



FHS/Cyberingeniørskolen
Matematiske Metoder 2

Prosjekt 1

Gruppeprosjekt

BØLGELIGNINGEN

ING2501 MATEMATISKE METODER 2

AV

Gruppe 2

KLASSE: VING 76

PROSJEKTGRUPPE:

**JOSTEIN BARDAL
SANDER GODARD
REBEKKA SVENDSEN
JOHAN VATN
MARIA WELLE**

DATO: 28/09-2023 TIL 13/10-2023

Sammendrag

Denne rapporten omhandler bølgeligningen, og har i tillegg tatt for seg fourierrekker og annen teori som er relevant for bølgeligningen. Bølgeligningen er blitt løst der utgangspunktet er en mekanisk bølge, en streng festet i to punkter. Rapporten inneholder bilder og simulasjoner som er forklarende for hvordan bølgeligningen fungerer og hvordan det ser ut.. Prinsippene bølgeligningen består av er med på å beskrive en del fenomener i vår verden. Temaet i denne rapporten er også relevant for videre fag på dette studiet.

Innhold

1 Innledning.....	1
2 Teori.....	2
2.1 Bølgeteori.....	2
2.2 Bølgeligningen.....	2
2.3 Fourierrekker.....	3
2.4 Differensialligninger.....	3
2.5 Odde og like funksjoner.....	4
2.6 Enhetssirkelen.....	5
2.7 Superposisjonsprinsippet.....	6
3 Utledning av løsningen til bølgeligningen.....	8
3.1 Forklaring av bølgeligningen.....	12
4 Løsninger med initialbetingelser.....	14
4.1 Case 1.....	14
4.2 Case 2.....	16
4.3 Case 3.....	17
5 Sluttord.....	19
6 Litteraturliste.....	20
7 Vedlegg.....	21

1 Innledning

Denne oppgaven er skrevet i forbindelse med temaet fourierrekker, der hensikten er å bygge videre på forståelsen av temaet. Dette skal gjøres ved å studere bølgeligningen. Bølgeligningen er en andre-ordens lineær partiell differensialligning som viser til hvordan en bølge beveger seg i tid og rom. Bølgeligningen kan brukes for å beskrive en rekke fenomener, deriblant strengteori, lysbølger og lydbølger. Denne oppgaven tar utgangspunkt i at bølgen forekommer på en vibrerende streng som er festet mellom to punkter, altså mekaniske bølger. Dermed vil rapporten kun forholde seg til bølger i én dimensjon. Det blir først presentert relevant teori, deretter utledning av den generelle løsningen til bølgeligningen, og avslutter med noen eksempler som tar utgangspunkt i løsningen som er utledet.

2 Teori

2.1 Bølgeteori

For å bygge en bedre forståelse av hva bølgeligningen uttrykker, er det viktig å vite hva en bølge er. SNL har definisjonen “Bølger eller bølgebevegelser er svingninger som brer seg fra sted til sted.” [1]. Det finnes flere forskjellige type bølger; mekaniske bølger, elektromagnetiske bølger, og tvers- og langsølger er noen eksempler.

Denne oppgaven skal ta utgangspunkt i en mekanisk bølge. Det vil dannes en eller flere mekaniske bølger dersom det festes en streng i begge ender og setter den i bevegelse. Stoffet strengen består av har små partikler, og det er de elastiske kreftene mellom disse partiklene som gjør at bevegelsen blir overført til nabopartiklene. Denne overføringen gjør at bevegelsen forplanter seg, og dette skaper det som kalles en bølge [1].

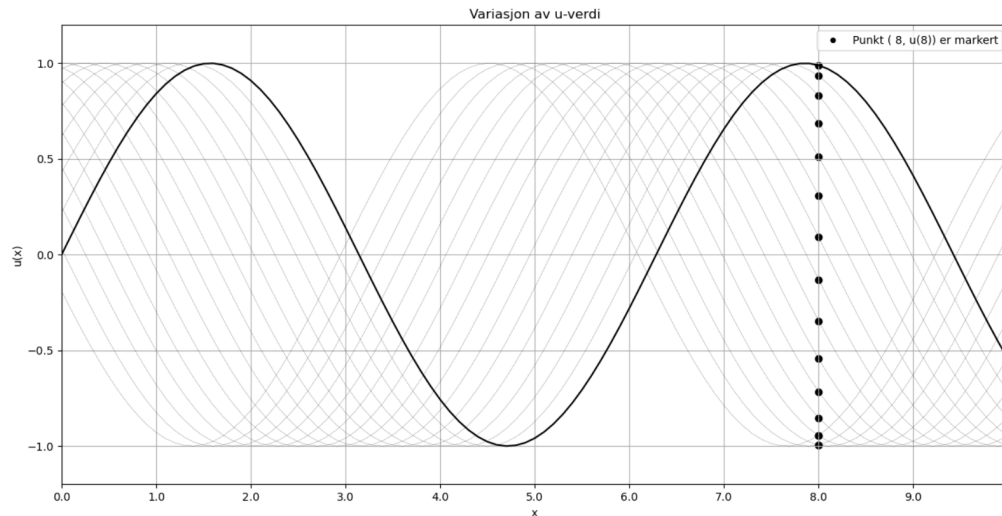
Hvordan bølgene brer seg utover er et resultat av en rekke ytre faktorer, samt om det er tvers- eller langsølger. En tversbølge er der partiklene vil bevege seg vertikalt, det vil si opp og ned på utbredelsesretningen, eksempelvis elektromagnetiske bølger. I en langsølger derimot vil partiklene bevege seg i samme retning som bølgen går. Et eksempel på dette kan være lydbølger.

2.2 Bølgeligningen

Bølgeligningen vil gi en matematisk beskrivelse av hvordan en bølge vil bevege seg i forhold til naturens lover, altså hvordan en bølge vil se ut. Bølgeligningen er en 2. ordens lineær partiell differensialligning. Det vil si at den er derivert med hensyn på bestemte variabler og at derivasjonen blir gjennomført to ganger. Bølgeligningen er formulert slik:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} c^2 = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

I bølgeligningen finnes det flere variabler. Disse variablene er u , t , x og c . ∂ er tegnet for partiellderiverte. I ligningen står u for avstanden fra likevektslinjen til et punkt i det todimensjonale planet. Gitt et punkt med statisk x -verdi, som følger bølgen i bevegelse, vil u -verdien følge punktets distanse fra likevektslinjen. Dette er vist i figur 1. Variabelen t viser til hvordan bølgen ser ut over tid. Variabelen x viser til posisjonen til bølgen. Variabelen c justerer hastigheten på bølgen. Det vil si distansen bølgen beveger seg per tid.



