \right] \\ &= \ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) + j \frac{1}{2}(\pi - x) \end{aligned}$$

得证。



## 共形同轴线变分理论 Variational Theory of Conformal Coaxial Line

长期以来,各种新型截面同轴线的探索和研究从未间断过<sup>[1~8]</sup>。这是由于微波理论和通信技术两方面的发展和刺激,计算机和计算技术的飞速发展似乎可以把一切问题归结为数值计算。实际证明,这种看法存在一定的片面性。如果问题存在精度较高的解析闭式,那么对其性能的分析和优化就会大大加强,而且更有助于从概念上去理解各种微波传输线的特性。

众所周知,TEM模微波传输线电容C与特性阻抗Z<sub>0</sub>紧密相关,有

$$Z_0 = \frac{1}{vC} \quad (5-11-1)$$

式中,v是传播速度。因此研究电容C有着重要的意义。

本节将研究任意共形同轴线,如图5-11-1所示。所谓共形是指任何由中心发出的射线到外导体距离与到内导体距离之比等于一个常数k。文献<sup>[9]</sup>已经导出了这类问题用电位函数Φ表达的变分泛函,为

$$C = \frac{2W}{U^2} = \epsilon \frac{\iint_S (\nabla \Phi)^2 dS}{\left( \int_l \nabla \Phi \cdot d\vec{l} \right)^2} \quad (5-11-2)$$

其中,W表示静电场储能;U为内外导体的电位差。根据能量极小原理,式(5-11-2)表示的变分极值是极小值。换句话说,式(5-11-2)所给出的是电容上界。

本节首先推证连续函数的变分极值关系,再从基本三角形和任意三角形的电容出发讨论任意共形同轴线电容问题。这是由于很多折线图形(例如多边形)是由三角形叠加而成,以此为基础进一步导出了微分三角形理论,从而比较彻底地解决了任意共形同轴传输线的电容(即特性阻抗问题)。值得指出,由于变分稳定,这里所获得的解析闭式具有较高的精度。

### 一、连续函数f(u)的变分极值

定义变分泛函λ[f(u)]为

$$\lambda[f(u)] = \frac{\left[ \int_{u_1}^{ku_1} f(u) du \right]^2}{\int_{u_1}^{ku_1} f^2(u) u du} \quad (5-11-3)$$

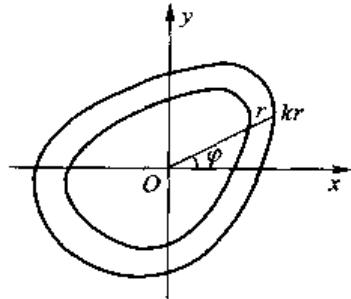


图5-11-1 任意共形同轴线

把积分分离散化,且考虑  $n$  充分大,可将上式改写成 Rayleigh 商式

$$\lambda f(\mathbf{u}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\begin{bmatrix} f(u_1)du \\ f(u_2)du \\ \vdots \\ f(u_n)du \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(u_1)du \\ f(u_2)du \\ \vdots \\ f(u_n)du \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{du}{du} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \frac{u_2}{du} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{u_n}{du} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(u_1)du \\ f(u_2)du \\ \vdots \\ f(u_n)du \end{bmatrix}} \quad (5-11-4)$$

其中,  $u_n = ku_1$ , 式(5-11-4)也可简写成

$$\lambda [f(\mathbf{u})] = \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F}}{\mathbf{F}^T \mathbf{B} \mathbf{F}} \quad (5-11-5)$$

式中,  $\mathbf{F}^T = [f(u_1)du, f(u_2)du, \dots, f(u_n)du]^T$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{H}^T$  是张量形式,对于  $\mathbf{A}$  的约束, D. K. Cheng 已经证明<sup>[9]</sup>,  $\lambda [f(\mathbf{u})]$  存在,且唯一存在极大值,即

$$\lambda [f(\mathbf{u})]_{\max} = \mathbf{I}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} \quad (5-11-6)$$

而此时所对应的本征矢为

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} \quad (5-11-7)$$

式(5-11-7)可具体写出

$$\begin{bmatrix} f(u_1)du \\ f(u_2)du \\ \vdots \\ f(u_n)du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{u_1} du \\ \frac{1}{u_2} du \\ \vdots \\ \frac{1}{u_n} du \end{bmatrix} \quad (5-11-8)$$

很容易得到在变分极值时,有

$$f(\mathbf{u}) = \frac{1}{u} \quad (5-11-9)$$

且

$$\min \frac{\int_{u_1}^{ku_1} f^2(u) du}{\left[ \int_{u_1}^{ku_1} f(u) du \right]^2} = \frac{1}{\ln k} \quad (5-11-10)$$

对式(5-11-10)结果,还可以进一步推广为

$$\min \frac{\int_{u_1}^{ku_1} f^2(u) g(u) du}{\left[ \int_{u_1}^{ku_1} f(u) du \right]^2} = \frac{1}{\int_{u_1}^{ku_1} \frac{1}{g(u)} du} \quad (5-11-11)$$

且当上式趋于变分极值时,有

$$f(u) = \frac{1}{g(u)} \quad (5-11-12)$$

注意  $g(u) > 0$  这一连续函数的变分极值关系为后面导出共形同轴电容的解析闭式奠定了理论基础。

## 二、基本三角形和任意三角形

下面将从基本三角形出发研究任意共形同轴线。基本三角形  $OAB$  如图 5-11-2 所示,  $\angle OBA = 90^\circ$ , 是直角。采用变分泛函极值研究基本三角形。根据稳定性,假定等位线平行于  $y$  轴,也即是  $x$  为常数,同时各个基本三角形之间的电容是并联关系,即

$$C = \sum_{i=1}^n \Delta C_i \quad (5-11-13)$$

其中,式(5-11-13)表示共形同轴线由  $n$  个基本三角形组成,各为  $\Delta C_i$ ,而  $C$  为总电容。

本节假定  $\Phi(x)$  的梯度为

$$\nabla \Phi(x) = f(x) \hat{x} \quad (5-11-14)$$

把这一假设代入式(5-11-2)的变分泛函可知

$$\Delta C_i = \epsilon \int_a^b d\varphi \frac{\int_a^{b\cos\varphi} f^2(x) r dr}{\left(\int_a^b f(x) dx\right)^2} = \epsilon \int_a^b \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{\int_a^b f^2(x) x dx}{\left(\int_a^b f(x) dx\right)^2} \quad (5-11-15)$$

其中,对于共形同轴线,有  $b = ka$ 。前面已经证明:当  $\frac{\int_a^b f^2(x) x dx}{\left(\int_a^b f(x) dx\right)^2}$  变分泛函取极值时, $f(x) = \frac{1}{x}$ 。则式(5-11-15)成为

$$\Delta C_i = \epsilon \tan \beta / \ln k \quad (5-11-16)$$

其中, $k = b/a$ 。

作为一个直接的应用例子,考虑图 5-11-3 所示的正  $n$  边形同轴线,由于对称性,只要取  $\frac{1}{2n}$  作为基本三角形,而由  $2n$  个三角形叠加,  $\beta = \pi/n$ 。

$$C = \frac{2n \epsilon \tan \left( \frac{\pi}{n} \right)}{\ln k} \quad (5-11-17)$$

作为特例,当  $n=4$ ,也即正方形( $2a \times 2a$ )时

$$C = \frac{8\epsilon}{\ln k} \quad (5-11-18)$$

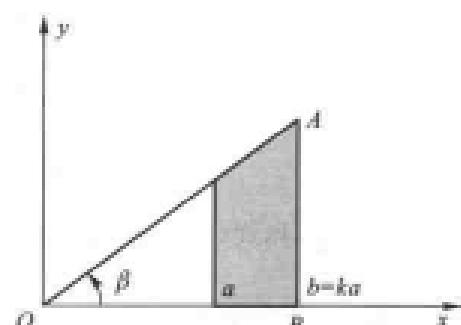


图 5-11-2 基本三角形

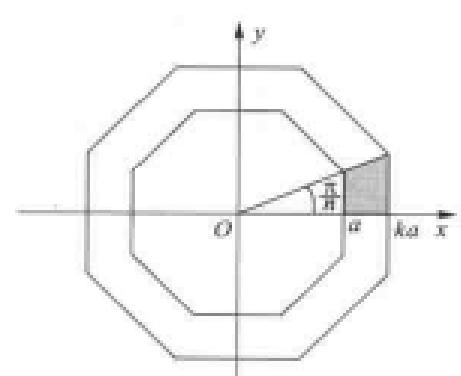


图 5-11-3 正  $n$  边形同轴线

而当  $n \rightarrow \infty$ , 即圆同轴线时  $C = 2\pi\epsilon/\ln k$ , 这是已知的结果。

下面进一步讨论如图 5-11-4 所示的任意三角形。已知  $OB = r_1$ ,  $OA = r_2$ ,  $\angle AOB = \alpha - \beta = \Delta\varphi$ 。注意在定义中,  $\beta$  可正可负, 于是可包括一切锐、钝角三角形。从概念上很容易看出  $\triangle OAB = \triangle OAC - \triangle OBC$ , 由基本三角形结果式(5-11-16)容易导出, 对于任意三角形, 电容  $\Delta C_i$  有

$$\Delta C_i = \frac{\epsilon}{\ln k} [\tan(\beta + \Delta\varphi) - \tan \beta] \quad (5-11-19)$$

根据三角函数关系可进一步写出

$$\Delta C_i = \frac{\epsilon}{\ln k} \tan(\Delta\varphi) \frac{1 + \tan^2 \beta}{1 - \tan(\Delta\varphi) \tan \beta} \quad (5-11-20)$$

如果采用已知值  $r_1$ 、 $r_2$  和夹角  $\Delta\varphi$  来表示, 则又有

$$\Delta C_i = \frac{\epsilon}{\ln k} \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\Delta\varphi)}{r_1 r_2 \sin(\Delta\varphi)} \quad (5-11-21)$$

式(5-11-20)和式(5-11-21)是计算任意三角形的基本公式。

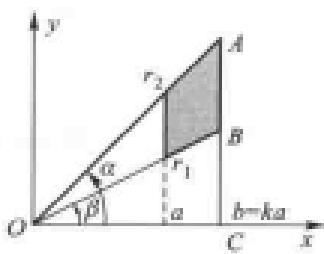


图 5-11-4 任意三角形  $OAB$

### 三、微分三角形

为了研究由任意曲线构成的共形同轴线, 定义微分三角形  $\triangle OAB$ , 如图 5-11-5 所示。比较图 5-11-4, 容易看出, 微分三角形是任意三角形夹角  $\Delta\varphi$  趋于无限小  $d\varphi$  的一个结果。在式(5-11-20)的基础上, 可导出

$$dC = \frac{\epsilon}{\ln k} (1 + \tan^2 \beta) d\varphi \quad (5-11-22)$$

略去了  $(d\varphi)^2$  以上高次项。如果画出任意曲线构成的共形同轴线如图 5-11-6 所示, 则有

$$\tan(\beta + v) = -\frac{1}{(dy/dx)} \quad (5-11-23)$$

$$\tan v = y/x \quad (5-11-24)$$

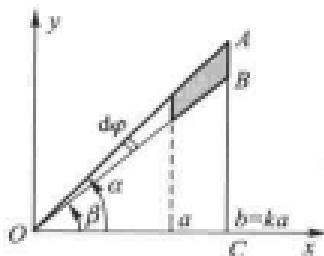


图 5-11-5 微分三角形

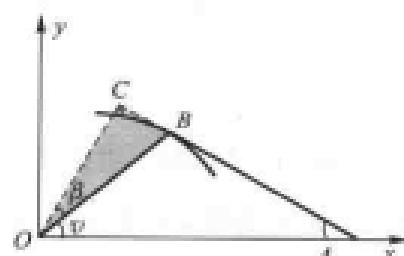


图 5-11-6 任意曲线时  $\beta$  角关系

于是写出

$$\frac{\tan \beta + \frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right) \tan \beta} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \quad (5-11-25)$$

可导出  $\beta$  角关系是

$$\tan^2 \beta = \frac{\left[ 1 + \frac{y}{x} \left( \frac{dy}{dx} \right) \right]^2}{\left[ \frac{y}{x} - \left( \frac{dy}{dx} \right) \right]^2} \quad (5-11-26)$$

代入式(5-11-22), 最后得到

$$C = \frac{\epsilon}{\ln k} \int_0^{2\pi} \frac{\left[ 1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right] \cdot \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}{\left[ \left( \frac{y}{x} \right) - \left( \frac{dy}{dx} \right) \right]^2} d\varphi \quad (5-11-27)$$

式(5-11-27)即本文给出的任意曲线构成的共形同轴线电容的变分闭式。

#### 四、任意同轴线的一般理论

下面将进一步研究一类十分普遍的齐次共形曲线, 采用极坐标, 有

$$F(r, \varphi) = r^n s(\varphi) = \text{const} \tan t > 0 \quad (5-11-28)$$

假定等位线族  $U$  与共形曲线吻合, 定义为:

$$u = \sqrt[n]{F(r, \varphi)} = r \sqrt[n]{s(\varphi)} \quad (5-11-29)$$

重新考察式(5-11-2)的分子、分母, 首先考察分母, 有

$$\nabla \Phi \cdot d\vec{l} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr = \frac{\partial \Phi}{\partial u} du \quad (5-11-30)$$

再注意分子

$$(\nabla \Phi)^2 = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 = \sqrt[n]{[s(\varphi)]^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)^2 \left[ 1 + \frac{[s'(\varphi)]^2}{n^2 s^2(\varphi)} \right] \quad (5-11-31)$$

且

$$r dr d\varphi = \frac{1}{\sqrt[n]{[s(\varphi)]^2}} u du d\varphi \quad (5-11-32)$$

令

$$f(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \quad (5-11-33)$$

将上述结果代入式(5-11-2)可得电容  $C$  的泛函公式

$$C = \epsilon \int_0^{2\pi} \frac{n^2 s^2(\varphi) + [s'(\varphi)]^2}{n^2 s^2(\varphi)} d\varphi \frac{\int_{u_1}^{u_2} f^2(u) u du}{\left[ \int_{u_1}^{u_2} f(u) du \right]^2} \quad (5-11-34)$$

式中,  $u_1$  表示内导体电位;  $Ku_1$  表示外导体电位。

#### 五、共形同轴线实例

分三种情况讨论这里所提的方法之实际应用。

### 1. 椭圆共形同轴线

这里以椭圆共形同轴线为例讨论式(5-11-27)之应用,具体如图 5-11-7 所示。椭圆方程为

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (5-11-35)$$

很容易导出

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\tan \varphi} \quad (5-11-36)$$

$$\frac{y}{x} = \tan \varphi \quad (5-11-37)$$

设  $u = \tan \varphi$ , 考虑到对称性, 只取第一象限, 则式(5-11-27)可简化为

$$C_e = \frac{4\epsilon}{\ln k} \int_0^\infty \frac{u^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^4}{\left[u^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2} du \quad (5-11-38)$$

把变量  $u$  复拓展, 研究如图 5-11-8 所示的上半平面闭路积分。

$$\oint_C \frac{z^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^4}{\left[z^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2} dz \quad (5-11-39)$$

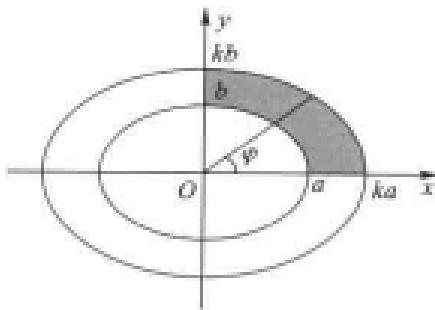


图 5-11-7 椭圆共形轴线

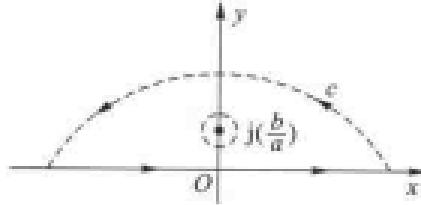


图 5-11-8 留数定理

计及  $z = j\left(\frac{b}{a}\right)$  是唯一的二阶极点, 应用留数定理, 有

$$\oint_C \frac{z^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^4}{\left[z^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2} dz = 2\pi j \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^4}{\left[z + j\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2} \right]_{z=j\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (5-11-40)$$

最后可得到

$$2 \oint_C \frac{z^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^4}{\left[z^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2} dz = \pi \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad (5-11-41)$$

于是, 椭圆共形同轴线电容为

$$C_e = \frac{\pi\epsilon}{\ln k} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad (5-11-42)$$

下面推广到更一般的情形,即  $n$  次齐次的高次“椭圆”共形同轴线情况,其方程为

$$\left(\frac{|x|}{a}\right)^n + \left(\frac{|y|}{b}\right)^n = \text{constan t} \quad (n \geq 2) \quad (5-11-43)$$

如图 5-11-9 所示。

考虑圆形对称,只取  $1/4$ (第一象限),这时

$$F(r, \varphi) = r^n(b^n \cos^n \varphi + a^n \sin^n \varphi) \quad (5-11-44)$$

$$s(\varphi) = b^n \cos^n \varphi + a^n \sin^n \varphi \quad (5-11-45)$$

$$s'(\varphi) = n(-b^n \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi + a^n \sin^{n-1} \varphi \cos \varphi) \quad (5-11-46)$$

可知积分

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^{3n} \sin^{2n-2} \varphi + b^{2n} \cos^{2n-2} \varphi}{(b^n \cos^n \varphi + a^n \sin^n \varphi)^2} d\varphi = 4 \left(\frac{b}{a}\right) \int_0^\infty \frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 z^{2n-2}}{(1+z^n)^2} dz \quad (5-11-47)$$

其中,  $z = \left(\frac{a}{b} \tan \varphi\right)$ , 进一步令

$$\begin{cases} w = \frac{1}{(1+z^n)} \\ dz = -\frac{1}{nw^2} \left(\frac{1}{w}-1\right)^{1-\frac{1}{n}} dw \end{cases} \quad (5-11-48)$$

于是式(5-11-47)被积函数的第一项,有

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(1+z^n)^2} = \frac{1}{n} \int_0^1 w^{1-\frac{1}{n}} (1-w)^{1-\frac{1}{n}} dw = \frac{1}{n} B\left(2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad (5-11-49)$$

式中的  $B$  函数的表达式为  $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} dt (p, q > 0)$ , 它与  $\Gamma$  函数有如下关系

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (5-11-50)$$

而

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty u^{p-1} e^{-u} du \quad (5-11-51)$$

注意到  $\Gamma$  函数有如下性质:

$$\textcircled{1} \quad \Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

$$\textcircled{2} \quad 0 < p < 1 \quad \Gamma(p)\Gamma(p-1) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

$$\textcircled{3} \quad \Gamma(2) = 1$$

于是式(5-11-49)可进一步写为

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(1+z^n)^2} = \frac{1}{n} \Gamma\left(2 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad (5-11-52)$$

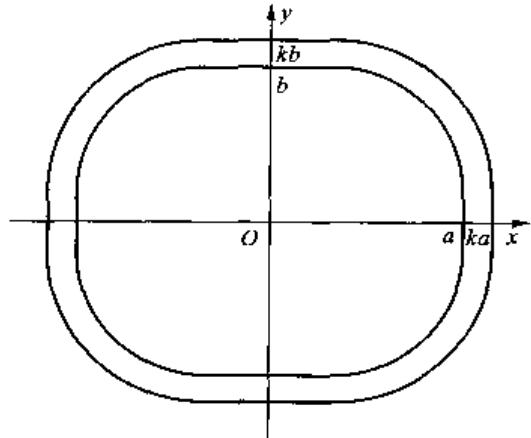


图 5-11-9  $n$  次齐次的高次“椭圆”  
共形同轴线( $n=3, b/a=0.8, k=1$ )

对于式(5-11-47)被积函数第二项,又有

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n-2} dz}{(1+z^n)^2} = - \int_0^\infty \frac{d \frac{1}{z}}{\left(1+\frac{1}{z^n}\right)^2} = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z^n)^2} \quad (5-11-53)$$

于是

$$4 \left(\frac{b}{a}\right) \int_0^\infty \frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 z^{2n-2}}{(1+z^n)^2} dz = \frac{4(n-1)}{n^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \frac{a^2+b^2}{ab} \quad (5-11-54)$$

最后得到  $n$  次齐次多项式高次“椭圆”共形同轴线的电容  $C_b$  为

$$C_b = \frac{\pi \epsilon}{\ln k} \cdot \frac{4(n-1)}{n^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \frac{a^2+b^2}{ab} \quad (5-11-55)$$

把式(5-11-55)重写成

$$C_b = C_e G(n) \quad (5-11-56)$$

其中,  $C_e$  即  $n=2$  的椭圆共形同轴线。若把高次“椭圆”共形同轴线电容对  $n=2$  的椭圆共形同轴线电容进行归一,得

$$C_h = C_b / C_e$$

则有

$$C_h = G(n) = \frac{4(n-1)}{n^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad (5-11-57)$$

它只与  $n$  有关,如图 5-11-10 所示。

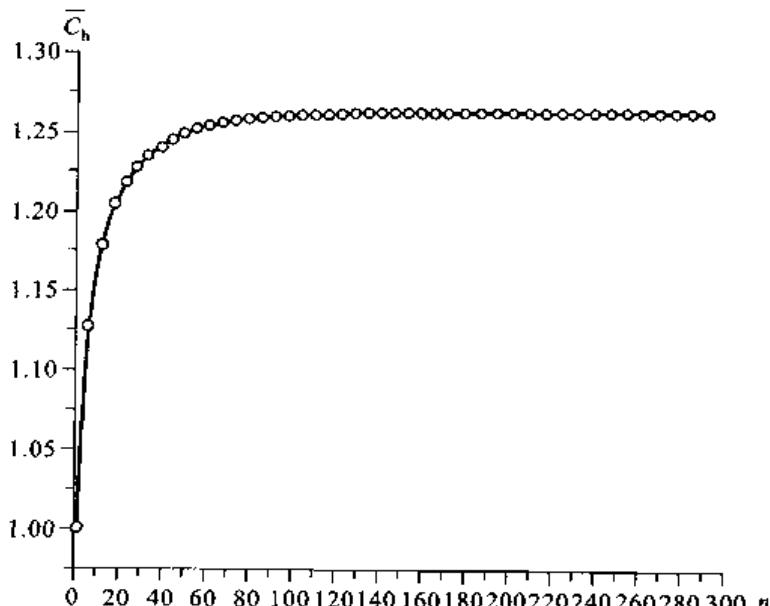


图 5-11-10  $n$  次齐次高次“椭圆”共形同轴线的归一(与 2 次椭圆共形同轴线  $C_e$ )电容  $\bar{C}_h$  曲线

表 5-11-1 中列出了  $a=b$  时  $C_h$  与  $n$  的对应值。

表 5-11-1  $a=b$  时  $C_h$  与  $n$  的对应值

$n$	2	3	4	8	12	$\infty$
$(\frac{C_h}{\epsilon}) \ln k$	$2\pi$	6.449 064 4	6.664 324 4	7.183 205 1	7.417 778	8.000 00

很明显,当  $n=2$  是半径为  $a$  的圆同轴线而  $n=\infty$  表示面积为  $2a \times 2a$  的正方形同轴线。

由于  $n$  次齐次高次“椭圆”共形同轴线的引入,使圆、正方形、椭圆和矩形完全统一起来,作为例子,令  $N=\infty$  可得  $2a \times 2b$  共形矩形同轴线的闭式,为

$$C_R = \frac{8\epsilon}{\ln k} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2ab} \quad (5-11-58)$$

## 2. 多边形共形同轴线

首先以正  $n$  边形同轴线为例加以说明,如图 5-11-11 所示。

考虑图形对称,取  $1/2n$ ,如图 5-11-11 所示,其中,  $\varphi_0 = \frac{\pi}{n}$ , 这时

$$F[r, \varphi] = r \cos \varphi = x \quad (5-11-59)$$

$$n=1, s(\varphi) = \cos \varphi, s'(\varphi) = -\sin \varphi \quad (5-11-60)$$

代入式(5-11-58)得到

$$C_n = \frac{4n\epsilon}{\ln k} \tan \left( \frac{\pi}{n} \right) \quad (5-11-61)$$

特别指出  $n=4$ , 正方形同轴线

$$C_4 = \frac{8\epsilon}{\ln k} \quad (5-11-62)$$

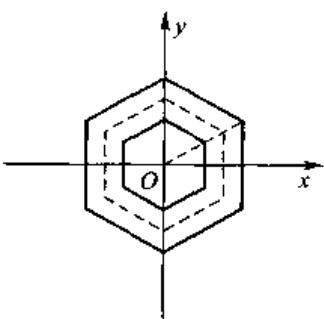


图 5-11-11 正  $n$  边形  
共同轴线

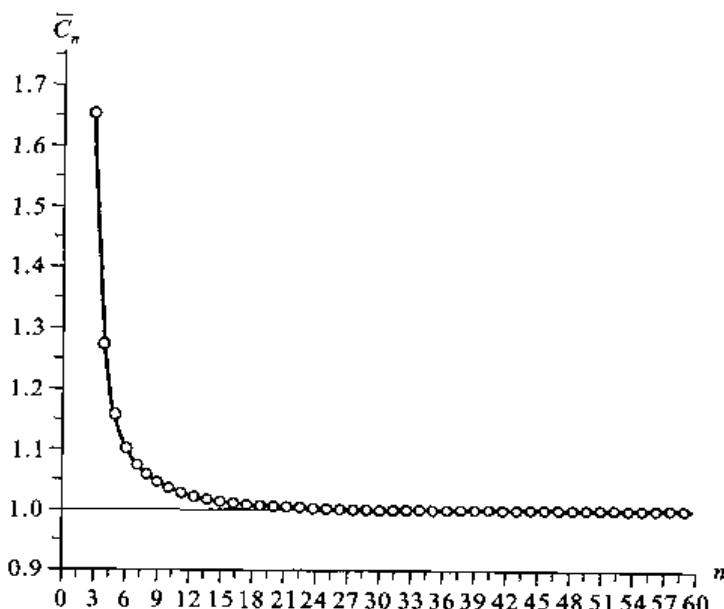


图 5-11-12 正  $n$  边形共同轴线归一(为圆同轴线)电容  $\bar{C}_n$  曲线

而  $C_\infty = C_0 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln k}$ , 即  $n \rightarrow \infty$  时, 结果趋于圆同轴线。引入  $\bar{C}_n = \frac{C_n}{C_0} = \frac{C_n}{\left(\frac{2\pi\epsilon}{\ln k}\right)}$ , 具体是

$$\bar{C}_n = \frac{n}{\pi} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right), n=3,4,\dots \quad (5-11-63)$$

曲线(应该是折线)如图 5-11-12 所示。

下面从正  $n$  边形推广到一般的情形, 以  $2a \times 2b$  的矩形为例加以说明, 如图 5-11-13 所示。十分明显, 若考虑其  $1/4$  对称, 则是由两个基本三角形组成的。应用公式(5-11-16)很易写出

$$C_n = \frac{4\epsilon}{\ln k} (\tan \beta_1 + \tan \beta_2) \quad (5-11-64)$$

其中,  $\tan \beta_1 = \frac{b}{a}$ , 而  $\tan \beta_2 = \frac{a}{b}$ 。于是矩形共形同轴线电容为

$$C_n = \frac{4\epsilon}{\ln k} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \quad (5-11-65)$$

比较式(5-11-65)和式(5-11-42)可知, 对于同样  $a$  和  $b$  的椭圆共形同轴线, 它们的电容之比是  $4/\pi$ 。

### 3. 三角形逼近

任意共形同轴线的另一种分析方法是: 可以采用若干个三角形逼近。下面将给出用 3 个夹角为  $30^\circ$  的任意三角形逼近椭圆率  $k = \sqrt{b^2 - a^2}/b = 1/2$  的椭圆, 具体如图 5-11-14 所示。考虑结构的对称性, 也只需考虑第一象限。因为共形同轴线内外径之比始终是  $k$ , 只用内接三角形, 无须再研究等面积约束。对于这一问题, 可采用任意三角形结果式(5-11-21)。数据如表 5-11-2 所示, 其相对误差  $\delta = 2.278\%$ ,  $k = \sqrt{b^2 - a^2}/b = 1/2$ ,  $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}a = 1.154700538a$ 。值得指出, 如果采用更多的三角形来逼近椭圆, 计算精度将进一步提高。通过以上三种情况的分析, 可以比较彻底地解决任意共形同轴线的电容问题。

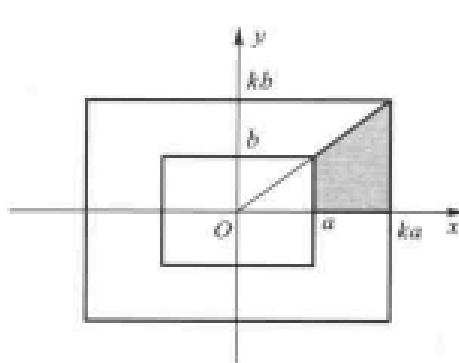


图 5-11-13 矩形共形同轴线

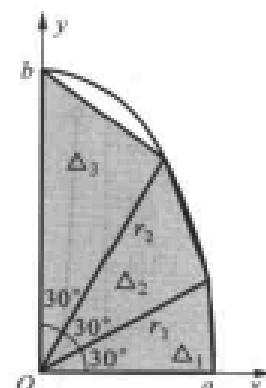


图 5-11-14 椭圆的任意三角逼近

研究任意共形同轴线的电容问题可以从基本三角形和任意三角形出发, 可以由它们逼近任意几何图形。而本节进一步发展的微分三角形甚至可以解决任意曲线方程。在此基础上, 基于变分理论, 导出了任意共形同轴线电容的变分解析闭式, 不仅简洁而且具有较高的精度。因此, 本节从理论和实践上比较彻底地解决了共形同轴线电容问题。

表 5-11-2 椭圆的任意三角形逼近结果

	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$
$r_1$	$a$	1.032 795 55a	1.109 400 392a
$r_2$	1.032 795 5a	1.109 400 392a	1.154 700 538a
$\sin(\Delta\varphi)$	0.5	0.5	0.5
$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\Delta\varphi)$	$0.277\ 812\ 284a^2$	$0.312\ 880\ 143a^2$	$0.345\ 301\ 779a^2$
$r_1 r_2 \sin(\Delta\varphi)$	$0.516\ 397\ 779a^2$	$0.572\ 891\ 899a^2$	$0.640\ 512\ 614a^2$
$C_e / \left( \frac{\epsilon}{\ln k} \right)$	0.537 981 174	0.546 141 677	0.539 102 23
三角形叠加(式(5-11-21))	$C = \frac{4\epsilon}{\ln k} \sum_{i=1}^3 \frac{r_{i1}^2 + r_{i2}^2 - 2r_{i1} r_{i2} \cos(\Delta\varphi)}{r_{i1} r_{i2} \sin(\Delta\varphi)} = \frac{\epsilon}{\ln k} (6.492\ 900\ 324)$		
解析闭式(式(5-11-35))	$C_e = \frac{\pi\epsilon}{\ln k} \left( \frac{a^2 + b^2}{ab} \right) = \frac{\epsilon}{\ln k} (6.348\ 297\ 775)$		
相对误差 $\delta = \frac{C - C_e}{C_e}$	$= 2.278\%$		

作为本节最后,讨论一个很多学者所关注的问题:即在计算机和先进数值分析方法飞速的今天,是否还有必要研究变分理论和解析闭式?回答是肯定的。这是因为变分作为稳定性的独特形式给出问题的上限和下限,因此对数值分析的误差精度有着重要的指导意义。而另一方面,数值的长处在于分析,当面临优化或系统综合的问题时,解析闭式对于快速设计和迅速进入优化区域附近,显然有着不可代替的作用,这也是变分理论和解析闭式研究仍不断发展的主要原因。

## 参 考 文 献

- [1] Collin R E. Field Theory of Guided Waves. York: McGraw-Hill, 1960.
- [2] Gunston M A. Microwave Transmission-Line Impedance Data. London: VNR, 1972.
- [3] Riblet H J. The characteristic impedance of a family of rectangular coaxial structures with off-centered strip inner conductors. IEEE Trans. MTT, 1979, 27(4): 294~298.
- [4] Levy R. Conformal transformations combined techniques, with applications to coupled-bar problems. IEEE Trans. MTT, 1980, 28(4): 369~375.
- [5] Lin Weigan. A critical study of the coaxial transmission line utilizing conductors of both circular and square cross section. IEEE Trans. MTT, 1982, 30(4): 1981~1988.
- [6] Shumpert T H, Galloway D J. Capacitance bounds and equivalent radius. IEEE Trans. AP, 1977, 25(2): 284~286.
- [7] Liang C H, Li L, Zhai H Q. Analytical closed-form for the capacitance of arbitrarily shaped conducting plate. IEEE Proceeding-Antennas, Microwaves and Propagation, 2004, 151

(3): 217~220.

[8] Kuo J T, Su K Y. Analytical evaluation of the MoM matrix elements for the capacitance of a charged plate. IEEE Trans. MTT, 2002, 50(5): 1435~1436.

[9] Cheng D K, Tseng F I. Gain optimization for arbitrary antenna arrays. IEEE Trans. AP, 1965, 13(6): 973~974.

## 任意截面同轴线电容 C 的变分理论

### Variational Theory of Capacitance C Of Arbitrarily Shaped Coaxial Line

通信工程和微波理论两大领域的激励和刺激,使很多学者对于各种新型截面同轴线的探索和研究一直怀有浓厚的兴趣<sup>[1] [6]</sup>。20世纪90年代以来,计算机和计算技术的超高速发展,使数值分析方法大大占优,以至似乎可以把一切问题归于计算。事实证明,这种看法存在一定的片面性,毕竟数值分析的计算量对于系统综合是一种不利因素,如果问题的模型可以归结为精度很高的解析闭式,那么它的性能分析和优化将会大大加快,也更有助于从概念上去理解各种微波传输线。

众所周知,TEM模微波传输线的电容C与特性阻抗Z<sub>0</sub>紧密相关,有

$$Z_0 = \frac{1}{vC} \quad (5-12-1)$$

式中,v是波传播速度。研究电容C对于微波工程也有着重要的意义。

本节提出任意截面同轴线电容C变分闭式的普遍理论,问题假设位函数Φ(r,φ)满足任意截面的边界条件,且线间电压存在路径的不变性。根据这一理论可解决一批原先采用解析方法几乎无法解决的问题。

### 一、普遍理论

任意截面同轴线电容的变分理论为<sup>[1]</sup>

$$C = \frac{2W}{U^2} = \epsilon \frac{\iint_S (\nabla \Phi)^2 dS}{\left( \int_l \nabla \Phi \cdot dl \right)^2} \quad (5-12-2)$$

式中,W和U分别表示储能和线间电压。C所表达的变分泛函是由电位函数Φ(r,φ)来表示的,

根据能量极小原理,式(5-12-2)给出的变分泛函取极小值,也即式(5-12-2)表示电容的变分上界。任意截面同轴线问题的提法是已知内外两条任意闭合曲线的函数表述,采用变分理论求同轴线的电容  $C$ 。

已知闭合曲线的函数表述是

$$r = r_0(\varphi)c \quad (5-12-3)$$

其中,  $r_0(\varphi)$  是  $\varphi$  的已知函数,令  $r_0(\varphi)$  归一,即  $\varphi=0$  处,  $r_0(0)=1$ 。也就是说,矢径  $r$  与  $x$  正向交于  $c$  点。

为了方便分析,引入  $S(\varphi)$  函数,有

$$S(\varphi) = \frac{1}{r_0^2(\varphi)} \quad (5-12-4)$$

代入式(5-12-3),得到

$$r\sqrt{S(\varphi)} = c \quad (5-12-5)$$

注意到  $S(\varphi)$  也是归一化的正函数,即  $S(0)=1$ ,式(5-12-5)是今后分析任意截面同轴线闭合曲线的一般公式。于是,任意截面的同轴线如图 5-12-1 所示。

在任意截面同轴线电容  $C$  的变分泛函中,最困难的问题是试探位函数  $\Phi(r, \varphi)$  的选取,特别是对于复杂的边界条件情况。

假设位函数  $\Phi(r, \varphi)$  为

$$\Phi(r, \varphi) = \ln\left(\frac{1}{rf(r, \varphi)}\right) \quad (5-12-6)$$

式(5-12-6)中  $f(r, \varphi)$  必须满足如下边界条件

$$\begin{cases} r = \frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}, f(r, \varphi) = k(\varphi)r + h(\varphi) = \sqrt{S_1(\varphi)} \\ r = \frac{b}{\sqrt{S_2(\varphi)}}, f(r, \varphi) = k(\varphi)r + h(\varphi) = \sqrt{S_2(\varphi)} \end{cases} \quad (5-12-7)$$

式(5-12-7)本质上是线性插值假设,很容易得到

$$k(\varphi) = \sqrt{S_1(\varphi)}S_2(\varphi) \cdot \frac{\sqrt{S_2(\varphi)} - \sqrt{S_1(\varphi)}}{b\sqrt{S_1(\varphi)} - a\sqrt{S_2(\varphi)}} \quad (5-12-8)$$

$$h(\varphi) = \frac{bS_1(\varphi) - aS_2(\varphi)}{b\sqrt{S_1(\varphi)} - a\sqrt{S_2(\varphi)}} \quad (5-12-9)$$

于是满足边界条件的位函数是

$$\Phi(r, \varphi) = \ln\left(\frac{1}{r[k(\varphi)r + h(\varphi)]}\right) \quad (5-12-10)$$

现在应用式(5-12-10)来计算内外导体之间的电压。

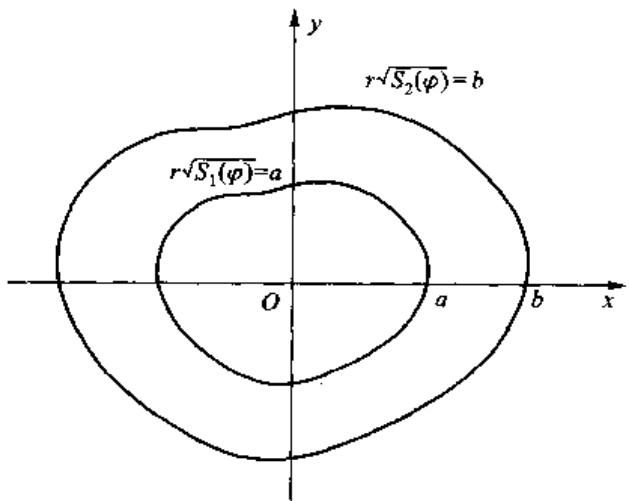


图 5-12-1 任意截面同轴线

$$-\frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} = \frac{1}{r} + \frac{k(\varphi)}{k(\varphi)r + h(\varphi)} \quad (5-12-11)$$

则电压  $U$  可写成

$$\begin{aligned} U &= \int_{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}}^{\frac{b}{\sqrt{S_2(\varphi)}}} -\frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} dr = \int_{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}}^{\frac{b}{\sqrt{S_2(\varphi)}}} \left( \frac{1}{r} + \frac{k(\varphi)}{k(\varphi)r + h(\varphi)} \right) dr \\ &= \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{S_1(\varphi)}{S_2(\varphi)}\right) + \ln(k(\varphi)r + h(\varphi)) \Big|_{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}}^{\frac{b}{\sqrt{S_2(\varphi)}}} \end{aligned}$$

计及式(5-12-7)的边界条件易知

$$U = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (5-12-12)$$

本节所假设的试探函数使得电压与所选择的路径无关。它始终为  $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ 。

再研究式(5-12-2)的分子

$$2W = \epsilon \iint \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 \right] r dr d\varphi \quad (5-12-13)$$

分两部分研究：

$$\text{第一部分: } \int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 r dr$$

由式(5-12-11)可知

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{k^2(\varphi)}{(k(\varphi)r + h)^2} + \frac{2k(\varphi)}{r(k(\varphi)r + h)} \quad (5-12-14)$$

因此  $\int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 r dr$  的第一项为

$$I_{r1} = \int_{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}}^{\frac{b}{\sqrt{S_2(\varphi)}}} \frac{r dr}{r^2} = \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{S_2(\varphi)}{S_1(\varphi)}\right) \quad (5-12-15)$$

第二项为

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}}^{\frac{b}{\sqrt{S_2(\varphi)}}} \frac{[(k(\varphi)r + h) - h]}{(k(\varphi)r + h)^2} d(k(\varphi)r + h) \\ &= \ln \left( \frac{k(\varphi) \frac{b}{\sqrt{S_2(\varphi)}} + h}{k(\varphi) \frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}} + h} \right) + h \left( \frac{1}{k(\varphi) \frac{b}{\sqrt{S_2(\varphi)}} + h} - \frac{1}{k(\varphi) \frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}} + h} \right) \\ &I_{r2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{S_2(\varphi)}{S_1(\varphi)}\right) + h \left( \frac{1}{\sqrt{S_2(\varphi)}} - \frac{1}{\sqrt{S_1(\varphi)}} \right) \end{aligned} \quad (5-12-16)$$

第三项为

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}}^{\frac{b}{\sqrt{S_2(\varphi)}}} \frac{2k(\varphi)r}{r(k(\varphi)r + h)} dr = 2 \int_{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}}^{\frac{b}{\sqrt{S_2(\varphi)}}} \frac{d(k(\varphi)r + h)}{k(\varphi)r + h} \\ &I_{r3} = \ln\left(\frac{S_2(\varphi)}{S_1(\varphi)}\right) \end{aligned} \quad (5-12-17)$$

把式(5-12-15)、式(5-12-16)和式(5-12-17)合并得到

$$I_r = I_{r1} + I_{r2} + I_{r3} = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{S_2(\varphi)}{S_1(\varphi)}\right) + h\left(\frac{1}{\sqrt{S_2(\varphi)}} - \frac{1}{\sqrt{S_1(\varphi)}}\right) \quad (5-12-18)$$

第二部分:  $\int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 r dr$

十分明显

$$\left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r} \left[ \frac{k'(\varphi)r+h'}{k(\varphi)r+h} \right] \quad (5-12-19)$$

式中,  $k'(\varphi)$ 、 $r'$  分别表示  $k(\varphi)$  和  $r$  对于  $\varphi$  的导数。于是

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{k'(\varphi)^2 r^2 + 2k'(\varphi)h'r + h'^2}{(k(\varphi)r+h)^2} = \frac{k'(\varphi)^2}{(k(\varphi)r+h)^2} + \frac{2k'(\varphi)h'}{r(k(\varphi)r+h)^2} + \frac{h'^2}{r^2(k(\varphi)r+h)^2} \quad (5-12-20)$$

因此  $\int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 r dr$  的第一项为

$$\begin{aligned} & \int \frac{\frac{h}{\sqrt{S_2(\varphi)}}}{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}} \frac{k'(\varphi)^2 r}{(k(\varphi)r+h)^2} dr = \int \frac{\frac{h}{\sqrt{S_2(\varphi)}}}{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}} \frac{k'(\varphi)^2}{k(\varphi)^2} \frac{[(k(\varphi)r+h)-h]}{(k(\varphi)r+h)^2} d(k(\varphi)r+h) \\ & I_{\varphi 1} = \frac{k'(\varphi)^2}{k(\varphi)^2} \left[ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{S_2(\varphi)}{S_1(\varphi)}\right) \right] + \frac{k'(\varphi)^2}{k(\varphi)^2} h \left( \frac{1}{\sqrt{S_2(\varphi)}} - \frac{1}{\sqrt{S_1(\varphi)}} \right) \end{aligned} \quad (5-12-21)$$

第二项为

$$\begin{aligned} & \int \frac{\frac{h}{\sqrt{S_2(\varphi)}}}{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}} \frac{2k'(\varphi)h'r}{r(k(\varphi)r+h)^2} dr = 2 \frac{k'(\varphi)h'}{k(\varphi)} \int \frac{\frac{h}{\sqrt{S_2(\varphi)}}}{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}} \frac{d(k(\varphi)r+h)}{(k(\varphi)r+h)^2} dr \\ & I_{\varphi 2} = -2 \frac{k'(\varphi)h'}{k(\varphi)} \left( \frac{1}{\sqrt{S_2(\varphi)}} - \frac{1}{\sqrt{S_1(\varphi)}} \right) \end{aligned} \quad (5-12-22)$$

第三项为

$$\int \frac{\frac{h}{\sqrt{S_2(\varphi)}}}{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}} \frac{h'^2 r}{r^2(k(\varphi)r+h)^2} dr = \int \frac{\frac{h}{\sqrt{S_2(\varphi)}}}{\frac{a}{\sqrt{S_1(\varphi)}}} \frac{h'^2}{r(k(\varphi)r+h)^2} dr$$

先改变被积函数。设  $A$  和  $B$  是待定常数, 即

$$\frac{h'^2}{r(k(\varphi)r+h)^2} = \frac{A}{r(k(\varphi)r+h)} + \frac{B}{(k(\varphi)r+h)^2} = \frac{(Ak(\varphi)+B)r+Ah}{r(k(\varphi)r+h)^2}$$

于是有

$$Ah = h'^2 \quad A = \frac{h'^2}{h}$$

$$B = -Ak(\varphi) \quad B = -\frac{h'^2}{h}k(\varphi)$$

再进一步, 假设  $A_1$  和  $A_2$  两个待定常数

$$\frac{A}{r(k(\varphi)r+h)} = \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{(k(\varphi)r+h)} = \frac{(A_1k(\varphi)+A_2)r+A_1h}{r(k(\varphi)r+h)}$$

又有

$$\begin{aligned} A_1 h &= A \quad A_1 = \frac{h'^2}{h^2} \\ A_2 &= -A_1 k(\varphi) \quad A_2 = -\frac{h'^2}{h^2} k(\varphi) \end{aligned}$$

最后写出第三项被积函数

$$\frac{h'^2}{r(k(\varphi)r+h)^2} = \frac{h'^2}{h^2} \cdot \frac{1}{r} - \left( \frac{h'^2}{h^2} \right) \frac{k(\varphi)}{(k(\varphi)r+h)} - \frac{h'^2}{h^2} k(\varphi) \cdot \frac{1}{(k(\varphi)r+h)^2} \quad (5-12-23)$$

很容易给出

$$\begin{cases} I_{\varphi 31} = \frac{h'^2}{h^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{2} \frac{h'^2}{h^2} \ln \frac{S_2(\varphi)}{S_1(\varphi)} \\ I_{\varphi 32} = -\frac{h'^2}{h^2} \left[ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{S_2(\varphi)}{S_1(\varphi)}\right) \right] \\ I_{\varphi 33} = \frac{h'^2}{h^2} \left( \frac{1}{\sqrt{S_2(\varphi)}} - \frac{1}{\sqrt{S_1(\varphi)}} \right) \end{cases} \quad (5-12-24)$$

合并起来得

$$I_{\varphi 3} = \frac{h'^2}{h^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{h'^2}{h^2} \ln\left(\frac{S_2(\varphi)}{S_1(\varphi)}\right) + \frac{h'^2}{h^2} \left( \frac{1}{\sqrt{S_2(\varphi)}} - \frac{1}{\sqrt{S_1(\varphi)}} \right) \quad (5-12-25)$$

计及式(5-12-21)、式(5-12-22) 和式(5-12-25) 三式有

$$\begin{aligned} I_{\varphi} &= I_{\varphi 1} + I_{\varphi 2} + I_{\varphi 3} = \frac{h'^2}{h^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \left( \frac{1}{2} \frac{k'(\varphi)^2}{k(\varphi)^2} - \frac{h'^2}{h^2} \right) \ln\left(\frac{S_2(\varphi)}{S_1(\varphi)}\right) \\ &\quad + \left( \frac{k'(\varphi)^2}{k(\varphi)^2} h - 2 \frac{k'(\varphi) h'}{k(\varphi)} + \frac{h'^2}{h^2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{S_2(\varphi)}} - \frac{1}{\sqrt{S_1(\varphi)}} \right) \end{aligned} \quad (5-12-26)$$

最后, 把式(5-12-18)和式(5-12-26) 两式合并, 得到

$$\begin{aligned} I &= I_r + I_{\varphi} = \left( 1 + \frac{h'^2}{h^2} \right) \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{k'(\varphi)^2}{k(\varphi)^2} - \frac{h'^2}{h^2} \right) \ln\left(\frac{S_2(\varphi)}{S_1(\varphi)}\right) \\ &\quad + \left( h + \frac{k'(\varphi)^2}{k(\varphi)^2} h - 2 \frac{k'(\varphi) h'}{k(\varphi)} + \frac{h'^2}{h^2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{S_2(\varphi)}} - \frac{1}{\sqrt{S_1(\varphi)}} \right) \end{aligned} \quad (5-12-27)$$

电容 C 的变分闭式为

$$C = \frac{2W}{U^2} = \epsilon \frac{\int_0^{\varphi_0} I d\varphi}{\left[ \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^2} \quad (5-12-28)$$

当处理闭合曲线时,  $\varphi_0 = 2\pi$ 。

此即任意复杂截面同轴线电容 C 变分闭式的普遍理论。

由附录可知, 只要在问题中已知  $S_1(\varphi)$  和  $S_2(\varphi)$ , 则任意复杂截面同轴线电容 C 的变分闭式只需给出  $\varphi$  的积分即可求得。

## 二、齐次闭合曲线

在实际上大多数闭合曲线都可以由齐次曲线构成。其一般表达式为

$$x^n + c_1 x^{n-1} y + c_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + c_{n-1} x y^{n-1} + c_n y^n = c^n \quad (5-12-29)$$

其极坐标形式为

$$r \sqrt{S(\varphi)} = c \quad (5-12-30)$$

其中

$$S^2(\varphi) = (\cos^n \varphi + c_1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi + \cdots + c_n \sin^n \varphi)^2 \quad (5-12-31)$$

情况 1: 内圆外方和内方外圆

内圆外方同轴线如图 5-12-2 所示。

利用对称性, 只需求它的  $\frac{1}{8}$ , 约束条件  $b > a$

$$\begin{cases} S_1(\varphi) = 1 \\ S_2(\varphi) = \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (5-12-32)$$

于是  $r$  的积分具体是

$$\int_a^{\frac{b}{\cos \varphi}} r dr$$

电容  $C$  的变分闭式是

$$C = 8\epsilon \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} I d\varphi}{\left[ \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^2} \quad (5-12-33)$$

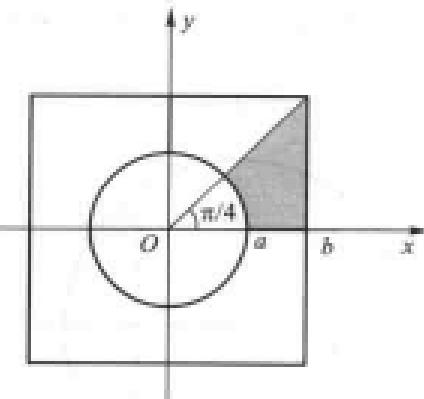


图 5-12-2 内圆外方同轴线

相应可以求出内圆外方同轴线的特性阻抗如图 5-12-3 所示, 等位线如图 5-12-4 所示。

内方外圆同轴线如图 5-12-5 所示。

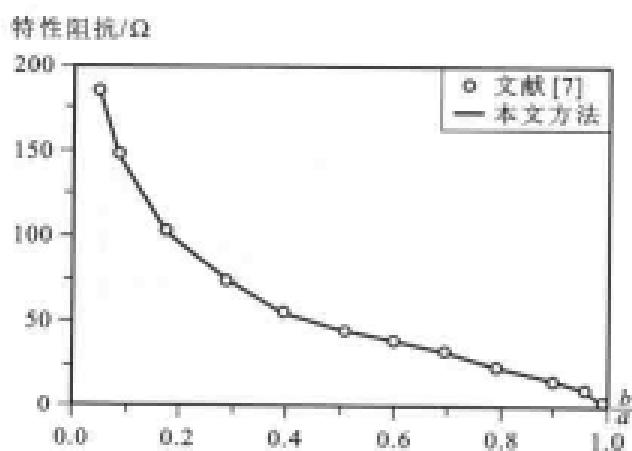


图 5-12-3 内圆外方同轴线特性阻抗

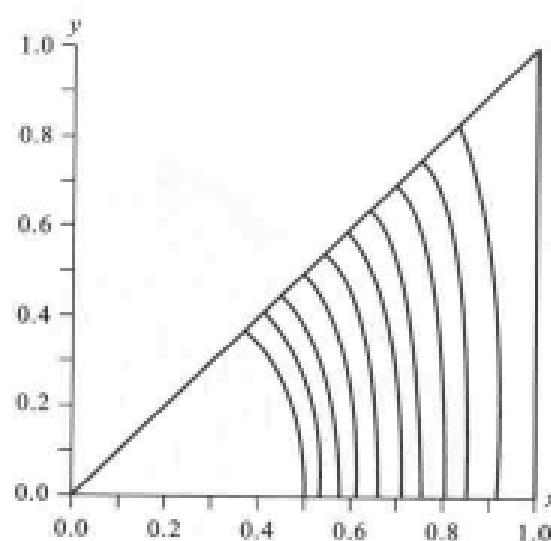


图 5-12-4 内圆外方等位线 ( $a/b = 0.5$ )

这个问题也有 $\frac{1}{8}$ 对称性, 约束条件 $b > \sqrt{2}a$ 。

$$\begin{cases} S_1(\varphi) = \cos^2 \varphi \\ S_2(\varphi) = 1 \end{cases} \quad (5-12-34)$$

积分具体是

$$\int_{\frac{a}{\cos \varphi}}^b r dr$$

其余性质与内圆外方同轴线完全相同。相应也可求出内方外圆同轴线的特性阻抗如图 5-12-6 所示, 等位线如图 5-12-7 所示。

情况 2: 内圆外矩和内矩外圆

内圆外矩同轴线如图 5-12-8 所示。

这个问题是 $\frac{1}{4}$ 对称性, 约束条件为

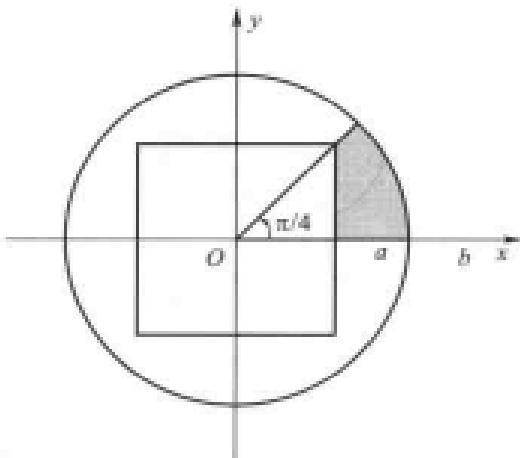


图 5-12-5 内方外圆同轴线

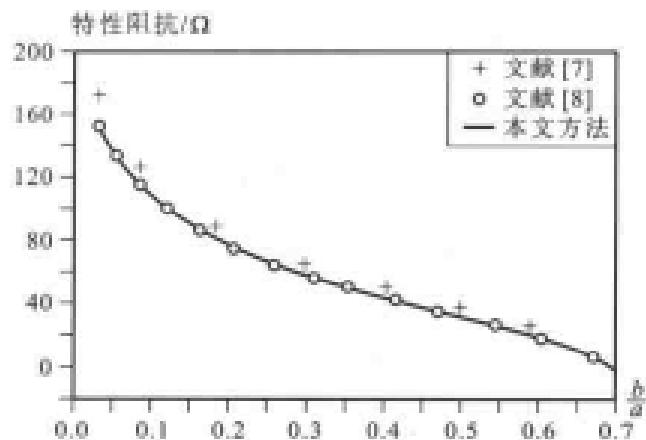


图 5-12-6 内方外圆同轴线特性阻抗

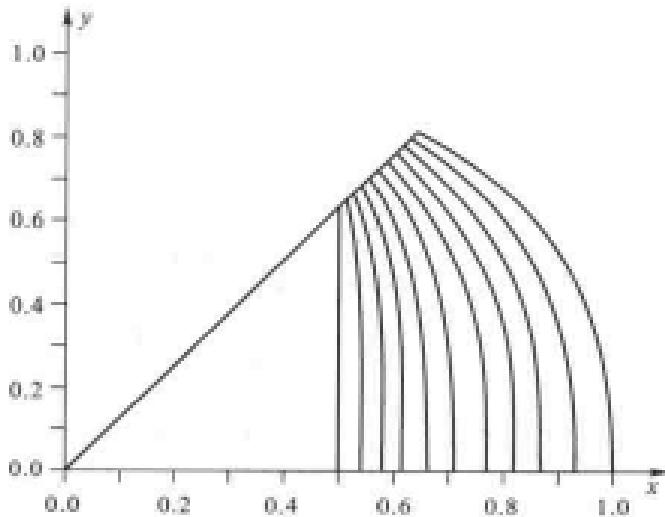


图 5-12-7 内方外圆等位线( $a/b = 0.5$ )

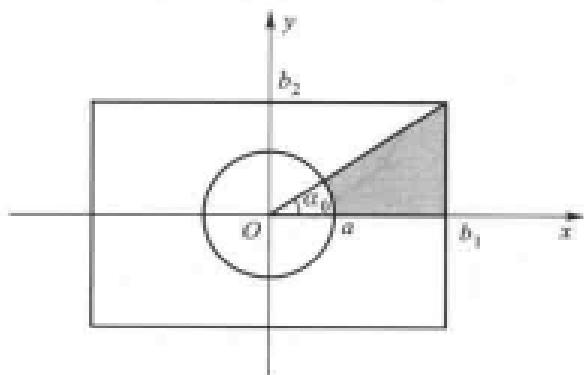


图 5-12-8 内圆外矩同轴线

$$\min(b_1, b_2) > a \quad (5-12-35)$$

对于  $\alpha_0$  三角形

$$\alpha_0 = \arctan\left(\frac{b_2}{b_1}\right) \quad (5-12-36)$$

$$\begin{cases} S_1(\varphi) = 1 \\ S_2(\varphi) = \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (5-12-37)$$

具体积分为

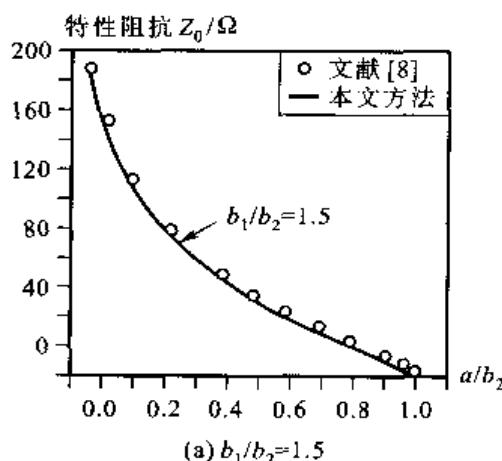
$$\int_a^{\frac{b_1}{\cos \varphi}} r dr$$

对于  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right)$  三角形,  $S_1(\varphi)$  和  $S_2(\varphi)$  同式 (5-12-37)。积分具体为

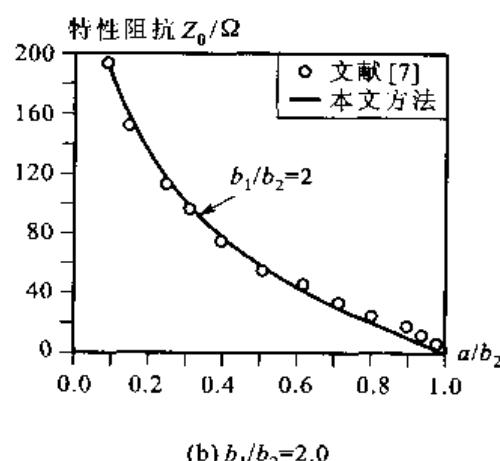
$$\int_a^{\frac{b_2}{\cos \varphi}} r dr$$

综合起来, 其电容 C 的变分闭式是

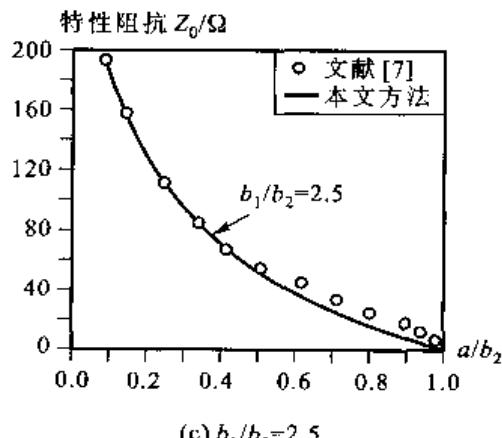
$$C = 4\epsilon \left\{ \frac{\int_0^{\alpha_0} I_1 d\varphi}{\left[ \ln\left(\frac{b_1}{a}\right) \right]^2} + \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_0} I_2 d\varphi}{\left[ \ln\left(\frac{b_2}{a}\right) \right]^2} \right\} \quad (5-12-38)$$



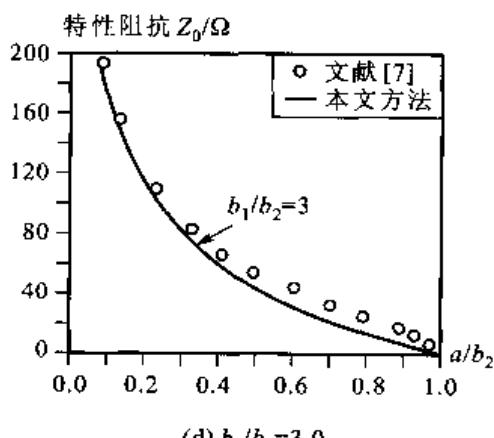
(a)  $b_1/b_2=1.5$



(b)  $b_1/b_2=2.0$



(c)  $b_1/b_2=2.5$



(d)  $b_1/b_2=3.0$

图 5-12-9 内圆外矩同轴线特性阻抗

内圆外矩同轴线的特性阻抗如图 5-12-9 所示, 等位线如图 5-12-10 和图 5-12-11 所示。

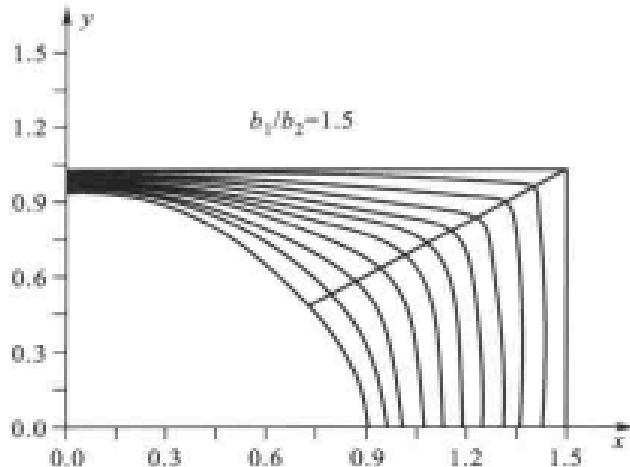


图 5-12-10 内圆外矩等位线

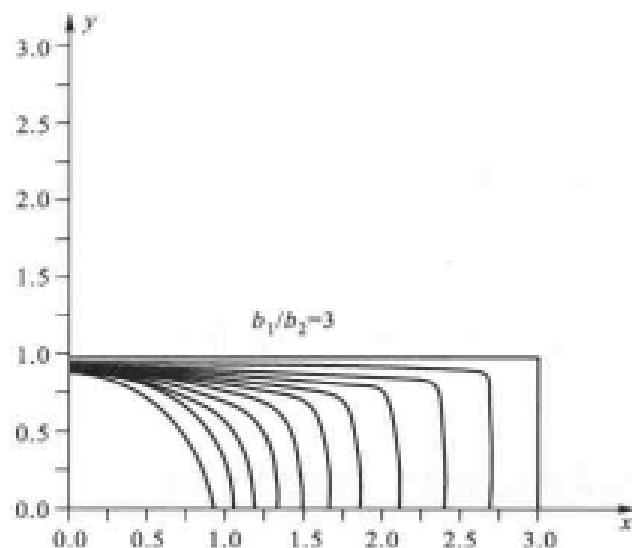


图 5-12-11 内圆外矩等位线

内矩外圆同轴线如图 5-12-12 所示。

这个问题也是  $\frac{1}{4}$  对称性, 约束条件是

$$b > \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (5-12-39)$$

对于  $\beta_0$  三角形, 有

$$\beta_0 = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \quad (5-12-40)$$

$$\begin{cases} S_1(\varphi) = \cos^2 \varphi \\ S_2(\varphi) = 1 \end{cases} \quad (5-12-41)$$

积分具体为

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\beta_0}^0 r dr$$

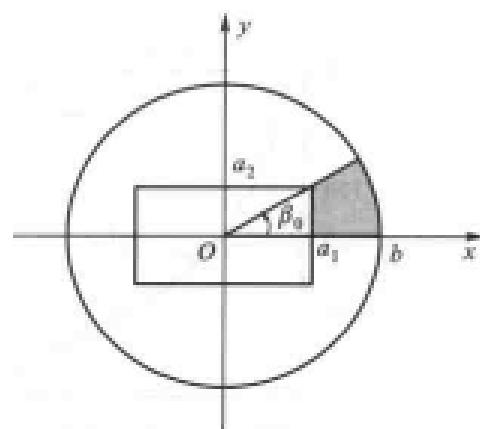


图 5-12-12 内矩外圆同轴线

对于  $(\frac{\pi}{2} - \beta_0)$  三角形,  $S_1(\varphi)$  和  $S_2(\varphi)$  同式(5-12-41)。积分具体为

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\beta_0}^0 r dr$$

综合起来, 其电容 C 的变分闭式是

$$C = 4\epsilon \left\{ \left[ \frac{\int_0^{\beta_0} I_1 d\varphi}{\left[ \ln\left(\frac{b}{a_1}\right) \right]^2} + \frac{\int_{\frac{\pi}{2}-\beta_0}^{\frac{\pi}{2}} I_2 d\varphi}{\left[ \ln\left(\frac{b}{a_2}\right) \right]^2} \right] \right\} \quad (5-12-42)$$

内矩外圆同轴线的特性阻抗如图 5-12-13 所示。

情况 3: 内椭圆外矩和内矩外椭圆同轴线

内椭圆外矩同轴线如图 5-12-14 所示。

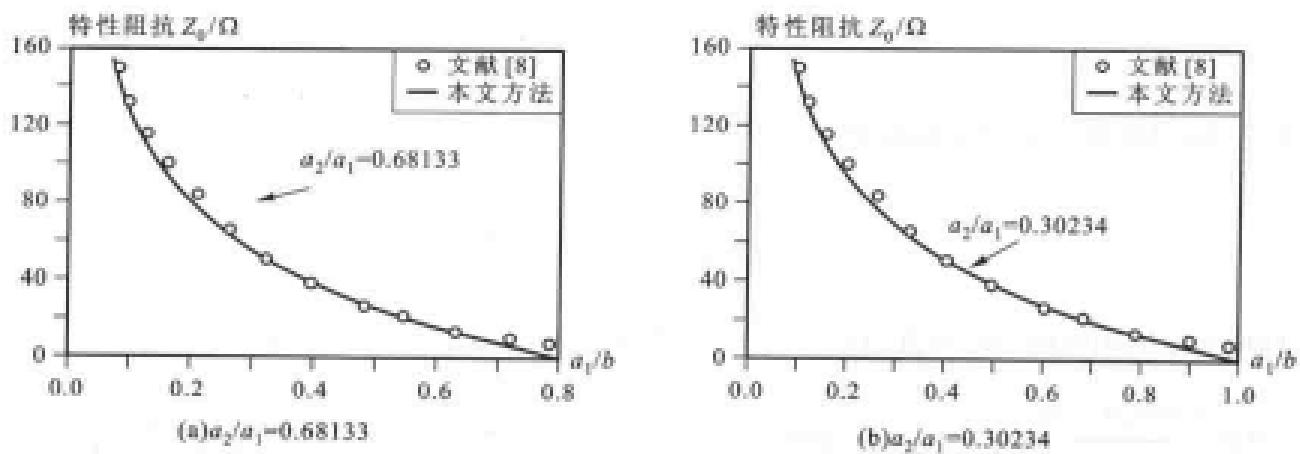


图 5-12-13 内矩外圆同轴线特性阻抗

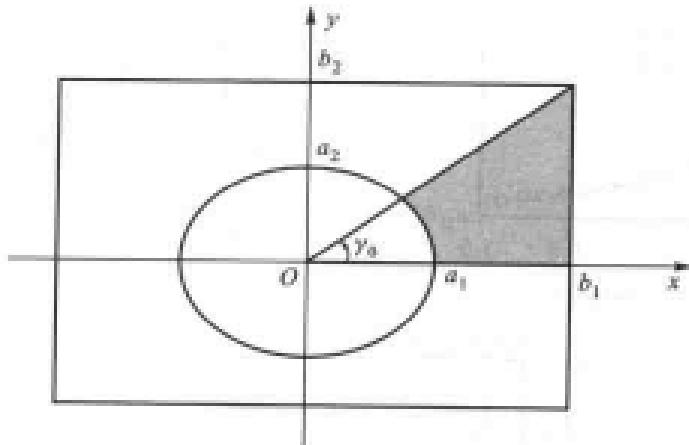


图 5-12-14 内椭圆外矩同轴线

这个问题也是 $\frac{1}{4}$ 对称性, 约束条件是

$$\min(b_1, b_2) > \max(a_1, a_2) \quad (5-12-43)$$

对于 $\gamma_0$ 三角形, 有

$$\gamma_0 = \arctan\left(\frac{b_2}{b_1}\right) \quad (5-12-44)$$

积分具体是

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{\sqrt{a_1^2 r^2 + a_2^2 r^2}} dr, \quad b^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \quad (5-12-45)$$

对于 $(\frac{\pi}{2} - \gamma_0)$ 三角形(注意: 这时把 $y$ 轴当作 $x$ 轴, 而把 $x$ 轴当作 $y$ 轴)

$$\begin{cases} S_1(\varphi) = \cos^2 \varphi + \frac{1}{b^2} \sin^2 \varphi \\ S_2(\varphi) = \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (5-12-46)$$

积分具体是

$$\int_{\frac{a_2}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{1}{b_2^2} \sin^2 \varphi}}}^{\frac{b_2}{\cos \varphi}} r dr$$

综合起来,其电容  $C$  的变分闭式是

$$C = 4\epsilon \left\{ \frac{\int_0^{r_0} I_1 d\varphi}{\left[ \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right) \right]^2} + \frac{\int_{\frac{\pi}{2}-r_0}^{\frac{\pi}{2}} I_2 d\varphi}{\left[ \ln\left(\frac{b_2}{a_2}\right) \right]^2} \right\} \quad (5-12-47)$$

内椭圆外矩同轴线的特性阻抗如图 5-12-15 所示,等位线如图 5-12-16 所示。

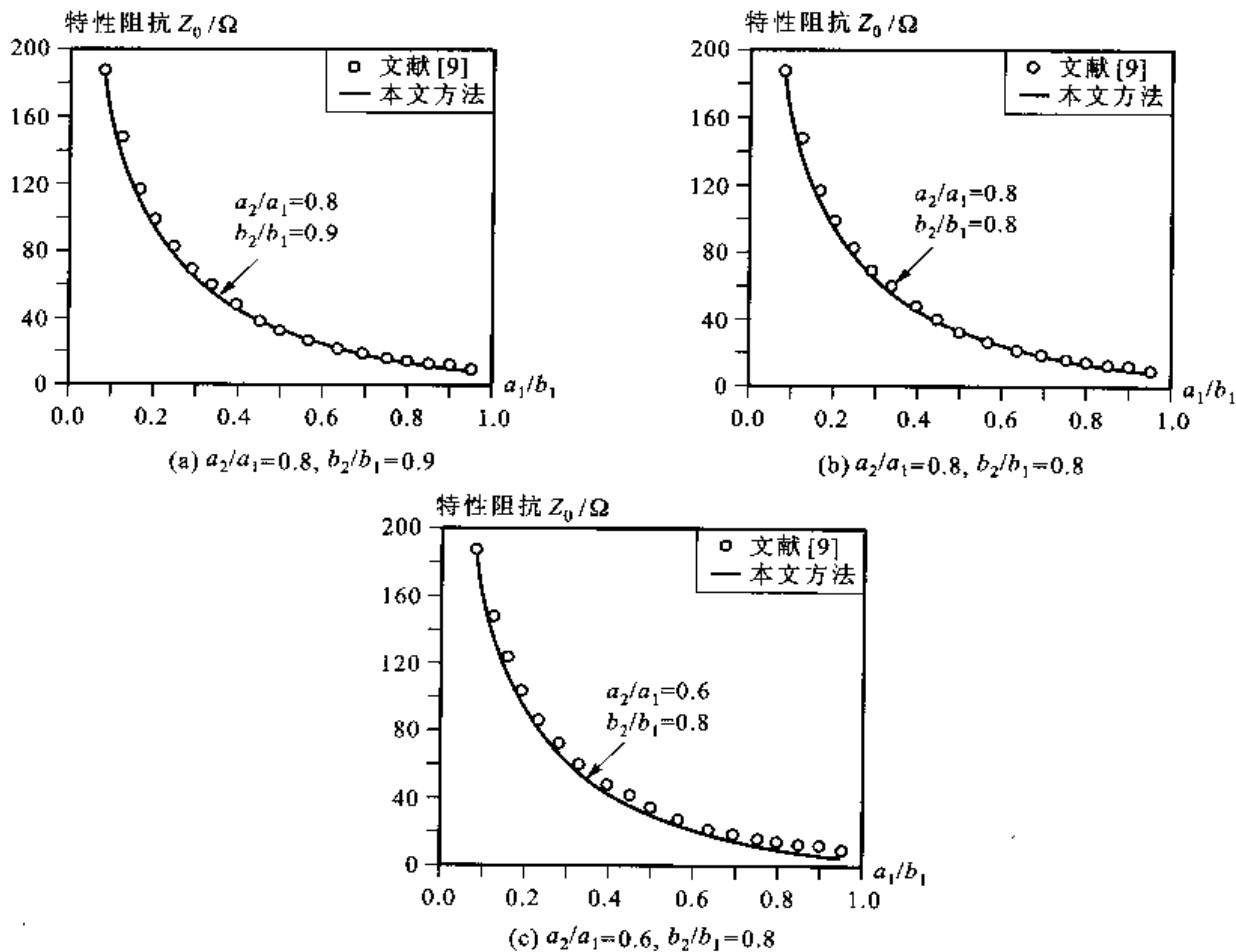


图 5-12-15 内椭圆外矩同轴线特性阻抗

内矩外椭圆同轴线如图 5-12-17 所示。

这个问题也是  $\frac{1}{4}$  对称性,约束条件是

$$\min(b_1, b_2) > \max(a_1, a_2) \quad (5-12-48)$$

图中

$$\delta = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \quad (5-12-49)$$

于是有

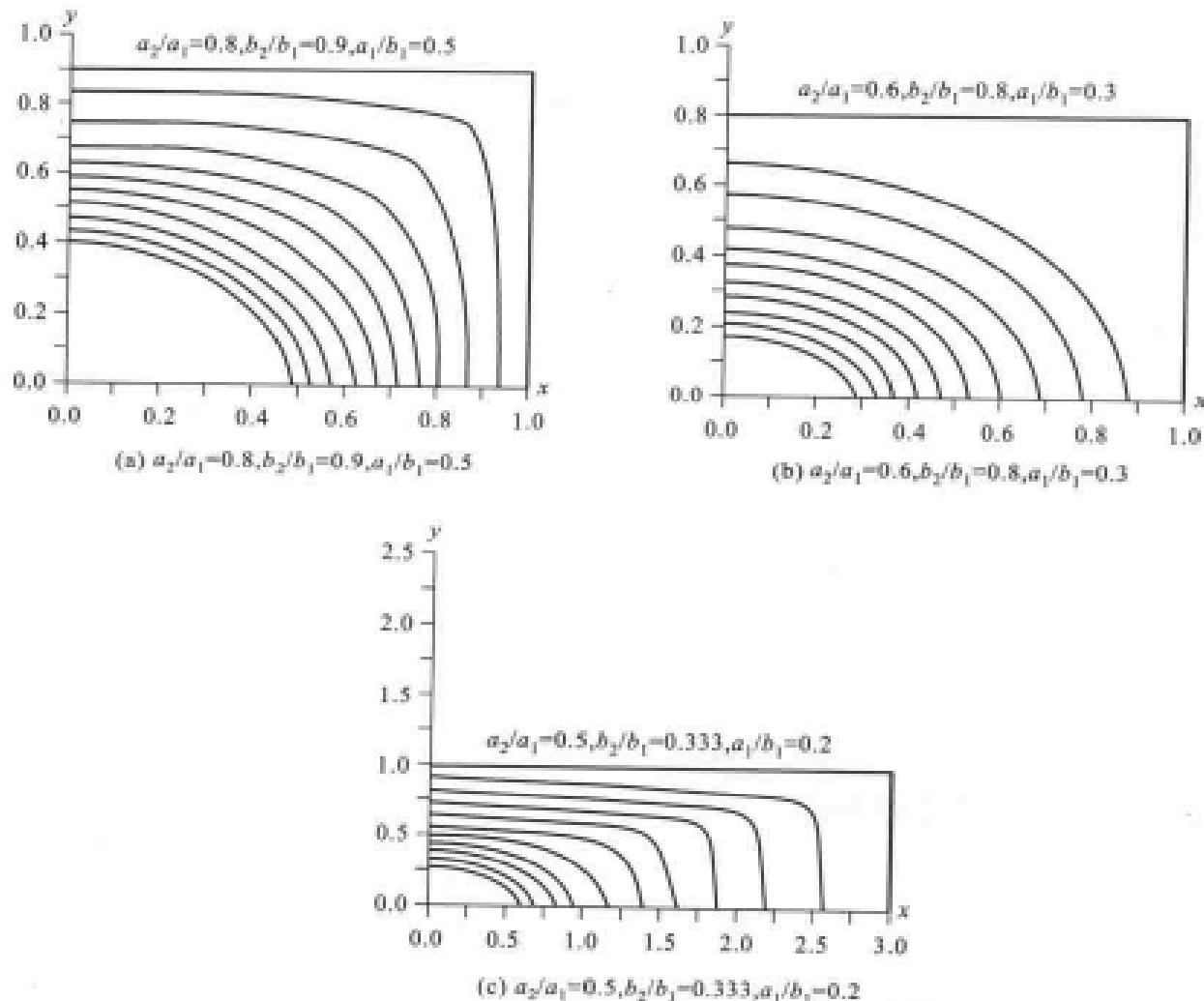


图 5-12-16 内椭圆外矩形轴线等位线

$$\cos^2 \delta = \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2}, \sin^2 \delta = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \quad (5-12-50)$$

椭圆方程为

$$r^2 \left( \frac{\cos^2 \varphi}{b_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b_2^2} \right) = 1 \quad (5-12-51)$$

当  $\varphi = \delta$  时

$$r = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2}} \quad (5-12-52)$$

约束条件是

$$r > \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (5-12-53)$$

它等价于

$$\sqrt{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2} < 1 \quad (5-12-54)$$

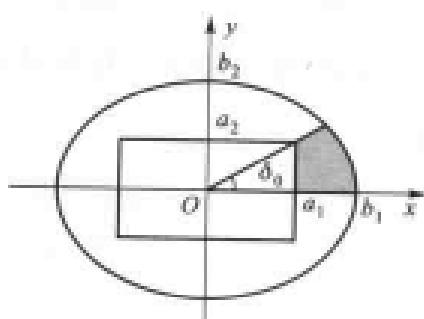


图 5-12-17 内矩形外椭圆同轴线

对于  $\delta_0$  三角形

$$\delta_0 = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \quad (5-12-55)$$

$$\begin{cases} S_1(\varphi) = \cos^2 \varphi \\ S_2(\varphi) = \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi \end{cases} \quad (5-12-56)$$

$$b^2 = \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 \quad (5-12-57)$$

积分具体是

$$\int_{\frac{a_1}{\cos \varphi}}^{b_1 / \sqrt{\cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} r dr$$

对于  $\left(\frac{\pi}{2} - \delta_0\right)$  三角形(注意:这时把  $y$  轴当作  $x$  轴,而把  $x$  轴当作  $y$  轴)

$$\begin{cases} S_1(\varphi) = \cos^2 \varphi \\ S_2(\varphi) = \cos^2 \varphi + \frac{1}{b^2} \sin^2 \varphi \end{cases} \quad (5-12-58)$$

积分具体是

$$\int_{\frac{a_2}{\cos \varphi}}^{b_2 / \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{1}{b^2} \sin^2 \varphi}} r dr$$

综合起来,其电容  $C$  的变分闭式是

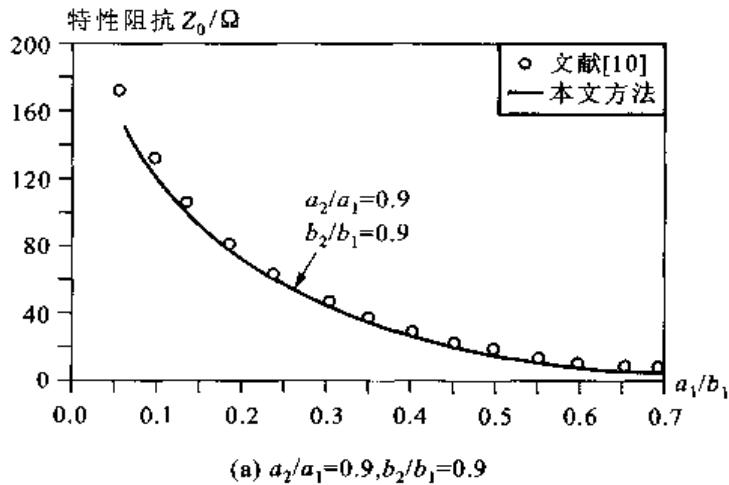
$$C = 4\epsilon \left\{ \frac{\int_0^{\delta_0} I_1 d\varphi}{\left[ \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right) \right]^2} + \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta_0} I_2 d\varphi}{\left[ \ln\left(\frac{b_2}{a_2}\right) \right]^2} \right\} \quad (5-12-59)$$

