Лабораторная работа №1(Вариант 10) - Лесун Александр Игоревич, гр.753501

Задание 1. Упростите алгебраическое выражение.

$$\frac{x^3-3x-2}{x^2+40x+400}:\frac{x^4+x^3-3x^2-5x-2}{9x^3-351x^2+3240x+3600}$$

> $simplify\left(\frac{\frac{x^3-3\cdot x-2}{x^2+40\cdot x+400}}{\frac{x^4+x^3-3\,x^2-5\cdot x-2}{9\cdot x^3-351\cdot x^2+3240\cdot x+3600}}\right);$

$$\frac{9\,(x-20)^2}{(x+20)^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Задание 2. Приведите выражение к многочлену стандартного вида.

$$(3x-8)(2x^2+3)(4x+5)$$

> $expand((3\,x-8)\,(2\,x^2+3)\,(4\,x+5));$

$$24\,x^4-34\,x^3-44\,x^2-51\,x-120 \qquad \textbf{(2)}$$

Задание 3. Разложите многочлен на множители.

$$x^4-16x^3+67x^2-64x+252$$

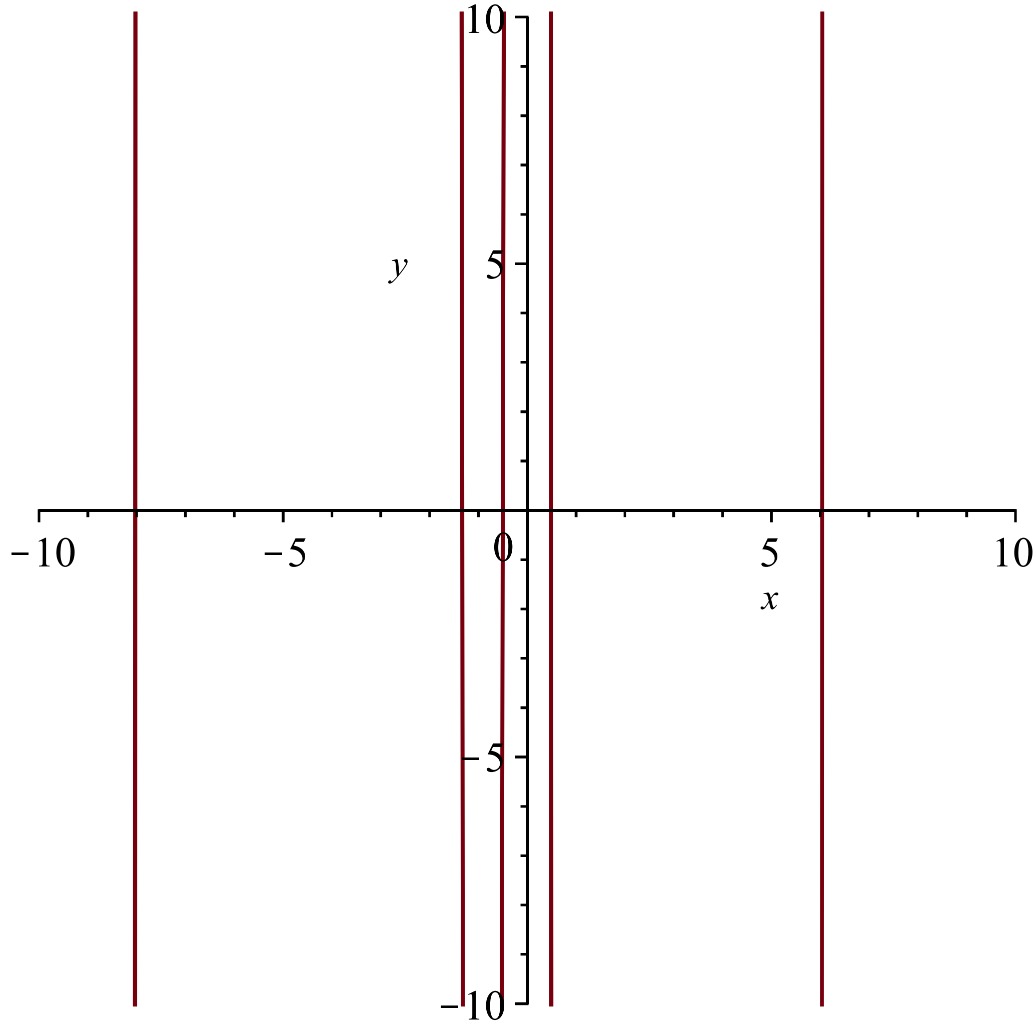
> $factor(x^4-16\,x^3+67\,x^2-64\,x+252);$

