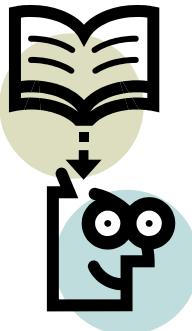


微波技术基础

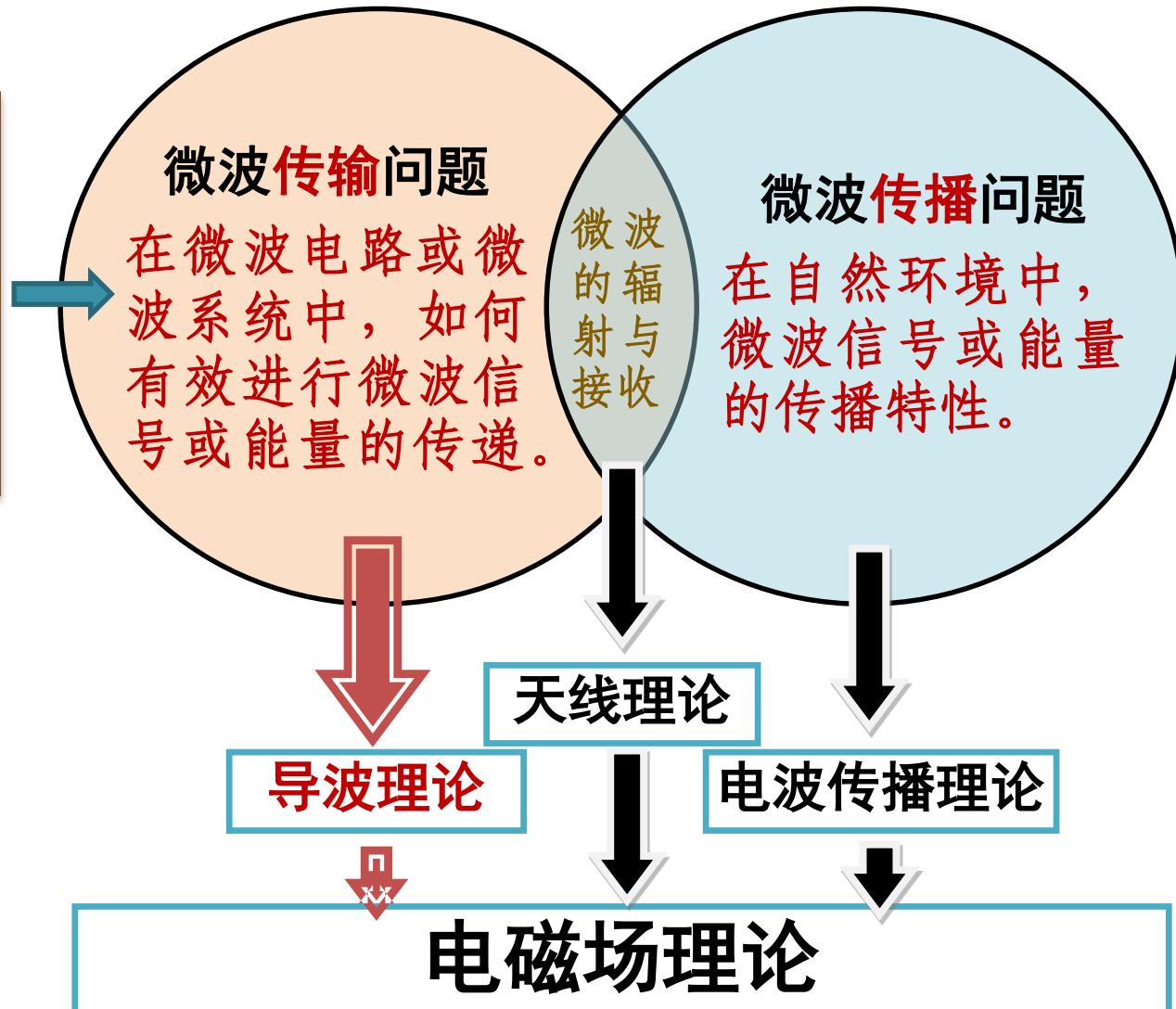
Fundamentals of Microwave Technology

中国科学技术大学
电子工程与信息科学系

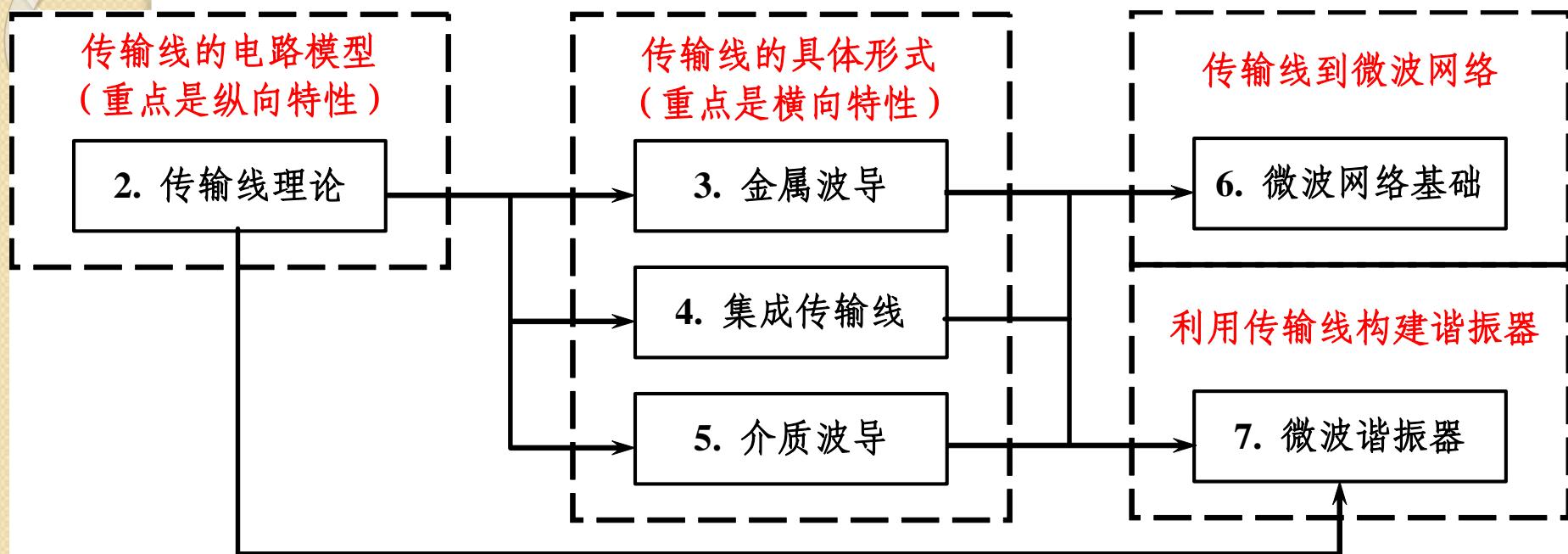


本课程的基本问题

《微波技术基础》讲授的最基本问题是**微波传输问题**。



本课程的基本结构



第一章 引言

第二章 传输线理论

第三章 规则金属波导

第四章 微波集成传输线

第五章 介质波导

第六章 微波网络基础

第七章 微波谐振器

参考教材

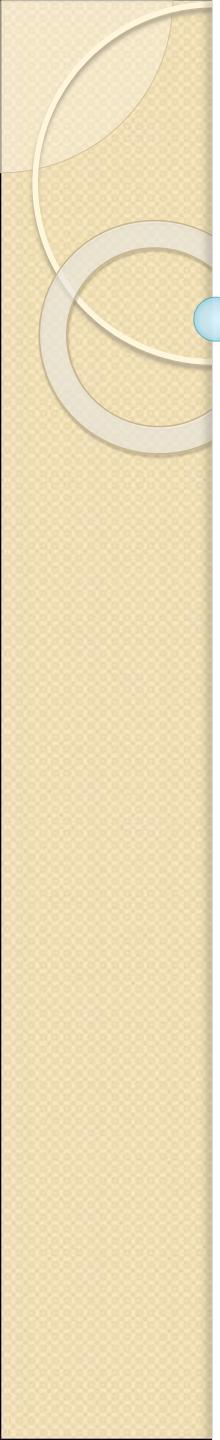
1. 《微波技术基础》
 - 廖承恩编著，84版，西电出版社
 - 廖承恩编著，94版，西电出版社
2. 《简明微波》，梁昌洪，06年高教版
3. 《微波工程》(第3版)，D.M. Pozar，电子工业出版社。

说明：廖承恩84版的主要章节结构与本课程有较大相似性。

课程QQ群和主页



课程主页:
<http://home.ustc.edu.cn/~sa20219006/>

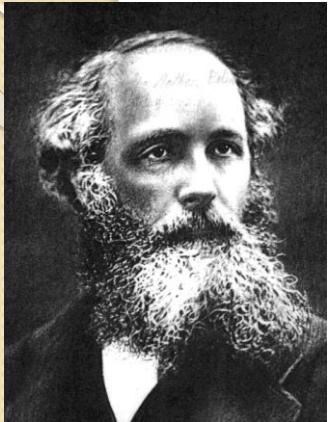


第一章 引言

Introduction

中国科学技术大学
电子工程与信息科学系

电磁波及其发现



詹姆斯·克拉克·麦克斯韦，英国物理学家、数学家，经典电动力学的创始人。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

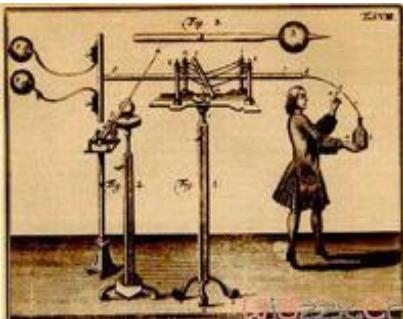
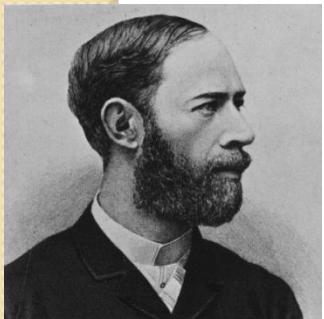
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- **麦克斯韦(Maxwell)**

- 1862年从理论上预言了电磁波的存在，推演了电磁波方程组，推论光波也是电磁波，统一了电和光。

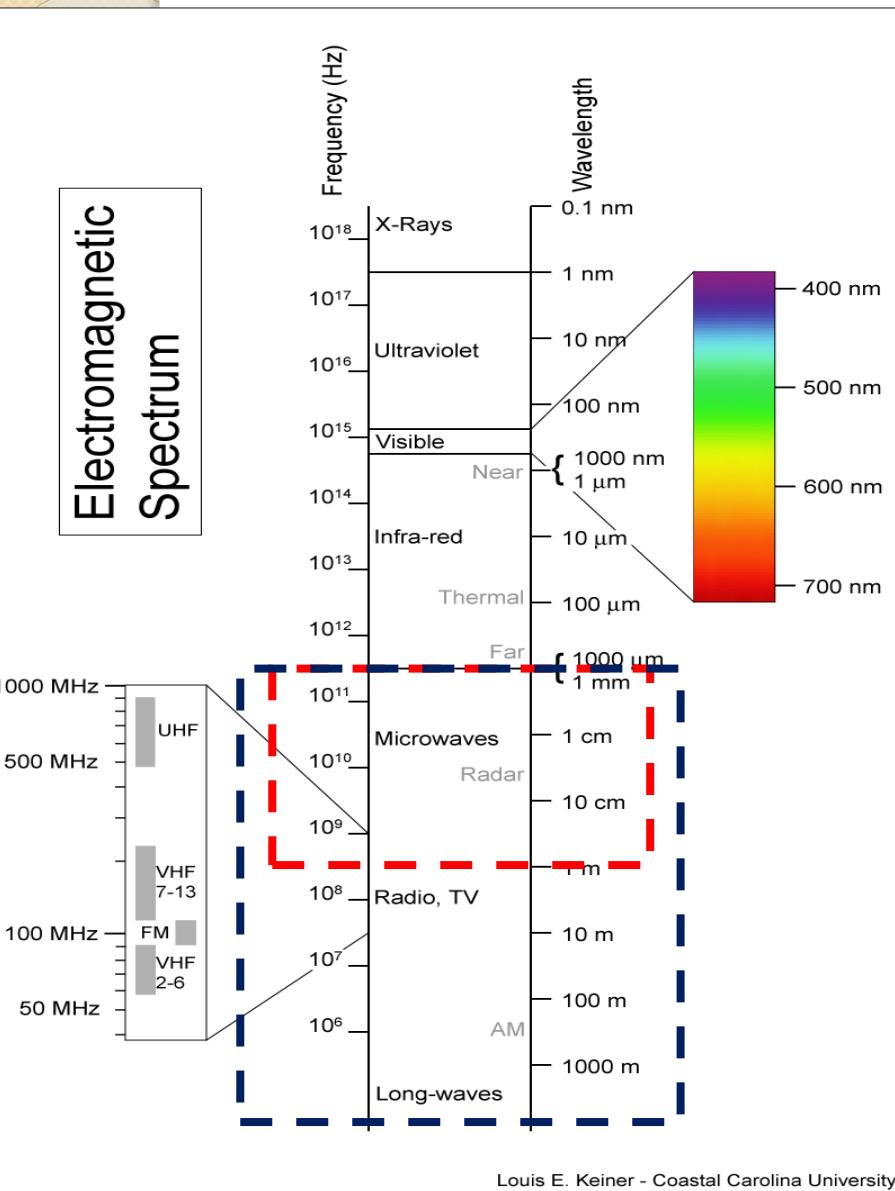


海因里希·鲁道夫·赫兹，德国物理学家。

- **赫兹(Hertz)**

- 于1887至88年间，利用莱顿瓶放电产生了电磁波，证实了电磁波的存在。

微波的定义



什么是微波？

无线电波中波长最短的电磁波。

频率：300MHz~300GHz

波长：1m ~1mm

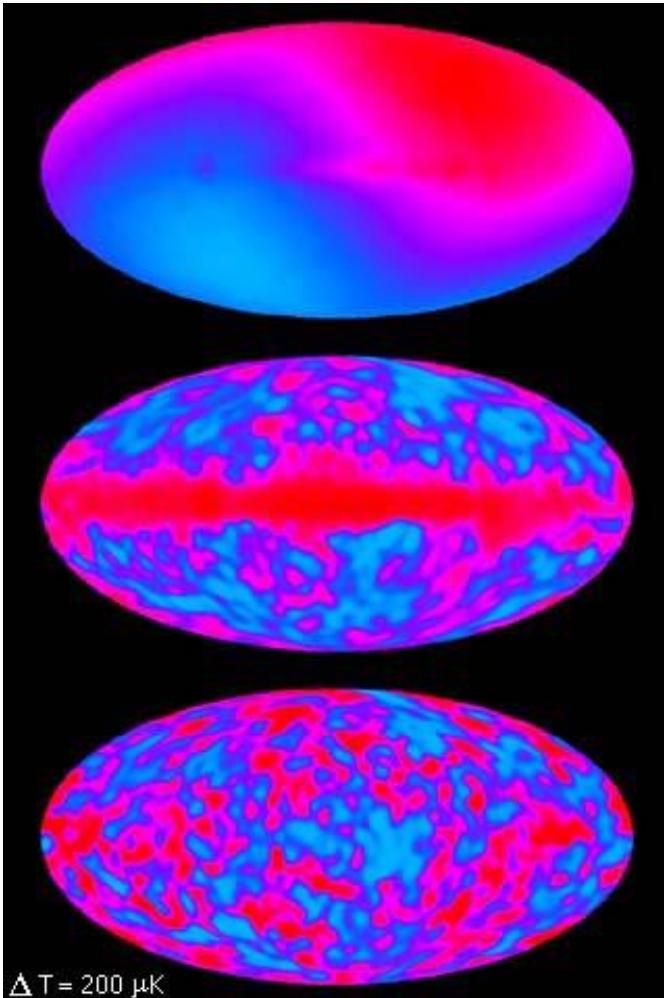
Kilo(10^3)、Mega(10^6)

Giga(10^9)、Tera(10^{12})

Peta(10^{15})

问题：什么是射频？

微波是客观存在的



- 微波在自然界中是客观存在的，我们周围的许多物体都存在着微波辐射和反射。
- 宇宙的微波背景辐射：被称为“**创世遗迹**”，宇宙大爆炸理论的重要依据。
 - 其特征与绝对温标2.725K的黑体辐射相同；
 - 频率**4080MHz**，波长**7.35cm**；
 - 宇宙年龄**137±1亿年**，宇宙组成成分：4%是一般物质，23%是暗物质，73%是暗能量。
- “**微波荡漾**”的世界。

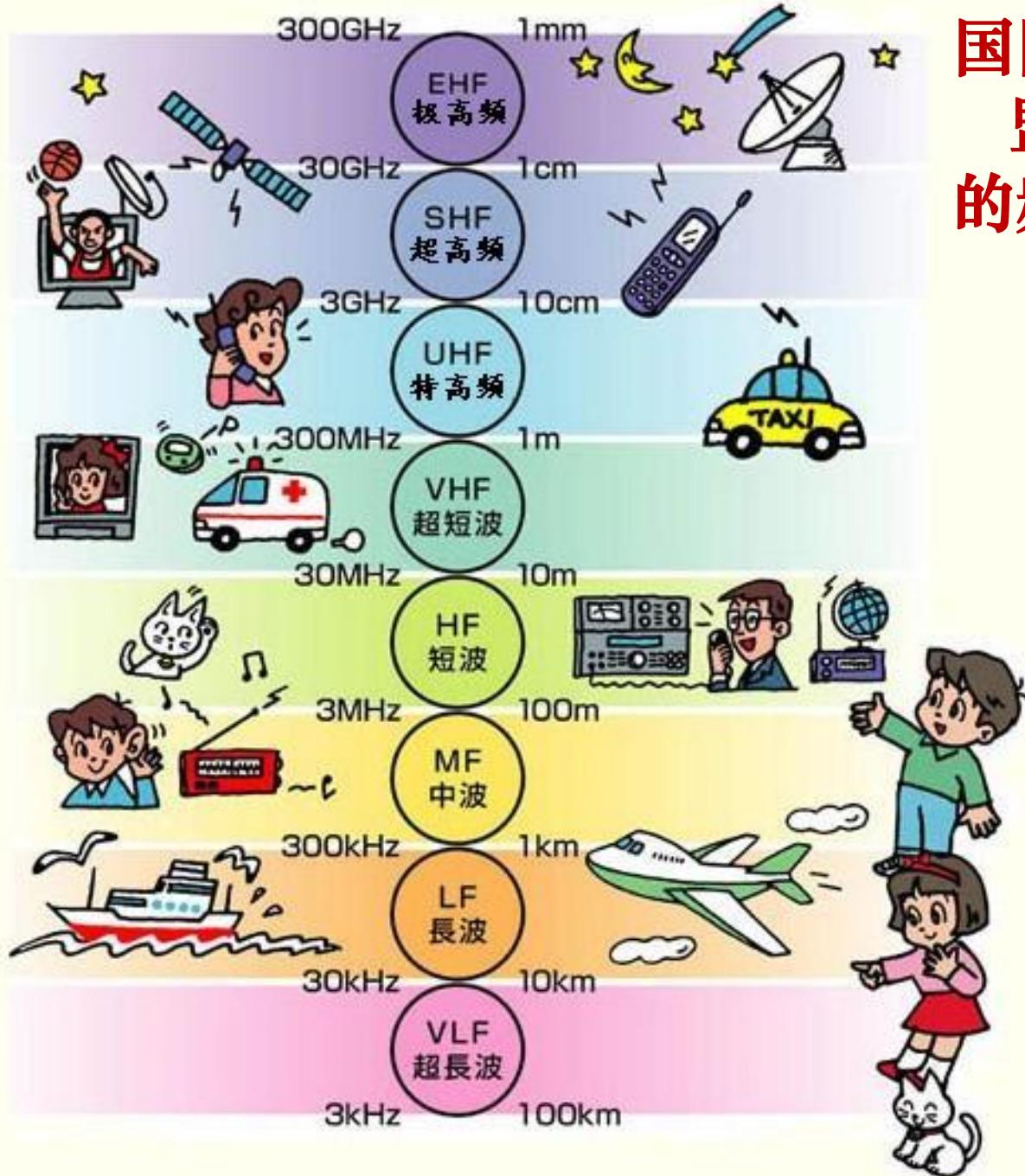
微波(Microwave)

- 电磁波做为信息和能量传输的载体是当前信息社会发展的重要基础。
- 微波做为电磁波谱的一个主要频段，其技术利用是当前信息技术发展的重要手段之一。
- 四个历史发展阶段：
 1. 上世纪40年代以前的试验验证研究
 2. 二次大战中的应用与兴起（雷达）
 3. 上世纪60年代的固态平面集成电路（卫星通信）
 4. 上世纪80年代以来的高速发展（移动通信）
- 微波已日益广泛地进入了各个领域和千家万户。

无线电波频段的划分

指向性强，应用广泛

频率较低，信号强度易被环境衰减

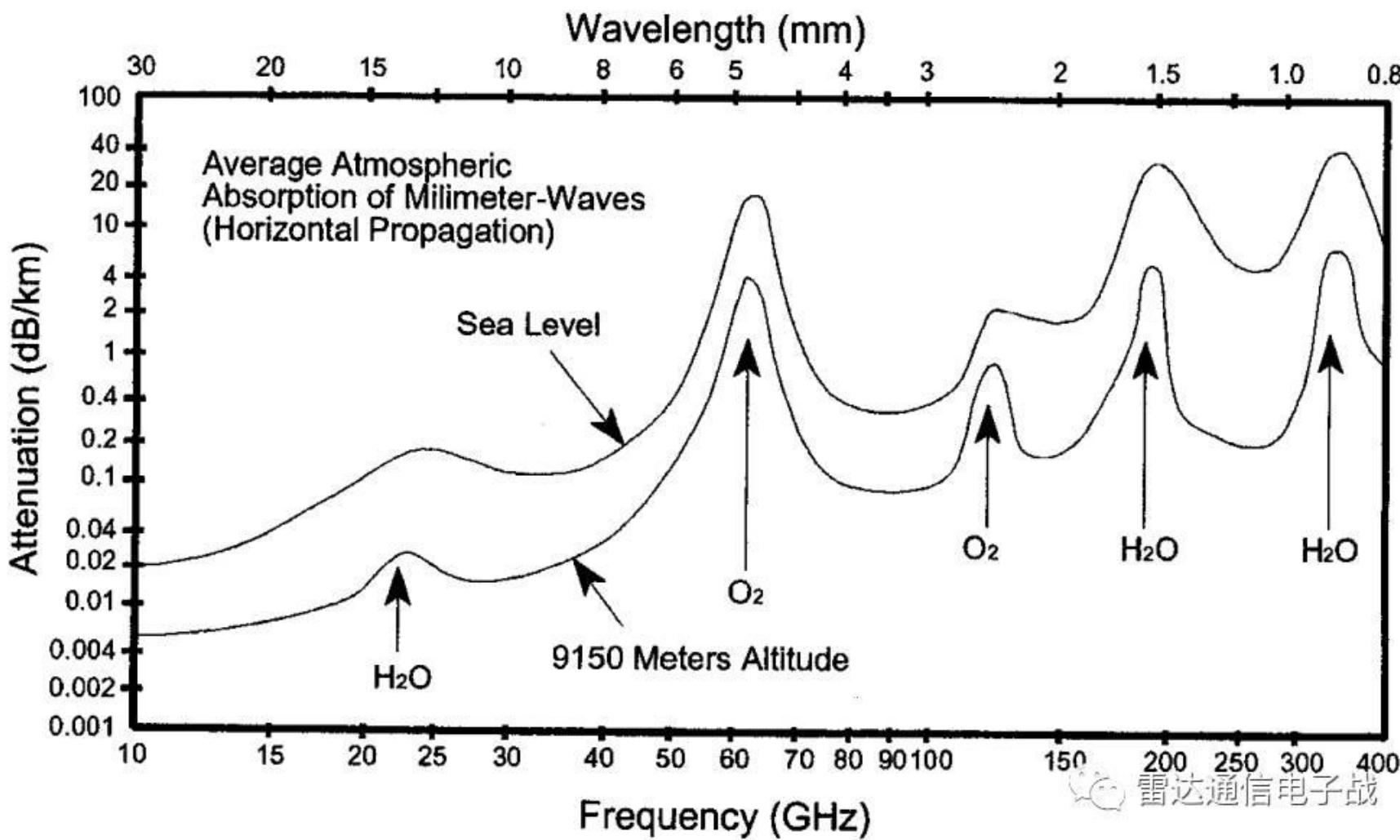


国际电信联盟(ITU)
的频段命名

IEEE Std. 521-2002 (微波频段划分)

名称	频率	波长	简单含义
UHF	300 - 1000 MHz	100 cm - 30 cm	/
L Band	1 - 2 GHz	30 cm - 15 cm	L for "long" wave.
S Band	2 - 4 GHz	15 cm - 7.5 cm	S for "short" wave.
C Band	4 - 8 GHz	7.5 cm - 3.75 cm	C for "compromise" between S and X band.
X Band	8 - 12 GHz	3.75 cm - 2.50 cm	Used in WW II for fire control, X for cross (as in crosshair)
Ku Band	12 - 18 GHz	2.50 cm - 1.67 cm	Ku for "kurz-under".
K Band	18 - 27 GHz	1.67 cm - 1.11 cm	German "kurz" means short
Ka Band	27 - 40 GHz	1.11 cm - 0.75 cm	Ka for "kurz-above".
V Band	40 - 75 GHz	7.5 mm - 4.0 mm	V for very high frequency band
W Band	75 - 110 GHz	4.0 mm - 2.7 mm	W follows V in the alphabet
mm Band	110 - 300 GHz	2.7 mm - 1.0 mm	/

大气对电磁波的吸收（部分）



雷达通信电子战



微波的特点

I. (微波电路的) 分布参数效应

- ☞ 波长与物体尺寸可以比拟甚至更小
- ☞ 集总参数（电阻、电容和电感）特性沿微波元器件内部空间**连续分布**，电流和电压**失去唯一性**。
- ☞ 典型效应
 - 趋肤效应(skin effect)
 - 辐射效应(radiation effect)
 - 相位滞后效应(phase retard effect)



微波的特点

2. 似光性 (Optical-Like)

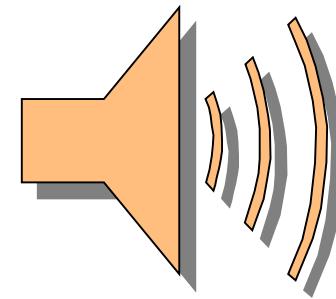
几何光学的传播特性 ($\lambda \ll d$, d 为物体尺寸)

- 1) 直线传播 (又称视线传播, line-of-sight)
- 2) 满足Snell定律

物理光学的传播特性 ($\lambda \gg d$)

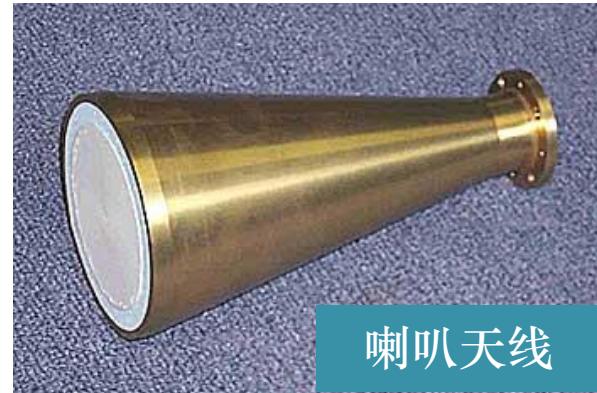
- 1) 衍射特性 (Diffraction Property)
- 2) 干涉特性 (Interference Property)
- 3) 极化特性 (Polarization Property)

微波的特点



3. 似声性 (Acoustic-Like)

波长与物体尺寸具有相同量级 ($\lambda \approx d$)



波导缝隙天线

微波的特点



4. 非电离性

量子能量：小于 10^{-5} eV

- 1) 其量子能量不足以改变物质分子的内部结构或破坏分子间的化学键。
- 2) 分子中的原子核在外加电磁场的周期作用下所呈现的许多共振现象都发生在**微波范围**，因而微波为探索物质的内部结构和基本特性提供了有效的研究手段。



微波的特点

5. 穿透性

- 1) 可以穿透电离层，是无线电波的“宇宙窗口”。
- 2) 可以穿透云雾、雨、植被、积雪和地表层，是遥感技术的重要波段。
- 3) 可以穿透各类介质（包括生物体），能实现介质内部和外部的均匀加热，也能实现选择性加热。

微波的特点



6. 信息性

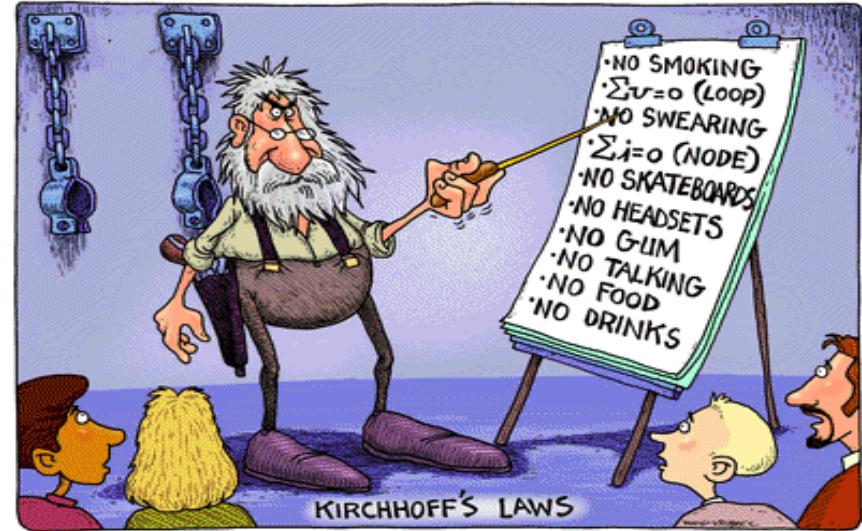
- 1) 相对带宽小，绝对带宽大，可传输的信息容量大。
- 2) 可获取更为精细相位信息、极化信息和多普勒信息，为目標检测和识别提供有力帮助。

其他特点

7. 研究方法的特点

路的概念和方法：分布参数理论，Kirchhoff定律

场的概念和方法：电磁场理论，麦克斯韦方程

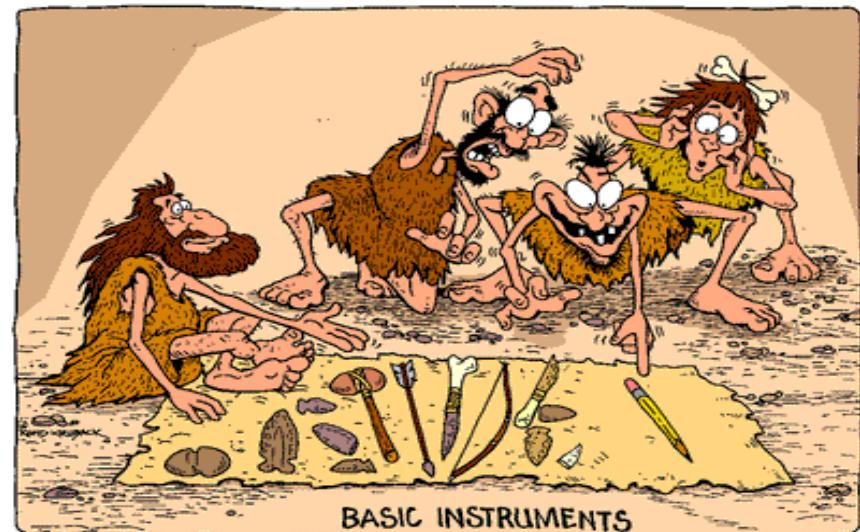


8. 高、贵、少的特点

元器件价格高；

测量仪表昂贵；

研究人员较少。





微波的应用—信息载体

● 微波通信

- 凡是需要将信息通过无线方式进行传输的地方，一般都离不开微波通信。
 - 微波中继通信
 - 卫星通信
 - 个人移动通信
 - 无线网络通信
 - 移动互联网



微波的应用—信息载体

● 微波雷达 (microwave radar)

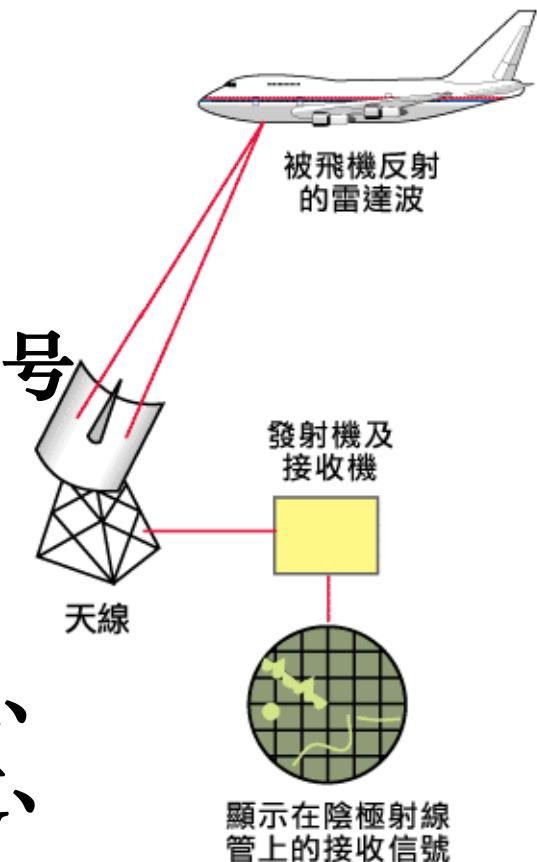
ra(dio) d(ection) a(nd) r(anging)

- 按工作体制划分：

连续波雷达、脉冲雷达、随机信号
雷达、无源雷达等等.....

- 按功能划分：

预警雷达、火控雷达、炮瞄雷达、
制导雷达、测绘雷达、气象雷达、
探地雷达、防撞雷达等等.....





机场鸟情预警雷达

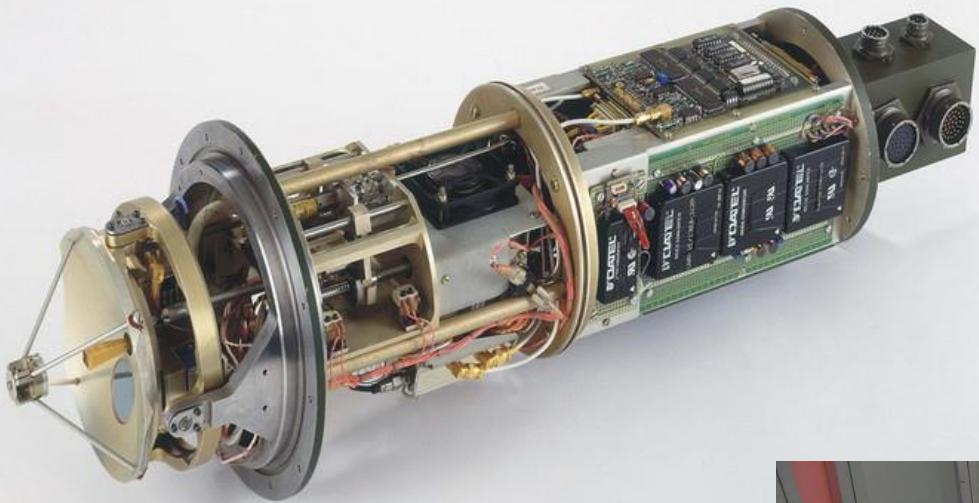


探地雷达



手持测速雷达

导弹的眼睛： 导引头 (Seeker)



毫米波与红外双模导引头

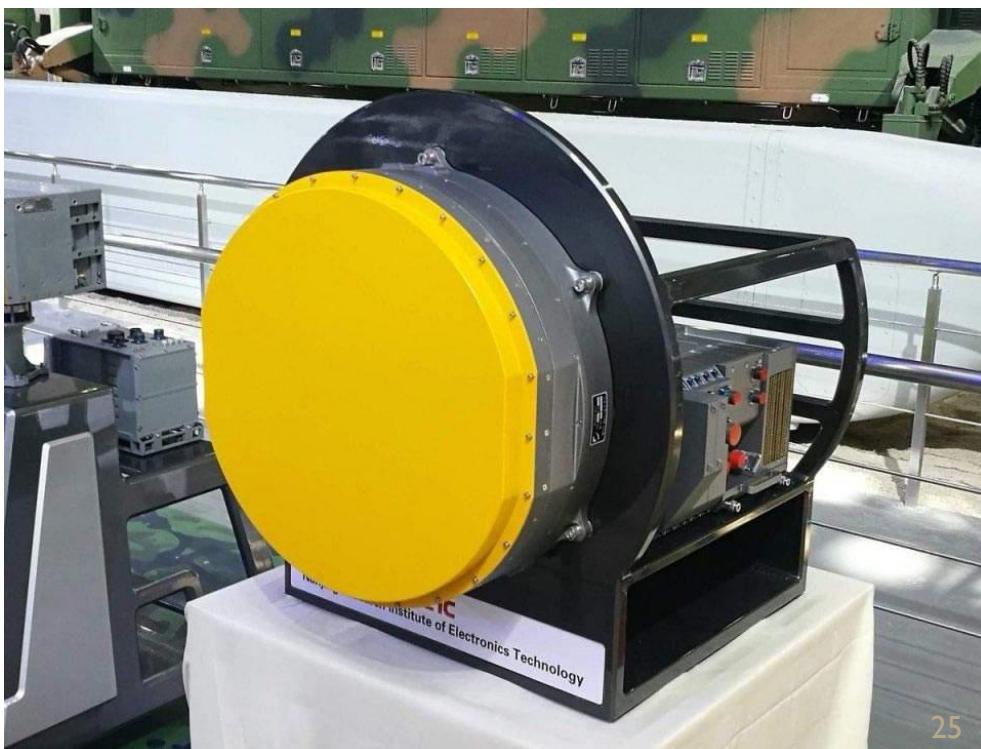


战斗机的眼睛： 机载雷达



美国F35的机载雷达
APG-81，1200个T/R

中国的某型AESA



大型军用雷达



美国“铺路爪”地基预警雷达

- 工作频率**420~450MHz**, 探测距离为**4800KM**。
- 峰值功率**582.4KW**, 平均功率**145KW**。
- 安装在**32米**高的建筑物内, 两个圆形天线阵面彼此成**60度**, 每个阵面后倾**20度**, 直径约**30米**, 由**2000**个阵元组成。

萨德(THAAD)系统中的TPY-2相控阵雷达:

- X波段 (**9.5GHz**)
- 天线阵面**9.2m²**, **30464**个阵元
- 对**RCS**为**1m²**目标的最大探测距离可达到**2300KM**。



微波的应用—信息载体



- **无线电导航**

- 美国的GPS

1993年建成，24颗在轨卫星，3颗备用。工作频率：1.2276GHz和1.57542GHz。提供三维位置、三维速度和时间信息。

- 中国的北斗(COMPASS)

2000年开始建设。2017年底开始，北斗3代进入部署，2020年实现全球覆盖。北斗导航卫星系统可实现定位、定时、简短通信三大功能。

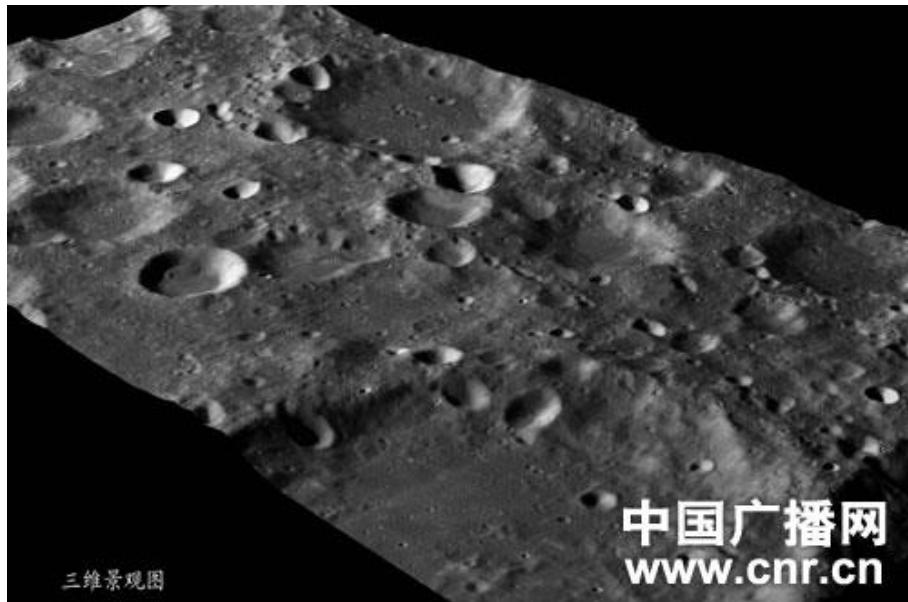
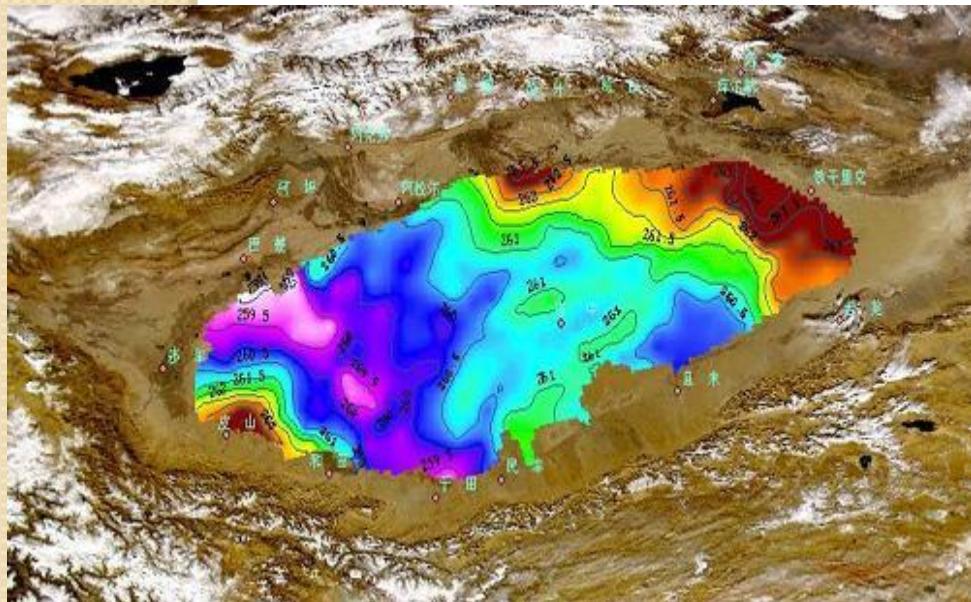
- 俄罗斯的GLONASS

- 欧洲的GALILEO

微波的应用—信息载体

● 微波遥感

- 基本原理：微波遥感是通过接收黑体辐射的微波粒子（噪声）实现的，该微波粒子直接由周围物体辐射或反射产生。



微波的应用—信息载体

• 射电天文



500米球面射电望远镜（FAST）模拟效果图
世界最大单口径望远镜（贵州省平塘县）

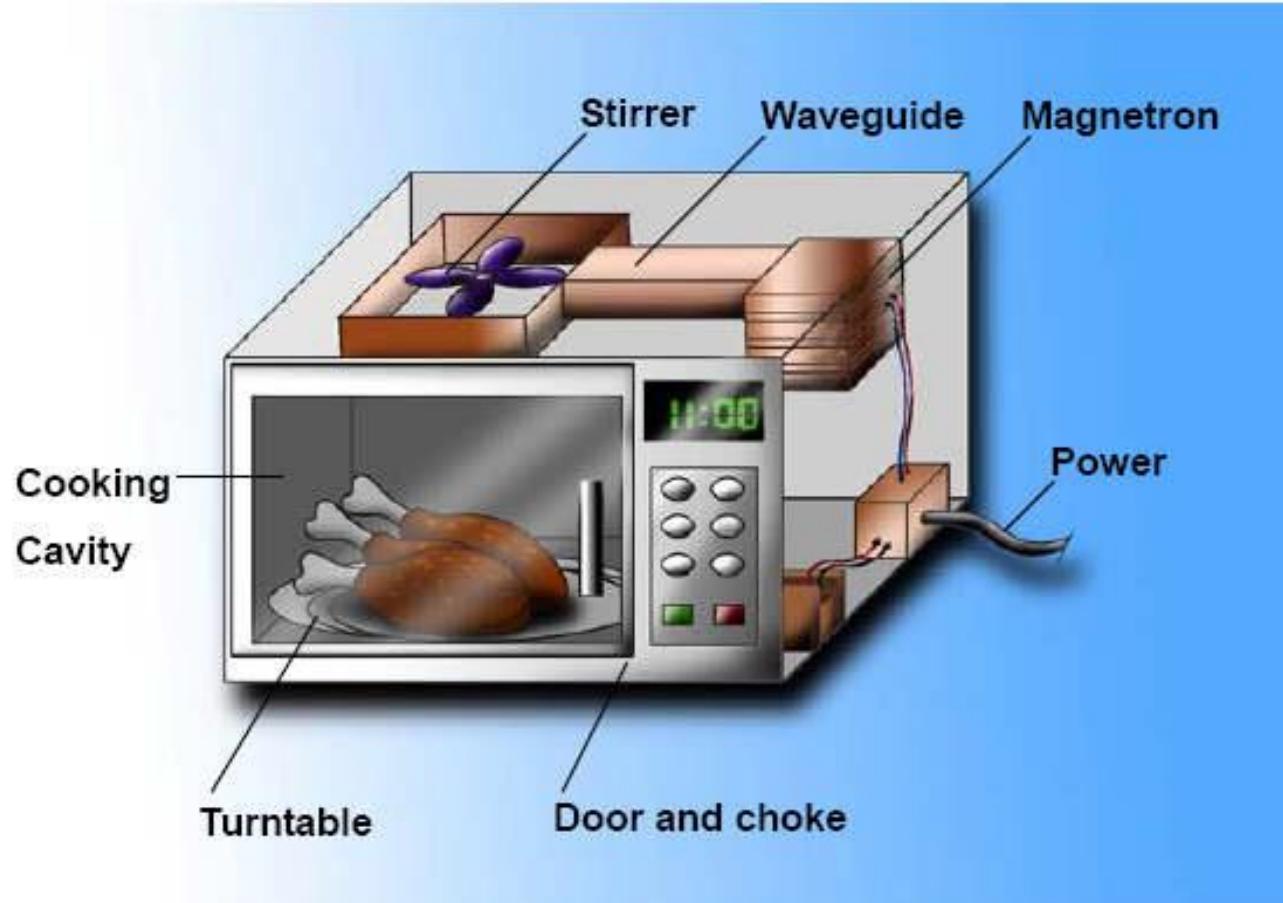


平方千米阵(SKA)



Arecibo巨型射电望远镜（美国）
口径305m，波长12.6cm

微波的应用—微波能

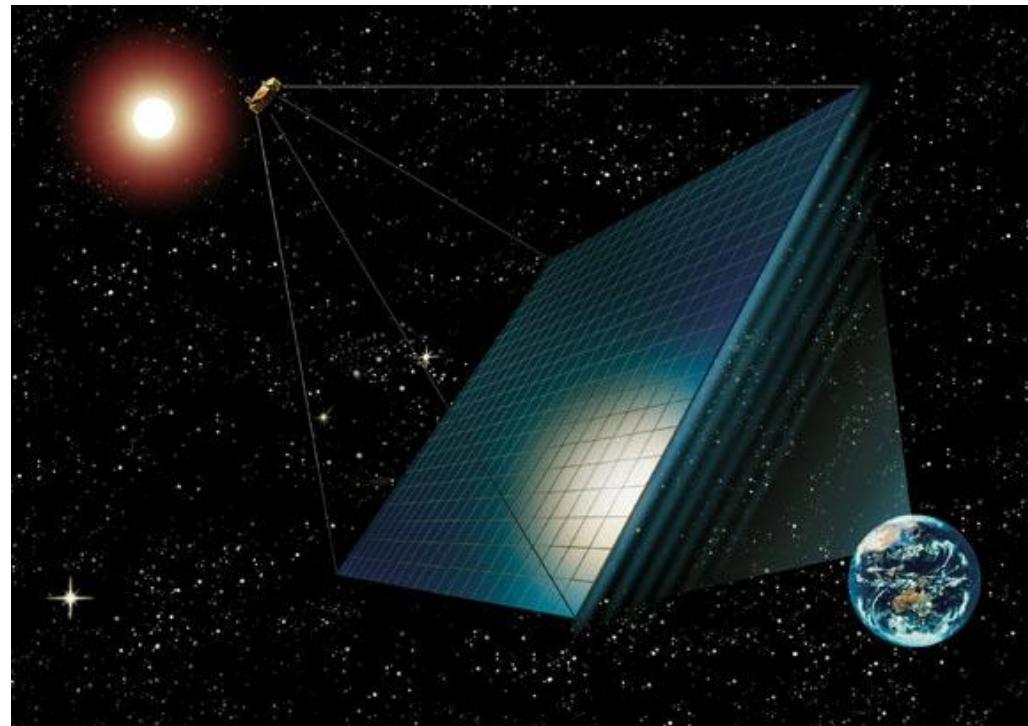


我国用于微波加热的频率为2450MHz。

微波的应用—微波能

- 空间太阳能系统 (SSPS)

- 在地球同步轨道上建设太阳能电池板并收集太阳能，以微波或激光的形式传回地球，其发电量相当于一个中等级别的核电站。



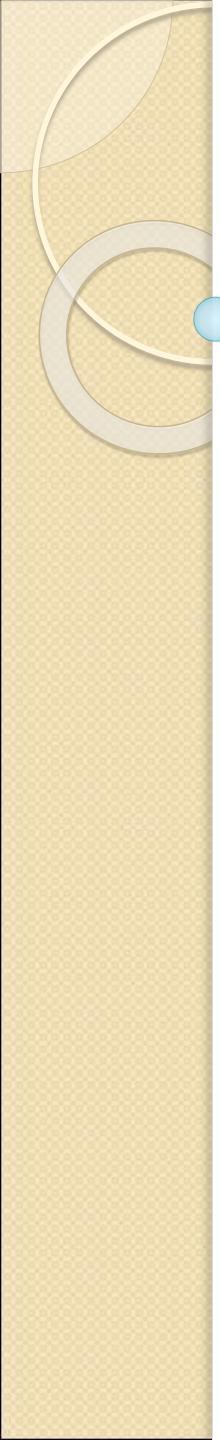
微波的应用—微波能

- 主动拒止微波系统（ADS）
 - 微波定向能武器，能发射极窄波束毫米波，在1秒内产生令人难以忍受的灼痛感。





本章结束!



第二章 传输线理论

Transmission Line Theory

中国科学技术大学
电子工程与信息科学系

本章内容

§ 2.1 传输线的基本概念

§ 2.2 传输线方程及其解

§ 2.3 传输线的阻抗概念和反射系数

§ 2.4 无损传输线工作状态分析

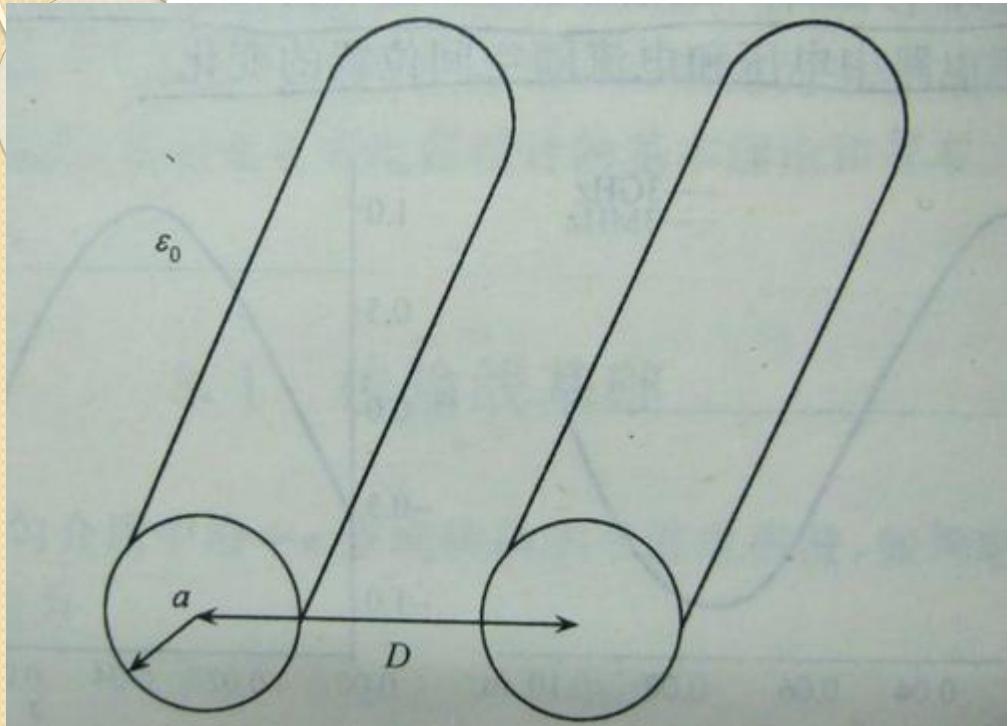
§ 2.5 传输功率与效率

§ 2.6 阻抗与导纳圆图

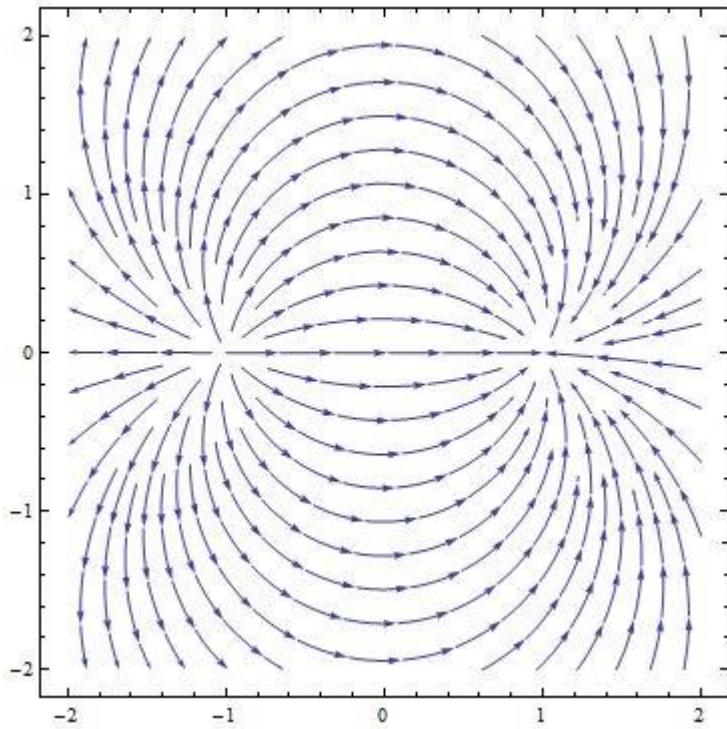
§ 2.7 传输线的阻抗匹配

§ 2.8 传输线的时域分析

传输线示例I—平行双导线



平行双导线示意图



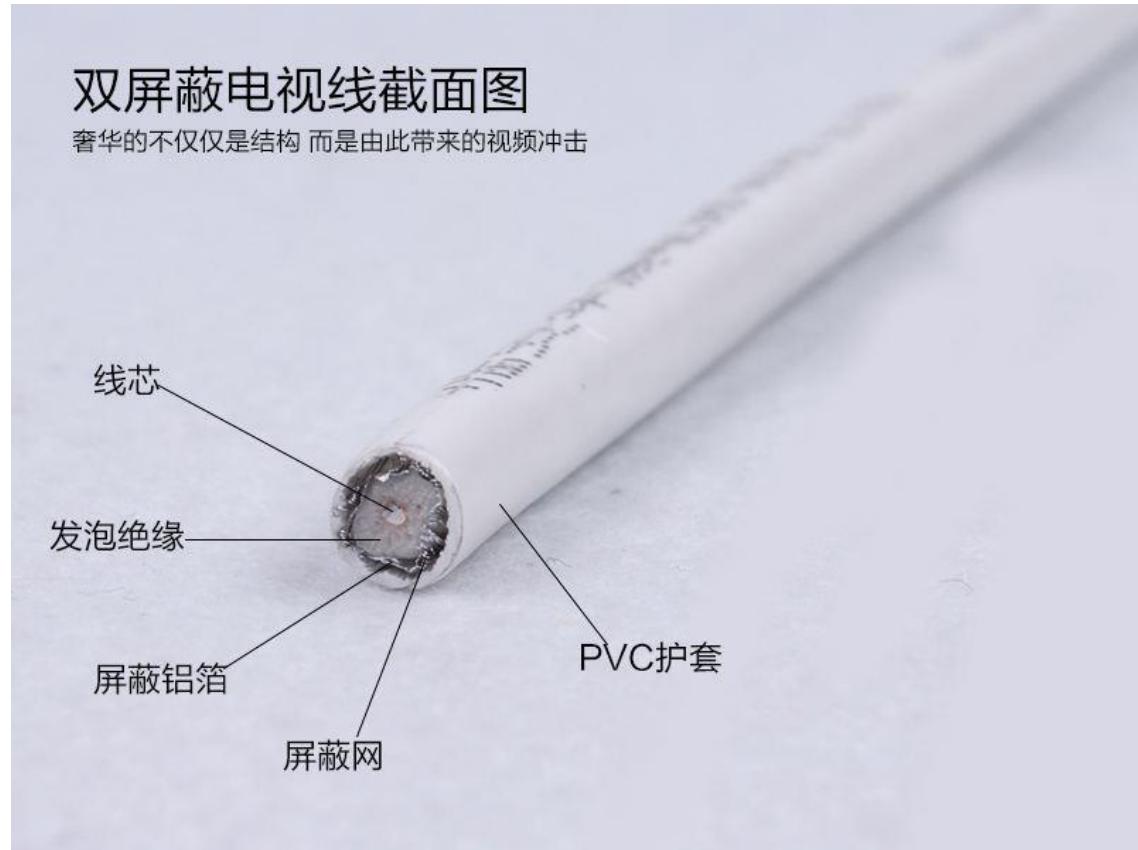
平行双导线的电场分布图

左图是由两个导线平行放置构成的平行双导线（导线半径为 a ，导线间距为 D ）。由右图可知，被传输的电磁波架构在双导线周围，由双导线引导着沿线进行传输。

传输线示例2—同轴线



同轴线实物照片
(用于闭路电视)



因存在内外两个同轴的导体（即线芯导体、屏蔽铝箔+屏蔽网的导体），所以称为同轴线。同轴线传输的电磁波处于**内外导体之间**（即图中发泡绝缘体之中）。

§ 2.1 传输线的基本概念

一、传输线的定义

定义：能用于传输微波能量或信息的各种形式传输系统的总称。

本质特征：

在构成传输线的导体或介质边界约束下，形成由这些导体或介质边界所导引的波，将信号源的电磁能量以被导引波形式传导到负载。

基本要求：

损耗小（损耗包括导体损耗、介质损耗和辐射损耗）

传输功率大（或功率容量大）、工作频带宽、尺寸小、结构简单。

§ 2.1 传输线的基本概念

二、传输线与低频线的差异

1、电长度的差别

定义：传输线的物理长度 l 与其工作波长 λ 之比。

低频线： $\lambda \gg l$ ，所以称为短线（相对波长而言）。

传输线： $\lambda \leq l$ ($l > 0.1\lambda$ 或 $> 0.05\lambda$)，所以称为长线。

必须考察沿线各点的 E (或电压) 和 H (或电流) 随空间和时间变化，以及电磁振荡沿整个传输线的传播过程，即长线理论。

§ 2.1 传输线的基本概念

2、电气参数分布的差别

在任意一段长度为 Δz 且充分小的传输线中，电气参数都包括分布电阻 R_1 （电流流过导线使导线发热，可视为导体损耗），分布电导 G_1 （导线间绝缘不完善引起的漏电流，可视为介质损耗），分布电容 C_1 （导线间有电压表明线间有电场），分布电感 L_1 （导线通过电流，周围将产生磁场）。

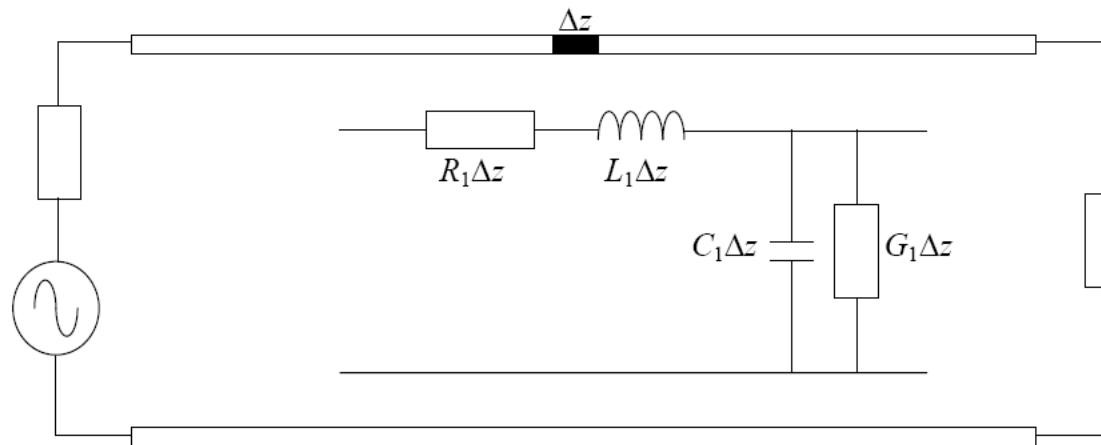
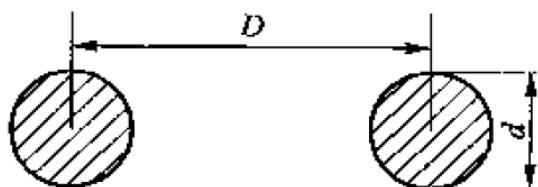
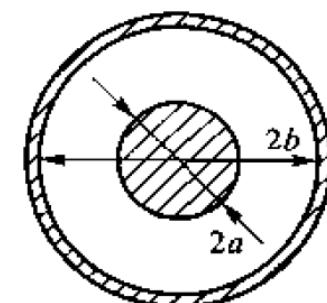


表 1-1-1 双导线和同轴线的主要电参数

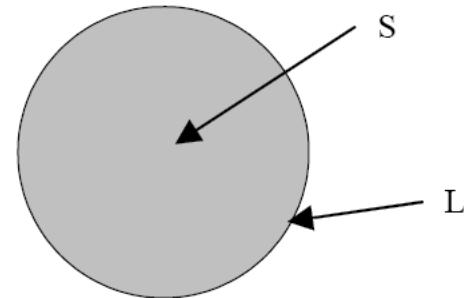
传输线 分布参数	双导线	同轴线
		
$R/(\Omega/m)$	$\frac{2}{\pi d} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma_2}}$	$\sqrt{\frac{f \mu_0}{4\pi\sigma_2}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$
$L/(H/m)$	$\frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}$	$\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
$C/(F/m)$	$\pi\epsilon_1 / \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}$	$2\pi\epsilon_1 / \ln \frac{b}{a}$
$G/(S/m)$	$\pi\sigma_1 / \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}$	$2\pi\sigma_1 / \ln \frac{b}{a}$

注: ϵ_1 、 σ_1 分别为介质的介电常数和电导率; σ_2 为导体的电导率。

§ 2.1 传输线的基本概念

3、损耗的差别

低频线: $R_l \propto 1/S$, $R_l = \rho \frac{l}{S}$



传输线: $R_t \propto 1/L$, L 为导体的周界

4、传输方式的差别

低频线必须为电路提供一个电流回路。

传输线的作用是约束和引导电磁波沿导引方向前进, 本质上**无需**构成电流回路, 传输过程是**波动过程**。

5、功用的差别

除了传输能量和信息外, 传输线可以构成各种元器件。

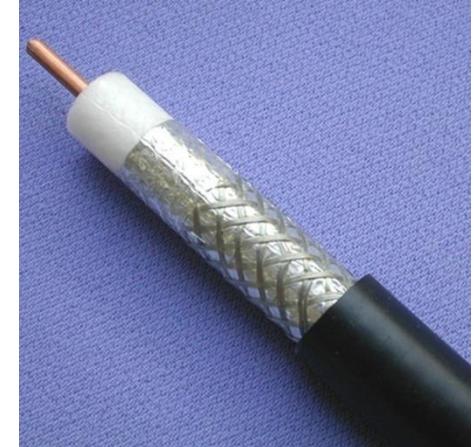
§ 2.1 传输线的基本概念

三、传输线的分类

按照导行电磁波类型和场的分布可划分为：

1、TEM 波传输线（包括准 TEM 波传输线）：

双导线、同轴线、带状线、微带、共面波导等。



2、TE/TM 波传输线：

矩形波导、圆波导、椭圆波导、脊波导、扇形波导等。



3、混合波传输线：

光纤、薄膜波导、平板介质波导、矩形介质波导等。



§ 2.1 传输线的基本概念

四、传输线的分析方法

“场”的方法：

麦克斯韦方程组	波动方程和边界条件	电场和磁场分布的求解
$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$ 电壁 — $\vec{n} \times \vec{E} _{\Omega} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{H} _{\Omega} = 0$ 磁壁 — $\vec{n} \times \vec{H} _{\Omega} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{E} _{\Omega} = 0$	$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \\ \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t} \end{cases}$

“路”的方法：

克西霍夫定理	波动方程和边界条件	电压和电流分布的求解
$\begin{cases} \sum I = 0 \\ \sum U = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dz^2} - \gamma^2 U = 0 \\ \frac{d^2 I}{dz^2} - \gamma^2 I = 0 \end{cases}$ 源、源阻抗和负载等条件。	$\begin{cases} U(z) e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \\ I(z) e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \end{cases}$

§ 2.2 传输线方程及其解

研究传输线问题的起点应该是什么？这里先讨论“传输线”三个字：

1. “线”：不仅表明所有传输线无论粗细和宽窄，总体呈现的是线状结构，而且更希望指明的是线的走向代表了微波能量的传递方向。本课程中始终将这个微波能量的传递方向定义为 z 方向（直线方向）。

2. “传输”：不仅是对线的用途的限定，而且也是提示我们要了解传输线首先应从传输特性入手，即在 z 方向的微波传输特性。

据此，本章的目的是建立传输线的传输模型并展现基本的传输特性，模型的基本特点是①一维结构，仅和传输 z 方向有关；②电路模型，考虑的是沿线电压（波） u 和电流（波） i 。

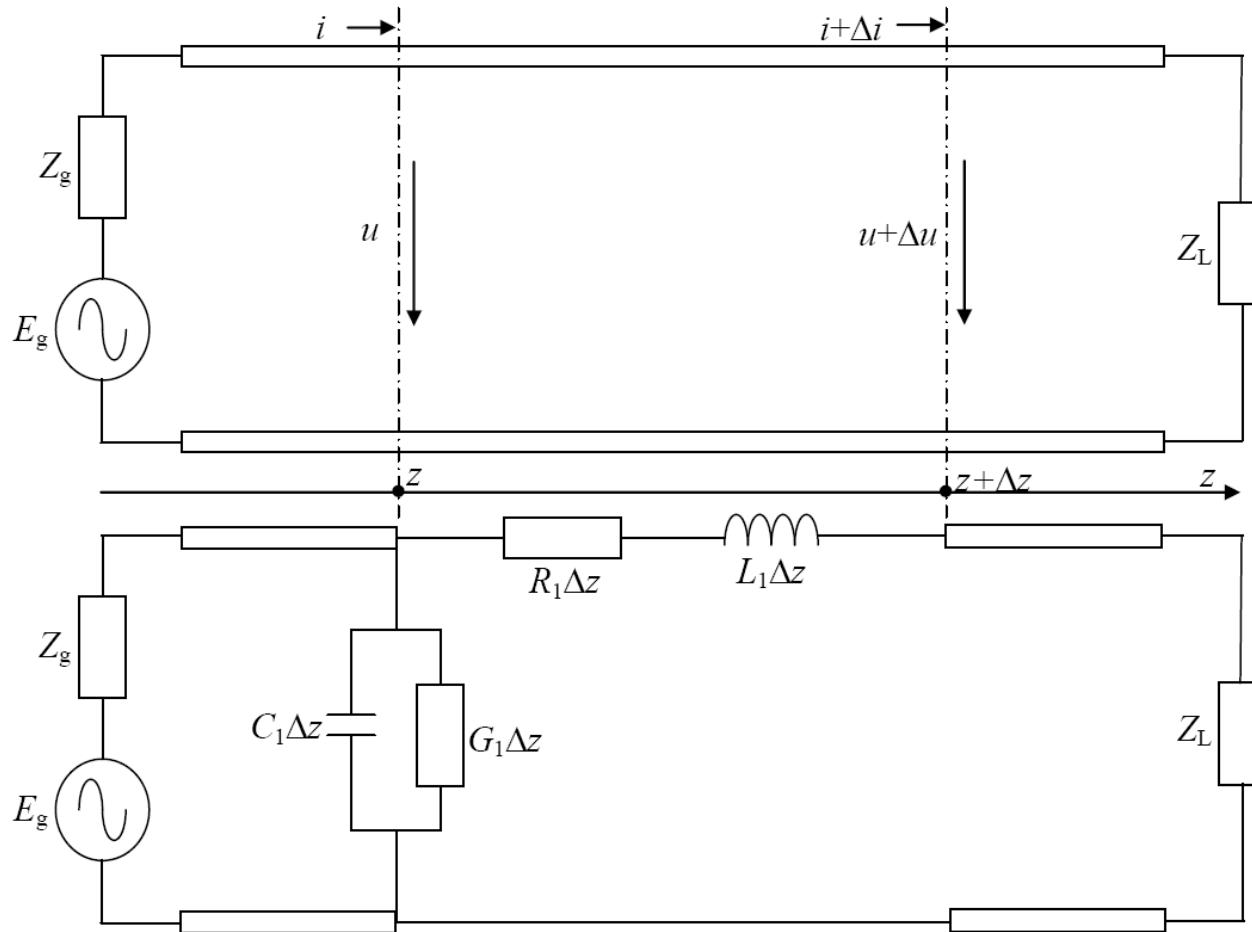
由于微波波长与传输线的物理长度可以比拟甚至更小，所以传输线的沿线电压 u 和电流 i 应是位置 z 和时间 t 的函数。

传输线方程及其解

§ 2.2

一、均匀传输线方程

均匀传输线是指沿线电气分布参数是均匀不变的。为了简化表示，这里采用了平行双导线（注意均匀性在下图是如何体现的？）。



图中 R_1 、 G_1 、 C_1 、 L_1 分别为单位长分布电阻、分布电导、分布电容和分布电感。

§ 2.2 传输线方程及其解

当 $\Delta z \ll \lambda$, 可以将这个长度为 Δz 线元看成集总参数电路, 此时电路服从克西霍夫定律:

$$\begin{cases} u - (u + \Delta u) = -\Delta u = R_1 \Delta z \cdot i + L_1 \Delta z \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \\ i - (i + \Delta i) = -\Delta i = G_1 \Delta z \cdot u + C_1 \Delta z \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

当 Δz 趋于零时, 可得均匀传输线时域方程 (也称电报方程):

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial z} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial z} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

一个量在时间上的变化引起另一个量在空间上的变化, 这就是波动过程的数学体现。

§ 2.2 传输线方程及其解

在简谐激励和稳态情况下，沿电压 u 和电流 i 可表示为

$$u(z,t) = \operatorname{Re}[U(z)e^{j\omega t}]$$

$$i(z,t) = \operatorname{Re}[I(z)e^{j\omega t}]$$

其中 $U(z)$ 、 $I(z)$ 分别是 z 处的电压和电流的复有效值，也称相量电压和相量电流，仅是 z 的函数。可得

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z}\left\{\operatorname{Re}\left[U(z)e^{j\omega t}\right]\right\} = R_1 \operatorname{Re}\left[I(z)e^{j\omega t}\right] + L_1 \frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{Re}\left[I(z)e^{j\omega t}\right]\right\} \\ -\frac{\partial}{\partial z}\left\{\operatorname{Re}\left[I(z)e^{j\omega t}\right]\right\} = G_1 \operatorname{Re}\left[U(z)e^{j\omega t}\right] + C_1 \frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{Re}\left[U(z)e^{j\omega t}\right]\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\operatorname{Re}\left[\frac{dU(z)}{dz}e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[R_1 I(z)e^{j\omega t} + j\omega L_1 I(z)e^{j\omega t}\right] \\ -\operatorname{Re}\left[\frac{dI(z)}{dz}e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[G_1 U(z)e^{j\omega t} + j\omega C_1 U(z)e^{j\omega t}\right] \end{cases}$$

§ 2.2 传输线方程及其解

去掉上式两边的取实部操作，可得均匀传输线频域方程：

$$\begin{cases} -\frac{dU(z)}{dz} = (R_1 + j\omega L_1)I(z) = Z_1 I(z) \\ -\frac{dI(z)}{dz} = (G_1 + j\omega C_1)U(z) = Y_1 U(z) \end{cases}$$

上式中 Z_1 和 Y_1 分别称为单位长串联阻抗和单位长并联导纳。

若令 $\gamma^2 = Z_1 Y_1 = (R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)$ ， γ 称为电压传播常数，则上式对 z 再次求导可得

$$\begin{cases} \frac{d^2U(z)}{dz^2} - \gamma^2 U(z) = 0 \\ \frac{d^2I(z)}{dz^2} - \gamma^2 I(z) = 0 \end{cases}$$

这就是均匀传输线的波动方程

§ 2.2 传输线方程及其解

二、均匀传输线方程的通解

1. 通解形式

前述波动方程是二阶常系数微分方程，其通解为

$$\begin{cases} U(z) = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z} \\ I(z) = -\frac{dU(z)}{dz} / Z_1 = \frac{\gamma}{Z_1} (A_1 e^{-\gamma z} - A_2 e^{\gamma z}) = \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-\gamma z} - A_2 e^{\gamma z}) \end{cases}$$

其中 A_1 和 A_2 为待定常数， $Z_0 = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}}$ ，称为特性阻抗。

在上述通解中，无论电压还是电流都包含两项，分别代表了沿传输线的两个波，其中 $e^{-\gamma z}$ 项代表沿+z 方向传播的波（因为是流向负载，又称之为入射波）， $e^{\gamma z}$ 项代表沿-z 方向传播的波（称为反射波）。

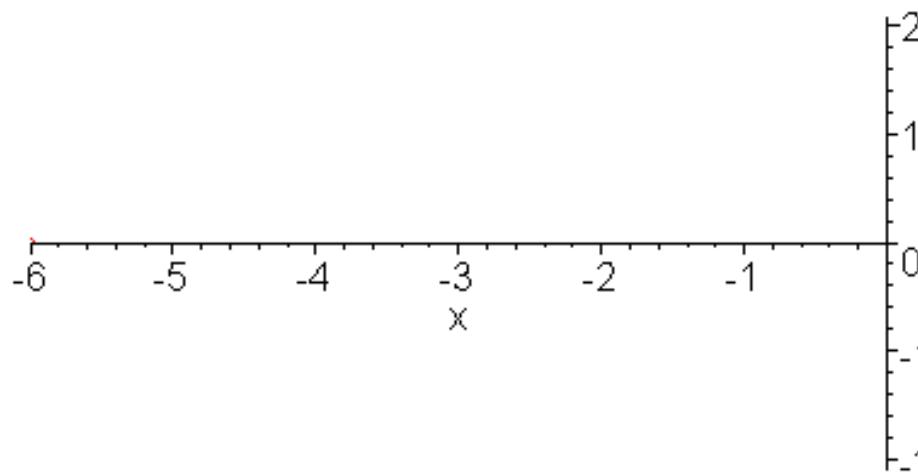
注意：在上述电流波的公式中，两项之间的负号仅表示反射电流波与我们定义的入射电流波的流动方向（即向负载方向）相反。

§ 2.2 传输线方程及其解

2. 对波动方向的简单解释

由前面方程 $u(z, t) = \operatorname{Re}[U(z)e^{j\omega t}]$ 可知，对于 $U(z)$ 的入射波 $e^{-\gamma z}$ 项，在简谐激励下可简单表示为 $e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$ ，其波动过程可从波的等相位面/点的移动来观察，如下面动画所示（演示了正弦波的入射和反射）。

若假设 $\gamma = \alpha + j\beta = j\beta$ ($\alpha=0$ 意味着传输线无损耗)，则波的等相位面/点可用 $e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$ 中相位 $\omega t - \beta z = \text{常数}$ 来表示。可见，随着时间 t 的增长，只有坐标 z 的增大，才能保持 $\omega t - \beta z = \text{常数}$ ， z 增大则表明波动方向是沿 $+z$ 方向。对于反射波 $e^{\gamma z}e^{j\omega t}$ ，可做类似的解释。



§ 2.2 传输线方程及其解

3. 通解的图像

可以将通解重写为以下入射波和反射波的叠加形式：

$$\begin{cases} U(z) = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z} = U^+(z) + U^-(z) \\ I(z) = \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-\gamma z} - A_2 e^{\gamma z}) = I^+(z) + I^-(z) \end{cases}$$

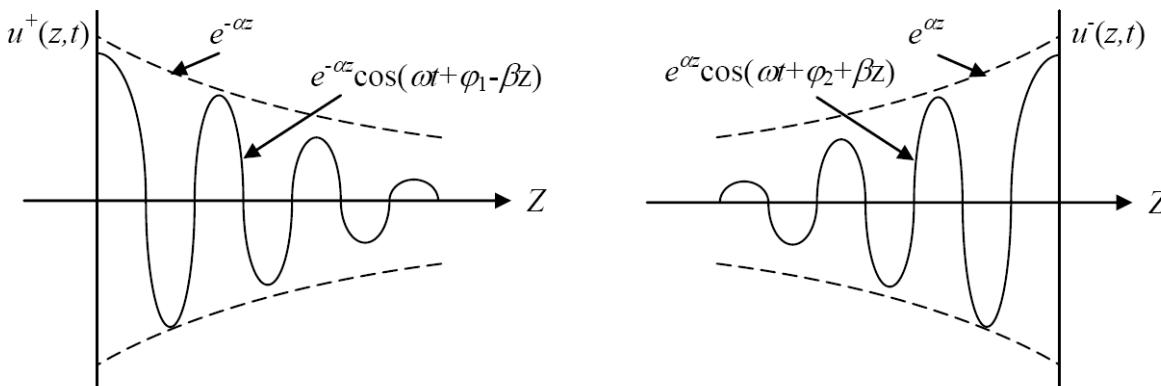
其中上标+表示入射波，上标-表示反射波。注意：电流反射波 $I^-(z)$ 已将体现流向相反的符号包含进去了。该式还隐含表明入射波和反射波具有相同的传播速度。

对于瞬时电压和电流，令 $A_1 = |A_1| e^{j\varphi_1}$, $A_2 = |A_2| e^{j\varphi_2}$, 且取 $\gamma = \alpha + j\beta$, 则有

$$u(z, t) = |A_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t + \varphi_1 - \beta z) + |A_2| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \varphi_2 + \beta z) = u^+(z, t) + u^-(z, t)$$

$$i(z, t) = \frac{1}{Z_0} [|A_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t + \varphi_1 - \beta z) - |A_2| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \varphi_2 + \beta z)] = i^+(z, t) + i^-(z, t)$$

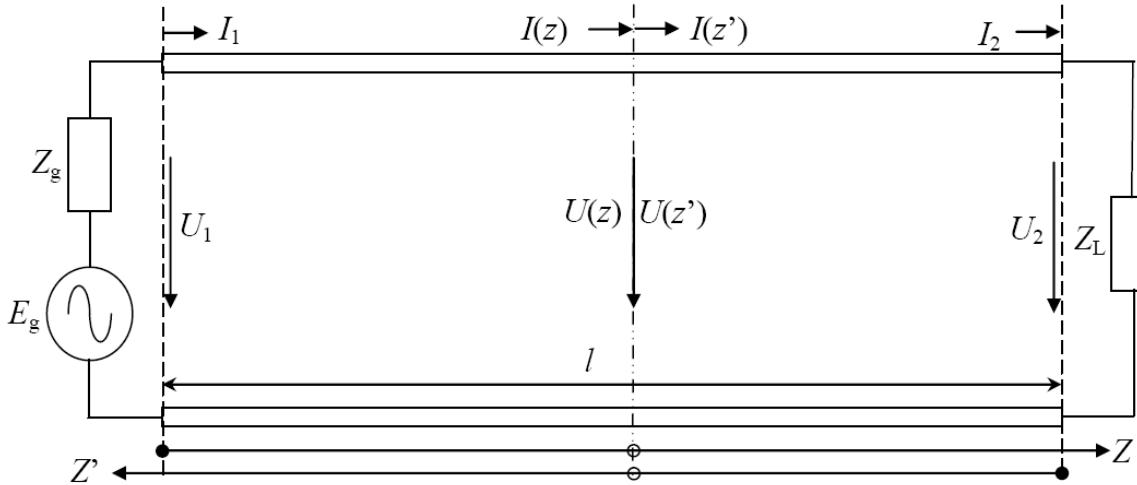
说明任一点的瞬时电压和电流也都由入射波和反射波迭加而成。



传输线方程及其解

§ 2.2

三、已知边界条件下的均匀传输线方程的解



1. 已知负载端 U_2 和 I_2 时的解

此时 $U(l)=U_2$, $I(l)=I_2$ 。

如图所示, z 表示坐标原点在源端的坐标系统, z' 表示坐标原点在负载端的坐标系统, 可得

$$\begin{cases} U_2 = A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l} \\ I_2 = (A_1 e^{-\gamma l} - A_2 e^{\gamma l}) / Z_0 \end{cases}$$

则 $A_1 = \frac{1}{2}(U_2 + I_2 Z_0) e^{\gamma l}$, $A_2 = \frac{1}{2}(U_2 - I_2 Z_0) e^{-\gamma l}$ 。

§ 2.2 传输线方程及其解

$$\begin{cases} U(z) = \frac{1}{2}(U_2 + I_2 Z_0)e^{\gamma(l-z)} + \frac{1}{2}(U_2 - I_2 Z_0)e^{-\gamma(l-z)} \\ I(z) = \frac{1}{2Z_0}(U_2 + I_2 Z_0)e^{\gamma(l-z)} - \frac{1}{2Z_0}(U_2 - I_2 Z_0)e^{-\gamma(l-z)} \end{cases}$$

令 $z' = l - z$, 相当于将坐标原点由源端转移到负载端, 可得

$$\begin{cases} U(z') = \frac{1}{2}(U_2 + I_2 Z_0)e^{\gamma z'} + \frac{1}{2}(U_2 - I_2 Z_0)e^{-\gamma z'} \\ I(z') = \frac{1}{2Z_0}(U_2 + I_2 Z_0)e^{\gamma z'} - \frac{1}{2Z_0}(U_2 - I_2 Z_0)e^{-\gamma z'} \end{cases}$$

上式推导利用了双曲函数 (Hyperbolic Function) 关系式:

$$\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2 \quad \sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$$

§ 2.2 传输线方程及其解

可得

$$\begin{cases} U(z') = U_2 \cosh(\gamma z') + I_2 Z_0 \sinh(\gamma z') \\ I(z') = \frac{U_2}{Z_0} \sinh(\gamma z') + I_2 \cosh(\gamma z') \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} U(z') \\ I(z') \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma z') & Z_0 \sinh(\gamma z') \\ \sinh(\gamma z')/Z_0 & \cosh(\gamma z') \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

令 $\gamma = \alpha + j\beta = j\beta$ ，由 $\cosh(j\beta) = \cos \beta$ ， $\sinh(j\beta) = j \sin \beta$ ，得

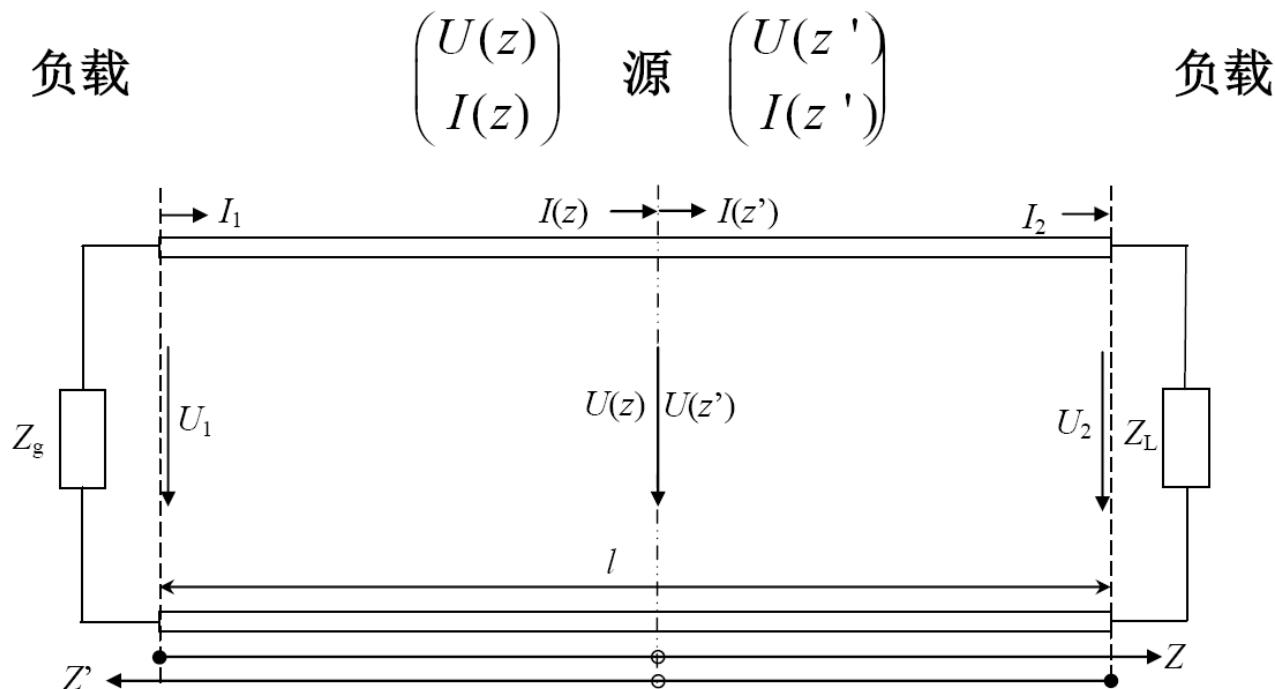
$$\begin{pmatrix} U(z') \\ I(z') \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta z' & jZ_0 \sin \beta z' \\ j \sin \beta z'/Z_0 & \cos \beta z' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

在实际应用中，传输线的负载情况通常是给定的，因此该解形在分析和计算传输线的特性时应用最多。

§ 2.2 传输线方程及其解

2. 已知源端 U_1 和 I_1 时的解

源端和负载端是相对而言的，同样坐标系的选取也是相对的。在当前已知条件情况下，可以通过变量替换来直接求解（要点：需要利用电路形式的对称性），求解过程如下：



§ 2.2 传输线方程及其解

变量替换的方式：

$$z' \rightarrow z, \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U(z') \\ I(z') \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} U(z) \\ -I(z) \end{pmatrix}$$

对已知负载的解进行变量替换，可得

$$\begin{pmatrix} U(z) \\ -I(z) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta z & jZ_0 \sin \beta z \\ j \sin \beta z / Z_0 & \cos \beta z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{pmatrix}$$

经整理得

$$\begin{pmatrix} U(z) \\ I(z) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta z & -jZ_0 \sin \beta z \\ -j \sin \beta z / Z_0 & \cos \beta z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

该解形与前述解形类似，这里提供了利用对称性解决问题的方法。

§ 2.2 传输线方程及其解

3. 已知电源电动势 E_g 、源内阻抗 Z_g 和负载阻抗 Z_L 时的解

$$\begin{cases} U(0) = E_g - Z_g I_1 = A_1 + A_2 \\ I(0) = I_1 = (A_1 - A_2)/Z_0 \end{cases} \quad \begin{cases} U(l) = I_2 Z_L = A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l} \\ I(l) = I_2 = (A_1 e^{-\gamma l} - A_2 e^{\gamma l})/Z_0 \end{cases}$$

联立求得 A_1 和 A_2 为

$$A_1 = \frac{E_g Z_0}{(Z_g + Z_0)(1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l})} \quad A_2 = \frac{E_g Z_0 \Gamma_2 e^{-2\gamma l}}{(Z_g + Z_0)(1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l})}$$

可得

$$\begin{cases} U(z) = \frac{E_g Z_0}{Z_g + Z_0} \cdot \frac{e^{-\gamma z} + \Gamma_2 e^{-2\gamma l} e^{rz}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l}} \\ I(z) = \frac{E_g}{Z_g + Z_0} \cdot \frac{e^{-\gamma z} - \Gamma_2 e^{-2\gamma l} e^{rz}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l}} \end{cases}$$

式中 $\Gamma_1 = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$, $\Gamma_2 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ 。

§ 2.2 传输线方程及其解

从以下公式展开来看到：

根据级数展开公式： $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

令 $x = \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l}$ 得 $(1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l})^{-1} = 1 + \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l} + \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 e^{-4\gamma l} + \dots$

则电压和电流的解可展开成为

$$\begin{cases} U(z) = \frac{E_g Z_0}{Z_g + Z_0} \cdot \frac{e^{-\gamma z} + \Gamma_2 e^{-2\gamma l} e^{rz}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l}} = \frac{E_g Z_0}{Z_g + Z_0} \left[e^{-\gamma z} + \Gamma_2 e^{-\gamma(2l-z)} + \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-\gamma(2l+z)} + \dots \right] \\ I(z) = \frac{E_g}{Z_g + Z_0} \cdot \frac{e^{-\gamma z} - \Gamma_2 e^{-2\gamma l} e^{rz}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l}} = \frac{E_g}{Z_g + Z_0} \left[e^{-\gamma z} - \Gamma_2 e^{-\gamma(2l-z)} + \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-\gamma(2l+z)} + \dots \right] \end{cases}$$

在上面 $U(z)$ 的中括号中，第一项为入射波（这是源激励起的电磁波第一次向负载方向的入射），第二项为反射波（是对第一次入射的电磁波进行的第一次反射），第三项为入射波（是源端对第一次反射回来的电磁波的再次反射），第四项.....