内矩外椭圆同轴线的特性阻抗如图 5-12-18 所示。

情况 4: 内圆外正多边形

把内圆外正多边形同轴线作为普遍理论的重要检验实例来研究。

首先观察内圆外正三角形同轴线,如图 5-12-19 所示。十分明显,分析这个问题可考虑  $\frac{1}{6}$  对称。



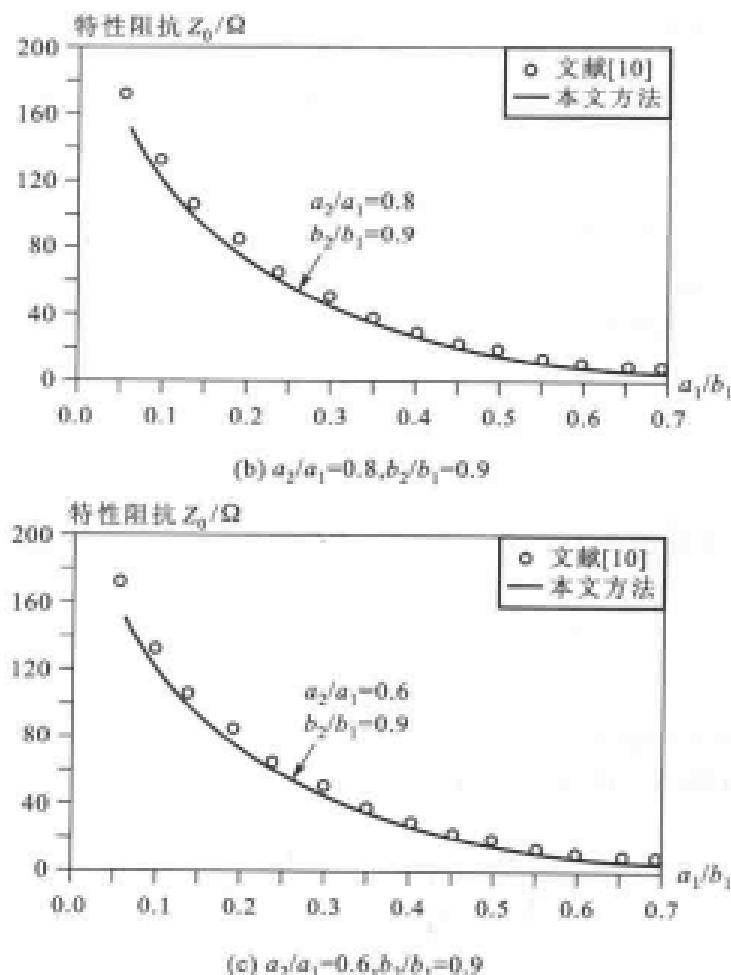


图 5-12-18 内矩外椭圆同轴线特性阻抗

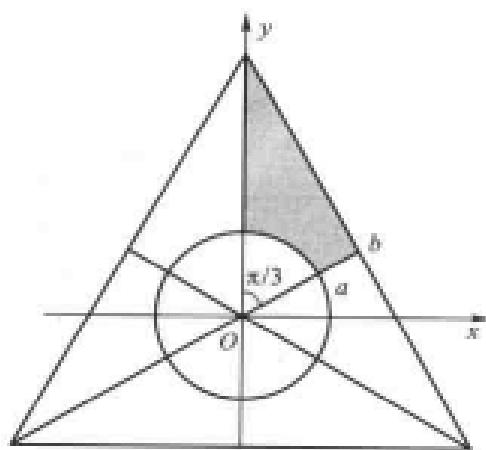


图 5-12-19 内圆外正三角形同轴线

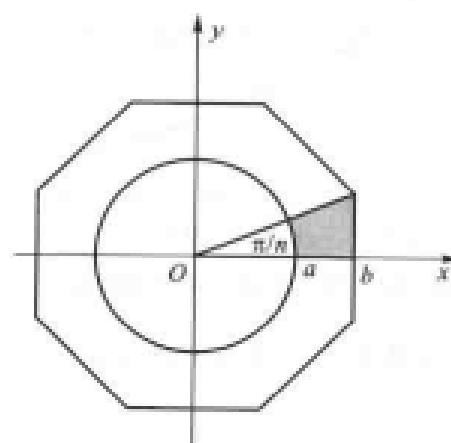


图 5-12-20 内圆外正 n 边形同轴线

若三角形边长为  $c$ , 则约束条件为

$$c > 2\sqrt{3}a \quad (5-12-60)$$

$$\begin{cases} S_1(\varphi) = 1 \\ S_2(\varphi) = \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (5-12-61)$$

综合得到其电容  $C$  的变分闭式是

$$C = 6\epsilon \frac{\int_0^{\frac{\pi}{3}} I d\varphi}{\left[ \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^2} \quad (5-12-62)$$

内圆外正三角形同轴线的特性电阻如图 5-12-21 所示。

现在可以推广到内圆外正  $n$  边形同轴线, 如图 5-12-20 所示。其  $S_1(\varphi)$  和  $S_2(\varphi)$  与式 (5-12-61) 相同, 电容  $C$  的变分闭式为

$$C = 2n\epsilon \frac{\int_0^{\frac{\pi}{n}} I d\varphi}{\left[ \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^2} \quad (5-12-63)$$

特别当  $n \rightarrow \infty$  时积分自变量  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $S_2(\varphi) \rightarrow S_1(\varphi)$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n\epsilon \frac{\frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\left[ \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^2} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (5-12-64)$$

极限式(5-12-64)即圆同轴线的电容  $C$ 。

内圆外正六边形同轴线的特性阻抗如图 5-12-22 所示。

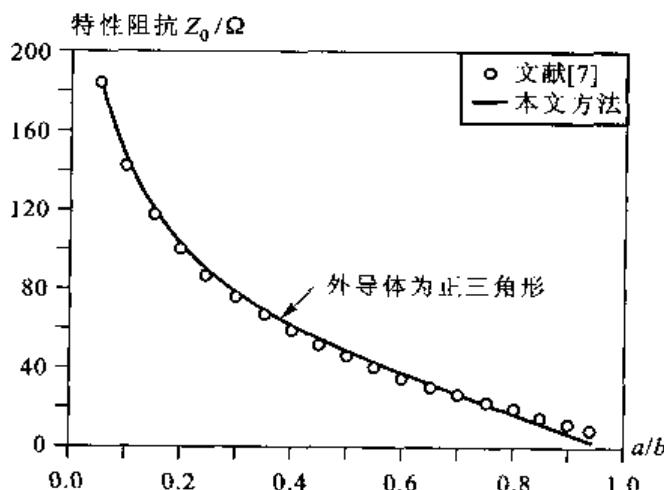


图 5-12-21 内圆外正三角形同轴线特性阻抗

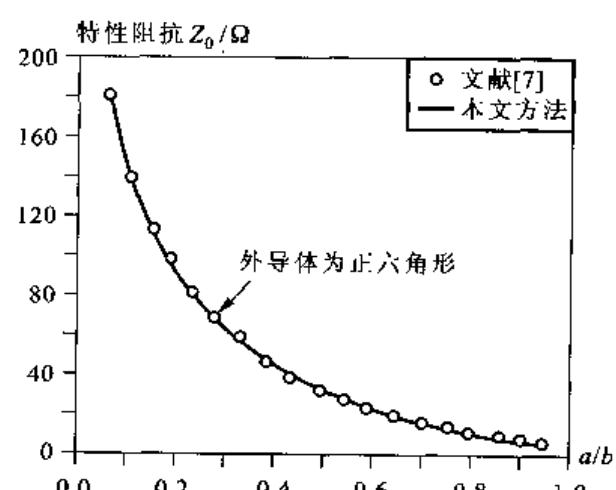


图 5-12-22 内圆外正六边形同轴线特性阻抗

如果  $n$  边形周长为  $l$ , 则约束条件可写为

$$l > 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) a \quad (5-12-65)$$

特别当  $n \rightarrow \infty$  时, 约束条件为

$$l > 2\pi a \quad (5-12-66)$$

### 三、直线段闭合线

直线段闭合线构成的同轴线可以由基本三角形和任意三角形构成。

### 情况 1: 基本三角形

基本三角形如图 5-12-23 所示。

写出直线段的一般方程

$$x + py = c \quad (5-12-67)$$

也即

$$r(\cos \varphi + p \sin \varphi) = c \quad (5-12-68)$$

可见在这种情况下

$$\begin{cases} S_1(\varphi) = (\cos \varphi + p_1 \sin \varphi)^{-2} \\ S_2(\varphi) = (\cos \varphi + p_2 \sin \varphi)^{-2} \end{cases} \quad (5-12-69)$$

其余理论均与以上讨论完全相同。

### 情况 2: 任意三角形

任意三角形如图 5-12-24 所示。

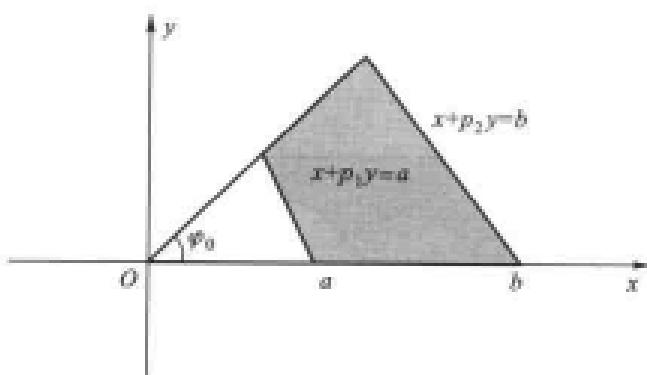


图 5-12-23 基本三角形

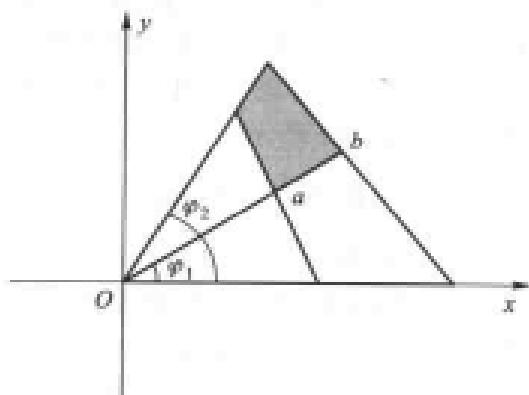


图 5-12-24 任意三角形

这时可写出

$$\begin{cases} r[\cos(\varphi - \varphi_1) + p \sin(\varphi - \varphi_1)] = c \\ \text{即 } \varphi = \varphi_1 \text{ 时 } r = c \end{cases} \quad (5-12-70)$$

于是有

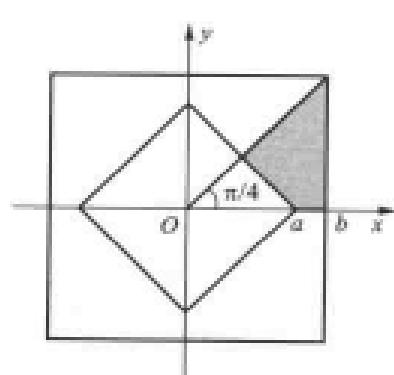


图 5-12-25 内菱形外正方形同轴线

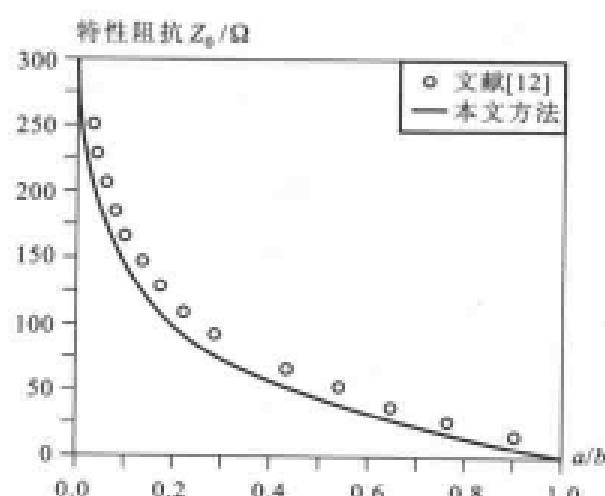


图 5-12-26 内菱形外正方形同轴线特性阻抗

$$\begin{cases} S_1(\varphi) = [\cos(\varphi - \varphi_1) + p_1 \sin(\varphi - \varphi_1)]^2 \\ S_2(\varphi) = [\cos(\varphi - \varphi_1) + p_2 \sin(\varphi - \varphi_1)]^2 \end{cases} \quad (5-12-71)$$

根据直线段逼近曲线的思路,采用直线段理论也可解决任意复杂截面同轴线的情况。作为一个典型例子,求解内菱形外正方形的同轴线,如图 5-12-25 所示。

这时所对应的

$$\begin{cases} S_1(\varphi) = (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 \\ S_2(\varphi) = \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (5-12-72)$$

很容易采用普遍理论得到结果,内菱形外正方形同轴线的特性阻抗如图 5-12-26 所示。

#### 四、复杂闭合曲线

复杂闭合曲线包括各种情况:如问题缺乏对称性、闭合曲线函数复杂等等。但是,可以发现采用普遍理论求解复杂闭合曲线有着同样简洁和小的计算量。

作为例子,考虑矩形内不对称圆同轴线的情况,

如图 5-12-27 所示。

这个问题是  $\frac{1}{2}$  对称,要计算 4 个三角形,具体可给出计算实例,若  $h/b=0.5$ ,  $b_2/b=0.75$ ,则该矩形内不对称圆同轴线的特性阻抗如图 5-12-28 所示,等位线如图 5-12-29 所示。

接着考虑圆内不对称圆同轴线的情况,如图 5-12-30 所示。在  $h/b=0.5$  的情况下,圆内不对称圆同轴线的特性阻抗如图 5-12-31 所示,等位线如图 5-12-32 所示。

最后,考虑椭圆内不对称圆同轴线的情况,如图 5-12-33 所示。

对于  $h/b=0.5$ ,  $b_2/b=0.75$  的情况,椭圆内不对称圆同轴线的特性阻抗如图 5-12-34 所示,等位线如图 5-12-35 所示。

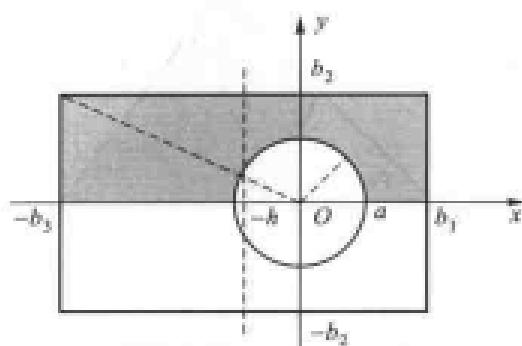


图 5-12-27 矩形内不对称圆同轴线

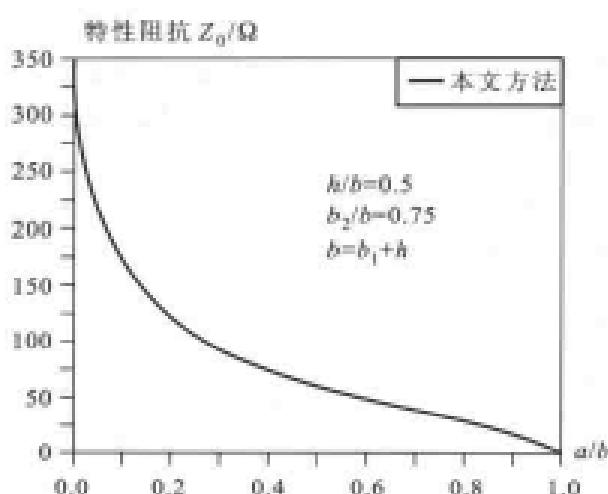


图 5-12-28 矩形内不对称圆同轴线特性阻抗

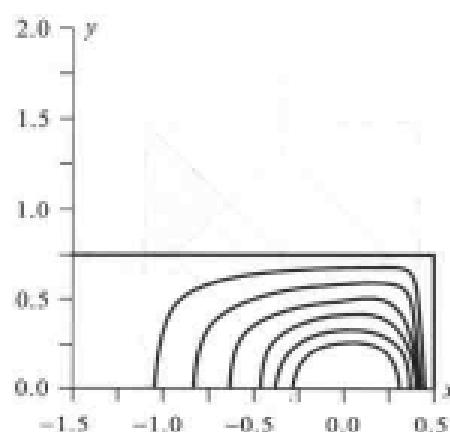


图 5-12-29 矩形内不对称圆同轴线等位线

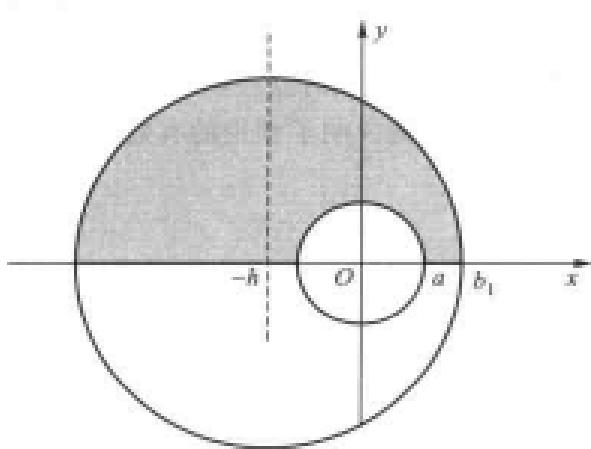


图 5-12-30 圆内不对称圆同轴线

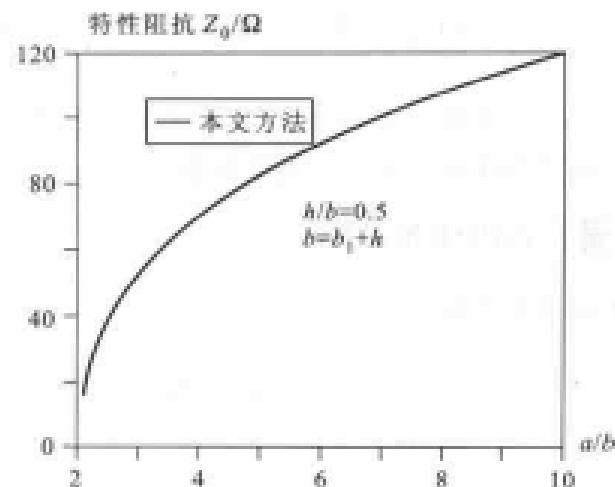


图 5-12-31 圆内不对称圆同轴线特性阻抗

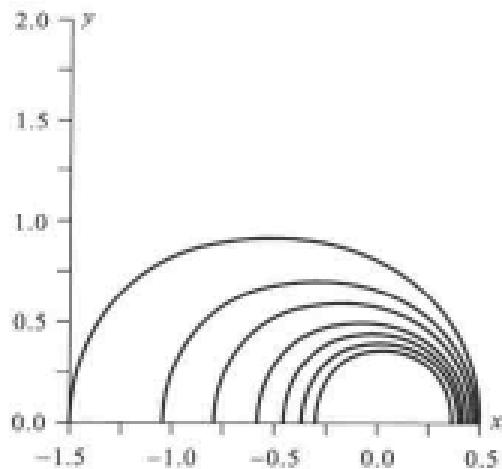


图 5-12-32 圆内不对称圆同轴线等位线

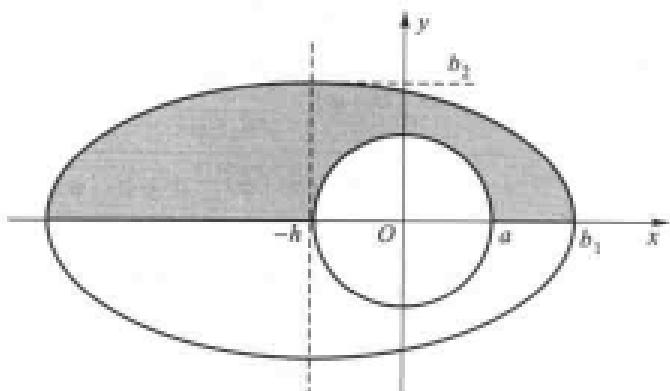


图 5-12-33 椭圆内不对称圆同轴线

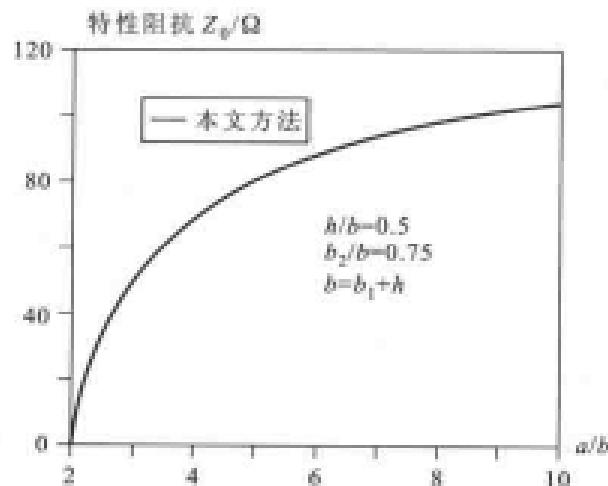


图 5-12-34 椭圆内不对称圆同轴线特性阻抗

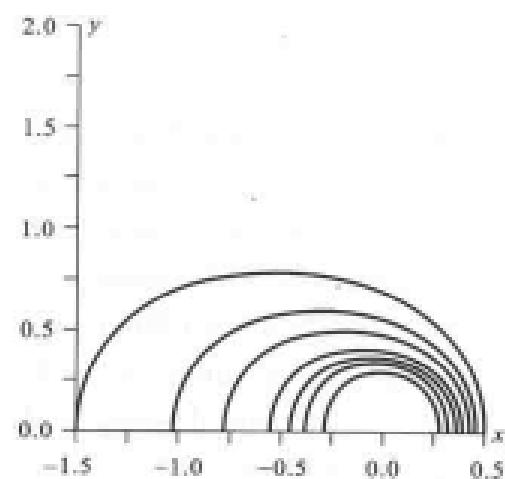


图 5-12-35 椭圆内不对称圆同轴线等位线

本节提出的任意截面同轴线电容 C 变分闭式的普遍理论,几乎可包括所有复杂的同轴线问题。

问题假设的位函数  $\Phi(r, \varphi)$  不仅满足边界条件,而且使线间电压 U 保持路径的不变性。

本节的理论解决了一批原先很难分析的问题,所列举的典型实例说明了理论的有效性。

## 附录 APPENDIX

由普遍理论可知

$$k(\varphi) = \sqrt{S_1(\varphi)S_2(\varphi)} \cdot \frac{\sqrt{S_2(\varphi)} - \sqrt{S_1(\varphi)}}{b\sqrt{S_1(\varphi)} - a\sqrt{S_2(\varphi)}}$$

$$h(\varphi) = \frac{bS_1(\varphi) - aS_2(\varphi)}{b\sqrt{S_1(\varphi)} - a\sqrt{S_2(\varphi)}}$$

容易导出

$$k' = \frac{S_1(\varphi)'S_2(\varphi) + S_1(\varphi)S_2(\varphi)'}{2\sqrt{S_1(\varphi)S_2(\varphi)}} \cdot \frac{\sqrt{S_2(\varphi)} - \sqrt{S_1(\varphi)}}{b\sqrt{S_1(\varphi)} - a\sqrt{S_2(\varphi)}} + \frac{\sqrt{S_1(\varphi)S_2(\varphi)}}{2}$$

$$\frac{(b-a)\left[S_2(\varphi)' \frac{\sqrt{S_1(\varphi)}}{\sqrt{S_2(\varphi)}} - S_1(\varphi)' \frac{\sqrt{S_2(\varphi)}}{\sqrt{S_1(\varphi)}}\right]}{(b\sqrt{S_1(\varphi)} - a\sqrt{S_2(\varphi)})^2}$$

$$h' = \left\{ b2\sqrt{S_1(\varphi)}S_1(\varphi)' + a2\sqrt{S_2(\varphi)}S_2(\varphi)' + ab\left[\sqrt{S_1(\varphi)}\left(\frac{\sqrt{S_1(\varphi)}}{\sqrt{S_2(\varphi)}} - 2\right)S_2(\varphi)' \right.\right.$$

$$\left. \left. + \sqrt{S_2(\varphi)}\left(\frac{\sqrt{S_2(\varphi)}}{\sqrt{S_1(\varphi)}} - 2\right)S_1(\varphi)'\right]\right\} / 2(b\sqrt{S_1(\varphi)} - a\sqrt{S_2(\varphi)})^2$$

## 参 考 文 献

- [1] R. E. Collin. Field Theory of Guided Waves. New York: McGraw-Hill, 1960.
- [2] M. A. Guston. Microwave transmission Line Impedance Data. London: VNR, 1972.
- [3] H. J. Riblet. The Characteristic Impedance of a Family of Rectangular Coaxial Structures with off-Centered Strip Inner Conductors. IEEE Trans. MTT, Apr. 1979, 27(4): 294 - 298.
- [4] R. Levy. Improved Single and Multiaperture Waveguide Coupling Theory, Including Explanation of Mutual Interactions. IEEE Trans. MTT, Apr. 1980, 28(4): 331 - 338.
- [5] W. Lin. A Critical Study of the Coaxial Transmission Line Utilizing of Both Circular and Square Cross Section. IEEE Trans. MTT, Nov. 1982, 82(11): 1981 - 1988.
- [6] T. K. Seshadri, K. Rajiah. Eigenfunction Solution of a Class of TEM Transmission Line. IEE Proceedings II, Aug. 1984, 131(4): 279 - 280.

- [7] 潘生根. 复杂截面同轴线传输线特性阻抗计算的一种新方法. 中国科学 A 辑, 1986(9), 999~1007.
- [8] 林为干, 潘威炎. 具有矩形柱内导体圆柱外导体的同轴线的特性阻抗. 电子学报, 1979(2).
- [9] 曾令儒. 特种截面传输线特性阻抗计算的一种方法. 中国科学 A 辑, 1983(4), 357~368.
- [10] 林为干, 曾令儒. 橡国外导体—矩形内导体同轴线的特性阻抗. 物理学报, 1981, 30(1).

5-13

## 导体薄片的电容闭式 Closed-Form Formulae For Capacitance Of Conductor Sheet

微波通信在迅速地发展, 其中一个重大的变化便是集总参数和分布参数之间的界限变得模糊。在很多分布参数滤波器中必须添加若干集总元件; 同样在集总参数系统中又有分布参数的相互耦合和作用。因此, 在理论设计中任意形状的导体薄片电容和任意形状的导线电感成了众多学者十分关注的问题。

本节将着重研究任意形状导体薄片的电容闭式, 这个问题的困难有二: 一是导体薄片上的电荷分布呈边缘奇异增长; 二是任意形状问题很难做出统一的处理。

直到目前为止, 只有无限薄导体圆盘存在电容  $C_0$  的精确闭式, 如图 5-13-1 所示。

在这种情况下, 电荷密度与  $\varphi$  无关, 是  $r$  的函数, 即  $\sigma(r)$  可写为<sup>[1]</sup>

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}} \quad (5-13-1)$$

于是, 圆盘总电荷  $Q$  是

$$Q = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} \sigma(r) r dr = 2\pi \int_0^{r_0} \frac{\sigma_0 r dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}}$$

引入  $\bar{r} = r/r_0$ , 进一步得到

$$Q = \pi r_0^2 \sigma_0 \int_1^0 \frac{d(1 - \bar{r}^2)}{\sqrt{1 - \bar{r}^2}} = 2\pi r_0^2 \sigma_0 \quad (5-13-2)$$

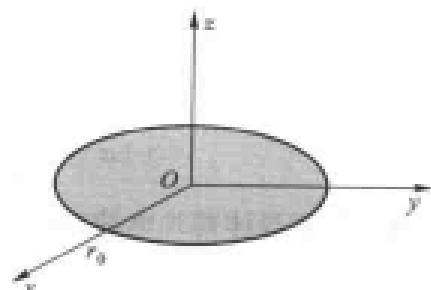


图 5-13-1 无限薄导体圆盘

考虑到导体圆盘上电压  $U$  处处相等, 只需求坐标中心  $O$  处, 有

$$U = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_0}^{r_0} \frac{\sigma(r) r dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{r_0 \sigma_0}{2\epsilon_0} \arcsin(\bar{r}) \Big|_0^1 = \frac{r_0 \sigma_0}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (5-13-3)$$

最后得到导体圆盘的精确电容  $C_0$  是

$$C_0 = \frac{Q}{U} = 8\epsilon_0 r_0 = \frac{2r_0}{9\pi} \cdot 10^{-9} \text{ F} \quad (5-13-4)$$

这是导体薄片中很少能获得的精确电容闭式, 本节中, 要把这个结果推广到任意形状的导体薄片情况。

## 一、曲线边界的导体薄片电容

事实上, 把导体圆盘的情况推广到任意曲线边界的导体薄片概念十分简单, 它基于两个思想: ①任意导体薄片的边缘都是奇异电荷分布; ②任何尖劈电荷分布与劈的角度直接有关, 而在薄片时即相当于  $360^\circ$  尖劈, 这种情况下电荷密度呈平方根倒数分布。有了上面的原则, 就可以引入  $S(\varphi)$  函数来解决曲线边界导体薄片的电容问题。

这里, 首先以椭圆导体盘为例进行分析, 椭圆方程为

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (5-13-5)$$

假定  $b \geq a$  不失一般性, 如图 5-13-2 所示。

方程(5-13-5)有一个等效的极坐标表示, 即

$$r_0 \sqrt{S(\varphi)} = 1 \quad (5-13-6)$$

式中

$$S(\varphi) = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \quad (5-13-7)$$

而由确定任意导体薄片电荷密度  $\sigma(r, \varphi)$  的方法, 可以写出

$$\sigma(r, \varphi) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - r^2 S(\varphi)}} \quad (5-13-8)$$

注意到, 式(5-13-8)中的  $r$  并不是  $r_0$ , 且  $r \leq r_0$ , 特别当  $a=b$  时它与导体圆盘结果完全一致, 而式(5-13-8)的形式满足平方根倒数规律。

先求出椭圆导体盘上总的电荷  $Q$ , 有

$$Q = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r_0}^{r_0} \frac{\sigma_0 r dr}{\sqrt{1 - r^2 S(\varphi)}} = 4\sigma_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{S(\varphi)} = 2\pi ab\sigma_0 \quad (5-13-9)$$

同样理由, 也只要求出椭圆导体盘的中心电压  $U$  即可, 它得到

$$U = \frac{4}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r_0}^{r_0} \frac{\sigma_0 dr}{\sqrt{1 - r^2 S(\varphi)}} \quad (5-13-10)$$

引入  $r' = r \sqrt{S(\varphi)}$ , 可知

$$U = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{S(\varphi)}} = \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} K(k) \quad (5-13-11)$$

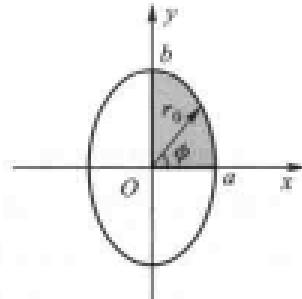


图 5-13-2 椭圆导体盘

其中,  $k = \sqrt{b^2 - a^2}/b$  ( $b > a$ ), 而  $K(k)$  是模数为  $k$  的第一类完全椭圆函数。

最后得到, 椭圆导体盘的电容  $C$  为

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 a}{K(k)} \left( \frac{b}{a} \right) \text{ F} \quad (5-13-12)$$

当  $a=b$  时,  $K(0)=\frac{\pi}{2}$ , 则式(5-13-12)即退化为式(5-13-4)的圆盘电容公式  $C_0 = 8\epsilon_0 a$ 。

于是, 可以引入归一化电容  $\bar{C}$  的概念, 其定义是

$$\bar{C} = \frac{C}{C_0} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{K(k)/\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (5-13-13)$$

$\bar{C}$  和模数  $k$  的关系如图 5-13-3 所示。

注意到式(5-13-12)的结果在 Stratton 的文献<sup>[1]</sup>中也已列出。明确地说它也是精确的解析闭式解。

进一步推广, 对于大多数有二次曲线形式的导体薄片, 即

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy = 1 \quad (5-13-14)$$

还是能写出  $r^2 S(\varphi) = 1$ , 因此, 在极坐标中有

$$S(\varphi) = a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi + 2c \sin \varphi \cos \varphi \quad (5-13-15)$$

于是可得到电容  $C$  的解析闭式为

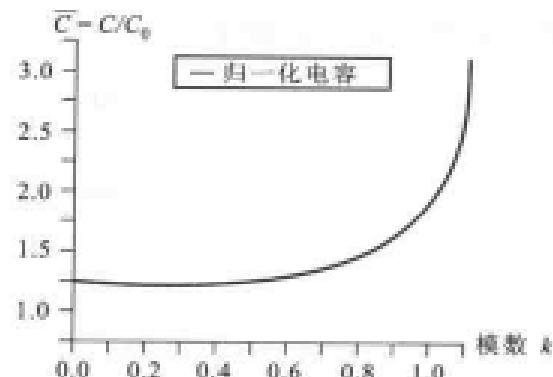


图 5-13-3 归一化电容  $\bar{C}$  和模数  $k'$  的关系

$$C = 8\epsilon_0 \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{S(\varphi)}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{S(\varphi)}} d\varphi} \text{ F} \quad (5-13-16)$$

特别应该指出, 上述思想完全可以推广到更复杂的曲线形式, 而且在有些情况下, 结果是精确的闭式。

## 二、任意形状导体片的电容

任意形状导体片的电容可以从基本三角形来着手研究, 因为任意形状均可以由三角形拼接而成。

图 5-13-4 所示为基本三角形图形, 特别注意到  $x=x_0$  表示三角形的边界, 假定  $r_2 > r_1$  不失一般性。三角形处于  $\varphi_1$  与  $\varphi_0 + \varphi_1$  之间, 考虑到  $\varphi_1$  为任意值, 图 5-13-4 包括各种三角形的情况。

这种情况下, 电荷密度可假定为

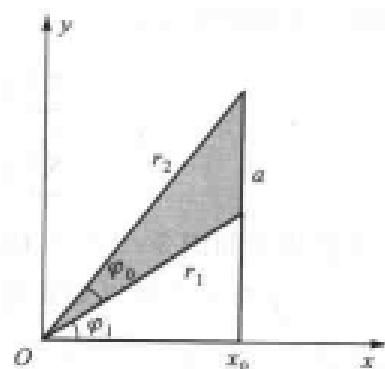


图 5-13-4 基本三角形

$$\sigma(r, \varphi) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{r \cos \varphi}{x_0}\right)^2}} \quad (5-13-17)$$

基本三角形 $\triangle_i$ 在中心 $O$ 的电压 $U_i$ 由下式给出

$$U_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \varphi_0} d\varphi \int_0^{x_0} \frac{\sigma_0 r dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r \cos \varphi}{x_0}\right)^2}} = \frac{\sigma_0 x_0}{8\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 - \sin \varphi_1}{1 + \sin \varphi_1} \cdot \frac{1 + \sin(\varphi_1 + \varphi_0)}{1 - \sin(\varphi_1 + \varphi_0)} \right] \right\} \quad (5-13-18)$$

而在基本三角形 $\triangle_i$ 上的总电荷 $Q_i$ 则可表示为

$$Q_i = \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \varphi_0} d\varphi \int_0^{x_0} \frac{\sigma_0 r dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r \cos \varphi}{x_0}\right)^2}} = \sigma_0 x_0^2 [\tan(\varphi_1 + \varphi_0) - \tan \varphi_1] \quad (5-13-19)$$

根据 $\triangle_i$ 的基本关系, 容易得到

$$\begin{cases} \sin \varphi_1 = \frac{r_2 \cos \varphi_0 - r_1}{a} \\ \sin(\varphi_0 + \varphi_1) = \frac{r_2 - r_1 \cos \varphi_0}{a} \\ \tan \varphi_1 = \frac{r_2 \cos \varphi_0 - r_1}{r_2 \sin \varphi_0} \\ \tan(\varphi_0 + \varphi_1) = \frac{r_2 - r_1 \cos \varphi_0}{r_2 \sin \varphi_0} \end{cases} \quad (5-13-20)$$

其中

$$a = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi_0} \quad (5-13-21)$$

于是可以重新写出 $U_i$ 和 $Q_i$ 如下

$$U_i = \frac{\sigma_0}{8\epsilon_0 a} r_1 r_2 \sin \varphi_0 \left\{ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{a + r_1 - r_2 \cos \varphi_0}{a - r_1 + r_2 \cos \varphi_0} \cdot \frac{a + r_2 - r_1 \cos \varphi_0}{a - r_2 + r_1 \cos \varphi_0} \right) \right\} \quad (5-13-22)$$

$$Q_i = \sigma_0 r_1 r_2 \sin \varphi_0 \quad (5-13-23)$$

很容易把任意导体盘划分成若干个基本三角形, 并且把它们的电荷和电位场叠加起来, 比值即表示任意形状导体盘的电容 $C$

$$C = \frac{\sum_i Q_i}{\sum_i U_i} \quad (5-13-24)$$

现在研究如图 5-13-5 所示正 $n$ 多边形,  $r_0$ 由图上给出, 这个参量之所以如此选取是因为当 $n \rightarrow \infty$ 时可以与圆的情况做出比较。只要选择 $\frac{1}{2n}$ 部分对称做基本三角形即可, 这时电容的闭式是

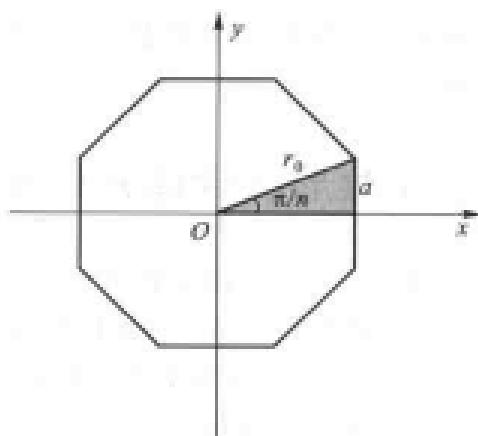


图 5-13-5 正 $n$ 边形,  $\frac{1}{2n}$ 对称部分

是它的基本三角形, 对应夹角是 $\frac{\pi}{n}$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{8\epsilon_0 r_0 \sin(\pi/n)}{\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)} \right]} \text{ F} \quad (5-13-25)$$

由式(5-13-25)可以明显看出,  $n \rightarrow \infty$  时  $C = C_0 = 8\epsilon_0 r_0$ , 即等于圆盘电容。

另一方面, 当  $n=4$ , 即考虑正方形导体片电容时, 由于

$$a = r_0 \sin \varphi_0 = r_0 \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \quad (5-13-26)$$

可以写出

$$C = \frac{8a\epsilon_0}{\ln(\sqrt{2}+1)} = \frac{(2a)}{9\pi \ln(\sqrt{2}+1)} \times 10^{-9} \text{ F} \quad (5-13-27)$$

特别需要指出, 当  $2a=1$  m 时, Richardson(理查得森)<sup>[2]</sup>中给出了结果  $C_0 = 40.8097$  pF, 而根据式(5-13-27)可算出为  $C=40.1280$  pF, 其相对误差小于 1.67%。

表 5-13-1 给出了正  $n$  边形导体板采用矩量法与解析闭式(5-13-25)两者之间的相对误差,  $r_0$  取 1 m。

表 5-13-1 正  $n$  边形导体板电容/pF  
矩量法计算结果与解析闭式(5-13-25)之比较

$r_0 = 1$  m

$n$	矩量法结果	解析闭式结果	相对误差
5	61.6770	61.7463	0.112%
6	64.1826	64.4741	0.452%
7	65.6940	66.1389	0.673%
8	66.7726	67.2278	0.677%
10	68.0738	68.5169	0.647%
20	69.7819	70.2503	0.667%

完全类似, 图 5-13-6 给出了  $2a \times 2b$  矩形导体板的情况, 在不同  $b/a$  比值条件下, 这种矩形导体板的电容采用矩量法与解析闭式计算的结果及其相对误差如表 5-13-2 所示。

表 5-13-2 不同  $b/a$  比值条件下,  $2a \times 2b$  导体板电容/pF 采用矩量法  
计算与解析闭式(5-13-28)之结果误差比较( $a=1$  m)

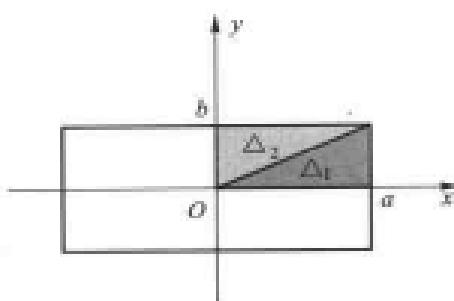
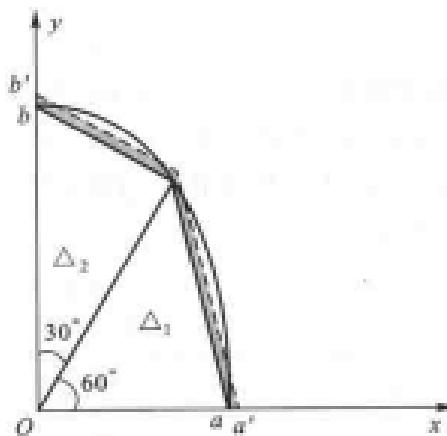
$\frac{b}{a}$	矩量法结果	解析闭式结果	相对误差
2	118.070984	117.756042	0.2667%
2.5	134.216605	135.056009	0.6215%
3	150.458645	151.739670	0.8442%
3.5	165.688726	167.928394	1.3337%

它的解析闭式如下所示:

$$C = 8\epsilon_0 a \left\{ \frac{2 \left( \frac{b}{a} \right)}{\ln \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2} + \left( \frac{b}{a} \right) \right] + \left( \frac{b}{a} \right) \ln \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{a}{b} \right)^2} + \left( \frac{a}{b} \right) \right]} \right\} \quad (5-13-28)$$

作为另一个例子,采用两个基本三角形去逼近 $\frac{1}{4}$ 椭圆,如图 5-13-7 所示。其中对第一个三角形 $\triangle_1$ , $\varphi_0 = 60^\circ$ ;而对第二个三角形 $\triangle_2$ 则有 $\varphi_0 = 30^\circ$ ,较好的一种逼近方法是令 $\triangle_1 + \triangle_2$ 的面积等于 $\frac{1}{4}$ 椭圆面积,也即所谓“等积近似”。假定两个椭圆内接三角形所计算出的电容为 $C'$ ,那么根据等积逼近的概念,获得较精确的电容 $C$ 只需要在 $C'$ 前乘上等积因子 $P$ ,也即

$$C = PC' \quad (5-13-29)$$

图 5-13-6  $2a \times 2b$  矩形导体板图 5-13-7 用两个基本三角形逼近 $\frac{1}{4}$ 椭圆(等积近似法)

已知半短轴 $a$ 和模数 $k = \sqrt{b^2 - a^2}/b = \frac{1}{2}$ ,容易算出

$$P = 1.064\ 291\ 943 \quad (5-13-30)$$

计算过程如表 5-13-3 所示。

表 5-13-3 采用两个基本三角形逼近椭圆导体板的计算过程

	(基本三角形) $\triangle_1(\varphi_0 = 60^\circ)$	(基本三角形) $\triangle_2(\varphi_0 = 30^\circ)$
$U_i$	$1.001\ 634\ 276 \frac{\sigma_0 a}{8\varepsilon_0}$	$0.579\ 042\ 393 \frac{\sigma_0 a}{8\varepsilon_0}$
$Q_i$	$0.960\ 768\ 922\sigma_0 a^2$	$0.640\ 512\ 614\sigma_0 a^2$
$\sum_{i=1}^2 U_i$		$1.580\ 676\ 669 \frac{\sigma_0 a}{8\varepsilon_0}$
$\sum_{i=1}^2 Q_i$		$1.601\ 281\ 536\sigma_0 a^2$
$C' = \frac{4 \sum_{i=1}^2 Q_i}{4 \sum_{i=1}^2 U_i}$	$8\varepsilon_0 a (1.013\ 035\ 473\ 4)$	椭圆导体板电容 $C_o = \frac{8\varepsilon_0 a}{K(k)} \left( \frac{b}{2} \right)^2$ $= 8\varepsilon_0 a (1.075\ 927\ 965)$
$C = PC'$	$8\varepsilon_0 a (1.078\ 165\ 492\ 3)$	

十分清楚,采用两个基本三角形逼近和解析闭式(5-13-12)之间的误差是

$$\delta = \frac{C - C_0}{C_0} = 0.208\% \quad (5-13-31)$$

由此可见,这里所提出的方法相当有效。

### 三、电荷重心的变分原理

回顾本节所提出的方法,关键的思想可以归结为两条:一是正确假定了导体板边缘电荷密度呈平方根反比分布;二是由此计算电荷重心处的电位。

正是第一条思想使这种方法得到简洁闭式并取得较大的成功;然而第二条思想却带来了很多不确定性问题。理论上来说,导体板上的电位应该处处相等。而假定电荷均匀分布后只计算中心一点的电压  $U$ ,这两者之间显然存在着很大的矛盾。

如果导体板是一个对称性十分完美的图形(例如圆或椭圆等)。那么即使在严格理论中一时没有获得解决,选择对称中心作为电荷分布函数的重心不会引起多大的异议。然而,如果是任意图形,则什么是电荷重心、如何寻找电荷重心就变成了一个十分重要的问题。

下面首先以偏心导体圆盘作为典型例子来说明:在正确电荷重心的情况下算得的电容比不正确的电荷重心情况下算得的电容大。

偏心圆导体板如图 5-13-8 所示,所选择的电荷重心偏离圆心  $x_0$ 。

这时圆方程可以写出

$$(x - x_0)^2 + y^2 = a^2 \quad (5-13-32)$$

采用归一化极坐标,重新给出

$$(\bar{r}_0 - \bar{x}_0 \cos \varphi)^2 + \bar{x}_0^2 \sin^2 \varphi = 1 \quad (5-13-33)$$

其中,  $\bar{r}_0 = r_0/a$ ;  $\bar{x}_0 = x_0/a$ , 注意到这里  $\bar{r}_0$  和  $r_0$  均处于导体圆盘边缘, 于是能得到偏心导体圆盘的电荷密度  $\sigma(r, \varphi)$  函数, 为

$$\begin{aligned} \sigma(r, \varphi) &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - (\bar{x}_0 \sin \varphi)^2 - (\bar{r} - \bar{x}_0 \cos \varphi)^2}} \\ &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - (\bar{x}_0 \sin \varphi)^2} \sqrt{1 - \left[ \frac{\bar{r} - \bar{x}_0 \cos \varphi}{1 - (\bar{x}_0 \sin \varphi)^2} \right]^2}} \end{aligned} \quad (5-13-34)$$

其中,  $r \leq r_0$  是可变矢量, 在这种情况下, 原有导体圆盘的  $\frac{1}{4}$  对称演变成只有偶对称, 且对于偏心  $O$  的电压  $U$  为

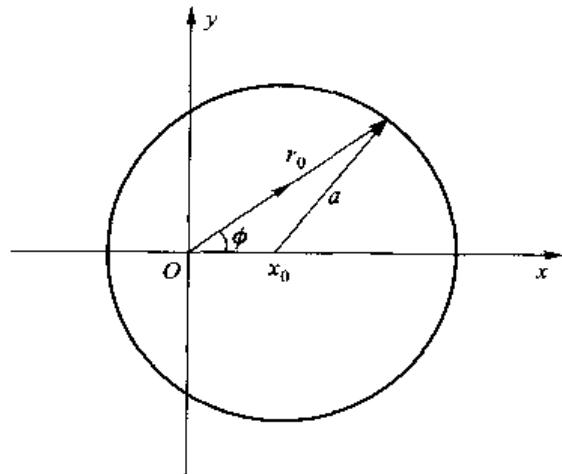


图 5-13-8 偏心导体圆盘

$$U = \frac{2\sigma_0 a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sqrt{(\bar{x}_0 + \bar{x}_0 \cos \varphi)^2}} \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - (\bar{x}_0 \sin \varphi)^2}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{\pi a \sigma_0}{4\epsilon_0} \quad (5-13-35)$$

注意到在上面的计算中已考虑到  $(\bar{x}_0 + \bar{x}_0 \cos \varphi) = \sqrt{1 - (\bar{x}_0 \sin \varphi)^2}$ , 另一方面总电荷  $Q$  为

$$\begin{aligned} Q &= 2a^2 \sigma_0 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\bar{x}_0} \frac{\bar{r} d\bar{r}}{\sqrt{1 - (\bar{x}_0 \sin \varphi)^2} \sqrt{1 - \left[ \frac{(\bar{r} - \bar{x}_0 \cos \varphi)}{\sqrt{1 - (\bar{x}_0 \sin \varphi)^2}} \right]^2}} \\ &= 2a^2 \sigma_0 \int_0^\pi \sqrt{1 - (\bar{x}_0 \sin \varphi)^2} d\varphi + 2a^2 \sigma_0 \int_0^\pi \bar{x}_0 \cos \varphi d\varphi \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= 4a^2 \sigma_0 E(\bar{x}_0) \end{aligned} \quad (5-13-36)$$

式中,  $E(\bar{x}_0)$  是带模数为  $\bar{x}_0$  的第二类完全椭圆积分, 在这种重心条件下电容  $C$  为

$$C = 8a\epsilon_0 \left[ \frac{E(\bar{x}_0)}{\pi/2} \right] F \quad (5-13-37)$$

最后得出, 归一化电容  $\bar{C}$  表示同一导体圆盘时, 偏心电容  $C$  与不偏电容  $C_0$  之比值, 有

$$\bar{C} = \frac{C}{C_0} = \left[ \frac{E(\bar{x}_0)}{\pi/2} \right] \quad (5-13-38)$$

图 5-13-9 给出了归一化电容  $\bar{C}$  与模数  $\bar{x}_0$  的函数关系。

十分明显的一个结论是: 正确的电荷重心算得的电容值最大, 即

$$C = C_{\max} \quad \bar{x}_0 = 0 \quad (5-13-39)$$

从偏心导体圆盘所获得的这个结论是否有着普遍的意义? 现在还仅仅是一个初步的猜测, 要证明这一猜测为事实, 先重新写出本节求电容  $C$  的方法。

$$C = \frac{Q}{U} \quad (5-13-40)$$

将式(5-13-40)分子分母同乘总电荷  $Q$ , 计及在导体板上电压  $U$  是常数, 可得到

$$C = \frac{Q^2}{2W} \quad (5-13-41)$$

式中,  $W$  表示电场储能, 且有  $W = \frac{1}{2} UQ$ 。于是满足正确边缘效应的不同电荷重心, 可以把问题归结为: 正确的电荷重心对应正确的电容  $C_0$ 。

由 Thomson 变分原理可知: 正确的电荷分布保持  $W_{\min}$ , 于是有

$$C_0 = C_{\max} \quad (5-13-42)$$

换句话说, 选择电容最大的重心将是正确的重心。

这样就较全面地解决了这一问题。

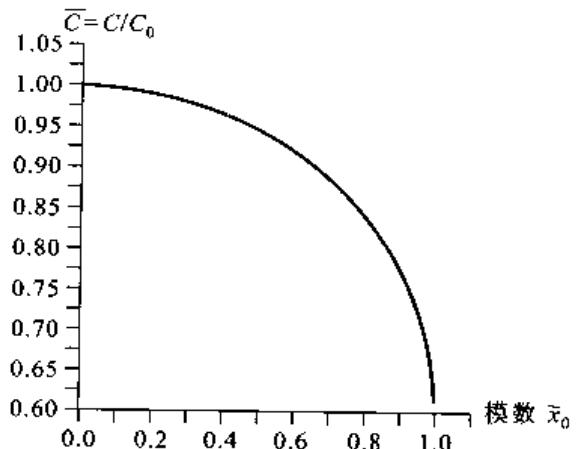
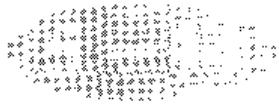


图 5-13-9 归一化电容  $\bar{C}$  与模数  $\bar{x}_0$  的函数关系

## 参 考 文 献

- [1] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, New York, McGraw-Hill, 1941.  
 [2] R. Bancroft, A Note on the Moment Method Solution for the Capacitance of a Conducting Flat Plate, IEEE Trans. AP, 1997, 45(11):1704.



# Green 函数法 Method of Green's Function

Green(格林)函数法解决一类普遍的物理问题,其中不仅在电磁场,而且在力学、流体和空气动力学等方面均有广泛的应用。

这里将重点讨论 Green 函数的概念和它的计算。

## 一、Green 函数法

### 1. $\delta$ 函数

$\delta$  函数是一种广义函数,在一维的条件下有定义

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x=0 \end{cases} \quad (5-14-1)$$

和它对应的两个重要性质为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{归一性}) \quad (5-14-2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (\text{选择性}) \quad (5-14-3)$$

$\delta$  函数有各种物理解释,其中之一是“概率事件”中必然事件的概率密度。

### 2. Green 函数

Green 函数的问题提法源自算子方程:在复杂区域  $V$  内部有任意源  $g$ ,待求的场  $u$  服从

$$L(u) = g \quad (5-14-4)$$

然而很难求出  $L$  的逆算子  $L^{-1}$ ,于是对算子  $L$  重新提出 Green 方程问题,若存在  $\delta(\vec{r}/\vec{r}')$  源,则对应  $L$  算子的场称之为 Green 函数,对应的 Green 方程是

$$L[G(\vec{r}/\vec{r}')] = \delta(\vec{r}/\vec{r}') \quad (5-14-5)$$

Green 函数问题如图 5-14-1 所示。

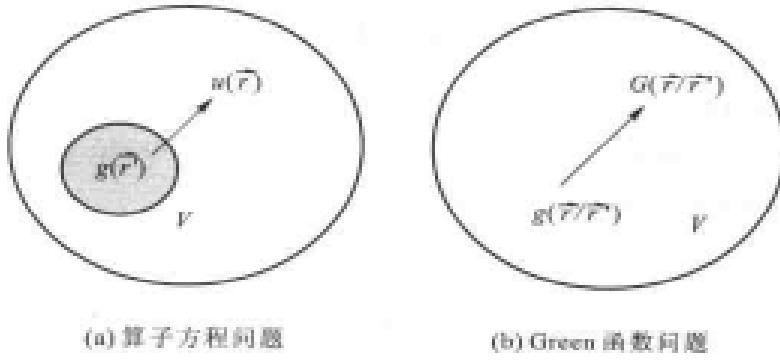


图 5-14-1 Green 函数法 [ $L\{u\} = g$ ]

为了普遍化, 把  $\delta$  函数的归一性积分写成

$$g(\vec{r}) = \langle g(\vec{r}'), \delta(\vec{r}/\vec{r}') \rangle \quad (5-14-6)$$

其中,  $\langle \cdot \rangle$  是 Dirac(迪拉克)内积符号, 表示积分或  $\Sigma$ 。注意到  $\langle \cdot \rangle$  只对  $\vec{r}'$  起作用, 而  $L$  则对  $\vec{r}$  起作用, 可以建立等式

$$\langle g(\vec{r}'), L[G(\vec{r}/\vec{r}')] \rangle = g(\vec{r}) \quad (5-14-7)$$

考虑到算子  $L$  的线性性质, 进一步写出

$$L(g(\vec{r}'), G(\vec{r}/\vec{r}')) = g(\vec{r}) \quad (5-14-8)$$

对比原算子方程 (5-14-4), 很易得到

$$u(\vec{r}) = \langle g(\vec{r}'), G(\vec{r}/\vec{r}') \rangle \quad (5-14-9)$$

很容易看出, 只要求出某一类(特定支配方程和边界条件)问题的 Green 函数  $G(\vec{r}/\vec{r}')$ , 那么这一类问题中任意源  $g(\vec{r}')$  在  $\vec{r}$  点所造成的场  $u(\vec{r})$  即可由  $g(\vec{r}')$  和 Green 函数  $G(\vec{r}/\vec{r}')$  的广义内积求得。

图 5-14-2 给出 Green 函数法的思路框图。

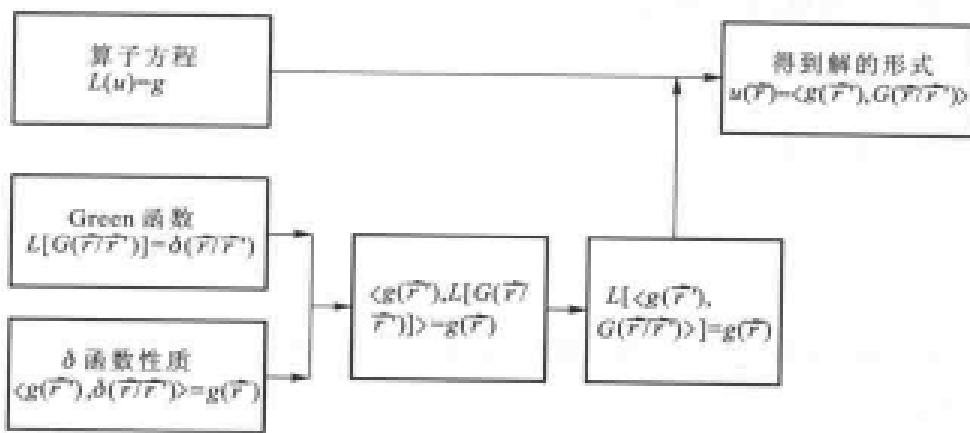


图 5-14-2 Green 函数法思路框图

〔例 1〕 研究简单的三维静场。

〔解〕 三维静场的电场为

$$\hat{E}(\vec{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5-14-10)$$

若对应有

$$\hat{E}(\vec{r}) = \langle \rho(\vec{r}'), G(\vec{r}/\vec{r}') \rangle \quad (5-14-11)$$

把式(5-14-11)与式(5-14-10)对比,易知三维静场的 Green 函数为

$$G(\vec{r}/\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5-14-12)$$

用更广义的物理方法论来解释,Green 方程(5-14-5)可以看成是原算子方程(5-14-4)的伴随问题。若令

$$\begin{cases} u^* = G(\vec{r}/\vec{r}') \\ g^* = \delta(\vec{r}/\vec{r}') \end{cases} \quad (5-14-13)$$

则写出

$$L^*(u^*) = g^* \quad (5-14-14)$$

对于自伴问题

$$L^* = L \quad (5-14-15)$$

由伴随算子性质

$$\langle g(\vec{r}'), u^* \rangle = \langle g^*, u \rangle \quad (5-14-16)$$

计及式(5-14-13)定义和 Green 函数解式(5-14-9),正是互易定理的具体体现,如图 5-14-3 所示。

〔例 2〕采用 Green 函数法求解算子方程

$$L(u) = g$$

其中,  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ ;  $u(0) = u(1) = 0$ 。

〔解〕首先求出满足边界条件的算子  $L$  的 Green 函数,研究一般情况

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(x) = g(x) \quad (5-14-17)$$

两边积分后分别有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u(x) &= c_1 - \int_x^1 g(x') dx' \\ u(x) &= c_1 + c_2 x - \int_x^1 dx'' \int_{x''}^1 g(x') dx' \end{aligned} \quad (5-14-18)$$

上式为一般的通解形式,它的最后一项表示图 5-14-4(a)中上半三角形是从  $x'=0$  到  $x'=x''$  积分,再对  $x''=0$  到  $x''=x$  积分。

现在,变换积分次序,先对  $x''=x'$  到  $x''=x$  积分,再对  $x'=0$  到  $x'=x$  积分,有

$$u(x) = c_1 + c_2 x - \int_0^x dx' \int_{x'}^x g(x'') dx'' \quad (5-14-19)$$

也即

$$u(x) = c_1 + c_2 x - \int_0^x (x-x') g(x') dx' \quad (5-14-20)$$

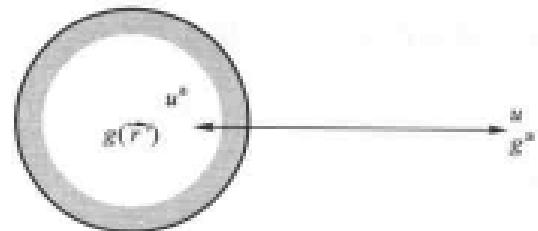


图 5-14-3 Green 函数解——

互易定理的体现

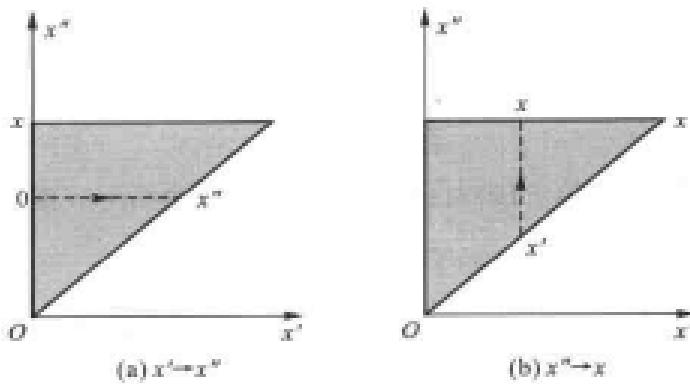


图 5-14-4 变换积分次序

还可进一步写出

$$u(x) = c_1 + c_2 x - \int_0^1 (x-x') H(x-x') g(x') dx' \quad (5-14-21)$$

其中,  $H(x-x')$  为阶梯函数, 有

$$H(x-x') = \begin{cases} 0 & x < x' \\ \frac{1}{2} & x = x' \\ 1 & x > x' \end{cases} \quad (5-14-22)$$

利用边界条件  $u(0)=0$ , 有

$$u(0) = c_1 - \int_0^1 -x' H(-x') g(x') dx' = 0$$

即可得

$$c_1 = \int_0^1 -x' H(-x') g(x') dx' = 0$$

另一边界条件  $u(1)=0$

$$u(1) = c_1 - \int_0^1 (1-x') H(1-x') g(x') dx' = 0$$

又得

$$c_1 = \int_0^1 (1-x') g(x') dx'$$

最后给出

$$u(x) = \int_0^1 [x(1-x') - (x-x') H(x-x')] g(x') dx' = \int_0^1 G(x/x') g(x') dx'$$

所以算子  $L$  的 Green 函数为

$$G(x/x') = x(1-x') - (x-x') H(x-x') \quad (5-14-23)$$

也可以把上式写成分段形式, 即

$$G(x/x') = \begin{cases} x(1-x') & x < x' \\ x'(1-x) & x > x' \end{cases} \quad (5-14-24)$$

[例 3] 若例 2 中具体源形式为  $g(x') = 1 + 4x'^2$ , 求解这时的场  $u(x)$ 。

$$\begin{aligned} [\text{解}] \quad u(x) &= \int_0^x (1-x)x'(1+4x'^2)dx' + \int_x^1 x(1-x')(1+4x'^2)dx' \\ &= (1-x)\int_0^x (x'+4x'^3)dx' + x\int_x^1 (1-x'+4x'^2-4x'^3)dx' \end{aligned}$$

最后得到

$$u(x) = \frac{5}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^2$$

由此例可以看出:一般情况下的 Green 函数求解相当困难。

### 3. Green 函数法和本征函数法

对于同一算子方程  $L(u)=g$ , 已经有了两种不同的求解方法, 即本征函数法和 Green 函数法, 它们都采用构成基础解系的其他方程如本征方程或 Green 方程, 来达到求解任意源  $g$  激励所对应的场函数  $u$  的目的, 表 5-14-1 给出这两种求解方法的基本比较。

表 5-14-1 本征函数法和 Green 函数法比较

算子方程 $L(u)=g$ 特定的边界条件	
本征函数法	Green 函数法
$L(u_n) = \lambda_n u_n$ 本征方程 $n=1, 2, \dots$	$L[G(\vec{r}/\vec{r}')] = \delta(\vec{r}/\vec{r}')$ Green 方程
$\{u_n\}$ 构成完备的基础解系 离散, 叠加	$G(\vec{r}/\vec{r}')$ 构成完备基础解系 连续, 积分(内积)
$u(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, u_n \rangle}{\lambda_n} u_n(\vec{r})$	$u(\vec{r}) = \langle g(\vec{r}'), G(\vec{r}/\vec{r}') \rangle$

很自然会提出这样一个问题:求解同一目标, 算子方程  $L(u)=g$  的本征函数  $\{u_n\}$  和 Green 函数  $G(\vec{r}/\vec{r}')$  必定存在着内在联系。重新写出表 5-14-1 所示的本征函数解

$$u(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g(\vec{r}'), u_n(\vec{r}') \rangle}{\lambda_n} u_n(\vec{r}) = \left\langle g(\vec{r}'), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(\vec{r}') u_n(\vec{r}')}{\lambda_n} \right\rangle \quad (5-14-25)$$

和表 5-14-1 中的 Green 函数解对比, 即可得到本征函数与 Green 函数的关系

$$G(\vec{r}/\vec{r}') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(\vec{r}') u_n(\vec{r}')}{\lambda_n} \quad (5-14-26)$$

[例 4] 研究算子方程  $L(u)=g$ , 其中  $L=-\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $u(0)=u(1)=0$ ,  $g=1+4x^2$ 。

给出本征函数和 Green 函数之间的联系。

[解] 已经知道, 此问题的本征函数  $u_n(x)$  与本征值分别是

$$\begin{cases} u_n(x) = \sqrt{2} \sin n \pi x & n=1, 2, \dots \\ \lambda_n = n^2 \pi^2 \end{cases}$$

首先对  $\delta$  函数作谱展开

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^l f(x') \delta(x - x') dx' \\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \pi x = \int_0^l 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \pi x \sin n \pi x' f(x') dx' \end{cases}$$

对比上面两式可知

$$\delta(x - x') = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \pi x \sin n \pi x' \quad (5-14-27)$$

再一次给出 Green 方程

$$-\frac{d^2}{dx'^2} [G(x/x')] = \delta(x - x') \quad (5-14-28)$$

假设

$$G(x/x') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n \pi x \sin n \pi x' \quad (5-14-29)$$

把式(5-14-29)代入 Green 方程(5-14-28), 可得

$$G(x/x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \sin n \pi x \sin n \pi x' \quad (5-14-30)$$

上式即  $G(x/x')$  在该算子  $L$  情况下的具体表示。因此  $u(x)$  为

$$\begin{aligned} u(x) &= \langle g(x'), G(x/x') \rangle \\ &= \int_0^l G(x/x')(1 + 4x'^2) dx' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \sin n \pi x \int_0^l (1 + 4x'^2) \sin n \pi x' dx' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 \pi^3} \left\{ 1 - 5(-1)^n - \frac{8}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \right\} \sin n \pi x \end{aligned}$$

得到与本征函数解完全相同的结果, 即式(5-9-17)。

另一方面, 以 Green 函数与本征函数联系的式(5-14-26)又一次写出

$$G(x/x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(x')}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \sin n \pi x \sin n \pi x'$$

#### 4. 电磁 Green 函数

Green 函数在电磁理论和微波工程中有着十分重要的应用, 以戴振铎为代表将其进一步扩展为并矢 Green 函数, 内容十分丰富, 如表 5-14-2 所示, 给出最基本的电磁 Green 函数。

表 5-14-2 基本电磁 Green 函数

	静场	动场
二维	$\frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}' }$	$\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k  \vec{r} - \vec{r}' )$
三维	$\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}' }$	$\frac{e^{-jk \vec{r} - \vec{r}' }}{4\pi\epsilon} \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}' }$

表中  $H_0^{(2)}$  表示第二类 0 阶 Hankel(汉克尔)函数,  $H_0^{(2)} = J_0 - jY_0$  ( $Y_0$  —— Neumann 函数)

## 二、静场方形单元的 Green 函数

前面已经提及 Green 函数对于工程应用最重要的两件事,即概念和计算。Green 函数表示电磁相互作用的“细胞”或者动场中的“传播子”,因此很多数值计算问题都是以 Green 函数为中心而展开的。因为它把 Green 函数研究透彻即意味着对于电磁作用理解的深入和升华。这里,先从三维静场情况下的方形单元 Green 函数着手研究,问题的提法是:在  $xOy$  平面上有一  $2b \times 2b$  的均匀电荷密度单元,如图 5-14-5 所示。试求电磁相互作用。

### 1. 两重不定积分

一般两重不定积分为

$$\iint F(x, y) dx dy = f(x, y) + g(x) + h(y) + c \quad (5-14-31)$$

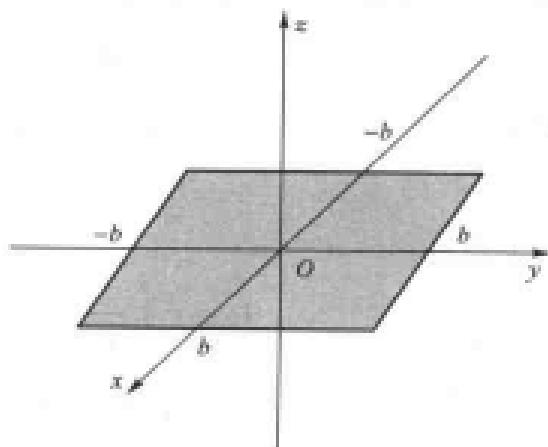


图 5-14-5  $2b \times 2b$  均匀电荷密度单元

如果把它转化为  $x$  和  $y$  上下限均为常数(即与坐标轴平行的矩形)的定积分,则可以把  $g(x)$  和  $h(y)$  略去。有

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy F(x, y) = f(x, y) \left| \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} y_2 \\ y_1 \end{array} \right| \quad (5-14-32)$$

于是,在这个意义上称

$$\iint F(x, y) dx dy = f(x, y) \quad (5-14-33)$$

为两重不定积分,它对于简化复杂积分十分有用。

### 2. 典型积分

研究典型积分

$$I = \iint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = x \ln(y + r) + y \ln(x + r) \quad (5-14-34)$$

式中,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

它的物理意义相当于方块单元在  $xOy$  面的电磁作用。

〔证明〕 设  $y = x \sin u, dy = x \cos u du$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x \csc u$$

于是

$$I = \iint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int dx \int du = \int u dx$$

注意到

$$u = \operatorname{arsh} \left( \frac{y}{x} \right) = \ln \left[ \left( \frac{y}{x} \right) + \sqrt{\left( \frac{y}{x} \right)^2 + 1} \right] = \ln [y + \sqrt{x^2 + y^2}] - \ln x$$

代入原式可知

$$\begin{aligned} I &= \int [\ln(y+r) - \ln x] dx \\ &= \int \ln(y+r) dx - g_1(x) \end{aligned}$$

根据上面所提的两重不定积分概念,略去  $g_1(x)$ ,而对第一项采用分部积分,有

$$I = x \ln(y+r) - \int x d \ln(y+r) = I_1 + I_2$$

式中,

$$I_1 = x \ln(y+r)$$

$$I_2 = - \int x d \ln(y+r)$$

进一步给出

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int \frac{x^2 dx}{(y + \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \int \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx = y \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + g_2(x) \end{aligned}$$

再一次略去  $g_2(x)$ ,又设

$$x = y \sinh v, dx = y \cosh v dv$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y \cosh v$$

代入

$$I_2 = y \int dv = y \left[ \ln \left\{ \left( \frac{x}{y} \right) + \sqrt{\left( \frac{x}{y} \right)^2 + 1} \right\} \right] = y \ln(x+r) + h_1(y)$$

最后略去  $h_1(y)$ ,得到

$$I = I_1 + I_2 = x \ln(y+r) + y \ln(x+r)$$

这一相互作用存在明显的对称性。

情况 1: 自作用单元  $I_m$

定义自作用单元

$$4\pi\epsilon I_m = \int_{-b}^b \int_{-b}^b \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (5-14-35)$$

它表示方块电荷单元在中心处的自作用,也即 Green 函数作用,计及典型积分式(5-14-34),很容易得到

$$I_m = \frac{2b}{\pi\epsilon} \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.8814 \frac{2b}{\pi\epsilon} \quad (5-14-36)$$

情况 2: 互作用单元  $I_{mn}$

把坐标的中心放在第  $n$  个单元的原点,如图 5-14-6 所示。

$$4\pi\epsilon I_{mn} = \iint_{\Delta S_n} dx dy \frac{1}{\sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2}} \quad (5-14-37)$$

仍可利用式(5-14-34)得到结果。

特别当  $\Delta S_n$  和  $\Delta S_m$  相邻(即相互作用最强)时,有

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon l_{\text{nn}} &= b \left[ 4\ln(\sqrt{2}-1) - 2\ln(\sqrt{10}-3) + 3\ln(\sqrt{10}+1) - 3\ln(\sqrt{10}-1) \right] \\ &\approx 2.0760994726 \end{aligned} \quad (5-14-38)$$

图 5-14-7 给出这种情况。

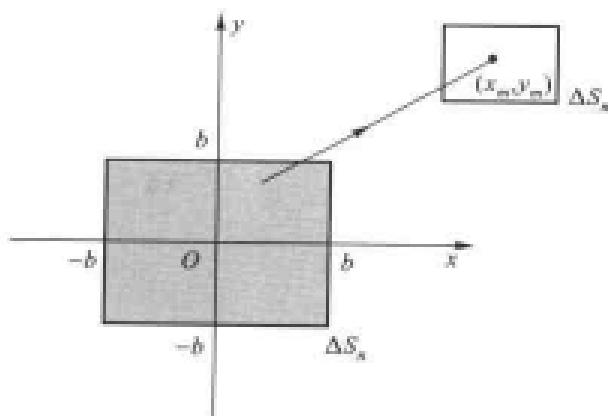


图 5-14-6 互作用单元  $I_{nn}$

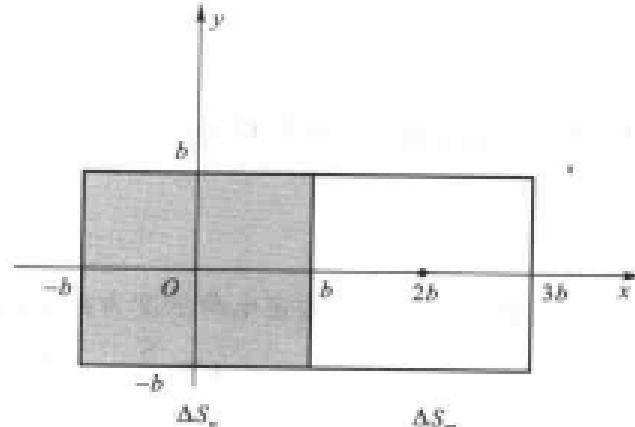


图 5-14-7 相邻单元情况

### 情况 3: 近似互作用单元 $I_{nn}$

互作用单元的原意是  $\Delta S_n$  上任何一点对  $\Delta S_n$  中心作用的一种叠加。而作为一种近似, 可以把  $\Delta S_n$  的电荷集中在中心。

于是构成了中心对中心的作用。这种思想的实质即积分中值定理, 有

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon l_{\text{nn}} &\approx \frac{\Delta S_n}{4\pi\epsilon \sqrt{(x_n - x_s)^2 + (y_n - y_s)^2}} \\ &= \frac{b^2}{\pi\epsilon \sqrt{(x_n - x_s)^2 + (y_n - y_s)^2}} \end{aligned} \quad (5-14-39)$$

式(5-14-39)是近似互作用公式, 对于最大误差, 即发生于如图 5-14-7 所示的相邻单元, 近似公式计及

$$\begin{aligned} x_n - x_s &= 2b, y_n - y_s = 0 \\ 4\pi\epsilon l_{\text{nn}} &\approx 2b \end{aligned} \quad (5-14-40)$$

比较式(5-14-38)和式(5-14-40), 可以知道这种方法的误差  $\leq 3.67\%$ 。另一方面值得提及, 一般情况下电磁 Green 函数所给的相互作用都是对角占优的, 或者通俗地讲, 都是自作用远大于互作用。以方形单元为例

$$\begin{cases} 4\pi\epsilon l_{\text{nn}} = 7.0512b \\ (4\pi\epsilon l_{\text{nn}})_{\text{max}} = 2.0761b \end{cases} \quad (5-14-41)$$

可见

$$\frac{l_{\text{nn}}}{l_{\text{nn}}} \geq 3.3964 \quad (5-14-42)$$

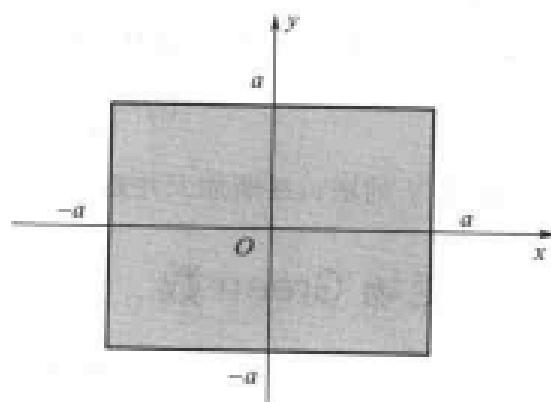


图 5-14-8 方块板电容

[例 5] 研究  $2a \times 2a$  导体板的电容  $C$ , 如图 5-14-8 所示。

[解] 采用 Green 函数概念, 对此例求出数值近似解。方块电容服从

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Delta S} \frac{\sigma(x, y)}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = U \\ \iint_{\Delta S} \sigma(x, y) dx dy = Q \end{array} \right. \quad (5-14-43)$$

而  $U$  和  $Q$  分别是板上的电压和电荷。所以电容  $C$  可写出

$$C = \frac{Q}{U} \quad (5-14-44)$$

情况 1:  $N=1$

把板看成一个整体, 假定电荷密度为常数, 容易得出

$$C = \frac{S}{l_{11}} = \frac{2\pi a \epsilon}{\ln(1+\sqrt{2})} \approx 7.1289 a \epsilon \quad (5-14-45)$$

情况 2:  $N=4$

把板分成 4 个单元, 由于对称性, 每个单元电荷密度均为  $\sigma_0$ 。

又得出

$$C = \frac{4a^2}{l_{11} + 2l_{12} + l_{14}} \quad (5-14-46)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{11} = \frac{a}{\pi\epsilon} \ln(1+\sqrt{2}) = 0.881373587 \frac{a}{\pi\epsilon} \\ 2l_{12} = 0.519024868 \frac{a}{\pi\epsilon} \\ l_{14} = \frac{a}{\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{8\sqrt{2}} \approx 0.088388347 \frac{a}{\pi\epsilon} \end{array} \right.$$

最后当  $N=4$  时, 得到

$$C = 8.440678409 a \epsilon \quad (5-14-47)$$

如图 5-14-9 所示。

注意到 5-13 节式 (5-13-27) 给出了相当精确的解析闭式, 正方形导体板的电容

$$C_0 = \frac{8a\epsilon}{\ln(\sqrt{2}+1)} = 9.076741257 a \epsilon \quad (5-14-48)$$

可见  $C$  随着  $N$  的增长逐渐加大并趋于真值。

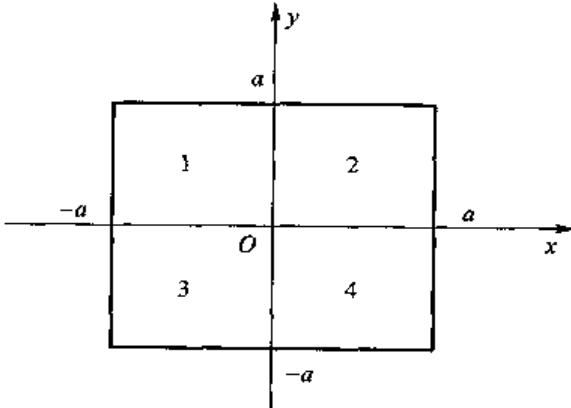


图 5-14-9  $N=4$  的单元划分

### 三、交变场 Green 数

交变场 Green 函数内包含一个波动因子。对于二维情况可写为

$$I = \iint \frac{e^{-jkr}}{r} dS \quad (5-14-49)$$

在这里着重引出自作用单元的简洁闭式。

首先,以电磁工程中经常遇到的二维交变场 Green 函数及矩阵自作用单元为例。这时,式(5-14-49)演化为

$$I = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{e^{-jk\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (5-14-50)$$

上式中假定是正方形,并不失一般性。 $k=2\pi/\lambda$  为波数,实际应用要求

$$ka < 1 \quad (5-14-51)$$

下面将重点研究方程(5-14-50)的奇异项处理方法。

### 1.8 阶解析公式

Mississippi(密西西比)大学年轻博士生 A. W. Glisson<sup>[1]</sup>(格里森)早在 1978 年就提出当  $ka \ll 1$  时在 Green 函数积分中存在可解析表述的静态主项。

其问题模型如图 5-14-10 所示。

$$I = I_0 + I' \quad (5-14-52)$$

其中

$$I_0 = 4 \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 8 \left(\frac{a}{\lambda}\right) \ln(1+\sqrt{2}) \lambda \quad (5-14-53)$$

式(5-14-53)在计算静态电容时被 R. F. Harrington<sup>[2]</sup>研究过,只是在这里引入了波长  $\lambda$ ,而

$$I' = 4 \int_0^a \int_0^a \frac{e^{-jk\sqrt{x^2+y^2}} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (5-14-54)$$

采用麦克劳林级数展开,有

$$\frac{e^{ikr} - 1}{r} \approx \sum_{n=1}^7 \frac{(-jk)^n}{n!} r^{n-1} \quad (5-14-55)$$

且设

$$I' \approx I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 \quad (5-14-56)$$

展开成 7 项,具体有

$$\begin{cases} I_1 = -jk \int_0^a \int_0^a dx dy \\ I_2 = -2k^2 \int_0^a \int_0^a \sqrt{x^2+y^2} dx dy \\ I_3 = j2k^3 \int_0^a \int_0^a (x^2+y^2) dx dy / 3 \\ I_4 = k^4 \int_0^a \int_0^a (x^2+y^2)^{3/2} dx dy / 6 \\ I_5 = -jk^5 \int_0^a \int_0^a (x^2+y^2)^2 dx dy / 30 \\ I_6 = -k^6 \int_0^a \int_0^a (x^2+y^2)^{5/2} dx dy / 180 \\ I_7 = jk^7 \int_0^a \int_0^a (x^2+y^2)^3 dx dy / 1260 \end{cases} \quad (5-14-57)$$

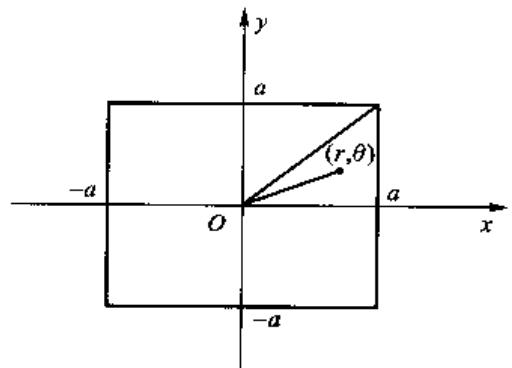


图 5-14-10 二维 Green 函数的正方形自作用单元

积分  $I_1, I_3, I_5, I_7$  易于求出。下面考虑  $I_2$ , 取  $0 \sim \pi/4$  角域的极坐标, 如图 5-14-10 所示。

$$I_2 = -4k^2 \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{a/\cos(\theta)} r^2 dr = -\frac{4}{3} k^2 a^3 \int_0^{\pi/4} \frac{d\sin \theta}{\cos^4 \theta} \quad (5-14-58)$$

令  $u = \sin \theta$ , 并计及

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right)$$

则容易求出  $I_2$ , 类似地可求出  $I_4, I_6$ , 最后可以得到

$$\begin{cases} I_0 = 8(a/\lambda) \ln(1+\sqrt{2})\lambda \\ I_1 = -j8\pi(a/\lambda)^2\lambda \\ I_2 = -(8/3)\pi^2(a/\lambda)^3 [\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}]\lambda \\ I_3 = j(32/9)\pi^3(a/\lambda)^4\lambda \\ I_4 = (2/15)\pi^4(a/\lambda)^5 [3\ln(1+\sqrt{2}) + 7\sqrt{2}]\lambda \\ I_5 = -j(448/675)\pi^5(a/\lambda)^6\lambda \\ I_6 = -(2/945)\pi^6(a/\lambda)^7 [15\ln(1+\sqrt{2}) + 67\sqrt{2}]\lambda \\ I_7 = j(256/3675)\pi^7(a/\lambda)^8\lambda \end{cases} \quad (5-14-59)$$

方程(5-14-59)即 Green 函数自作用单元积分的 8 阶近似公式, 其中  $I_0$  是主项, 奇异项已处理。

## 2. 等积变换

在数值分析大型矩阵计算中, 寻求自作用单元的简洁形式具有十分重要的意义。为此, 依然将其分解成静态主项  $I_0$  和余项  $I'$ :  $I = I_0 + I'$ 。只是在  $I'$  处理中, 采用等积变换, 即把正方形单元用等面积的圆形单元逼近, 如图 5-14-11 所示。

等积变换的基础是电磁格点理论<sup>[3]</sup>, 即电磁作用的主要矛盾是离源点很近的小区域, 离源点稍远一些的作用区域其形状允许模糊, 于是有

$$\pi R^2 = 4a^2$$

即等效圆半径

$$R = 2a/\sqrt{\pi}$$

这时余项积分变为

$$I' = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (e^{-jk\theta} - 1) dr = 2\pi \left( \frac{e^{-jkR} - 1}{-jk} - R \right) \quad (5-14-60)$$