$$(x-7)\,(x-9)\,(x^2+4) \qquad \textbf{(3)}$$

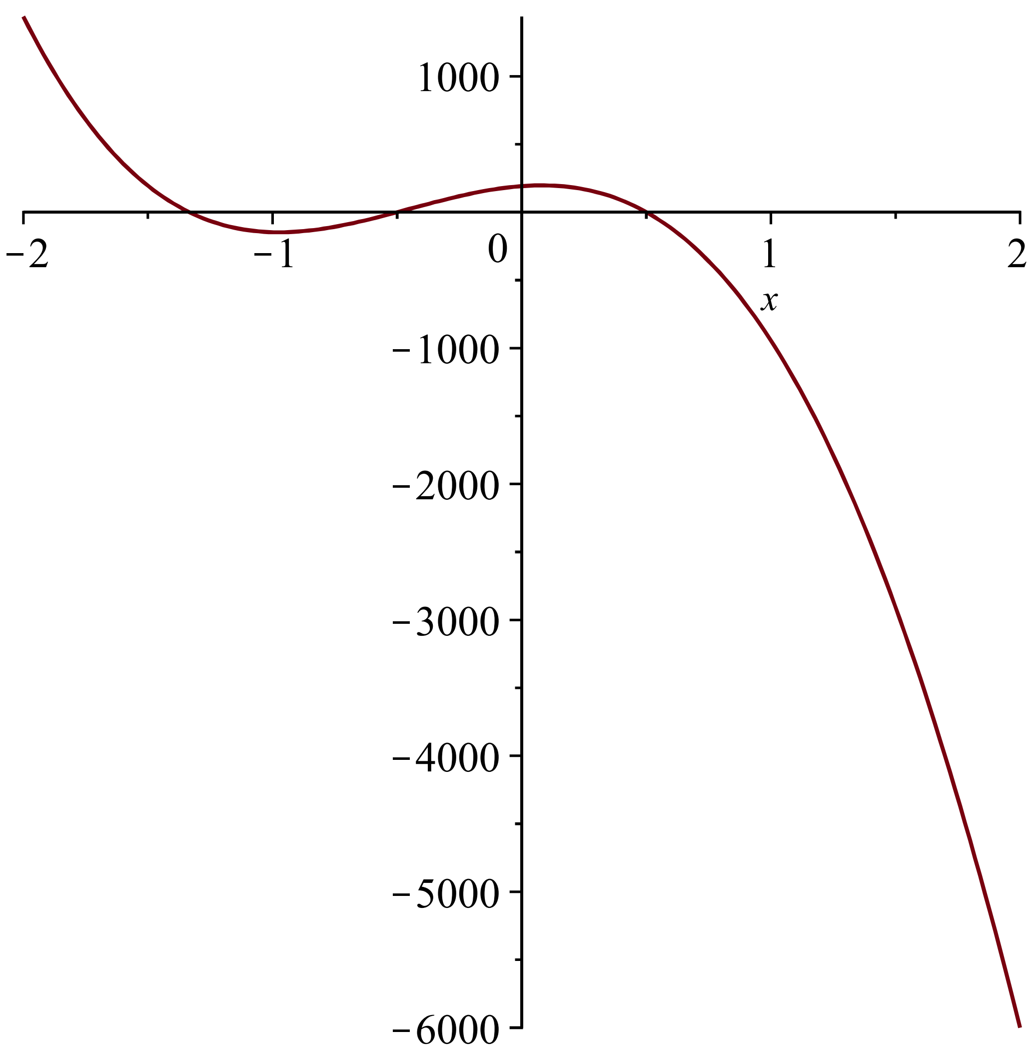
Задание 4. Постройте график многочлена и найдите все его корни.

$$P_5(x)=12x^5+40x^4-547x^3-778x^2+136x+192$$

> $plot(12\,x^5+40\,x^4-547\,x^3-778\,x^2+136\,x+192,\,x=-10..10,\,y=-10..10);$



> $plot(12\,x^5 + 40\,x^4 - 547\,x^3 - 778\,x^2 + 136\,x + 192, x = -2\,..2)$;



> $solve(12\,x^5+40\,x^4-547\,x^3-778\,x^2+136\,x+192=0,x);$

$$6,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{4}{3},\ -8 \qquad (4)$$

Задание 5. Разложите рациональную дробь на сумму простейших дробей.

$$\frac{4x^4+3x^3+2x-5}{(x^2+1)(x-3)^2(x^2-4)}$$

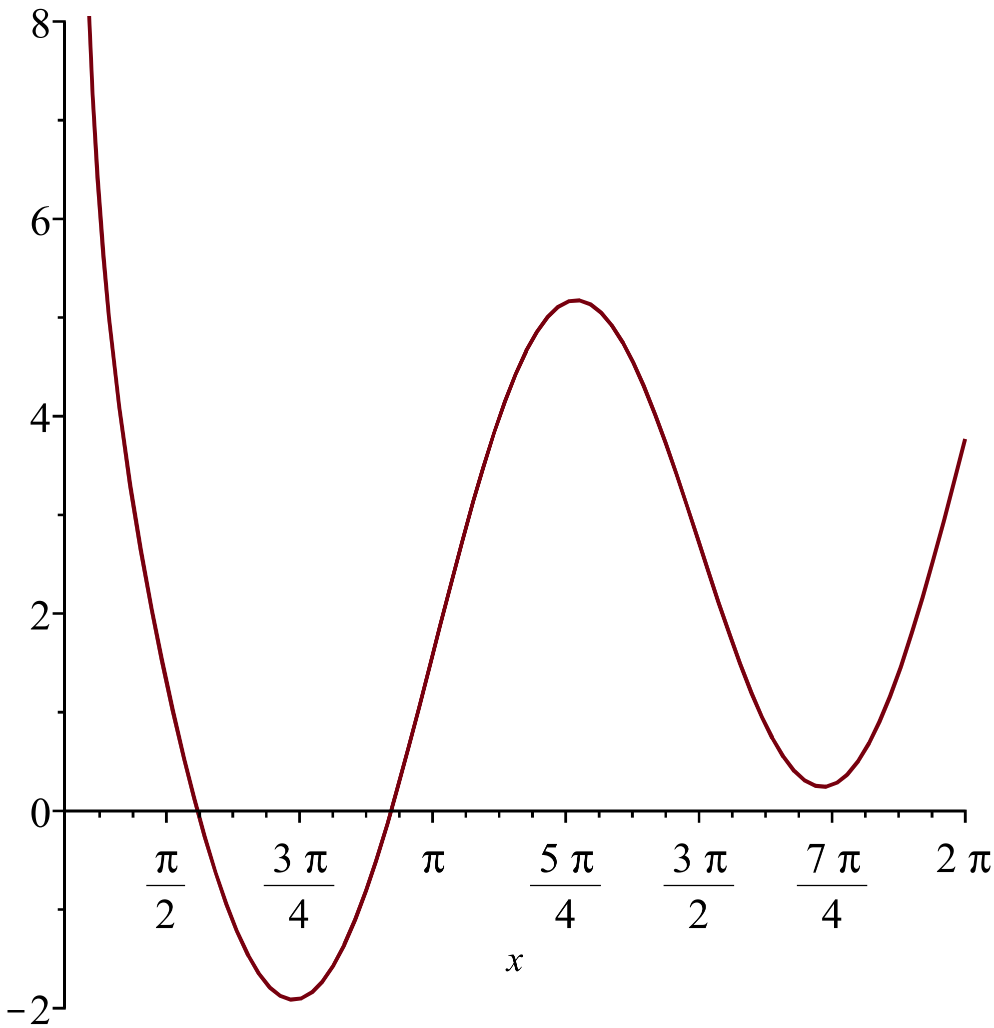
> $convert\left(\frac{4\,x^4+3\,x^3+2\,x-5}{(x^2+1)\,(x-3)^2\,(x^2-4)}, parfrac\right);$

$$-\frac{31}{500\,(x+2)}-\frac{1079}{250\,(x-3)}+\frac{87}{20\,(x-2)}+\frac{7\,x+1}{250\,(x^2+1)}+\frac{203}{25\,(x-3)^2} \qquad (5)$$

