# Numerieke Modellering en Benadering: Chebyshev veeltermen

Sander Prenen

15 april 2020

# 1 Continue kleinste kwadratenbenadering met Chebyshev veeltermen

In dit practicum wordt geprobeerd continue functies op eindige, reële intervallen te benaderen aan de hand van Chebyshev-veeltermen van de eerste soort. Dit zijn veeltermen die voldoen aan de volgende voorwaarde: $T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$ voor $x \in [-1, 1]$ en $k = 0, 1, 2, \ldots$ De veeltermen zijn een basis voor de ruimte $V_n$, een deelvectorruimte van $C([-1, 1])$.

## 1.1 Evalueren van de Chebyshev veeltermen

De functie **`evalCheb`** geeft een vector $v = (f_1, f_2, \ldots, f_N) \in \mathbb{R}^N$ terug. Deze vector wordt bekomen uit inputvectoren $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ en $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ op de volgende manier:

$$f_i = y_n(x_i) = a_0T_0(x_i) + a_1T_1(x_i) + \ldots + a_nT_n(x_i)$$

In Listing 1 wordt de MATLAB code voor deze berekening weergegeven.

```
function v = evalCheb(a,x)

% Lengte van de vectoren bepalen
n = size(a,2);
N = size(x,2);

% Vector v invullen
v = zeros(1,N);
for i = 1:1:N % v loop
    z = x(i);
    v(i) = 0;
    for j = 1:1:n % a en T loop
        v(i) = v(i) + a(j) * cos((j-1) * acos(z));
    end
end
```

Listing 1: evalCheb.m

## 1.2 Beste benadering in $V_n$

Indien de basisvectoren $T_k(x)$ orthogonale vectoren zijn, geldt volgende uitdrukking voor de beste benadering $y_n(x)$ voor een functie $f(x) \in C([-1, 1])$:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kT_k(x) \qquad \text{met} \qquad a_k = \frac{(f, T_k)}{(T_k, T_k)} \tag{1}$$

Met als scalair product:

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Om deze formule te kunnen gebruiken, moet dus worden aangetoond dat de basisvectoren orthogonaal zijn. Dit wil zeggen dat alle onderlinge scalaire producten nul zijn, tenzij dat van een basisvector met zichzelf.

### 1.2.1 Orthogonaliteit van de basisvectoren $T_k$

In deze sectie wordt de ortohgonaliteit van de basisvecoren bekeken. Hiervoor moeten alle onderlinge scalaire producten bepaald worden. Dit wordt gedaan in drie gevallen:

- $k = l = 0$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_0^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = [\arcsin(x)]_{-1}^{1} = \pi$$

- $k = l \neq 0$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_k^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos^2(k\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2\pi k + \sin(2\pi k)}{4k} = \frac{\pi}{2}$$

- $k \neq l$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)T_l(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_{-1}^{1} \frac{\cos(k\arccos(x))\cos(l\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\cos((k-l)\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\cos((k+l)\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sin((k-l)\pi)}{k-l} + \frac{1}{2}\frac{\sin((k+l)\pi)}{k+l} = 0
\end{aligned}$$

Alle scalaire prodcuten zijn nul, behalve die van basisvectoren met zichzelf. De vectoren zijn dus orthogonaal.

### 1.2.2 Beste benadering

Doordat de basisvectoren orthogonaal zijn, kan formule (1) gebruikt worden. In deze sectie worden de coëfficënten $a_k$ bepaald.

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{(f, T_k)}{(T_k, T_k)} = \frac{1}{(T_k, T_k)}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{(T_k, T_k)}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\cos(k\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \frac{1}{(T_k, T_k)}\int_{\pi}^{0} \frac{f(\cos\theta)\cos(k\theta)(-\sin(\theta))}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}d\theta = \frac{1}{(T_k, T_k)}\int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)cos(k\theta)d\theta
\end{aligned}$$

Dit geeft dus volgende uitdrukking voor $a_k$:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)d\theta, & k = 0 \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos(k\theta)d\theta, & k > 0 \end{cases}$$