四、传输线的传输特性参数

1、特性阻抗 Z_0

入射波电压与入射波电流之比,或者反射波电压与反射波电流之比的负值。

$$Z_0 = \frac{U^+(z)}{I^+(z)} = -\frac{U^-(z)}{I^-(z)} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}}$$

对于无损耗传输线, 即 $R_1=0, G_1=0$, 有 $Z_0 = \sqrt{L_1/C_1}$ 。

对于低损耗传输线, 即 $R_1 \ll \omega L_1, G_1 \ll \omega C_1$, 则有

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} \\ &= \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \left(1 - j \frac{R_1}{\omega L_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - j \frac{G_1}{\omega C_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \left[1 - j \left(\frac{R_1}{2\omega L_1} - \frac{G_1}{2\omega C_1}\right)\right] \end{aligned}$$

上式实部由电场和磁场决定, 虚部主要由损耗决定。

传输线方程及其解

§ 2.2

2、传播常数 γ

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)}$$

对于无损耗传输线，有 $\alpha = 0$ ， $\beta = \omega\sqrt{L_1 C_1}$ 。

对于低损耗传输线，有 $R_1 \ll \omega L_1$ ， $G_1 \ll \omega C_1$ ，则

$$\begin{aligned}\gamma &= j\omega\sqrt{L_1 C_1} \left(1 - j\frac{R_1}{\omega L_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - j\frac{G_1}{\omega C_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx j\omega\sqrt{L_1 C_1} \left(1 - j\frac{R_1}{2\omega L_1}\right) \left(1 - j\frac{G_1}{2\omega C_1}\right) \approx \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} + j\omega\sqrt{L_1 C_1}\end{aligned}$$

$$\alpha(dB/m, Np/m) \doteq \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \frac{R_1}{2Z_0} + \frac{G_1 Z_0}{2} = \alpha_c + \alpha_d$$

α 称为衰减因数，代表波沿 z 方向传播时每单位距离幅度的衰减。

$$\beta(radians/m) \doteq \omega\sqrt{L_1 C_1}$$

β 为相位传播常数，代表波沿 z 方向传播时每单位距离改变的相位。28

§ 2.2 传输线方程及其解

(1)、传输线介质损耗的讨论:

若传输线的介质是有损耗的，则意味着介质的电导率 σ_d 不为零，则介质的有效介电常数变为 $\varepsilon_e = \varepsilon - j\sigma_d/\omega$ ，可知介质的损耗角正切为 $\operatorname{tg}\delta = \frac{\sigma_d}{\omega\varepsilon}$ （表示介质中的传导电流与位移电流之比）。

在传输线中，可以证明 $\operatorname{tg}\delta = \frac{G_1}{\omega C_1}$ ，可得

$$\alpha_d = \frac{G_1 Z_0}{2} = \frac{\omega C_1 \operatorname{tg}\delta}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \frac{\omega \sqrt{L_1 C_1}}{2} \operatorname{tg}\delta = \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\delta = \frac{\pi}{\lambda} \operatorname{tg}\delta$$

上式适用于任何形式的 TEM 波传输线。

§ 2.2 传输线方程及其解

(2)、传输线导体损耗的举例（微扰法）

由 α_c 的公式可知，欲求导体损耗的关键是求单位长的 R_1 。这里以同轴线为例，如图所示，取单位长度的一段同轴线。按照定义：

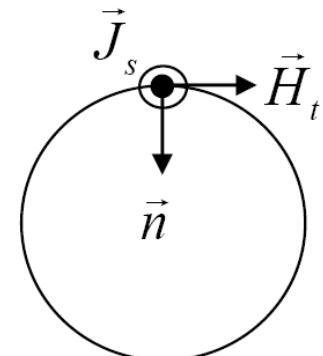
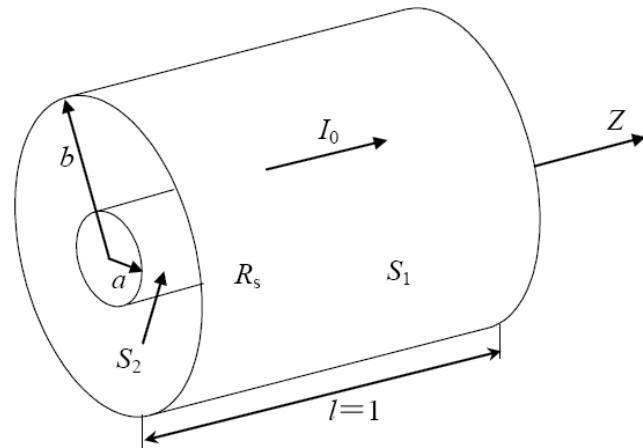
$$R_1 = P_L / \frac{1}{2} |I_0|^2$$

其中 P_L 为同轴线单位长损耗功率， I_0 为同轴线的总相量电流。

单位长损耗功率 P_L 可表示为

$$P_L = \frac{1}{2} \int_{S_1+S_2} R_s |\vec{J}_s|^2 dS$$

其中， R_s 为单位面积的表面电阻，即 $R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$ ， σ 是构成同轴线导体的电导率； S_1 和 S_2 分别为外导体的内表面和内导体的外表面； $\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}_t$ 是导体表面切向磁场 \vec{H}_t 产生的表面电流密度。



§ 2.2 传输线方程及其解

可得

$$P_L = \frac{1}{2} \int_{S_1+S_2} R_s |\vec{J}_s|^2 dS = \frac{1}{2} \int_{S_1+S_2} R_s |\vec{H}_t|^2 dS$$

由于同轴线仅有横向磁场 $H_t = H_\varphi = \frac{H_0}{r} e^{-j\beta z}$

$$\therefore I_0 = \oint_C \vec{H}_t \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H_\varphi r d\varphi = 2\pi H_0 e^{-j\beta z}$$

且 $dS = rd\varphi dz$,

$$P_L = \frac{1}{2} R_s \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\left(\frac{H_0}{a} \right)^2 a + \left(\frac{H_0}{b} \right)^2 b \right] d\varphi dz = \pi R_s H_0^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

以上式子联立后，可得 $R_l = \frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ 。

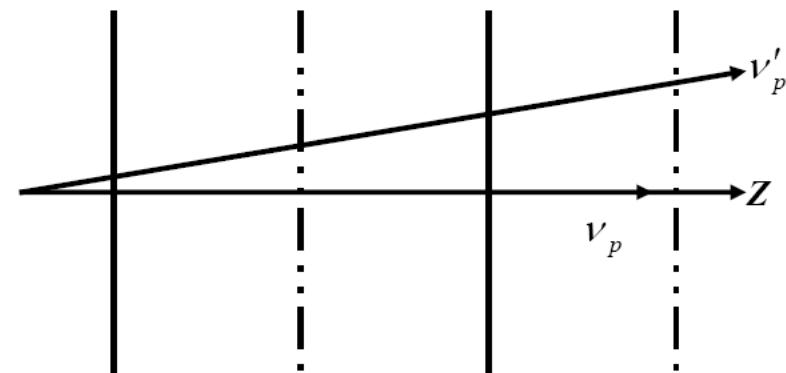
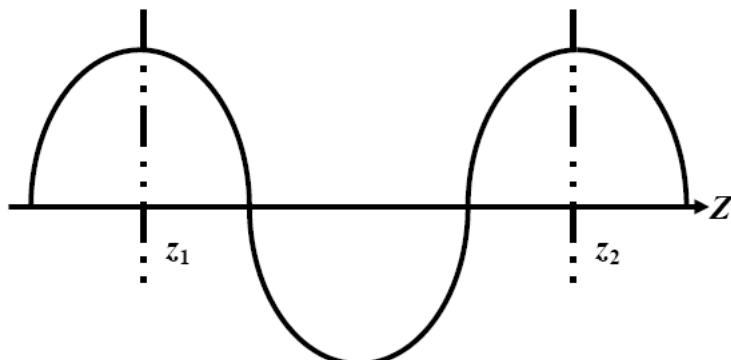
§ 2.2 传输线方程及其解

3、相速度 v_p 和波长 λ

定义：等相位面（恒定相位点）的移动速度。

要点：相速度是一种视在速度，和观察方向有关。相速度不代表电磁能量移动的速度，可看成波的形状的移动速度，故可以大于光速。

传输线中的观察方向是 z 方向，即沿传输线轴向的相位移动速度。



§ 2.2
传
输
线
方
程
及
其
解

若 t_1 时刻, z_1 处波的相位为 $\omega t_1 - \beta z_1$;

在 t_2 时刻, z_2 处波的相位为 $\omega t_2 - \beta z_2$ 。

因这两个相位为等相位面, 可得 $\omega t_1 - \beta z_1 = \omega t_2 - \beta z_2$

相速度 v_p : 等相位面在 $t_2 - t_1$ 的时间内行进了 $z_2 - z_1$ 的距离, 即

$$v_p = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{\beta}$$

对于无损线有 $\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}$, 则 $v_p = 1 / \sqrt{L_1 C_1}$ 。

(相)波长 λ 定义: 同一时刻两个相位差为 2π 的等相位面之间的距离。

$$(\omega t_1 - \beta z_1) - [\omega t_1 - \beta(z_1 + \lambda)] = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi v_p}{\omega} = \frac{v_p}{f}$$

§ 2.3 传输线的阻抗概念和反射系数

一、传输线的阻抗概念

传输线上的电压波和电流波是伴随产生的，阻抗概念可以把传输线上的电压波和电流波联系起来。

输入阻抗的定义：线上任一点电压与电流之比。

它反映了该点总电压和总电流之间的联系，包括幅度和相位关系。

利用上节已知负载的解形，根据定义可得

$$Z_{in}(z') = \frac{U(z')}{I(z')} = \frac{U_2 \cosh(\gamma z') + I_2 Z_0 \sinh(\gamma z')}{\frac{U_2}{Z_0} \sinh(\gamma z') + I_2 \cosh(\gamma z')} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma z')}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma z')}$$

式中 $Z_L = U_2/I_2$ 为负载阻抗。

§ 2.3 传输线的阻抗概念和反射系数

对于无损情况，即 $\gamma = j\beta$ ，由 $\tanh(j\beta z') = j \tan \beta z'$ 可得

$$Z_{in}(z') = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta z'}{Z_0 + jZ_L \tan \beta z'}$$

讨论：

- 1)、式中 z' 实际代表的是 当前位置到负载的距离，输入阻抗 Z_{in} 是由 z' 处向负载看去的输入阻抗，因而是一种 视在阻抗；
- 2)、 Z_{in} 与位置 z' 和负载 Z_L 都有关，体现了传输线的 阻抗变换 作用；
- 3)、尽管上式是利用已知负载的解形进行推导的，但是该式是可以广泛应用的，不局限于仅仅计算向负载方向看去的输入阻抗。
- 4)、一般情况下，具体传输线中的电压和电流大都缺乏明确的物理意义(非唯一的)， Z_{in} 不能直接测量，需要借助以下的反射系数。

阻抗变换作用举例： $\lambda/8$ 传输线

设负载阻抗 $Z_l = R_l + jX_l$ ，取 $z' = \lambda/8$ ，则 $\beta z' = \pi/4$ ，可得

$$Z_{in}(\lambda/8) = Z_0 \frac{Z_l + jZ_0}{Z_0 + jZ_l} = Z_0 \frac{2R_l Z_0 + j(Z_0^2 - |Z_l|^2)}{Z_0^2 + |Z_l|^2 - 2Z_0 X_l}$$

第一种情况：若负载 Z_l 为纯电阻，即 $X_l = 0$ 。

则输入阻抗的模值恒等于特性阻抗 Z_0 ，即 $|Z_{in}(\lambda/8)| = Z_0$ ，这说明 $\lambda/8$ 传输线对任意负载电阻都有限阻作用，即可将任意负载电阻 $Z_l = R_l$

变换为 $Z_{in}(\lambda/8) = Z_0 e^{j\varphi}$ ，其中 $\varphi = \arctg \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{Z_0}{R_l} - \frac{R_l}{Z_0} \right) \right\}$ 。

第二种情况：若 $|Z_l| = Z_0$

输入阻抗总是纯电阻，即 $Z_{in}(\lambda/8) = Z_0 \frac{R_l}{|Z_l| - X_l}$ 。这说明可用

$Z_0 = |Z_l|$ 的 $\lambda/8$ 传输线，将任意负载阻抗 Z_l 变换成为一纯电阻。

§ 2.3 传输线的阻抗概念和反射系数

二、传输线的反射系数

电磁波的反射现象是传输线上最基本的物理现象

1、反射系数的定义

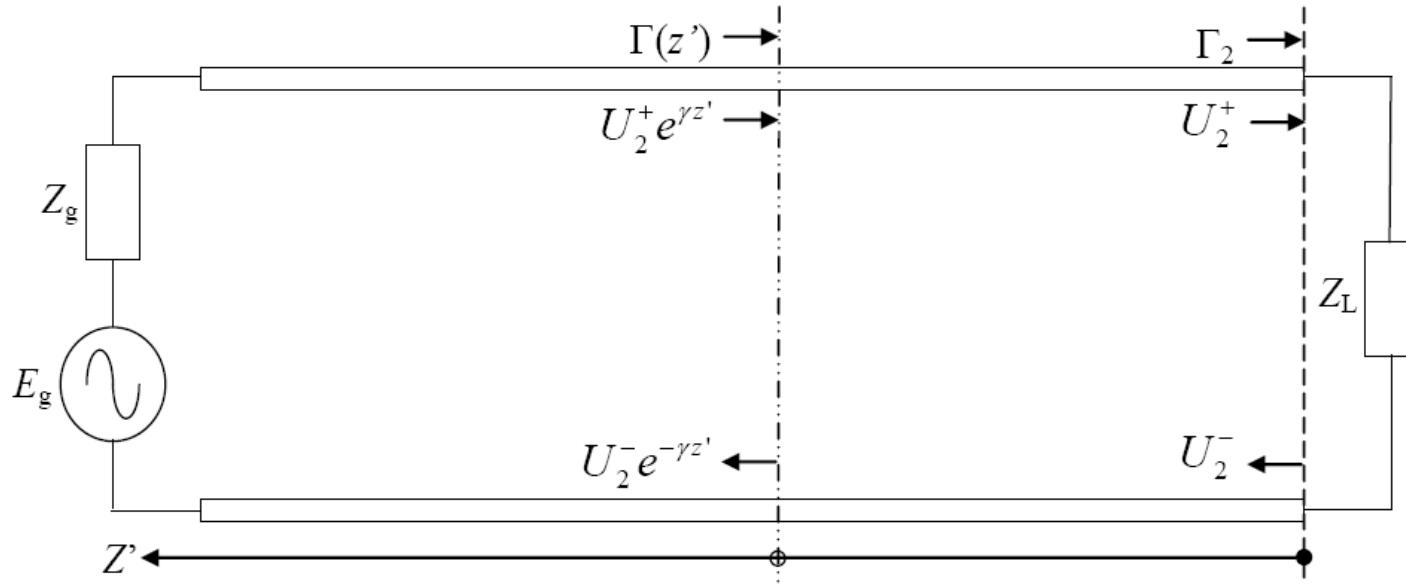
电压反射系数 $\Gamma(z') = \frac{U^-(z')}{U^+(z')}$

电流反射系数 $\Gamma_I(z') = \frac{I^-(z')}{I^+(z')}$

且 $\Gamma(z') = -\Gamma_I(z')$

$\Gamma(z')$ 反映了 z' 处的 $U^+(z')$ 和 $U^-(z')$ 之间的大小和相位差别。

§ 2.3 传输线的阻抗概念和反射系数



$$\begin{aligned}
 U(z') &= \frac{1}{2}(U_2 + I_2 Z_0)e^{\gamma z'} + \frac{1}{2}(U_2 - I_2 Z_0)e^{-\gamma z'} \\
 &= U_2^+ e^{\gamma z'} + U_2^- e^{-\gamma z'} = U^+(z') + U^-(z') = U^+(z')(1 + \Gamma(z'))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I(z') &= \frac{1}{2Z_0}(U_2 + I_2 Z_0)e^{\gamma z'} - \frac{1}{2Z_0}(U_2 - I_2 Z_0)e^{-\gamma z'} \\
 &= I_2^+ e^{\gamma z'} + I_2^- e^{-\gamma z'} = I^+(z') + I^-(z') = I^+(z')(1 - \Gamma(z'))
 \end{aligned}$$

§ 2.3 传输线的阻抗概念和反射系数

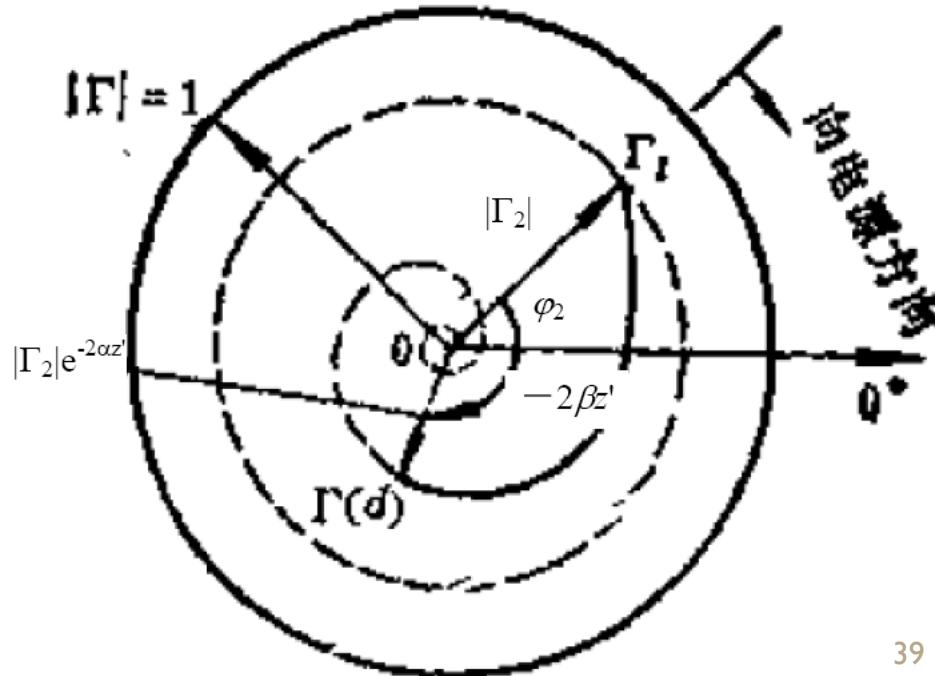
进而可得

$$\Gamma(z') = \frac{U^-(z')}{U^+(z')} = \frac{U_2^- e^{-\gamma z'}}{U_2^+ e^{\gamma z'}} = \Gamma_2 e^{-2\gamma z'} = |\Gamma_2| e^{-2\gamma z' + j\varphi_2} = |\Gamma_2| e^{-2\alpha z' + j(\varphi_2 - 2\beta z')}$$

其中负载反射系数 $\Gamma_2 = \frac{U_2^-}{U_2^+} = \frac{U_2 - I_2 Z_0}{U_2 + I_2 Z_0} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$, 且令 $\Gamma_2 = |\Gamma_2| e^{j\varphi_2}$ 。

如图极坐标系中，当观察点

从负载端向电源端移动时，反射系数 $\Gamma(z')$ 矢量端点将绕中心 按顺时针方向转动 (因 $-2\beta z'$ 缘故)，其 幅度将越来越小 (因 $-2\alpha z'$ 缘故)，而 相位将越来越滞后。



§ 2.3 传输线的阻抗概念和反射系数

2、反射系数与输入阻抗的关系

$$Z_{in}(z') = \frac{U(z')}{I(z')} = \frac{U^+(z') (1 + \Gamma(z'))}{I^+(z') (1 - \Gamma(z'))} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')}$$

$$\Gamma(z') = \frac{Z_{in}(z') - Z_0}{Z_{in}(z') + Z_0}$$

可见在给定 Z_0 后， $\Gamma(z')$ 和 $Z_{in}(z')$ 具有一一对应的关系。

§ 2.4 无损传输线工作状态分析

一、行波状态（又称无反射工作状态）

工作状态特点： $\Gamma(z') = 0$ ，即 $\Gamma(z') = \Gamma_2 e^{-2j\beta z'} = 0$ 。

1)、要求 $\Gamma_2 = 0$ 。

因为 $\Gamma_2 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ ，得 $Z_L = Z_0$ ，此时负载吸收全部入射能量。

2)、或者要求 $z' \rightarrow \infty$ （负载在无限远处）。

表明观察点距离负载无限远，入射波无法到达。

§ 2.4 无损传输线工作状态分析

行波状态的特点：

(1)、空间特点：行波电压和行波电流的振幅沿线不变，空间相位同相并线性滞后（相位变化斜率为负）。

$$\begin{cases} U(z') = U^+(z') = U_2^+ e^{j\beta z'} = |U_2^+| e^{j(\beta z' + \phi_2)} \\ I(z') = U^+(z')/Z_0 = \frac{|U_2^+|}{Z_0} e^{j(\beta z' + \phi_2)} \end{cases}$$

(2)、空时特点：同一时刻同一地点，瞬时电压和电流同相。

$$\begin{cases} u(z', t) = \operatorname{Re}[U(z') e^{j\omega t}] = |U_2^+| \cos(\omega t + \beta z' + \phi_2) \\ i(z', t) = \operatorname{Re}\left[\frac{U(z')}{Z_0} e^{j\omega t}\right] = \frac{|U_2^+|}{Z_0} \cos(\omega t + \beta z' + \phi_2) \end{cases}$$

(3)、阻抗特点：沿线各点的输入阻抗 $Z_{in}(z') \equiv Z_0$

二、纯驻波状态（又称全反射工作状态）

纯驻波状态是由负载反射全部入射能量产生的，有3种负载条件：

负载短路： $Z_L = 0$ ；负载开路： $Z_L = \infty$ ；负载为纯电抗： $Z_L = jX_L$

共同特点： $|\Gamma_2| = 1$

1、终端短路线：

根据 $\Gamma_2 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ ，有 $Z_L = 0$ ，可得 $\Gamma_2 = -1$ ， $\varphi_2 = \pm\pi$

此时在负载处，有

$$\begin{cases} U_2 = U_2^+ (1 + \Gamma_2) = 0 \\ I_2 = \frac{U_2^+}{Z_0} (1 - \Gamma_2) = 2 \frac{U_2^+}{Z_0} = 2I_2^+ \end{cases}$$

注意：因为入射电压波 $U_2^+ \neq 0$ ， U_2^+ 会在短路面上激发感应电流，该二次源进而产生的反射电压波为 $U_2^- = -U_2^+$ ，二者叠加后使得 $U_2 = 0$ 。

同样由于产生反射电流波 $I_2^- = I_2^+$ ，二者同向叠加后得 $I_2 = 2I_2^+$ 。⁴³

§ 2.4 无损传输线工作状态分析

(1)、终端短路线的沿线电压和电流分布

$$\left\{ \begin{array}{l} U(z') = U_2^+ (e^{j\beta z'} + \Gamma_2 e^{-j\beta z'}) = U_2^+ (e^{j\beta z'} - e^{-j\beta z'}) = 2jU_2^+ \sin \beta z' \\ I(z') = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{j\beta z'} + e^{-j\beta z'}) = 2 \frac{U_2^+}{Z_0} \cos \beta z' \end{array} \right.$$

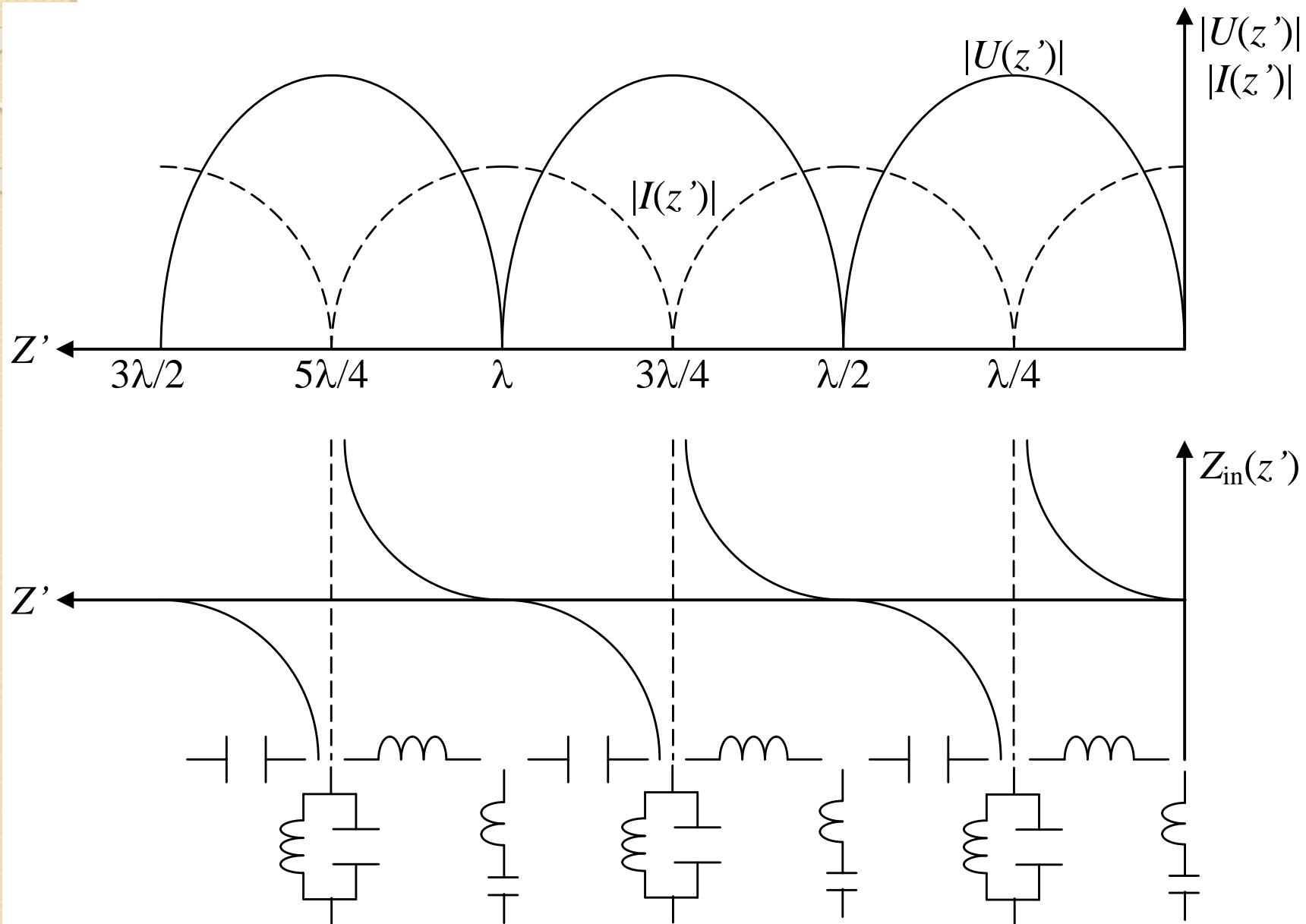
上式说明：沿线无能量传输（虚功率），体现了传输线的储能作用。

$$\left\{ \begin{array}{l} u(z',t) = 2|U_2^+| \sin \beta z' \cos(\omega t + \phi_2 + \frac{\pi}{2}) \\ i(z',t) = \frac{2}{Z_0} |U_2^+| \cos \beta z' \cos(\omega t + \phi_2) \end{array} \right.$$

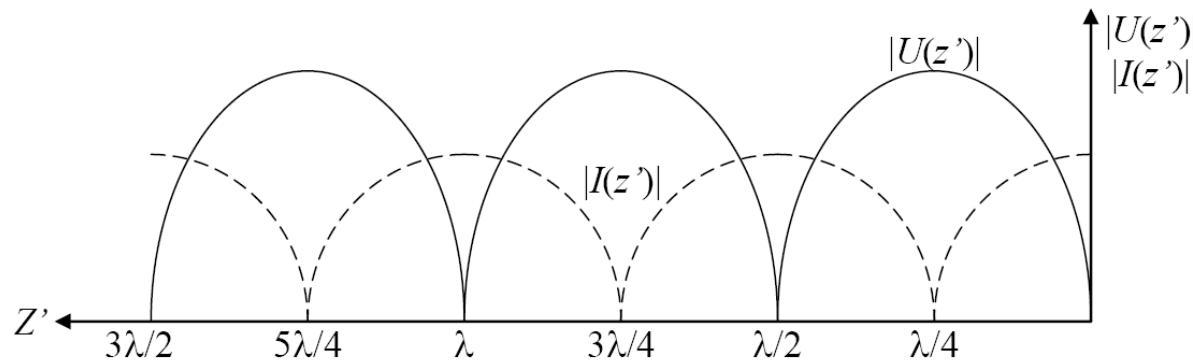
以式说明：在给定位置呈现出时间上的振荡过程（相位差为 $\pi/2$ ），体现了电能和磁能的相互转换。

纯驻波的现象：沿传输方向的波动过程消失，只有沿空间的电压电流分布和随时间的振荡过程，不能传输能量，只有电能和磁能之间的吞吐（相互转换）。

§ 2.4 无损传输线工作状态分析



§ 2.4 无损传输线工作状态分析



终端短路线电压和电流的空间分布特点：

a、周期特点：沿线的位置（距离）周期为 $\lambda/2$ ，对应相位周期为 π （因为 $\beta z' = (2\pi/\lambda)(\lambda/2) = \pi$ ）。

b、沿线分布特点：电压和电流存在 $\lambda/4$ 的位移（即 $\pi/2$ 相位差）。

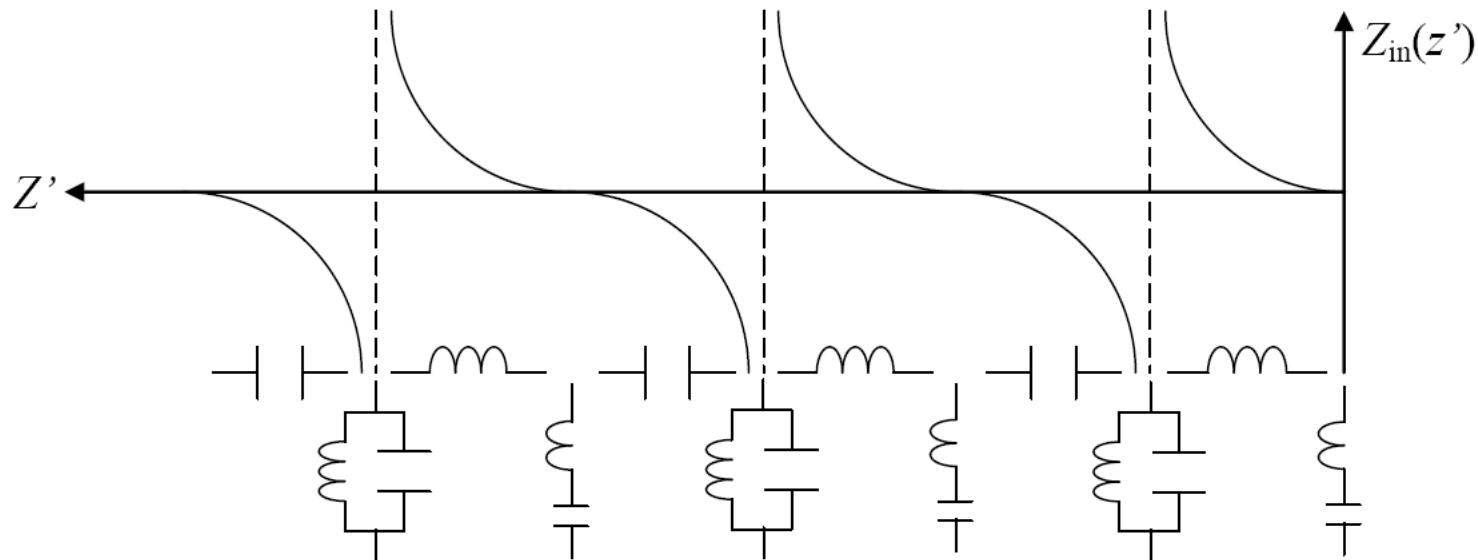
c、波节点和波腹点的位置关系

电压波节点和电流波腹点的位置相同，位于 $\beta z' = n\pi$ ， $z' = n\lambda/2$ ， $n = 0, 1, \dots$ 。

电压波腹点和电流波节点的位置相同，位于 $\beta z' = [(2n+1)/2]\pi$ ，

$z' = (2n+1)\lambda/4$ ， $n = 0, 1, \dots$ 。

§ 2.4 无损传输线工作状态分析

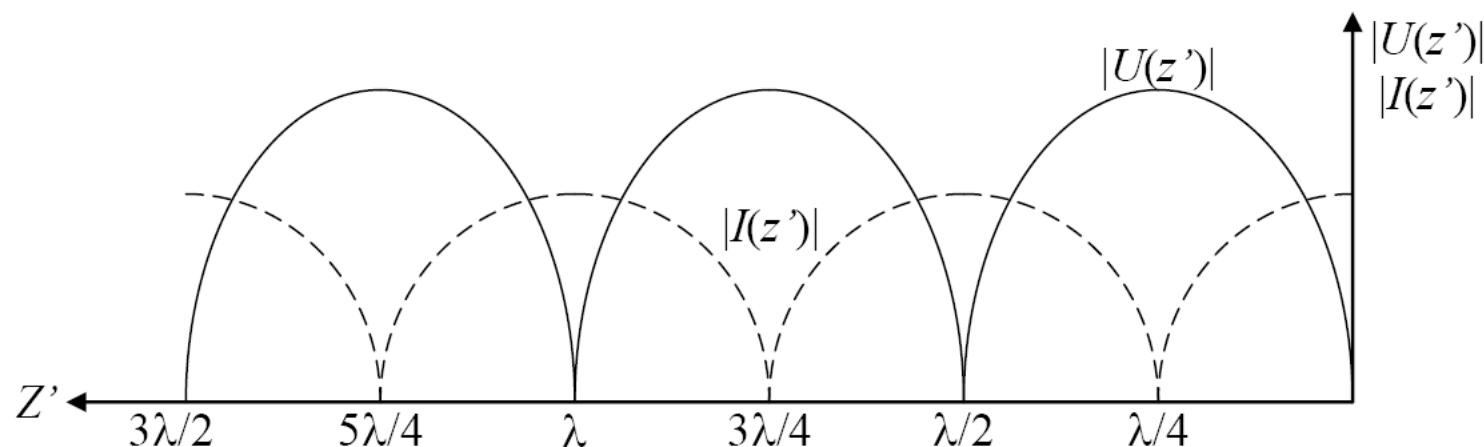


终端短路线输入阻抗的空间分布特点：

在 $z' = n\lambda/2$ ($n = 0, 1, \dots$) 处，可等效为串联谐振，输入阻抗为

0；在 $z' = (2n+1)\lambda/4$ ($n = 0, 1, \dots$) 处，可等效为并联谐振，输入阻抗为 ∞ 。在这两处之间，输入阻抗周期性地呈现为电感和电容。

§ 2.4 无损传输线工作状态分析



终端短路电压和电流的时间振荡特点：

在时间上，电压驻波与电流驻波有 $\pi/2$ 相差。在两个相邻节点之间驻波振荡相位相同，在某一节点两边的驻波振荡相位相反。



§ 2.4 无损传输线工作状态分析

(2)、终端短路线的输入阻抗

$$Z_{sc}(z') = jZ_0 \tan \beta z'$$

可见任意长度的终端短路线的输入阻抗都为纯电抗，且随着长度的变化，输入阻抗的取值范围在 $[-j\infty, +j\infty]$ 之间，周期为 $\lambda/2$ 。

§ 2.4 无损传输线工作状态分析

2、终端开路线：

由 $Z_L = \infty$, 得 $\Gamma_2 = 1$, $\varphi_2 = 0$

经推导可得

$$\begin{cases} U(z') = 2U_2^+ \cos \beta z' \\ I(z') = j2 \frac{U_2^+}{Z_0} \sin \beta z' \end{cases} \quad \begin{cases} u(z', t) = 2|U_2^+| \cos \beta z' \cos(\omega t + \phi_2) \\ i(z', t) = \frac{2}{Z_0} |U_2^+| \sin \beta z' \cos(\omega t + \phi_2 + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

终端开路线输入阻抗: $Z_{oc}(z') = -jZ_0 \operatorname{ctg} \beta z'$

终端开路线是延伸（或缩短） $\lambda/4$ 的终端短路线，终端开路线的所有特性可根据终端短路线特性来获得。

终端短路线和开路线输入阻抗间的关系: $Z_{sc}(z') \cdot Z_{oc}(z') = Z_0^2$

3、终端接纯电抗负载

由 $Z_L = jX_L$ 可得 $\Gamma_2 = -\frac{Z_0 - jX_L}{Z_0 + jX_L}$ ，因分子分母共轭可得 $|\Gamma_2| = 1$ 。

若 $X_L > 0$ (感抗), $0 < \varphi_2 < \pi$; 若 $X_L < 0$ (容抗), $\pi < \varphi_2 < 2\pi$

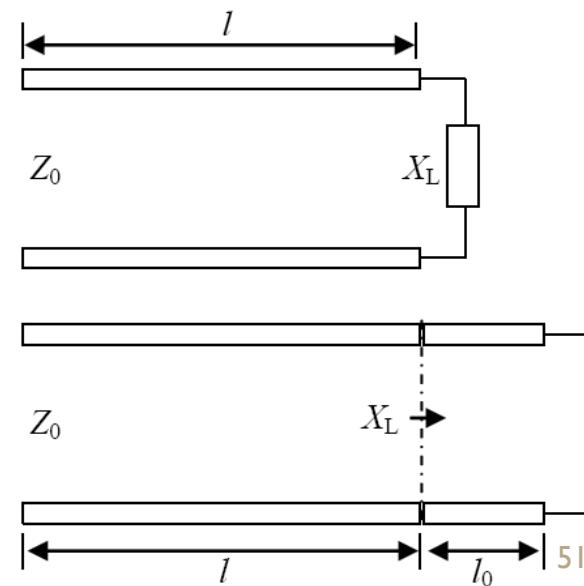
延长线段法: 由于终端短路线和终端开路线的输入阻抗都是纯电抗, 所以任何电抗性负载都可以用一段适当长度的终端短路线或者终端开路线来等效。选择终端短/开路线要求是延长线的长度要小于 $\lambda/4$ 。

当 $X_L > 0$ 时, 用终端短路线等效

$$\text{则 } jX_L = jZ_0 \tan \beta l_0, \text{ 得 } l_0 = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} \frac{X_L}{Z_0}$$

当 $X_L < 0$ 时, 用终端开路线等效

$$\text{则 } jX_L = -jZ_0 \operatorname{ctg} \beta l_0, \text{ 得 } l_0 = \frac{1}{\beta} \operatorname{ctg}^{-1} \frac{|X_L|}{Z_0}$$



§ 2.4 无损传输线工作状态分析

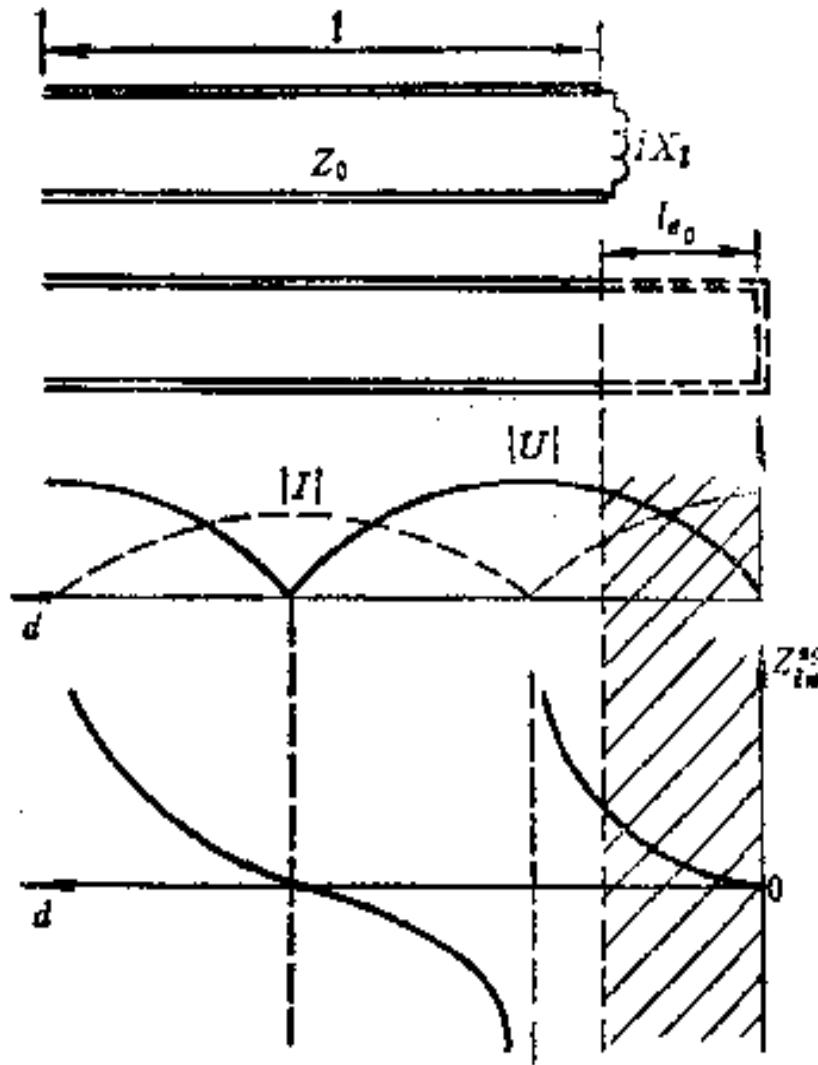


图2.5-5 端接纯感抗的电压、电流与阻抗分布
离终端第一个出现是电压波腹点

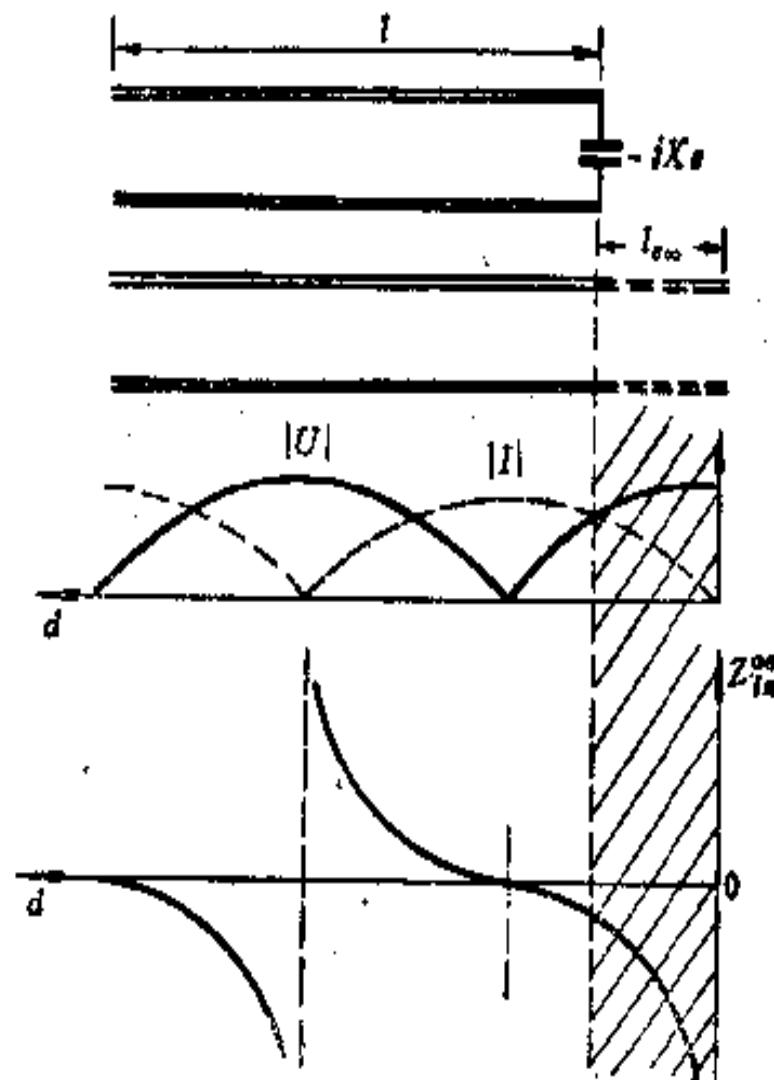


图2.5-6 端接纯容抗的电压、电流与阻抗分布
离终端第一个出现是电流波腹点⁵²

三、行驻波状态

负载状态: $Z_L = R_L + jX_L$, $|\Gamma_2| < 1$, $0 < \varphi_2 < 2\pi$

此时线上即有行波分量也有驻波分量, 故称为行驻波状态。

$$\begin{aligned} U(z') &= U_2^+ e^{j\beta z'} + \Gamma_2 U_2^+ e^{-j\beta z'} \\ &= U_2^+ e^{j\beta z'} - \Gamma_2 U_2^+ e^{j\beta z'} + \Gamma_2 U_2^+ e^{j\beta z'} + \Gamma_2 U_2^+ e^{-j\beta z'} \\ &= U_2^+ (1 - \Gamma_2) e^{j\beta z'} + 2\Gamma_2 U_2^+ \cos \beta z' \end{aligned}$$

这种分解是不正确的

第一项代表振幅为 $|U_2^+ (1 - \Gamma_2)|$ 由源向负载行进的行波, 第二项为驻波, 实质上行波分量和驻波分量从能量观点来看是不可分的。

$$\Gamma_2 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{R_L + jX_L - Z_0}{R_L + jX_L + Z_0} = \frac{R_L^2 + X_L^2 - Z_0^2}{(R_L + Z_0)^2 + X_L^2} + j \frac{2X_L Z_0}{(R_L + Z_0)^2 + X_L^2} = |\Gamma_2| e^{j\varphi_2}$$

$$|\Gamma_2| = \sqrt{\frac{(R_L - Z_0)^2 + X_L^2}{(R_L + Z_0)^2 + X_L^2}} < 1, \quad \varphi_2 = \tan^{-1} \frac{2X_L Z_0}{R_L^2 + X_L^2 - Z_0^2}$$

§ 2.4 无损传输线工作状态分析

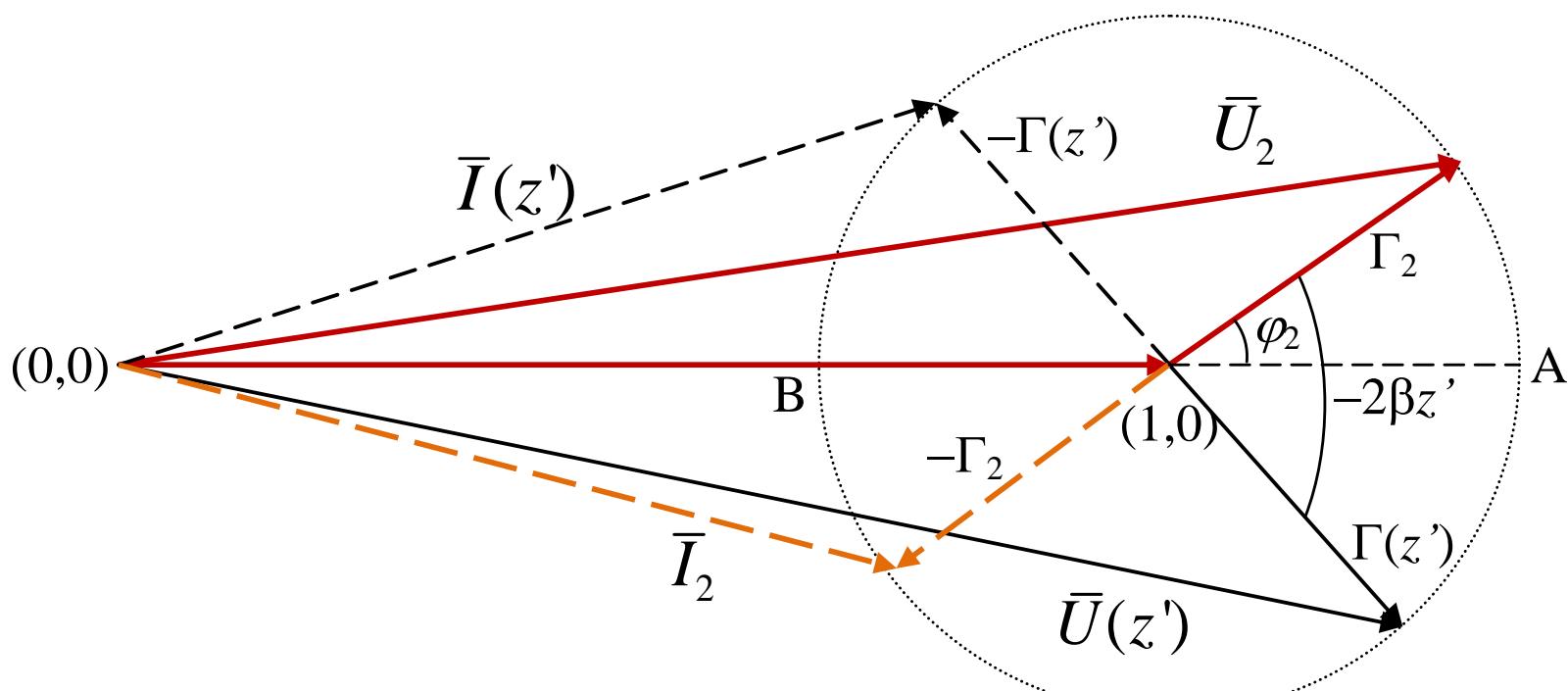
1、沿线的电压、电流分布

根据公式 $\begin{cases} U(z') = U^+(z') + U^-(z') = U^+(z')(1 + \Gamma(z')) \\ I(z') = I^+(z') + I^-(z') = I^+(z')(1 - \Gamma(z')) \end{cases}$

引入归一化电压和电流如下：

$$\begin{cases} \bar{U}(z') = U(z')/U^+(z') = 1 + \Gamma(z') = 1 + |\Gamma_2| e^{-j(2\beta z' - \varphi_2)} \\ \bar{I}(z') = I(z')/I^+(z') = 1 - \Gamma(z') = 1 - |\Gamma_2| e^{-j(2\beta z' - \varphi_2)} \end{cases}$$

这里用反射系数矢量图来分析归一化电压和电流的变化规律。



§ 2.4 无损传输线工作状态分析

讨论：

(a)、当 z' 增加时，矢量 $\Gamma(z') = |\Gamma_2| e^{-j(2\beta z' - \varphi_2)}$ 沿顺时针方向旋转，

电压和电流作周期变化，各自周期地到达腹点和节点。

(b)、电压到达腹点时（A 点），电流到达节点（B 点），反之电流到达腹点，电压到达节点。

(c)、相邻电压或电流腹节点间，矢量 $\Gamma(z')$ 恰好旋转半周，即 $2\beta z' = \pi$ ， $z' = \lambda/4$ 。相邻两腹点或节点间 $\Gamma(z')$ 旋转 2π ， $z' = \lambda/2$ 。

(d)、线上的电压腹点的振幅不等于入射波振幅的 2 倍，而节点的振幅也不等于 0，电流也是如此。

(1)、腹点和节点的电压、电流之大小

由 $U(z') = U_2^+ e^{j\beta z'} (1 + |\Gamma_2| e^{-j(2\beta z' - \varphi_2)})$ 可得

$$\begin{cases} |U_{\max}| = |U_2^+| (1 + |\Gamma_2|) & 2\beta z' - \varphi_2 = 0 \\ |U_{\min}| = |U_2^+| (1 - |\Gamma_2|) & 2\beta z' - \varphi_2 = \pm\pi \end{cases}$$

由 $I(z') = I_2^+ e^{j\beta z'} (1 - |\Gamma_2| e^{-j(2\beta z' - \varphi_2)})$ 可得

$$\begin{cases} |I_{\max}| = |I_2^+| (1 + |\Gamma_2|) & 2\beta z' - \varphi_2 = \pm\pi \\ |I_{\min}| = |I_2^+| (1 - |\Gamma_2|) & 2\beta z' - \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

由以上可得

$$\frac{|U_{\max}|}{|I_{\max}|} = \frac{|U_2^+| (1 + |\Gamma_2|)}{|I_2^+| (1 + |\Gamma_2|)} = Z_0 = \frac{|U_{\min}|}{|I_{\min}|}$$

§ 2.4 无损传输线工作状态分析

(2)、(电压波或电流波) 腹点和节点的位置

电压波和电流波的腹节点沿线分布是周期性的, 所以只要知道离负载最近的腹点或节点的位置, 就可周期确定沿线电压和电流分布。

这里令 d_{max} 为距负载最近的第一个电压波腹点 (或电流波节点) 的位置, d_{min} 为距负载最近的第一个电压波节点 (或电流波腹点) 的位置, 则

由 $2\beta d_{max} - \varphi_2 = 0$ 可以得到:

$$d_{max} = \frac{\varphi_2}{2\beta} = \frac{\varphi_2 \lambda}{4\pi}$$

由 $2\beta d_{min} - \varphi_2 = \pm\pi$ 可以得到:

$$d_{min} = \frac{\varphi_2 \pm \pi}{2\beta} = d_{max} \pm \frac{\lambda}{4}$$

其中±号的选取要以保证 $0 \leq d_{min} < \lambda/2$ 为原则。

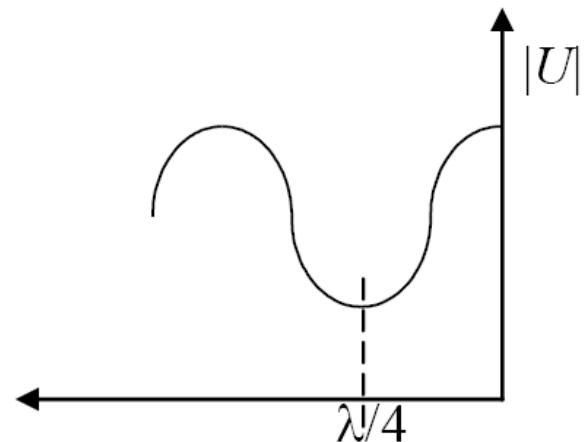
§ 2.4 无损传输线工作状态分析

4 种负载下的第一电压腹节点位置如下：

(a)、**大电阻负载**: $Z_L = R_L > Z_0$, $X_L = 0$

此时有 $\Gamma_2 = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} > 0$, 且 $\varphi_2 = 0$ 。

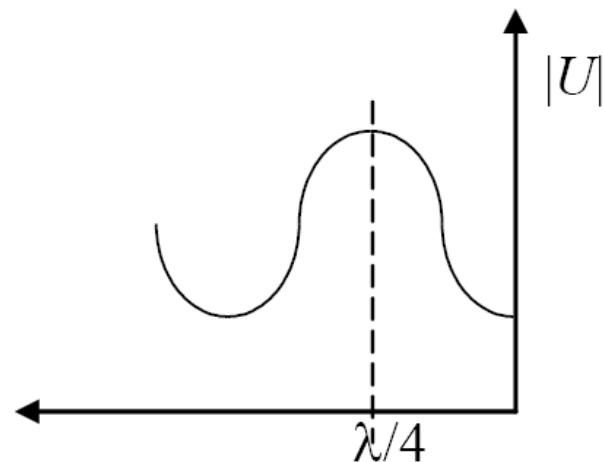
$\therefore d_{\max} = 0$, 取+号 $d_{\min} = \lambda/4$ 。



(b)、**小电阻负载**: $Z_L = R_L < Z_0$, $X_L = 0$

此时有 $\Gamma_2 = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} < 0$, $\varphi_2 = \pi$ 。

$\therefore d_{\max} = \lambda/4$, 取-号 $d_{\min} = 0$ 。

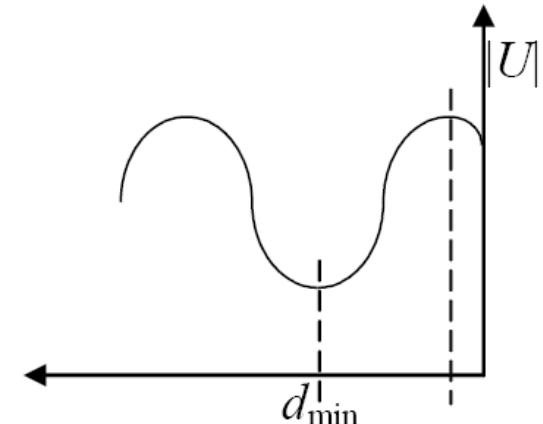


§ 2.4 无损传输线工作状态分析

(c)、感性负载: $Z_L = R_L + jX_L$, $X_L > 0$

此时有 $|\Gamma_2| < 1$, $0 < \varphi_2 < \pi$ 。

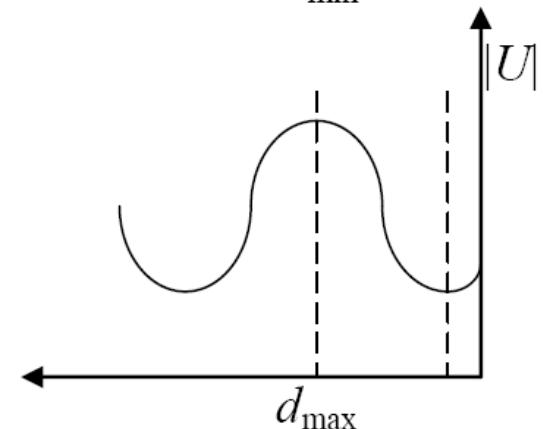
$\therefore 0 < d_{\max} < \lambda/4$, 取+号 $\lambda/4 < d_{\min} < \lambda/2$ 。



(d)、容性负载: $Z_L = R_L + jX_L$, $X_L < 0$

此时有 $|\Gamma_2| < 1$, $\pi < \varphi_2 < 2\pi$ 。

$\therefore \lambda/4 < d_{\max} < \lambda/2$, 取-号 $0 < d_{\min} < \lambda/4$ 。



§ 2.4 无损传输线工作状态分析

2、行波系数 K 和驻波比 S 的定义

行波系数 K : 节点电压 (或电流) 与腹点电压 (或电流) 的振幅之比。

$$K = \frac{|U_{\min}|}{|U_{\max}|} = \frac{|I_{\min}|}{|I_{\max}|} = \frac{|U_2^+|(1 - |\Gamma_2|)}{|U_2^+|(1 + |\Gamma_2|)} = \frac{1 - |\Gamma_2|}{1 + |\Gamma_2|}, \text{ 且 } |\Gamma_2| = \frac{1 - K}{1 + K}, \quad K \in [0, 1]$$

驻波比 S (又称电压驻波比 VSWR): 行波系数 K 的倒数。

$$S = \frac{1}{K} = \frac{1 + |\Gamma_2|}{1 - |\Gamma_2|}, \text{ 且 } |\Gamma_2| = \frac{S - 1}{S + 1}, \quad S \in [1, +\infty]$$

行波状态	$Z_L = Z_0$	$ \Gamma_2 = 0, \quad K = 1, \quad S = 1$
纯驻波状态	$Z_L = 0, \infty, jX_L$	$ \Gamma_2 = 1, \quad K = 0, \quad S = \infty$
行驻波状态	$Z_L = R_L + jX_L$	$0 < \Gamma_2 < 1, \quad 0 < K < 1, \quad 1 < S < \infty$

§ 2.4 无损传输线工作状态分析

3、阻抗特性

(a)、 $\lambda/2$ 的周期性: $Z_{in}(z') = Z_{in}(z' \pm \lambda/2)$

(b)、 $\lambda/4$ 的变换性: $Z_{in}(z') = Z_0^2 / Z_{in}(z' \pm \lambda/4)$

举例: 若 $\lambda/4$ 传输线负载端接 Z_L , 有 $Z_{in} = Z_0^2 / Z_L$

可以实现大电阻 \leftrightarrow 小电阻、感抗 \leftrightarrow 容抗间转换。

(c)、电压波腹点的阻抗:

输入阻抗最大且为纯电阻, $R_{max} = S Z_0 \geq Z_0$

(d)、电压波节点的阻抗:

输入阻抗最小且为纯电阻, $R_{min} = K Z_0 \leq Z_0$

以上 $R_{max} \cdot R_{min} = Z_0^2$, R_{max} 与 R_{min} 相距 $\lambda/4$ 。

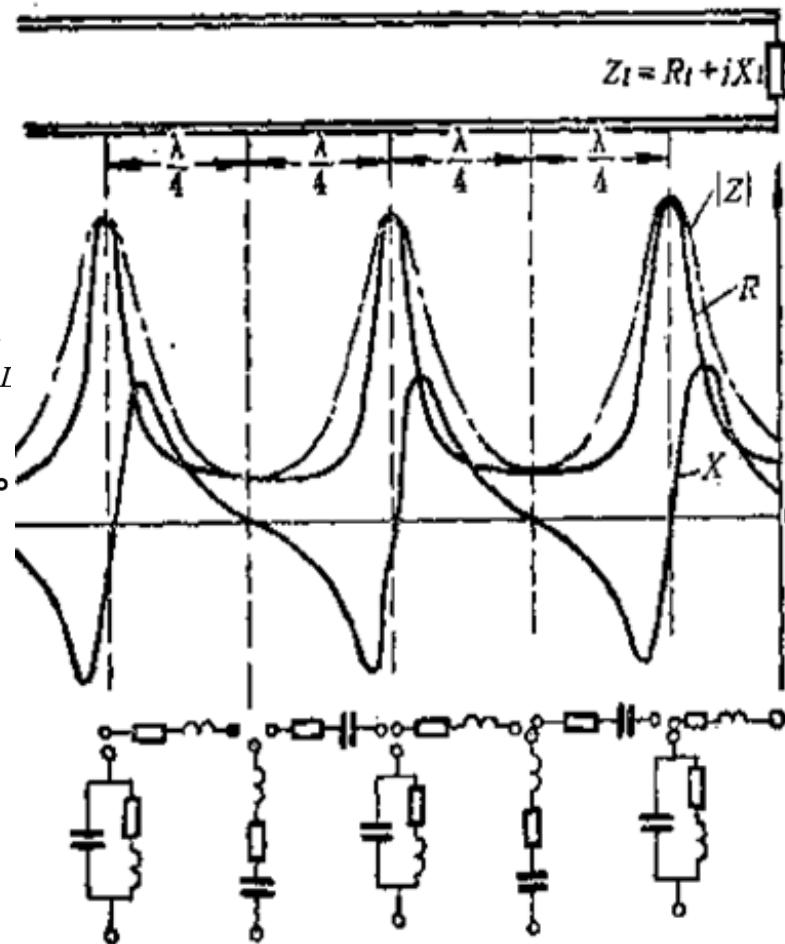


图2.5-8 端接一般阻抗时沿线阻抗分布曲线

§ 2.5 传输功率与效率

一、传输功率

1、传输线的功率

复功率（平均） $P_{av}(z') = \frac{1}{2} U(z') I^*(z') = P(z') + jQ(z')$

无功功率 $Q(z') = \frac{1}{2} \text{Im} [U(z') I^*(z')]$

$$P(z') = \frac{1}{2} \text{Re} [U(z') I^*(z')]$$

有功功率 $= \frac{1}{2} \text{Re} [Z_{in}(z') I(z') I^*(z')] = \frac{1}{2} |I(z')|^2 R_{in}(z')$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} [Y_{in}^*(z') U(z') U^*(z')] = \frac{1}{2} |U(z')|^2 G_{in}(z')$$

注：下文中传输线的传输功率一般都特指有功功率。

§ 2.5 传输功率与效率

(1)、无损传输线

无损传输线功率的计算：

由于通过线上任一点的功率是相等的，而在波腹点或者波节点，输入阻抗皆为纯电阻，说明这些点的电压和电流同相，故用电流、电压的腹节点来计算传输功率较方便。

$$\begin{aligned} P(z') &= \frac{1}{2} |U_{\max}| |I_{\min}| = \frac{1}{2} |U_{\min}| |I_{\max}| \\ &= \frac{K}{2} |U_{\max}| |I_{\max}| = \frac{1}{2} \frac{|U_{\max}|^2}{Z_0} K = \frac{1}{2} |I_{\max}|^2 Z_0 K \end{aligned}$$

§ 2.5 传输功率与效率

无损传输线上任一点的传输功率等于该点入射功率与反射功率之差。

$$\begin{aligned} P(z') &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [U(z') I^*(z')] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ U^+(z') [1 + \Gamma(z')] I^{+*}(z') [1 - \Gamma^*(z')] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ Z_0 I^+(z') I^{+*}(z') [1 + \Gamma(z')] [1 - \Gamma^*(z')] \right\} \\ &= \frac{1}{2} Z_0 \left| I^+(z') \right|^2 \left[1 - |\Gamma(z')|^2 \right] = P^+(z') - P^-(z') \end{aligned}$$

上式中， $P^+(z') = \frac{1}{2} Z_0 \left| I^+(z') \right|^2 = \frac{1}{2} \frac{U^+(z')}{I^+(z')} I^+(z') I^{+*}(z') = \frac{1}{2} U^+(z') I^{+*}(z')$

$$P^-(z') = \frac{1}{2} Z_0 \left| I^+(z') \right|^2 |\Gamma(z')|^2 = \frac{1}{2} U^-(z') [-I^-(z')]^*$$

因为在上述过程中， $|\Gamma(z')|^2 = P^-(z')/P^+(z')$ ，通常称为功率反射系数，微波测量中通常将 $10 \lg |\Gamma(z')|^2 = 20 \lg |\Gamma(z')|$ 称为反射损耗 (Return loss)。

§ 2.5 传输功率与效率

(2)、有损传输线

$$\begin{aligned} P(z') &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [U(z') I^*(z')] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ U_2^+ e^{\alpha z'} e^{j\beta z'} [1 + \Gamma(z')] I_2^{+*} e^{\alpha z'} e^{-j\beta z'} [1 - \Gamma^*(z')] \right\} \\ &= \frac{1}{2} Z_0 |I_2^+|^2 e^{2\alpha z'} \left[1 - |\Gamma(z')|^2 \right] = P^+(z') - P^-(z') \end{aligned}$$

有损时，任一点的传输功率也等于该点入射功率与反射功率之差。

2、传输线的功率容量

定义：在不发生电压击穿的条件下，线上允许传输的最大功率。

根据 $P(z') = \frac{1}{2} \frac{|U_{\max}|^2}{Z_0} K$ ， 定义功率容量为 $P_{br} = \frac{1}{2} \frac{|U_{br}|^2}{Z_0} K$

其中 U_{br} 为击穿电压。

§ 2.5 传输功率与效率

二、传输线的传输效率（有损情况）

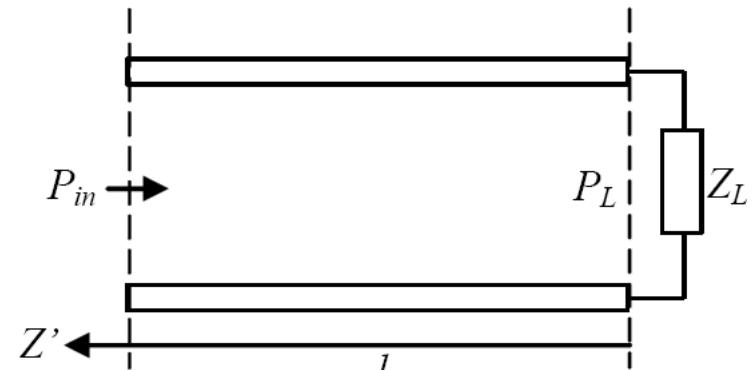
定义：负载吸收的功率 P_L 与输入端传输功率 P_{in} 之比。

对于 $z'=l$, 有

$$\begin{cases} U(l) = U_2^+ (e^{\gamma l} + \Gamma_2 e^{-\gamma l}) \\ I(l) = I_2^+ (e^{\gamma l} - \Gamma_2 e^{-\gamma l}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(l) = U_2^+ [e^{\alpha l} e^{j\beta l} + |\Gamma_2| e^{-\alpha l} e^{-j(\beta l - \varphi_2)}] \\ I^*(l) = I_2^{+*} [e^{\alpha l} e^{-j\beta l} - |\Gamma_2| e^{-\alpha l} e^{j(\beta l - \varphi_2)}] \end{cases}$$

$$\therefore P_{in} = \frac{1}{2} |I_2^+|^2 Z_0 (e^{2\alpha l} - |\Gamma_2|^2 e^{-2\alpha l}), \quad P_L = \frac{1}{2} |I_2^+|^2 Z_0 (1 - |\Gamma_2|^2), \text{ 得}$$



$$\eta = \frac{1 - |\Gamma_2|^2}{e^{2\alpha l} - |\Gamma_2|^2 e^{-2\alpha l}}$$

§ 2.5 传输功率与效率

利用 $|\Gamma_2| = \frac{1-K}{1+K}$ 和双曲函数特性 $\begin{cases} \sinh(2\alpha l) = \frac{1}{2}(e^{2\alpha l} - e^{-2\alpha l}) \\ \cosh(2\alpha l) = \frac{1}{2}(e^{2\alpha l} + e^{-2\alpha l}) \end{cases}$, 可得

$$\eta = \frac{1}{\cosh(2\alpha l) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K} + K\right)\sinh(2\alpha l)}$$

若 $K=1$ 时, 有最大的 η_{\max} , 即 $\eta_{\max} = e^{-2\alpha l}$ 。

若 $K=0$ 时, 即 $|\Gamma_2|=1$, 则有最小的 η_{\min} , 即 $\eta_{\min} = 0$ 。

当 $\alpha l \ll 1$ (低损情况) 时, $\cosh(2\alpha l) \approx 1$, $\sinh(2\alpha l) \approx 2\alpha l$, 代入上式

$$\eta \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{K} + K\right)\alpha l} \approx 1 - \left(\frac{1}{K} + K\right)\alpha l$$

式中采用了近似公式 $(1+x)^n \approx 1+nx$, $n=-1$ 。

§ 2.5 传输功率与效率

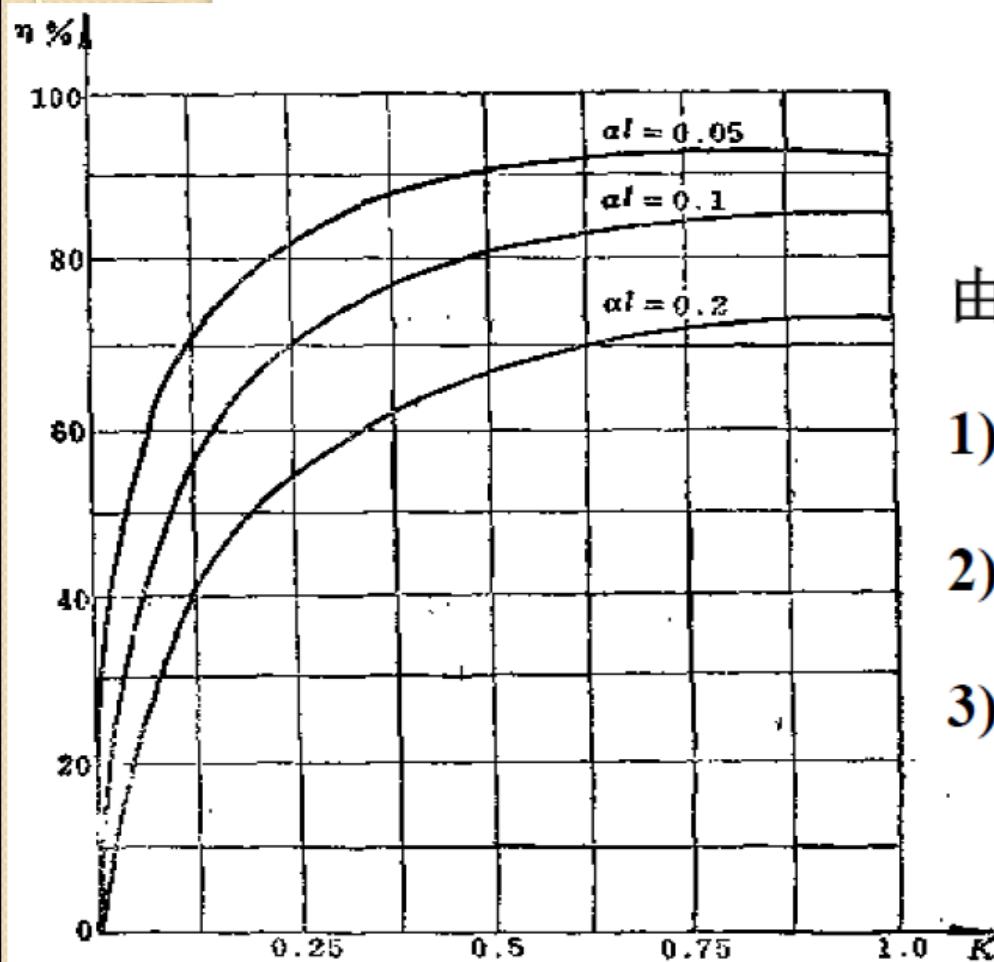


图2.7-1 传输效率与行波系数的关系曲线

由图可见

- 1)、 K 一定， α 越小 l 越短， η 越高；
- 2)、 αl 一定， K 越大， η 也越高。
- 3)、当 $K>0.75$ ， K 对 η 的影响很小。

§ 2.6 阻抗与导纳圆图

$$\Gamma(z') = \frac{Z_{in}(z') - Z_0}{Z_{in}(z') + Z_0} = \Gamma_2 e^{-j2\beta z'}$$

$$Z_{in}(z') = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta z'}{Z_0 + jZ_L \tan \beta z'} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')}$$

上述公式涉及**复数运算**，计算比较麻烦，使用不直观。利用**史密斯圆图（Smith Chart）**可简便求解，并且容易看出准确结果的趋势，而其作图误差在工程允许范围内。

§ 2.6 阻抗与导纳圆图

一、阻抗圆图的构成原理

构图原理：利用输入阻抗与电压反射系数之间的一一对应关系，将归一化输入阻抗表示在反射系数极坐标系中（即反射系数复平面）

$$\bar{Z}_{in}(z') = Z_{in}(z')/Z_0$$

$$= \bar{R}(z') + j\bar{X}(z')$$

$$\bar{Z}_{in}(z') = \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')}$$

一一对应关系

$$\begin{aligned}\Gamma(z') &= \Gamma_2 e^{-j2\beta z'} \\ &= |\Gamma_2| e^{j(\varphi_2 - 2\beta z')}\end{aligned}$$

可构成反射系数极坐标系

$$\Gamma(z') = \Gamma_a + j\Gamma_b$$

可构成反射系数复平面

§ 2.6 阻抗与导纳圆图

二、阻抗圆图的基本组成

阻抗圆图是由复平面上的反射系数图和归一化阻抗轨迹图共同组成的，包括**两个曲线坐标系统和四簇曲线**。

1、反射系数曲线坐标（极坐标系）：

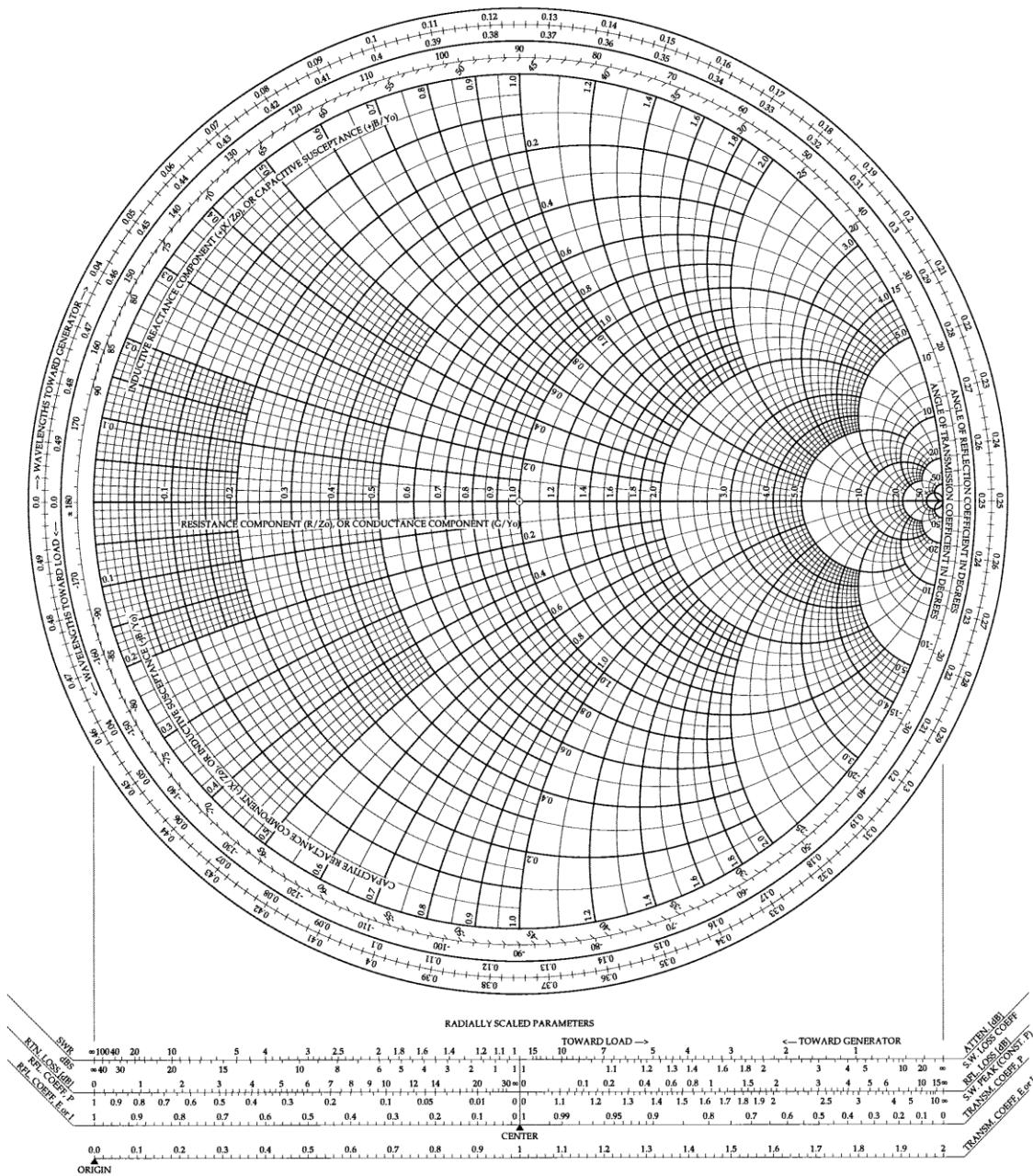
等反射系数模值圆
反射系数相角射线

2、归一化阻抗曲线坐标：

等归一化电阻圆
等归一化电抗圆

The Complete Smith Chart

Black Magic Design

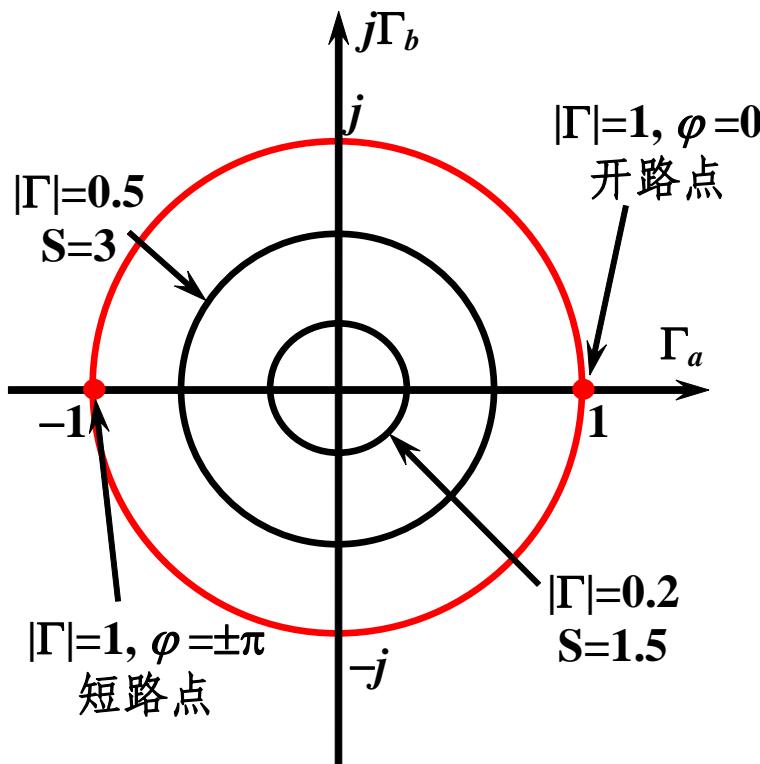


§ 2.6 阻抗与导纳圆图

等反射系数模值圆

令 $\Gamma(z') = |\Gamma_2| e^{j\varphi} \doteq \Gamma_a + j\Gamma_b$ 可得

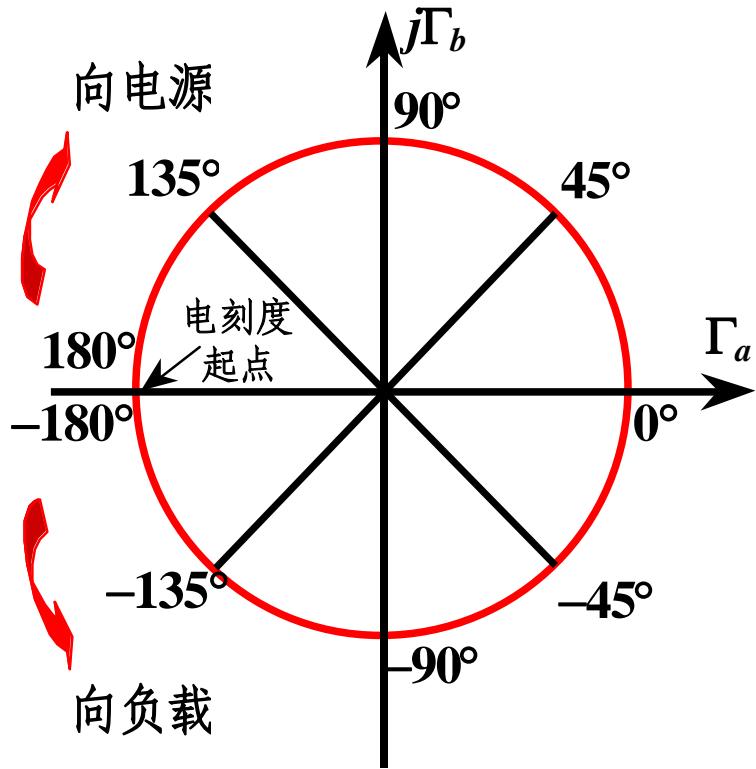
$\Gamma_a^2 + \Gamma_b^2 = |\Gamma_2|^2$ 且 $|\Gamma_2| \leq 1 \rightarrow$ 等反射系数模值圆的方程



§ 2.6 阻抗与导纳圆图

反射系数相角射线

$$\varphi = \varphi_2 - 2\beta z' = \tan^{-1}(\Gamma_b / \Gamma_a) \rightarrow \text{反射系数相角射线方程}$$



特点：

- z' 变化 $\lambda/4$ ， φ 变化 π ， z' 变化 $\lambda/2$ ， φ 变化 2π ，故绕圆一周相当于考察点在线上移动 $\lambda/2$ 。
- 旋转方向：向电源移动， z' 增加，顺时针旋转；向负载移动， z' 减小，逆时针旋转。
- 电长度刻度起点的约定：(-1, 0)点

§ 2.6 阻抗与导纳圆图

归一化阻抗与反射系数的关系

$$\bar{Z}(z') = \bar{R}(z') + j\bar{X}(z') = \frac{1 + \Gamma_a + j\Gamma_b}{1 - \Gamma_a - j\Gamma_b}$$

上式为分式线性变换式，实现由复 Γ 平面上的圆到归一化阻抗平面上的圆或直线（半径无限大的圆）的变换。

$$\bar{R} = \frac{1 - \Gamma_a^2 - \Gamma_b^2}{(1 - \Gamma_a^2)^2 + \Gamma_b^2} \quad \bar{X} = \frac{2\Gamma_b}{(1 - \Gamma_a^2)^2 + \Gamma_b^2}$$

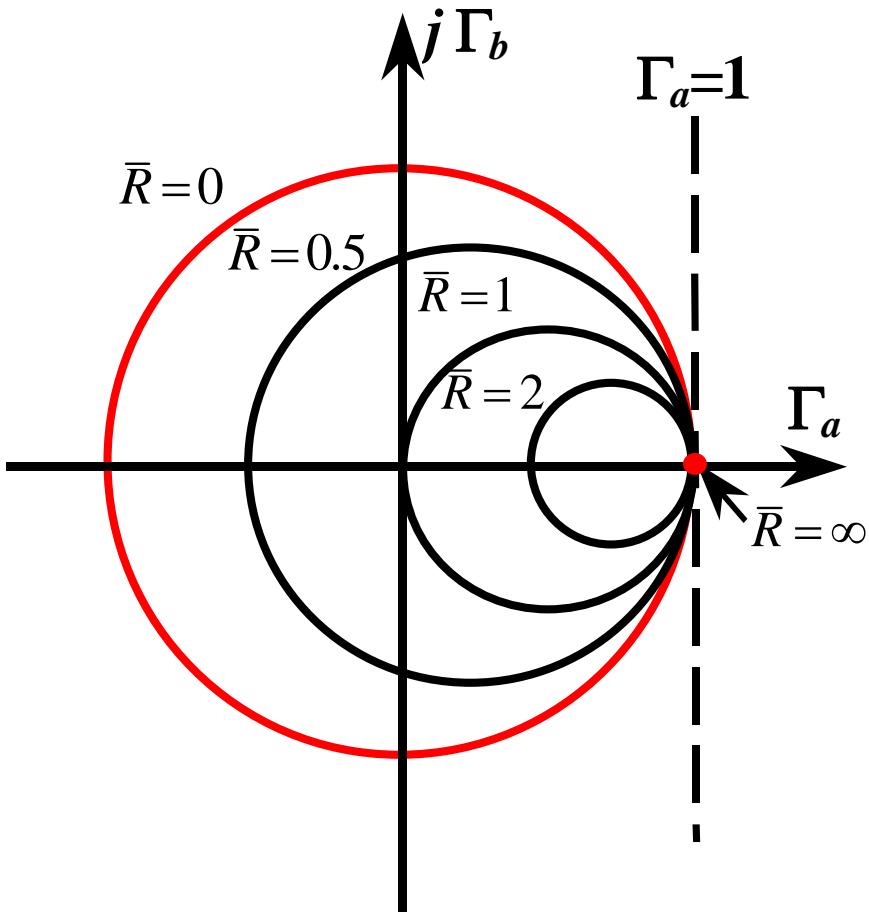
$$\left(\Gamma_a - \frac{\bar{R}}{\bar{R} + 1}\right)^2 + \Gamma_b^2 = \left(\frac{1}{\bar{R} + 1}\right)^2 \longrightarrow \text{等归一化电阻圆方程}$$

$$(\Gamma_a - 1)^2 + \left(\Gamma_b - \frac{1}{\bar{X}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\bar{X}}\right)^2 \longrightarrow \text{等归一化电抗圆方程}$$

§ 2.6 阻抗与导纳圆图

归一化电阻圆

$$\left(\Gamma_a - \frac{\bar{R}}{\bar{R}+1} \right)^2 + \Gamma_b^2 = \left(\frac{1}{\bar{R}+1} \right)^2$$

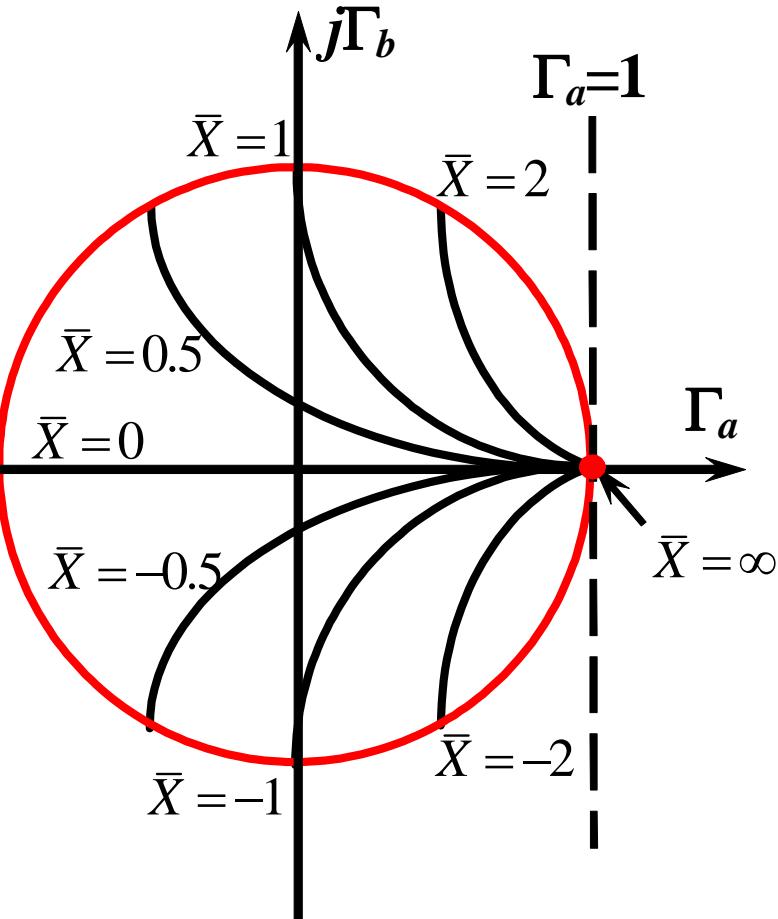


- 圆心都在正实轴 Γ_a 上；
- 电阻越大圆半径越小；
- 圆心坐标与半径之和恒等于 1，均与直线 $\Gamma_a = 1$ 在 $(1,0)$ 相切；
- 实轴交点的对称性

$$\bar{R} \longleftrightarrow 1/\bar{R}$$

§ 2.6 阻抗与导纳圆图

归一化电抗圆

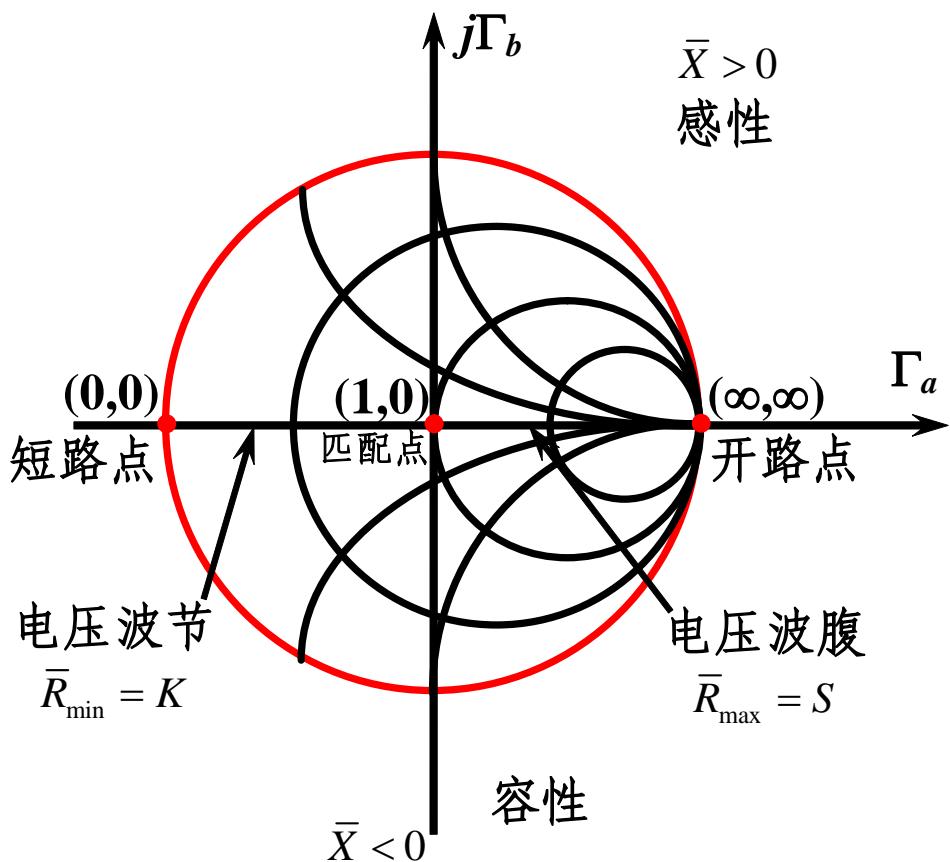


$$(\Gamma_a - 1)^2 + \left(\Gamma_b - \frac{1}{\bar{X}} \right)^2 = \left(\frac{1}{\bar{X}} \right)^2$$

- 圆心都在直线 $\Gamma_a = 1$ 上；
- 圆心纵坐标与半径相等；
- 与实轴 Γ_a 在 $(1, 0)$ 相切；
- 三种对称关系：
 - $\pm \bar{X}$ 圆弧关于实轴对称；
 - \bar{X} 与 $1/\bar{X}$ 圆和单位圆的交点关于虚轴对称；
 - \bar{X} 与 $-1/\bar{X}$ 圆和单位圆的交点关于原点对称；

§ 2.6 阻抗与导纳圆图

阻抗圆图的特点



- 上半圆阻抗为感抗，下半圆阻抗为容抗；
- 实轴为纯电阻；
- 单位圆为纯电抗；
- 实轴的右半轴皆为电路压波腹点（除开路点），左半轴皆为电路压波节点（除短路点）；
- 匹配点、开路点和短路点。