Задание 6. Решите графически уравнение и найдите его приближенные корни с точностью до 10^{-5}.

$$\ln^2(x-1)=-3\sin 2x-1$$

> $plot(\ln^2(x-1)+3\cdot\sin(2\cdot x)+1);$



> $evalf(fsolve(\ln^2(x-1) + 3\cdot\sin(2\cdot x) + 1, x), 6);$

$$2.89696 \tag{6}$$

> $evalf(fsolve(\ln^2(x-1) + 3\cdot\sin(2\cdot x) + 1, x = 1..2), 6);$

$$1.75478 \tag{7}$$

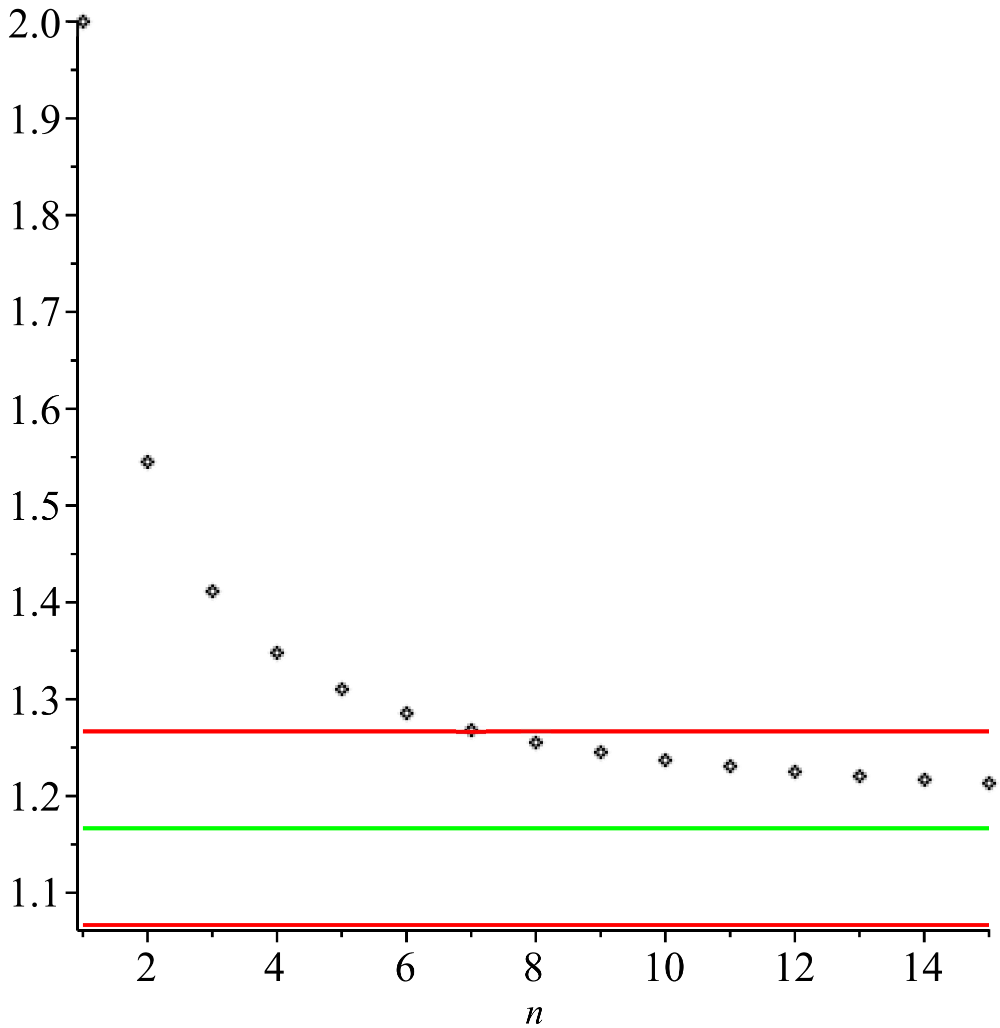
Задание 7. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, определив номер n_ε , начиная с которого все члены последовательности попадут в ε-окрестность точки а. Проил-люстрируйте полученный результат с помощью чертежа в Maple, положив $\varepsilon = 0{,}1$.

$$a_n = \frac{7n+3}{6n-1},\ a = \frac{7}{6}$$

> $y1 := plots[pointplot]\left(\left\{seq\left(\left[n, \frac{7\,n+3}{6\,n-1}\right], n = 1..15\right)\right\}\right):$

$y2 := plot\left(\left[\frac{7}{6} - 0.1, \frac{7}{6}, \frac{7}{6} + 0.1\right], n = 1..15, color = [red, green, red]\right):$

$plots[display](y1, y2);$



> $solve\left(\text{abs}\left(\frac{7\cdot n+3}{6\cdot n-1}-\frac{7}{6}\right)<0.1,\ n\right);$

$$(7.111111111,\ \infty),\ (-\infty,\ -6.777777778) \quad \textbf{(8)}$$

> $n(e)=8;$

$$n(e)=8 \quad \textbf{(9)}$$

Задание 8. Вычислите пределы числовых последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+6n-1}{3n^2-2n+4}\right)^{1-3n}$$

> $Limit\left(\sqrt{n+2}\cdot\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right), n=\text{infinity}\right)=limit\left(\sqrt{n+2}\cdot\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right), n=\text{infinity}\right);$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right)=\frac{7}{2} \quad \textbf{(10)}$$