Figur 1. Bildet viser variasjonen i u -verdien ved endring i t -verdien ved en enkel bølge

Differensialligningen er av 2. orden, dette er fordi ligningen inneholder den andrederiverte. Ligningen er partiell fordi funksjonen u inneholder to variabler. Bølgeligningen er også lineær, og det er fordi ligningen ikke består av u^2 , u^3 eller $\log(u)$ og heller ikke noe andre ikke-lineære trekk.

2.3 Fourierrekker

Fourierrekker, også kjent som trigonometriske rekker, er matematiske rekker der leddene inneholder cosinus- og sinusfunksjoner [5]. De kan skrives med summetegn:

$$\frac{1}{2} A_0 \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(x) + B_n \sin(x))$$

De kan også skrives på følgende form:

$$\frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos(x) + A_2 \cos(2x) + \dots + B_1 \sin(x) + B_2 \sin(2x) + \dots$$

Fourierrekker bygger på ideen om at selv komplekse funksjoner kan dekomponeres i en uendelig serie av enkle trigonometriske funksjoner. Dette gjør det mulig å analysere og forstå sammensatte periodiske fenomener, for eksempel lydsignaler, elektriske bølger og temperaturfordeling ved å bryte dem ned i deres grunnleggende frekvenskomponenter. Desto lenger ut i rekken, desto kortere perioder. Derfor vil summen nærme seg tilnærmet lik funksjonsuttrykket ettersom rekken går mot uendelig.

2.4 Differensialligninger

Differensialligninger er ligninger som beskriver opptil flere funksjoner og de deriverte av disse funksjonene. Løsningene på disse ligningene er ikke et tall, men heller funksjoner. Dette er nyttig fordi det beskriver sammenhengen mellom funksjoner og endringen i funksjonene.

Det deles også inn i to kategorier av differensialligninger; partielle og ordinære. De partielle differensialligningene inneholder funksjoner som er avhengig av mer enn en variabel, mens de ordinære kun er avhengig av én variabel. De ordinære kan igjen deles inn i forskjellige typer ligninger, avhengig av hvilken orden de har[6].

2.5 Odde og like funksjoner

Funksjoner kan defineres til å være enten odde, like eller ingen av dem. En like funksjon er symmetrisk om andreaksen. En odde funksjon er symmetrisk om origo. Det som avgjør om en funksjon er like eller odde er kravet vist nedenfor.

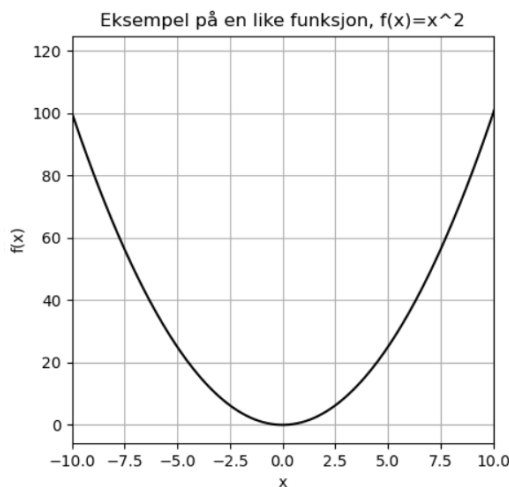
Kravet for en like funksjon er at:

$$f(-t) = f(t)$$

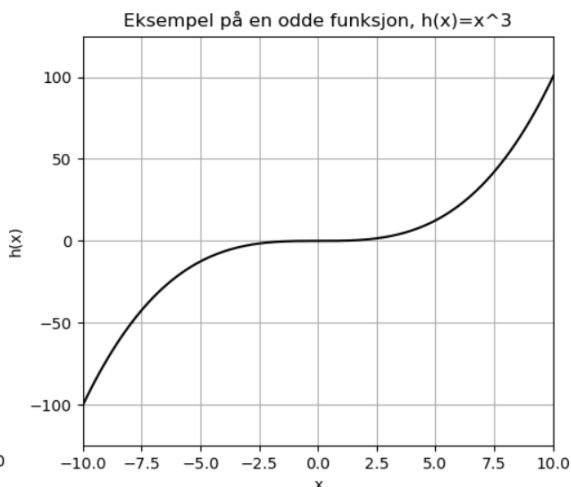
Kravet for en odde funksjon er:

$$-f(t) = f(-t)$$

Under vises et eksempel på en odde og en like funksjon.



Figur 2.



Figur 3.

Fourierrekken til en periodisk funksjon $f(t)$ kan skrives slik som vist under

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Hvorav fourierkoeffisientene til funksjonen da vil bli

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

I de tilfellene der Fourierrekken til en odde periodisk- eller en like periodisk funksjon skal benyttes, kan Fourierkoeffisientene forkortes slik det er vist under [6].

Like funksjoner ser slik ut:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) dt$$

Der Fourierkoeffisientene blir:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = 0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

En odde funksjon vil se slik ut:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) dt$$

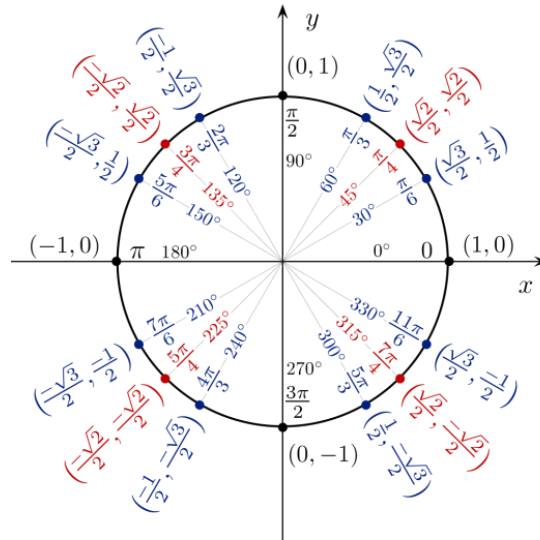
Og Fourierkoeffisientene vil være:

$$a_n = 0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

2.6 Enhetssirkelen

For å beregne trigonometriske funksjoner som cosinus, sinus og tangens til vinkler på over 90° kan enhetssirkelen benyttes. Enhetssirkelen er en sirkel i et todimensjonalt koordinatsystem med en radius på 1, og sentrum i origo $O = (0,0)$. Settes et punkt P på enhetssirkelen vil vinkelen mellom x -aksen og linje OP være θ , der koordinatene til P vil være $(\cos \theta, \sin \theta)$. Figur 4 viser enhetssirkelen med vinkel i grader og pi π , og tilsvarende koordinater for punktene på sirkelen. x -koordinatene samsvarer med cosinus, og y -koordinatene med sinus av vinkelen. Dette er en essensiell del av sinus og cosinus funksjoner som legger grunnlaget for fourierrekker.