§ 2.6 阻抗与导纳圆图

三、 导纳圆图

$$\Gamma(z') = \frac{\bar{Z}(z') - 1}{\bar{Z}(z') + 1} \quad \longleftrightarrow \quad \Gamma'(z') = \frac{\bar{Y}(z') - 1}{\bar{Y}(z') + 1}$$

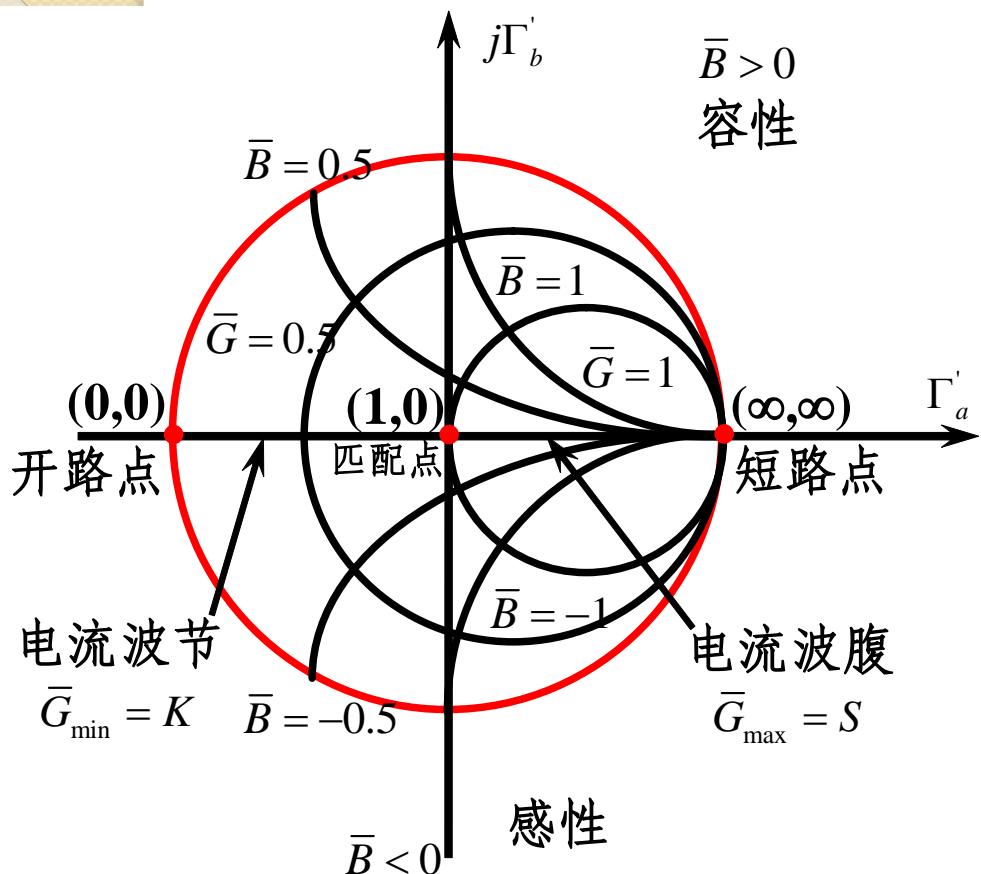
电压反射系数
与阻抗的关系

电流反射系数
与导纳的关系

两个公式在形式上是完全相同的，所以导纳圆图与阻抗圆图在图形坐标的数值、正负号和曲线形状上是相同的，可以把阻抗圆图当作导纳圆图来直接使用，但是图上各点所代表的物理含义要作不同的解释。

§ 2.6 阻抗与导纳圆图

导纳圆图的特点



$$\bar{Y}(z') = \bar{G}(z') + j\bar{B}(z')$$

导纳圆图使用原则：
同一张圆图，即可以当作阻抗圆图来用，也可以当作导纳圆图来用，但是**在进行每一次操作时，若作为阻抗圆图用则不能作为导纳圆图。**

旋转方向与阻抗圆图是一致的。

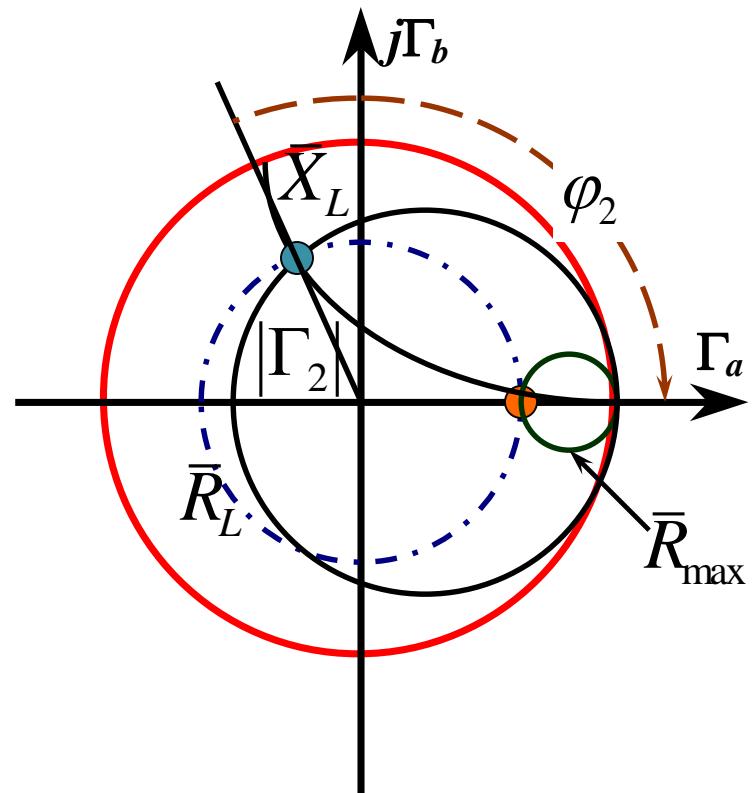
§ 2.6 阻抗与导纳圆图

例1、已知负载归一化阻
抗 \bar{Z}_L ，求S和 Γ_2 。

$$\bar{R}_{\max} = S$$

$$\Gamma_2 = |\Gamma_2| e^{j\varphi_2}$$

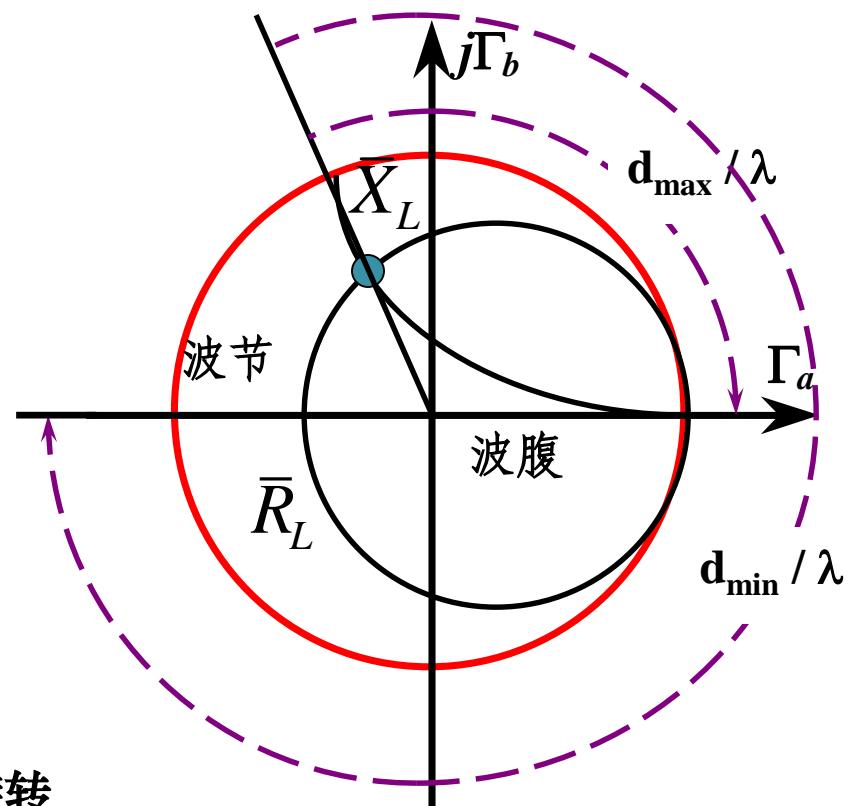
$$|\Gamma_2| = \frac{S - 1}{S + 1}$$



§ 2.6 阻抗与导纳圆图

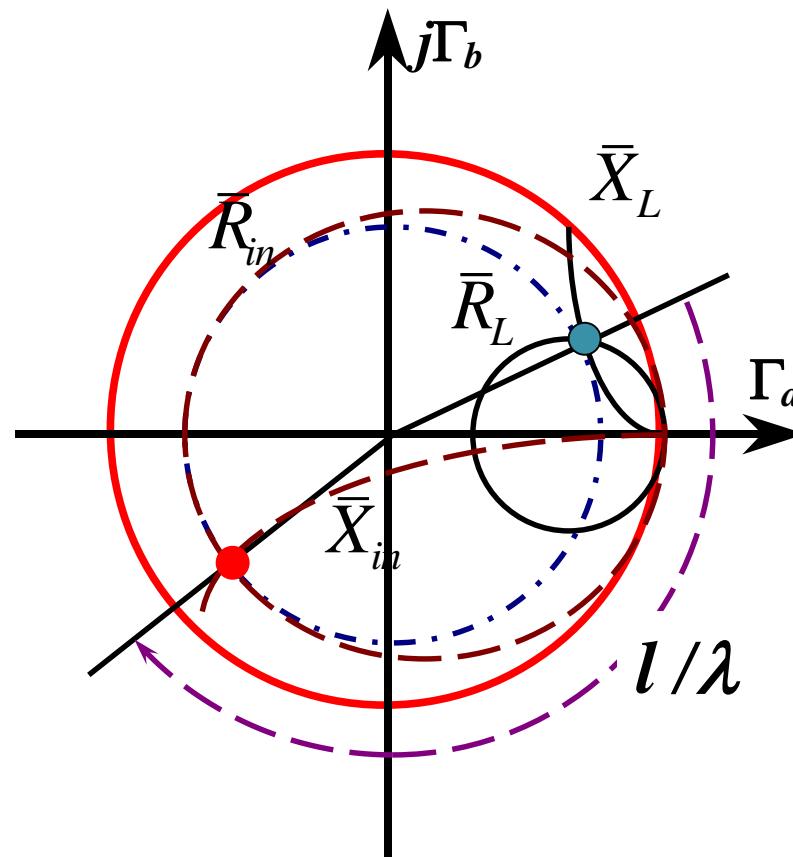
例2、已知 λ 、 Z_0 、
 Z_L , 求 d_{\min} 和 d_{\max} 。

注释：先进行归一化，
然后再确定电长度 d_{\min}/λ 、
 d_{\max}/λ 。



§ 2.6 阻抗与导纳圆图

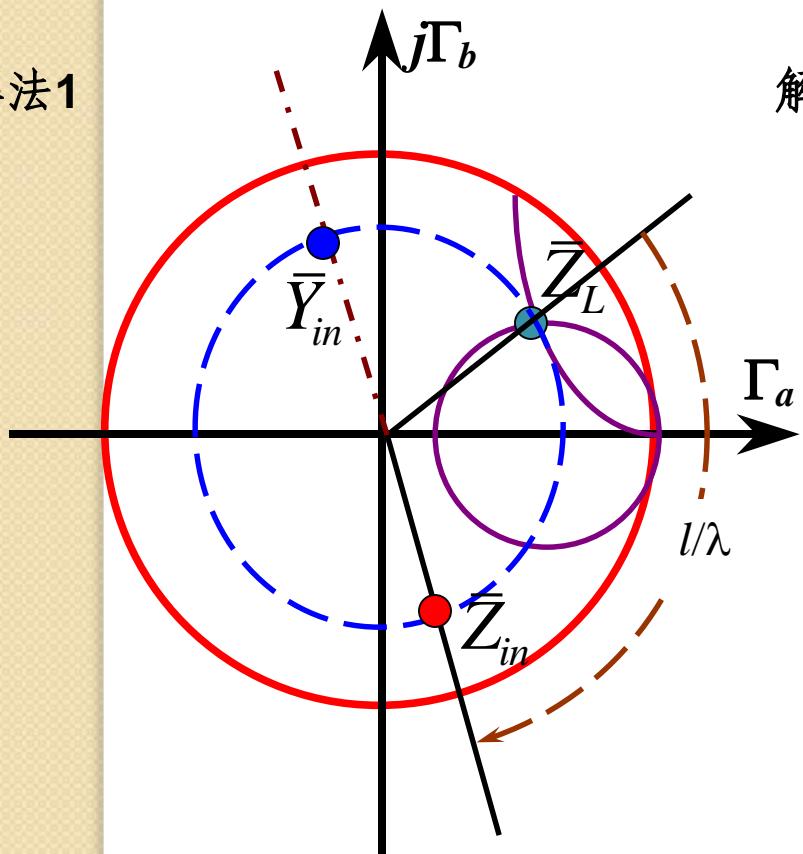
例3、已知 \bar{Z}_L 和 l/λ ，求 \bar{Z}_{in} 。



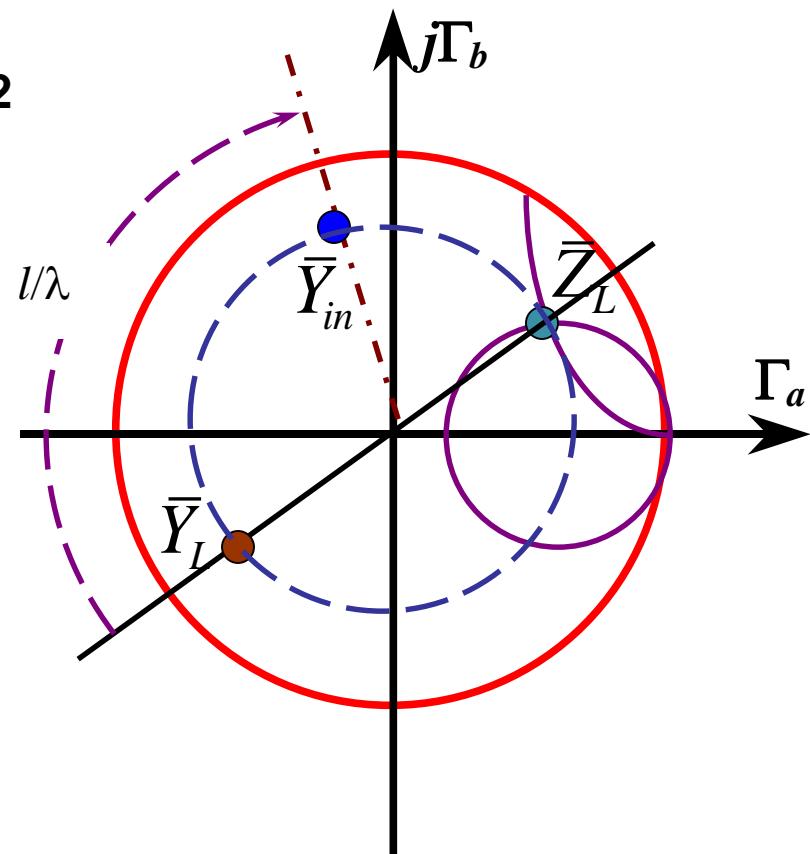
§ 2.6 阻抗与导纳圆图

例4、已知 l/λ 和 \bar{Z}_L ，求 \bar{Y}_{in} 。

解法1

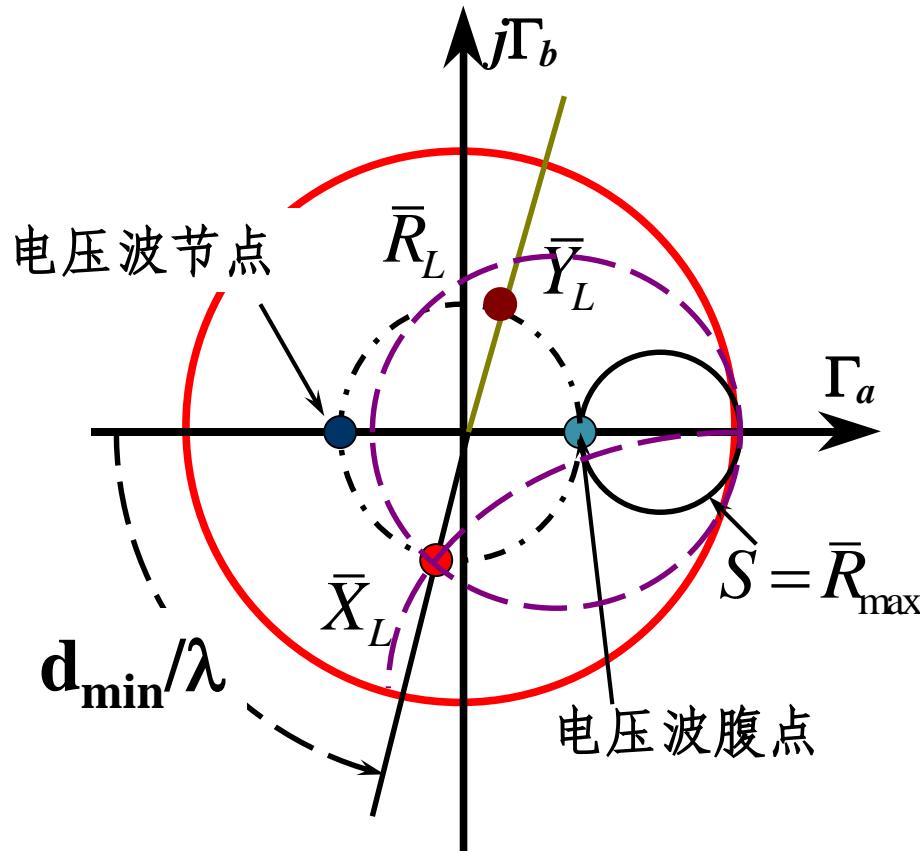


解法2



§ 2.6 阻抗与导纳圆图

例5、已知 S 和 d_{\min}/λ , 求 \bar{Z}_L 和 \bar{Y}_L 。



§ 2.7 传输线的阻抗匹配

一、阻抗匹配的概念

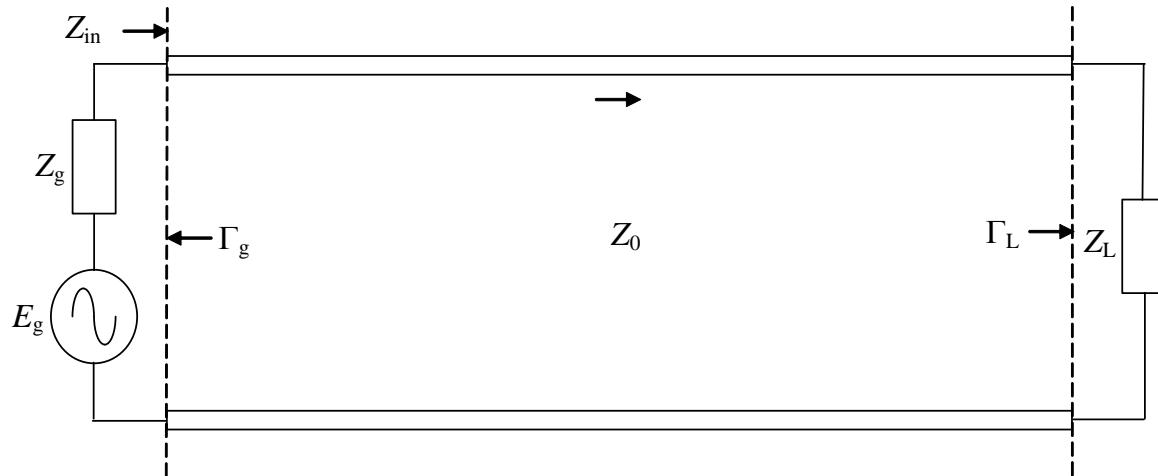
1、反射带来的主要问题

- ①、反射使输入阻抗为复数，易使电路出现谐振现象。
- ②、反射会产生信号源的功率和频率的牵引作用，降低以传输线构造的电路的稳定性。
- ③、传输线的功率容量减小， $P_{br} \propto K$ 。
- ④、传输线的传输效率降低， $\eta \propto K$ 。
- ⑤、反射在测量中会引入测量误差。

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

§ 2.7

2、阻抗匹配问题



一般情况下，传输线都不是工作在行波状态，要使传输线工作于行波状态，这就需要引入传输线匹配装置，这就是所谓的阻抗匹配。

(1)、负载的阻抗匹配：标志 ($Z_L = Z_0$, $\Gamma_L = 0$)

这时传输线上任意一点的输入阻抗 $Z_{in}(z') = Z_0$ 。负载吸收全部的入射功率，线上载行波无反射。

(2)、信号源的阻抗匹配：标志 ($Z_g = Z_0$, $\Gamma_g = 0$)

这时源将吸收负载反射回来的功率而不产生向负载的反射波， $Z_g = Z_0$ 的信号源称为匹配源。线上最多存在一次反射(负载的反射) ⑦

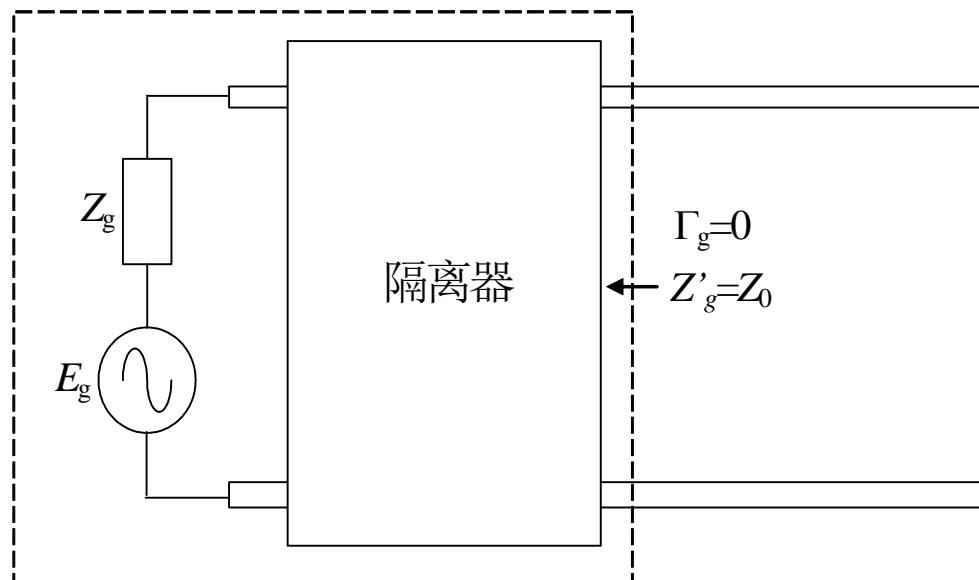
§ 2.7 传输线的阻抗匹配

“匹配源”举例：

当传输线的 Γ_s 和 Γ_L 均不为零时（这是一般情况），线上将产生多次来回反射，通常引入一种称为“隔离器”装置来实现信号源的匹配。

隔离器的作用是让入射波无衰减地通过，而将反射波全部吸收，即对反射波的衰减为无限大。

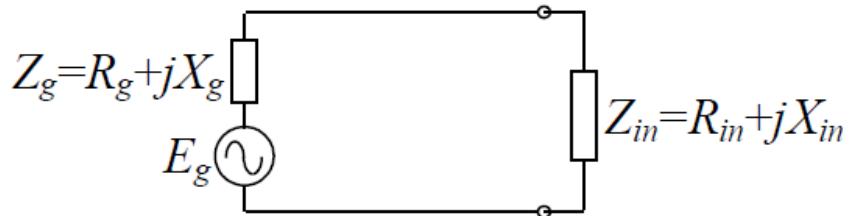
如图所示， Z'_g 可理解为等效的源内阻，由于 $Z'_g = Z_0$ ，负载的反射功率将被隔离器吸收而不产生反射，这正是匹配源所具备的特性。



§ 2.7 传输线的阻抗匹配

(3)、信号源的共轭匹配: 标志 ($Z_{in} = Z_g^*$)

信号源的共轭匹配可以
使信号源输出最大功率, 而负
载也将吸收最大功率。



输入阻抗 Z_{in} 得到的功率 (即负载吸收功率) 为 $P = \frac{|E_g|^2 R_{in}}{2|Z_g + Z_{in}|^2}$

P 存在极值的必要条件为 $\begin{cases} \frac{\alpha P}{\alpha R_{in}} = 0 \\ \frac{\alpha P}{\alpha X_{in}} = 0 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} R_{in} = R_g \\ X_{in} = -X_g \end{cases}$, $P_{max} = \frac{|E_g|^2}{8R_g}$ 。

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

阻抗匹配问题的有关总结:

1)、 $Z_L = Z_0$, $\Gamma_L = 0$ 的负载端匹配:

保证投入负载的功率完全被负载吸收而不产生反射, 不论 Γ_g 是否为 0, 线上载行波。

2)、 $Z_g = Z_0$, $\Gamma_g = 0$ 的信号源端匹配:

保证投入信号源端的功率全部被匹配源吸收而不产生反射, 线上最多只有一次反射, 若负载端不匹配, 线上载行驻波。

3)、 $Z_{in} = Z_g^*$ 的信号源共轭匹配:

保证源输出最大功率, 负载能获得最大功率。一般情况下 $Z_L \neq Z_0$ 和 $Z_g \neq Z_0$, 所以 $\Gamma_L \neq 0$ 和 $\Gamma_g \neq 0$, 线上载行驻波, 线上有~~多~~次反射。

由此可见, 载行波并不是负载吸收最大能量的状态。

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

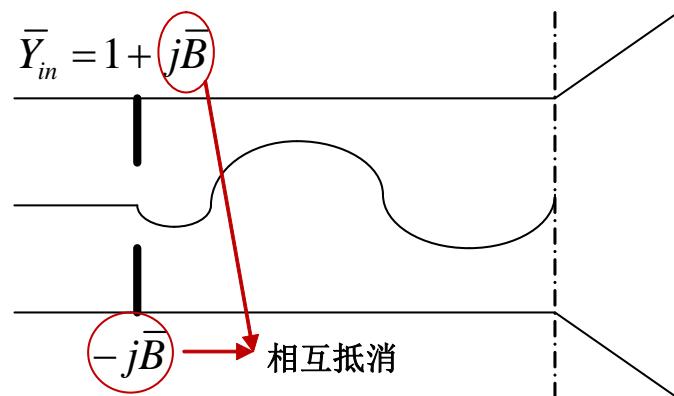
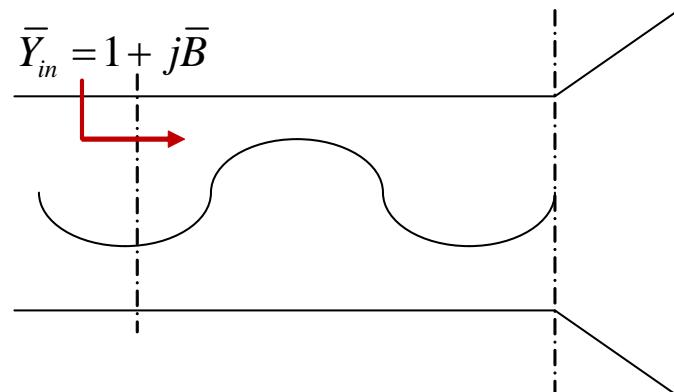
3、调匹配的一般原理（以天线端口匹配为例）

为了消除由天线产生的反射波，可在天线左侧的波导内放置模片之类的调匹配元件，从而使模片与信号源之间的规则波导段处于平行波工作状态。

从两个不同的角度来理解上述调配过程：

(1)、从波动过程上讲，匹配的实现是由模片产生的反射波与原来天线的反射波相互抵消的结果。

(2)、从阻抗的观点上讲，模片起着一个阻抗变换器的作用，它使原来不等于特性阻抗的负载阻抗，经过它的变换后变成等于特性阻抗的输入阻抗。



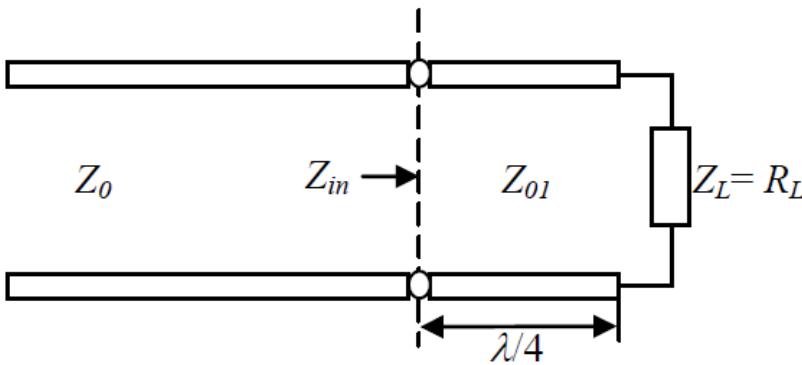
§ 2.7 传输线的阻抗匹配

二、(负载) 阻抗匹配的方法

对匹配装置的要求: 尺寸小, 频带宽, 可调节, 附加损耗小等。

1、 $\lambda/4$ 阻抗变换器

如图, $\lambda/4$ 传输线的输入阻抗和负载阻抗之间满足 $Z_{in} = Z_0^2 / Z_L$ 。



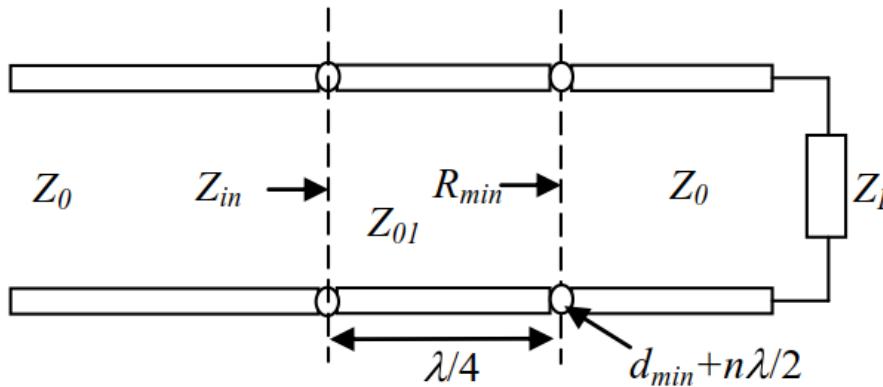
第一种情况:

若负载为纯电阻 $Z_L = R_L$, 则当 $Z_{in} (= Z_{01}^2 / R_L) = Z_0$, 就获得了负载匹配。此时, 匹配所需要的 $\lambda/4$ 传输线特性阻抗为 $Z_{01} = \sqrt{Z_0 R_L}$ 。两点注意: ①、 $Z_{01} \neq Z_0$; ②这种变换器原则上只用来匹配电阻力性负载。

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

第二种情况：

当负载阻抗为复数时， $\lambda/4$ 阻抗变换器应当在电压波节处或波腹处接入，因为那里的输入阻抗是纯电阻，下图采用了电压波节点接入的方式。



$$\text{电压波节点接入: } Z_{01} = \sqrt{Z_0 R_{\min}} = Z_0 \sqrt{K}$$

$$\text{电压波腹点接入: } Z_{01} = \sqrt{Z_0 R_{\max}} = Z_0 \sqrt{S}$$

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

$\lambda/4$ 阻抗变换器主要缺点：

- 1)、增加传输线的总长度，且不易调节。
- 2)、 $Z_{01} \neq Z_0$ ，两个传输线结构尺寸的不同。
- 3)、工作频带不宽

当 $f=f_0$ 时， $\lambda_0/4$ 阻抗变换器才能获得理想的匹配。而当 $f \neq f_0$ 时，传输线长度不等于 $\lambda_0/4$ ，则 $Z_m \neq Z_0$ ，就不能获得理想匹配。解决方法是，为获得宽频带的匹配，可采用多级 $\lambda/4$ 阻抗变换器。

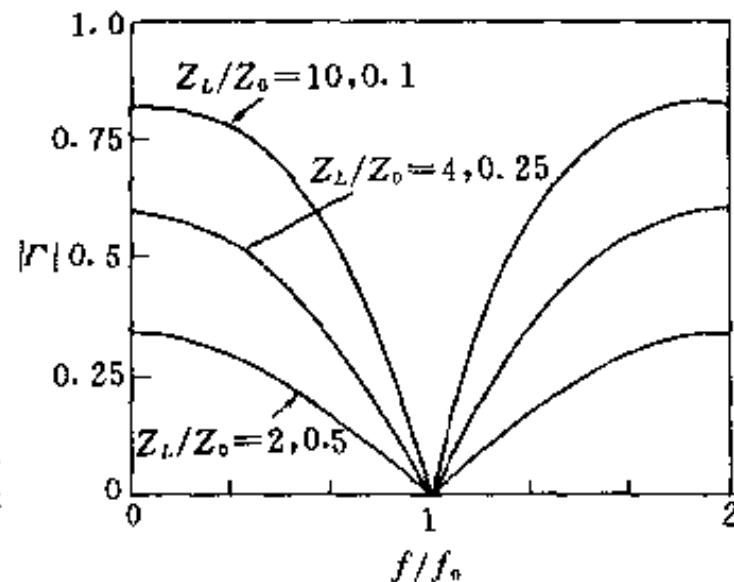


图 1.32 不同负载阻抗比情况下，
单节 $\lambda/4$ 变换器反射系数
幅度对频率的关系的曲线

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

2、支节匹配

- 基本方式：

用并联形式的短路或者开路传输线支节提供一个电纳分量，补偿或抵消主传输线中导致失配的电纳。（注：支节的特性阻抗与主传输线相同）

- 三种支节匹配形式：

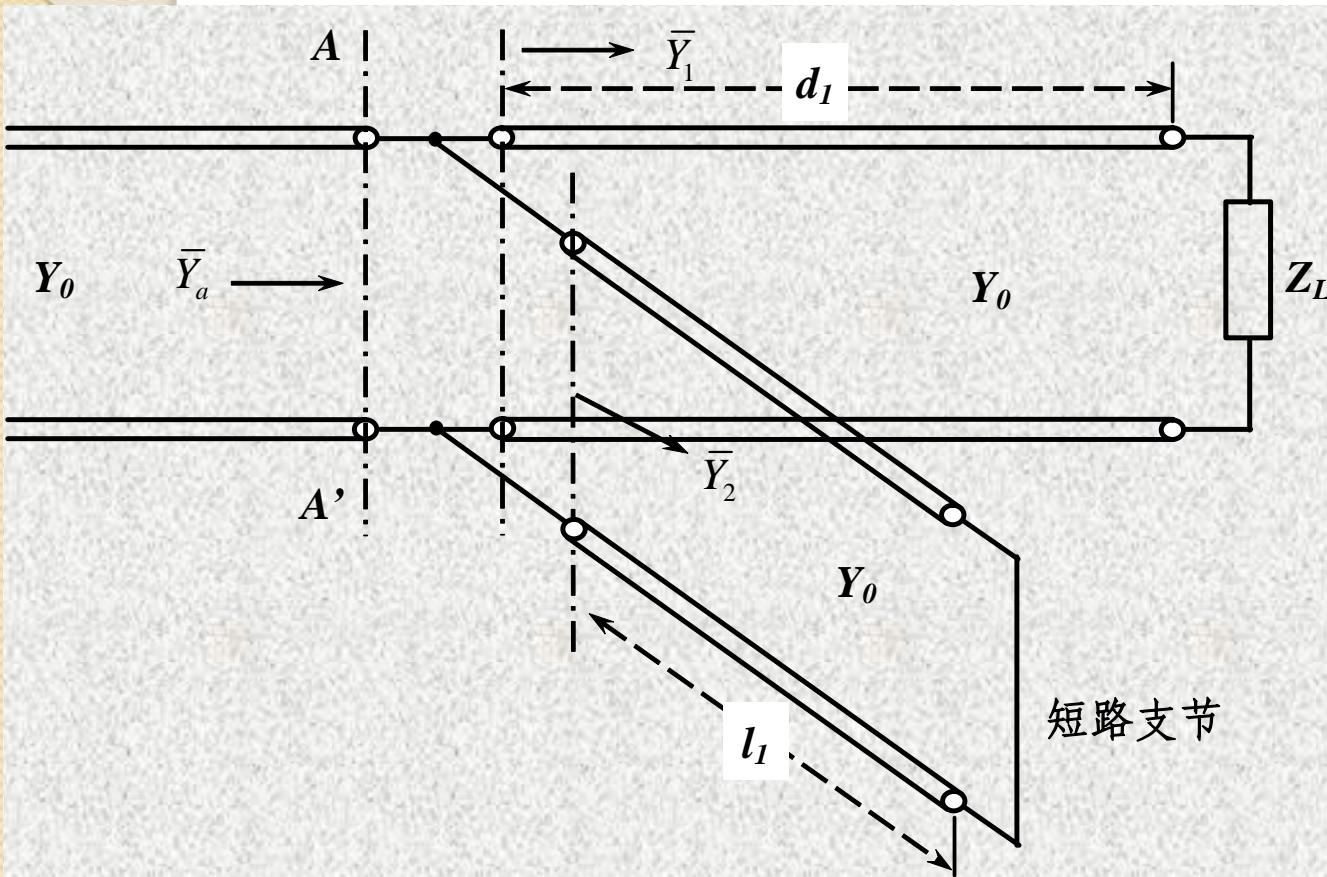
单支节匹配

双支节匹配

三支节匹配

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

(1) 、单支节匹配



匹配步骤：

1. 调节 d_1 使

$$\bar{Y}_1 = 1 + j\bar{B}_1$$

2. 调节 l_1 使

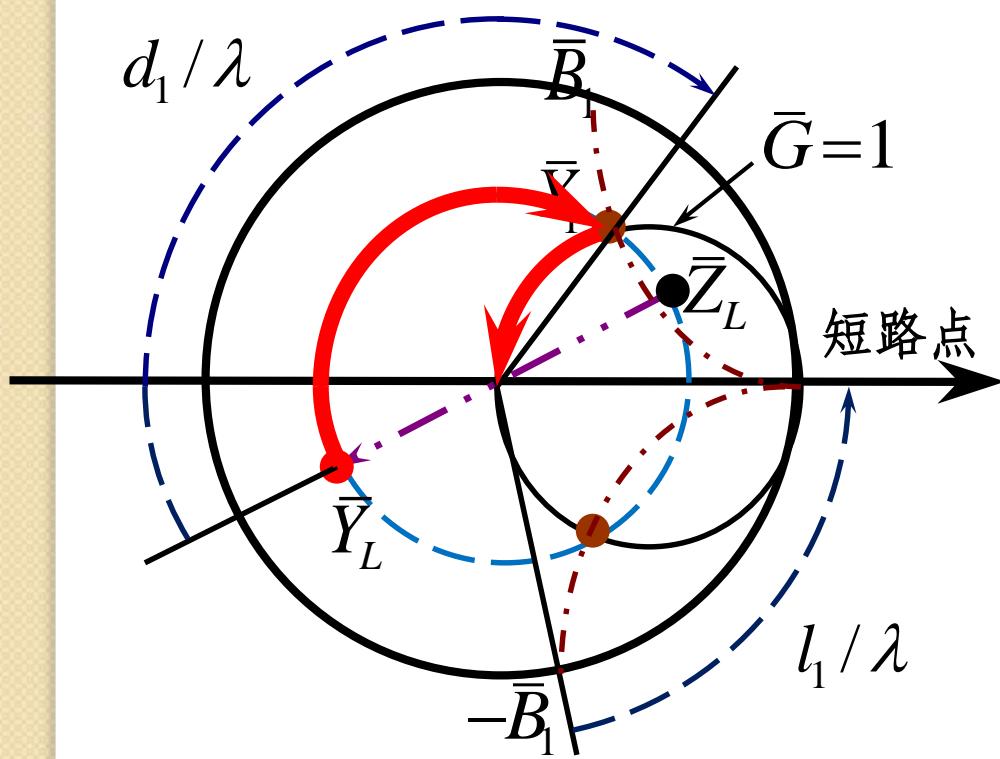
$$\bar{Y}_2 = -j\bar{B}_1$$

3. 并联后则

$$\bar{Y}_a = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 = 1$$

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

单支节的圆图匹配过程

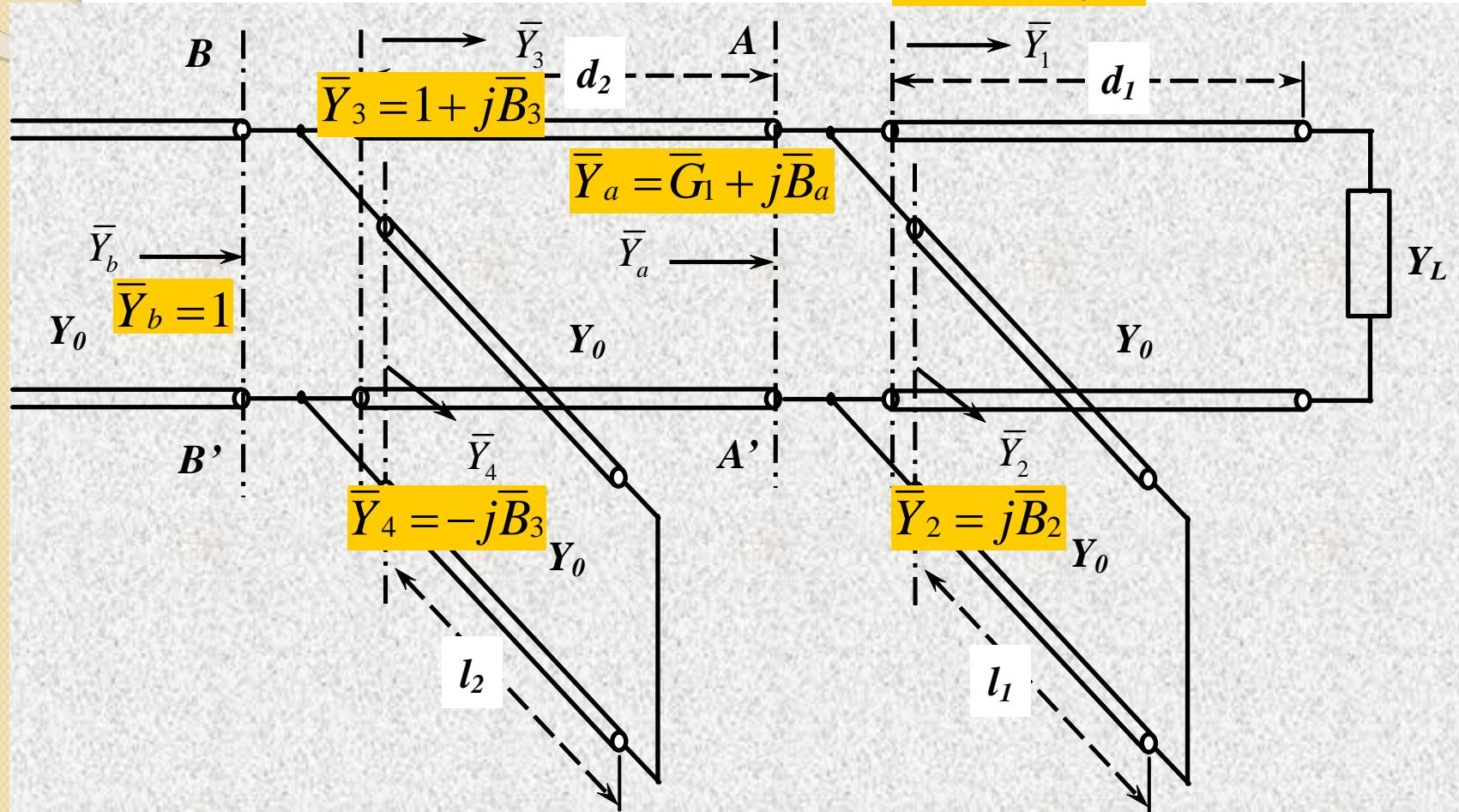


- 使用了阻抗圆图和导纳圆图。
- 一般有两组解，选择 d_1 和 l_1 较短的一组解。
- 只对一个频率进行匹配，频率变化易导致失配。
- 频率特性不如单节 $\lambda/4$ 阻抗变换器。
- d_1 位置的调节有时难以实现。

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

(2) 双支节匹配

$$\bar{Y}_1 = \bar{G}_1 + j\bar{B}_1$$

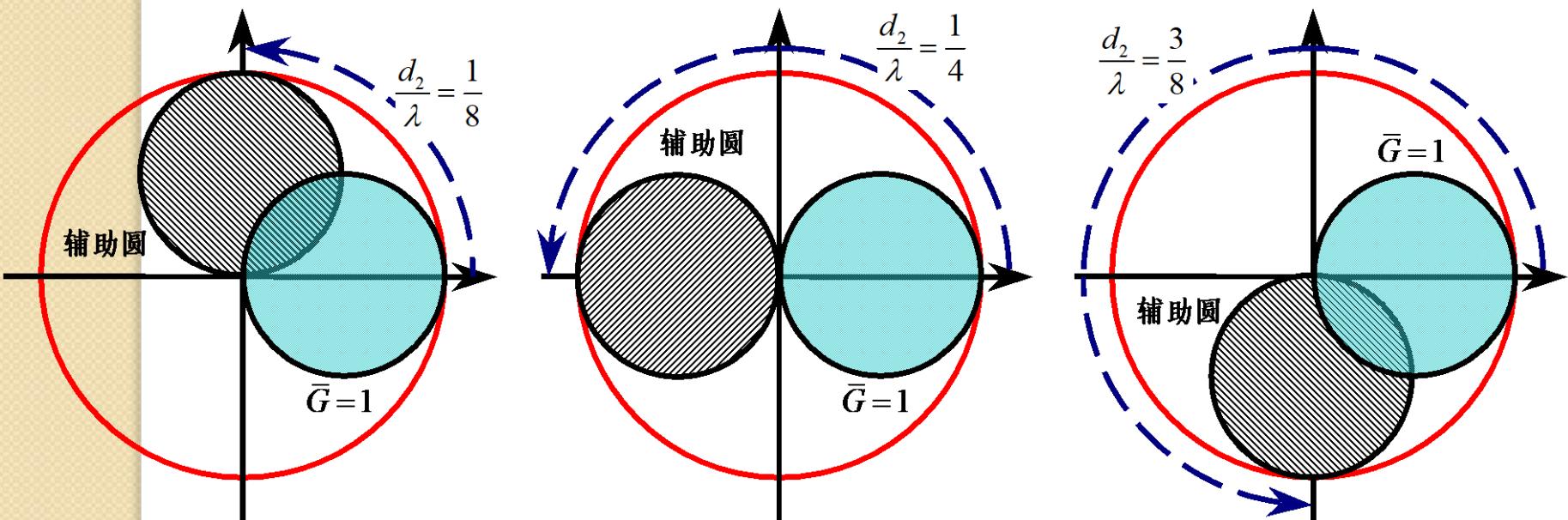


d_2 为固定长度，一般选取为 $\lambda/8$ 、 $\lambda/4$ 和 $3\lambda/8$ ，不能为 $\lambda/2$ 。

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

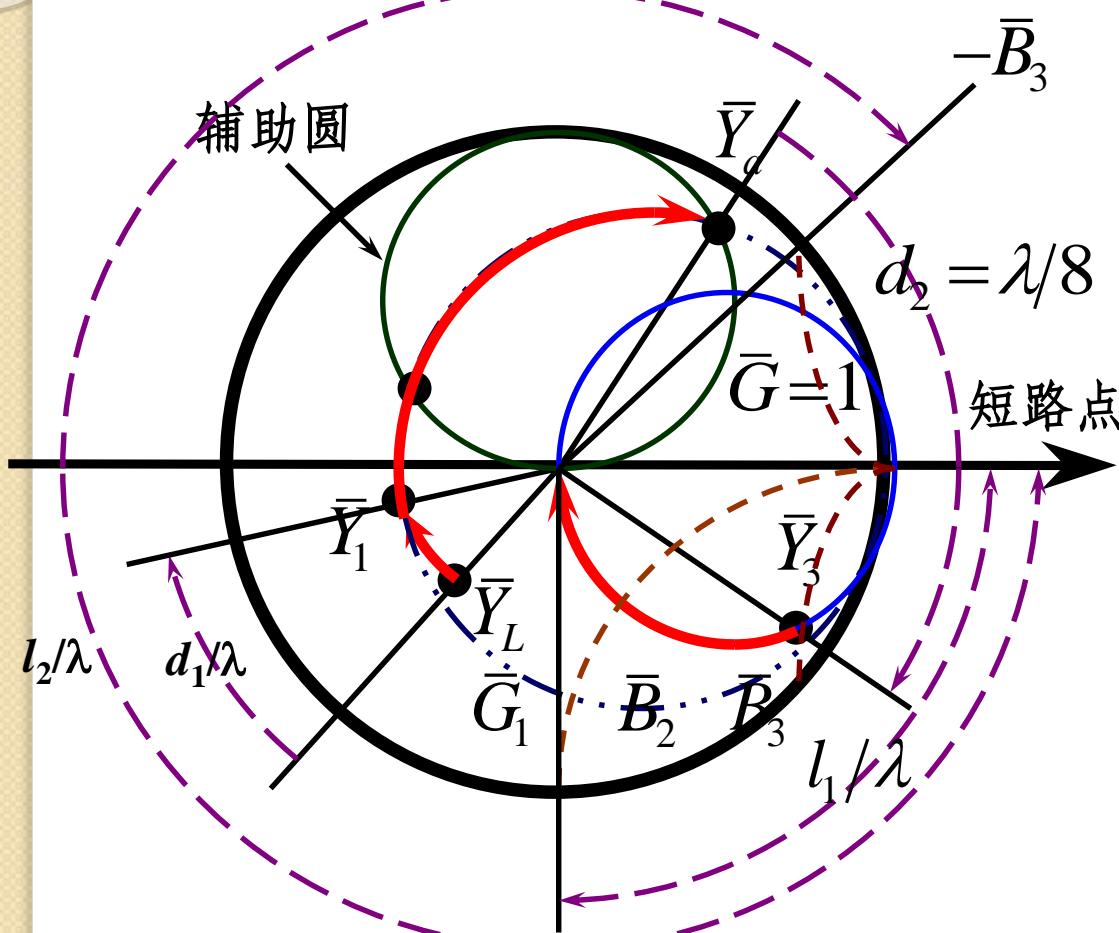
辅助圆的概念

辅助圆是 $\bar{G}=1$ 的圆按逆时针方向旋转 d_2/λ 电长度得到的圆。



§ 2.7 传输线的阻抗匹配

双支节的圆图匹配过程



$$\bar{Y}_1 = \bar{G}_1 + j\bar{B}_1$$

$$\bar{Y}_2 = j\bar{B}_2$$

$$\bar{Y}_a = \bar{G}_1 + j\bar{B}_a$$

$$\bar{Y}_3 = 1 + j\bar{B}_3$$

$$\bar{Y}_4 = -j\bar{B}_3$$

$$\bar{Y}_b = 1$$

$$\bar{B}_2 = \bar{B}_a - \bar{B}_1$$

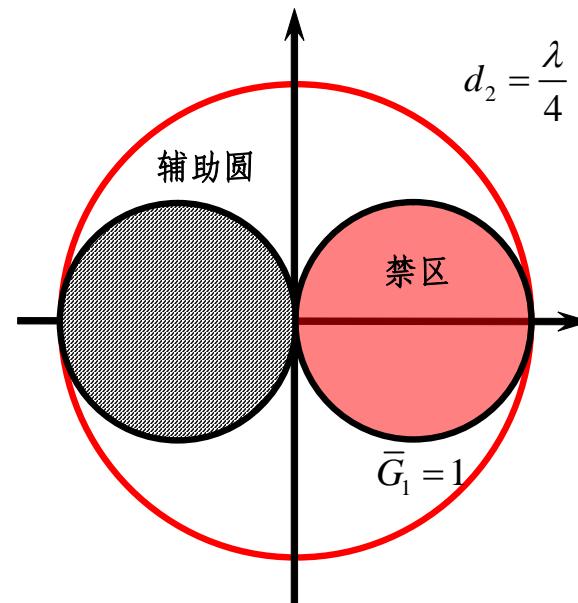
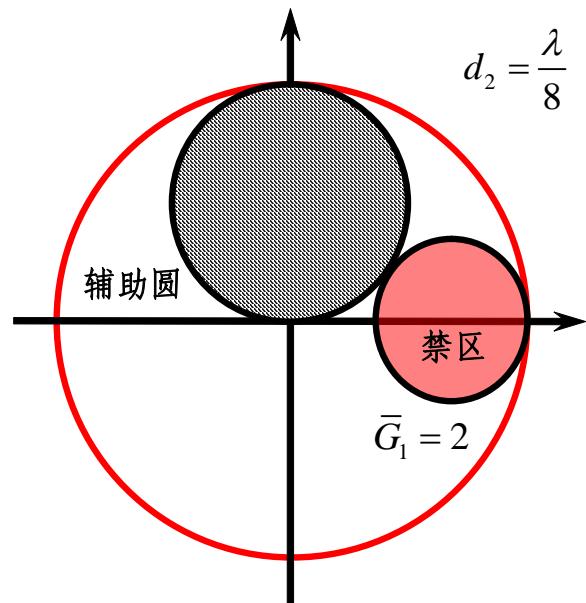
$$\bar{B}_4 = -\bar{B}_3$$

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

双支节匹配的说明

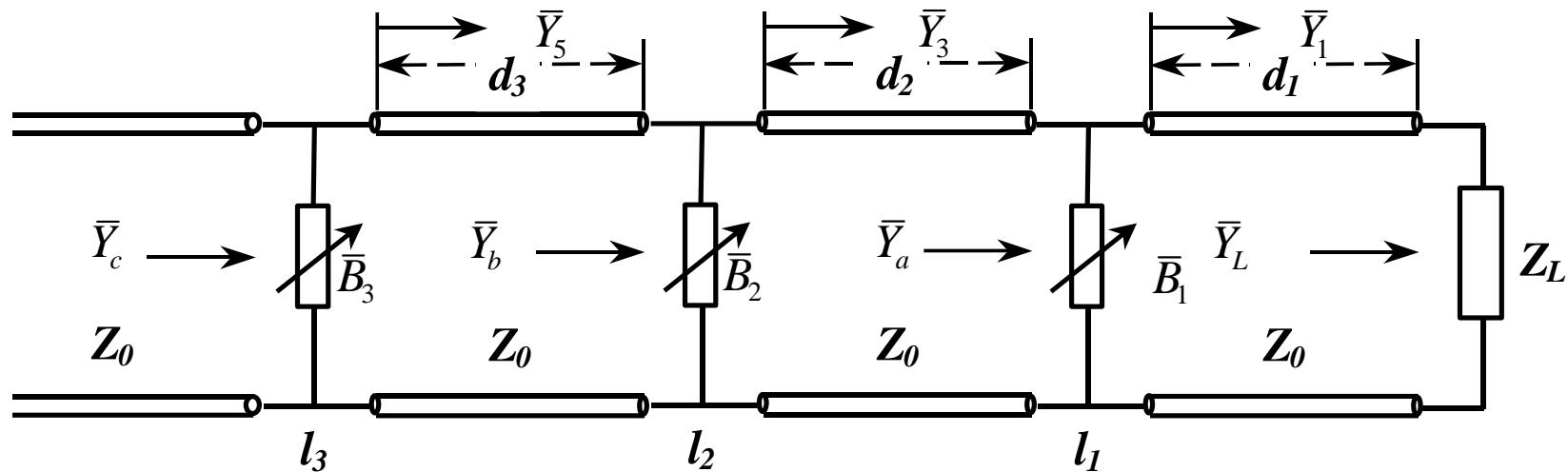
- 支节长度的解有两组，选择较短的一组。
- 双支节的频率特性比单支节差。
- 存在匹配禁区，允许调配的电导 \bar{G}_1 应满足

$$0 \leq \bar{G}_1 \leq 1/\sin^2 \beta d_2$$



§ 2.7 传输线的阻抗匹配

(3) 、三支节匹配



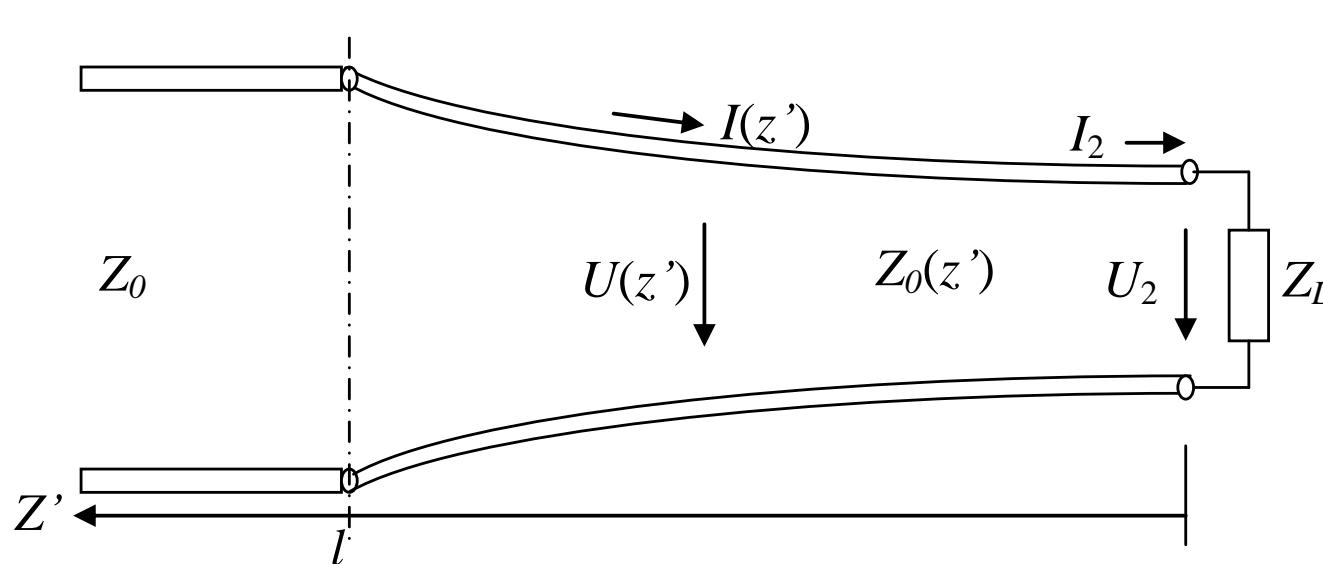
- d_2 和 d_3 常取为 $\lambda/4$ ，实际使用的只有两个支节。
- 当 \bar{Y}_1 在禁区外时，取 l_3 为 $\lambda/4$ ，即支节3不起作用，只用前两个支节进行匹配。
- 当 \bar{Y}_1 在禁区内时，取 l_1 为 $\lambda/4$ ，用支节2和3进行匹配。由于 d_2 长度为 $\lambda/4$ ，使得 \bar{Y}_3 必在禁区外。

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

3、指数线阻抗变换器

指数线是一种非均匀传输线，其特性阻抗沿线按照指数规律变化，可通过改变线间距（例如双导线）或导线直径（例如同轴线）来获得。

主要特点：若其单位长度内的阻抗渐变很小，则这种指数线可用作宽频带阻抗变换器。它可以将一个大（或小）的电阻负载同特性阻抗较小（或较大）的传输线在一个较宽频带内得到匹配（可以解决 $\lambda/4$ 阻抗变换器第 3 个缺点，见 ppt 第 94 页的图形）。



§ 2.7 传输线的阻抗匹配

(1) 非均匀传输线波动方程

非均匀传输线上 z' 处 $U(z')$ 和 $I(z')$ 满足电报方程

$$\begin{cases} \frac{dU(z')}{dz'} = Z_1(z')I(z') \\ \frac{dI(z')}{dz'} = Y_1(z')U(z') \end{cases}$$

其中 $Z_1(z') = R_1(z') + jX_1(z')$, $Y_1(z') = G_1(z') + jB_1(z')$ 。可得波动方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2U(z')}{dz'^2} - \frac{1}{Z_1(z')} \frac{dU(z')}{dz'} \frac{dZ_1(z')}{dz'} - Z_1(z')Y_1(z')U(z') = 0 \\ \frac{d^2I(z')}{dz'^2} - \frac{1}{Y_1(z')} \frac{dI(z')}{dz'} \frac{dY_1(z')}{dz'} - Z_1(z')Y_1(z')I(z') = 0 \end{cases}$$

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

对于指数线，若有 $L_1(z') = L_{10}e^{bz'}$ 和 $C_1(z') = C_{10}e^{-bz'}$ ，其中 L_{10} 和 C_{10} 分别为负载端（注意：不是负载）的单位长电感和电容， b 为可正可负的渐变常数，是个较小的量（注：若随着 z' 的增加，特性阻抗是增大的，那么 $b>0$ ）。

指数线特性阻抗为 $Z_0(z') = \sqrt{\frac{L_1(z')}{C_1(z')}} = \sqrt{\frac{L_{10}}{C_{10}}} e^{bz'} = Z_{00} e^{bz'}$

其中 Z_{00} 为负载端的特性阻抗。

在无损情况下，有

$$Z_1(z') = j\omega L_1(z') = j\omega L_{10}e^{bz'} \quad Y_1(z') = j\omega C_1(z') = j\omega C_{10}e^{-bz'},$$

可得

$$\frac{dZ_1(z')}{dz'} = bZ_1(z') \quad \frac{dY_1(z')}{dz'} = -bY_1(z')$$

$$Z_1 Y_1 = -\omega^2 L_1 C_1 = -\omega^2 L_{10} C_{10} = -\beta^2$$

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

代入波动方程可得

$$\begin{cases} \frac{d^2U(z')}{dz'^2} - b \frac{dU(z')}{dz'} + \beta^2 U(z') = 0 \\ \frac{d^2I(z')}{dz'^2} + b \frac{dI(z')}{dz'} + \beta^2 I(z') = 0 \end{cases}$$

这是一个二阶、线性、齐次、常系数微分方程组，由于这两个方程的特征方程不同，所以解的系数也不一样。

通解由两个线性无关的特解线性组合而成，特征方程和特征根为

$$\lambda^2 \mp b\lambda + \beta^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{b}{2} \pm j\sqrt{\beta^2 - \frac{b^2}{4}} \quad \text{for } \mathbf{U} \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm j\sqrt{\beta^2 - \frac{b^2}{4}} \quad \text{for } \mathbf{I}$$

§ 2.7 传输线的阻抗匹配

令 $\beta' = \sqrt{\beta^2 - b^2/4} > 0$ ，则通解为
$$\begin{cases} U(z') = A_1 e^{\left(\frac{b}{2} + j\beta'\right)z'} + B_1 e^{\left(\frac{b}{2} - j\beta'\right)z'} \\ I(z') = A_2 e^{\left(-\frac{b}{2} + j\beta'\right)z'} + B_2 e^{\left(-\frac{b}{2} - j\beta'\right)z'} \end{cases}$$

上式包括 4 个待定常数，可由负载端条件 $U(0) = U_2$ 和 $I(0) = U_2/Z_L$ ，
以及电报方程 U 和 I 的关系共同来确定。由电报方程得

$$\begin{cases} A_2 = A_1 \left[-jb/2\beta + \sqrt{1 - (b/2\beta)^2} \right] / Z_{00} \\ B_2 = B_1 \left[-jb/2\beta - \sqrt{1 - (b/2\beta)^2} \right] / Z_{00} \end{cases}$$

利用负载端条件可得

$$\begin{cases} A_1 = \left\{ U_2 \left[jb/2\beta + \sqrt{1 - (b/2\beta)^2} \right] + I_2 Z_{00} \right\} / \left[2\sqrt{1 - (b/2\beta)^2} \right] \\ B_1 = \left\{ U_2 \left[-jb/2\beta + \sqrt{1 - (b/2\beta)^2} \right] - I_2 Z_{00} \right\} / \left[2\sqrt{1 - (b/2\beta)^2} \right] \end{cases}$$

传输线的阻抗匹配

§ 2.7

(2)、指数线的阻抗匹配

指数线应同时与主传输线和负载匹配。

指数线与负载的匹配要求：反射波为零，即 $B_1=0, B_2=0$ ，可得

$$Z_L = Z_{00} \sqrt{\left[-jb/2\beta + \sqrt{1 - (b/2\beta)^2} \right]}$$

指数线与主传输线的匹配要求：指数线的输入阻抗应和主传输线的特性阻抗相等。（在负载匹配的情况下，即 $B_1=0, B_2=0$ 。），可得

$$Z_{in} = \frac{U}{I} = \frac{A_1}{A_2} e^{bl} = \left\{ Z_{00} \sqrt{\left[-jb/2\beta + \sqrt{1 - (b/2\beta)^2} \right]} \right\} e^{bl} = Z_L e^{bl}$$

若 $(b/2\beta) \ll 1$ ，即指数线特性阻抗变化很慢时，由以上两式可得

$$Z_L \approx Z_{00} \text{ 和 } Z_{in} = Z_L e^{bl} \approx Z_{00} e^{bl} = Z_0(l)$$

此时，负载等于指数线终端的特性阻抗，指数线始端的特性阻抗等于主传输线的特性阻抗，这样就可以同时达到近似匹配。

传输线的时域分析

§ 2.8

一、时域和频域分析的不同

频域分析：（前述各节就是传输线的频域分析）

- 1、信号源的电压、电流随时间的变化为简谐形式 ($e^{j\omega t}$)。
- 2、系统中所有的量都达到了稳态（场在 $t=\infty$ 时就建立了），此时有 $\partial/\partial t = j\omega$ ， $Z_1(\omega) = R_1 + j\omega L_1$ 、 $Y_1(\omega) = G_1 + j\omega C_1$ 。

时域分析：

- 1、信号源的电压、电流是时间 t 的任意函数，因此信号源和负载的阻抗须用电阻、电感和电容组成的网络来表示，不能写成 ω 的函数。
- 2、用于分析电压和电流的瞬态变化，这意味信号在此阶段包含很宽的频带。当传输线带宽有限时，对于信号的瞬态变化将无法及时响应，因而就产生了失真。

二、时域均匀传输线方程及其通解

均匀传输线在任意激励下产生的电压波和电流波是 z 和 t 的任意函数，因此我们必须回到最初的电报方程（时域形式）：

$$\begin{cases} -\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gu(z,t) + C \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

式中 R 、 L 、 G 和 C 是均匀传输线的分布参数。

上式中第一式对 z 求导，第二式对 t 求导，可得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = -R \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} - L \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z \partial t} \\ \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} = -G \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - C \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

§ 2.8 传输线的时域分析

若 i 是 z 和 t 的连续函数，则 $\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z}$ ，第二式代入第一式得

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} - RG u(z, t) = 0$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - RG i(z, t) = 0$$

若传输线无损，以上两式可简化为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

§ 2.8 传输线的时域分析

这是二阶常系数齐次线性偏微分方程（双曲型），其通解（本征解）

可写为

$$\begin{cases} u(z,t) = f(t - \sqrt{LC}z) + g(t + \sqrt{LC}z) = f(t - z/\nu_p) + g(t + z/\nu_p) \\ i(z,t) = \frac{1}{Z_0} [f(t - z/\nu_p) - g(t + z/\nu_p)] \end{cases}$$

式中 f 和 g 是 z 和 t 的 任意函数， $\nu_p = 1/\sqrt{LC}$ 是波的传播速度， Z_0 是传输线的特性阻抗，上式第一项是滞后波（向+ z 方向传播），第二项是超前波（向- z 方向传播），所以在同一点同一时刻仍然有

$$\begin{cases} u(z,t) = u^+(z,t) + u^-(z,t) \\ i(z,t) = \frac{1}{Z_0} [u^+(z,t) - u^-(z,t)] \end{cases}$$

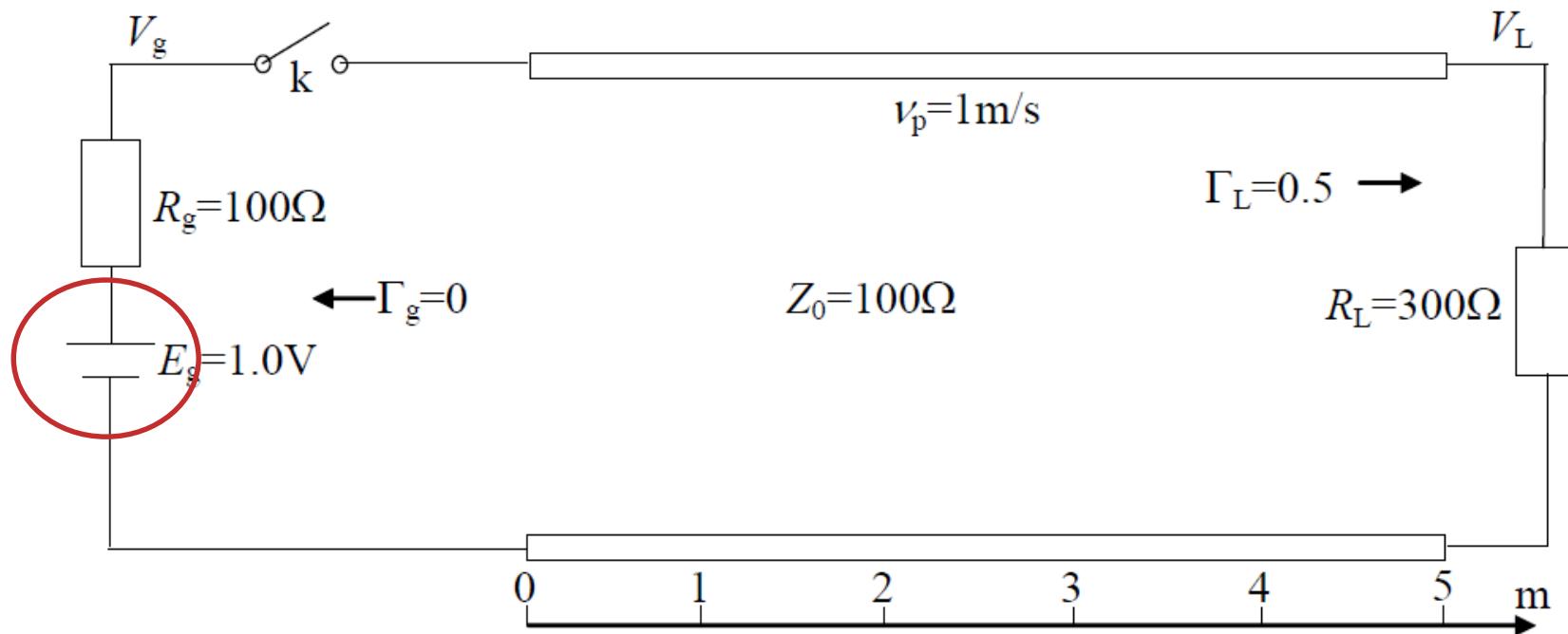
可见，传输线上任一点的电压和电流是入射波和反射波的叠加。

§ 2.8 传输线的时域分析

三、时域传输线特性的分析方法

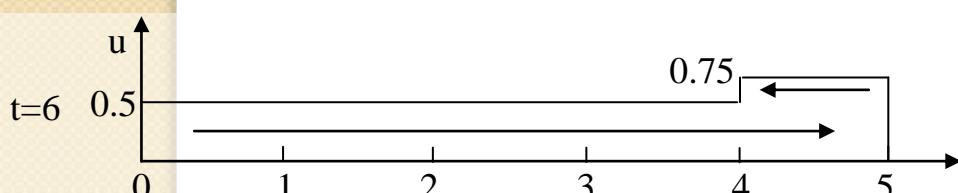
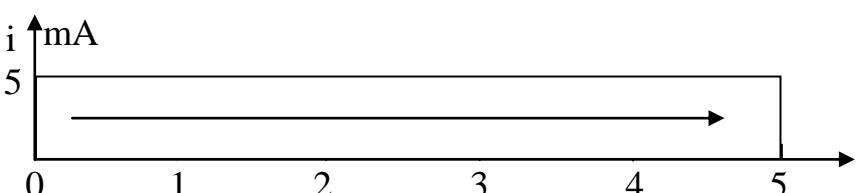
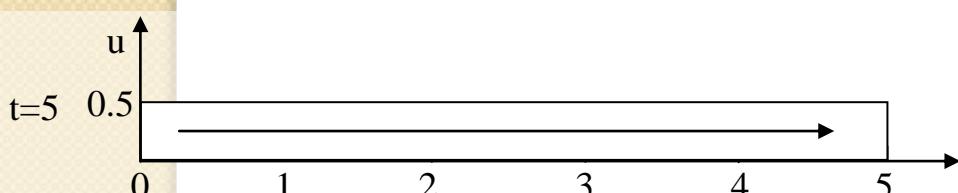
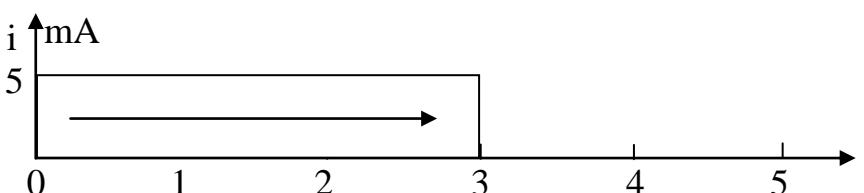
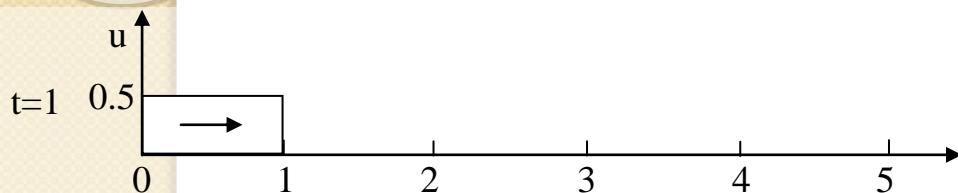
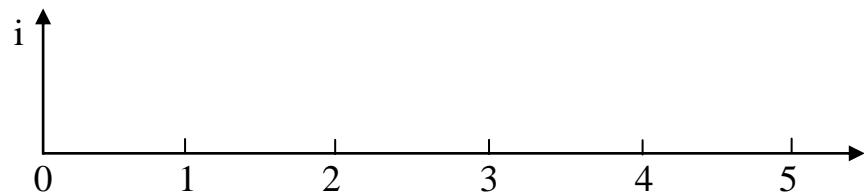
1、时空图解法

例 1. 传输线结构和参数如图所示。

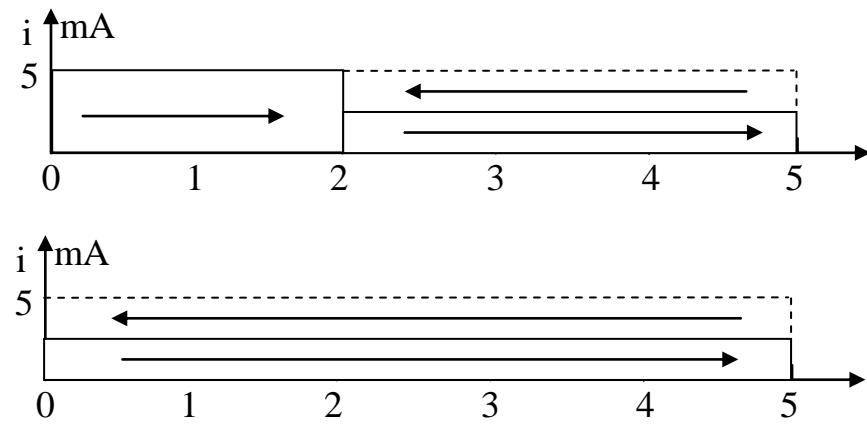
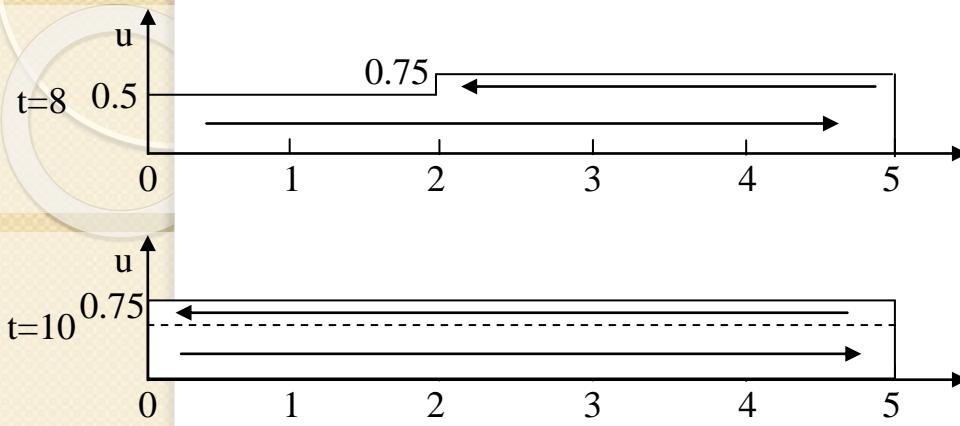


问题: $t=0$ 时刻, 开关k闭合, 问此时整个传输线的输入阻抗? V_g ?

§ 2.8 传输线的时域分析



§ 2.8 传输线的时域分析

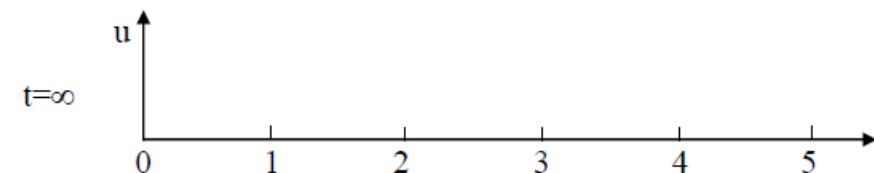
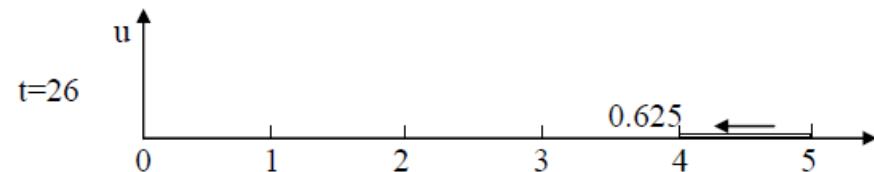
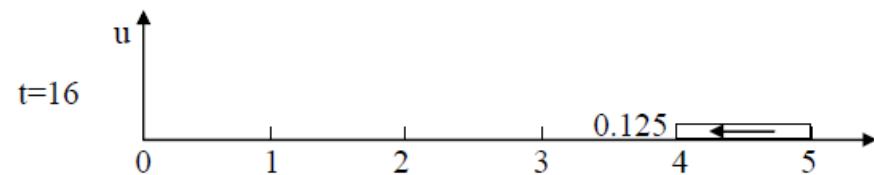
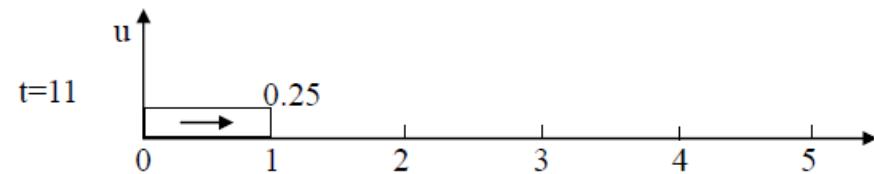
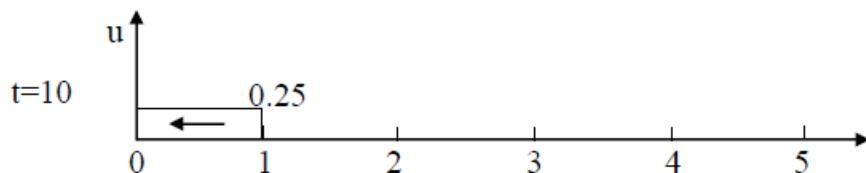
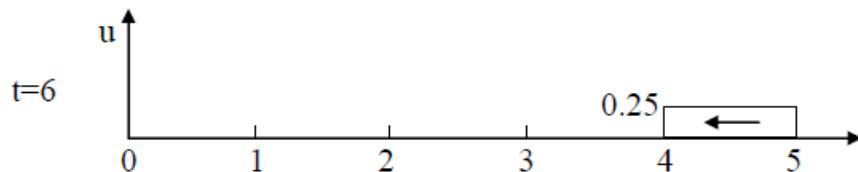
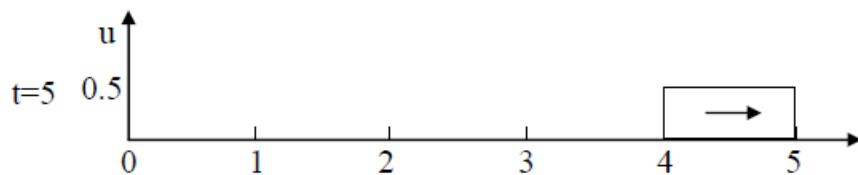
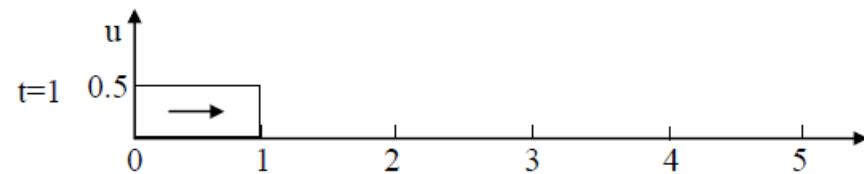


由于源端是匹配的，因此 $t \geq 10$ ，电路达到稳态。在稳态时，传输线已无作用，可得稳态电压为 $V_L = \frac{E_g R_L}{R_L + R_g} = 0.75V$ 。

由以上例子可见，信号输入后的瞬态变化，使得沿线的电压、电流没有确定的沿空间和时间上的分布，因而输入阻抗的定义就无明确的和实际的意义。

§ 2.8 传输线的时域分析

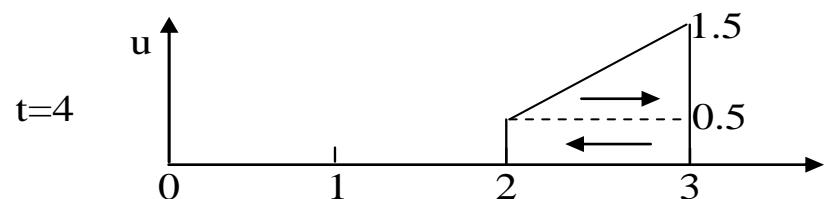
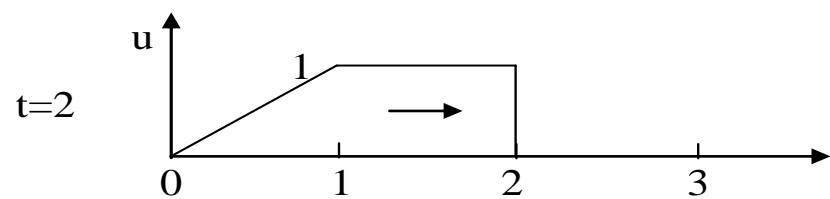
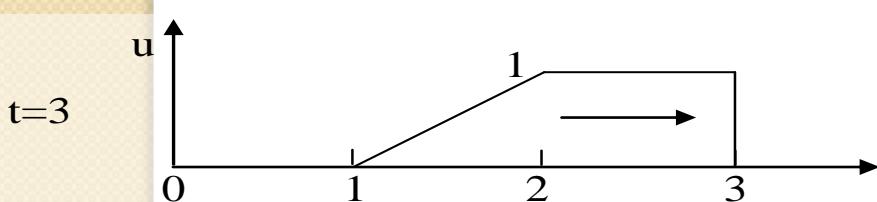
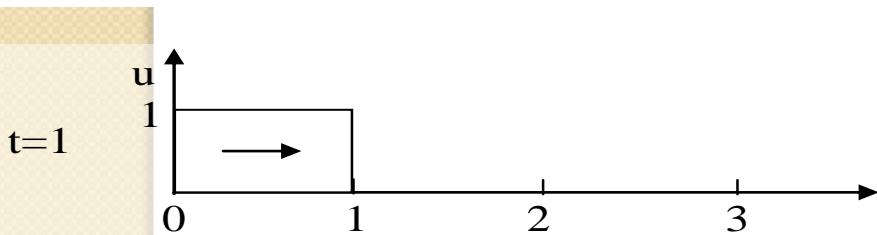
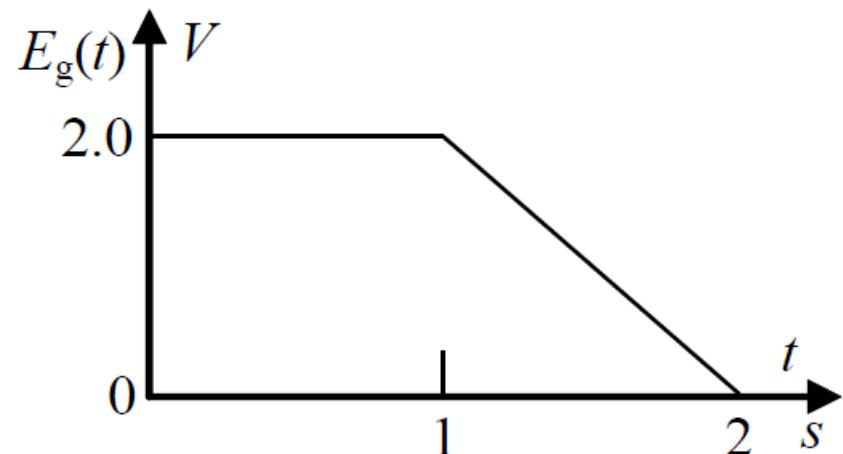
例 2. 传输线及其参数与例 1 相同, 如果开关 k 闭合 1 秒后再打开, 则电压波形如下:



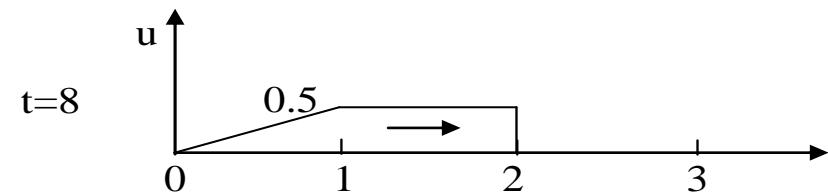
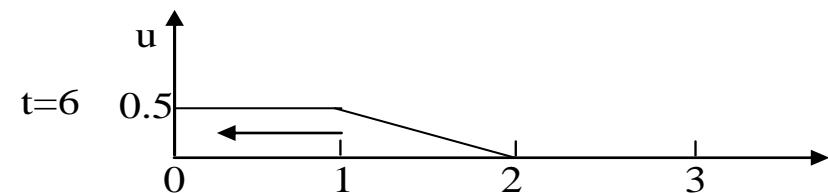
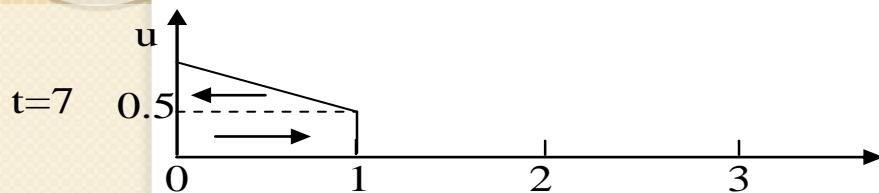
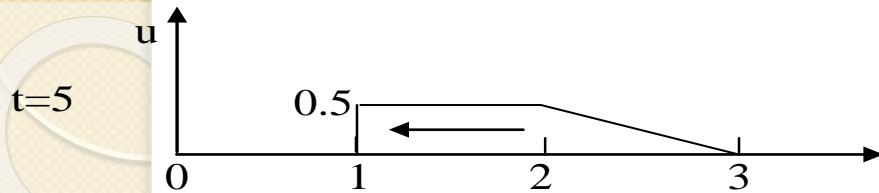
§ 2.8 传输线的时域分析

例 3. 若电源电压的脉冲形状如图

所示，传输线源端与负载以及相速等参数情况和例 1 完全相同，传输线的长度变为 3m，脉冲发射完毕后开关断开，给出沿线电压波形分布。

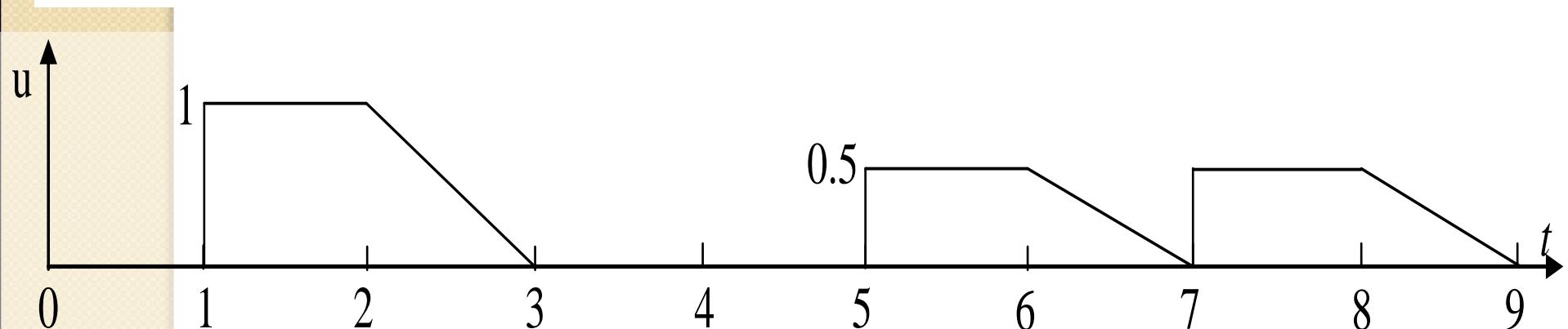


§ 2.8 传输线的时域分析



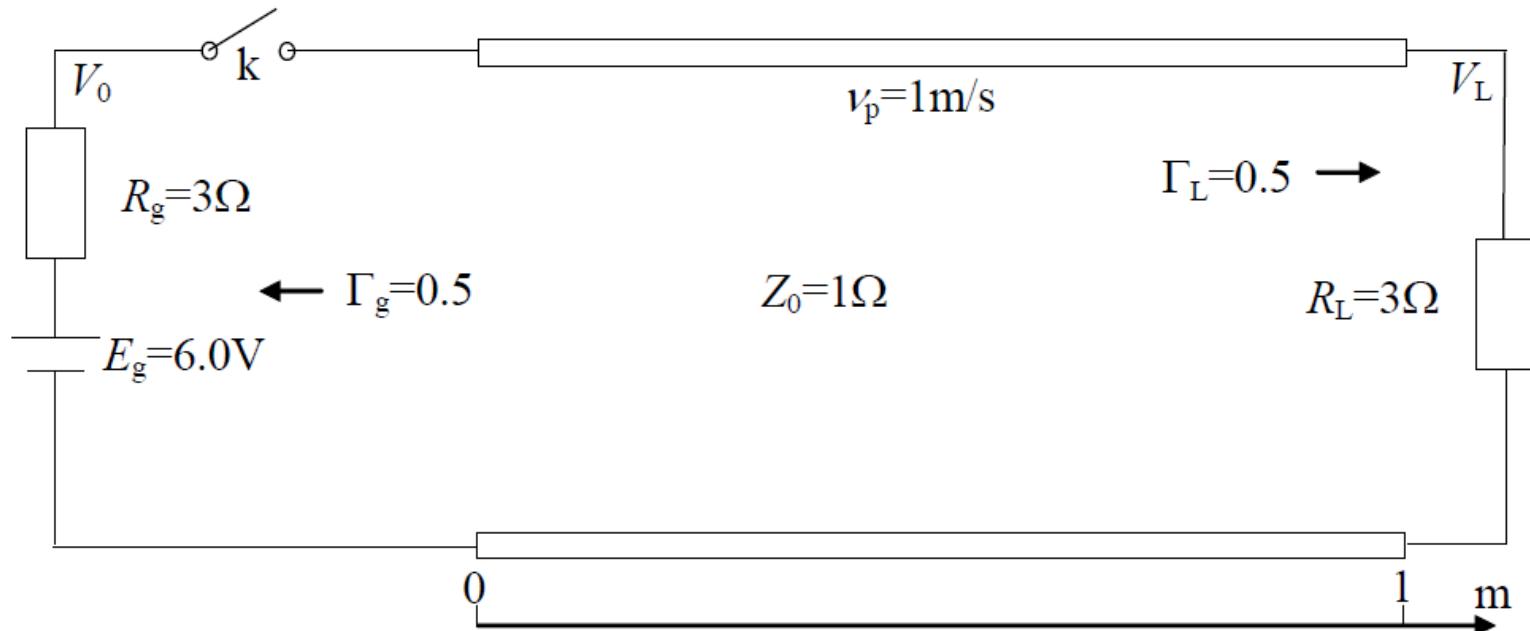
以上过程循环往复，信号不断衰减，在 $t \rightarrow \infty$ 时，电压衰减为 0。

在 $z=1\text{m}$ 处， $1 \leq t \leq 9\text{s}$ 的电压波形如下：



§ 2.8 传输线的时域分析

例 4. 如图所示, 令 $q = \Gamma_g = \Gamma_L$



$t=0s$ 时合上开关, $V_0 = E_g Z_0 / (R_g + Z_0) = 1.5V$;

$t=1s$ 时, $V_L = V_0$;

$t=2s$ 时, $V_L = V_0 + V_0 \Gamma_L$;

§ 2.8 传输线的时域分析

$t=3s$ 时, $V_L = V_0 + V_0\Gamma_L + V_0\Gamma_L\Gamma_g = V_0(1 + q + q^2)$;

$t=5s$ 时, $V_L = V_0 + V_0\Gamma_L + V_0\Gamma_L\Gamma_g + V_0\Gamma_L^2\Gamma_g + V_0\Gamma_L^2\Gamma_g^2 = V_0(1 + q + q^2 + q^3 + q^4)$;

$t=2n+1$ 时, $V_L = V_0(1 + q + q^2 + \dots + q^{2n})$;

由等比级数前 n 项之和为 $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, 可得

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{-a_1}{q - 1} = 2$ (式中 $a_1=1$, $q=0.5$), 所以稳态时, $V_L = 2V_0 = 3V$

从电路理论可知, 稳态时 $V_L = E_g R_L / (R_g + R_L) = 3V$

§ 2.8 传输线的时域分析

2、拉普拉斯（Laplace）变换法

把时域问题通过 Laplace 变换成频域问题来求解，然后利用 Laplace 反变换将频域解变成时域解。

(1)、时域方程→频域方程

$$L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = - \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\int_0^\infty L \frac{\partial i}{\partial t} e^{-st} dt + \int_0^\infty Rie^{-st} dt = - \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial z} e^{-st} dt$$

应用分部积分法 $\int \mu d\nu = \mu\nu - \int \nu d\mu$ ，令 $\mu = e^{-st}$ ， $\nu = Li$ ，则

$$\int_0^\infty L \frac{\partial i}{\partial t} e^{-st} dt = \left[Lie^{-st} \right]_0^\infty + Ls \int_0^\infty ie^{-st} dt, \text{ 其中 } I(z, s) = \int_0^\infty ie^{-st} dt \\ \triangleq -Li(z, 0) + LsI(z, s)$$

§ 2.8 传输线的时域分析

又令 $\frac{\partial U(z, s)}{\partial z} = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial z} e^{-st} dt$, 求偏导与积分互换, 则可得

$$(R + Ls)I(z, s) = -\frac{\partial U(z, s)}{\partial z} + Li(z, 0)$$

同理 $(G + Cs)U(z, s) = -\frac{\partial I(z, s)}{\partial z} + Cu(z, 0)$

将以上两个频域传输线方程作求导变换, 可得频域的二阶方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 I(z, s)}{\partial z^2} - (R + Ls)(G + Cs)I(z, s) = C \frac{\partial u(z, 0)}{\partial z} - L(G + Cs)i(z, 0) \\ \frac{\partial^2 U(z, s)}{\partial z^2} - (R + Ls)(G + Cs)U(z, s) = L \frac{\partial i(z, 0)}{\partial z} - C(R + Ls)u(z, 0) \end{cases}$$

§ 2.8 传输线的时域分析

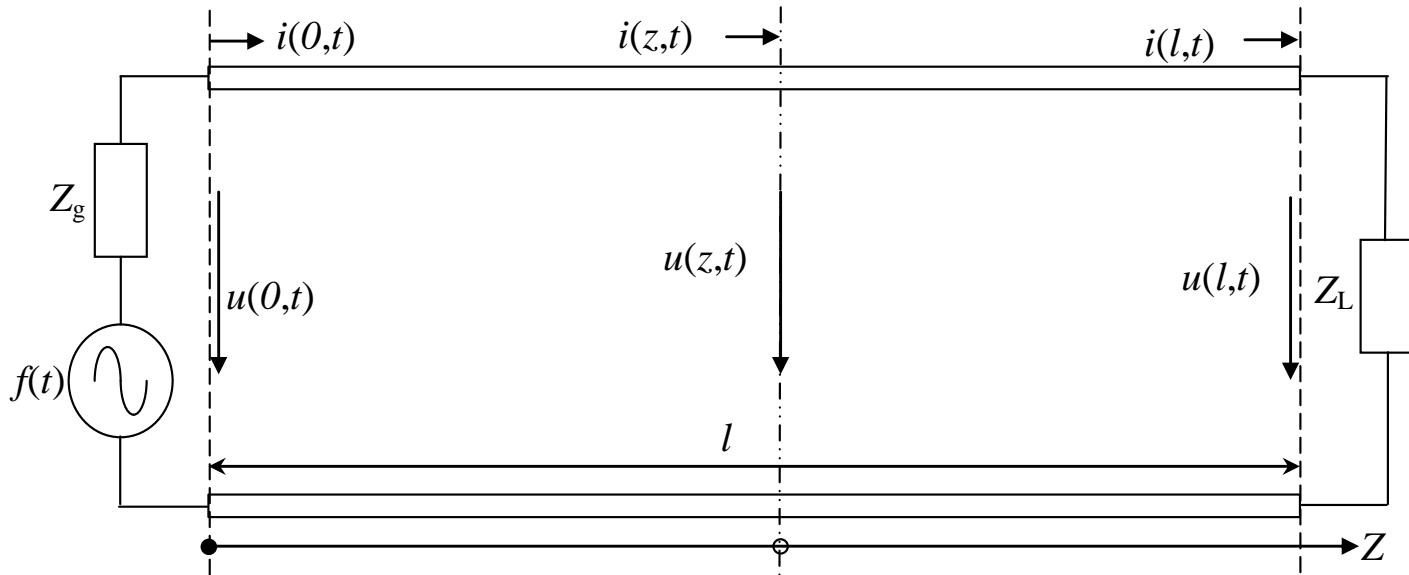
(2)、频域方程的解

令 $\gamma^2 = (R + Ls)(G + Cs)$ ，并假设信号 $f(t)$ 未加之前传输线处于静止状态，即 $u(z, 0) = 0$ ， $i(z, 0) = 0$ ， $\frac{\partial u(z, 0)}{\partial z} = \frac{\partial i(z, 0)}{\partial z} = 0$ ，则

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \gamma^2 U = 0 \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \gamma^2 I = 0 \end{cases}, \text{ 解为} \begin{cases} U(z, s) = A_1 e^{-\gamma z} + B_1 e^{\gamma z} \\ I(z, s) = (A_1 e^{-\gamma z} - B_1 e^{\gamma z}) / Z_0 \end{cases}$$

式中 $Z_0(s) = \sqrt{(R + Ls)/(G + Cs)}$ 。

§ 2.8 传输线的时域分析



若已知 Z_L 、 Z_g 和 $f(t)$ ，由图可得

$$\begin{cases} Z_g \cdot i(0,t) = f(t) - u(0,t) \\ Z_L \cdot i(l,t) = u(l,t) \end{cases}$$

经 Laplace 变换成为

$$\begin{cases} Z_g I(0,s) = F(s) - U(0,s) \\ Z_L I(l,s) = U(l,s) \end{cases},$$

其中 $U(0,s) = \int_0^\infty u(0,t)e^{-st}dt$, $I(0,s) = \int_0^\infty i(0,t)e^{-st}dt$

$U(l,s) = \int_0^\infty u(l,t)e^{-st}dt$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ 。

§ 2.8 传输线的时域分析

$$\text{又由 } U(0,s) = A_1 + B_1$$

$$I(0,s) = (A_1 - B_1) / Z_0,$$

$$U(l,s) = A_1 e^{-\gamma l} + B_1 e^{\gamma l} \quad I(l,s) = (A_1 e^{-\gamma l} - B_1 e^{\gamma l}) / Z_0$$

6个未知数和6个方程可解出 A_1 、 B_1 、 $U(0,s)$ 、 $U(l,s)$ 、 $I(0,s)$ 、 $I(l,s)$ 。

频域的电压和电流的解为

$$\begin{cases} U(z,s) = \frac{F(s)Z_0(s)}{Z_g + Z_0(s)} \cdot \frac{e^{-\gamma z} + \Gamma_L(s)e^{-2\gamma l}e^{rz}}{1 - \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)e^{-2\gamma l}} \\ I(z,s) = \frac{F(s)}{Z_g + Z_0(s)} \cdot \frac{e^{-\gamma z} - \Gamma_L(s)e^{-2\gamma l}e^{rz}}{1 - \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)e^{-2\gamma l}} \end{cases}$$

$$\text{式中 } \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0(s)}{Z_g + Z_0(s)}, \quad \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0(s)}{Z_L + Z_0(s)}.$$

§ 2.8 传输线的时域分析

根据级数展开式 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

令 $x = \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)e^{-2\gamma l}$ 得

$$(1 - \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)e^{-2\gamma l})^{-1} = 1 + \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)e^{-2\gamma l} + \Gamma_g^2(s)\Gamma_L^2(s)e^{-4\gamma l} + \dots$$

则电压和电流的解成为

$$\begin{cases} U(z, s) = \frac{F(s)Z_0(s)}{Z_g + Z_0(s)} [e^{-\gamma z} + \Gamma_L(s)e^{-\gamma(2l-z)} + \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)e^{-\gamma(2l+z)} + \dots] \\ I(z, s) = \frac{F(s)}{Z_g + Z_0(s)} [e^{-\gamma z} - \Gamma_L(s)e^{-\gamma(2l-z)} + \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)e^{-\gamma(2l+z)} + \dots] \end{cases}$$

可见线上任一点的瞬态电压是由一个入射波和一系列反射波的迭加所组成的，这些反射波与初始的入射波的波形相同，但是幅度逐渐减小，相位逐渐滞后。

§ 2.8 传输线的时域分析

(3)、Laplace 反变换得到时域解

将频域解做 Laplace 反变换，即 $\begin{cases} U(z,s) \Rightarrow u(z,t) \\ I(z,s) \Rightarrow i(z,t) \end{cases}$ ，这里主要用到的反变换公式为

$$\ell^{-1}[e^{-as} F(s)] = \begin{cases} f(t-a) & t \geq a \\ 0 & 0 \leq t < a \end{cases}$$



本章结束!