最后得到  $I$  的实部  $\text{Re}(I)$  和虚部  $\text{Im}(I)$  分别为

$$\begin{cases} \text{Re}(I) = [8(a/\lambda) \ln(1+\sqrt{2}) + \sin(4\sqrt{\pi}a/\lambda) - 4\sqrt{\pi}a/\lambda]\lambda \\ \text{Im}(I) = -[1 - \cos(4\sqrt{\pi}a/\lambda)]\lambda \end{cases} \quad (5-14-61)$$

方程(5-14-61)是本文求得的奇异项简洁解析式。

采用 8 阶公式及等积简洁闭式计算的对比实例如表 5-14-3 所示。结果表明即使对于

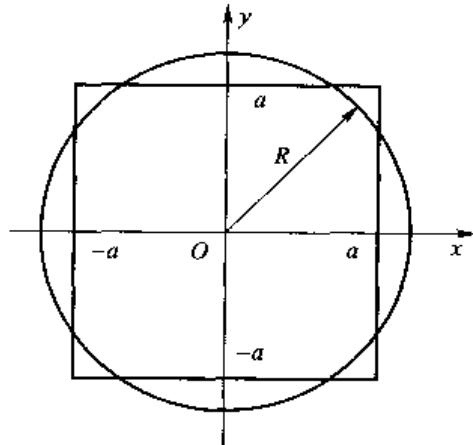


图 5-14-11 等积变换

$0.2\lambda \times 0.2\lambda$  的较大电尺寸单元(即  $a=0.1\lambda$ ),两者相对误差仍优于 0.2%。

表 5-14-3 8 阶解析公式和简洁闭式比较

$a/\lambda$		$\text{Re}(J)/\lambda$	$\text{Im}(J)/\lambda$
$1/80$	8 阶公式	0.088 019 405 6	-0.003 924 300 07
	简洁闭式	0.088 021 397 4	-0.003 924 421 28
	相对误差	0.000 022 629 1	0.000 030 885 9
$1/40$	8 阶公式	0.175 332 285	-0.015 664 948 5
	简洁闭式	0.175 348 119	-0.015 666 883 0
	相对误差	0.000 090 313	0.000 123 486
$1/20$	8 阶公式	0.345 047 995	-0.062 145 990 0
	简洁闭式	0.345 171 507	-0.062 176 629 4
	相对误差	0.000 357 957	0.000 493 022
$1/10$	8 阶公式	0.646 288 618	-0.240 503 960
	简洁闭式	0.647 178 401	-0.240 974 651
	相对误差	0.001 376 76	0.001 957 10

### 3. 三角形单元

在三维电磁场数值分析中, 三角形单元的使用是最为广泛的, 因为采用不同的三角形单元可以比较精确地逼近任意复杂物体。为此, 本文继续分析 Green 函数的任意三角形自作用单元, 讨论如下形式的积分问题。

$$I = \int_{S_A} \frac{e^{ikR}}{R} dS'$$

同样采用分成两部分的方法对积分奇异项进行处理, 即  $I = I_0 + I'$ , 问题的计算模型如图 5-14-12 所示。

其中

$$I_0 = \int_{S_A} \frac{1}{R} dS' \quad (5-14-62)$$

$$I' = \int_{S_A} \frac{e^{-ikR} - 1}{R} dS' \quad (5-14-63)$$

#### (1) 静态主项 $I_0$ 的计算

首先, 引入如图 5-14-12 所示的面积坐标, 矢量  $\vec{r}_i$  将三角形面元  $S_A$  分成 3 个子三角形区域  $A_1, A_2, A_3$ , 面积坐标可定义为

$$\xi = A_1 / \Delta, \eta = A_2 / \Delta, \zeta = A_3 / \Delta$$

其中,  $\Delta$  为三角形面元的面积。采用归一化变量, 即  $A_1 + A_2 + A_3 = \Delta$ , 可得

$$\xi + \eta + \zeta = 1 \quad (5-14-64)$$

则  $\xi, \eta, \zeta$  在  $0 \sim 1$  之间变化, 区域内任意一点的矢径  $\vec{r}'$  可用面积坐标表示为

$$\vec{r}' = \xi \vec{r}_1 + \eta \vec{r}_2 + \zeta \vec{r}_3 \quad (5-14-65)$$

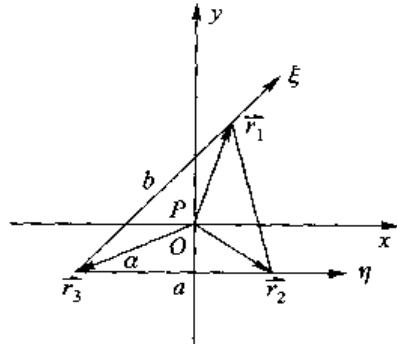


图 5-14-12 三角形单元及  
面积坐标

由直角坐标面积分变换到面积坐标面积分的 Jacobi(雅可比)式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 2\Delta \quad (5-14-66)$$

则

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{S_\Delta} \frac{1}{R} dS' = 2\Delta \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \frac{d\xi d\eta}{\left| \frac{1}{3}\vec{r}_1 + \frac{1}{3}\vec{r}_2 + \frac{1}{3}\vec{r}_3 - \xi\vec{r}_1 - \eta\vec{r}_2 - (1-\xi-\eta)\vec{r}_3 \right|} \\ &= 2\Delta \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \frac{d\xi d\eta}{\left| \left(\frac{1}{3}-\xi\right)(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + \left(\frac{1}{3}-\eta\right)(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \right|} \end{aligned} \quad (5-14-67)$$

面积坐标中, 三角形的质心点  $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  为积分奇异点。

其次, 采用坐标变换<sup>[4]</sup>。在面积坐标中, 三角形质心点  $P$  为积分奇异点,  $P$  点将三角形分解成三部分。

① 对第一部分做坐标变换, 即

$$\begin{cases} \eta = \frac{1}{3}u + (1-u)v \\ \xi = \frac{1}{3}u \end{cases} \quad (5-14-68)$$

这种变换将三角形 I 变成单位正方形, 如图 5-14-13 所示, 该变换 Jacobi(雅可比)式为

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(u-1) \quad (5-14-69)$$

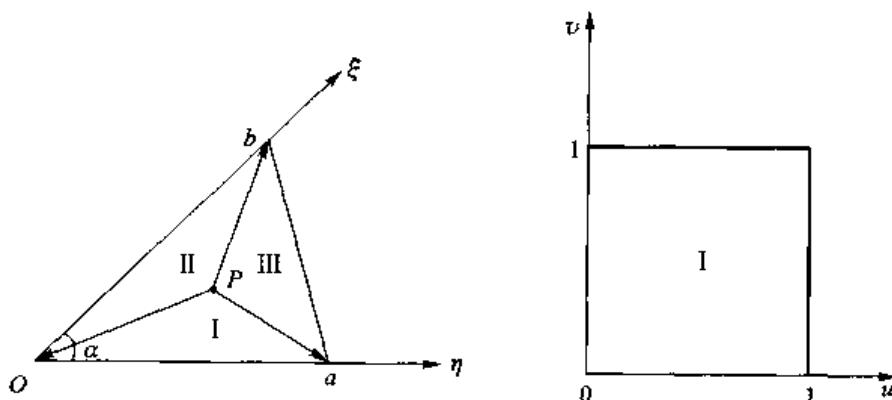


图 5-14-13 三角形到单位正方形的坐标变换

则

$$R = \left| \left(\frac{1}{3}-\xi\right)(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + \left(\frac{1}{3}-\eta\right)(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \right|$$

$$= \frac{1}{3}(1-u) |(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + (1-3v)(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)| \quad (5-14-70)$$

那么

$$\begin{aligned} I_0^I &= \int_{S_{\Delta I}} \frac{1}{R} dS' = 2\Delta \int_0^1 \int_0^1 \frac{|J_{\perp}|}{R} du dv \\ &= 2\Delta \int_0^1 \int_0^1 \frac{du dv}{\sqrt{b^2 + a^2(1-3v)^2 + 2ab(1-3v)\cos\alpha}} \\ &\quad - \frac{2\Delta}{3a} \ln \left( \frac{\sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab\cos\alpha} + 2a - b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} - a - b\cos\alpha} \right) \end{aligned} \quad (5-14-71)$$

② 对于第二部分和第三部分分别采用如下坐标变换

$$\begin{cases} \eta = \frac{1}{3}u \\ \xi = \frac{1}{3}u + (1-u)v \end{cases} \quad (5-14-72)$$

$$\begin{cases} \eta = 1 - \frac{2}{3}u - (1-u)v \\ \xi = \frac{1}{3}u + (1-u)v \end{cases} \quad (5-14-73)$$

这两种变换也将三角形Ⅱ和Ⅲ变成单位正方形,类似前面的推导,可分别得到

$$\begin{aligned} I_0^{\text{II}} &= \int_{S_{\Delta \text{II}}} \frac{1}{R} dS' = 2\Delta \int_0^1 \int_0^1 \frac{|J_{\perp}|}{R} du dv \\ &= 2\Delta \int_0^1 \int_0^1 \frac{du dv}{\sqrt{a^2 + b^2(1-3v)^2 + 2ab(1-3v)\cos\alpha}} \\ &= \frac{2\Delta}{3b} \ln \left( \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2 - 4ab\cos\alpha} + 2b - a\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} - b - a\cos\alpha} \right) \end{aligned} \quad (5-14-74)$$

$$\begin{aligned} I_0^{\text{III}} &= \int_{S_{\Delta \text{III}}} \frac{1}{R} dS' = 2\Delta \int_0^1 \int_0^1 \frac{|J_{\perp}|}{R} du dv \\ &= 2\Delta \int_0^1 \int_0^1 \frac{du dv}{\sqrt{b^2(1-3v)^2 + a^2(2-3v)^2 - 2ab(1-3v)(2-3v)\cos\alpha}} \\ &= \frac{2\Delta}{3B} \ln \left( \frac{2\sqrt{a^2 + 4b^2 - 4ab\cos\alpha} + \frac{a^2 - b^2}{B} + 3B}{2\sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab\cos\alpha} + \frac{a^2 - b^2}{B} - 3B} \right) \end{aligned} \quad (5-14-75)$$

其中,  $B = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$ 。

可以看到,上面的推导是建立在本地坐标系下,是独立于总体坐标的,只需要给出三角形单元划分的边长和夹角或各顶点坐标,则上式的积分唯一确定,其结果适合于任意三角形。

特殊情况,对于等腰三角形,其边长  $a=b$ ,并引入波长  $\lambda$ ,此时上面的公式简化为

$$I_0^I = I_0^{\text{II}} = \left( \frac{a}{\lambda} \right) \frac{\sin\alpha}{3} \lambda \ln \left( \frac{\sqrt{5-4\cos\alpha}-\cos\alpha+2}{2\cos(\alpha/2)-1-\cos\alpha} \right) \quad (5-14-76)$$

$$I_0^{\text{III}} = \left( \frac{a}{\lambda} \right) \frac{\cos(\alpha/2)}{3} \lambda \ln \left( \frac{\sqrt{5-4\cos\alpha} + 3\sin(\alpha/2)}{\sqrt{5-4\cos\alpha} - 3\sin(\alpha/2)} \right) \quad (5-14-77)$$

则

$$I_0 = I_0^1 + I_0^{\text{II}} + I_0^{\text{III}} \quad (5-14-78)$$

### (2) 余项 $I'$ 的近似计算

基于前面的电磁格点理论和等积圆变换思想,在此也采用局部等积圆变换来处理  $I'$ ,即把三角形单元用等面积的圆近似逼近,如图 5-14-14 所示。因为电磁作用的主要矛盾是离源点很近的小区域,离源点稍远一些的作用区域的形状允许模糊,于是有:

$$\pi R^2 = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

即等效圆半径

$$R = \sqrt{ab \sin \alpha / (2\pi)}$$

这时余项积分变为

$$I' = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (e^{jkr} - 1) dr = 2\pi \left[ \frac{e^{jkr} - 1}{-jk} (-R) \right] \quad (5-14-79)$$

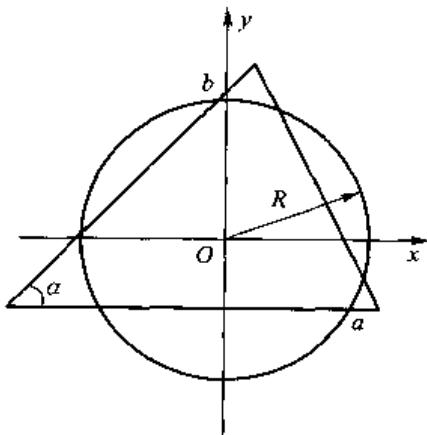


图 5-14-14 等积变换示意图

即

$$\begin{aligned} I' &= \left( \sin \frac{2\pi R}{\lambda} - \frac{2\pi R}{\lambda} \right) \lambda + j \left( \cos \frac{2\pi R}{\lambda} - 1 \right) \lambda \\ &= \left[ \sin \left( \frac{1}{\lambda} \sqrt{2\pi ab \sin \alpha} \right) - \frac{1}{\lambda} \sqrt{2\pi ab \sin \alpha} \right] \lambda + j \left[ \cos \left( \frac{1}{\lambda} \sqrt{2\pi ab \sin \alpha} \right) - 1 \right] \lambda \end{aligned} \quad (5-14-80)$$

最后得到  $I$  的实部  $\text{Re}(I)$  和虚部  $\text{Im}(I)$  分别为

$$\text{Re}(I) = I_0 + \left[ \sin \left( \frac{1}{\lambda} \sqrt{2\pi ab \sin \alpha} \right) - \frac{1}{\lambda} \sqrt{2\pi ab \sin \alpha} \right] \lambda \quad (5-14-81)$$

$$\text{Im}(I) = \left[ \cos \left( \frac{1}{\lambda} \sqrt{2\pi ab \sin \alpha} \right) - 1 \right] \lambda \quad (5-14-82)$$

因此,式(5-14-78)、式(5-14-81)和式(5-14-82)组成了任意三角形单元积分奇异项的简洁形式。

在此,给出采用 Hammer(哈梅尔)数值积分<sup>[4]</sup>和简洁闭式的计算结果比较,其中三角形单元为等腰三角形, $a=b$  且  $\alpha=30^\circ$ ,结果如表 5-14-4 所示。

表 5-14-4 Hammer 积分和简洁闭式比较

$a/\lambda$		$\text{Re}(I')/\lambda$	$\text{Im}(I')/\lambda$
1/80	Hammer 积分	0.020 856 88	-0.000 245 421 0
	简洁闭式	0.020 857 43	-0.000 245 426 9
	相对误差	2.634 528E-05	2.383 606E-05

续表

$a/\lambda$		$\text{Re}(I')/\lambda$	$\text{Im}(I')/\lambda$
1/40	Hammer 积分	0.041 699 60	-0.000 981 493 4
	简洁闭式	0.041 703 99	-0.000 981 587 1
	相对误差	1.052 382E - 04	9.548 137E - 05
1/20	Hammer 积分	0.083 285 91	-0.003 922 923
	简洁闭式	0.083 321 02	-0.003 924 422
	相对误差	4.215 255E - 04	3.819 851E - 04
1/10	Hammer 积分	0.165 667 50	-0.015 642 95
	简洁闭式	0.165 947 40	-0.015 666 88
	相对误差	1.689 009E - 03	1.530 082E - 03

#### 4. 立方体单元

在三维电磁场数值分析中,立方体单元的使用也是非常广泛的,尤其是在含有复杂介质的问题中。为此,讨论如下形式的 Green 函数积分,采用等积变换思想精确处理积分奇异项,其计算模型如图 5-14-15 所示。

$$I = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{e^{-ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz \quad (5-14-83)$$

同样采用分成两部分的方法对积分奇异项进行处理,即

$$I = I_0 + I'$$

其中

$$I_0 = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz \quad (5-14-84)$$

$$I' = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz \quad (5-14-85)$$

##### (1) 静态主项 $I_0$ 的计算

采样坐标变换到球坐标系下,即

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\arctan(\frac{1}{\cos \varphi})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin \theta dr d\theta d\varphi + 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\arctan(\frac{1}{\cos \varphi})}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{\cos \varphi})} r \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= 12 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^2 \lambda^2 \ln(2 + \sqrt{3}) - 2\pi \left( \frac{a}{\lambda} \right)^2 \lambda^2 \end{aligned} \quad (5-14-86)$$

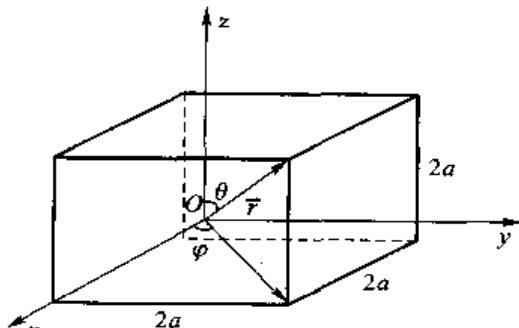


图 5-14-15 立方体自作用单元

式中,已经引入了波长  $\lambda$  进行归一化。

### (2) 余项 $I'$ 的近似计算

采用等积球变换来处理  $I'$ ,即把立方体单元用等体积的球近似逼近,如图 5-14-16 所示。所以有

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 8a^3$$

即等效球的半径

$$R = c_0 a = \sqrt[3]{6/\pi} a$$

这时余项积分变为

$$\begin{aligned} I' &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz \\ &\approx \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R (e^{ikr} - 1) r \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{2\pi[(2+2jkR)e^{ikR} - k^2 R^2 - 2]}{k^2} \end{aligned} \quad (5-14-87)$$

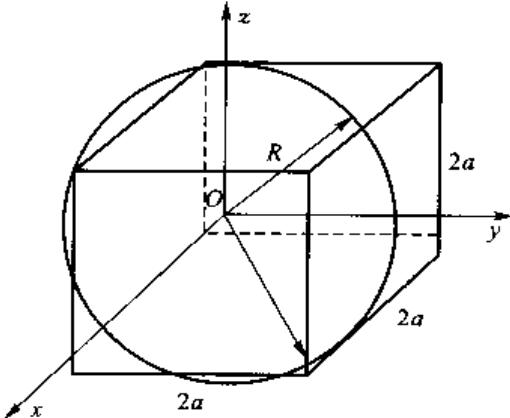


图 5-14-16 等积球变换

代入  $R$ ,可得

$$I' = \left[ \left( \frac{1}{\pi} + j2c_0 \frac{2}{\lambda} \right) e^{-j2\pi c_0 (\frac{a}{\lambda})} - 2\pi c_0^2 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^2 - \frac{1}{\pi} \right] \lambda^2 \quad (5-14-88)$$

联立式 5-14-86 和式 5-14-88,我们可得

$$I = I_0 + I' = \left[ \left( \frac{1}{\pi} + j2c_0 \frac{a}{\lambda} \right) e^{-j2\pi c_0 (\frac{a}{\lambda})} + 12\ln(2+\sqrt{3}) \left( \frac{a}{\lambda} \right)^2 - 2\pi(1+c_0^2) \left( \frac{a}{\lambda} \right)^2 - \frac{1}{\pi} \right] \lambda^2 \quad (5-14-89)$$

进一步写成实部和虚部形式

$$\text{Re}(I)/\lambda^2 = [12\ln(2+\sqrt{3}) - 2\pi(1+c_0^2)] \left( \frac{a}{\lambda} \right)^2 - \left[ 1 - \cos \left( 2\pi c_0 \frac{a}{\lambda} \right) \right] \frac{1}{\pi} + 2c_0 \frac{a}{\lambda} \sin \left( 2\pi c_0 \frac{a}{\lambda} \right) \quad (5-14-90)$$

$$\text{Im}(I)/\lambda^2 = 2c_0 \frac{a}{\lambda} \cos \left( 2\pi c_0 \frac{a}{\lambda} \right) - \frac{1}{\pi} \sin \left( 2\pi c_0 \frac{a}{\lambda} \right) \quad (5-14-91)$$

其中,  $a$  表示立方体单元半边长,  $\lambda$  表示波长,  $c_0 = \sqrt[3]{6/\pi}$ 。因此,式(5-14-90)和式(5-14-91)给出了立方体单元积分奇异项的简洁闭式。表 5-14-5 比较了数值 Gauss-Kronrod(高斯-克劳德)积分和简洁闭式。

表 5-14-5 数值 Gauss-Kronrod 积分和简洁式闭式比较

$a/\lambda$		$\text{Re}(I)/\lambda^2$	$\text{Im}(I)/\lambda^2$
1/80	Gauss 积分	-0.001 483 850	-0.000 098 073 9
	简洁闭式	-0.001 483 963	-0.000 098 081 6
	相对误差	0.000 076 153 2	0.000 078 512 2
1/40	Gauss 积分	-0.005 891 08	-0.000 782 173
	简洁闭式	-0.005 892 92	-0.000 782 479
	相对误差	0.000 312 337	0.000 391 217 8

续表

$a/\lambda$		$\text{Re}(I)/\lambda^2$	$\text{Im}(I)/\lambda^2$
1/20	Gauss 积分	-0.022 861 60	-0.006 180 47
	简洁闭式	-0.022 890 10	-0.006 188 24
	相对误差	0.001 246 632	0.001 257 186
1/10	Gauss 积分	-0.080 596 00	-0.047 039 70
	简洁闭式	-0.080 997 45	-0.047 276 37
	相对误差	0.004 981 016	0.005 031 282

德)积分与简洁闭式的计算结果。

利用电磁格点理论和等积变换的方法有效地处理了 Green 函数中的积分奇异项问题,给出了电磁场数值分析中比较常用的几种自作用单元的简洁闭式。本节表明:自作用单元积分的计算应尽量归结为简洁的解析形式,因为这样可以大大地减少计算量,为电大尺寸的目标分析提供理论基础。从推导明显看出,当  $a/\lambda$  较小时,  $\text{Re}(I)/\lambda \propto (a/\lambda)$ ,  $\text{Im}(I)/\lambda \propto (a/\lambda)^2$ 。因此虚部要小一个量级。由于数值分析还有各种误差,例如离散化的误差、假设作用单元均匀分布的误差等等,使本文导出的简洁公式有很广泛的应用价值。值得指出,等积变换思想也可以应用到其他问题的分析中。

### 参 考 文 献

- [1] A. W. Glisson. On the development of numerical techniques for treating arbitrarily shaped surfaces. Ph. D. dissertation, University of Mississippi, 1978.
- [2] R. F. Harrington. 矩量法. 北京: 国防工业出版社出版, 1980.
- [3] 梁昌洪. 格点理论在矩量法中的应用. 西北电讯工程学院学报, 1984(2).
- [4] 金建铭. 电场场有限元方法. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1998.

## 介 质 Green 函数法 Method of Dielectric Green's Function

本节将通过镜像法、介质镜像法研究二维静场问题的介质 Green 函数, 并以此解决微带问题。

## 一、镜像法

镜像法和 Green 函数存在紧密的联系。

如果问题所在的区域是分层媒质，则可用镜像法求出 Green 函数。

采用镜像法的基础是 Maxwell 方程组的唯一性定理。它可以叙述为：在给定区域符合微分方程和边界条件的解是唯一的。因此，也可以反过来说，只要符合微分方程和边界条件，则这个解必定正确。

所谓镜像法，其第一要点是分区求解；第二要点是在求解区域之外添加镜像电荷代替边界，使之符合求解区域之内的微分方程及边界条件。

〔例〕 半无限空间导体前的点电荷（也即  $\delta$  源）。

〔解〕 先写出分区解和分区边界条件

支配方程

$$\begin{cases} -\nabla^2 \Phi_1 = q\delta(x-d)\delta(y)\delta(z)/\epsilon_0 \\ -\nabla^2 \Phi_2 = 0 \end{cases} \quad (5-15-1)$$

边界条件

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_2 \mid_{x=0} \\ \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{cases} \quad (5-15-2)$$

问题如图 5-15-1 所示，注意到一般在讨论导体镜像法中常常是不分区求解的。这也在有意无意中忽略了重要的概念。而在本例中，解是分区的，且式 (5-15-2) 的  $\sigma$  表示为导体的面电荷密度。

分区镜像法如图 5-15-2 所示。

由图 5-15-2 很容易看出

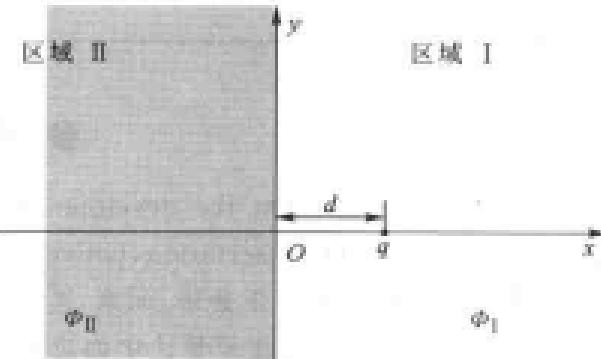
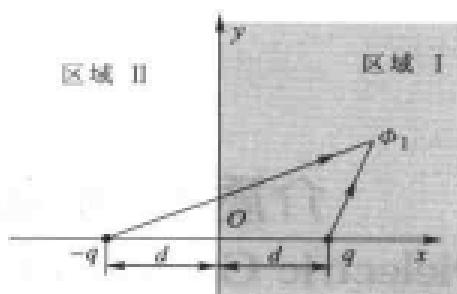
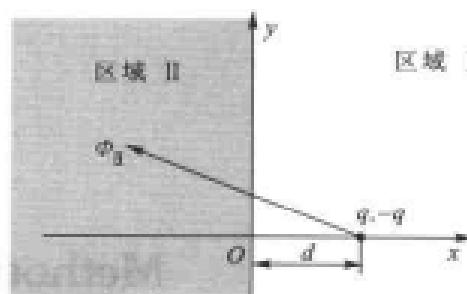


图 5-15-1 导体镜像法——分区求解



(a) 求解  $\Phi_1$  时，在区域 II 加镜像电荷  $-q$



(b) 求解  $\Phi_2$  时，在区域 I 加镜像电荷  $-q$

图 5-15-2 分区镜像法——其镜像电荷场加在求解区域之外

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \\ \Phi_{\parallel} = 0 \end{cases} \quad (5-15-3)$$

显然式(5-15-3)满足支配方程(5-15-1)。

下面考察其边界条件情况。

(1) 当  $x=0$

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{\sqrt{d^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(-d)^2 + y^2 + z^2}} \right) = 0 = \Phi_{\parallel} \quad (5-15-4)$$

(2) 再研究导数条件

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_{\parallel}}{\partial x} \right)_{x=0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{(x-d)q}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{(x+d)q}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right\}_{x=0} \\ &= \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 (d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (5-15-5)$$

对比边界条件式(5-15-2), 易知

$$\sigma = \frac{-qd}{2\pi (d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5-15-6)$$

图 5-15-3 给出了  $yOz$  极坐标中面电荷密度  $\sigma$  的分布情况。

为了验证  $\sigma$  的面电荷密度性质, 验证下列积分, 采用  $yOz$  的极坐标, 即  $dydz = r dr d\varphi$ 。

$$\iint_S \sigma dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-qd r dr d\varphi}{2\pi (r^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{qd}{2} \int_0^\infty \frac{d(r^2 + d^2)}{(r^2 + d^2)^{3/2}} = -q \quad (5-15-7)$$

作为副产品易知, 这种问题的 Green 函数为

$$\begin{cases} -\nabla^2 G(\vec{r}/\vec{r}') = \delta(\vec{r}/\vec{r}')/\epsilon_0 \\ \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ \vec{r}' = d\hat{x} \end{cases} \quad (5-15-8)$$

于是

$$G(\vec{r}/\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5-15-9)$$

上面这个过程即采用镜像法求取 Green 函数。

## 二、二维介质 Green 函数

二维问题的介质 Green 函数的一般模型如图 5-15-4 所示。在右半空  $d$  处放一无限长线电荷, 密度为  $\lambda$ 。

同样, 分区域求解。

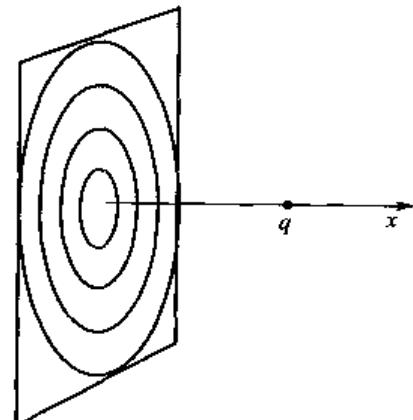


图 5-15-3  $yOz$  极坐标中面电荷密度  $\sigma$  的分布

支配方程

$$\begin{cases} -\nabla^2 \Phi_1 = \lambda \delta(\vec{r}/\vec{r}')/\epsilon_0 \\ -\nabla^2 \Phi_0 = 0 \end{cases} \quad (5-15-10)$$

边界条件

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_0 |_{x=0} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \epsilon_r \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \Big|_{x=0} \end{cases} \quad (5-15-11)$$

采用图 5-15-5 表示介质镜像法的分区求解。

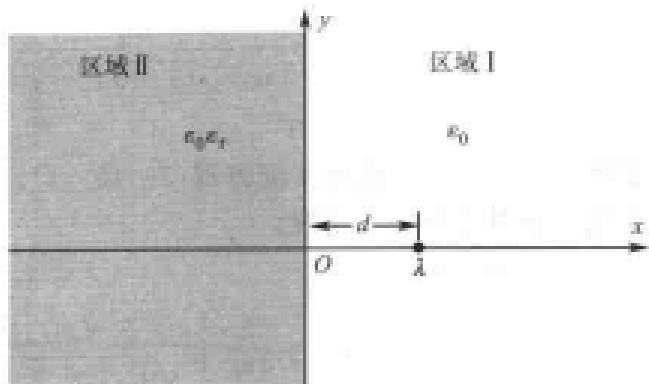
注意:① 在假设中,两空间介质常数均是  $\epsilon_0$ ,当然也可以是  $\epsilon_0 \epsilon_r$ 。

图 5-15-4 介质镜像法

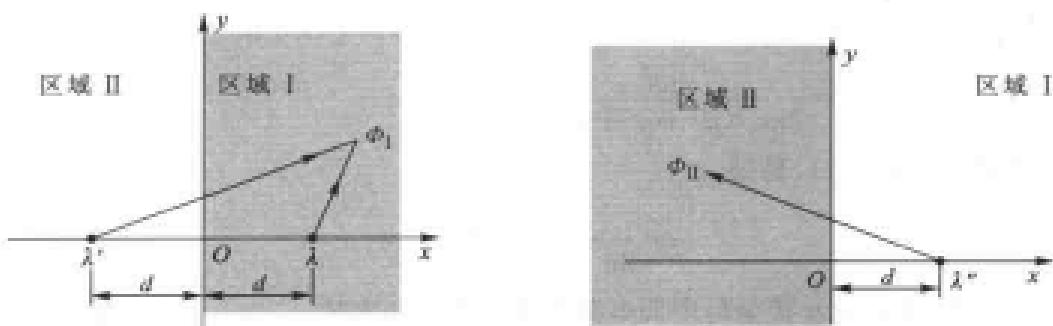


图 5-15-5 介质镜像法分区求解

——同样,所有镜像场在求解区域之外

② 求解区域Ⅱ时,  $\lambda''$  实际上包括真实电荷  $\lambda$  和镜像电荷  $\lambda''-\lambda$ 。

这样模型满足支配方程是没有问题的,现写出

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[ \lambda \ln \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} + \lambda' \ln \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} \right] \\ \Phi_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda'' \ln \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} \end{cases} \quad (5-15-12)$$

也可以改写为

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} + \xi \ln \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} \right] \\ \Phi_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \eta \ln \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} \end{cases} \quad (5-15-13)$$

式中

$$\begin{cases} \lambda' = \xi \lambda \\ \lambda'' = \eta \lambda \end{cases} \quad (5-15-14)$$

现在考察解与边界条件的关系。

$$\Phi_1 = \Phi_0 |_{x=0}$$

$$\Phi_1 |_{x=0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{\sqrt{d^2 + y^2}} (1 + \xi)$$

$$\Phi_1|_{x=0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{\sqrt{d^2 + y^2}} \eta$$

于是由函数边界条件有

$$1 + \xi = \eta \quad (5-15-15)$$

导数边界条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} &= \epsilon_r \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} \frac{(x-d)}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} - \xi \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} \frac{(x+d)}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} \right]_{x=0} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d^2 + y^2} (1 - \xi) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=d} &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \eta \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} \frac{(x-d)}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} \Big|_{x=0} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d^2 + y^2} \eta \end{aligned}$$

又得到

$$(1 - \xi) = \epsilon_r \eta$$

解方程得

$$\xi = \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r}, \eta = \frac{2}{1 + \epsilon_r} \quad (5-15-16)$$

所以,结果有

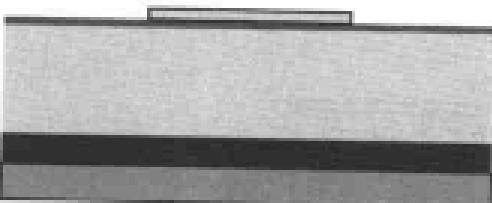
$$\begin{cases} \lambda' = \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} \lambda \\ \lambda'' = \frac{2}{1 + \epsilon_r} \lambda \end{cases} \quad (5-15-17)$$

很明显看出: $\lambda'$ 是负电荷,而 $\lambda''$ 是正电荷(原因是 $\epsilon_r > 1$ )。

### 三、三层介质镜像法

微带问题可以采用介质 Green 函数求解,微带问题与介质 Green 函数问题的模型对比如表 5-15-1 所示。

表 5-15-1 微带问题和介质 Green 函数问题

 微带问题	 介质 Green 函数问题
---	---

微带情况,可以看成是由空气、介质和导体三个区域组成。

中心导体带电荷  $q$ ,这是由于加正压所致,所以只需把三层介质的 Green 函数相加即可。于是建立如图 5-15-6 所示三层介质镜像法。

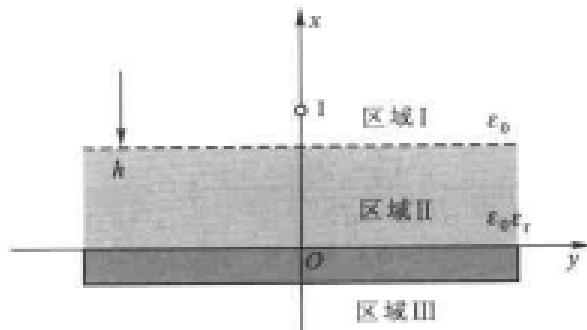


图 5-15-6 三层介质镜像法

仍然采用分区域求解的方法。

$$\text{支配方程} \begin{cases} \text{区域 I} & -\nabla^2 \Phi_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \delta(x-h^+) \delta(y-y_0) \\ \text{区域 II} & -\nabla^2 \Phi_0 = 0 \\ \text{区域 III} & -\nabla^2 \Phi_0 = 0 \end{cases} \quad (5-15-18)$$

其中  $\delta(y-y_0)$  是为了不确定位置,使求解微带时更加方便。

边界条件

$$x=h \quad \begin{cases} \Phi_1 = \Phi_0 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \epsilon_r \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \end{cases} \quad (5-15-19)$$

$$x=0 \quad \Phi_1 = \Phi_0 = 0 \quad (5-15-20)$$

$$x<0 \quad \Phi_1 = 0 \quad (5-15-21)$$

表 5-15-2 详细给出处理两种边界( $x=h, x=0$ )，三种模型的反复迭代。

情况 1: 真实电荷 +1 在区域 I(空气  $\epsilon_0$ )中。

根据前面的讨论:在求解区域 I 和区域 II 时把两个区域都认为充满  $\epsilon_0$ , 已解出

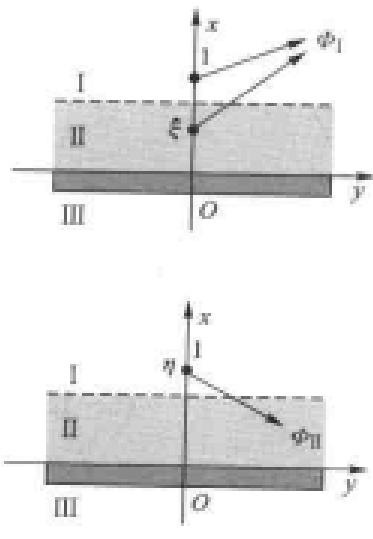
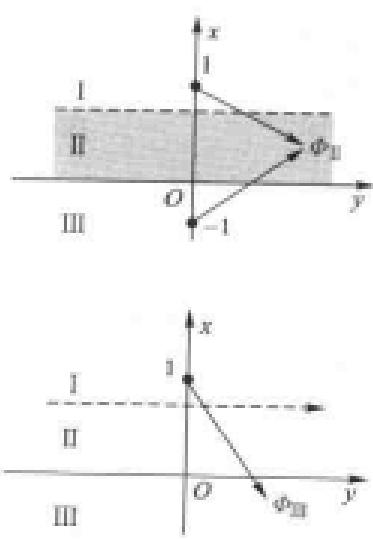
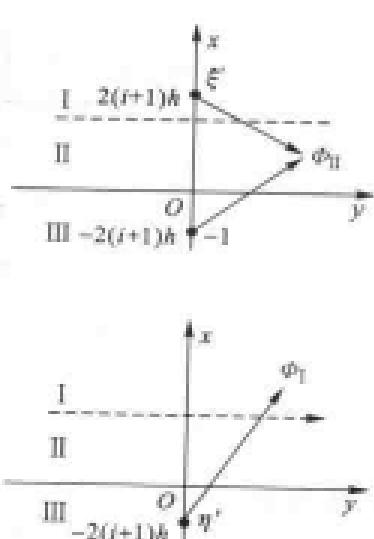
$$\xi = \frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r}, \eta = \frac{2}{1+\epsilon_r}$$

情况 2: 真实电荷 +1 在区域 III。也认为全部充空气  $\epsilon_0$ 。

首先要看出,  $[x+(2i-1)h]$  和  $[x-(2i+1)h]$  关于  $x=h$  对称, 只要代入即可知  $2ih, -2ih$  距离相等。全空间充满  $\epsilon_0$ 。可知

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \eta' \ln \frac{1}{\sqrt{[x+(2i-1)h]^2 + (y-y_0)^2}} \\ \Phi_0 &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{[x+(2i-1)h]^2 + (y-y_0)^2}} + \xi' \ln \frac{1}{\sqrt{[x-(2i+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} \right] \end{aligned} \quad (5-15-22)$$

表 5-15-2 两种边界( $x=h, x=0$ )，三种模型的反复迭代

模型 1	模型 2	模型 3
		
处理 $x=h$ 边界 第一次介质条件 $\begin{cases} \xi = \frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \\ \eta = \frac{2}{1+\epsilon_r} \end{cases}$	导体反对称条件 处理 $x=0$ 边界 $\phi_{III} = 0$	处理 $x=h$ 边界 第二次介质条件 $\begin{cases} \xi' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \\ \eta' = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \end{cases}$

注意到在区域 II、III 不应有真实电荷，即满足 Laplace 方程。

$x=0$  是导体的奇对称对称轴，使  $\phi=0$ 。

$x=h$  是介质对称轴。

边界  $x=h$  上， $\Phi_1 = \Phi_2$  得到  $1 + \xi' = \eta'$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \epsilon_r \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, (1 - \xi') \epsilon_r = \eta'$$

解出

$$\begin{cases} \xi' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \\ \eta' = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \end{cases} \quad (5-15-23)$$

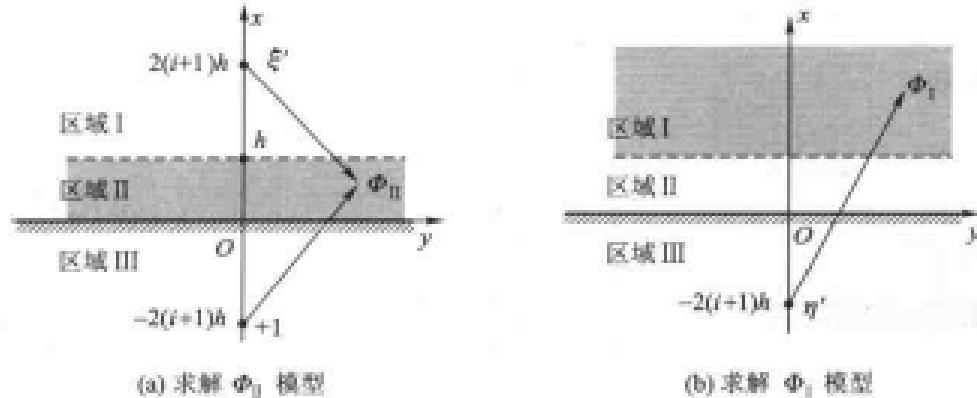
也就是说： $-(2i-1)h$  点反映到  $(2i+1)h$  应乘  $\xi'$  因子，而解区域 I 时应乘  $\eta'$  因子。

图 5-15-7 给出求解  $\Phi_2$  和  $\Phi_1$  的计算模型。

### 1. 区域 I 求解

注意真实电荷在区域 I，只能是  $+1$ ，同时它应与区域 II 做边界拟合。

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{(x-h)^2 + (y-y_0)^2}} - \left( \frac{2\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \right) \ln \frac{1}{\sqrt{(x+h)^2 + (y-y_0)^2}} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right) \left( \frac{2\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \right) \ln \frac{1}{\sqrt{(x+3h)^2 + (y-y_0)^2}} - \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right)^2 \left( \frac{2\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \right) \right] \end{aligned}$$

图 5-15-7 计算  $\Phi_0$  和  $\Phi_1$  两种模型 (+1 电荷处于区域 III)

$$\ln \left[ \frac{1}{\sqrt{(x+5h)^2 + (y-y_0)^2}} + \dots \right] \quad (5-15-24)$$

上式可简要写成

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{(x-h)^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{2\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1} \right)^i (-1)^i \right. \\ & \left. \ln \frac{1}{\sqrt{[x+(2i+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} \right] \end{aligned} \quad (5-15-25)$$

为方便起见, 对第一电荷不再区分  $h^+$  和  $h^-$ 。具体如图 5-15-8 所示。

## 2. 区域 II 求解

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \left\{ \ln \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-h^+)^2 + (y-y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{(x+h)^2 + (y-y_0)^2}} \right] \right. \\ & - \left( \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1} \right) \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{(x-3h)^2 + (y-y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{(x+3h)^2 + (y-y_0)^2}} \right] \\ & \left. + \left( \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1} \right)^3 \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{(x-5h)^2 + (y-y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{(x+5h)^2 + (y-y_0)^2}} \right] - \dots \right\} \end{aligned} \quad (5-15-26)$$

也可简要写为

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1} \right)^i (-1)^i \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{[x-(2i+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} \right. \\ & \left. - \ln \frac{1}{\sqrt{[x+(2i+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} \right] \end{aligned} \quad (5-15-27)$$

注意到  $h^+$  符合上述表述, 它显然符合

$$-\nabla^2 \Phi_1 = 0 \quad (5-15-28)$$

同时, 反对称组合使  $\Phi_1|_{x=0}=0$  得以满足。具体如图 5-15-9 所示。

## 3. $x=h$ 处 $\Phi_1=\Phi_0$ 边界条件检验

$$\Phi_1|_{x=h} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{(y-y_0)^2}} - \frac{2\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1} \right)^i (-1)^i \right]$$

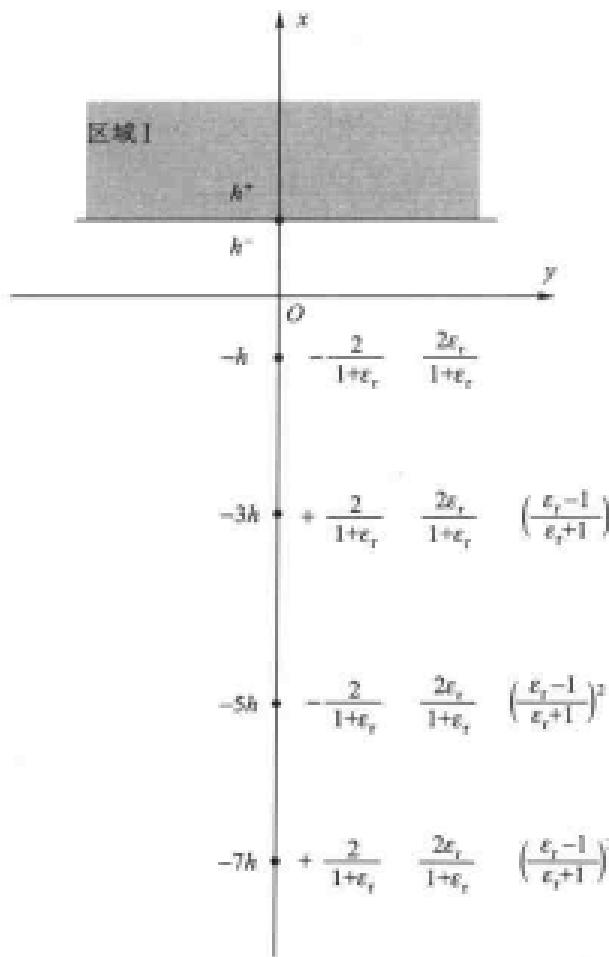


图 5-15-8 求解区域 I

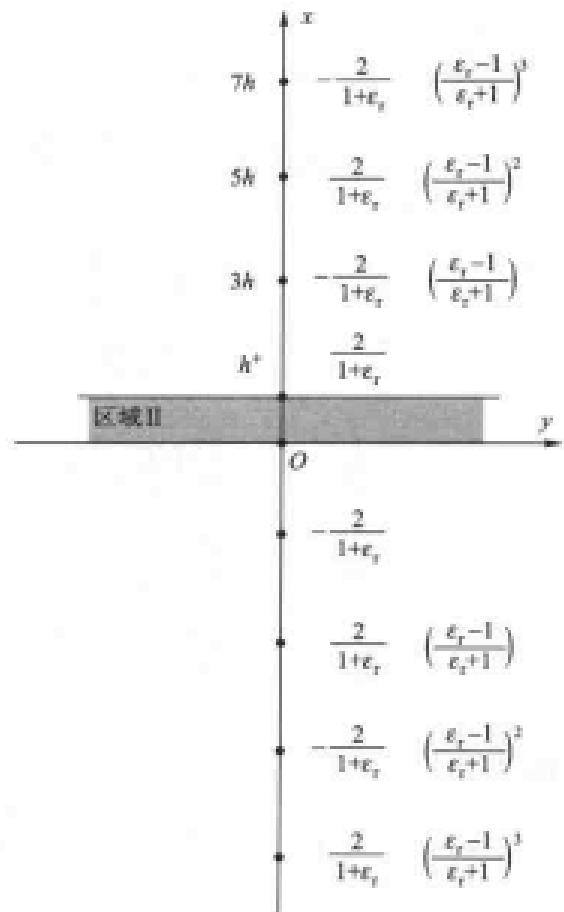


图 5-15-9 求解区域 II

$$\ln \frac{1}{\sqrt{[2(i+1)h]^2 + (y - y_0)^2}} \quad (5-15-29)$$

$$\begin{aligned} \Phi_I|_{x=k} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\right)^i (-1)^i \\ &\quad \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{(2kh)^2 + (y - y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{[2(i+1)h]^2 + (y - y_0)^2}} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{(y - y_0)^2}} + \left(-1 - \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\right)^i (-1)^i \right. \\ &\quad \left. \ln \frac{1}{\sqrt{[2(i+1)h]^2 + (y - y_0)^2}} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{(y - y_0)^2}} - \frac{2\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\right)^i (-1)^i \right. \\ &\quad \left. \ln \frac{1}{\sqrt{[2(i+1)h]^2 + (y - y_0)^2}} \right] \end{aligned} \quad (5-15-30)$$

十分明显,  $\Phi_I|_{x=k} = \Phi_I|_{x=-k}$ .

4.  $x = h$  处  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \epsilon_r \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$  边界条件检验

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right|_{x=h} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \left\{ -\frac{2\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\right)^i (-1)^i \left[ -\frac{[2(i+1)h]}{[2(i+1)h]^2 + (y-y_0)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \left( \frac{2\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\right)^i (-1)^i \frac{[2(i+1)h]}{[2(i+1)h]^2 + (y-y_0)^2} \right) \right\} \end{aligned}\quad (5-15-31)$$

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right|_{x=h} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\right)^i (-1)^i \\ &\quad \left[ -\frac{[x-(2i+1)h]}{(2ih)^2 + (y-y_0)^2} \Big|_{x=h} + \frac{[x+(2i+1)h]}{[2(i+1)h]^2 + (y-y_0)^2} \Big|_{x=h} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\right)^i (-1)^i \left\{ \frac{(2ih)}{(2ih)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{2(i+1)h}{[2(i+1)h]^2 + (y-y_0)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\right)^i (-1)^i \left(1 - \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\right) \frac{[2(i+1)h]}{[2(i+1)h]^2 + (y-y_0)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{1+\epsilon_r} \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\right)^i (-1)^i \frac{[2(i+1)h]}{[2(i+1)h]^2 + (y-y_0)^2} \end{aligned}\quad (5-15-32)$$

显然有

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right|_{x=h} = \epsilon_r \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right|_{x=h} \quad (5-15-33)$$

#### 四、微带问题介质 Green 函数法

把  $\Phi_0$  写成 Green 函数

$$\begin{aligned}G(x, y/h, y_0) &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{1+\epsilon_r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1}\right)^i (-1)^i \\ &\quad \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{[x-(2i+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{[x+(2i+1)h]^2 + (y-y_0)^2}} \right] \end{aligned}\quad (5-15-34)$$

设  $\sigma(y_0)$  是线上电荷分布, 如图 5-15-10 所示, 具体写出

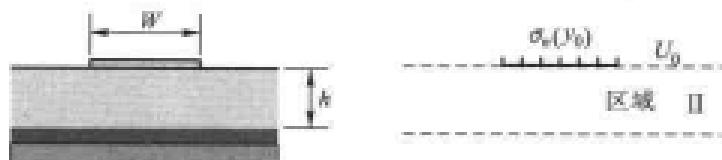


图 5-15-10 矩量法求解

$$\int_w \sigma(y_0) G(h, y/h, y_0) dy_0 = U_0 \quad (5-15-35)$$

式中,  $U_0$  为线上电压。

$$\sigma(y_0) = \sum_{n=1}^N \sigma_n P_n(y_0) \quad (5-15-36)$$

$$P_n(y_0) = \begin{cases} 1 & y_0 \in \Delta W_n \\ 0 & y_0 \notin \Delta W_n \end{cases} \quad (5-15-37)$$

离散化后为

$$\sum_{n=1}^N \sigma_n \int_{\Delta W_n} G(h, y/h, y_0) dy_0 = U_0 \quad (5-15-38)$$

选定  $m$  个点, 每个点都处于  $\Delta W_n$  中间,(相当于点匹配技术)

$$\sum_{n=1}^N \sigma_n \int_{\Delta W_n} G(h, y_m/h, y_0) dy_0 = U_0 \quad (5-15-39)$$

写成矩阵形式, 为

$$I\sigma = U_0 \quad (5-15-40)$$

其中

$$I_{mn} = \int_{\Delta W_n} G(h, y_m/h, y_0) dy_0 \quad (5-15-41)$$

按照定义

$$C = \frac{Q}{U_0} \text{ 或 } -C + \frac{Q}{U_0} = 0 \quad (5-15-42)$$

即能得到

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \Delta W & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma' \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-15-43)$$

其中

$$\sigma' = \frac{\sigma}{U_0} \quad (5-15-44)$$

表示归一化电荷密度, 微带性特性阻抗为

$$Z_0 = \frac{1}{vC} = \frac{\epsilon}{C} \quad (5-15-45)$$

## 差分法 Method of Difference

在电磁工程中, 经常应用的数值分析方法大致可以分成三种: 迭代法、矩阵法和高频渐近

法。其中,迭代法在数值分析中表现为一个过程,即结果由初值逐渐向精确解逼近;而矩阵法则是把算子方程转化为矩阵方程从而进行线性方程组求解,然而,对于  $N$  相当大的复杂问题,上述这两种方法越来越显示出交叉和混合关系。因为,对于超大线性方程组求解,也采用迭代的方法。

而最为古老的差分法恰好是迭代方法的经典和原型,差分法至今依然具有强大的生命力,个中原因值得人们研究。

## 一、迭代理论

研究一个最简单的线性方程组

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x - 3y - z = -8 \\ x + y + 4z = 15 \end{cases} \quad (5-16-1)$$

很容易写出其迭代形式

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(7 - y - z) \\ y = \frac{1}{3}(8 + x - z) \\ z = \frac{1}{4}(15 - x - y) \end{cases} \quad (5-16-2)$$

对应的矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{15}{4} \end{bmatrix}, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (5-16-3)$$

### 1. Jacobi 简单迭代

注意到式(5-16-1)精确解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (5-16-4)$$

在式(5-16-3)的迭代形式中,已知  $i=0$ ,即可得  $i=1, \dots$  于是得到一系列迭代解,称这种方

法为 Jacobi 简单迭代。

对于式(5-16-3),若取  $[x, y, z]^T = [0, 0, 0]^T$ ,算出的结果如表 5-16-1 所示。

表 5-16-1 式(5-16-3)的 Jacobi 简单迭代

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x$	0	3.500	0.292	1.104	0.970	1.004	0.999	1.000
$y$	0	2.667	2.583	2.028	2.024	2.001	2.001	2.000
$z$	0	3.750	2.208	3.031	2.967	3.001	2.999	3.000

表中数据是将每次迭代的结果保留小数点后三位而得的。

约经过 7 次迭代,即收敛为精确解。

由此可写出 Jacobi 简单迭代方程的一般形式

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{v} \quad (5-16-5)$$

设  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  为初值向量,则可得到一系列迭代方程

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{v} \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{v} \\ &\vdots \\ \mathbf{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{A}^2\mathbf{v} + \cdots + \mathbf{A}^n\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (5-16-6)$$

很明显,要使序列(5-16-6)收敛的充要条件为

$$\|\mathbf{A}\mathbf{v}\| \leq k \|\mathbf{v}\| \quad (5-16-7)$$

其中,  $0 \leq k < 1$ , 泛函中亦称式(5-16-7)为压缩映像,这时

$$\|\mathbf{x}\| \leq \frac{1}{1-k} \|\mathbf{v}\| \quad (5-16-8)$$

于是 Jacobi 简单迭代收敛的主要条件是矩阵  $\mathbf{A}$  的谱半径

$$\rho(\mathbf{A}) < 1 \quad (5-16-9)$$

这里所得到的最重要的是迭代收敛只与  $\mathbf{A}$  有关,而与  $\mathbf{v}$  无关。

在刚才讨论的实例中,已知

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

当  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$  时谱半径定义

$$\rho(\mathbf{A}) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \lambda(\mathbf{A}) \}$$

而  $\lambda(\mathbf{A})$  表示  $\mathbf{A}$  本征值的全体,由  $\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0$  可得到

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

即

$$\lambda^3 - \frac{1}{24}\lambda = 0$$

可得

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

于是可知

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = 0.204124145$$

$$\rho(A) = |\lambda_{\max}| = 0.204124145 < 1$$

因此,这种 Jacobi 简单迭代是收敛的。

应该注意到,不是任意迭代格式都能收敛,例如,某个线性方程组为

$$\begin{cases} x = 15 - y - 4z \\ y = 7 - 2x - z \\ z = x - 3y + 8 \end{cases} \quad (5-16-10)$$

其对应的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (5-16-11)$$

同样,取  $[x, y, z]^T = [0, 0, 0]^T$  作为解矢量的初值代入,所得结果如表 5-16-2 所示。

表 5-16-2 式(5-16-11)Jacobi 简单迭代

$i$	0	1	2	3	4	5
$x$	0	15	-24	38	-346	613
$y$	0	7	-31	53	-146	812
$z$	0	8	2	77	-113	100

十分明显,式(5-16-6)解明显发散,同样考虑

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

以及  $\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0$ ,具体为

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & -4 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 1 & -3 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

展开可得

$$\lambda^3 - \lambda + 23 = 0$$

由三次方程解可知

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\sqrt[3]{\left(\frac{23}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{23}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3} - \sqrt[3]{\left(\frac{23}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{23}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3} \\ &= -2.961\ 014\ 636 \\ \lambda_2 &= 1.480\ 507\ 318 - 2.361\ 293\ 238j \\ \lambda_3 &= 1.480\ 507\ 318 + 2.361\ 293\ 238j\end{aligned}$$

它等效于

$$(\lambda + 2.961\ 014\ 636)(\lambda^2 - 2.961\ 014\ 636\lambda + 7.767\ 607\ 674) = 0$$

于是有

$$\rho(A) = |\lambda_1| = 2.961\ 014\ 636 > 1$$

这正是此种迭代发散的原因。

## 2. Gauss Seidel(高斯·赛得尔)迭代

与 Jacobi 简单迭代相比较, Gauss-Seidel 迭代充分利用已经获知的新信息, 重新写出式 (5-16-2) 的另一种迭代方程形式为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(7 - y - z) \\ y = \frac{1}{3}(8 + x - z) \\ z = \frac{1}{4}(15 - x - y) \end{cases}$$

仍以  $x=0$ ,  $y=0$  和  $z=0$  为初值

$$x = \frac{1}{2}(7 - 0 - 0) = 3.50$$

$$y = \frac{1}{3}(3.50 - 0 + 8) = 3.83$$

$$z = \frac{1}{4}(15 - 3.50 - 3.83) = 1.92$$

$$x = \frac{1}{2}(7 - 3.83 - 1.92) = 0.63$$

⋮

十分明显, 从上面第二式已开始利用了  $x=3.50$  这一新的信息, 具体结果如表 5-16-3 所示。

表 5-16-3 式(5-16-2)的 Gauss-Seidel 迭代

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$x$	0	3.500	0.625	0.864	1.004	1.006	1.000
$y$	0	3.833	2.236	1.943	1.985	2.001	2.000
$z$	0	1.916	3.035	3.048	3.002	2.998	3.000

由表可以看出,结果不仅收敛,而且比表 5-16-1 所示的 Jacobi 简单迭代收敛得快。

但有点与 Jacobi 简单迭代完全一样,Gauss-Seidel 迭代也不是永远收敛的,对于式(5-16-10)的迭代结果如表 5-16-4 所示。

表 5-16-4 式(5-16-10)的 Gauss-Seidel 迭代

$i$	0	1	2	3
$x$	0	15	-330	7 628
$y$	0	-23	575	-13 202
$z$	0	92	-2 047	47 242

十分明显,结果趋于发散。

现在从一般的观点讨论 Gauss-Seidel 迭代,写为

$$\begin{cases} x_1^{i+1} = a_{12}x_2^i + a_{13}x_3^i + \cdots + a_{1n}x_n^i + v_1 \\ x_2^{i+1} = a_{21}x_1^{i+1} + a_{23}x_3^i + \cdots + a_{2n}x_n^i + v_2 \\ \vdots \\ x_n^{i+1} = a_{n1}x_1^{i+1} + a_{n2}x_2^{i+1} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{i+1} + v_n \end{cases} \quad (5-16-12)$$

这里分别引入下、上三角形矩阵  $L$  和  $U$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \cdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 & \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5-16-13)$$

重新采用矩阵表示 Gauss-Seidel 迭代有

$$x^{i+1} = Lx^{i+1} + Ux^i + v \quad i=0,1,2,\dots \quad (5-16-14)$$

于是可得到

$$x^{i+1} = (I - L)^{-1}Ux^i + (I - L)^{-1}v \quad (5-16-15)$$

习惯上,有

$$B = (I - L)^{-1}U \quad (5-16-16)$$

$$u = (I - L)^{-1}v \quad (5-16-17)$$

则进一步把式(5-16-15)写为

$$x^{i+1} = Bx^i + u \quad (5-16-18)$$

比较 Jacobi 简单迭代式(5-16-5)和 Gauss-Seidel 迭代式(5-16-18)可以发现,这两式在形式上完全一致,只是系数矩阵从  $A$  转化为  $B$ ,所谓 Gauss-Seidel 迭代,其改善的也是  $B$  的性态。

再次研究式(5-16-2)的实例,有

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

易知

$$\mathbf{I} - \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

于是有

$$[\mathbf{I} - \mathbf{L}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{I} - \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

现在研究  $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ , 具体有

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{6} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

也即

$$-\lambda \left[ \left( \lambda + \frac{1}{6} \right) \left( \lambda - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{12} \right] = 0$$

或

$$\lambda \left( \lambda^2 - \frac{1}{12}\lambda + \frac{1}{24} \right) = 0$$

上述方程等效于

$$\lambda \left[ \lambda - \frac{1}{24}(1 + i\sqrt{23}) \right] \left[ \lambda - \frac{1}{24}(1 - i\sqrt{23}) \right] = 0$$

$$|\lambda_{\max}| = \frac{\sqrt{6}}{12} = 0.204124145$$

$$\rho(\mathbf{B}) = |\lambda_{\max}| = 0.204124145 < 1$$

有两点值得注意:一是矩阵  $\mathbf{B}$  的谱半径  $\rho(\mathbf{B})$  与矩阵  $\mathbf{A}$  的谱半径  $\rho(\mathbf{A})$  完全一样,很值得研究;另一点是收敛的主要条件是  $\rho(\mathbf{B}) < 1$ ,并没有说  $\rho(\mathbf{B})$  越小收敛得越快,这一概念需要建立。

### 3. 迭代法收敛理论

在这一小节中将归纳迭代法的收敛理论。

[定理 1] 对任何初值向量  $x^0$  和激励项  $v$ , 由迭代格式

$$x^{i+1} = Mx^i + v \quad i=0,1,2,\dots$$

产生解向量序列  $\{x^i\}$  的收敛充分必要条件是

$$\rho(M) < 1 \quad (5-16-19)$$

式中,  $\rho(M)$  是矩阵  $M$  的谱半径。

[证明] 先证明必要性, 设  $\{x^i\}$  收敛到  $x^*$ , 即

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x^i = x^*$$

则可写出

$$x^* = Mx^* + v$$

引入  $\epsilon_i = x^i - x^*$  表示第  $i$  次迭代的近似值和准确解之差, 于是由

$$x^{i+1} - x^* = Mx^i - Mx^* = M(x^i - x^*)$$

即可简单写出

$$\epsilon_{i+1} = M\epsilon_i, i=0,1,2,\dots \quad (5-16-20)$$

按递推原则得到

$$\epsilon_{i+1} = M\epsilon_i = M^2\epsilon_{i-1} = \dots = M^{i+1}\epsilon_0 \quad (5-16-21)$$

十分明显, 对于任何初值误差矢量  $\epsilon_0 = x^0 - x^*$ , 能使序列  $\{M^{i+1}\epsilon_0\}$  均收敛于  $\mathbf{0}$  向量, 必须有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M^i = \mathbf{0} \quad (5-16-22)$$

此即  $\rho(M) < 1$ 。

再证明充分性: 设  $\rho(M) < 1$ , 则  $I - M$  非奇异, 于是  $(I - M)x = v$  有唯一解, 现证为  $x^*$ , 于是式(5-16-20)成立, 由式(5-16-22)导出

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x^i = x^*$$

[定理 2] 若迭代矩阵  $M$  的范数  $\|M\| = k < 1$ , 则迭代格式  $x^{i+1} = Mx^i + v$  的第  $i$  次迭代  $x^i$  对于准确解  $x^*$  的误差存在如下估计不等式

$$\|x^i - x^*\| \leq \frac{k^i}{1-k} \|x^0 - x^*\| \quad (5-16-23)$$

[证明] 由[定理 1]已导出  $\epsilon_i = M^i\epsilon_0$ , 对此式两边取范数, 有

$$\begin{aligned} \|\epsilon_i\| &= \|M\epsilon_0\| \leq \|M^i\| \|\epsilon_0\| \leq \|M\|^i \|\epsilon_0\| \\ &= k^i \|\epsilon_0\| \end{aligned}$$

另一方面, 根据定义  $\|\epsilon_0\| = \|x^0 - x^*\|$ , 而  $\rho(M) < 1$ , 因此  $(I - M)^{-1}$  存在, 于是可写出

$$x^* = (I - M)^{-1}v$$

这样可得到

$$\begin{aligned} x^0 - x^* &= x^0 - (I - M)^{-1}v = (I - M)^{-1}[(I - M)x^0 - v] \\ &= (I - M)^{-1}[x^0 - (Mx^0 + v)] = (I - M)^{-1}(x^0 - x^1) \end{aligned}$$

可知

$$\|\epsilon_0\| \leq \|(I - M)^{-1}\| \|x^0 - x^1\|$$

现在将进一步估计  $\|(I - M)^{-1}\|$ , 考虑到

$$(I - M)(I - M)^{-1} = I$$

可写出

$$(I - M)^{-1} = I + M(I - M)^{-1}$$

把上式两边取范数,有

$$\begin{aligned}\|(I - M)^{-1}\| &\leq \|I\| + \|M(I - M)^{-1}\| \\ &\leq 1 + \|M\| \|(I - M)^{-1}\|\end{aligned}$$

以及条件  $\|M\| = k < 1$ , 则  $\|M\| > 0$ , 即知

$$\|(I - M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-k}$$

最后得到

$$\|x^i - x^*\| \leq \frac{k^i}{1-k} \|x^0 - x^*\|$$

[讨论] 采用式(5-16-23)在已知精度  $\epsilon$  条件下可估计迭代次数,但一般估计次数偏大。

[定理 3] 若  $\|M\| < 1$ , 则迭代序列  $\{x^i\}$  的第  $i$  次近似值  $x^i$  和准确解  $x^*$  之间的误差有下列估计不等式

$$\|x^i - x^*\| \leq \frac{\|M\|}{1 - \|M\|} \|x^{i-1} - x^i\| \quad (5-16-24)$$

[证明] 已经知道

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= x^i - x^* \\ &= Mx^{i-1} + v - Mx^* - v \\ &= Mx^{i-1} - M(I - M)^{-1}v \\ &= M(I - M)^{-1}[(I - M)x^{i-1} - v] \\ &= M(I - M)^{-1}[x^{i-1} - x^i]\end{aligned}$$

在上式两边取范数,即得

$$\|x^i - x^*\| \leq \frac{\|M\|}{1 - \|M\|} \|x^{i-1} - x^i\|$$

有了上述定理,在实际计算时若允许误差为  $\epsilon$ ,则只当两次迭代向量范数差满足

$$\|x^{i-1} - x^i\| < \epsilon_1 \quad (5-16-25)$$

且满足

$$\epsilon_1 \leq \frac{1 - \|M\|}{\|M\|} \epsilon \quad (5-16-26)$$

即可令迭代停止。

为了进一步讨论迭代收敛的判别条件,引入不可约和对角优势两个概念。

[不可约] 若矩阵  $A$  不能通过行和列次序调换,构成

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad (5-16-27)$$

其中,  $A_{11}$  和  $A_{22}$  为方阵,则称  $A$  矩阵不可约。

[对角优势] 若矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  满足

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5-16-28)$$

且至少有一个  $i$  值, 上式中严格的不等式号成立, 称方阵  $A$  具有对角优势。

$A$  不可约, 且具有对角优势, 则

$$\det A \neq 0 \quad (5-16-29)$$

[定理 4] 对于线性方程组

$$Ax = b$$

若系数矩阵  $A$  不可约, 且具有对角优势, 则简单迭代法必定收敛。

[证明] 设  $a_{ii} \neq 0$  不失一般性, 且

$$\begin{cases} b_{ij} = -a_{ij}/a_{ii} & (i \neq j) \\ v_i = b_i/a_{ii} & i=1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5-16-30)$$

于是, 原线性方程组改写为如下迭代形式

$$\begin{cases} x_1 = b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1n}x_n + v_1 \\ x_2 = b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n + v_2 \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{n,n-1}x_{n-1} + \dots + v_n \end{cases} \quad (5-16-31)$$

引入矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{n,n-1} & 0 & \end{bmatrix} \quad (5-16-32)$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ \ddots & & & & \\ & a_{22} & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (5-16-33)$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (5-16-34)$$

于是, Jacobi 简单迭代可写为

$$x^{i+1} = Bx^i + v \quad (5-16-35)$$

式中

$$\begin{cases} B = I - D^{-1}A \\ v = D^{-1}b \end{cases} \quad (5-16-36)$$

要证明迭代收敛, 只须证明  $\rho(B) < 1$ 。

采用反证法: 设矩阵  $B$  有某个本征值  $\mu$ , 使得  $|\mu| \geq 1$ , 其中  $\mu$  必满足  $\det(B - \mu I) = 0$ , 已知  $A$  不可约, 且具有对角优势, 所以  $a_{ii} \neq 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 即  $\det D \neq 0$ , 或  $D^{-1}$  存在, 而  $B = I - D^{-1}A$ , 于是

$$\mu\mathbf{I} - \mathbf{B} = \mu\mathbf{I} - \mathbf{I} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}(\mu\mathbf{D} + \mathbf{A} - \mathbf{D})$$

对上式两边取行列式

$$\det(\mu\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \det\mathbf{D}^{-1} \cdot \det(\mu\mathbf{D} + \mathbf{A} - \mathbf{D}) = 0 \quad (5-16-37)$$

由于  $\det(\mathbf{D}^{-1}) \neq 0$ , 必有

$$\det(\mu\mathbf{D} + \mathbf{A} - \mathbf{D}) = 0 \quad (5-16-38)$$

具体写出

$$\mu\mathbf{D} + \mathbf{A} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mu a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mu a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mu a_{nn} \end{bmatrix} \quad (5-16-39)$$

在式(5-16-39)中各元素的位置与  $\mathbf{A}$  矩阵完全相同, 由  $\mathbf{A}$  的不可约性马上能得到矩阵(5-16-39)的不可约性, 同时由于  $|\mu| \geq 1$ , 有

$$|\mu a_{ii}| \geq |a_{ii}| \geq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n$$

并且至少有一个  $i$  使不等式号严格成立, 也就是说, 矩阵(5-16-39)同样具有对角优势, 即

$$\det(\mu\mathbf{D} + \mathbf{A} - \mathbf{D}) \neq 0$$

显然, 这与函数式(5-16-38)相矛盾, 于是, 证明了  $\mathbf{B}$  的本征值不能大于 1。

#### 4. 松弛方法

松弛方法是迭代过程中最常用的一种方法, 在某种意义上, 它可以看作为 Gauss-Seidel 方法的加速, 而 Gauss-Seidel 方法则是松弛法的一个特例, 设

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i = \mathbf{Lx}^{i+1} + \mathbf{Ux}^i + \mathbf{v} - \mathbf{x}^i \quad (5-16-40)$$

于是可简写为

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \Delta\mathbf{x} \quad (5-16-41)$$

为了把问题广义化, 令  $\Delta\mathbf{x}$  前面乘上松弛因子  $R$ , 可得到松弛方法的计算公式

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + R\Delta\mathbf{x} = (1-R)\mathbf{x}^i + R(\mathbf{Lx}^{i+1} + \mathbf{Ux}^i + \mathbf{v}) \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5-16-42)$$

且规定

$$\begin{cases} R > 1 & \text{超松弛} \\ R = 1 & \text{Gauss-Seidel 迭代} \\ R < 1 & \text{欠松弛} \end{cases} \quad (5-16-43)$$

由此, 表 5-16-5 给出线性方程组的三种迭代表示。

表 5-16-5 线性方程组的三种迭代表示

线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ 表示对应的下、上三角形矩阵	
Jacobi 简单迭代	$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{Ax}^i + \mathbf{b}$
Gauss-Seidel 迭代	$\mathbf{x}^{i+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{Ux}^i + (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}$
松弛法	$\mathbf{x}^{i+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{RL})^{-1} [(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{I} + \mathbf{RU}] \mathbf{x}^i + \mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{RL})^{-1} \mathbf{b}$

[定理 5] 松弛法收敛的必要条件

$$0 < R < 2 \quad (5-16-44)$$

松弛收敛这个条件又称 Kahan(卡翰)定理。

[证明] 设松弛迭代表示

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}^i + \mathbf{v} \quad (5-16-45)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \mathbf{B}_R = (\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{L})^{-1}[(1-R)\mathbf{I} + \mathbf{R}\mathbf{U}] \\ \mathbf{v} = \mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b} \end{cases} \quad (5-16-46)$$

$$(5-16-47)$$

根据定理 1 可知收敛时必有

$$\rho(\mathbf{B}_R) < 1 \quad (5-16-48)$$

由  $\mathbf{B}_R$  对角化可写出

$$\mathbf{B}_R = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}_R \mathbf{P}$$

其中

$$\mathbf{D}_R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

于是

$$\det(\mathbf{B}_R) = \det(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}) \det(\mathbf{D}_R) = [\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n] \quad (5-16-49)$$

可见

$$|\det(\mathbf{B}_R)| = |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| < 1 \quad (5-16-50)$$

其中,  $|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|$  是  $\mathbf{B}_R$  的  $n$  个本征值, 式(5-16-46)给出了  $\mathbf{B}_R$  的定义, 因为

$$\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ Ra_{ij} & & 1 \end{bmatrix}$$

可知  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{L}) = 1$ ,  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{L})^{-1} = 1$ 。

另一方面

$$(1-R)\mathbf{I} + \mathbf{R}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1-R & & \\ & \ddots & Ra_{ij} \\ 0 & & 1-R \end{bmatrix}$$

故

$$\det[(1-R)\mathbf{I} + \mathbf{R}\mathbf{U}] = (1-R)^n$$

综上所述

$$|\det(\mathbf{B}_R)| = |\det(\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{L})^{-1}| \cdot |\det((1-R)\mathbf{I} + \mathbf{R}\mathbf{U})| = |(1-R)|^n = |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| < 1$$

也即

$$|1-R| < 1$$

或得到

$$0 < R < 2$$

但是,应该注意到满足式(5-16-44)条件的松弛因子  $R$ ,并非对任意系数矩阵  $A$  都能收敛。

[定理 6] 已知系数矩阵  $A$  不可约,且具有对角优势,松弛因子满足

$$0 < R < 1 \quad (5-16-51)$$

则松弛法收敛。

[定理 7] 矩阵  $A$  对称或 Hermite(即  $A^T = A$ ,  $\dagger$  表示转置共轭),且其对角元素均为正实数,则当  $0 < R < 2$  时,松弛法收敛的充分必要条件为  $A$  矩阵正定。

上面两个定理证明从略。

在差分迭代的工程实际中,人们十分关心的一件事是最佳松弛因子  $R_{\text{opt}}$  问题,它是理论探索和实际尝试的结合课题,有文献推荐

$$R_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(B_R)]^2}} \quad (5-16-52)$$

可获得最快收敛的效果。

## 二、差分格式

一般来说,差分法要做两种离散化:区域离散化和算子离散化,区域离散化即要把所研究的区域构成网格;而算子离散化则指的是把微分连续算子用差分离散算子代替。这里以  $\nabla^2$  为例讨论各种差分格式。

### 1. 直角坐标时 $\nabla^2$ 的差分格式

以二维情况  $\nabla^2 u = 0$  为例,讨论直角坐标时的差分格式,图 5-16-1 给出其网格剖分。具体写出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5-16-53)$$

观察图 5-16-1 上 P 点周围的 A、B、C、D 四点情况,由 Taylor 级数

$$\begin{cases} u_B - u_P = a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{a^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \\ u_A - u_P = -a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{a^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \end{cases} \quad (5-16-54)$$

由式(5-16-54)可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_A + u_B - 2u_P}{a^2} - \frac{a^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \dots \quad (5-16-55)$$

类似地可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_C + u_D - 2u_P}{b^2} - \frac{b^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \dots \quad (5-16-56)$$

若弧参量  $h = a/b$ ,则结合式(5-16-55)和式(5-16-56)两式写出

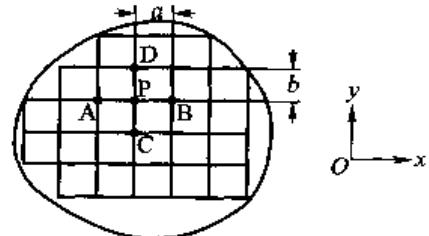


图 5-16-1 区域网络化

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_A + u_B + h^2(u_C + u_D) - 2u_P(1+h^2)}{a^2} - \frac{a^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \dots = 0 \quad (5-16-57)$$

作为近似处理,四点差分格式是

$$u_A + u_B + h^2(u_C + u_D) - 2(1+h^2)u_P = 0 \quad (5-16-58)$$

特别对于正方形网格,  $h=1$  有

$$u_P = \frac{1}{4}(u_A + u_B + u_C + u_D) \quad (5-16-59)$$

注意到式(5-16-59)对网格剖分得比较密时,精度才有确实的保证。

如果推广到三维六点差分格式,如图 5-16-2 所示,当立方体剖分时,可以写出

$$u_A + u_B + u_C + u_D + u_E + u_F - 6u_P = 0 \quad (5-16-60)$$

证明从略。

由 Gauss-Seidel 迭代收敛理论可知,式(5-16-59)和式(5-16-60)均收敛。

## 2. 轴对称柱坐标时 $\nabla^2$ 的差分格式

柱坐标是三维情况,具体写出  $\nabla^2$  为

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (5-16-61)$$

但是,根据轴对称条件有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5-16-62)$$

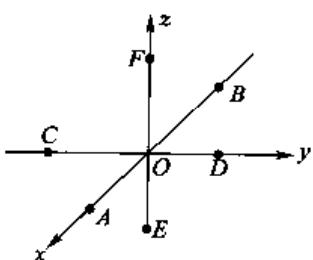


图 5-16-2 空间六点差分格式

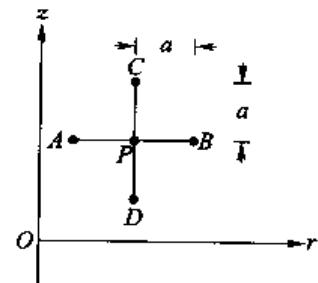


图 5-16-3 轴对称柱坐标的差分格式

这样,  $\nabla^2$  就导出了一种准二维的形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5-16-63)$$

如图 5-16-3 所示,同样取四点格式

$$\begin{cases} u_B - u_P = a \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{a^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + \dots \\ u_A - u_P = -a \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{a^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{a^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} - \dots \end{cases} \quad (5-16-64)$$

可以得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{u_A + u_B - 2u_P}{a^2} - \frac{a^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} - \dots \quad (5-16-65)$$

另一方面, 计及

$$u_B - u_A = 2a \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2a^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \dots \quad (5-16-66)$$

又有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_B - u_A}{2a} - \frac{a^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} - \dots \quad (5-16-67)$$

于是得到

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_B - u_A}{2ar} - \frac{a^2}{3r} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \dots \quad (5-16-68)$$

合并起来得其一阶差分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \left\{ \left(1 - \frac{a}{2r}\right) u_A + \left(1 + \frac{a}{2r}\right) u_B - 2u_P \right\} \quad (5-16-69)$$

以及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \{ (u_C + u_D - 2u_P) \} \quad (5-16-70)$$

最后得到轴对称柱坐标的四点差分格式

$$\left(1 - \frac{a}{2r}\right) u_A + \left(1 + \frac{a}{2r}\right) u_B + u_C + u_D - 4u_P = 0 \quad (5-16-71)$$

或者写为

$$u_P = \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{a}{2r}\right) u_A + \left(1 + \frac{a}{2r}\right) u_B + u_C + u_D \right\} \quad (5-16-72)$$

注意:  $a/r \rightarrow 0$  时, 或者  $r$  比较大的情况下, 轴对称柱坐标差分格式趋向于直角坐标格式。

### 3. 突变面差分格式

区域网格剖分必然要讨论边缘突变面的差分格式, 它主要包括一般突变面和介质突变面。

#### (1) 一般突变面的差分格式

已经知道

$$\vec{E} = -\nabla u = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{y}\right) \quad (5-16-73)$$

突变面的条件为

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (5-16-74)$$

或者说, 电场  $\vec{E}$  沿边界方向, 以图 5-16-4 为例予以说明。

对于  $APB$  作突变面, 必有条件

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (5-16-75)$$

如前所述

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \left\{ (u_A + u_B - 2u_P) - \frac{a^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\}$$

而

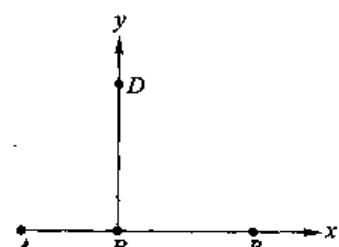


图 5-16-4 突变面的差分格式

$$u_D - u_P = a \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{a^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{a^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

计及式(5-16-75)的突变面条件,又得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \left\{ (2u_D - 2u_P) - \frac{a^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{a^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right\}$$

在近似条件下又得  $\nabla^2 u = 0$  的差分格式为

$$u_A + u_B + 2u_D - 4u_P = 0 \quad (5-16-76)$$

这就是突变面的差分格式,表 5-16-6 列出多种典型的差分格式。

表 5-16-6 突变面的差分格式

形式	图示	差分格式
底边		$u_A + u_B + 2u_D - 4u_P = 0$
顶边		$u_A + u_B + 2u_C - 4u_P = 0$
左侧边		$2u_B + u_C + u_D - 4u_P = 0$
右侧边		$2u_A + u_C + u_D - 4u_P = 0$
右底角		$u_B + u_D - 2u_P = 0$

续表

形式	图示	差分格式
左底角		$u_A + u_D - 2u_P = 0$

## (2) 介质突变面差分格式

以图 5-16-5 所示介质顶为例来说明介质突变面的差分格式。

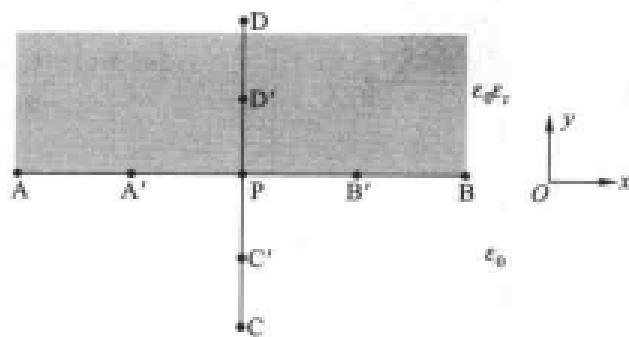


图 5-16-5 介质顶突变面差分格式

介质条件可写为

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0 \quad (5-16-77)$$

其中

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} \approx \frac{1}{a} (D_B - D_{A'}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r + 1) \left( \frac{E_B - E_{A'}}{a} \right)$$

在上式中, 取介质为上下两种介数常数的平均值。于是有

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r + 1) \frac{u_A + u_B - 2u_P}{a^2} \quad (5-16-78)$$

类似地, 可得

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = \frac{1}{a} (D_{B'} - D_{C'}) = \frac{\epsilon_0}{a} (\epsilon_r E_{B'} - E_{C'})$$

又有

$$\frac{\partial D_x}{\partial y} = \epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_r u_D + u_C - (1 + \epsilon_r) u_P}{a^2} \right) \quad (5-16-79)$$

把式(5-16-78)和式(5-16-79)两式代入式(5-16-77), 最后介质顶的差分格式为

$$(1 + \epsilon_r) u_A + (1 + \epsilon_r) u_B + 2u_C + 2\epsilon_0 u_D - 4(1 + \epsilon_r) u_P = 0 \quad (5-16-80)$$

即如表 5-16-7 所示。

表 5-16-7 介质突变面的差分格式 ( $k_e = \epsilon_r$ )

形式	图示	差分格式
介质顶		$(1+k_e)u_A + (1+k_e)u_B + 2u_C + 2k_e u_D - 4(1+k_e)u_P = 0$
介质锐角		$2u_A + (1+k_e)u_B + 2u_C + (1+k_e)u_D - 2(3+k_e)u_P = 0$
介质钝角		$2k_e u_A + (1+k_e)u_B + 2k_e u_C + (1+k_e)u_D - 3(3k_e + 1)u_P = 0$
介质半底角		$k_e u_A + u_B + (1+k_e)u_D - 2(1+k_e)u_P = 0$