Figur 4. Enhetssirkelen med grader og radianer [7]

2.7 Superposisjonsprinsippet

Superposisjonsprinsippet sier at i et punkt hvor to bølger treffer hverandre, vil det dannes en ny bølge som er summen av bølgene. Bølgeligningen sier noe om hvordan bølger kan bevege seg, og gjelder for alle bølger. Det betyr at alle verdier for $u(x,t)$ er lineære. Verdier av $u(x,t)$ kan derfor summeres og resultatet vil fortsatt bli en løsning av bølgeligningen. Dette er et helt grunnleggende prinsipp for hvordan bølger oppfører seg. Det medfører at mye mellomregninger kan unngås når det studeres hvordan ulike bølger påvirker hverandre. Bølgeligningen kan skrives med to ulike bølger: $F(x)$ og $G(t)$. Summen av Fourierrekken er også en bølge som oppfyller superposisjonsprinsippet i bølgeligningen [3].

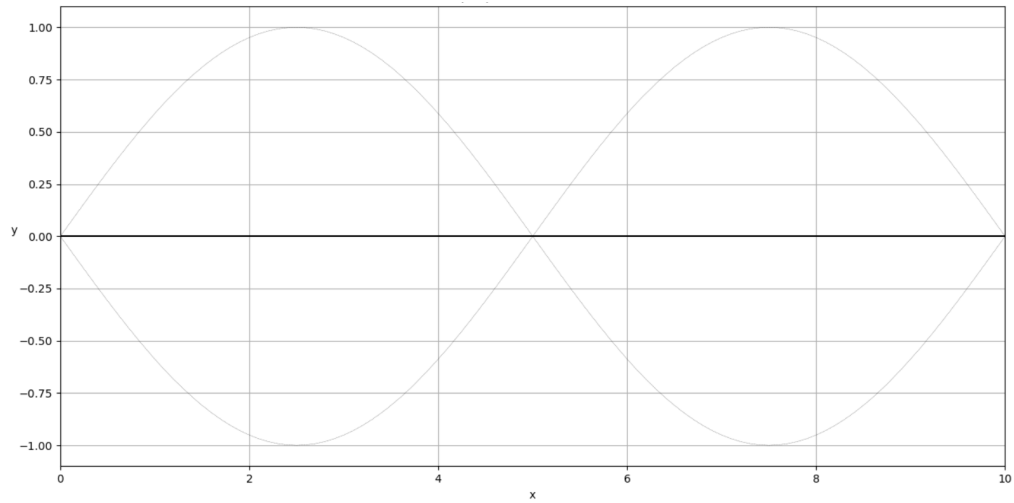
Gitt et scenario hvor u_1 og u_2 er to vilkårlige bølger i det endimensjonale rommet som skapes i to ulike posisjoner på en streng. Tiden bølgen har beveget seg, settes som t . x settes horisontalt langs strengens bevegelsesretning, og u vertikalt langs posisjonsvektoren. Ved punktet der bølgene støter sammen dannes det en ny bølge. Verdien til den nye bølgen u i dette punktet vil bli:

$$u_1 + u_2 = u_{tot}$$

Om bølgene er på hver sin side av x -aksen vil det forekomme et spesialtilfelle kalt destruktiv interferens [2]. Det betyr at i et punkt vil u_1 og u_2 nulle hverandre ut. Dette er vist i figur 5.

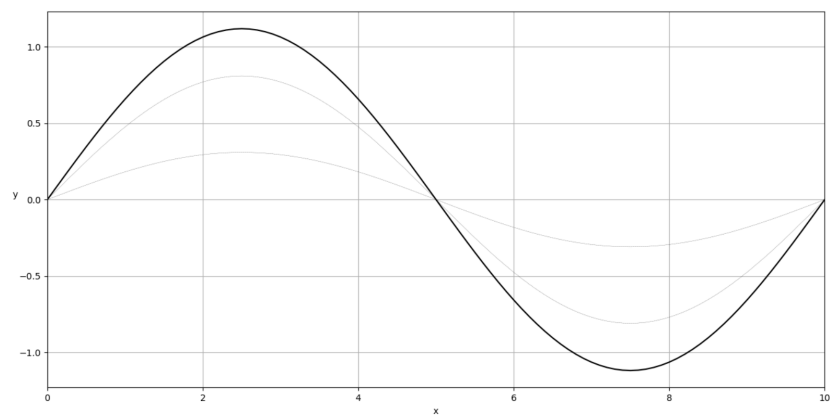
$$u_1 + u_2 = 0 = u_{tot}$$

I figur 5 er u_1 og u_2 representert med hver sin tynn linje og u_{tot} er representert med den tykkere linjen.



Figur 5. Eksempel på destruktiv interferens

I tilfellet i figur 6 der begge bølgene befinner seg på samme side av x -aksen vil det oppstå en ny bølge som har størrelse på summen til de originale bølgene. Dette kalles konstruktiv interferens [2]. I figur 6 er u_1 og u_2 representert med hver sin tynne linje og u_{tot} er representert ved den tykkere linjen.



Figur 6. Eksempel på konstruktiv interferens

3 Utledning av løsningen til bølgeligningen

I denne rapporten er det tatt utgangspunkt i at bølgeligningen skal formidle bølgen til en streng som er festet i to punkter, der variablene er et uttrykk for tid og rom.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} c^2 = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Dersom denne partielle differensialligningen løses med initialbetingelser, vil det ende opp i et uttrykk for u som beskriver hvordan bølgen beveger seg.