第三章 规则金属波导

Regular Metallic Waveguides

中国科学技术大学
电子工程与信息科学系

本章内容

- § 3.1 规则波导基础理论
- § 3.2 矩形金属波导
- § 3.3 圆形金属波导
- § 3.4 同轴线
- § 3.5* 波导本征模的特性
- § 3.6 波导的激励
- § 3.7 波导的损耗问题
- § 3.8* 广义传输线理论

§ 3.1 规则波导基础理论

一、规则波导中的一些基本概念

定义 1：导波系统（Guided Wave System）

用以约束或引导电磁波能量定向传输的结构，简称波导（Waveguide）。

定义 2：导行波（Guided Wave）

电磁能量的全部或绝大部分受导波系统中的导体或介质的边界约束，
在有限横截面内沿确定方向（一般为轴向）传输的电磁波，简称导波。

定义 3：规则波导（Regular Waveguide）

无限长的笔直波导，其横截面形状和尺寸、波导结构材料、波导内媒质分布等沿轴向（又称纵向）是不变的。

§ 3.1 规则波导基础理论

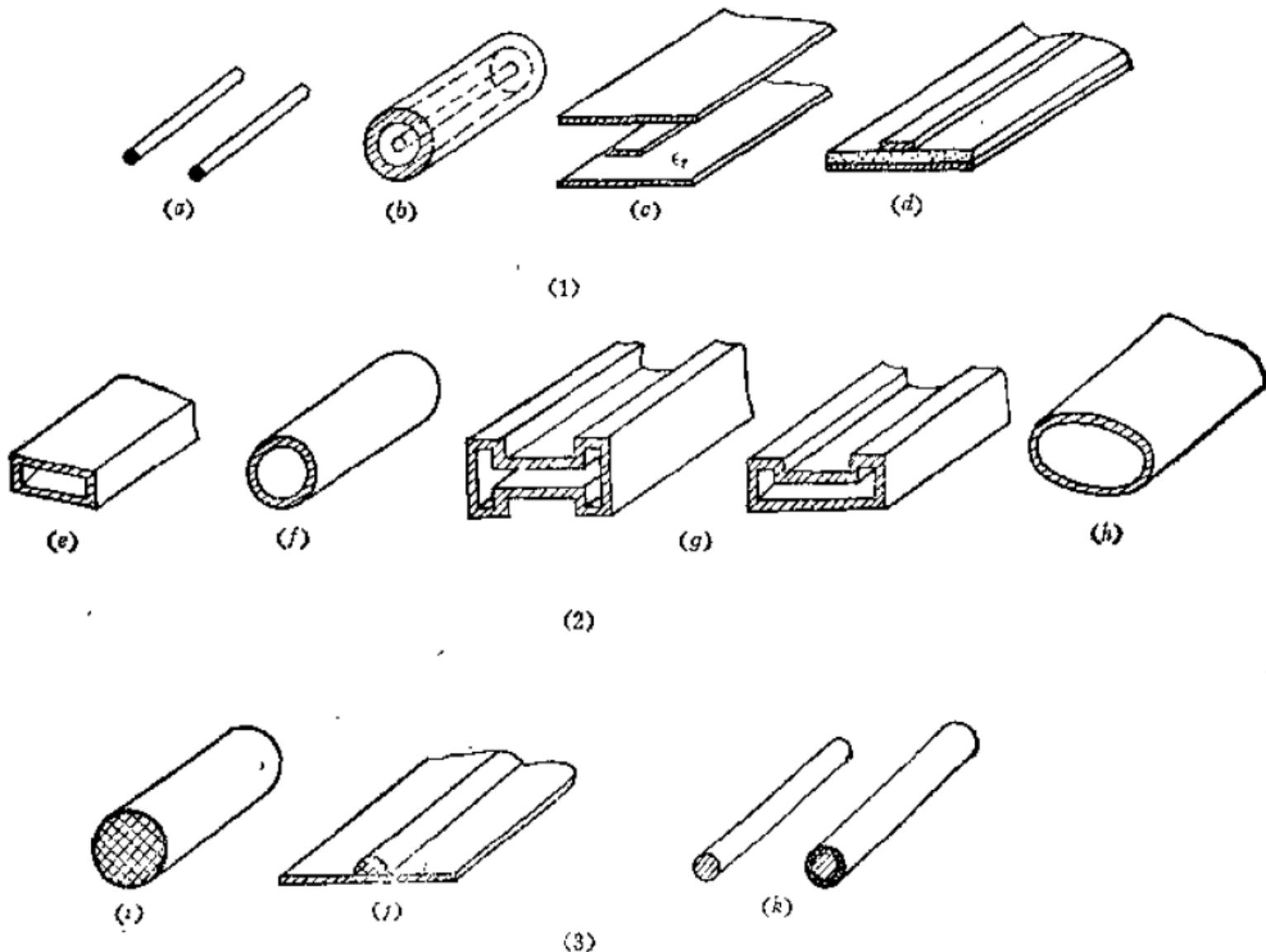


图2.1-1 传输线的种类

(1) TEM模与准TEM模传输线; (2) 金属波导传输线; (3) 表面波传输线。

- (a) 平行双导线; (b) 同轴线; (c) 带状线; (d) 微带; (e) 矩形波导; (f) 圆形波导;
(g) 脊形波导; (h) 椭圆波导; (i) 介质波导; (j) 镜象线; (k) 单根表面波传输线。

§ 3.1 规则波导基础理论

导波理论的基本问题

从数学上来说，规则波导中的导波问题（即有限空间电磁场的边值问题）都可归结为偏微分方程的本征值问题，其求解主要是确定对应特定边界条件的本征值 (eigenvalue) 和本征函数 (eigenfunction)。

从物理上来说，规则波导中的导波问题包括两个方面：

1、导波理论的横向问题：导波的模式（简称导模，也称波型、正规模、本征模等）及其在规则波导横截面内的场结构，它与规则波导的具体横截面形状尺寸有关，体现了不同规则波导的“个性”。

2、导波理论的纵向问题：导波沿规则波导轴向的传输特性，不同的规则波导在此问题上具有一些“共性”（广义传输线理论）。

规则波导基础理论

§ 3.1

二、规则波导的导波场分析

分析的出发点：无源形式的（频域）麦克斯韦方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{array} \right.$$

条件：规则波导的导体是理想的；波导内介质为均匀、无耗和各向同性的；远离场源（无电流和电荷）；稳态情况，电场和磁场皆为时谐场。

以上的第二式取旋度，并利用第一式得

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \nabla \times \vec{H} = \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = k^2 \vec{E}$$

由矢量恒等式 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ ，可得

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

以上两式相等可得

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

同理可得

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

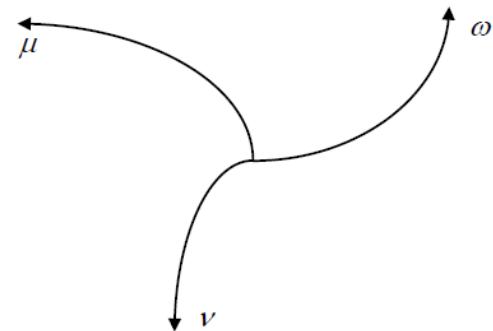
以上两个齐次方程称为矢量 Helmholtz 方程，即波动方程。

规则波导基础理论

广义正交曲线坐标系 (μ, ν, ω)

坐标轴:

$\mu, \nu, \omega;$



坐标增量:

$d\mu, d\nu, d\omega;$

长度微分单元:

$dl_1, dl_2, dl_3;$

度量系数 (拉姆系数):

$h_1, h_2, h_3,$

以上三者的关系:

$dl_1 = h_1 d\mu, dl_2 = h_2 d\nu, dl_3 = h_3 d\omega.$

几种常用坐标系的度量系数:

坐标系	h_1	h_2	h_3
直角坐标系 (x, y, z)	1	1	1
圆柱坐标系 (r, φ, z)	1	r	1
球坐标系 (r, θ, φ)	1	r	$r \sin \theta$
椭圆柱面系 (ξ, η, z)	$c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}$	$c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}$	1

注: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 为椭圆半焦距。

规则波导的坐标系选取

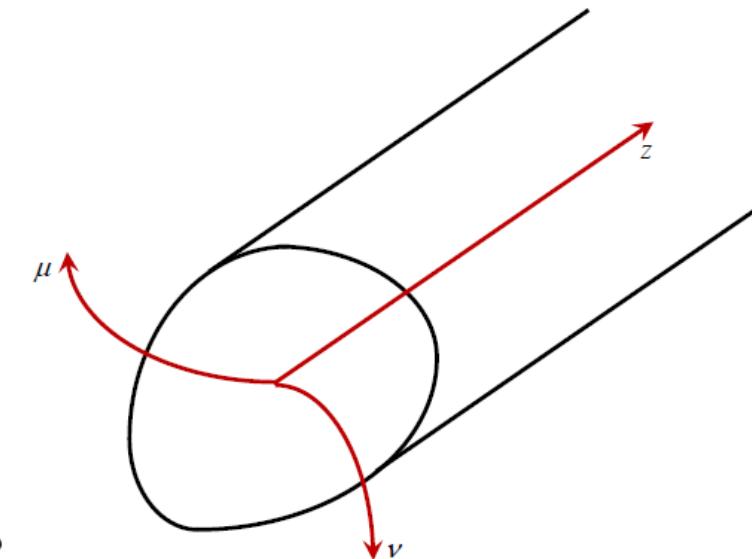
根据规则波导的定义，其横截面形状和尺寸、结构材料、媒质分布等沿轴向不变，也就是与轴向无关。据此可以推断：电磁场在横截面上的分布特性应该和其所在的轴向位置无关。

因此，可以建立如图所示的广义正交柱坐标系 (μ , ν , z)，满足：

$$\frac{\partial h_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial h_2}{\partial z} = 0, \quad h_3 = 1$$

或者 $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h_1}{h_2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (h_1 h_2) = 0, \quad h_3 = 1$

以上两种条件都表明 z 轴与另两个轴是无关的。



规则波导基础理论

§ 3.1

在广义正交柱坐标系下，可将电场 \vec{E} 和磁场 \vec{H} 进行如下分解：

$$\vec{E}(\mu, \nu, z) = \vec{E}_t(\mu, \nu, z) + \vec{i}_z E_z(\mu, \nu, z)$$

$$\vec{H}(\mu, \nu, z) = \vec{H}_t(\mu, \nu, z) + \vec{i}_z H_z(\mu, \nu, z)$$

t 表示横向 (transverse)。同样，算符 ∇ 和 ∇^2 也可分解为：

$$\nabla = \nabla_t + \nabla_z, \text{ 其中 } \nabla_t = \vec{i}_\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \mu} + \vec{i}_\nu \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \nu}, \quad \nabla_z = \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \nabla_z^2, \text{ 其中 } \nabla_t^2 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right], \quad \nabla_z^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

进而可得

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \nabla^2 (\vec{E}_t + \vec{i}_z E_z) = \nabla^2 \vec{E}_t + \vec{i}_z \nabla^2 E_z \\ \nabla^2 \vec{H} = \nabla^2 (\vec{H}_t + \vec{i}_z H_z) = \nabla^2 \vec{H}_t + \vec{i}_z \nabla^2 H_z \end{cases}$$

由此可将矢量 Helmholtz 方程分解为 一个矢量方程和一个标量方程：

$$\text{矢量方程} \begin{cases} \nabla^2 \vec{E}_t + k^2 \vec{E}_t = 0 \\ \nabla^2 \vec{H}_t + k^2 \vec{H}_t = 0 \end{cases}, \quad \text{标量方程} \begin{cases} \nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \\ \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \end{cases}$$

§ 3.1 规则波导基础理论

标量方程的分离变量法求解

令 $\begin{cases} E_z(\mu, \nu, z) = E_z(t, z) = E_z(t)Z(z) \\ H_z(\mu, \nu, z) = H_z(t, z) = H_z(t)Z(z) \end{cases}$ ，代入标量电场公式可得

$$\frac{\nabla_t^2 E_z(t)}{E_z(t)} + \frac{\nabla_z^2 Z(z)}{Z(z)} = -k^2$$

此式成立的条件是左边两项应分别等于某常数。

这里令 $\frac{\nabla_t^2 E_z(t)}{E_z(t)} = -k_c^2$, $\frac{\nabla_z^2 Z(z)}{Z(z)} = \gamma^2$, 可得

1、色散关系式: $k^2 = k_c^2 - \gamma^2 = k_c^2 + \beta^2$ $\gamma = j\beta$ (注意波数的分解)

2、轴向波动方程: $\nabla_z^2 Z(z) - \gamma^2 Z(z) = 0$

通解为 $Z(z) = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z} = A_1 e^{-\gamma z}$, 因规则波导无限长, 所以 $A_2=0$,

该解描述了波导的传播特性, 与传输线解是相似的。

3、本征值方程: $\nabla_t^2 E_z(t) + k_c^2 E_z(t) = 0$ k_c 称为横向(截止)波数

k_c 是特定边界条件下的本征值, 方程解包含了横向场的本征函数。10

§ 3.1 规则波导基础理论

同样我们可以得到与磁场相对应的以上三个方程，前两个与上面相同，而磁场的本征值方程为

$$\nabla_t^2 H_z(t) + k_c^2 H_z(t) = 0$$

据此，电场 $E_z(\mu, \nu, z)$ 和磁场 $H_z(\mu, \nu, z)$ 可以表示为

$$\begin{cases} E_z(\mu, \nu, z) = A_1 E_z(t) e^{-\gamma z} \\ H_z(\mu, \nu, z) = B_1 H_z(t) e^{-\gamma z} \end{cases}$$

重要推论：由 E_z 和 H_z 的形式可以推断，规则波导中时谐电磁场的各个场分量随 z 的变化只能是 $e^{-\gamma z}$ 的形式，不然沿 z 方向传播时电磁场结构（特别是横向场结构）将发生变化，这在横截面特性不随 z 变化的规则波导中是不可能的，所以电磁场各分量对 z 的偏导为 $\partial/\partial z = -\gamma$ 。

§ 3.1 规则波导基础理论

将有关 E_z 和 H_z 的本征值方程统一给出：

$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z(t) + k_c^2 E_z(t) = 0 \\ \nabla_t^2 H_z(t) + k_c^2 H_z(t) = 0 \end{cases}$$

以上方程的求解必须结合 具体的规则波导，以便确定：

- 1、横向坐标系 (μ 、 ν)。
- 2、具体的边界条件。

金属波导（由理想导体构成）的边界条件：

根据理想导体的特性，即 $\vec{n} \times \vec{E}|_{\Omega} = 0$ （导体表面的切向电场为零），
 $\vec{n} \cdot \vec{H}|_{\Omega} = 0$ （导体表面的法向磁场为零），其中 Ω 为导体表面， \vec{n} 为导体表面法线方向的单位矢量。进一步可得

$$E_z|_{\Omega} = 0 \quad (\text{E_z 是规则波导内壁的切向分量})$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial \vec{n}} \right|_{\Omega} = 0 \quad (\text{规则波导内壁的 H_z 对法线方向的偏导为零})$$

§ 3.1 规则波导基础理论

三、纵向场法 (Longitudinal-field Method)

纵向场法能够建立规则波导中横向场分量与纵向场之间的关系，
主要推导过程如下：

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\nabla_t + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\vec{E}_t + \vec{i}_z E_z \right) = \nabla_t \times \vec{E}_t + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \times \vec{E}_t + \nabla_t \times \vec{i}_z E_z + \vec{i}_z \times \vec{i}_z \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

第一项的矢量方向为 \vec{i}_z (纵向)，第二项的矢量方向为 \vec{i}_t (横向)，第三项的矢量方向为 \vec{i}_t (横向)，第四项为 **0**。

所以对上式取横向部分为

$$(\nabla \times \vec{E})_t = \nabla_z \times \vec{E}_t + \nabla_t \times \vec{i}_z E_z \triangleq -j\omega\mu\vec{H}_t \quad (1)$$

同理可得 $(\nabla \times \vec{H})_t = \nabla_z \times \vec{H}_t + \nabla_t \times \vec{i}_z H_z \triangleq j\omega\epsilon\vec{E}_t$ (2)

§ 3.1 规则波导基础理论

由(1)式第二个等号两边同乘以 $j\omega\varepsilon$ 得

$$j\omega\varepsilon\nabla_z \times \vec{E}_t = j\omega\varepsilon(-j\omega\mu\vec{H}_t - \nabla_t \times \vec{i}_z E_z) = \omega^2\mu\varepsilon\vec{H}_t - j\omega\varepsilon\nabla_t \times \vec{i}_z E_z$$

由(2)式第二个等号两边同左叉乘 ∇_z 得

$$j\omega\varepsilon\nabla_z \times \vec{E}_t = \nabla_z \times \nabla_z \times \vec{H}_t + \nabla_z \times \nabla_t \times \vec{i}_z H_z$$

以上两式相等并整理得

$$k^2\vec{H}_t = j\omega\varepsilon\nabla_t \times \vec{i}_z E_z + \nabla_z \times \nabla_z \times \vec{H}_t + \nabla_z \times \nabla_t \times \vec{i}_z H_z \quad (3)$$

由矢量公式 $\nabla \times (\psi \vec{A}) = \nabla \psi \times \vec{A} + \psi \nabla \times \vec{A}$, 可得

$$\nabla_t \times \vec{i}_z E_z = \nabla_t E_z \times \vec{i}_z + E_z \nabla_t \times \vec{i}_z = -\vec{i}_z \times \nabla_t E_z$$

由矢量公式 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$, 可得

$$\nabla_z \times \nabla_z \times \vec{H}_t = \nabla_z (\nabla_z \cdot \vec{H}_t) - (\nabla_z \cdot \nabla_z) \vec{H}_t = -\gamma^2 \vec{H}_t$$

$$\nabla_z \times \nabla_t \times \vec{i}_z H_z = \nabla_t (\nabla_z \cdot \vec{i}_z H_z) - \vec{i}_z H_z (\nabla_z \cdot \nabla_t) = -\gamma \nabla_t H_z$$

以上 3 个式子代入(3)式得

$$\vec{H}_t = -\frac{1}{k_c^2} \left(j\omega \varepsilon \vec{i}_z \times \nabla_t E_z + \gamma \nabla_t H_z \right)$$

由对偶原理得 ($\varepsilon \rightarrow -\mu$): $\vec{E}_t = \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega \mu \vec{i}_z \times \nabla_t H_z - \gamma \nabla_t E_z \right)$

当 $\gamma = j\beta$ 时, 有

$$\begin{cases} \vec{H}_t = -\frac{1}{k_c^2} \left(j\omega \varepsilon \vec{i}_z \times \nabla_t E_z + j\beta \nabla_t H_z \right) \\ \vec{E}_t = -\frac{1}{k_c^2} \left(-j\omega \mu \vec{i}_z \times \nabla_t H_z + j\beta \nabla_t E_z \right) \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} E_\mu = -\frac{1}{k_c^2} \left(\frac{j\omega \mu}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial \nu} + \frac{j\beta}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial \mu} \right) \\ E_\nu = -\frac{1}{k_c^2} \left(\frac{-j\omega \mu}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial \mu} + \frac{j\beta}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial \nu} \right) \\ H_\mu = -\frac{1}{k_c^2} \left(\frac{-j\omega \varepsilon}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial \nu} + \frac{j\beta}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial \mu} \right) \\ H_\nu = -\frac{1}{k_c^2} \left(\frac{j\omega \varepsilon}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial \mu} + \frac{j\beta}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial \nu} \right) \end{cases}$$

四、规则波导中的导波模式

规则波导中的电磁场都是能量有限的（即数学上的平方可积），因此前述方程的解（即利用标量波动方程得到的 E_z 和 H_z 的解，以及利用纵向场法得到的 \vec{E}_t 和 \vec{H}_t 的解）描述了规则波导中可以独立存在的时谐电磁场分布，称之为导波模式（简称导模），也称本征模（eigenmode）。

导模的特点：①. 导模是离散的，且是无穷多的，呈现为离散谱；在给定工作频率下，每个导模具有唯一的传播常数；②. 导模之间是相互正交，彼此独立和互不耦合；③. 导模在横截面上呈驻波分布，且是完全确定的，该分布与频率、与横截面所在轴向位置都无关；④. 导模具有截止特性（截止时不能在规则波导中进行能量传输）。

有关“独立存在”场的理论说明

§ 3.1

规则波导基础理论

若规则波导内传输两个波分别为 \vec{E}_1 和 \vec{H}_1 、 \vec{E}_2 和 \vec{H}_2 ，它们的横向场分别为 \vec{E}_{t1} 和 \vec{H}_{t1} 、 \vec{E}_{t2} 和 \vec{H}_{t2} ，则总的横向场可以表示为 $\vec{E}_t = \vec{E}_{t1} + \vec{E}_{t2}$ 和 $\vec{H}_t = \vec{H}_{t1} + \vec{H}_{t2}$ 。规则波导中的传输功率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_s \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_s (\vec{E}_t + i_z E_z) \times (\vec{H}_t + i_z H_z)^* \cdot d\vec{S} \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_s [(\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) + (\vec{E}_t \times i_z H_z^*) + (i_z E_z \times \vec{H}_t^*) + (i_z E_z \times i_z H_z^*)] \cdot d\vec{S} \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_s \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \cdot d\vec{S} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_s (\vec{E}_{t1} + \vec{E}_{t2}) \times (\vec{H}_{t1} + \vec{H}_{t2})^* \cdot d\vec{S} \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_s \vec{E}_{t1} \times \vec{H}_{t1}^* \cdot d\vec{S} + \int_s \vec{E}_{t2} \times \vec{H}_{t2}^* \cdot d\vec{S} + \int_s \vec{E}_{t1} \times \vec{H}_{t2}^* \cdot d\vec{S} + \int_s \vec{E}_{t2} \times \vec{H}_{t1}^* \cdot d\vec{S} \right] \\ &= P_1 + P_2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_s \vec{E}_{t1} \times \vec{H}_{t2}^* \cdot d\vec{S} + \int_s \vec{E}_{t2} \times \vec{H}_{t1}^* \cdot d\vec{S} \right] \end{aligned}$$

结论：①. 由 $P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_s \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \cdot d\vec{S} \right]$ 可知，传输功率由横向场来决定。

②. 若满足 $\int_s \vec{E}_{t1} \times \vec{H}_{t2}^* \cdot d\vec{S} = 0$ 和 $\int_s \vec{E}_{t2} \times \vec{H}_{t1}^* \cdot d\vec{S} = 0$ ，这两个波都是独立存在，否则称为耦合波。

§ 3.1 规则波导基础理论

规则波导中的导模分类

1、TEM 波：

特征是 $E_z = 0$ 和 $H_z = 0$ ，其电场和磁场都分布在与传播方向垂直的横截面内。从纵向场法公式来看，因为 TEM 波的 \vec{E}_t 和 \vec{H}_t 不能为 0，所以必须有 $k_c=0$ （此时 $k=\beta$ ），可见 TEM 波是非本征值问题。

TEM 波存在于由双导体（例如双导线、同轴线等）或多导体（例如带状线等）构成的导波系统，故又称为传输线模。为什么？

由麦氏方程横纵分量的分解，可得 $\begin{cases} \nabla_t \times \vec{E}_t = 0 \\ \nabla_t \times \vec{H}_t = 0 \end{cases}$ ，可知 TEM 波必然是有位无旋场，即为

$\begin{cases} \vec{E}_t = U(z) \nabla_t \Phi(\mu, \nu) \\ \vec{H}_t = I(z) \nabla_t \Psi(\mu, \nu) \end{cases}$ ，具有二维静态场的特征。

由 $\begin{cases} \nabla_t \cdot \vec{E}_t = 0 \\ \nabla_t \cdot \vec{H}_t = 0 \end{cases}$ 可得 Laplace 方程 $\begin{cases} \nabla_t^2 \Phi = 0 \\ \nabla_t^2 \Psi = 0 \end{cases}$ ，可结合边界条件求解。

经推导可得： $\vec{E}_t = -\eta \vec{i}_z \times \vec{H}_t$ ，波阻抗 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 。

这里的 TEM 波和自由空间平面波完全一样吗？

§ 3.1 规则波导基础理论

2、TE 波 (H 波) 和 TM 波 (E 波):

TE 波的特征是 $E_z = 0$ 、 $H_z \neq 0$ ，电场分量都在横截面内。

本征值方程 $\left\{ \begin{array}{l} \nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial \vec{n}} \Big _{\Omega} = 0 \end{array} \right.$	纵向场法公式	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z \\ \vec{E}_t = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \vec{i}_z \times \nabla_t H_z \end{array} \right.$
---	--------	---

横向场关系: $\vec{E}_t = -\frac{j\omega\mu}{\gamma} \vec{i}_z \times \vec{H}_t = -Z_H \vec{i}_z \times \vec{H}_t$, TE 波的波阻抗 $Z_H = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$ 。

TM 波的特征是 $E_z \neq 0$ 、 $H_z = 0$ ，磁场分量都在横截面内。

本征值方程 $\left\{ \begin{array}{l} \nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \\ E_z \Big _{\Omega} = 0 \end{array} \right.$	纵向场法公式	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z \\ \vec{H}_t = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \vec{i}_z \times \nabla_t E_z \end{array} \right.$
---	--------	---

横向场关系: $\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \vec{i}_z \times \vec{H}_t = -Z_E \vec{i}_z \times \vec{H}_t$, TM 波的波阻抗 $Z_E = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon}$ 。

说明: TE 波和 TM 波可存在于空心的金属波导管, 故又称为波导模式。

因 $k_c^2 > 0$, 波导的横向为调和(振动)解形, 相速大于光速, 称为快波。 19

3、混合波 (Hybrid Wave):

特征是 **6个电磁场分量都不为零**，可以视为是 **TE 和 TM 的迭加**，可分为 **HE 波 ($H_z > E_z$)** 和 **EH ($E_z > H_z$)** 波两类。

本征值方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_{\Omega} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \\ E_z \Big|_{\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

纵向场法公式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_t = \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega \mu \vec{i}_z \times \nabla_t H_z - \gamma \nabla_t E_z \right) \\ \vec{H}_t = -\frac{1}{k_c^2} \left(j\omega \epsilon \vec{i}_z \times \nabla_t E_z + \gamma \nabla_t H_z \right) \end{array} \right.$$

说明：混合波可存在于**电抗壁**导行系统中，例如介质波导、光纤等。因 $k_c^2 < 0$ ，波导横向为**衰减解形**，其场被约束在波导表面附近，故又称**表面波 (surface wave)**。其相速小于光速，称为**慢波**。

规则波导基础理论

§ 3.1

五、规则波导的一般传输特性

1、工作波长

工作波长 λ 是均匀平面波在无限大、均匀、无耗、各向同性的介质 ($\mu=\mu_0$, $\epsilon=\epsilon_r\epsilon_0$) 中传播的波长。它与工作频率 f 的关系为 $\lambda=v/f$, v 为介质中的光速。

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$$

2、截止波长

截止波长 λ_c 是表征导模和波导结构特征的一个重要参数。

由色散关系式 ($\gamma=j\beta$, 无损):

$$k^2 = k_c^2 + \beta^2, \text{ 可得 } \beta^2 = k^2 - k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - k_c^2$$

①. 当 $k_c^2 < \omega^2 \mu \epsilon$ 时, β 显然为实数, 则 $e^{-j\beta z}$ 为波动因子, 此时波导中的电磁波处于传输状态, 这种导模称为传输模。

②. 当 $k_c^2 > \omega^2 \mu \epsilon$ 时, β 为虚数, 则 $e^{-j\beta z}$ 为衰减因子, 此时波导中的电磁波处于截止状态 (很快衰减, 无传播), 这种导模称为消失波。

规则波导基础理论

§ 3.1

可见， $k_c^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$ （此时 $\beta=0$ ）是规则波导传输和衰减之间的临界状态，此时电磁波沿 z 方向无传播，仅在横截面内振荡。

$$k_c^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \Rightarrow k_c = 2\pi f_c \sqrt{\mu \varepsilon} \Rightarrow f_c \sqrt{\mu \varepsilon} = k_c / 2\pi \Rightarrow f_c / v = k_c / 2\pi \Rightarrow \lambda_c = 2\pi / k_c$$

（以上推导注意： f_c 和 λ_c 之间仍然是由无限大介质(μ, ε)中的光速 v 来联系的。）

讨论：由 $k_c^2 \geq \omega^2 \mu \varepsilon$ ，规则波导处于截止状态可知

①. 当某导模的工作波长 $\lambda \geq \lambda_c$ 时，即 $f \leq f_c$ 时，该导模将被截止。

②. 当某导模的工作波长 $\lambda < \lambda_c$ 时，即 $f > f_c$ 时，该导模将传输，

所以，规则波导具有高通特性。

3、波导波长（相波长）

波导波长 λ_g ：是与规则波导中沿纵向传播的等相位面相联系的波长。

因为 $\beta^2 = k^2 - k_c^2$ ，并且 $\lambda_g = 2\pi/\beta$ ，可得

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

§ 3.1 规则波导基础理论

4、相速度和群速度

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - (k_c/k)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

当波导处于传输状态（即 $(\lambda/\lambda_c) < 1$ ）时，显然 $v_p > v$ ，这表示相位传播速度大于相同介质中的光速，是一种视在速度。

群速 v_g 是许多频率组成的波群的移动速度，代表能量的传播速度。

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = v \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$$

显然 $v_g < v$ ，并且 $v_p \cdot v_g = v^2$ 。

注： $\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$ 称为波导因子或者色散因子，反映了波导的色散。

§ 3.1 规则波导基础理论

5、波阻抗

定义：横向电场与横向磁场之比。（复振幅之比，右手螺旋关系）

$$Z = \frac{E_\mu}{H_\nu} = -\frac{E_\nu}{H_\mu}$$

TE 波： $\vec{E}_t = -\frac{j\omega\mu}{\gamma} \vec{i}_z \times \vec{H}_t = -Z_H \vec{i}_z \times \vec{H}_t$, $\therefore Z_H = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$ 。



TM 波： $\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{j\omega\varepsilon} \vec{i}_z \times \vec{H}_t = -Z_E \vec{i}_z \times \vec{H}_t$, $\therefore Z_E = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}$ 。

当 $\gamma = j\beta$ 时， $Z_H = \omega\mu/\beta$ 和 $Z_E = \beta/\omega\varepsilon$ 都是实数。

6、传输功率

坡印廷矢量平均值的复数形式为 $\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$ 。

传输功率为 $P = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\int_S \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \cdot d\vec{S} \right]$, S 为波导的横截面。

§ 3.1 规则波导基础理论

对于 TE 波

$$\begin{aligned} P_H &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_s \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \cdot d\vec{S} \right] \\ &= \frac{1}{2} Z_H \operatorname{Re} \left[\int_s (-\vec{i}_z \times \vec{H}_t) \times \vec{H}_t^* \cdot d\vec{S} \right] \\ &= \frac{1}{2} Z_H \operatorname{Re} \left[\int_s \vec{H}_t^* \times (\vec{i}_z \times \vec{H}_t) \cdot d\vec{S} \right] \\ &= \frac{1}{2} Z_H \operatorname{Re} \left[\int_s \vec{i}_z (\vec{H}_t^* \cdot \vec{H}_t) \cdot d\vec{S} \right] \\ &= \frac{Z_H}{2} \int_s |\vec{H}_t|^2 dS \end{aligned}$$

(注：推导使用了 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ ，并且 \vec{i}_z 和 $d\vec{S}$ 同向)

对于 TM 波，同理可得

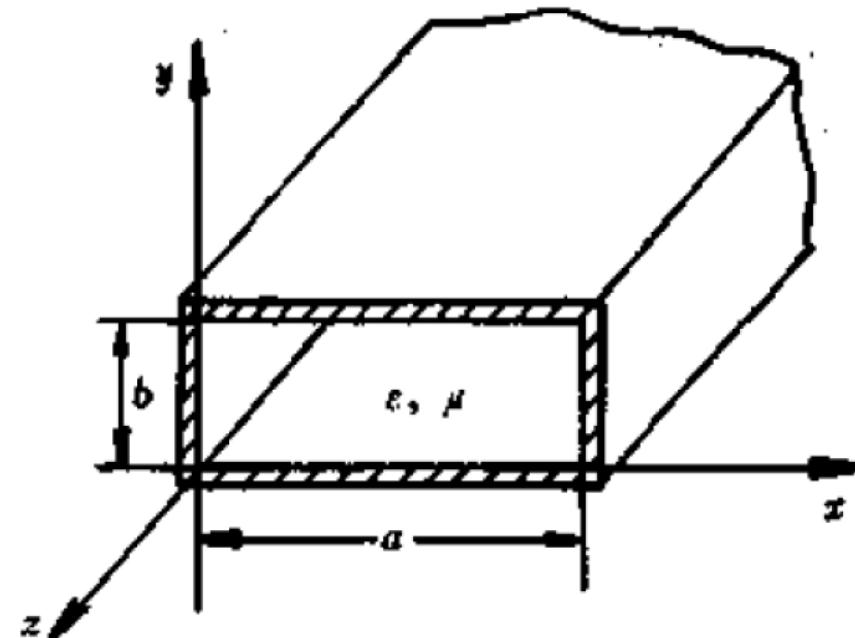
$$P_E = \frac{Y_E}{2} \int_s |\vec{E}_t|^2 dS .$$

矩形金属波导

§ 3.2

矩形金属波导 (Rectangular Metallic Waveguide):

横截面形状为矩形的金属波导管, 它将被导引的电磁波完全封闭在金属管内沿其轴向传输。它是最早使用、最广泛应用的导行系统之一, 特别是在高功率系统、毫米波系统和精密测试设备中。



由于仅有一个导体, TEM类型的导模不能传播, 其导模可分成TE型和TM型两类, 且存在无穷多个模式。如图所示, a 、 b 分别表示内壁的宽边和窄边尺寸 (通常 $a>b$), 波导内一般充以空气。管壁材料一般用铜、铝等金属构成, 有时内壁上镀有金或银。

§ 3.2 矩形金属波导

一、矩形波导的导模

根据矩形波导的结构特点，采用直角坐标系 (x, y, z) 。

H_z 的本征值方程及其边界条件	E_z 的本征值方程及其边界条件
$\begin{cases} \nabla_t^2 H_z(x, y) + k_c^2 H_z(x, y) = 0 \\ \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial \vec{n}} \Big _{\substack{x=0, a \\ y=0, b}} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z(x, y) + k_c^2 E_z(x, y) = 0 \\ E_z(x, y) \Big _{\substack{x=0, a \\ y=0, b}} = 0 \end{cases}$
求解得到矩形波导的 TE 型导模	求解得到矩形波导的 TM 型导模

其中 $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial H_z(x, y)}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y}$ 。

由于以上两个方程具有完全相同的形式，令 $M_z(x, y)$ 来统一代表 $E_z(x, y)$ 和 $H_z(x, y)$ ，方程的求解使用分离变量法。

矩形金属波导

$M_z(x, y)$ 的求解

令 $M_z(x, y) = X(x)Y(y)$ ，则由方程 $\frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2} = -k_c^2 M_z$ 可得

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -k_c^2$$

要使此式成立，则左边两项应分别等于某个常数。

令 $\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k_x^2$ 和 $\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -k_y^2$ ，可得两个方程

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0, \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0, \quad \text{且 } k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

以上两个二阶常系数微分方程的通解为 $\begin{cases} X(x) = A \cos(k_x x + \phi_x) \\ Y(y) = B \cos(k_y y + \phi_y) \end{cases}$ ，则

$$M_z(x, y) = M_0 \cos(k_x x + \phi_x) \cos(k_y y + \phi_y)$$

其中， $M_0 = A \cdot B$ 是由激励情况确定的常数， k_x 、 ϕ_x 、 k_y 、 ϕ_y 是由边界条件确定的待定常数。由上式可见， $M_z(x, y)$ 的通解是由两个余弦函数组成的，它们就是描述场沿 x 和 y 方向基本分布形态的本征函数。

矩形金属波导

§ 3.2

1、TE 型导模

根据 $M_z(x, y)$ 解的形式，可将 TE 波的 H_z 分量写成

$$H_z(x, y) = H_0 \cos(k_x x + \phi_x) \cos(k_y y + \phi_y)$$

其中 H_0 是 H_z 的振幅常数。

这里先由 TE 波的纵向场公式给出横向场各分量与 H_z 的关系：

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad H_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad H_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

这里注意： E_x 和 H_y 只和 $\frac{\partial H_z}{\partial y}$ 有关， E_y 和 H_x 只和 $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ 有关。

根据理想导体的特性，电磁场在导体边界 Ω 上必须满足：

$$\vec{n} \times \vec{E}|_{\Omega} = 0 \quad (\text{即切向电场为 } 0)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{H}|_{\Omega} = 0 \quad (\text{即法向磁场为 } 0)$$

其中 \vec{n} 为导体边界的法向单位矢量。

§ 3.2 矩形金属波导

由矩形金属波导结构可知：

①. 相对于两个竖直的导体壁（分别在 $x=0$ 和 a 处），由于 E_y 是其切向分量， H_x 是其法向分量，因此 $E_y|_{x=0,a} = 0$ 和 $H_x|_{x=0,a} = 0$ 。根据上面相应的纵向场法公式可知，这两个条件可以合并为 $\frac{\partial H_z}{\partial x}|_{x=0,a} = 0$ 。

②. 相对于两个水平的导体壁（分别在 $y=0$ 和 b 处），由于 E_x 是其切向分量， H_y 是其法向分量，因此 $E_x|_{y=0,b} = 0$ 和 $H_y|_{y=0,b} = 0$ 。根据上面相应的纵向场法公式可知，这两个条件可以合并为 $\frac{\partial H_z}{\partial y}|_{y=0,b} = 0$ 。

据此，可以进一步合并写成 $\frac{\partial H_z(x,y)}{\partial \vec{n}}|_{\substack{x=0,a \\ y=0,b}} = 0$ 的形式，其中 \vec{n} 为

矩形金属波导内壁的法向分量。

§ 3.2 矩形金属波导

由前述 $H_z(x, y)$ 的式子求导可得

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -H_0 k_x \sin(k_x x + \phi_x) \cos(k_y y + \phi_y) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} = -H_0 k_y \cos(k_x x + \phi_x) \sin(k_y y + \phi_y)$$

进而可得

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0,a} = 0 \Rightarrow \phi_x = 0 , \quad k_x = \frac{m\pi}{a} \\ \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0,b} = 0 \Rightarrow \phi_y = 0 , \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \end{cases}$$

其中 m 和 n 取值为 0, 1, 2..., 但是 m 和 n 不能同时为 0 ($m+n \neq 0$), 否则这种电磁场仅含有 H_z 这一个场分量。

m 和 n 称为波型指数, 可见对于任意一对 m 和 n 都对应着一个 k_c , 即

$$k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (\text{注意: } k_c \text{ 仅和波导结构有关})$$

写出完全形式的 H_z 表达式如下 (振幅常数 H_0 改为 H_{mn})

$$H_z(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \quad \text{且 } m+n \neq 0$$

§ 3.2 矩形金属波导

进而可得 TE 波所有场分量的完全形式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} H_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \\ E_y(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} H_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \\ E_z(x, y, z) = 0 \\ H_x(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} H_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \\ H_y(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} H_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \\ H_z(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \end{array} \right.$$

可见：①矩形金属波导中可以存在无穷多个 TE 导模；②每一对 m 和 n 都对应着一个含有 5 个场分量的 TE 型导模，且有唯一的 k_c ，每个导模以 **TE_{mn}**（或 **H_{mn}**）来表示；③由于四边导体的封闭作用，场在横截面内必呈驻波分布，两个三角函数分别代表了 x 和 y 方向的驻波分布。92

§ 3.2 矩形金属波导

2、TM型导模

同理，根据 $M_z(x, y)$ 解的形式，可将 TM 波的 E_z 分量写成

$$E_z(x, y) = E_0 \cos(k_x x + \phi_x) \cos(k_y y + \phi_y)$$

其中 E_0 是振幅常数， k_x 和 k_y 、 ϕ_x 和 ϕ_y 可以由边界条件来确定。

边界条件：在 $x=0$ 和 a 处、 $y=0$ 和 b 处， E_z 都为 0，可得

$$\phi_x = \frac{\pi}{2}, \quad \phi_y = \frac{\pi}{2}, \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

其中 m 和 n 取值 1, 2, ...，且 $k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ ，与 TE 波相同。

由此可得 E_z 的完全形式为

$$E_z(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z}$$

§ 3.2 矩形金属波导

可以得到 TM 波所有场分量的完全形式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} E_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \\ E_y(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} E_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \\ E_z(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \\ H_x(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} E_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \\ H_y(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} E_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \\ H_z(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

可见：①矩形金属波导中可以存在无穷多个 TM 导模；②每一对 m 和 n 都对应着一个含有 5 个场分量的 TM 型导模，且有唯一的 k_c ，每个导模以 TM_{mn} （或 E_{mn} ）来表示；③因为 m 和 n 不等于 0，故 E_{00} 、 E_{0n} 和 E_{m0} 导模不存在。

§ 3.2 矩形金属波导

二、矩形波导的场结构

规则波导场结构可以用电力线和磁力线的形状与疏密分布表示。

1、规则波导中横向场结构特征

对于 TE 波有: $\vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z \rightarrow \nabla_t \times \vec{H}_t = 0$

对于 TM 波有: $\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z \rightarrow \nabla_t \times \vec{E}_t = 0$

一个标量场
梯度的旋度
恒等于零

由此可在规则波导的横截面上得到以下结论:

①、TE 波的 \vec{H}_t 是有位无旋场, 其位函数为 $H_z(x, y)$, 等位线为 $H_z(x, y) = \text{const.}$

②、TM 波的 \vec{E}_t 是有位无旋场, 其位函数为 $E_z(x, y)$, 等位线为 $E_z(x, y) = \text{const.}$

③、TE 波中 \vec{H}_t 的磁力线垂直于等位线, 而 \vec{E}_t 的电力线又垂直于 \vec{H}_t 的磁力线, 所以等位线平行于电力线, 即 $\vec{E}_t \perp \vec{H}_t \perp H_z$, 所以 $\vec{E}_t \parallel H_z$ 。同理, TM 波中 $\vec{H}_t \perp \vec{E}_t \perp E_z$, 所以 $\vec{H}_t \parallel E_z$ 。

④、TE 波 \vec{E}_t 的电力线方程就是其 \vec{H}_t 的等位线方程 $H_z(x, y) = \text{const.}$; TM 波 \vec{H}_t 的磁力线方程就是 \vec{E}_t 的等位线方程 $E_z(x, y) = \text{const.}$

§ 3.2 矩形金属波导

根据前述原理，可以掌握绘制横向场结构的一些基本方法：

(a)、位置线: H_z 或 $E_z=0$ 的等位线。

电或磁力线越接近位置线，其形状就越像位置线的形状。

(b)、极值点/线: H_z 或 $E_z=\max$ 和 \min 的等位线。

它有时是一些离散的点，有时是线。当是点时，电或磁力线越接近这些点，其形状就越接近椭圆；当是线时，电或磁力线的形状就越像这些线的形状。

(c)、在位置线和极值点/线之间的电或磁力线形状介于二者之间，逐渐过渡。

(d)、对靠近金属波导内壁的电场来说，电力线总是垂直开始和终止于波导内壁的，而磁场总是空间闭合曲线。对于磁壁情况，则与上述情况成对偶关系。

§ 3.2 矩形金属波导

例 1. TE₁₀ (H₁₀)

电力线方程: $H_z = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x = const$, H_0 对电力线分布无影响, 令 $H_0=1$ 。

$H_z = 0$ 的位置线: $x = a/2$ 的直线

$H_z = \max$ 的极值线: $x = 0$ 的直线

$H_z = \min$ 的极值线: $x = a$ 的直线

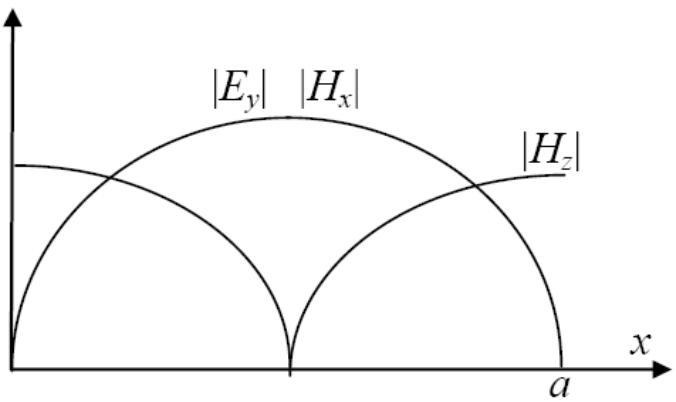
\mathbf{H}_{10} 波有三个场分量: $H_z \sim \cos \frac{\pi}{a} x$, $E_y \sim -j \sin \frac{\pi}{a} x$, $H_x \sim j \sin \frac{\pi}{a} x$

在横截面上, 由于 H_x 仅随坐标 x 变化, 因此其磁力线沿 y 方向的分布是均匀的,

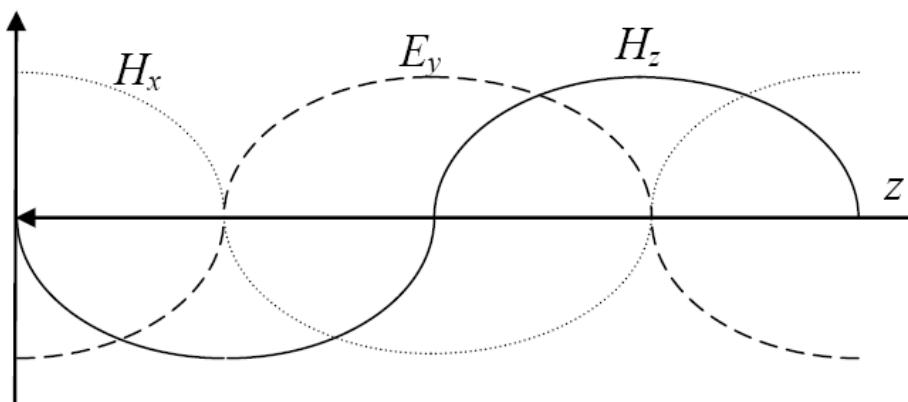
同时该磁力线疏密不能反映 H_x 幅度呈 \sin 形式的变化。

提示: 沿纵向绘制各场分量时, 一般仅绘制各场分量按 $\cos \beta z$ (即实部) 的变化,

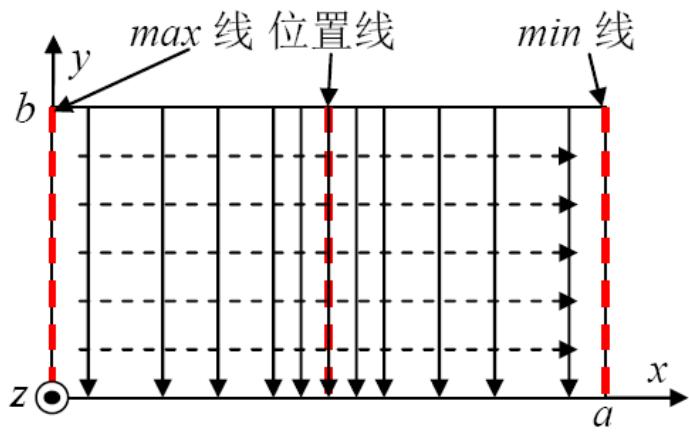
同时各场分量前的负号和 j 决定了各分量之间沿 z 的相对位置 (相位) 关系。



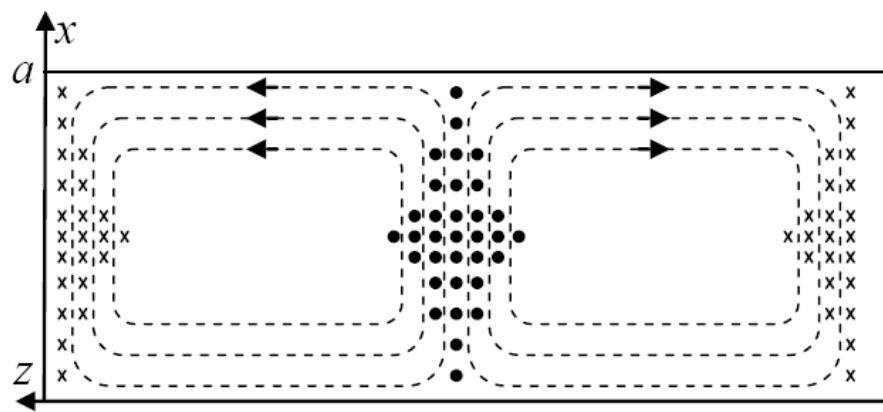
3个场分量随 x 轴的幅度变化



3个场分量在 z 轴上的相对位置（相位）关系



横截面上的场结构



沿 x 和 z 轴的场结构（顶视图）

注意：上图与下图之间存在对应关系；这里横截面的场结构对应右图的起始位置；电场箭头和磁场箭头方向绘制遵循右手螺旋关系。

§ 3.2 矩形金属波导

例 2. TM₁₁ (E₁₁)

磁力线方程: $E_z = E_0 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y = const$, 同样令 $E_0=1$ 。

$E_z = 0$ 的位置线: 矩形波导的周界, 即 $x=0, y=0, x=a, y=b$ 。

$E_z = \max$ 的极值点: $x=a/2$ 和 $y=b/2$ 的点

E₁₁ 波有五个场分量:

$$E_x \sim -j \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad E_y \sim -j \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y$$

$$H_x \sim j \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \quad H_y \sim -j \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$$

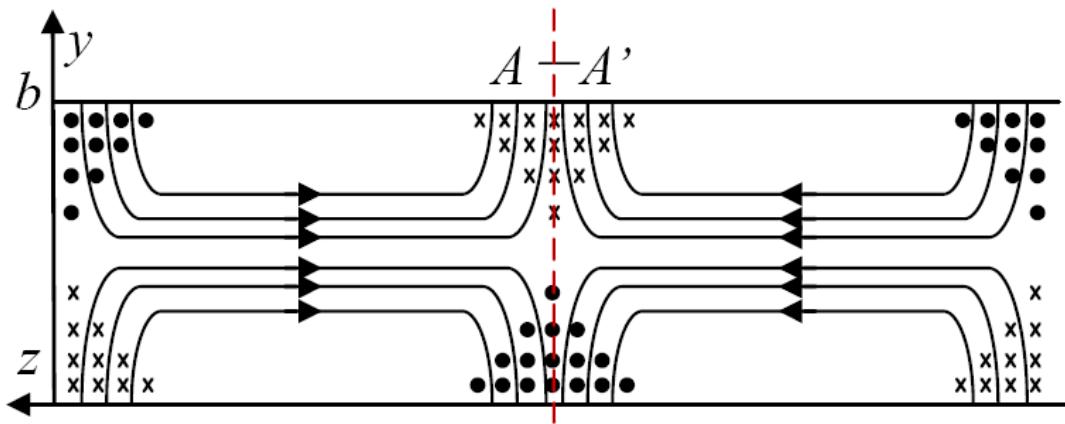
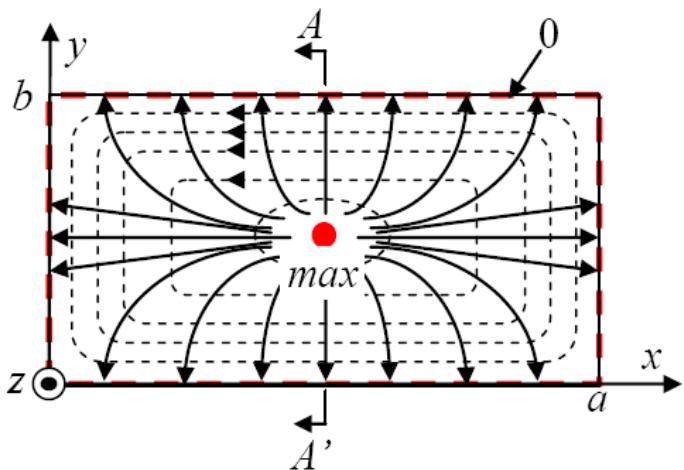
§ 3.2 矩形金属波导

$$E_x \sim -j \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$$

$$E_y \sim -j \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y$$

$$H_x \sim j \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y$$

$$H_y \sim -j \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$$



可见，横向电场中间密集一些，横向磁场靠近周界密集一些。

给定 x , $E_x \sim \sin \frac{\pi}{b} y$ 中间密集, $H_x \sim \cos \frac{\pi}{b} y$ 两边密集。

给定 y , $E_y \sim \sin \frac{\pi}{a} x$ 中间密集, $H_y \sim \cos \frac{\pi}{a} x$ 两边密集;

§ 3.2 矩形金属波导

例 3. TE₁₁ (H₁₁)

电力线方程: $H_z = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y = const$, 令 $H_0=1$.

$H_z = 0$ 的位置线: $x = a/2$ 和 $y = b/2$ 的直线

$H_z = \max$ 的极值点: 2 个点 $(0, 0)$, (a, b)

$H_z = \min$ 的极值点: 2 个点 $(0, b)$, $(a, 0)$

H₁₁ 波也有五个场分量:

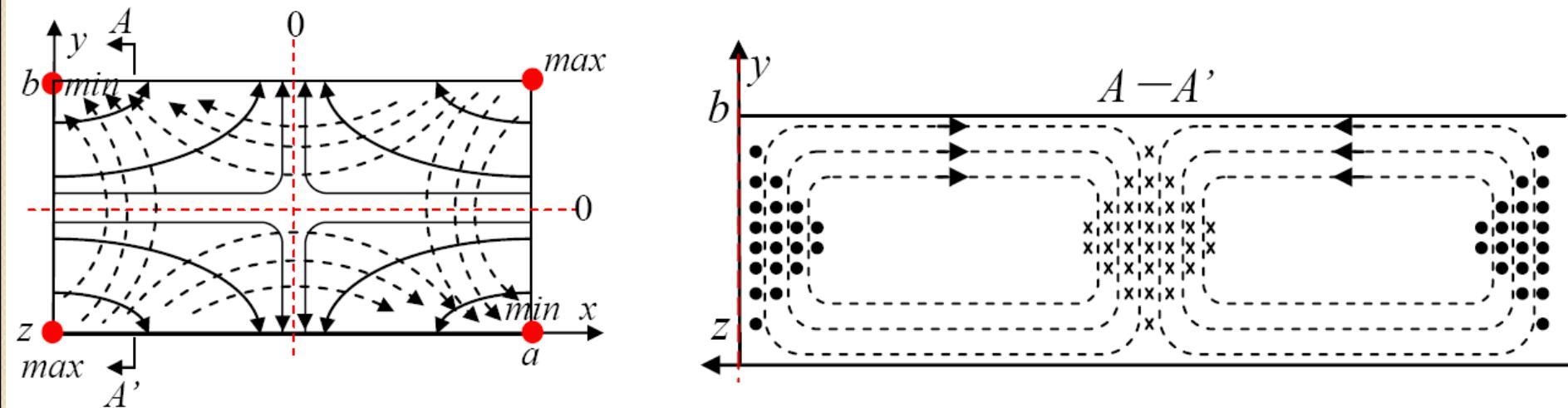
$$E_x \sim j \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad E_y \sim -j \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y$$

$$H_x \sim j \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \quad H_y \sim j \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$$

§ 3.2 矩形金属波导

$$E_x \sim j \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad E_y \sim -j \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y$$

$$H_x \sim j \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \quad H_y \sim j \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$$



可见，横向电场靠近中心位置线密集一些，横向磁场靠近四角密集一些。

给定 \$x\$，\$E_x \sim \sin \frac{\pi}{b} y\$ 中间密集，\$H_x \sim \cos \frac{\pi}{b} y\$ 两边密集。

给定 \$y\$，\$E_y \sim \sin \frac{\pi}{a} x\$ 中间密集，\$H_y \sim \cos \frac{\pi}{a} x\$ 两边密集；

§ 3.2 矩形金属波导

2、矩形波导中高次模场结构的绘制原则

在 H_{mn} 和 E_{mn} 中，波型指数 m 和 n 的物理含义：

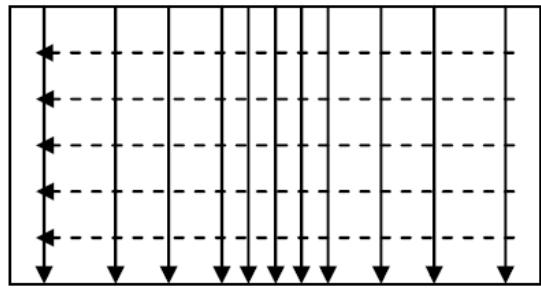
m 表示横向场沿宽边（ x 方向）分布的半驻波个数；

n 表示横向场沿窄边（ y 方向）分布的半驻波个数。

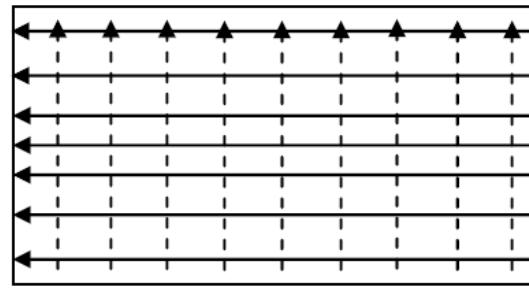
只要知道 H_{10} 、 H_{11} 和 E_{11} 的场结构，高次模场结构可按下列原则绘出：

(1)、把 H_{10} 以波导轴为旋转轴，旋转 90° 可得 H_{01} 场结构（即 H_{01} 可以由 H_{10} 极化面旋转 90° 得到，极化面是由电场矢量和波导轴组成的平面）。

同理由 H_{m0} 也可得到 H_{0m} 波的场型。



H_{10}

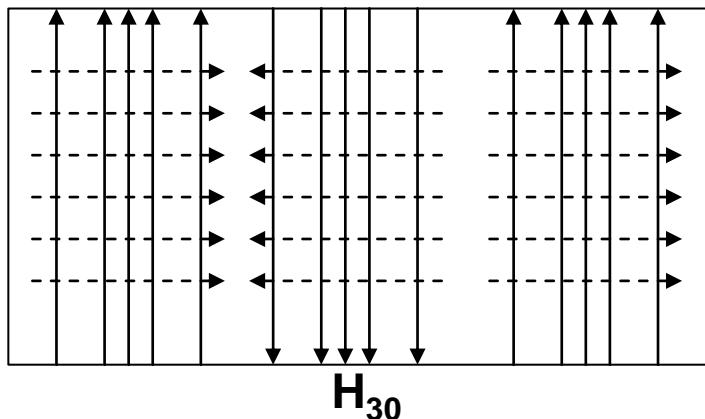


H_{01}

§ 3.2 矩形金属波导

(2)、 H_{m0} 的场结构可由 m 个 H_{10}

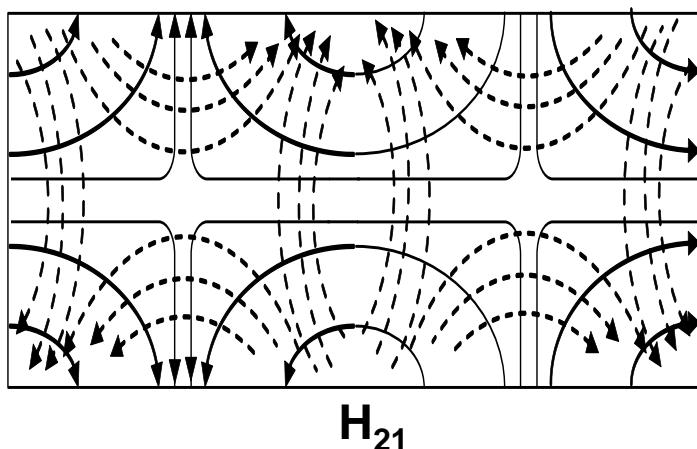
沿宽边并排组合而成。



(3)、 H_{mn} 的场结构可由 m 个 H_{11}

波沿宽边、 n 个 H_{11} 波沿窄边排列

组合而成。



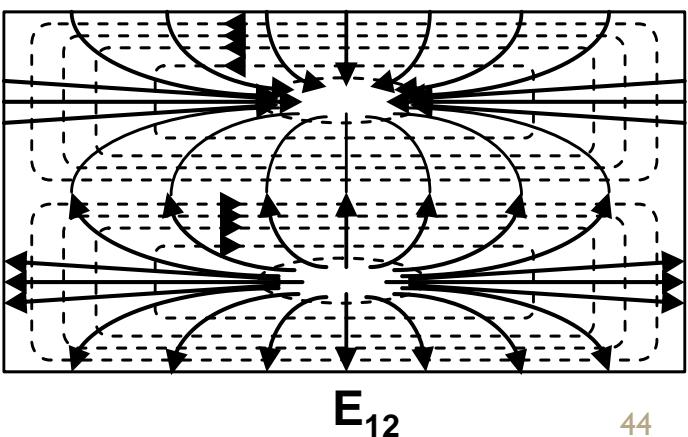
(4)、 E_{mn} 的场结构可由 m 个 E_{11}

波沿宽边、 n 个 E_{11} 波沿窄边排列

组合而成。

注意：图中波导中心部分的电场

是闭合的。



§ 3.2 矩形金属波导

三、金属波导的管壁电流

管壁电流的基本特性：

- ①. 由波导管壁附近的切向磁场产生的感应电流；
- ②. 趋肤效应使其以面电流形式集中在波导内壁表面流动，趋肤深度 δ 的典型量级为 10^{-4} cm，因此也是传导型电流。

管壁电流密度 \vec{J}_s 与切向磁场 \vec{H}_τ 的关系：

$$\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}_\tau, \text{ 其中 } \vec{n} \text{ 是波导内壁的单位法向矢量。}$$

可见 $\vec{J}_s \perp \vec{H}_\tau$ 。在金属波导中，横向管壁电流必然是由 H_z 分量产生的，而纵向管壁电流则是由靠近管壁的 \vec{H}_t 分量产生的。

其它形式的电流：

源电流——由电场在良导体中产生的传导型电流 ($\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$)；

空间位移电流——由变化的电场产生的空间电流 ($\vec{J}_d = \partial \vec{D} / \partial t = j\omega \epsilon \vec{E}$)。

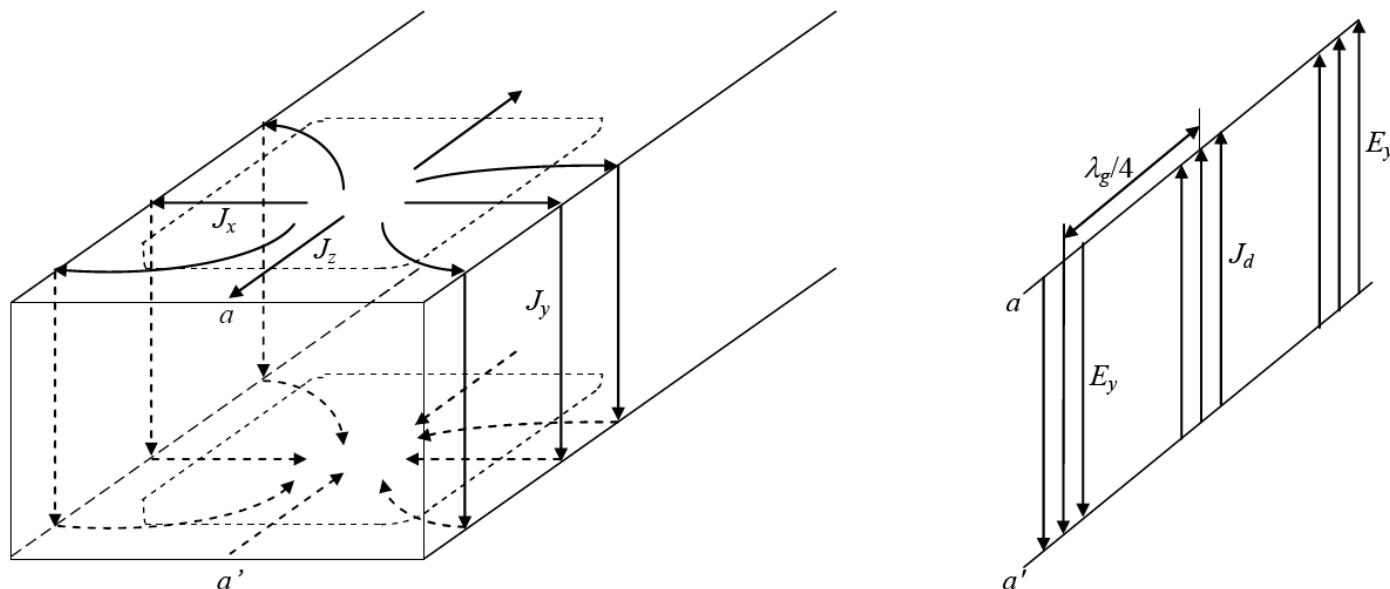
§ 3.2 矩形金属波导

举例：矩形波导 H_{10} 波产生的电流

$$H_{10} \text{ 波的场分量: } H_x \sim j \sin \frac{\pi}{a} x, \quad E_y \sim -j \sin \frac{\pi}{a} x, \quad H_z \sim \cos \frac{\pi}{a} x$$

- (1) 管壁电流（传导型）: 由 H_x 产生的 J_z , 由 H_z 产生 J_x 和 J_y 。
- (2) 空间位移电流: 由 E_y 在波导内产生的电流 $\vec{J}_d = j\omega\epsilon \vec{E}_y \sim \sin \frac{\pi}{a} x$ 。

如图所示, 管壁电流和空间位移电流形成闭合的电流回路, 这是因为 \vec{J}_d 与 E_y 有 $\pi/2$ 的相差, 在空间上沿 z 轴有 $\lambda_g/4$ 的位移, E_y 最大处 $\vec{J}_d = 0$ 。



§ 3.2 矩形金属波导

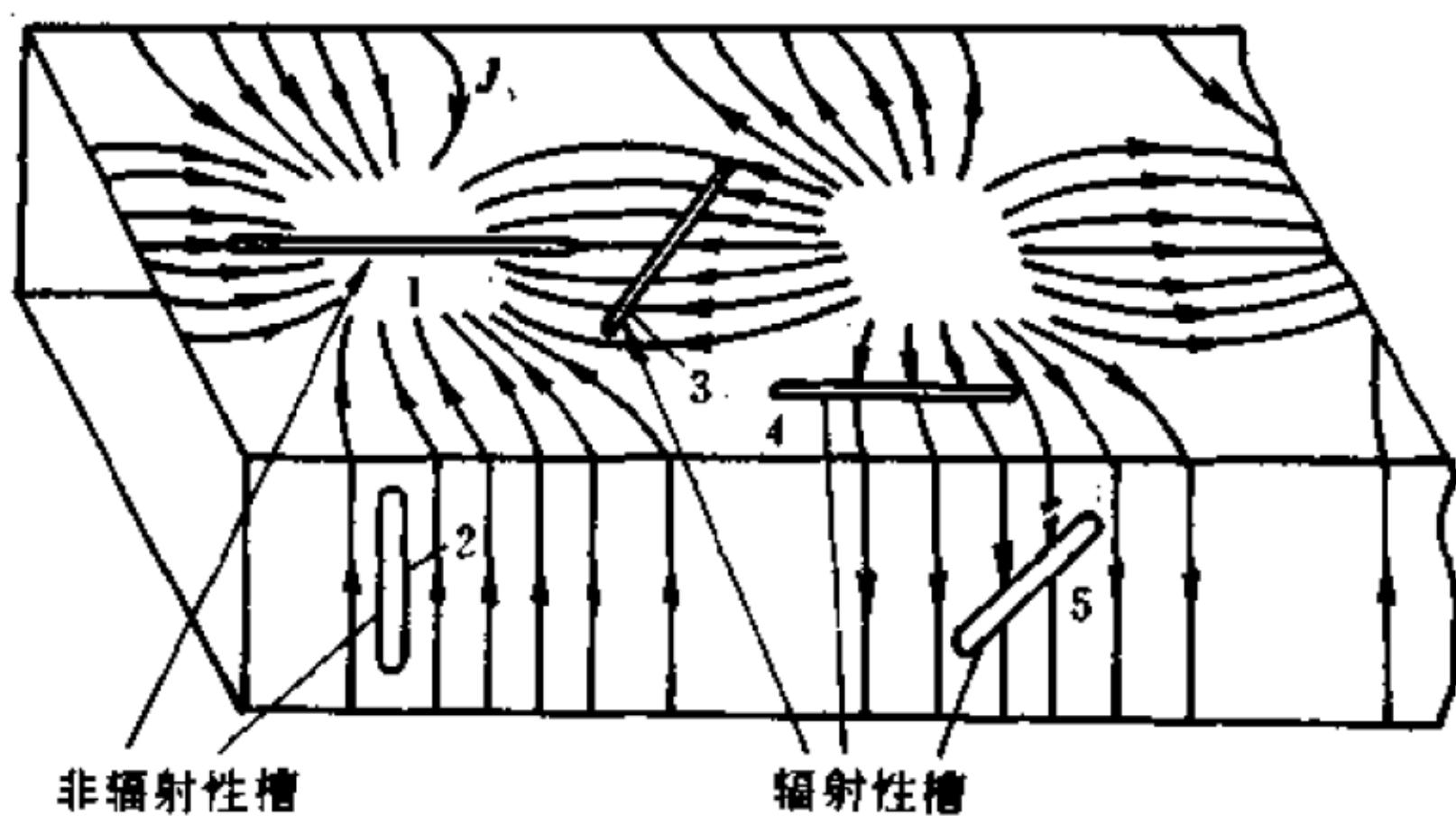


图 3.1-3 TE_{10} 模矩形波导的管壁电流与管壁
上的辐射性和非辐射性槽

矩形金属波导

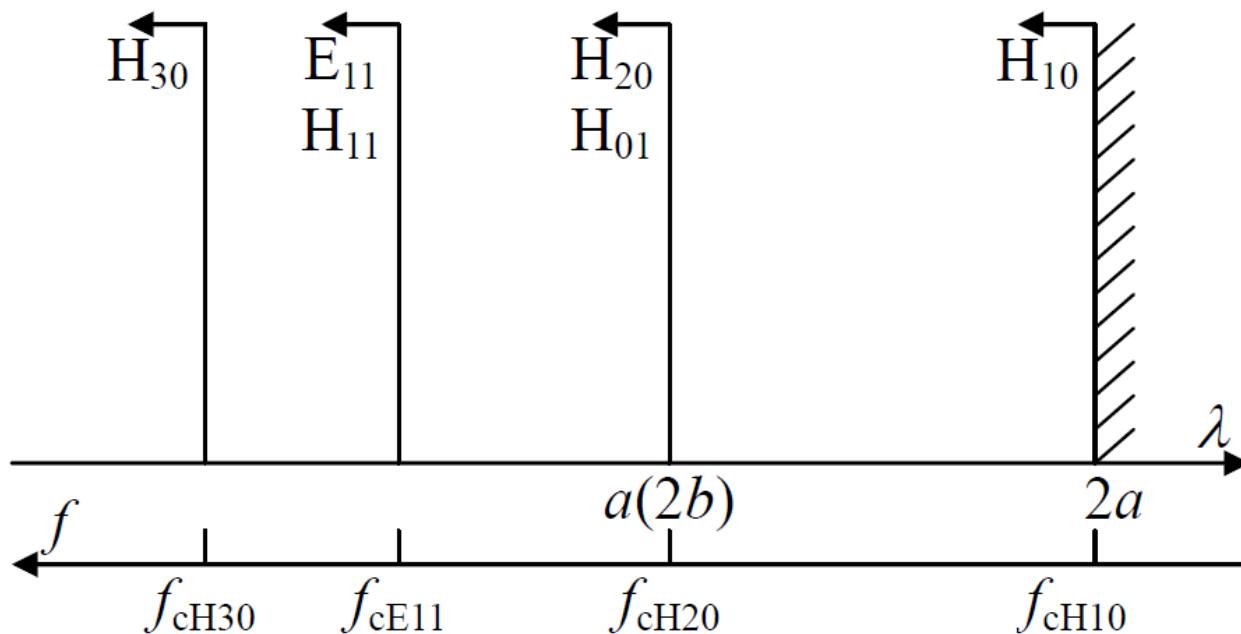
§ 3.2 矩形波导的传输特性

四、矩形波导的传输特性

1、截止波长

根据 $k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$, 可得 $\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$

尺寸确定的矩形波导, 各导模截止波长分布是一定的, 对 $a=2b$ 有



一般波导有 $a>2b$ (例如 X 波段为 $2.3\times1.0\text{cm}$), 此时有 $(\lambda_c)_{H_{20}} > (\lambda_c)_{H_{01}}$ 。

模式简并现象

定义：规则波导中同一个本征值 k_c 对应不同的本征函数（或者同一个 λ_c 对应不同的导模）的现象。

矩形波导中， m 和 n 相同的 TE 波与 TM 波具有相同的 λ_c ，即 $(\lambda_c)_{H_{mn}} = (\lambda_c)_{E_{mn}}$ ，因而它们是简并的。因为 E_{m0} 和 E_{0n} 是不存在的，所以 H_{m0} 和 H_{0n} 无简并的 E 波。

主模 (dominant mode)

定义：在给定规则波导尺寸下， λ_c 最大和 k_c 最小的导模，也称基模、最低型模。

当 $a > b$ 时， $(\lambda_c)_{H_{10}} = 2a$ 最大，所以 H_{10} 是矩形波导的主模，其余称为高次模 (higher-order modes)。

§ 3.2 矩形金属波导

矩形波导实用中几乎都以主模 H_{10} 波工作，主要原因是：

- ①、 λ_c 最大，能保证单模传输，只要工作频率 f 满足 $f_{cH10} < f < f_{cH20}$ 。
- ②、工作波长 λ 一定时，可获得最小波导尺寸。例如 H_{10} 波只要求 $a > \lambda/2$ ，而 H_{20} 则要求 $a > \lambda$ 。并且 H_{10} 波与 b 无关，可以采用更扁一些的波导，称为减高波导。
- ③、单模传输的工作频带宽， $f_{cH10} \rightarrow f_{cH20}$ 范围较大。
- ④、尺寸一定时，可以证明 H_{10} 波在所有导模中衰减最小。
- ⑤、场结构简单、稳定，极化方向固定，便于激励和耦合。

§ 3.2 矩形金属波导

2、波导波长 λ_g

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}, \text{ 主模 } H_{10} \text{ 的 } \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$$

传输状态下，可知 $\lambda_g > \lambda$ ， $\therefore \frac{2\pi}{\beta} > \frac{2\pi}{k} \rightarrow \beta < k$ ，即 $(k/\beta) > 1$ 。

3、相速度和群速度

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}, \text{ 主模 } H_{10} \text{ 的 } v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$$

$$v_g = v \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}, \text{ 主模 } H_{10} \text{ 的 } v_g = v \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}$$

可见，矩形波导的导模传播速度与频率有关，存在色散现象。

又由 $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{2\pi v}{\beta\lambda} = \frac{k v}{\beta} > v$ ， \therefore 矩形波导内的波称为快波。

矩形金属波导

§ 3.2

4、波阻抗 ($\gamma = j\beta$)

$$\text{TE 波: } Z_H = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k}{\beta} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

$$\text{TM 波: } Z_E = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\beta}{k} = \eta \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$$

5、传输功率

对于矩形波导，可以证明：

$$P_H = \begin{cases} \frac{H_0^2}{8} \eta \frac{\lambda_c^2}{\lambda \lambda_g} ab & m \neq 0, n \neq 0 \\ \frac{H_0^2}{4} \eta \frac{\lambda_c^2}{\lambda \lambda_g} ab & m = 0 \text{ 或 } n = 0 \end{cases}$$

$$P_E = \frac{E_0^2}{8\eta} \frac{\lambda_c^2}{\lambda \lambda_g} ab$$

圆形金属波导

§ 3.3

圆形金属波导 (Circular Metallic Waveguide):

横截面形状为圆形的金属波导管，与矩形金属波导一样，也只能传输 TE 和 TM 波。

它具有损耗小和双极化特性，常用于要求双极化模的天线馈线、谐振腔和波长计中。

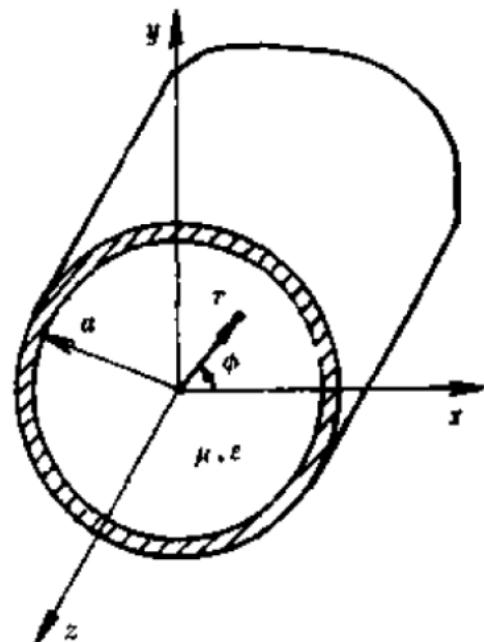
圆波导具有轴对称性，采用圆柱坐标系 (r, φ, z) ，拉姆系数为 $h_1=1$, $h_2=r$, $h_3=1$ 。

一、圆形波导的导模

H_z (对应 TE) 和 E_z (对应 TM) 的本征值方程和边界条件如下：

$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z(r, \varphi) + k_c^2 E_z(r, \varphi) = 0 \\ E_z(r, \varphi) \Big|_{r=a} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla_t^2 H_z(r, \varphi) + k_c^2 H_z(r, \varphi) = 0 \\ \frac{\partial H_z(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

其中 $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ 。



圆形金属波导

§ 3.3

两个本征值方程具有完全相同的形式，令 $M_z(r, \varphi)$ 来统一代表 $E_z(r, \varphi)$ 和 $H_z(r, \varphi)$ ，圆柱坐标系下的本征值方程为

$$r^2 \frac{\partial^2 M_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial M_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial \varphi^2} + k_c^2 r^2 M_z = 0$$

令 $M_z(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ ，代入上式后得

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + k_c^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

上式成立要求等式两边必须等于同一常数，令 $-\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = m^2$ ，可得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \\ r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} + (k_c^2 r^2 - m^2) R = 0 \end{cases}$$

圆波导是轴对称的，当 r 和 z 一定时，随坐标 φ 旋转 2π 后，场的大小和方向应当不变，即 $\cos(m\varphi - \psi) = \cos[m(\varphi + 2\pi) - \psi]$ ，这要求 m 必须为整数（负整数的结果与正整数的结果一样）。

圆形金属波导

§ 3.3

因此， $\Phi(\varphi)$ 的一般解为

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi = C \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

后一种表示形式是考虑到圆波导的轴对称性，场的极化方向具有不确定性，使场在 φ 方向存在 $\cos m\varphi$ （偶对称波）和 $\sin m\varphi$ （奇对称波）两种可能的分布，它们是独立存在、相互正交的。

$R(r)$ 方程称为 **Bessel** 方程，其一般解为

$$R(r) = C_3 J_m(k_c r) + C_4 N_m(k_c r)$$

其中 $J_m(k_c r)$ 为第一类 m 阶 **Bessel** 函数， $N_m(k_c r)$ 为第二类 m 阶 **Bessel** 函数（黎曼函数）。因为在 $r=0$ 时， $N_m(k_c r)|_{r=0} \rightarrow -\infty$ ，而圆波导中心处的场是有限的，所以必然有 $C_4=0$ 。

§ 3.3 圆形金属波导

据此可得的 $M_z(r, \varphi)$ 一般解为

$$M_z(r, \varphi) = M_0 J_m(k_c r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}$$

其中 $M_0 = C \cdot C_3$ 。由于圆形四边导体的封闭作用，场在横截面内必然也是驻波分布，上式中 Bessel 函数和三角函数（即圆柱坐标系中的本征函数）分别描述了 r 和 φ 两个方向的驻波分布。

1、TE 型导模

根据 $M_z(r, \varphi)$ 解的形式，可将 TE 波的 H_z 分量写成

$$H_z(r, \varphi, z) = H_0 J_m(k_c r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\gamma z}$$

其中 H_0 是振幅常数，而 k_c 则由边界条件来确定。

§ 3.3 圆形金属波导

由 $\frac{\partial H_z}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$, 可得方程 $J'_m(k_c a) = 0$ 。这里令 μ_{mn} 为该方程的第 n 个根

($n=1,2,\dots$), 即 $\mu_{mn} = k_c a$, 则有 $k_c = \frac{\mu_{mn}}{a}$, 即 $\lambda_c = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}$ 。

进而 H_z 的完全形式可表示为 (振幅常数 H_0 改为 H_{mn})

$$H_z(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\gamma z}$$

根据圆柱坐标的纵向场法公式, 可得 TE 波所有场分量的完全形式为:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r(r, \varphi, z) = \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega \mu m a^2}{\mu_{mn}^2 r} H_{mn} J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} e^{-\gamma z} \\ E_{\varphi}(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega \mu a}{\mu_{mn}} H_{mn} J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\gamma z} \\ E_z(r, \varphi, z) = 0 \\ H_r(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\gamma a}{\mu_{mn}} H_{mn} J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\gamma z} \\ H_{\varphi}(r, \varphi, z) = \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma m a^2}{\mu_{mn}^2 r} H_{mn} J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} e^{-\gamma z} \\ H_z(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\gamma z} \end{array} \right.$$