> $Limit\left(\left(\frac{3\cdot n^2+6\cdot n-1}{3\cdot n^2-2\cdot n+4}\right)^{1-3\cdot n}, n=\text{infinity}\right)=limit\left(\left(\frac{3\cdot n^2+6\cdot n-1}{3\cdot n^2-2\cdot n+4}\right)^{1-3\cdot n}, n=\text{infinity}\right);$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\,n^2+6\,n-1}{3\,n^2-2\,n+4}\right)^{1-3\,n}=\mathrm{e}^{-8} \qquad \textbf{(11)}$$

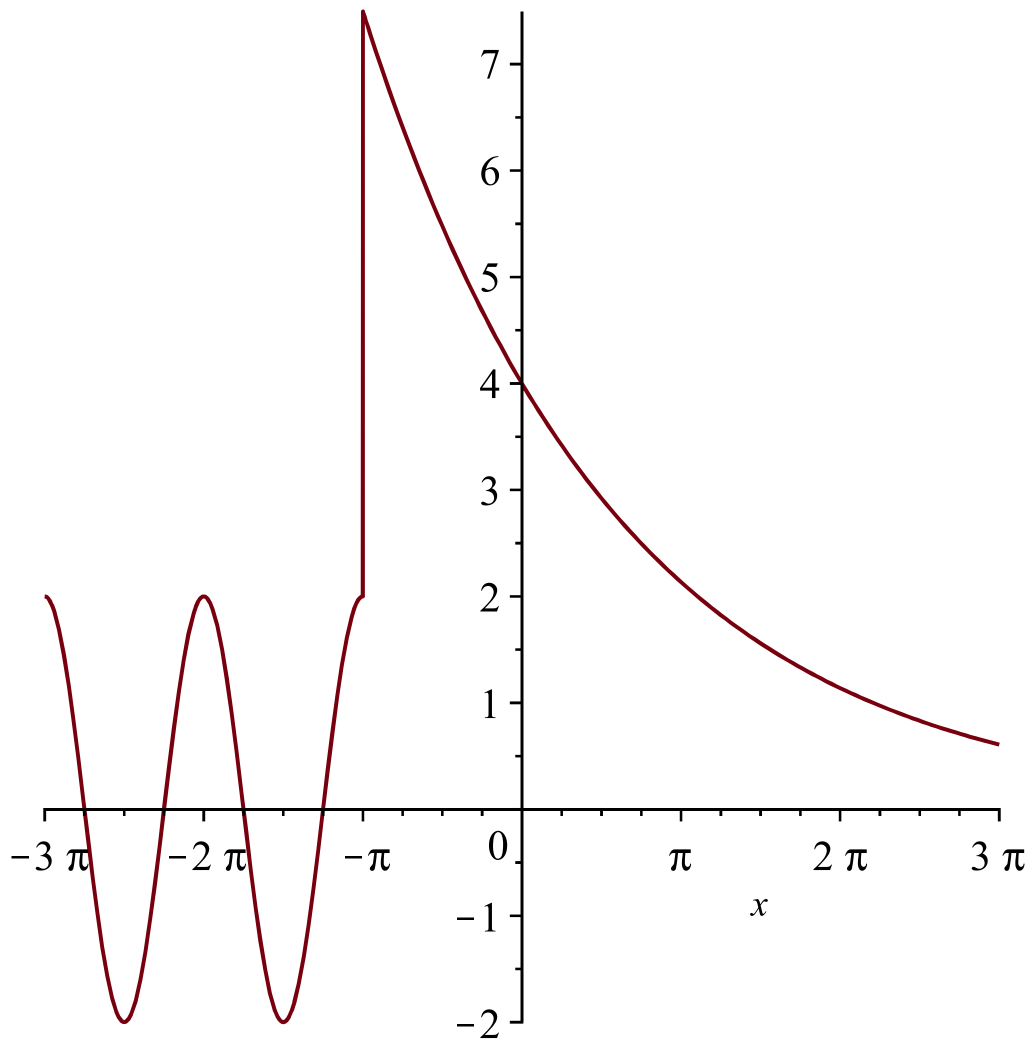
Задание 9. Для заданной кусочно-непрерывной функции выполните следующие действия.
1.Определите ее через функциональный оператор и постройте график.
2.В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.
3.Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.
4.Постройте в одной системе координат графики функции, производной и какой-нибудь первообразной.
5.Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми $x=1,\ x=5,\ y=0$. Сделайте чертеж.

$$y=\begin{cases}2\cos 2x,\ x<-\pi,\\ 4e^{-0,2x},\ x\geq-\pi.\end{cases}$$

> $y:=\begin{cases}2\cdot\cos(2\cdot x) & x<-\text{Pi}\\ 4\cdot\exp(-0.2\cdot x) & x\geq-\text{Pi}\end{cases};$

$$y:=\begin{cases}2\cos(2\,x) & x<-\pi\\ 4\,\mathrm{e}^{-0.2\,x} & -\pi\leq x\end{cases} \qquad \textbf{(12)}$$

> $plot(y, x=-3\cdot\text{Pi}..3\cdot\text{Pi});$



> *discont*(*y*, *x*);

$$\{-\pi\} \tag{13}$$

> *Limit*(*y*, *x* = −Pi, *left*) = *limit*(*y*, *x* = −Pi, *left*);

$$\lim_{x \to (-\pi)-} \begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,\mathrm{e}^{-0.2\,x} & -\pi \le x \end{cases} = 2. \tag{14}$$

> *Limit*(*y*, *x* = −Pi, *right*) = *limit*(*y*, *x* = −Pi, *right*);

$$\lim_{x \to (-\pi)+} \begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,\mathrm{e}^{-0.2\,x} & -\pi \le x \end{cases} = 7.497824352 \tag{15}$$

> *Limit*(*y*, *x* = infinity, *left*) = *limit*(*y*, *x* = infinity, *left*);

$$\lim_{x \to \infty-} \begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,\mathrm{e}^{-0.2\,x} & -\pi \le x \end{cases} = 0. \tag{16}$$

> *Limit*(*y*, *x* = −infinity, *right*) = *limit*(*y*, *x* = −infinity, *right*);

(17)

$$\lim_{x \to (-\infty)+} \begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,e^{-0.2x} & -\pi \le x \end{cases} = -2..2. \tag{17}$$