Randkravene er krav som vil være konstante uansett hvordan strengen beveger seg. Kravene gjelder ved disse fysiske forutsetningene; en streng i et endimensjonalt rom, ingen gravitasjonskraft, og kun bevegelse langs y -aksen. I konteksten av en streng festet i endepunktene vil følgende randkrav kunne defineres:

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 0$$

Initialbetingelsene til den mekaniske bølgen vil gi et uttrykk for hvordan strengen dras før tiden begynner, det uttrykket tilsvarer funksjonen $f(x)$. Altså posisjonen kan forhåndsbestemmes.

$$u(x, 0) = f(x)$$

Når posisjonsuttrykket over deriveres med hensyn på tiden, vil det resultere i et uttrykk for hastigheten til strengen, representert som $g(t)$. Dermed blir den siste initialbetingelsen:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(t)$$

Den valgte metoden for å løse denne partielle differensialligninger er ved separasjon av parametre. Utsvingningen til en streng kan uttrykkes som et produkt av tiden og posisjonen, og dermed blir bølgeligningen:

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

Settes dette uttrykket for $u(x,t)$ inn i bølgeligningen, vil den se slik ut

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

Deretter deles ligningen på

$$c^2 F(x)G(t)$$

Dette gir resultatet vist under

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}$$

Dette uttrykket skal være lik en konstant k , fordi x og t skal kunne varieres uavhengig av hverandre. Det vil si fordi den ene siden F kun er avhengig av x og G er kun avhengig av tiden t . Siden disse er like hverandre må forholdet mellom dem være konstant. Dermed kan uttrykket settes lik en konstant k .

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = -k, \quad k > 0$$

Dette gir differensialligningene nedenfor

$$\begin{aligned} \frac{F''(x)}{F(x)} &= -k \Rightarrow F''(x) + kF(x) = 0 \\ \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} &= -k \Rightarrow G''(t) + kc^2 G(t) = 0 \end{aligned}$$

Deretter løses differensialligningene for F og G , hvorav konstanten k kun kan være negativ. Nedenfor vises de forskjellige tilfellene for k ; $k = 0$, $k > 0$, og $k < 0$, der det også forklares hvorfor k må være negativ. Starter med å løse for

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

Under undersøkes alle verdier k kan ha, og det forklarer hvorfor to av tilfellene ikke kan brukes videre. Differensialligningen for F antas at kan uttrykkes som :

$$\begin{aligned} F(x) &= Ce^{rx} \\ F''(x) &= r^2 Ce^{rx} \end{aligned}$$

Dette gir:

$$F''(x) + kF(x) = r^2 Ce^{rx} + kCe^{rx} = 0$$

Deretter faktoriseres ligningen, som gir:

$$Ce^{rx}(r^2 + k) = 0$$

Siden Ce^{rx} aldri kan være 0, gir det at:

$$r^2 + k = 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{-k} \Rightarrow r = \pm i\sqrt{k}$$

Case $k = 0$

I det tilfellet der $k = 0$, blir $r = 0$, og $F(x)$ kan uttrykkes ved den generelle løsningen

$$F(x) = Ax + B$$

Der A og B er konstanter som kan bestemmes ved hjelp av initialbetingelser. Når randkravet $F(0) = 0$ og $F(L) = 0$ undersøkes, gir det

$$F(0) = A * 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$F(L) = AL + B \Rightarrow AL + 0 = 0 \Rightarrow AL = 0$$

Dette gir den trivielle løsningen $u(x, t) = 0$ for alle verdier av x og t , og k kan dermed ikke være 0.

Case $k = p^2 > 0$

I det tilfellet der $k \neq 0$ kan $F(x)$ kan uttrykkes ved den generelle løsningen:

$$A \cos(px) + B \sin(px) = 0$$

Den komplekse eksponentialfunksjonen (eulers formel)

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

kan da brukes for å omforme $\sin(px)$.

$$\sin(px) = \frac{1}{2i} (e^{ipx} - e^{-ipx})$$

Dette gir:

$$\begin{aligned} F(x) &= A \cos(px) + B \frac{1}{2i} (e^{ipx} - e^{-ipx}) \\ \Rightarrow F(x) &= A \cos(px) + C_1 e^{ipx} + C_2 e^{-ipx} \end{aligned}$$

$F(x)$ kan da skrives på formen:

$$F(x) = A e^{px} + B e^{-px}$$

Videre undersøkes det i forhold til randkravene:

$$\begin{aligned} F(0) &= A + B = 0 \\ A &= -B = C \\ F(L) &= A e^{pL} + B e^{-pL} = 0 \\ F(L) &= C e^{pL} + (-C) e^{-pL} = 0 \\ F(L) &= C(e^{pL} - e^{-pL}) = 0 \end{aligned}$$

Det betyr at C må være lik 0 fordi e ikke kan bli 0. Dette fører til den trivielle løsningen $u(x, t) = 0$ for alle x og t .

Case $k = -p^2 > 0$

I det tilfellet der $k \neq 0$ kan $F(x)$ kan uttrykkes ved den generelle løsningen:

$$F(x) = A \cos(px) + B \sin(px)$$

Deretter sjekkes den generelle løsningen opp mot randkravene:

$$\begin{aligned} F(0) &= A \cos(p * 0) + B \sin(p * 0) = A = 0 \\ F(L) &= A \cos(pL) + B \sin(pL) = 0 \end{aligned}$$

Siden $A = 0$ så blir:

$$F(L) = B \sin(pL) = 0$$

$B \neq 0$ fordi da vil $u(x, t) = 0$ for alle x og t . Dermed må $\sin(pL) = 0$. For å få $\sin(pL) = 0$, så må $pL = n\pi$, der n er et heltall.

$$p = \frac{n\pi}{L}$$

Dette gir et uttrykk for $F(x)$ som vist under, der det både er tatt hensyn til intitsialbetingelsene og randkravene.

$$F_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Differensialligninger for G løses som vist under

$$G''(t) + c^2 k G(t) = 0$$

$$G''(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G(t) = 0$$

Løsningen på differensialligningen er vist under

$$G_n(t) = (A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} ct\right))$$

Dette gir oss uttrykket for $u(x,t)$ som vist nedenfor. Her vil B_n for $F_n(x)$ kunne settes til 1 fordi B_n kan slå sammen med B_n til $G(t)$.

$$u_n(x, t) = F_n(x) G_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) (A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} ct\right))$$

Den generelle løsningen på bølgeligningen når det er tatt hensyn til initialbetingelser blir:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) (A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} ct\right))$$

For å finne et uttrykk for A_n brukes initialbetingelsen som beskriver posisjonen, resultatet blir da

$$u(x, 0) = f(x) \Rightarrow u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) (A_n \cos(0) + B_n \sin(0))$$

$$\Rightarrow f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Uttrykket over viser at summen som dannes av fourierrekken betyr at $f(x)$ er en odde funksjon. Som vist i teoridelen som tar for seg fourierrekkene til odde og like funksjoner, så vil et uttrykk for A_n være