### 三、电磁差分法

差分法十分适用于 Laplace 算子  $\nabla^2$ , 因此对于 TEM 模或准 TEM 模微波传输线的计算只需给出单位长度的电容  $C$ , 其特性阻抗  $Z_0$  或其他参数均很容易求出。

图 5-16-6 给出了 TEM 模微波传输线的一般结构, 已经封闭空间的电场  $\vec{E}$ , 则单位长度的电场储能为

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \epsilon \vec{E}^2 dS = \frac{1}{2} CV_0^2 \quad (5-16-81)$$

注意到介电常数  $\epsilon$  可能是位置的函数, 积分在数个封闭空间进行, 已取  $V_0=1$  V 不失一般性。由 Maxwell 方程可知, 对均匀媒质分布, 则得

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = -\epsilon \nabla^2 V(x, y) = 0 \quad (5-16-82)$$

在二维问题中, 有

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (5-16-83)$$

式中

$$\vec{E} = -\nabla V(x, y) \quad (5-16-84)$$

根据电容定义

$$C = \frac{Q}{V_0} = \int_C \epsilon E_n dl \quad (5-16-85)$$

在上式中, 已考虑到  $V_0=1$  V, 且  $Q = \int_C \epsilon E_n dl$ , 积分在内导体表面进行, 又根据式(5-16-81)

写出

$$C = 2W/V_0^2 = 2W \quad (5-16-86)$$

如果封闭断面, 画出很多差分格点, 如图 5-16-7 所示。

设

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} \\ \Delta y &= y_{j+1} - y_j = y_j - y_{j-1} \end{aligned} \quad (5-16-87)$$

最后可以得到电磁差分法求  $(i, j)$  点电位的一般格式

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}) \quad (5-16-88)$$

再写出电场差分格式

$$\begin{aligned} E_x &\approx -\frac{1}{2} \left[ \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta x} + \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i,j+1}}{\Delta y} \right] \\ &= -\frac{1}{2\Delta} [V_{i+1,j} - V_{i,j} + V_{i+1,j+1} - V_{i,j+1}] \end{aligned} \quad (5-16-89)$$

类似地, 有

$$E_y \approx -\frac{1}{2\Delta} [V_{i,j+1} - V_{i,j} + V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j}] \quad (5-16-90)$$

于是, 在  $(i, i+1)$  和  $(j, j+1)$  这一小块内电场储能为

$$\Delta W = \frac{1}{2} \epsilon (E_x^2 + E_y^2) \Delta^2 \quad (5-16-91)$$

计及式(5-16-89)和式(5-16-90)两式得到

$$\Delta W = \frac{\epsilon}{4} [V_{i,j} - V_{i+1,j+1}]^2 + (V_{i+1,j} - V_{i,j+1})^2 \quad (5-16-92)$$

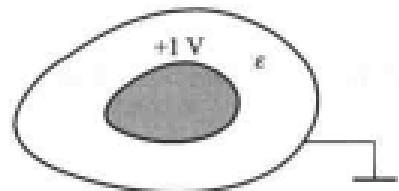


图 5-16-6 TEM 模微波传输线的一般结构

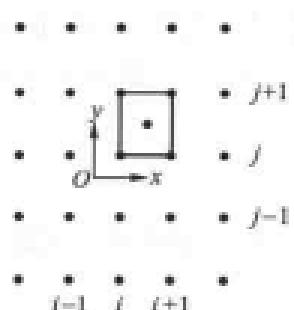


图 5-16-7 差分格点

这样全部差分网格的总储能是

$$W = \sum_{i=1}^{i_{\max}-1} \sum_{j=1}^{j_{\max}-1} \Delta W \quad (5-16-93)$$

注意到式(5-16-86), 即有

$$C = 2W = 2 \sum_{i=1}^{i_{\max}-1} \sum_{j=1}^{j_{\max}-1} \Delta W \quad (5-16-94)$$

### 1. 电磁差分的超松弛结合预测

前面已经介绍过, 对于松弛因子  $1 < R < 2$  所实现的超松弛可以加快收敛速度且使 Laplace 算子保持数值稳定, 具体写出

$$[V_{i,j}]_{\text{new}} = R \left[ \frac{V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}}{4} \right] + (1-R)[V_{i,j}]_{\text{old}} \quad (5-16-95)$$

在上式中,  $[V_{i,j}]_{\text{old}}$  表示上次迭代结果; 而  $[V_{i,j}]_{\text{new}}$  则表示进一步的迭代值。对于  $R$  的选取比较省力而稳妥的办法是

$$R = 1.5 \quad (5-16-96)$$

具体对于 Laplace 算子, 研究表明, 它与所分的网格数相关, 可推荐为

$$R = 2 - \pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{e^2} + \frac{1}{m^2}} \quad (5-16-97)$$

其中,  $e$  和  $m$  是差分格点所分的份数。

如果超松弛结合预测, 则能使收敛速度更进一步加快, 事实上, 所谓预测即通过前几次迭代信息通过曲线拟合外推的办法, 得到下一次迭代的  $C$  值。

**[例]** 如果对于所计算的电容  $C$  采用简单的两点拟合函数

$$C(N) = \frac{A}{1 + \left(\frac{B}{N}\right)^M} \quad (5-16-98)$$

设  $N$  表示迭代次数;  $M$  是一个引入的已知正实数。现在若已知二次迭代值

$$\begin{cases} C_1 = C(N_1) \\ C_2 = C(N_2) \end{cases} \quad (5-16-99)$$

即可由此求出待定常数  $A$  和  $B$ 。

**[解]** 由方程(5-16-98), 可知

$$\begin{cases} \frac{A - C_1}{C_1} N_1^M = B^M \\ \frac{A - C_2}{C_2} N_2^M = B^M \end{cases}$$

消去  $B$ , 即有

$$A = \frac{N_2^M - N_1^M}{\left(\frac{N_2^M}{C_2}\right) - \left(\frac{N_1^M}{C_1}\right)} \quad (5-16-100)$$

和

$$B = N_1^M \sqrt{\frac{A}{C_1} - 1} = N_2^M \sqrt{\frac{A}{C_2} - 1} \quad (5-16-101)$$

图 5-16-8 给出三种不同方法中电容 C 的计算值随迭代次数 N 的收敛速度。

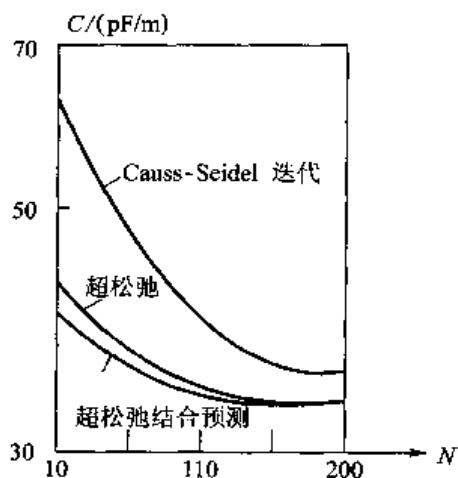


图 5-16-8 三种不同方法电容 C 随 N 收敛曲线

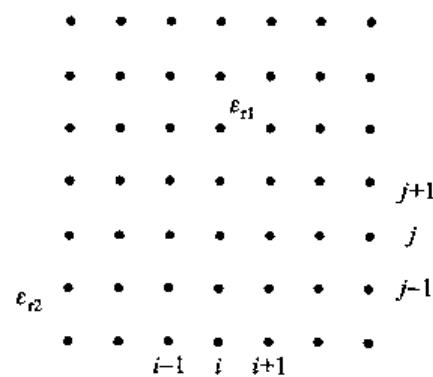


图 5-16-9 不均匀媒质截面的差分格点

## 2. 电磁微带

电磁微带是典型的准 TEM 模微波传输线，又是不均匀媒质的差分应用，用图 5-16-9 表示这种情况。

上、下两种媒质的介电常数分别为  $\epsilon_{r1}$  和  $\epsilon_{r2}$ ，在介质上部有

$$D_y \approx -\frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} (V_{i,j+1} - V_{i,j})}{\Delta} \quad (5-16-102)$$

在下部有

$$D_y \approx -\frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} (V_{i,j} - V_{i,j-1})}{\Delta} \quad (5-16-103)$$

于是，在介质界面上可得

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} \approx -\frac{\epsilon_0}{\Delta} [\epsilon_{r1} (V_{i,j+1} - V_{i,j}) - \epsilon_{r2} (V_{i,j} - V_{i,j-1})] \quad (5-16-104)$$

为了要写出  $V_{i,j}$  的迭代方程，还需要给出界面上的  $\partial D_x / \partial x$ ，必须明确在  $(i-1, j)$  和  $(i+1, j)$  上的介电常数数值是不确定的，先假定为  $\epsilon_{r3}$ ，则有

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} \approx -\frac{\epsilon_0 \epsilon_{r3}}{\Delta} [V_{i+1,j} + V_{i-1,j} - 2V_{i,j}] \quad (5-16-105)$$

于是边界网格点的迭代方程是

$$V_{i,j} = \frac{\epsilon_{r1} V_{i,j+1} + \epsilon_{r2} V_{i,j-1} + \epsilon_{r3} (V_{i-1,j} + V_{i+1,j})}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2} + 2\epsilon_{r3}} \quad (5-16-106)$$

可以证明： $\epsilon_{r3}$  的选择可以是  $\epsilon_{r1}$  和  $\epsilon_{r2}$  之间的任意值，一般选择

$$\epsilon_{r3} = \frac{1}{2} (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) \quad (5-16-107)$$



## 矩量法 Method Of Moment

### 一、引言

矩量法(简称 MoM),就其数值分析而言是广义 Galerkin(伽略金)法。矩量法包括两个过程:离散化过程和选配过程,从而把线性算子方程转化为矩阵方程。这里先举一个简单的例子。

[例 1] 无限薄导体圆盘上的电荷  $\sigma$  分布问题。

试讨论半径为  $a$  的无限薄理想导体圆盘,在中心线距离  $d$  处有一点电荷  $Q$ ,如图 5-17-1 所示,求解导体圆盘上的电荷分布。

[解] 假设导体圆盘上电荷密度为  $\sigma(x', y')$ ,根据电磁学的基本概念可知:

(1) 由外加电荷  $Q$  在导体圆盘上产生的电位  $\Phi^e$  和导体圆盘本身感应电荷密度  $\sigma$  所产生的电位  $\Phi^i$  之和  $U$  在盘上处处相等,即保证导体圆盘是等位面。

(2) 由于本问题中  $\sigma$  是感应电荷,因此总电荷  $Q^i \equiv 0$ ,其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^e = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} \\ \Phi^i = \iint_S \frac{\sigma(x', y') dS'}{4\pi\epsilon_0 r} \end{array} \right. \quad (5-17-1)$$

$$Q^i = \iint_S \sigma(x', y') dS' \quad (5-17-2)$$

$$Q^i = \iint_S \sigma(x', y') dS' \quad (5-17-3)$$

于是,问题可写为

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^e + \Phi^i = U \\ Q^i = 0 \end{array} \right. \quad (\text{约束条件}) \quad (5-17-4)$$

式中  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ , 其中打撇的表示源点,不打撇的表示场点。

这个问题,采用电磁学经典解析方法不能很好的解决,因为未知量  $\sigma$  处于积分内部,是一个典型的积分方程。为此,把圆盘分割成两部分:中心小圆和外部环带(如图 5-17-1 所示),并假定每一部分内的电荷密度  $\sigma_i$  ( $i=1, 2$ ) 近似为常数,于是

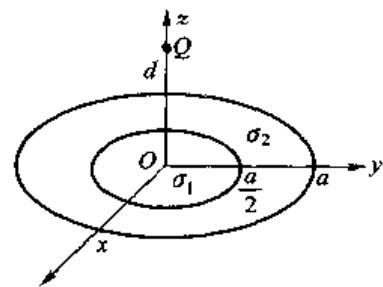


图 5-17-1 导体圆盘上的电荷分布

$$\sigma(x', y') = \sum_{i=1}^2 \sigma_i P(S_i) = \sigma_1 P(S_1) + \sigma_2 P(S_2) \quad (5-17-5)$$

式中

$$P(S_i) = \begin{cases} 1 & S \in S_i \\ 0 & S \notin S_i \end{cases} \quad (5-17-6)$$

$P(S_i)$  称为脉冲函数, 这时问题方程(5-17-4)成为

$$\left\{ \sum_{i=1}^2 \sigma_i \iint_{S_i} \frac{dS'}{4\pi\epsilon_0 r} - U = -\Phi^e \right. \quad (5-17-7)$$

$$\left. \sum_{i=1}^2 \sigma_i S_i = 0 \right. \quad (5-17-8)$$

把问题方程(5-17-4)近似地转化为式(5-17-7)和式(5-17-8)的过程称为离散化过程。但是, 必须注意到方程(5-17-7)中, 场点  $r$  表示圆盘上的任意点  $(x, y)$ , 换句话说它们是不定的, 因而式(5-17-7)中包含着无限多个方程。另一方面, 离散后的方程组(5-17-7)和方程组(5-17-8)内只有三个未知数  $\sigma_1, \sigma_2$  和  $U$ , 于是方程组超定。

为了把超定方程组转化为唯一解的方程组, 可以采用很多办法。矩量法中, 习惯用选配过程解决这个问题。简单说来, 即在每个离散的单元上只选取一个场点作为代表来建立方程。例如, 在[例 1]中对于离散的  $S_1$  和  $S_2$  分别取  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  两点作为试验点, 如图 5-17-2 所示。具体写出方程组为

$$\begin{cases} l_{11}\sigma_1 + l_{12}\sigma_2 = -\Phi_1^e + U & \text{第 1 试验点} \\ l_{21}\sigma_1 + l_{22}\sigma_2 = -\Phi_2^e + U & \text{第 2 试验点} \\ S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 = 0 \end{cases} \quad (5-17-9)$$

其中

$$l_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_1} \frac{dS'}{\sqrt{(x_1 - x')^2 + (y_1 - y')^2}} \quad (5-17-10)$$

$$l_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_2} \frac{dS'}{\sqrt{(x_1 - x')^2 + (y_1 - y')^2}} \quad (5-17-11)$$

$$l_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_1} \frac{dS'}{\sqrt{(x_2 - x')^2 + (y_2 - y')^2}} \quad (5-17-12)$$

$$l_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_2} \frac{dS'}{\sqrt{(x_2 - x')^2 + (y_2 - y')^2}} \quad (5-17-13)$$

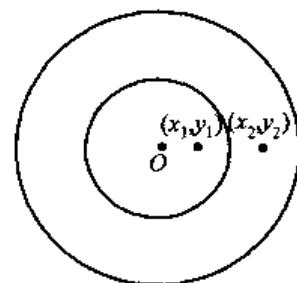


图 5-17-2 圆盘上的试验点

且,  $l_{11}$  表示  $S_1$  面元电荷在  $(x_1, y_1)$  处产生场的自作用单元;

$l_{22}$  表示  $S_2$  面元电荷在  $(x_2, y_2)$  处产生场的自作用单元;

$l_{12}$  表示  $S_2$  面元电荷在  $(x_1, y_1)$  处产生场的互作用单元;

$l_{21}$  表示  $S_1$  面元电荷在  $(x_2, y_2)$  处产生场的互作用单元。

又有

$$\begin{cases} \Phi_1^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + d^2}} \\ \Phi_2^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + d^2}} \end{cases} \quad (5-17-14)$$

经过离散化过程和选配过程, 将积分方程组(近似地)转化为矩阵方程

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & -1 \\ l_{21} & l_{22} & -1 \\ S_1 & S_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ U \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Phi_1^e \\ \Phi_2^e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-17-15)$$

由此得出电荷分布的解为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & -1 \\ l_{21} & l_{22} & -1 \\ S_1 & S_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\Phi_1^e \\ -\Phi_2^e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-17-16)$$

图 5-17-3 所示为矩量法求解问题的一般过程。

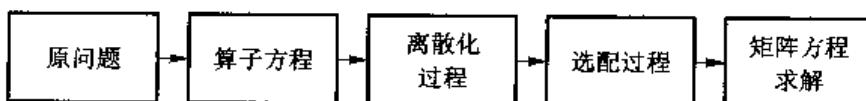


图 5-17-3 矩量法求解一般过程

[讨论] (1) 矩量法的原问题并不限于积分方程, 也可以是微分方程或其他方程。但必须能抽象成算子方程。从这一点而言, 它是普遍的; 另一方面, 矩量法最终要转化为矩阵方程加以解决。因此, 原问题必须属于线性算子范畴。例如, 最速下降线所构成的积分方程  $J = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2gy} dy$  不是线性泛函, 所以无法采用矩量法。

(2) 电磁理论中计算的矩阵单元, 一般均表示某个源在一个区域所产生的场, 而实际产生的场往往都随着源的距离增加而减少。换句话说, 矩量法中矩阵一般是对角占优的: 自作用单元  $l_{nn}$  比互作用单元  $l_{mn}$  ( $m \neq n$ ) 所起的作用要大。这一点在概念上十分重要。

## 二、矩量法的一般过程

矩量法的研究对象是一般非齐次方程

$$L(u) = g \quad (5-17-17)$$

线性算子  $L$  的运算空间称为定义域, 而  $L(u)$  组成的空间称为值域。式(5-17-17)中  $g$  是已知的激励函数,  $u$  为未知函数。令  $u$  在  $L$  的定义域内展开成  $\{u_n\}$  即  $u_1, u_2, \dots, u_N$  的组合, 有

$$u = \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n = u^\top \alpha \quad (5-17-18)$$

其中

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} \text{ 为展开系数矩阵}$$

而

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \text{ 为展开函数}$$

[ ]<sup>T</sup> 表示矩阵转置, 应该注意到: 展开函数与基函数是有区别的。一般说来, 基函数是一无限展开。从完备基转化为近似有限截断基已经构成误差了, 再从有限截断基转化为有限展开函数就很难保证  $\sum_{n=1}^N \alpha_n u_n$  能收敛于  $u$ , 这也是矩量法的研究中需要深入研究的一个问题。这里且写出

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n L(u_n) = g \quad (5-17-19)$$

从算子方程(5-17-17)到式(5-17-19)即构成离散化过程。它可以是函数离散, 也可以是区域离散, 或两者兼有。

现在规定适当的内积( $\omega, g$ )。在算子  $L$  的值域内定义一类权函数(或检验函数)  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ , 作用于式(5-17-19)两边, 且取内积, 有

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \omega_m, L(u_n) \rangle = \langle \omega_m, g \rangle \quad (5-17-20)$$

$$m=1, 2, \dots, N$$

这就是所谓选配过程或试验过程, 矩量法的名称也由此而来, 即把激励矢量  $g$  和  $L(u_n)$  分别向权空间投影, 取它的矩, 根据矩的大小确定展开系数。

如果展开函数的数目与权函数数目相等, 则可把式(5-17-20)写成矩阵形式

$$l_{mn} \alpha_n = g_m \quad (5-17-21)$$

其中

$$l_{mn} = \langle \omega_m, L(u_n) \rangle \quad (5-17-22)$$

于是可以解出

$$\alpha_n = l_{mn}^{-1} g_m \quad (5-17-23)$$

若规定函数矩阵

$$u_n^T = [u_1, u_2, \dots, u_N] \quad (5-17-24)$$

于是待求的函数为

$$u = u_n^T \alpha_n = u_n^T l_{mn}^{-1} g_m \quad (5-17-25)$$

矩量法一般过程的数学表示如图 5-17-4 所示。

十分清楚, 矩量法的结果优劣取决于: ①离散化程度; ②  $u_n$  和  $\omega_m$  的选取; ③线性方程组求解。在  $\omega_m = u_m$  的特殊情况下, 可称为 Galerkin(伽略金)法, 于是矩量法也称为广义 Galerkin 法。

[例 2] 研究  $L(u) = g$ , 其中  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $g = 1 + 4x^2$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ 。

[解] 已经知道, 此问题存在精确解

$$u_0(x) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^4$$

本例采用矩量法求解, 选择

$$u_n(x) = x - x^{n+1} \quad n=1, 2, \dots, N$$

十分清楚, 这样选择满足算子  $L$  定义域的边界条件  $u_n(0) = u_n(1) = 0$ , 可以写出

$$u = \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n = \sum_{n=1}^N \alpha_n (x - x^{n+1})$$

再选择权函数

$$\omega_m = u_m = x - x^{m+1}$$

即采用 Galerkin 法, 内积定义为

$$\langle \omega, g \rangle = \int_0^1 \omega(x) g(x) dx$$

于是可给出一般计算结果

$$\begin{aligned} L_{mn} &= \langle \omega_m, L(u_n) \rangle = \int_0^1 (x - x^{m+1}) \left[ -\frac{d^2}{dx^2} (x - x^{n+1}) \right] dx \\ &= \int_0^1 n(n+1)(x^m - x^{m+n}) dx = \frac{mn}{m+n+1} \\ g_m &= \langle \omega_m, g \rangle = \int_0^1 (x - x^{m+1})(1 + 4x^2) dx \\ &= \int_0^1 (x - x^{m+1} + 4x^3 - 4x^{m+3}) dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} + 1 - \frac{4}{m+4} \\ &= \frac{m(3m+8)}{2(m+2)(m+4)} \end{aligned}$$

归纳起来有

$$L_{mn} = \frac{mn}{m+n+1}, \quad g_m = \frac{m(3m+8)}{2(m+2)(m+4)}$$

情况 1:  $N=1$

$$l_{11} = \frac{1}{3}, \quad g_1 = \frac{11}{30}, \quad \alpha_1 = \frac{11}{10}$$

于是有

$$u(x) \approx \frac{11}{10}(x - x^2)$$

情况 2:  $N=2$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 60 \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$u(x) \approx \frac{1}{10}(x - x^2) + \frac{2}{3}(x - x^3) = \frac{23}{30}x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

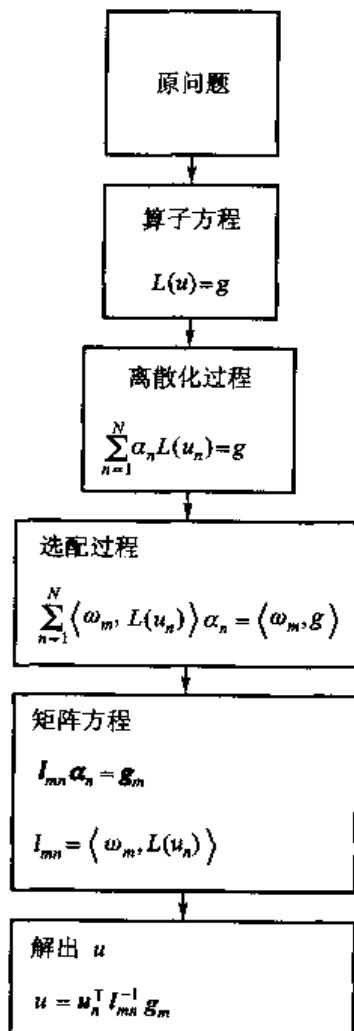


图 5-17-4 矩量法一般过程的数学表示

情况 3:  $N=3$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{9}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{51}{70} \end{bmatrix}$$

$$\det(L) = \frac{36}{105} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - \frac{36}{125} - \frac{1}{3} - \frac{9}{28} = \frac{1}{10500}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 10500 \begin{bmatrix} \frac{1}{35} & -\frac{3}{70} & \frac{1}{50} \\ -\frac{3}{70} & \frac{36}{525} & -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{50} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{51}{70} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}(x-x^2) + \frac{1}{3}(x-x^4) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4 = u_0(x)$$

十分明显,  $N=3$  时已得到了精确解  $u_0(x)$ 。 $u(x)$  矩量解的曲线如图 5-17-5 所示。

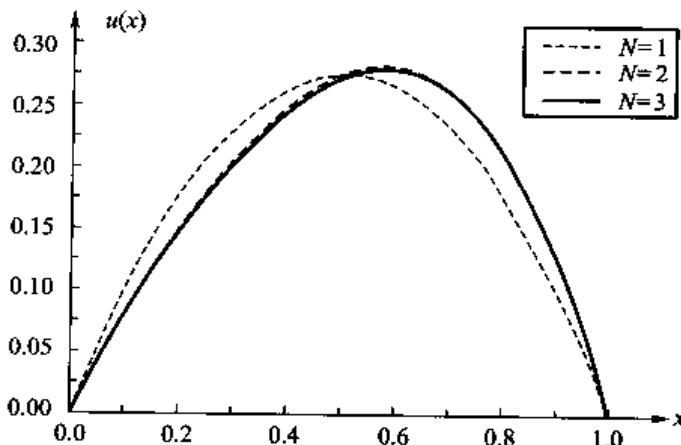


图 5-17-5  $u(x)$  矩量解

### 三、选配和离散过程

从上面的典型例子可知, 矩量法的精华在于选配和离散过程, 值得单独进行研究。

#### 1. 点选配

点选配是一种最简单而又最典型的选配函数。因为矩阵单元为  $L_{mn} = \langle \omega_m, L(u_n) \rangle$ , 一般说来, 其中所含的积分计算十分困难, 这种情况下, 最简单的办法是做某些点的投影, 即所谓的点选配, 实际上就相当于把权函数取为 Dirac- $\delta$  函数。

[例 3] 仍研究  $-\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 1 + 4x^2$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ 。

[解] 设  $u_n(x) = x - x^{n+1}$ , 可得到

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \left[ -\frac{d^2}{dx^2}(x - x^{n+1}) \right] = 1 + 4x^2$$

在这个例子中取  $\delta$  函数为权函数即

$$\begin{cases} \omega_m = \delta(x - x_m) \\ x_m = \frac{m}{N+1}, m = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

其中,  $x_m$  是这个问题的选配点, 于是有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \alpha_n [n(n+1)x^{n-1}] &= 1 + 4x^2 \\ l_{mn} = \langle \omega_m, L(u_n) \rangle &= \int_0^1 n(n+1)x^{n-1} \delta(x - x_m) dx = n(n+1) \left( \frac{m}{N+1} \right)^{n-1} \\ g_m = \langle \omega_m, g \rangle &= \int_0^1 (1 + 4x^2) \delta(x - x_m) dx = 1 + 4 \left( \frac{m}{N+1} \right)^2 \end{aligned}$$

归结起来, 可写出

$$\begin{aligned} l_{mn} &= n(n+1) \left( \frac{m}{N+1} \right)^{n-1} \\ g_m &= 1 + 4 \left( \frac{m}{N+1} \right)^2 \end{aligned}$$

情况 1:  $N=1$

$$l_{11} = 2, \quad g_1 = 2$$

$$\alpha_1 = 1$$

$$u(x) \approx x - x^2$$

情况 2:  $N=2$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{13}{9} \\ \frac{25}{9} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} &= -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13}{9} \\ \frac{25}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$u(x) = \frac{1}{18}(x - x^2) + \frac{2}{3}(x - x^3) = \frac{13}{18}x - \frac{1}{18}x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

情况 3:  $N=3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & \frac{3}{4} \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & \frac{9}{2} & \frac{27}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 2 \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix}$$

可以得出

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} \frac{27}{4} & -\frac{27}{4} & \frac{9}{4} \\ -\frac{15}{2} & 12 & -\frac{9}{2} \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 2 \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}(x-x^2) + \frac{1}{3}(x-x^3) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4 = u_0(x)$$

对于点选配情况  $N=3$ , 又一次回复到精确解。

[讨论] (1) 对于点选配的情况,  $N+1$  阶矩阵中的  $N$  阶主子阵并不等于在  $N$  时的系数矩阵(和 Galerkin 情况不同)。因此当  $N$  逐渐变大时计算量无法节约。

(2) 点选配虽然看起来非常简单, 然而其内在的道理极其深刻。这一点可以从数值积分看出。研究表明任何数值积分方法, 不论矩形、梯形、二次样条等, 说到底都是选择积分区域的点和区域点所对应的系数, 由此产生 Gauss 积分的思想。所以在矩量法中, 研究最佳点选配将是一个十分有意义的课题。

## 2. 脉冲分域基

矩量法在离散化过程中用展开函数取代基函数, 带来了方便和自由。但是, 随之而来的如何确保解的收敛性的问题却值得人们重视。在尚未了解  $u(x)$  函数性态的条件下, 采用有限个展开函数  $\{u_i(x)\}, i=1, 2, \dots, N$  时要确保解收敛显然在理论上存在不少困难, 采用分域基函数可以说是比较稳妥的一种解决方案。因为大多数良态函数(不做高速振荡)均可以采用有限段直线或样条加以逼近, 如图 5-17-6 所示。

下面从最简单的脉冲函数着手展开讨论。

一般的脉冲函数可以表述为

$$P(x-x_i) = \begin{cases} 1 & x \in \left(x_i - \frac{1}{2(N+1)}, x_i + \frac{1}{2(N+1)}\right) \\ 0 & x \notin \left(x_i - \frac{1}{2(N+1)}, x_i + \frac{1}{2(N+1)}\right) \end{cases} \quad (5-17-26)$$

式(5-17-26)表示以  $x_i$  为中点, 密度为  $1/(N+1)$  的脉冲函数, 在实际情况下, 密度可以根据问题灵活改变, 如图 5-17-7 所示。

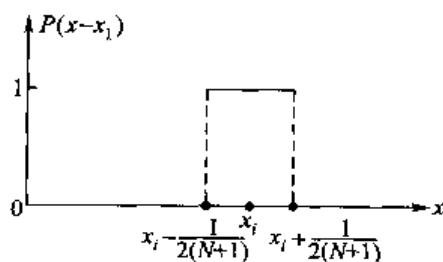


图 5-17-7 脉冲函数

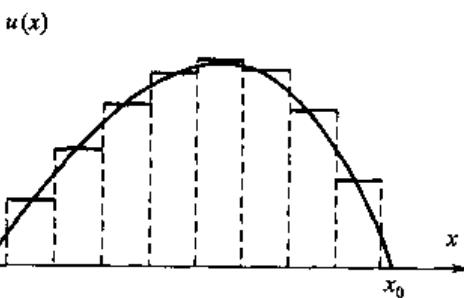


图 5-17-6 分域基函数近似

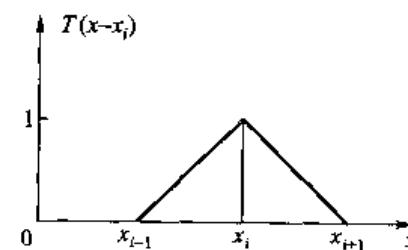


图 5-17-8 三角形函数

### 3. 三角形函数分域基

三角形函数也是常用的一种分域基,如图 5-17-8 所示。

$$T(x-x_i)=\begin{cases} 1-\frac{|x-x_i|}{|x_{i+1}-x_i|} & x \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \\ 0 & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

若采用三角形函数展开未知函数  $u(x)$ ,则有

$$u(x) = \sum_{n=1}^N a_n T(x-x_n) \quad (5-17-27)$$

所得的解的合成相当于折线连接,分段三角形函数所得的折线包络如图 5-17-9 所示。

为了研究具体例子,这里先给出三角形函数的导数概念。引入如图 5-17-10 所示的阶梯函数  $H(x-x_i)$ ,其定义为

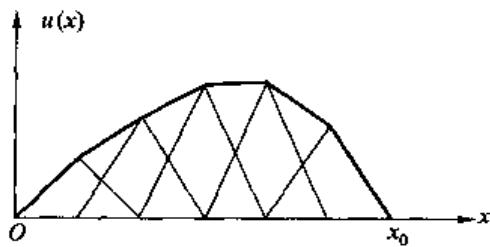


图 5-17-9 分段三角形函数  
所得的折线包络

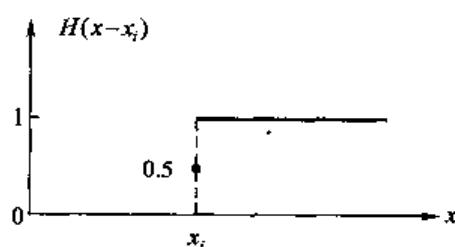


图 5-17-10  $H(x-x_i)$  阶梯函数

$$H(x-x_i)=\begin{cases} 1 & x>x_i \\ \frac{1}{2} & x=x_i \\ 0 & x<x_i \end{cases} \quad (5-17-28)$$

再引入大家熟悉的 Dirac- $\delta$  函数,也即脉冲函数,其定义为

$$\delta(x-x_i)=\begin{cases} \infty & x=x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases} \quad (5-17-29)$$

如图 5-17-11 所示。

Dirac- $\delta$  函数有两个重要的性质:

① 归一性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_i) dx = 1 \quad (5-17-30)$$

② 选择性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-x_i) dx = f(x_i) \quad (5-17-31)$$

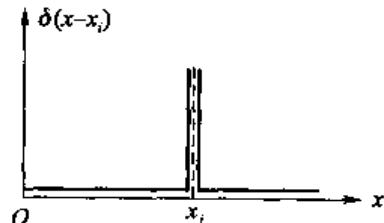


图 5-17-11  $\delta(x-x_i)$  函数

这里不加证明地给出 Dirac- $\delta$  函数和阶梯函数之间的重要关系。

$$\frac{d}{dx}[H(x-x_i)] = \delta(x-x_i) \quad (5-17-32)$$

有了以上基础就可以把三角形函数的导数用阶梯函数  $H$  表示,具体为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[T(x-x_i)] &= \frac{1}{x_i-x_{i-1}}H(x-x_{i-1}) - \left(\frac{1}{x_i-x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\right)H(x-x_i) \\ &\quad + \frac{1}{x_{i+1}-x_i}H(x-x_{i+1})\end{aligned}\quad (5-17-33)$$

图 5-17-12 给出形象的几何表示。

[例 4] 重新研究 Harrington(哈林登)问题,  $L(u) = g$ , 其中  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $g = 1 + 4x^2$ , 边界条件为  $u(0) = u(1) = 0$ 。

试用以三角形函数作为展开函数, 脉冲函数作为权函数的矩量法求解。

[解] 根据要求可写出

$$u(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n T(x-x_n)$$

于是有

$$\begin{aligned}L[T(x-x_n)] &= -\frac{d^2}{dx^2}[T(x-x_n)] \\ &= (N+1)[- \delta(x-x_{n-1}) + 2\delta(x-x_n) - \delta(x-x_{n+1})]\end{aligned}$$

上式已计及

$$\frac{1}{x_i-x_{i-1}} = \frac{1}{x_{i+1}-x_i} = N+1$$

选择权函数

$$\begin{cases} \omega_m = P(x-x_m) \\ x_m = \frac{m}{N+1} \end{cases}$$

于是矩阵单元

$$\begin{aligned}l_{mn} &= \int_0^1 \omega_m L[T(x-x_n)] dx \\ &= \int_0^1 P(x-x_m)(N+1)[- \delta(x-x_{n-1}) + 2\delta(x-x_n) - \delta(x-x_{n+1})] dx\end{aligned}$$

上式要分三种情况讨论。

此外, 激励单元为

$$g_m = \int_0^1 \omega_m (1+4x^2) dx = \int_0^1 P(x-x_m)(1+4x^2) dx = \int_{x_m-\frac{1}{2(N+1)}}^{x_m+\frac{1}{2(N+1)}} (1+4x^2) dx$$

结果可归纳为

$$l_{mn} = \begin{cases} 2(N+1) & m=n \\ -(N+1) & |m-n|=1 \\ 0 & |m-n|>1 \end{cases}$$

$$g_m = \frac{1}{N+1} \left[ 1 + \frac{4m^2 + \frac{1}{3}}{(N+1)^2} \right]$$

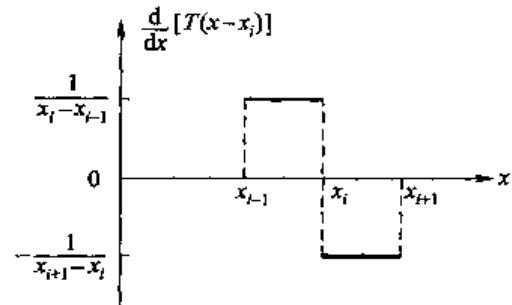


图 5-17-12 三角形函数导数的几何表示

情况 1:  $N=1$

$$l_{11}=4, \quad g_1=\frac{25}{24}$$

$$\alpha_1=\frac{25}{96}=0.260\ 416\ 6$$

考虑到对比

$$u_0(x)=\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^4$$

则有

$$u_0\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{48}=0.270\ 833\ 3$$

$u_1(x)$  和  $u_0(x)$  的对比如图 5-17-13 所示。

情况 2:  $N=2$

$$L=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad g=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 40 \\ 27 \\ 76 \\ 27 \end{bmatrix}$$

容易得到

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2187} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 27 \\ 76 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2187} \begin{bmatrix} 468 \\ 576 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.213\ 991\ 7 \\ 0.263\ 374\ 4 \end{bmatrix}$$

同样对比有

$$\begin{bmatrix} u_0\left(\frac{1}{3}\right) \\ u_0\left(\frac{2}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{53}{243} \\ \frac{65}{243} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.218\ 107 \\ 0.267\ 489\ 7 \end{bmatrix}$$

$u_2(x)$  和  $u_0(x)$  的对比如图 5-17-14 所示。

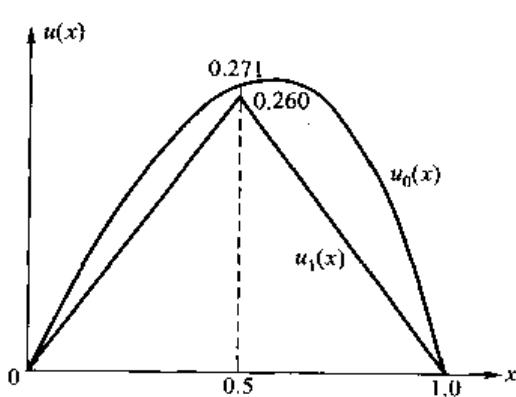


图 5-17-13  $u_1(x)$  和  $u_0(x)$

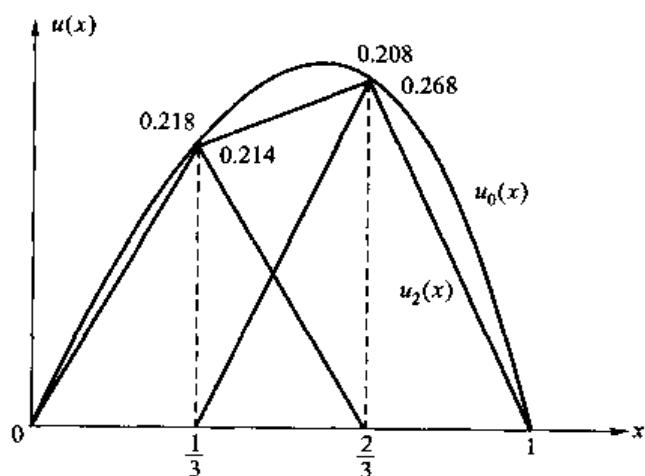


图 5-17-14  $u_2(x)$  和  $u_0(x)$

情况 3:  $N=3$

$$I = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \quad g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{61}{48} \\ \frac{97}{48} \\ \frac{157}{48} \end{bmatrix}$$

于是有

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{49 \cdot 152} \begin{bmatrix} 48 & 32 & 16 \\ 32 & 64 & 32 \\ 16 & 32 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61 \\ 97 \\ 157 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{49 \cdot 152} \begin{bmatrix} 8544 \\ 13184 \\ 11616 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1738281 \\ 0.2682291 \\ 0.2363281 \end{bmatrix}$$

同样对比有

$$\begin{bmatrix} u_0\left(\frac{1}{4}\right) \\ u_0\left(\frac{1}{2}\right) \\ u_0\left(\frac{3}{4}\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{768} \begin{bmatrix} 135 \\ 208 \\ 183 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1757812 \\ 0.2708333 \\ 0.2382812 \end{bmatrix}$$

$u_3(x)$  和  $u_0(x)$  的对比如图 5-17-15 所示。

[讨论] 分域基在  $N$  不大的情况下与精确解的差距是明显的。但是, 它的相应矩阵是三条带矩阵, 可较明显地减小计算量。因此选择  $N$  不大的分域基并进行顶点拟合将会是一个比较好的方案。

## 四、算子研究

算子方程是矩量法建模的关键。它应该有两个方面的要求: 一方面算子方程必须符合物理(或工程)问题的主要本质; 另一方面

它又必须适合数值计算。这两个方面构成了算子研究的基础。

### 1. 近似算子

细心的读者一定会提出这样一个问题, 即[例 4]中为什么不采用脉冲函数作为分域基展开? 其实原因十分简单, 因为脉冲函数的二阶导数表示有很大困难。但是, 倘若引进近似算子的概念, 则可以较好地解决这个问题。

算子近似含义相当广泛。作为例子, 可采用有限差分取代微分。

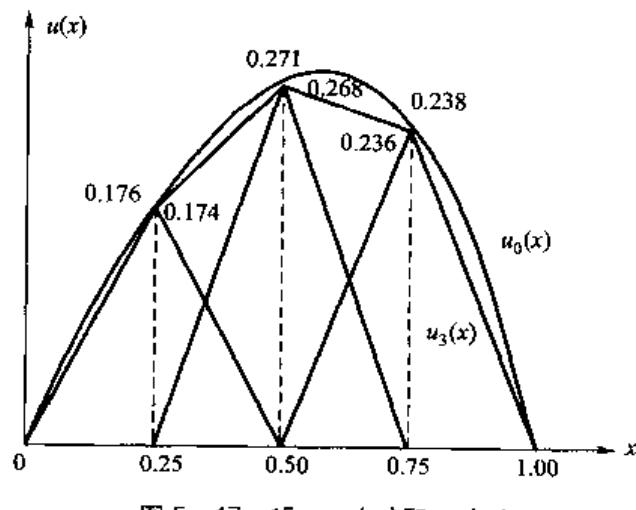


图 5-17-15  $u_3(x)$  和  $u_0(x)$

$$\frac{du(x)}{dx} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ u\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - u\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right] \quad (5-17-34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} &\approx \frac{1}{\Delta x} \left[ u'\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - u'\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right] \\ &\approx \frac{1}{(\Delta x)^2} [u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)] \end{aligned} \quad (5-17-35)$$

[例 5] 研究  $L(u)=g$  的 Harrington 问题, 即  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $g = 1 + 4x^2$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ , 试采用差分近似算子  $L^* \approx L$ , 脉冲展开点选配的矩量法求解。

[解] 为确保  $u(0) = u(1) = 0$  的边界条件, 在两端各留出半段为强制置零段。因此当选择  $N$  个脉冲函数时, 全部区域  $(0, 1)$  应分成  $(N+1)$  段, 即

$$\Delta x = \frac{1}{N+1}$$

于是有

$$L^*(u) = (N+1)^2 \left\{ -u\left(x - \frac{1}{N+1}\right) + 2u(x) - u\left(x + \frac{1}{N+1}\right) \right\}$$

且做点选配有

$$\omega_m = \delta(x - x_m), \quad x_m = \frac{m}{N+1}$$

这样, 可以获得矩阵单元  $l_{mn}$  的表示式

$$\begin{aligned} l_{mn} &= \int_0^1 \omega_m L^*(P_n) dx \\ &= (N+1)^2 \int_0^1 \left[ -P\left(x - \frac{n+1}{N+1}\right) + 2P\left(x - \frac{n}{N+1}\right) - P\left(x - \frac{n-1}{N+1}\right) \right] \delta(x - x_m) dx \\ g_m &= \int_0^1 \omega_m g dx = \int_0^1 (1 + 4x^2) \delta(x - x_m) dx \end{aligned}$$

可以归纳为

$$\begin{aligned} l_{mn} &= \begin{cases} 2(N+1)^2 & m=n \\ -(N+1)^2 & |m-n|=1 \\ 0 & |m-n|>1 \end{cases} \\ g_m &= 1 + 4 \left( \frac{m}{N+1} \right)^2 \end{aligned}$$

情况 1,  $N=1$

$$l_{11} = 8 \quad g_1 = 2$$

于是得到

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} = 0.25$$

对比

$$u_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{48} = 0.270833$$

这里的  $u_1(x)$  和  $u_0(x)$  的对比如图 5-17-16 所示。

表面上看,与图 5-17-13 类似,实际上脉冲函数和三角形函数意义有很大不同,又注意到图 5-17-16 中  $(0, \frac{1}{4})$  和  $(\frac{3}{4}, 1.0)$  各强制置零半段。

情况 2:  $N=2$

$$l = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{bmatrix} \quad g = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 13 \\ 25 \end{bmatrix}$$

于是有

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2187} \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2187} \begin{bmatrix} 459 \\ 567 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2098765 \\ 0.2592592 \end{bmatrix}$$

对比

$$\begin{bmatrix} u_0(\frac{1}{3}) \\ u_0(\frac{2}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.218107 \\ 0.2674897 \end{bmatrix}$$

$u_2(x)$  和  $u_0(x)$  的对比如图 5-17-17 所示。

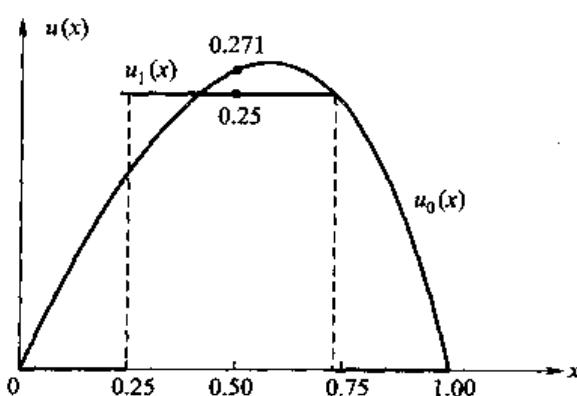


图 5-17-16  $u_1(x)$  和  $u_0(x)$

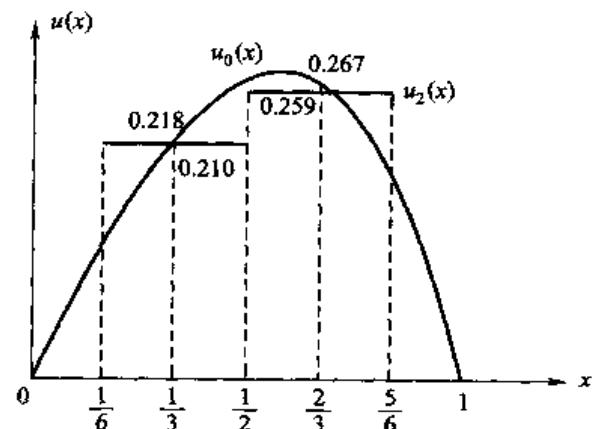


图 5-17-17  $u_2(x)$  和  $u_0(x)$

情况 3:  $N=3$

$$l = \begin{bmatrix} 32 & -16 & 0 \\ -16 & 32 & -16 \\ 0 & -16 & 32 \end{bmatrix} \quad g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

于是有

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{65536} \begin{bmatrix} 768 & 512 & 256 \\ 512 & 1024 & 512 \\ 256 & 512 & 768 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{65536} \begin{bmatrix} 11264 \\ 17408 \\ 15360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.171875 \\ 0.265625 \\ 0.234375 \end{bmatrix}$$

作为对比有

$$\begin{bmatrix} u_0\left(\frac{1}{4}\right) \\ u_0\left(\frac{1}{2}\right) \\ u_0\left(\frac{3}{4}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1757812 \\ 0.2708333 \\ 0.2382812 \end{bmatrix}$$

$u_3(x)$  和  $u_0(x)$  的对比如图 5-17-18 所示。

## 2. 扩展算子

算子包括定义域和运算域。如同数学上经常所做的那样,可以采用扩展算子来增加展开函数或权函数选择的自由度。原算子和扩展算子的逻辑关系如图 5-17-19 所示。很明显,扩展算子不改变原算子的运算。

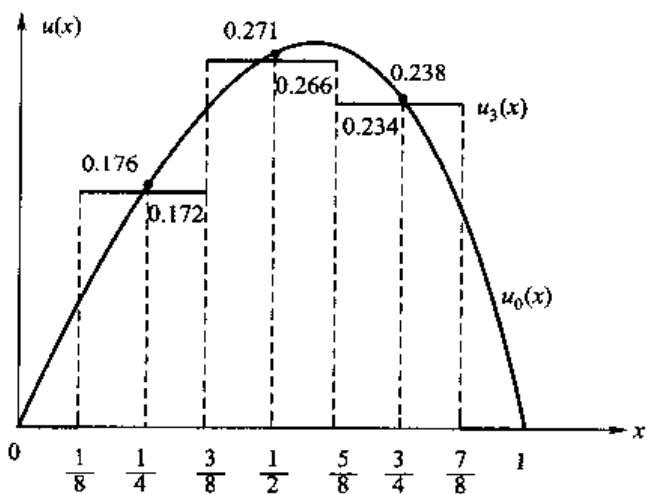


图 5-17-18  $u_3(x)$  和  $u_0(x)$

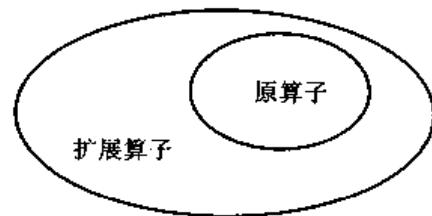


图 5-17-19 原算子和扩展算子的逻辑关系

[例 6] 希望 Harrington 问题  $L(u)=g$  采用脉冲函数作为展开函数并引入扩展算子概念。

[解] 从上面论述中已知  $L(P)$  在原来的定义域中不存在。但深入研究矩量法后发现,矩量法并不要求  $L(P)$  有定义,而只要内积  $\langle \omega, L(u) \rangle$  有定义即可。

$$\begin{aligned} \langle \omega, L(u) \rangle &= \int_0^1 \omega \left( -\frac{d^2}{dx^2} u \right) dx = \int_0^1 -\omega d \left( \frac{du}{dx} \right) \\ &= - \left[ \omega \frac{du}{dx} \right] \Big|_0^1 + \int_0^1 \left( \frac{d\omega}{dx} \right) \left( \frac{du}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (5-17-36)$$

于是可以放松要求为,所选择的权函数  $\omega$  满足定义域,即

$$\omega(0) = \omega(1) = 0 \quad (5-17-37)$$

则可引入扩展算子

$$\langle \omega, L(u) \rangle = \int_0^1 \left( \frac{d\omega}{dx} \right) \left( \frac{du}{dx} \right) dx \quad (5-17-38)$$

从而避免  $L(u)$  问题,于是设

$$\begin{cases} u = \sum_{n=1}^N \alpha_n P(x - x_n) \\ \omega_m = T(x - x_m) \end{cases}$$

则可知矩阵单元为

$$\begin{aligned} L_{mn} &= \langle \omega_m, L [P(x - x_n)] \rangle = \int_0^1 \frac{dT(x - x_m)}{dx} \frac{dP(x - x_n)}{dx} dx \\ &= \int_0^1 (N+1) \left\{ H\left(x - \frac{m-1}{N+1}\right) - 2H\left(x - \frac{m}{N+1}\right) + H\left(x - \frac{m+1}{N+1}\right) \right\} \\ &\quad \left\{ \delta\left(x - \frac{2n-1}{2(N+1)}\right) - \delta\left(x - \frac{2n+1}{2(N+1)}\right) \right\} dx \end{aligned}$$

以及激励单元

$$\begin{aligned} g_m &= \int_0^1 \omega_m g dx = \int_0^1 T(x - x_m) (1 + 4x^2) dx \\ &= \int_0^1 T(x - x_m) d\left[x + \frac{4}{3}x^3\right] = T(x - x_m) \left(x + \frac{4}{3}x^3\right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(x + \frac{4}{3}x^3\right) dT(x - x_m) \\ &= - \int_0^1 (N+1) \left(x + \frac{4}{3}x^3\right) \left[ P\left(x - \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})\right) - P\left(x - \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})\right) \right] dx \\ &= -(N+1) \int_{\frac{m-1}{N+1}}^{\frac{m}{N+1}} \left(x + \frac{4}{3}x^3\right) dx + (N+1) \int_{\frac{m}{N+1}}^{\frac{m+1}{N+1}} \left(x + \frac{4}{3}x^3\right) dx \end{aligned}$$

归纳起来是

$$l_{mn} = \begin{cases} 2(N+1) & m=n \\ -(N+1) & |m-n|=1 \\ 0 & |m-n|>1 \end{cases}$$

$$g_m = \frac{1}{N+1} \left( 1 + \frac{4m^2 + 2/3}{(N+1)^2} \right)$$

它和三角形函数展开脉冲函数检验所得到的公式差距极其细微。

当  $N$  增大时,  $g_m$  彼此相当接近。

情况 1:  $N=1$

$$l_{11} = 4 \quad g_1 = \frac{26}{24}$$

$$\alpha_1 = \frac{26}{96} = 0.270\ 833\ 3$$

这种情况与

$$u_0 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{48} = 0.270\ 833$$

完全吻合。

情况 2:  $N=2$

$$L = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad g = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{41}{27} \\ \frac{77}{27} \end{bmatrix}$$

容易得到

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2187} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41 \\ 77 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2187} \begin{bmatrix} 477 \\ 585 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.21806995 \\ 0.267489711 \end{bmatrix}$$

对比

$$\begin{bmatrix} u_0 \left( \frac{1}{3} \right) \\ u_0 \left( \frac{2}{3} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.218107 \\ 0.2674897 \end{bmatrix}$$

完全吻合。

情况 3:  $N=3$

$$L = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \quad g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 62 \\ 48 \\ 98 \\ 48 \\ 158 \\ 48 \end{bmatrix}$$

于是有

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{49152} \begin{bmatrix} 48 & 32 & 16 \\ 32 & 64 & 32 \\ 16 & 32 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 62 \\ 98 \\ 158 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{49152} \begin{bmatrix} 8640 \\ 13312 \\ 11712 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.17578125 \\ 0.2708333 \\ 0.23828125 \end{bmatrix}$$

对比

$$\begin{bmatrix} u_0 \left( \frac{1}{4} \right) \\ u_0 \left( \frac{1}{2} \right) \\ u_0 \left( \frac{3}{4} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1757812 \\ 0.2708333 \\ 0.2382812 \end{bmatrix}$$

也完全吻合。

三种情况顶点解均完全吻合, 内在原因值得研究。

另一种扩展算子的思想是设法拓展算子  $L$  的定义域, 例如在 Harrington 问题的研究中可以选择不满足边界条件  $u(0)=u(1)=0$  的展开函数体系  $\{u_n\}$ 。

[例 7] 采用扩展算子  $L$  定义域的思想求解 Harrington 问题。

[解] 定义扩展算子

$$\langle \omega, L^e(u) \rangle = \int_0^1 \omega L(u) dx - \left[ u \frac{d\omega}{dx} \right] \Big|_0^1 \quad (5-17-39)$$

采用这种思想可不必顾及边界条件而选择

$$u_n = \omega_n = x^n \quad (5-17-40)$$

注意到扩展算子不会漏解,若  $u(0)=u(1)=0$ ,则有

$$\langle \omega, L^e(u) \rangle = \int_0^1 \omega L(u) dx = \langle \omega, L(u) \rangle$$

但是,它有可能增加其他解。严格边界条件使式(5-17-40)定义的 Taylor 展开不包括  $n=0$  的常数项。容易归纳

$$l_{mn} = -\frac{n(n-1)}{m+n-1} - m$$

$$g_m = \frac{5m+7}{(m+1)(m+3)}$$

这种扩展算子对于  $N$  较小时逼近不甚理想。而当  $N=4$  时,有

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & -\frac{8}{3} & -\frac{7}{2} & -\frac{22}{5} \\ -3 & -\frac{7}{2} & -\frac{21}{5} & -5 \\ -4 & -\frac{22}{5} & -5 & -\frac{40}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{17}{15} \\ \frac{11}{12} \\ \frac{27}{35} \end{bmatrix}$$

即可得出

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

它就是问题的精确解。

### 3. 微扰算子

微扰算子问题的提法是已知微扰原问题解

$$L_0(u_0) = g \quad (5-17-41)$$

希望研究微扰后问题

$$L(u) = g \quad (5-17-42)$$

其中

$$\begin{cases} L = L_0 + P \\ u = u_0 + \epsilon v \end{cases} \quad (5-17-43)$$

$$(5-17-44)$$

而  $\epsilon$  为一阶小量,  $P$  为微扰算子。

可以写出

$$(L_0 + P)(u_0 + \epsilon v) = g \quad (5-17-45)$$

若忽略两阶小量  $\epsilon P(v)$ , 得到

$$P(u_0) + \epsilon L_0(v) = 0 \quad (5-17-46)$$

则有

$$\epsilon = -\frac{P(u_0)}{L_0(v)} \quad (5-17-47)$$

于是有解

$$u = u_0 - \frac{P(u_0)}{L_0(v)} \cdot v \quad (5-17-48)$$

实际上,这个解正是微扰法和矩量法的交叉结果。

#### 4. 矩量解与伴随问题

矩量解与它的伴随问题的稳定性紧密相关。

##### (1) 伴随问题

广义地假设空间有两个源  $g$  和  $h$ , 它满足

$$\begin{cases} L(u) = g \\ L^*(u^*) = h \end{cases} \quad (5-17-49)$$

$$(5-17-50)$$

式(5-17-50)是式(5-17-49)的伴随问题,如图 5-17-20 所示。

研究  $g$  在算子  $L$  的作用下,在  $h$  处产生的场  $u$ ,以及  $h$  在算子  $L^*$  的作用下,在  $g$  处产生的场  $u^*$ 。

采用  $\langle h, u \rangle$  表示源  $h$  与  $g$  产生场  $u$  的反应;采用  $\langle g, u^* \rangle$  表示源  $g$  与  $h$  产生场  $u^*$  的反应。特别当  $L^* = L$ , 即算子自伴, 则有

$$\rho = \langle h, u \rangle = \langle g, u^* \rangle \quad (5-17-51)$$

式(5-17-51)也可理解为广义互易定理形式。

##### (2) 内积变分稳定定理

$a, b$  表示准确值,  $\hat{a}, \hat{b}$  表示试摆值, 则当变分稳定时必有

$$\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle = \langle \hat{a}, b \rangle = \langle a, \hat{b} \rangle \quad (5-17-52)$$

对变分稳定式(5-17-52)给出证明。

[证明] 令  $\hat{a} = a + p_a e_a$

$$\hat{b} = b + p_b e_b$$

则

$$\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle = \langle a, b \rangle + p_a \langle e_a, b \rangle + p_b \langle a, e_b \rangle + p_a p_b \langle e_a, e_b \rangle$$

变分稳定时, 有

$$\frac{\partial \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle}{\partial p_a} = 0$$

得到

$$p_b \langle e_a, e_b \rangle = -\langle e_a, b \rangle$$

又有

$$\frac{\partial \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle}{\partial p_b} = 0$$



图 5-17-20 伴随问题

得到

$$p_a \langle e_a, e_b \rangle = -\langle a, e_b \rangle$$

由此可知

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle &= \langle a, b \rangle - p_a p_b \langle e_a, e_b \rangle \\ \langle a, \hat{b} \rangle &= \langle a, b \rangle + p_b \langle a, e_b \rangle \\ &= \langle a, b \rangle - p_a p_b \langle e_a, e_b \rangle \\ \langle \hat{a}, b \rangle &= \langle a, b \rangle + p_a \langle e_a, b \rangle \\ &= \langle a, b \rangle - p_a p_b \langle e_a, e_b \rangle\end{aligned}$$

即证出式(5-17-51)。

(3) 伴随问题的变分稳定与矩量解。

所研究的问题中常常无法知道真实场  $u$  和  $u^*$ , 而只能知道真实的源  $g$ 。按变分稳定的思想  $u$  只能写出试探场  $\hat{u}$ , 即

$$\hat{\rho} = \langle \hat{h}, \hat{u} \rangle \quad (5-17-53)$$

注意到式(5-17-53)并不是  $\hat{\rho}$  的稳定公式, 而只是  $\hat{\rho}$  的一般公式。为了使它满足变分稳定, 写出

$$\hat{\rho} = \frac{\langle \hat{h}, \hat{u} \rangle \langle \hat{h}, \hat{u} \rangle}{\langle \hat{h}, \hat{u} \rangle} \quad (5-17-54)$$

计及内积变分稳定定理, 当变分泛函处于驻值条件下式(5-17-52)成立, 于是稳定  $\hat{\rho}$  有

$$\hat{\rho} = \frac{\langle h, \hat{u} \rangle \langle \hat{h}, u \rangle}{\langle \hat{h}, \hat{u} \rangle} \quad (5-17-55)$$

进一步

$$\langle \hat{h}, u \rangle = \langle L(\hat{u}^*), u \rangle = \langle \hat{u}^*, L(u) \rangle = \langle \hat{u}^*, g \rangle$$

$$\langle \hat{h}, \hat{u} \rangle = \langle L(\hat{u}^*), \hat{u} \rangle = \langle \hat{u}^*, L(\hat{u}) \rangle$$

于是变分稳定式(5-17-55)又可写为

$$\hat{\rho} = \frac{\langle \hat{u}^*, g \rangle \langle h, \hat{u} \rangle}{\langle \hat{u}^*, L(\hat{u}) \rangle} \quad (5-17-56)$$

现在, 假设展开函数

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u} = \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n \\ \hat{u}^* = \sum_{m=1}^M \beta_m \omega_m \end{array} \right. \quad (5-17-57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u} = \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n \\ \hat{u}^* = \sum_{m=1}^M \beta_m \omega_m \end{array} \right. \quad (5-17-58)$$

并代入式(5-17-56), 有

$$\hat{\rho} = \frac{\left\langle \sum_{m=1}^M \beta_m \omega_m, g \right\rangle \left\langle h, \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n \right\rangle}{\left\langle \sum_{m=1}^M \beta_m \omega_m, L \left( \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n \right) \right\rangle} \quad (5-17-59)$$

上式利用线性算子性质,进一步简化成

$$\hat{\rho} = \frac{\left( \sum_{m=1}^N \beta_m \langle \omega_m, g \rangle \right) \left( \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle h, u_n \rangle \right)}{\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \alpha_n \beta_m \langle \omega_m, L(u_n) \rangle} = \frac{N}{D}$$

对于稳定的 $\hat{\rho}$ ,有 $\delta \hat{\rho} = 0$ ,利用 RayLeigh-Ritz(瑞利-利兹)方程,即

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \beta_k} = 0, \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (5-17-60)$$

具体得到

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \beta_k} = \frac{1}{D^2} \left\{ D \langle \omega_k, g \rangle \left( \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle h, u_n \rangle \right) - N \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \omega_k, L(u_n) \rangle \right\} = 0 \\ k=1, 2, \dots, N$$

进一步设

$$\begin{cases} \rho_u = \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle h, u_n \rangle = \langle h, \hat{u} \rangle \approx \langle h, u \rangle \\ \rho_w = \sum_{n=1}^N \beta_n \langle \omega_n, g \rangle = \langle u^*, g \rangle \end{cases} \quad (5-17-61)$$

$$\begin{cases} \rho_u = \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle h, u_n \rangle = \langle h, \hat{u} \rangle \approx \langle h, u \rangle \\ \rho_w = \sum_{n=1}^N \beta_n \langle \omega_n, g \rangle = \langle u^*, g \rangle \end{cases} \quad (5-17-62)$$

则有

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \beta_k} = \rho_u \langle \omega_k, g \rangle - \rho_w \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \omega_k, L(u_n) \rangle = 0 \quad k=1, 2, \dots, N \quad (5-17-63)$$

根据广义互易定理

$$\langle h, u \rangle = \langle u^*, g \rangle$$

即

$$\rho_u \approx \rho_w \quad (5-17-64)$$

于是得到

$$\langle \omega_k, g \rangle = \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \omega_k, L(u_n) \rangle \quad k=1, 2, \dots, N \quad (5-17-65)$$

根据伴随问题的内积泛函变分稳定,可以得到原问题的矩量解,其中的内在联系值得进一步研究。

## 五、导体问题的 RWG 法

目前,计算任意形状导体表面感应电流最有效的方法即所谓面元模拟法,下面将具体介绍面元模拟法中应用最为广泛的 RWG 法。RWG 法正是用许多平面三角形形状的小面元来逼近任意导体表面的一种方法,建立的这种模型简称 Rao 模型。

RWG 法最早是由 Rao、Wilton 和 Glisson 在 1982 年提出并发展的(IEEE Trans. Ap-30 No. 3, May 1982; 409-418)。

RWG 法简要框图如图 5-17-21 所示。

### 1. 电场积分方程

电场积分方程是利用在理想导体表面  $S$  的切向电场为 0 而建立起来的。电场积分方程的问题模型如图 5-17-22 所示。事实上,图 5-17-22(a)中的散射问题和(b)中的辐射问题是一致的。正如 R. F. Harrington 所言:“天线是源在导体上的散射,而散射是源在导体外的天线。”

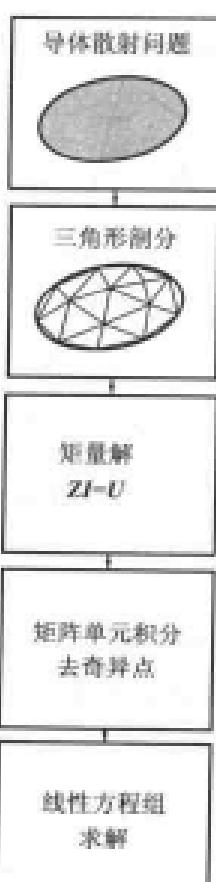


图 5-17-21 RWG  
方法简要框图

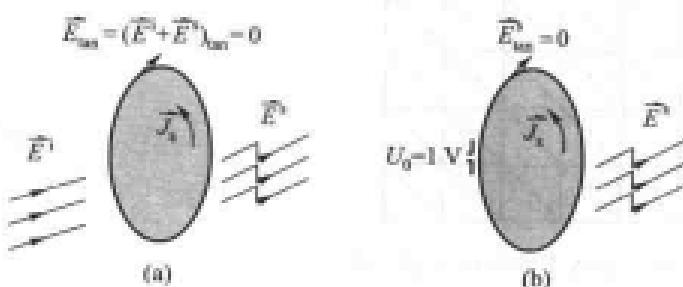


图 5-17-22 电场积分方程问题模型

可以写出导体表面的边界条件为

$$-\vec{E}'(\vec{r})_{nn} = [-j\omega \vec{A}(\vec{r}) - \nabla \Phi(\vec{r})]_{nn} \quad \vec{r} \text{ 在 } S \text{ 上} \quad (5-17-66)$$

其中,  $\vec{E}'(\vec{r})$  是入射场;  $\vec{A}$  和  $\Phi$  是用来表示待求散射场  $\vec{E}'$  的位函数; 表面电流  $\vec{J}(\vec{r}')$  是在激励源  $\vec{E}'(\vec{r})$  照射下产生的感应电流。

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (5-17-67)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi j\omega} \int_S \nabla'_i \cdot \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (5-17-68)$$

和磁场积分方程相比,电场积分方程可适用于开放型和封闭型物体,而磁场积分方程仅适用于封闭型物体。但由于电场积分方程中出现电流的面散度,应用起来相对困难些,而 Rao 模型的电流基函数满足面散度为常数的条件,因而计算比较简单。

## 2. Rao 模型

Rao 模型的关键思想是定出一种规则,把任意导体表面剖分为很多小三角形面元。为了确保单元内不存在强的波动性,一般每条边长均小于  $\frac{1}{10}\lambda$ 。图 5-17-23 所示为 Rao 三角形部分,而图 5-17-24 则给出 Rao 模型中典型的共棱三角形对。

共棱三角形对是 Rao 模型的最基本面元形式,式(5-17-69)给出第  $n$  个面元上所定义的电流基函数,为

$$\vec{f}_n(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{I_n}{2A_n^+} \vec{\rho}_n^+ & \vec{r} \in T_n^+ \\ \frac{I_n}{2A_n^-} \vec{\rho}_n^- & \vec{r} \in T_n^- \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5-17-69)$$

注意,图 5-17-24 中  $\vec{\rho}_n^+$  的方向是从顶点出发,而  $\vec{\rho}_n^-$  是指向顶点。

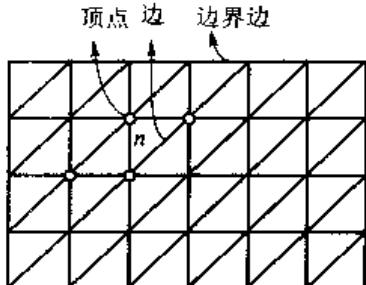


图 5-17-23 导体面的 Rao 三角形部分

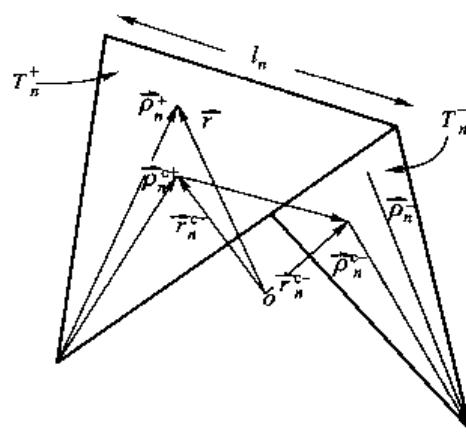


图 5-17-24 Rao 模型中的共棱三角形对

三角形内任意点的电流矢量可由三角形三条棱边对应的基函数在该三角形内的线性叠加来表示。此外该基函数的面散度也很容易求得。

这一基函数有下述特性：

- ① 三角形的边界上没有线电荷积累，使得对标位的计算只有面积分而没有线积分。
- ② 面电荷密度  $\sigma_n$  为常数，使得标位计算中的复杂积分变成简单的 Green 函数积分。

$$-\mathrm{j}\omega\sigma_n = \nabla_s \cdot \vec{f}_n(r) = \begin{cases} \frac{l_n}{A_n^+} & \vec{r} \in T_n^+ \\ -\frac{l_n}{A_n^-} & \vec{r} \in T_n^- \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5-17-70)$$

由此可见，三角形对的每一个三角形中电荷密度为一常数；两个三角形带等量异号电荷，因而三角形对的总电荷为 0。这一点在建立基函数时非常重要，因为这样它就自然满足电流连续性方程，可以保证解的正确性。

散射体表面  $S$  上的感应电流可近似表示为

$$\vec{J} \cong \sum_{n=1}^N I_n \vec{f}_n(\vec{r}) \quad (5-17-71)$$

式中， $N$  是三角形网格总的棱边数。由于电流的连续性，开放物体（如平板、柱面等）的边界电流的法向分量为 0，因此  $N$  不包括作为开放物体边界的棱边，如图 5-17-23 所示的边界边。对于封闭物体（如球体、立方体等），所有边都是有效的棱。

### 3. Rao 模型的矩量解

采用 Galerkin 法，取试验函数  $\vec{\omega}_m = \vec{f}_m$  展开函数，对边界条件方程 (5-17-66) 两边作矢量内积，即先点乘再对观察点处面元  $m$  作面积分，得到

$$\langle \vec{E}^i, \vec{f}_m \rangle = \mathrm{j}\omega \langle \vec{A}, \vec{f}_m \rangle + \langle \nabla \Phi, \vec{f}_m \rangle \quad (5-17-72)$$

利用矢量公式及  $\vec{f}_m$  在  $S$  平面上的性质，上式最后一项可写为

$$\langle \nabla \Phi, \vec{f}_m \rangle = - \int_S \Phi \nabla_s \cdot \vec{f}_m dS \quad (5-17-73)$$

利用式(5-17-70), 可将式(5-17-73)积分进一步化为

$$\begin{aligned} \int_S \Phi \nabla_S \cdot \vec{f}_m dS &= \int_{T_m^+} \Phi \frac{l_m}{A_m^+} dS + \int_{T_m^-} \Phi \left(-\frac{l_m}{A_m^-}\right) dS \\ &= l_m \left\{ \frac{1}{A_m^+} \int_{T_m^+} \Phi(\vec{r}) dS - \frac{1}{A_m^-} \int_{T_m^-} \Phi(\vec{r}) dS \right\} \\ &\approx l_m [\Phi(\vec{r}_m^{c+}) - \Phi(\vec{r}_m^{c-})] \end{aligned} \quad (5-17-74)$$

上式用三角形中心点的  $\Phi$  值近似地替代了  $\Phi$  在三角形内的平均值, 这样做是为了降低积分的难度, 实践证明这样解出的电流精度仍然很高。用相似的方法可以简化式(5-17-72)中的另外两项

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{Bmatrix} \vec{E}^i \\ \vec{A} \end{Bmatrix}, \vec{f}_m \right\rangle &= l_m \left[ \frac{1}{2A_m^+} \int_{T_m^+} \begin{Bmatrix} \vec{E}^i \\ \vec{A} \end{Bmatrix} \cdot \vec{\rho}_m^+ dS + \frac{1}{2A_m^-} \int_{T_m^-} \begin{Bmatrix} \vec{E}^i \\ \vec{A} \end{Bmatrix} \cdot \vec{\rho}_m^- dS \right] \\ &\approx \frac{l_m}{2} \left[ \begin{Bmatrix} \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c+}) \\ \vec{A}(\vec{r}_m^{c+}) \end{Bmatrix} \cdot \vec{\rho}_m^+ + \begin{Bmatrix} \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c-}) \\ \vec{A}(\vec{r}_m^{c-}) \end{Bmatrix} \cdot \vec{\rho}_m^- \right] \end{aligned} \quad (5-17-75)$$

于是, 进一步得到式(5-17-72)的简化形式

$$\begin{aligned} l_m \left[ \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c+}) \cdot \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c-}) \cdot \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} \right] \\ = j\omega l_m \left[ \vec{A}(\vec{r}_m^{c+}) \cdot \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + \vec{A}(\vec{r}_m^{c-}) \cdot \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} \right] + l_m [\Phi(\vec{r}_m^{c+}) - \Phi(\vec{r}_m^{c-})] \end{aligned} \quad (5-17-76)$$

这是每个三角形棱边所必须满足的方程, 式中  $m=1, 2, \dots, N$ 。

将电流展开式(5-17-70)代入上式得

$$l_m \left( \vec{E}_m^+ \cdot \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + \vec{E}_m^- \cdot \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} \right) = \sum_{n=1}^N l_m l_n \left[ j\omega \left( \vec{A}_{mn}^+ \cdot \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + \vec{A}_{mn}^- \cdot \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} \right) + (\Phi_{mn}^+ - \Phi_{mn}^-) \right] \quad (5-17-77)$$

其中

$$\vec{A}_{mn}^\pm = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \vec{f}_n(\vec{r}') \frac{e^{-jkR_m^\pm}}{R_m^\pm} dS' \quad (5-17-78)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}^\pm &= -\frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \int_S \nabla_S \cdot \vec{f}_n(\vec{r}') \frac{e^{-jkR_m^\pm}}{R_m^\pm} dS' \\ &= \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \left( \frac{l_n}{A_n^+} \int_S \frac{e^{-jkR_m^+}}{R_m^+} dS' - \frac{l_n}{A_n^-} \int_S \frac{e^{-jkR_m^-}}{R_m^-} dS' \right) \end{aligned} \quad (5-17-79)$$

$$R_m^\pm = |\vec{r}_m^{c\pm} - \vec{r}'| \quad (5-17-80)$$

$$\vec{E}_m^\pm = \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c\pm}) \quad (5-17-81)$$

可以把式(5-17-77)写成矩阵形式

$$\mathbf{ZI} = \mathbf{U} \quad (5-17-82)$$

式中,  $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_{mn}$  为  $N \times N$  矩阵,  $\mathbf{I}=\mathbf{I}_n$  和  $\mathbf{U}=\mathbf{U}_m$  为  $N$  维列向量。  $\mathbf{Z}$  和  $\mathbf{U}$  的元素为

$$Z_{mn} = l_m \left[ j\omega \left( \vec{A}_{mn}^+ \cdot \frac{\vec{\rho}_m^+}{2} + \vec{A}_{mn}^- \cdot \frac{\vec{\rho}_m^-}{2} \right) + \Phi_{mn}^+ - \Phi_{mn}^- \right] \quad (5-17-83)$$

$$U_m = l_m \left( \vec{E}_m^+ \cdot \frac{\vec{\rho}_m^+}{2} + \vec{E}_m^- \cdot \frac{\vec{\rho}_m^-}{2} \right) \quad (5-17-84)$$

从式(5-17-78)和式(5-17-79)看,广义阻抗矩阵元素  $Z_{mn}$  计算的关键是处理好如下形式的积分

$$I_g = \frac{1}{\Delta} \int_{S_\Delta} g(\vec{r}') \frac{e^{-jKR}}{R} dS' \quad (5-17-85)$$

其中,  $g(\vec{r}')$  取 1 或者面矢量  $\vec{\rho}$ ;  $\Delta$  为  $S_\Delta$  的面积。

当场点不在积分域  $S_\Delta$  上时, 被积式在积分域内没有奇异点, 可以采用高斯积分计算。当场点在积分域  $S_\Delta$  上时, 被积函数在积分域内有奇异点, 为消除积分中的可去奇点  $R=0$ , 可将积分作如下变形

$$I_g = \frac{1}{\Delta} \int_{S_\Delta} g(\vec{r}') \frac{e^{-jKR} - 1}{R} dS' + \frac{1}{\Delta} \int_{S_\Delta} \frac{g(\vec{r}')}{R} dS' \quad (5-17-86)$$

第一项积分只有一个可去奇点, 因而可以用 Gauss 积分计算, 第二项可以用解析法消除奇点。

#### 4. 三角形面元的 Gauss 积分

在三角形单元中, 自然坐标为面积坐标, 积分形式如下

$$I = \int_{S_\Delta} F(\vec{r}) dS = 2\Delta \int_0^1 \int_0^{1-\eta} F(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta = \Delta \sum_{k=1}^M W^{(k)} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \quad (5-17-87)$$

式中,  $M$  为求积采样点的数目;  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  表示采样点面积坐标;  $W^{(k)}$  表示权。实际操作中, 可以由面积坐标  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  换算出三维空间的直角坐标值  $\vec{r}(x, y, z)$ , 直接求出函数值  $F(\vec{r})$  然后求积分, 公式为

$$\vec{r} = \xi \vec{r}_1 + \eta \vec{r}_2 + \zeta \vec{r}_3 = [\vec{r}_1 \quad \vec{r}_2 \quad \vec{r}_3] \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (5-17-88)$$

即

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (5-17-89)$$

积分为

$$I = \int_{S_\Delta} F(\vec{r}) dS = \Delta \sum_{k=1}^M W^{(k)} F(x_k, y_k, z_k) \quad (5-17-90)$$

Gauss 积分的采样点和权系数如表 5-17-1 所示。

现在研究面积分中的可去奇点处理。

图 5-17-25 给出三角形面积坐标, 矢量  $\vec{\rho}$ , 将面元  $S_\Delta$  分成 3 个子三角区域, 即  $A_1$ 、 $A_2$  和  $A_3$ , 引入面积坐标。

$$\xi = \frac{A_1}{\Delta} \quad \eta = \frac{A_2}{\Delta} \quad \zeta = \frac{A_3}{\Delta} \quad (5-17-91)$$

表 5-17-1 Gauss 积分采样点和权系数

求积采样点数目 $M$	图形	求积采样点面积坐标	权系数 $W^{(k)}$
3		$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{3}$
7	 $\alpha_1 = 0.7974269853$ $\beta_1 = 0.1012865073$ $\alpha_2 = 0.0597158717$ $\beta_2 = 0.4701420641$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $(\alpha_1, \beta_1, \beta_1)$ $(\beta_1, \alpha_1, \beta_1)$ $(\beta_1, \beta_1, \alpha_1)$ $(\alpha_2, \beta_2, \beta_2)$ $(\beta_2, \alpha_2, \beta_2)$ $(\beta_2, \beta_2, \alpha_2)$	0.225 0.1259391805 0.1323941527

由  $A_1 + A_2 + A_3 = \Delta$ , 可得

$$\xi + \eta + \zeta = 1 \quad (5-17-92)$$

$\xi, \eta, \zeta$  从 0 到 1 变化, 区域内任意一点的矢径  $\vec{r}'$  可用面积坐标表示成

$$\vec{r}' = \xi \vec{r}_1 + \eta \vec{r}_2 + \zeta \vec{r}_3 \quad (5-17-93)$$

式中,  $\vec{r}_i (i=1, 2, 3)$  为三角形三个顶点的矢径, 如图 5-17-25 所示。

由直角坐标系面积分变换到面积坐标系面积分的 Jacobi 式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 2\Delta \quad (5-17-94)$$

于是, 式(5-17-86)中第二项三角形  $S_\Delta$  上的面积分变换成

$$\frac{1}{\Delta} \int_{S_\Delta} \frac{g(\vec{r}')}{R} dS' = 2 \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \frac{1}{R} g[\xi \vec{r}_1 + \eta \vec{r}_2 + (1-\xi-\eta) \vec{r}_3] d\xi d\eta \quad (5-17-95)$$

式中,  $R$  为区域内任意一点  $\vec{r}'$  到质点  $P$  的距离

$$\begin{aligned} R &= |\vec{r}^P - \vec{r}'| = \left| \frac{1}{3} \vec{r}_1 + \frac{1}{3} \vec{r}_2 + \frac{1}{3} \vec{r}_3 - \xi \vec{r}_1 - \eta \vec{r}_2 - (1-\xi-\eta) \vec{r}_3 \right| \\ &= \left| \left( \frac{1}{3} - \xi \right) (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + \left( \frac{1}{3} - \eta \right) (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \right| \end{aligned} \quad (5-17-96)$$

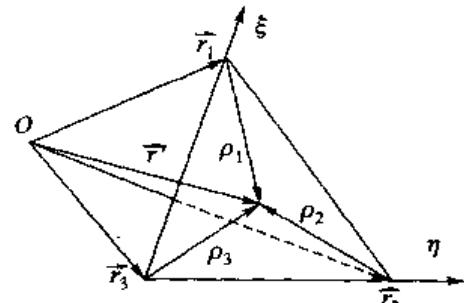


图 5-17-25 三角形面积坐标

面积坐标中,三角形质心点  $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  为积分奇异点,  $P$  点将三角形分成三部分如图 5-17-26 所示,对第一部分作坐标变换

$$\begin{cases} \eta = \frac{1}{3}u + (1-u)v \\ \xi = \frac{1}{3}u \end{cases} \quad (5-17-97)$$

则将三角形 I 变成单位正方形,如图 5-17-26 所示。该变换的 Jacobi 式为

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(u-1) \quad (5-17-98)$$

通过坐标变换,式(5-17-95)中的  $R$  成为

$$R = (1-u) \left| \frac{1}{3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + \left( \frac{1}{3} - v \right)(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \right| \quad (5-17-99)$$

将式(5-17-97),式(5-17-98)和式(5-17-99)代入式(5-17-95)中,则在三角形 I 中的积分为

$$\begin{aligned} G(I) &= \frac{1}{\Delta} \int_{S_{\triangle I}} \frac{g(\vec{r}')}{R} dS' = 2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{|J_1|}{R} g(\vec{r}') du dv \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{3}{|( \vec{r}_1 - \vec{r}_3 ) + (1-3v)( \vec{r}_2 - \vec{r}_3 ) |} g(\vec{r}') du dv \end{aligned} \quad (5-17-100)$$

上式的被积函数中不再有奇异点,又可以采用 Gauss 积分计算,由此得到积分的第一部分  $G(I)$ 。

类似地,通过以下坐标变换

$$\begin{cases} \eta = \frac{1}{3}u \\ \xi = \frac{1}{3}u + (1-u)v \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \eta = 1 - \frac{2}{3}u - (1-u)v \\ \xi = \frac{1}{3}u + (1-u)v \end{cases} \quad (5-17-101)$$