§ 3.3 圆形金属波导

2、TM型导模

根据 $M_z(r, \varphi)$ 解的形式，可将 TM 波的 E_z 分量写成

$$E_z(r, \varphi, z) = E_0 J_m(k_c r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\gamma z}$$

其中 E_0 是振幅常数，而 k_c 则由边界条件来确定。

由 $E_z|_{r=a} = 0$ ，可得 $J_m(k_c a) = 0$ 。这里令 ν_{mn} 为方程的第 n 个根($n=1,2,\dots$)，

即 $\nu_{mn} = k_c a$ ，则有 $k_c = \frac{\nu_{mn}}{a}$ ，即 $\lambda_c = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}}$ 。

进而 E_z 的完全形式可表示为（振幅常数 E_0 改为 E_{mn} ）

$$E_z(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} J_m\left(\frac{\nu_{mn}}{a} r\right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\gamma z}$$

§ 3.3 圆形金属波导

根据圆柱坐标的纵向场法公式，可得 TM 波所有场分量的完全形式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\gamma a}{\nu_{mn}} E_{mn} J'_m \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\gamma z} \\ E_{\varphi}(r, \varphi, z) = \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma m a^2}{\nu_{mn}^2 r} E_{mn} J_m \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} e^{-\gamma z} \\ E_z(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} J_m \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\gamma z} \\ H_r(r, \varphi, z) = \mp \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j \omega \varepsilon m a^2}{\nu_{mn}^2 r} E_{mn} J_m \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} e^{-\gamma z} \\ H_{\varphi}(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-j \omega \varepsilon a}{\nu_{mn}} E_{mn} J'_m \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\gamma z} \\ H_z(r, \varphi, z) = 0 \end{array} \right.$$

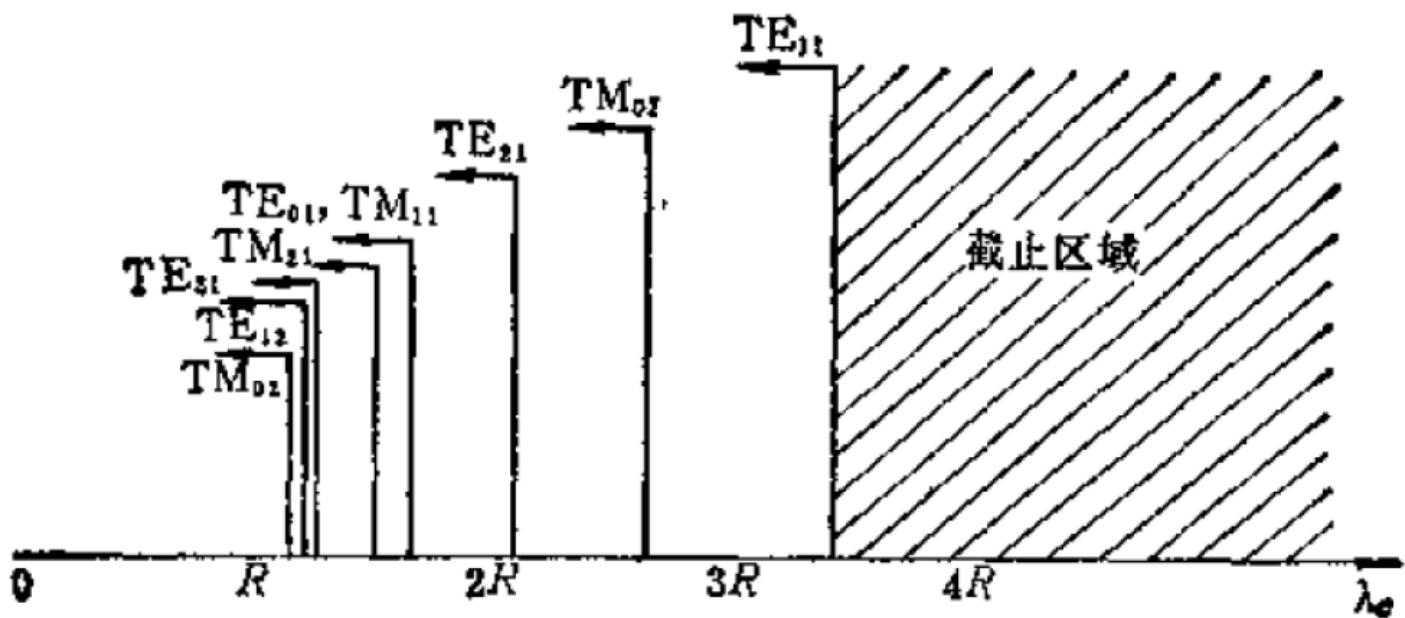
§ 3.3 圆形金属波导

3、导模的讨论：

①.圆波导存在无穷多个 H_{mn} 和 E_{mn} 波, 且 $m=0,1,2,\dots, n=1,2,\dots$ 。

其中 E_{00} 、 H_{00} 、 E_{m0} 和 H_{m0} 不存在。

②.最低型磁波是 H_{11} ($\mu_{11} = 1.841$ 是 μ_{mn} 中最小的); 最低型电波是 E_{01} ($\nu_{01} = 2.405$ 是 ν_{mn} 中最小的)。因为 $\nu_{01} > \mu_{11}$, 即 $\lambda_{cH11} > \lambda_{cE01}$, 所以圆波导中的主模是 H_{11} 波。



§ 3.3 圆形金属波导

③.两种简并关系

极化简并——发生在前述的偶波 $\cos m\varphi$ 和奇波 $\sin m\varphi$ 之间，这两种模式的场结构完全一样，只是极化面相互正交， λ_c 相同，构成同一波型的简并模。因为 $n \neq 0$ ，所以 \mathbf{E}_{0n} 和 \mathbf{H}_{0n} 不存在极化简并。

\mathbf{H}_{0n} 和 \mathbf{E}_{1n} 的简并——因为 \mathbf{H}_{0n} 的 $J_0(k_c r) = -J_1(k_c r)$ ，所以 $\mu_{0n} = \nu_{1n}$ ，即 $(\lambda_c)_{H0n} = (\lambda_c)_{E1n}$ 。

④. 波型指数 m 和 n 的物理含义：在圆波导横截面内，场沿 r 或 φ 方向均按照驻波分布。 m 表示场沿 φ 方向分布的整驻波个数； n 表示场沿 r 方向分布的半驻波个数。

§ 3.3 圆形金属波导

二、圆形波导的场结构

1、主模 H_{11} :

$\mu_{11} = 1.841$, $\lambda_c = 3.41a$, 存在极化简并。

电力线方程: $H_z = H_0 J_1\left(\frac{\mu_{11}}{a} r\right) \cos \varphi = c$

$H_z=0$ 的位置线: $\varphi = \pm \pi/2$ 或 $r = 0$ (因为 $J_1(0) = 0$)

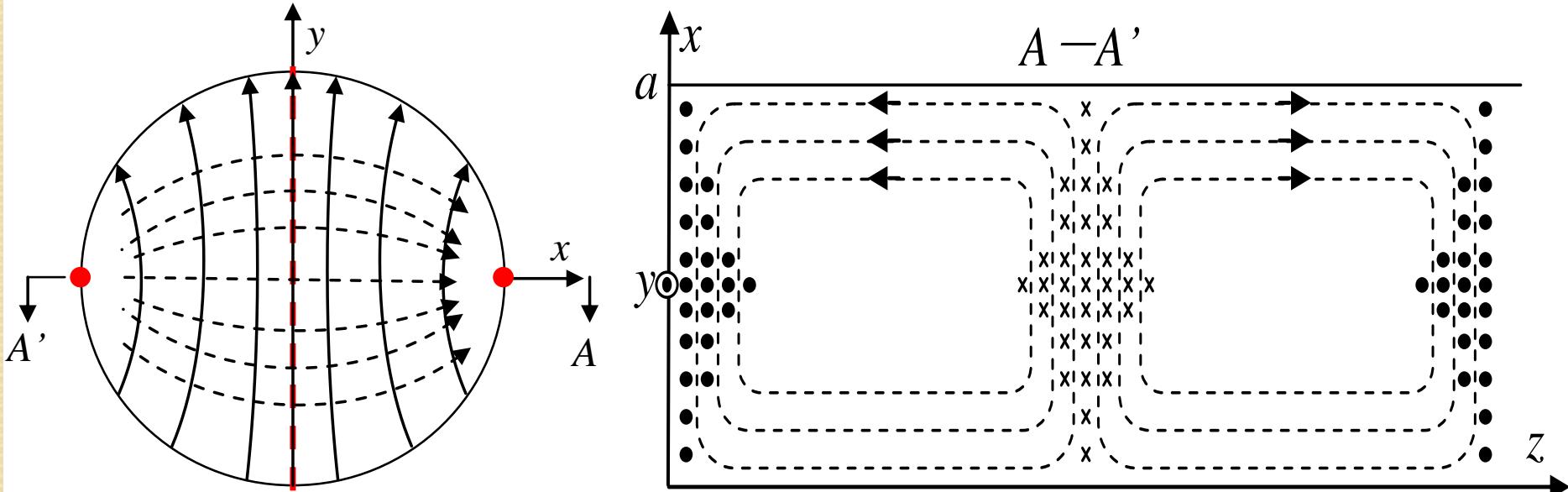
$H_z=\max$ 的极值点: $\varphi = 0$ 和 $r = a$ (因为 $J_1(\mu_{11}) = \max$, $J'_1(\mu_{11}) = 0$)

$H_z=\min$ 的极值点: $\varphi = \pi$ 和 $r = a$

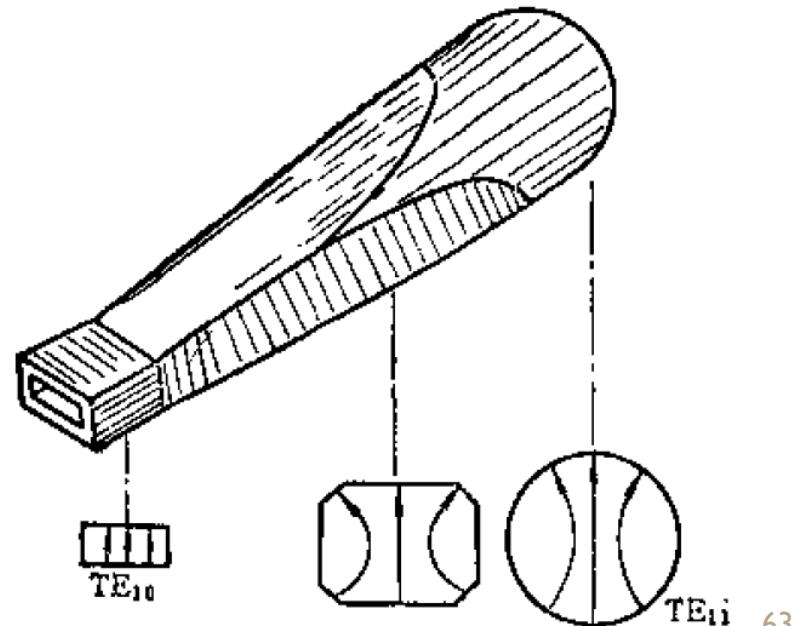
H_{11} 波有五个场分量:

$$E_r \sim \pm j J_1\left(\frac{\mu_{11}}{a} r\right), \quad E_\varphi \sim j J'_1\left(\frac{\mu_{11}}{a} r\right), \quad H_r \sim -j J'_1\left(\frac{\mu_{11}}{a} r\right), \quad H_\varphi \sim \pm j J_1\left(\frac{\mu_{11}}{a} r\right)$$

§ 3.3 圆形金属波导



H_{11} 波与矩形波导 H_{10} 波的场结构近似，这两种波型很容易通过过渡器件来进行转换，例如圆极化器等。由于存在极化简并模式，所以不宜采用金属圆波导 H_{11} 波来传输微波能量。



§ 3.3 圆形金属波导

2、 H_{01} 波：

$\mu_{01} = 3.832$, $\lambda_c = 1.64a$, 无极化简并，但是与 E_{11} 简并。

电力线方程: $H_z = H_0 J_0\left(\frac{\mu_{01}}{a}r\right) = c$

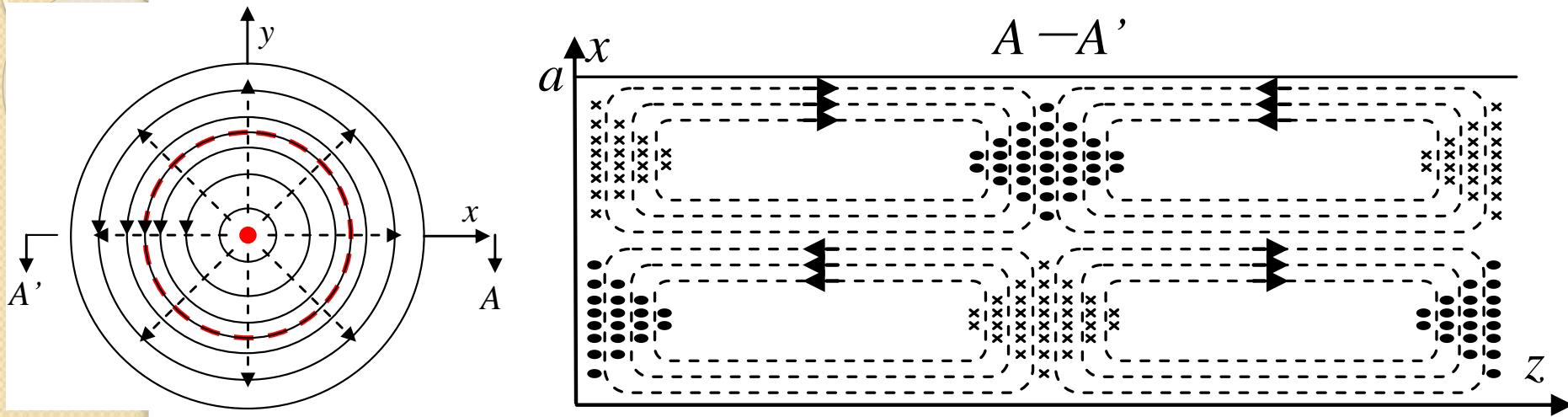
$H_z=0$ 的位置线: 要 $J_0\left(\frac{\mu_{01}}{a}r\right) = 0$, 则 $\frac{\mu_{01}}{a}r = 2.405$, $\therefore r = 0.63a$

$H_z=\max$ 的极值点: 因为 $J_0(0) = 1$ 最大, $\therefore r = 0$

H_{01} 波只有三个场分量:

$$E_\phi \sim -jJ_1\left(\frac{\mu_{01}}{a}r\right), \quad H_r \sim jJ_1\left(\frac{\mu_{01}}{a}r\right)$$

§ 3.3 圆形金属波导



E_ϕ 在波导中心和波导壁上为 0; H_r 在波导壁附近为 0, 只有 H_z 产生的 J_ϕ 电流。由于没有纵向管壁电流, 传输功率一定时, 其功率衰减随 f 的升高而降低, $\alpha \propto f^{-3/2}$, 在毫米波段, 圆波导的 H_{01} 波的衰减约为矩形波导 H_{01} 波的 0.25~0.125。这个特点使得 H_{01} 波适于用作高 Q 谐振腔的工作模式和远距离毫米波波导传输。

§ 3.3 圆形金属波导

3、 E_{01} 波：

$$\lambda_c = 2.62a, \text{ 不存在简并。}$$

磁力线方程： $E_z = E_0 J_0\left(\frac{\nu_{01}}{a}r\right) = c$

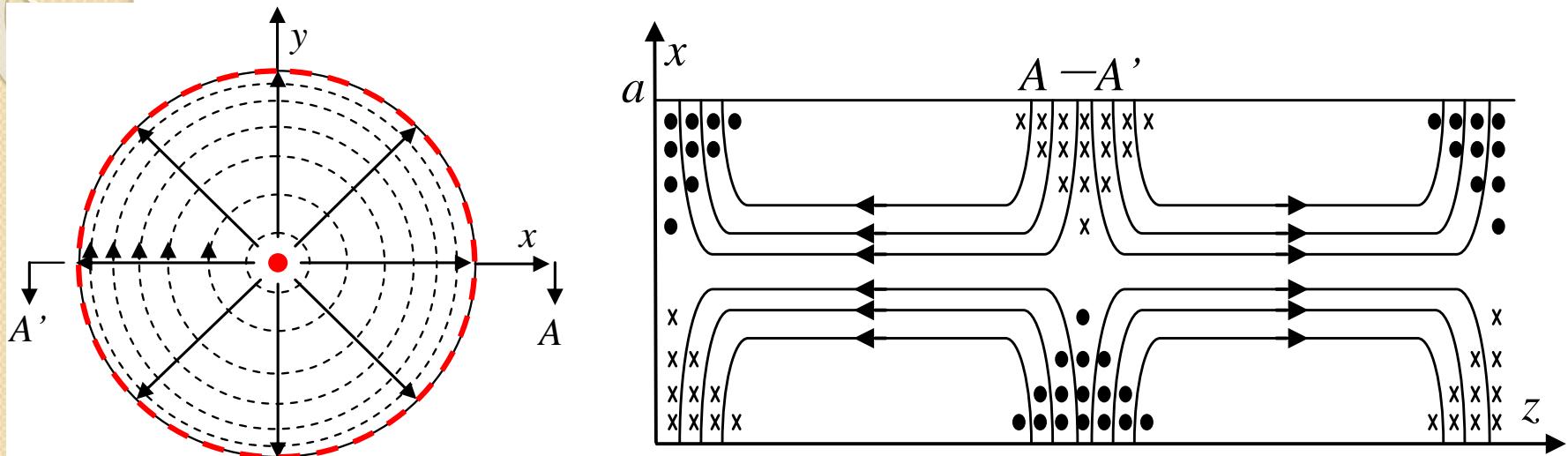
$E_z=0$ 的位置线： 由 $J_0\left(\frac{\nu_{01}}{a}r\right) = 0$ ， 得 $r=a$

$E_z=\max$ 的极值点： 由 $J'_0\left(\frac{\nu_{01}}{a}r\right) = -J_1\left(\frac{\nu_{01}}{a}r\right) = 0$ 得 $r=0$

E_{01} 波只有三个场分量：

$$E_r \sim jJ_1\left(\frac{\nu_{01}}{a}r\right), \quad H_\varphi \sim jJ_1\left(\frac{\nu_{01}}{a}r\right)$$

§ 3.3 圆形金属波导

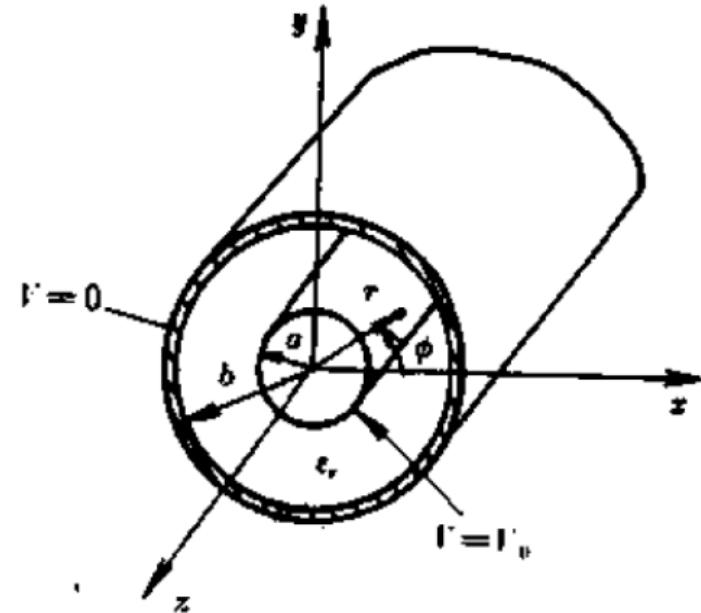


H_ϕ 相对集中（或偏向波导壁），只有 H_ϕ 产生的 J_z 电流；电场在中心位置最强。可以作为旋转关节，主要是场轴对称性和无简并模式。

§ 3.4 同轴线

同轴线 (Coaxial Line):

由两根同轴的圆柱导体构成的导行系统，内导体外半径为 a ，外导体内半径为 b ，导体之间可以填充空气（硬同轴线）或相对介电常数为的介质（软同轴线，即同轴电缆），如图所示。



同轴线是一种双导体导行系统，可以传输 TEM 波，但是当其横向尺寸可与工作波长比拟时，同轴线中也会出现 TE 和 TM 模。同轴线与圆波导一样具有轴对称性，采用圆柱坐标系 (r, φ, z) 。

§ 3.4 同轴线

一、同轴线的 TEM 模

由于 TEM 无纵向场分量，由麦氏方程 $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$ 可得

$$\nabla \times \vec{E} = (\nabla_t + \nabla_z) \times \vec{E}_t = \nabla_t \times \vec{E}_t + \nabla_z \times \vec{E}_t$$

取上式中的纵向分量可得 $\nabla_t \times \vec{E}_t = 0$ ，可知 \vec{E}_t 必然是有位无旋场，可用标量位函数 $\Phi(r, \varphi)$ 的梯度来表示，即 $\vec{E}_t(r, \varphi) = -\nabla_t \Phi(r, \varphi)$ 。又因 $\nabla_t \cdot \vec{E}_t = 0$ ， $\Phi(r, \varphi)$ 满足 Laplace 方程： $\nabla_t^2 \Phi(r, \varphi) = 0$ ，即

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \text{ 边界条件设为 } \Phi = \begin{cases} V_0 & r = a \\ 0 & r = b \end{cases}$$

因同轴线是轴对称的，Φ与坐标φ无关，有 $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$ ，上式第二项为 0。

$\Phi(r, \varphi)$ 的通解形式为： $\Phi(r, \varphi) = C_1 \ln r + C_2$

§ 3.4 同轴线

根据边界条件可以求得待定参数：

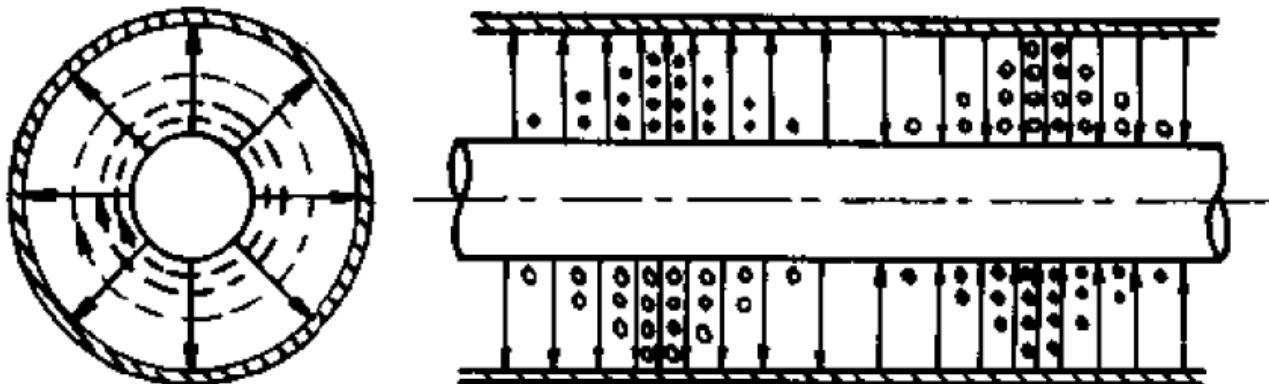
$$\begin{cases} C_1 \ln a + C_2 = V_0 \\ C_1 \ln b + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi(r, \varphi) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \ln \frac{b}{r}$$

由 $\Phi(r, \varphi)$ 与 $\vec{E}_t(r, \varphi)$ 的关系，仅进一步推导可得

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \frac{E_0}{r} \vec{i}_r e^{-\gamma z} \\ \vec{H}_t = \frac{H_0}{r} \vec{i}_\varphi e^{-\gamma z} \end{cases}$$

其中 $\begin{cases} E_0 = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \\ H_0 = \frac{E_0}{\eta} \end{cases}$

可见，同轴线的电场仅有 E_r 分量，磁场仅有 H_φ 分量，如图所示。



§ 3.4 同轴线

二、同轴线的传输特性

1、波导波长与相速度：

对于 TEM 波，因 $k_c = 0$ ，所以 $\beta = k$ ，且 $\lambda_c = \infty$ 。可知同轴线无截止现象，截止频率为 0，同轴线的主模是 TEM 波。

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k} = \lambda \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k} = v$$

2、特性阻抗

同轴线内外导体之间的电位差为

$$U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r dr = \eta H_0 \ln \frac{b}{a} e^{-\gamma z}$$

同轴线内导体上的总电流为

$$I = \int_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H_\phi r d\varphi = 2\pi H_0 e^{-\gamma z}$$

特性阻抗为 $Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a}$

§ 3.4 同轴线

3、衰减常数 α

$$\alpha = \alpha_c \text{ (导体损耗)} + \alpha_d \text{ (介质损耗)}$$

α_c 主要由内导体表面产生，因为越接近内导体场强越强，内导体的表面电流密度比外导体大得多。

$$\alpha_c = \frac{R_s}{2\eta \ln(b/a)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad \alpha_d = \frac{\beta t g \delta}{2} = \frac{k t g \delta}{2} = \frac{\pi t g \delta}{\lambda}$$

在固定 b 不变（外导体尺寸不变）下，使 α_c 最小的条件是 $\partial \alpha_c / \partial a = 0$ ，可得空气同轴线导体损耗最小的尺寸条件为 $(b/a) = 3.591$ ，相应的特性阻抗为 $Z_0 = 76.71 \Omega$ 。

计算表明： (b/a) 在一个比较宽的范围内变化， α_c 最小值基本不变，例如 (b/a) 在 $[3.2, 4.1]$ 变化， α_c 最小值的变化小于 0.5% 。

§ 3.4 同轴线

4、功率容量 P_{br}

$K=1$ 时，极限功率容量为 $P_{br} = \frac{1}{2} \frac{|U_{br}|^2}{Z_0}$ 。

由于内导体表面的场较集中，故容易在内导体面上发生功率击穿。

这里令 E_{br} 和 U_{br} 分别表示击穿电场和击穿电压，则

因为 $E_{br} = E_0 / r$ ，可得 $E_{br}a = E_0 = U_{br} / \ln(b/a)$ ，即 $U_{br} = E_{br}a \ln(b/a)$

$$P_{br} = \frac{a^2 E_{br}^2}{120} \sqrt{\epsilon_r} \ln \frac{b}{a}$$

在固定 b 不变 下，使 P_{br} 最大的条件是 $\partial P_{br} / \partial a = 0$ ，可得空气同轴线功率最大的尺寸条件为 $(b/a) = 1.649$ ，相应的特性阻抗为 $Z_0 = 30\Omega$ 。

为了兼顾 P_{br} 和 α_c ，通常取 $(b/a) = 2.303$ ，此时有 $Z_0 = 50\Omega$ (空气)。

§ 3.4 同轴线

三、同轴线的高次模

在一定尺寸条件下，随着工作频率的升高，同轴线也会出现 TE 和 TM 的高次模。实用中，这些高次模通常是截止的，只在不连续性或激励源附近起电抗作用，但是对同轴线的应用必须了解这些高次模。

与圆波导分析过程相同，主要区别在于 **Bessel** 方程的求解上，即

$$R(r) = C_3 J_m(k_c r) + C_4 N_m(k_c r)$$

由于 $r=0$ (内导体的内部) 不在求解区域内，所以不会出现 $N_m(k_c r) \rightarrow -\infty$ 的情况，因而 C_4 不能等于 0。

§ 3.4 同轴线

1、TM 波

E_z 分量可写成
$$E_z(r, \varphi, z) = C [C_3 J_m(k_c r) + C_4 N_m(k_c r)] \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\gamma z}$$

由边界条件 $E_z|_{r=a,b} = 0$, 可得
$$\begin{cases} C_3 J_m(k_c a) + C_4 N_m(k_c a) = 0 \\ C_3 J_m(k_c b) + C_4 N_m(k_c b) = 0 \end{cases}.$$

以上齐次方程中 C_3 和 C_4 要有非零解, 则方程的系数行列式应等于 0, 即

$$\begin{vmatrix} J_m(k_c a) & N_m(k_c a) \\ J_m(k_c b) & N_m(k_c b) \end{vmatrix} = 0$$

从而得到求解 k_c 的超越方程为
$$\frac{J_m(k_c a)}{J_m(k_c b)} = \frac{N_m(k_c a)}{N_m(k_c b)}$$

该方程称为特征方程, 其解有无穷多, 每个解确定一个 k_c 。

当 $k_c a$ 和 $k_c b$ 比较大时, 可近似式求出

$$k_c \approx \frac{n\pi}{b-a}, \quad \lambda_c \approx \frac{2}{n}(b-a), \quad n=1,2,3,\dots$$

最低型 TM 波为 E_{01} 波, 其 $\lambda_{cE01} \approx 2(b-a)$ 。显然, TM 高次模与 m 无关, 这意味着若出现了 E_{01} 波, 则会同时出现其它 E_{m1} 波。

同轴线

2、TE 波

$$\mathbf{H}_z \text{ 分量可写成} \quad H_z(r, \varphi, z) = C [C_3 J_m(k_c r) + C_4 N_m(k_c r)] \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-\gamma z}$$

由边界条件 $\left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=a,b} = 0$, 可得

$$\begin{cases} C_3 J'_m(k_c a) + C_4 N'_m(k_c a) = 0 \\ C_3 J'_m(k_c b) + C_4 N'_m(k_c b) = 0 \end{cases}$$

若 C_3 和 C_4 要有非零解, 则方程的系数行列式应等于 0, 即

$$\begin{vmatrix} J'_m(k_c a) & N'_m(k_c a) \\ J'_m(k_c b) & N'_m(k_c b) \end{vmatrix} = 0, \text{ 可得超越方程为 } \frac{J'_m(k_c a)}{J'_m(k_c b)} = \frac{N'_m(k_c a)}{N'_m(k_c b)}$$

该方程解有无穷多, 每个解确定一个 k_c 。

当 $m \neq 0, n=1$ 时, 可近似求得 \mathbf{H}_{m1} 的 $\lambda_{cHm1} \approx \frac{\pi}{m}(a+b)$, $m=1, 2, 3, \dots$, 其中

$\lambda_{cH11} \approx \pi(a+b)$ 的波长最长, 所以 \mathbf{H}_{11} 为第一高次模。

当 $m=0$ 时, 有 $\begin{vmatrix} J'_0(k_c a) & N'_0(k_c a) \\ J'_0(k_c b) & N'_0(k_c b) \end{vmatrix} = 0 \stackrel{J'_0=-J_1}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} J_1(k_c a) & N_1(k_c a) \\ J_1(k_c b) & N_1(k_c b) \end{vmatrix} = 0$, 显然表明

\mathbf{H}_{0n} 和 \mathbf{E}_{1n} 的 k_c 相同, 即 $\lambda_{cH0n} \approx \frac{2}{n}(b-a)$, \mathbf{H}_{0n} 和 \mathbf{E}_{1n} 是简并的。

§ 3.5 波导本征模的特性

规则金属波导中的 TE 和 TM 是麦克斯韦方程的两套独立解，因此可认为是规则金属波导的基本波型。它们都包含无穷多个结构不同的模式，模式彼此相互独立，可以单独存在，也可以同时并存，这一个模式称为本征模。

1、对称性

波导本征模的电场和磁场相对时间和距离具有对称性和反对称性。这种对称性的根源是麦克斯韦方程的对称性和规则波导的对称性。

①. 本征模的电场和磁场的波函数对时间 t 分别为对称函数和反对称函数，既有

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, -t) \quad \text{或者} \quad \vec{E}_2(\vec{r}) = \vec{E}_1^*(\vec{r})$$
$$\vec{H}_2(\vec{r}, t) = -\vec{H}_1(\vec{r}, -t) \quad \vec{H}_2(\vec{r}) = -\vec{H}_1^*(\vec{r})$$

式中 $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ 、 $\vec{H}_1(\vec{r}, t)$ 是时间为 $+t$ 的场， $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ 、 $\vec{H}_2(\vec{r}, t)$ 是时间为 $-t$ 的场；符号*代表共轭复数。

§ 3.5 波导本征模的特性

②. 本征模的电场和磁场的波函数关于纵坐标 z 的对称性:

横向电场 \vec{E}_t 和纵向磁场 H_z 是纵坐标 z 的对称函数, 横向磁场 \vec{H}_t 和纵向电场 E_z 是纵坐标 z 的反对称函数。

$$\vec{E}_{t2}(z) = \vec{E}_{t1}(-z), \quad H_{z2}(z) = H_{z1}(-z)$$

$$E_{z2}(z) = -E_{z1}(-z), \quad \vec{H}_{t2}(z) = -\vec{H}_{t1}(-z)$$

式中 $\vec{E}_{t1}(z)$ 、 $E_{z1}(z)$ 、 $\vec{H}_{t1}(z)$ 和 $H_{z1}(z)$ 是沿 $+z$ 方向传播的场, $\vec{E}_{t2}(z)$ 、 $E_{z2}(z)$ 、 $\vec{H}_{t2}(z)$ 和 $H_{z2}(z)$ 是沿 $-z$ 方向传播的场。

若时间 t 和坐标 z 同时变换符号, 则对称性变成

$$\vec{E}_{t2m} = \vec{E}_{t1m}^*, \quad \vec{H}_{t2m} = \vec{H}_{t1m}^*$$

$$E_{z2m} = -E_{z1m}^*, \quad H_{z2m} = -H_{z1m}^*$$

下标 m 表示模式指数。可见, 横向场 \vec{E}_{tm} 和 \vec{H}_{tm} 必须是实数, 而纵向场 E_{zm} 和 H_{zm} 必须是虚数。可得结论: 本征模的电场和磁场的横向分量或纵向分量之间相互同相, 而横向分量与纵向分量成 90° 相位差。只有这样, $\vec{E}_m \times \vec{H}_m$ 才能传输能量。

§ 3.5 波导本征模的特性

③对于消失波，不存在坐标 z 的符号变换问题，只有时间对称关系：

$$\vec{E}_{2m}(t) = \vec{E}_{1m}^*(t) \quad \vec{H}_{2m}(t) = -\vec{H}_{1m}^*(t)$$

可见， \vec{E}_m 是实数， \vec{H}_m 是虚数，二者相位差 90° ，所以对于消失波， $\vec{E}_m \times \vec{H}_m$ 不能传输能量，而是虚功，是储能。

2、正交性

正交性是本征模的一种基本特性，在确定组成波导中的电磁场各模式的系数时，必须应用本征模的正交性进行系数求解。

矩形波导的本征函数是正弦和余弦函数，圆波导的本征函数是贝塞尔函数与正弦、余弦函数。这些本征函数都具有正交性，因此使用这些函数表征的矩形波导和圆波导的本征模必然具有正交性。

§ 3.5 波导本征模的特性

若以 i 和 j 代表两个特定的模式, 则本征模的正交性可用以下四种形式来表示:

$$(1). \begin{cases} \int_S [H_z(\mu, \nu)]_i \cdot [H_z(\mu, \nu)]_j dS = 0 & i \neq j \\ \int_S [E_z(\mu, \nu)]_i \cdot [E_z(\mu, \nu)]_j dS = 0 & i \neq j \end{cases} \quad TE$$

$$(2). \begin{cases} \int_S [\vec{H}_t(\mu, \nu)]_i \cdot [\vec{H}_t(\mu, \nu)]_j dS = 0 & i \neq j \\ \int_S [\vec{E}_t(\mu, \nu)]_i \cdot [\vec{E}_t(\mu, \nu)]_j dS = 0 & i \neq j \end{cases} \quad TE \text{或} TM$$

$$(3). \begin{cases} \int_S [\vec{H}_t^{TE}(\mu, \nu)]_i \cdot [\vec{H}_t^{TM}(\mu, \nu)]_j dS = 0 & i \neq j \\ \int_S [\vec{E}_t^{TE}(\mu, \nu)]_i \cdot [\vec{E}_t^{TM}(\mu, \nu)]_j dS = 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$(4). \int_S [\vec{E}_t(\mu, \nu)]_i \times [\vec{H}_t(\mu, \nu)]_j \cdot d\vec{S} = 0 \quad i \neq j \quad TE \text{或} TM$$

式中 S 为波导的横截面。

§ 3.5 波导本征模的特性

3、完备性

波导中的电磁场至少是分段连续的，或者说是平方可积的，而且物理世界中的电磁场都是能量有限的。

在横向，每一个波导本征模都是两个正交方向的本征函数，而本征函数系是完备的，所以本征模必然是完备的，也就是说，波导中的任意电磁场都可以用本征模的展开式来表示。

波导中任意场的总传输功率等于每个本征模所携带传输功率之和，而各个本征模之间没有能量的耦合。

§ 3.6 波导的激励

一、激励问题简介

激励：在波导中建立起所需要的电磁波模式。

耦合：从波导中提取特定电磁场模式的能量。

根据互易原理，线性系统中的激励和耦合过程是可逆的。

激励问题必须考虑波源的影响，即求解要包括源所在的空间，则

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = j\omega \varepsilon \vec{E} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} - \vec{J}^* \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = \rho^* \end{array} \right.$$

式中，磁流 $\vec{J}^* = -\partial \vec{B}_0 / \partial t$ ，磁荷 $\rho^* = \nabla \cdot \vec{B}_0$ （即磁荷的高斯定理）， $\vec{B}_0 = \mu \vec{H}_0$ ， \vec{H}_0 代表局部变化的磁场。 \vec{J} 是体电流源。

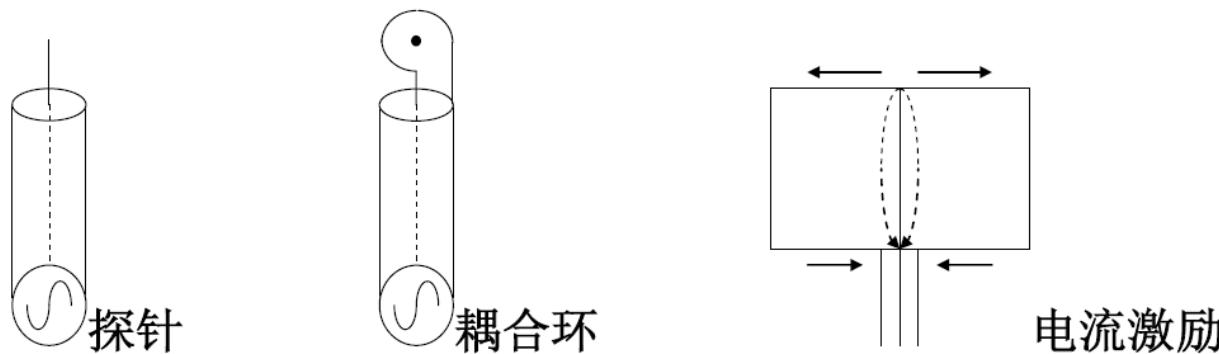
波导的激励（excitation of waveguides）本质上是电磁波的辐射，是源在波导内壁所限定的有限空间中辐射。从对激励的要求来说，是在波导中激发所需要的电磁波模式，最好还抑制其它模式。即使在很简单的情况下，激励问题的求解都很困难，只能采用近似解。

§ 3.6 波导的激励

二、波导激励的方法、装置和准则

波导中某种模式的激励是建立在已知此模式的场结构基础上的：

- 1、电激励：使激发的电场分布和所需模式的电场分布一致。探针激励（可等效为一电偶极子）是电激励的典型例子。
- 2、磁激励：使激发的磁场分布和所需模式的磁场分布一致。耦合环激励（可等效为一磁偶极子）是磁激励的典型例子。
- 3、电流激励：在波导壁或以内激发的电流分布与所需模式的电流分布一致。



激励遵循“奇偶禁戒”准则：

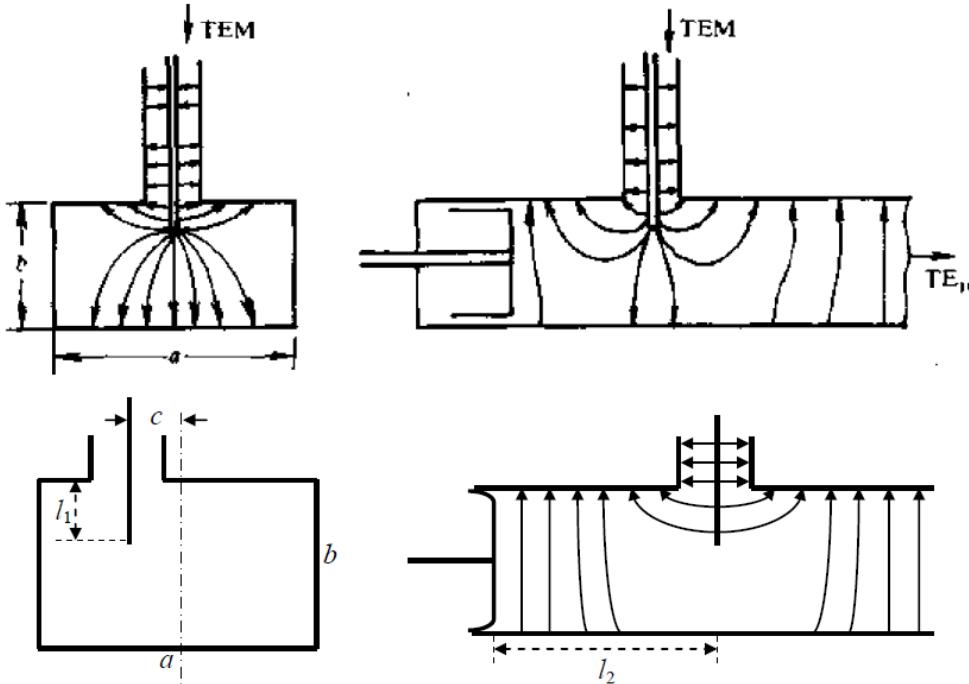
- (1)、偶激励（或称对称激励）不可能激励起奇（反对称）模；
- (2)、奇激励（或称反对称激励）不可能激励起偶（对称）模。

§ 3.6 波导的激励

三、矩形波导 TE_{10} 模的激励

1、探针激励

也称为同轴到波导的转换，可以将同轴线和矩形波导进行连接，如图所示。



探针的作用相当于一个小天线，可近似解得其辐射电阻为

$$R_r = \frac{2k\eta}{ab\rho} l_1^2 \cos \frac{\pi c}{a} \sin^2 \beta l_2$$

式中， R_r 越大，代表辐射功率越大。可见， l_1 越大（探针深入波导内部），则 R_r 越大； c 越小， R_r 也越大， $c=0$ 时最大，但是 $c \neq 0$ 的带宽要宽一些。

§ 3.6 波导的激励

当 $l_2 = (2n+1)\lambda_g/4$ 时，满足 $2\beta l_2 - \pi = 2m\pi$ （注：活塞短路面 $\Gamma = -1$ 有 π 相差）

从波动的角度来看，上式表明探针直接向右辐射的 TE_{10} 波和由短路活塞反射回来的 TE_{10} 波之间相差 $2m\pi$ ，同相迭加后可以使得探针向右的辐射最大。

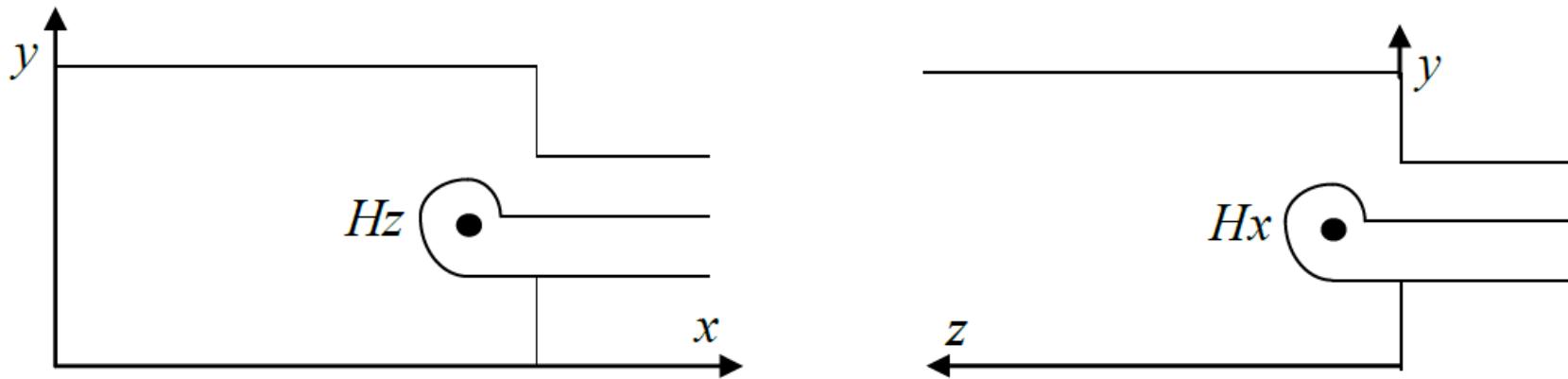
从阻抗的角度来看，探针末端附近电场有较强的沿 z 轴的分量，说明有占优势的高次模存在，并表现出有较多的电能，故呈现出容抗的特性。短路活塞可以提供感抗来抵消这个容抗，使得同轴线和波导之间获得匹配。

探针附近的高次模是非传输型波，即消失波，不参与能量的传输。

若探针由波导宽边中心线伸入，这是一种对称激励情况。按照“奇偶禁戒”准则，探针只能激励起 m 为奇数的对称模式 TE_{10} 、 TE_{30} 、……，等等，而不会激励出 m 为偶数的反对称模式。

§ 3.6 波导的激励

2、耦合环激励



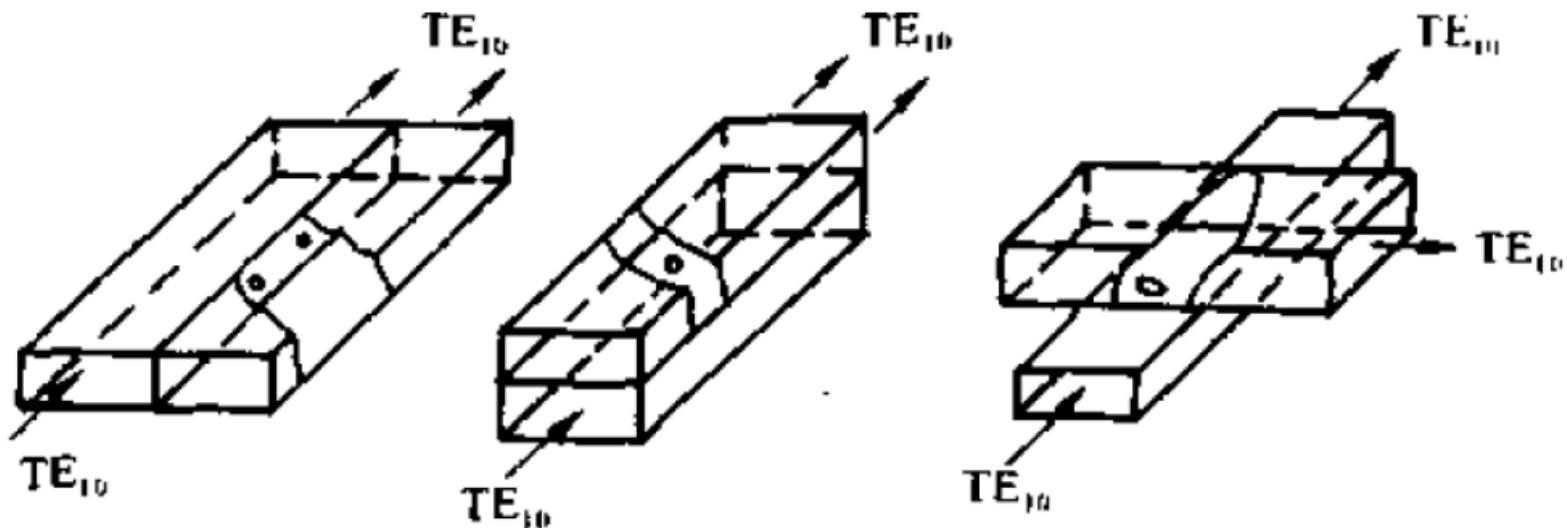
当耦合环中流过电流时，便激励起 TE_{10} 波的纵向磁场 H_z 或者横向磁场 H_x 。

磁耦合匹配困难，耦合较松，对频率比较敏感，功率容量小，因此一般仅用在松耦合的小功率场合。

§ 3.6 波导的激励

3、小孔激励

波导或其他导行系统常用小孔或缝隙来进行激励，如图所示。



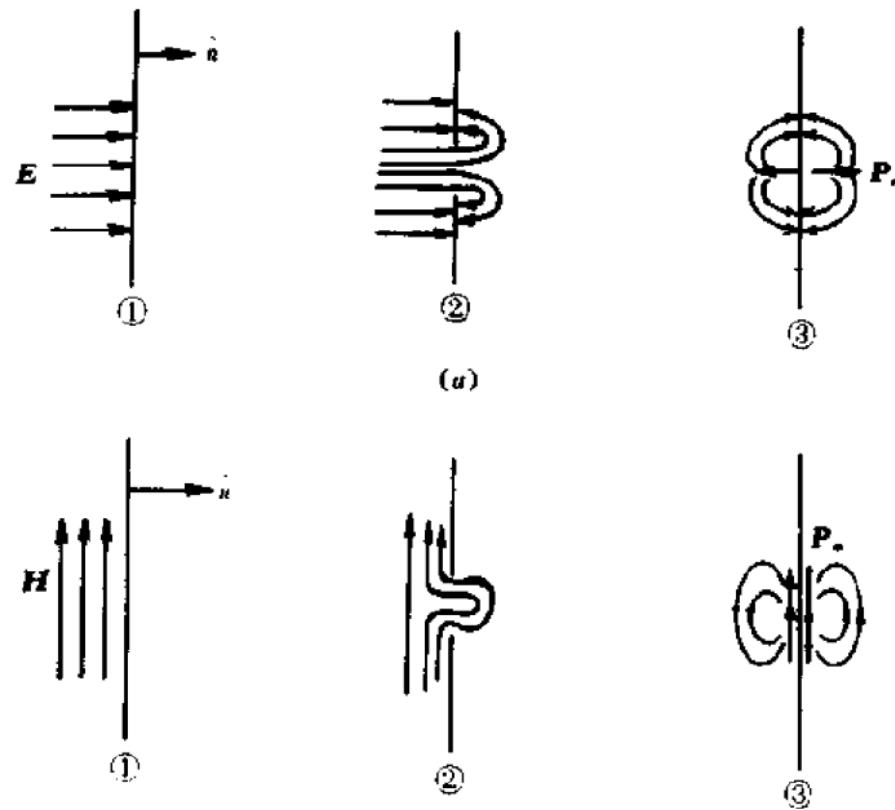
§ 3.6 波导的激励

严格求解小孔激励的场很困难，实际常引入 Bethe 小孔绕射理论（一级近似），小孔可以等效为一无限小的电偶极子和一无限小的磁偶极子，如图所示。

法向电场通过小孔激励可用两个相反方向的无限小 电矩 \vec{P}_e 来等效，且 $\vec{P}_e = -\varepsilon \alpha_e (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n}$ ，式中 α_e 为小孔的电极化率，对于半径为 r_0 的圆形小孔， $\alpha_e = -2r_0^3/3$

同样，切向磁场通过小孔激励可用两个相反方向的无限小 磁矩 \vec{P}_m 来等效，且 $P_m = -\alpha_m (\vec{n} \times \vec{H})$ ，式中 α_m 为小孔的磁极化率，对于圆形小孔有 $\alpha_m = 4r_0^3/3$ 。

由此产生极化电流为 $\vec{J} = j\omega \vec{P}_e$ 和极化磁流为 $\vec{J}^* = j\omega \mu \vec{P}_m$ ，可以用于计算小孔的另一边所激励的电磁场分布。



§ 3.7 波导的损耗问题

规则金属波导的主要损耗（或衰减）有：

传输模式的导体损耗和介质损耗；消失波的电抗性衰减。

1、导体损耗

假定 P_0 为金属波导输入端的传输功率，沿波导传输的功率按指数规律衰减（参见第 2 章传输效率的公式），则在 z 处的功率为

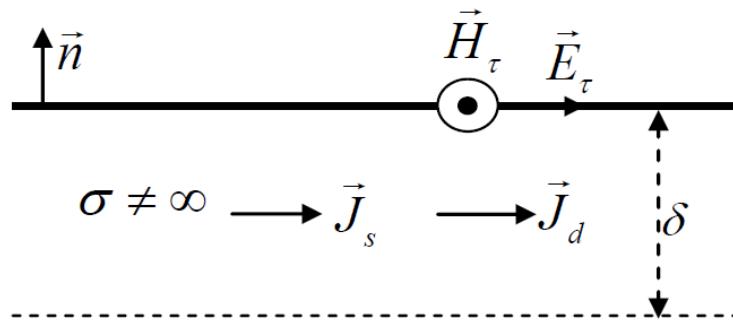
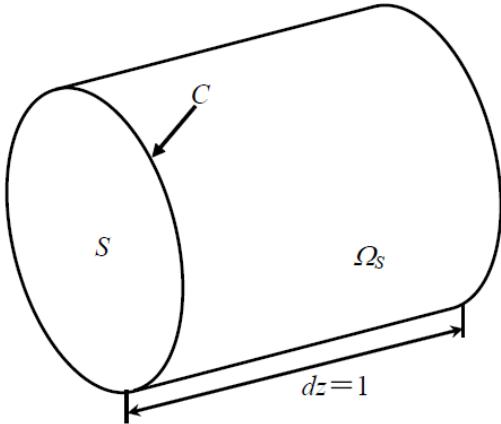
$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha_c z}$$

可得 $\frac{\partial P(z)}{\partial z} = -2\alpha_c P(z) = -P_L$ ，式中 P_L 为波导内单位长功率损耗。

当 α_c 较小时（低损情况），近似可得 $\alpha_c = P_L / 2P(z) \approx P_L / 2P_0$

金属波导的传输功率为： $P_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_s \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \cdot d\vec{S} \right] = \begin{cases} \frac{Z_H}{2} \int_s |H_t|^2 dS & TE \\ \frac{Y_E}{2} \int_s |E_t|^2 dS & TM \end{cases}$

§ 3.7 波导的损耗问题



如图所示，取一段单位长度的规则波导（左图），其横截面为 S ， C 为 S 的周界，内壁的侧表面积为 Ω_s ，且取 $d\Omega_s = dz dl$ 。由于 $\sigma \neq \infty$ ，导体表面存在切向的电场和磁场（右图）并进入导体内部。其中，由导体表面附近的切向电场 \vec{E}_τ 产生的传导型电流 $\vec{J}_d = \sigma \vec{E}_\tau$ 分布在整个趋肤深度 δ 以内，它是产生导体损耗的根本原因。而由切向磁场 \vec{H}_τ 产生的感应电流 $\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}_\tau$ 不会产生损耗。单位长损耗功率可表示为

$$P_L = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} R_s |\vec{J}_s|^2 ds = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} R_s |\vec{H}_\tau|^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_c R_s |\vec{H}_\tau|^2 dl = \frac{1}{2} \int_c R_s |\vec{H}_\tau|^2 dl$$

式中 R_s 为表面电阻率 (Ω/m^2)， $R_s = \sqrt{\omega \mu / 2\sigma} = 1/\sigma\delta$ 。

§ 3.7 波导的损耗问题

$$\text{TE 波: } \alpha_c = \frac{R_s \int_c |\vec{H}_\tau|^2 dl}{2Z_H \int_s |\vec{H}_t|^2 ds}$$

$$\text{TM 波: } \alpha_c = \frac{R_s \int_c |\vec{H}_\tau|^2 dl}{2Y_E \int_s |\vec{E}_t|^2 ds}$$

上述 \vec{E}_τ 、 \vec{H}_τ 和 \vec{E}_t 、 \vec{H}_t 都是真实有损边界下的电磁场分量，即在有损边界条件下， \vec{E}_τ 、 \vec{H}_τ 和 \vec{E}_t 、 \vec{H}_t 再也不是无损情况下的本征解，这是十分复杂的电磁场边值问题，一般无法求解。

这里采取微扰 (Perturbation)方法的思想，就是在导体损耗比较小的情况下，可以忽略波导壁的不完全导电性对波导内部的场分布和靠近波导壁磁场的影响，而不完全导电波导内壁形成的切向电场 \vec{E}_τ 贡献的损耗，可由表面电阻 R_s 和切向磁场 \vec{H}_τ 共同来表示。

这样就能比较方便运用无损边界的场分布来近似替代有损边界的真实场分布，如此等效后， \vec{H}_τ 就和 \vec{H}_t 中的相应分量相同了。

§ 3.7 波导的损耗问题

2、介质损耗

因波导内部填充介质的 $\sigma_d \neq 0$, 将在介质内产生漏电流 $\sigma_d \vec{E}$, 则

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + \sigma_d\vec{E} = j\omega\epsilon(1 - j\frac{\sigma_d}{\omega\epsilon})\vec{E} = j\omega\epsilon'\vec{E}$$

根据规则波导的色散关系式, 可得传播常数 γ 为

$$\begin{aligned}\gamma &= \left[k_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma_d}{\omega \epsilon} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = j \left[k^2 (1 - jt g \delta) - k_c^2 \right]^{\frac{1}{2}} = jk \left[1 - \left(k_c/k \right)^2 - jt g \delta \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= jk \sqrt{1 - \left(k_c/k \right)^2} \left[1 - \frac{jt g \delta}{1 - \left(k_c/k \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \approx jk \sqrt{1 - \left(k_c/k \right)^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{jt g \delta}{1 - \left(k_c/k \right)^2} \right]\end{aligned}$$

取实部得 $\alpha_d \approx \frac{ktg\delta}{2\sqrt{1 - (k_c/k)^2}} = \frac{\pi tg \delta}{\lambda \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$ (注意与第 2 章 $\alpha_d = \frac{\pi tg \delta}{\lambda}$ 区别)

在厘米波段及以下, 介质损耗与导体损耗相比一般可以忽略不计。但是到了毫米波段, 随着频率的升高, 介质损耗也不能忽略了。

§ 3.7 波导的损耗问题

3、消失波的衰减

在截止状态下， $k_c > k$, $\lambda_c < \lambda$, 则对于色散关系式 $\gamma^2 = k_c^2 - k^2$, 有

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \alpha > 0 \text{ 为实数, 且为 } \alpha = k_c \sqrt{1 - \left(\frac{k}{k_c}\right)^2} = k_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2}$$

可见 λ 越大, 截止越深, α 也越大, 衰减越快, 这是一种虚功损耗, 起到一种储能作用。

此时波导波阻抗为纯电抗, 即

$$\text{TE 波, } Z_H = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\alpha} \text{ 为感性; TM 波, } Z_E = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = -\frac{j\alpha}{\omega\epsilon} \text{ 为容性。}$$

可以证明, 截止时:

对于 TE 波有磁储能大于电储能, 即 $W_H > W_E$ 。

对于 TM 波有电储能大于磁储能, 即 $W_E > W_H$ 。

§ 3.8 广义传输线理论

由 Maxwell 方程 $\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{array} \right.$ ，并令 $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_t + \vec{i}_z E_z \\ \vec{H} = \vec{H}_t + \vec{i}_z H_z \end{array} \right.$ ，可得 $\nabla = \nabla_t + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$

$$\left(\nabla_t + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\vec{H}_t + \vec{i}_z H_z \right) = \nabla_t \times \vec{H}_t + \nabla_t \times \left(\vec{i}_z H_z \right) + \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} \triangleq j\omega \epsilon \left(\vec{E}_t + \vec{i}_z E_z \right)$$

把方程两边的横向分量和纵向分量分开，重写前两个 Maxwell 方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_t \times \vec{H}_t = j\omega \epsilon \vec{i}_z E_z \\ \nabla_t \times \left(\vec{i}_z H_z \right) + \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega \epsilon \vec{E}_t \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_t \times \vec{E}_t = -j\omega \mu \vec{i}_z H_z \\ \nabla_t \times \left(\vec{i}_z E_z \right) + \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega \mu \vec{H}_t \end{array} \right.$$

下面分 TEM、TE 和 TM 三种情况分别进行讨论。

§ 3.8 广义传输线理论

1、TEM 情况

TEM 只有电磁场的横向分量，即 $E_z=0, H_z=0$ ，则有

$$\vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon \vec{E}_t \quad \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu \vec{H}_t$$

令 $\vec{E}_t = \vec{e}_t u(z)$, $\vec{H}_t = \vec{h}_t i(z)$ ，其中 \vec{e}_t 是 \vec{E}_t 随横向坐标 (μ, ν) 的变化函数（称为 \vec{E}_t 的模式函数或本征函数）， $u(z)$ 是 \vec{E}_t 随 z 坐标的变函数（称为模式电压）；而 \vec{h}_t 是 \vec{H}_t 随横向坐标的变化函数（称为 \vec{H}_t 的模式函数或本征函数）， $i(z)$ 是 \vec{H}_t 随 z 坐标的变函数（称为模式电流）。

\vec{e}_t 和 \vec{h}_t 满足归一化约束条件： $\int_s \vec{e}_t \times \vec{h}_t \cdot \vec{i}_z dS = 1$ ，其中 S 为横截面。

代入上式可得

$$\vec{i}_z \times \vec{h}_t \frac{di(z)}{dz} = j\omega\epsilon \vec{e}_t u(z) \quad \vec{i}_z \times \vec{e}_t \frac{du(z)}{dz} = -j\omega\mu \vec{h}_t i(z)$$

§ 3.8 广义传输线理论

对以上左式两边点乘 \vec{e}_t ，对右式两边点乘 \vec{h}_t ，都做 $\int_s dS$ 积分，可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_s \vec{i}_z \times \vec{h}_t \cdot \vec{e}_t dS \frac{di(z)}{dz} = j\omega \varepsilon \int_s \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t dS u(z) \\ \int_s \vec{i}_z \times \vec{e}_t \cdot \vec{h}_t dS \frac{du(z)}{dz} = -j\omega \mu \int_s \vec{h}_t \cdot \vec{h}_t dS i(z) \end{array} \right.$$

由矢量混合积法，可知 $\left\{ \begin{array}{l} \int_s \vec{i}_z \times \vec{h}_t \cdot \vec{e}_t dS = - \int_s (\vec{e}_t \times \vec{h}_t) \cdot \vec{i}_z dS = -1 \\ \int_s \vec{i}_z \times \vec{e}_t \cdot \vec{h}_t dS = \int_s (\vec{e}_t \times \vec{h}_t) \cdot \vec{i}_z dS = 1 \end{array} \right.$

若令 $L = \mu \int_s \vec{h}_t \cdot \vec{h}_t dS$, $C = \varepsilon \int_s \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t dS$, 最后可导出

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{du(z)}{dz} = j\omega L i(z) \\ -\frac{di(z)}{dz} = j\omega C u(z) \end{array} \right.$$

上式就是无损条件下的 TEM 波广义传输线方程。

§ 3.8 广义传输线理论

2、TE 情况

TE 下有 $E_z=0, H_z\neq 0$, 则有

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\vec{H}_t \\ \nabla_t \times (\vec{i}_z H_z) + \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon\vec{E}_t \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\nabla_t \times \vec{E}_t = -j\omega\mu\vec{i}_z H_z \quad (2)$$

对(2)式左边取旋度, 可得 $\nabla_t \times \nabla_t \times \vec{E}_t = \nabla_t (\nabla_t \cdot \vec{E}_t) - \nabla_t^2 \vec{E}_t = -\nabla_t^2 \vec{E}_t$

则 $\nabla_t \times (\vec{i}_z H_z) = \frac{\nabla_t^2 \vec{E}_t}{j\omega\mu}$, 代入(1)式, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon \left(\vec{E}_t + \frac{\nabla_t^2 \vec{E}_t}{k^2} \right) \\ \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\vec{H}_t \end{array} \right.$$

与 TEM 的推导相同, 只是令 $\left\{ \begin{array}{l} L = \mu \int_s \vec{h}_t \cdot \vec{h}_t dS \\ C = \varepsilon \int_s \left(\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t + \vec{e}_t \cdot \frac{\nabla_t^2 \vec{e}_t}{k^2} \right) dS \end{array} \right.$, 可得前述相

同形式的无损条件 TE 波广义传输线方程。

§ 3.8 广义传输线理论

3、TM 情况

TM 下有 $E_z \neq 0, H_z = 0$, 则有

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega \epsilon \vec{E}_t \\ \nabla_t \times (\vec{i}_z E_z) + \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega \mu \vec{H}_t \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\nabla_t \times \vec{H}_t = j\omega \epsilon \vec{i}_z E_z \quad (2)$$

对(2)式左边取旋度, 可得 $\nabla_t \times \nabla_t \times \vec{H}_t = \nabla_t (\nabla_t \cdot \vec{H}_t) - \nabla_t^2 \vec{H}_t = -\nabla_t^2 \vec{H}_t$

则 $\nabla_t \times (\vec{i}_z E_z) = -\frac{\nabla_t^2 \vec{H}_t}{j\omega \epsilon}$, 代入(1)式, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega \epsilon \vec{E}_t \\ \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega \mu \left(\vec{H}_t + \frac{\nabla_t^2 \vec{H}_t}{k^2} \right) \end{array} \right.$$

与 TEM 的推导相同, 只是令 $\left\{ \begin{array}{l} L = \mu \int_s \left(\vec{h}_t \cdot \vec{h}_t + \vec{h}_t \cdot \frac{\nabla_t^2 \vec{h}_t}{k^2} \right) dS \\ C = \epsilon \int_s \vec{e}_t \cdot \vec{e}_t dS \end{array} \right.$, 可得前述相同形

式的无损条件 TM 波广义传输线方程。

§ 3.8 广义传输线理论

总结归纳：

不论是 TEM、TE 或者 TM 情况，均可使用下式

$$\begin{cases} L = \mu \int_s \left(\vec{h}_t \cdot \vec{h}_t + \vec{h}_t \cdot \frac{\nabla_t^2 \vec{h}_t}{k^2} \right) dS \\ C = \varepsilon \int_s \left(\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t + \vec{e}_t \cdot \frac{\nabla_t^2 \vec{e}_t}{k^2} \right) dS \end{cases}$$

对于 TEM 恒有 $\begin{cases} \nabla_t^2 \vec{h}_t \equiv 0 \\ \nabla_t^2 \vec{e}_t \equiv 0 \end{cases}$ ，而对 TE 有 $\nabla_t^2 \vec{h}_t \equiv 0$ ，对 TM 有 $\nabla_t^2 \vec{e}_t \equiv 0$ 。

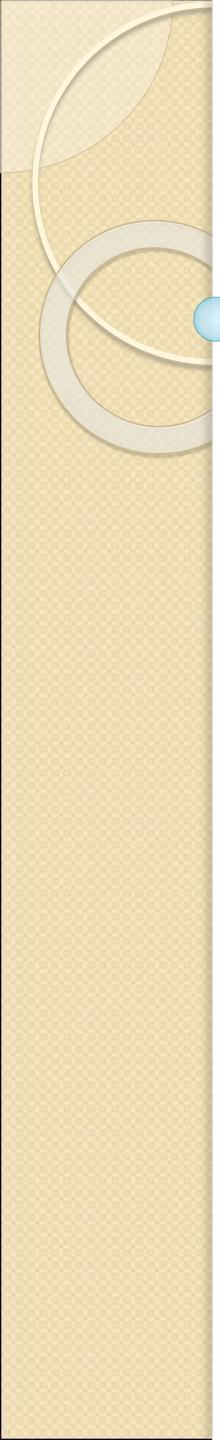
在归一化约束条件 $\int_s \vec{e}_t \times \vec{h}_t \cdot \vec{i}_z dS = 1$ 下，满足广义传输线方程

$$\begin{cases} -\frac{du(z)}{dz} = j\omega Li(z) \\ -\frac{di(z)}{dz} = j\omega Cu(z) \end{cases}$$

可见，在任意模式下，波导在 z 方向都可以作为广义传输线。也就是说，第二章所学的传输线理论方法都可以用到波导中来。



本章结束!



第四章 微波集成传输线

Microwave Integrated Transmission Lines

中国科学技术大学
电子工程与信息科学系

本章内容

§ 4.1 带状线

§ 4.2 微带线

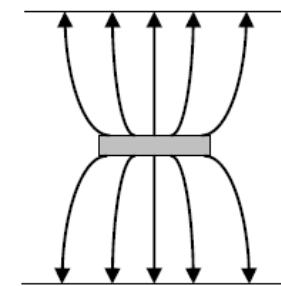
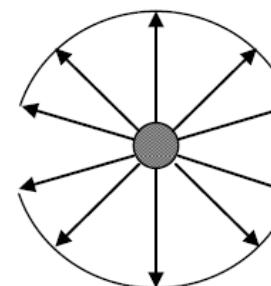
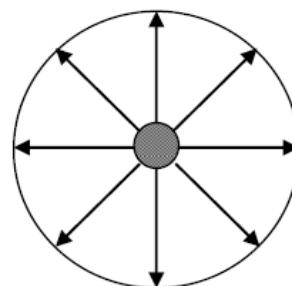
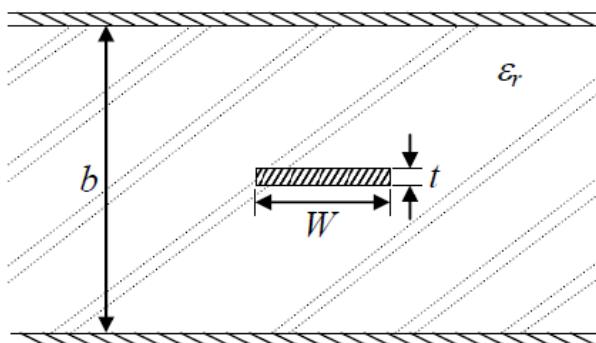
§ 4.3 耦合传输线

§ 4.4* 其它平面传输线

概述

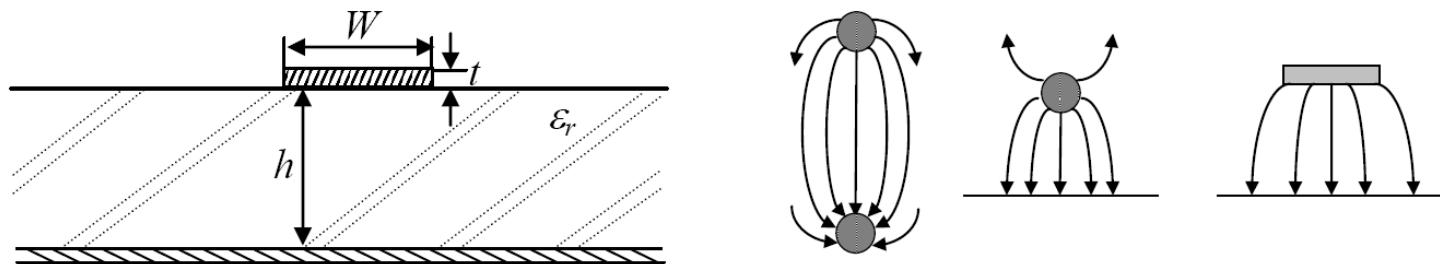
上世纪 50 年代以前，几乎所有的微波设备都采用金属波导或同轴线（立体型结构）来构建。随着航空航天技术的发展，要求微波电路与系统做到小型化、轻重量和性能可靠，因此必须设计新的导行系统，且应为平面型结构，以便于集成和规模生产。

50 年代初出现第一代微波印制传输线——带状线（Stripline），又称三板线，它可以看成是由同轴线演变而来的。

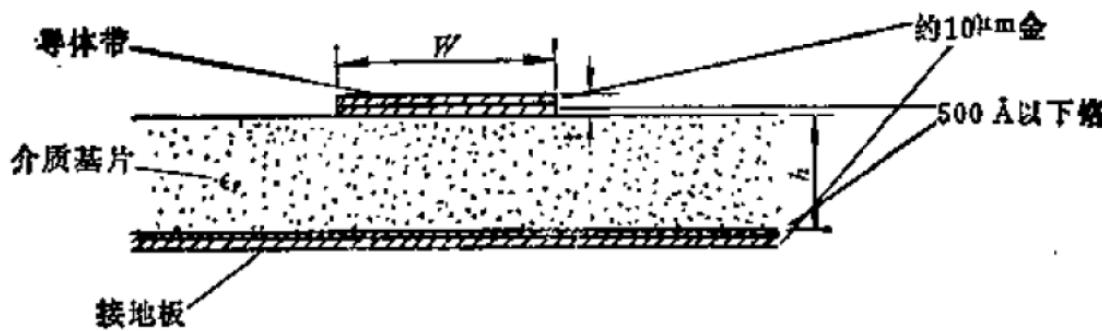


概述

60年代初出现第二代微波印制传输线——**微带线（Microstrip Line）**，它可以看成是由平行双导线演变而来的。



微带线电路具有体积小、重量轻、成本低、频带宽、可靠性高、稳定性好和易于重复制作等优点，缺点是损耗较大、Q值低、功率容量小等。

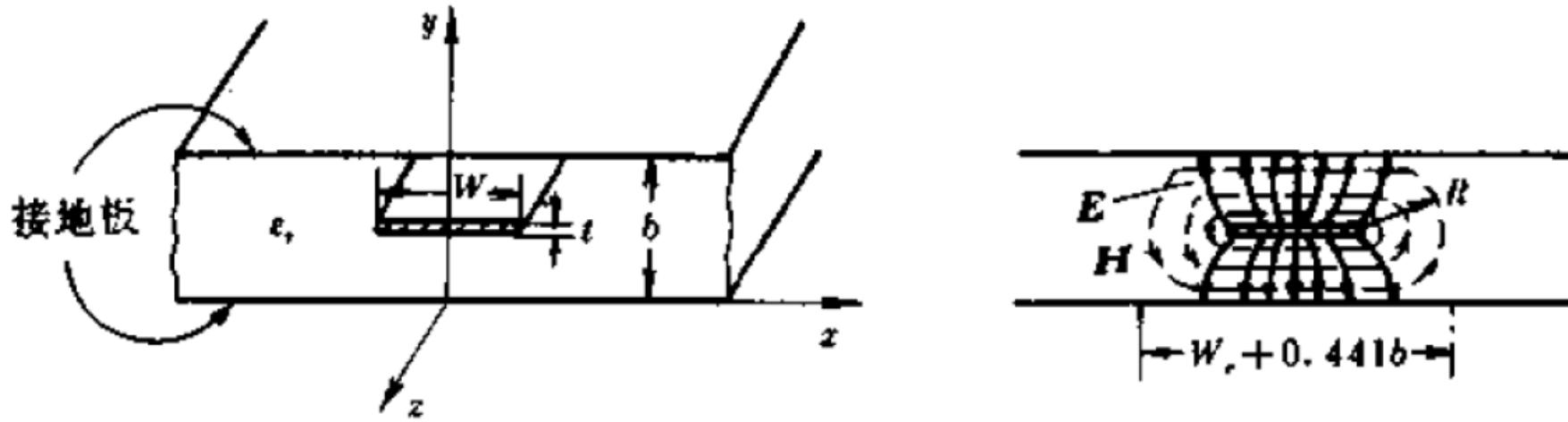


中心导体材料：银、铜、金、铝（粘附性差）；钨、钼、铬、钽（粘附性好）。

介质基片材料：使用最多的是氧化铝陶瓷 (Al_2O_3)、聚四氟乙烯玻璃纤维板。频率高于 12GHz 时采用石英，要求散热性好的较大功率电路可采用氧化铍。⁴

§ 4.1 带状线

如图所示,带状线具有两个导体,内部均匀介质填充,可传输 TEM 波(工作模式,即主模),也可存在高次型 TE 或 TM 模。对其 TEM 波特性,通过静态分析方法,例如保角变换等就可以获得带状线电路设计的全部数据。



带状线具有宽频带、高 Q 值(损耗较小)、高隔离(无辐射)等优点,但不便外接固态微波器件,因而不宜制作有源微波电路。

§ 4.1 带状线

一、带状线的特性阻抗

对于空气填充有 $\lambda_g = \lambda_0$ ，而对于某介质填充有 $\lambda_g = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_r}$ ，严格来说应是 $\lambda_g = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_e}$ ， ϵ_e 为带状线的有效介电常数。

相速度 $v_p = v = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = c / \sqrt{\epsilon_r}$ ，又 $v_p = 1 / \sqrt{L_1 C_1}$ 。

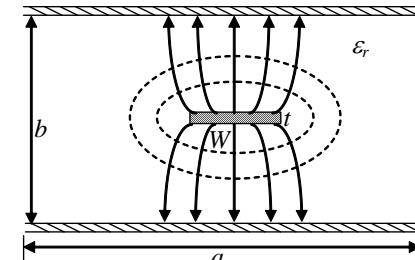
特性阻抗 $Z_0 = \sqrt{L_1 / C_1} = v_p L_1 = 1 / v_p C_1$ ，因此特性阻抗的计算可归结为单位长分布参数电容 C_1 的求解。

1、带状线特性阻抗的分析：

零厚度 ($t=0$) 导体带带状线 Z_0 的精确解，由保角变换法求得：

$$Z_0 \sqrt{\epsilon_r} = 30\pi \frac{K(k')}{K(k)} \quad \frac{K(k')}{K(k)} = \begin{cases} \left[\frac{1}{\pi} \ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{k'}}{1 - \sqrt{k'}} \right) \right]^{-1} & 0 \leq k' \leq 0.7 \\ \left[\frac{1}{\pi} \ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \right) \right]^{-1} & 0.7 \leq k' \leq 1 \end{cases}$$

式中， $k = th(\pi W / 2b)$ ， $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ， $K(k)$ 为第一类全椭圆积分， $K(k')$ 为第一类余椭圆积分。应用上式求解要计算椭圆函数，比较复杂，因而很少采用。6



§ 4.1 带状线

有限厚度导体带带状线 Z_0 的近似解, 由保角变换法求得:

$$Z_0 \sqrt{\varepsilon_r} = 30 \ln \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \frac{b-t}{W'} \left[\frac{8}{\pi} \frac{b-t}{W'} + \sqrt{\left(\frac{8}{\pi} \frac{b-t}{W'} \right)^2 + 6.27} \right] \right\}$$

其中

$$\frac{W'}{b-t} = \frac{W}{b-t} + \frac{\Delta W}{b-t}$$

$$\frac{\Delta W}{b-t} = \frac{x}{\pi(1-x)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{x}{2-x} \right)^2 + \left(\frac{0.0796x}{W/b + 1.1x} \right)^m \right] \right\}$$

$$m = 2 \left[1 + \frac{2}{3} \frac{x}{1-x} \right], \quad x = \frac{t}{b}$$

上述公式在 $W'/(b-t) < 10$ 范围, 精度可达 0.5%。

§ 4.1 带状线

2、带状线特性阻抗的综合：

零厚度带状线 Z_0 的综合闭式为：

$$\frac{W}{b} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arth}(s) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1+s}{1-s} \right)$$

其中

$$s = \begin{cases} \sqrt{1 - \left(\frac{e^A - 2}{e^A + 2} \right)^4} & A \geq \pi \\ \left(\frac{e^{\frac{\pi^2}{A}} - 2}{e^{\frac{\pi^2}{A}} + 2} \right)^2 & 0 \leq A \leq \pi \end{cases}$$

$$A = \frac{Z_0 \sqrt{\epsilon_r}}{30}$$

有限厚度带状线 Z_0 的综合闭式为：

$$\frac{W}{b} = \frac{W_0}{b} - \frac{\Delta W}{b}$$

其中， $\frac{W_0}{b} = \frac{8(1-x)}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{e^A + 0.568}}{e^A - 1}$ ，其它参数定义同前。

§ 4.1 带状线

二、带状线的损耗

对于 TEM 波，带状线损耗为 $\alpha = \alpha_c + \alpha_d = \frac{R_1}{2Z_0} + \frac{G_1 Z_0}{2}$

1、介质损耗

由于 $\tan \delta = \frac{G_1}{\omega C_1}$ ，有 $\alpha_d = \frac{G_1 Z_0}{2} = \frac{Z_0}{2} \omega C_1 \tan \delta = \frac{\pi \sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} \tan \delta$ ，其中 $Z_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c C_1}$ 。

2、导体损耗

由 $\alpha_c = R_1 / 2Z_0$ 可知，求解导体损耗的关键是如何确定 R_1 。由于带状线的电流沿导体横截面周界并非是均匀分布的，若类似同轴线那样先求电流分布函数 J_s ，再求分布电阻 R_1 是非常复杂的，这里应用增量电感法进行求解。

惠勒的增量电感法则 (Incremental-inductance Rule)

参考文献: H. A. Wheeler, Formulas for the Skin Effect, Proceedings of the I.R.E., Sept. 1942, pp. 412-424.