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

For å finne et uttrykk for B_n brukes initialbetingelsen som beskriver hastigheten, resultatet blir da

$$u_t(x, 0) = g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{t_n}(x, 0)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_{t_n}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi c n \sin(\frac{n\pi}{L} x) (B_n \cos(0) - A_n \sin(0))}{L}$$

$$\Rightarrow g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{t_n}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c \left(\frac{n\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Uttrykket over viser at summen som dannes av fourierrekken betyr at $g(t)$ er en odde funksjon. Som vist i teoridelen som tar for seg fourierrekkene til odde og like funksjoner, så vil et uttrykk for B_n være

$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt$$

En oppsummering på løsningen er:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) (A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} ct\right))$$

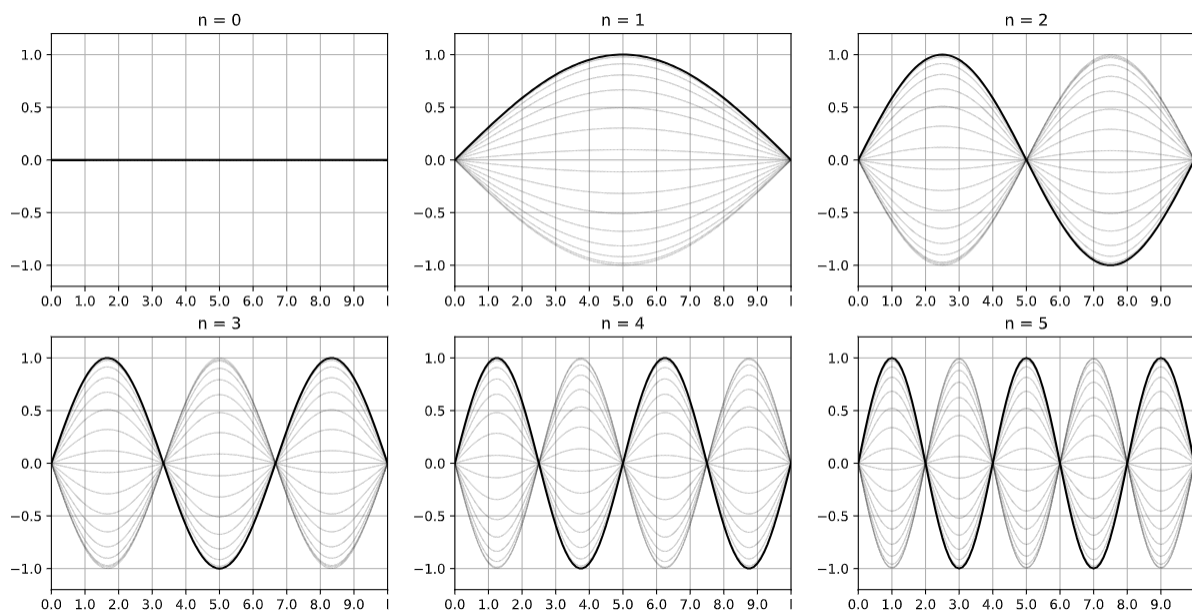
$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt$$

3.1 Forklaring av bølgeligningen

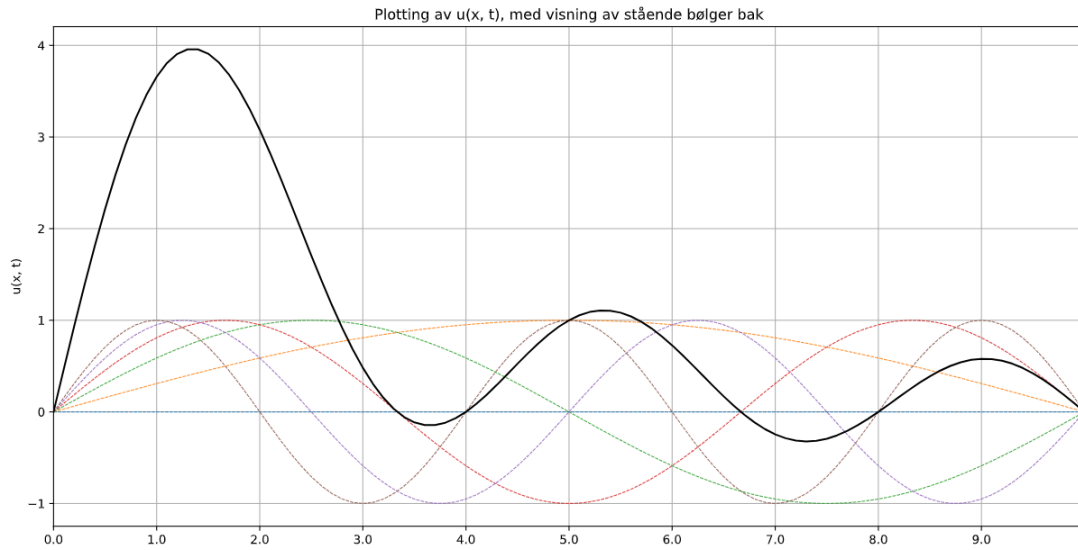
Bølgeligningen gir summen av forskjellige bølger. Under vises en figur (Figur 7) av de enkleste bølgene ligningen kan gi. Dette er de seks første harmoniske bølgene. I disse eksemplene fremstår bølgene bare som enkeltbølger. For å kunne simulere disse med fourierrekken må det i hvert enkelt tilfelle settes $A_{\text{eksempelets } n} = 1$, hvor alle andre bølger i eksempelet har en $A_n = 0$. For alle eksemplene er $B_n = 0$ og $c = 1$. Den spesifikke løsningen på bølgeligningen for bølgene er vist under, der n -verdiene står over de respektive bildene.

$$u_n(x, t) = \cos\left(\frac{n\pi}{L} ct\right) * \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$



Figur 7. De seks første harmoniske bølgene.

Figur 8 viser hvordan bølgeligningen egentlig fungerer, når de harmoniske bølgene fra figur 7 legges sammen til én bølge. De individuelle bølgene vises i bakgrunnen, der hver av bølgene er representert i forskjellige farger. For å se en simulasjon av hvordan bølgen beveger seg med hensyn på tiden, se vedlegg 1.



Figur 8. Eksempel på hvordan den samlede bølge for de seks første harmoniske bølgene ser ut.