分别可消除第二部分和第三部分中的积分奇异点得到  $G(II)$  和  $G(III)$ ,则总的积分

$$G = G(I) + G(II) + G(III) \quad (5-17-102)$$

式(5-17-102)即式(5-17-86)中第二项的积分。

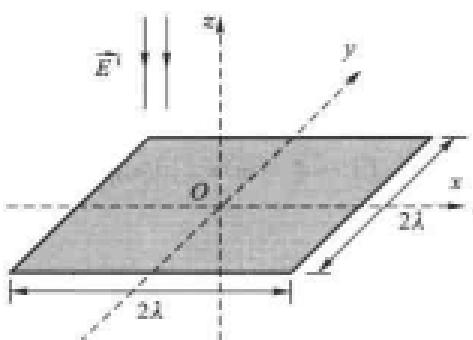


图 5-17-27  $2\lambda \times 2\lambda$  正方形导体平板

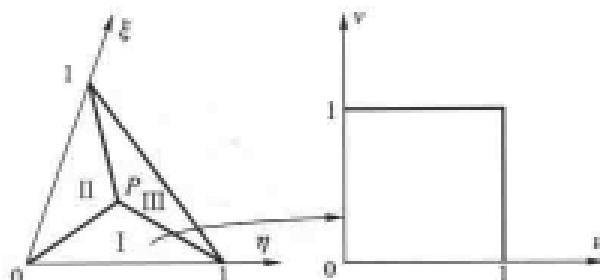


图 5-17-26 坐标变换

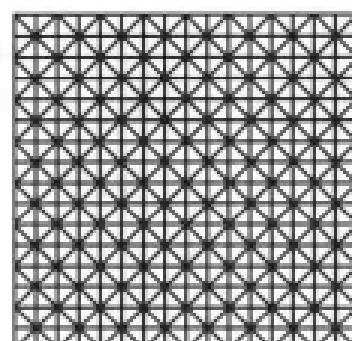


图 5-17-28 正方形导体平板的三角剖分

[例 8] 作为一计算实例,给出如图 5-17-27 所示的  $2\lambda \times 2\lambda$  正方形导体平板,求它的散射场。

[解] 剖分按照每个波长  $\lambda$  分 8 段,共 512 个三角形,289 个顶点,736 条公共边,如图 5-28 所示。

在三个方向上的散射情况,如图 5-17-29 所示。

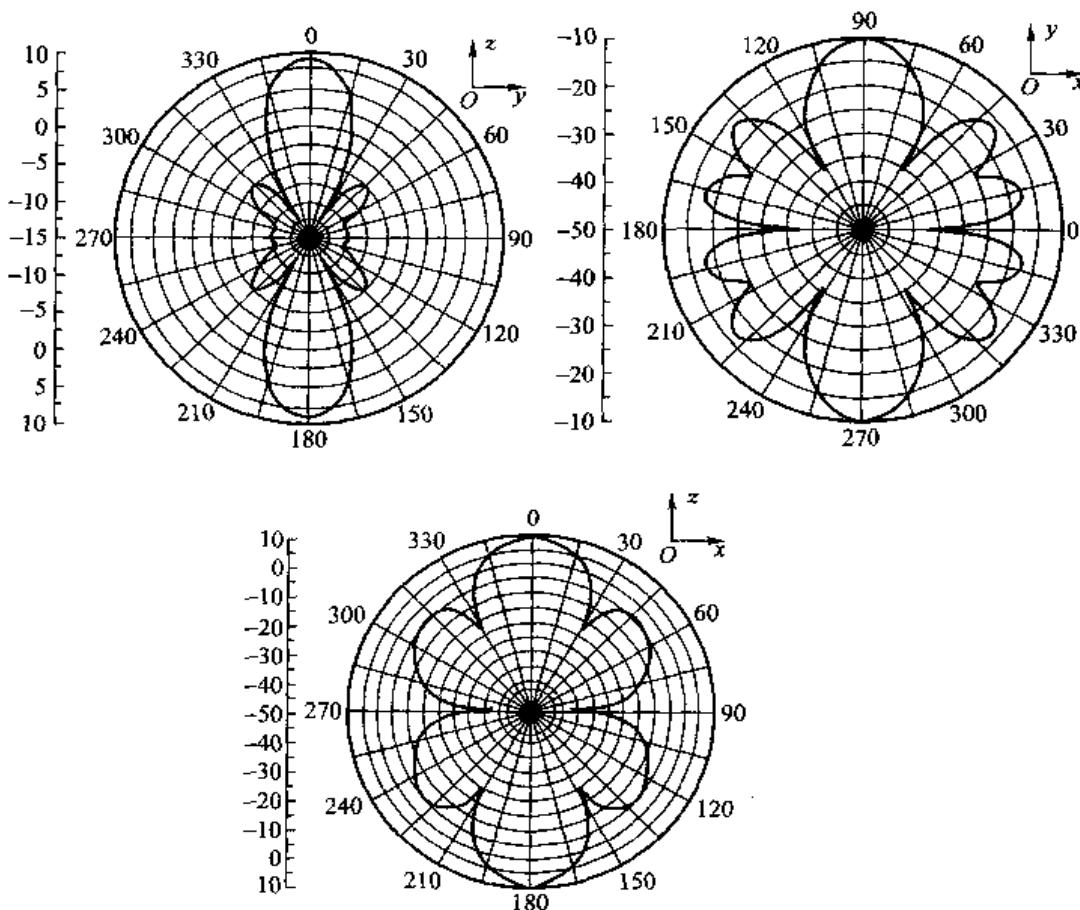


图 5-17-29 导体平板在三个不同方向的散射方向图(dB)



## 有限元法 Finite-element Method

有限元法(Finite Element Method)起源于航空力学计算。最早思想由 Courant(库伦特)于 1943 年提出。但真正确定有限元法的学科和命名则是 Clough(克拉夫)于 1960 年给出。需要指

出：我国著名学者冯康也对有限元法做了开创性贡献。

20世纪70年代开始，在电磁场和微波领域移植有限元法，逐渐成为电磁场数值分析的一个主要分支。有限元法，简称FEM。它有着扎实的理论基础，所给出的结果是变分稳定的，从这个意义上来看，这也可以说有限元法认为是广义Ritz(里兹)方法。

## 一、场变分原理和Ritz方法

变分原理又称极值原理，它揭示自然界的主要规律是按极值原理运行的。这一思想使人们原先对方程(等式)的探索进一步发展成不等式。

### 1. 场变分原理

在静电场中，Thomson(汤姆森)原理是提出最早的变分原理。

[Thomson原理] 静电场中，所有满足相同边界条件的位函数 $u$ 中，真实的 $u$ 将保持能量 $w$ 极小。

采用一维静电场考察上述情况。这时能量密度可写成

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \quad (5-18-1)$$

把范围定于 $x \in [0,1]$  不失一般性，其边界条件可写出

$$\begin{cases} u(0) = u_a \\ u(1) = u_b \end{cases} \quad (5-18-2)$$

于是可写出

$$w = \int_0^1 w' dx = \int_0^1 \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (5-18-3)$$

现设有两个位函数，它们满足相同的边界条件，但 $u_1(x)$ 满足Laplace方程，而 $u_2(x)$ 不满足Laplace方程。具体为

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} = 0, \frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} \neq 0 \\ u_1(0) = u_2(0) = u_a \\ u_1(1) = u_2(1) = u_b \end{cases} \quad (5-18-4)$$

研究两种不同位的能量差

$$w_1 - w_2 = \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 (E_1^2 - E_2^2) dx = -\frac{\epsilon}{2} \int_0^1 (E_1 - E_2)^2 dx - \epsilon \int_0^1 (E_1 E_2 - E_1^2) dx \quad (5-18-5)$$

考虑式(5-18-5)中右边第二项积分，由于

$$\int_0^1 E_1 E_2 dx = \int_0^1 \frac{du_1}{dx} \frac{du_2}{dx} dx = u_2 \frac{du_1}{dx} \Big|_0^1 - \int_0^1 u_2 \frac{d^2 u_1}{dx^2} dx = u_2 \frac{du_1}{dx} \Big|_0^1 \quad (5-18-6)$$

而

$$\int_0^1 E_1^2 dx = \int_0^1 \frac{du_1}{dx} \frac{du_1}{dx} dx = u_1 \frac{du_1}{dx} \Big|_0^1 - \int_0^1 u_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} dx = u_1 \frac{du_1}{dx} \Big|_0^1 \quad (5-18-7)$$

把式(5-18-6)和式(5-18-7)两式代入式(5-18-5)右边第二项，可知

$$-\epsilon \int_0^1 (E_1 E_2 - E_1^2) dx = \epsilon (u_1 - u_2) \frac{du_1}{dx} \Big|_0^1 \equiv 0 \quad (5-18-8)$$

由此可得

$$w_1 - w_2 = \frac{-\epsilon}{2} \int_0^1 (E_1 - E_2)^2 dx \leqslant 0 \quad (5-18-9)$$

换句话说,真实的位函数  $u(x)$  分布保持系统的能量极小。

需要指出,在电磁场理论中对 Thomson 原理有两种处理观点:一种是把它放在现有的 Maxwell 理论框架之内,这就是 Thomson 定理,而上面的公式推演即此定理的证明;另一种则认为 Thomson 原理是更高的变分原理,当然不需要加以证明,上面的公式推演仅说明它与现有理论兼容。

这时,变分的提法是:求满足边界条件的位函数  $u(x)$ 。

真实的  $u$  必须满足

$$w_{\min} = \left( \int_0^1 \frac{1}{2} \epsilon \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \right)_{\min} \quad (5-18-10)$$

很容易证明,当  $w$  取极值时必有

$$\delta w(u) = 0 \quad (5-18-11)$$

这就是最初的场(或位)变分原理。

Thomson 原理的研究表明:积分泛函的变分(不等式)和原支配微分方程(等式)存在着非常紧密的联系。Euler(尤勒)方程即解决一大类典型的物理问题。

[例 1] Euler 泛函和 Euler 方程

[解] 写出 Euler 泛函中的一类十分普遍的泛函  $J(u)$ ,称为 Euler 积分泛函。 $u$  满足边界条件

$$\begin{aligned} \delta u &= 0 \\ J(u) &= \int_a^b F(x, u, u') dx \end{aligned} \quad (5-18-12)$$

$J(u)$  取极值的必要条件是

$$\delta J(u) = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \right) dx = 0 \quad (5-18-13)$$

采用分部积分法

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right) \delta u dx + \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) \delta u' dx = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right) \delta u dx + \frac{\partial F}{\partial u'} (\delta u(b) - \delta u(a)) - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) \delta u dx$$

注意到任意函数  $u$  均满足相同的边界条件,也即

$$\delta u(a) = \delta u(b) = 0 \quad (5-18-14)$$

可写出

$$\delta J(u) = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u dx$$

由于  $\delta u$  选择的任意性(即变分基本定理)可知

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \quad (5-18-15)$$

式(5-18-15)即著名的 Euler 方程。它的提出把物理上一大类的支配方程和变分泛函联系了起来,如图 5-18-1 所示。

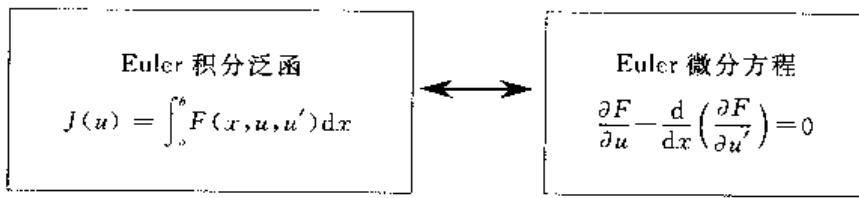


图 5-18-1 Euler 积分泛函和 Euler 方程

[Poisson 方程泛函] Poisson(泊松)泛函是 Euler 思想在电磁场的具体运用,它的积分表示为

$$J(u) = \int_a^b \left[ \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - \rho u \right] dx \quad (5-18-16)$$

把上式中被积函数看作 Euler 泛函,即

$$F(x, u, u') = \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - \rho u \quad (5-18-17)$$

于是有

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= -\rho, & \frac{\partial F}{\partial u'} &= \epsilon \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) &= \epsilon \frac{d^2 u}{dx^2} \end{aligned}$$

代入 Euler 方程(5-18-15)又得

$$\epsilon \frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho \quad (5-18-18)$$

上式即著名的 Poisson 方程。

## 2. Ritz 方法

在变分理论的发展上经历了两个阶段:在古典变分问题中,常常采用变分概念把积分泛函转化为微分方程(例如 Euler 方程);而在计算机飞速发展的今天,事情发生了本质的变化。有限元法,就是变分问题的数值解法,其基本思想是把场方程转化为能量积分的变分问题。

在求解能量积分的变分问题中,Ritz 方法具有普遍的意义。

实际上,Ritz 方法的核心思想是把求解函数构成一组展开函数的线性叠加,从而把原积分泛函的变分问题近似地转化为一般多元函数的极值问题。进一步把其变成  $n$  元(实际上是  $n$  个待定系数)代数方程组。特别地,当所研究的泛函  $J(u)$  是二次泛函,则简单地构成线性方程组。还应该指出:电磁领域中的能量泛函都是典型的二次泛函。

### [例 2] 线性算子方程

$$L(u) = g \quad (5-18-19)$$

式中, $L$  是 Hilbert(希尔伯特)空间的正定、自伴算子,则所对应的泛函是

$$J(u) = \langle L(u), u \rangle - 2 \langle g, u \rangle \quad (5-18-20)$$

试采用 Ritz 方法求解  $J(u)_{\min}$ 。

[解] 首先构造一组展开函数  $\{u_k\}$  有

$$u \approx u_N = \sum_{k=1}^N \alpha_k u_k \quad (5-18-21)$$

其中,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  为待定系数。把式(5-18-21)代入式(5-18-20)可知

$$J(u) \approx J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \langle L(u_k), u_j \rangle - 2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle g, u_j \rangle \quad (5-18-22)$$

在式(5-18-22)中, 原问题已近似转化为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  的多元函数, 根据极值理论,  $J(u)_{\min}$  有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} J(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} J(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_N} J(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \end{cases} \quad (5-18-23)$$

计及算子自伴条件

$$\langle L(u_k), u_j \rangle = \langle L(u_j), u_k \rangle \quad (5-18-24)$$

可以得到

$$\sum_{k=1}^N \langle L(u_k), u_j \rangle \alpha_k = \langle g, u_j \rangle \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5-18-25)$$

十分清楚, 算子方程(5-18-19)的变分稳定解对应以展开函数为权函数的 Galerkin 矩量解。

[例 3] 平板电容器的位分布问题。

设电位  $u(x)$  满足

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = u_0 \end{cases} \quad (5-18-26)$$

如图 5-18-2 所示。

[解] 把  $x \in [0, 1]$  区域分为两段:  $(0, 0.5)$  和  $(0.5, 1.0)$ 。并采用分段折线近似, 如图 5-18-3 所示。

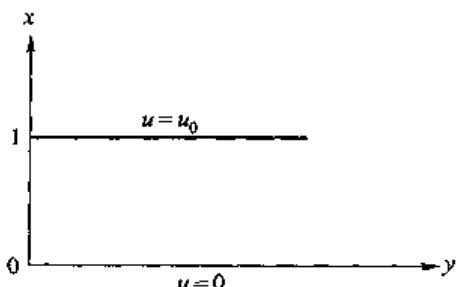


图 5-18-2 平板电容器问题

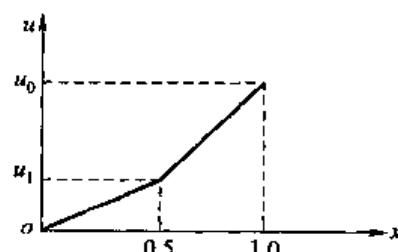


图 5-18-3 电容器的电位分布

可以写出

$$u(x) = \begin{cases} 2u_1x & x \in (0, 0.5) \\ u_1 + 2(u_0 - u_1)\left(x - \frac{1}{2}\right) & x \in (0.5, 1.0) \end{cases} \quad (5-18-27)$$

于是电场储能亦分为两部分

$$w = \int_0^1 \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \sum_{i=1}^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = w_1 + w_2 \quad (5-18-28)$$

其中

$$\begin{cases} w_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \\ w_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \end{cases} \quad (5-18-29)$$

则写出

$$\begin{cases} w_1 = \frac{\epsilon}{2} \cdot 4u_1^2(x_1 - x_0) = \epsilon u_1^2 \\ w_2 = \frac{\epsilon}{2} \cdot 4(u_0 - u_1)^2(x_2 - x_1) = \epsilon(u_0 - u_1)^2 \end{cases} \quad (5-18-30)$$

于是电场总储能  $w$  可表示为

$$w = \epsilon u_1^2 + \epsilon(u_0 - u_1)^2 \quad (5-18-31)$$

在问题中  $u_0$  已知, 故  $w$  是  $u_1$  的一元函数。于是  $w_{\min}$  要求

$$\frac{dw}{du_1} = 2\epsilon u_1 + 2\epsilon(u_0 - u_1)(-1) = 0 \quad (5-18-32)$$

容易解出

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 \quad (5-18-33)$$

这时, 位函数分布

$$u(x) = \begin{cases} u_0 x & x \in (0, 0.5) \\ u_0 x & x \in (0.5, 1.0) \end{cases} \quad (5-18-34)$$

明显看出, 这种情况下位函数呈直线分布, 且可统一写出

$$u(x) = u_0 x \quad x \in (0, 1.0) \quad (5-18-35)$$

特别应该指出, 式(5-18-35)正是此问题的精确解。

## 二、一维有限元法

通过研究[例 3]的推广来讨论一维有限元法。把  $x_0 = a, x_N = b$  分成  $N$  段, 如图 5-18-4 所示。

设两端边界条件已知

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_N = \Phi_0 \end{cases} \quad (5-18-36)$$

在 $(x_{i-1}, x_i)$ 区间中的位分布可看作分段线性函数

$$u(x) = u_{i-1} + \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \quad (5-18-37)$$

式中,  $u_{i-1}$  和  $u_i$  分别表示  $x_{i-1}$  和  $x_i$  结点上的位值, 也称为结点参数。

对于图 5-18-4 所示的电容器, 设  $x_0 = 0, x_N = 1$  不失一般性, 设各结点均匀分布, 即每段长度

$$h = \frac{1}{n} = x_i - x_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (5-18-38)$$

$$w(u) = \int_0^1 \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (5-18-39)$$

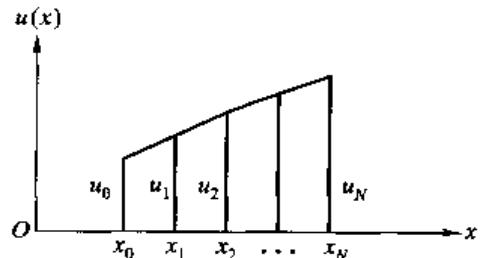


图 5-18-4 电位  $u(x)$  的分段展开函数

记

$$w_i(u) = \sum_{i=1}^N w_i(u) \quad (5-18-40)$$

其中

$$w_i(u) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (5-18-41)$$

在式(5-18-41)中计及分段线性近似式(5-18-37)

$$\left( \frac{du}{dx} \right) \approx \frac{1}{h} (u_i - u_{i-1}) \quad (5-18-42)$$

省略近似号, 得到

$$w_i(u) = \frac{\epsilon}{2h} (u_i - u_{i-1})^2 \quad (5-18-43)$$

于是有

$$w(u) = \sum_{i=1}^N w_i(u) = \frac{\epsilon}{2h} \sum_{i=1}^N (u_i - u_{i-1})^2$$

计及边界条件可写出

$$w(u) = \frac{\epsilon}{2h} [u_1^2 + (u_2 - u_1)^2 + \dots + (\Phi_0 - u_{N-1})^2] \quad (5-18-44)$$

这时  $w(u)$  已转化为  $w(u_1, u_2, \dots, u_{N-1})$  多元函数, 而  $\delta w(u) = 0$  即多元函数极值, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial u_1} = \frac{\epsilon}{2h} [2u_1 + 2(u_2 - u_1)(-1)] = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial u_2} = \frac{\epsilon}{2h} [2(u_2 - u_1) + 2(u_3 - u_2)(-1)] = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial u_{N-1}} = \frac{\epsilon}{2h} [2(u_{N-1} - u_{N-2}) + 2(\Phi_0 - u_{N-1})(-1)] = 0 \end{cases} \quad (5-18-45)$$

它构成线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} 2u_1 - u_2 = 0 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 = 0 \\ -u_2 + 2u_3 - u_4 = 0 \\ \vdots \\ -u_{N-3} + 2u_{N-2} - u_{N-1} = 0 \\ -u_{N-2} + 2u_{N-1} = \Phi_0 \end{array} \right. \quad (5-18-46)$$

或写成更简化的矩阵形式

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (5-18-47)$$

其中,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{N-1}]^T$ ,  $\mathbf{b} = [0, 0, \dots, \Phi_0]^T$ , 且

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5-18-48)$$

具体对这一问题, 很容易用消元法求解

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 3u_1 \\ \vdots \\ u_{N-2} = (N-2)u_1 \\ u_{N-1} = (N-1)u_1 \end{array} \right. \quad (5-18-49)$$

代入

$$-u_{N-2} + 2u_{N-1} = \Phi_0$$

即可知  $Nu_1 = \Phi_0$

或者写出

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{1}{N}\Phi_0 \\ u_2 = \frac{2}{N}\Phi_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} = \frac{N-1}{N}\Phi_0 \end{array} \right. \quad (5-18-50)$$

又一次看出:  $u(x) = \Phi_0 x$  即直线函数是精确解。上述过程也给出了一维有限元法的最基本的概念和最核心的思想。

值得指出: 能量泛函  $w(u)$  可以写成矩阵形式。

$$\begin{aligned} w(u) &= \frac{\epsilon}{2h} [u_1^2 + (u_2 - u_1)^2 + \dots + (u_{N-1} - u_{N-2})^2 + (\Phi_0 - u_{N-1})^2] \\ &= \frac{\epsilon}{2h} \{ [u_1^2 + (u_2 - u_1)^2 + \dots + (u_{N-1} - u_{N-2})^2 + u_{N-1}^2] - 2\Phi_0 u_{N-1} + \Phi_0^2 \} \end{aligned} \quad (5-18-51)$$

已经知道

$$\begin{cases} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} = u_1^2 + (u_2 - u_1)^2 + \cdots + (u_{N-1} - u_{N-2})^2 + u_{N-1}^2 \\ 2\mathbf{u}^T \mathbf{b} = 2u_{N-1}\Phi_0 \\ \mathbf{b}^T \mathbf{b} = \Phi_0^2 \end{cases} \quad (5-18-52)$$

于是可以用矩阵形式写出能量泛函  $w(u)$

$$w(u) = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} - 2\mathbf{u}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \quad (5-18-53)$$

值得注意, 式(5-18-53)也表明能量泛函  $w(u)$  是典型的  $u$  的二次泛函。于是有限元法可以由能量泛函变分归结为线性方程组求解。

同样, 也可以把  $w_i(u)$  写成矩阵形式

$$w_i(u) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{h} [u_{i-1} - u_i] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{bmatrix} \quad (5-18-54)$$

有限元法从能量泛函的变分出发, 使这种方法内在性质十分优越, 主要反映在数值稳定和计算简单。

〔性质 1〕 能量泛函所对应的矩阵  $A$  正定。

因为设一任意非零矢量  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{N-1}]^T$ , 则

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} &= 2(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{N-1}^2) - 2(u_1 u_2 + u_2 u_3 + \cdots + u_{N-2} u_{N-1}) \\ &= u_1^2 + (u_2 - u_1)^2 + (u_3 - u_2)^2 + \cdots + (u_{N-1} - u_{N-2})^2 + u_{N-1}^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (5-18-55)$$

得证。

$A$  的正定性使有限元法具有很好的数值稳定性。

〔性质 2〕  $A$  是三对角稀疏矩阵。

有限元法的这一特点大大节省了计算机的内存。

〔例 4〕 圆同轴线  $a=1, b=2$  不失一般性。内导体  $u(a)=0$ , 外导体  $u(b)=u_0$ , 分两段讨论其  $u(r)$  分布, 如图 5-18-5 所示。

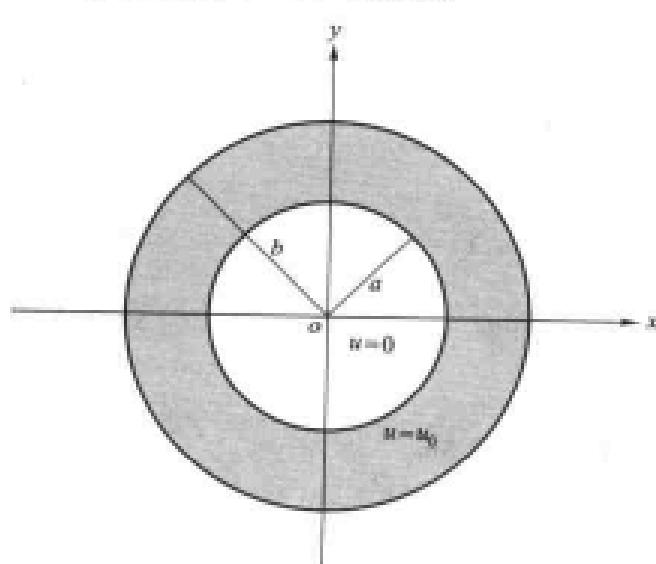


图 5-18-5 圆同轴线问题

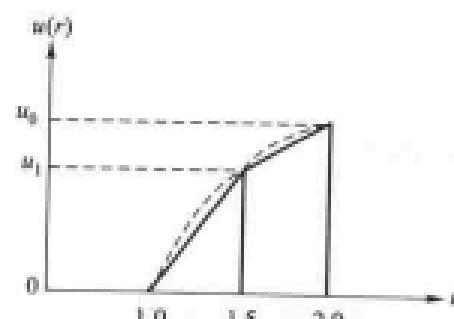


图 5-18-6 圆同轴线位  $u(r)$  分布

[解] 在同轴线内满足 Laplace 方程。鉴于轴对称  $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$  的条件, 可以写出

$$\begin{cases} \nabla u(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \\ u(a) = 0 \\ u(b) = u_0 \end{cases} \quad (5-18-56)$$

此问题有精确解

$$u(r) = \frac{\ln \left( \frac{r}{a} \right)}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)} u_0 \quad (5-18-57)$$

计及  $a=1, b=2$  的具体条件, 进一步简化为

$$u(r) = \frac{\ln r}{\ln 2} u_0 \quad (5-18-58)$$

现在, 把  $r \in [1.0, 1.5]$  分为两段, 即  $(1.0, 1.5)$  和  $(1.5, 2.0)$ 。再设  $u(1.5) = u_1$  待求, 如图 5-18-6 所示。

采用分段线性函数, 可以写出

$$\begin{cases} u(r) = 2u_1(r-1) & r \in (1.0, 1.5) \\ u(r) = 2(u_0 - u_1)r + (4u_1 - 3u_0) & r \in (1.5, 2.0) \end{cases} \quad (5-18-59)$$

柱坐标在轴对称条件下, 电场储能可写出

$$w(u_1) = \pi \epsilon \int_1^2 \left( \frac{du}{dr} \right)^2 r dr = \sum_{i=1}^2 w_i(u_1) \quad (5-18-60)$$

式中

$$\begin{cases} w_1(u_1) = \pi \epsilon \left( \frac{5}{2} u_1^2 \right) \\ w_2(u_1) = \pi \epsilon \left[ \frac{7}{2} (u_0 - u_1)^2 \right] \end{cases}$$

于是总的储能为

$$w(u_1) = \pi \epsilon \left\{ \frac{5}{2} u_1^2 + \left[ \frac{7}{2} (u_0 - u_1)^2 \right] \right\} \quad (5-18-61)$$

$w(u_1)_{\min}$  对应

$$\frac{dw(u_1)}{du_1} = \pi \epsilon \{ 5u_1 - 7(u_0 - u_1) \} = 0 \quad (5-18-62)$$

$$u_1 = \frac{7}{12} u_0 = 0.583\ 333 u_0 \quad (5-18-63)$$

对比精确解, 有

$$u_1(0) = \frac{\ln 1.5}{\ln 2.0} u_0 = 0.584\ 962\ 5 u_0 \quad (5-18-64)$$

### 三、二维有限元法

把问题扩展到二维, 以二维电场的 Poisson 解为例给出有限元法的一个完整过程。

### 1. 二维电场的 Poisson 解

给出如图 5-18-7 的二维静电场问题, 它满足式(5-18-65)Poisson 方程。

$$\epsilon \nabla^2 u + \rho = 0 \quad (5-18-65)$$

其中,  $\hat{n}$  是单位外法向矢量; 电位  $u$  是  $(x, y)$  的函数; 而  $\nabla^2$  则是二维 Laplace 算子。已知  $u$  很容易求出电场  $\vec{E}$

$$\vec{E} = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial u}{\partial y} \hat{y} \quad (5-18-66)$$

$\rho(x, y)$  表示电荷密度。Poisson 问题可以有三种边界条件。

#### (1) 第一类边界条件(Dirichlet 条件)

在边界  $\Gamma$  上, 位函数  $u$  满足

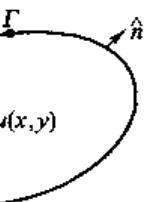


图 5-18-7 二维静  
电场问题

$$(5-18-67)$$

$$u|_{\Gamma} = \Phi_0$$

#### (2) 第二类边界条件(Neumann 条件)

在边界  $\Gamma$  上, 位函数导数  $\frac{\partial u}{\partial n}$  满足

$$-\epsilon \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \Psi_0 \quad (5-18-68)$$

对式(5-18-68)两边作线积分有

$$\oint_{\Gamma} \Psi_0 |d\Gamma| = \oint_{\Gamma} -\epsilon \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} |d\Gamma| = \iint_{\Omega} -\epsilon \nabla^2 u d\Omega$$

结合支配方程(5-18-65), 可以得到在第二类边界条件时, 有解的条件是

$$\int_{\Gamma} \Psi_0 |d\Gamma| = \iint_{\Omega} \rho d\Omega \quad (5-18-69)$$

值得提出, 因为第二类边界条件是导数条件, 它存在一自由常数。所以必须在域内或边界上指定一点为参考电位, 才能使解唯一。

#### (3) 第三类边界条件(混合条件)

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(\Gamma)u = \beta(\Gamma) \quad (5-18-70)$$

十分明显, 它是前两类边界条件的混合。

### 2. 能量泛函和变分提法

下面进一步把二维电场的 Poisson 问题转化为能量泛函。按边界条件做出分类。

#### (1) 第一类边界条件的能量泛函

首先, 写出对应的能量泛函

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\epsilon}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho u \right\} dx dy \quad (5-18-71)$$

对式(5-18-71)做变分

$$\begin{aligned} \delta J(u) &= \iint_{\Omega} \left\{ \epsilon \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) \right] - \rho \delta u \right\} dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \{ \epsilon \nabla u \cdot \nabla (\delta u) - \rho \delta u \} dx dy \end{aligned}$$

考虑到矢量恒等式

$$\nabla \cdot (P \nabla Q) = (\nabla \cdot \nabla Q)P + (\nabla P) \cdot (\nabla Q)$$

以及 Gauss 定理, 得到

$$\delta J(u) = - \iint_{\Omega} [\epsilon \nabla^2 u + \rho] \delta u \, dx dy + \oint_{\Gamma} \epsilon \frac{\partial u}{\partial n} \delta u \Big| d\Gamma \quad (5-18-72)$$

满足第一类边界条件  $\delta u|_{\Gamma}=0$ , 写出

$$\delta J(u) = - \iint_{\Omega} [\epsilon \nabla^2 u + \rho] \delta u \, dx dy \quad (5-18-73)$$

换句话说, 只要  $u$  满足 Poisson 方程, 必有能量泛函的变分  $\delta J(u)$  为 0。

这就是第一类边界条件下的 Poisson 能量泛函和变分提法。注意: 在此情况下能量泛函式 (5-18-71) 本身并不包含边界条件。因此, 也把 Dirichlet 条件称为本质边界条件。换句话说, 它是需要外加(考虑)的。

### (2) 第二类边界条件的能量泛函

完全类似, 可以写出第二类边界条件的能量泛函

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\epsilon}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho u \right\} dx dy - \oint_{\Gamma} \epsilon \beta(\Gamma) u d\Gamma \quad (5-18-74)$$

其中,  $\beta(\Gamma) = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma}$ , 结合方程式 (5-18-68) 可知

$$-\epsilon \beta(\Gamma) = \Psi_0 = -\epsilon \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \quad (5-18-75)$$

变分提法是

$$\delta J(u) = 0 \quad (5-18-76)$$

只要式 (5-18-76) 成立, 则可同时满足 Poisson 方程和边界条件, 因为计及方程 (5-18-72), 则由式 (5-18-76) 可具体写出

$$\delta J(u) = - \iint_{\Omega} [\epsilon \nabla^2 u + \rho] \delta u \, dx dy - \oint_{\Gamma} \delta \left[ \epsilon \frac{\partial u}{\partial n} \right] u d\Gamma \quad (5-18-77)$$

十分清楚, 在这种情况下支配方程和边界条件同时包含在变分提法中。因此 Neumann 条件也称为自然边界条件无须再外加考虑。

### (3) 第三类边界条件的能量泛函

这种情况下能量泛函对应

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\epsilon}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho u \right\} dx dy + \oint_{\Gamma} \epsilon \left\{ \frac{1}{2} \alpha(\Gamma) u^2 - \beta(\Gamma) u \right\} d\Gamma \quad (5-18-78)$$

其变分提法依然是

$$\delta J(u) = 0 \quad (5-18-79)$$

只要上式成立, 即可同时满足 Poisson 方程和边界条件。

### (4) 分区介质的内部边界条件

在处理有限元法的过程中, 还有一种重要情况, 即分区介质内部边界。这对于有两种以上介质构成的多区域问题十分重要, 如图 5-18-8 所示。其中  $\Gamma_{12}$  即内部边界。

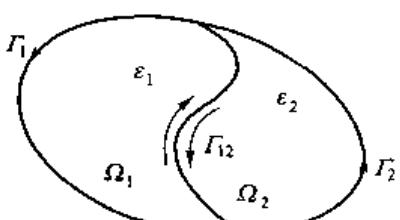


图 5-18-8 多介质问题

十分清楚,在  $\Gamma_{12}$  上应满足

$$\begin{cases} u|_{\Gamma_1} = u|_{\Gamma_2} \\ \epsilon_1 \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = \epsilon_2 \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} \end{cases} \quad (5-18-80)$$

式中,  $\hat{n}$  方向为从介质 1 指向介质 2。这时的能量泛函可写出

$$J(u) = \iint_{\Omega_1} \left\{ \frac{\epsilon_1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho u \right\} dx dy + \iint_{\Omega_2} \left\{ \frac{\epsilon_2}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho u \right\} dx dy \quad (5-18-81)$$

以 Dirichlet 条件为例对多区域作出讨论。取式(5-18-81)变分得到

$$\begin{aligned} \delta J(u) = & - \iint_{\Omega_1} [\epsilon_1 \nabla^2 u + \rho] \delta u dx dy - \iint_{\Omega_2} [\epsilon_2 \nabla^2 u + \rho] \delta u dx dy \\ & + \oint_{\Gamma_1} \epsilon_1 \frac{\partial u}{\partial n} \delta u d\Gamma + \oint_{\Gamma_2} \epsilon_2 \frac{\partial u}{\partial n} \delta u d\Gamma - \oint_{\Gamma_{12}} \epsilon_2 \frac{\partial u}{\partial n} \delta u d\Gamma \end{aligned} \quad (5-18-82)$$

式(5-18-82)中最后一项之负号是由于这时应取由区域 2 指向区域 1 的法线作为法向导数。但是,已经统一地规定  $\hat{n}$  是自区域 1 指向区域 2。因此,最后两项相互抵消。也就是说,在多介质区域问题中,式(5-18-80)的第二式内部边界条件自然成立。不需要外加,而第一式则是需要外加的本质边界条件,在假设展开函数时应予注意。

### 3. 有限元法的三角形剖分

剖分是有限元法的一个重要环节。这里将介绍二维域  $\Omega$  的三角形剖分方法。如图 5-18-9 所示,在区域的边界采用折线的近似,两个三角形相邻时必须有一条公共边和一对公共交点。作为例子,图 5-18-10 所示的两个三角形不满足要求。

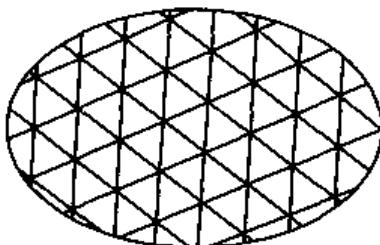


图 5-18-9 区域  $\Omega$  的三角形剖分

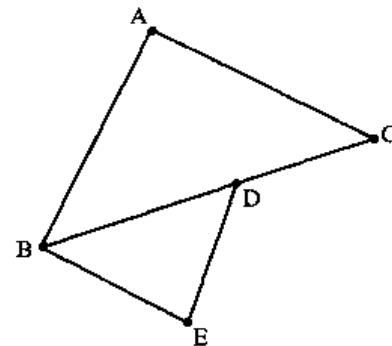


图 5-18-10  $\triangle ABC$  和  $\triangle BDE$  只有一个公共交点——不满足剖分原则

剖分单元的顶点称为结点。在  $i$  结点上的未知待求函数值  $u_i$  称之为  $i$  结点的参数。有限元法中剖分的重要在于,通过它可以把变分提法的连续问题,转化为结点参数  $u_i$  的线性方程组。

在实际操作中,为简单起见常采用线性逼近,也就是假设典型  $\triangle$  单元  $i$  上未知数  $u(x, y)$  呈线性变化,即采用通过  $P_i$ 、 $P_j$  和  $P_m$  三点所在的平面来近似  $u(x, y)$  曲面,如图 5-18-11 所示。

$$u(x, y) \approx P(x, y) \quad (5-18-83)$$

其中

$$P(x, y) = h_1 + h_2 x + h_3 y \quad (5-18-84)$$

为一平面方程, 在  $i, j, m$  三个点上式(5-18-83)保持相等, 即

$$\begin{cases} P(x_i, y_i) = h_1 + h_2 x_i + h_3 y_i = u_i \\ P(x_j, y_j) = h_1 + h_2 x_j + h_3 y_j = u_j \\ P(x_m, y_m) = h_1 + h_2 x_m + h_3 y_m = u_m \end{cases} \quad (5-18-85)$$

由此解出平面方程系数  $h_1, h_2$  和  $h_3$

$$\begin{cases} h_1 = (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) / 2\Delta \\ h_2 = (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) / 2\Delta \\ h_3 = (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) / 2\Delta \end{cases} \quad (5-18-86)$$

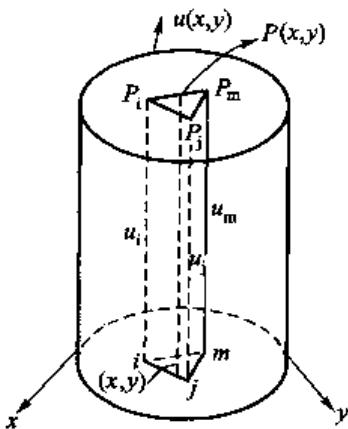


图 5-18-11 剖分的线性逼近

其中

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \quad (5-18-87)$$

而

$$\begin{cases} a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = x_j y_m - x_m y_j \\ b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix} = y_j - y_m \\ c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} = x_m - x_j \end{cases} \quad (5-18-88)$$

至于  $a_j, b_j, c_j$  和  $a_m, b_m, c_m$  则可根据



循环原则写出。

现在, 引出  $N_k(x, y)$  函数, 定义为

$$N_k(x, y) = (a_k + b_k x + c_k y) / 2\Delta \quad (k=i, j, m) \quad (5-18-89)$$

于是可又一次把平面方程写成

$$P(x, y) = u_i N_i + u_j N_j + u_m N_m \quad (5-18-90)$$

这样, 在  $i, j, m$  三顶点单元中, 任一点  $(x, y)$  有逼近式

$$u(x, y) \approx u_i N_i + u_j N_j + u_m N_m \quad (5-18-91)$$

式(5-18-91)表明可以用  $u_i, u_j$  和  $u_m$  三个结点参数来确定(近似逼近)整个单元上的函数  $u(x, y)$ 。

注意: 式(5-18-89)定义了一类十分重要的函数, 称为  $N$  函数, 它有如下性质:

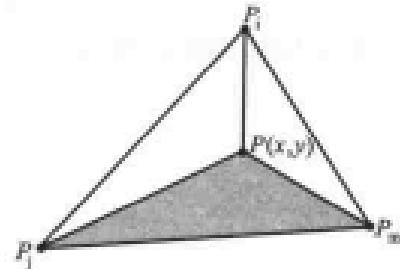
[性质 1]  $N$  函数仅仅表征单元的剖分性质, 也就是说它只与结点的几何参数有关, 而与未知函数  $u(x, y)$  无关。

这个性质很容易从定义式(5-18-89)看出。

[性质 2]  $N$  函数的几何意义是:  $N_i(x, y)$  表示以  $P(x, y)$  为顶点,  $P_i, P_n$  为对边的三角形面积与总的单元三角形  $P_i P_j P_n$  面积之比, 如图 5-18-12 所示。

[证明] 首先, 给出总三角形面积( $\triangle P_i P_j P_n$ ) $\Delta$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_n & y_n \end{vmatrix} \quad (5-18-92)$$



而

$$\begin{aligned} a_i + b_i x + c_i y &= \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_n & y_n \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_n \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_n & y_n \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5-18-93)$$

图 5-18-12  $N_i(x, y)$  表示  
三角形面积比

表示  $P(x, y)$  和  $P_i P_n$  组成三角形面积之两倍。于是有

$$N_i(x, y) = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta = \triangle P_i P_j P_n / \Delta \quad (5-18-94)$$

[性质 3]  $N$  函数满足下列恒等式

$$N_i(x, y) + N_j(x, y) + N_n(x, y) = 1 \quad (5-18-95)$$

[证明] 由性质 2 很易知道

$$N_i(x, y) + N_j(x, y) + N_n(x, y) = (\triangle P_i P_j P_n + \triangle P_i P_n P_j + \triangle P_j P_n P_i) / \Delta = \Delta / \Delta = 1$$

作为推论, 我们还可写出

$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i) = 1 \\ N_i(x_j, y_j) = 0 \\ N_i(x_n, y_n) = 0 \end{cases} \quad (5-18-96)$$

也就是说,  $N$  函数在结点上类似 Kronecker- $\delta$  函数性质。

## 四、二维有限元解

这里以典型的二维 Dirichlet 问题为例, 论述二维有限元法的基本步骤。

[问题的提法] 求二维  $\Omega$  域内位函数  $u(x, y)$  解。

其边界条件是

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (\text{Dirichlet 条件})$$

对应的能量泛函

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \epsilon (\nabla u)^2 - \rho u \right) dx dy$$

和变分提法

$$\delta J(u) = 0$$

### 1. 区域剖分

首先, 将域  $\Omega$  共剖分为  $p$  个三角形单元, 其中结点分成两类:

$$\begin{cases} \text{域内结点 } n \text{ 个: } 1, 2, \dots, n \\ \text{边界结点 } (p-n) \text{ 个: } n+1, n+2, \dots, p \end{cases}$$

引入未知函数  $\mathbf{u}$ , 矩阵

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ \hline u_{n+1} \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_B \end{bmatrix} \quad (5-18-97)$$

十分清楚, 上式中  $\mathbf{u}_I$  是域内函数, 而  $\mathbf{u}_B$  是边界函数。这时, 能量泛函可写成

$$J(\mathbf{u}) \approx \sum_{e=1}^{n_e} J^{(e)}(\mathbf{u}) \quad (5-18-98)$$

典型单元称之为  $e$ , 共有  $n_e$  个三角形单元。其中

$$\left\{ \begin{array}{l} J^{(e)}(\mathbf{u}) = \iint_e \left\{ \frac{\epsilon}{2} (\nabla \mathbf{u})^2 - \rho \mathbf{u} \right\} dx dy \\ n_e = p - 2 \end{array} \right. \quad (5-18-99)$$

$$(5-18-100)$$

## 2. 典型单元 $e$ 分析

设典型单元  $e$  结点为  $i, j, m$  时对应的结点参数为  $u_i, u_j, u_m$ , 于是典型单元的位函数矩阵有

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} \quad (5-18-101)$$

而  $i, j, m$  单元内任一点  $(x, y)$  的位函数  $u(x, y)$  可表示为

$$u(x, y) \approx [N_i, N_j, N_m] \mathbf{u}^{(e)} \quad (5-18-102)$$

进一步有

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_j}{\partial x}, \frac{\partial N_m}{\partial x} \right] \mathbf{u}^{(e)} = \frac{1}{2\Delta} [b_i, b_j, b_m] \mathbf{u}^{(e)} \quad (5-18-103)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y}, \frac{\partial N_j}{\partial y}, \frac{\partial N_m}{\partial y} \right] \mathbf{u}^{(e)} = \frac{1}{2\Delta} [c_i, c_j, c_m] \mathbf{u}^{(e)} \quad (5-18-104)$$

十分清楚, 位函数的导数只作用在  $N$  函数上。因此, 在单元  $e$  中

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{u})^2 &= \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)^2 \approx \mathbf{u}^{(e)T} \cdot \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_m \end{bmatrix} [b_i, b_j, b_m] + \begin{bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_m \end{bmatrix} [c_i, c_j, c_m] \right\} \mathbf{u}^{(e)} \\ &= \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{s}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \end{aligned} \quad (5-18-105)$$

其中

$$\mathbf{s}^{(e)} = \frac{1}{4\Delta^2} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_m + c_j c_m \\ b_m b_i + c_m c_i & b_m b_j + c_m c_j & b_m^2 + c_m^2 \end{bmatrix} \quad (5-18-106)$$

另一方面

$$\rho u = \mathbf{u}^{(e)T} \begin{bmatrix} \rho N_i \\ \rho N_j \\ \rho N_m \end{bmatrix} \quad (5-18-107)$$

根据单元能量泛函定义式, 把其中的  $u(x, y)$  用  $p(x, y)$  逼近, 有

$$J^{(e)}(u) \approx \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \left\{ \epsilon \iint_e s^{(e)} dx dy \right\} \mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{u}^{(e)T} \iint_e \begin{bmatrix} \rho N_i \\ \rho N_j \\ \rho N_m \end{bmatrix} dx dy \quad (5-18-108)$$

若进一步引入

$$\mathbf{k}^{(e)} = \epsilon \iint_e s^{(e)} dx dy \quad (5-18-109)$$

$$\mathbf{r}^{(e)} = \iint_e \begin{bmatrix} \rho N_i \\ \rho N_j \\ \rho N_m \end{bmatrix} dx dy \quad (5-18-110)$$

则可得到  $J^{(e)}(u)$  的简洁矩阵表式

$$J^{(e)}(u) \approx \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{r}^{(e)} \quad (5-18-111)$$

### 3. $\mathbf{k}^{(e)}$ 和 $\mathbf{r}^{(e)}$ 的计算公式

上述引入的  $\mathbf{k}^{(e)}$  计算比较简单, 因为被积矩阵  $s^{(e)}$  是常数矩阵。显见

$$\mathbf{k}^{(e)} = \epsilon \iint_e s^{(e)} dx dy = \frac{\epsilon}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_m + c_j c_m \\ b_i b_m + c_i c_m & b_j b_m + c_j c_m & b_m^2 + c_m^2 \end{bmatrix} \quad (5-18-112)$$

关于  $\mathbf{r}^{(e)}$  矩阵计算可以由  $r_i^{(e)}$  分量为例来说明, 即

$$r_i^{(e)} = \iint_e \rho N_i dx dy \quad (5-18-113)$$

式中,  $\rho$  表示电荷密度, 在所求的问题中是已知的,  $\rho$  在单元  $e$  中的计算可以有几种近似情况。

情况 1: 常数元近似

$$\text{设 } \rho = \rho_0^{(e)} = \frac{1}{3} (\rho_i + \rho_j + \rho_m) \quad (5-18-114)$$

这时

$$r_i^{(e)} = \rho_0^{(e)} \iint_e N_i dx dy \quad (5-18-115)$$

由附录可知

$$\iint_e N_i dx dy = \frac{\Delta}{3} \quad (5-18-116)$$

最后得到

$$r_i^{(e)} = \frac{\Delta}{3} \rho_0^{(e)} = \frac{\Delta}{3} \left( \frac{\rho_i + \rho_j + \rho_m}{3} \right) \quad (5-18-117)$$

情况 2: 线性元近似

这种情况下,认为  $\rho$  在单元  $e$  中近似作线性变化,也即

$$\rho(x, y) = [N_i, N_j, N_m] \begin{bmatrix} \rho_i \\ \rho_j \\ \rho_m \end{bmatrix} \quad (5-18-118)$$

把式(5-18-118)代入  $r_i^{(e)}$  定义式(5-18-113)可得

$$r_i^{(e)} = \left[ \iint_e N_i^2 dx dy, \iint_e N_i N_j dx dy, \iint_e N_i N_m dx dy \right] \begin{bmatrix} \rho_i \\ \rho_j \\ \rho_m \end{bmatrix} \quad (5-18-119)$$

同样由附录可知

$$\iint_e N_i^2 dx dy = \frac{\Delta}{6} \quad (5-18-120)$$

$$\iint_e N_i N_j dx dy = \frac{\Delta}{12} \quad (5-18-121)$$

于是得到

$$r_i^{(e)} = \frac{\Delta}{3}, \frac{2\rho_i + \rho_j + \rho_m}{4} = \frac{\Delta}{3} \cdot \rho_0^{(e)} \quad (5-18-122)$$

#### 4. 总空间 $u_t$ 变换

前面已经详尽讨论了典型单元  $e$ (由  $i, j, m$  结点构成的  $e$  三角形)。现在进一步汇合到  $u_t$  总空间,其变换关系可以写出

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \cdots 1 \cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 \cdots 0 \cdots 1 \cdots 0 & 0 \\ 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 1 \cdots 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_t = \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{u}_t \quad (5-18-123)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $i \quad j \quad m$

其中,变换到总空间的矩阵  $\mathbf{T}^{(e)}$  是  $3 \times n_p$  阶矩阵。于是可以把  $J^{(e)}(\mathbf{u})$  放到总空间  $u_t$  中,有

$$J^{(e)}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_t^T (\mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}) \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t^T (\mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{r}^{(e)}) \quad (5-18-124)$$

再一次引入

$$\mathbf{k}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} \quad (5-18-125)$$

$$\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{r}^{(e)} \quad (5-18-126)$$

它们分别表示  $\mathbf{k}^{(e)}$  和  $\mathbf{r}^{(e)}$  在总空间的对应矩阵。于是

$$J^{(e)}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_t^T \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t^T \mathbf{R}^{(e)} \quad (5-18-127)$$

其中,  $\mathbf{k}^{(e)}$  是如下形式的  $n_p \times n_p$  阶矩阵。

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots \times \cdots \times \cdots \times \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots \times \cdots \times \cdots \times \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots \times \cdots \times \cdots \times \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ i & j & m \end{bmatrix} \quad (5-18-128)$$

(除 $\times$ 位置外,其余元素均为0)

具体在打 $\times$ 处元素和不打 $\times$ 处元素分别为

$$k_s^{(e)} = \begin{cases} \frac{\epsilon}{4\Delta}(b_s b_t + c_s c_t) & \text{当 } s, t = i, j, m \\ 0 & \text{其余处} \end{cases} \quad (5-18-129)$$

此外,  $\mathbf{R}^{(e)}$ 是  $n_p \times 1$  阶矩阵, 具体形式为

$$\mathbf{R}^{(e)} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i \\ j \\ m \end{matrix} \quad (5-18-130)$$

同样地, 除 $\times$ 位置而外, 其余元素均为0。

$$\text{具体可表述为} \quad R_s^{(e)} = \begin{cases} \iint_e \rho N_s dxdy & \text{当 } s = i, j, m \text{ 时} \\ 0 & \text{其余处} \end{cases} \quad (5-18-131)$$

### 5. 二维有限元解

根据方程(5-18-98)可知

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{e=1}^{n_p} J^{(e)}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_t^T \left( \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{k}^{(e)} \right) \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t^T \left( \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{R}^{(e)} \right) \quad (5-18-132)$$

再一次引入总矩阵

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k} = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{k}^{(e)} \\ \mathbf{R} = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{R}^{(e)} \end{array} \right. \quad (5-18-133)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k} = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{k}^{(e)} \\ \mathbf{R} = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{R}^{(e)} \end{array} \right. \quad (5-18-134)$$

$$\text{总能量泛函} \quad J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_t^T \mathbf{k} \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t^T \mathbf{R} \quad (5-18-135)$$

式(5-18-135)已通过剖分离散化和向总空间  $\mathbf{u}_t$  变换, 把  $J(\mathbf{u})$  转化为结点  $\mathbf{u}_t$  的多元函数。由于结点分为域内结点和边界结点两类, 可以把式(5-18-135)进一步写成分块矩阵形式

$$J(u) = \frac{1}{2} [u_1^\top + u_0^\top] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{10} \\ k_{01} & k_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} - [u_1^\top \quad u_0^\top] \begin{bmatrix} R_1 \\ R_0 \end{bmatrix} \quad (5-18-136)$$

和边界条件

$$u_0 = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-18-137)$$

能量泛函的变分提法

$$\delta J(u) = 0 \quad (5-18-138)$$

注意到边界条件有  $\delta u_0 = 0$ , 且  $k_{11}$  为对称正定矩阵, 即有

$$\delta(u_1^\top k_{11} u_1) - \delta u_1^\top k_{11} u_1 + u_1^\top k_{11} \delta u_1 = 2 \delta u_1^\top k_{11} u_1 \quad (5-18-139)$$

Dirichlet 条件表明  $u_1 \equiv 0$ , 则变分式(5-18-138)可得

$$\delta u_1^\top (k_{11} u_1 - R_1) = 0 \quad (5-18-140)$$

由于  $\delta u_1^\top$  的任意性, 得到线性方程组

$$k_{11} u_1 - R_1 = 0 \quad (5-18-141)$$

最后得到二维 Dirichlet 问题的有限元解

$$u_1 = k_{11}^{-1} R_1 \quad (5-18-142)$$

## 五、电磁有限元法

下面引入一典型电磁问题说明有限元法的简单应用。

### 1. 电解槽问题

图 5-18-13 所示为三面接零电位, 盖板电位  $u = 100 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$  的典型二维电解槽。

可以写出一般的微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=a} = 0, u|_{y=a} = 0 \\ u|_{y=\frac{a}{2}} &= 100 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{aligned} \quad (5-18-143)$$

这个问题是要求槽内电位分布, 本例采用分离变量法可以得到解析解。首先写出通解

$$u(x, y) = (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)(C_k \cosh ky + D_k \sinh ky) \quad (5-18-144)$$

由式(5-18-143)边界条件可写出

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \quad (5-18-145)$$

而盖板电位

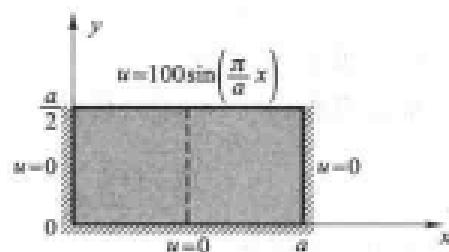


图 5-18-13 二维电解槽问题

$$u\left(x, \frac{a}{2}\right) = 100 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \quad (5-18-146)$$

可解出

$$E_1 = \frac{100}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)}, E_m = 0 \quad (m=2, 3, \dots) \quad (5-18-147)$$

最后所得解析解为

$$u(x, y) = \frac{100}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{a}y\right) \quad (5-18-148)$$

## 2. 数值解模型

上述实例由于问题对称性可以化成  $\frac{1}{2}$  区域的混合型

问题, 如图 5-18-14 所示。模型的变分提法是

$$\begin{cases} J(u) = \iint_{\Omega} \frac{\epsilon}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = 0 \\ u|_{y=\frac{a}{2}} = 100 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{cases}$$

(5-18-149)

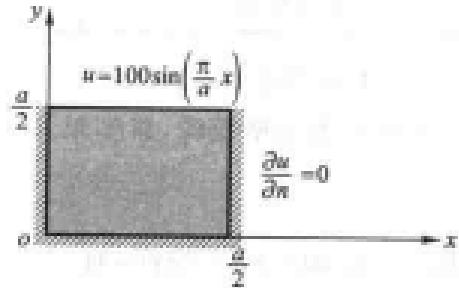


图 5-18-14 对称混合型问题

注意,  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x=\frac{a}{2}} = 0$  是自然边界条件, 无须列出。

## 3. 有限元解

### (1) 结点剖分

作为例子, 对于一半区域剖分为 8 个三角形, 总结点数  $p=9$ ,

$$\text{其中 } \begin{cases} \text{内部结点 } n=2 \text{(具体为结点 5 和结点 8)} \\ \text{强致边界结点 } p-n=7 \\ \text{三角形单元数 } n_e=8 \end{cases}$$

如图 5-18-15 所示。

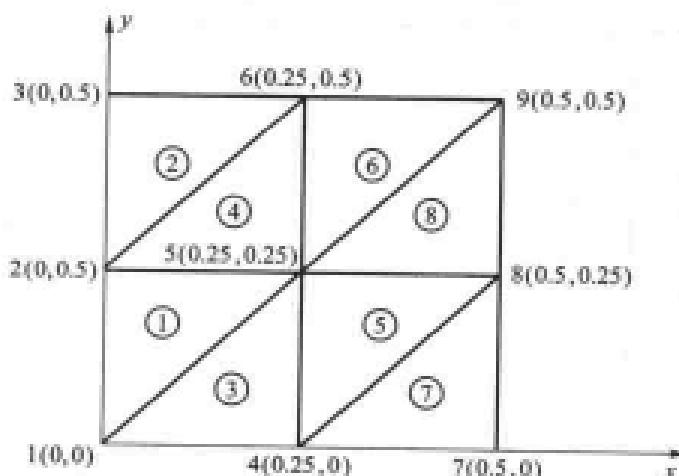


图 5-18-15 单元剖分

具体的输入数据如表 5-18-1 所示。

表 5-18-1 输入数据表

结点数据	1(0,0), 2(0,0.25), 3(0,0.5), 4(0.25,0), 5(0.25,0.25), 6(0.25,0.5), 7(0.5,0), 8(0.5,0.25), 9(0.5,0.5)
三角单元数据 $e(i,j,m)$	1(1,5,2), 2(2,6,3), 3(1,4,5), 4(2,5,6), 5(4,8,5), 6(5,9,6), 7(4,7,8), 8(5,8,9)
外加边界条件 $(a_i, u_i)$ $a_i$ —结点号	(1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (6,70.7), (7,0), (9,100)
填充数据	$\epsilon = \epsilon_0$

## (2) $k$ 矩阵计算

本例中电解槽无源, 典型单元  $e$  中的能量泛函

$$J^{(e)}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{u}_e \quad (5-18-150)$$

首先计及在  $u(i,j,m)$  空间, 有

$$\mathbf{k}^{(e)} = \frac{\epsilon}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_m + c_j c_m \\ b_i b_m + c_i c_m & b_j b_m + c_j c_m & b_m^2 + c_m^2 \end{bmatrix} \quad (5-18-151)$$

且

$$\Delta = \frac{1}{2} (b_i c_j - b_j c_i) \quad (5-18-152)$$

$$\begin{aligned} b_i &= y_i - y_m, c_i = x_m - x_i \\ b_j &= y_m - y_i, c_j = x_i - x_m \\ b_m &= y_i - y_j, c_m = x_j - x_i \end{aligned} \quad (5-18-153)$$

具体计算表格如表 5-18-2 所示。

表 5-18-2  $k$  矩阵计算表

三角单元 $e$	$b_i, c_i$	$\Delta$	$\mathbf{k}^{(e)}$
1 (1,5,2)	$b_1 = 0$ $b_5 = 0.25$ $b_2 = -0.25$ $c_1 = -0.25$ $c_5 = 0$ $c_2 = 0.25$	$\Delta = 0.03125$	$\begin{bmatrix} k_{11} = 0.5\epsilon_0 & k_{15} = 0 & k_{12} = -0.5\epsilon_0 \\ k_{51} = 0 & k_{55} = 0.5\epsilon_0 & k_{52} = -0.5\epsilon_0 \\ k_{21} = -0.5\epsilon_0 & k_{25} = -0.5\epsilon_0 & k_{22} = \epsilon_0 \end{bmatrix}$
2 (2,6,3)	$b_2 = 0$ $b_6 = 0.25$ $b_3 = -0.25$ $c_2 = -0.25$ $c_6 = 0$ $c_3 = 0.25$	$\Delta = 0.03125$	$\begin{bmatrix} k_{22} = 0.5\epsilon_0 & k_{26} = 0 & k_{23} = -0.5\epsilon_0 \\ k_{62} = 0 & k_{66} = 0.5\epsilon_0 & k_{63} = -0.5\epsilon_0 \\ k_{32} = -0.5\epsilon_0 & k_{36} = -0.5\epsilon_0 & k_{33} = \epsilon_0 \end{bmatrix}$

续表

三角单元 $e$	$b_i, c_i$	$\Delta$	$k^{(e)}$
3 (1,4,5)	$b_1 = -0.25$ $b_4 = 0.25$ $b_5 = 0$ $c_1 = 0$ $c_4 = -0.25$ $c_5 = 0.25$	$\Delta = 0.03125$	$\begin{bmatrix} k_{11} = 0.5\epsilon_0 & k_{14} = -0.5\epsilon_0 & k_{15} = 0 \\ k_{41} = -0.5\epsilon_0 & k_{44} = \epsilon_0 & k_{45} = -0.5\epsilon_0 \\ k_{51} = 0 & k_{54} = -0.5\epsilon_0 & k_{55} = 0.5\epsilon_0 \end{bmatrix}$
4 (2,5,6)	$b_2 = -0.25$ $b_5 = 0.25$ $b_6 = 0$ $c_2 = 0$ $c_5 = -0.25$ $c_6 = 0.25$	$\Delta = 0.03125$	$\begin{bmatrix} k_{22} = 0.5\epsilon_0 & k_{25} = -0.5\epsilon_0 & k_{26} = 0 \\ k_{52} = -0.5\epsilon_0 & k_{55} = \epsilon_0 & k_{56} = -0.5\epsilon_0 \\ k_{62} = 0 & k_{65} = -0.5\epsilon_0 & k_{66} = 0.5\epsilon_0 \end{bmatrix}$
5 (4,8,5)	$b_4 = 0$ $b_8 = 0.25$ $b_5 = -0.25$ $c_4 = -0.25$ $c_8 = 0$ $c_5 = 0.25$	$\Delta = 0.03125$	$\begin{bmatrix} k_{44} = 0.5\epsilon_0 & k_{48} = 0 & k_{45} = -0.5\epsilon_0 \\ k_{84} = 0 & k_{88} = 0.5\epsilon_0 & k_{85} = -0.5\epsilon_0 \\ k_{54} = -0.5\epsilon_0 & k_{58} = -0.5\epsilon_0 & k_{55} = \epsilon_0 \end{bmatrix}$
6 (5,9,6)	$b_5 = 0$ $b_9 = 0.25$ $b_6 = -0.25$ $c_5 = -0.25$ $c_8 = 0$ $c_6 = 0.25$	$\Delta = 0.03125$	$\begin{bmatrix} k_{55} = 0.5\epsilon_0 & k_{59} = 0 & k_{56} = -0.5\epsilon_0 \\ k_{95} = 0 & k_{99} = 0.5\epsilon_0 & k_{96} = -0.5\epsilon_0 \\ k_{65} = -0.5\epsilon_0 & k_{69} = -0.5\epsilon_0 & k_{66} = \epsilon_0 \end{bmatrix}$
7 (4,7,8)	$b_4 = -0.25$ $b_7 = 0.25$ $b_8 = 0$ $c_4 = 0$ $c_7 = -0.25$ $c_8 = 0.25$	$\Delta = 0.03125$	$\begin{bmatrix} k_{44} = 0.5\epsilon_0 & k_{47} = -0.5\epsilon_0 & k_{48} = 0 \\ k_{74} = -0.5\epsilon_0 & k_{77} = \epsilon_0 & k_{78} = -0.5\epsilon_0 \\ k_{84} = 0 & k_{87} = -0.5\epsilon_0 & k_{88} = 0.5\epsilon_0 \end{bmatrix}$
8 (5,8,9)	$b_5 = -0.25$ $b_8 = 0.25$ $b_9 = 0$ $c_5 = 0$ $c_8 = -0.25$ $c_9 = 0.25$	$\Delta = 0.03125$	$\begin{bmatrix} k_{55} = 0.5\epsilon_0 & k_{58} = -0.5\epsilon_0 & k_{59} = 0 \\ k_{85} = -0.5\epsilon_0 & k_{88} = \epsilon_0 & k_{89} = -0.5\epsilon_0 \\ k_{95} = 0 & k_{98} = -0.5\epsilon_0 & k_{99} = 0.5\epsilon_0 \end{bmatrix}$

将上面  $k^{(e)}$  表构成总的  $k$  矩阵时, 必须注意到相当的  $k$  标号应该选加号。其中, 上标表示三角单元数, 于是得到

$$\begin{bmatrix}
 k_{11}^1 + k_{11}^3 & & & & & \\
 k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{22}^2 + k_{22}^4 & & & & \\
 0 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & & & \\
 k_{41}^1 & 0 & 0 & k_{44}^3 + k_{44}^5 + k_{44}^7 & & \\
 k_{51}^1 + k_{51}^3 & k_{52}^1 + k_{52}^4 & 0 & k_{54}^3 + k_{54}^5 & k_{55}^1 + k_{55}^3 + k_{55}^4 + k_{55}^5 + k_{55}^6 + k_{55}^8 & \epsilon_0 \\
 0 & k_{62}^2 + k_{62}^4 & k_{63}^2 & 0 & k_{65}^4 + k_{65}^6 & k_{66}^2 + k_{66}^4 + k_{66}^8 \\
 0 & 0 & 0 & k_{74}^7 & 0 & k_{77}^7 \\
 0 & 0 & 0 & k_{84}^5 + k_{84}^7 & k_{85}^5 + k_{85}^8 & 0 & k_{88}^5 + k_{88}^7 + k_{88}^8 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{95}^6 + k_{95}^8 & k_{96}^6 & 0 & k_{98}^6 & k_{99}^6 + k_{99}^8
 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0 & & & & & & & & \\ -0.5 & 2.0 & & & & & & & \\ 0 & -0.5 & 1.0 & & & & & & \\ -0.5 & 0 & 0 & 2.0 & & & & & \\ 0 & -1.0 & 0 & -1.0 & 4.0 & & & & \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & -1.0 & 2.0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 1.0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & -0.5 & 2.0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & -0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \epsilon_0 \quad (5-18-154)$$

在序号上将内部结点和边界结点重新排列,有总矩阵  $k$

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{1\text{II}} \\ k_{\text{I}\text{II}} & k_{\text{II}\text{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ⑤ & ⑧ & ① & ② & ③ & ④ & ⑥ & ⑦ & ⑨ \\ ⑤ & 4.0 & -1.0 & 0 & -1.0 & 0 & -1.0 & -1.0 & 0 & 0 \\ ⑧ & -1.0 & 2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ ① & 0 & 0 & 1.0 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ ② & -1.0 & 0 & -0.5 & 2.0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ③ & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1.0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ ④ & -1.0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & -2.0 & 0 & -0.5 & 0 \\ ⑥ & -1.0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 2.0 & 0 & -0.5 \\ ⑦ & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 1.0 & 0 \\ ⑨ & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1.0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-18-155)$$

重新写出能量泛函的分块矩阵形式

$$J(u) = \frac{1}{2} [u_1^T, u_{\text{II}}^T] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{1\text{II}} \\ k_{\text{I}\text{II}} & k_{\text{II}\text{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{\text{II}} \end{bmatrix} \quad (5-18-156)$$

计及  $\delta u_{\text{II}} = 0$  可得变分

$$\delta J(u) = (k_{11} u_1 + k_{\text{I}\text{II}} u_{\text{II}}) \delta u_1 = 0 \quad (5-18-157)$$

考虑到  $\delta u_1$  的任意性,以及  $u_{\text{II}} = u_0$  的条件,得到

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{\text{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{1\text{II}} u_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (5-18-158)$$

如果只求内部结点  $u_1$ ,则可更简化为

$$k_{11} u_1 = -k_{1\text{II}} u_0 \quad (5-18-159)$$

计及式(5-18-155)和式(5-18-156)两式,具体化为

$$\begin{bmatrix} 4.0 & -1.0 \\ -1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_5 \\ u_8 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -1.0 & 0 & -1.0 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 70.7 \\ 50 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.7 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

(5-18-160)

很容易解出

$$\begin{bmatrix} u_5 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27.345 & 908 & 03 \\ 38.672 & 954 & 02 \end{bmatrix}$$

(5-18-161)

再记起此问题的解析解式(5-18-148),注意到

$$\begin{cases} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.301\ 298\ 902 \\ \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.868\ 670\ 961 \end{cases}$$

(5-18-162)

可得精确解

$$\begin{bmatrix} u_{50} \\ u_{80} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.691 & 149 & 38 \\ 37.746 & 985 & 44 \end{bmatrix}$$

再核对误差约为 2.4%。

## 附录 APPENDIX

### N 函数积分

在本附录将研究三个典型的 N 函数积分

$$\iint_N N_i dx dy = \frac{\Delta}{3}$$

(5-18-163)

$$\iint_N N_i^2 dx dy = \frac{\Delta}{6}$$

(5-18-164)

$$\iint_N N_i N_j dx dy = \frac{\Delta}{12}$$

(5-18-165)

做变量变换,把  $dxdy$  积分元转化为  $dN_i dN_j$ 。已经知道

$$\begin{cases} N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta \end{cases}$$

(5-18-166)

$$\begin{cases} N_j = (a_j + b_j x + c_j y)/2\Delta \end{cases}$$

(5-18-167)

计及

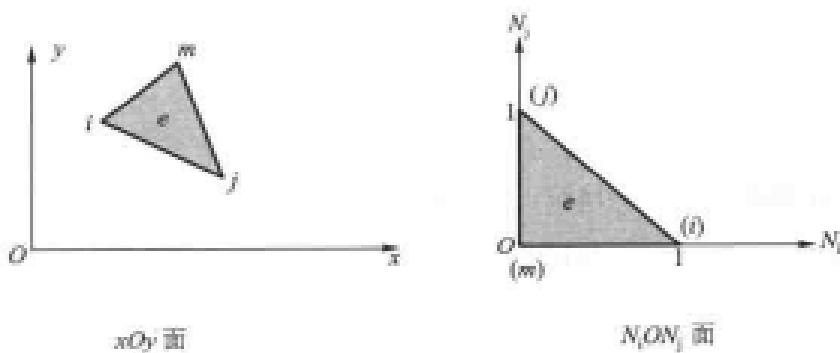
$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i) = 1, N_j(x_i, y_i) = 0 \\ N_i(x_i, y_i) = 0, N_j(x_j, y_j) = 1 \\ N_i(x_m, y_m) = 0, N_j(x_m, y_m) = 0 \end{cases}$$

(5-18-168)

表 5-18-3 给出  $xOy$  和  $N_iON_i$  面对应关系, 如图 5-18-16 所示, 采用 Jacobi 行列式, 有

表 5-18-3  $xOy$  和  $N_iON_i$  面

$xOy$ 面	$N_iON_i$ 面
$(x_i, y_i)$	$(1, 0)$
$(x_j, y_j)$	$(0, 1)$
$(x_m, y_m)$	$(0, 0)$

图 5-18-16  $xOy$  面向  $N_iON_i$  面变换

$$dN_i dN_j = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy = \frac{1}{4\Delta^2} \begin{vmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \end{vmatrix} dx dy \quad (5-18-169)$$

根据  $b_i, c_i, b_j$  和  $c_j$  定义式, 有

$$\begin{vmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \end{vmatrix} = b_i c_j - b_j c_i = (y_i - y_m)(x_j - x_m) - (y_m - y_i)(x_i - x_j) = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2\Delta \quad (5-18-170)$$

很容易得到

$$dx dy = 2\Delta dN_i dN_j \quad (5-18-171)$$

情况 1:

$$\begin{aligned} \iint_{\triangle} N_i dxdy &= \iint_{\triangle} 2\Delta dN_i dN_j \\ &= 2\Delta \int_0^1 N_i dN_i \int_0^{1-N_i} dN_j \\ &= 2\Delta \int_0^1 N_i (1 - N_i) dN_i = 2\Delta \left( \frac{N_i^2}{2} - \frac{N_i^3}{3} \right)_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\Delta \end{aligned}$$

情况 2:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\epsilon} N_i^2 dx dy &= 2\Delta \iint_{\epsilon} N_i^2 dN_i dN_j \\
 &= 2\Delta \int_0^1 N_i^2 dN_i \int_0^{1-N_i} dN_j \\
 &= 2\Delta \int_0^1 N_i^2 (1 - N_i) dN_i \\
 &= 2\Delta \left( \frac{N_i^3}{3} - \frac{N_i^4}{4} \right)_0^1 \\
 &= \frac{1}{6}\Delta
 \end{aligned}$$

情况 3:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\epsilon} N_i N_j dx dy &= 2\Delta \iint_{\epsilon} N_i N_j dN_i dN_j \\
 &= 2\Delta \int_0^1 N_i dN_i \int_0^{1-N_i} N_j dN_j \\
 &= 2\Delta \int_0^1 N_i \frac{(1-N_i)^2}{2} dN_i \\
 &= \Delta \left( \frac{N_i^2}{2} - \frac{2N_i^3}{3} + \frac{N_i^4}{4} \right)_0^1 \\
 &= \frac{1}{12}\Delta
 \end{aligned}$$

## 时域有限差分法 Finite Difference Time Domain Method

1966 年 K. S. Yee 首次提出了一种电磁场数值计算的新方法——时域有限差分(简称 FDTD)方法。它的核心是一组为求解时域 Maxwell 旋度方程的时域有限差分方程组。

Yee 的出发点不是 Laplace 方程或波动方程,而是更为原始的时域 Maxwell 方程,因此,计算中所涉及的未知量不是一个,而是两个,同时包括电场量和磁场量。Yee 的时空离散格式独特:在空间,电场量和磁场量并没有在相同的位置取值,而是相互间隔;在时间方向,电场量和磁场量也没有在相同的时刻取值,而是相互交替。为了模拟特定电磁环境下电磁场的真实时空演变过程,Yee 在直角坐标系中用立方体单元剖分待求解的物理空间,用差分方程代替 Maxwell 旋度方程,由时刻 1 的电场分量和时刻 2 的磁场分量导出时刻 3 的电场分量,再由时刻 2 的磁场

分量和时刻 3 的电场分量导出时刻 4 的磁场分量……，如此循环迭代，直到任意指定的时刻。Yee 的方法构思巧妙，令人叹为观止。当前，时域有限差分法已经发展成为一种成熟的方法，应用于几乎所有的电磁场分析问题。与三大主流方法中的其他两种——有限元法、矩量法相比，时域有限差分法以其简单、直接的特点见长，是三种方法中唯一的一种时域方法。

## 一、从一维有限时域差分法谈起

### 1. Maxwell 旋度方程的标量形式

有限时域差分法的出发点是以下 Maxwell 旋度方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{M} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \end{cases} \quad (5-19-1)$$

上式中， $\vec{J}$  为电流密度矢量 ( $A/m^2$ )； $\vec{M}$  为磁流密度矢量 ( $V/m^2$ )。

对于各向同性媒质而言，在实际工程问题中经常遇到的场强范围内，本构关系是简单的线性关系，为

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{cases} \quad (5-19-2)$$

总电流密度  $\vec{J}$  由外加电流密度或源电流密度  $\vec{J}_s$  和传导电流密度  $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$  两部分构成

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \sigma \vec{E} \quad (5-19-3)$$

其中， $\sigma$  为电导率 ( $S/m$ )， $\sigma=0$  表示电损耗为 0；源电流密度  $\vec{J}_s$  假设为已知量。

当不考虑磁损耗时，磁流密度  $\vec{M}$  仅仅是一个虚拟物理量，但有时磁流可作为代替复杂电流的等效源。

考虑到本构关系式 (5-19-2)，在直角坐标系中将式 (5-19-1) 展开可得

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - J_x \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - J_y \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z \right) \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - M_x \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - M_y \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - M_z \right) \end{cases} \quad (5-19-4)$$

在二维情况下，比如设  $\frac{\partial}{\partial z}=0$ ，方程组 (5-19-4) 分裂为以下两组独立的方程：

① 以  $z$  轴为基准的二维横电模(TE 模), 其场方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - J_x \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( -\frac{\partial H_z}{\partial x} - J_y \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - M_z \right) \end{cases} \quad (5-19-5)$$

② 以  $z$  轴为基准的二维横磁模(TM 模), 其场方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z \right) \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( -\frac{\partial E_z}{\partial y} - M_x \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - M_y \right) \end{cases} \quad (5-19-6)$$

在一维情况下, 比如设  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} = 0$ , 分为两种情况。

① 仅有  $E_x, H_z$  分量, 其场方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - J_x \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - M_z \right) \end{cases} \quad (5-19-7)$$

② 仅有  $E_z, H_x$  分量, 其场方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( -\frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z \right) \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( -\frac{\partial E_z}{\partial y} - M_x \right) \end{cases} \quad (5-19-8)$$

这两种情况就其物理本质而言完全相同, 即都是以传播方向为基准的横电磁模(TEM 模), 所不同的只是坐标系的选取方式不同而已。

## 2. 一维时域有限差分法

当模拟自由空间的平面电磁波(以 TE 模为例)时, 使用一维时域有限差分法。所依据的物理方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{cases} \quad (5-19-9)$$

这里假设所考虑的区域没有电磁损耗和激励源, 在模拟区域有激励源的情况后面还要专门考虑。

首先, 从 Taylor 公式出发导出时域有限差分格式。由 Taylor 公式

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 f(\xi)}{dx^3} \Delta x^3 \quad (5-19-10)$$

可得

$$\begin{aligned} E_x(y_j, t_n + \frac{\Delta t}{2}) &= E_x(y_j, t_n) + \frac{\partial}{\partial t} E_x(y_j, t_n) \cdot \frac{\Delta t}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(y_j, t_n) \cdot \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} E_x(y_j, t_n) \cdot \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 \end{aligned} \quad (5-19-11)$$

$$\begin{aligned} E_x(y_j, t_n - \frac{\Delta t}{2}) &= E_x(y_j, t_n) - \frac{\partial}{\partial t} E_x(y_j, t_n) \cdot \frac{\Delta t}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(y_j, t_n) \cdot \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} E_x(y_j, t_n) \cdot \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 \end{aligned} \quad (5-19-12)$$

式(5-19-11)减去式(5-19-12),整理可得

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x(y_j, t_n) = \frac{E_x(y_j, t_n + \frac{\Delta t}{2}) - E_x(y_j, t_n - \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (5-19-13)$$

同理可得

$$\frac{\partial}{\partial y} H_z(y_j, t_n) = \frac{H_z(y_j + \frac{\Delta y}{2}, t_n) - H_z(y_j - \frac{\Delta y}{2}, t_n)}{\Delta y} + O(\Delta y^2) \quad (5-19-14)$$

其中,  $\Delta t$  表示时间增量;  $\Delta y$  表示沿  $y$  轴方向的空间增量。将式(5-19-13)和式(5-19-14)中的高次项略去,即得相应导数项的差分近似,代入式(5-19-9)中的第一个方程可得

$$\frac{E_x(y_j, t_n + \frac{\Delta t}{2}) - E_x(y_j, t_n - \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{H_z(y_j + \frac{\Delta y}{2}, t_n) - H_z(y_j - \frac{\Delta y}{2}, t_n)}{\Delta y} \quad (5-19-15)$$

一般地,引入记号

$$F|_{i,j,k}^n = F(x_i, y_j, z_k, t_n) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \quad (5-19-16)$$

在一维情况即

$$F|_j^n = F(y_j, t_n) = F(j\Delta y, n\Delta t) \quad (5-19-17)$$

由式(5-19-15)得关于  $E_x$  的差分迭代格式

$$E_x|_j^{n+\frac{1}{2}} = E_x|_j^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} (H_z|_{j+\frac{1}{2}}^n - H_z|_{j-\frac{1}{2}}^n) \quad (5-19-18)$$

同理可得关于  $H_z$  的差分迭代格式

$$H_z|_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = H_z|_{j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta y} (E_x|_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - E_x|_j^{n+\frac{1}{2}}) \quad (5-19-19)$$

式(5-19-18)和式(5-19-19)即为所需的一维时域有限差分迭代格式。

给定边界条件和初始条件,原则上可以求得任意复杂电磁环境下 Maxwell 方程的解。平面电磁波的时域有限差分求解过程如图 5-19-1 所示。图中将向上的方向设置为时间轴,以表示时域有限差分的迭代方向。

图 5-19-1 表示,如果已知  $t = (n - \frac{1}{2})\Delta t$  时刻所有点的电场和  $t = n\Delta t$  时刻所有点的磁场,由式(5-19-18)可以求出  $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$  时刻空间所有点的电场值;同理,由  $t = n\Delta t$  时刻的

磁场和  $t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t$  时刻的电场,由式(5-19-19)可以求出  $t = (n+1)\Delta t$  时刻空间所有点的磁场值。如此循环,直到计算结果满足要求为止。

[例 1] 用时域有限差分法模拟平面电磁波垂直照射到金属表面上并被反射的过程。

这是一个典型的一维问题。式(5-19-9)为相应的泛定方程,经变量归一化处理后表述为

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z'}{\partial y} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H_z'}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{cases} \quad (5-19-20)$$

其中

$$H_z' = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_z \quad (5-19-21)$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (5-19-22)$$

由电磁场理论可知,在真空中任意点任意时刻

$$|H_z'| = |E_x| \quad (5-19-23)$$

对应于式(5-19-20)的时域有限差分迭代格式为

$$\begin{cases} E_x|_{j, \frac{n+1}{2}} = E_x|_{j, \frac{n}{2}} + \frac{c\Delta t}{\Delta y} (H_z'|_{j+\frac{1}{2}} - H_z'|_{j-\frac{1}{2}}) \\ H_z'|_{j+\frac{1}{2}} = H_z'|_{j-\frac{1}{2}} + \frac{c\Delta t}{\Delta y} (E_x|_{j+1, \frac{1}{2}} - E_x|_{j-\frac{1}{2}}) \end{cases} \quad (5-19-24)$$

一个完整的定解问题应当包括泛定方程和定解条件两部分,定解条件包括边界条件和初始条件。下面结合不同的解法给定不同的定解条件。

[解法 1] 假设有一 Gauss 脉冲位于两个距离充分远的无限大理想导电平板之间,边界条件和初始条件分别为

$$E_x(y=y_0, t)=0 \quad (5-19-25)$$

$$E_x(y=y_2, t)=0 \quad (5-19-26)$$

$$E_x(y, t=0) = \exp\left(-\left(\frac{y-y_1}{Y}\right)^2\right), y_0 < y < y_2 \quad (5-19-27)$$