> *Diff*(y, x) = *diff*(y, x);

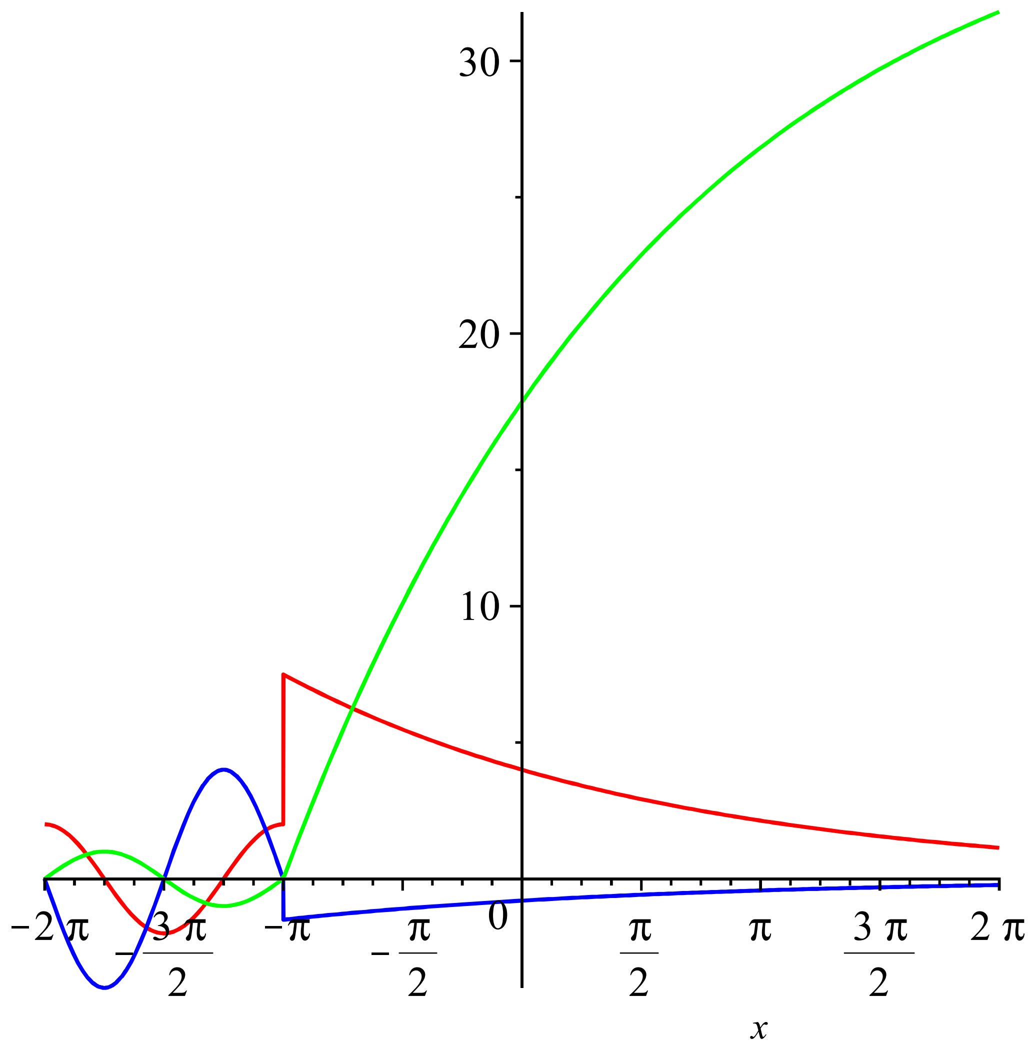
$$\frac{d}{dx} \begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,e^{-0.2x} & -\pi \le x \end{cases} = \begin{cases} -4.\sin(2.x) & x < -3.141592654 \\ \text{Float(undefined)} & x = -3.141592654 \\ -0.8000000000\,e^{-0.2000000000x} & -3.141592654 < x \end{cases} \tag{18}$$

> *Int*(y, x) = *int*(y, x);

$$\int \left(\begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,e^{-0.2x} & -\pi \le x \end{cases} \right) dx \tag{19}$$

$$= \begin{cases} \sin(2.x) & x \le -3.141592654 \\ -20.\,e^{-0.2000000000x} + 37.48912175 & -3.141592654 < x \end{cases}$$

> *plot*$([y, \textit{diff}(y, x), \textit{int}(y, x)]$, *color* = [*red*, *blue*, *green*]);