4 Løsninger med initialbetingelser

Under presenteres noen eksempler hvor det er gitt konkrete initialbetingelser for fourierrekken, for å lettere forstå hvordan bølgeligningen fungerer i praksis. Initialbetingelsene som refereres til er $f(x)$ og $g(t)$ som er funksjoner for henholdsvis bølgens posisjon og hastighet. $f(x)$ skal inneholde variabelen x , og $g(t)$ variabelen t . For å lettere forstå hvilken betydning initialbetingelsene har, må man huske at randkravene beskriver bølgen som en snor som er festet i to punkter. Initialkravene til denne snoren kan forklares som at $f(x)$ viser hvor langt og i hvilken retning snoren blir dratt eller dyttet, og $g(t)$ viser hastigheten til snoren over tid. Alle disse eksemplene vil demonstrere superposisjonsprinsippet.

I eksemplene er farten til bølgen $c = 1$. Lengden L på systemet vil være lik for alle eksempler og vil settes til å være $L = 10$ langs x -aksen. Tiden på simulasjonen vil være like lenge som perioden til bølgen. Dette grunnet at det blir enklere å simulere eksemplene, og det garanterer for at hele bevegelsen til bølgen vises. Dette vises i høyre del av figur 9, der x -aksen går til T , som er perioden. T er beregnet ved

$$T = \frac{L*2}{c}$$

Dette viser hvordan T er lik for alle simulasjonene, ettersom L og c ikke endrer seg. Ved bølger som ikke har noen utgangsposisjon så vil altså $T/2$ vise at bølgen går tilbake til å være flat, og ved $T/4$ og $T/3/4$ vil superposisjonsprinsippet være tydelig, ved at bølgen har nådd dens høyeste amplitude. Dette vises i figur 7 når $n \neq 0$. Presisjonen i simulasjonene oppnås ved å simulere de 50 første bølgene i fourierrekken, og ved å ta 10 målinger per heltall x -enhet mot L , per bølge. Tallene er forholdsvis lave, men gir hensiktsmessig grei nok presisjon, i forhold til begrensning i beregningskapasitet. Ved å forsøke ulike parametere viser det seg at de 50 første leddene i fourierrekken gir god nok presisjon, som tilnærmer resultatet hvis n skulle gått mot ∞ . I alle simulasjonene vil A_n og B_n regnes ut av python-programmet, men integrasjonen vil være gjort før det skrives inn i programmet. Dette er fordi programmet ikke har funksjonalitet for å integrere slikt.

4.1 Case 1

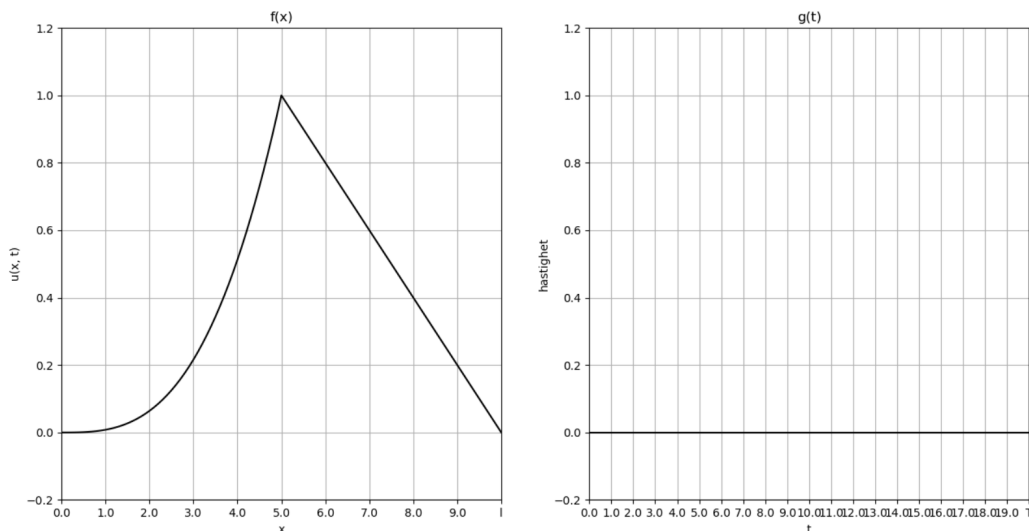
Dette eksempelet viser et tilfelle der strengen har en utgangsposisjon $f(x)$ i øyeblikket tiden starter, og ingen utgangshastighet. Her vil det da vises hvordan bølgen vil bevege seg med tiden med hensyn på utgangsposisjon. I dette eksempelet er initialbetingelsen for f en sammensatt funksjon $f(x)$ der $f_1(x)$ og $f_2(x)$ gjelder for hver sine intervaller. Dermed blir initialbetingelsene følgende:

$$f_1(x) = \frac{x^3}{(\frac{L}{2})^3}, 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{-x}{\frac{L}{2}} + 2, \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$g(t) = 0$$

Figur 9 viser grafen for utgangsposisjonen til strengen $f(x)$ ved $t = 0$, som er en statisk posisjon. Den andre viser utgangshastighet for strengen:

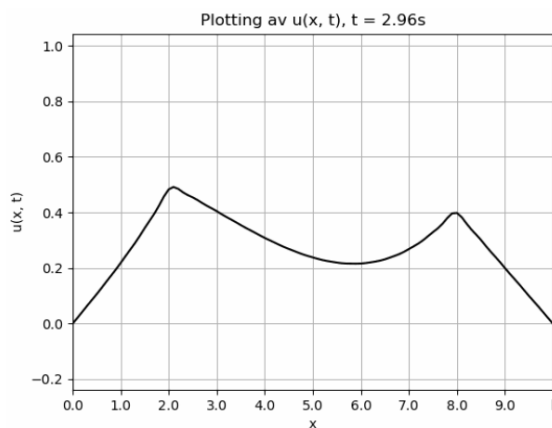


Figur 9. Grafen til venstre er $f(x)$. Grafen til høyre er $g(t)$.

Integralet løst for A_n og B_n er vist nedenfor

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{2}{L} \left(\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{x^3}{(\frac{L}{2})^3} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \left(\frac{-x}{\frac{L}{2}} + 2\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \right) \\
 &\Rightarrow A_n = \frac{2 \left(2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 2 \sin(\pi n) + \pi n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right)}{\pi^2 n^2} \\
 &\quad - \frac{2(\pi n(\pi^2 n^2 - 24) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 6(\pi^2 n^2 - 8) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right))}{\pi^4 n^4} \\
 B_n &= 0
 \end{aligned}$$

Deretter settes verdien til A_n og B_n inn i $u(x, t)$. En simulasjon på bølgen vil vises i vedlegg 2. Her vil tiden være opp til én periode for bølgen. Her er det tydelig at bølgen tar utgangsposisjonen som definert i $f(x)$, og fortsetter å utvikle seg som forventet i henhold til superposisjonsprinsippet. Figur 10 viser hvordan bølgen ser ut etter 2.96 sekunder.