式(5-19-27)中  $Y$  为常数。

从技术的角度讲,式(5-19-24)的定解条件仍不充分。这是因为时域有限差分的初始条件是在两个相邻时刻的电场值和磁场值,为此可补充  $t = \frac{\Delta t}{2}$  时刻  $H_z'$  的空间分布。由于真空中电磁波以光速  $c$  传播,  $\frac{\Delta t}{2}$  时间后电磁脉冲沿  $y$  方向传播的距离为  $\frac{c\Delta t}{2}$ 。如果设

$$\Delta y = c\Delta t \quad (5-19-28)$$

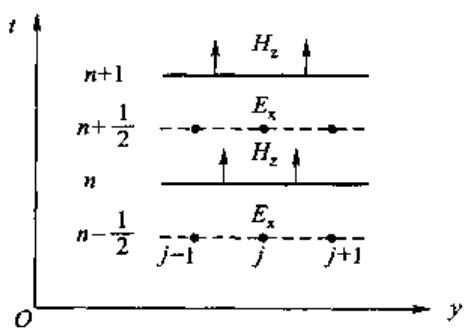


图 5-19-1 一维时域有限差分时空离散格式和迭代过程

则  $t = \frac{\Delta t}{2}$  时刻  $H'_z$  的空间分布为

$$H'_z(y, t = \frac{\Delta t}{2}) = -E_x(y, t = \frac{\Delta t}{2}) = -\exp \left\{ -\left[ \frac{y - (y_1 + \frac{\Delta y}{2})}{Y} \right]^2 \right\}, y_0 < y < y_2$$
(5-19-29)

有了这些条件即可以由式(5-19-24)的两个差分公式交替迭代,从而求得区间  $y_0 < y < y_2$  上所有离散点。 $t=0$  时刻以后所有离散时刻的场。

由图 5-19-2 可见,垂直照射在金属表面的电磁波以相反的相位反射回来。

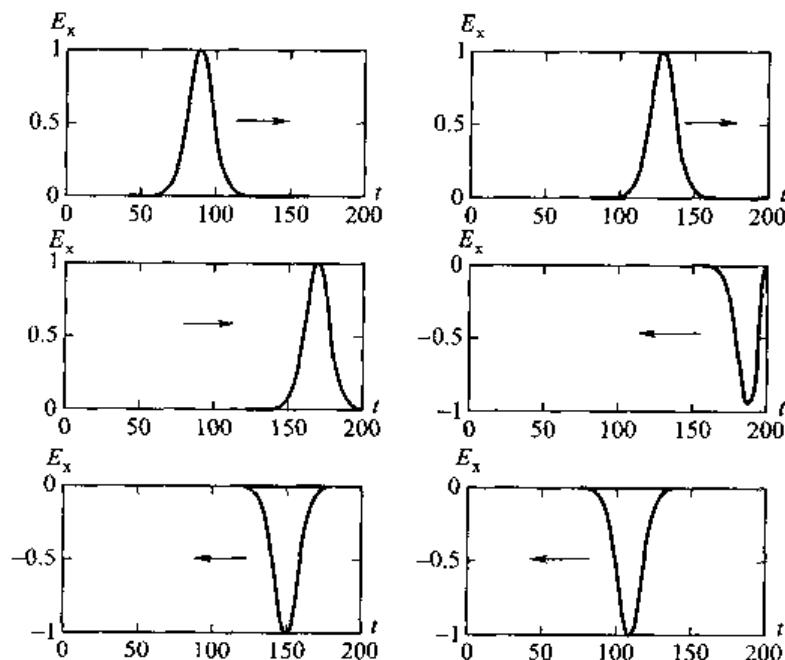


图 5-19-2  $E_x$  在  $t=0$  时刻以后每隔 40 个时间步的空间分布图

本例中,平面电磁波垂直照射到金属板表面并被反射的过程是一个开区域( $y \leq y_2$ )问题,但由于计算机的内存有限,数值方法只能模拟有限区域的电磁场行为。为此,必须人为地截断物理空间,分析一个有限空间的物理过程。解法 1 在  $y=y_0$  处设置边界条件  $E_x(y=y_0, t)=0$ ,这样不必顾及  $y < y_0$  区域的电磁波,而将求解区域限制在  $y_0 \leq y \leq y_2$  区间。

当模拟时间较长时,将会看到电磁波在计算区域右侧  $y=y_0$  处被再次反射。为了使电磁波在右侧边界得以无反射地通过,并向  $y=-\infty$  方向传播,更为一般的方法是在  $y=y_0$  处设置“吸收边界条件(ABC)”。一般来说,理想的吸收边界条件很难实现,但在一维情况可以做到。这是因为,当电磁波向  $y=-\infty$  方向传播时,若取  $\Delta y=c\Delta t$ ,  $y=y_0$  点的电场值等于  $y=y_0+\Delta y$  点在  $t-\Delta t$  时刻的电场值。即

$$E_x(y=y_0, t) = E_x(y=y_0+\Delta y, t-\Delta t)$$

本例的另一个特点是,电磁信号是作为初始条件加入模拟区间的。

[解法 2] 如果在作为散射目标的无限大金属板左侧划定一个区域( $y_0 \leq y \leq y_2$ ),该区域中的平面电磁波归根到底是通过计算区域右边界  $y=y_0$  进入的。因此,电磁信号还可以作为边界

条件加入模拟区间,此时的初始条件和边界条件为

$$E_x(y, t=0) = 0, y_0 \leq y \leq y_2 \quad (5-19-30)$$

$$H'_z\left(y, t=\frac{\Delta t}{2}\right) = 0, y_0 \leq y \leq y_2 \quad (5-19-31)$$

$$E_x(y=y_0, t=n\Delta t) = \exp\left(-\left(\frac{n\Delta t - n_0\Delta t}{N\Delta t}\right)^2\right) \quad (5-19-32)$$

$$E_x(y=y_2, t) = 0 \quad (5-19-33)$$

由图 5-19-3 可见,解法 2 不仅模拟了电磁波在金属板表面被反射的过程,还模拟了电磁场信号从左边界进入模拟区间的过程。由于使用了零初始条件,与解法 1 相比,解法 2 更为简单。但是当还希望进一步模拟电磁场信号从左边界射出模拟区间的过程时,这两种方法都有局限性。第三种方法可以突破这一局限。

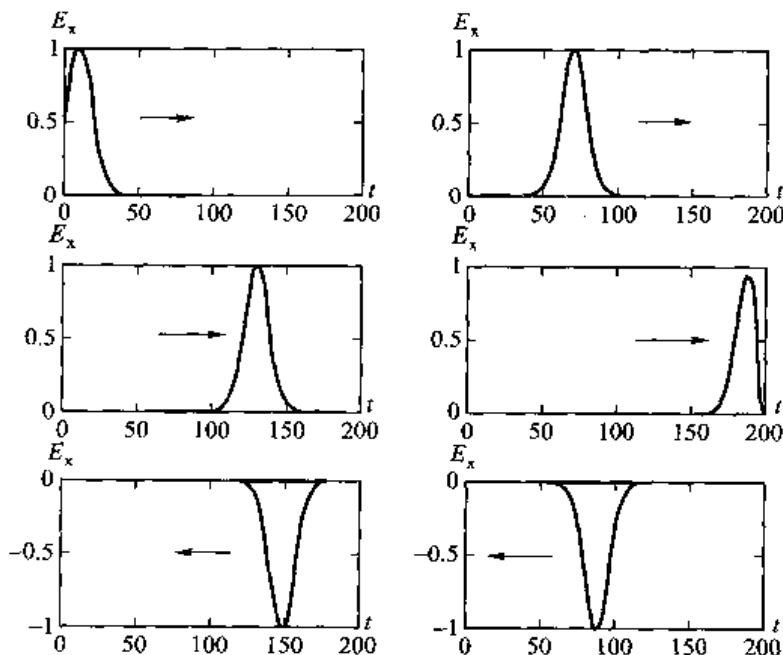


图 5-19-3  $E_x$  每隔 60 个时间步的空间分布图

[解法 3] 这里将模拟区域分为总场区( $50\Delta y \leq y \leq 199\Delta y$ )和散射场区( $0 \leq y < 50\Delta y$ )两部分,位于总场区的场分量表示相应位置上的总场,包括入射场和散射场;位于散射场区的场分量则仅表示散射场。假设有已知的沿  $y$  方向传播的正弦平面波。当计算  $y=50\Delta y$  点的电场分量(总场)时,要用到  $y=49.5\Delta y$  处总的磁场分量,这时要将该点已知的人射场分量加到散射场分量上;当计算  $y=49.5\Delta y$  点的磁场分量(散射场)时,要用到  $y=50\Delta y$  处的散射磁场分量,这时要将该点已知的人射场分量从总场中减去。这一方法被称为总场、散射场衔接条件。在散射场区域左侧  $y=0$  处,设置吸收边界条件。此时的初始条件和边界条件为

散射场区:

$$E_x(y, t=0) = 0, y_0 \leq y \leq y_1 \quad (5-19-34)$$

$$H'_z\left(y, t=\frac{\Delta t}{2}\right) = 0, y_0 \leq y \leq y_1 \quad (5-19-35)$$

$$E_x(y=y_0, t) = E_x(y=y_0 - \Delta y, t - \Delta t) \quad (5-19-36)$$

总场区：

$$E_x(y, t=0) = 0, y_1 \leqslant y < y_2 \quad (5-19-37)$$

$$H_z'(y, t = \frac{\Delta t}{2}) = 0, y_1 \leqslant y < y_2 \quad (5-19-38)$$

$$E_x(y=y_2, t) = 0 \quad (5-19-39)$$

由图 5-19-4 可见，平面电磁波入射场从衔接处出发，在无限大理想导电平面处反相反射后，沿负  $y$  方向射向无限远处，在总场区域形成驻波，在导电平面处为驻波波节；在散射场区域则为单向行波，在左侧截断边界处没有数值反射。

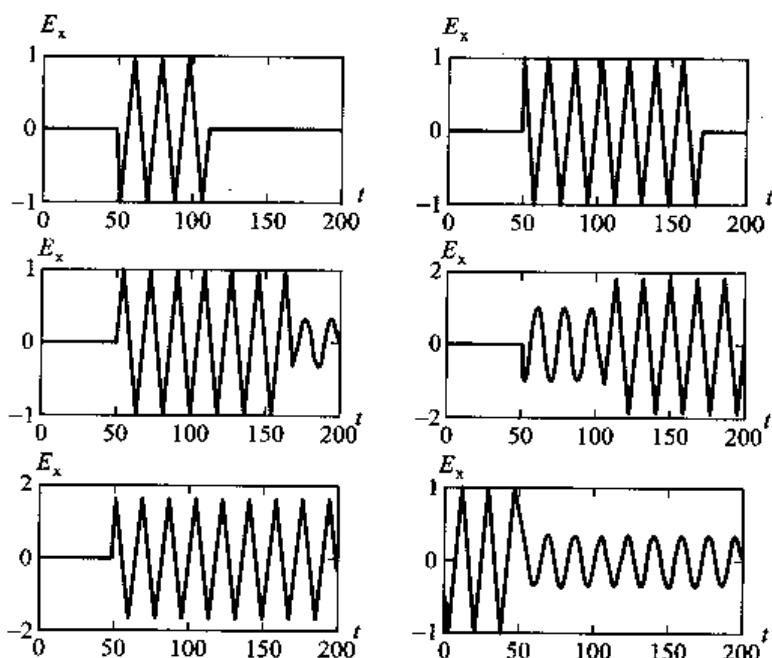


图 5-19-4  $E_x$  每隔 60 个时间步的空间分布图

以上三种解法概括了时域有限差分法的一些基本概念，如初始条件、边界条件、开区域问题吸收边界条件、散射问题中的总场散射场衔接条件等，电磁信号分别使用了初始条件、边界条件、衔接条件三种方式加入模拟区域。为简单起见，在本例的模拟区域没有物理意义上的激励源。有必要指出，用时域有限差分法模拟物理激励源构成了时域有限差分法研究的一个重要问题，本节后面还要涉及。

### 3. 二维时域有限差分法

考虑二维 TE 模，场分量在平面网格上的位置分布如图 5-19-5 所示。

由图 5-19-5 可见， $E_x, E_y$  分量分别位于一个个矩形网格四边的中点， $H_z$  分量位于矩形网

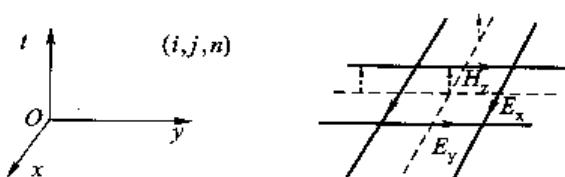


图 5-19-5 二维 TE 模场分量在平面网格上的位置分布

格的中心。设  $\Delta t$  为时间增量,  $\Delta x, \Delta y$  分别为沿  $x, y$  方向的空间网格尺寸。与一维情况类似, 将式(5-19-5)中所有的导数项代以其中心差分近似即可得相应的时域有限差分格式

$$\frac{1}{\Delta t} (E_x|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - E_x|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\epsilon \Delta y} (H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - H_z|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n) \quad (5-19-40)$$

$$\frac{1}{\Delta t} (E_y|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{\mu \Delta x} (H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - H_z|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n) \quad (5-19-41)$$

$$\frac{1}{\Delta t} (H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - H_z|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n) = -\frac{1}{\mu \Delta x} (E_y|_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{\mu \Delta y} (E_x|_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+\frac{1}{2}} - E_x|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (5-19-42)$$

注意, 以上公式中磁流和电流项均被略掉, 但有时这些项必须考虑。类似于式(5-19-18)和式(5-19-19)的迭代公式为

$$E_x|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = E_x|_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} (H_z|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - H_z|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n) \quad (5-19-43)$$

$$E_y|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = E_y|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} (H_z|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n) \quad (5-19-44)$$

$$H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} = H_z|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} (E_y|_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} (E_x|_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+\frac{1}{2}} - E_x|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (5-19-45)$$

在图 5-19-5 中, 将坐标系的第三维坐标标示为时间  $t$  轴, 以便于设想差分迭代过程。由于电场分量和磁场分量相差半个时间步, 因此可以认为表示磁场分量的虚线网格和表示电场分量的实线网格并不在同一层次上, 而是沿时间  $t$  轴方向错开  $\frac{\Delta t}{2}$ , 场分量更新就是沿时间  $t$  轴一层一层往上迭代。

二维 TM 模情况类似。

## 二、三维时域有限差分法

有了上述概念, 可正式引入三维时域有限差分法。

写出旋度算子的矢量分量以获得直角坐标系下的六个标量方程

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \sigma^* \vec{H} \quad (5-19-46)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \quad (5-19-47)$$

在包括各向同性、单轴各向异性和双轴各向异性在内的一般媒质中, 在直角坐标系中将式(5-19-46)和式(5-19-47)展开可得

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu_x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_x^* H_x \right) \quad (5-19-48)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_y} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma_y^* H_y \right) \quad (5-19-49)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu_s} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_z^* H_z \right) \quad (5-19-50)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_s} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_x E_x \right) \quad (5-19-51)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_s} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_y E_y \right) \quad (5-19-52)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_s} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_z E_z \right) \quad (5-19-53)$$

上述六个耦合的偏微分方程形成了时域有限差分法求解电磁波与物体相互作用的算法基础。为了将式(5-19-48)~式(5-19-53)这6个标量方程中的各电磁场分量在空间和时间上离散,K. S. Yee 将有限计算空间在直角坐标系下按立方体分割(分割计算空间所得的网格也称为 Yee 网格),并把电磁场的6个分量配置在网格的特殊位置上。如图 5-19-6 所示,电场分量位于网格棱边中心并且平行于棱边,每个电场分量环绕有4个磁场分量;磁场分量位于网格表面中心并且垂直于这个面,每个磁场分量环绕有4个电场分量。电场和磁场分量在任何方向上始终相差半个网格步长,电磁场通过电场和磁场的耦合传播。在时间离散上,K. S. Yee 将电场分量与磁场分量相互错开半个时间步长,电场分量在整数时间步时刻取样,而磁场分量在半时间步时刻取样。这种电磁场量的空间与时间配置方法是实现时域有限差分法的关键。时域有限差分法把所研究的电磁问题作为初值问题,初始时刻模拟区域内的电磁场为0,在源激励下,以蛙跳的方式迭代时域有限差分方程组,随着时间的推进,数值上近似地模拟实际连续的电磁波的传播及其与媒质间的相互作用。Yee 对时间导数和空间导数采用中心差分格式近似,这样程序简单,而且具有二阶精度。与其他方法相比,时域有限差分法是求解 Maxwell 微分方程的直接时域方法,不需要求解积分方程和矩阵方程。

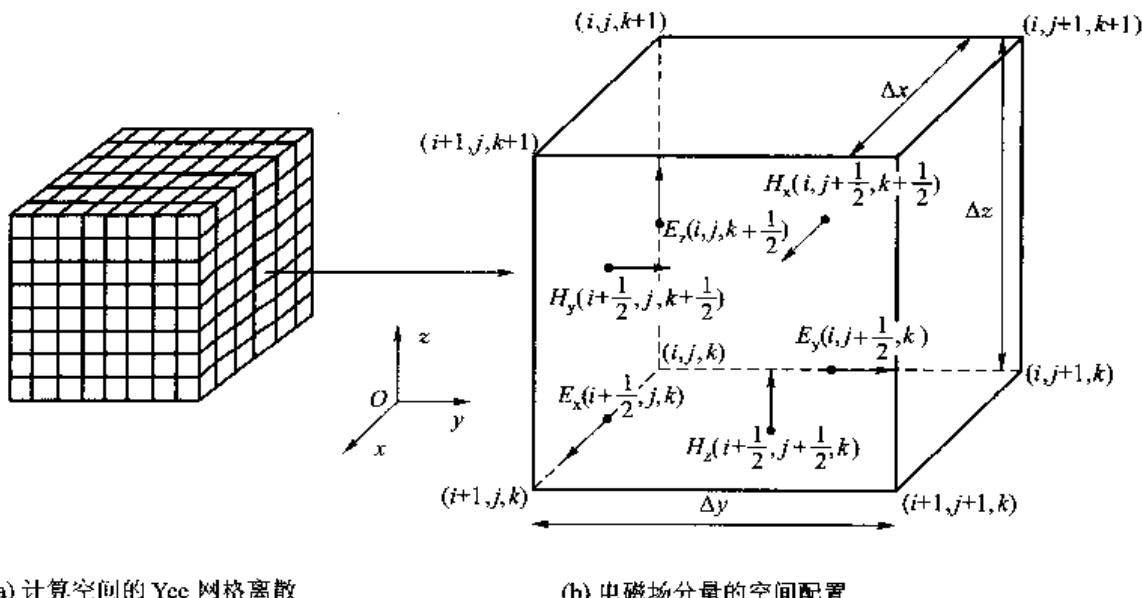


图 5-19-6 三维空间内 Yee 网格的划分

对空间点和时空函数用一组记号表示:  $E_x(i, j, k) = E_x(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, \Delta t)$ , 使用此标记, 可以得到三维 Maxwell 旋度方程的近似表达形式

$$H_x^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{1 - \frac{\sigma_x^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu_x(i, j, k)}}{1 + \frac{\sigma_x^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu_x(i, j, k)}} H_x^{n-1/2}(i, j, k) + \frac{\Delta t}{(1 + \frac{\sigma_x^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu_x(i, j, k)})\mu_x(i, j, k)} \cdot \\ \left[ \frac{E_y(i, j, k+1) - E_y(i, j, k)}{\Delta z} - \frac{E_z(i, j+1, k) - E_z(i, j, k)}{\Delta y} \right] \quad (5-19-54)$$

$$H_y^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{1 - \frac{\sigma_y^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu_y(i, j, k)}}{1 + \frac{\sigma_y^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu_y(i, j, k)}} H_y^{n-1/2}(i, j, k) + \frac{\Delta t}{(1 + \frac{\sigma_y^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu_y(i, j, k)})\mu_y(i, j, k)} \cdot \\ \left[ \frac{E_z(i+1, j, k) - E_z(i, j, k)}{\Delta x} - \frac{E_x(i, j, k+1) - E_x(i, j, k)}{\Delta z} \right] \quad (5-19-55)$$

$$H_z^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{1 - \frac{\sigma_z^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu_z(i, j, k)}}{1 + \frac{\sigma_z^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu_z(i, j, k)}} H_z^{n-1/2}(i, j, k) + \frac{\Delta t}{(1 + \frac{\sigma_z^*(i, j, k)\Delta t}{2\mu_z(i, j, k)})\mu_z(i, j, k)} \cdot \\ \left[ \frac{E_x(i, j+1, k) - E_x(i, j, k)}{\Delta y} - \frac{E_y(i+1, j, k) - E_y(i, j, k)}{\Delta x} \right] \quad (5-19-56)$$

$$E_x^{n+1}(i, j, k) = \frac{1 - \frac{\sigma_x(i, j, k)\Delta t}{2\epsilon_x(i, j, k)}}{1 + \frac{\sigma_x(i, j, k)\Delta t}{2\epsilon_x(i, j, k)}} E_x^n(i, j, k) + \frac{\Delta t}{(1 + \frac{\sigma_x(i, j, k)\Delta t}{2\epsilon_x(i, j, k)})\epsilon_x(i, j, k)} \cdot \\ \left[ \frac{H_z^{n+1/2}(i, j, k) - H_z^{n-1/2}(i, j-1, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+1/2}(i, j, k) - H_y^{n-1/2}(i, j, k-1)}{\Delta z} \right] \quad (5-19-57)$$

$$E_y^{n+1}(i, j, k) = \frac{1 - \frac{\sigma_y(i, j, k)\Delta t}{2\epsilon_y(i, j, k)}}{1 + \frac{\sigma_y(i, j, k)\Delta t}{2\epsilon_y(i, j, k)}} E_y^n(i, j, k) + \frac{\Delta t}{(1 + \frac{\sigma_y(i, j, k)\Delta t}{2\epsilon_y(i, j, k)})\epsilon_y(i, j, k)} \cdot \\ \left[ \frac{H_x^{n+1/2}(i, j, k) - H_x^{n-1/2}(i, j, k-1)}{\Delta z} - \frac{H_z^{n+1/2}(i, j, k) - H_z^{n-1/2}(i-1, j, k)}{\Delta x} \right] \quad (5-19-58)$$

$$E_z^{n+1}(i, j, k) = \frac{1 - \frac{\sigma_z(i, j, k)\Delta t}{2\epsilon_z(i, j, k)}}{1 + \frac{\sigma_z(i, j, k)\Delta t}{2\epsilon_z(i, j, k)}} E_z^n(i, j, k) + \frac{\Delta t}{(1 + \frac{\sigma_z(i, j, k)\Delta t}{2\epsilon_z(i, j, k)})\epsilon_z(i, j, k)} \cdot \\ \left[ \frac{H_y^{n+1/2}(i, j, k) - H_y^{n-1/2}(i-1, j, k)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+1/2}(i, j, k) - H_x^{n-1/2}(i, j-1, k)}{\Delta y} \right] \quad (5-19-59)$$

时域有限差分法的流程图如图 5-19-7 所示。

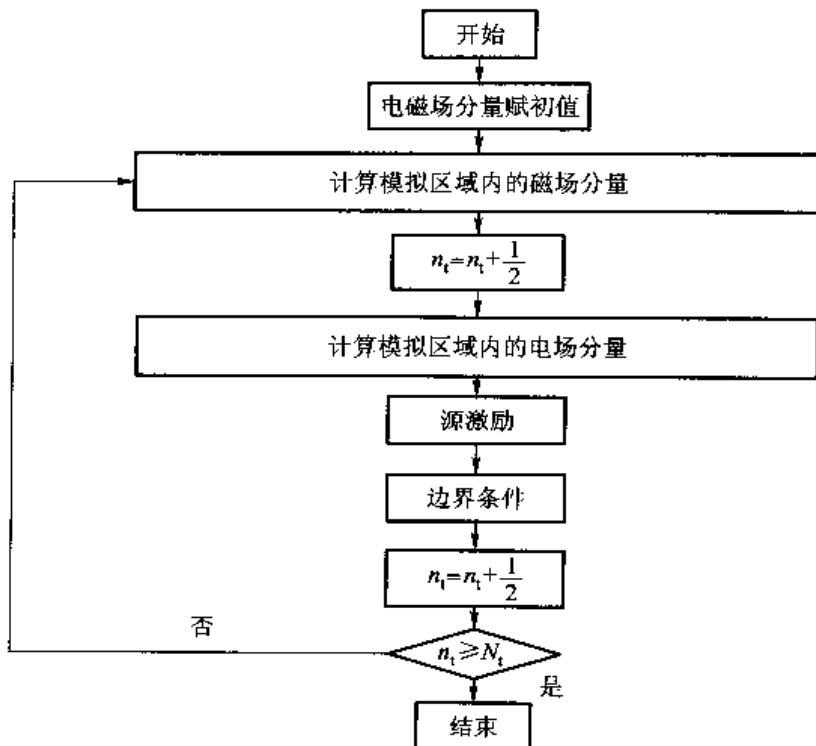


图 5-19-7 时域有限差分法流程图

### 三、离散原则

任意数值离散方法都存在离散度的选取原则,而对于时域有限差分法这样一种时域方法,更存在空间离散化和时间离散化两种原则。

离散间隔越小,差分近似的偏差越小;但是为了减少计算负担,又希望离散间隔尽可能的大。下面来讨论离散间隔的选取问题。

#### 1. 时域有限差分法的数值稳定性

根据上述时域有限差分迭代公式,虽然每一次迭代都有一个理论上的精确解,但由于计算机只能使用有限长度的数字计算,多余的数字不得不被截去,由此引入的误差称为截断误差或舍入误差,每进行一次数值计算,就会引入一次舍入误差。这些误差会不会积累起来越来越大,这反映了计算格式的稳定性。只有确保算法是稳定的,才有可能进行一次有意义的计算。下面来推导时域有限差分迭代格式的稳定性判别式。

考虑到式(5-19-2),并令  $M=0, \vec{J}=0, \vec{H}'=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\vec{H}$ , 式(5-19-1)可以表示为

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t} \quad (5-19-60)$$

$$\nabla \times \vec{H}' = \frac{1}{v} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5-19-61)$$

其中,  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 。将两式合并,令  $\vec{V} = \vec{H}' + j\vec{E}$ , 得

$$\mathbf{j} \nabla \times \vec{V} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} \quad (5-19-62)$$

设

$$\vec{V} = \vec{V}_0 \exp [j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)] \quad (5-19-63)$$

可得如下本征值问题

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{V} = -j\omega \vec{V} \quad (5-19-64)$$

$$jv \nabla \times \vec{V} = -j\omega \vec{V} \quad (5-19-65)$$

用中心差分近似代替式(5-19-64)中的对时间的偏导数

$$\frac{\vec{V}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{V}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -j\omega \vec{V}^n \quad (5-19-66)$$

任取  $\vec{V}$  的一个分量, 定义

$$q = \vec{V}_s^{n+\frac{1}{2}} / \vec{V}_s^n = \vec{V}_s^n / \vec{V}_s^{n-\frac{1}{2}} \quad (5-19-67)$$

为解的增长因子, 代入式(5-19-66)可得

$$q = -\frac{j\omega \Delta t}{2} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)^2} \quad (5-19-68)$$

数值计算的稳定性要求  $|q| \leq 1$ , 因而

$$\frac{\omega \Delta t}{2} \leq 1 \quad (5-19-69)$$

对于 Maxwell 方程的单色平面波解式(5-19-63), 采用式(5-19-14)的差分近似, 略去高次项可得

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = \frac{j2 \sin(k_s \Delta s/2)}{\Delta s} \vec{V} \quad s = x, y, z \quad (5-19-70)$$

出于以上考虑, 由式(5-19-65)可得

$$-\frac{2v \sin(k_x \Delta y/2)}{\Delta y} V_z + \frac{2v \sin(k_z \Delta z/2)}{\Delta z} V_y = -j\omega V_x \quad (5-19-71)$$

$$-\frac{2v \sin(k_z \Delta z/2)}{\Delta z} V_x + \frac{2v \sin(k_x \Delta x/2)}{\Delta x} V_z = -j\omega V_y \quad (5-19-72)$$

$$-\frac{2v \sin(k_x \Delta x/2)}{\Delta x} V_y + \frac{2v \sin(k_y \Delta y/2)}{\Delta y} V_x = -j\omega V_z \quad (5-19-73)$$

上式是关于  $V_x, V_y, V_z$  的齐次线性方程组, 该方程组有解的充要条件是其系数行列式等于 0, 由此可得

$$\omega^2 = 4v^2 \left( \frac{\sin^2(k_x \Delta x/2)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(k_y \Delta y/2)}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2(k_z \Delta z/2)}{\Delta z^2} \right) \quad (5-19-74)$$

解得  $\omega$ , 代入式(5-19-69), 可得

$$\frac{\omega \Delta t}{2} = v \Delta t \sqrt{\frac{\sin^2(k_x \Delta x/2)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(k_y \Delta y/2)}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2(k_z \Delta z/2)}{\Delta z^2}} \leq 1 \quad (5-19-75)$$

为使上式对于  $k_x, k_y, k_z$  的任意值均成立, 要求

$$v\Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \leq 1 \quad (5-19-76)$$

亦即

$$v\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \quad (5-19-77)$$

式(5-19-77)给出了时间离散间隔和空间离散间隔之间应该满足的关系,称为Courant-Friedrich-Levy(CFL)稳定性条件。如果时间步尺寸大于以上限制,时域有限差分方案是不稳定的,随着时间步的推进,数值计算中的截断误差将无限制地增长。如果已知空间离散间隔,式(5-19-77)给出了时间离散间隔的选取范围。

如果空间三个方向上的离散间隔相等,即  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ , CFL 稳定性条件简化为

$$v\Delta t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \quad (5-19-78)$$

二维情况下

$$v\Delta t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \quad (5-19-79)$$

一维情况下

$$v\Delta t \leq \Delta \quad (5-19-80)$$

由此可见,例1中取二者的数量关系为  $v\Delta t = \Delta$ ,符合 CFL 稳定性条件。

## 2. 数值色散关系

考虑 Maxwell 方程的单色平面波解式(5-19-63),采用类似式(5-19-70)的差分近似可得

$$\frac{\partial}{\partial t} V = -j \frac{2 \sin(\omega \Delta t / 2)}{\Delta t} V \quad (5-19-81)$$

把式(5-19-81)和式(5-19-70)代入式(5-19-62)可得

$$-\frac{2v \sin(k_y \Delta y / 2)}{\Delta y} V_x + \frac{2v \sin(k_z \Delta z / 2)}{\Delta z} V_y = -j \frac{2 \sin(\omega \Delta t / 2)}{\Delta t} V_x \quad (5-19-82)$$

$$-\frac{2v \sin(k_z \Delta z / 2)}{\Delta z} V_x + \frac{2v \sin(k_x \Delta x / 2)}{\Delta x} V_z = -j \frac{2 \sin(\omega \Delta t / 2)}{\Delta t} V_y \quad (5-19-83)$$

$$-\frac{2v \sin(k_x \Delta x / 2)}{\Delta x} V_y + \frac{2v \sin(k_y \Delta y / 2)}{\Delta y} V_x = -j \frac{2 \sin(\omega \Delta t / 2)}{\Delta t} V_z \quad (5-19-84)$$

这又是一个关于  $V_x, V_y, V_z$  的齐次线性方程组,该方程组有解的充要条件是其系数行列式等于 0,由此可得

$$\frac{4 \sin^2(\omega \Delta t / 2)}{\Delta t^2} = 4v^2 \left( \frac{\sin^2(k_x \Delta x / 2)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(k_y \Delta y / 2)}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2(k_z \Delta z / 2)}{\Delta z^2} \right) \quad (5-19-85)$$

或

$$\frac{\sin^2(\omega \Delta t / 2)}{(v \Delta t / 2)^2} = \frac{\sin^2(k_x \Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)^2} + \frac{\sin^2(k_y \Delta y / 2)}{(\Delta y / 2)^2} + \frac{\sin^2(k_z \Delta z / 2)}{(\Delta z / 2)^2} \quad (5-19-86)$$

这是时域有限差分法的数值色散关系。当  $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$  趋于 0 时,其极限形式为

$$\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (5-19-87)$$

这正是均匀无耗媒质中单色平面波的解析色散关系。这二者的差别反映了时域有限差分法的数值误差。时空离散间隔越小，数值解越接近解析解，因而数值结果越准确。

有了数值色散关系就可以定量地研究数值误差的大小。为简单起见，这里以二维情况为例，令  $\Delta x = \Delta y = \Delta, \Delta z = \infty$ 。设平面电磁波沿着与  $x$  轴的夹角为  $\theta$  的方向传播，将  $k_x = k \cos \theta, k_y = k \sin \theta, k = \frac{\omega}{v_p}$  代入式(5-19-86)可得

$$\left(\frac{\Delta}{v \Delta t}\right)^2 \sin^2(\omega \Delta t / 2) = \sin^2\left(\frac{\omega}{v_p} \cos \theta \Delta / 2\right) + \sin^2\left(\frac{\omega}{v_p} \sin \theta \Delta / 2\right) \quad (5-19-88)$$

对于已知频率的单色平面波( $\omega$ )，若已知空间离散间隔  $\Delta$  和时间离散间隔  $\Delta t$ ，运用 Newton 法即可以求出数值电磁波在不同方向的相速度( $v_p$ )，如图 5-19-8 所示。

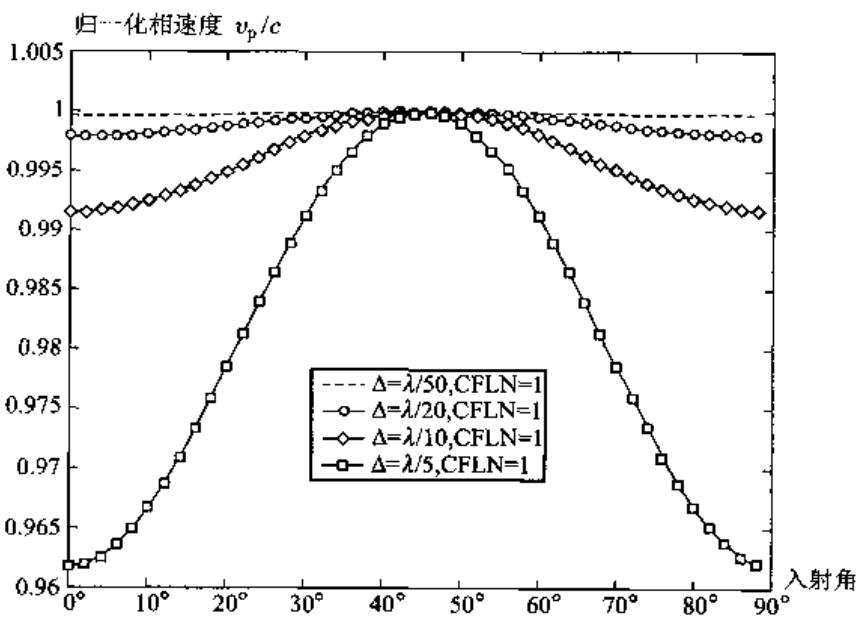


图 5-19-8 时域有限差分数值相速度

考虑到

$$\omega \Delta = 2\pi f \Delta = 2\pi v \frac{\Delta}{\lambda} \quad (5-19-89)$$

这里并没有分别指定电磁波的角频率  $\omega$  和空间离散间隔  $\Delta$ ，而是指定  $\Delta$  与波长( $\lambda$ )的相对关系。设

$$v \Delta t_0 = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \quad (5-19-90)$$

定义

$$CFLN = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \quad (5-19-91)$$

$CFLN=1$  表示时间离散间隔  $\Delta t$  取 CFL 稳定性关系许可的最大值。

由图 5-19-8 可见：①数值波在不同的角度传播速度不同，这种现象称为数值各向异性。

注意,在 $\theta=45^\circ$ 方向上,归一化相速度精确等于1,即 $v_p=v$ ,这是由于这里取CFLN=1;事实上,如果取CFLN<1,则 $v_p$ 总小于理论值,即 $v_p < v$ 。② $\frac{\Delta}{\lambda}$ 越小, $\frac{v_p}{v}$ 越接近于1,在CFLN=1的条件下,当 $\Delta=\lambda/10$ , $v_p$ 的最大误差为0.85%(在 $\theta=0^\circ$ 或 $\theta=90^\circ$ 方向上),当 $\Delta=\lambda/20$ , $v_p$ 的最大误差为0.21%。对于一般的计算,1%以下的误差是可以接受的。③在同一次时域有限差分计算中,电磁信号(如Causs脉冲)通常包含不同的频率成分,频率越高,即 $\frac{\Delta}{\lambda}$ 越大,则数值相速越小,这一现象称为数值色散。以上三条概括了时域有限差分法的数值色散误差的特点。

值得一提的是,在一维情况下当取 $\Delta t = \Delta/v$ 时,由式(5-19-86)可知,归一化相速度精确等于1,此时数值解与精确解相吻合,所以,有的作者称 $\Delta t = \Delta/v$ 为魔时间步。

在以上稳定性条件和数值色散关系的基础上,来总结一下时域有限差分法离散间隔的确定原则。①时间离散间隔的选取依据是式(5-19-77)表示的CFL稳定性条件,在满足式(5-19-77)的条件下,为了使色散误差尽可能的小, $\Delta t$ 的取值应尽可能的大。②空间离散间隔的确定要考虑感兴趣电磁信号的最短波长 $\lambda_{\min}$ ,设

$$\Delta_{\max} = \max \{ \Delta x, \Delta y, \Delta z \} \quad (5-19-92)$$

在CFLN等于1或接近1的条件下

$$\Delta_{\max} \leq \lambda_{\min}/10 \quad (5-19-93)$$

可以满足一般的精度要求。当然这只是一个参考,实际计算中有时取

$$\Delta_{\max} \leq \lambda_{\min}/20 \quad (5-19-94)$$

这要视具体情况而定。

#### 四、时域有限差分法的吸收边界条件

由于计算机存储容量的限制,时域有限差分法模拟的问题空间必须是有限的,要求它能将被研究的模型“装入”,并实施时域有限差分法的运算过程。为了让这种有限空间与无限空间等效,需对有限空间的周围边界进行处理,使得向边界面行进的波在边界处保持“外向行进”的特征,以模拟电磁波无反射地通过截断边界,向无限远处传播。因此,时域有限差分法中的关键问题之一是如何截断开域问题的计算区域,即设置吸收边界条件(Absorb Boundary Condition,简称ABC)。理想的吸收边界条件是难以实现的,通常只能采用近似的吸收边界条件。对于近似吸收边界条件,要求:

- ①能够模拟向外传播的波。
- ②引入的反射应足够小,对计算结果的影响可忽略。
- ③保证算法稳定。

基于此,通常可将主要的吸收边界分为两大类:一类是由微分方程推导出的吸收边界,另一类是由吸收媒质构成的吸收边界。Mur(穆尔)提出的Mur吸收边界属于第一类吸收边界,1994年Berenger(贝伦格)提出的理想匹配层(Perfectly Matched Layer,简称PML)与1996年Gedney(格德尼)提出的单轴各向异性完全匹配层(Uniaxial PML,简称UPML)属于第二类吸收边界。

### 1. Mur 吸收边界条件

#### (1) 单向波动方程

Engquist(恩奎斯特)和 Majda(迈达)的单向波动方程理论是 Mur 吸收边界的基础。他们的理论可以用偏导数算子的因式分解来解释。以二维波动方程为例

$$Lf=0 \quad (5-19-95)$$

其中,  $f$  可为电场分量, 也可为磁场分量; 在直角坐标系中, 偏微分算子  $L$  为

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv D_x^2 + D_y^2 - \frac{1}{v^2} D_t^2 \quad (5-19-96)$$

利用算子的因式分解, 可以得到

$$Lf = L^+ L^- f \quad (5-19-97)$$

式中

$$L^\pm \equiv D_x \pm \sqrt{\frac{D_t^2}{v^2} - D_y^2} \quad (5-19-98)$$

用  $f^-$  表示从  $x > 0$  区域以任意角度入射到  $x=0$  平面上的波,  $f^+$  表示相反方向入射的波。可以证明:  $L^- f^- = 0$ , 故称  $L^-$  为左行波算子; 同理, 由于  $L^+ f^+ = 0$ , 故称  $L^+$  为右行波算子。这样一来, 可以通过求解算子方程  $L^- f = 0$  在  $x=0$  平面上的解, 来求得左行波  $f = f^-$  在  $x=0$  平面上的值, 以此作为 Maxwell 方程在  $x > 0$  区域的边界值。这里,  $L^- f = 0$  和  $L^+ f = 0$  即所谓的单向波动方程。

式(5-19-98)含有算子的开方运算, 这类算符的含义为其 Taylor 级数展开。将该式改写为

$$L^\pm \equiv D_x \pm \frac{D_t}{v} \sqrt{1 - s^2} \quad (5-19-99)$$

式中

$$s = \frac{D_y}{(D_x/v)} \quad (5-19-100)$$

利用 Taylor 级数展开

$$\sqrt{1 - s^2} = 1 - \frac{1}{2} s^2 + \dots \quad (5-19-101)$$

取上式的第一项作为一阶近似, 可得

$$L^\pm = D_x \pm \frac{1}{v} D_t \quad (5-19-102)$$

代入式(5-19-95), 可得

$$\frac{\partial}{\partial x} f \pm \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} f = 0 \quad (5-19-103)$$

这是一个单向波动方程, 其解为沿  $\pm x$  方向传播的平面波。

若取式(5-19-101)的两项作为二阶近似, 可得

$$L^\pm = D_x \pm \left( \frac{D_t}{v} - \frac{v D_y^2}{2 D_x} \right) \quad (5-19-104)$$

代入式(5-19-95), 将  $L^\pm f = 0$  两边同时乘以  $D_t$ , 则有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \left( \frac{1}{v} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{v}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (5-19-105)$$

由此可以求得左行波或右行波在计算区域左边界或右边界上的二阶近似解。

显然,在垂直入射情况下,式(5-19-103)和式(5-19-105)都可以求得单向波在左、右侧边界上的精确解。理论分析表明,当入射角小于20°时使用式(5-19-103),当入射角小于45°时使用式(5-19-105),所得解中的反射误差与入射波之比均小于3%,在很多情况下,这样的精度可以满足计算要求。

## (2) Mur 有限差分方案

仍以二维情况为例,设波从 $x > 0$  区域入射到 $x = 0$  的边界,用矩形网格剖分计算区域,设 $f|_{0,j}^n$  表示位于 $x = 0$  处的电磁场切向分量。将式(5-19-105)所示的左行波单向波动方程中的各项在 $(\frac{1}{2}\Delta x, j\Delta y)$  处、 $n\Delta t$  时刻做中心差分近似

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}|_{1/2,j}^n &= \frac{1}{2\Delta t} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}|_{1/2,j}^{n+1} - \frac{\partial f}{\partial x}|_{1/2,j}^{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \left[ \frac{f_{1,j}^{n+1} - f_{0,j}^{n-1}}{\Delta x} - \frac{f_{1,j}^n - f_{0,j}^{n-1}}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (5-19-106)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}|_{1/2,j}^n &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}|_{0,j}^n + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}|_{1,j}^n \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{f|_{0,j}^{n+1} - 2f|_{0,j}^n + f|_{0,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \frac{f|_{1,j}^{n+1} - 2f|_{1,j}^n + f|_{1,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right] \end{aligned} \quad (5-19-107)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{1/2,j}^n &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{0,j}^n + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{1,j}^n \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{f|_{0,j-1}^n - 2f|_{0,j}^n + f|_{0,j+1}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{f|_{1,j+1}^n - 2f|_{1,j}^n + f|_{1,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] \end{aligned} \quad (5-19-108)$$

将式(5-19-106)、式(5-19-107)、式(5-19-108)代入式(5-19-105),即得 Mur 吸收边界条件的差分迭代格式

$$\begin{aligned} f|_{0,j}^{n+1} &= -f|_{1,j}^{n-1} + \frac{v\Delta t - \Delta x}{v\Delta t + \Delta x} (f|_{1,j}^{n-1} + f|_{0,j}^{n-1}) + \frac{2\Delta x}{v\Delta t + \Delta x} (f|_{0,j}^n + f|_{1,j}^n) \\ &\quad + \frac{(v\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (v\Delta t + \Delta x)} \left[ \frac{f|_{0,j-1}^n - 2f|_{0,j}^n + f|_{0,j+1}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{f|_{1,j+1}^n - 2f|_{1,j}^n + f|_{1,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5-19-109)$$

略去式(5-19-109)中的 $y$  差分项,即最后一项可得一阶近似的 Mur 吸收边界条件差分迭代格式。以上吸收边界条件可用于二维 TE 模,也可用于二维 TM 模,位于截断边界上的场分量可以垂直于 $z$  轴,也可以平行于 $z$  轴,但是由式(5-19-109)不能得到角域边界上的场分量,这一问题可以通过假设平面波从散射中心射向相应角域来解决,这实际上是单向波动方程的一阶近似。

必须指出,单向波动方程的差分方案不是唯一的,但不论哪一种差分方案,就其精度而言,都有共同的理论上限。上面的方法虽然以二维情况为例,但同样适用于三维问题。

## 2. 理想匹配层

通常希望时域有限差分法能够模拟的吸收精度与无反射暗室能模拟的吸收精度相比较,以便理论值可以与测量结果相比较。一般暗室可以获得低于-70 dB的有效无反射区。注意,低于-70 dB 的动态范围大致相当于能够把计算噪声抑制到振幅不大于入射波振幅的  $10^{-4}$ 。对于任何计算电磁学模型,这都是非常困难的。显然,没有吸收边界条件理论的新进展,这一点是无法做到的。

Berenger 的“理想匹配层”法正是这种新进展。1994 年 Berenger 对于二维时域有限差分网格提出的这种方法获得了比以前任何方法都要好的吸收特性。这种方法属于媒质吸收边界条件,其根本是构造了一种非物理的吸收媒质与时域有限差分网格外部边界相连,该吸收媒质具有与外向散射波的人射角和频率均无关的波阻抗。

只考虑二维 TE 模情况,对于二维 TM 模和三维情况,可采用类似方法进行分析。有耗媒质中二维 TE 模情况的场量  $E_x, E_y, H_z$  满足的 Maxwell 方程为

$$\begin{cases} \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \quad (5-19-110)$$

式中,  $\sigma$  和  $\sigma^*$  分别表示自由空间中的电导率和磁损耗。

如果将满足式(5-19-110)的有耗媒质层加在时域有限差分网格外边界的外层,设平面波沿  $x$  方向传播,则  $E_x=0, \frac{\partial}{\partial y}=0$ , 式(5-19-110)变为

$$\begin{cases} \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \quad (5-19-111)$$

如果

$$\frac{\sigma^*}{\mu_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (5-19-112)$$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} E_y = -c \frac{\partial (\eta H_z)}{\partial x} \\ \frac{\partial (\eta H_z)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} (\eta H_z) = -c \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \quad (5-19-113)$$

式中,  $c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ 、 $\eta=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$  分别为自由空间中的光速和波阻抗。于是,  $E_y=\eta H_z$ , 可见, 有耗空间媒质的波阻抗就等于无耗空间的波阻抗, 所以当平面波垂直穿过真空和有耗空间媒质的交界面

时将不会发生反射。但是,当斜入射时,反射将增加。所以,这样构造的吸收边界条件其总体吸收特性最好也不过与 Mur 吸收边界的量级相同。

Berenger 为了引入规定损耗及阻抗匹配的新自由度,将  $H_z$  分裂为两个分量  $H_{zx}$  和  $H_{zy}$ ,即

$$H_z = H_{zx} + H_{zy} \quad (5-19-114)$$

同时引入了新的电导率  $\sigma_x, \sigma_y$  和磁损耗  $\sigma_x^*, \sigma_y^*$ ,并规定 TE 模情形的 4 个场分量(而不是通常的 3 个)由下列方程耦合在一起:

$$\begin{cases} \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \\ \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y = -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \\ \mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{cases} \quad (5-19-115)$$

换句话说,Berenger 构造了一种非物理媒质(称为 PML 媒质),在该媒质中场满足的方程为式(5-19-115)(称为修正 Maxwell 方程)。而这些场分量中电场分量与时域有限差分网格的自由空间中的电场分量一致,磁场分量用式(5-19-114)相联系。可以认为,式(5-19-115)(称为 PML 公式)代表了通常物理媒质的推广。

这里提出修正 Maxwell 方程的一组试探解,考虑如下平面波在 PML 媒质中传播。令电场与  $y$  轴交角为  $\phi (-180^\circ \leq \phi \leq 180^\circ)$ ,则

$$\begin{cases} E_x = E_0 \sin \phi e^{j\omega(t-\alpha x - \beta y)} \\ E_y = E_0 \cos \phi e^{+j\omega(t-\alpha x - \beta y)} \\ H_{zx} = H_{zx0} e^{j\omega(t-\alpha x - \beta y)} \\ H_{zy} = H_{zy0} e^{j\omega(t-\alpha x - \beta y)} \end{cases} \quad (5-19-116)$$

设  $E_0$  已知(与激励大小有关),则式(5-19-116)中包含 4 个待定量  $\alpha, \beta, H_{zx0}, H_{zy0}$ 。将式(5-19-116)代入式(5-19-115),则

$$\begin{cases} -\epsilon_0 E_0 \sin \phi + j \frac{\sigma_y}{\omega} E_0 \sin \phi = \beta (H_{zx0} + H_{zy0}) \\ \epsilon_0 E_0 \cos \phi - j \frac{\sigma_x}{\omega} E_0 \cos \phi = \alpha (H_{zx0} + H_{zy0}) \\ \mu_0 H_{zx0} - j \frac{\sigma_x^*}{\omega} E_0 \cos \phi = \alpha E_0 \cos \phi \\ \mu_0 H_{zy0} - j \frac{\sigma_y^*}{\omega} E_0 \sin \phi = -\beta E_0 \sin \phi \end{cases} \quad (5-19-117)$$

从方程组(5-19-117)的后两个方程中提取  $H_{zx0}$  和  $H_{zy0}$ ,然后分别代入该方程组的前两个方程中,得

$$-\mu_0 \epsilon_0 \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \epsilon_0}\right) \sin \phi = \beta \left( \frac{\alpha \cos \phi}{1 - j \sigma_x^* / \omega \mu_0} - \frac{\beta \sin \phi}{1 - j \sigma_y^* / \omega \mu_0} \right) \quad (5-19-118)$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_0}\right) \cos \phi = \alpha \left( \frac{\alpha \cos \phi}{1 - j \sigma_x^* / \omega \mu_0} - \frac{\beta \sin \phi}{1 - j \sigma_y^* / \omega \mu_0} \right) \quad (5-19-119)$$

两式相除,得

$$\frac{\beta}{\alpha} = - \frac{\sin \phi (1 - j \sigma_y / \omega \epsilon_0)}{\cos \phi (1 - j \sigma_x / \omega \epsilon_0)} \quad (5-19-120)$$

然后由式(5-19-120)和式(5-19-119)可求得  $\alpha^2$ , 由式(5-19-120)和式(5-19-118)可求得  $\beta^2$ 。考虑到传播因子的物理意义

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu_0 t_0}}{G} \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon}\right) \cos \phi \quad (5-19-121)$$

$$\beta = - \frac{\sqrt{\mu_0 t_0}}{G} \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \epsilon}\right) \sin \phi \quad (5-19-122)$$

式中

$$G = \sqrt{W_x \cos^2 \phi + W_y \sin^2 \phi} \quad (5-19-123)$$

$$W_x = \frac{1 - j \sigma_x / \omega \epsilon_0}{1 - j \sigma_x^* / \omega \mu_0} \quad (5-19-124)$$

$$W_y = \frac{1 - j \sigma_y / \omega \epsilon_0}{1 - j \sigma_y^* / \omega \mu_0} \quad (5-19-125)$$

若用  $\Psi$  表示任何一个场分量,  $\Psi_0$  为其振幅,  $c$  为光速, 则由式(5-19-116), 得

$$\Psi = \Psi_0 e^{j\omega \left(t - \frac{x \cos \phi - y \sin \phi}{cG}\right)} e^{-\frac{\sigma_x \cos \phi}{\epsilon_0 c G} x} e^{-\frac{\sigma_y \sin \phi}{\epsilon_0 c G} y} \quad (5-19-126)$$

将  $\alpha$  代入方程组(5-19-117)中第三个方程, 将  $\beta$  代入方程组(5-19-117)中第四个方程, 得

$$H_{zx0} = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{G} W_x \cos^2 \phi \quad (5-19-127)$$

$$H_{zy0} = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{G} W_y \sin^2 \phi \quad (5-19-128)$$

于是

$$H_0 = H_{zx0} + H_{zy0} = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot G \quad (5-19-129)$$

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot G \quad (5-19-130)$$

如果  $(\sigma_x, \sigma_x^*)$  和  $(\sigma_y, \sigma_y^*)$  满足

$$\frac{\sigma_x}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_x^*}{\mu_0} \quad (5-19-131)$$

$$\frac{\sigma_z}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_z^*}{\mu_0} \quad (5-19-132)$$

则对于任何频率和入射角,  $W_x = W_y = G = 1$ , 于是式(5-19-126)和式(5-19-130)变为

$$\psi = \psi_0 e^{j(\frac{c_0 t - \omega_0 z}{c_0})} \cdot e^{-\frac{\sigma_x \cos \theta}{\epsilon_0 c} r} e^{-\frac{\sigma_y \sin \theta}{\epsilon_0 c} y} \quad (5-19-133)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (5-19-134)$$

式(5-19-133)第一个指数项表明在 PML 媒质中波以光速沿着与电场垂直的方向传播, 剩余的两个指数项表明波沿相互垂直的两个方向指数衰减。式(5-19-134)表明 PML 媒质中的波阻抗和入射角无关, 与真空中波阻抗相同。这意味着电磁波从真空中以任意角度入射到 PML 媒质交界面时将无反射地进入 PML 媒质中, 并在 PML 媒质中衰减地传播, 如图 5-19-9 所示。

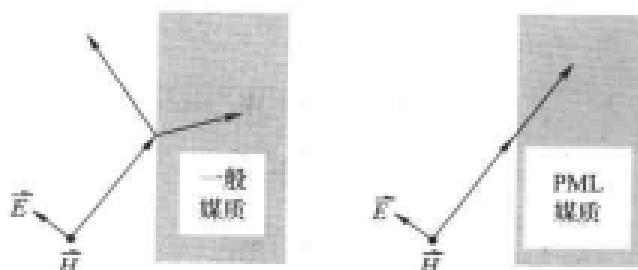


图 5-19-9 波进入一般媒质和 PML 媒质的传播

对于二维时域有限差分法网络, Berenger 提出了如图 5-19-10 所示的吸收边界结构。采用这一结构, 在带状的边缘理想匹配层中场分量只沿一个方向衰减, 只有在两带交叠的角域沿两个方向衰减。为了减小  $\sigma$  突变所造成的数值反射, Berenger 建议理想匹配层中的损耗应当随

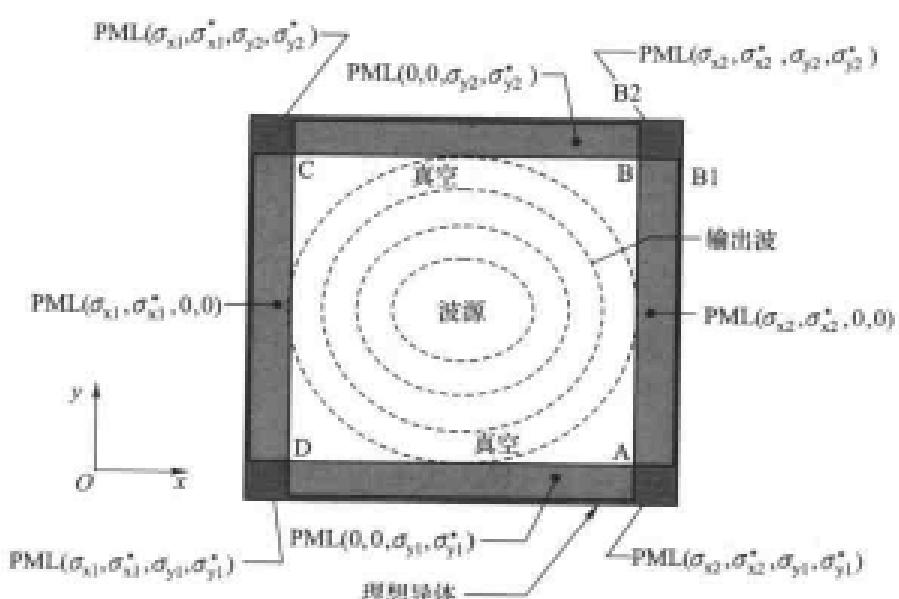


图 5-19-10 二维时域有效差分网格的理想匹配层吸收边界结构

PMI 媒质层深度  $\rho$  的增加而适度地增加, 如

$$\sigma(\rho) = \sigma_{\max} (\rho/\delta)^n \quad (5-19-135)$$

其中,  $\delta$  为理想匹配层厚度, 通常取为 5~10 个网格单元,  $n$  通常取 3 或 4。在理想匹配层的外边界设电磁场的切向分量为 0, 即全部计算区域的外边界为电壁或磁壁, 因此, 在理想匹配层中未被吸收的剩余能量将被反射回来。理论分析表明, 这样产生的反射为

$$R(\theta) = e^{-2\sigma_{\max}\delta \cos \theta/(n+1)\epsilon_0 c} \quad (5-19-136)$$

其中,  $\theta$  为入射角。当计算区域存在超长散射体时, 入射角可能较大, 若  $\theta \rightarrow 90^\circ$ ,  $R(\theta) \rightarrow 1$ 。但只要没有反射波回到散射体, 即没有形成二次散射, 在实际模拟时这并不是个问题, 因为由此产生的反射波与正交理想匹配层边界几乎垂直, 因而被充分吸收。理论上对于任意给定的入射角  $\theta$ , 通过调节参数, 反射误差可以任意小。

从 Berenger 最早提出理想匹配层概念自今, 理想匹配层方法已有了长足的发展, 从场分裂形式到非分裂形式, 从只能吸收传输模到同时可以吸收消失模, 从标准时域有限差分法到各种非标准时域有限差分法, 甚至有限元法, 直到目前仍然是计算电磁学研究热点之一。

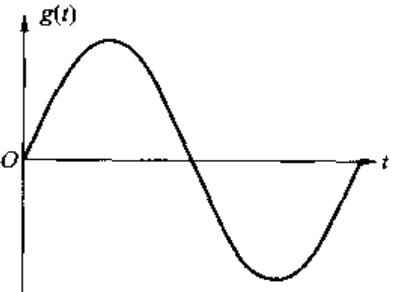
## 五、时域有限差分法的激励源

计算区域的电磁场要么是开始时刻已经存在的(初始条件), 要么是从边界处传入的(边界条件), 要么是区域内一个信号源激励起来的。时域有限差分法的激励源分为“硬源”和“软源”两种, “硬源”即强行规定计算区域中某些点的场值, “软源”则只是在空间某些点设置一个源电流或源磁流, 两种方法各有其适用的场合。

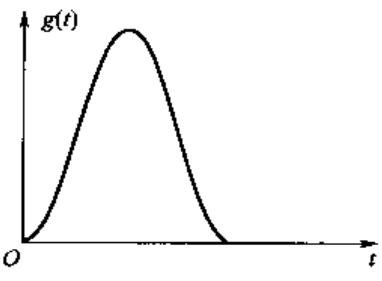
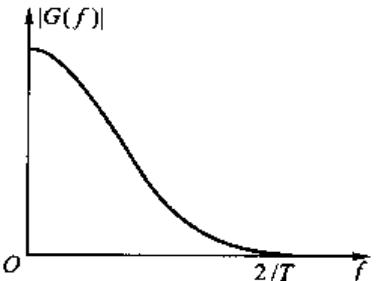
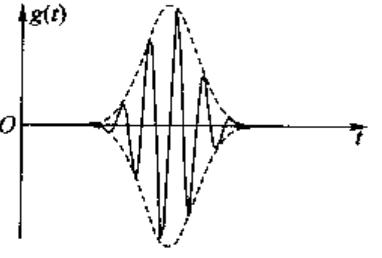
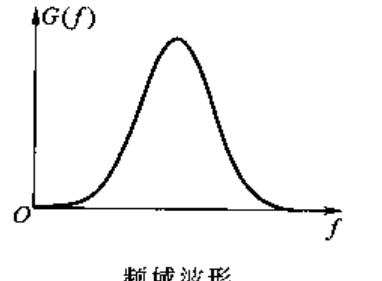
用时域有限差分法分析问题时, 无论是研究媒质散射还是吸收或是耦合等问题, 除了在足够的网格空间中模拟被研究的媒质存在外, 还有一个重要的任务, 就是对激励源的模拟, 即选择合适的人射波函数形式以及用适当方法将其加入到时域有限差分法的迭代方程中。下面首先给出激励源的典型函数形式。

源的信号函数从源随时间的变化来看有两类: 一类是随时间周期变化的波源——时谐场源; 另一类是对时间呈脉冲形式的波源——脉冲源。表 5-19-1 给出了最常用的源信号函数。

表 5-19-1 激励源的函数形式

名称	波形示意图	函数形式
时谐场源	 正弦波源	$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin(\omega t) & t \geq 0 \end{cases}$

续表

名称	波形示意图	函数形式
脉冲源 基带 Gauss 脉冲	 <p style="text-align: center;">时域波形</p>  <p style="text-align: center;">频域波形</p>	<p>时域：</p> $g(t) = \exp \left[ -\frac{4\pi(t-t_0)^2}{T^2} \right]$ <p>频域：</p> $G(f) = \frac{T}{2} \exp \left( -j2\pi f t_0 - \frac{\pi f^2 T^2}{4} \right)$
调制 Gauss 脉冲	 <p style="text-align: center;">时域波形</p>  <p style="text-align: center;">频域波形</p>	<p>时域：</p> $g(t) = -\cos(2\pi f_0 t) \exp \left[ -\frac{4\pi(t-t_0)^2}{T^2} \right]$ <p>频域：</p> $G(f) = \frac{T}{4} \exp \left[ -\frac{\pi(f-f_0)^2 T^2}{4} \right] \exp[-j2\pi(f-f_0)t_0]$ $+ \frac{T}{4} \exp \left[ -\frac{\pi(f+f_0)^2 T^2}{4} \right] \exp[-j2\pi(f+f_0)t_0]$

基带 Gauss 脉冲或调制 Gauss 脉冲是比较常用的脉冲源函数形式,因为它具有良好的波形以及 Fourier 频谱。一个基带 Gauss 脉冲也可以表示为

$$g(t) = \exp \left[ -\left( \frac{t-t_0}{T} \right)^2 \right] \quad (5-19-137)$$

式中,  $t_0$  是脉冲的中心;  $T$  是脉冲宽度。

同样的, 调制 Gauss 脉冲也可以写为

$$g(t) = \exp \left[ -\left( \frac{t-t_0}{T} \right)^2 \right] \sin [2\pi f_0(t-t_0)] \quad (5-19-138)$$

式中,  $f_0$  是调制频率。

这两种脉冲均有相似的 Fourier 谱包络, 其 Gauss 形状为

$$G(f) \propto \exp [-(\pi T f)^2] \quad (5-19-139)$$

其差别之处在于基带 Gauss 脉冲在直流时达到峰值而调制 Gauss 脉冲在中心频率  $f_0$  处具有峰值。若假设一个脉冲宽度为  $T$  的信号的有用带宽为  $BW$ , 在带宽边隙处其值为峰值的 10% (功率的 1%), 则根据式(5-19-139)可以粗略地估计出时域有效差分法所能模拟的频带宽度与激励脉冲宽度的关系, 具体有

对于基带 Gauss 脉冲

$$f_{max} (\text{GHz}) \approx 500/T(\text{ps}) \quad (5-19-140)$$

对于调制 Gauss 脉冲

$$BW(\text{GHz}) \approx 1000/T(\text{ps}) \quad (5-19-141)$$

其中,  $f_{max}$  表示利用基带 Gauss 脉冲作激励源进行时域有效差分模拟时可以计算的合理精度下的最高频率。

当选定感兴趣的模拟频带后, 可利用式(5-19-140)和式(5-19-141)设置激励脉冲宽度  $T$ , 此外, 式(5-19-137)与式(5-19-138)中通常可取  $t_0 = 4T$  以使信号在初始时刻  $t=0$  时趋于 0, 于是可得 Gauss 脉冲的全部参数。

对于脉冲源, 数值上其频域信号可以方便地利用离散傅里叶变换(DFT)或者快速傅里叶变换(FFT)方法得到, 但稳态场源的频域信号通常需利用峰值检测法与相位滞后法获得。

[例 2] 用时域有限差分法模拟电偶极矩源的电磁辐射。

[解] 间隔  $l$  很小的一对等量异号电荷  $\pm q$  构成一个电偶极子, 电偶极矩为  $p = ql$ 。当电偶极矩是一个随时间变化的量时, 电偶极子向外辐射电磁场。理论分析表明这时空间任意点任意时刻的电场为

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi r} \left[ \hat{r} \left( \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c^2}{r^2} \right) 2 \cos \theta + \hat{\theta} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c^2}{r^2} \right) \sin \theta \right] p \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (5-19-142)$$

下面设法用时域有限差分法近似计算电偶极子的辐射场, 并与理论结果对照。

设时域有限差分的网格间距在三个方向上都为  $\Delta$ , 有一个电偶极子位于某一个正方体单元中心, 不妨用一个在其中电流均匀分布的正方体单元来代替这个电偶极子。考虑到电流密度  $\vec{J}$  和电偶极矩  $p$  的关系

$$\int \vec{J} dV = \frac{dp}{dt} \quad (5-19-143)$$

可得

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta^3} \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (5-19-144)$$

设电偶极矩平行于  $z$  轴。由于源电流  $J_z$  的存在, 三维时域有限差分迭代公式(5-19-59)中要增加源电流项, 方法是在式(5-19-59)的迭代结果中增加一项

$$E_z|_{i_0, j_0, k_0 + \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = E_z|_{i_0, j_0, k_0 - \frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta^3} \frac{d\vec{P}}{dt}|^n \quad (5-19-145)$$

此式只针对源点  $(i_0\Delta, j_0\Delta, (k_0 + \frac{1}{2})\Delta)$ , 空间其他点的迭代公式不变。这种激励方法即“软源”。

设时间步为

$$\Delta t = \frac{\Delta}{c\sqrt{3}} \quad (5-19-146)$$

电偶极矩的时变形式为 Gauss 脉冲

$$p(t) = -\frac{\epsilon \Delta^3 T}{2\Delta t} \exp \left[ -\left( \frac{t-4T}{T} \right)^2 \right] \quad (5-19-147)$$

其中,  $T=25\Delta t$ 。因为  $\Delta$  总是同时出现在分子、分母中而可以被约掉, 所以此例中  $\Delta$  并没有被赋予一个具体的值。对于  $\Delta$  的任意指定值, 计算结果相同。

电偶极子在无界空间的辐射是一个开区域问题, 可以采用理想匹配层吸收边界条件, 为了避免截断消失模, 吸收边界条件应当设置在充分远处。计算结果如图 5-19-11 所示。

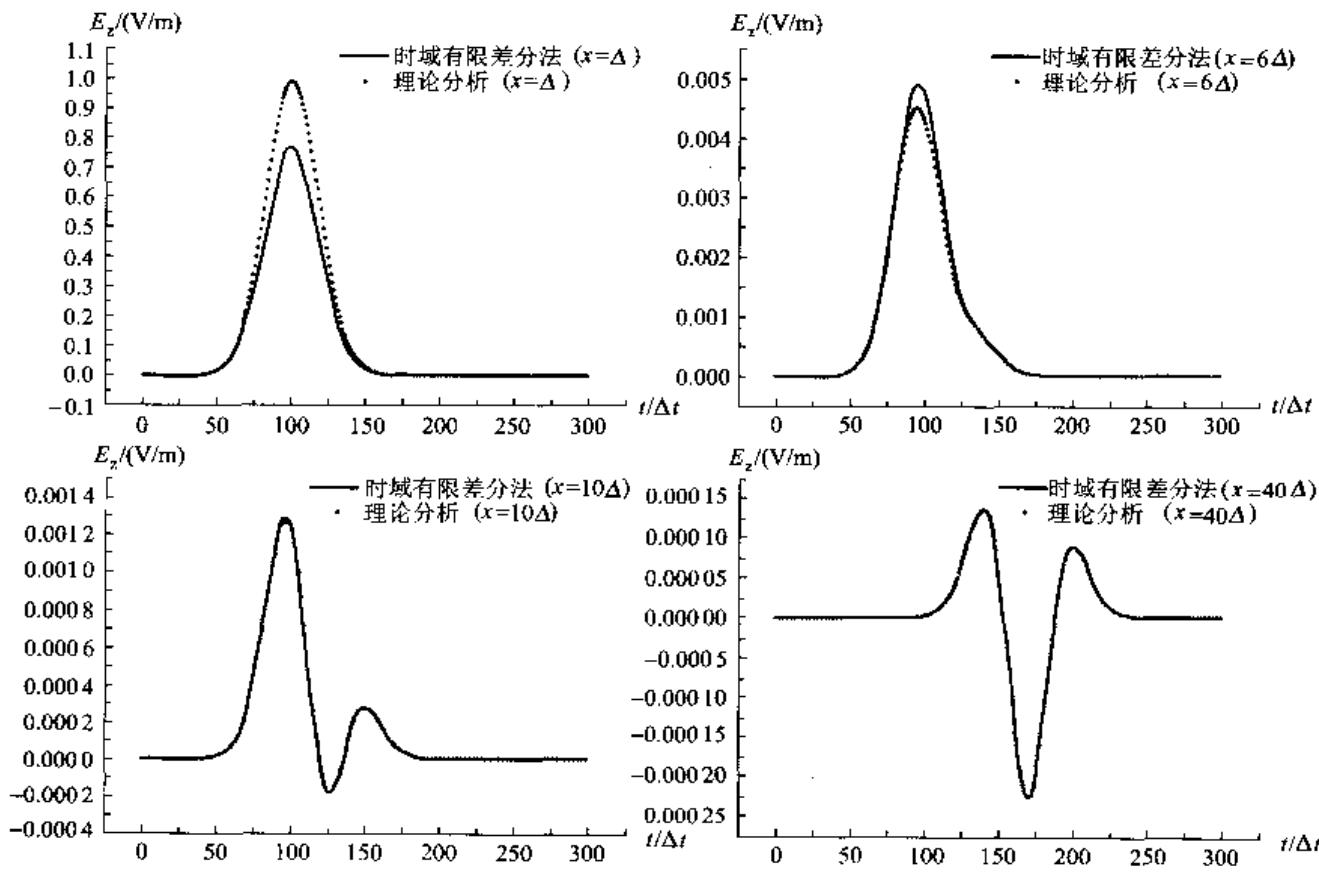


图 5-19-11  $(i_0 + 40)\Delta, j_0\Delta, (k_0 + \frac{1}{2})\Delta$  处的  $E_z$  值对比

图 5-19-11 表示  $x$  轴方向距离电偶极子  $40\Delta$  处  $E_z$  分量的理论值和模拟值对照。由图可见,①距离源点越远,时域有限差分法的计算结果越逼近理论值。这是因为距离越远,电流均匀分布的有限体积立方体单元越近似于一个无限小的电偶极子。②电偶极子辐射场的波形随半径变化很大。事实上,近场以消失模为主,远场以传输模为主,近、远场的频率成分不同,辐射到远处的场是频率较高的电磁场。

在计算对称振子辐射方向图时,振子两臂上的电流分布与空间电磁场分布有关,无法预知。这时可以根据信号馈源的电压来估计振子中心处的电场值,将这一结果用于时域有限差分模拟,强行规定振子中心处的场值,这就是“硬源”。不同的物理激励源,不同的计算目的,决定了不同的模拟方法。各种电磁激励源的模拟直到目前仍然是时域有限差分法研究热点之一。

## 六、时域有限差分的总场/散射场分析法

### 1. 基本原理

总场散射场方法是基于 Maxwell 方程的线性特性。电磁散射问题中空间场可以写为入射场和散射场之和。

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_t &= \vec{E}_i + \vec{E}_s \\ \vec{H}_t &= \vec{H}_i + \vec{H}_s \end{aligned} \right\} \quad (5-19-148)$$

式中,下标  $i$  表示不存在任何材料时的入射波场,设在所有时间步所有时域有限差分网格点上入射波场都是已知的;下标  $s$  表示散射波场,最初该场是未知的,它是由入射波与目标的相互作用产生的场;下标  $t$  表示总场。由 Maxwell 的线性特性,无论是入射场、散射场或总场都满足 Maxwell 方程,所以时域有限差分法可以独立地应用于入射场、散射场和总场。

用时域有限差分法计算散射问题时通常将计算区域如图 5-19-12 所示划分为总场区和散射场区,如此在截断边界处只有散射场,符合截断边界上设置的吸收边界条件只能吸收外向行波的要求。

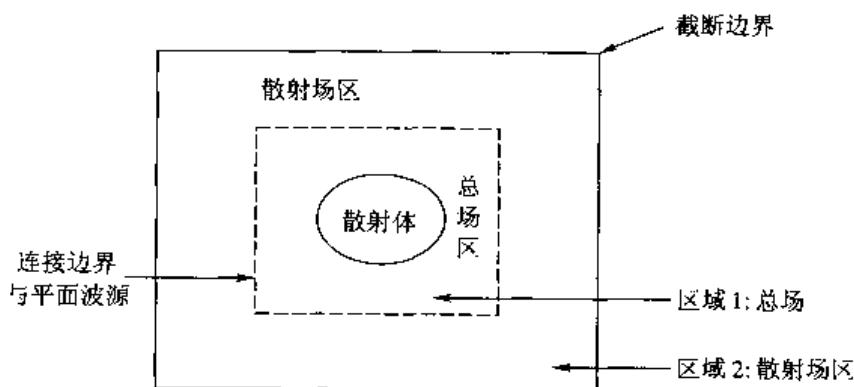


图 5-19-12 总场/散射场的区域划分

区域 1: 区域 1 中包含了所有散射体。

在区域 1 中用时域有限差分法模拟总场,成为总场区。

区域 2: 区域 2 为自由空间的一部分,用时域有限差分模拟区域 2 中的散射场,这意味着区

域 2 中没有人射场, 所以称为散射场区。区域 2 的外部边界可以采用自由空间辐射条件或吸收边界条件模拟波无反射地进入外部区域。

区域 1 和区域 2 交换面上则采用总场、散射场条件式(5-19-148)。

原理: 设入射电磁波为  $\vec{E}_i, \vec{H}_i$ , 为了使入射波限制在图 5-19-13(a)中界面 A 内的有界区域, 根据等效原理, 在区域界面 A 上设置等效面电磁流, 并设 A 面外的场为 0, 如图 5-19-13(b)所示。则 A 面的等效电磁流为

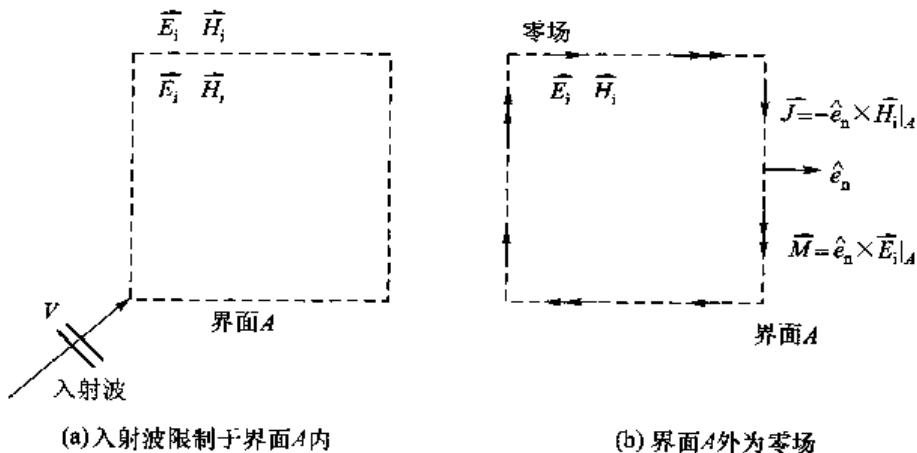


图 5-19-13 根据等效原理设置入射波源

$$\begin{cases} \vec{J} = -\hat{\epsilon}_n \times \vec{H}_i|_A \\ \vec{M} = \hat{\epsilon}_n \times \vec{E}_i|_A \end{cases} \quad (5-19-149)$$

式中,  $\hat{\epsilon}_n$  为面 A 的外法向矢, 所以总场、散射场的分界面上设置入射波电磁波的切向分量便可将入射波只引入到总场区。

## 2. 总场/散射场连接边界处时域有限差分方程

首先以一维为例进行进一步说明。假设电磁场分量为  $E_z, H_y$ , 如图 5-19-14 所示。

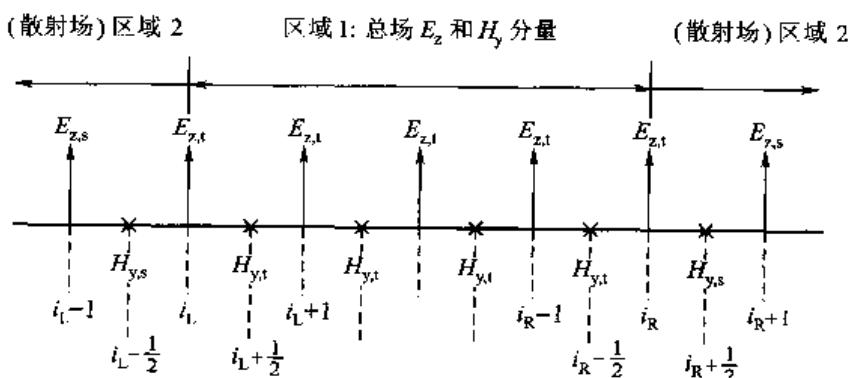


图 5-19-14 一维 FDTD 的总场/散射场设置

图 5-19-14 中, 在区域 1 中为总场区, 时域有限差分公式为

$$E_{z,i}|^{n+1}_i = E_{z,i}|^n_i + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta x} [H_{y,i+1}|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}} - H_{y,i-1}|^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}}] \quad (5-19-150)$$

$$H_{y,t} \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_{y,t} \Big|_{i-\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} [E_{z,t} \Big|_i^n - E_{z,t} \Big|_{i-1}^n] \quad (5-19-151)$$

在区域 2 中为散射场区, 将上式中下标  $t$  换成  $s$  就得到区域 2 中的时域有限差分公式, 但  $i$  属于区域 2, 为

$$H_{y,s} \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_{y,s} \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} [E_{z,s} \Big|_i^n - E_{z,s} \Big|_{i-1}^n] \quad (5-19-152)$$

显然, 由于两个区域中所使用的场不一样, 因此在连接边界  $i_L$  和  $i_R$  上必须对时域有限差分公式加以修正, 在式(5-19-150)中, 当  $i=i_L$  时, 由于  $i_L-\frac{1}{2}$  属于区域 2, 所以  $H_y$  总场不存在 (计算机中没有存储), 区域 2 中只有散射场, 但所有区域的入射场是已知的, 为此, 应用式(5-19-148), 有

$$E_{z,i} \Big|_{i_L}^{n+1} = E_{z,i} \Big|_{i_L}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta x} [H_{y,t} \Big|_{i_L-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{y,s} \Big|_{i_L-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta x} H_{y,i} \Big|_{i_L-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (5-19-153)$$

同样, 在式(5-19-152)中,  $i=i_L$  时,  $E_z$  散射场不存在, 存在的是总场, 再次应用式(5-19-148)可得到

$$H_{y,s} \Big|_{i_L-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_{y,s} \Big|_{i_L-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} [E_{z,t} \Big|_{i_L}^n - E_{z,s} \Big|_{i_L-1}^n] - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} E_{z,i} \Big|_{i_L}^n \quad (5-19-154)$$

在  $i=i_R$  边界存在同样的问题, 可采用相同的原理处理。

下面以二维 TM 模情况为例进一步说明。

如图 5-19-15 所示, 总场区域为  $i_0 \leq i \leq i_a, j_0 \leq j \leq j_b$ ,  $E_z$  在总场边界上, 属于总场区。距离总场边界  $1/2$  网格处为总场外边界, 其上磁场为散射场。

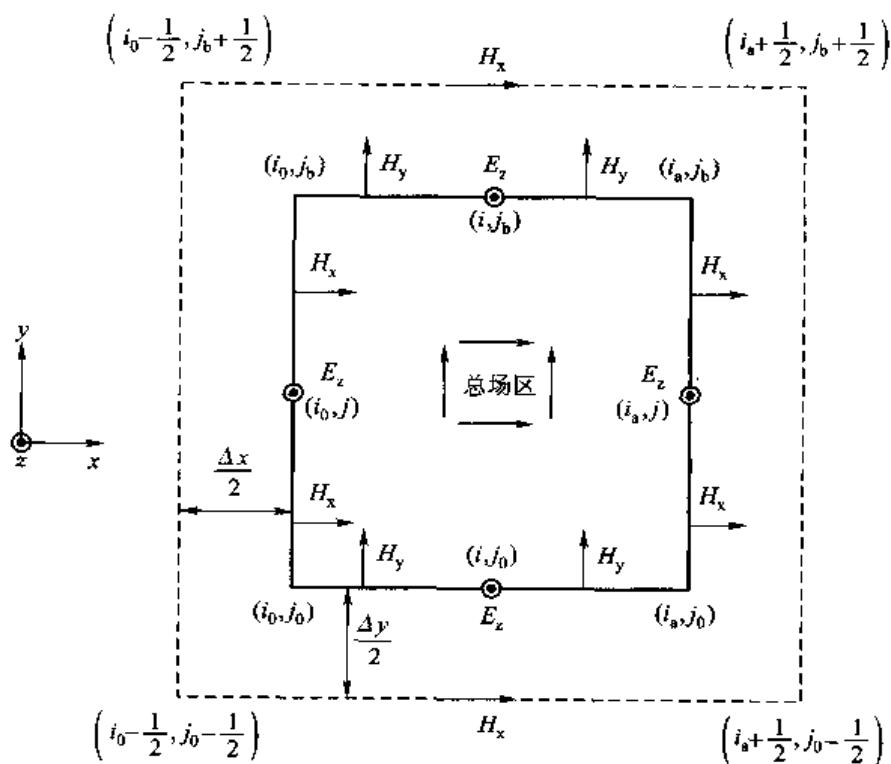


图 5-19-15 二维时域有限差分总场/散射场设置

如图 5-19-16 所示,以  $y=j_0\Delta y$  总场边界为例,注意到:

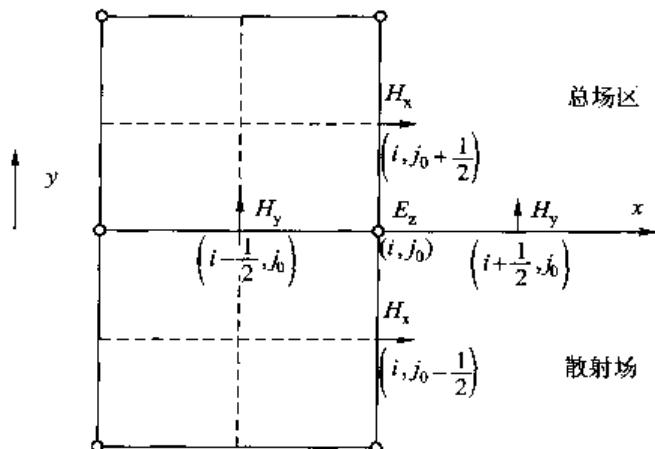


图 5-19-16  $y=j_0\Delta y$  总场/散射边界

① 计算  $H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j_0)$  时涉及的  $E_z$  节点均为总场,因此计算公式不变。

②  $H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0 - \frac{1}{2})$  属于散射场,但计算时涉及的  $E_z$  分别处于总场及散射场,应在总场节点扣除入射波的值。

③  $E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0)$  属于总场,计算时涉及的两个  $H_x$  节点分别属于总场及散射场,应在散射场节点加上入射波的值,另外两个  $H_y$  节点属于总场。