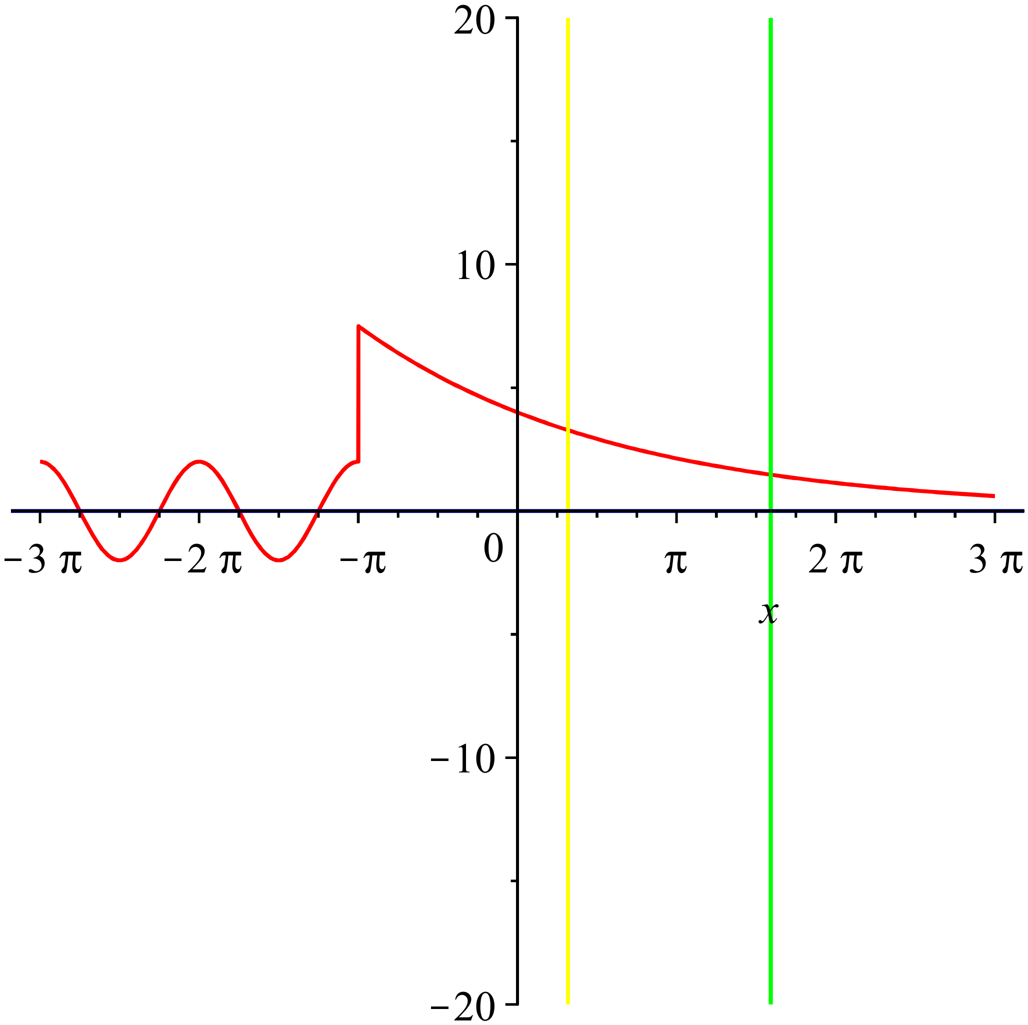
$> m1 := plot(y, x = -3\cdot \mathrm{Pi}..3\cdot \mathrm{Pi}, color = red):$

$m2 := plot([1, t, t = -20..20], color = yellow):$

$m3 := plot([5, t, t = -20..20], color = green):$

$m4 := plot(0, color = blue):$

$> with(plots) : display([m1, m2, m3, m4]);$



$> S = int(y, x = 1..5);$

$$S := 9.017026238 \qquad (20)$$

Задание 10. Постройте кривые на плоскости. Для кривой второго порядка (пункт 2) найдите каноническое уравнение с помощью ортонормированного ба-зиса из собственных векторов квадратичной формы.