文献对增量电感法则的一般描述:

The "incremental-inductance rule" is a formula which gives the **effective resistance** caused by the skin effect, but is based entirely on **inductance computations**. Its great value lies in its **general validity** for all metal objects in which the current and magnetic intensity are governed by the skin effect. In other words, **the thickness and the radius of curvature of exposed metal surfaces must be much greater than the depth of penetration, say at least twice as great.**

本课程使用增量电感法则来求解 TEM 或准 TEM 传输线的导体衰减常数 α_c , 这些传输线存在比较复杂的横截面结构, 难以积分求解 R_1 。

§ 4.1 带状线

增量电感法则的基本步骤：

1、计算单位长电感 L_1 的增量，即 $\partial L_1 / \partial \vec{n}$ 。

这里将电感 L_1 称为外电感，即导体外部电感之意。 \vec{n} 代表导体表面的法线方向（在零趋肤深度的假设下，导体表面退缩的方向）。

2、计算单位长电感 L_i （称为内电感），即 $L_i = \frac{\partial L_1}{\partial \vec{n}} \frac{\delta}{2}$ 。

这里内电感 L_i 代表有损导体内部的电感（这个电感存在的深度为 $\delta/2$ ， δ 为趋肤深度），它等于外电感 L_1 的增量变化。

3、计算单位长电阻 R_1 ，即 $R_1 = \omega L_i = \omega \frac{\partial L_1}{\partial \vec{n}} \frac{\delta}{2} = \frac{R_s}{\mu} \frac{\partial L_1}{\partial \vec{n}}$ 。

这里单位长电阻 R_1 等于单位长内电抗 ωL_i ， R_s 为表面电阻率，即 $R_s = \sqrt{\omega \mu / 2\sigma} = 1/\sigma\delta$ 。

依据以上步骤，可得

$$\alpha_c = \frac{R_1}{2Z_0} = \frac{R_s}{2\mu Z_0} \frac{\partial L_1}{\partial \vec{n}} = \frac{R_s}{2\eta Z_0} \frac{\partial Z_0}{\partial \vec{n}}$$

增量电感法则的解释 1：良导体的趋肤效应

如图所示，当均匀平面波垂直入射良导体 ($\sigma \neq \infty$, 且 $(\sigma/\omega\epsilon) \gg 1$) 表面时，沿深度 z 方向的传播因数 γ 可表示为：

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) \approx j \omega \mu \sigma$$

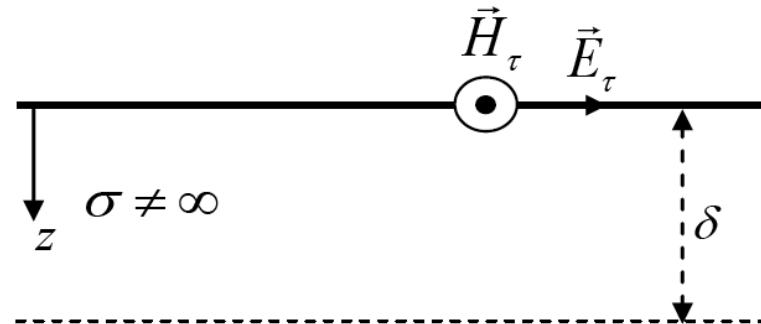
由此可知，导体内部的平面波沿 z 方向的传播形式为：

$$\exp(-z\sqrt{j\omega\mu\sigma}) = \exp\left[-(1+j)z\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\right]$$

趋肤深度 δ ：电磁波场强的振幅衰减到导体表面值的 $1/e$ 所经过的距离。

由上式可见， $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ 。在趋肤深度上，相位滞后 1 radian。

注释：上述均匀平面波垂直入射可改为沿任意方向入射，因良导体折射率非常大（理想导体为无限大），仍可在导体中近似产生沿 z 方向传播的平面波



增量电感法则的解释 2：良导体的表面阻抗

导体内沿 z 方向传播的均匀平面波场强关系为： $\vec{E}_\tau = -\tilde{\eta} \vec{i}_z \times \vec{H}_\tau$

其中，波阻抗 $\tilde{\eta}$ 可表示为：

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)}} \approx \sqrt{j \frac{\omega \mu}{\sigma}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$$

其中， $\tilde{\eta}$ 是单位面积上的阻抗，即 Ω/m^2 ，又称为表面阻抗率，用 Z_s 来表示。令 $Z_s = R_s + jX_s$ ，由上式可得 $R_s = X_s = \sqrt{\omega \mu / 2\sigma} = 1/\sigma \delta$ 。

这里需要注意以下两点：

1、只要导体表面的曲率半径远大于趋肤深度 δ ，以上结果可以推广到任意截面形

状的导体中（若平面导体厚度只要大于 2δ ，有 2% 的精度），例如金属规则波导表面等。

2、 $R_s = X_s$ 。这里若令 $X_s = \omega L_s$ ，可得 $L_s = \mu \delta / 2$ 。 L_s 是由导体外的磁场 \vec{H}_τ 渗透到

导体内引起的，因此是导体内的电感（即内电感）；内电感 L_s 在导体内存在的深度为 $\delta/2$ ，也就是形成内电感 L_s 的平均深度是 $\delta/2$ ；另外，特别注意是从数值上可见： $R_s = \omega L_s$ 。

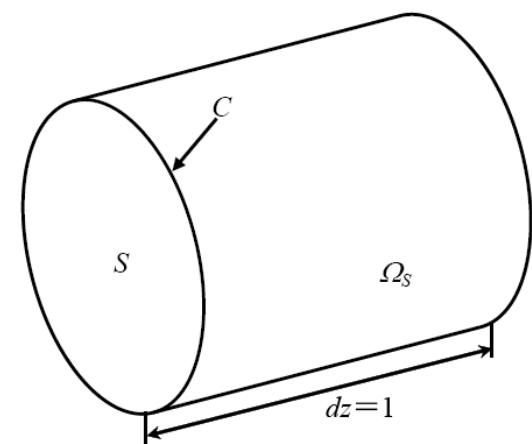
在导体表面的单位面积上，电磁场透入良导体的平均功率 P_{av} 为：

$$\begin{aligned}
 P_{av} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\vec{E}_\tau \times \vec{H}_\tau^* \right]_{z=0} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[-\tilde{\eta} \vec{i}_z \times \vec{H}_\tau \times \vec{H}_\tau^* \right]_{z=0} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\tilde{\eta} \vec{H}_\tau \times \vec{i}_z \times \vec{H}_\tau^* \right]_{z=0} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{\eta} \left[\vec{i}_z (\vec{H}_\tau \cdot \vec{H}_\tau^*) - \vec{H}_\tau^* (\vec{i}_z \cdot \vec{H}_\tau) \right] \right\}_{z=0} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\tilde{\eta}] \left| \vec{H}_\tau \right|^2 \vec{i}_z \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} R_s \left| \vec{J}_s \right|^2 \vec{i}_z \Big|_{z=0}
 \end{aligned}$$

其中 $\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}_\tau$ ， \vec{n} 为导体表面的单位法向矢量。

根据以上推导，可将之推广到规则金属波导单位长损耗功率 P_L ，即

$$P_L = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} R_s |\vec{H}_\tau|^2 \vec{n} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} R_s |\vec{J}_s|^2 \vec{n} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} R_s |\vec{J}_s|^2 dS$$



我们已经知道对于理想导体构成的传输线，其单位长电感 L_1 是明确已知的，例如同轴线有 $L_1 = (\mu/2\pi) \ln(b/a)$ 。但是，若导体是非理想的，传输线中的磁场会进入导体内部，使得实际的单位长电感 L_1 发生变化（即增量），这个电感增量就是前述内电感 L_i ，它存在的平均深度是趋肤深度的一半。

据此，我们可以假想将非理想导体的表面向导体内部退缩 $\delta/2$ ，退缩之后得到的新导体表面可以被看成是理想的，且在新的导体表面上 $\vec{E}_t = 0$ 。既然导体表面被“虚拟”改变了，那么在新结构尺寸下重新计算得到单位长外电感 L_1 必然产生增量变化，这个增量变化就等于非理想导体的内电感 L_i 。

假设导体厚度为 h ，且 $h \gg \delta/2$ ，则导体退缩后对 L_1 进行泰勒级数展开

$$L_1(h - \delta/2) \approx L_1(h) - \frac{\partial L_1}{\partial h} \frac{\delta}{2} + \dots \quad \Rightarrow \quad L_i = L_1(h) - L_1(h - \delta/2) = \frac{\partial L_1}{\partial h} \frac{\delta}{2}$$

用导体表面法向 \vec{n} 来代替厚度的方向，则

$$R_1 = \omega L_i = \omega \frac{\partial L_1}{\partial \vec{n}} \frac{\delta}{2} = \frac{R_s}{\mu} \frac{\partial L_1}{\partial \vec{n}}$$

§ 4.1 带状线

令带状线单位长阻抗为 $Z_1 = R_1 + jX_1$ ，

其中 $R_1 = \omega L_i$, $X_1 = \omega L_1$ (注意 $X_1 \neq \omega L_i$)。

\vec{n} 的取向如图所示，则

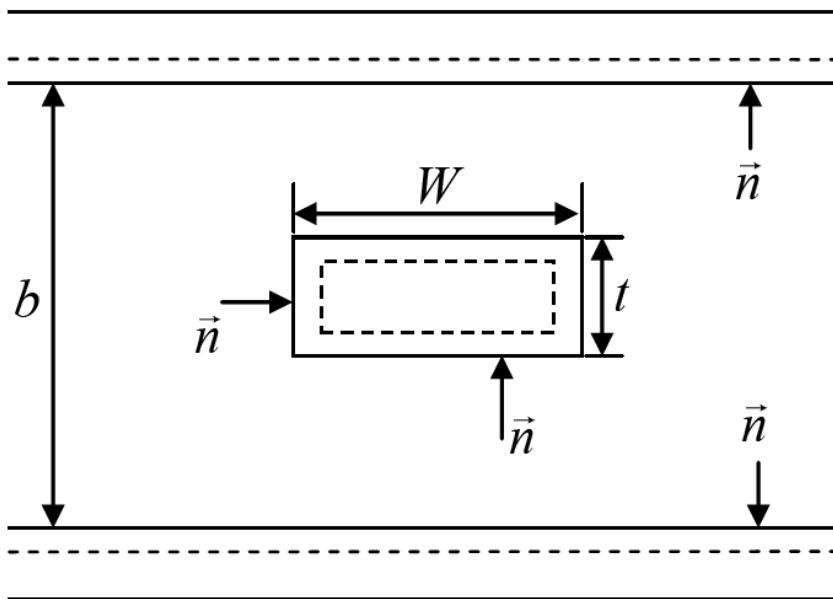
$$\frac{\partial L_1}{\partial \vec{n}} = 2 \frac{\partial L_1}{\partial b} - 2 \frac{\partial L_1}{\partial W} - 2 \frac{\partial L_1}{\partial t}$$

$$\alpha_c = \frac{R_1}{2Z_0} = \frac{R_s}{\mu Z_0} \left(\frac{\partial L_1}{\partial b} - \frac{\partial L_1}{\partial W} - \frac{\partial L_1}{\partial t} \right)$$

因为 $L_1 = Z_0 / \nu_p = Z_0 \sqrt{\mu \epsilon}$, $Z_0 = Z_0(b, W, t)$, 上式还可以写成

$$\alpha_c = \frac{R_s}{\mu Z_0} \sqrt{\mu \epsilon} \left(\frac{\partial Z_0}{\partial b} - \frac{\partial Z_0}{\partial W} - \frac{\partial Z_0}{\partial t} \right) = \frac{R_s}{\eta Z_0} \left(\frac{\partial Z_0}{\partial b} - \frac{\partial Z_0}{\partial W} - \frac{\partial Z_0}{\partial t} \right)$$

注意：在对宽度 W 和厚度 t 进行偏导时，前面取负号，这是因为导体退缩会引起宽度 W 和厚度 t 的减小，进而 L_1 减小，增量为负。



§ 4.1 带状线

三、带状线的尺寸选择

在一定条件下，带状线也会出现 TE 和 TM 高次模，其中

TE_{10} 为最低次 TE 模，截止波长为 $\lambda_c = 2W\sqrt{\epsilon_r}$ 。

TM_{01} 为最低次 TM 模，截止波长为 $\lambda_c = 2b\sqrt{\epsilon_r}$ 。

为了能够抑制这两种高次模，结构尺寸应满足：

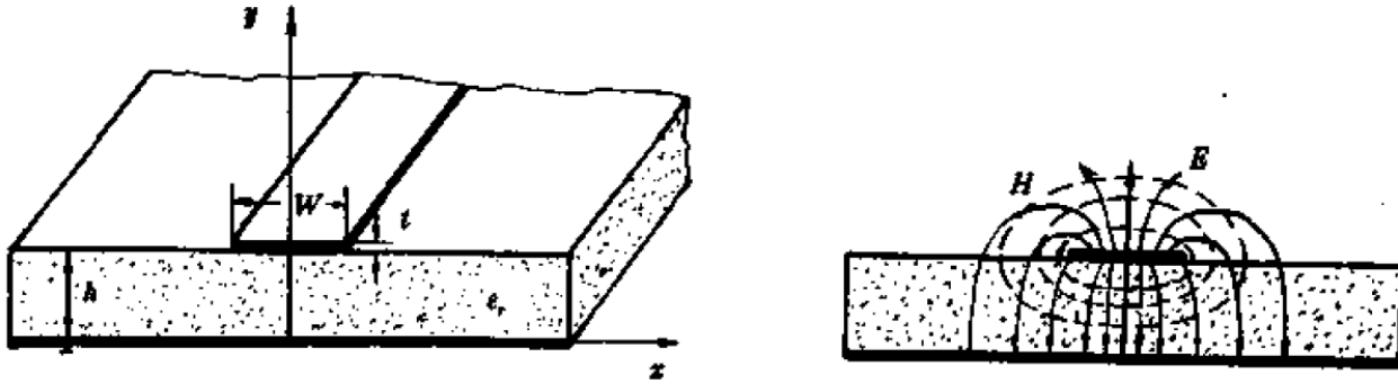
$$b < \lambda_{\min}/2\sqrt{\epsilon_r} \quad W < \lambda_{\min}/2\sqrt{\epsilon_r}$$

为了减小衰减和在横截面方向的能量泄漏，上、下接地板间距 b

不应小于 $(3\sim 6)W$ ，而接地板宽度 $a = (5\sim 6)W$ 。

§ 4.2 微带线

微带线是混合微波集成电路 (Hybrid Microwave Integrated Circuit, HMIC) 和单片微波集成电路 (Monolithic Microwave Intergrated Circuit, MMIC) 使用最多的平面型传输线，可采用印刷电路板 (PCB) 技术进行制作。



微带线是非均匀介质填充的双导体传输线，场是混合 TE-TM 波场，其纵向场分量主要由空气-介质界面的边缘场分量 E_x 和 H_x 引起的。当横向尺寸 h 和 W 远小于工作波长 λ ，且 ϵ_r 较大时，场的能量主要集中在导体条带下面的介质基片内，而此区域的纵向场分量很弱，故可看成准 TEM (Quasi-TEM) 波。

当微带线的 h 和 W 与波长 λ 可比拟时，可能出现波导模式(TE 模和 TM 模)，在导体条带上还有表面波，它们都是微带线的高次模。

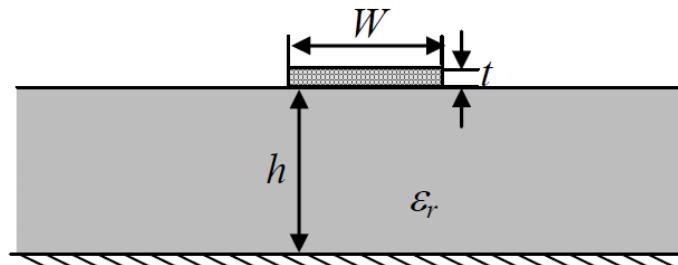
§ 4.2 微带线

微带线的分析方法简介：

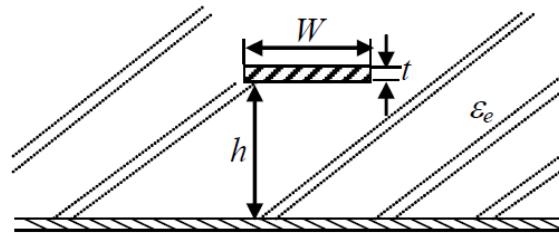
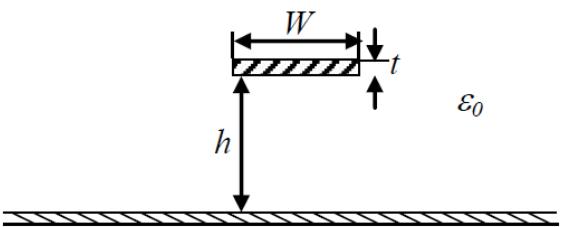
可以归纳为三种：准静态方法、色散模型法和全波分析法。

这里简要介绍一种基于 TEM 模求解微带线结构的分布电容的准静态方法—有效介电常数方法，其基本步骤如下：

①、对于右图结构，令其单位长电容为 C_1 ，相速为 v_p ，则特性阻抗为 $Z_0 = 1/v_p C_1$ ；



②、改为全空气填充（如下左图所示），令其单位长电容为 C_{01} ，相速应等于空气中光速 c ，则特性阻抗为 $Z_{01} = 1/c C_{01}$ ；



③、用相对介电常数为 ϵ_e 的介质均匀填充同结构的空气微带（如上右图所示），假设可以调节 ϵ_e 的大小，使均匀填充 ϵ_e 的微带和同结构的实际微带有完全相同的传输特性，即 $C'_1 = C_1$ ， $v'_p = v_p$ ， $Z'_0 = Z_0$ 等，此处 ϵ_e 称为有效介电常数。¹⁹

空气微带线有 $c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_{01}}}$, 填充 ϵ_e 微带线有 $v'_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C'_1}}$, 且二者有 $v'_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_e}}$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_e}} = \frac{\sqrt{L_1 C_{01}}}{\sqrt{L_1 C'_1}} \Rightarrow \epsilon_e = \frac{C'_1}{C_{01}}, \text{ 可得 } Z_0 = Z'_0 = \frac{1}{v'_p C'_1} = \frac{1}{c C'_1} \sqrt{\epsilon_e} = \frac{1}{c C_{01}} \frac{C_{01}}{C'_1} \sqrt{\frac{C'_1}{C_{01}}} = \frac{Z_{01}}{\sqrt{\epsilon_e}}.$$

据此, 用准静态方法计算微带线特性阻抗 Z_0 可归结为求解两个参量: 空气

微带线特性阻抗 Z_{01} 和有效介电常数 ϵ_e , 进一步可以归结为求 C_{01} 和 C_1 。

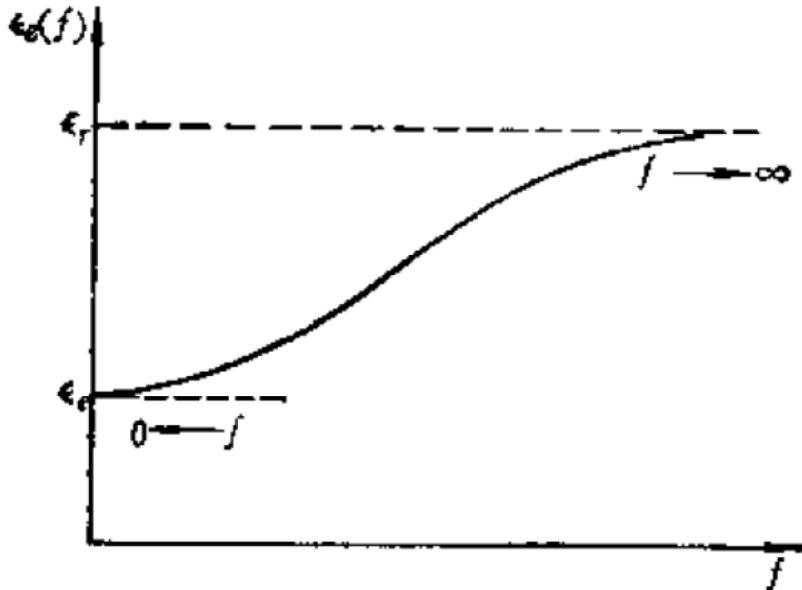
Hammerstadt 曲线拟合近似公式 (精度优于 1%):

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_e}} \ln \left(\frac{8h}{W} + 0.25 \frac{W}{h} \right) \\ \epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left[\left(2 + \frac{12h}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} + 0.041 \left(1 - \frac{W}{h} \right)^2 \right] \end{array} \right. \quad W/h \leq 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_0 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_e}} \frac{1}{W/h + 1.393 + 0.667 \ln(W/h + 1.4444)} \\ \epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{12h}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad W/h \geq 1$$

微带线的色散现象——能量分布的解释

前述 Z_0 和 ϵ_e 公式只适用于较低工
作频率，微带线的传输模式实质是混
合模，其传播速度随频率而变，这种
色散现象具体表现为 Z_0 和 ϵ_e 随频率而
变。如图所示， f 越高， ϵ_e 越大，传播
相速也越低。



色散现象的理解：根据前面的推导，可知有效介电常数 $\epsilon_e(f)$ 与相速 $v_p(f)$ 的关系为 $\epsilon_e(f) = [c/v_p(f)]^2$ ，可见 $\epsilon_e(f)$ 增大，相速 $v_p(f)$ 必然减小。其原因主要是随着 f 的升高，微带线的场更加集中于介质基片内，特别是导体条带下方的介质基片中，此时场的大部分能量是由介质基片来承载的，因而使得 $\epsilon_e(f)$ 趋近于基片的相对介电常数 ϵ_r 。而在频率较低时，微带线的场会扩散到介质基片上方的空气中，因而使得 $\epsilon_e(f)$ 趋近于前述 ϵ_e 公式计算的值。

§ 4.3 耦合传输线

耦合传输线: 是由任何两条或多条传输线(开放或半开放形式)彼此靠近, 其间产生电磁能量耦合来构成的。其中, 耦合带状线可采用共面耦合(又称边耦或侧耦)和宽面耦合(含偏置耦合), 其中又可分为

为薄带、厚带、夹介质层等。而耦合微带线常用侧耦形式。

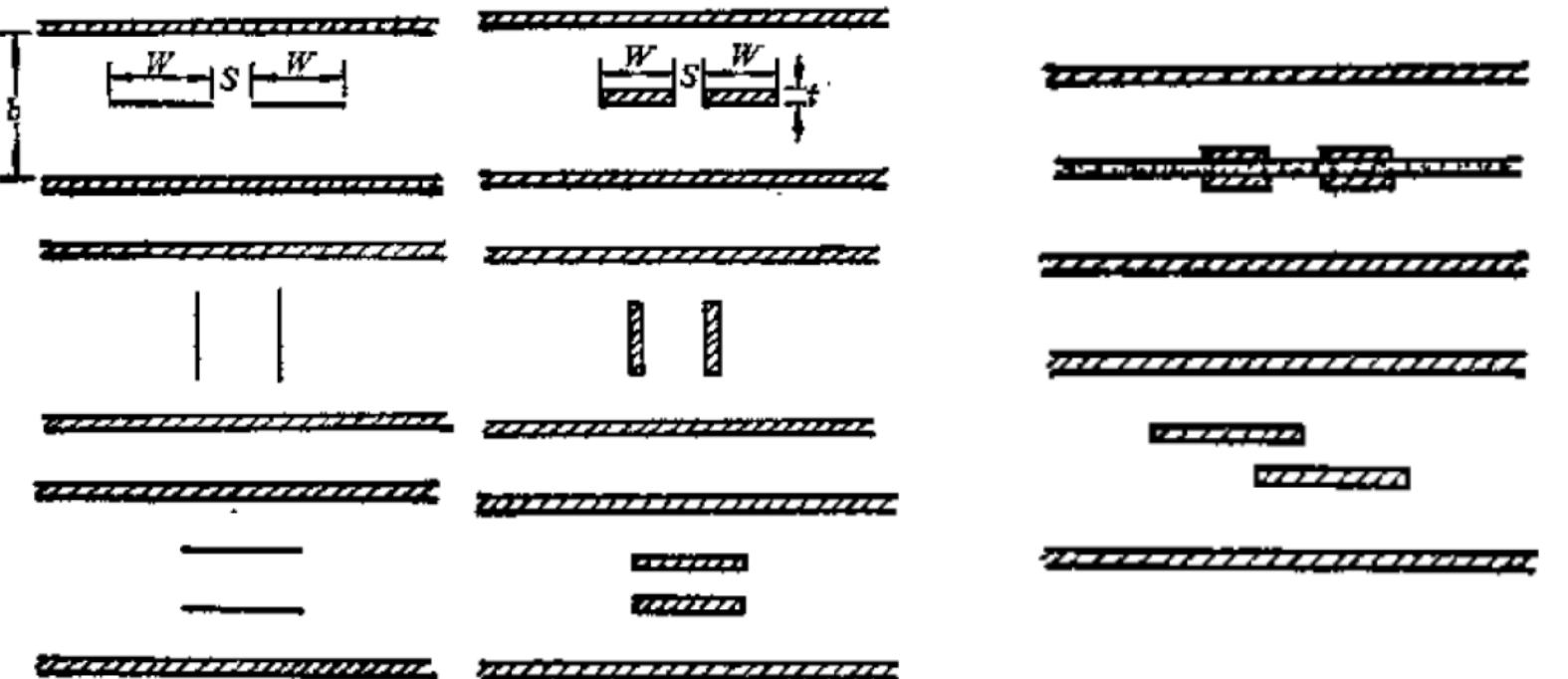


图4.5-1 耦合微带的结构

§ 4.3 耦合传输线

这里重点介绍对称形式的耦合传输线，即由两根结构完全相同并以对称方式构成的耦合传输线。为了进行对称耦合传输线分析，首先需要明确：

1)、应将整个耦合传输线看成一根“特殊”的传输线，仍然以 TEM 或准

TEM 波方式进行工作。

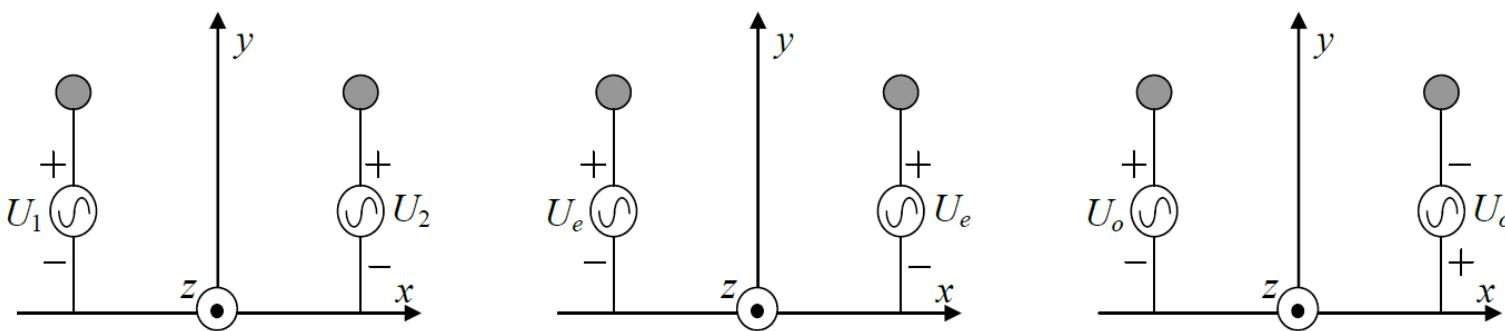
2)、两根靠近的传输线间存在电磁能量耦合（即存在互电容与互电感），使得两根线上的电压波和电流波相互影响。如果使用我们前面所学的普通传输线电压波和电流波的解来描述，那么这种波是耦合波，而非本征波。

对称耦合传输线的激励：

如图所示，对任意一对激励电压 U_1 和 U_2 ，总可以找到相应的一对奇偶激励电压 U_o 和 U_e ，若设 $U_1 = U_e + U_o$ ， $U_2 = U_e - U_o$ ，则

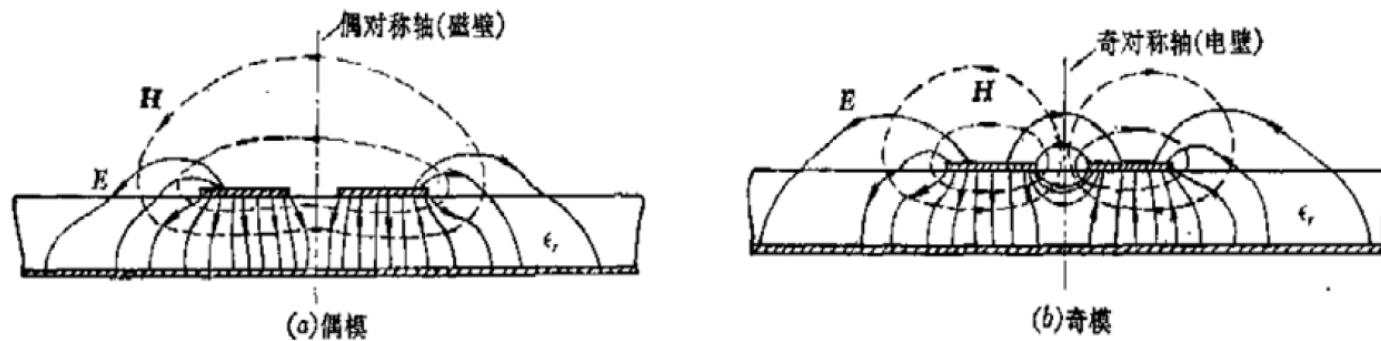
$$U_e = (U_1 + U_2)/2, \quad U_o = (U_1 - U_2)/2$$

§ 4.3 耦合传输线



对称耦合传输线的任意激励、偶激励、奇激励的示意图

根据“奇偶禁戒”规则，奇、偶激励可在对称耦合传输线中分别建立反对称、对称的场，如下图对称耦合微带线的场所示：

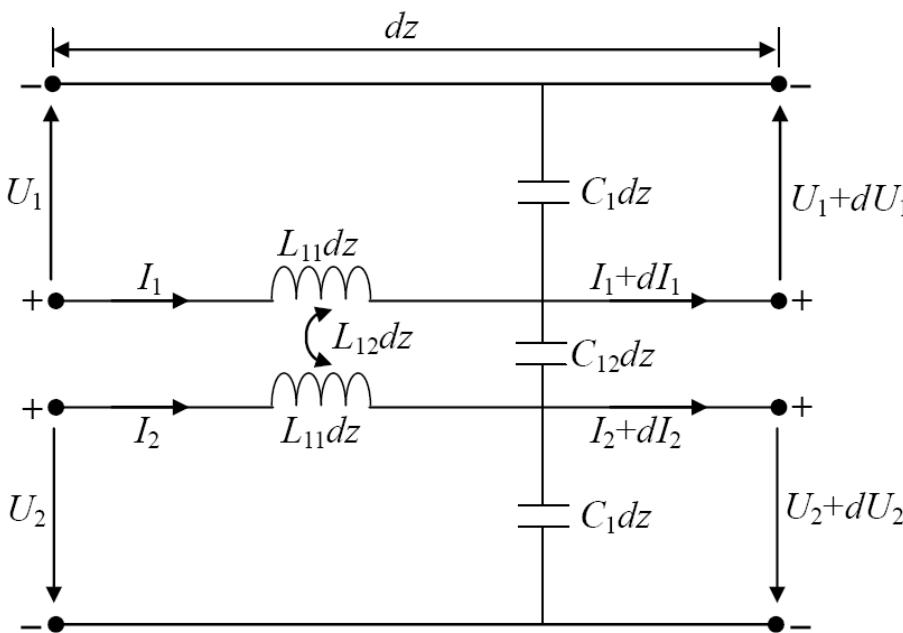


由偶激励建立的场称之为偶模（场是对称的），结构中心对称处电磁场满足磁壁的边界条件（即切向磁场为零，法向电场为零），所以此处可作磁壁的等效。
由奇激励建立的场称之为奇模（场是反对称的），结构中心对称处电磁场满足电壁的边界条件（即切向电场为零，法向磁场为零），所以此处可作电壁的等效。

§ 4.3 耦合传输线

鉴于对称耦合传输线的对称性，可以将任意激励建立起来的对称耦合传输线 **TEM 模** 场分布进行奇偶分解，得到的 **奇模和偶模在能量上是互相不耦合的**。因此，可将对称耦合传输线上的 **任意 TEM 模看成是一个奇模和一个偶模的迭加**，**奇模和偶模都是对称耦合传输线的本征模**，这样可以将耦合波问题转化为本征波问题进行求解。

取一小段长度为 dz 的对称耦合传输线，如图所示，由于 $dz \ll \lambda$ ，故可应用克西霍夫定律于下面的等效电路：



§ 4.3 耦合传输线

$$U_1 = U_1 + dU_1 + j\omega L_{11}dzI_1 + j\omega L_{12}dzI_2$$

$$U_2 = U_2 + dU_2 + j\omega L_{11}dzI_2 + j\omega L_{12}dzI_1$$

$$I_1 = I_1 + dI_1 + j\omega C_1 dz(U_1 + dU_1) + j\omega C_{12} dz(U_1 + dU_1 - U_2 - dU_2)$$

$$I_2 = I_2 + dI_2 + j\omega C_1 dz(U_2 + dU_2) + j\omega C_{12} dz(U_2 + dU_2 - U_1 - dU_1)$$

忽略电流中的二阶小量，可得

$$I_1 = I_1 + dI_1 + j\omega C_1 dzU_1 + j\omega C_{12} dz(U_1 - U_2)$$

$$I_2 = I_2 + dI_2 + j\omega C_1 dzU_2 + j\omega C_{12} dz(U_2 - U_1)$$

整理后得（注：取 $C_{11}=C_1+C_{12}$ ）

$$-\frac{dU_1}{dz} = j\omega L_{11}I_1 + j\omega L_{12}I_2 \quad -\frac{dI_1}{dz} = j\omega C_{11}U_1 - j\omega C_{12}U_2$$

$$-\frac{dU_2}{dz} = j\omega L_{12}I_1 + j\omega L_{11}I_2 \quad -\frac{dI_2}{dz} = -j\omega C_{12}U_1 + j\omega C_{11}U_2$$

以上方程就是对称耦合传输线的耦合波方程。

§ 4.3 耦合传输线

在偶激励情况下， $U_1=U_2=U_e$, $I_1=I_2=I_e$, 可得

$$-\frac{dU_e}{dz} = j\omega L_{11}I_e + j\omega L_{12}I_e = j\omega(L_{11} + L_{12})I_e$$

$$-\frac{dI_e}{dz} = j\omega C_{11}U_e - j\omega C_{12}U_e = j\omega(C_{11} - C_{12})U_e$$

引入电感耦合系数 $K_L = L_{12}/L_{11}$ 和电容耦合系数 $K_c = C_{12}/C_{11}$ ，则

$$-\frac{dU_e}{dz} = j\omega L_{11}(1 + K_L)I_e$$

$$-\frac{dI_e}{dz} = j\omega C_{11}(1 - K_c)U_e$$

$$\frac{d^2U_e}{dz^2} + \omega^2 L_{11} C_{11} (1 + K_L)(1 - K_c) U_e = 0$$

将上式对 z 求导，得

$$\frac{d^2I_e}{dz^2} + \omega^2 L_{11} C_{11} (1 + K_L)(1 - K_c) I_e = 0$$

这是对称耦合传输线的偶模波动方程，其特征参数为 $Z_{0e} = \sqrt{\frac{L_{11}(1 + K_L)}{C_{11}(1 - K_c)}}$

$$\beta_e = \omega \sqrt{L_{11} C_{11} (1 + K_L)(1 - K_c)}, \quad \nu_{pe} = \frac{\omega}{\beta_e} = 1/\sqrt{L_{11} C_{11} (1 + K_L)(1 - K_c)}$$

§ 4.3 耦合传输线

在奇激励情况下， $U_1 = -U_2 = U_o$, $I_1 = -I_2 = I_o$, 同理可得

$$-\frac{dU_o}{dz} = j\omega L_{11}(1-K_L)I_o \quad \frac{d^2U_o}{dz^2} + \omega^2 L_{11}C_{11}(1-K_L)(1+K_c)U_o = 0$$

$$-\frac{dI_o}{dz} = j\omega C_{11}(1+K_c)U_o \quad \frac{d^2I_o}{dz^2} + \omega^2 L_{11}C_{11}(1-K_L)(1+K_c)I_o = 0$$

$$Z_{0o} = \sqrt{\frac{L_{11}(1-K_L)}{C_{11}(1+K_c)}}$$

$$\beta_o = \omega \sqrt{L_{11}C_{11}(1-K_L)(1+K_c)}, \quad v_{po} = \frac{\omega}{\beta_o} = 1/\sqrt{L_{11}C_{11}(1-K_L)(1+K_c)}$$

对于 TEM 波，不论其场结构如何，在均匀媒质中的相速总等于 $v_p = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 。因此，对称耦合传输线中的偶模和奇模的相速应相等，且 $v_{pe} = v_{po} = v_p = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 。若要满足这个条件，那么必须有 $K_L = K_c = K$ ，则

$$\beta_e = \beta_o = \omega \sqrt{L_{11}C_{11}(1-K^2)}, \quad v_{pe} = v_{po} = 1/\sqrt{L_{11}C_{11}(1-K^2)}$$

$$Z_{0e} = \sqrt{\frac{L_{11}(1+K)}{C_{11}(1-K)}}, \quad Z_{0o} = \sqrt{\frac{L_{11}(1-K)}{C_{11}(1+K)}}, \quad \text{可见 } Z_{0e} \geq Z_{0o}$$

这里定义“孤立传输线”（孤立可理解为两传输线相距无穷远）的分布参量为： L_0 为

孤立传输线的单位长电感； C_0 为孤立传输线的单位长电容； Z_0 为孤立传输线的特性阻抗。

由于传输线导体通常为非导磁体，因此对于耦合传输线来说，可以认为在引入另一根传输线前后，总的分布电感几乎不变，即 $L_{11}=L_0$ 。

在传输 TEM 模下，单根传输线与耦合传输线的传播相速相同，则有

$$\frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_{11} C_{11}(1-K^2)}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_{11}(1-K^2)}}, \quad \therefore C_{11} = \frac{C_0}{1-K^2}$$

因此有 $Z_{0e} = \sqrt{\frac{L_{11}(1+K)}{C_{11}(1-K)}} = Z_0(1+K), \quad Z_{0o} = \sqrt{\frac{L_{11}(1-K)}{C_{11}(1+K)}} = Z_0(1-K)$

进而可得 $Z_{0e} \cdot Z_{0o} = Z_0^2(1-K^2), \quad Z_{0e} + Z_{0o} = 2Z_0$

可见， Z_{0e} 和 Z_{0o} 的乘积与求和始终等于固定值，且 $K = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}}$

这说明 Z_{0e} 和 Z_{0o} 的差别越大， K 就越大，耦合就越紧。当 $Z_{0e}=Z_{0o}=Z_0$ 时， $K=0$ ，即耦合线间距很大时，耦合消失，耦合传输线退化成普通传输线。

§ 4.4 其它平面传输线

1、悬置和倒置微带线

悬置微带线（Suspended Microstrip Line）和倒置微带线（Inverted Microstrip Line）的传输模式为准 TEM 波，其中间介质基片很薄，场主要集中在介质两边的空气中，其有效介电常数 ϵ_e 接近于 1，色散现象较弱。介质损耗较小，比微带线具有更高的 Q 值（500~1500），特别适于制作滤波器、谐振电路等。

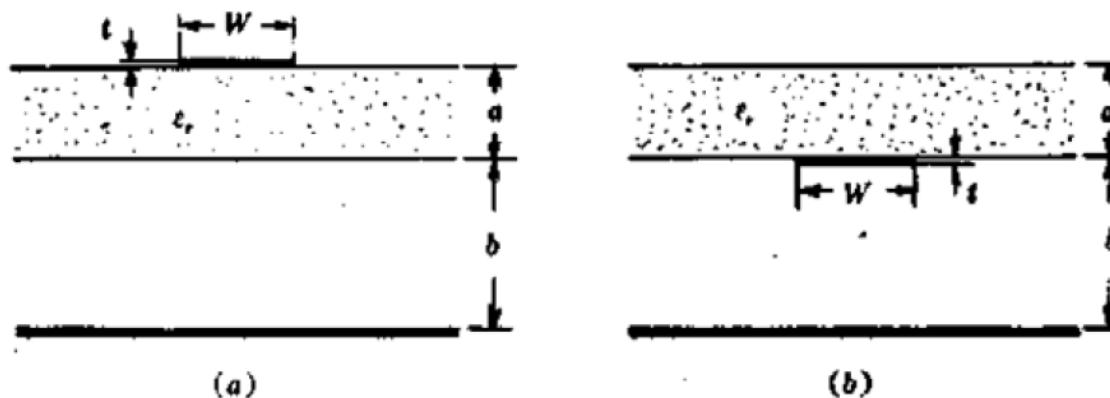


图 4.4-1 (a) 悬置微带线; (b) 倒置微带线

§ 4.4 其它平面传输线

2、槽线 (Slotline or Notchline)

槽线是在介质基片一面的金属化层上刻蚀一窄槽构成的(在 1~10GHz, 典型槽宽为 21~30mil)。介质基片必须使用高介电常数材料 (如 $\epsilon_r=16$), 这样场才能非常集中于槽口附近, 辐射损耗才能忽略。

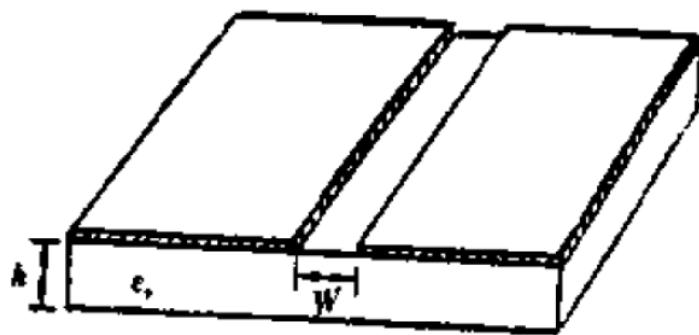


图 4.4-2 槽线结构

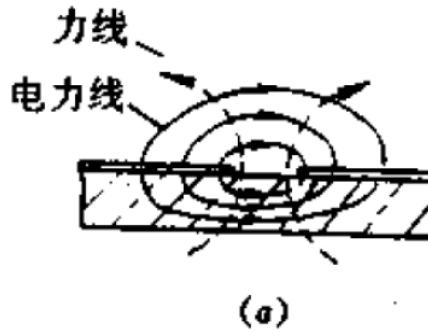


图 4.4-3 槽线上的场分布

槽线的传输模式以 TE 模为主, 如图所示。槽线特别适于制作高阻抗线, 且结构适于并联连接微波元件。其介质面可以制作其它传输线 (例如微带线或共面波导), 从而形成耦合用于制作组合器件, 减小元器件尺寸。

§ 4.4 其它平面传输线

3、共面传输线

共面传输线包括：共面波导（Coplanar Waveguide, CPW）和共面带状线（Coplanar Stripline, CPS），两者为互补结构。它们的结构优点是安装并联或串联形式的微波元件非常方便，无需在基片上钻孔或开槽，并且在介质基片的另一面可制作其它微波电路。

共面波导和共面带状线都能支持准 TEM 波的传播。

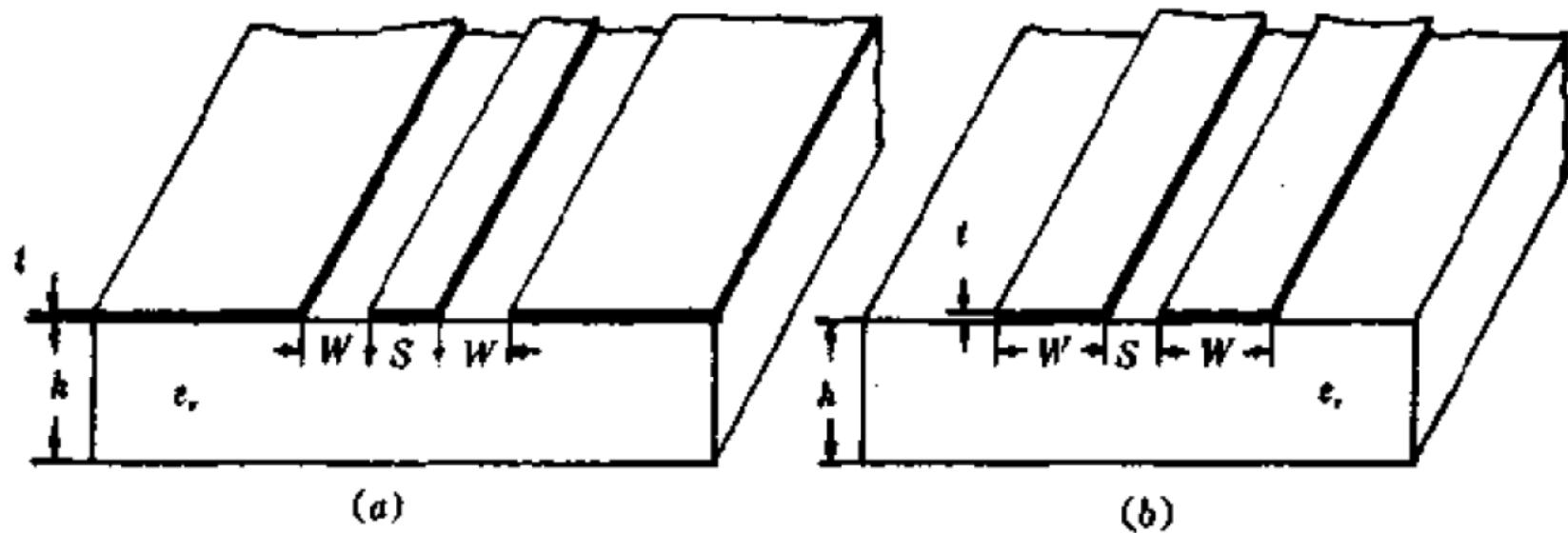


图 4.4-5 (a) 共面波导; (b) 共面带状线

§ 4.4 其它平面传输线

4、鳍线 (Finline)

鳍线分为金属鳍线和集成鳍线，由垂直置于矩形金属波导两宽边之间的金属片或集成槽线构成，也称 E 平面电路（都平行于 TE_{10} 模的电场）。

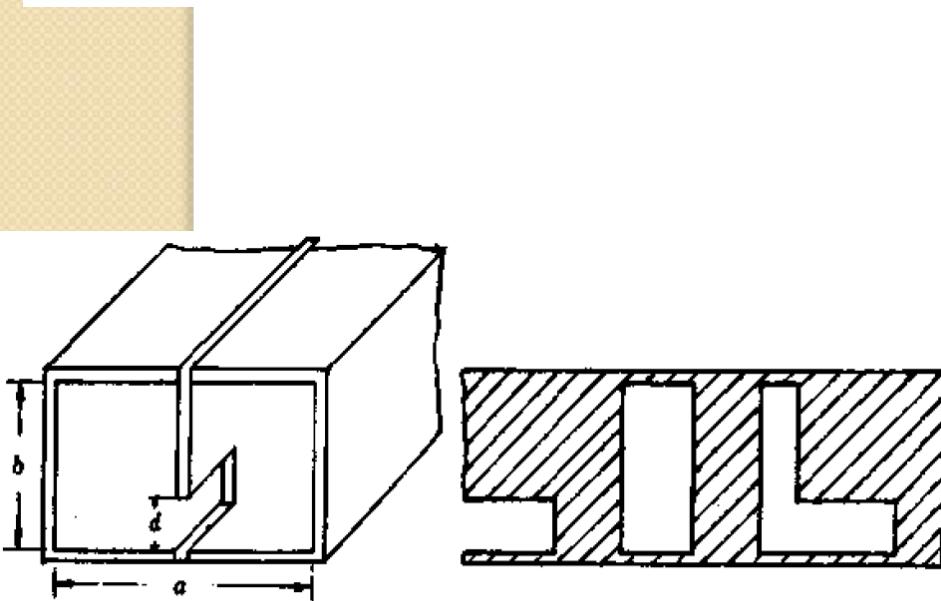


图 4.4-6 加鳍波导的结构

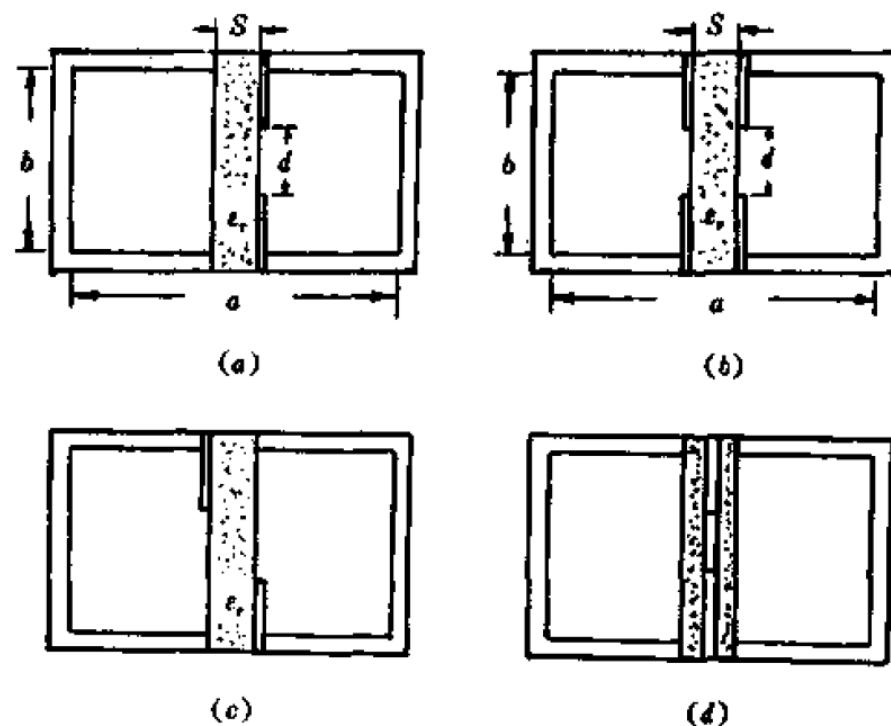
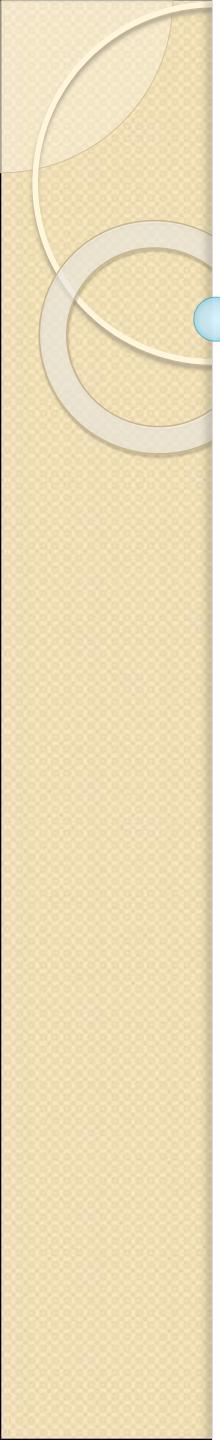


图 4.4-7 (a) 单侧鳍线; (b) 双侧鳍线;
(c) 对极鳍线; (d) 绝缘鳍线



本章结束



第五章 介质波导

Dielectric Waveguides

中国科学技术大学
电子工程与信息科学系

本章内容

§ 5.1 概述

§ 5.2 介质波导工作原理

§ 5.3 圆形介质波导

§ 5.4 矩形介质波导

§ 5.1 概述

一、从金属波导、微带线到介质波导

在厘米波段，以往主要用封闭的金属波导作为传输系统，当时认为这是一种非常理想的微波传输线。上世纪 60 年代开始，以微带线为标志的微波集成技术获得了极大发展，微带线在很大程度上代替了传统的金属波导。

在 $35\sim250\text{GHz}$ 的毫米波波段低端，微带线可用到 60GHz ，而微波集成技术还可以扩大其应用。但是工作频率再高，微带电路遇到了很多困难：

- ①、结构尺寸变得过小，难于加工。
- ②、由于频率太高，金属不再是个好的导体，欧姆损耗增加。
- ③、表面加工公差要求太严，粗糙的表面有大的损耗。
- ④、色散和高次模变得更加显著。

§ 5.1 概述

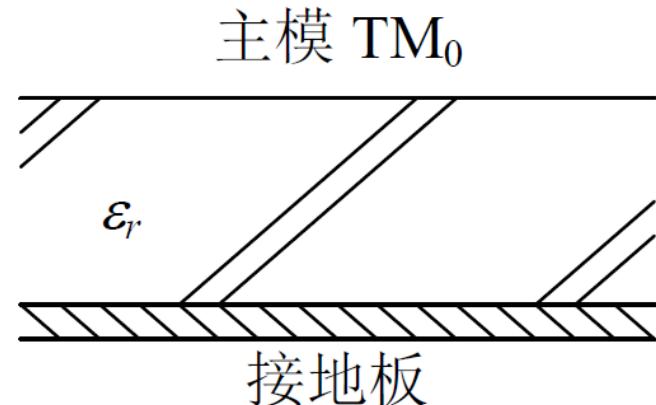
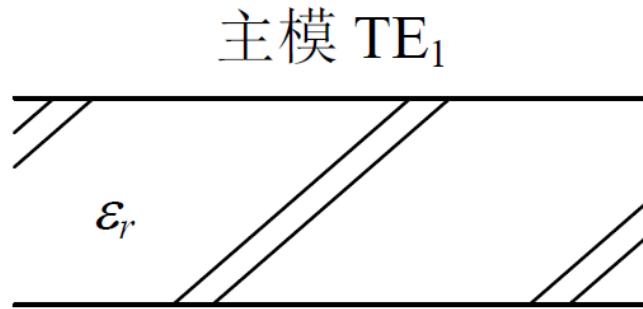
为克服微带线存在的问题，人们在毫米波频段引入了新传输线形式—介质波导，它具有的主要特点如下：

- ①、单模介质波导的横截面尺寸与 λ 同一量级（而微带线为 0.1λ ）。
- ②、介质波导的传输机理是电磁波在介质交界面的来回反射，而不依赖导体的存在，理论上不存在导体损耗。
- ③、介质波导损耗主要来自于介质损耗和辐射损耗，后者主要由介质的弯曲、表面粗糙、接头等非均匀性产生。

§ 5.1 概述

二、几种常用的介质波导

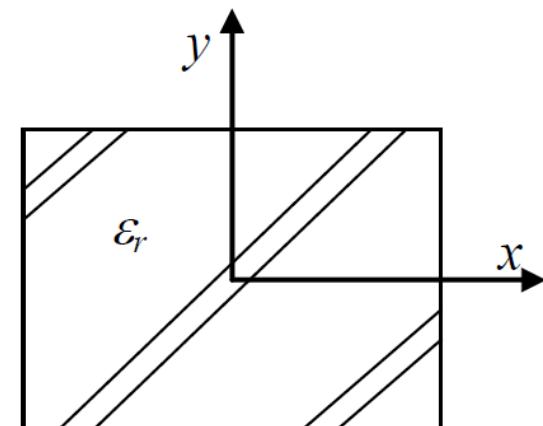
1、平板介质波导（Dielectric Slab Waveguide）



2、矩形介质波导（Rectangular Dielectric Waveguide）

主模为 E_{11}^y 和 E_{11}^x ，二者是简并的。本征模系

列为 E_{mm}^y 和 E_{mm}^x ，本质上属于混合模。由于场的纵向场分量远小于横向场分量，因此基本可看成准 TEM 波。

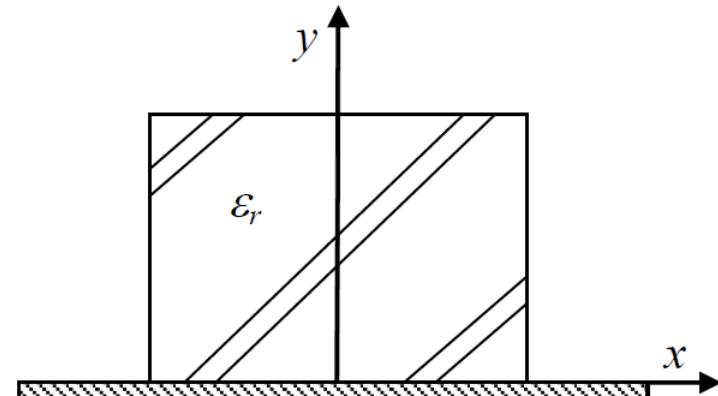


§ 5.1 概述

3、镜像线 (Image Line)

主模为 E_{11}^y , 本征模系列为 E_{mn}^y 和 E_{mn}^x 。

接地板解决了 E_{11}^y 和 E_{11}^x 简并问题, 易做到单模传输, 传输频带更宽。



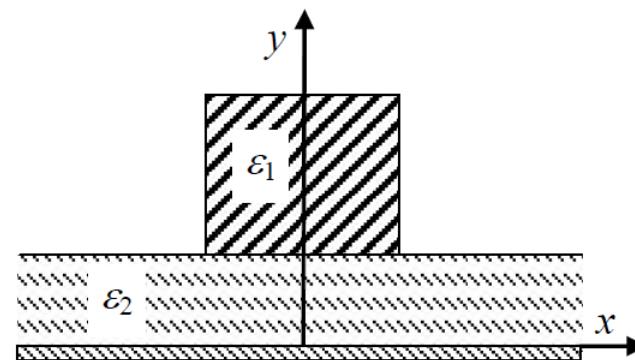
优点: 可制作在接地板平面上, 接地板利于散热和给器件加偏置。

缺点: 介质与接地板间空气缝隙需粘合剂填充而增加损耗; 有接地板带来的导体损耗。

4、隔离镜像线 (Insulated Image Line)

要求 $\epsilon_1 > \epsilon_2$, 主模为 E_{11}^y , 本征模系列为 E_{mn}^y 和 E_{mn}^x 。引入 ϵ_2 介质层是为了减小导电板

的导体损耗 (起到隔离的作用), 典型的隔离镜像线是用氧化铝陶瓷或其它陶瓷材料做介质条带, 用聚四氟乙烯或聚乙烯做隔离层。



§ 5.1 概述

5、带状介质波导 (SD)

主模为 E_{11}^y ，要求 $\epsilon_2 > \epsilon_1$ 和 $\epsilon_2 > \epsilon_3$ 。场

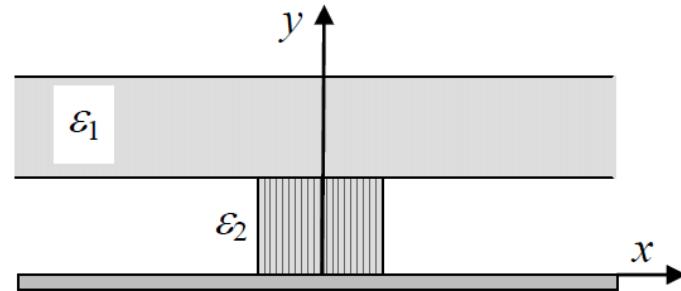
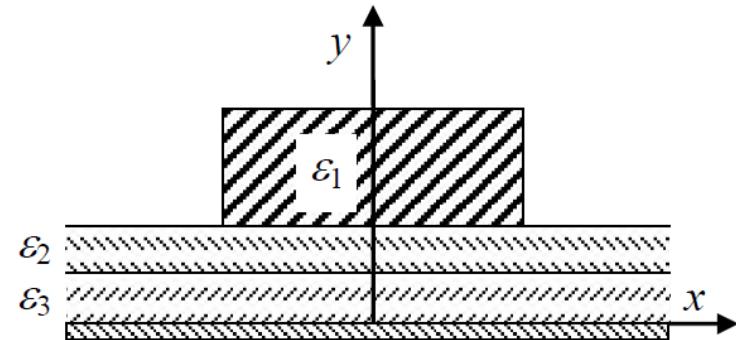
集中在 ϵ_2 层中，尤其是在中心介质条带下方附近，有利于散热和加直流偏置。

6、倒置带状介质波导 (IS)

主模为 E_{11}^y ，要求 $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ，场集中在 ϵ_1 层

中，尤其是在中心介质条带上方，可以进一步减小了导体损耗及介质表面粗糙造成的辐射损耗，又不要粘合剂。

以上两种波导是弱导结构，场未紧紧限制在 SD 和 IS 结构内，弯曲等会造成较大的辐射。



§ 5.2 介质波导工作原理

介质波导的分析方法主要分两种：射线理论和波动理论。

射线理论：就是几何光学（Geometrical Optics, GO）方法，优点是简单和直观，但是在分析复杂问题时只能得出较粗糙的近似结果。

波动理论：就是求解有限边界下的电磁场边值问题（即求解给定边界条件的偏微分方程），前述金属规则波导分析使用的就是波动理论。

由于介质波导是一种开放或半开放式波导，所以其边界条件比金属波导多而复杂，因而介质波导的波动理论分析也要复杂得多。介质波导的传播机理是建立在介质分界面上电磁波全反射基础上的，因此利用射线理论并结合“路”的分析方法来研究介质分界面上波的反射和折射现象，具有简洁直观、概念清晰的特点，这是本章贯彻始终的基本方法。

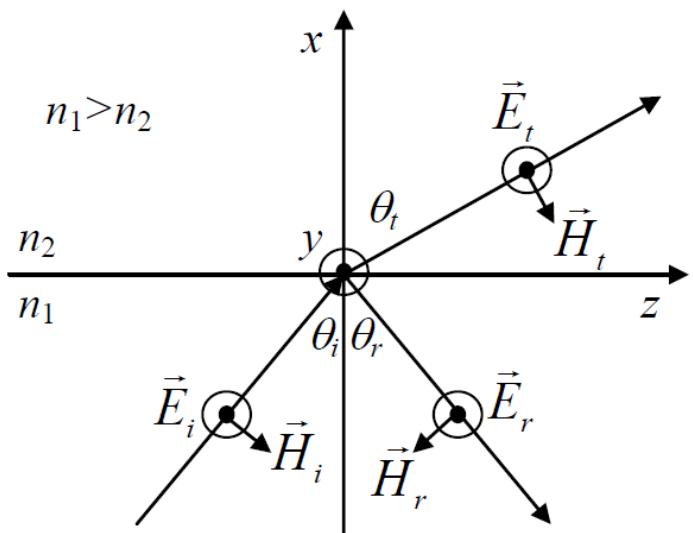
介质波导工作原理

§ 5.2

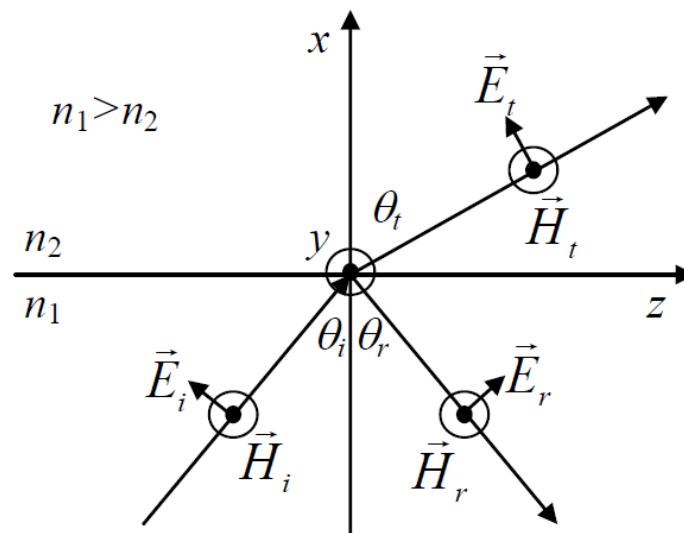
一、介质波导中的平面波

当均匀平面波斜入射无限大介质分界面时，相对于介质分界面建立的坐标系（称为结构坐标系），存在两种最基本形式的平面波：

- 1、H平面波 (TE)：电场只有平行于介质分界面的分量，磁场落在入射平面内，相对结构坐标系有三个场分量 E_y 、 H_x 、 H_z 。
- 2、E平面波 (TM)：磁场只有平行于介质分界面的分量，电场落在入射平面内，相对结构坐标系有三个场分量 H_y 、 E_x 、 E_z 。



H 平面波 (TE)



E 平面波 (TM)

介质波导工作原理

§ 5.2

特别注意：在上述过程中，已假定 z 为传播方向，两种平面波的各场分量在 y 方向均无变化，即各场分量的 $\partial/\partial y = 0$ 。

利用麦克斯韦方程的分解，可以得到两种平面波对应的方程组：

$$\nabla \times \vec{E}(x, z) = -j\omega\mu\vec{H}(x, z)$$

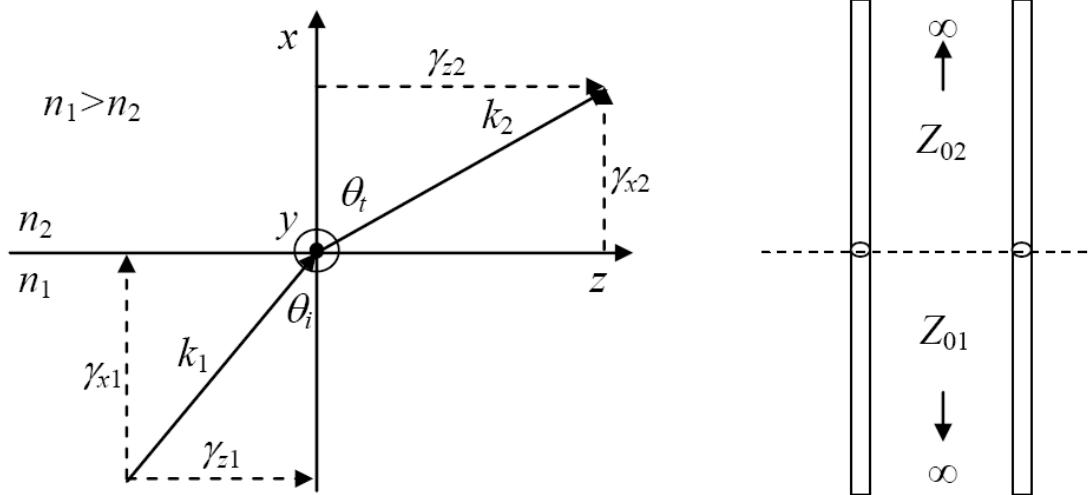
$$\nabla \times \vec{H}(x, z) = j\omega\epsilon\vec{E}(x, z)$$

H 平面波 (TE)	E 平面波 (TM)
$\begin{cases} \frac{\partial E_z(x, z)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(x, z)}{\partial z} = -j\omega\mu H_x(x, z) \\ \frac{\partial E_y(x, z)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, z)}{\partial y} = -j\omega\mu H_z(x, z) \\ \frac{\partial H_x(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(x, z)}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y(x, z) \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial H_z(x, z)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x(x, z) \\ \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(x, z)}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z(x, z) \\ \frac{\partial E_x(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(x, z)}{\partial x} = -j\omega\mu H_y(x, z) \end{cases}$
$\begin{cases} \frac{\partial E_y(x, z)}{\partial z} = j\omega\mu H_x(x, z) \\ \frac{\partial E_y(x, z)}{\partial x} = -j\omega\mu H_z(x, z) \\ \frac{\partial H_x(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(x, z)}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y(x, z) \end{cases}$	$\begin{cases} -\frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x(x, z) \\ \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial x} = j\omega\epsilon E_z(x, z) \\ \frac{\partial E_x(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(x, z)}{\partial x} = -j\omega\mu H_y(x, z) \end{cases}$

介质波导工作原理

§ 5.2

二、半无限大介质的等效传输线：



首先，对上面左图中两个介质的波数进行几何正交分解：

1). 介质 1: $k_1 = k_0 n_1 = k_0 \sqrt{\epsilon_{r1}}$, 且 $k_1^2 = \gamma_{x1}^2 + \gamma_{z1}^2$, $\gamma_{y1}^2 = 0$ (场在 y 向不变)。

其中, γ_{x1} 和 γ_{z1} 分别是介质 1 中波在 x 和 z 方向的传播因数, 可表示为

$$\gamma_{x1} = k_0 n_1 \cos \theta_i \quad \gamma_{z1} = k_0 n_1 \sin \theta_i$$

2). 介质 2: $k_2 = k_0 n_2 = k_0 \sqrt{\epsilon_{r2}}$, 且 $k_2^2 = \gamma_{x2}^2 + \gamma_{z2}^2$, $\gamma_{y2}^2 = 0$ (场在 y 向不变)。

其中, γ_{x2} 和 γ_{z2} 分别是介质 2 中波在 x 和 z 方向的传播因数, 可表示为

$$\gamma_{x2} = k_0 n_2 \cos \theta_t \quad \gamma_{z2} = k_0 n_2 \sin \theta_t$$

注意：这里重新定义波动项为 $e^{-j\gamma z}$ ，且 $\gamma = \beta - j\alpha$ ， α 和 β 原有含义不变。

下面以 TE 平面波入射为例，进行 x 方向等效传输线电报方程的推导：

相对于 x 方向， E_y 和 H_z 是横向场，令 $E_y(x, z) = u(x)e^{-j\gamma_z z}$ ， $H_z(x, z) = i(x)e^{-j\gamma_z z}$ ，

代入前面 TE 平面波的方程组，可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_y(x, z)}{\partial z} = j\omega\mu H_x(x, z) \\ \frac{\partial E_y(x, z)}{\partial x} = -j\omega\mu H_z(x, z) \\ \frac{\partial H_x(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(x, z)}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y(x, z) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H_x(x, z) = -\frac{\gamma_z}{\omega\mu} u(x) e^{-j\gamma_z z} \\ -\frac{du(x)}{dx} = j\omega\mu \cdot i(x) \\ -\frac{di(x)}{dx} + \frac{j}{\omega\mu} (\omega^2 \mu\varepsilon - \gamma_z^2) u(x) = \frac{j\gamma_x^2}{\omega\mu} u(x) \end{array} \right.$$

因此，这里得到了 x 方向 TE 平面波等效传输线方程，其中，等效传输线的特

性阻抗为 $Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\gamma_x^2/\omega\mu}} = \frac{\omega\mu}{\gamma_x}$

同理，可得 TM 平面波等效传输线电报方程，其特性阻抗为 $Z_0 = \frac{\gamma_x}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}$

§ 5.2 介质波导工作原理

三、介质分界面上的全反射和全折射

1、*Snell* 定律

两种平面波在介质分界面上的反射和折射满足 *Snell* 定律，即

$$\theta_i = \theta_r, \quad \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}$$

由 *Snell* 定律可得：

1). 由 $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ 可得 $\gamma_{z1} = \gamma_{z2}$ 。波在两个介质区域沿 z 方向的传播因数相等实质体现了场在介质分界面上的切向连续性边界条件，这保证了两个区域的场沿 z 方向的传播相速相同。

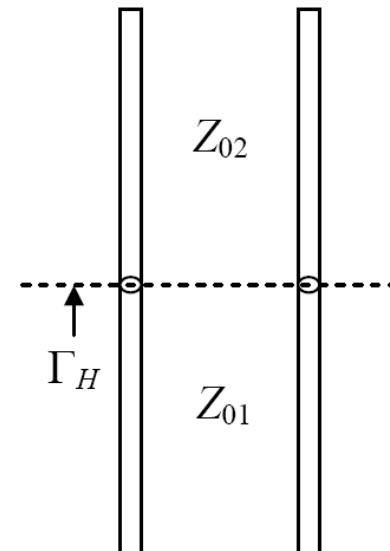
2). 由 $\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i = \frac{k_0 n_1}{k_0 n_2} \sin \theta_i = \frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i$ ，可得 $\frac{n_1}{n_2} = \frac{k_1}{k_2}$ 。

2、全反射

对于 TE 平面波，如图所示，两段等效传输线的特性阻抗分别为 $Z_{01} = \omega\mu/\gamma_{x1}$ 和 $Z_{02} = \omega\mu/\gamma_{x2}$ ，那么介质分界面处的反射系数为

$$\Gamma_H = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{\gamma_{x1} - \gamma_{x2}}{\gamma_{x1} + \gamma_{x2}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

临界角 θ_c (*Critical angle*) 为介质分界面上产生全反射时的入射角。



1). 若 θ 为实数，要求 $|\Gamma_H| = 1$ 产生全反射，那么上式分子和分母中的第二项必须等于 0，因而必有 $\theta_t = \pi/2$ ，此时由 Snell 公式可得

$$\sin \theta_c = n_2/n_1, \text{ 即 } \theta_c = \arcsin(n_2/n_1) \text{ (注: 必须保证 } n_1 > n_2 \text{)}$$

2). 当 $\theta_i > \theta_c$ ，有 $\sin \theta_i > \frac{n_2}{n_1}$ ，即 $\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i > 1$ ，则由 $\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i)^2}$ ，

可知 $\cos \theta_t$ 为虚数。由 Γ_H 的公式可知，此时仍然能保证 $|\Gamma_H| = 1$ 。

故介质交界面产生全反射的入射角条件为： $\theta_c \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$

§ 5.2 介质波导工作原理

重要讨论：（注意讨论范围在 $\theta_c \leq \theta_i < \frac{\pi}{2}$ ）

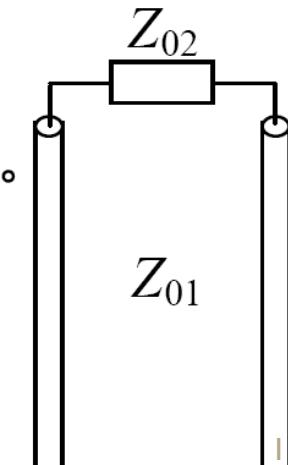
1). $\gamma_{x1} = k_0 n_1 \cos \theta_i = k_0 n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i} = k_{x1}$ （注： k_{x1} 仅代表实数且 $k_{x1} > 0$ ），可

得介质 1 的等效传输线特性阻抗为 $Z_{01} = \omega \mu / \gamma_{x1} = \omega \mu / k_{x1}$ 。

2). $\gamma_{x2} = k_0 n_2 \cos \theta_t = -jk_0 n_2 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2 - 1} = -jk_{x2}$ （注： k_{x2} 仅代表实数且 $k_{x2} \geq 0$ ）。上式根号前面仅取了负号，这是因为 γ_{x2} 为负虚数表明介质 2 中波沿 x 方向呈指数衰减，即 $e^{-j\gamma_{x2}x} = e^{-j(-jk_{x2})x} = e^{-k_{x2}x}$ 。可见，如果取正号则会违反无限远处场是有限的这一边界条件。

介质 2 的等效传输线特性阻抗为 $Z_{02} = \omega \mu / \gamma_{x2} = j\omega \mu / k_{x2}$ （感性）。

如右图所示， Z_{02} 实际就是介质 2 等效的无限长传输线贡献给介质 1 的负载阻抗，由于 Z_{02} 是纯电抗，因而会产生全反射。



§ 5.2 介质波导工作原理

依据同样原理，对于 **TM** 平面波，两段等效传输线的特性阻抗分别为

$Z_{01} = \frac{\gamma_{x1}}{\omega\epsilon_0\epsilon_{r1}}$ 和 $Z_{02} = \frac{\gamma_{x2}}{\omega\epsilon_0\epsilon_{r2}}$ ，那么介质分界面的 **TM** 波反射系数为

$$\Gamma_E = \frac{Z_{E2} - Z_{E1}}{Z_{E2} + Z_{E1}} = \frac{\epsilon_{r1}\gamma_{x2} - \epsilon_{r2}\gamma_{x1}}{\epsilon_{r1}\gamma_{x2} + \epsilon_{r2}\gamma_{x1}} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}$$

根据上式，由 $|\Gamma_E| = 1$ 同样可得 **TM** 波全反射条件为（必须有 $n_1 > n_2$ ）：

介质交界面产生全反射的入射角条件为： $\theta_c \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$

§ 5.2 介质波导工作原理

3、全折射（无反射状态）

布鲁斯特角 (Brewster Angle) θ_B : 介质分界面上产生全折射的入射角。

对于 TM 平面波, 若要产生全折射, 即要求 $\Gamma_E = 0$ 。由 Γ_E 的公式和 Snell

公式, 有 $\begin{cases} n_2 \cos \theta_i = n_1 \cos \theta_t \\ n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i \end{cases}$, 经适当推导可得 $\boxed{\theta_B = \arctan(n_2/n_1)}$

注意: 仅当 $\theta_i = \theta_B$ 时才会产生全折射现象, 且不要求 $n_1 > n_2$ 。

对于 TE 平面波, 若要产生全折射, 即要求 $\Gamma_H = 0$ 。由 Γ_H 的公式和 Snell

公式, 有 $\begin{cases} n_2 \cos \theta_t = n_1 \cos \theta_i \\ n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i \end{cases}$, 可得 $\tan \theta_i = \tan \theta_t$, 存在矛盾得不出解, 所以对于 TE 波没有全折射现象。

提问: 请比较临界角 θ_c 和布鲁斯特角 θ_B 大小?

介质波导工作原理

§ 5.2

布鲁斯特角的证明：

证明：如图所示，由全折射时 $\Gamma_E = 0$ 可知，必然要求负载阻抗 Z_{02} 与特性阻抗 Z_{01} 相等，即 $Z_{01} = Z_{02}$ 。

因 $Z_{01} = \frac{\gamma_{x1}}{\omega\epsilon_0\epsilon_{r1}}$, $Z_{02} = \frac{\gamma_{x2}}{\omega\epsilon_0\epsilon_{r2}}$, 可得 $\epsilon_{r1}\gamma_{x2} = \epsilon_{r2}\gamma_{x1}$ (1)。

又因 $\begin{cases} \gamma_{x1}^2 = k_0^2\epsilon_{r1} - \gamma_z^2 \\ \gamma_{x2}^2 = k_0^2\epsilon_{r2} - \gamma_z^2 \end{cases}$ (2), 且由介质分界面切向场连续有

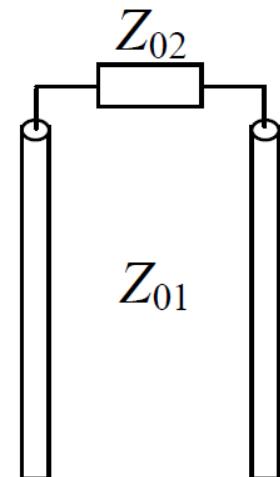
$\gamma_{z1} = \gamma_{z2} = \gamma_z$, 其中 $\gamma_z = k_0\sqrt{\epsilon_{r1}}\sin\theta_B$ (3)。

对(1)式两边取平方，并将(2)式代入，可得

$$\epsilon_1^2(k_0^2\epsilon_2 - \gamma_z^2) = \epsilon_2^2(k_0^2\epsilon_1 - \gamma_z^2), \text{ 进而有 } \gamma_z = k_0\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}} \quad (4)$$

由(3)和(4)式相等得到

$$\theta_B = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} = \tan^{-1} \frac{n_2}{n_1}$$



§ 5.2 介质波导工作原理

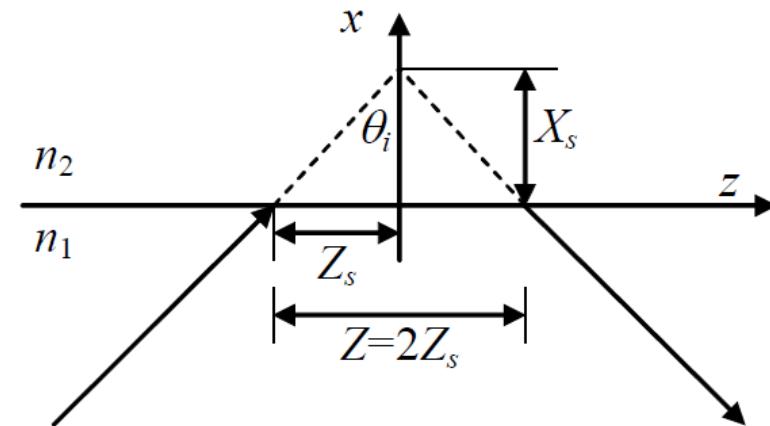
四、古斯-亨切（Goos-Haenchen）位移

1、古斯-亨切（Goos-Haenchen）位移

在金属波导中，波在金属表面产生全反射时，其入射点和反射点在同一点上。然而，古斯和亨切在 1947 年利用实验证明了在介质分界面上反射点离入射点有一段平移，称为古斯-亨切位移，如图所示。

古斯-亨切位移可由反射系数的相角来确定。当波沿 z 方向传播时，其群速为

$$v_g = \frac{Z}{t} = \frac{d\omega}{d\beta}, \text{ 则位移 } Z = \frac{d\omega t}{d\beta} = \frac{d\theta}{d\beta}$$



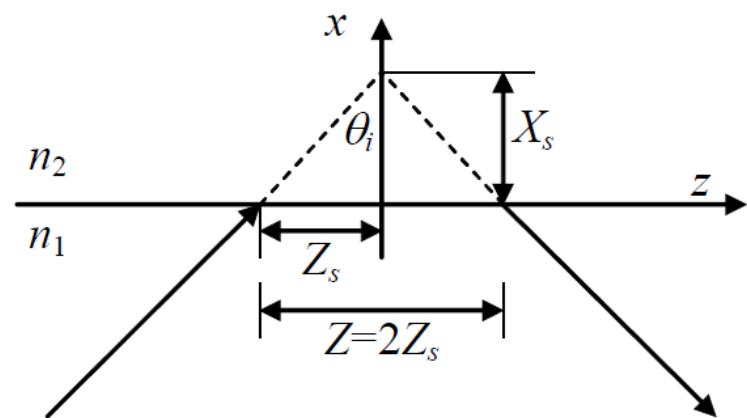
其中， θ 体现了入射波和反射波间的相差，即反射系数的相角。

§ 5.2 介质波导工作原理

TE 平面波: 令反射系数相角为 θ_H , 则

$Z = \frac{d\theta_H}{d\beta}$, 由 $Z = 2Z_s$ 可以证明:

$$Z_s = \frac{d\varphi_H}{d\beta} = \frac{\tan \theta_i}{k_{x2}} \quad X_s = Z_s \operatorname{ctg} \theta_i = \frac{1}{k_{x2}}$$



其中, $\varphi_H = \frac{\theta_H}{2} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - (n_2/n_1)^2}}{\cos \theta_i}$ 。

TM 平面波: 令反射系数相角为 θ_E , 则 $Z = \frac{d\theta_E}{d\beta}$, 由 $Z = 2Z_s$ 可以证明:

$$Z_s = \frac{d\varphi_E}{d\beta} = \frac{n_2^2}{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2 \cos^2 \theta_i} \frac{\tan \theta_i}{k_{x2}} \quad X_s = \frac{n_2^2}{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2 \cos^2 \theta_i} \frac{1}{k_{x2}}$$

其中, $\varphi_E = \frac{\theta_E}{2} = \tan^{-1} \frac{(n_1/n_2)^2 \sqrt{\sin^2 \theta_i - (n_2/n_1)^2}}{\cos \theta_i}$ 。

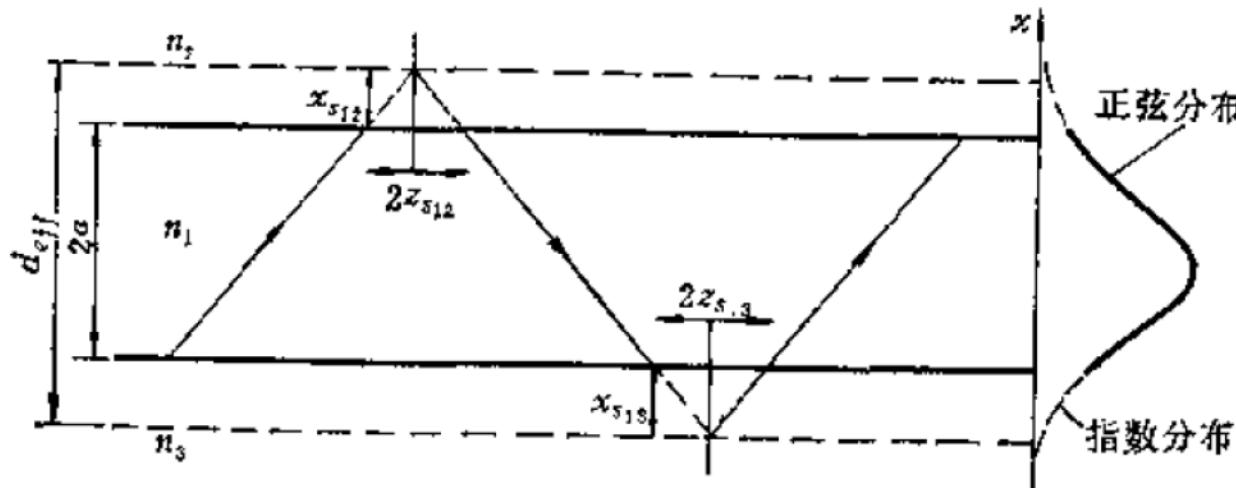
§ 5.2 介质波导工作原理

2、平板介质波导的有效厚度

平板介质波导由三层介质构成，如图所示。若在两个分界面均满足全反射条件，可以设想上下分界面上的反射点都仿佛外延了 x_{s12} 和 x_{s13} 的距离，这相当于增加了平板的厚度，其有效厚度 d_{eff} 为（以 TE 波为例）

$$d_{eff} = 2a + x_{s12} + x_{s13} = 2a + 1/k_{x2} + 1/k_{x3}$$

可以看出 x_{s12} 和 x_{s13} 分别是分界面电磁场幅度衰减到 $1/e$ 的长度。



§ 5.2 介质波导工作原理

五、介质波导中的典型波型

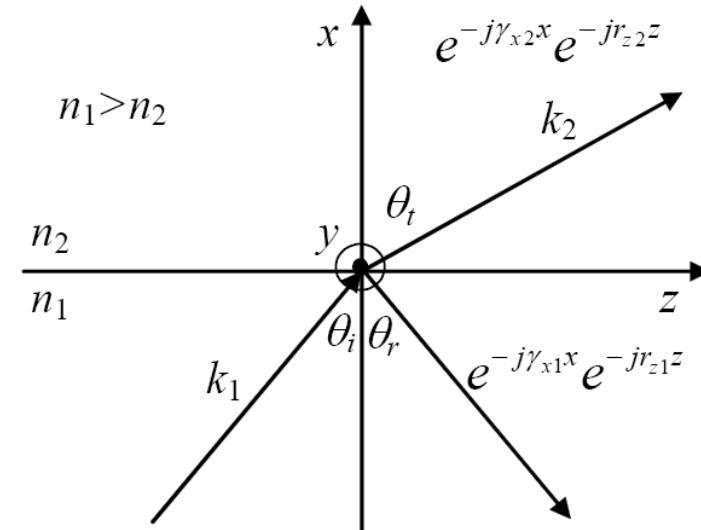
介质波导的典型波型有：表面波（Surface Wave）、辐射模（Radiation Mode）、消失波（Evanescent Wave）和泄漏波（Leaky Wave），其中前三种波型构成完整的介质波导本质模系列，而泄漏波属于非正常波。

上述波型划分与介质 2 中的折射场形式有着紧密关系，如图所示，折射波电场为

$$\vec{E}_t = \vec{A} \exp[j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})]$$

其中 \vec{A} 为幅度矢量， $\vec{k}_2 = i_x k_2 \cos \theta_t + i_z k_2 \sin \theta_t$ ， $\vec{r} = i_x x + i_z z$ ，进一步可写为

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= \vec{A} \exp(j\omega t - jk_2 \cos \theta_t x - jk_2 \sin \theta_t z) \\ &= \vec{A} \exp(j\omega t - j\gamma_{x2} x - j\gamma_z z)\end{aligned}$$



§ 5.2 介质波导工作原理

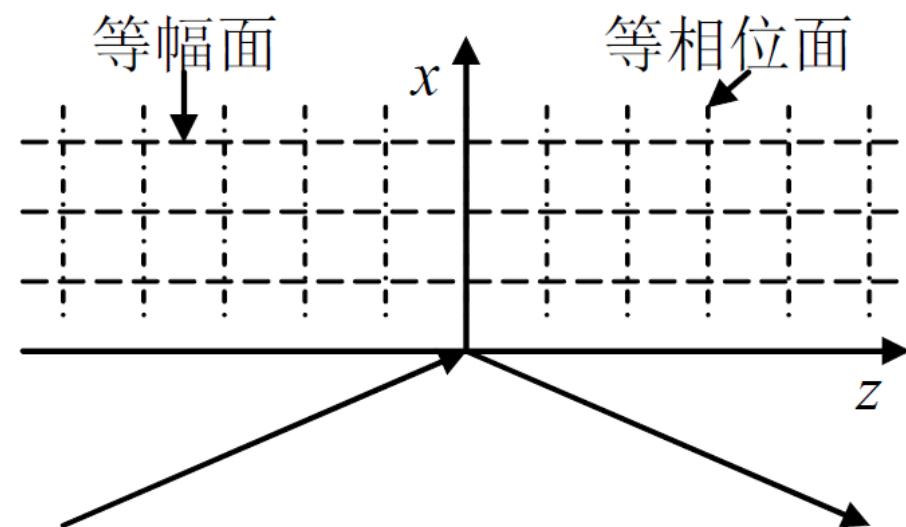
1、表面波

当 $\theta_i \geq \theta_c$ 和 $n_1 > n_2$ 时，产生全反射，可得 $\gamma_{x2} = -jk_{x2}$ ，且令 $\gamma_z = \beta$ ，有

$$\vec{E}_t = \vec{A} \exp(j\omega t - k_{x2}x - j\beta z)$$

可见折射电场在 x 方向为指数衰减，在 z 方向是传播的，称此波型为表面波（因为场主要集中在介质 1 表面附近和表面以内进行传播而得名）。

如图所示，折射电场的等相位面与等



幅面相互垂直，所以表面波是一种非均匀平面波。

§ 5.2 介质波导工作原理

表面波的总结

形成条件	$n_1 > n_2$ ， $\theta_i \geq \theta_c$ ， $\theta_c = \arcsin(n_2/n_1)$ ， 均匀平面波入射，全反射。 θ_i 为实数（取离散值）。
色散特性	$\gamma_{x1} = k_{x1}$ ， $k_{x1}^2 = k_1^2 - \beta^2$ ； $\gamma_{x2} = -jk_{x2}$ ， $-k_{x2}^2 = k_2^2 - \beta^2$ ； $\gamma_z = \beta$ ； k_{x1} 、 k_{x2} 和 β 为正实数。
场分布	介质 1： x 方向为驻波分布， z 方向是传播的。 介质 2： x 方向为指数衰减， z 方向是传播的。
谱特性	表面波是介质波导本征系列的一部分，属于离散谱。

§ 5.2 介质波导工作原理

2、辐射模

当 $n_1 > n_2$ 和 $\theta_i < \theta_c$ 时，产生部分反射，则有 $\sin \theta_i < (n_2/n_1)$ ，可得

$$\gamma_z = \beta = k_1 \sin \theta_i < k_1 (n_2/n_1) = k_2$$

所以 $\gamma_{x2} = \sqrt{k_2^2 - \beta^2} = \pm k_{x2}$ (k_{x2} 为正实数)。那么，折射电场为

$$\vec{E}_t = \vec{A} \exp(j\omega t \pm jk_{x2}x - j\beta z)$$

可见，折射电场不仅在 z 方向仍然是传播的，而在 x 方向也有能量的传播过程，因此称为辐射模。其中 $-jk_{x2}x$ 代表向外 ($+x$ 方向) 传播， $jk_{x2}x$ 代表向内 ($-x$ 方向) 传播，两个方向传播的结果是场在 x 方向呈现驻波。

驻波分布怎么会有能量的辐射呢？由于辐射模是连续谱(当 $\theta_i < \theta_c$ 都是连续谱)，可看成是由无穷多连续驻波分量叠加而成的，这些连续的驻波分量叠加后会形成向外辐射的行波。

§ 5.2 介质波导工作原理

辐射模的总结

形成条件	$n_1 > n_2$, $\theta_i < \theta_c$, $\theta_c = \arcsin(n_2/n_1)$, 均匀平面波入射，部分反射。 θ_i 为实数（取连续值）。
色散特性	$\gamma_{x1} = k_{x1}$, $k_{x1}^2 = k_1^2 - \beta^2$; $\gamma_{x2} = \pm k_{x2}$, $k_{x2}^2 = k_2^2 - \beta^2$; $\gamma_z = \beta$; k_{x1} 、 k_{x2} 和 β 为正实数。
场分布	介质 1: x 方向为驻波分布, z 方向是传播的。 介质 2: x 方向为驻波分布, z 方向是传播的。
谱特性	辐射模是介质波导本征系列的一部分, 属于连续谱。

介质波导工作原理

§ 5.2

3、消失波

采取均匀平面波入射，但 θ_i 为负虚数（仅具有数学意义），则

$$\gamma_z = k_1 \sin \theta_i = -j\alpha \quad (\alpha \text{为正实数, 公式 } \sin(-jp) = -jshp)$$

$$\gamma_{x2} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_i} = \sqrt{k_2^2 + \alpha^2} = \pm k_{x2} \quad (k_{x2} \text{为正实数})$$

折射电场为 $\vec{E}_t = \vec{A} \exp(j\omega t \pm jk_{x2}x - \alpha z)$ ，可见场在 x 方向为驻波，在 z 方向衰减。

消失波的总结	
形成条件	1、 θ_i 为负虚数，均匀平面波入射； 2、 $\theta_i=0$ （正入射），非均匀平面波入射，部分反射。
色散特性	$\gamma_{x1} = k_{x1}$ ， $k_{x1}^2 = k_1^2 - \gamma_z^2$ ， $\gamma_z = -j\alpha$ ； $\gamma_{x2} = \pm k_{x2}$ ， $k_{x2}^2 = k_2^2 - \beta^2$ ； k_{x1} 、 k_{x2} 和 α 为正实数。
场分布	介质 1： x 方向为驻波分布， z 方向为指数衰减。 介质 2： x 方向为驻波分布， z 方向为指数衰减。
谱特性	消失波是介质波导本征系列的一部分，属于连续谱。

§ 5.2 介质波导工作原理

4、泄漏波

一种观点（实际）：非均匀平面波入射，部分反射得到泄漏波， γ_{x_2} 是复数。

另一观点（理论）： θ_i 是复数，均匀平面波入射，部分反射得到泄漏波。

由 $\gamma_z = k_1 \sin \theta_i$, $\gamma_{x_2} = \sqrt{k_2^2 - r_z^2}$ 。当 θ_i 为复数， γ_z 和 γ_{x_2} 必然都为复数。可令 $\gamma_{x_2} = a_2 + jb_2$, $\gamma_z = \beta - j\alpha$, 且令 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 。根据 $k_2^2 = \gamma_{x_2}^2 + \gamma_z^2$, 可得

$\alpha\beta = a_2 b_2$, $\therefore a_2 > 0$ 时, $b_2 > 0$ (舍去 $a_2 < 0$ 时, $b_2 < 0$, 因要求向外辐射)

折射电场为 $\vec{E}_t = \vec{A} \exp(j\omega t - ja_2 x - j\beta z + b_2 x - \alpha z)$

可见在 z 方向上场有相移又有幅度衰减，而在 x 方向相位随 x 增大而滞后，幅度随 x 增加而增大(不满足无限远处的边界条件)，是非正常波，称之为泄漏波。

§ 5.2 介质波导工作原理

泄漏波的总结

形成条件	1、 θ_i 是复数（取离散值），均匀平面波入射，部分反射； 2、 θ_i 是实数（取离散值），非均匀平面波入射，部分反射。
色散特性	$\gamma_{x1} = a_1 + jb_1, \quad \gamma_{x1}^2 = k_1^2 - \gamma_z^2;$ $\gamma_{x2} = a_2 + jb_2, \quad \gamma_{x2}^2 = k_2^2 - \gamma_z^2;$ $\gamma_z = \beta - j\alpha; \quad \alpha, \beta, a_1, b_1, a_2, b_2$ 为正实数。
场分布	介质 1 和介质 2： x 方向为传输且幅度指数增加， z 方向为传输但存在幅度指数衰减。
谱特性	泄漏波不属于本征系列，是离散谱。

圆形介质波导

§ 5.3

一、圆形介质波导中的场及其特征方程

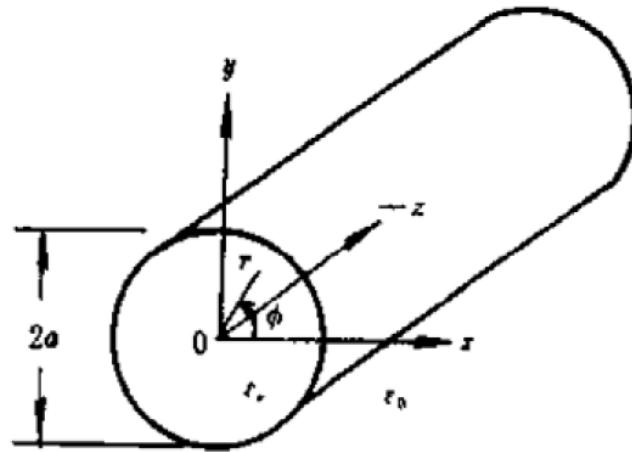
半径为 a 、介质为 ϵ_1 的圆形介质波导，采用圆柱坐标系。与圆形金属波导相类似，可以先求出波导内外的纵向场 H_{z1} 、 E_{z1} 和 H_{z2} 、 E_{z2} ，然后利用纵向场法得到横向场。

$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_{z1} + k_{c1}^2 E_{z1} = 0 \\ \nabla_t^2 H_{z1} + k_{c1}^2 H_{z1} = 0 \\ \nabla_t^2 E_{z2} - k_{c2}^2 E_{z2} = 0 \\ \nabla_t^2 H_{z2} - k_{c2}^2 H_{z2} = 0 \end{cases}, \text{ 其中 } \begin{cases} k_{c1}^2 = k_1^2 - \beta^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ -k_{c2}^2 = k_2^2 - \beta^2 = k_0^2 n_2^2 - \beta^2 \end{cases}$$

利用分离变量法进行求解，可得

$$\begin{cases} E_{z1} & E_{01} J_m(k_{c1} r) & r \leq a \\ E_{z2} & E_{02} K_m(k_{c2} r) \cdot \cos m\varphi & r > a \\ H_{z1} & H_{01} J_m(k_{c1} r) \cdot \sin m\varphi & r \leq a \\ H_{z2} & H_{02} K_m(k_{c2} r) & r > a \end{cases}$$

其中 K_m 是第二类 m 阶修正 *Bessel* 函数。



圆形介质波导

§ 5.3

圆形介质波导的特征方程：

根据 H_{z1} 、 E_{z1} 和 H_{z2} 、 E_{z2} 可以确定各横向场分量 H_r 、 H_ϕ 、 E_r 和 E_ϕ 。

在 $r=a$ 处，运用切向电磁场连续性边界条件，即

$$E_{z1} = E_{z2}, \quad H_{z1} = H_{z2}, \quad E_{\phi 1} = E_{\phi 2}, \quad H_{\phi 1} = H_{\phi 2}$$

利用这些条件可以建立常数 H_{01} 、 E_{01} 和 H_{02} 、 E_{02} 的 4 个线性方程。若要求数这 4 个常数有非零解，则线性方程组的系数行列式须等于零，可得：

特征方程形式 1： $(\eta_1 + \eta_2)(k_1^2 \eta_1 + k_2^2 \eta_2) = m^2 \beta^2 \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{w^2} \right)^2$

其中 $\eta_1 = \frac{J'_m(\mu)}{\mu J_m(\mu)}$ ， $\eta_2 = \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)}$ ； $\mu = k_{c1} a = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} a$ ， $w = k_{c2} a = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} a$ 。

因 $\beta^2 = K_1^2 - \left(\frac{\mu}{a} \right)^2 = K_2^2 + \left(\frac{w}{a} \right)^2$ ，代入以上方程得

特征方程形式 2： $(\eta_1 + \eta_2)(\varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2) = m^2 \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_1}{\mu^2} + \frac{\varepsilon_2}{w^2} \right)$

§ 5.3 圆形介质波导

圆形介质波导中的模式：

(1)、 $m=0$ 时，由特征方程得

第一种情况： $\eta_1(\mu) = -\eta_2(w)$ ，即 $\frac{J'_0(\mu)}{\mu J_0(\mu)} = -\frac{K'_0(w)}{w K_0(w)}$ ，其解对应 **TE_{0n}** 模，有三个场分量 H_r 、 E_φ 、 H_z 。

第二种情况： $\eta_1(\mu) = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \eta_2(w)$ ，即 $\frac{J'_0(\mu)}{\mu J_0(\mu)} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{K'_0(w)}{w K_0(w)}$ ，其解对应 **TM_{0n}** 模，有三个场分量 E_r 、 H_φ 、 E_z 。

§ 5.3 圆形介质波导

圆形介质波导中的模式（续）：

(2)、 $m \neq 0$ 时

此时场有六个分量，为混合模 HE_{mn} (H_z 大于 E_z , H_z 为主导, TM 模功率大于 TE 模) 和 EH_{mn} (E_z 大于 H_z , E_z 为主导, TE 模功率大于 TM 模)。

特征方程可写成

$$\eta_1 = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2} \right) \eta_2 \pm \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2} \right) \eta_2^2 - 4 \left[\frac{n_2^2}{n_1^2} \eta_2^2 - m^2 \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{w^2} \right) \right] \right\}^{1/2}$$

在弱导情况下，即 $n_1 \approx n_2$ (光纤)，上式可简化为

$$\eta_1 = -\eta_2 \pm m \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{w^2} \right)$$

上式的正负号中取正号为 EH_{mn} 模；取负号为 HE_{mn} 模。

截止条件和截止含义：

先回顾一下金属规则波导：

截止临界条件是： $\beta=0$ ，即场沿传播方向无传输，只有幅度的衰减。此时，由 $k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ 来确定截止波长和频率。

截止的物理含义是：传输模的终止，消失波的开始。

截止时有 $k^2 \leq k_c^2$ ，由 $k^2 = k^2 - \beta^2$ 得 $\beta^2 \leq 0$ 。

介质波导的截止体现在表面波到辐射模的模式转变。

截止的物理含义是：表面波的终止，辐射模的开始。

截止临界条件是：例如圆波导 $\gamma_{r2}^2 = k_2^2 - \beta^2$ ，表面波有 $\gamma_{r2}^2 = k_2^2 - \beta^2 < 0$ ，而辐射模 $\gamma_{r2}^2 = k_2^2 - \beta^2 > 0$ ，临界点在 $\gamma_{r2}^2 = k_2^2 - \beta^2 = 0$ 。若令 $\gamma_{r2}^2 = -k_{c2}^2$ ，则有 $k_{c2} = 0$ ，同时有 $\beta = k_2 = k_0 n_2$ 。

讨论：表面波到辐射模的转变并不影响 z 方向的表达（否则会破坏切向连续性条件），即总有 $\gamma_z = \beta$ ，所以圆形介质波导的截止体现在有无沿 r 方向的辐射场。