相应的时域有限差分公式修改为

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0 - \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j_0 - \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_z^n(i, j_0) - E_z^n(i, j_0 - 1)}{\Delta y} \right] + \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{z,i}^n(i, j_0)}{\Delta y} \quad (5-19-155)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j_0) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j_0) + \frac{\Delta t}{\mu} (\nabla \times \vec{E})|_y^n \quad (5-19-156)$$

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i, j_0) &= E_z^n(i, j_0) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j_0) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j_0)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0 + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0 - \frac{1}{2})}{\Delta y} \right] + \\ &\quad \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0 - \frac{1}{2})}{\Delta y} \\ &= E_z^n(i, j_0) + \frac{\Delta t}{\epsilon} (\nabla \times \vec{H})|_z^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0 - \frac{1}{2})}{\Delta y} \end{aligned} \quad (5-19-157)$$

其他总场区的边界面有类似处理。对于总场/散射场连接面和外推半个网格处的外连接面上的切向场分量,其有限差分迭代式中要加上相应的等效电流和磁流,而连接面法向场分量的迭代公式无需改变。这样就在总场区加上了入射波,而散射场区则没有入射波。将各个连接边界

处时域有限差分修正方程列表如表 5-19-2 所示。

表 5-19-2 二维 TM 模总场区设置入射波的边界处理

总场边界	总场/散射场边界上切向场时域有限差分公式
$i_0 \Delta x$	$E_z^{n+1}(i_0, j) = E_z^n(i_0, j) + \frac{\Delta t}{\epsilon} (\nabla \times \vec{H})_z^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_0 + \frac{1}{2}, j)}{\Delta x}$ $H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2}, j) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2}, j) - \frac{\Delta t}{\mu} (\nabla \times \vec{E})_y^n + \frac{\Delta t E_{z,i}^n(i_0, j)}{\mu \Delta x}$
$i_s \Delta x$	$E_z^{n+1}(i_s, j) = E_z^n(i_s, j) + \frac{\Delta t}{\epsilon} (\nabla \times \vec{H})_z^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_s + \frac{1}{2}, j)}{\Delta x}$ $H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_s + \frac{1}{2}, j) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_s + \frac{1}{2}, j) - \frac{\Delta t}{\mu} (\nabla \times \vec{E})_y^n + \frac{\Delta t E_{z,i}^n(i_s, j)}{\mu \Delta x}$
$j_0 \Delta y$	$E_z^{n+1}(i, j_0) = E_z^n(i, j_0) + \frac{\Delta t}{\epsilon} (\nabla \times \vec{H})_z^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0 - \frac{1}{2})}{\Delta y}$ $H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0 - \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j_0 - \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu} (\nabla \times \vec{E})_x^n + \frac{\Delta t E_{z,i}^n(i, j_0)}{\mu \Delta y}$
$j_b \Delta y$	$E_z^{n+1}(i, j_b) = E_z^n(i, j_b) + \frac{\Delta t}{\epsilon} (\nabla \times \vec{H})_z^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i, j_b + \frac{1}{2})}{\Delta y}$ $H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_b + \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j_b + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu} (\nabla \times \vec{E})_x^n - \frac{\Delta t E_{z,i}^n(i, j_b)}{\mu \Delta y}$

二维 TM 模总场区 4 个角点为  $E_z$  节点, 属于总场区。求解时需要的 4 个  $H_x$  和  $H_y$  分量中两个处于总场区, 两个属于散射场区。以左下角点  $(i_0, j_0)$  为例, 迭代公式应改为

$$E_z^{n+1}(i_0, j_0) = E_z^n(i_0, j_0) + \frac{\Delta t}{\epsilon} (\nabla \times \vec{H})_z^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{H_{x,i}^{n-\frac{1}{2}}(i_0, j_0 - \frac{1}{2})}{\Delta y} - \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2}, j_0)}{\Delta x} \right] \quad (5-19-158)$$

其他角点类似处理, 如表 5-19-3 所示。

表 5-19-3 二维 TM 模总场/散射场角点处理

总场/散射场边界的角点	总场/散射场边界角点上的时域有限差分公式
$(i_0, j_0)$	$E_z^{n+1}(i_0, j_0) = E_z^n(i_0, j_0) + \frac{\Delta t}{\epsilon} (\nabla \times \vec{H})_z^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2}, j_0)}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_0, j_0 - \frac{1}{2})}{\Delta y}$
$(i_0, j_b)$	$E_z^{n+1}(i_0, j_b) = E_z^n(i_0, j_b) + \frac{\Delta t}{\epsilon} (\nabla \times \vec{H})_z^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2}, j_b)}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_0, j_b + \frac{1}{2})}{\Delta y}$

续表

总场/散射场 边界的角点	总场/散射场边界角点上的时域有限差分公式
$(i_a, j_0)$	$E_z^{n+1}(i_a, j_0) = E_z^n(i_a, j_0) + \frac{\Delta t}{\epsilon} (\nabla \times \vec{H})_z^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_a + \frac{1}{2}, j_0)}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_a, j_0 - \frac{1}{2})}{\Delta y}$
$(i_a, j_b)$	$E_z^{n+1}(i_a, j_b) = E_z^n(i_a, j_b) + \frac{\Delta t}{\epsilon} (\nabla \times \vec{H})_z^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_a + \frac{1}{2}, j_b)}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_a, j_b + \frac{1}{2})}{\Delta y}$

二维 TE 模相同处理, 相应公式可用对偶原理得出。

注意, 在编程过程中, 这些项是必须加入的。在二维情况下, 4 个交界面就是 4 条线, 交界面的 4 个角点是由 4 条线交叠而来的, 不需要单独规定。计算的过程是这样的: 首先利用时域有限差分原公式求出空间所有点  $E_z$ , 然后给定交界面向外某个空间步长位置上  $H_x$  或  $H_y$  的入射场值, 最后利用各交界面的公式求出交界面上的修正值。在 4 个角点上, 由于叠加运算, 便已包含了两个人射波分量。

上面关于二维总场/散射场边界的讨论可推广到三维。三维 6 个总场边界及相应外边界如图 5-19-17 所示。在每个界面上有两个切向场量。例如, 对于  $y=j_0\Delta y$  或  $y=j_b\Delta y$  界面上切向场分量为  $E_x$  和  $E_z$ , 而相应总场外边界  $y=(j_0 - \frac{1}{2})\Delta y$  或  $y=(j_b + \frac{1}{2})\Delta y$  界面上切向场分量为  $H_x$  和  $H_z$ 。引入入射波时, 总场边界面上法向场分量的时域有限差分计算公式不变; 切向场分量的计算公式与式(5-19-155)、式(5-19-157)类似。例如对于  $y=j_0\Delta y$  界面的切向场分量  $E_z$  和  $E_x$  属于总场。考虑  $E_z(i_a, j_0, k_0 + \frac{1}{2})$  的计算, 围绕该节点的 4 个  $H_x$  和  $H_y$  节点中有一个  $H_x$  节点位于总场外边界上, 属于散射场, 所以时域有限差分公式需改写如下

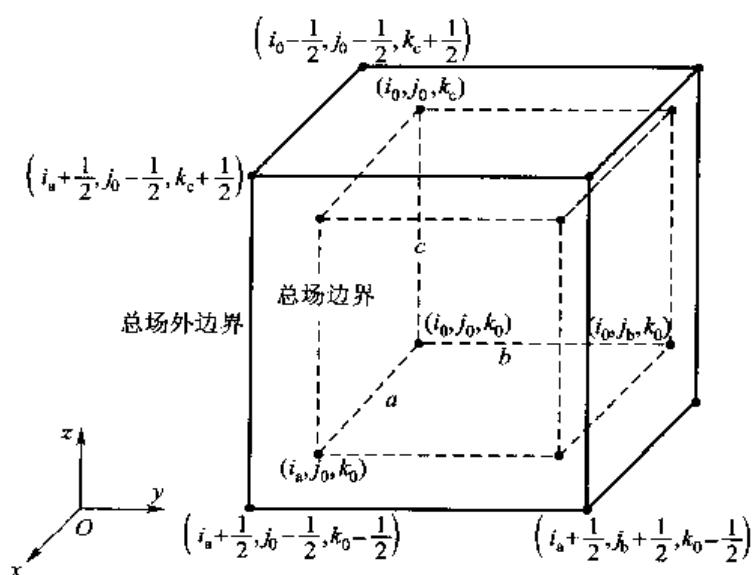


图 5-19-17 三维总场-散射场连接面

$$E_z^{n+1}(i, j_0, k + \frac{1}{2}) = E_z^n(i, j_0, k + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \times \left[ \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j_0, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j_0, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} \right. \\ \left. - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0 + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j_0 - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} \right] + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i, j_0 - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta y}$$

(5-19-159)

为了表述简明, 将上式重写为

$$E_z^{n+1}(j_0) = E_z^{n+1}(j_0)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(j_0 - \frac{1}{2})}{\Delta y}$$

(5-19-160)

其中, 符号  $E_z^{n+1}(j_0)_{\text{FDTD}}$  代表节点位于  $y=j_0\Delta y$  界面时通常的时域有限差分计算公式。三维总场区域边界上切向场时域有限差分公式归纳如表 5-19-4 所示。

表 5-19-4 三维总场区设置入射波的边界处理

总场 边界	总场区域边界上切向场时域有限差分公式	
$i_0 \Delta x$	$E_y^{n+1}(i_0) = E_y^{n+1}(i_0)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{z,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2})}{\Delta x}$ $E_z^{n+1}(i_0) = E_z^{n+1}(i_0)_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2})}{\Delta x}$	$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2}) = H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2})_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t E_{z,i}^n(i_0)}{\mu \Delta x}$ $H_z^{n+\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2}) = H_z^{n+\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2})_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t E_{y,i}^n(i_0)}{\mu \Delta x}$
$i_s \Delta x$	$E_y^{n+1}(i_s) = E_y^{n+1}(i_s)_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{z,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_s + \frac{1}{2})}{\Delta x}$ $E_z^{n+1}(i_s) = E_z^{n+1}(i_s)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_s + \frac{1}{2})}{\Delta x}$	$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_s + \frac{1}{2}) = H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_s + \frac{1}{2})_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t E_{z,i}^n(i_s)}{\mu \Delta x}$ $H_z^{n+\frac{1}{2}}(i_s + \frac{1}{2}) = H_z^{n+\frac{1}{2}}(i_s + \frac{1}{2})_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t E_{y,i}^n(i_s)}{\mu \Delta x}$
$j_0 \Delta y$	$E_z^{n+1}(j_0) = E_z^{n+1}(j_0)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(j_0 - \frac{1}{2})}{\Delta y}$ $E_x^{n+1}(j_0) = E_x^{n+1}(j_0)_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{z,i}^{n+\frac{1}{2}}(j_0 - \frac{1}{2})}{\Delta y}$	$H_z^{n-\frac{1}{2}}(j_0 - \frac{1}{2}) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(j_0 - \frac{1}{2})_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t E_{x,i}^n(j_0)}{\mu \Delta y}$ $H_x^{n-\frac{1}{2}}(j_0 - \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(j_0 - \frac{1}{2})_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t E_{z,i}^n(j_0)}{\mu \Delta y}$
$j_b \Delta y$	$E_z^{n+1}(j_b) = E_z^{n+1}(j_b)_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n-\frac{1}{2}}(j_b + \frac{1}{2})}{\Delta y}$ $E_x^{n+1}(j_b) = E_x^{n+1}(j_b)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{z,i}^{n-\frac{1}{2}}(j_b + \frac{1}{2})}{\Delta y}$	$H_z^{n-\frac{1}{2}}(j_b + \frac{1}{2}) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(j_b + \frac{1}{2})_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t E_{x,i}^n(j_b)}{\mu \Delta y}$ $H_x^{n-\frac{1}{2}}(j_b + \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(j_b + \frac{1}{2})_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t E_{z,i}^n(j_b)}{\mu \Delta y}$

续表

总场 边界	总场区域边界上切向场时域有限差分公式	
$k_0 \Delta z$	$E_x^{n+1}(k_0) = E_x^{n-1}(k_0)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(k_0 - \frac{1}{2})}{\Delta z}$ $E_y^{n+1}(k_0) = E_y^{n-1}(k_0)_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(k_0 - \frac{1}{2})}{\Delta z}$	$H_x^{n+\frac{1}{2}}(k_0 - \frac{1}{2}) = H_x^{n+\frac{1}{2}}(k_0 - \frac{1}{2})_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{y,i}^n(k_0)}{\Delta z}$ $H_y^{n+\frac{1}{2}}(k_0 - \frac{1}{2}) = H_y^{n+\frac{1}{2}}(k_0 - \frac{1}{2})_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{x,i}^n(k_0)}{\Delta z}$
$k_c \Delta z$	$E_x^{n+1}(k_c) = E_x^{n-1}(k_c)_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(k_c + \frac{1}{2})}{\Delta z}$ $E_y^{n+1}(k_c) = E_y^{n-1}(k_c)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(k_c + \frac{1}{2})}{\Delta z}$	$H_x^{n+\frac{1}{2}}(k_c + \frac{1}{2}) = H_x^{n+\frac{1}{2}}(k_c + \frac{1}{2})_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{y,i}^n(k_c)}{\Delta z}$ $H_y^{n+\frac{1}{2}}(k_c + \frac{1}{2}) = H_y^{n+\frac{1}{2}}(k_c + \frac{1}{2})_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{x,i}^n(k_c)}{\Delta z}$

总场区的 12 条棱边上切向场分量分别为  $E_x$ 、 $E_y$  和  $E_z$ ，例如平行于  $x$  轴的 4 条棱边上切向场分量为  $E_x$ ，引进入射波时的计算公式与式(5-19-158)类似。具体公式如表 5-19-5 所示。

表 5-19-5 三维总场区的棱边处理

棱边	棱边 位置	总场区域棱边上切向场时域有限差分公式
平行于 $x$ 轴	$(j_0, k_0)$	$E_x^{n+1}(j_0, k_0) = E_x^{n-1}(j_0, k_0)_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{z,i}^{n+\frac{1}{2}}(j_0 - \frac{1}{2}, k_0)}{\Delta y} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(j_0, k_0 - \frac{1}{2})}{\Delta z}$
	$(j_b, k_0)$	$E_x^{n+1}(j_b, k_0) = E_x^{n-1}(j_b, k_0)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{z,i}^{n+\frac{1}{2}}(j_b + \frac{1}{2}, k_0)}{\Delta y} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(j_b, k_0 - \frac{1}{2})}{\Delta z}$
	$(j_b, k_c)$	$E_x^{n+1}(j_b, k_c) = E_x^{n-1}(j_b, k_c)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{z,i}^{n+\frac{1}{2}}(j_b + \frac{1}{2}, k_c)}{\Delta y} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(j_b, k_c + \frac{1}{2})}{\Delta z}$
	$(j_0, k_c)$	$E_x^{n+1}(j_0, k_c) = E_x^{n-1}(j_0, k_c)_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{z,i}^{n+\frac{1}{2}}(j_0 - \frac{1}{2}, k_c)}{\Delta y} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(j_0, k_c + \frac{1}{2})}{\Delta z}$
平行于 $y$ 轴	$(k_0, i_0)$	$E_y^{n+1}(i_0, k_0) = E_y^{n-1}(i_0, k_0)_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_0, k_0 - \frac{1}{2})}{\Delta z} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{z,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2}, k_0)}{\Delta x}$
	$(k_c, i_0)$	$E_y^{n+1}(i_c, k_0) = E_y^{n-1}(i_c, k_0)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_c, k_0 + \frac{1}{2})}{\Delta z} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{z,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_c - \frac{1}{2}, k_0)}{\Delta x}$
	$(k_0, i_a)$	$E_y^{n+1}(i_0, k_a) = E_y^{n-1}(i_0, k_a)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_0, k_a + \frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{z,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_0 + \frac{1}{2}, k_a)}{\Delta x}$
	$(k_c, i_a)$	$E_y^{n+1}(i_c, k_a) = E_y^{n-1}(i_c, k_a)_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_c, k_a - \frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{z,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_c + \frac{1}{2}, k_a)}{\Delta x}$

续表

棱边 位置	总场区域棱边上切向场时域有限差分公式	
平行于 $z$ 轴	$(i_a, j_b)$	$E_z^{n+1}(i_a, j_b) = E_z^{n+1}(i_a, j_b)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_a - \frac{1}{2}, j_b) + H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_a, j_b - \frac{1}{2})}{\Delta x}$
	$(i_a, j_b)$	$E_z^{n+1}(i_a, j_b) = E_z^{n+1}(i_a, j_b)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_a + \frac{1}{2}, j_b) + H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_a, j_b + \frac{1}{2})}{\Delta x}$
	$(i_a, j_b)$	$E_z^{n+1}(i_a, j_b) = E_z^{n+1}(i_a, j_b)_{\text{FDTD}} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_a + \frac{1}{2}, j_b) - H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_a, j_b + \frac{1}{2})}{\Delta y}$
	$(i_a, j_b)$	$E_z^{n+1}(i_a, j_b) = E_z^{n+1}(i_a, j_b)_{\text{FDTD}} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{H_{y,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_a - \frac{1}{2}, j_b) - H_{x,i}^{n+\frac{1}{2}}(i_a, j_b - \frac{1}{2})}{\Delta y}$

同样对于三维总场/散射场公式,棱线上的场由于叠加运算,便包括了两个人射波分量。

### 3. 平面波源的引入

前面在假设各连接点处的入射波  $E_i$  或  $H_i$  已知的情况下进行了总场/散射场边界处时域有限差分公式的讨论,可见讨论的总场/散射场公式是一种成功发展起来的各方面都比较优秀的方法,该公式直观、灵活。

在总场/散射场边界上设置等效电磁流可以在总场区引进入射波,并且在散射区没有入射波,但在时域有限差分实现时,会出现入射波泄漏到散射场的现象。因此计算目标散射特性时应考虑有效去除这种“背景”噪声的方法(总场区内没有计算目标时,散射场区存在的场)。下面讨论一种求出在连接面上的网格点上的入射场值的方法。该方法采用一维时域有限差分随时间推进地在总场区引进入射波,这样既能保证该方法能够引任意方向传播的任意极化入射波,又可以减少散射场区入射波的泄漏。

第一种方法是基于一维时域有限差分的传播,该一维时域有限差分波独立于二维空间,但对一个空间网格的时间步进是同时进行的,以保证激励波投影到连接面上与激励场的传播一致。如图 5-19-18 所示。

首先定义坐标系的坐标原点,假设位于左下角,设一维时域有限差分与二维时域有限差分具有相同空间步长,则入射波在原点作为硬源引入。由于一维时域有限差分中没有散射体,所以可以利用硬源激励。不会有反射波进入源的位置,而且由于传播方向是一维的,在其边界上可以实现性能良好的吸收边界条件。

在一维时域有限差分网格中引入的源必须具有一个不同的相速度,以保持与源在二维网格中的传播同步,原因是二维时域有限差分中波可能不是沿着坐标轴方向,而此时二维色散与一维的色散程度不同,这一点必须考虑进去。

二维相速度在某种情况下可近似写为

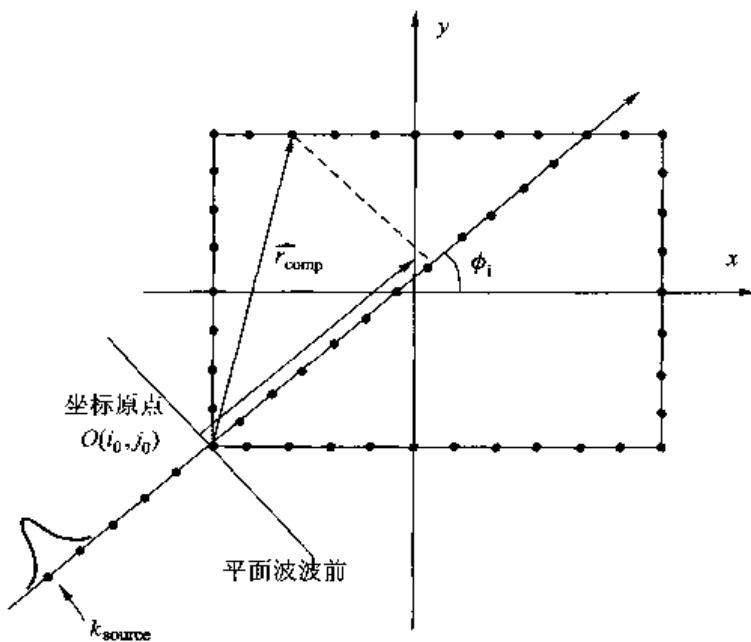


图 5-19-18 为引入入射场而设置的一维源传播示意

$$v_p(\phi) = \omega \left[ \frac{\sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5-19-161)$$

式中,  $k_x = k \cos \phi$ ,  $k_y = k \sin \phi$ ,  $\omega = 2\pi f$ 。

为确保二维网格中数值相速度用于加速一维网格中入射波的传播, 用时间步数表示入射波的迟延, 可以写为

$$n_{\text{delay}} = \frac{d\delta}{v_p(\phi)\Delta t} \quad (5-19-162)$$

式中,  $\delta$  是空间网格步长;  $\Delta t$  是时间步长;  $v_p(\phi)$  是数值相速度;  $d$  是从坐标原点到连接面上网格点投影到一维网格上点之间的距离

$$d = \hat{k}_i \cdot \vec{r}_{\text{comp}} \quad (5-19-163)$$

其中,  $\hat{k}_i$  是入射波的单位法矢;  $\vec{r}_{\text{comp}}$  是坐标原点到连接边界上源点的矢量。注意到

$$\hat{k}_i = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi \quad (5-19-164)$$

位置矢量  $\vec{r}_{\text{comp}}$  可以写为

$$\vec{r}_{\text{comp}} = \hat{x}(i_{\text{comp}} - i_0)\delta + \hat{y}(j_{\text{comp}} - j_0)\delta$$

若是投影点不对应于一维时域有限差分的样本点, 则要利用插值方法, 如图 5-19-19 所示。

$$E_{\text{disc}}^n = E^n(i_m) + [E^n(i_{m+1}) - E^n(i_m)] \frac{(d - m\delta)}{\delta} \quad (5-19-165)$$

最后一步就是利用上述信息来确定一维网格节点上的场值, 通过

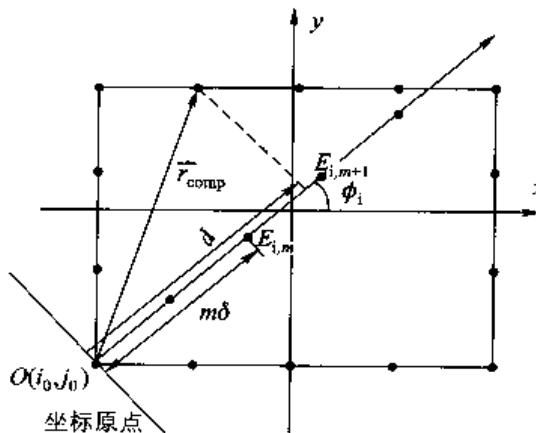


图 5-19-19 场值插值示意图

$$H_{i,m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_{i,m-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu_0 \delta \left[ \frac{v_p(\phi=0)}{v_p(\phi)} \right]} (E_{i,m}^n - E_{i,m-1}^n) \quad (5-19-166)$$

$$E_{i,m}^{n+1} = E_{i,m}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \delta \left[ \frac{v_p(\phi=0)}{v_p(\phi)} \right]} \left[ H_{i,m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i,m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right] \quad (5-19-167)$$

来实现波沿着一维网格的传播。

公式(5-19-167)中  $\frac{v_p(\phi=0)}{v_p(\phi)}$  (数值相速度比值)是用于加速一维网格中的传播速度的。

这样做的目的是为了使得入射波的数值传播与其在连接面的投影相一致,显然可以十分有效的消除差分方法各向异性对总场/散射场方法的不良影响。这个方法必须要选取合适的坐标原点来保证入射波与连接面的作用,当入射波旋转  $360^\circ$  时,必须重新定义初始点,如图 5-19-20 所示,根据如下

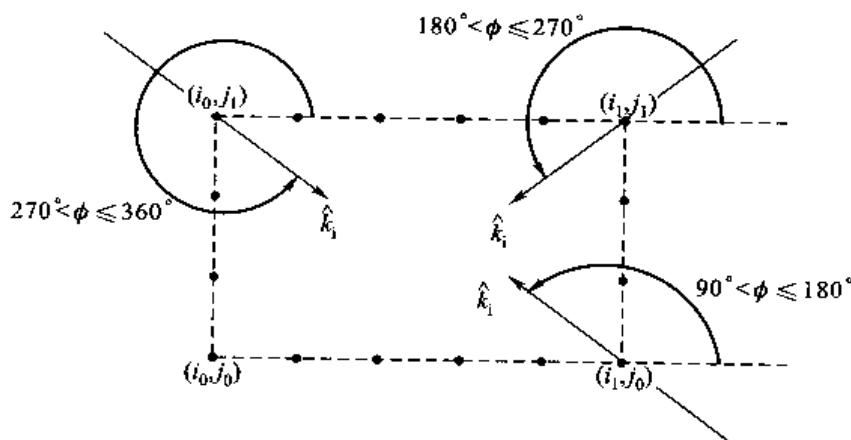


图 5-19-20 不同入射方向的坐标原点

$90^\circ < \phi \leq 180^\circ$ ,  $O_2$  原点在  $(i_1, j_0)$

$180^\circ < \phi \leq 270^\circ$ ,  $O_3$  原点在  $(i_1, j_1)$

$270^\circ < \phi \leq 360^\circ$ ,  $O_4$  原点在  $(i_0, j_1)$

相应的,位置矢量  $\vec{r}_{\text{comp}}$  也要修改为

$$90^\circ < \phi \leq 180^\circ \quad \vec{r}_{\text{comp}} = (i_{\text{comp}} - i_1) \delta \hat{x} + (j_{\text{comp}} - j_0) \delta \hat{y}$$

$$180^\circ < \phi \leq 270^\circ \quad \vec{r}_{\text{comp}} = (i_{\text{comp}} - i_1) \delta \hat{x} + (j_{\text{comp}} - j_1) \delta \hat{y}$$

$$270^\circ < \phi \leq 360^\circ \quad \vec{r}_{\text{comp}} = (i_{\text{comp}} - i_0) \delta \hat{x} + (j_{\text{comp}} - j_1) \delta \hat{y}$$

最后,以三维情况直角坐标系  $xyz$  下的时域有限差分区域为例讨论在总场边界加入入射波的方法,设平面波矢量  $k$  在  $xyz$  系中的球坐标方向参数为  $(\theta_i, \varphi_i)$ ,如图 5-19-21 所示。以平面波矢量  $k$  方向为  $\hat{r}$  建立球坐标系,其他两个单位矢为  $\hat{\theta}, \hat{\varphi}$ 。

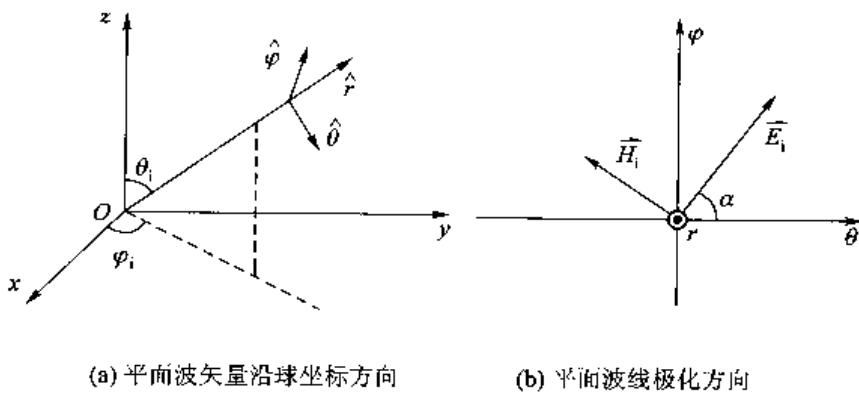


图 5-19-21 三维情况平面波入射时的坐标系

从直角坐标到球坐标的变换关系为

$$\begin{bmatrix} A_\varphi \\ A_\theta \\ A_r \end{bmatrix} = U \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (5-19-168)$$

其中,  $U$  为变换矩阵

$$U = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ \cos \theta_i \cos \varphi_i & \cos \theta_i \sin \varphi_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i \cos \varphi_i & \sin \theta_i \sin \varphi_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \quad (5-19-169)$$

从球坐标到直角坐标的变换关系为

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} A_\varphi \\ A_\theta \\ A_r \end{bmatrix} \quad (5-19-170)$$

根据矩阵  $U$  的幺正性有  $U^{-1} = U^T = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_i & \cos \theta_i \cos \varphi_i & \sin \theta_i \cos \varphi_i \\ \cos \varphi_i & \cos \theta_i \sin \varphi_i & \sin \theta_i \sin \varphi_i \\ 0 & \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}$

因此有

$$\begin{cases} A_x = -\sin \varphi_i A_\varphi + \cos \theta_i \cos \varphi_i A_\theta + \sin \theta_i \cos \varphi_i A_r \\ A_y = \cos \varphi_i A_\varphi + \cos \theta_i \sin \varphi_i A_\theta + \sin \theta_i \sin \varphi_i A_r \\ A_z = 0 A_\varphi + \sin \theta_i A_\theta + \cos \theta_i A_r \end{cases} \quad (5-19-171)$$

下面以三维总场边界上的  $E_z(i, j, k+1/2)$  为例, 将  $xyz$  坐标系中的节点位置  $(x, y, z)$  投影到平面波入射方向上的距离为

$$\begin{aligned} r' &= x \sin \theta_i \cos \varphi_i + y \cos \theta_i \sin \varphi_i + z \cos \theta_i \\ &= i \Delta x \sin \theta_i \cos \varphi_i + j \Delta y \cos \theta_i \sin \varphi_i + (k+1/2) \Delta z \cos \theta_i \end{aligned} \quad (5-19-172)$$

由于  $r'$  值可能位于一维入射波时域有限差分的两个节点之间, 例如  $r' = (p+\omega)\Delta x, 0 < \omega < 1$ , 即位于  $p$  与  $p+1$  节点之间, 采用线性差值公式可以得到三维总场边界上  $(i, j, k+1/2)$  节点处的入射波为

$$E_{z,i}(i, j, k+1/2) = (1-\omega)E_{z,i}(p) + \omega E_{z,i}(p+1) \quad (5-19-173)$$

其中,  $E_{z,i}$  为入射波电场在  $xyz$  坐标系中的  $z$  分量。其他节点上的  $E, H$  有类似的处理。以这种逐步推进方式加入入射波, 使得在总场边界以外产生的泄漏最小。

若入射波为线极化, 设电场  $E_i$  在  $\varphi\theta$  平面内与  $\theta$  夹角(称为极化角)为  $\alpha$ , 则有

$$\begin{bmatrix} E_{\varphi,i} \\ E_{\theta,i} \\ E_{r,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \sin \alpha \\ E_0 \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-19-174)$$

根据以上式子可以得到

$$\begin{bmatrix} E_{x,i} \\ E_{y,i} \\ E_{z,i} \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} E_{\varphi,i} \\ E_{\theta,i} \\ E_{r,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_i & \cos \theta_i \cos \varphi_i & \sin \theta_i \cos \varphi_i \\ \cos \varphi_i & \cos \theta_i \sin \varphi_i & \sin \theta_i \sin \varphi_i \\ 0 & -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \sin \alpha \\ E_0 \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-19-175)$$

即

$$\begin{cases} E_{x,i} = E_0 (-\sin \varphi_i \sin \alpha + \cos \theta_i \cos \varphi_i \cos \alpha) \\ E_{y,i} = E_0 (\cos \varphi_i \sin \alpha + \cos \theta_i \sin \varphi_i \cos \alpha) \\ E_{z,i} = -E_0 \sin \theta_i \cos \alpha \end{cases} \quad (5-19-176)$$

同样可以得到磁场的表达式

$$\begin{bmatrix} H_{x,i} \\ H_{y,i} \\ H_{z,i} \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} H_{\varphi,i} \\ H_{\theta,i} \\ H_{r,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_i & \cos \theta_i \cos \varphi_i & \sin \theta_i \cos \varphi_i \\ \cos \varphi_i & \cos \theta_i \sin \varphi_i & \sin \theta_i \sin \varphi_i \\ 0 & -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0 \cos \alpha \\ -H_0 \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-19-177)$$

$$\begin{cases} H_{x,i} = H_0 (-\sin \varphi_i \cos \alpha - \cos \theta_i \cos \varphi_i \sin \alpha) \\ H_{y,i} = H_0 (\cos \varphi_i \cos \alpha - \cos \theta_i \sin \varphi_i \sin \alpha) \\ H_{z,i} = H_0 \sin \theta_i \sin \alpha \end{cases} \quad (5-19-178)$$

$E_0, H_0$  之间满足关系:  $H_0 = \frac{E_0}{Z_0}$



## 几何绕射理论 Geometrical Theory of Diffraction

当电磁波遇到障碍物,如理想导体,在其中将感应出电流和电荷,它们是电磁波的二次源。定义:由障碍物的感应电流和电荷产生的场称为散射场,这种现象称为散射现象,障碍物称为散射体。散射场分反射场、折射场、绕射场。如来自光滑散射体表面的反射(折射)场就是一种散射场,这种场遵循几何光学定理,而来自散射体的棱边、尖顶等小曲率半径表面产生的散射场就不遵循几何光学定理,凡偏离几何光学定理的散射场称为绕射场,而空间一点的总场则是来自散射体的散射场和来自波源的入射场的矢量和。几何光学只研究高频电磁场的直射、反射、折射射线,当几何光学射线遇到任意一种不连续表面,例如边缘、尖顶,或者在向曲面掠入射时,将产生它不能进入的阴影区。根据几何光学理论,阴影区的场应为0,但实际上阴影区的场并不为0,这是由绕射现象造成的,几何光学法在该区域失效。

几何绕射理论(Geometrical Theory of Diffraction——GTD)是J. B. Keller(凯勒)在1958年前后提出来的。它将经典的几何光学概念加以推广,系统地引入了一种绕射射线来描述绕射。绕射射线的特点是:它不仅能进入几何光学亮区,也能进入几何光学阴影区。因此,几何绕射理论克服了几何光学在阴影区失效的缺点,同时也改善了亮区中的几何光学解。

根据几何绕射理论,只要满足从波源到观察点的光程为极值,便可以存在一条光学路径或射线,因此对于一个给定的观察点,可能有若干条射线通过,也就是说该点的高频场渐近表达式通常可包含若干个分量,每个分量的主项都可由其相应的射线光学表达式给出。

$$u(\vec{r}) \approx u_g(\vec{r}) + u_d(\vec{r}) \quad (5-20-1)$$

其中

$u_g(\vec{r}) = \sum_i u_{gi}(\vec{r}_i)$  表示沿某一条几何光学射线(入射、反射、折射) $\vec{r}_i$ 到达观察点的场;

$u_d(\vec{r}) = \sum_j u_{dj}(\vec{r}_j)$  表示沿某一绕射射线路径 $\vec{r}_j$ 到达观察点的场。

### 一、几何光学场和几何绕射理论的基本概念

#### 1. 几何光学场

##### (1) 均匀媒质中射线场的基本表示式

在几何光学中,定义 A、B 两点之间的光程长度

$$P = \int_A^B n(s) ds \quad (5-20-2)$$

其中,  $n(s)$  是媒质的折射率;  $ds$  是沿连接  $A$  和  $B$  的曲线  $C$  的微分单元。Fermat(费马)原理指出:射线(光程)遵循使光程长度取极值的路程。在均匀媒质中, 折射率  $n(s)=$  常数, 故连接两点的直线就是极值路程, 光沿直线传播。在几何光学近似条件下, 认为均匀媒质中的电磁波沿直线传播。

令  $V$  为被射线管的表面  $F$  和两个截面  $F_1$  和  $F_2$  所包围的体积, 如图 5-20-1 所示。应用 Gauss 定理即得

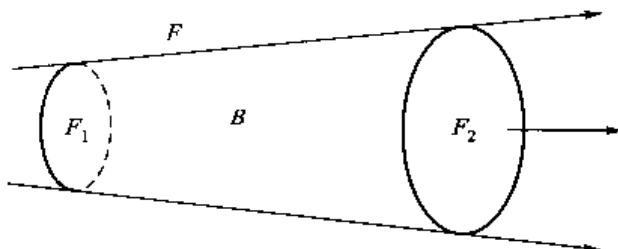


图 5-20-1 均匀媒质中的射线管

$$\int \nabla \cdot \vec{W} dV = 0 \quad (5-20-3)$$

其中  $\vec{W} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$ 。

式(5-20-3)称为几何光学的强度定律, 常称为输运方程。几何光学强度定律表明: 流入射线管一端的能量全部从另一端流出, 没有能量从射线管的侧壁流出, 即沿射线管的总能量是恒定的。现在根据几何光学强度定律考察场强沿射线的变化。

如图 5-20-2 所示, 在均匀媒质中传播波的一般形式是像散波, 它有两条不同位置的焦线 12 和 34。

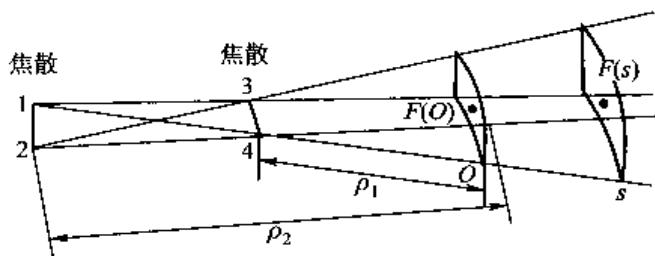


图 5-20-2 像散焦散管

假设像散射线的两个横截面为  $F(O)$  和  $F(s)$ ,  $F(O)$  的两个主曲率半径为  $\rho_1, \rho_2$ , 横截面  $F(s)$  与  $F(O)$  相距  $s$ 。这一射线管的两个横截面的面积之比为

$$\frac{F(O)}{F(s)} = \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)} \quad (5-20-4)$$

根据强度定律可知, 在  $F(O)$  和  $F(s)$  处场强的关系为

$$\frac{|E(s)|^2}{|E(O)|^2} = \frac{F(O)}{F(s)} \quad (5-20-5)$$

设  $E(O) = E_0$ , 所以

$$|E(s)| = |E_0| \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} \quad (5-20-6)$$

考虑到射线上各点场强的相位关系,取振幅参考面为相位参考面,则由波面面元  $F(O)$  到波面面元  $F(s)$  的相位因子为  $e^{-jks}$ ,于是均匀媒质中沿几何光学射线传播场的表示为

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1 A(s) e^{-jks} \quad (5-20-7)$$

式中,  $\vec{E}_1$  为  $s=0$  处的场强幅度;  $A(s)$  为振幅扩散因子, 表示射线场在传播时由于能量扩散而产生的场强幅度的衰减。

$$A(s) = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} \quad (5-20-8)$$

式(5-20-7)是几何光学射线场的基本表达式,它适用于在自由空间传播的直射射线,也适用于由物体表面反射或折射的射线。但式(5-20-7)不能用以计算焦散面(线或点)上的场。所谓焦散,就是相邻的众多射线相交而形成的包络曲线或曲面。在焦散区场强度变得很大,因而几何光学近似不成立。

注意:当  $s=-\rho_1$  或  $s=-\rho_2$  时,  $A(s) \rightarrow \infty$ ,  $F(s)$  面聚为图示的线 34 或线 12,由式(5-20-6)可知,几何光学射线场的幅度变为无穷大。这是由于在这些地方射线管的横截面趋于 0(横截面聚焦为直线)。凡射线管的截面积变为 0 的点的轨迹称为焦散,焦散可以是一个点、一条线或一个面。

情况 1:如果波阵面是球面,两曲率半径相等,  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$ , 在射线管中两条焦线汇合成一个焦点,即球心。扩散因子

$$A(s) = \frac{|E(s)|}{|E_0|} = \sqrt{\frac{F(O)}{F(s)}} = \sqrt{\frac{4\pi R_0^2/C_0}{4\pi R_1^2/C_1}} = \frac{R_0}{R_1} = \frac{\rho_0}{\rho_0 + s}$$

可以看出球面波电场的变化与传输距离呈反比。

情况 2:如果波阵面是圆柱面,只有一条焦线,此时  $\rho_1 = \infty$ ,  $\rho_2 = \rho_0$ (或  $\rho_1 = \rho_0$ ,  $\rho_2 = \infty$ ), 波只在一个方向扩散,扩散因子

$$A(s) = \frac{|E(s)|}{|E_0|} = \sqrt{\frac{F(O)}{F(s)}} = \sqrt{\frac{2\pi R_0/C_0}{2\pi R_1/C_1}} = \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 + s}}$$

电场的变化与传输距离的平方根成反比。

情况 3:如果波阵面是平面,  $\rho_1 = \rho_2 = \infty$ , 扩散因子

$$A(s) = \frac{|E(s)|}{|E_0|} = 1$$

波在传输时没有扩散,场的振幅保持不变。

## (2) 几何光学入射场

几何光学入射场就是源(天线)直接辐射到观察点的场,它是在空间“存在”它所照射的散射体时的场。当入射射线系的一部分投射到一个不可穿透的物体时就被此物体所阻挡,在此物体的后面形成了一个人射射线不能存在的阴影区,在阴影区中的几何光学场等于 0。阴影区的存在自然产生了一个阴影边界,它把散射体周围的空间分成源能看见的“亮区”和源看不见的“阴影区”。如图 5-20-3(a)所示,有边缘的理想导电屏存在一个人射阴影边界(ISB),图 5-20-3(b)显

示理想导电光滑凸曲面存在表面阴影边界(SSB),在阴影区中几何光学入射场等于0。

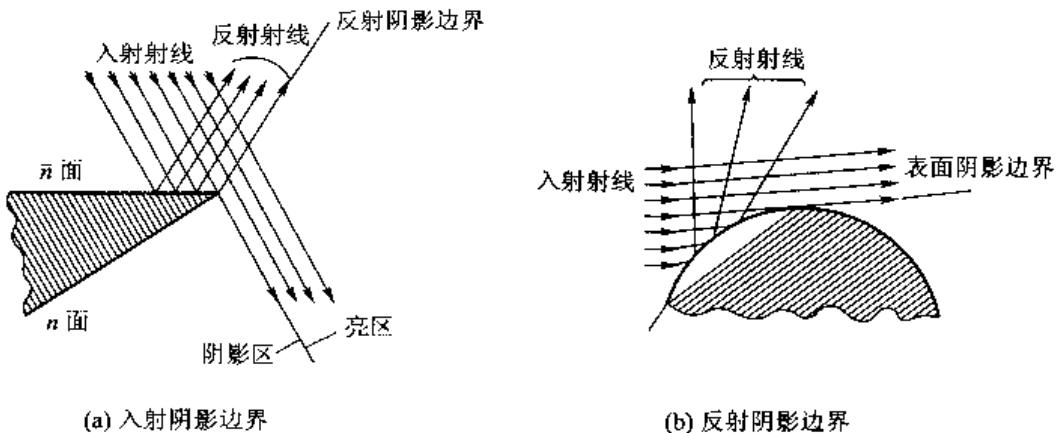


图 5-20-3 入射阴影边界和反射阴影边界

亮区中的几何光学入射场可表示为

$$\vec{E}^i(r) = \vec{E}^i(r_0) \sqrt{\frac{\rho_1^i}{(\rho_1^i + s^i)} \frac{\rho_2^i}{(\rho_2^i + s^i)}} e^{-jks} \quad (5-20-9)$$

式中,各符号的上标*i*用来表示与入射线有关的量,*s<sup>i</sup>*表示入射射线的距离;*r*是观察点*P*的位置矢量;*r<sub>0</sub>*是参考点*O*的位置矢量。

如果入射波是平面波, $\rho_1^i = \rho_2^i = \infty$ ,式(5-20-9)简化为

$$\vec{E}^i(r) = \vec{E}^i(r_0) e^{-jks} \quad (5-20-10)$$

如果入射波是球面波, $\rho_1^i = \rho_2^i = \rho^i$ ,式(5-20-9)简化为

$$\vec{E}^i(r) = C^i \frac{e^{-jks^i}}{s^i} \quad (5-20-11)$$

其中, $C^i = \lim_{\rho^i \rightarrow 0} \rho^i \vec{E}^i(r_0)$ 为激励因子,它与点源强度有关。

如果入射波是柱面波,令 $\rho_2^i = \infty$ ,并令 $\lim_{\rho^i \rightarrow 0} \sqrt{\rho^i} \vec{E}^i(r_0) = C^i$ ,它是与线源强度有关的有限值,代入式(5-20-9),可得

$$\vec{E}^i(r) = C^i \frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} \quad (5-20-12)$$

### (3) 几何光学反射场

如图 5-20-4 所示,当射线从源投射到一个理想导电面上时,就在表面变换为反射射线。在观察点*P*处反射射线几何光学场可表示为

$$\vec{E}^r(P) = \vec{E}^r(Q_R) A_r(s) e^{-jks} \quad (5-20-13)$$

其中,*Q<sub>R</sub>*为曲面上的反射点; $\vec{E}^r(Q_R)$ 为反射点反射波初始场,它由反射点入射场和反射点临域的物理特性和几何特性决定;*s*为从反射点到观察点的距离; $e^{-jks}$ 为反射波从反射点*Q<sub>R</sub>*到观察点*P*的相位延时;*A<sub>r</sub>(s)*为从反射点到观察点振幅扩散因子

$$A_r(s) = \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s)(\rho_2^r + s)}} \quad (5-20-14)$$

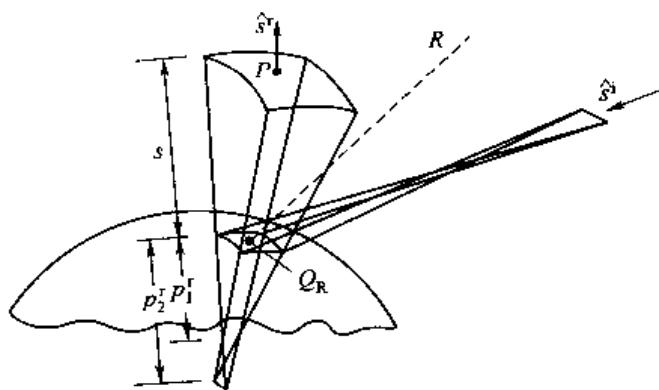


图 5·20·4 反射射线管

①  $\rho_1^i, \rho_2^i$  确定:  $\rho_1^i, \rho_2^i$  是反射波阵面的两个主曲率半径, 它与入射波前主曲率半径  $\rho_1^i, \rho_2^i$  以及反射点处曲面的主曲率半径  $\rho_1, \rho_2$  关系

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_{1,2}^i} = \frac{1}{\rho_{1,2}} + \frac{1}{\rho_0 \cos \theta_i} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0 \cos \theta_i}\right)^2 - \frac{4}{\rho_1 \rho_2}} \\ \frac{1}{\rho_0} = \frac{\sin^2 \varphi_1}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \varphi_2}{\rho_2} \end{cases} \quad (5-20-15)$$

式中,  $\rho_{1,2}^i$  为反射点处入射波主曲率半径;  $\rho_1, \rho_2$  为曲面在反射点处的主曲率半径;  $\theta_i$  为入射角;  $\varphi_1, \varphi_2$  为入射线和主曲率半径  $\rho_1, \rho_2$  的主方向之间的夹角。

对球面波入射,  $\rho_{1,2}^i = s^i$ , 根据反射体形状不同, 分三种情况:

情况 1: 当反射面是平面时,  $\rho_1 = \rho_2 = \infty$ , 由式(5-20-15)可得

$$\rho_{1,2}^i = s^i = \rho_{1,2}^i \quad (5-20-16)$$

即反射波仍为球面波, 可见平面反射并不改变波的扩散情况, 此时

$$A_r(s) = \frac{s^i}{s^i + s} \quad (5-20-17)$$

情况 2: 当反射面是柱面时, 设  $\rho_2 = \infty$ ,  $\rho_1 = a$  (圆柱半径), 则当  $\varphi_1 = \pi/2$  (入射线与圆柱轴线垂直) 时, 由式(5-20-15)可得

$$\frac{1}{\rho_1^i} = \frac{1}{\rho_1^i} + \frac{2}{a \cos \theta_i}, \rho_2^i = \rho_2^i = s^i \quad (5-20-18)$$

情况 3: 当反射面是球面时, 设  $\rho_1 = \rho_2 = a$  (球面半径), 代入式(5-20-15)可得  $\rho_1^i, \rho_2^i$ 。

②  $E^r(Q_R)$  确定: 反射点  $Q_R$  处的反射场  $E^r(Q_R)$  和入射场  $E^i(Q_R)$  的关系由理想导电面上总切向电场为 0 的边界条件确定

$$\hat{n} \times [\vec{E}^i(Q_R) + \vec{E}^r(Q_R)] = 0 \quad (5-20-19)$$

式中,  $\hat{n}$  是  $Q_R$  点的面法线单位矢量。由式(5-20-19)可写出如下关系式

$$\vec{E}^r(Q_R) = \vec{E}^i(Q_R) \cdot \bar{\bar{R}} \quad (5-20-20)$$

式中,  $\bar{\bar{R}}$  是  $Q_R$  点的并矢反射系数。通常  $\bar{\bar{R}}$  是  $3 \times 3$  矩阵, 但在图 5-20-5 所示射线基坐标系中, 定义

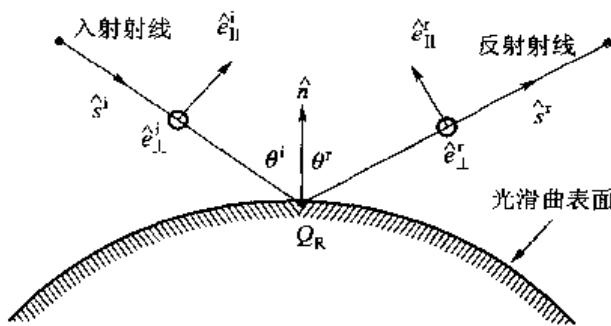


图 5-20-5 反射射线基坐标系

$$\begin{cases} \hat{e}_{\perp}^i \times \hat{s}^i = \hat{e}_{\parallel}^i \\ \hat{e}_{\perp}^r \times \hat{s}^r = \hat{e}_{\parallel}^r \end{cases} \quad (5-20-21)$$

已知,任意场总可以分解为垂直极化和平行极化两个分量,于是入射场和反射场可表示为

$$\begin{cases} \hat{E}^i(Q_R) = E_{\parallel}(Q_R) \hat{e}_{\parallel}^i + E_{\perp}(Q_R) \hat{e}_{\perp}^i \\ \hat{E}^r(Q_R) = E_{\parallel}^r(Q_R) \hat{e}_{\parallel}^r + E_{\perp}^r(Q_R) \hat{e}_{\perp}^r \end{cases} \quad (5-20-22)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \begin{bmatrix} R_{\parallel\parallel} & R_{\parallel\perp} \\ R_{\perp\parallel} & R_{\perp\perp} \end{bmatrix} \quad (5-20-23)$$

上式表明,在射线基坐标系中,并矢反射系数简化为二阶方阵,下标  $\parallel$  表示平行极化,上表示垂直极化。

式(5-20-22)写成二维矩阵方程形式

$$\begin{bmatrix} E_{\parallel}(Q_R) \\ E_{\perp}(Q_R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\parallel\parallel} & R_{\parallel\perp} \\ R_{\perp\parallel} & R_{\perp\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\parallel}^i(Q_R) \\ E_{\perp}^i(Q_R) \end{bmatrix} \quad (5-20-24)$$

根据平面波反射理论,平行极化分量和垂直极化分量相互独立地反射,没有交叉极化反射。结合边界条件可得

$$R_{\parallel\parallel} = R_h = 1, R_{\parallel\perp} = 0, R_{\perp\parallel} = 0, R_{\perp\perp} = R_s = -1 \quad (5-20-25)$$

式中,  $R_h$  为表示平行极化电场分量的反射系数,又称硬反射系数;  $R_s$  为表示垂直极化电场分量的反射系数,又称软反射系数。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_h & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \hat{e}_{\parallel}^i \hat{e}_{\parallel}^r - \hat{e}_{\perp}^i \hat{e}_{\perp}^r \quad (5-20-26)$$

式(5-20-13)反射场可以写成

$$\hat{E}^r(P) = \hat{E}^i(Q_R) \cdot \bar{\bar{\mathbf{R}}} \sqrt{\frac{\rho_1^i \rho_2^r}{(\rho_1^i + s)(\rho_2^r + s)}} e^{-jks}$$

反射场矩阵形式

$$\begin{bmatrix} E_{\parallel}(P) \\ E_{\perp}(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_h & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\parallel}(Q_R) \\ E_{\perp}(Q_R) \end{bmatrix} A_r(s) e^{-jks} \quad (5-20-27)$$

[例 1] 幅度为  $E_0$  的线极化均匀平面波入射在半径为  $a$  的理想导体球上,利用几何光学法确定:

(1) 远区 ( $s \gg \rho_1^r$  且  $s \gg \rho_2^r$ ) 的反射场。

(2) 导体球的雷达后向散射截面。

[解]

由公式(5-20-13)可知,理想导体球远区反射场为

$$\vec{E}^r(\vec{r}) = E_0 (-1) \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s)(\rho_2^r + s)}} e^{-jks} \xrightarrow{s \gg \rho_1^r, s \gg \rho_2^r} \vec{E}^r(\vec{r}) = -E_0 \frac{\sqrt{\rho_1^r \rho_2^r}}{s} e^{-jks}$$

对均匀平面波,入射波阵面曲率半径

$$\rho_1^r = \rho_2^r = \infty$$

由式(5-20-15),可得经理想导体球反射后反射波波阵面的曲率半径

$$\rho_1^r = \rho_2^r = \frac{a}{2}$$

因此

$$\hat{E}^r(\vec{r}) = -\frac{E_0}{2} \left( \frac{a}{s} \right) e^{-jks}$$

根据雷达散射截面定义

$$\sigma = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ 4\pi s^2 \frac{|E^r(s)|^2}{|E^r(Q_R)|^2} \right] = 4\pi s^2 \frac{\left| -\frac{E_0}{2} \left( \frac{a}{s} \right) e^{-jks} \right|^2}{|E_0|^2} = \pi a^2$$

可以看出,理想导体球的几何光学散射截面等于球的几何截面面积,但只有在球的半径远大于波长时才成立。

## 2. 几何绕射理论基本概念

几何光学在阴影区失效,究其原因是几何光学理论要求满足波长为 0 的充要条件,对于一般的应用,也必须满足  $\sqrt{\rho} \geq 100\sqrt{\lambda}$ ,这里  $\rho$  是镜面反射点的局部曲率半径,  $\lambda$  是工作波长。当散射体是具有小曲率半径的边缘、拐点、尖端,或电磁波掠入射到光滑凸曲面物体的表面上时,都会出现绕射现象,此时几何光学条件得不到满足,几何光学理论失效。用严格的方法求解电磁场绕射的边值问题十分困难,Keller 等人在经典几何光学理论的基础上引入新的射线概念描述绕射问题,从而形成推广的几何光学理论,称为几何绕射理论(GTD)。几何绕射理论的基本概念可归结为下列三点:

① 绕射场是沿绕射射线传播的,其射线轨迹可用 Fermat 原理确定。

② 局部性原理。即在高频时,绕射场和反射场一样只取决于散射体上绕射点附近物体的物理特性、几何形状以及入射场特性,而和距绕射点较远的物体的几何形状、物理特性无关。

③ 离开绕射点后的绕射射线仍遵循几何光学定理。

几何绕射理论克服了几何光学近似在阴影区失效的缺点,同时也改善了亮区中的几何光学解。绕射射线场的初始幅度是由绕射系数确定的,这和几何光学近似的反射和透射射线场的初始值分别由反射系数和透射系数确定是一样的。但 Keller 导出的几何绕射理论基本算式(绕射系数),在亮区和几何光学阴影边界两侧的过渡区内失效,20世纪70年代 Pathak(帕萨克)和 KovyoumJian(孙琼)等又将之发展成为一致性几何绕射理论(UTD),一致性几何绕射理论克服了几何绕射理论的缺点,较好地解决了电磁波在阴影边界上的连续问题。一致性几何绕射理论

在几何光学阴影边界过渡区有效，在阴影边界过渡区以外，则自动转化为几何绕射理论算式。对于源在曲面上的情况，也做了较为成功的研究，从而使其更具工程实用价值。

Keller 的绕射系数可以从一些简单的几何形体的散射问题中求得，这些简单几何形体的散射问题称为典型问题。利用几何绕射理论的局部性原理，对每一个复杂构形的各个局部分别引用已知的典型问题解，然后把各个局部对场的贡献叠加起来，可求得复杂物体的辐射和散射特性。几何绕射理论典型的绕射问题有边缘、尖顶和曲面绕射。

### (1) 边缘绕射

边缘绕射射线与边缘（或边缘切线）的夹角等于相应的人射射线与边缘（或边缘的切线）的夹角。入射射线与绕射射线分别位于绕射点与边缘垂直平面的两侧或在一个平面上。一条人射射线将激励出无穷多条绕射射线，它们都位于一个以绕射点为顶点的圆锥面上。圆锥轴就是绕射点的边缘或边缘的切线，圆锥的半顶角等于入射射线与边缘或边缘切线的夹角，当入射射线与边缘垂直时，圆锥面退化为与边缘垂直的平面圆盘，如图 5-20-6 所示。边缘绕射射线所分布的圆锥面通常称为 Keller 圆锥。

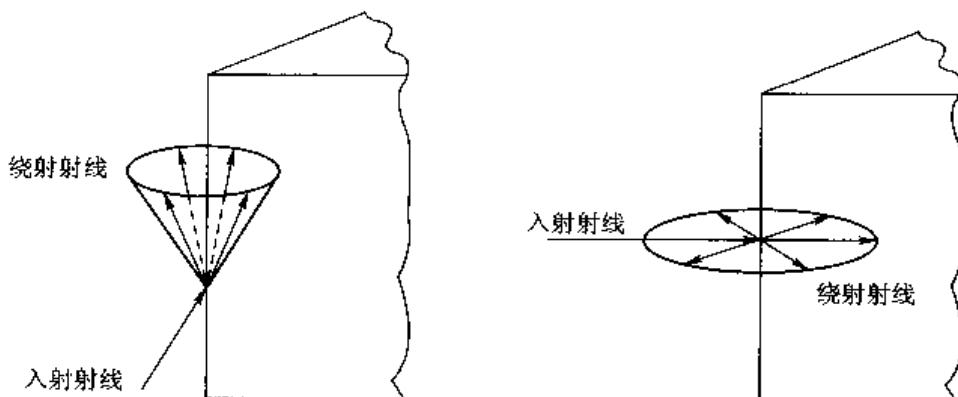


图 5-20-6 边缘绕射射线

### (2) 尖顶绕射

尖顶绕射射线就是从源点  $S$  经过尖顶  $D$  到达场点  $P$  的射线，如图 5-20-7 所示。尖顶可能是圆锥的顶点，也可能是  $90^\circ$  拐角的顶点。由尖顶发出的绕射射线可以向散射体所占空间以外的任意方向传播，因此一根入射射线可以激励起无穷多根尖顶绕射射线，它们将以尖顶为中心向四面八方传播。所以尖顶绕射场比边缘绕射场衰减更快。导出尖顶绕射场的渐近表示式是困难的，在这方面已进行过的工作不多，目前只导出了适用于  $90^\circ$  拐角顶点的角绕射系数，但至今还没有普遍适用的把尖顶绕射场和入射场联系起来的尖顶绕射系数，幸而在大多数情况下尖顶绕射场是可以忽略不计的。

### (3) 曲面绕射

当有射线向光滑的理想导电凸曲面掠入射时，它的场将分为两部分：一部分入射能量按几何光学定律继续沿凸表面的阴影边界前进，另一部分能量则沿着物体的表面传

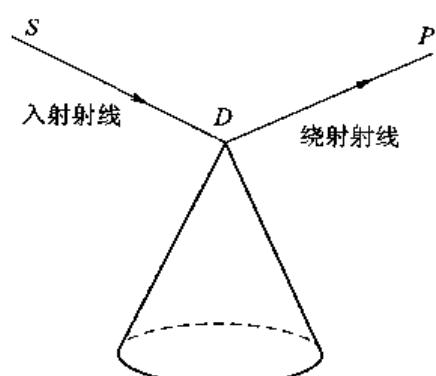


图 5-20-7 尖顶绕射射线

播而成为表面射线。表面射线在沿着曲面传播时不断沿曲面的切线方向发出绕射射线。由广义的费马原理可知,对于在散射体阴影区的场点  $P$  而言,入射射线和绕射射线是分别和表面上的  $Q_1$  和  $Q_2$  点相切的,而表面射线则是沿  $Q_1$  和  $Q_2$  两点间的最短路程传播的。曲面上两点间的最短路程称为短程线。因为表面射线在曲面上传播时不断沿传播路程的切线方向发出绕射射线,所以它的能量衰减得很快,通常它是按指数规律衰减的,因此曲面绕射场也比边缘绕射场弱。表面射线又称为“爬行波”。理论上表面射线要环绕封闭曲面爬行无穷多周,实际上因为它的能量衰减得很快,因此环绕闭曲面一周以上的射线可以不予考虑,如图 5-20-8 所示。

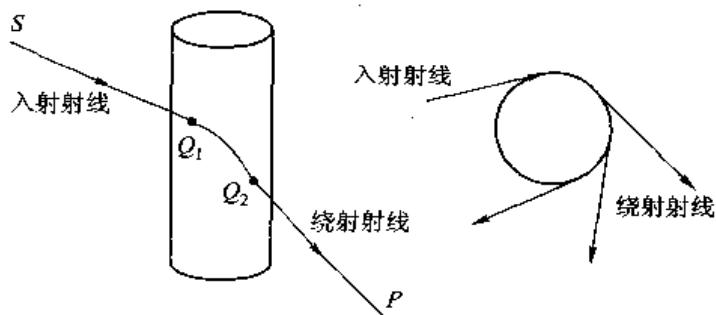


图 5-20-8 曲面绕射射线

## 二、边缘几何绕射

当入射射线经过散射体边界面的边缘时,产生边缘绕射。绕射边缘的棱可以是一条直线、一条在平面内的曲线或一条空间曲线,直线和圆边缘的绕射是实际中最常见的两个例子。

如图 5-20-9 所示,根据几何绕射理论,绕射射线在离开绕射点后其性态服从几何光学理论,因此可以把边缘绕射射线场写成

$$\hat{E}^d(P) = \hat{E}^d(P_0) \sqrt{\frac{\rho_1^d \rho_2^d}{(\rho_1^d + s)(\rho_2^d + s)}} e^{-jks} \quad (5-20-28)$$

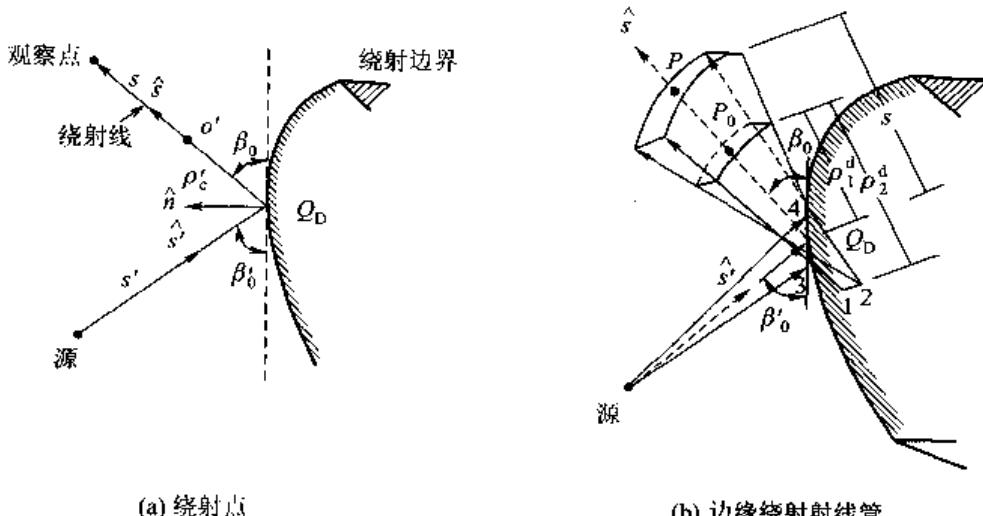


图 5-20-9 边缘绕射

式中,  $\vec{E}^d(P_0)$  为参考点  $P_0$  绕射场;  $\rho_1^d = \rho_e'$  为绕射点(绕射场第一焦散)到参考点  $P_0$  距离;  $\rho_2^d = \rho_e$  为绕射场第二焦散到参考点  $P_0$  距离;  $s$  为沿绕射射线从参考点到观察点的距离。

为了把  $\vec{E}^d(P)$  和边缘绕射点  $Q_D$  的入射场联系起来, 把图 5-20-9 中的  $P_0$  移到边缘绕射点  $Q_D$ , 即令  $\rho_1^d \rightarrow 0$ , 得

$$\vec{E}^d(P) = \lim_{\rho_1^d \rightarrow 0} [\sqrt{\rho_1^d} \vec{E}^d(P_0)] \sqrt{\frac{\rho_2^d}{(\rho_1^d + s)(\rho_2^d + s)}} e^{-jks}$$

上式之所以要对  $\sqrt{\rho_1^d} \vec{E}^d(P_0)$  取  $\rho_1^d \rightarrow 0$  的极限(而不是直接令  $\rho_1^d = 0$ )是因为在绕射点  $Q_D$  的边缘恰好是绕射射线管的焦散线(求反射场时不存在这一问题), 根据几何光学强度定律, 在  $Q_D$  的绕射场趋于无穷大, 式(5-20-28)已经失效。但是因为  $\vec{E}^d(P)$  应当与  $P_0$  无关, 所以上述极限存在并可定义为

$$\lim_{\rho_1^d \rightarrow 0} [\sqrt{\rho_1^d} \vec{E}^d(P_0)] = E^i(Q_D) \cdot \bar{D}$$

$\bar{D}$  是并矢边缘绕射系数, 所以

$$\vec{E}^d(P) = \vec{E}^i(Q_D) \cdot \bar{D} A(s', s) e^{-jks} \quad (5-20-29)$$

其中

$$A(s', s) = \sqrt{\frac{\rho_e}{s(\rho_e + s)}} \quad (5-20-30)$$

式中,  $\rho_e = \rho_2^d - \rho_1^d = \lim_{\rho_1^d \rightarrow 0} \rho_2^d$  为边缘绕射射线的焦散距离, 其表达式见式(5-20-54)。

### 1. 直边缘绕射射线追踪

边缘绕射射线满足推广的 Fermat 原理。在均匀媒质中的绕射点处, 入射射线与绕射射线分别位于绕射点与边缘垂直平面的两侧或在一个平面上, 绕射射线与边缘的夹角等于入射射线与边缘的夹角, 如图 5-20-6 所示, 其数学表示为

$$\hat{s}^i \cdot \hat{t} = \hat{s}^d \cdot \hat{t} \quad (5-20-31)$$

式中,  $\hat{s}^i$ 、 $\hat{s}^d$  分别为入射射线和绕射射线的单位矢量;  $\hat{t}$  是边缘上绕射点的切线方向单位矢量。上式就是 Keller 的边缘绕射定律。

根据式(5-20-31)进行曲边缘上绕射点的射线追踪是一维搜索问题, 求解只有一个未知量(即曲线的参量)的方程, 通常要用数值方法求解绕射点, 只有在简单特例情形下才有解析解。下面以直边缘为例说明。

如图 5-20-10 所示, 设  $z$  轴沿劈的直边缘, 源点  $S(\rho', \varphi', z_1)$ , 场点  $P(\rho, \varphi, z_2)$ , 将入射平面和绕射平面展开成一个平面。由于入射角等于绕射角, 所以展开图中入射射线和绕射射线变为一条直线, 由此可得绕射点  $Q_D$  的坐标

$$(x, y, z) = \left( 0, 0, z_1 + (z_2 - z_1) \frac{\rho'}{\rho' + \rho} \right)$$

### 2. 直边缘绕射场的计算

如图 5-20-11 所示, 定义射线基坐标系  $(\hat{s}', \hat{\beta}_0', \hat{\varphi}')$ ,  $(\hat{s}, \hat{\beta}, \varphi)$ 。已知直角坐标系的  $z$  轴与劈边重合,  $x$  轴位于劈的一个面上,  $y$  轴是此平面的外向法线, 源点  $S(\rho', \varphi', z_1)$ , 场点  $P(\rho, \varphi, z_2)$ , 绕

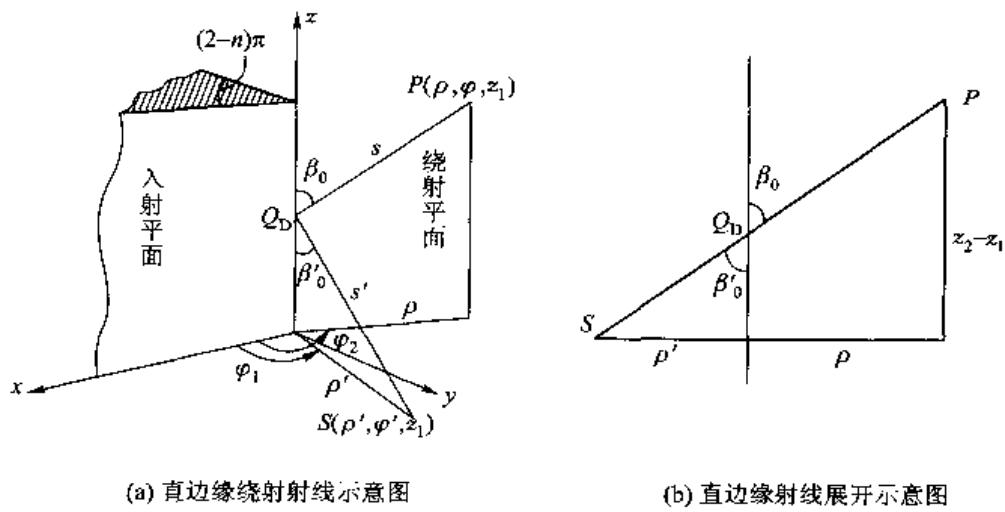


图 5-20-10 直边缘绕射射线寻迹

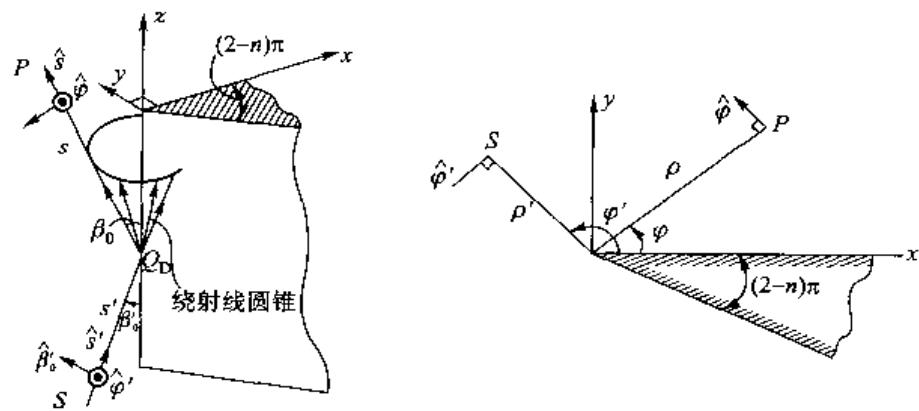


图 5-20-11 劈绕射射线基坐标示意图

射点  $Q_D$ , 距离  $SQ_D$ 、 $Q_D P$  分别为  $s'$ 、 $s$ 。

则在射线基坐标系下  $Q_D$  点的绕射场可用如下方程表示

$$\vec{E}^d(P) = \vec{E}^d(Q_0) A(s', s) e^{-i\beta s} \quad (5-20-32)$$

其中,  $A(s', s)$  为空间扩散因子

$$A(s', s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{s}} & \text{平面波} \\ -\frac{1}{\sqrt{\rho}} & \text{柱面波 } \rho = s \sin \beta_0 \\ \sqrt{\frac{s'}{s(s+s')}} & \text{球面波} \end{cases} \quad (5-20-33)$$

$\vec{E}^d(Q_0)$ 为绕射点的初始场,它由入射场、直劈绕射点附近物体物理特性和几何形状决定

$$\vec{E}^d(Q_D) = \vec{E}^j(Q_D) \cdot \overline{\vec{D}}(\phi', \varphi, \beta_0') \quad (5-20-34)$$

其中,  $\bar{D}(\varphi', \varphi, \beta'_0)$  为绕射点的并矢绕射系数, 它描述了边缘绕射点的绕射效应。

在射线基坐标系中,  $\hat{s}'$ 、 $\hat{s}$  分别表示入射和绕射方向单位矢量,  $\hat{\beta}'_0$ 、 $\hat{\phi}'$  分别表示与入射面平行

和垂直单位矢量:  $\hat{\beta}, \hat{\varphi}$  分别表示与绕射面平行和垂直单位矢量, 并且  $\hat{s}' = \hat{\beta}_0' \times \hat{\varphi}', \hat{s} = \hat{\beta} \times \hat{\varphi}$ 。

在射线基坐标系下

$$\begin{cases} \vec{E}^i(Q_D) = \hat{\beta}_0' E_{\beta_0'}^i + \hat{\varphi}' E_{\varphi'}^i = \begin{bmatrix} E_{\beta_0'}^i \\ E_{\varphi'}^i \end{bmatrix} \\ \vec{E}^d(Q_D) = \hat{\beta} E_\beta^d + \hat{\varphi} E_\varphi^d = \begin{bmatrix} E_\beta^d \\ E_\varphi^d \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-20-35)$$

绕射矩阵简化为二阶方阵

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} D_{\beta_0'\beta} & D_{\beta_0'\varphi} \\ D_{\varphi'\beta} & D_{\varphi'\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_m & 0 \\ 0 & D_e \end{bmatrix} \quad (5-20-36)$$

其中,  $D_e = D_{\varphi'\varphi}$  表示垂直于入射面极化电场分量的自绕射系数, 这种极化在几何绕射理论中称为电极化, 故绕射系数记为  $D_e$ , 有时这种极化方式又称为硬边缘绕射, 故又记为  $D_h$ ;  $D_m = D_{\beta_0'\beta}$  表示平行于入射面极化电场分量的自绕射系数, 又称为磁极化边缘绕射系数或软边缘绕射系数  $D_s$ 。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -D_s & 0 \\ 0 & -D_h \end{bmatrix} \quad (5-20-37)$$

Keller 通过比较几何绕射理论近似解与索末菲严格解对大  $K$  值渐近展开式的方法求得劈角为  $(2-n)\pi$  时直劈的  $D_s, D_h$  标量绕射系数

$$D_{s,h}^k(\varphi, \varphi'; \beta_0) \approx \frac{e^{-\pi/4} \sin \frac{\pi}{n}}{n \sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \left\{ \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{n}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi'}{n}} \right\} \quad (5-20-38)$$

式(5-20-38)称为 Keller 的非一致性绕射系数, 则观察点  $P$  的边缘绕射场矩阵形式

$$\begin{bmatrix} E_\beta(P) \\ E_\varphi(P) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_s^k & 0 \\ 0 & D_h^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\beta_0'}^i(Q_R) \\ E_{\varphi'}^i(Q_R) \end{bmatrix} A(s', s) e^{-jk_s} \quad (5-20-39)$$

图 5-20-12 所示为线源向理想导电劈入射时场区划分示意图。

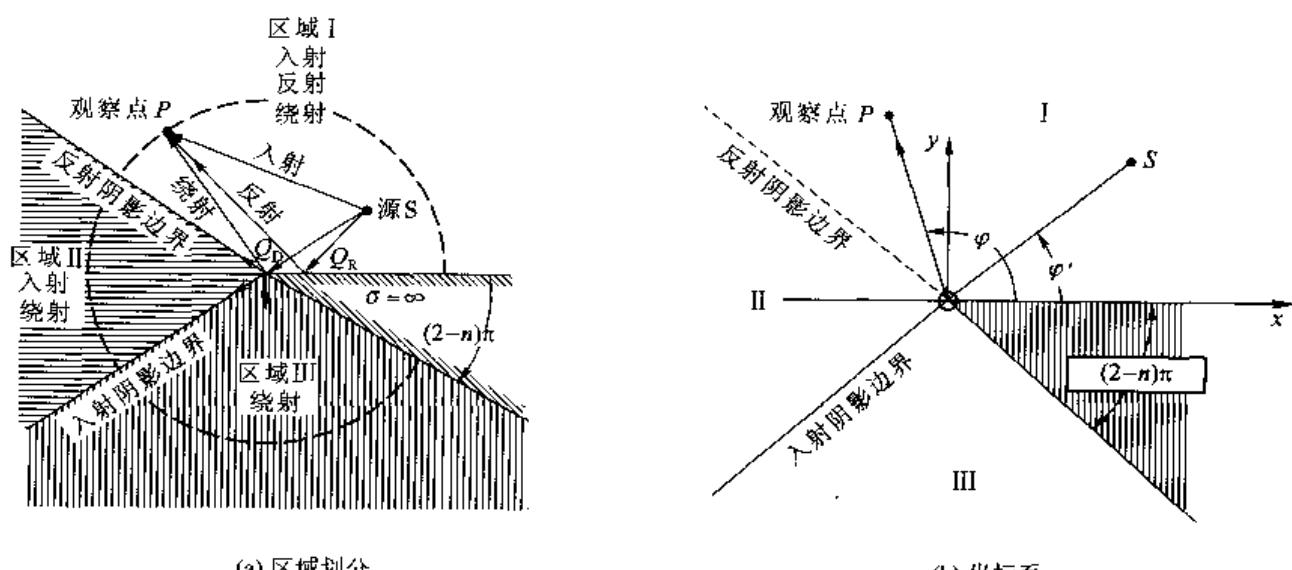


图 5-20-12 理想导电劈附近线源

当观察点位于入射阴影边界 ISB 时,  $\varphi - \varphi_1 = \pi$ , 式(5-20-38)第一项出现奇异; 当观察点位于反射阴影边界 RSB 时,  $\varphi + \varphi_1 = \pi$ , 式(5-20-38)第二项出现奇异。将引入射阴影边界和反射阴影边界临界的区域称为过渡区, 由此可见, Keller 的非一致边缘绕射系数在入射和反射阴影边界的过渡区内失效, 只有当场点不靠近阴影边界或反射边界时, Keller 绕射系数才是有效的。

### 3. 一致性绕射场的计算

为解决 Keller 绕射理论在边界过渡区场的不连续性问题, 20 世纪 70 年代初提出了理想导电劈一致性几何绕射理论, 导出了在过渡区内外都有效的理想导电劈的绕射系数

$$D_{s,h}(L; \varphi'; \beta_0) = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n \sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \left\{ \left[ \begin{aligned} &\tan\left(\frac{\pi + (\varphi - \varphi')}{2n}\right) F[kLa^-(\varphi - \varphi')] \\ &+ \tan\left(\frac{\pi - (\varphi - \varphi')}{2n}\right) F[kLa^+(\varphi - \varphi')] \end{aligned} \right] \right. \\ \left. \mp \left[ \begin{aligned} &\tan\left(\frac{\pi + (\varphi + \varphi')}{2n}\right) F[kLa^-(\varphi + \varphi')] \\ &+ \tan\left(\frac{\pi - (\varphi + \varphi')}{2n}\right) F[kLa^+(\varphi + \varphi')] \end{aligned} \right] \right\} \quad (5-20-40)$$

式中,  $F(x)$  为过渡函数, 数值计算见附录

$$F(x) = 2j \sqrt{x} e^{jx} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-u^2} du \quad (5-20-41)$$

$$a^\pm(\beta) = 2 \cos^2 \left( \frac{2n\pi N^\pm - \beta}{2} \right) \quad (5-20-42)$$

其中,  $N^\pm$  是满足下列方程的最小整数

$$\begin{aligned} 2\pi n N^\pm - \beta &= \pm \pi \\ \beta &= \varphi \mp \varphi' \end{aligned} \quad (5-20-43)$$

$L$  是距离参数, 它满足总场在入射和反射阴影边界连续条件。通常

$$L = \frac{s(\rho_e^i + s)\rho_1^i\rho_2^i \sin^2 \beta_0'}{\rho_e^i(\rho_1^i + s)(\rho_2^i + s)} \quad (5-20-44)$$

$\rho_1^i, \rho_2^i$  为入射波前在绕射点的曲率半径;  $\rho_e^i$  为边缘基入射面上入射波前的曲率半径。

射线基坐标系中

$$L = \begin{cases} \rho ( = s \sin \beta_0'^2 ) & \text{平面波入射} \\ \frac{\rho \rho'}{\rho + \rho'} \left( \rho = s \sin \beta_0 \right) & \text{柱面波入射} \\ \frac{ss'}{s + s'} \sin^2 \beta_0 & \text{锥或球面波入射} \end{cases} \quad (5-20-45)$$

如果观察点在远区, 式(5-20-45)距离参数  $L$  简化为

$$L = \begin{cases} s \sin \beta_0'^2 & \text{平面波入射} \\ \rho' (\rho' = s' \sin \beta_0') & \text{柱面波入射} \\ s' \sin^2 \beta_0 & \text{锥或球面波入射} \end{cases} \quad (5-20-46)$$

式(5-20-33)空间因子简化为

$$A(s', s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{s}} & \text{平面波入射} \\ \frac{1}{\sqrt{\rho}} (\rho = s \sin \beta_0) & \text{柱面波入射} \\ \frac{\sqrt{s'}}{s} & \text{球面波入射} \end{cases} \quad (5-20-47)$$

式(5-20-40)称为一致性绕射系数,比较式(5-20-38)和式(5-20-40),不同的仅仅是过渡函数  $F[kLa^+]$  宗量中的距离参数  $L$ ,距离参数意味着绕射系数和绕射路径长度有关,这不符合 Keller 假设的局部场原理,但引入参数  $L$  后消除了边界上的不连续性,使越过入射和反射阴影边界时绕射场的不连续变化恰好补偿了几何光学场的不连续,同时在过渡区外,过渡函数  $F[x] \rightarrow 0$ ,式(5-20-40)的绕射系数自动转化为式(5-20-38)。

$\varphi' = 0$  或  $n\pi$  的掠入射是一种特殊情况,必须单独处理。因为此时  $D_s = 0$ ,这时由式(5-20-40)确定的  $D_h$  必须乘以  $1/2$ ,因为在掠入射时入射场和反射场合为一体,沿劈面传播到边缘的场一半是入射场一半是反射场。尽管如此,在这种情况下还是将几何光学总场看成“入射场”较为方便,所以在  $\varphi' = 0$  或  $n\pi$  时应当在硬绕射系数上乘以  $1/2$ 。

如果  $n=1$ ,没有边缘,边界就是无限大理想导电面,  $D_s = D_h = 0$ 。

如果  $n=2$ ,则劈变为半面,从式(5-20-43)有  $N^\perp = 0$ ,因而式(5-20-42)变为

$$\alpha^+(\beta) = \alpha(\beta) = 2 \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

于是

$$\tan\left(\frac{\pi+\beta}{2n}\right)F[kLa(\beta)] + \tan\left(\frac{\pi-\beta}{2n}\right)F[kLa(\beta)] = \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\beta}{n}\right)} \quad (5-20-48)$$

绕射系数式(5-20-40)为

$$D_{s,h} \approx \frac{-e^{-ik/4}}{2\sqrt{2\pi k \sin \beta_0}} \left\{ \frac{F[kLa(\varphi-\varphi')] + F[kLa(\varphi+\varphi')]}{\cos \frac{\varphi-\varphi'}{2}} \right\} \quad (5-20-49)$$