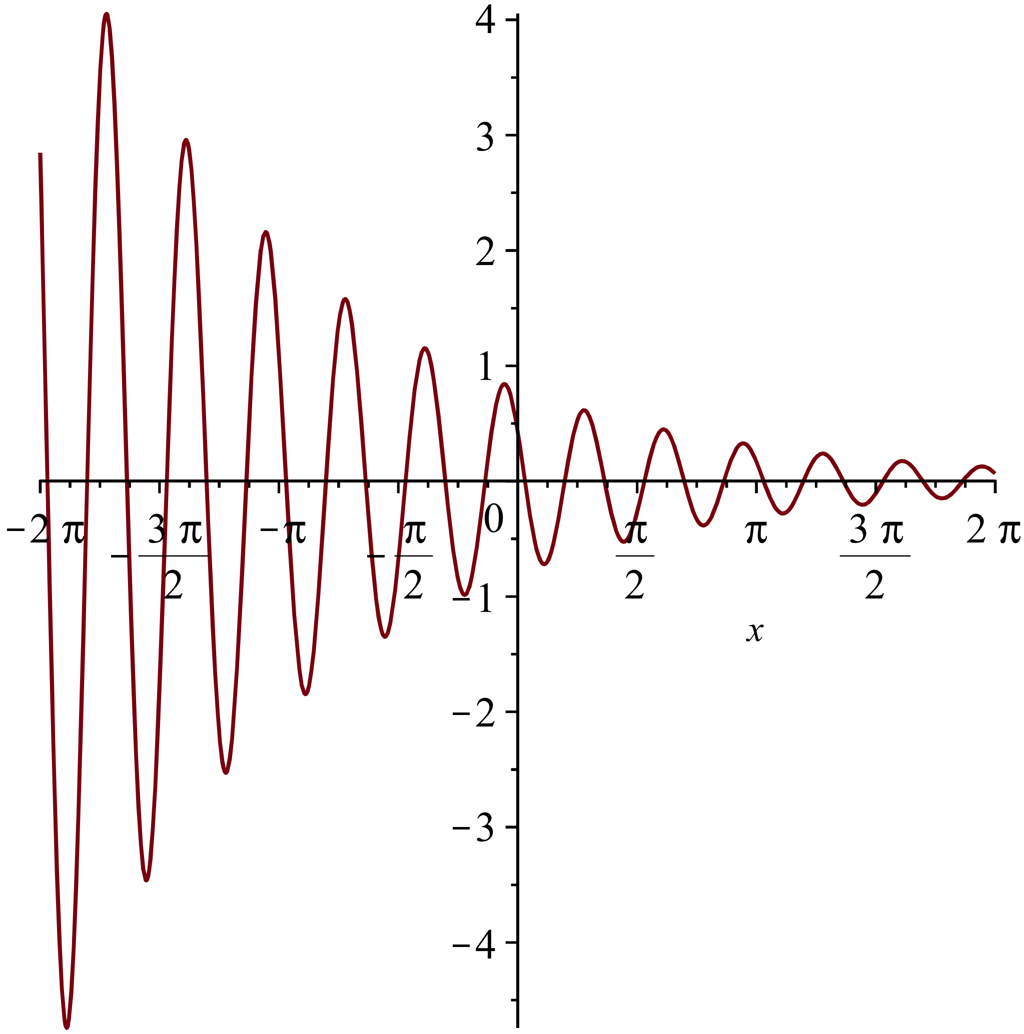
$$y = 0,8e^{-0,3x}\cos(6x+1)$$

$$4x^2 + 16xy + 15y^2 - 8x - 22y - 5 = 0$$

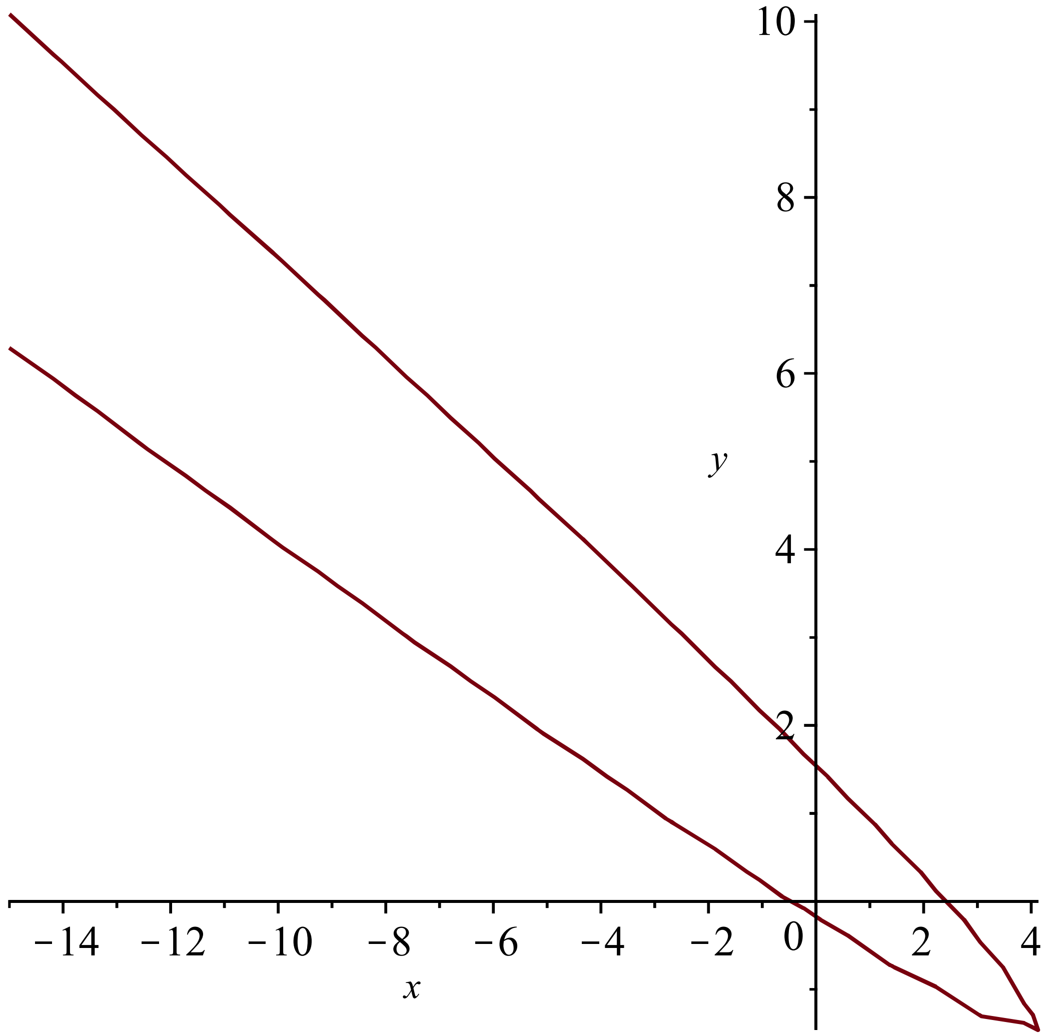
$$\begin{cases} x = 2\cos 2t, \\ y = 2\cos^2 t; \end{cases}$$

$$\rho = 3 + 2\cos(3\varphi + \frac{\pi}{4}).$$

> $plot(0.8 \cdot \exp(-0.3 \cdot x) \cdot \cos(6 \cdot x + 1));$



> $y := 'y':$
> $plots[implicitplot](4\,x^2 + 16\,x\,y + 16\,y^2 - 8\,x - 22\,y - 5 = 0, x = -15\,..15, y = -15\,..15);$



> $A := Matrix([[4, 8], [8, 16]]);$

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \tag{21}$$

> $LinearAlgebra[Eigenvectors](A);$

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

> $u := LinearAlgebra[Normalize]\left(\left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle, 2\right);$

$$u := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \tag{23}$$

> $v := LinearAlgebra[Normalize](\langle -2, 1 \rangle, 2);$

$$v := \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad \textbf{(24)}$$

> $X := x \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right) + y \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} \right);$