§ 5.3 圆形介质波导

介质波导的截止波长：

(1)、 $m=0$ 时，由 TE_{0n} 的特征方程

$$\frac{J'_0(k_{c1}a)}{k_{c1}aJ_0(k_{c1}a)} = -\frac{K'_0(k_{c2}a)}{k_{c2}aK_0(k_{c2}a)} \xrightarrow{k_{c2}=0} \infty \quad (\text{注: } \frac{K'_0(0)}{K_0(0)} \rightarrow 1)$$

因为 k_{c1} 不能为 0 (否则所有场均为 0)，则由 $k_{c2} = 0$ 可得方程 $J_0(k_{c1}a) = 0$ 。

设 μ_{0n} 是该方程的第 n 个根，则

$$\mu_{0n} = k_{c1}a = a\sqrt{k_1^2 - \beta^2} = a\sqrt{k_1^2 - k_2^2} = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = a\frac{2\pi}{\lambda_{cHon}}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

TE_{0n} 的截止波长为 $\lambda_{cHon} = \frac{2\pi a}{\mu_{0n}}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

同理可得， TM_{0n} 的截止波长为 $\lambda_{cE0n} = \lambda_{cHon}$ 。

§ 5.3 圆形介质波导

介质波导的截止波长（续）：

(2)、 $m \neq 0$ 而 $m=1$ 时，由特征方程

$$\frac{J'_1(\mu)}{\mu J_1(\mu)} = -\frac{K'_1(w)}{w K_1(w)} - \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{w^2}$$

由 $J'_1(\mu) = -\frac{1}{\mu} J_1(\mu) + J_0(\mu)$, $K'_1(w) = -K_0(w) - \frac{1}{w} K_1(w)$, 则

$$\frac{J_0(\mu)}{\mu J_1(\mu)} = -\frac{K_0(w)}{w K_1(w)} \xrightarrow{w=0} \infty \quad (\text{注: } \frac{K_0(0)}{K_1(0)} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow 1)$$

所以 $\mu J_1(\mu) = 0$, 即 $\mu_{11} = 0$ 或 $J_1(k_{c1}a) = 0$, 由二者为 0 都可以得到 $k_{c1} = 0$ 。

由于 $k_{c1} = \sqrt{k_1^2 - k_2^2} = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0$, 可知 $k_0 = 0$, 所以 $\lambda_{cHE11} = \infty$ 。

这说明 HE_{11} 模无截止现象, 或说截止频率为 0。所以, 圆形介质波导

的主模是 HE_{11} 模, 第一高次模为 TE_{01} 、 TM_{01} (有相同截止波长)。

表面波的传播速度：

对于表面波，因为 $(\pi/2) \geq \theta_i \geq \theta_c$ ，有 $1 \geq \sin \theta_i \geq (n_2/n_1)$ ，可得

$$\beta^2 - k_2^2 = k_1^2 \sin^2 \theta_i - k_2^2 = [k_1^2 \sin^2 \theta_i - k_1^2 (n_2/n_1)^2] \geq 0, \text{ 即 } \underline{\beta \geq k_2}$$

$$k_1^2 - \beta^2 = k_1^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_i = k_1^2 (1 - \sin^2 \theta_i) \geq 0, \text{ 即 } \underline{k_1 \geq \beta}$$

根据公式 $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{2\pi v}{\lambda\beta} = v \frac{k}{\beta}$ ，其中 v 是介质中的光速，可得

$$v_1 \leq v_1 \frac{k_1}{\beta} = v_{p1} \Leftarrow v_p \Rightarrow v_{p2} = v_2 \frac{k_2}{\beta} \leq v_2, \text{ 称为慢波。}$$

作为对比，对于辐射模，因为 $\theta_i < \theta_c$ ，有 $\sin \theta_i < (n_2/n_1)$ ，可得

$$k_2^2 - \beta^2 = k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_i = [k_1^2 (n_2/n_1)^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_i] > 0, \text{ 即 } \underline{k_2 > \beta}$$

$$k_1^2 - \beta^2 = k_1^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_i = k_1^2 (1 - \sin^2 \theta_i) > 0, \text{ 即 } \underline{k_1 > \beta}$$

$$v_1 < v_1 \frac{k_1}{\beta} = v_{p1} \Leftarrow v_p \Rightarrow v_{p2} = v_2 \frac{k_2}{\beta} > v_2, \text{ 称为快波。}$$

§ 5.3 圆形介质波导

表面波传播的能量分布（以圆波导为例）：

$$\beta = \sqrt{k_1^2 - k_{c1}^2} = k_0 \sqrt{n_1^2 - (k_{c1}/k_0)^2} = k_0 \sqrt{n_1^2 - (k_{c1}\lambda/2\pi)^2}$$

当工作频率越来越高（即远离截止频率）时，会逐步呈现 $k_0 \gg k_{c1}$ 的现象。原因是随着工作频率的升高，圆波导传播的电磁能量会更加集中于介质 1 的中心部分，使得有效介电常数 ϵ_e 会更接近于介质 1 的 ϵ_r （这可以想象成介质 1 的半径趋于无穷大），所以当工作频率很高时，有 $\beta \approx k_0 n_1 = k_1$ 。

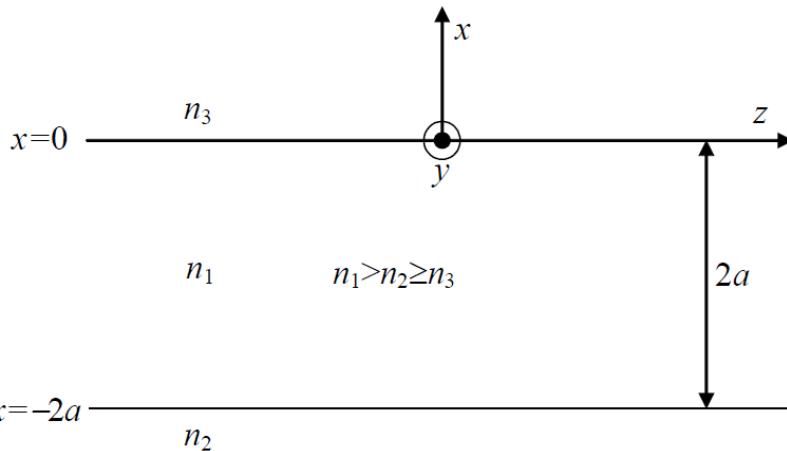
当工作频率降到截止频率附近时，圆波导传播的电磁能量会弥散到整个空间，使得有效介电常数 ϵ_e 接近于介质 2 的 ϵ_r （可以想象成介质 1 的半径趋于 0，主要能量都在介质 2 中传输）。因截止时有 $k_{c2} = 0$ ，所以 $\beta = \sqrt{k_{c2}^2 + k_2^2} = k_2$ 。

§ 5.4 矩形介质波导

一、平板介质波导

1、场的分析方法

如图所示，假定介质板在 y 和 z 方向无限延伸，场在 y 方向不变（即 $\partial/\partial y = 0$ ），在 z 方向传播 ($e^{-j\beta z}$ ， $\partial/\partial z = -j\beta$)。均匀平面波（**H** 平面波和 **E** 平面波）入射，上下分界面全反射。



H 平面波 (TE)	E 平面波 (TM)
$\frac{\partial E_y(x,z)}{\partial z} = j\omega\mu H_x(x,z)$ $\frac{\partial E_y(x,z)}{\partial x} = -j\omega\mu H_z(x,z)$ $\frac{\partial H_x(x,z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(x,z)}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y(x,z)$	$-\frac{\partial H_y(x,z)}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x(x,z)$ $\frac{\partial H_y(x,z)}{\partial x} = j\omega\epsilon E_z(x,z)$ $\frac{\partial E_x(x,z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(x,z)}{\partial x} = -j\omega\mu H_y(x,z)$
$\begin{cases} \beta E_y = -\omega\mu H_x \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\omega\mu H_z \\ -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \end{cases}$	$\begin{cases} \beta H_y = \omega\epsilon E_x \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = j\omega\epsilon E_z \\ j\beta E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = j\omega\mu H_y \end{cases}$

(1)、TE 模

对 $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\omega\mu H_z$ 求导, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= -j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\mu(j\beta H_x + j\omega\varepsilon E_y) \\ &= j\omega\mu \left(-j\beta \frac{\beta}{\omega\mu} E_y + j\omega\varepsilon E_y \right) = -\left(k^2 - \beta^2\right) E_y\end{aligned}$$

可得 E_y 在 3 个区域应满足的波动方程:

在 1 区 $\frac{\partial^2 E_{y1}}{\partial x^2} + k_{x1}^2 E_{y1} = 0 \quad k_{x1}^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \quad \gamma_{x1} = k_{x1} \quad k_{x1} > 0$

在 2 区 $\frac{\partial^2 E_{y2}}{\partial x^2} - k_{x2}^2 E_{y2} = 0 \quad -k_{x2}^2 = k_0^2 n_2^2 - \beta^2 \quad \underline{\gamma_{x2} = jk_{x2}} \quad k_{x2} \geq 0$

在 3 区 $\frac{\partial^2 E_{y3}}{\partial x^2} - k_{x3}^2 E_{y3} = 0 \quad -k_{x3}^2 = k_0^2 n_3^2 - \beta^2 \quad \gamma_{x3} = -jk_{x3} \quad k_{x3} \geq 0$

同时有

$$H_{zi} = \frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial E_{yi}}{\partial x} \quad i=1, 2, 3$$

§ 5.4 矩形介质波导

由两个介质界面上 E_y 和 H_z 切向场连续，写出三个区域 E_y 的解：

$$E_y = \begin{cases} Ae^{-k_{x_3}x} & 0 \leq x \\ A \cos k_{x_1}x + B \sin k_{x_1}x & -2a \leq x \leq 0 \\ (A \cos 2ak_{x_1} - B \sin 2ak_{x_1})e^{k_{x_2}(x+2a)} & x \leq -2a \end{cases}$$

式中 A 和 B 的选取已考虑了 E_y 在界面上的连续性条件，由 E_y 可得

$$H_z = \frac{j}{\omega\mu} \begin{cases} -k_{x_3}Ae^{-k_{x_3}x} & 0 \leq x \\ k_{x_1}(-A \sin k_{x_1}x + B \cos k_{x_1}x) & -2a \leq x \leq 0 \\ k_{x_2}(A \cos 2ak_{x_1} - B \sin 2ak_{x_1})e^{k_{x_2}(x+2a)} & x \leq -2a \end{cases}$$

由 H_z 连续性条件有

$$x = 0 \quad -k_{x_3}A - k_{x_1}B = 0$$

$$x = -2a \quad k_{x_1}(A \sin 2ak_{x_1} + B \cos 2ak_{x_1}) = k_{x_2}(A \cos 2ak_{x_1} - B \sin 2ak_{x_1})$$

若要求 A 和 B 有非零解，则方程组的系数行列式为零，可得

$$\tan 2ak_{x_1} = \frac{k_{x_1}(k_{x_2} + k_{x_3})}{k_{x_1}^2 - k_{x_2}k_{x_3}}$$

上式是一个超越方程，即 TE 模的特征方程，求解该式可得 β/k_0 。

§ 5.4 矩形介质波导

(2)、TM 模

与 TE 模过程类似，3 个区域 H_y 应满足的波动方程：

在 1 区 $\frac{\partial^2 H_{y1}}{\partial x^2} + k_{x1}^2 H_{y1} = 0 \quad k_{x1}^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \quad \gamma_{x1} = k_{x1} \quad k_{x1} > 0$

在 2 区 $\frac{\partial^2 H_{y2}}{\partial x^2} - k_{x2}^2 H_{y2} = 0 \quad -k_{x2}^2 = k_0^2 n_2^2 - \beta^2 \quad \underline{\gamma_{x2} = jk_{x2}} \quad k_{x2} \geq 0$

在 3 区 $\frac{\partial^2 H_{y3}}{\partial x^2} - k_{x3}^2 H_{y3} = 0 \quad -k_{x3}^2 = k_0^2 n_3^2 - \beta^2 \quad \gamma_{x3} = -jk_{x3} \quad k_{x3} \geq 0$

同时有

$$E_{zi} = -\frac{j}{\omega \epsilon} \frac{\partial H_{yi}}{\partial x} \quad i=1, 2, 3$$

§ 5.4 矩形介质波导

3个区域的 H_y 和 E_z 的求解结果如下：

$$H_y = \begin{cases} Ce^{-k_{x3}x} & 0 \leq x \\ C \cos k_{x1}x + D \sin k_{x1}x & -2a \leq x \leq 0 \\ (C \cos 2ak_{x1} - D \sin 2ak_{x1})e^{k_{x2}(x+2a)} & x \leq -2a \end{cases}$$

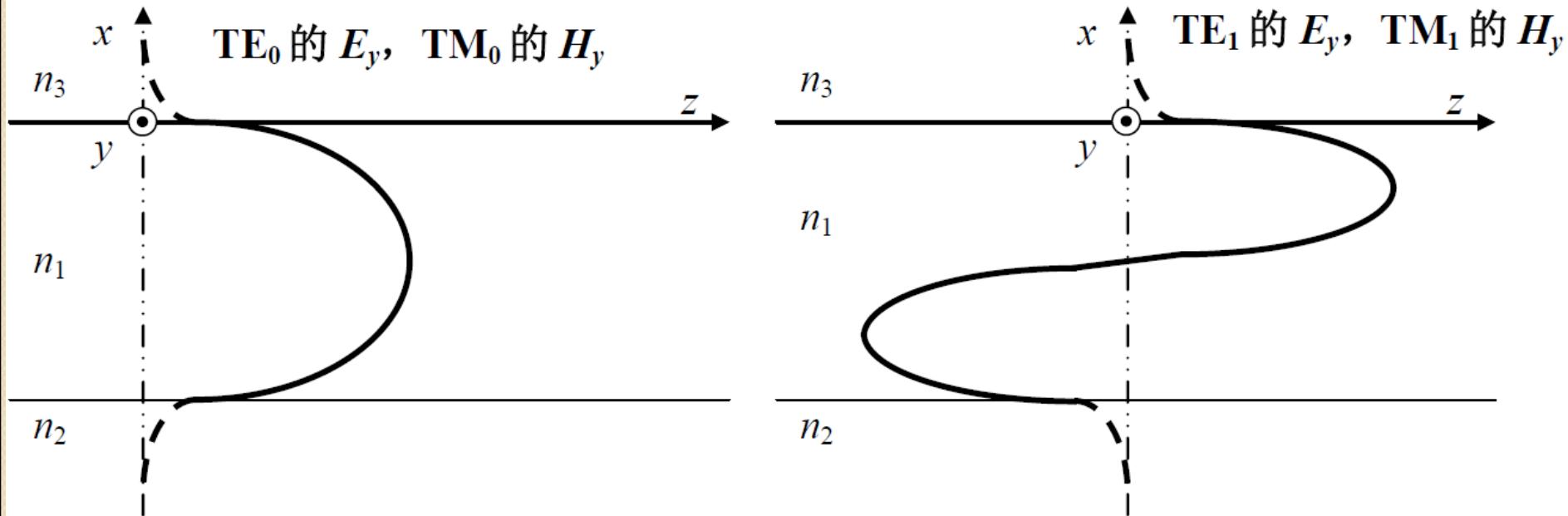
$$E_z = -\frac{j}{\omega \epsilon_0} \begin{cases} -k_{x3}Ce^{-k_{x3}x} / n_3^2 & 0 \leq x \\ k_{x1}(-C \sin k_{x1}x + D \cos k_{x1}x) / n_1^2 & -2a \leq x \leq 0 \\ k_{x2}(C \cos 2ak_{x1} - D \sin 2ak_{x1})e^{k_{x2}(x+2a)} / n_2^2 & x \leq -2a \end{cases}$$

可得 **TM** 模的特征方程为

$$\tan 2ak_{x1} = \frac{n_1^2 k_{x1} (n_3^2 k_{x2} + n_2^2 k_{x3})}{n_2^2 n_3^2 k_{x1}^2 - n_1^4 k_{x2} k_{x3}} = \frac{\epsilon_{r1} k_{x1} (\epsilon_{r3} k_{x2} + \epsilon_{r2} k_{x3})}{\epsilon_{r2} \epsilon_{r3} k_{x1}^2 - \epsilon_{r1}^2 k_{x2} k_{x3}} = \frac{\frac{k_{x1}}{\epsilon_{r1}} \left(\frac{k_{x2}}{\epsilon_{r2}} + \frac{k_{x3}}{\epsilon_{r3}} \right)}{\left(\frac{k_{x1}}{\epsilon_{r1}} \right)^2 - \frac{k_{x2}}{\epsilon_{r2}} \frac{k_{x3}}{\epsilon_{r3}}}$$

§ 5.4 矩形介质波导

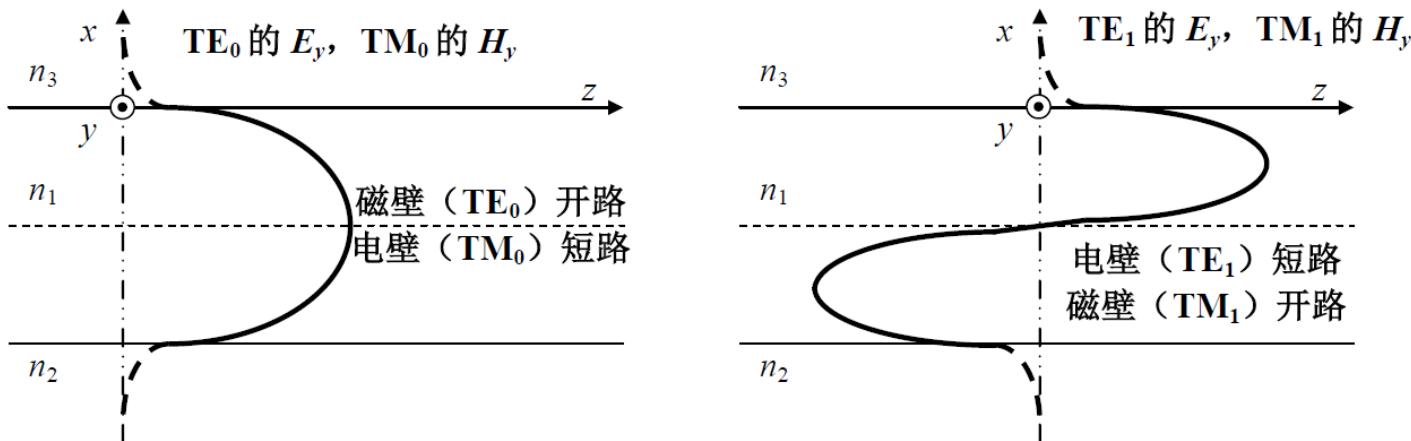
这里给出了平板介质波导的主模 TE_0 以及前几个高次模 TM_0 、 TE_1 、 TM_1 的 E_y (TE 模) 和 H_y (TM 模) 的幅度分布：



需要注意：这些模式下标的含义与金属波导是不同的，从幅度分布上来看，显然介质 1 中的半驻波个数并不是完整的。

§ 5.4 矩形介质波导

当 $n_2 = n_3$ 时，平板结构上下是对称的，因此在对称中心处可以进行磁壁（开路）或者电壁（短路）的等效。



TE₀: 有 $H_z = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x}$ ①, $H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_y$ 。因对称中心的 E_y 为最大值，则

由①可知切向磁场 $H_z = 0$ 。所以对称中心处仅有切向电场 E_y 和法向磁场 H_x 存在，符合磁壁的边界条件，因而对称中心可等效为磁壁（开路）。

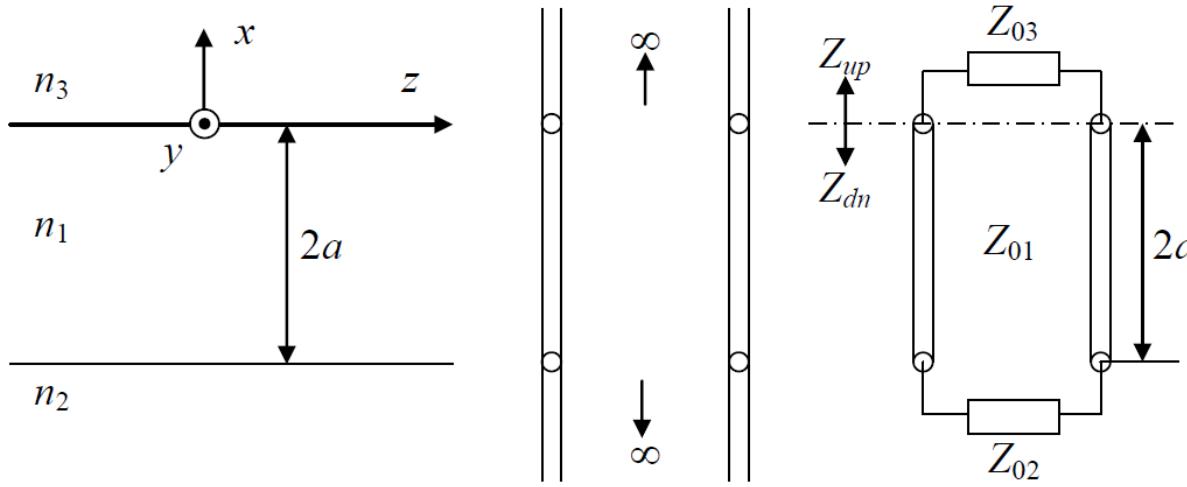
TM₀: 有 $E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x}$ ②, $E_x = \frac{\beta}{\omega\epsilon} H_y$ 。因对称中心的 H_y 为最大值，则由

②可知切向电场 $E_z = 0$ ，所以对称中心仅有法向电场 E_x 和切向磁场 H_y 存在，符合电壁的边界条件，因而对称中心可等效为电壁（短路）。

§ 5.4 矩形介质波导

2、路的分析方法

用等效传输线方法来研究多层介质波导问题可简便获得色散方程。



当用传输线来等效平板波导时，首先要确定 3 段传输线的特性阻抗，
对于 y 和 z 方向无限延展的平板波导，特性阻抗就等于波阻抗，即

$$\text{TE 平面波的波阻抗: } Z_H = \frac{E_y}{H_z}$$

$$H_z = \frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{j}{\omega\mu} (-j\gamma_x E_y) = \frac{\gamma_x}{\omega\mu} E_y$$

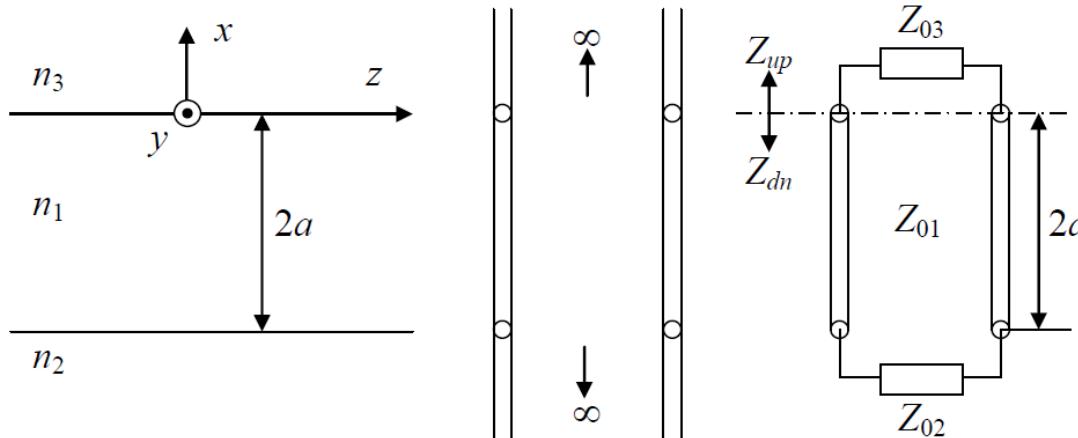
$$Z_H = \frac{\omega\mu}{\gamma_x}$$

$$\text{TM 平面波的波阻抗: } Z_E = -\frac{E_z}{H_y}$$

$$E_z = \frac{-j}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{-j}{\omega\epsilon} (-j\gamma_x H_y) = \frac{-\gamma_x}{\omega\epsilon} H_y$$

$$Z_E = \frac{\gamma_x}{\omega\epsilon}$$

§ 5.4 矩形介质波导



对于 TE 波，有 $Z_{01} = Z_{H1} = \frac{\omega\mu}{\gamma_{x1}} = \frac{\omega\mu}{k_{x1}}$ ， $Z_{02} = Z_{H2} = \frac{\omega\mu}{-jk_{x2}}$ ， $Z_{03} = Z_{H3} = \frac{\omega\mu}{-jk_{x3}}$

在两个介质分界面之间，场沿 x 方向为驻波分布，这种驻波分布在等效电路中体现为横向谐振，即满足横向谐振条件： $Z_{up} + Z_{dn} = 0$ 。

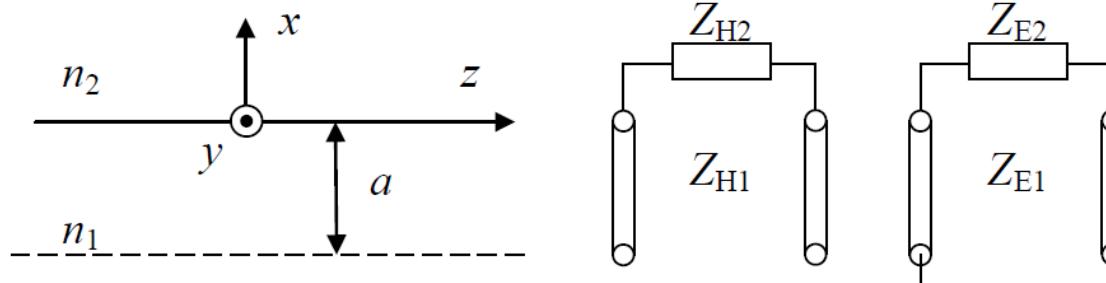
$$Z_{H3} + Z_{H1} \frac{Z_{H2} + jZ_{H1} \tan 2ak_{x1}}{Z_{H1} + jZ_{H2} \tan 2ak_{x1}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{-jk_{x3}} + \frac{1}{k_{x1}} \frac{\frac{1}{-jk_{x2}} + j \frac{1}{k_{x1}} \tan 2ak_{x1}}{\frac{1}{k_{x1}} + j \frac{1}{-jk_{x2}} \tan 2ak_{x1}} = 0$$

整理后有 $\tan 2ak_{x1} = \frac{k_{x1}(k_{x2} + k_{x3})}{k_{x1}^2 - k_{x2}k_{x3}}$ ，与场的方法得到的特征方程完全一致。

对于 TM 波，也可以得到和场的方法完全一致的特征方程。

§ 5.4 矩形介质波导

当 $n_2 = n_3$ 时，在对称情况下可以利用电壁或磁壁的条件使电路进一步简化：



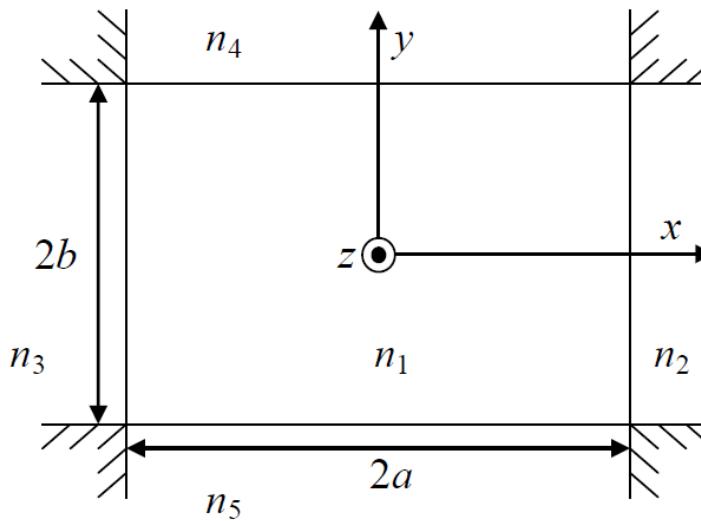
n_2

	TE	TM
横向谐振	$-jZ_{H1}ctgak_{x1} + Z_{H2} = 0$	$jZ_{E1} \tan ak_{x1} + Z_{E2} = 0$
代入波阻抗	$\frac{-j}{k_{x1}}ctgak_{x1} + \frac{1}{-jk_{x2}} = 0$	$\frac{jk_{x1}}{\epsilon_{r1}} \tan ak_{x1} + \frac{-jk_{x2}}{\epsilon_{r2}} = 0$
特征方程	$\tan ak_{x1} = \frac{k_{x2}}{k_{x1}}$	$\tan ak_{x1} = \frac{\epsilon_{r1}k_{x2}}{\epsilon_{r2}k_{x1}}$

§ 5.4 矩形介质波导

二、矩形介质波导

1、马克蒂里 (*Marcatili*) 方法 (场的方法)



矩形介质波导的本质模包括 E_{mn}^y (E_y 、 E_z 、 H_x 、 H_z) 和 E_{mn}^x (E_x 、 E_z 、 H_y 、 H_z)，其共同特点是 E_z 和 H_z 分量都比较小，所以这两类模式可近似为准 TEM 波，这种近似在截止频率附近误差较大，而远离时有较高精度。

Marcatili 方法认为电磁能量主要集中在矩形波导的芯子中，进入周围邻紧的四个区域中能量很少，四个角区域的能量则更少，因此可以忽略。

Marcatili 方法的基本过程是：首先，列出波导芯子和紧邻四个区域的 5

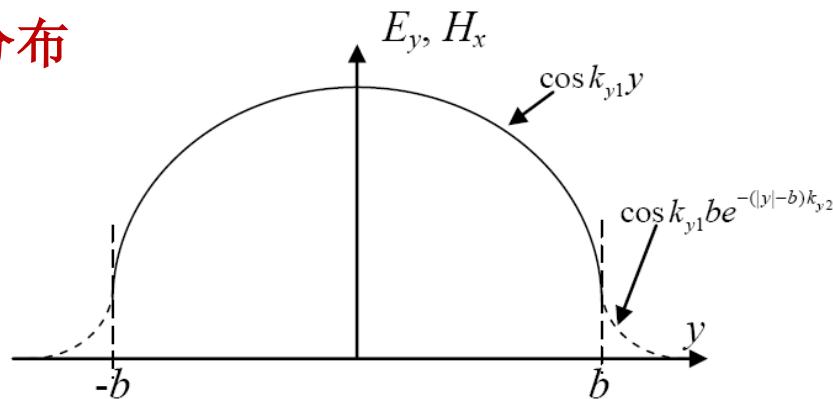
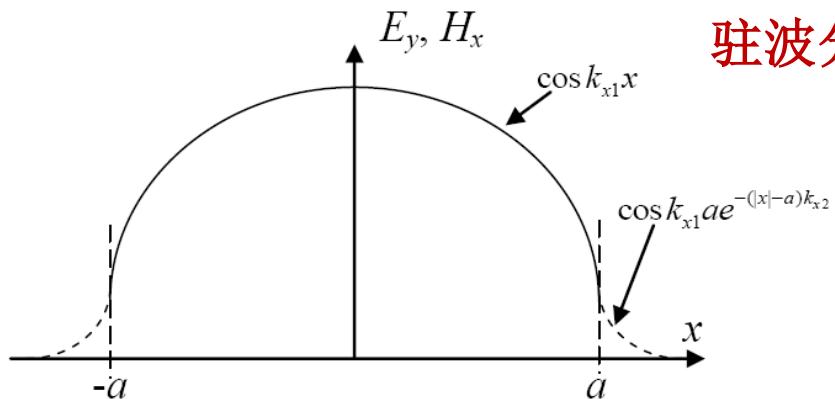
组纵向场波动方程；其次，分离变量法求解每个波动方程；然后，利用 4 个介质分界面上切向场的连续条件得到特征方程；最后，求出传输模的 β 。

5 组纵向场的波动方程为：
$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_{zi} \pm (k_0^2 n_i^2 - \beta^2) E_{zi} = 0 & i=1,2,3,4,5 \\ \nabla_t^2 H_{zi} \pm (k_0^2 n_i^2 - \beta^2) H_{zi} = 0 & i=1 \text{ 时, 取 + 号} \end{cases}$$

当 $n_2 = n_3 = n_4 = n_5$ 时， E_{11}^y ($a > b$ 时， E_{11}^y 是主模) 的场分布为

$$E_y = \begin{cases} E_0 \cos(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y) & |x| \leq a, |y| \leq b \\ E_0 \cos(k_{x1}a) \cos(k_{y1}y) e^{-k_{x2}(|x|-a)} & |x| > a, |y| \leq b \\ E_0 \cos(k_{x1}x) \cos(k_{y1}b) e^{-k_{y2}(|y|-b)} & |x| \leq a, |y| > b \\ 0 & |x| > a, |y| > b \end{cases}$$

驻波分布



§ 5.4 矩形介质波导

矩形介质波导的特征方程（由场的方法得到的）

E_{mn}^y 模的色散方程为 $\beta_{mn}^2 = k_0^2 \epsilon_{r1} - k_{x1m}^2 - k_{y1n}^2$ ，下表 m 和 n 分别体现了场

在 x 和 y 方向的驻波分布，所以 E_{11}^y 的色散方程为 $\beta^2 = k_0^2 \epsilon_{r1} - k_{x1}^2 - k_{y1}^2$ 。

k_{y1} 可由以下特征方程确定（由 $y = \pm b$ 处 H_x 和 E_z 连续得到）

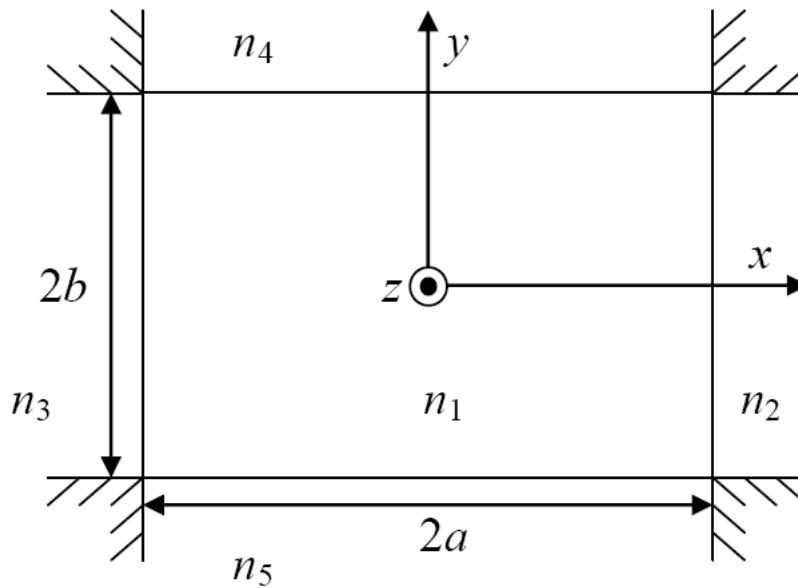
$$\tan 2bk_{y1} = \frac{\epsilon_{r1}k_{y1}(\epsilon_{r4}k_{y5} + \epsilon_{r5}k_{y4})}{\epsilon_{r4}\epsilon_{r5}k_{y1}^2 - \epsilon_{r1}^2k_{y4}k_{y5}}$$

其中，
$$-k_{y4}^2 = k_0^2(\epsilon_{r4} - \epsilon_{r1}) + k_{y1}^2, \quad -k_{y5}^2 = k_0^2(\epsilon_{r5} - \epsilon_{r1}) + k_{y1}^2$$

k_{x1} 由以下特征方程确定（由 $x = \pm a$ 处 H_z 和 E_y 连续得到）

$$\tan 2ak_{x1} = \frac{k_{x1}(k_{x2} + k_{x3})}{k_{x1}^2 - k_{x2}k_{x3}}$$

其中，
$$-k_{x2}^2 = k_0^2(\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}) + k_{x1}^2, \quad -k_{x3}^2 = k_0^2(\epsilon_{r3} - \epsilon_{r1}) + k_{x1}^2$$



1 区的色散关系式为: $k_0^2 \varepsilon_{r1} = k_{x1}^2 + k_{y1}^2 + \beta^2$ ①

4 区的色散关系式为: $k_0^2 \varepsilon_{r4} = k_{x4}^2 - k_{y4}^2 + \beta^2$ ②

为了保证 1 区和 4 区之间介质界面上的场的切向连续性条件，在 x 方向上，两个区的传播因数应相等 $\gamma_{x1} = \gamma_{x4}$ ，也即 $k_{x1} = k_{x4}$ 。

据此，以上②式减去①式，可得 $-k_{y4}^2 = k_0^2 (\varepsilon_{r4} - \varepsilon_{r1}) + k_{y1}^2$

有关 *Marcatili* 方法的讨论:

- 1、以上确定 k_{y1} 和 k_{x1} 的两个特征方程是相互独立的，无任何联系，产生这种结果的主要原因就是 *Marcatili* 方法假设 4 个角区域的场为 0，从而切断了 k_{y1} 和 k_{x1} 之间存在的内在联系。
- 2、从两个特征方程的具体形式可见，有可能将矩形介质波导问题看成 x 方向（水平放置）和 y 方向（垂直放置）的两个介质平板波导问题来处理。

具体处理过程如下：

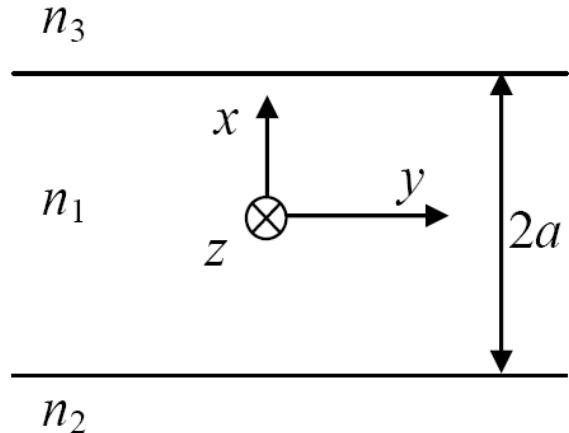
- ①、将矩形介质波导在水平方向（ x 方向）上拉伸到无限远（保持高度 $2b$ 不变），可得水平放置介质平板波导特征方程，求解出 k_{y1} （假定 $k_{x1}=0$ ）。
- ②、将矩形介质波导在垂直方向（ y 方向）上拉伸到无限远（保持宽度 $2a$ 不变），可得垂直放置介质平板波导特征方程，求解出 k_{x1} （假定 $k_{y1}=0$ ）。
- ③、以上①和②次序可以交换，通过两个方程分别求出 k_{y1} 和 k_{x1} ，来确定 β 。⁵³

§ 5.4 矩形介质波导

为了作进一步讨论，这里重新观察前述的平板介质波导的有关结论（注：右图坐标与以往不同）。

对于 TE 波，其场分量有 $\underline{E_y}$ 、 $\underline{H_x}$ 、 $\underline{H_z}$ ，其中

E_y 平行于介质分界面，特征方程为



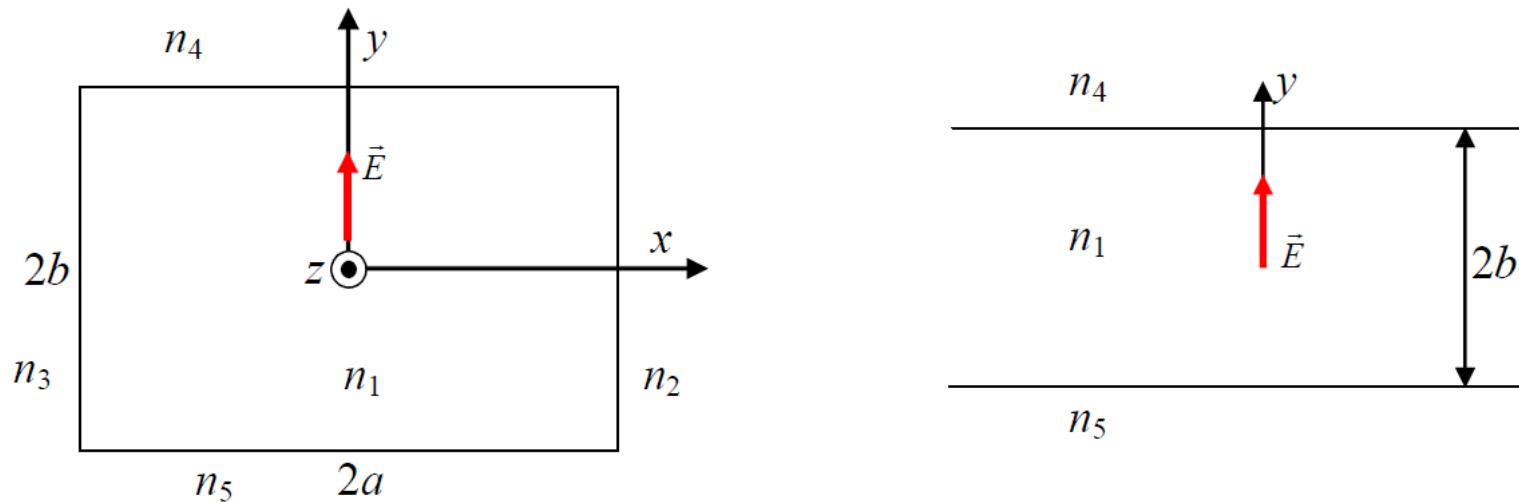
$$\tan 2ak_{x1} = \frac{k_{x1}(k_{x2} + k_{x3})}{k_{x1}^2 - k_{x2}k_{x3}} \quad \begin{cases} k_{x1}^2 = k_0^2 \epsilon_{r1} - \beta^2 \\ -k_{x2}^2 = k_0^2 \epsilon_{r2} - \beta^2 \\ -k_{x3}^2 = k_0^2 \epsilon_{r3} - \beta^2 \end{cases}$$

对于 TM 波，其场分量有 $\underline{H_y}$ 、 $\underline{E_x}$ 、 $\underline{E_z}$ ，其中 E_x 垂直于介质分界面，特征方程为

$$\tan 2ak_{x1} = \frac{\epsilon_{r1}k_{x1}(\epsilon_{r2}k_{x3} + \epsilon_{r3}k_{x5})}{\epsilon_{r2}\epsilon_{r3}k_{x1}^2 - \epsilon_{r1}^2k_{x2}k_{x3}}$$

§ 5.4 矩形介质波导

与 *Marcatili* 方法等效的平板波导方法（以 E_{11}^y 为例）



首先，对矩形介质波导作水平拉伸，如图所示，因电场方向垂直于介质分界面，所以应选择平板波导的 TM 模，以 k_{y1} 为待求参量，则

$$\tan 2bk_{y1} = \frac{\epsilon_{r1}k_{y1}(\epsilon_{r4}k_{y5} + \epsilon_{r5}k_{y4})}{\epsilon_{r4}\epsilon_{r5}k_{y1}^2 - \epsilon_{r1}^2k_{y4}k_{y5}}, \text{ 其中 } \begin{cases} k_{y1}^2 = k_0^2\epsilon_{r1} - \beta_y^2 \\ -k_{y4}^2 = k_0^2(\epsilon_{r4} - \epsilon_{r1}) + k_{y1}^2 = k_0^2\epsilon_{r4} - \beta_y^2 \\ -k_{y5}^2 = k_0^2(\epsilon_{r5} - \epsilon_{r1}) + k_{y1}^2 = k_0^2\epsilon_{r5} - \beta_y^2 \end{cases}$$

§ 5.4 矩形介质波导

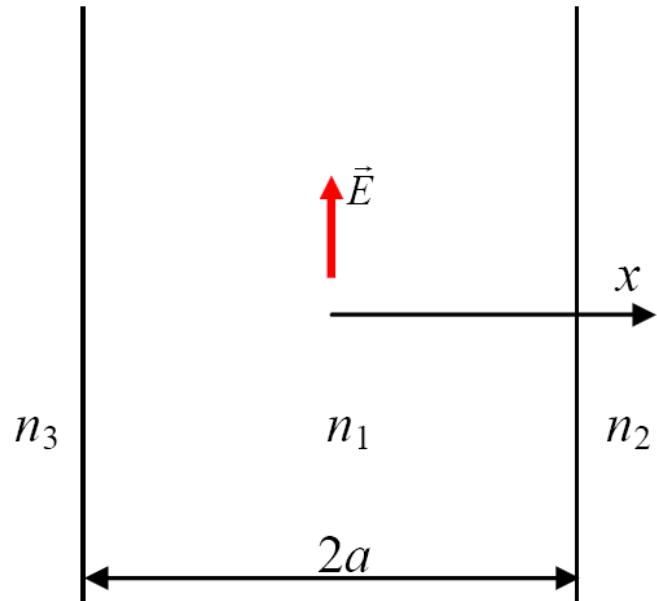
然后，对矩形介质波导作垂直拉伸，如图所示，因电场方向平行于介质分界
面，所以应选择平板波导的 TE 模，以 k_{x1} 为待求参量，则

$$\tan 2ak_{x1} = \frac{k_{x1}(k_{x2} + k_{x3})}{k_{x1}^2 - k_{x2}k_{x3}}$$

其中 $\begin{cases} k_{x1}^2 = k_0^2 \epsilon_{r1} - \beta_x^2 \\ -k_{x2}^2 = k_0^2 (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}) + k_{x1}^2 = k_0^2 \epsilon_{r2} - \beta_x^2 \\ -k_{x3}^2 = k_0^2 (\epsilon_{r3} - \epsilon_{r1}) + k_{x1}^2 = k_0^2 \epsilon_{r3} - \beta_x^2 \end{cases}$

有了 k_{x1} 和 k_{y1} 以后，利用 $\beta^2 = k_0^2 \epsilon_{r1} - k_{x1}^2 - k_{y1}^2$ ，

可以求出 E_{11}^y 的 β 。



2、EDC (Efficient Dielectric Contant) 方法（路的方法）

Marcatili 方法存在的问题：

当工作频率远离截止频率时，矩形介质波导场的能量主要集中在介质棒的中心，扩散到 4 个角区域的能量很小，所以求解 β 的精度较好。但是在工作频率不是很高时，尤其在截止频率附近，场会扩散到介质波导周围区域，*Marcatili* 的假设不再成立， k_{x1} 和 k_{y1} 的耦合增强，求解 β 的误差加大。

EDC 方法的主要特点：

EDC 方法也是把矩形介质波导延展成 x 和 y 方向的两个介质平板波导来处理的，只是在两次拉伸之间的平板波导介电常数并不都等于 ϵ_{r1} ，而是由一个有效介电常数 (ϵ_e^x 或 ϵ_e^y) 来代替，这将 k_{x1} 和 k_{y1} 相互联系起来，因而更符合实际存在的情况。在截止区附近，比 *Marcatili* 方法有更高的计算精度。

§ 5.4 矩形介质波导

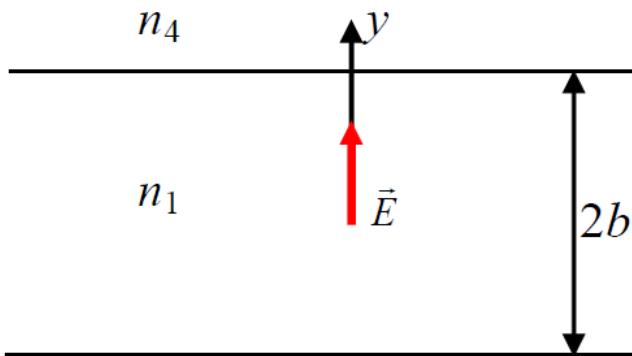
下面仍以 E_{11}^y 为例，介绍 EDC 方法获得矩形介质波导特征方程的过程。

第一种方法：先水平拉伸，再垂直拉伸

如图所示，先水平拉伸后用 TM 模，以 $\varepsilon_e^y = (\beta_y/k_0)^2$ 为待求量，则

$$\tan 2bk_{y1} = \frac{\varepsilon_{r1}k_{y1}(\varepsilon_{r4}k_{y5} + \varepsilon_{r5}k_{y4})}{\varepsilon_{r4}\varepsilon_{r5}k_{y1}^2 - \varepsilon_{r1}^2k_{y4}k_{y5}}$$

其中 $\begin{cases} (k_{y1}/k_0)^2 = \varepsilon_{r1} - \varepsilon_e^y \\ -(k_{y4}/k_0)^2 = \varepsilon_{r4} - \varepsilon_e^y \\ -(k_{y5}/k_0)^2 = \varepsilon_{r5} - \varepsilon_e^y \end{cases}$



注意： β_y 是 1、4 和 5 区域共同的相位传播因子，所以上面求解得到的 ε_e^y 可

看成是在 y 方向对 ε_{r1} 、 ε_{r4} 和 ε_{r5} 取 “平均” 的结果，这里可见拉伸方向和取“平均”的方向是垂直的。

§ 5.4 矩形介质波导

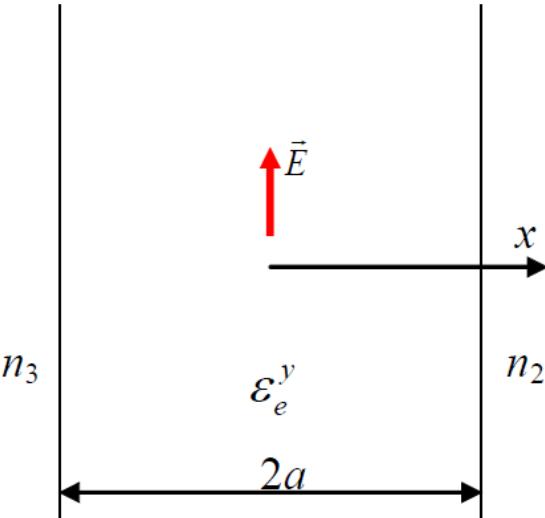
由于两次拉伸得到的两个平板介质波导的重叠区域是 1 区，所以有效

介电常数 ϵ_e^y 在第一次拉伸后要替代 1 区的介电常数。

垂直拉伸后用 TE 模，以 $\epsilon_e = (\beta/k_0)^2$ 为待求

量，则

$$\tan 2ak_{x1} = \frac{k_{x1}(k_{x2} + k_{x3})}{k_{x1}^2 - k_{x2}k_{x3}}, \text{ 其中 } \begin{cases} (k_{x1}/k_0)^2 = \epsilon_e^y - \epsilon_e \\ -(k_{x2}/k_0)^2 = \epsilon_{r2} - \epsilon_e \\ -(k_{x3}/k_0)^2 = \epsilon_{r3} - \epsilon_e \end{cases}$$



由以上两个拉伸过程可得

$$\epsilon_e = \epsilon_e^y - (k_{x1}/k_0)^2 = \epsilon_{r1} - (k_{x1}/k_0)^2 - (k_{y1}/k_0)^2$$

注意：这里的 k_{x1} 和 k_{y1} 与 Marcatili 方法中得到的不同。

§ 5.4 矩形介质波导

第二种方法：先垂直拉伸，再水平拉伸

垂直拉伸后用 TE 模，图形同前，以 ε_e^x 为待求量，则

$$\tan 2ak_{x1} = \frac{k_{x1}(k_{x2} + k_{x3})}{k_{x1}^2 - k_{x2}k_{x3}}, \text{ 其中 } \begin{cases} (k_{x1}/k_0)^2 = \varepsilon_{r1} - \varepsilon_e^x \\ -(k_{x2}/k_0)^2 = \varepsilon_{r2} - \varepsilon_e^x \\ -(k_{x3}/k_0)^2 = \varepsilon_{r3} - \varepsilon_e^x \end{cases}$$

水平拉伸后用 TM 模，图形同前，以 ε_e 为待求量，则

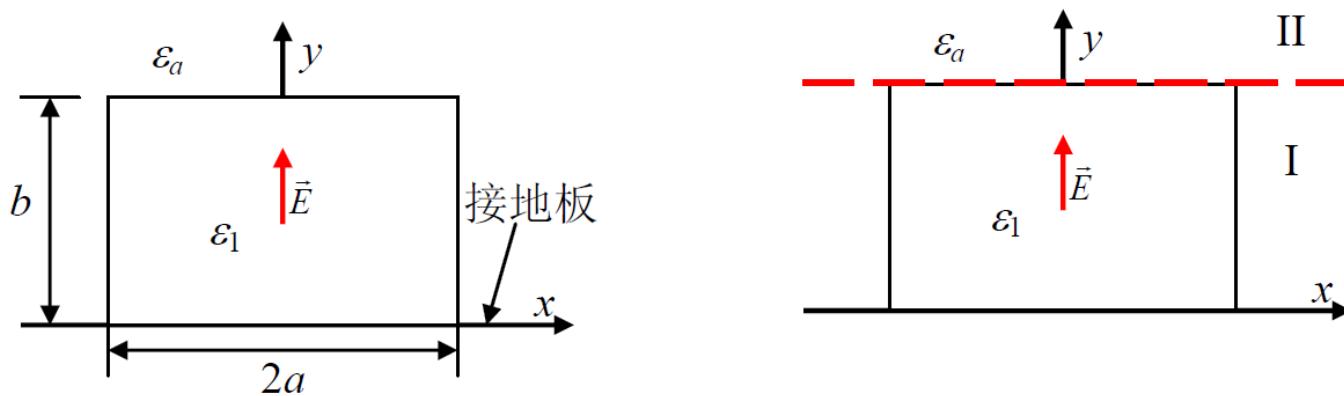
$$\tan 2bk_{y1} = \frac{\varepsilon_{r1}k_{y1}(\varepsilon_{r4}k_{y5} + \varepsilon_{r5}k_{y4})}{\varepsilon_{r4}\varepsilon_{r5}k_{y1}^2 - \varepsilon_{r1}^2k_{y4}k_{y5}}, \text{ 其中 } \begin{cases} (k_{y1}/k_0)^2 = \varepsilon_e^x - \varepsilon_e \\ -(k_{y4}/k_0)^2 = \varepsilon_{r4} - \varepsilon_e \\ -(k_{y5}/k_0)^2 = \varepsilon_{r5} - \varepsilon_e \end{cases}$$

由两个拉伸过程可得 $\varepsilon_e = \varepsilon_e^x - (k_{y1}/k_0)^2 = \varepsilon_{r1} - (k_{x1}/k_0)^2 - (k_{y1}/k_0)^2$

注意：前述两种不同的拉伸次序得到的最终结果是一致的。

§ 5.4 矩形介质波导

例题：利用 EDC 方法给出镜像线主模 E_{11}^y 的特征方程。



求解方案 1：如图所示，在 y 方向将镜像线分成上下两个区域 I 和 II。

分区原因：在前述矩形介质波导的讲授内容中没有涉及分区的问题，主要原因是从结构上来看，矩形介质波导是上下对称和左右对称的，仅考虑对矩形区域的水平和垂直拉伸就可以得到需要的特征方程。但是对于镜像线来说，由于接地板的存在，其上下结构是不对称的，因而需要通过分区分别求取各个区域的有效介电常数，分别求解后，再联合求解整个波导的有效介电常数。

§ 5.4 矩形介质波导

在 I 区, 由于要对 ϵ_1 区域和左右两边 ϵ_a 区域作“平均”处理, 所以对于 I 区的拉伸方向应是 y 方向 (垂直拉伸), 求出 ϵ_{eI}^x 。

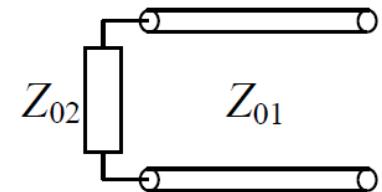
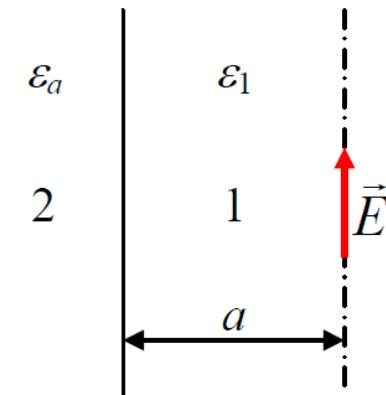
垂直拉伸后, 根据 E_{11}^y 场的对称性, 中心对称处应等效为磁壁 (开路), 且

电场方向平行于介质分界面, 因而选取 TE 模, 则

$$Z_{01} = \omega\mu/k_{x1}, \quad Z_{02} = \omega\mu/-jk_{x2}$$

由横向谐振得 $Z_{02} - jZ_{01}ctgk_{x1}a = 0 \Rightarrow \frac{j}{k_{x2}} - \frac{j}{k_{x1}}ctgk_{x1}a = 0$

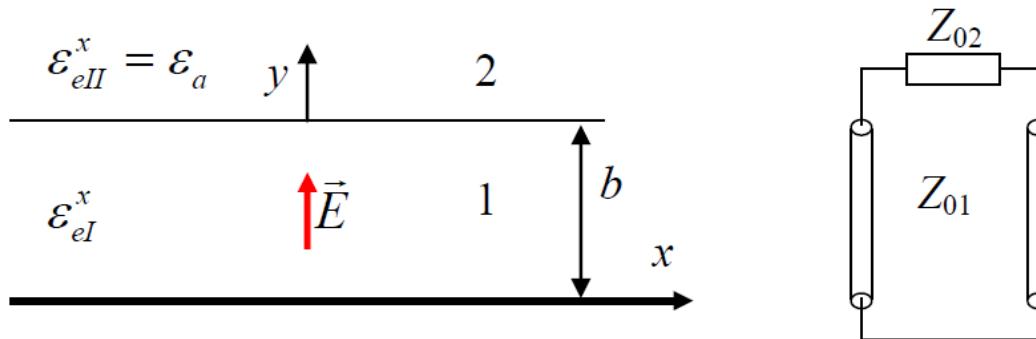
整理得 $\tan k_{x1}a = k_{x2}/k_{x1}$, 其中 $\begin{cases} (k_{x1}/k_0)^2 = \epsilon_1 - \epsilon_{eI}^x \\ -(k_{x2}/k_0)^2 = \epsilon_a - \epsilon_{eI}^x \end{cases}$



对于 II 区的半无限大介质, 垂直拉伸后介质会充满整个空间, 所以其有效介电常数应为 $\epsilon_{eII}^x = \epsilon_a$ 。

§ 5.4 矩形介质波导

将得到的 ε_{eI}^x 和 ε_{eII}^x 分别放回原先区域，再作水平拉伸，如图所示，电场方向垂直于介质交界面，因而选取 TM 模，则



两段传输线的特性阻抗为： $Z_{01} = k_{y1}/\omega\epsilon_0\epsilon_{eI}^x$, $Z_{02} = -jk_{y2}/\omega\epsilon_0\epsilon_a$

由横向谐振可得：

$$jZ_{01} \tan k_{y1}b + Z_{02} = 0$$

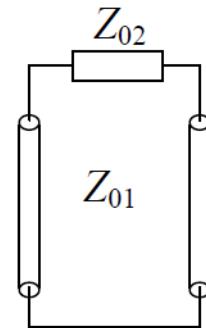
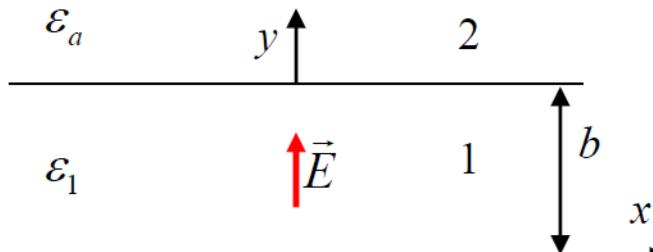
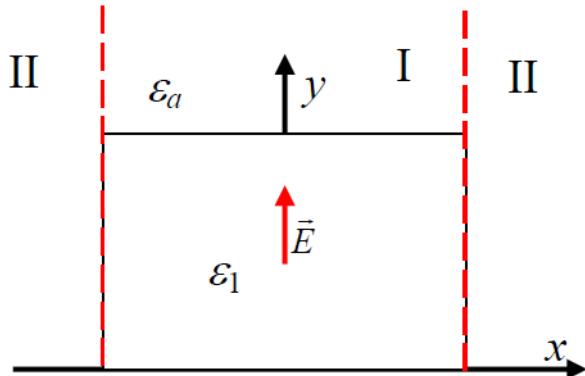
$$\tan k_{y1}b = \frac{\epsilon_{eI}^x}{\epsilon_a} \frac{k_{y2}}{k_{y1}}, \text{ 其中 } \begin{cases} \left(k_{y1}/k_0\right)^2 = \epsilon_{eI}^x - \epsilon_e \\ -\left(k_{y2}/k_0\right)^2 = \epsilon_a - \epsilon_e \end{cases}$$

最后得

$$\epsilon_e = \epsilon_{eI}^x - \left(k_{y1}/k_0\right)^2 = \epsilon_1 - \left(k_{x1}/k_0\right)^2 - \left(k_{y1}/k_0\right)^2。$$

§ 5.4 矩形介质波导

求解方案 2: 如图所示, 在 x 方向将镜像线分成两个区域 I 和 II。



对于 I 区, 由于介质取“平均”的方向是垂直方向, 所以首先进行水平拉伸, 电场方向垂直于介质交界面, 因而选取 TM 模, 则

$$Z_{02} = -jk_{y2}/\omega\epsilon_0\epsilon_a, \quad Z_{01} = k_{y1}/\omega\epsilon_0\epsilon_1$$

由横向谐振可得

$$jZ_{01} \tan k_{y1}b + Z_{02} = 0$$

$$\tan k_{y1}b = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_a} \frac{k_{y2}}{k_{y1}}, \quad \text{其中} \begin{cases} \left(k_{y1}/k_0\right)^2 = \epsilon_1 - \epsilon_{eI}^y \\ -\left(k_{y2}/k_0\right)^2 = \epsilon_a - \epsilon_{eI}^y \end{cases}$$

对于 II 区（左右两个 II 区都一样，只要处理其中一个即可），水平拉伸后，形成水平无限大接地板及其上面的无限大介质的结构，这里电磁场沿 y 方向近似呈驻波分布。与 I 区一样，选择 TM 模，即 $Z_0 = k_y / \omega \epsilon_0 \epsilon_a$ ，则横向谐振为 $Z_0 = 0$ ，则 $k_y = 0$ ，因此由

$$\text{由} \left(k_y / k_0 \right)^2 = \epsilon_a - \epsilon_{eII}^y = 0, \text{ 可得} \epsilon_{eII}^y = \epsilon_a.$$

将 ϵ_{eI}^y 和 ϵ_{eII}^y 分别放回原先区域作垂直拉伸，如图所示，根据场的对称性和电场方向选取 TE 模，则

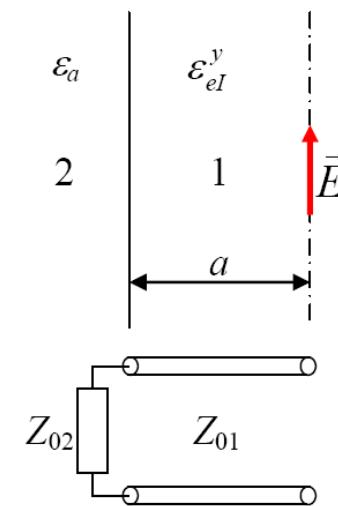
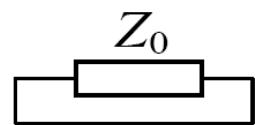
$$Z_{01} = \omega \mu / k_{x1}, \quad Z_{02} = \omega \mu / -jk_{x2}$$

$$Z_{02} - jZ_{01} \operatorname{ctg} k_{x1} a = 0 \Rightarrow \frac{j}{k_{x2}} - \frac{j}{k_{x1}} \operatorname{ctg} k_{x1} a = 0$$

$$\tan k_{x1} a = \frac{k_{x2}}{k_{x1}}, \text{ 其中} \begin{cases} \left(k_{x1} / k_0 \right)^2 = \epsilon_{eI}^y - \epsilon_e \\ -\left(k_{x2} / k_0 \right)^2 = \epsilon_a - \epsilon_e \end{cases}$$

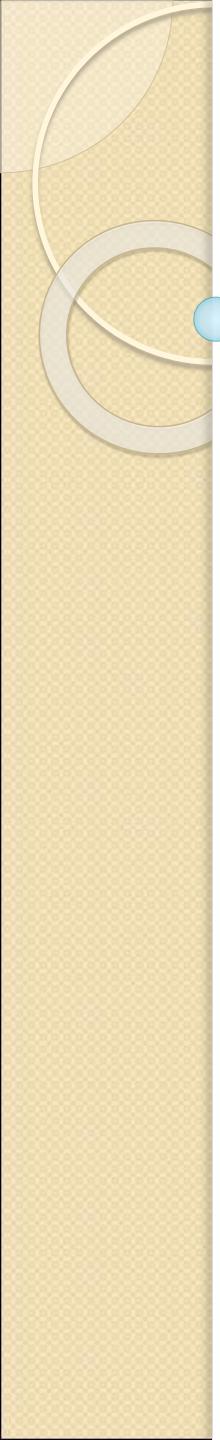
最后得到

$$\epsilon_e = \epsilon_{eI}^y - \left(k_{x1} / k_0 \right)^2 = \epsilon_1 - \left(k_{x1} / k_0 \right)^2 - \left(k_{y1} / k_0 \right)^2$$





本章结束



第六章 微波网络基础

Fundamentals of Microwave Network

中国科学技术大学
电子工程与信息科学系

本章内容

§ 6.1 概述

§ 6.2 N端口网络的阻抗和导纳矩阵

§ 6.3 N端口微波网络的散射矩阵

§ 6.4 二端口网络的转移矩阵和传输矩阵

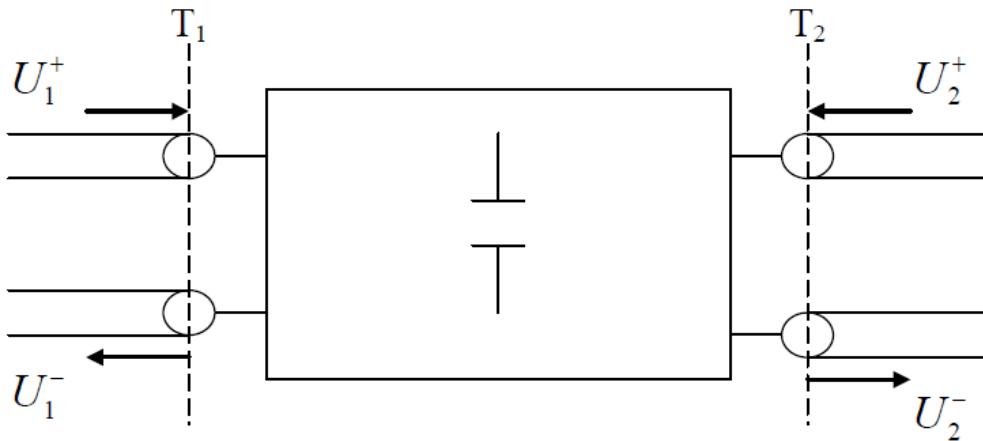
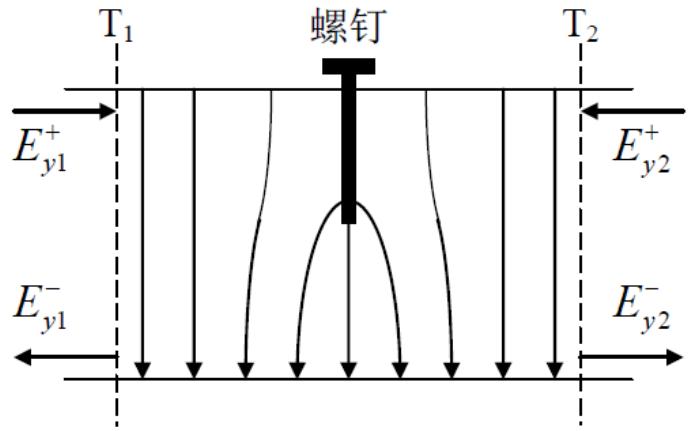
§ 6.1 概述

一、什么是微波网络？

微波网络定义：由任意形状良导体所包围的具有若干微波传输线作为输入和输出端口的介质空间。

直观解释：微波网络方法是研究微波电路与系统的等效电路分析方法。微波网络是由分布参数电路和集总参数网络组合而成，其中分布参数电路是由组成微波电路或系统的规则导行系统等效而成，集总参数网络则由微波电路或系统中的不连续性或非线性等效而成。

§ 6.1 概述



如图所示，若矩形波导以 H_{10} 模工作，对左端远区来说，螺钉的作用是产生 H_{10} 波的反射波，而对右端远区来说，螺钉决定了 H_{10} 波的通过波。因为螺钉周围储存了较多的电能（有 E_z 分量），所以其作用相当于在波导系统中并联了一个容性负载。确定这个电容大小，它与网络参考面（ T_1 和 T_2 ）上电压、电流的关系，以及对波导的影响是微波网络方法的基本任务。

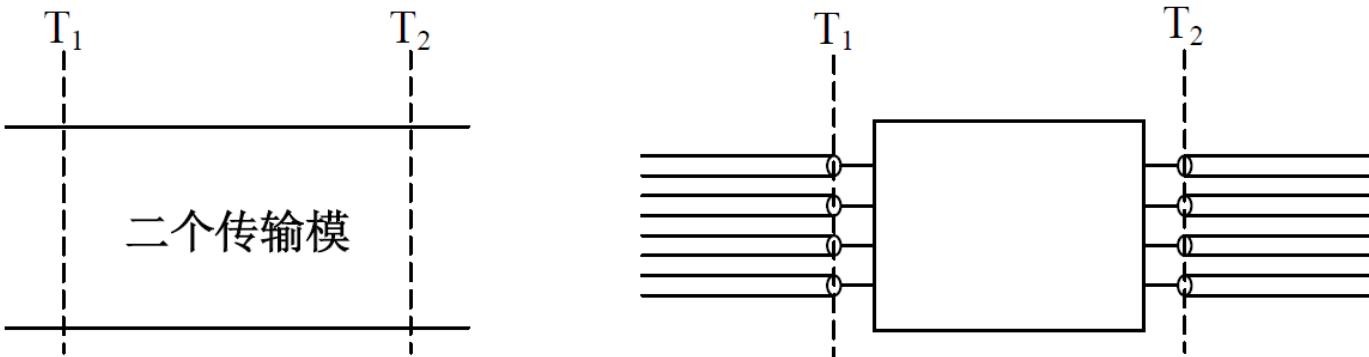
§ 6.1 概述

微波网络中不含微波源的网络称为无源网络；填充介质是线性的称为

线性网络，介质是各向同性的称为互易网络（ $\epsilon\mu$ 为标量、线性媒质、各向同性），否则称为非互易网络（ $\epsilon\mu$ 为张量、非线性媒质、各向异性），等等……

与低频 N 端口网络不同：

①、微波网络的形式与模式有关。若传输单模，则等效为一个 N 端口网络；若传输 M 个模式，则应等效为 $N \times M$ 端口微波网络。



如图所示，传输两个模式的波导，其几何端口是 2，但电气端口数为 4。

②、微波网络的形式与参考面的选取有关。参考面的选择必须垂直于各端口波导的轴线，远离不均匀区，使其上仅有传输模，而无高次模。 5

§ 6.1 概述

二、微波网络方法的特点

1、整体看待微波元件，仅研究元件的外部特性（端口特性）。通过对网

络参考面上的外部电路量的研究来分析微波元件在微波系统中的作用和各种特性是微波网络方法的基本特点。

2、尽管网络参数和元件内部电磁场分布有关，但一般总可以用测量的方

法获得，从而绕过求解繁复电磁场边值问题。

3、可以直接应用微波网络理论判断网络的一般性质。例如，由能量守恒

可得无损网络的[S]矩阵是酉阵（幺正矩阵或么正矩阵，Unitary Matrix），即

$[S]^H [S] = [I]$ ；几何对称性有 $S_{ii} = S_{jj}$ ；介质各向同性有 $[S] = [S]'$ ；等等.....。

4、可以用化整为零的方法分析和综合微波元件或系统。例如用单元网络

级联求出总的传输矩阵来分析滤波器、过渡器和阻抗变换器等。

§ 6.1 概述

三、网络阻抗的物理含义

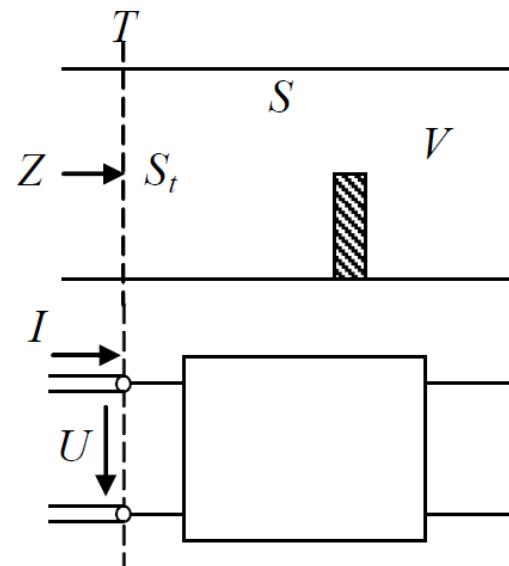
1、场和路的基本联系

如图所示，这里考察一段终端短路内部包含有一个螺钉的波导段，由参考面 T 向网络内部看去的输入阻抗 Z 的物理实质是什么？

$$\text{由玻印亭定理得到复功率 } P = \frac{1}{2} \int_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S}$$

代表了由体积 V 向外流出的功率。因此向内流入的功率为

$$\begin{aligned} P_{in} &= -\frac{1}{2} \int_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) dV \\ &= -\frac{1}{2} \int_V [\vec{H}^* \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}^*)] dV \\ &= -\frac{1}{2} \int_V [\vec{H}^* \cdot (-j\omega\mu\vec{H}) - \vec{E} \cdot (\sigma\vec{E}^* - j\omega\epsilon\vec{E}^*)] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}|^2 dV + \frac{j\omega}{2} \int_V (\mu |\vec{H}|^2 - \epsilon |\vec{E}|^2) dV \end{aligned}$$



§ 6.1 概述

由于平均磁能 \bar{W}_m , 平均电能 \bar{W}_e 和损耗功率 P_L 分别为

$$\bar{W}_m = \frac{1}{4} \int_V \mu |\vec{H}|^2 dV, \quad \bar{W}_e = \frac{1}{4} \int_V \varepsilon |\vec{E}|^2 dV, \quad P_L = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}|^2 dV$$

所以有

$$P_{in} = P_L + 2j\omega(\bar{W}_m - \bar{W}_e)$$

单端口网络中的面积分实际只在参考面 T 上进行, 流入功率还可为

$$P_{in} = -\frac{1}{2} \int_{S_t} \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} UI^*$$

考虑到 $U = ZI$, 则

$$Z = \frac{P_L + 2j\omega(\bar{W}_m - \bar{W}_e)}{I^*/2} = R + jX$$

可见网络阻抗的实部与损耗功率有关, 虚部则与网络中的储能有关。

§ 6.1 概述

几点讨论：

(1)、网络阻抗的物理实质

网络阻抗 Z 是网络内部损耗与储能情况在网络外部的反映。

无损网络有： $P_L = 0$ ， 则 $R = 0$ 。

网络中储能：若 $\bar{W}_m > \bar{W}_e$ ，则 $X > 0$ ；若 $\bar{W}_m < \bar{W}_e$ ，则 $X < 0$ 。

所谓端口匹配实质就是外部电磁场流入某参考面的功率完全被网络吸收，而网络内储存的电能和磁能相等。

(2)、反射系数 Γ 和平均磁能 W_m ，平均电能 W_e 和损耗功率 P_L 的关系

某参考面上 Γ ($\Gamma = |\Gamma| e^{j\varphi_\Gamma}$) 和系统内耗能和储能的关系为

$$|\Gamma| = \sqrt{1 - \bar{P}_L}, \quad \varphi_\Gamma = \sin^{-1} \frac{\omega (\bar{W}_m - \bar{W}_e)}{\sqrt{1 - \bar{P}_L}}$$

其中 $\bar{P}_L = P_L / P_i$ ， P_i 为输入功率 (入射波功率)； $\bar{W}_m = \bar{W}_m / P_i$ ； $\bar{W}_e = \bar{W}_e / P_i$ 。

可见 Γ 的模值取决于损耗，相角的正、负号取决于储能情况。

一、阻抗和导纳矩阵的表达式及物理含义

如图所示，用各端口电流来表示各端口电压，可得下列方程组

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \dots + Z_{1n}I_n \\ U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \dots + Z_{2n}I_n \\ \dots \\ U_n = Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \dots + Z_{nn}I_n \end{cases}$$

$$(U) = [Z](I)$$

$$U_i = \sum_{k=1}^n Z_{ik} I_k$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

注意：电流方向全部取为流入网络的方向。



用各端口电压来表示各端口电流得下列方程组

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 + \dots + Y_{1n}U_n & (I) = [Y](U) \\ I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 + \dots + Y_{2n}U_n, & I_i = \sum_{k=1}^n Y_{ik} U_k \\ \dots \\ I_n = Y_{n1}U_1 + Y_{n2}U_2 + \dots + Y_{nn}U_n & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

§ 6.2 N端口网络的阻抗和导纳矩阵

各矩阵元素的物理意义：

Z_{ii} (Y_{ii}) 称为**端口 i 的自阻抗 (自导纳)**，它反映了第 i 端口电流 (电压) 对建立第 i 端口总电压 (电流) 的贡献，可以表示为

$$Z_{ii} = \frac{U_i}{I_i} \Bigg|_{(I_k=0, k \neq i)} \quad Y_{ii} = \frac{I_i}{U_i} \Bigg|_{(U_k=0, k \neq i)}$$

Z_{ij} (Y_{ij}) 称为**端口 j 对端口 i 的互阻抗 (互导纳)**，它反映了第 j 端口电流 (电压) 对建立第 i 端口总电压 (电流) 的贡献，可表示为

$$Z_{ij} = \frac{U_i}{I_j} \Bigg|_{(I_k=0, k \neq j)} \quad Y_{ij} = \frac{I_i}{U_j} \Bigg|_{(U_k=0, k \neq j)}$$

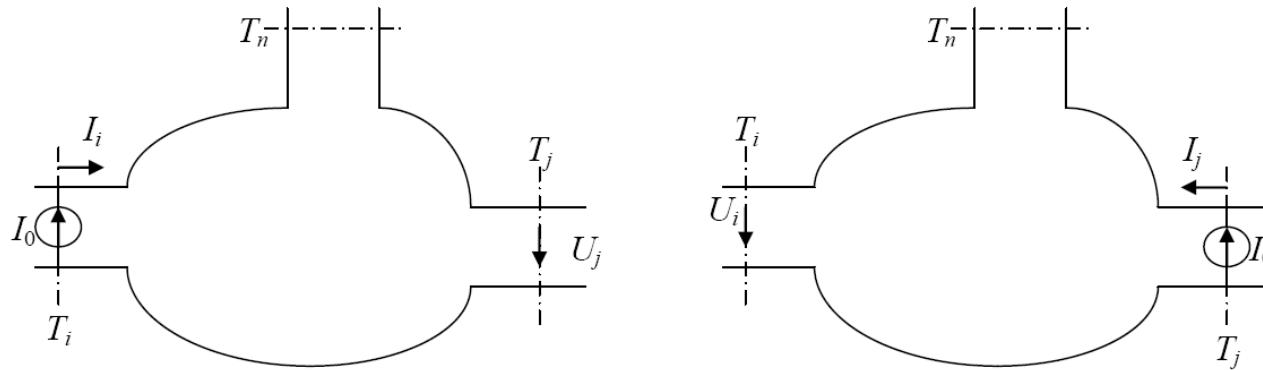
注： $I_k=0$ ，则第 k 端口开路； $U_k=0$ ，则第 k 端口短路；

二、[Z]和[Y]矩阵的性质

性质 1: [Z]和[Y]互为逆矩阵。

证明: 因为 $(U) = [Z](I)$, 则 $[Y](U) = [Y][Z](I)$, $(I) = [Y][Z](I)$
 所以 $[Y][Z] = [1]$ (注: [1]表示单位矩阵), 而 $[Z] = [Y]^{-1}$

性质 2: 互易网络的 $[Z] = [Z]'$, $[Y] = [Y]'$ 。 (注: $[\bullet]'$ 表示转置)



证明: 如上左图, 先接电流源 I_0 于 i 端口, 其它端口开路, 设此时 j 端口的开路电压为 U_j , 即

$$U_j = \sum_{k=1}^n Z_{jk} I_k \stackrel{k=i}{=} Z_{ji} I_i = Z_{ji} I_0$$

如上右图, 将 I_0 移到 j 端口, 其它端口仍开路, 设此时 i 端口的开路电压为 U_i , 即

$$U_i = \sum_{k=1}^n Z_{ik} I_k \stackrel{k=j}{=} Z_{ij} I_j = Z_{ij} I_0$$

网络互易必有 $U_i = U_j$, 因而 $Z_{ij} = Z_{ji}$, 得 $[Z] = [Z]'$, 同理可证 $[Y] = [Y]'$ 。12

§ 6.2 N端口网络的阻抗和导纳矩阵

性质 3: 无损互易网络[Z]和[Y]矩阵的所有元素均为纯虚数。

证明: N 端口网络的总功率为 $\frac{1}{2}(I^*)'(U) = \frac{1}{2}(I^*)'[Z](I) = P_L + 2j\omega(W_m - W_e)$

网络是无损的, 有 $P_L = 0$, 所以 $\text{Re}[(I^*)'[Z](I)] = \text{Re} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n I_k^* Z_{kl} I_l = 0$

首先证明 $\text{Re}[Z_{ii}] = 0$

由于网络的性质和各端口的电压、电流大小无关, 所以令除第 i 端口有电流 I_i 外, 其余各端口均开路, 即 $I_k^* = 0$, $I_l = 0$ 。当 $k \neq i$, $l \neq i$ 时, 这样双重求和实际上只有一项

$$\text{Re} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n I_k^* Z_{kl} I_l = \text{Re} \sum_{k=1}^n I_k^* Z_{ki} I_i = \text{Re}[I_i^* Z_{ii} I_i] = 0$$

因为 $I_i^* I_i = |I_i|^2 > 0$, 为正实数, 所以 $\text{Re}[Z_{ii}] = 0$ 。

§ 6.2 N端口网络的阻抗和导纳矩阵

再证明 $\text{Re}[Z_{ij}] = 0$

假定除第 i 端口和第 j 端口外，其余端口均开路，即 $I_k^* = 0$ ， $I_l = 0$ 。当

$k \neq i$ ， $k \neq j$ ， $l \neq i$ ， $l \neq j$ 时，这样双重求和实际上有四项

$$\begin{aligned}\text{Re} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n I_k^* Z_{kl} I_l &= \text{Re} \sum_{k=1}^n (I_k^* Z_{ki} I_i + I_k^* Z_{kj} I_j) \\ &= \text{Re} (I_i^* Z_{ii} I_i + I_j^* Z_{jj} I_j + I_j^* Z_{ji} I_i + I_i^* Z_{ij} I_j) = 0\end{aligned}$$

因互易网络 $Z_{ij} = Z_{ji}$ ， $\therefore \text{Re}[(I_i^* Z_{ii} I_i + I_j^* Z_{jj} I_j) + Z_{ij}(I_j^* I_i + I_i^* I_j)] = 0$

这里 $I_i^* I_i = |I_i|^2$ 和 $I_j^* I_j = |I_j|^2$ 为正实数，且 Z_{ii} 和 Z_{jj} 为纯虚数，而

$I_j^* I_i + I_i^* I_j = I_j^* I_i + (I_i I_j^*)^*$ 也为实数，因而可得 $\text{Re}[Z_{ij}] = 0$ 。

§ 6.3 N端口网络的散射矩阵

一、为什么要引入散射矩阵矩阵？

[Z]和[Y]矩阵的优点和缺点：

- ①、与低频电路网络方法一致，便于利用低频网络的电路定理。
- ②、容易找出微波网络的等效电路。
- ③、微波频率下电压和电流很难直接测量，也不存在恒定的电压源和电流源，只有一个输出功率恒定的功率源。
- ④、随参考面选择不同，端口电压和电流的大小、相位也发生变化。

散射矩阵[S]是利用网络端口入射波和反射波的关系建立的，其优点是：

- ①、[S]矩阵的各元素具有明确的物理含义，并且都可测量确定。
- ②、当网络各参考面位置变动时，[S]矩阵各元素仅有相位变化。
- ③、无损网络的[S]矩阵为酉矩阵，可以解决很多微波网络问题。

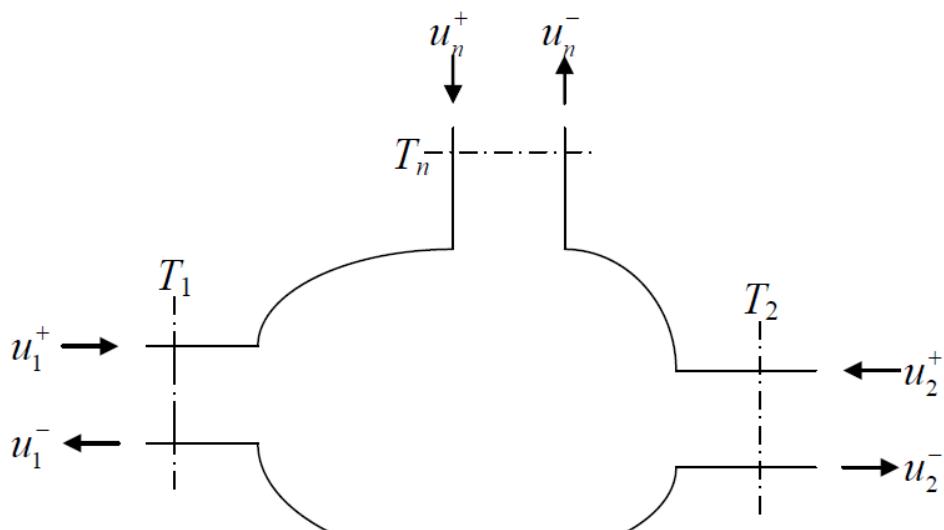
二、[S]矩阵的定义及其物理意义

[S]矩阵使用如下的归一化入

射波和反射波的定义：

$$u_i^+ = \frac{1}{2} \left[\frac{U_i(z)}{\sqrt{Z_{0i}}} + \sqrt{Z_{0i}} I_i(z) \right]$$

$$u_i^- = \frac{1}{2} \left[\frac{U_i(z)}{\sqrt{Z_{0i}}} - \sqrt{Z_{0i}} I_i(z) \right]$$



其中， $U_i(z)$ 、 $I_i(z)$ 和 Z_{0i} 分别为第*i*端口的电压波、电流波和特性阻抗。

各端口的入射波和反射波之间应满足线性关系

$$u_1^- = S_{11}u_1^+ + S_{12}u_2^+ + \dots + S_{1n}u_n^+ \quad (u^-) = [S](u^+)$$

$$\begin{aligned} u_2^- &= S_{21}u_1^+ + S_{22}u_2^+ + \dots + S_{2n}u_n^+ \\ &\dots \\ u_i^- &= \sum_{k=1}^n S_{ik}u_k^+ \end{aligned}$$

$$u_n^- = S_{n1}u_1^+ + S_{n2}u_2^+ + \dots + S_{nn}u_n^+ \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

各元素的物理含义：

$$S_{ii} = \left. \frac{u_i^-}{u_i^+} \right|_{u_k^+=0, k \neq i} \quad \text{除第 } i \text{ 端口外其他端口均接} \underline{\text{匹配负载}} \text{ 时, 第 } i \text{ 端口的反射系数。}$$

$$S_{ij} = \left. \frac{u_i^-}{u_j^+} \right|_{u_k^+=0, k \neq j} \quad \text{除第 } j \text{ 端口外其他端口均接} \underline{\text{匹配负载}} \text{ 时, 第 } j \text{ 到 } i \text{ 端口的传输系数。}$$

三、[S]矩阵的性质

性质1: 互易网络的 $[S] = [S]'$

证明: 由于归一化电压波和电流波为 $\begin{cases} (u) = (u^+) + (u^-) \\ (i) = (u^+) - (u^-) \end{cases}$, 代入 $(u) = [Z](i)$, 得

$$(u^+) + (u^-) = [Z](u^+) - [Z](u^-), \text{ 整理后 } ([Z] + [1])(u^-) = ([Z] - [1])(u^+), \text{ 则有}$$

$$(u^-) = ([Z] + [1])^{-1} ([Z] - [1])(u^+)$$

$$[S] = ([Z] + [1])^{-1} ([Z] - [1]) = ([Z] + [1])^{-1} ([Z] + [1] - 2[1])$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad &= [1] - 2([Z] + [1])^{-1} = ([Z] + [1])([Z] + [1])^{-1} - 2([Z] + [1])^{-1} \\ &= ([Z] - [1])([Z] + [1])^{-1} \end{aligned}$$

§ 6.3 N端口网络的散射矩阵

对前式取转置得

$$[S]' = \left\{ ([Z] - [1]) ([Z] + [1])^{-1} \right\}' = \left[([Z] + [1])^{-1} \right]' \left[([Z] - [1]) \right]' \\ = \left([Z]' + [1] \right)^{-1} \left([Z]' - [1] \right) = \left([Z] + [1] \right)^{-1} \left([Z] - [1] \right) = [S]$$

性质 2: 无损网络的[S]矩阵为么正矩阵, 即 $[S]^H [S] = [1]$

证明: 因为网络无损, 所以进入网络的总输入功率应等于总的散射功率

$$\sum_{k=1}^n P_k^+ = \sum_{k=1}^n P_k^-, \text{ 即 } \sum_{n=1}^n |u_k^+|^2 = \sum_{n=1}^n |u_k^-|^2$$

与上式对应的矢量方程为 $(u^+)^{*}(u^+) = (u^-)^{*}(u^-)$, 将记为 $(\bullet)^{*} = (\bullet)^H$, 则

$$(u^+)^H (u^+) = [[S](u^+)]^H [[S](u^+)] = (u^+)^H [S]^H [S](u^+)$$

$$\text{进而 } (u^+)^H (u^+) - (u^+)^H [S]^H [S](u^+) = 0$$

$$(u^+)^H ([1] - [S]^H [S])(u^+) = 0, \text{ 即 } [S]^H [S] = [1]$$

酉矩阵[S]的元素 S_{ij} 具有下列特性

$$\sum_{k=1}^n (S_{ik})^H S_{kj} = \sum_{k=1}^n S_{ki}^* S_{kj} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

任一列各元素模的平方和等于 1。

$$S_{11}S_{11}^* + S_{21}S_{21}^* + \dots + S_{n1}S_{n1}^* = 1$$

$$S_{12}S_{12}^* + S_{22}S_{22}^* + \dots + S_{n2}S_{n2}^* = 1$$

.....

$$S_{1n}S_{1n}^* + S_{2n}S_{2n}^* + \dots + S_{nn}S_{nn}^* = 1$$

任一列各元素与另一列相应元素共轭值乘积之和等于零。

$$S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* + \dots + S_{n1}S_{n2}^* = 0$$

.....

$$S_{11}S_{1n}^* + S_{21}S_{2n}^* + \dots + S_{n1}S_{nn}^* = 0$$

性质 3: 当网络各端口参考面位置移动时, 网络散射矩阵变为

$$[S'] = [P][S][P]$$

其中, 对角阵 $[P] = \text{diag} \begin{bmatrix} e^{-j\beta_1 l_1} & e^{-j\beta_2 l_2} & \dots & e^{-j\beta_n l_n} \end{bmatrix}$, β_i 为第 i 端口传输线的相位常数, l_i 为第 i 端口参考面向外移动的距离, 当向内移动时, l_i 为应取负。