#### 4. 算例:计算图 5-20-13 所示有限方形地平面上单极子天线的辐射方向图

求解:单极子位于方形地平面中心时,两个主平面辐射方向图相同;当单极子不在方形地平面中心时,两个主平面的方向图虽有不同,但计算方法是相同的,下面以  $yOz$  面辐射方向计算为例说明。

如图 5-20-14,假设正方形导体宽  $w$ ,单极子长度  $l$ ,为简化计算,假设单极子是长度远小于波长的电基本振子,位于其长度的  $1/2$  处,即源点坐标  $(0, 0, l/2)$ 。

由式(5-20-10),可得远区观察点  $P$  的直射场为

$$\vec{E}(P) = E_0 \sin \theta \frac{e^{-jk(r-l\cos\theta/2)}}{r-l\cos\theta/2} \approx E_0 \sin \theta \frac{e^{-jk(r-l\cos\theta/2)}}{r}$$

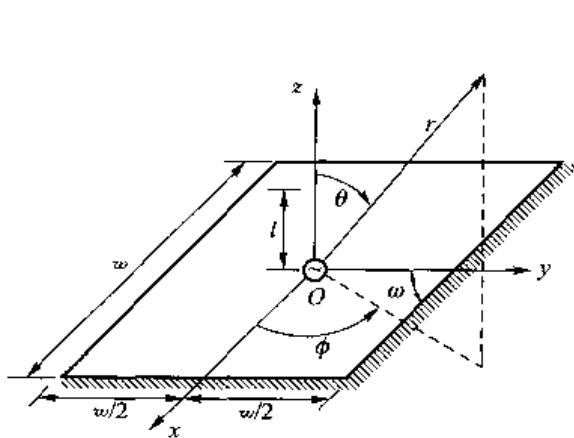


图 5-20-13 有限方形地面上的单极子天线结构示意图

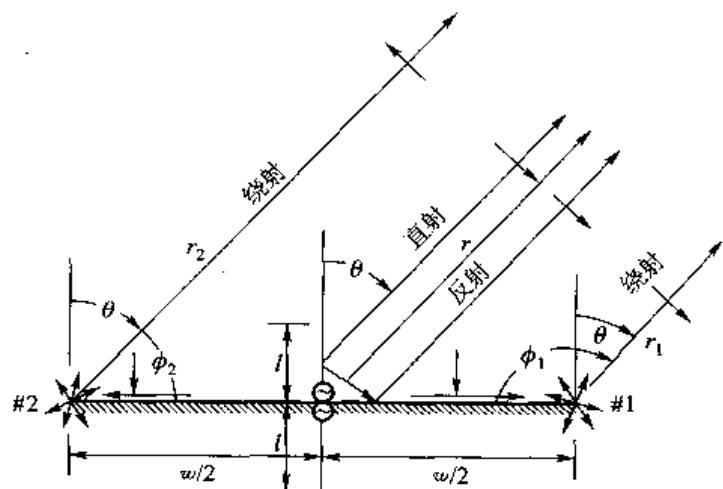


图 5-20-14 平板射线场示意图

根据式(5-20-11)、式(5-20-13)、式(5-20-17),则远区观察点  $P$  的反射场为

$$\vec{E}^r(P) = E_0 \sin \theta \frac{e^{-jk(r+l \cos \theta)}}{r+l \cos \theta} \approx E_0 \sin \theta \frac{e^{-jk(r+l \cos \theta)}}{r}$$

边界#1的绕射场

$$\vec{E}_{\theta 1}^d(P) = \vec{E}(Q_1) D_{h1}(L_1; \phi_1, \phi_0; \beta_0) A_1(w, r_1) e^{-jkr_1}$$

其中

$$\vec{E}(Q_1) = \vec{E}\left(r = \frac{w}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}\right) = E_0 \frac{e^{-jkw/2}}{w/2}$$

因为掠入射,沿劈面传播到边缘的一半是入射场,一半是反射场,因此  $D_h = D_h/2$ ,  $D_s = 0$ ,  $\beta'_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $n = 2$ 。

对边缘入射场是球面波,观察点在远场,根据式(5-20-46)、式(5-20-47)距离参数  $L_1$  和空间衰减因子  $A_1(w, r_1)$

$$L_1 = s \sin \beta'_0 \Big|_{\frac{s}{s'_0} = \frac{\pi}{2}} = \frac{w}{2}$$

$$A_1(w, r_1) = \frac{\sqrt{s'}}{s} \Big|_{\frac{s}{s' = r_1} = \frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{w/2}}{r_1}$$

因为由源点到绕射点  $Q_1$  的入射角  $\phi_0 = 0$ ,所以

$$\varphi = \phi_1 = \theta + \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi' = \phi_0 = 0$$

$$\alpha(\varphi \mp \varphi') = 2 \cos^2 \left( \frac{\theta + \frac{\pi}{4}}{2} \right)$$

由式(5-20-49),绕射系数

$$D_{h1}(L; \phi_1, \phi_0; \beta_0) \approx \frac{-e^{j\pi/4}}{2 \sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \left\{ \frac{F[kLa(\varphi - \varphi')]}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \mp \frac{F[kLa(\varphi + \varphi')]}{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} \right\}$$

$$= \frac{-e^{-j\pi/4} F[kw \cos^2(\theta/2 + \pi/4)]}{\sqrt{2\pi k} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

因此,  $\pm 1$  边缘绕射场

$$\begin{aligned} E_{\theta}^d(P) &= E_0 \frac{e^{-jkw/2}}{w/2} \frac{1}{2} D_{h1}(L; \phi_1, \phi_0; \beta_0) \frac{\sqrt{w/2}}{r_1} e^{-jk\phi_1} \\ &= \frac{E_0}{2} \frac{e^{-jkw/2}}{\sqrt{w/2}} D_{h1}(L; \phi_1, \phi_0; \beta_0) \frac{e^{j\phi_1}}{r_1} \end{aligned}$$

同理, 对 #2 边缘有

$$L_2 = \frac{w}{2}, A_2(w, r_1) = \frac{\sqrt{w/2}}{r_2}, \varphi = \phi_2 - \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \theta & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{2} - \theta & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}, \varphi' = 0$$

因此, 边缘 #2 绕射系数

$$\begin{aligned} D_{h2}(L_2; \phi_2, \phi_0; \beta_0) &\approx \frac{-e^{-j\pi/4}}{2 \sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \left\{ \frac{F[kLa(\varphi - \varphi')]}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} + \frac{F[kLa(\varphi + \varphi')]}{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} \right\} \\ &= \frac{-e^{j\pi/4} F[kw \cos^2(\phi_2)]}{\sqrt{2\pi k} \cos(\phi_2)} \end{aligned}$$

所以, 边界  $\pm 2$  的绕射场

$$E_{\theta 2}^d(P) = -\frac{E_0}{2} \frac{e^{-jkw/2}}{\sqrt{w/2}} D_{h2}\left(\frac{w}{2}; \phi_2, 0; \beta_0\right) \frac{e^{-jk\phi_2}}{r_2}$$

对远区观察点相位项

$$\begin{cases} r_1 = r - \frac{w}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r - \frac{w}{2} \sin(\theta) \\ r_2 = r + \frac{w}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r + \frac{w}{2} \sin(\theta) \end{cases}$$

幅度项  $r_1 \approx r_2 \approx r$ 。

由于单极子在水平面内是均匀辐射, 4 条边缘都受到单极子的照射, 所以空间总场应为直射场、反射场和 4 条边缘绕射场之和。但因为另外两条边缘绕射场在  $yOz$  面相互抵消, 因此  $yOz$  面总场

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= \vec{E}^i(P)\delta_i + \vec{E}^r(P)\delta_r + \vec{E}_{\theta 1}^d(P)\delta_{\theta 1} + \vec{E}_{\theta 2}^d(P)\delta_{\theta 2} + \vec{E}_{\theta 3}^d(P)\delta_{\theta 3} + \vec{E}_{\theta 4}^d(P)\delta_{\theta 4} \\ &= \vec{E}^i(P)\delta_i + \vec{E}^r(P)\delta_r + \vec{E}_{\theta 1}^d(P)\delta_{\theta 1} + \vec{E}_{\theta 2}^d(P)\delta_{\theta 2} \end{aligned}$$

其中,  $\delta$  表示所计算场区相应场(直射场、反射场、绕射场)是否存在判断因子, 它由相应射线寻迹结果决定, 在相应场值存在区域  $\delta=1$ , 否则  $\delta=0$ 。

假设,  $t=\lambda/4$ ,  $2w=1.22$  m,  $f=1.0$  GHz, 计算远场方向图如图 5-20~15。

小结: 任意波前的像散波斜入射时, 理想导电壁外部的总场可以表示为

$$\vec{E}(P) = \vec{E}^{GO}(P) + \vec{E}^d(P) \quad (5-20-50)$$

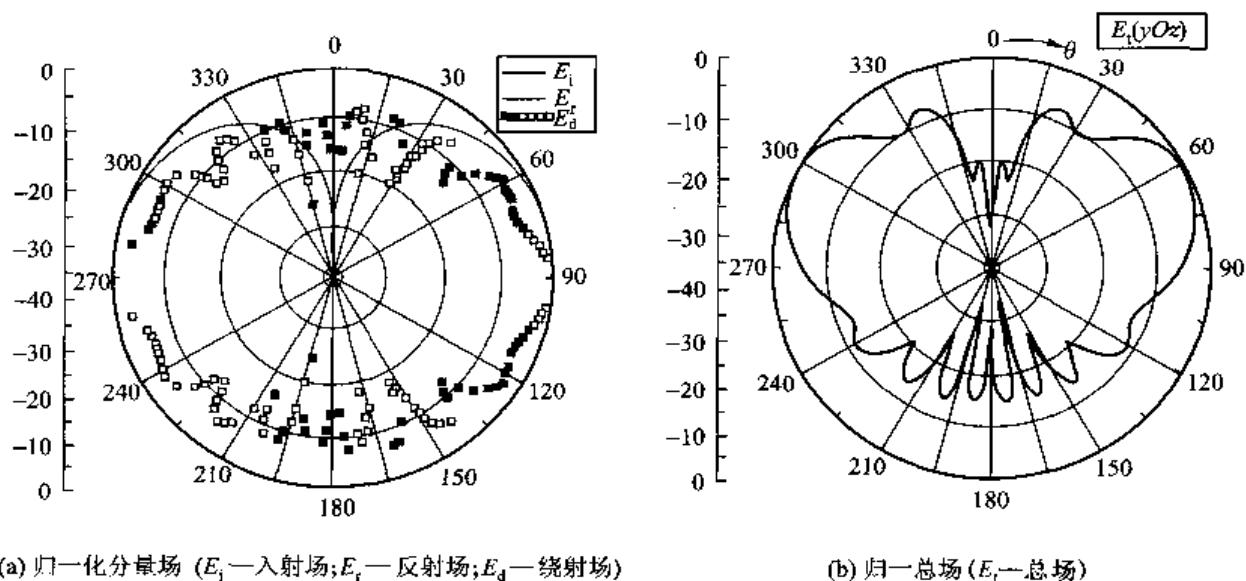


图 5-20-15 方形地平面上单极子的主平面方向图

① 几何光学场只在亮区存在:  $\vec{E}^{GO}(P) = \vec{E}^i(P)\delta_i + \vec{E}^r(P)\delta_r$ , 亮区直射场和反射场的存在区域由各自的阶梯函数确定, 在劈绕射问题中, 定义

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & 0 < \varphi < \pi < \varphi' \\ 0 & \pi + \varphi' < \varphi < n\pi \end{cases}$$

$$\delta_r = \begin{cases} 1 & 0 < \varphi < \pi - \varphi' \\ 0 & \pi - \varphi' < \varphi < n\pi \end{cases}$$
(5-20-51)

$\vec{E}^i(P)$ 、 $\vec{E}^r(P)$  分别由式(5-20-9)、式(5-20-27)确定。

② 绕射场  $\vec{E}^d(P)$  有两种形式, 一种是 Keller, 另一种是 Kouyoumjian 的一致性几何绕射理论, 场的表达形式完全相同, 不同之处仅仅是并矢绕射系数。将边缘绕射场的几何绕射理论表达式记为  $\vec{E}_k^d$ , 其绕射系数为式(5-20-38), 将绕射场的一致性几何绕射理论表达式记为的  $\vec{E}^d$ , 其绕射系数为式(5-20-40)。由此可见, 几何绕射理论场的绕射系数在入射和反射阴影边界相邻的过渡区失效, 而一致性几何绕射理论场的绕射系数恰好弥补了这一不足, 同时在过渡区外自动转化为几何绕射理论算式。

### 5. 曲边缘绕射场的计算

在实际应用中, 许多天线、散射体的边缘都不是直的, 如图 5-20-16 所示的圆盘、抛物面天线、圆锥喇叭等。

曲边缘绕射射线寻迹多采用数值搜索的方法, 绕射的条件就是入射角等于绕射角。以圆边缘绕射射线寻迹为例, 先将圆等分成 36 等分, 在每一等分中计算入射角与绕射角之差, 当在相邻两等分中差值变号时, 再将该等分再细分 36 等分, 再用相同的方法查找到绕射点。已证明如  $P$  点是远区场点, 则通常只有 1、2、3 或 4 个绕射点。只有两个绕射点时, 一个在正  $y$  轴上, 另一个在  $-y$  轴上, 其中一个对应于最小光程, 另一个则对应于最大光程。如有 4 个绕射点, 则根据对称性其中 2 个对应于最小光程, 另两个对应于最大光程。

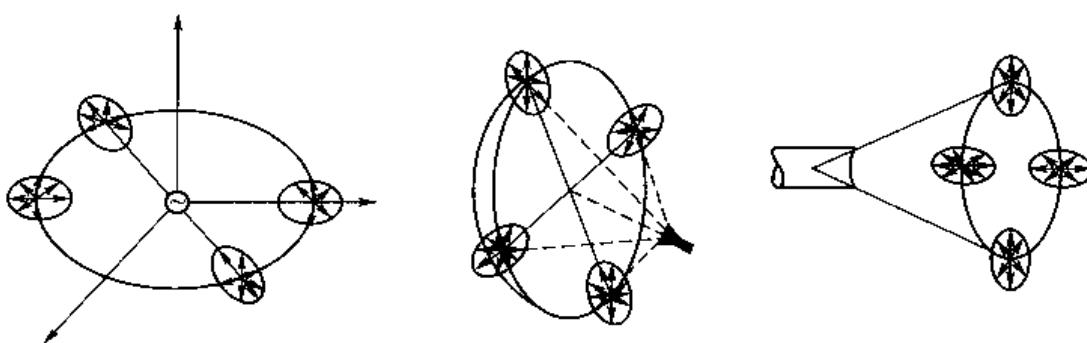


图 5-20-16 曲边缘绕射

曲边缘绕射场的计算,利用场的局部性原理,在局部上仍将曲边缘看成是一个劈的边缘,两个劈面就是在绕射点与构成曲边缘的两个面相切的两个平面。根据这一假设,只需将直劈绕射解中过渡函数宗量中的距离参数  $L$  加以修正便可得到曲边缘绕射解。曲边缘绕射系数

$$D_{s,b}(L'; \varphi, \varphi'; \beta_0) = \frac{-e^{-is/4}}{2n \sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \operatorname{ctan} \left( \frac{\pi + (\varphi - \varphi')}{2n} \right) F[kL^+ a^+] \right. \\ & + \operatorname{ctan} \left( \frac{\pi - (\varphi - \varphi')}{2n} \right) F[kL' a(\varphi - \varphi')] \Big] \\ & \pm \left[ \operatorname{ctan} \left( \frac{\pi + (\varphi + \varphi')}{2n} \right) F[kL^+ a^+(\varphi + \varphi')] \right. \\ & \left. + \operatorname{ctan} \left( \frac{\pi - (\varphi + \varphi')}{2n} \right) F[kL^+ a^-(\varphi + \varphi')] \right] \end{aligned} \right\}$$

式中,各参量或函数的定义与直劈相同,对直劈而言,各距离因子  $L^+$ 、 $L'$  和  $L^-$  是相等的,但对直劈,它们分别是

$$L^+ = \frac{s(\rho_e^+ + s)\rho_1^+\rho_2^+}{\rho_e^+(\rho_1^+ + s)(\rho_2^+ + s)} \sin^2 \beta_0 \quad (5-20-52)$$

$$L_n^+ = \frac{s(\rho^r + s)\rho_1^r\rho_2^r}{\rho^r(\rho_1^r + s)(\rho_2^r + s)} \sin^2 \beta_0, n=1,2 \quad (5-20-53)$$

式中,  $\rho_1^+$ 、 $\rho_2^+$  为绕射点入射波前的主曲率半径;  $\rho_e^+$  为入射面(指边缘基)内入射波前的曲率半径;  $\rho_1^r$ 、 $\rho_2^r$  为绕射点反射波前主曲率半径,计算公式见式(5-20-15);  $\rho^r$  为反射面内反射波前主曲率半径,计算公式见式(5-20-15)。

如图 5-20-17 为曲边缘绕射示意图。

扩散因子计算公式见式(5-20-30),但其中  $\rho_e$  取值如下:

$$\frac{1}{\rho_e} = \frac{1}{\rho_e'} - \frac{\hat{n}_e \cdot (\hat{s} - \hat{s}')}{\rho_e \sin^2 \beta_0} \quad (5-20-54)$$

其中,  $\rho_e'$  为入射波前的曲率半径(边缘基坐标系,对平面波、柱面波、锥面波  $\rho_e' = \infty$ ); 球面波  $\rho_e' = s'$ ;  $\rho_e$  为绕射点处曲边缘的曲率半径;  $\hat{n}_e$  为绕射点处边缘的主法线;  $\hat{s}'$  为人射方向单位矢量;  $\hat{s}$  为绕射方向单位矢量。

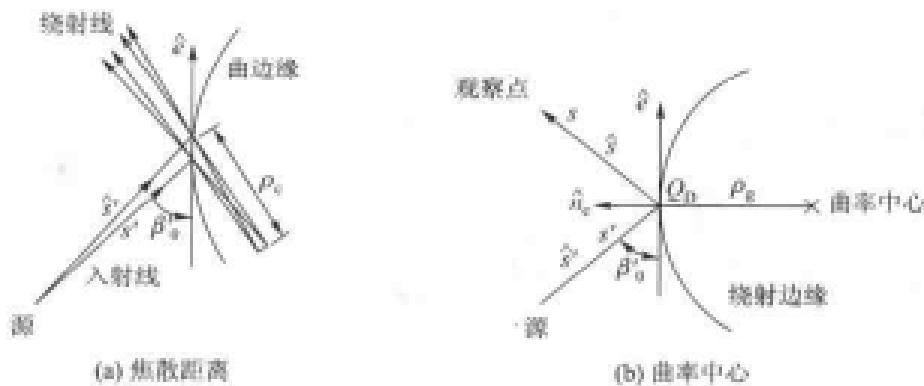


图 5-20-17 曲边缘绕射焦散距离和曲率中心

### 三、等效电磁流法

当场点位于边缘绕射的焦散区,几何绕射理论和几何光学理论一样失效,这是因为在焦散线上有无数多条射线相交,故射线管截面积变为0,计算场值无穷大。但在实际工程中,经常需要计算焦散线上边缘绕射场的值,例如圆盘、圆锥底面、圆柱端面以及有关圆对称的抛物或双曲反射面边缘等,当其被轴向入射的平面波或被轴线上的馈源产生的球面波所照射时,圆形边缘的前后轴向都是边缘绕射线的焦散区,该区域几何绕射理论算式失效。计算绕射射线焦散区场的有效方法是等效电磁流法(ECM)。

等效电磁流法是将二维平面劈分别用二维线电流源和磁流源代替,即将电场分量平行于劈边缘极化(磁极化或软边缘)的绕射,用等效的边缘线电流源代替。

- ① 将电场源分量平行于壁边缘极化(磁极化或软边缘)的绕射,用等效的边缘线电流源 $I$ 代替。

- ② 将垂直于边缘极化(电磁化或硬边缘)的绕射,用等效的边缘线磁流源代替  $I_r^*$ ,假设线电流源和磁流源辐射场与相应边界下的边缘绕射场相等,确定  $I_r$ ,  $I_r^*$ 。

如图 5-20-18 所示,沿  $z$  轴的线电流源  $I_z$ (均匀分布)近区辐射场

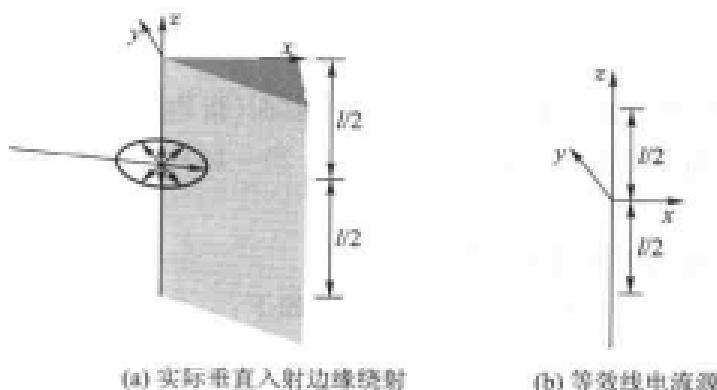


图 5-20-18 垂直入射边缘绕射及其等效

$$E_i = -\frac{k^2 I_i^*}{4\omega\epsilon} H_0^{(2)}(k\rho) \approx -I_i^* \frac{q^k}{2} \sqrt{\frac{j}{2\pi k}} \frac{e^{-ik\rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (5-20-55)$$

其中,  $H_0^{(2)}(k\rho)$  为第二类 0 阶 Hankel(汉卡尔)函数;  $\hat{z}$  为劈边缘方向;  $K$  为波数;  $\eta$  为媒质波阻抗。

应用互易定理, 可得线磁流源产生的磁场

$$H_z = -\frac{k^2 I_z^n}{4\omega\mu} H_0^{(2)}(k\rho) \stackrel{\text{近似}}{\approx} -I_z^n \frac{k}{2} \sqrt{\frac{j}{2\pi k}} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{\rho}} \quad (5-20-56)$$

根据假设边缘绕射场等于相应的远区辐射场

$$E_z(Q_0) D_s(\varphi, \varphi'; \beta_0) \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{\rho}} = -I_z^n \frac{\eta k}{2} \sqrt{\frac{j}{2\pi k}} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{\rho}} \quad (5-20-57)$$

$$H_z(Q_0) D_b(\varphi, \varphi'; \beta_0) \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{\rho}} = -I_z^n \frac{k}{2\eta} \sqrt{\frac{j}{2\pi k}} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{\rho}} \quad (5-20-58)$$

式中,  $E_z(Q)$ 、 $H_z(Q)$  为入射波在劈边缘处电场和磁场的  $z$  分量;  $D_{s,b}(\varphi, \varphi'; \beta_0)$  为非一致性 Keller 绕射系数(因为焦散线上的场点通常都远离反射边界和阴影边界的过渡区)。

求解式(5-20-57)、式(5-20-58)可得等效边缘电磁流为

$$I_z = -\frac{\sqrt{8\pi k}}{\eta k} e^{-jkr} E_z(Q) D_s(\varphi, \varphi'; \beta_0) \quad (5-20-59)$$

$$I_z^n = -\frac{\eta \sqrt{8\pi k}}{k} e^{-jkr} H_z(Q) D_b(\varphi, \varphi'; \beta_0) \quad (5-20-60)$$

如图 5-20-19 所示, 在有效长度的平面劈上斜入射时的情况, 采用相同的方法, 可得等效边缘电磁流为

$$I_z = -\frac{\sqrt{8\pi k}}{\eta k} e^{-jkr} E_z(Q_0) D_s(L'; \varphi, \varphi'; \beta_0) \quad (5-20-61)$$

$$I_z^n = -\frac{\eta \sqrt{8\pi k}}{k} e^{-jkr} H_z(Q_0) D_b(L'; \varphi, \varphi'; \beta_0) \quad (5-20-62)$$

$D_{s,b}(L'; \varphi, \varphi'; \beta_0)$  —— 参见式(5-20-52)曲边缘绕射系数公式。

如果二维劈是有限长  $L$ , 相应的等效电流同样也是有限长。假设劈边缘沿  $z$  轴, 则长度为  $L$  的线流源远区辐射场

$$E_0 = j\eta \frac{ke^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta \int_{-L/2}^{L/2} I_z^n(z') e^{jkz' \cos \theta} dz' \quad (5-20-63)$$

$$H_0^n = j \frac{ke^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta \int_{-L/2}^{L/2} I_z^n(z') e^{jkz' \cos \theta} dz' \quad (5-20-64)$$

对曲边缘绕射, 根据高频场的局部性原理, 可将曲边缘上每一点的作用等效为与此点相切的无限长直边缘上的微分元的作用, 同直边缘绕射一样, 求出该点的等效电磁流, 然后沿曲线边缘积分, 便可求得曲边缘的绕射场。

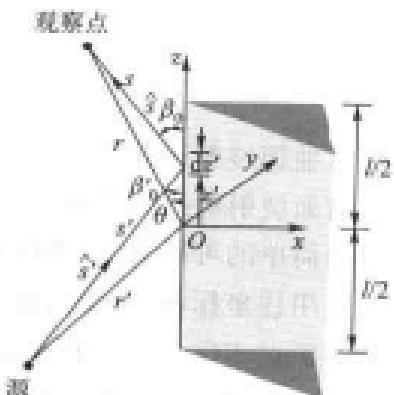


图 5-20-19 斜入射边缘  
绕射及其等效

#### 四、曲面一致性几何绕射理论

曲面绕射适用的前提条件是曲面的尺寸很大。如图 5-20-20 所示,当射线沿物体弯曲表面切线方向投射到该物体时,根据几何光学理论,曲面的外部可以分为照明区和阴影区,两个区域以曲面上入射点的切平面为界,这个界面称为阴影边界。同时能量分为两部分:一部分能量继续沿直线传播;另一部分能量将在曲面相切的点处激励起新表面波,又称爬行波,爬行波沿曲面传播并不断沿传播路径的切线方向发出绕射射线,从而在阴影区产生曲面绕射场。Keller 的几何绕射理论解在阴影边界两侧的过渡区外自动转化为一般的几何绕射理论解,在阴影边界两侧的过渡区失效。一致性几何绕射理论(UTD)解既克服了几何绕射理论解在阴影边界过渡区失效的缺点,又能在阴影区边界过渡区外自动转化为一般的几何绕射理论解。同时也改善了亮区中的几何光学解。对于源在曲面上的情况,也做了较为成功的研究,从而更具工程实用价值。

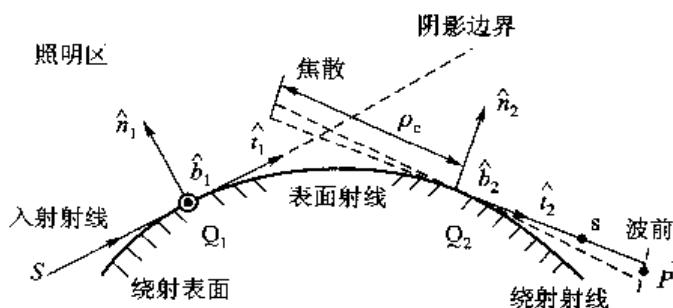


图 5-20-20 曲面绕射示意图

## 1. 曲面绕射射线追踪

曲面绕射射线的寻迹非常繁琐而费时,通常采用数值方法求解,但在实际中遇到的曲面大多是一些简单的可展曲面,如圆柱面、圆锥面等,下面以圆柱曲面射线寻迹为例说明。

采用柱坐标系,设绕射点  $S_{d1}$ 、 $S_{d2}$  点的坐标分别为  $S_{d1}(a, \varphi_a, z_a)$ 、 $S_{d2}(a, \varphi_b, z_b)$ , 已知在柱坐标系下源点  $S(\rho_1, \varphi_1, z_1)$ , 场点  $P(\rho_2, \varphi_2, z_2)$ 。显然,由通过  $S$ 、 $P$  的两个切平面和  $S_{d1}$  与  $S_{d2}$  点间的圆柱面组成的整个曲面是可展开的,如图 5-20-21 所示,则  $S$ 、 $S_{d1}$ 、 $S_{d2}$ 、 $P$  四点必在一条直线上,由  $S$ 、 $P$  点坐标可求得绕射点  $S_{d1}$ 、 $S_{d2}$  坐标及各射线段长度。

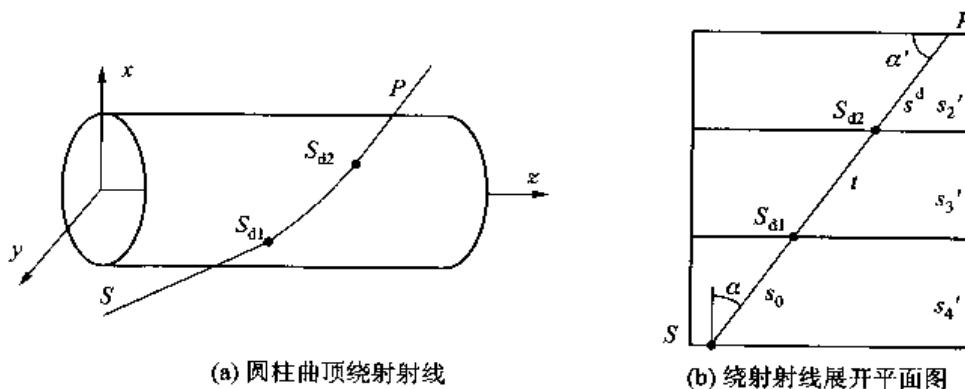


图 5-20-21 圆柱曲面绕射射线寻迹

$S_{d1}$  点坐标为

$$\begin{cases} r=a \\ \varphi_a = \varphi_1 + \arccos \frac{a}{\rho_1} \\ z_a = z_1 + \frac{s'_1(z_2 - z_1)}{s'_1 + s'_2 + s'_3} \end{cases} \quad (5-20-65)$$

$S_{d2}$  点坐标为

$$\begin{cases} r=a \\ \varphi_b = \varphi_2 + \arccos \frac{a}{\rho_2} \\ z_b = z_1 + \frac{(s'_1 + s'_2)(z_2 - z_1)}{s'_1 + s'_2 + s'_3} \end{cases} \quad (5-20-66)$$

$SS_{d1}$  射线长度

$$s_0 = s'_1 \sec \alpha \quad (5-20-67)$$

$S_d, S_{d2}$  射线长度

$$t = s'_3 \sec \alpha \quad (5-20-68)$$

$S_{d2}P$  射线长度

$$s^d = s'_2 \sec \alpha \quad (5-20-69)$$

其中

$$s'_1 = \sqrt{\rho_1^2 - a^2}, s'_2 = \sqrt{\rho_2^2 - a^2}, s'_3 = a(\varphi_b - \varphi_a) \quad (5-20-70)$$

$$\alpha = \arctan \left[ \frac{z_2 - z_1}{s'_1 + s'_2 + s'_3} \right] \quad (5-20-71)$$

由  $S_{d1}, S_{d2}$  点坐标可非常容易求得各点的切向矢量。

## 2. 曲面绕射场的计算

理想导电凸曲面的绕射问题主要分两种情形：一种源在凸曲面外，另一种是源直接位于凸面上，下面分别讨论。

### (1) 光滑凸曲面散射问题 一致性几何绕射理论解(源在曲面外)

阴影区的场：

当源在曲面外，几何光学路径如图 5-20-22 所示，绕射场的计算属于阴影区场问题，考虑阴影边界，一致性几何绕射理论公式可表示为

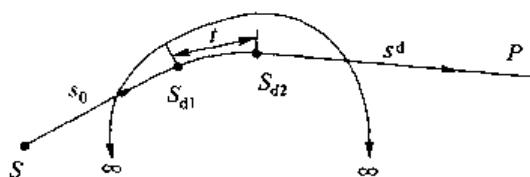


图 5-20-22 源点在圆柱曲面外的绕射路径

$$E^d(P) = E^i(S_{d1}) \cdot \bar{T}(S_{d1}, S_{d2}) \sqrt{\frac{\rho_2^d}{s^d(\rho_2^d + s^d)}} e^{-jks^d} \quad (5-20-72)$$

式中， $S_{d1}, S_{d2}$  为第一个绕射点、第二个绕射点； $E^i(S_{d1})$  为第一个绕射点的入射场

$$E^i(S_{d1}) = C_0 \frac{e^{-jks_0}}{s_0} \quad (5-20-73)$$

$\bar{T}(S_{d1}, S_{d2})$  为并矢传输函数, 它将  $S_{d2}$  发出的绕射场和  $S_{d1}$  点的入射场联系起来

$$\bar{T}(S_{d1}, S_{d2}) = T_s \hat{b}_1 \hat{b}_2 + T_b \hat{n}_1 \hat{n}_2 \quad (5-20-74)$$

其中

$$T_{s,b} = - \left[ \sqrt{m(S_{d1})m(S_{d2})} \sqrt{\frac{2}{k}} \left\{ \frac{e^{-i(\pi/4)}}{2\xi^d \sqrt{\pi}} [1 - F(X^d)] + \hat{P}_{s,b}(\xi^d) \right\} \right] \sqrt{\frac{d\eta(S_{d1})}{d\eta(S_{d2})}} e^{-ikr} \quad (5-20-75)$$

图 5-20-23 所示为表面绕射射线管的顶视图,  $d\eta(S_{d1})$  和  $d\eta(S_{d2})$  分别代表第一个绕射点  $S_{d1}$  和第二个绕射点  $S_{d2}$  的表面射线片(或管)的宽度,  $\xi^d$  为广义福克参数。

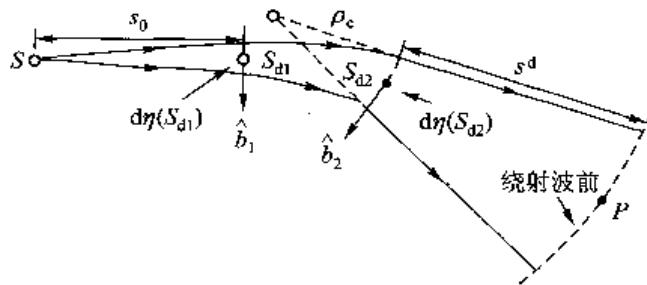


图 5-20-23 表面绕射射线管的顶视图

$$\xi^d = \int_{S_{d1}}^{S_{d2}} dt' \frac{m(t')}{\rho_g(t')} \quad (5-20-76)$$

$$m(S_{d1,2}) = \left[ \frac{k \rho_g(S_{d1,2})}{2} \right]^{1/3} \quad (5-20-77)$$

$$L^d = \frac{s_0 s^d}{s_0 + s^d} \quad (\text{球面波}) \quad (5-20-78)$$

$$X^d = k L^d \bar{a} = \frac{k L^d (\xi^d)^2}{2m(S_{d1})m(S_{d2})} = \frac{k (\xi^d)^2}{2m(S_{d1})m(S_{d2})} \cdot \frac{s_0 s^d}{s_0 + s^d} \quad (5-20-79)$$

$$t = \int_{S_{d1}}^{S_{d2}} dt' \quad (5-20-80)$$

$$\sqrt{\frac{d\eta(S_{d1})}{d\eta(S_{d2})}} = \sqrt{\frac{s_0}{s_0 + t}} \quad (5-20-81)$$

$$\rho_2^d = s_0 + t \quad (5-20-82)$$

$F(X^d)$  为过渡函数(定义参见附录);  $\hat{P}_{s,b}(\xi^d)$  为 Pekeris Carot(皮克里斯·卡略特)函数(定义及数值计算参见附录)。

所以绕射场表达式为

$$E^d(P) = C_0 \frac{e^{-iks_0}}{s_0} \cdot \left[ -\sqrt{m(S_{d1})m(S_{d2})} \sqrt{\frac{2}{k}} \left\{ \frac{e^{-i(\pi/4)}}{2\xi^d \sqrt{\pi}} [1 - F(X^d)] + \hat{P}_{s,b}(\xi^d) \right\} \right] \sqrt{\frac{s_0}{s_0 + t}} e^{-ikt} \cdot \sqrt{\frac{s_0 + t}{s^d(s_0 + t + s^d)}} e^{-iks^d} \quad (5-20-83)$$

矢量关系如图 5-20-20 所示, 从图中可以看出  $\hat{t}_1, \hat{t}_2$  和  $\hat{b}_1$  构成了入射射线基, 而  $\hat{t}_2, \hat{n}_2$  和  $\hat{b}_2$

构成了绕射射线基。由于电场没有传播方向的分量,即只存在于  $\hat{n}_1 \times \hat{b}_1$  的平面内,因此将入射电场分解到  $\hat{b}_1$  上作为软边界的场分量 ( $s$ )、 $\hat{n}_1$  上作为硬边界的场分量 ( $h$ ) 进行计算,分别乘以相应的绕射系数后,再把所得软边界的场分量 ( $s$ ) 和硬边界的场分量 ( $h$ ) 投影到  $\hat{n}_2$  和  $\hat{b}_2$  方向上,就是最终的矢量场。

### 亮区场:

亮区几何光学路径如图 5-20-24 所示。

任意凸曲面的亮区场  $\vec{E}(P_L)$  由直射场  $\vec{E}^i(P_L)$  和反射场  $\vec{E}^r(P_L)$  两部分叠加而成,即

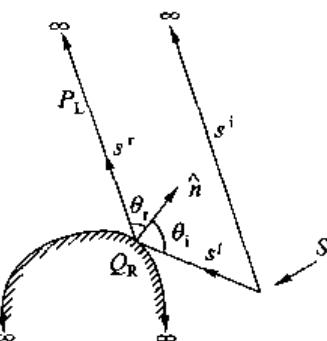


图 5-20-24 任意凸曲面亮区场

$$\vec{E}(P_L) \sim \vec{E}^i(P_L) + \vec{E}(Q_R) \cdot \bar{R} \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s^r)(\rho_2 + s^r)}} e^{-jks^r} \quad (5-20-84)$$

其中,  $S, P_L$  分别表示源点和场点;  $Q_R$  为曲面上的反射点;  $s^r$  为反射点  $Q_R$  到场点  $P_L$  的距离;  $\rho_{1,2}^r$  为反射波阵面的两个主曲率半径,计算公式见(5-20-15);  $\vec{E}^i(P_L)$  为从源点  $S$  到场点  $P_L$  的直射场。

$$E^i(P_L) = C_0 \frac{e^{-jks^i}}{s^i} \quad (5-20-85)$$

$$\vec{E}^r(P_L) \sim \vec{E}^i(Q_R) \cdot \bar{R} \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s^r)(\rho_2^r + s^r)}} e^{-jks^r} \quad (5-20-86)$$

其中

$$\vec{E}^i(Q_R) = C_0 \frac{e^{-jks^r}}{s^r} \quad (5-20-87)$$

$$\bar{R} = R_b \hat{e}_k^r \hat{e}_{\parallel}^r + R_s \hat{e}_k^r \hat{e}_{\perp}^r \quad (5-20-88)$$

$$R_{s,h} = - \left[ \sqrt{\frac{-4}{\xi^L}} e^{-j(\xi^L)^{3/12}} \cdot \left[ \frac{e^{-j(\pi/4)}}{2\sqrt{\pi}\xi^L} [1 - F(X^L) + \hat{P}_{s,h}(\xi^L)] \right] \right] \quad (5-20-89)$$

所以,反射场表达式为

$$E^r(P_L) = C_0 \frac{e^{-jks^r}}{s^r} \cdot \left[ - \sqrt{\frac{-4}{\xi^L}} e^{-j(\xi^L)^{3/12}} \cdot \left[ \frac{e^{-j(\pi/4)}}{2\sqrt{\pi}\xi^L} [1 - F(X^L) + \hat{P}_{s,h}(\xi^L)] \right] \right] \cdot \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s^r)(\rho_2^r + s^r)}} e^{-jks^r} \quad (5-20-90)$$

其中,  $F(X^L)$  为过渡函数(定义同上)

$$X^L = kL \tilde{a} = kL \cdot 2 (\cos \theta^i)^2 = k \cdot \frac{s^i s^r}{s^i + s^r} \cdot 2 (\cos \theta^i)^2 \quad (5-20-91)$$

$\hat{P}_{s,h}(\xi^L)$  为皮克里斯·卡略特函数(同上)

$$\xi^L = -2M(Q_R) \cos \theta^i \quad (5-20-92)$$

$$M(Q_R) = \left[ \frac{k \rho_s(Q_R)}{2} \right]^{1/3} \quad (5-20-93)$$

$\rho_e(Q_R)$  为反射点  $Q_R$  的曲率半径;  $s^d$  为源点  $S$  到反射点  $Q_R$  的距离;  $\theta^d$  为入射射线与法线的夹角;  $k$  为传播常数。

反射场矢量关系参见图 5-20-5, 矩阵表示见式(5-20-27)。

### (2) 光滑凸曲面辐射问题一致性几何绕射理论解(源在曲面上)

源在曲面上的典型天线有两类: 理想导电光滑凸曲面上口径天线和短单极子天线, 下面以单极子天线辐射电磁场的一致性几何绕射理论解为例说明。

单极子底部位于凸曲面上, 属于凸曲面上天线辐射问题, 可将天线分为  $N$  段, 每段长度  $dl'$ , 其等效电流矩  $dP_e(Q')$  为

$$dP_e(l') = I(l') dl' \hat{n}' \quad (5-20-94)$$

式中,  $I(l')$  为单极子上电流分布, 其中  $l'$  是从单极子的底部  $Q'$  点沿阵子长度的距离。

假设电流分布  $I(l')$ , 则理想导电平面存在时辐射的电流矩  $dP_e(Q')$  就构成了曲面外  $P$  点电场  $dE_e(P/l')$  的等效源, 只要知道了  $dE_e(P/Q')$ , 即可近似求出单极子所辐射的总电场  $E_e(P)$ 。

当  $P$  点在亮区时

$$\begin{aligned} P_e^l(Q') &= \int_0^{l'} dP_e(l') \cos(kl' \cos(\theta_l)) dl' \\ &= \frac{\cos(kL \hat{n} \cdot \hat{s}) - \cos(kL)}{[1 - (\hat{n} \cdot \hat{s})^2] \cdot \sin(kL)} \end{aligned} \quad (5-20-95)$$

当  $P$  点在阴影区时

$$\begin{aligned} P_e^d(Q') &= \int_0^{l'} dP_e(l') \\ &= \frac{1 - \cos(kL)}{\sin(kL)} \end{aligned} \quad (5-20-96)$$

这样就将阵子的长度和电流分布的作用恰当的结合在只基于  $dE_e(P/Q')$  的辐射计算中。其中,  $\cos(\theta_l) = \hat{n} \cdot \hat{s}$ ,  $\hat{n}$  为  $Q'$  (天线底部) 法向矢,  $\hat{s}$  是亮区中单极子上任意一点  $l'$  的辐射方向  $k = 2\pi/\lambda$ ; 右上标的“ $l$ ”、“ $d$ ”分别表示亮区场和阴影区场。

阴影区的场:

当源点  $S$  位于曲面上  $Q'$  时, 几何光学路径如图 5-20-25 所示, 绕射场的计算属于阴影区场问题, 考虑阴影边界后的一致性几何绕射理论公式可表示为

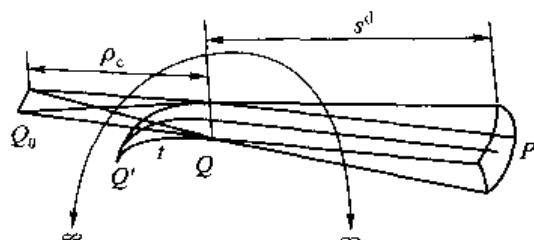


图 5-20-25 源点在曲面上的绕射路径

$$d\vec{E}_e(P | Q') = dP_e(Q') \cdot \bar{T}_e(Q' | Q) \sqrt{\frac{\rho_e}{s^d(\rho_e + s^d)}} e^{-ikd} \quad (5-20-97)$$

$$T_e(Q'|Q) = \frac{-jkZ_0}{4\pi} [\hat{n}' \cdot \hat{n} T_5(Q') H + \hat{n}' \cdot \hat{b} T_6(Q') S] e^{-jk\ell} \sqrt{\frac{d\varphi_0}{d\eta(Q)}} \left[ \frac{\rho_g(Q)}{\rho_g(Q')} \right]^{1/6} \quad (5-20-98)$$

对单极子或  $dP_e$  辐射, 有

$$\begin{cases} T_5(Q') = 1 \\ T_6(Q') = T(Q') \rho_g(Q') \end{cases} \quad (5-20-99)$$

式中

$$T(Q') = \frac{\sin 2\alpha'}{2} \left( \frac{1}{R_2(Q')} - \frac{1}{R_1(Q')} \right), \quad R_1(Q') \geq R_2(Q') \quad (5-20-100)$$

$$\rho_g(Q') = \left( \frac{\cos^2 \alpha'}{R_1(Q')} + \frac{\sin^2 \alpha'}{R_2(Q')} \right)^{-1} \quad (5-20-101)$$

$$\rho_e = 2 \sqrt{EG} / \left| \frac{\partial G}{\partial t} \right| \quad (5-20-102)$$

$E, G$  是曲线弧长  $Q'Q$  的“第一基本形式”中的  $E, F$  和  $G$  的两个。

$$\sqrt{\frac{d\varphi_0}{d\eta(Q)}} = \sqrt{\frac{d\varphi_0}{\rho_e \cdot d\varphi(Q)}} \quad (5-20-103)$$

$$\begin{cases} H = g(\xi) \\ S = \frac{-j}{m(Q')} \bar{g}(\xi) \end{cases} \quad (5-20-104)$$

这里  $g(\xi)$  和  $\bar{g}(\xi)$  分别代表声学的硬和软型福克函数(或福克积分), 它们的定义为

$$\begin{cases} g(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\exp[-j2\pi/3]}^{\xi} dt \frac{\exp(-j\tau\xi)}{W'_2(\tau)} \\ \bar{g}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\exp[j2\pi/3]}^{\xi} dt \frac{\exp(-j\tau\xi)}{W_2(\tau)} \end{cases} \quad (5-20-105)$$

式中,  $W_2(\tau)$  是福克型艾利函数

$$W_2(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\exp[j2\pi/3]}^{\infty} dt e^{i\tau - t^{3/2}} \quad (5-20-106)$$

$W'_2(\tau)$  代表  $W_2(\tau)$  对  $\tau$  的导数。阴影区的福克参数  $\xi$  定义为

$$\xi = \int_{Q'}^Q dt' \frac{m(t')}{\rho_g(t')} \quad (5-20-107)$$

$$m(t') = \left[ \frac{k\rho_g(t')}{2} \right]^{1/3} \quad (5-20-108)$$

阴影区绕射场矢量关系同源在曲面外。

亮区场:

如图 5-20-26 所示, 当发射天线(单极子)  $\vec{dP}_e$  位于曲面上  $Q'$  处,  $P_L$  是场点, 位于照明区,  $P_o$  表示源点  $Q'$  与  $P_L$  之间的某一参考点。伴随射线  $\overrightarrow{Q'P_L}$  传播的场  $\vec{dE}_e(P_L/Q')$  可以表示为  $\vec{dE}_e(P_L/Q') = \vec{dE}_e(P_o/Q') \sqrt{\frac{\rho_1^j \rho_2^j}{(\rho_1^j + s_0)(\rho_2^j + s_0)}} \cdot e^{-jks_0}$ 。因为点  $Q'$  是直射射线的唯一焦散点, 所

以射线场在  $P_1$  点波前的两个主曲率半径  $\rho_1^i = \rho_2^i = \rho^i$ 。又因为  $P_L$  处的场与参考点无关, 取极限  $s_0 \rightarrow s$  即  $\rho^i \rightarrow 0$ 。则  $Q$  点源天线在场点产生的直射场为

$$dE_e(P_L/Q') = dP_e(Q') \bar{\bar{T}}_e e^{-jk} / s \quad (5-20-109)$$

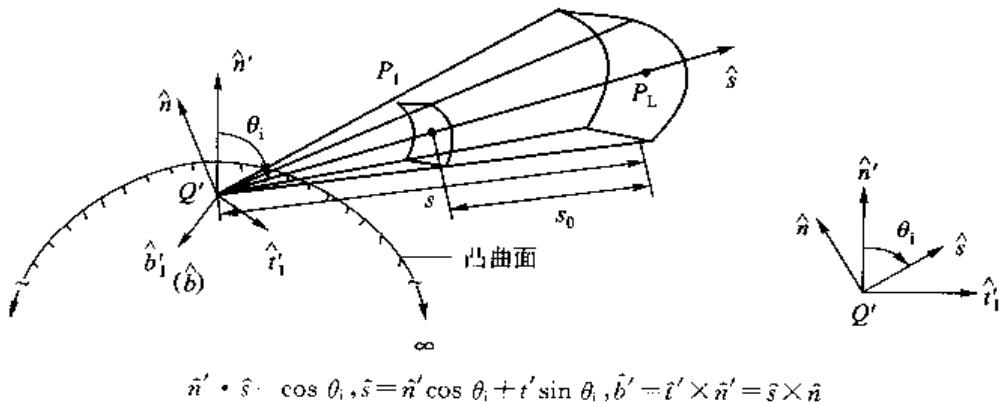


图 5-20-26 源在曲面上的直射场

式中,  $\bar{\bar{T}}_e$  为照明区直射场并矢系数, 为

$$\bar{\bar{T}}_e = -\frac{jkZ_0}{4\pi} (\hat{n}' \cdot \hat{n} M + \hat{n}' \cdot \hat{b} N) \quad (5-20-110)$$

其中,  $\hat{s}$  为  $Q'$  到  $P_1$  直线的单位矢量;  $\hat{n}'$  为  $Q'$  处曲面的单位法向矢量;  $\hat{b}$  为  $P_1 Q'$  在曲面上点投影方向的单位矢量;  $\theta_i$  由  $\hat{n}' \cdot \hat{s} = \cos \theta_i$  定义, 表示直射线  $\hat{s}$  与  $Q$  点曲面法线矢量  $\hat{n}'$  的夹角;  $k$  为自由空间波数;  $Z_0$  为自由空间波阻抗  $Z_0 = 120 \pi$ 。

参数:  $M, N$  是从理想导电凸面上辐射的典型问题渐近解中导出的, 其值见下表。

$M$	$N$	$T_b$	$\gamma$
$\sin(\theta_i) H^l + T_b^2 \gamma \cos(\theta_i)$	$\sin(\theta_i) T_b \gamma$	$T(Q')_{\rho_g}(Q')$	$\frac{s^l - H^l \cos(\theta_i)}{1 + T_b^2 \cos(\theta_i)}$

$$H^l = g(\xi_l) \exp(-j\xi_l^3/3) \quad (5-20-111)$$

$$s^l = (-j/m_l(Q')) \tilde{g}(\xi_l) \exp(-j\xi_l^3/3) \quad (5-20-112)$$

$$\xi_l = -m_l(Q') \cos(\theta_i) \quad (5-20-113)$$

$$m_l(Q') = m(Q') / [1 + T_b^2 \cos^2(\theta_i)]^{1/3} \quad (5-20-114)$$

$$m(l') = [k\rho_g(Q')/2]^{1/3} \quad (5-20-115)$$

$g(\xi), \tilde{g}(\xi)$  表达式见式(5-20-97),  $W_2(\tau)$  表达式见式(5-20-98)。

### 3. 一致性几何绕射理论计算实例——圆柱外单极子天线辐射方向图

计算模型如图 5-20-27 所示: 圆柱坐标原点在圆柱中心, 圆柱半径  $R = 1\lambda$ , 圆柱高  $40\lambda$ , 单极子天线与圆柱轴平行放置, 距离圆柱中心轴线  $\rho = 2\lambda$ 。所以源点直角坐标  $S(x_1 = 0, y_1 = 2, 0, z_1 = 0)$ (柱坐标  $S(\rho_1 = 2.0, \varphi_1 = \pi/2, z_1 = 0)$ ), 场点直角坐标  $R_o(x_2, y_2, z_2)$ (柱坐标  $R_o(\rho_2, \varphi_2, z_2)$ ), 对远区辐射场场点径向分量  $\rho_2 = 1000\lambda$ 。

求解过程有: 射线寻迹、局部坐标系下各场量计算、各场量在总体坐标下分解并求和得到总场。

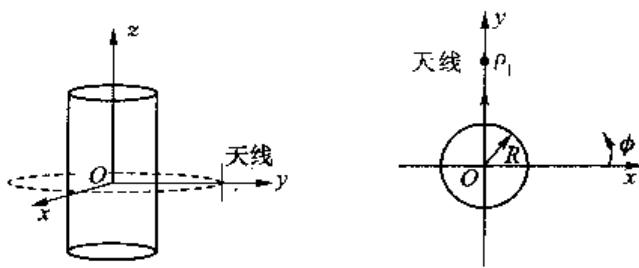


图 5-20-27 圆柱上平行放置单极子

### (1) 射线寻迹及遮挡判断

首先判断圆柱与直线是否相交,若相交,有绕射场存在,计算绕射点坐标,并赋绕射射线判断因子 $\delta_d=1$ ,否则 $\delta_d=0$ ,表明不存在绕射场。

如图 5-20-28 所示,设直线  $SR_0$  与圆相交,且两交点坐标  $P_3(x_3, y_3, z_3)$  和  $P_4(x_4, y_4, z_4)$ ,可得直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

圆柱方程为

$$x^2 + y^2 = r^2$$

将直线方程代入圆柱方程,得

$$Ay^2 + By + C = 0$$

其中

$$A = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$B = -2y_1(x_2 - x_1)^2 + 2x_1(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$C = (x_2 - x_1)^2 y_1^2 - 2x_1 y_1(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + x_1^2(y_2 - y_1)^2 - r^2(y_2 - y_1)^2$$

当  $\Delta = B^2 - 4AC \geq 0$ , 方程有两解, 即直线与圆柱有两个交点(含两点重合的情况), 则判断因子  $\delta_d=1$ , 说明绕射射线存在; 当  $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ , 方程无解, 直线与圆柱无交点, 则判断因子  $\delta_d=0$ , 说明不存在绕射场。

图 5-20-28 所示圆柱绕射点投影示意图, 由图示可见, 曲面绕射射线有两条, 一条绕射线顺时针绕曲面到达场点, 另一条逆时针绕曲面到达场点。

设绕射点分别为  $S_{d1}(a, \varphi_3, z_3)$ 、 $S_{d2}(a_4, \varphi_4, z_4)$ , 显而易见顺时针绕射点  $S_{d1}$

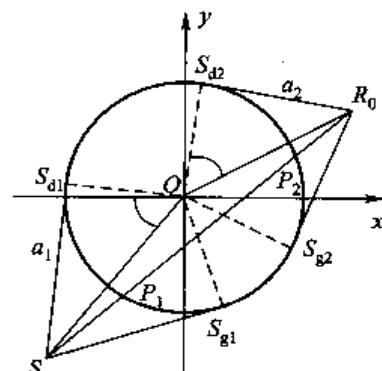
$$\varphi_3 = \varphi_1 - \arccos\left(\frac{a}{\rho_1}\right)$$

逆时针绕射点  $S_{d2}$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \arccos\left(\frac{a}{\rho_1}\right)$$

顺时针绕射点  $S_{d2}$

$$\varphi_4 = \varphi_2 + \arccos\left(\frac{a}{\rho_2}\right)$$

图 5-20-28 圆柱绕射点  
投影示意图

逆时针绕射点  $S_{\text{re}}$

$$\varphi_4 = \varphi_2 - \arccos\left(\frac{a}{\rho_2}\right)$$

绕射点纵坐标  $z$  的求解参见: 曲面绕射射线追踪, 圆柱曲面为可展曲面, 在第二绕射点沿曲面轴线方向展开, 可得

$$z_3 = z_1 + \frac{s'_1(z_2 - z_1)}{s'_1 + s'_2 + s'_3}$$

$$z_4 = z_1 + \frac{(s'_1 + s'_2)(z_2 - z_1)}{s'_1 + s'_2 + s'_3}$$

$SS_{\text{dl}}$  射线长度

$$s_0 = s'_1 \sec \alpha$$

$S_{\text{d}1}S_{\text{d}2}$  射线长度

$$t = s'_3 \sec \alpha = \sqrt{(s'_3)^2 + (z_4 - z_3)^2}$$

$S_{\text{d}2}R_0$  射线长度

$$s^d = s'_2 \sec \alpha$$

其中

$$s'_1 = \sqrt{\rho_1^2 - a^2}, s'_2 = \sqrt{\rho_2^2 - a^2}, s'_3 = a(\varphi_4 - \varphi_3)$$

$$\alpha = \arctan\left[\frac{z_2 - z_1}{s'_1 + s'_2 + s'_3}\right]$$

直射射线遮挡判断  $\delta_i$  ——如果直线  $SR_0$  与圆相交, 则不存在直射场, 直射射线判断因子  $\delta_i = 0$ , 否则  $\delta_i = 1$ 。

反射射线寻迹及遮挡判断因子  $\delta_r$  ——如果直线与圆相交, 则不存在反射场, 反射射线判断因子  $\delta_r = 0$ , 否则  $\delta_r = 1$ , 求反射点。

假设反射点  $Q_r(x_r = a \cos \varphi_r, y_r = a \sin \varphi_r, z_r)$ , 则

$$\overline{S_r S} = (r_1 \cos \varphi_1 - a \cos \varphi) \hat{x} + (r_1 \sin \varphi_1 - a \sin \varphi) \hat{y} + (z_1 - z) \hat{z}$$

$$\overline{S_r R_0} = (r_2 \cos \varphi_2 - a \cos \varphi) \hat{x} + (r_2 \sin \varphi_2 - a \sin \varphi) \hat{y} + (z_2 - z) \hat{z}$$

反射点单位法线

$$\hat{n} = \cos \varphi_r \hat{x} + \sin \varphi_r \hat{y}$$

根据反射定律, 入射角与反射角相等, 有

$$\frac{\overline{S_r S}}{|\overline{S_r S}|} = \frac{\overline{S_r R_0} \cdot \hat{n}}{|\overline{S_r R_0}|} \quad (5-20-116)$$

设入射与反射的光程总长为  $L$ , 有

$$L = |\overline{S_r S}| + |\overline{S_r R_0}|$$

根据 Fermat 定理, 从源点  $S$  经反射点  $Q_r$  到  $R_0$  场点的光程应当取驻定值, 因此

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (5-20-117)$$

根据式(5-20-116)、式(5-20-117)确定反射点坐标。

## (2) 场值计算

### 圆柱曲面亮区场计算公式

已知  $S(x_1, y_1, z_1), R_s(x_2, y_2, z_2), Q_r(x_r, y_r, z_r)$ , 亮区场包括直射场和反射场

$$\vec{E}(P_1) = \vec{E}(P_0) + \vec{E}(Q_R) \cdot \bar{R} \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s^r)(\rho_2^r + s^r)}} e^{-jks^r}$$

① 直射场[计算表达式参见式(5-20-85)]: 源点到场点的直射射线距离为

$$s^i = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

所以

$$E^i(P_1) = C_0 \frac{e^{-jks^i}}{s^i}$$

② 反射场(计算表达式参见式(5-20-86)):

反射点入场

$$E^i(Q_R) = C_0 \frac{e^{-jks^r}}{s^r}$$

源点和反射点距离

$$s^r = |\overline{SQ_r}| = \sqrt{(x_r - x_1)^2 + (y_r - y_1)^2 + (z_r - z_1)^2}$$

入射射线单位矢量

$$\hat{s}^i = \frac{\overline{SQ_r}}{|S| |Q_r|} = -\frac{(x_r - x_1) + (y_r - y_1) + (z_r - z_1)}{\sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2} \sqrt{(x_r)^2 + (y_r)^2 + (z_r)^2}}$$

同理, 可得场点和反射点距离及反射射线单位矢量

$$\begin{aligned} s^i &= \sqrt{(x_r - x_2)^2 + (y_r - y_2)^2 + (z_r - z_2)^2} \\ \hat{s}^r &= -\frac{(x_2 - x_r) + (y_2 - y_r) + (z_2 - z_r)}{\sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2 + (z_2)^2} \sqrt{(x_r)^2 + (y_r)^2 + (z_r)^2}} \end{aligned}$$

反射点反射面法矢

$$\hat{n} = \cos \varphi_r \hat{x} + \sin \varphi_r \hat{y}$$

入射角

$$\theta^i = \arccos(\hat{n} \cdot \hat{s}^i)$$

曲面在反射点的曲率半径

$$\rho_g(Q_R) = a / \sin^2 \theta_0$$

其中  $\theta_0 = \arccos(\hat{s}^i \cdot \hat{z})$  为入射线和  $z$  轴的夹角。

反射波阵面的主曲率半径

$$\frac{1}{\rho_g^r} = \frac{1}{s^i} + \frac{2}{\rho_g(Q_r) \cos \theta^r} = \frac{1}{s^i} + \frac{2 \sin^2 \theta_0}{a \cos \theta^r}$$

则

$$X^i = kL \tilde{a} = kL \cdot 2 (\cos \theta^r)^2 = k \cdot \frac{s^i s^r}{s^i + s^r} \cdot 2 (\cos \theta^r)^2$$

$$\xi^i = -2M(Q_R) \cos \theta^r = -2(k \rho_g(Q_r)/2)^{\frac{1}{3}} \cos \theta^r = -2[k a / (2 \sin^2 \theta_0)]^{\frac{1}{3}} \cos \theta^r$$

得反射场的软边界和硬边界分量

$$E_s^r(P_L) = C_0 \frac{e^{-jks^i}}{s^i} \cdot \left[ -\sqrt{\frac{-4}{\xi^L}} e^{-j(\xi^L)^{3/2}} e^{-j(\pi/4)} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\xi^L} [-F(X^L)] + \hat{P}_s(\xi^L) \right\} \right] \cdot \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s^r)(\rho_2^r + s^r)}} e^{-jks^i}$$

$$E_h^r(P_L) = C_0 \frac{e^{-jks^i}}{s^i} \cdot \left[ -\sqrt{\frac{-4}{\xi^L}} e^{-j(\xi^L)^{3/2}} e^{-j(\pi/4)} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\xi^L} [-F(X^L)] + \hat{P}_h(\xi^L) \right\} \right] \cdot \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s^r)(\rho_2^r + s^r)}} e^{-jks^i}$$

再将其分解到总体坐标系  $xyz$  坐标系下进行矢量求和, 得反射场

$$\vec{E}^r(P_L) = E_x^r(P_L)\hat{x} + E_y^r(P_L)\hat{y} + E_z^r(P_L)\hat{z}$$

矢量分解关系参见图 5-20-5,  $\hat{e}_\parallel^i$ 、 $\hat{e}_\perp^i$  和  $\hat{s}^i$  构成了入射射线基, 而  $\hat{e}_\parallel^r$ 、 $\hat{e}_\perp^r$  和  $\hat{s}^r$  构成了反射射线基。由于电场没有传播方向的分量, 即只存在于  $\hat{e}_\parallel^i \times \hat{e}_\perp^i$  的平面内, 因此可将其分解到  $\hat{e}_\parallel^i$  上作为软边界的分量( $s$ )、 $\hat{e}_\perp^i$  上作为硬边界的分量( $h$ ), 然后分别乘以相应的反射场  $E_s^r(P_L)$  和  $E_h^r(P_L)$  后, 再将其分解到  $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$  方向进行求和。

#### 阴影区场:

根据式(5-20-72), 阴影区场

$$\vec{E}^d(P) = \vec{E}^i(S_{d1}) \cdot \overline{T}(S_{d1}, S_{d2}) \sqrt{\frac{\rho_2^d}{s^d(\rho_2^d + s^d)}} e^{-jks^d}$$

已知源点坐标  $S(x_1, y_1, z_1)$ , 场点坐标  $R_0(x_2, y_2, z_2)$ , 经过圆柱曲面绕射, 绕射点坐标  $S_{d1}(x_3, y_3, z_3)$ 、 $S_{d2}(x_4, y_4, z_4)$ 、源点到第一绕射点距离  $s$ 、 $s_0$  圆柱面上绕射路径长度  $t$ 、第二绕射点到场点距离  $s^d$  等参数求解此处略。

#### 第一绕射点入射场

$$E^i(S_{d1}) = C_0 \frac{e^{-jks_0}}{s_0}$$

#### 曲面绕射点的曲率半径

$$\rho_g(S_{d1}) = a/\sin^2 \alpha', \rho_g(S_{d2}) = a/\sin^2 \alpha'$$

其中,  $\alpha' = \pi/2 - \alpha$  为圆柱上绕射点处的切线矢量  $t'$  与主方向  $\hat{e}_\parallel^i$  之间的夹角( $\hat{e}_\parallel^i$  与圆柱轴同向), 求解从略。

$$m(S_{d1}) = \left[ \frac{ka}{2 \sin^2 \alpha'} \right]^{1/3} = m, m(S_{d2}) = \left[ \frac{ka}{2 \sin^2 \alpha'} \right]^{1/3} = m$$

$$\xi^d = \int_{S_{d1}}^{S_{d2}} \frac{m(t')}{\rho_g(t')} dt' = \frac{mt}{\rho_g} = \frac{mt \sin^2 \alpha'}{a}$$

$$L^d = \frac{s_0 s^d}{s_0 + s^d} \quad (\text{球面波})$$

$$X^d = k L^d \tilde{a} = \frac{k L^d (\xi^d)^2}{2m(S_{d1})m(S_{d2})} = \frac{k (\xi^d)^2}{2m(S_{d1})m(S_{d2})} \cdot \frac{s_0 s^d}{s_0 + s^d}$$

$$\sqrt{\frac{d\eta(S_{d1})}{d\eta(S_{d2})}} = \sqrt{\frac{s_0}{s_0+t}}, \rho_2^d = s_0+t$$

由此可得

$$T_{s,h} = - \left[ \sqrt{m(S_{d1})m(S_{d2})} \sqrt{\frac{2}{k}} \left\{ \frac{e^{-j(\pi/4)}}{2\xi^d \sqrt{\pi}} [1 - F(X^d)] + \hat{P}_{s,h}(\xi^d) \right\} \right] \sqrt{\frac{d\eta(S_{d1})}{d\eta(S_{d2})}} e^{-jkz}$$

所以, 阴影区绕射场

$$\begin{cases} E_s^d(P) = C_0 \frac{e^{jks_0}}{s_0} (\bar{s}) \cdot \left[ -\sqrt{m(S_{d1})m(S_{d2})} \sqrt{\frac{2}{k}} \left\{ \frac{e^{-j(\pi/4)}}{2\xi^d \sqrt{\pi}} [1 - F(X^d)] + \hat{P}_s(\xi^d) \right\} \right] \\ \quad \sqrt{\frac{s_0}{s_0+t}} e^{-jkt} \cdot \sqrt{\frac{s_0+t}{s_0^d(s_0+t+s^d)}} e^{-jks^d} \\ E_h^d(P) = C_0 \frac{e^{jks_0}}{s_0} \cdot \left[ -\sqrt{m(S_{d1})m(S_{d2})} \sqrt{\frac{2}{k}} \left\{ \frac{e^{-j(\pi/4)}}{2\xi^d \sqrt{\pi}} [1 - F(X^d)] + \hat{P}_h(\xi^d) \right\} \right] \\ \quad \sqrt{\frac{s_0}{s_0+t}} e^{-jkt} \cdot \sqrt{\frac{s_0+t}{s_0^d(s_0+t+s^d)}} e^{-jks^d} \end{cases}$$

矢量关系与反射场矢量处理相同, 参见图 5-20-20, 将入射电场分解到  $\hat{b}_1$  上作为软边界的场分量 ( $s$ )、 $\hat{n}_1$  上作为硬边界的场分量 ( $h$ ), 分别乘以相应的阴影区绕射场  $E_s^d$ 、 $E_h^d$ , 再把所得软边界的场分量 ( $s$ ) 和硬边界的场分量 ( $h$ ) 投影到  $\hat{n}_2$  和  $\hat{b}_2$  方向上, 就是最终的矢量场。最后再将其分解到总体坐标系  $xyz$  坐标系下进行矢量求和, 得绕射场

$$\vec{E}^d(P) = E_x^d(P)\hat{x} + E_y^d(P)\hat{y} + E_z^d(P)\hat{z}$$

总场等于各场量之和

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= \vec{E}^i(P)\delta^i + \vec{E}^r(P)\delta^r + \vec{E}^d(P)\delta^d \\ &= \vec{E}_x^i(P)\delta^i + \vec{E}_x^r(P)\delta^r + \vec{E}_x^d(P)\delta^d \\ &\quad + \vec{E}_y^i(P)\delta^i + \vec{E}_y^r(P)\delta^r + \vec{E}_y^d(P)\delta^d \\ &\quad + \vec{E}_z^i(P)\delta^i + \vec{E}_z^r(P)\delta^r + \vec{E}_z^d(P)\delta^d \end{aligned}$$

取  $f=300$  MHz, 单极子长度  $l=\lambda/4$ , 根据上式, 计算滚动面方向图如图 5-20-29 所示。

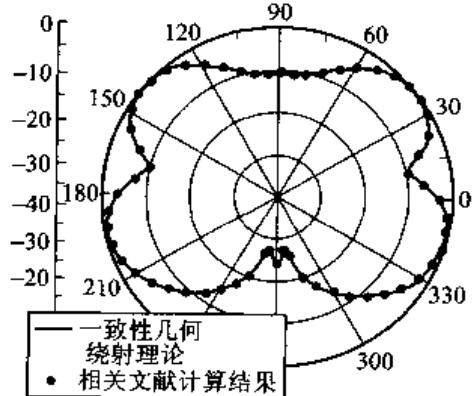


图 5-20-29 滚动面归一化方向图

## 附录 APPENDIX

1.  $F(X^d)$  — 过渡函数, 数学表达式为

$$F(X^d) = 2j \sqrt{X^d} e^{jX^d} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jt^2} dt$$

过渡函数的计算分为 3 段:

①  $X^d \leq 0.3$  时

$$F(X^d) = \left[ \sqrt{\pi X^d} - 2X^d \exp \left( j \frac{\pi}{4} \right) - \frac{2}{3} (X^d)^2 \exp \left( -j \frac{\pi}{4} \right) \right] \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{4} + X^d \right) \right]$$

②  $0.3 < X^d \leq 5.5$  时

$$F(X^d) = 2j\sqrt{X^d}e^{jX^d} \int_{\sqrt{X^d}}^{\infty} e^{-jt^2} dt$$

采用线性叠加方法计算。

③  $X^d \geq 5.5$  时

$$F(X^d) = 1 + j\frac{1}{2X^d} - \frac{3}{4}\frac{1}{(X^d)^2} - j\frac{15}{8}\frac{1}{(X^d)^3} + \frac{105}{16}\frac{1}{(X^d)^4}$$

2.  $\hat{P}_{s,h}(\xi^d)$  —— 皮克里斯·卡略特函数, 其定义为

$$\hat{P}_{s,h}(\delta) = \frac{e^{-j(\pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{\tilde{Q}V(\tau)}{\tilde{Q}W_1(\tau)} e^{-j\delta\tau}, \quad \begin{cases} 1, & \text{软边界} \\ \frac{\partial}{\partial \tau}, & \text{硬边界} \end{cases}$$

其中

$$V(\tau) = \sqrt{\pi}Ai(\tau)$$

式中,  $Ai(\tau)$  是密勒(Miller)型艾里函数。

皮克里斯·卡略特函数的计算也分为 3 段:

①  $\xi^d \leq -2.4$  时(深亮区)

$$\begin{aligned} P_s(\xi^d) &\sim +\sqrt{-\frac{\xi^d}{4}} e^{j\left[\frac{(\xi^d)^3}{12} + \frac{\pi}{4}\right]} + \frac{1}{2\xi^d \sqrt{\pi}} \\ P_h(\xi^d) &\sim -\sqrt{-\frac{\xi^d}{4}} e^{j\left[\frac{(\xi^d)^3}{12} + \frac{\pi}{4}\right]} + \frac{1}{2\xi^d \sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

②  $-2.4 < \xi^d \leq 2$  时(阴影边界)

$$\begin{aligned} P_s(\xi^d) &\sim \sum_{n=1}^{50} \frac{CN(n)}{(n-1)!} (\xi^d)^{n-1} - j \frac{DN(n)}{(n-1)!} (\xi^d)^{n-1} \\ P_h(\xi^d) &\sim \sum_{n=1}^{50} \frac{AN(n)}{(n-1)!} (\xi^d)^{n-1} - j \frac{BN(n)}{(n-1)!} (\xi^d)^{n-1} \end{aligned}$$

只要前后两项的实部、虚部误差小于  $10^{-4}$ , 就退出叠加, 而最大的叠加次数为 50 次。

③  $\xi^d \geq 2$  时(深阴影区)

$$\begin{aligned} P_s(\xi^d) &\sim - \sum_{p=1}^{10} \frac{e^{j(\pi/6)} e^{\xi^d q_p} e^{-j(5\pi/6)}}{2\sqrt{\pi} [A'_i(-q_p)]^2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi} \xi^d} \\ P_h(\xi^d) &\sim - \sum_{p=1}^{10} \frac{e^{j(\pi/6)} e^{\xi^d \bar{q}_p} e^{-j(5\pi/6)}}{2\sqrt{\pi} [A_i(-\bar{q}_p)]^2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi} \xi^d} \end{aligned}$$

其中皮克里斯·卡略特函数中的参量  $\xi^d$  算法为

$$\xi^d = \int_{h_1}^{h_2} m(t') dt' = m \cdot h$$

$-q_p$  和  $\bar{q}_p$  分别是艾里函数及其导数的零点。

### 3. 艾里函数

复自变量的艾里函数的积分形式为

$$Ai(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\epsilon}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{3}t^3 - zt\right) dt$$

艾里函数还有一种与上式不同的积分形式。把  $\eta = t e^{j\frac{\pi}{3}}$  代入上式中, 可得下列关系

$$Ai(\tau e^{-j\frac{2\pi}{3}}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{j\frac{\pi}{6}} W_1(\tau)$$

$$W_1(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{\tau}^{\infty} e^{(\tau\eta - \frac{1}{3}\eta^3)} d\eta$$

在实际应用中常常需要知道艾里函数及其一阶导数的零点和有关的函数值, 现将这些数值列在表 5-20-1 中。

表 5-20-1 艾里函数及其一阶导数的零点和有关的函数值

$Ai(-\alpha_n) = 0; Ai'(-\alpha'_n) = 0$				
$n$	$\alpha_n$	$\alpha'_n$	$Ai(-\alpha'_n)$	$Ai(-\alpha_n)$
1	2.338	0.019	0.536	0.701
2	4.088	3.248	-0.419	-0.803
3	5.521	4.820	0.380	0.865
4	6.787	6.163	-0.358	-0.911
5	7.944	7.372	0.342	0.947
6	9.023	8.488	-0.330	-0.978
7	10.040	9.535	0.321	1.004
8	11.009	10.528	-0.313	-1.028
9	11.936	11.475	0.307	1.049
10	12.829	12.385	-0.300	-1.068

#### 4. 福克函数

福克函数的定义为

$$\begin{cases} g(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\exp(-j2\pi/3)}^{\infty} dt \frac{\exp(-j\tau t)}{W'_1(t)} & \text{硬边界} \\ \bar{g}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\exp(-j2\pi/3)}^{\infty} dt \frac{\exp(-j\tau t)}{W_1(t)} & \text{软边界} \end{cases}$$

当  $\tau > 0$  时, 两个函数的级数解为

$$\begin{cases} g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left\{\alpha'_n \tau \exp\left(-j\frac{5\pi}{6}\right)\right\}}{\alpha'_n Ai(-\alpha'_n)} \\ \bar{g}(\tau) = \exp\left(j\frac{\pi}{3}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left\{\alpha'_n \tau \exp\left(-j\frac{5\pi}{6}\right)\right\}}{Ai'(-\alpha_n)} \end{cases}$$

式中,  $Ai(\tau)$  是密勒(Miller)型艾里函数;  $Ai'(\tau) = \frac{dAi(\tau)}{dt}$ ;  $-\alpha_n$  和  $-\alpha'_n$  分别是艾里函数及其导数

的零点。

当  $\tau \rightarrow \infty$  时, 两个函数的渐近值为

$$\begin{cases} g(\tau) = \exp\left(j \frac{\tau^3}{3}\right) \\ \bar{g}(\tau) = -2j\tau \exp\left(j \frac{\tau^3}{3}\right) \end{cases}$$

### 参 考 文 献

- [1] 汪茂光. 几何绕射理论. 第二版. 西安: 西安电子科技大学出版社.
- [2] P. H. Pathak, W. D. Burnside, R. J. Marhefka. A Uniform GTD Analysis of the Diffraction of Electromagnetic Waves by a Smooth Convex Surface. IEEE Trans. AP, Sept. 1980, 28 (5), 631.

## 参 考 文 献

- [1] 吕善伟.微波工程基础.北京:航空航天大学出版社,1995.
- [2] 黎滨洪,周希朗.毫米波技术及其应用.上海:交通大学出版社,1990.
- [3] 鲍家善,马柏林,钱鑑.微波原理.北京:高等教育出版社,1985.
- [4] 顾其净.介质谐振器微波电路.北京:人民邮电出版社,1986.
- [5] 苗敬峰.毫米波电路.南京:东南大学出版社,1988.
- [6] 廖承恩.微波技术基础.西安:西安电子科技大学出版社,1994.
- [7] 李英.电磁介质谐振器理论与应用.北京:电子工业出版社,1988.
- [8] 夏军,梁昌洪.电磁开腔品质因数Q的计算.电子科学学刊,1995,17(1).
- [9] 黄宏嘉.微波原理 卷 I. 北京: 科学出版社,1963.
- [10] B. N. Das, K. V. Rao, A. K. Mallick. Analysis of an Oval Symmetrically Located Inside a Rectangular Boundary by Conformal Mapping. IEEE Trans. 1983, 31: 403 - 406.
- [11] W. Lin. Computation of the Parallel-Plate Capacitor with Symmetrically Placed Unequal Plates. IEEE Trans. MTT, 1985, 33: 800 - 807.
- [12] Pan Shenggen. Approximate Determination of the Characteristic Impedance of the Coaxial System Consisting of an Irregular Outer Conductor and a Circular Inner Conductor. IEEE Trans. MTT, 1987, 35: 61 - 63.
- [13] M. A. R. Guls ton. Microwave Transmission-Line Impedance Data. London: Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
- [14] W. Hilberg. From Approximations to Exact Relations for Characteristic Impedance. IEEE Trans. MTT, 1969, 17: 259 - 265.
- [15] 曾令儒.复杂边值问题的解.中国科学 A辑,1982,6:553.
- [16] 梁昌洪,官伯然.矩量法结合保角变换求解复杂二维边值问题.电子学报,1984,5:1.
- [17] 徐泰.边耦合有限厚度三板线奇偶模特性阻抗的计算.复旦学报,1982,6.
- [18] H. A. Wheeler. Formulas for the Skin-Effect. Proc. IRE, 1942, 30(9): 412 - 424.
- [19] 吴万春,梁昌洪.微波网络及其应用.北京:国防工业出版社,1980.
- [20] 梁昌洪.计算微波.西安:西北电讯工程学院出版社,1985.
- [21] F. I. Tseng, D. K. Cheng. An approach for S. optimization in linear arrays. Urbana: URSI-USN C Fall Meeting, Ill, 1964.

- [22] S. P. Morgan. Interaction of adaptive antenna arrays in an arbitrary environment. *Bell Sys. Tech. J.*, January 1965, 44: 23 - 48.
- [23] J. Capon. Optimum weighting functions for the detection of sampled signals in noise. *IEEE Trans. IT*, vol. April 1964, 10: 152 - 159.
- [24] F. R. Gantmacher. Translated by K. A. Hirsch. *The Theory of Matrices*, vol. I. New York: Chelsea Publishing Co., 1959.
- [25] C. T. Tai. The optimum directivity of uniformly spaced broadside arrays of dipoles. *IEEE Trans. AP*, July, 1964, 12: 447 - 454.
- [26] W. W. Hansen, D. K. Cheng. Optimum progressive phase shifts for discrete endfire arrays. *Syracuse Univ. Research Inst.*, Syracuse, N. Y., Rept. No. 492 - 6002T8; Rome Air Dev. Ctr., Rome, N. Y., RADC-TN-60-44, February 1960.
- [27] C. Liang, X. Shi, J. Yang. Progress In Electromagnetic Research, PIER, 2004, 45: 277 - 289.
- [28] WeiGan Lin. A Critical Study of the Coaxial Transmission Line Utilizing Conductors of Both Circular and Square Cross Section. *IEEE Tran. MTT*, 1982, 30.
- [29] R. F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. New York: Macmillan, 1968.
- [30] D. K. Cheng, C. H. Liang. Thinning Technique for Moment method solutions. *Proceedings of the IEEE*, 1983, 72(2): 265 - 266.
- [31] J. T. Kuo, Ke-Ying Su. Analytical Evaluation of the MoM Matrix Elements for the Capacitance of a Charged Plate. *IEEE Trans. MTT*, 2002, 50(5): 1435 - 1436.
- [32] R. E. Collin. *Field Theory of Guided Waves*. New York: McGraw-Hill, 1960.
- [33] D. K. Cheng, F. I. Tseng. Gain Optimization for arbitrary antenna arrays. *IEEE Trans. AP*, 1965, 13(6): 973 - 974.
- [34] 汤文侃, 孙诗瑛. BEM 法计算椭圆柱介质谐振器谐振频率时积分中高阶奇异点消去法. *微波学报*, 1998, 14(2): 159 - 166.
- [35] 高本庆. 时域有限差分法. 北京: 国防工业出版社, 1995.
- [36] A. Taflove. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Norwood, MA: Artech House, 1995.
- [37] A. Taflove(Ed.). *Advances in Computational Electromagnetics: The FDTD Method*. Norwood, MA: Artech House, 1998.
- [38] 葛德彪, 田玉波. 电磁波时域有限差分方法. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2004.
- [39] 王长清, 祝西里. 电磁场计算中的时域有限差分方法. 北京: 北京大学出版社, 1994.
- [40] K. S. Yee. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell Equations in Isotropic Media. *IEEE Trans. AP*, May 1966, 14(3): 302 - 307.
- [41] A. Taflove, M. E. Brodwin. Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering Problems Using the Time-Dependent Maxwell's Equations. *IEEE Trans. MTT*, Aug. 1975, 23(8): 623 - 630.
- [42] G. Mur. Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of

- the Time Domain Electromagnetic Equations. IEEE Trans. EMC, 1981, 23: 373 - 382.
- [43] J. P. Berenger. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. J. Comput. Phys., Oct. 1994, 114(2), 185 - 200.
- [44] J. P. Berenger. An Effective PML for the Absorption of Evanescent Waves in Waveguides. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, May 1998, 8(5), 188 - 190.
- [45] 汪茂光. 几何绕射理论 第二版. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994.
- [46] R. G. Kouyoum jian, P. H. Pathak. A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface. Proc. IEEE, Nov. 1974, 62(11), 1448.
- [47] P. H. Pathak, N. Wang, W. D. Burnside, R. G. Kouyoumjian. A Uniform GTD Solution for the Radiation from Sources on a Convex Surface. IEEE Trans. AP, July 1981, 29 (4), 609.
- [48] P. H. Pathak, W. D. Burnside, R. J. Marhefka. A Uniform GTD Analysis of the Diffraction of Electromagnetic Waves by a Smooth Convex Surface. IEEE, AP Sept. 1980, 28 (5), 631.
- [49] P. H. Pathak, N. Wang. Ray Analysis of Mutual Coupling Between Antennas on a Convex Surface. IEEE Trans. AP, Nov. 1981, 29, 911.
- [50] P. H. Pathak, N. Wang. An Analysis of the Mutual Coupling Antennas on a Smooth Convex Surface. AD - A065591, Oct. 1978.
- [51] C. A. Balanis. Advanced Engineering Electromagnetics. John Wiley Sons, 1989, 743 - 850.