Figur 10. Grafen viser bølgen til case 1

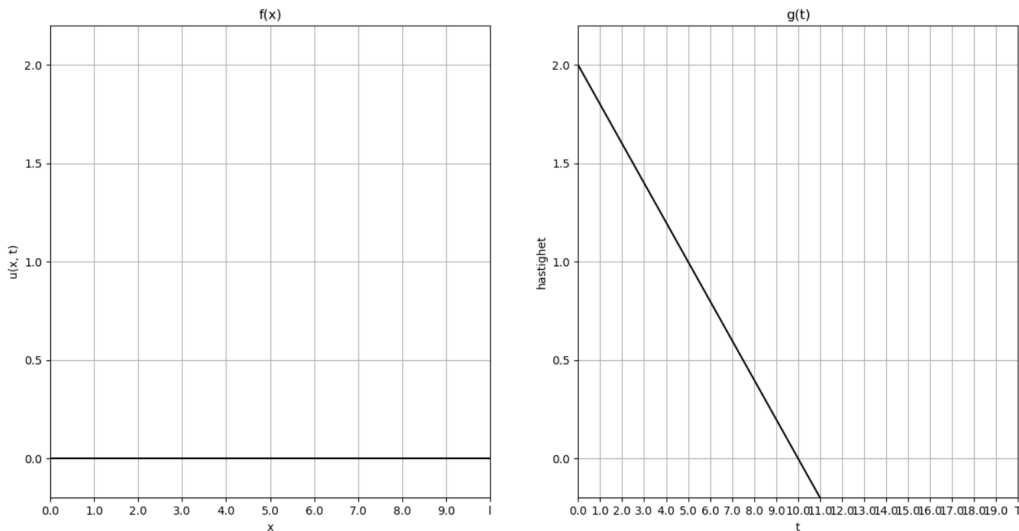
4.2 Case 2

Eksempelet her viser et tilfelle der strengen har en utgangshastighet $g(t)$ før tiden starter og har en posisjon som en rett linje. Her vil det da vises hvordan bølgen vil bevege seg med tiden med hensyn til utgangsfarten. Initialbetingelsene for denne bølgen er følgende:

$$f(x) = 0$$

$$g(t) = -\frac{2t}{L} + 2$$

Figur 11 viser grafene for utgangshastigheten til strengen $g(t)$ og hvordan posisjonen til strengen er ved $t = 0$.



Figur 11. Grafen til venstre er $f(x)$. Grafen til høyre er $g(t)$.

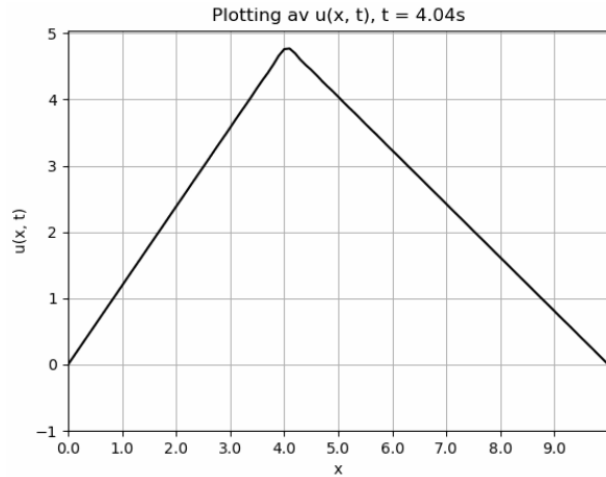
Integralet løst for A_n og B_n er vist nedenfor:

$$A_n = 0$$

$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L \left(-\frac{2t}{L} + 2\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{4L(\pi n - \sin(\pi n))}{\pi^3 cn^3}$$

Deretter settes verdien til A_n og B_n inn i $u(x, t)$. En simulasjon på bølgen vil vises i vedlegg 3. Her er det tydelig hvordan bølgen ikke har noen utgangsposisjon, men har en høy utgangshastighet. Figur 12 viser hvordan bølgen ser ut etter 4.04 sekunder.



Figur 12. Grafen viser bølgen til case 2

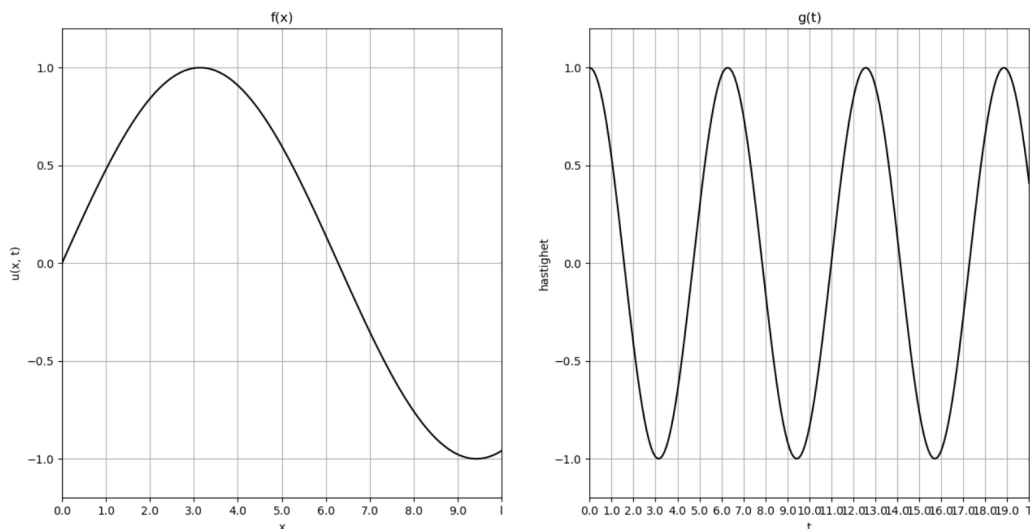
4.3 Case 3

Dette eksempelet viser et tilfelle der strengen har en utgangsposisjon $f(x)$ og en utgangshastighet $g(t)$ når tiden starter. Her vil det da vises hvordan bølgen vil bevege seg med tiden med hensyn på utgangsposisjon og utgangshastighet. Initialbetingelsene for dette eksempelet består av sinus og cosinus bølger. Initialbetingelsene er følgende:

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$g(t) = \cos(t)$$

Figur 13 viser grafene for utgangsposisjonen til strengen $f(x)$ og utgangshastigheten til strengen $g(t)$ ved $t = 0$.