$$X := \frac{x\sqrt{5}}{5} - \frac{2\,y\sqrt{5}}{5} \quad \textbf{(25)}$$

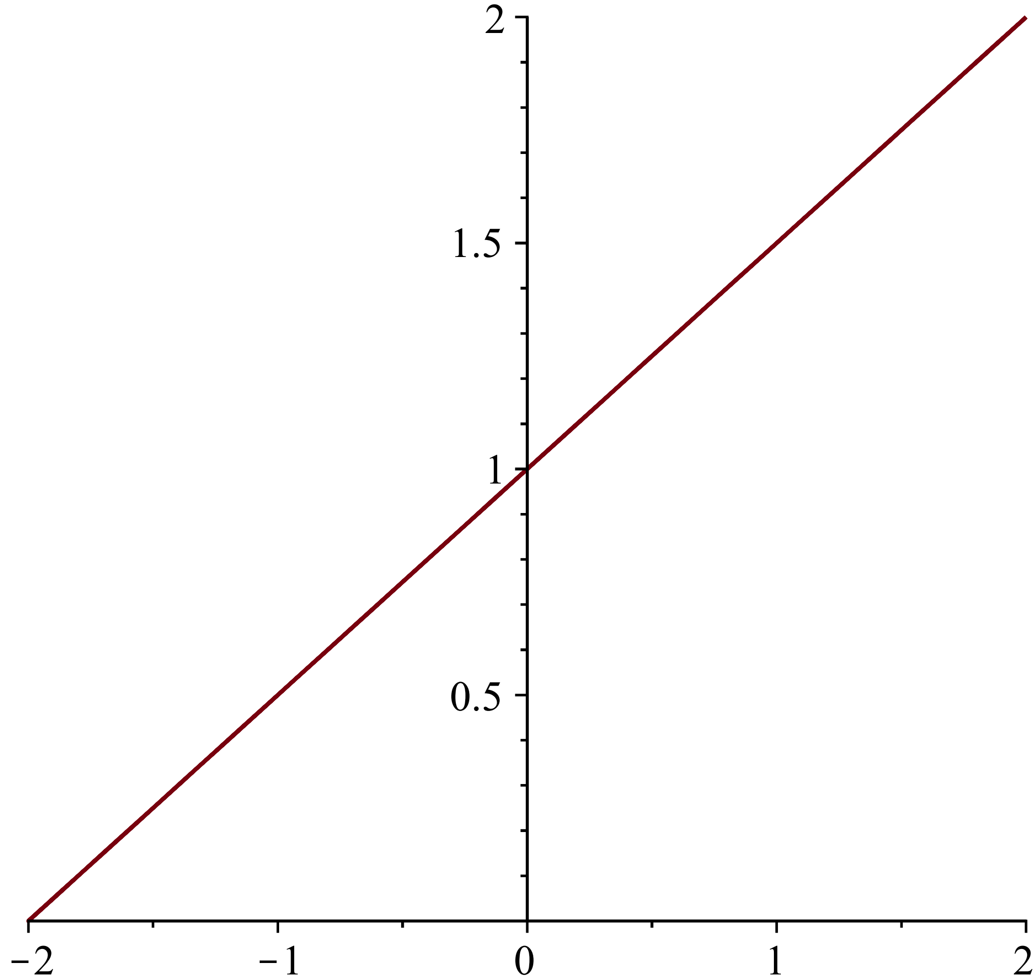
> $Y := x \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) + y \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right);$

$$Y := \frac{2\,x\sqrt{5}}{5} + \frac{y\sqrt{5}}{5} \quad \textbf{(26)}$$

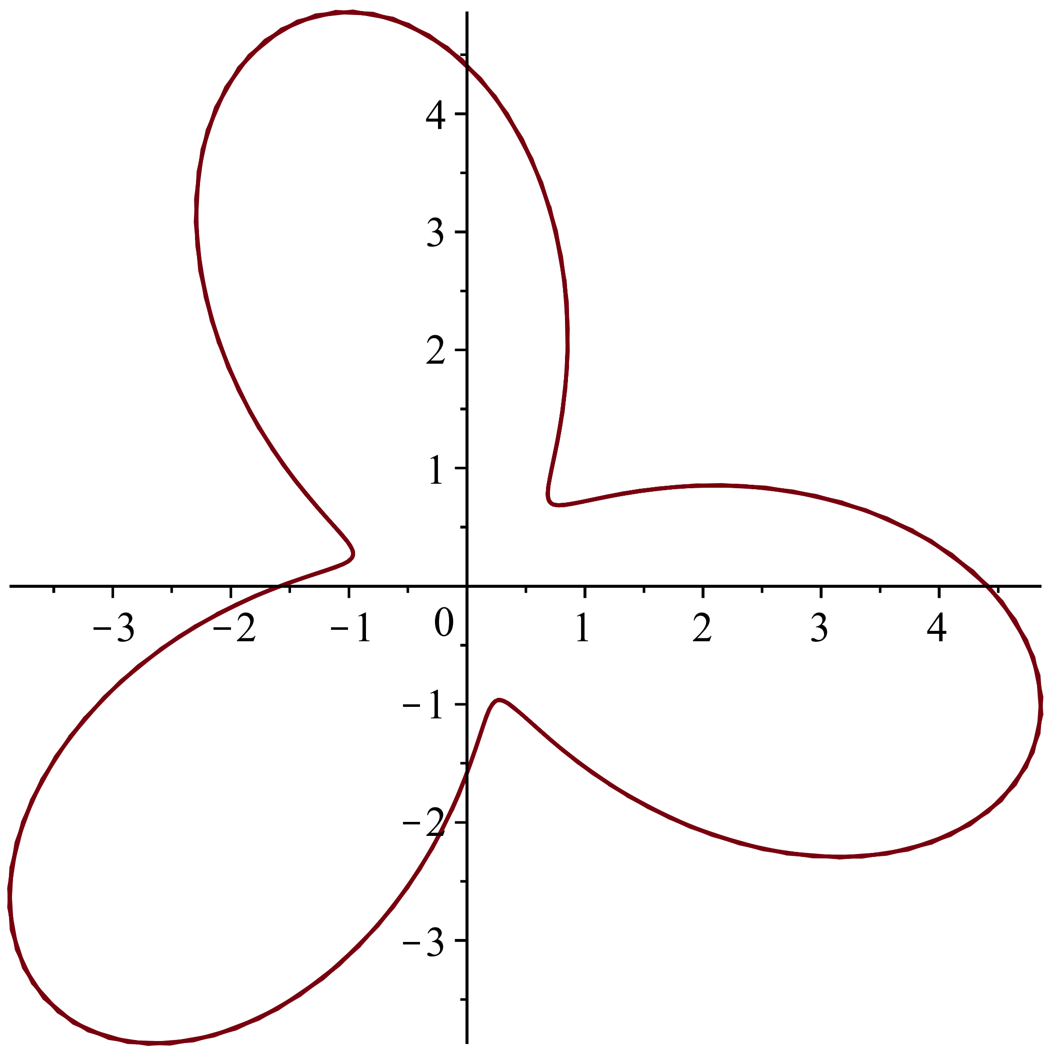
> $expand(4 \cdot X^2 + 16 \cdot X \cdot Y + 16 \cdot Y^2 - 8 \cdot X - 22 \cdot Y - 5 = 0);$

$$20\,x^2 - \frac{52\,x\sqrt{5}}{5} - \frac{6\,y\sqrt{5}}{5} - 5 = 0 \quad \textbf{(27)}$$

> $plot([2 \cdot \cos(2 \cdot t), 2 \cdot \cos^2(t), t = 0 ..2 \cdot \mathrm{Pi}]);$



> $plot\left(3+2\cdot\cos\left(3\cdot x+\frac{\mathrm{Pi}}{4}\right), coords=\mathrm{polar}\right);$



4
3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
−1
−2
−3

>