证明: 因为 $u_i^- = S_{ij} u_j^+$, $u_i^{-'} = S'_{ij} u_j^{+'}$, 有 $u_j^{+'} = u_j^+ e^{j\beta_j l_j}$ (超前), $u_i^{-'} = u_i^- e^{-j\beta_i l_i}$ (滞后)

$$u_i^- e^{-j\beta_i l_i} = S'_{ij} u_j^+ e^{j\beta_j l_j}$$

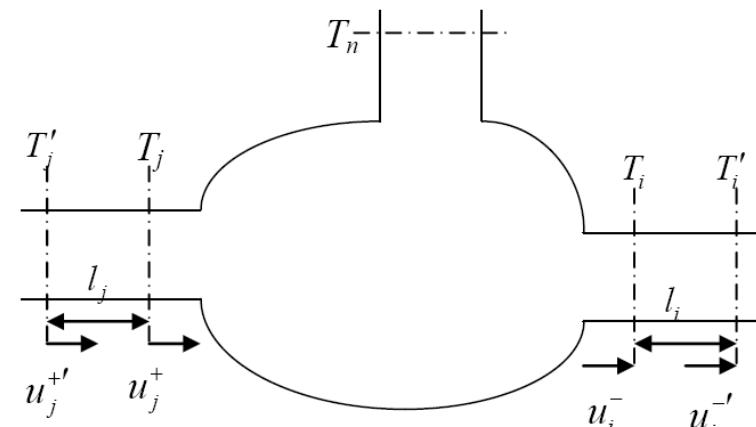
$$S'_{ij} = \frac{u_i^-}{u_j^+} e^{-j(\beta_i l_i + \beta_j l_j)} = S_{ij} e^{-j(\beta_i l_i + \beta_j l_j)}$$

依据 $[S'] = [P][S][P]$, 其中每个元素可用二

重求和的形式表示为: $S'_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n P_{ik} S_{km} P_{mj}$

$$\text{由于 } P_{ik} = e^{-j\beta_i l_i} \delta_{ik} = \begin{cases} e^{-j\beta_i l_i} & k=i \\ 0 & k \neq i \end{cases}, \quad P_{mj} = e^{-j\beta_j l_j} \delta_{jm} = \begin{cases} e^{-j\beta_j l_j} & m=j \\ 0 & m \neq j \end{cases}$$

以上二重求和变为 $S'_{ij} = \sum_{k=1}^n P_{ik} S_{kj} P_{jj} = P_{ii} S_{ij} P_{jj} = S_{ij} e^{-j(\beta_i l_i + \beta_j l_j)}$



一、转移矩阵

微波系统大多都是以级联方式构成的，即前一个网络的输出量等于后一个网络的输入量。为便于研究网络级联问题，这里引入联系网络输入量和输出量之间的转移矩阵 $[a]$ 。



1、 $[a]$ 矩阵的定义式及其参数的物理意义

$$\begin{aligned} u_1 &= au_2 - bi_2, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} \\ i_1 &= cu_2 - di_2 \end{aligned}$$

其中： $a = \frac{u_1}{u_2} \Big|_{i_2=0}$ ，2口开路时2口对1口的电压传输系数；

$b = \frac{u_1}{-i_2} \Big|_{u_2=0}$ ，2口短路时2口对1口的互阻抗。

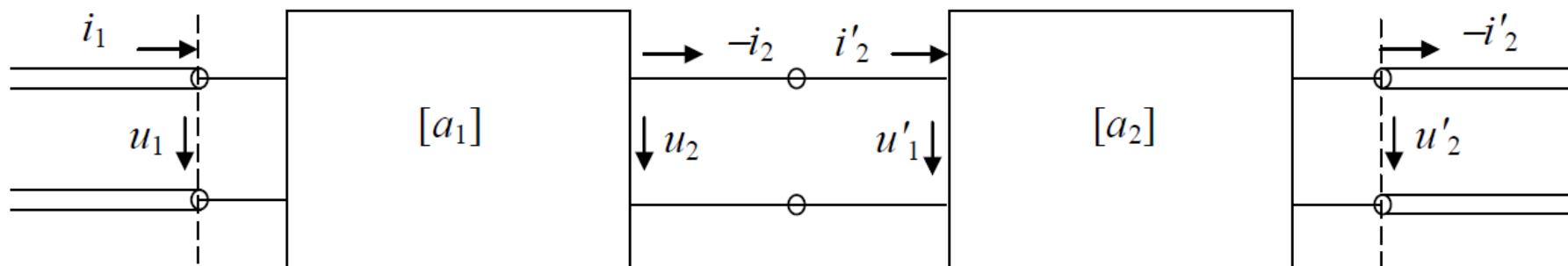
$c = \frac{i_1}{u_2} \Big|_{i_2=0}$ ，2口开路时2口对1口的互导纳。

$d = \frac{i_1}{-i_2} \Big|_{u_2=0}$ ，2口短路时2口对1口的电流传输系数。

§ 6.4 二端口网络的转移矩阵和传输矩阵

2、性质

性质 1：级联网络的总 $[a] = [a_1][a_2]$



证明： $\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u'_1 \\ i'_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u'_2 \\ -i'_2 \end{pmatrix}$, 因为 $\begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ +i'_1 \end{pmatrix}$,

所以 $\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u'_2 \\ -i'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u'_2 \\ -i'_2 \end{pmatrix}$, 得证。

§ 6.4 二端口网络的转移矩阵和传输矩阵

性质 2: 对称网络 $a = d$

性质 3: 互易网络 $ad - bc = 1$

性质 4: 无损互易网络, a 、 d 为实数, b 、 c 为纯虚数。

预备知识: 在几何上存在某个对称平面的网络称对称网络。网络的对

称性指的是网络几何结构上的对称性。注意对称与互易的区别: 互易

是指网络在电气上表现出的可逆性, 对称网络不一定互易, 互易网络

不一定对称。

§ 6.4 二端口网络的转移矩阵和传输矩阵

证明：以上三个性质可根据 $[a]$ 与 $[Z]$ 的关系证明，即由 $u_1 = Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2$ ，
 $u_2 = Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2$

$$u_1 = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}u_2 - \left(\frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}} - Z_{12} \right)i_2, \text{ 即 } [a] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}} - Z_{12} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix}$$
$$i_1 = \frac{1}{Z_{21}}u_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}}i_2$$

由于对称网络有 $Z_{11} = Z_{22}$ ，互易网络 $Z_{12} = Z_{21}$ ，故 $a = d$ 。

$$ad - bc = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \frac{Z_{22}}{Z_{21}} - \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}Z_{21}} + 1 = 1$$

无损互易网络 $[Z]$ 的元素为纯虚数，得 a, d 为实数， b, c 为纯虚数。

§ 6.4 二端口网络的转移矩阵和传输矩阵

二、传输矩阵

与引入转移矩阵的目的相类似，为了便于研究网络级联时入射波和反射波的传输特性，有必要引入联系网络输入量 u_1^+ 、 u_1^- 和输出量 u_2^+ 、 u_2^- 之间关系的网络参量——传输矩阵[T]。

1、定义和物理意义

$$\begin{aligned} u_1^+ &= T_{11}u_2^- + T_{12}u_2^+, \\ u_1^- &= T_{21}u_2^- + T_{22}u_2^+, \end{aligned}, \quad \begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_1^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2^- \\ u_2^+ \end{pmatrix}$$

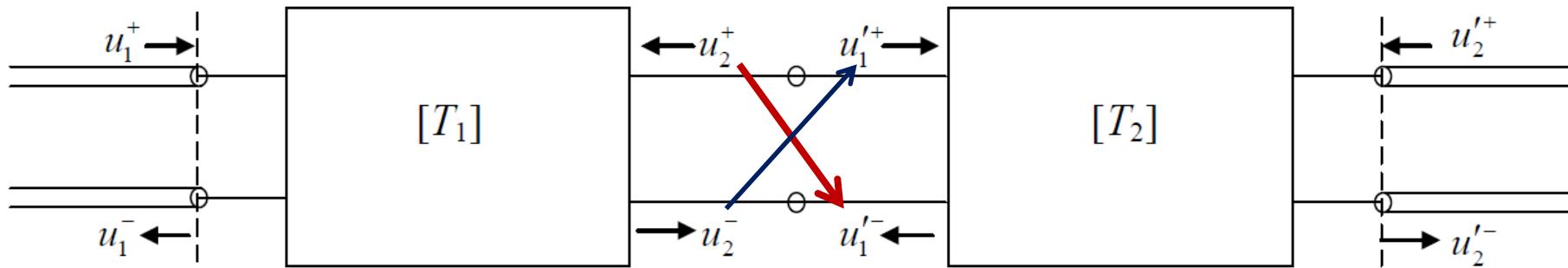
除了 T_{11} 有明确的物理意义外，其余参数均无明确的物理意义。

$$T_{11} = \left. \frac{u_1^+}{u_2^-} \right|_{u_2^+=0} = \frac{1}{S_{21}}, \text{当 2 端口匹配时, 1 端口到 2 端口传输系数的倒数。}$$

§ 6.4 二端口网络的转移矩阵和传输矩阵

2、性质

性质 1：级联网络的总 $[T] = [T_1][T_2]$



证明：因为 $\begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_1^- \end{pmatrix} = [T_1] \begin{pmatrix} u_2^- \\ u_2^+ \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_1'^+ \\ u_1'^- \end{pmatrix} = [T_2] \begin{pmatrix} u_2'^- \\ u_2'^+ \end{pmatrix}$, 由于 $\begin{pmatrix} u_2^- \\ u_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1'^+ \\ u_1'^- \end{pmatrix}$

所以有 $\begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_1^- \end{pmatrix} = [T_1] \begin{pmatrix} u_2^- \\ u_2^+ \end{pmatrix} = [T_1][T_2] \begin{pmatrix} u_2'^- \\ u_2'^+ \end{pmatrix} = [T] \begin{pmatrix} u_2'^- \\ u_2'^+ \end{pmatrix}$, 得 $[T] = [T_1][T_2]$ 。

性质 2: 对称网络 $T_{12} = -T_{21}$

性质 3: 互易网络 $T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$

性质 4: 无损互易网络 $T_{11} = T_{22}^*$, $T_{12} = T_{21}^*$

证明: 以上 3 各个性质可通过[T]和[S]的关系式来证明。

$$\begin{aligned} \text{由 } u_1^- &= S_{11}u_1^+ + S_{12}u_2^+, \\ u_2^- &= S_{21}u_1^+ + S_{22}u_2^+, \end{aligned} \quad \text{得}$$

$$\begin{aligned} u_1^+ &= \frac{1}{S_{21}}u_2^- - \frac{S_{22}}{S_{21}}u_2^+ \\ u_1^- &= \frac{S_{11}}{S_{21}}u_2^- + \left(S_{12} - \frac{S_{11}S_{22}}{S_{21}} \right)u_2^+ \end{aligned}, \text{ 即}$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_{21}} & -\frac{S_{22}}{S_{21}} \\ \frac{S_{11}}{S_{21}} & S_{12} - \frac{S_{11}S_{22}}{S_{21}} \end{bmatrix}$$

对称网络有 $S_{11} = S_{22}$ ，所以 $T_{12} = -T_{21}$ ，性质 2 得证。

互易网络有 $S_{12} = S_{21}$ ，则 $T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1 - \frac{S_{11}S_{22}}{S_{21}^2} + \frac{S_{11}S_{22}}{S_{21}^2} = 1$ ，性质 3 得证。

无损又互易网络有 $\begin{cases} |S_{12}|^2 = 1 - |S_{22}|^2 \\ S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* = 0 \end{cases}$ 和 $S_{12} = S_{21}$ ，可得 $S_{11}S_{12}^* = -S_{12}S_{22}^*$

进而有 $\frac{S_{11}}{S_{12}} = -\frac{S_{22}^*}{S_{12}^*} = \left(-\frac{S_{22}}{S_{12}}\right)^*$ ，则 $T_{12} = T_{21}^*$ ，性质 4 的第一式得证。

另外， $\frac{S_{22}}{S_{12}}(S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{22}^*) = 0$ ，则 $\frac{S_{22}S_{11}S_{12}^*}{S_{12}} + S_{22}S_{22}^* = 0$

进一步有 $\frac{S_{22}S_{11}S_{12}^*}{S_{12}} + 1 - S_{12}S_{12}^* = 0$ ，即 $S_{12}^*\left(\frac{S_{22}S_{11}}{S_{12}} + \frac{1}{S_{12}^*} - S_{12}\right) = 0$

所以 $\frac{1}{S_{12}^*} = S_{12} - \frac{S_{22}S_{11}}{S_{12}}$ ，即 $T_{11} = T_{22}^*$ ，性质 4 的第二式得证。



本章结束



第七章 微波谐振器

Microwave Resonators

中国科学技术大学
电子工程与信息科学系

本章内容

§ 7.1 概述

§ 7.2 微波谐振器的基本特性

§ 7.3 金属波导谐振腔

§ 7.4 传输线谐振器

§ 7.5 非传输线型谐振腔

§ 7.6 谐振腔的微扰理论

§ 7.1 概述

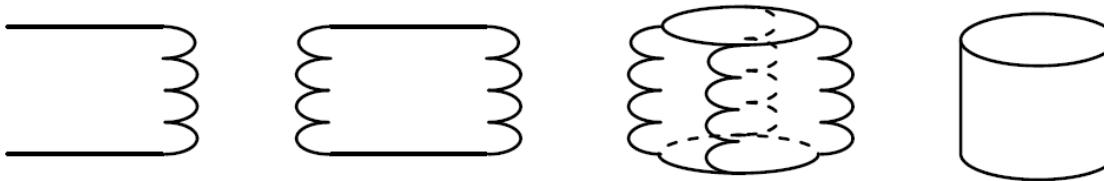
微波谐振器是微波电路中的基础元器件，其作用和低频电路中的谐振回路相同，具有选频特性和储能作用。广义而言，凡能够限定电磁能量在一定体积内振荡的结构均可构成电磁谐振器，而微波谐振器一般是在任意形状的电壁或磁壁限定的空间内产生微波振荡。

低频 LC 谐振回路在微波电路应用中的困难：

①、LC 谐振回路是开放结构，辐射损耗与 $(1/\lambda^2 \sim 1/\lambda^4)$ 成正比，而其导体和介质损耗也会随频率增加而上升。损耗使 Q 值下降，降低谐振回路的频率选择能力。

②、 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 越高，L 和 C 必须越小，加工愈加困难，而且小的 L 和 C 机械强度差，功率容量小。

§ 7.1 概述



LC 谐振回路到谐振腔的演变

如图所示，频率升高需减小 L 和 C，减小 C 可增大平板电容两极板间距实现，而减小 L 要减少线圈的匝数，可减少到 1 根导线，然后并联导线以进一步减小 L，导线无限增多的极限情况是形成封闭空腔。

按照结构型式，微波谐振器有 **传输线型**（由两端短路或开路的一段微波传输线构成）和 **非传输线型**（形状特殊的谐振器，通常在坐标的一个或几个方向上存在不均匀性）两类。

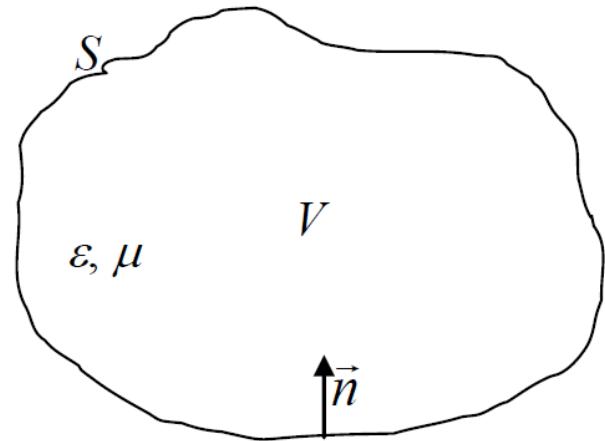
研究方法：金属波导谐振器—驻波法；TEM 谐振器—**传输线理论**；非传输线谐振器—**准静态方法**；单模工作谐振器—**等效电路法**；谐振腔的微小变形—**微扰法**。

§ 7.2 微波谐振器的基本特性

一、任意形状空腔谐振器自由振荡的基本特性

如图所示，腔内无源，理想介质均匀填充，理想导体，麦氏方程为

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \text{ 边界条件} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{cases}$$



注意：式中场随时间的变化形式不能立刻写成 $e^{j\omega t}$ ，因为腔中角频率 ω 不是连续的而是离散的。

通过推导，可得波动方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

对前面第一式应用分离变量法，令 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})E(t)$ ，于是有

$$\frac{\nabla^2 \vec{E}(\vec{r})}{\vec{E}(\vec{r})} - \mu\epsilon \frac{E''(t)}{E(t)} = 0, \text{ 此式成立必须二者皆为某一常数}$$

令 $\frac{E''(t)}{E(t)} = -\omega_i^2$ ，可得 $\begin{cases} E''(t) + \omega_i^2 E(t) = 0 \\ \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k_i^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0 \end{cases}$ ，其中 k_i 为波数，且为 $k_i^2 = \omega_i^2 \mu\epsilon$ 。

第一个方程称为简谐方程，其通解为 $\vec{E}_i(t) = E_{0i} e^{j\omega_i t}$ ，其中 E_{0i} 是由空腔的起始激励决定的常数， ω_i 是空腔自由振荡的模式频率（即腔的本征值）。

第二个方程是仅和空间坐标有关的波动方程。对于给定形状的空腔，可以在选定坐标系后应用分离变量法求解。这里假设第 i 个本征解为 $\vec{E}_i(\vec{r})$ 。

那么，对于第 i 个自由振荡模式的解可表示为 $\vec{E}_i(\vec{r}, t) = E_{0i} \vec{E}_i(\vec{r}) e^{j\omega_i t}$ 。

而腔内所有本征解的组合形式为 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{E}_i(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} E_{0i} \vec{E}_i(\vec{r}) e^{j\omega_i t}$ 。

利用同样过程可得

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{H}_i(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} H_{0i} \vec{H}_i(\vec{r}) e^{j\omega_i t}.$$

§ 7.2 微波谐振器的基本特性

根据麦克斯韦方程，模式系数 E_{0i} 和 H_{0i} 必然存在特定比例关系，这个

比例关系取决于规定的方法，如果归一化条件定为

$$\int_V |\vec{E}_i(\vec{r})|^2 dV = 1 \quad \int_V |\vec{H}_i(\vec{r})|^2 dV = 1$$

可由麦克斯韦方程证明： $E_{0i} = -j\eta H_{0i}$ 。证明过程两个归一化条件都要使用，一个用来确定 E_{0i} 和 H_{0i} 之间的比例关系，另一个用来确定比例系数。

这样第 i 个自由振荡模式可写成（注： $\vec{E}_i(\vec{r})$ 和 $\vec{H}_i(\vec{r})$ 均为实函数）

$$\begin{cases} \vec{E}_i(\vec{r}, t) = E_{0i} \vec{E}_i(\vec{r}) e^{j\omega_i t} \\ \vec{H}_i(\vec{r}, t) = j \frac{E_{0i}}{\eta} \vec{H}_i(\vec{r}) e^{j\omega_i t} \end{cases}, \text{ 代入麦氏方程得} \quad \begin{cases} \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{k_i} \nabla \times \vec{H}_i(\vec{r}) \\ \vec{H}_i(\vec{r}) = \frac{1}{k_i} \nabla \times \vec{E}_i(\vec{r}) \end{cases}$$

可以证明：对于空腔中任意一个自由振荡模式，其最大电场储能等于其最大磁场储能，即

$$(W_e)_{\max} = (W_m)_{\max}$$

其中， $(W_e)_{\max} = \frac{1}{2} \epsilon \int_V |\vec{E}|^2 dV$ ， $(W_m)_{\max} = \frac{1}{2} \mu \int_V |\vec{H}|^2 dV$ 。

§ 7.2 微波谐振器的基本特性

有关结论：

①、**分布性**：集总参数 LC 振荡迴路有明显的“电区域”和“磁区域”，

谐振腔是分布参数谐振器，无明显的“电区域”和“磁区域”。

②、**多谐性**：LC 回路只有一个谐振频率。微波谐振器具有多谐性，一

定尺寸的腔有无穷多个本征模（自由振荡模），每个模有它自己的谐振频率。

③、**振荡性**：空腔中的场都是简谐变化的 $e^{j\omega_i t}$ ，电场和磁场有 90° 的相

差，因而在振荡过程中能量不断交替变化，电场最大时磁场为 0，反之亦然，
两者最大值是相等的。

§ 7.2 微波谐振器的基本特性

二、微波谐振器的基本参数

1、谐振波长 λ_0 （或谐振角频率 ω_0 ）

λ_0 是谐振腔最重要的一个参数，它的确
定需要求解电磁场本征值问题。对于波导谐
振器可应用规则波导理论中的一些直接结果。

根据规则波导理论，若将波导轴向两端用导体进行封闭，则在 z 方向
上场必然也呈驻波分布，其中的横向电场为入射场和反射场之迭加，即

$$E_t = AE(\mu, \nu)e^{j(\omega t - \beta z)} + BE(\mu, \nu)e^{j(\omega t + \beta z)}$$

由 $z=0$ 处， $E_t=0$ ，可得 $A=-B$ ，即 $E_t = -j2AE(\mu, \nu)\sin\beta z e^{j\omega t}$ ；

由 $z=l$ 处， $E_t=0$ ，可得 $\beta = p\pi/l$ ， p 是整数，代表 z 方向的半驻波数。
可见， β 是离散值，另有 $l = p\lambda_g/2$ ，即半波长的整数倍。

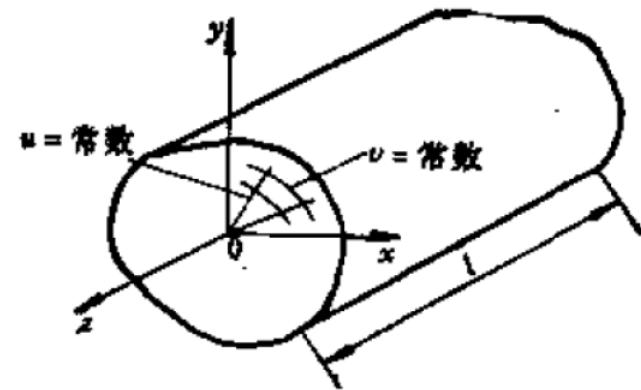


图 6.2-2 任意形状的封闭谐振腔

§ 7.2 微波谐振器的基本特性

p 的取值范围:

TM 波: $p=0$, 因为 E_z 垂直端面, 可不随 z 变化, 所以 $p=0,1,2,\dots$ 。

TE 波: $p\neq0$, 因为 TE 的电场全在横截面内, 因在 $z=0$ 和 $z=l$ 处有 $E_t=0$, 那么 $p=0$ 意味着电场沿 z 方向不变且处处为零, 因此磁场也必为零, 这样的场毫无意义, 所以 $p=1,2,3,\dots$ 。

$$\omega_0 = \frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\sqrt{k_c^2 + \beta^2}}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v_p \sqrt{k_c^2 + (p\pi/l)^2} = 2\pi v_p \sqrt{(1/\lambda_c)^2 + (p/2l)^2}$$

$$\lambda_0 = \frac{v_p}{f_0} = \frac{2\pi v_p}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{(1/\lambda_c)^2 + (p/2l)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1/\lambda_c)^2 + (1/\lambda_g)^2}}$$

可见, 谐振波长与谐振腔的形状尺寸和工作模式有关。

§ 7.2 微波谐振器的基本特性

2、品质因数 Q_0 (固有品质因数)

Q_0 能够反映谐振器频率选择性的优劣、能量损耗的程度以及维持自由振荡的能力。 Q_0 值的定义为：谐振时腔中的总储能 W 和一个振荡周期内腔中的总耗能 W_l 之比乘 2π 。

$$Q_0 = 2\pi \frac{W}{W_l} = 2\pi \frac{W}{P_l T_0} = \omega_0 \frac{W}{P_l}$$

注意：每个谐振模式都有自己的固有品质因数Q。

式中 T_0 为周期， P_l 为一个振荡周期内的平均损耗功率，它是导体损耗和介质损耗功率之和。令导体的损耗功率为 P_c ，介质的损耗功率为 P_d ，则

$$P_c = \frac{1}{2} \int_S R_s |\vec{J}_s|^2 ds = \frac{R_s}{2} \int_S |\vec{H}_\tau|^2 ds \quad P_d = \frac{\sigma_d}{2} \int_V |\vec{E}|^2 dV$$

§ 7.2 微波谐振器的基本特性

$$W = W_e + W_m = (W_e)_{\max} = (W_m)_{\max} = \frac{1}{2} \varepsilon \int_V |\vec{E}|^2 dV = \frac{1}{2} \mu \int_V |\vec{H}|^2 dV$$

$$Q_c = \frac{W}{P_c} \omega_0 = \frac{\frac{1}{2} \omega_0 \mu \int_V |\vec{H}|^2 dV}{\frac{R_s}{2} \int_S |\vec{H}_\tau|^2 ds} = \frac{2 \int_V |\vec{H}|^2 dV}{d \int_S |\vec{H}_\tau|^2 ds} \quad (d \text{ 为趋肤深度})$$

$$Q_d = \frac{W}{P_d} \omega_0 = \frac{\frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon \int_V |\vec{E}|^2 dV}{\frac{\sigma_d}{2} \int_V |\vec{E}|^2 dV} = \frac{\omega_0 \varepsilon}{\sigma_d} = \frac{1}{tg \delta}$$

$$Q_0 = \omega_0 \frac{W}{P_l} = \omega_0 \frac{W}{P_c + P_d} = \frac{1}{\frac{P_c}{W \omega_0} + \frac{P_d}{W \omega_0}} = \frac{1}{\frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d}} = \frac{Q_c Q_d}{Q_c + Q_d} = \frac{Q_c}{1 + Q_c tg \delta}$$

Q_0 值还反映了谐振腔维持自由振荡的能力， Q_0 越大，每振荡一次的损耗就越小，因而振荡的衰减就越慢，可以证明 $W(t) = W_0 \exp(-\frac{\omega_0}{Q_0} t)$ ，其中 $W(t)$ 为腔的瞬时储能， W_0 为 $t=0$ 时的储能。

§ 7.2 微波谐振器的基本特性

3、等效电导 G_0

为了研究微波腔的外部特性，常常在某一振荡模式的谐振频率附近将微波腔等效为集总参数并联谐振回路，并使用等效电导 G_0 表征谐振器的功率损耗特性。

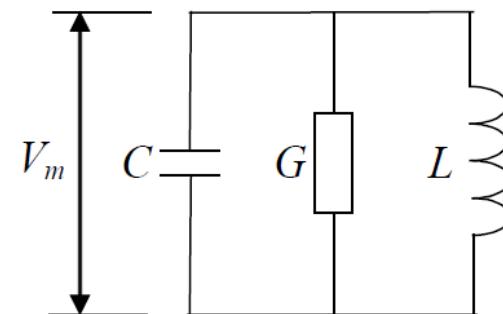
因为 $P_l = \frac{1}{2} G_0 V_m^2$ ，则 $G_0 = \frac{2P_l}{V_m^2}$ ，其中 $P_c = \frac{R_s}{2} \int_S |\vec{H}_\tau|^2 ds$ ， $V_m = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$ ，

所以

$$G_0 = \frac{R_s \int_S |\vec{H}_\tau|^2 ds}{\left[\int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \right]^2} = 10^{-4} \sim 10^{-5} \Omega$$

由于腔中的电场一般并非保守场，所以上述

积分的结果不是唯一的，这使得 G_0 具有任意性。但是，在谐振腔的设计中只要固定这个积分路径，仍然可以使用 G_0 来评价谐振腔的损耗。



金属波导谐振腔

§ 7.3

一、矩形腔

1、矩形腔中的场结构

(1)、TE型振荡模式($E_z = 0, H_z \neq 0$):

$$\nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$$

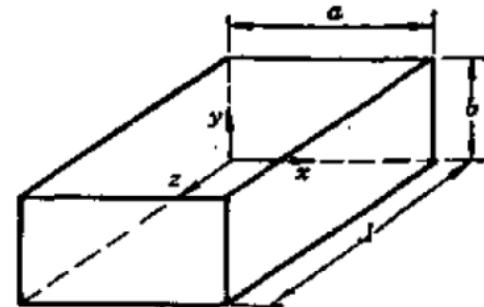


图 6.3-1 矩形谐振腔

边界条件为 $\frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_{\Omega} = \frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_{x=0,a, y=0,b} = 0, \quad H_z \Big|_{z=0,l} = 0$

$$H_z = \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y (H_0 e^{-j\beta z} + H'_0 e^{j\beta z})$$

由 $z=0$ 时, $H_z=0$ 得 $H_0 = -H'_0$, 故 $H_z = -2jH_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \beta z$

由 $z=l$ 时, $H_z=0$ 得 $\beta = p\pi/l$, 故 $H_z = -2jH_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{l} z$

TE 振荡模式的横向场可由以下 修正的纵向场法公式 获得:

$$\vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z = \frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right), \quad \vec{E}_t = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \vec{i}_z \times \nabla_t H_z$$

§ 7.3 金属波导谐振腔

(2)、TM型振荡模式, $E_z \neq 0$, $H_z = 0$

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0, \text{ 边界条件为 } E_z \Big|_{\substack{x=0,a \\ y=0,b}} = 0, \quad \vec{E}_t \Big|_{z=0,l} = 0$$

其中由 $\vec{E}_t = \frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$ 可知, 边界条件变为 $\frac{\partial E_z}{\partial z} \Big|_{z=0,l} = 0$ 。

$$E_z = 2E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{p\pi}{l} z$$

$$\vec{E}_t = \frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right), \quad \vec{H}_t = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \vec{i}_z \times \nabla_t E_z$$

矩形谐振腔可能存在无穷多个振荡模式:

H_{mnp} , $m=0, 1, 2, \dots$; $n=0, 1, 2, \dots$; (m 和 n 不能同时为零); $p=1, 2, 3, \dots$ 。

H 波最低次为 H_{101} ($a>b$) 或 H_{011} ($a<b$)。

E_{mnp} , $m=1, 2, 3, \dots$; $n=1, 2, 3, \dots$; $p=0, 1, 2, \dots$ 。 E 波最低次为 E_{110} 。

下标 m 、 n 、 p 分别表示场沿 x 、 y 和 z 方向变化的半驻波个数。

2、谐振波长 λ_0 和品质因数 Q_0

矩形波导的截止波长为 $\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$ 。

则谐振波长为 $\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{(1/\lambda_c)^2 + (p/2l)^2}} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2}}$ 。

谐振波长最长的振荡模式称为谐振腔的主模。

当 $l > a > b$, TE_{101} 为矩形腔的主模, 其谐振波长为 $\lambda_0 = \frac{2al}{\sqrt{a^2 + l^2}}$ 。 TE_{101}

模有 E_y 、 H_x 、 H_z 三个场分量, 分别为

$$E_y = E_{y0} \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{l} z, \quad H_x = -j \frac{E_{y0}}{Z_H} \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{l} z$$

$$H_z = j \frac{E_{y0}}{Z_H} \frac{\lambda_g}{\lambda_c} \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{l} z = j \frac{E_{y0}}{Z_H} \frac{l}{a} \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{l} z \quad \begin{cases} \lambda_g = 2l \\ \lambda_c = 2a \end{cases}$$

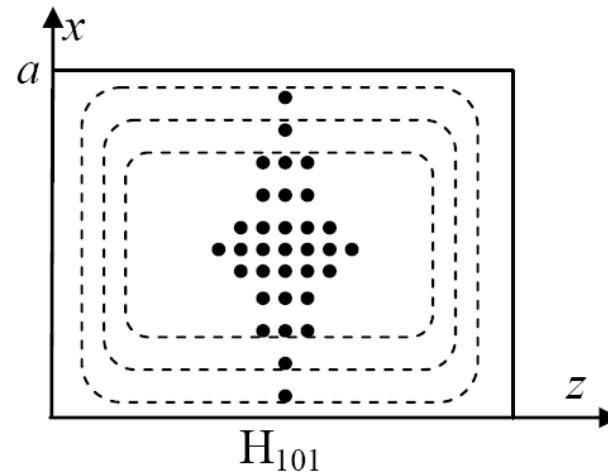
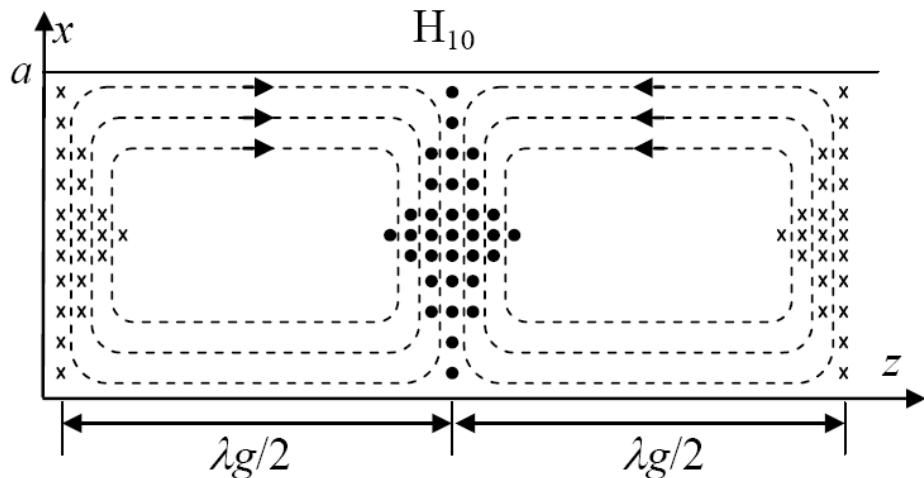
据此可以求出

$$Q_0 = \frac{abl(a^2 + l^2)}{al(a^2 + l^2) + 2b(a^3 + l^3)} \frac{1}{d}$$

§ 7.3 金属波导谐振腔

3、绘制波导型谐振腔场分布的一般原则

H_{mnp} （或 E_{mnp} ）模实际上可以看成是相应波导中 H_{mn} （或 E_{mn} ）波在腔的二端反射后形成的驻波。因此，这些谐振模式的场分布可根据对应的传输模式的场分布来绘制。具体过程是：在波导中沿 z 方向画 p 个 H_{mn} 的图形，然后将场中的电力线和磁力线的相对位置沿 z 方向改变 $\lambda_g/4$ ，这就得到相应波导腔中 H_{mnp} （或 E_{mnp} ）模的场结构。



§ 7.3 金属波导谐振腔

二、圆形腔

1、场结构

(1) TE 型振荡模式

$$\nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$$

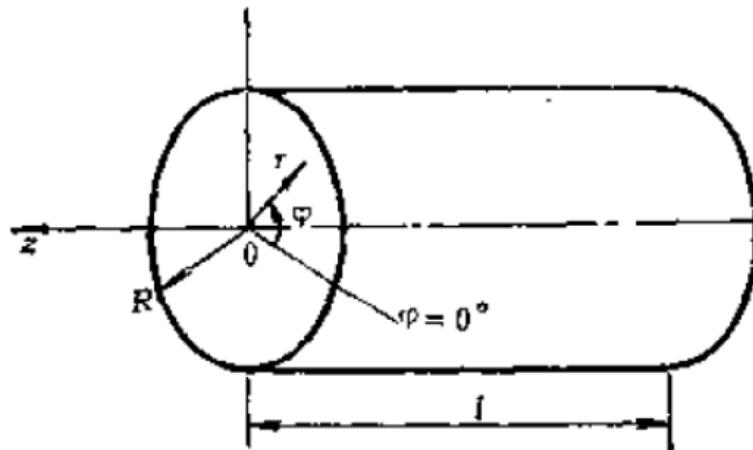


图6.3-3 圆柱形谐振腔

边界条件为 $\frac{\partial H_z}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0, \quad H_z \Big|_{z=0,l} = 0$

$$H_z = -2jH_0 J_m(k_c r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \sin \frac{p\pi}{l} z, \quad k_c = \frac{\mu_{mn}}{a}, \quad J'_m(\mu_{mn}) = 0$$

$$\vec{H}_t = \frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right), \quad \vec{E}_t = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \vec{i}_z \times \nabla_t H_z$$

§ 7.3 金属波导谐振腔

(2)、TM型振荡模式

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0, \text{ 边界条件为 } E_z \Big|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} \Big|_{z=0,l} = 0$$

$$E_z = 2E_0 J_m(k_c r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} y \cos \frac{p\pi}{l} z, \quad k_c = \frac{\nu_{mn}}{a}, \quad J_m(\nu_{mn}) = 0$$

$$\vec{E}_t = \frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right), \quad \vec{H}_t = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \vec{i}_z \times \nabla_t E_z$$

圆形谐振腔可能中存在无穷多个振荡模式:

H_{mnp} , $m=0, 1, 2, \dots; n=1, 2, 3, \dots; p=1, 2, 3, \dots$

E_{mnp} , $m=0, 1, 2, \dots; n=1, 2, 3, \dots; p=0, 1, 2, \dots$

下标 m 、 n 、 p 分别表示场沿 φ 方向的整驻波个数、 r 方向和 z 方向的半驻波个数。

§ 7.3 金属波导谐振腔

2、谐振波长 λ_0

TE 型: $\lambda_{0Hmnp} = \frac{1}{\sqrt{(1/\lambda_c)^2 + (p/2l)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\mu_{mn}/2\pi a)^2 + (p/2l)^2}}$

TM 型: $\lambda_{0Emnp} = \frac{1}{\sqrt{(1/\lambda_c)^2 + (p/2l)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\nu_{mn}/2\pi a)^2 + (p/2l)^2}}$

TE 型的最低振荡模为 \mathbf{H}_{111} , $\lambda_{0H_{111}} = \frac{1}{\sqrt{(1/3.41a)^2 + (1/2l)^2}}$

TM 型的最低振荡模为 \mathbf{E}_{010} , $\lambda_{0E_{010}} = 2.62a$ 。

圆形谐振腔的主模为

当 $l < 2.1a$ 时, $\lambda_{0E_{010}} > \lambda_{0H_{111}}$, 主模为 \mathbf{E}_{010} 。

当 $l > 2.1a$ 时, $\lambda_{0H_{111}} > \lambda_{0E_{010}}$, 主模为 \mathbf{H}_{111} 。

§ 7.3 金属波导谐振腔

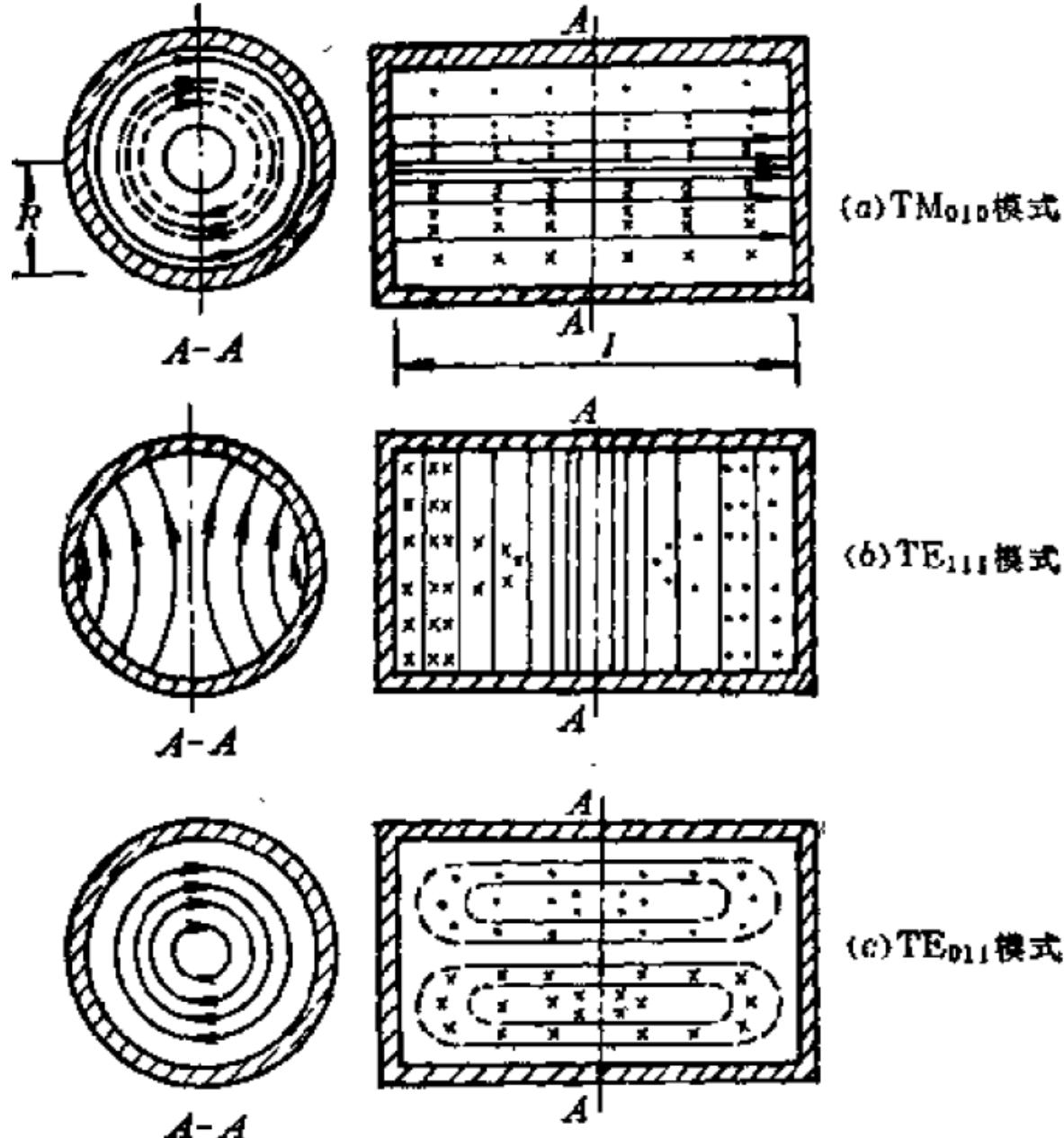


图 6.3-7 圆柱形腔中三个常用模式的场结构

§ 7.3 金属波导谐振腔

4、模式图

圆形腔的谐振频率与工作模式、腔体尺寸之间有下列关系：

由 $\lambda^2 = \frac{1}{(w_{mn}/2\pi a)^2 + (p/2l)^2} = \left(\frac{\nu}{f}\right)^2$, 其中 $w_{mn} = \begin{cases} \mu_{mn}, \\ \nu_{mn} \end{cases}$, 令 $D = 2a$, 得

$$\frac{(fD)^2}{y} = \frac{\nu^2}{c} \left(\frac{w_{mn}}{\pi}\right)^2 + \nu^2 \left(\frac{p}{2}\right)^2 \left(\frac{D}{l}\right)^2$$

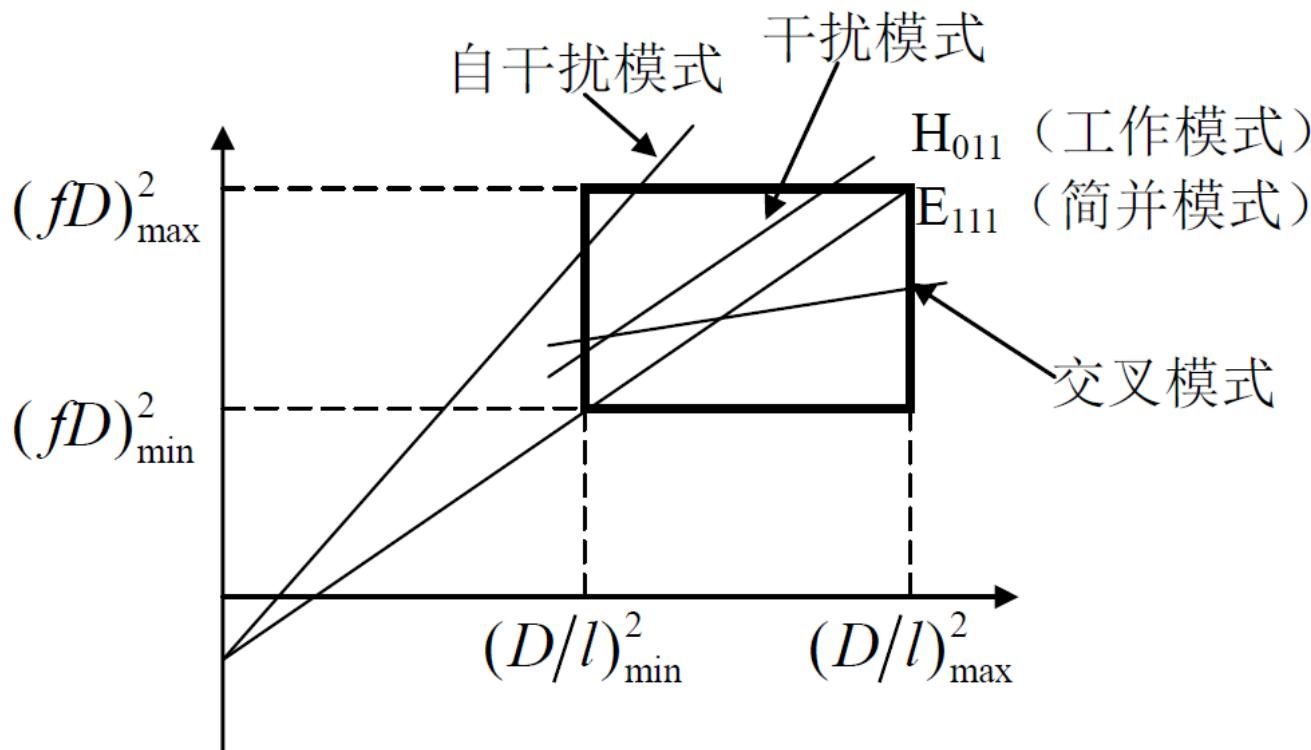
由直线方程 $y = kx + c$ 可知 上式代表一族直线, 称为圆形腔的波型图或

模式图。模式图中每一条直线表示一种（或几种）振荡模式的谐振频率与

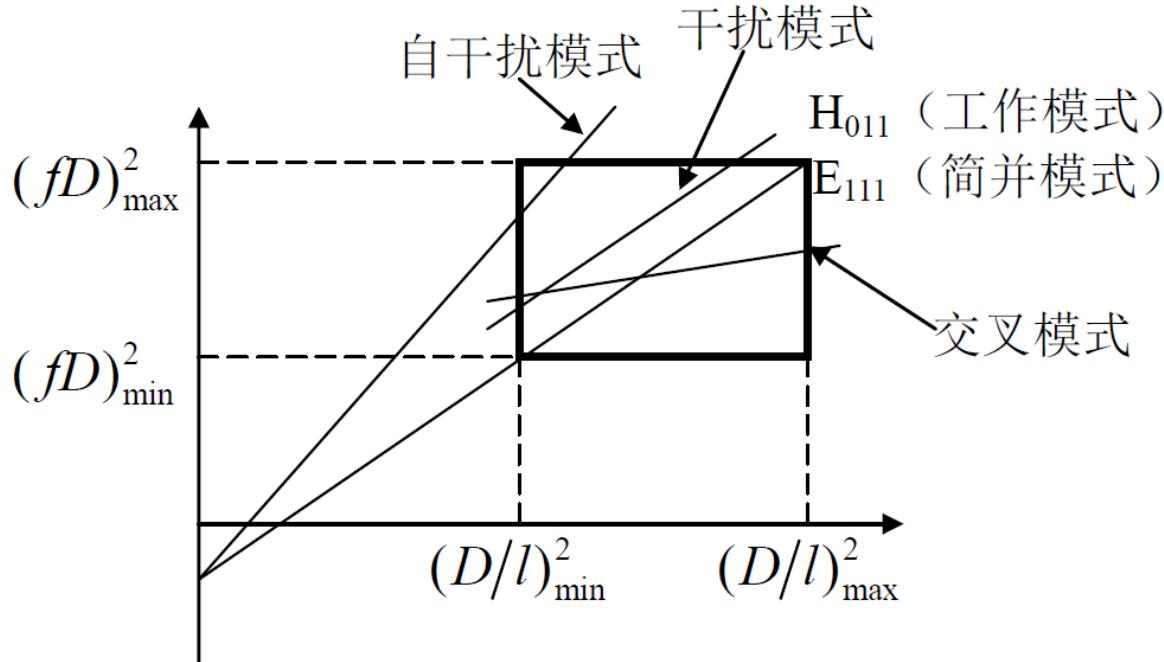
腔长、直径的关系, 即代表该模式的调谐曲线, 这些直线的截距 c 只和 m 、 n 有关, 斜率 k 只由 p 决定。

§ 7.3 金属波导谐振腔

为了使谐振腔正常工作，必须选择适当的工作方框，该方框是以工作模式的直线为对角线，由最大和最小的 $(fD)^2$ 及其对应的 $(D/l)^2$ 值所确定的一个区域。除了工作模式以外，所有在工作方框内的其它直线所对应的模式均为虚假模式，它们对谐振腔的正常工作会产生不同程度的影响

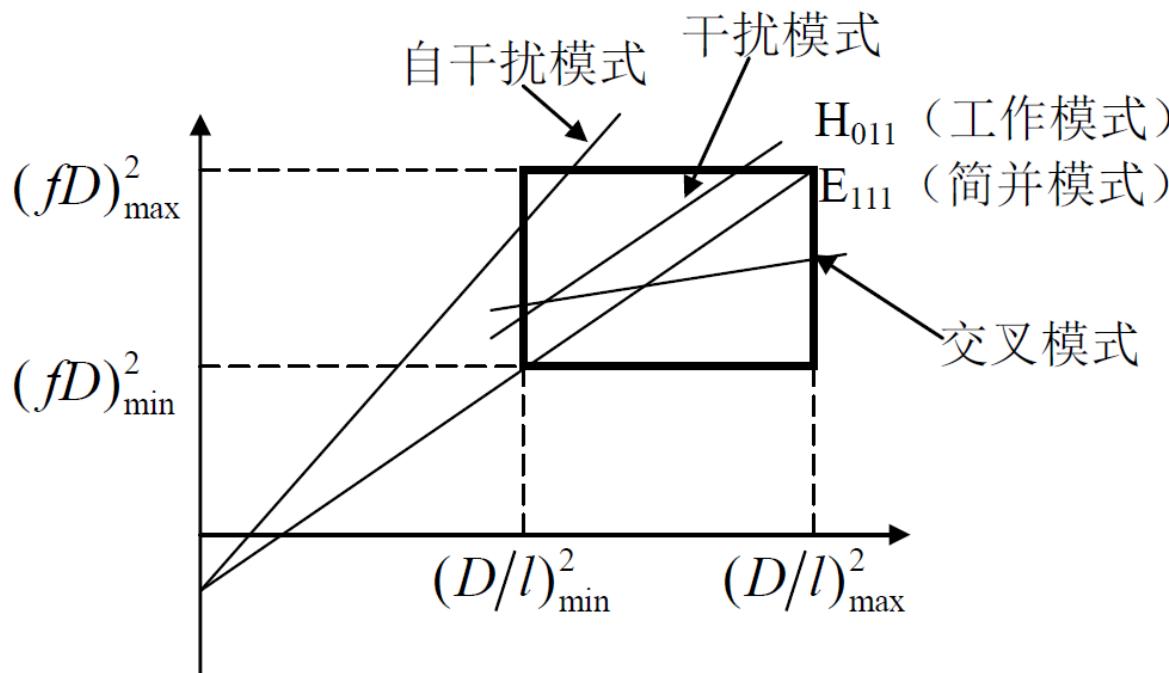


§ 7.3 金属波导谐振腔



- ①、**干扰模式**: 与工作模式调谐直线有相同的斜率 p , 但截距 m 、 n 不同的振荡模式。干扰模式直线平行于工作模式直线, 它们的谐振频率之差为某一常数。
- ②、**自干扰模式**: 与工作模式调谐直线有相同的截距 m 、 n , 但斜率 p 不同的振荡模式。自干扰模式与工作模式有相同的横向场, 不同的纵向分布。谐振时, 与工作模式的耦合最强。

§ 7.3 金属波导谐振腔



③、交叉模式：该模式与工作模式调谐直线相交于某一点，故它们的三个标数 m、n、p 各不相同，交点的谐振频率相等。交叉模式是特殊位置上的简并模式，在交叉点上，干扰很强，严重影响 Q 值和测量精度。

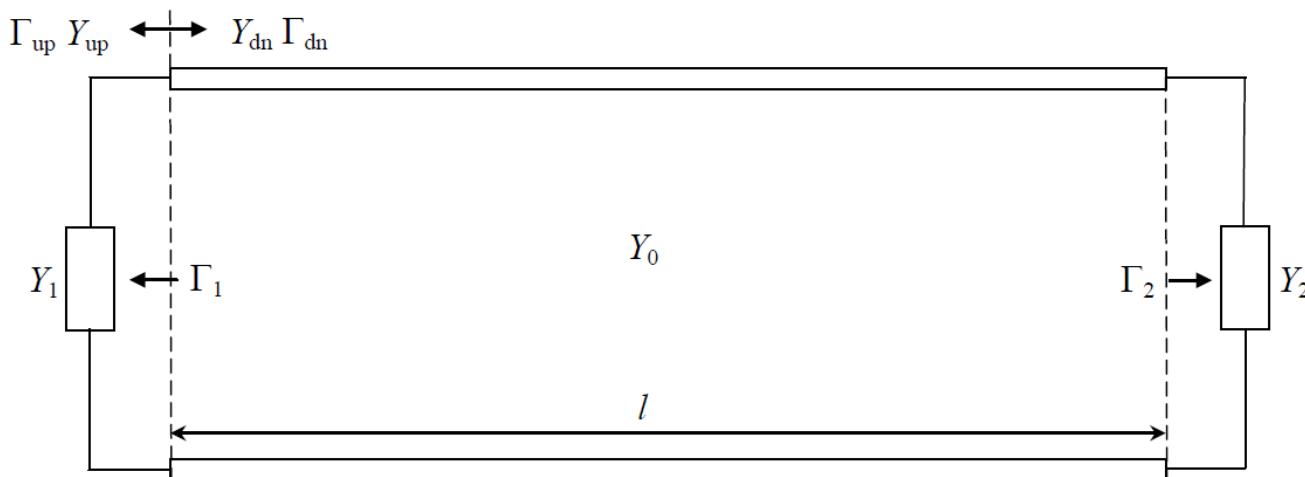
④、简并模式：该模式与工作模式的调谐直线完全相同，二个模式有完全不同的场分布，却有相同的谐振频率。 H_{0np} 与 E_{1np} 简并，其影响是使 Q 值和测量精度降低，但易于抑制。

§ 7.4 传输线谐振器

一、同轴腔

同轴腔具有频带宽、振荡模式简单、场结构稳定、工作可靠等优点。

同轴线满足不出现高次模的条件为 $\pi(a+b)/2 < \lambda_{\min}$ ，主模为 TEM 模。同轴腔的传输线模型如图所示。



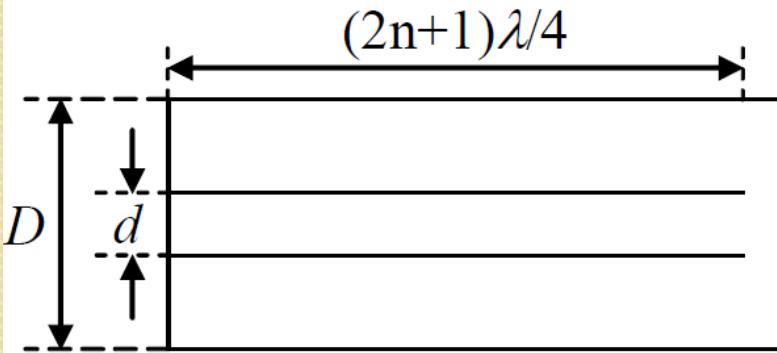
$$\text{其中 } \Gamma_1 = \frac{Y_0 - Y_1}{Y_0 + Y_1} = |\Gamma_1| e^{j\varphi_1}, \quad \Gamma_2 = \frac{Y_0 - Y_2}{Y_0 + Y_2} = |\Gamma_2| e^{j\varphi_2}$$

当同轴腔两端采取开路或短路形式构造谐振腔时，其相位必须满足

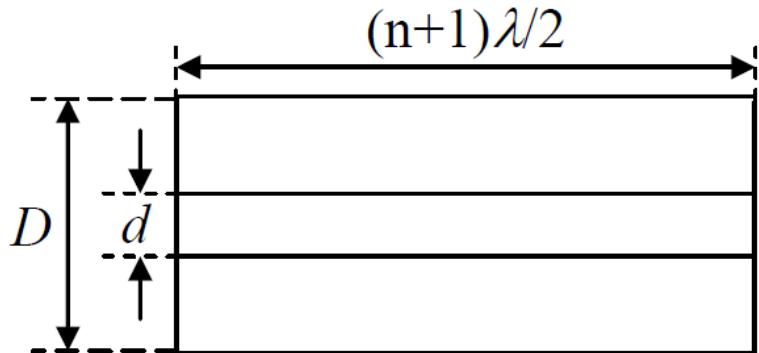
$$-2\beta l + \varphi_1 + \varphi_2 = -2n\pi \quad n=0, 1, 2, \dots$$

注：上式右边的负号是保证计算得到的 l 为正值

§ 7.4 传输线谐振器



$\lambda/4$ 同轴腔



$\lambda/2$ 同轴腔

由左图 $Y_1 = \infty$, $Y_2 = 0$ 得 $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = 0$

$$l = (2n+1)\lambda/4$$

为避免右边开路端的辐射损耗, 外导体比内导体要长些, 构成一小段截止波导。

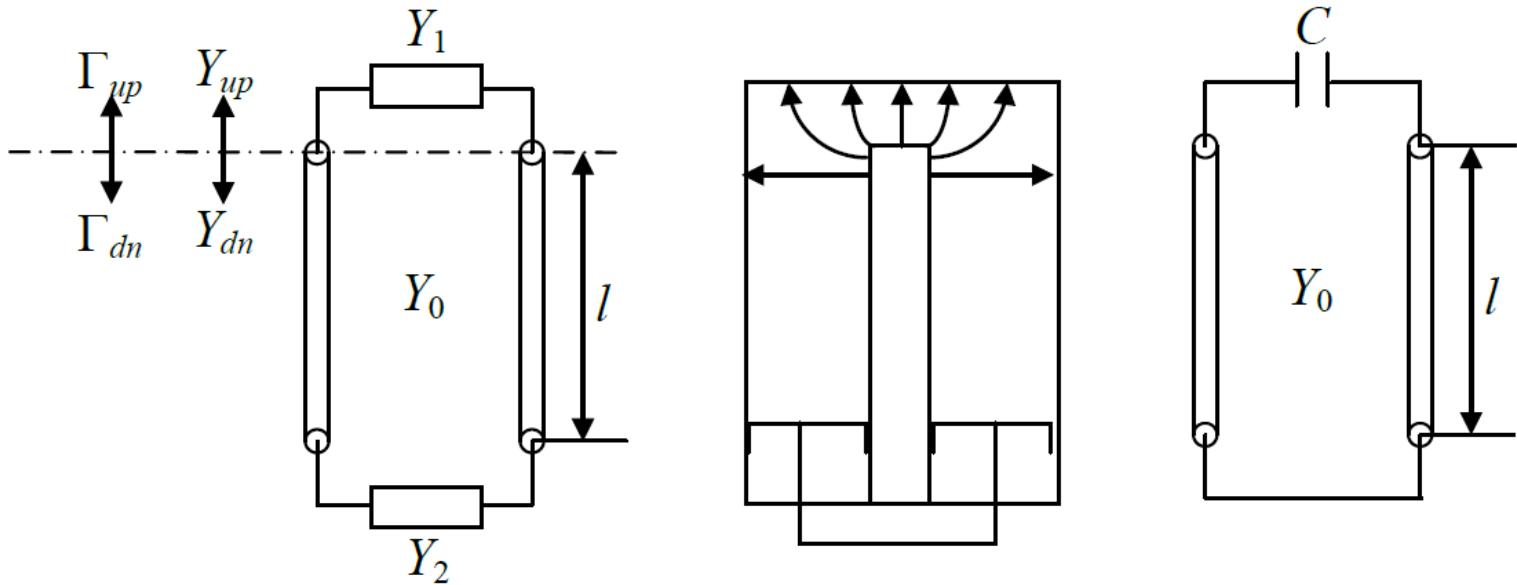
由左图 $Y_1 = \infty$, $Y_2 = \infty$ 得 $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = \pi$

$$l = (n+1)\lambda/2$$

§ 7.4 传输线谐振器

当同轴腔两端采取电抗形式构造谐振腔时，谐振条件是

$$Y_{up} + Y_{dn} = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{dn}\Gamma_{up} = 1, \text{ 即 } \Gamma_1\Gamma_2 e^{-j2\beta l} = 1$$



如图所示，有 $Y_1 = j\omega C$ ， $Y_2 = \infty$ ， 可得

$$Y_{up} = Y_1 = j\omega C, \quad Y_{dn} = -jY_0 \operatorname{ctg} \beta l, \quad \text{解得 } l = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \frac{Y_0}{\omega C}.$$

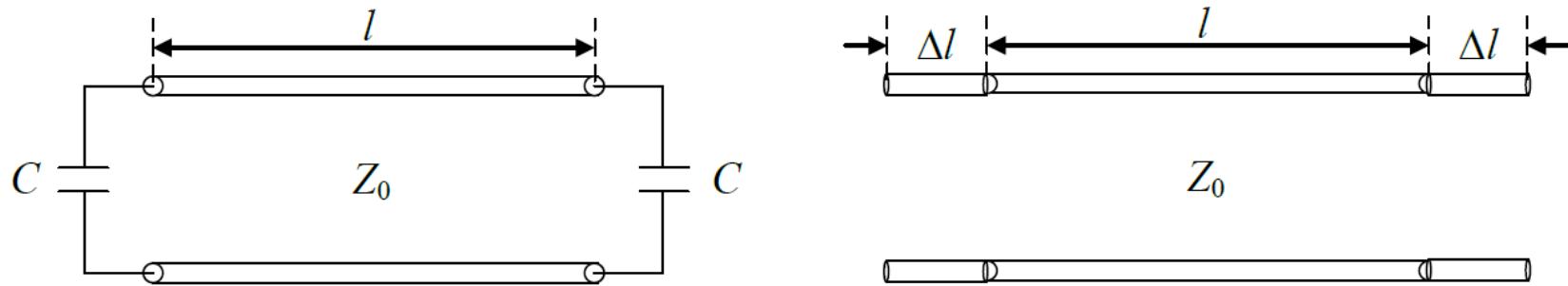
§ 7.4 传输线谐振器

二、微带腔

有一端短路和一端开路的 $\lambda/4$ 型、 $\lambda/2$ 开路型、 $\lambda/2$ 短路型、环形和圆形

谐振器等形式。由于微带线的接地比较困难，故 $\lambda/2$ 开路型用得较多。

$\lambda/2$ 开路型举例：中心导带的直接中断并不是理想的开路，这种末端的不均匀性将引起辐射，故开路端相当于一个有 RLC 的终端，一般 C 的作用是主要的，可以用一电容 C 或一段微带（与 C 相当）来表示，如图所示。



其中要求 $l + 2\Delta l \approx n\lambda_g / 2$ ，则 $l \approx n\lambda_g / 2 - 2\Delta l$ ，且 $\Delta l \approx 0.33h$ （直至 x 波段）。

环形谐振器:

当环的平均周长等于带内波长的整数倍时，可产生谐振。振荡模式为 TM_{mn0} ，主模为 TM_{110} ，主模 TM_{110} 的场传播路径基本闭合，辐射损耗很小，故环形谐振器的无载 Q 值近似等于微带线本身的 Q 值。

定义 $R = (a + b) / 2$ 为平均半径， $W = (b - a) / 2$ 为环宽的一半，谐振时 $\pi(a + b) = m\lambda_g = m\lambda/\sqrt{\epsilon_e}$ ，则 $\lambda_g = 2\pi R/m$ （为 TM_{m10} 的谐振波长）

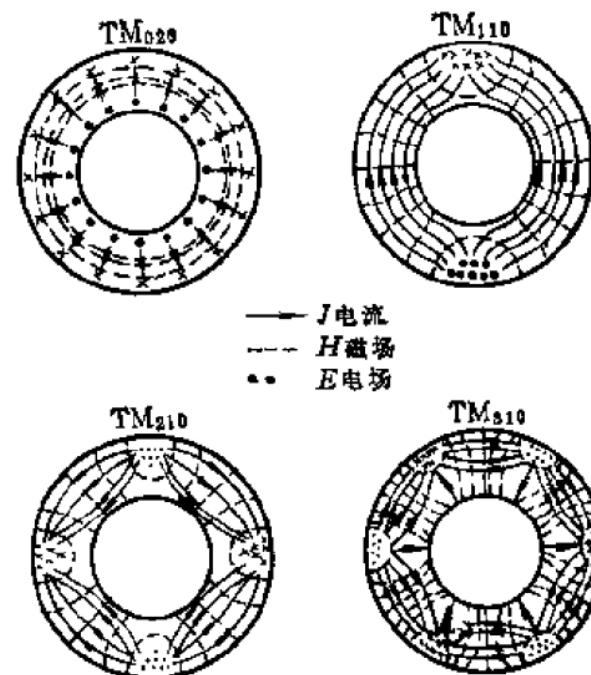
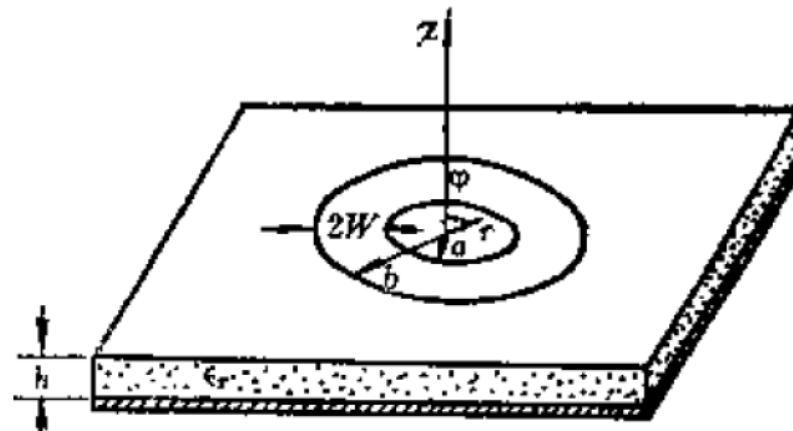


图 6.4-3 微带环形谐振器

§ 7.4 传输线谐振器

圆形谐振器：

是环形谐振器在 $a \rightarrow 0$ 时的极限，它的主模也是 TM_{110} 。

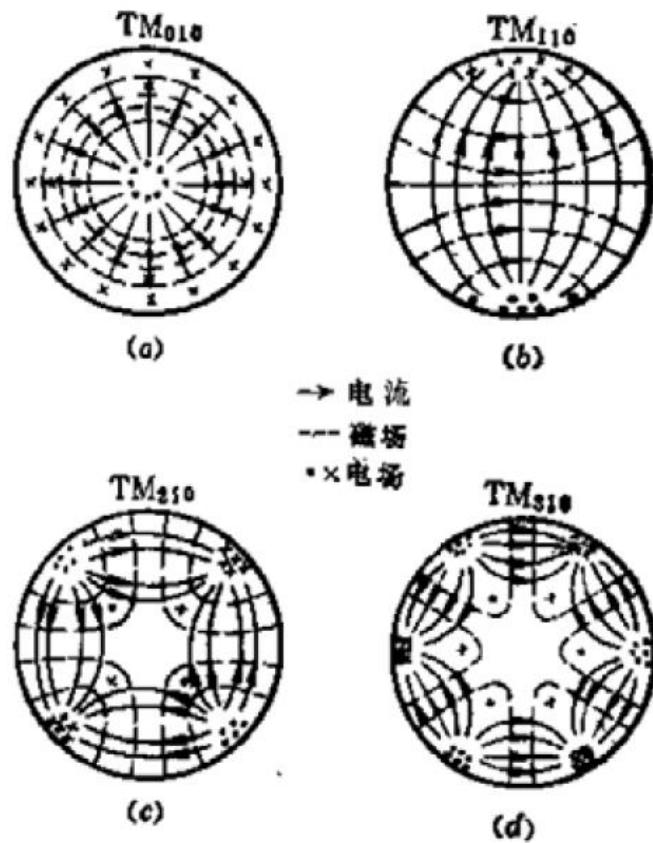
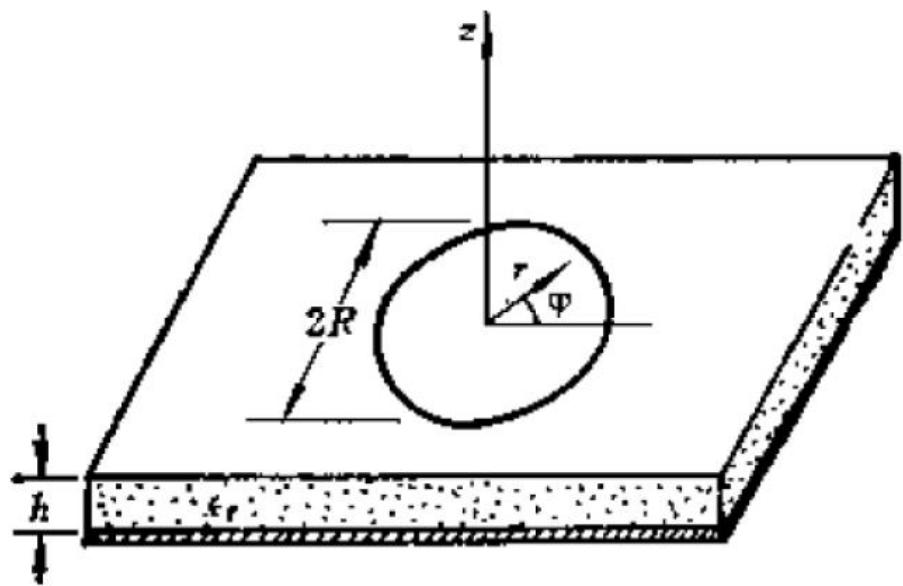


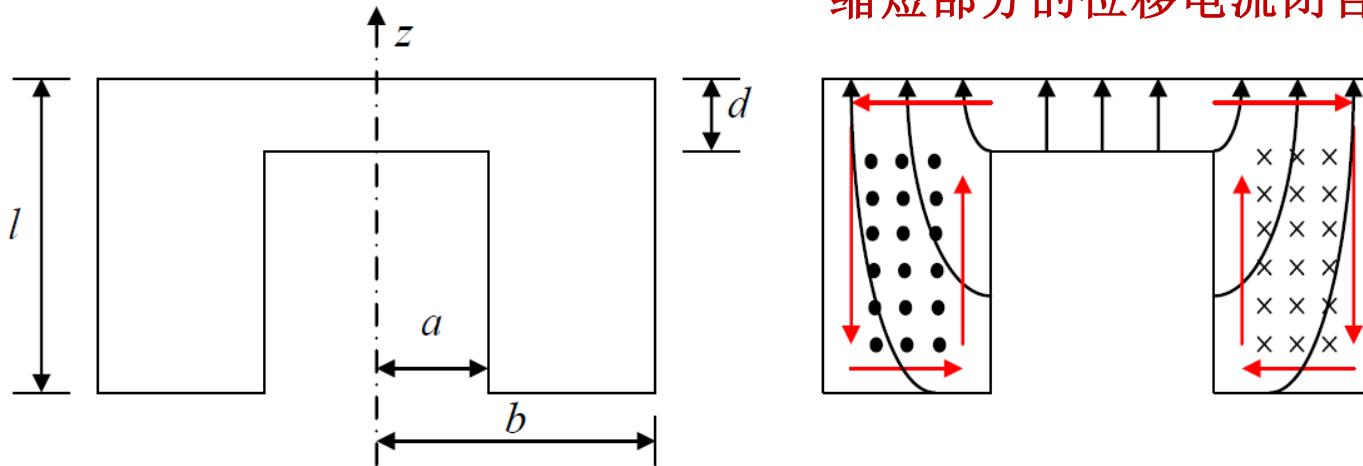
图 6.4-6 微带圆形谐振器

§ 7.5 非传输线型谐振器

有些谐振腔不是简单的由微波传输线段所构成，称为非传输线型腔，

例如环形腔（又称重入式谐振腔）

注：红色是管壁电流，与缩短部分的位移电流闭合。

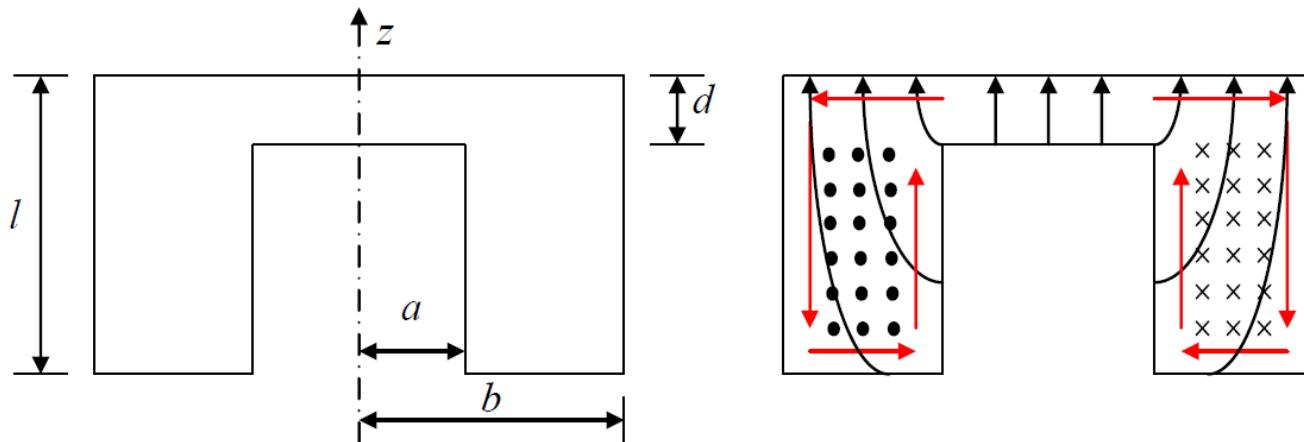


这类腔往往满足似稳条件： $L/\lambda \ll 1$ ， L 是电磁波穿过有关区域的最大

线度，这时电磁场具有静场特征，而且有明显的电场和磁场集中区域。

环形腔的 $a < b < l \ll \lambda/4$ 和 $d \ll l$ 时，满足似稳条件，电场主要集中在缩短部分，磁场主要集中在环形体积内，这就可以用电容和电感的并联回路来计算谐振频率 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 。

§ 7.5 非传输线型谐振器



作为一次近似， C 可认为是平板电容而忽略边缘的贡献，即

$$C = \epsilon S/d = \epsilon \pi a^2/d$$

设环形部分内壁的总电流为 I ，则距对称轴 r 处的磁场为 $H = H_\phi = I/2\pi r$ （安培环路定律 $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H_\phi = I$ ），通过环形腔的总磁通为

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \mu H_\phi dS = \int_0^l dz \int_a^b \frac{\mu I}{2\pi r} dr = \frac{\mu Il}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

根据电感定义，可得 $L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ ，则

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{2d}{a^2 l \mu \epsilon \ln(b/a)}}, \quad \lambda = \pi a \sqrt{\frac{2l}{d} \ln \frac{b}{a}}$$

§ 7.5 非传输线型谐振器

前述公式的误差较大，其原因

是没有考虑圆柱体侧面的边缘电容。

假设圆柱侧面上的电力线近似为一以 B 点为圆心、以 ρ 为半径的圆弧，如图所示，则当缩短部分加上电压 U 后，可得

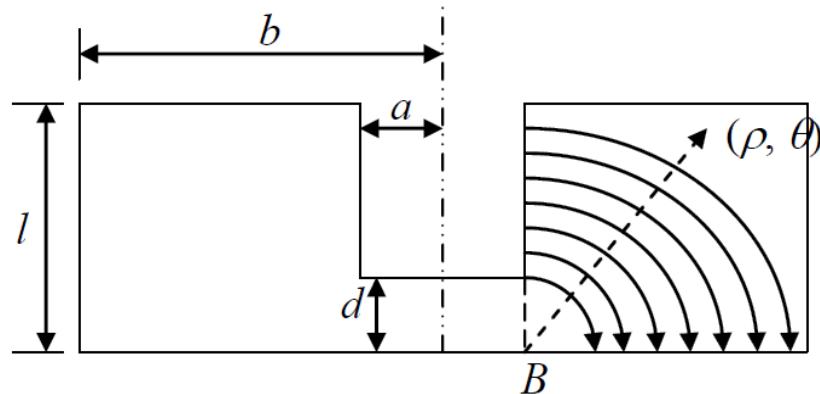
$$U = -\int_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{\pi/2} E_\theta \rho d\theta = \frac{\pi}{2} E_\theta \rho, \text{ 所以有 } E_\theta = 2U/\pi\rho, \text{ 进而可得环形腔内}$$

壁上的电荷密度(即中心圆柱突起部分的内侧壁)为 $\rho_s = D_n = \epsilon E_\theta = 2\epsilon U/\pi\rho$

$$\text{由此可得内侧表面总电荷为 } Q = \int_S \rho_s ds = \int_0^{2\pi} ad\phi \int_d^l \frac{2\epsilon U}{\pi\rho} d\rho = 4\epsilon a U \ln \frac{l}{d}$$

(注： ϕ 为圆柱坐标)，所以侧面电容为 $C' = \frac{Q}{U} = 4\epsilon a \ln \frac{l}{d}$ 。

$$\text{因而总电容为 } C = \frac{\epsilon \pi a^2}{d} + 4\epsilon a \ln \frac{l}{d}, \text{ 可得 } \lambda = \pi a \sqrt{\frac{2l}{d} \left(1 + \frac{4d}{\pi a} \ln \frac{l}{d} \right) \ln \frac{b}{a}}.$$

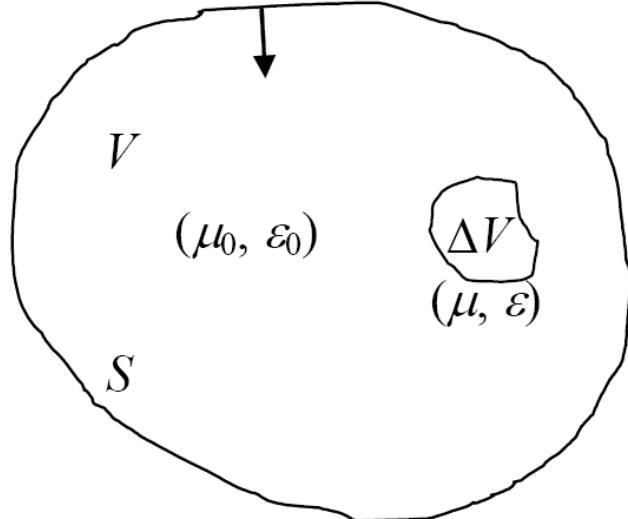


实际的谐振腔总要受到外界的扰动，如调谐机构、介质的引入、激励与耦合装置等，如果这种扰动较小，则腔内的场分布变化很小，就称这种扰动为微扰。在微扰的情况下，谐振频率的改变可用微扰公式来计算。

一、微扰公式

微扰法总是包含两个问题：一是未受微扰的问题，这个解一般都是已知的；另一个是微扰后的问题，其求解需要用未受微扰的解来计算的。微扰法就是要借助于未受微扰时的已知解来求微扰后的未知解。

设以 S 为边界 V 为体积的腔内填充空气，其谐振频率为 ω_0 ，腔中各点的场强为 \vec{E}_0 和 \vec{H}_0 。若将体积为 ΔV 的介质 (μ, ϵ) 放入腔中，于是谐振频率变为 ω ，腔中的场强变为 \vec{E} 和 \vec{H} 。



§ 7.6 谐振腔的微扰理论

未受微扰时，腔中的场强满足：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}_0 = j\omega_0 \varepsilon_0 \vec{E}_0 \\ \nabla \times \vec{E}_0 = -j\omega_0 \mu_0 \vec{H}_0 \end{cases}, \text{ 分别用 } \vec{E} \text{ 和 } \vec{H} \text{ 点乘这两式的共轭形式，可得}$$

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}_0^* = -j\omega_0 \varepsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \quad (1) \quad \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E}_0^* = j\omega_0 \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \quad (2)$$

引入介质产生微扰后，腔中介质内外的场强分别满足：

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= j\omega \varepsilon_0 \vec{E} & \Delta V \text{ 外} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega \varepsilon \vec{E} & \Delta V \text{ 内} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -j\omega \mu_0 \vec{H} & \Delta V \text{ 外} \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega \mu \vec{H} & \Delta V \text{ 内} \end{aligned}$$

用 \vec{E}_0^* 点乘左边两式，得

$$\vec{E}_0^* \cdot \nabla \times \vec{H} = j\omega \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}_0^* \quad \Delta V \text{ 外} \quad (3)$$

$$\vec{E}_0^* \cdot \nabla \times \vec{H} = j\omega \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}_0^* \quad \Delta V \text{ 内} \quad (4)$$

$$\vec{H}_0^* \cdot \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}_0^* \quad \Delta V \text{ 外} \quad (5)$$

$$\vec{H}_0^* \cdot \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \cdot \vec{H}_0^* \quad \Delta V \text{ 内} \quad (6)$$

用 \vec{H}_0^* 点乘右边两式，得

§ 7.6 谐振腔的微扰理论

组合(1)至(6)式并在体积 V 内积分, 于是有

$$\begin{aligned}
 & \int_V \left[\left(\frac{\vec{E}_0^* \cdot \nabla \times \vec{H} + \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}_0^*}{(3)(4)} - \left(\frac{\vec{H}_0^* \cdot \nabla \times \vec{E} + \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E}_0^*}{(5)(6)} \right) \right) \right] dV \\
 &= \int_{V-\Delta V} [j\varepsilon_0(\omega - \omega_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + j\mu_0(\omega - \omega_0) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV \\
 &\quad + \int_{\Delta V} [j(\omega\varepsilon - \omega_0\varepsilon_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + j(\omega\mu - \omega_0\mu_0) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV
 \end{aligned}$$

对上式左边应用矢量恒等式 $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$, 有

$$\begin{aligned}
 & \int_V [(\vec{E}_0^* \cdot \nabla \times \vec{H} + \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}_0^*) - (\vec{H}_0^* \cdot \nabla \times \vec{E} + \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E}_0^*)] dV \\
 &= - \int_V [\nabla \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{H}) + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_0^*)] dV \\
 &= \oint_S [(\vec{E}_0^* \times \vec{H}) + (\vec{E} \times \vec{H}_0^*)] \cdot \vec{n} dS = \oint_S [\vec{H} \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{n}) + \vec{H}_0^* \cdot (\vec{E} \times \vec{n})] dS = 0
 \end{aligned}$$

注: 第二个等号使用了高斯散度定理 $\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ ($d\vec{S}$ 的方向是向外的), \vec{n} 为腔内壁法线矢量; 第四个等号利用了电壁上切向电场为 0。

所以有

$$\begin{aligned}
 & \int_{V-\Delta V} [j\varepsilon_0(\omega - \omega_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + j\mu_0(\omega - \omega_0) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV \\
 &+ \int_{\Delta V} [j(\omega\varepsilon - \omega_0\varepsilon_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + j(\omega\mu - \omega_0\mu_0) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV = 0
 \end{aligned}$$

§ 7.6 谐振腔的微扰理论

由于介质体积 ΔV 很小，属于微扰情况，所以上式第一项对 $V-\Delta V$ 的积分可近似地用对 V 的积分来代替，而第二项可近似取 $\omega\varepsilon - \omega_0\varepsilon_0 \approx \omega_0(\varepsilon - \varepsilon_0)$ ， $\omega\mu - \omega_0\mu_0 \approx \omega_0(\mu - \mu_0)$ ，则

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\int_{\Delta V} [(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + (\mu - \mu_0)\vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV}{\int_V [\varepsilon_0 E_0^* \cdot \vec{E} + \mu_0 H_0^* \cdot \vec{H}] dV}$$

这就是**谐振腔微扰理论的基本公式**，它给出了微扰前后的场与谐振频率的关系。要确定频率的变化量必须计算微扰前后的场。但实际应用中，由于对腔的扰动是很小的，因此 $(\omega - \omega_0)/\omega_0$ 也是很小的，作适当近似可以将上式简化为适合工程应用的形式。

§ 7.6 谐振腔的微扰理论

二、介质微扰

假定 ΔV 很小，它对 ΔV 以外区域的场影响很小，即认为 ΔV 外微扰前后的场不变，即 $\vec{E} = \vec{E}_0$, $\vec{H} = \vec{H}_0$ 。又假设介质引入不改变腔的总储能，则

$$\int_V [\varepsilon_0 E_0^* \cdot \vec{E} + \mu_0 H_0^* \cdot \vec{H}] \approx \int_V (\varepsilon_0 |E_0|^2 + \mu_0 |H_0|^2) dV = 4W$$

其中， W 为腔中的平均电磁储能。这时微扰公式变成

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\int_{\Delta V} [(\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + (\mu - \mu_0) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV}{4W}$$

下面考察三种情况：

1、若介质放在可忽略电场的区域，即 ΔV 内 $\vec{E}_0 = 0$ ，则

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{-\int_{\Delta V} (\mu - \mu_0) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} dV}{4W}$$

2、若介质放在可忽略磁场的区域，即 ΔV 内 $\vec{H}_0 = 0$ ，则

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\int_{\Delta V} (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} dV}{4W}$$

§ 7.6 谐振腔的微扰理论

3、当腔中微扰介质为有损介质的情况。

此时介质的介电常数和谐振频率均为复数，即

介电常数： $\varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon' - j\varepsilon'')$ ，其中 $\varepsilon' = \varepsilon_r$ ， $\varepsilon'' = \sigma_d/\omega\varepsilon_0 = tg\delta$ 。

谐振频率：微扰前 $\omega'_0 = \omega_0 + j\frac{\omega_0}{2Q_0}$ ，微扰后 $\omega' = \omega + j\frac{\omega}{2Q}$ 。

注释：介质无损时，有 $Q_0 \rightarrow \infty$ ， $E = E_0 e^{j\omega_0 t}$ 。有损时，我们有 $-\frac{dW}{dt} = P_l = \frac{\omega_0 W}{Q_0}$ ，

可得 $W = W_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q_0}}$ ，由于电场正比于储能的平方根，因而有 $E = E_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q_0}} e^{j\omega_0 t}$ 。

将上列各式代入前面简化后的微扰公式中，得

$$\frac{\omega + j\frac{\omega}{2Q} - \omega_0 - j\frac{\omega_0}{2Q_0}}{\omega_0 + j\frac{\omega_0}{2Q_0}} = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon' - 1 - j\varepsilon'') \int_{\Delta V} \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} dV}{4W}$$

§ 7.6 谐振腔的微扰理论

若 Q_0 很大，略去分母中得 $\omega_0/2Q_0$ ，将上式虚、实部分开得

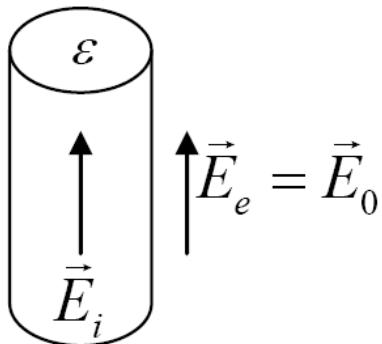
$$\text{实部: } \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\epsilon_0(\epsilon' - 1) \frac{\int_{\Delta V} \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} dV}{4W}; \quad \text{虚部: } \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = \epsilon_0 \epsilon'' \frac{\int_{\Delta V} \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} dV}{2W}$$

由此可见，有损介质介电常数的实部造成了谐振频率的偏移，虚部则引起品质因数的改变。

以上公式为我们提供了一种通过测定 ω 和 ω_0 、 Q 和 Q_0 ，且计算场的积分值，从而得到 ϵ' 和 ϵ'' 。为了便于计算场的积分，放入腔中的介质样品的形状应尽量简单。这在 ΔV 很小的情况下，可用准静态场来代替 ΔV 内的场，使积分的计算简化。

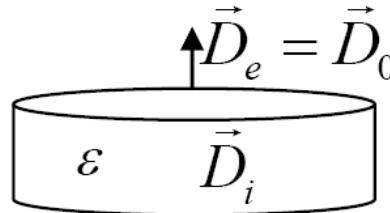
§ 7.6 谐振腔的微扰理论

当样品的主要边界平行于电场时，在边界上有 $\vec{E}_0 = \vec{E}$ ；当样品的主要边界垂直于电场时，在边界上则有 $\vec{D}_0 = \vec{D}$ 。（注释：在介质界面上，若无传导面电流，则磁场的切向分量总是连续的；若无自由面电荷，则电位移矢量的法向分量总是连续的。）



由连续性： $\vec{E}_e = \vec{E}_i$

且 $\vec{E}_e = \vec{E}_0$, $\vec{E}_i = \vec{E}$, 故 $\vec{E} = \vec{E}_0$



由连续性： $\vec{D}_e = \vec{D}_i$

且 $\vec{D}_e = \vec{D}_0$, $\vec{D}_i = \vec{D}$, 故 $\vec{D} = \vec{D}_0$

所以 $\epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon \vec{E}$, $\vec{E}_0 = \epsilon_r \vec{E}$

§ 7.6 谐振腔的微扰理论

三、腔壁形状的微扰

为了讨论腔壁形状变化对谐振频率的影响，可以将腔壁变形部分看成是放

入一块特殊的材料，它的 $\varepsilon_r \rightarrow \infty, \mu_r \rightarrow 0$ 。

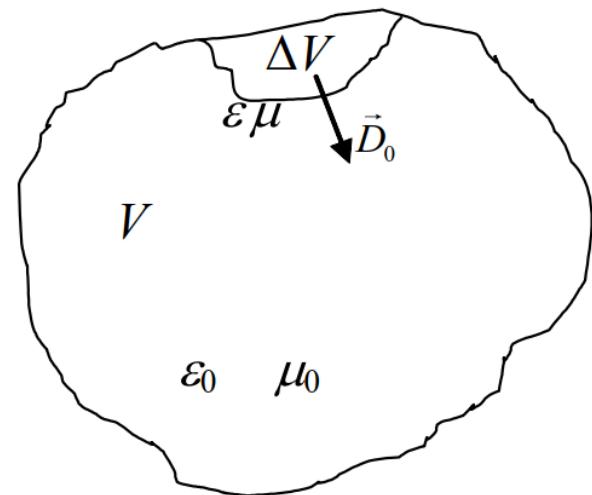
假定在空腔壁上安放一介质，其 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ 、

$\mu = \mu_r \mu_0$ 。由于腔壁上只有法向电场，故 $\vec{D}_0 = \vec{D}$ ，即

$\varepsilon_0 \vec{E}_0 = \varepsilon \vec{E}$ ， $\vec{E}_0 = \varepsilon_r \vec{E}$ 。而在介质边界上切向磁场连续，

即 $\vec{H}_0 = \vec{H}$ ，代入微扰公式后，得

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\int_{\Delta V} \left[\varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) |\vec{E}_0|^2 + \mu_0 (\mu_r - 1) |\vec{H}_0|^2 \right] dV}{4W}$$



§ 7.6 谐振腔的微扰理论

若以上安放的介质为腔壁变形的导体，则由 $\vec{E}_0 = \varepsilon_r \vec{E}$ ，因导体 ΔV 内有

$\vec{E} = 0$ ，而 E_0 为有限，故必有 $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ ；又导体 ΔV 内有 $\mu = 0$ ，且 $\mu = \mu_r \mu_0$ ，而 μ_0 为有限，故必有 $\mu_r \rightarrow 0$ 。这样上式变成

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\int_{\Delta V} \left[\varepsilon_0 |\vec{E}_0|^2 - \mu_0 |\vec{H}_0|^2 \right] dV}{4W} = -\frac{\Delta W_e - \Delta W_m}{4W} = -\frac{\Delta W}{4W}$$

式中 ΔW_e 和 ΔW_m 为 ΔV 内所储存电能和磁能，上式即 腔壁微扰公式。

利用上式，可由腔扰动前后的储能变化来计算频移。如果微扰后使腔中储能变化是 电能大于磁能则 ω 下降，反之则上升。这就是说，若在 电场占优势 的区域将腔壁向内 推入体积 ΔV ，此时电能密度增加，磁能密度可认为不变，结果电能增加，磁能不变，即 $\Delta W > 0$ ，则上式右边小于 0，说明 ω 下降。而在 磁场占优势 的区域将腔壁向内 推入体积 ΔV ，磁能将增加而电能可认为不变，则上式右边大于 0，说明 ω 上升。



本章结束