Figur 13. Grafen til venstre er $f(x)$. Grafen til høyre er $g(t)$.

Integralet løst for A_n og B_n er vist nedenfor

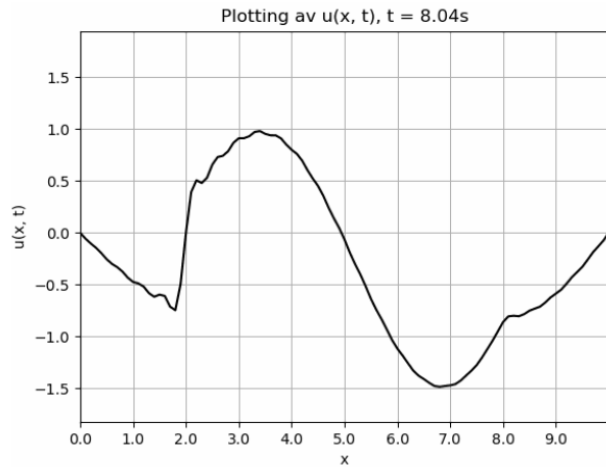
$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{L} * \frac{L(4\pi n \sin(\frac{L}{2}) \cos(\pi n) - 2L \cos(\frac{L}{2}) \sin(\pi n))}{L^2 - \pi^2 n^2}$$

$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{n\pi c} \left(\frac{L(L \sin(L) \sin(n\pi) + \pi n \cos(L) \cos(n\pi) - n\pi)}{L^2 - \pi^2 n^2} \right)$$

Deretter settes verdien til A_n og B_n inn i $u(x, t)$. En simulasjon på bølgen vil vises i vedlegg 4. Det er tydelig hvordan bølgen starter i riktig utgangsposisjon, men får en variert hastighet som omformer bølgen med en gang. Figur 14 viser hvordan bølgen ser ut etter 8.04 sekunder.



Figur 14. Grafen viser bølgen til case 3

5 Sluttord

I denne rapporten er bølgeligningen og dens betydning innenfor matematikk og fysikk utforsket. Bølgeligningen er en fundamental differensialligning som beskriver utbredelsen av bølger gjennom tid og rom. Den er en nøkkelkomponent i forståelsen av naturfenomener som lyd, elektromagnetiske bølger og mekaniske bølger. For å løse bølgeligningen i komplekse situasjoner, brukes numeriske metoder og datamaskin-simuleringer. Dette gjør det mulig å studere bølgefenomener i virkelige systemer og utføre avanserte analyser som ellers ville vært umulig.

Det første eksempelet i rapporten viser at utgangsposisjonen påvirker bølgen som forventet, og stemmer med hvordan superposisjonsprinsippet er beskrevet i teorien. I eksempel nummer to, er det vist hvordan utgangshastighet påvirker bølgen. I det siste eksempelet er det vist hvordan bølgen påvirkes av både en utgangshastighet og utgangsposisjon. Dette stemmer med hvordan bølger oppfattes i den virkelige verden.

I rapporten er det sett på hvordan fourierrekker, en metode for å dekomponere komplekse periodiske funksjoner i en sum av enkle sinus- og cosinus-ledd, spiller en kritisk rolle i løsningen av bølgeligningen. Dette vises tydelig i vedlegg 1, som er en simulasjon der de individuelle leddene i rekken er synlige. Denne tilnærmingen har revolusjonert måten bølgefenomener analyseres og behandles. Fourierrekker gjør det mulig å studere komplekse bølger ved å bryte dem ned i deres grunnleggende bestanddeler, noe som har store konsekvenser når for eksempel lydsignaler skal behandles.

Integrasjon av konseptene tid og rom, har gitt en innsikt i hvordan bølgefenomener kan forstås og manipuleres på en mer effektiv måte. Det har også blitt tydelig hvordan matematikk og fysikk går hånd i hånd for å løse komplekse problemer. Avslutningsvis kan det konkluderes med at bølgeligningen er en grunnleggende og allsidig matematisk modell. En dyp forståelse av bølgeligningen er avgjørende for å løse komplekse utfordringer innenfor vitenskap og teknologi.

6 Litteraturliste

- [1] Bøe, M. V. (2018, Juni 28). *bølge* – *Store norske leksikon*. Store norske leksikon. Hentet Oktober 10, 2023, fra <https://snl.no/b%C3%B8lge>
- [2] Bøe, M. V. (2021, September 6). *interferens* – *Store norske leksikon*. Store norske leksikon. Hentet Oktober 11, 2023, fra <https://snl.no/interferens>
- [3] Bøe, M. V. (2021, September 6). *superposisjonsprinsippet* – *Store norske leksikon*. Store norske leksikon. Hentet Oktober 11, 2023, fra <https://snl.no/superposisjonsprinsippet>
- [4] Davidsen, B. (2009). *Forelesningsnotater i matematikk. Fourier-rekker*. UiT. Hentet Oktober 11, 2023, fra <http://www.ingfag.no/matematikk/notater/Fourier/JamnOdde.pdf>
- [5] Holden, H. (2023, Mai 12). *fourierrekker* – *Store norske leksikon*. Store norske leksikon. Hentet Oktober 12, 2023, fra <https://snl.no/fourierrekker>
- [6] *Introduksjon til differensiallikninger* – *Matematikk.net*. (2021, oktober 12). Matematikk.net. Hentet Oktober 11, 2023, fra https://www.matematikk.net/side/Introduksjon_til_differensiallikninger
- [7] matematikk.org. (n.d.). *Flere eksakte verdier - cos*. Matematikk.org. Hentet Oktober 12, 2023, fra https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=218213&within_tid=219845

7 Vedlegg

Alle vedleggene ligger i vedlegg.zip komprimerte mappen. Vedleggene er animerte bilder som er beskrevet i videoen, samt Python3 kode som er skrevet for å lage bildene og simulasjonene. Koden (.py filene) er i sin egen zip mappe (kode.zip). Og har noen kommentarer som kan hjelpe med simulasjon, samt forståelse for hva hvert program gjør. Av .py-filene er bolge.py den eneste som ikke er tenkt å være selvstendig, for de andre programmene som er lagt ved, benytter seg av denne i bunnen. Av den grunn er det i bolge.py filen at man må redigere noen linjer for å endre på initialbetingelsene for alle simulasjonene.

Vedleggsliste:

1. sum_harmoniske_bolger.gif
2. eks1.gif
3. eks2.gif
4. eks3.gif
5. kode.zip