Numerieke Modellering en Benadering
Practicum 1, 2019-2020

Simon Telen

March 22, 2020

Chebyshev veeltermen zijn uiterst geschikt voor het benaderen van functies op eindige, reële intervallen aan de hand van een continue kleinste kwadratenbenadering. Bovendien zijn hun nulpunten vaak een uitstekende keuze voor de abscissa van een veelterminterpolant. In dit practicum onderzoeken we deze benaderingseigenschappen van Chebyshev veeltermen aan de hand van een Matlab implementatie.

1 Chebyshev veeltermen van de eerste soort

Uit de trigonometrische gelijkheid

$$\cos(2\theta) = 2\cos\theta^2 - 1$$

volgt dat de veelterm $T_2(x) = 2x^2 - 1$ op het interval $[-1, 1]$ dezelfde functie definiëert als $\cos(2\arccos x)$. Gebruik makend van

$$\begin{aligned}
\cos(\theta + \phi) &= \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi), \\
\sin(\theta + \phi) &= \sin(\theta)\cos(\phi) + \sin(\phi)\cos(\theta), \\
1 &= \cos\theta^2 + \sin\theta^2
\end{aligned}$$

leiden we af dat

$$\cos(3\theta) = \cos(\theta + 2\theta) = 2\cos\theta\cos(2\theta) - \cos(\theta)$$

(denk zelf eens na over de tussenstappen). Zo bekomen we

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - x = \cos(3\arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Op een analoge manier leiden we de rest van de rij veeltermen

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), k = 1, 2, \ldots$$

af, die voldoen aan $T_k(x) = \cos(k\arccos x)$ voor $x \in [-1, 1]$. Deze veeltermen worden *Chebyshev veeltermen van de eerste soort* genoemd.

2 Continue kleinste kwadratenbenadering met Chebyshev veeltermen

Beschouw het scalair product

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

gedefiniëerd op de vectorruimte $C([-1,1])$ van continue, reële functies op $[-1,1]$. In de rest van deze opgave gebruiken we de norm en afstand geïnduceerd door dit scalair product om de notie van 'beste benadering' te definiëren. Ga na dat de Chebyshev veeltermen van de eerste soort een orthogonale familie zijn ten opzichte van dit scalair product, i.e.

$$(T_k(x), T_\ell(x)) = \begin{cases} \pi & k=\ell=0 \\ \pi/2 & k=\ell\neq 0 \\ 0 & k\neq \ell \end{cases}. \tag{1}$$

De ruimte V_n wordt gedefiniëerd als de deelvectorruimte van $C([-1,1])$ opgespannen door $T_0(x),\ldots,T_n(x)$.

1. Schrijf een Matlab functie `function v = evalCheb(a,x)` die als invoer een vector $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ en een vector $x = (x_1, \ldots, x_N) \in [-1,1]^N$ neemt en als uitvoer een vector $v = (f_1, \ldots, f_N) \in \mathbb{R}^N$ teruggeeft met

   $$f_i = y_n(x_i) = a_0T_0(x_i) + a_1T_1(x_i) + \cdots + a_nT_n(x_i).$$

   Hint: het commando in Matlab om $\arccos(x)$ te berekenen is `acos(x)`.

2. Toon aan dat de beste benadering voor een functie $f(x) \in C([-1,1])$ in V_n gegeven wordt door

   $$y_n = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + \cdots + a_nT_n(x),$$

   waarbij

   $$a_k = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\theta)\ d\theta, & k=0 \\ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos(k\theta)\ d\theta, & k>0. \end{cases} \tag{2}$$

3. Gebruik makend van de trapeziumregel voor numerieke integratie met een discretizatie bestaande uit n intervallen vinden we een benadering voor de integralen in (2):

   $$a_k \approx \frac{1}{n}f(1) + \frac{2}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1} f\left(\cos\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\right)\cos\left(k\frac{\ell\pi}{n}\right) + \frac{(-1)^k}{n}f(-1), \quad 0<k\leq n,$$

   en dezelfde formule geldt voor $k=0$ met een factor 1/2. Daaruit volgt dat de coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ voor de beste benadering voor f kunnen berekend worden als de DCT van de rij

   $$f(z_{0,n}), f(z_{1,n}), \ldots, f(z_{n,n}),$$

   waarbij $z_{\ell,n} = \cos(\ell\pi/n)$. Toon aan dat $z_{\ell,n}$ de punten zijn waarin $T_n(x)$ zijn maximale en minimale waarde bereikt op het interval $[-1,1]$. Schrijf ook een Matlab functie `function a = approxCheby(f,n)` met als invoer een function handle `f` en een getal `n`, en als uitvoer een vector `a` met daarin de coefficienten van de beste benadering $y_n(x)$ van f in V_n. Gebruik daarvoor de DCT. Hint: je kan in Matlab de DCT `V` berekenen van een rij voorgesteld door een rijvector `v` met lengte `n+1` via de commando's

```
w = fliplr(v(2:end-1));
v_even = [v w];
V = fft(v_even)/n;
V = real(V(1:n+1));
V = [V(1)/2 V(2:end)];
```

Merk op dat we hierbij gebruik maken van het feit dat de DCT berekend kan worden via de DFT van een even uitbreiding.

4. Gebruik je code om de beste benadering te berekenen van de Runge functie

$$f(x) = \frac{1}{25x^2+1}$$

in de deelruimtes $V_2, V_4, \ldots, V_{20}$ en geef ze allemaal weer, tesamen met de functie f, op dezelfde grafiek. Bereken een schatting voor de maximale afwijking

$$d(y_n, f) = \max_{x\in[-1,1]} = |y_n(x) - f(x)| \tag{3}$$

voor $n = 2, 4, \ldots, 100$ en geef de resultaten weer[1]. Je kan dit doen door $|y_n(x) - f(x)|$ te evalueren in 200 equidistante punten in $[-1, 1]$ en het maximum te nemen over deze discretizatie.

3 Interpolatie in Chebyshev knooppunten

Met veeltermen van graad $n - 1$ kan je een functie interpoleren in n punten. Noem de interpolatiepunten x_k, voor $k = 1, 2, \ldots, n$, en veronderstel dat $\psi_j(x), j = 0, 1, \ldots$ een rij is van veeltermen van graad j. We zoeken nu voor een gegeven functie $f(x)$ de veelterm $g(x)$ van graad $n - 1$ zodat

$$g(x_i) = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Als we de veelterm $g(x)$ voorstellen in de vorm $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\psi_k(x)$, dan leidden de interpolatievoorwaarden (4) tot een lineair stelsel

$$Mc = B \tag{5}$$

waarvan de oplossing uit de coëfficiënten c_k bestaat. Hierin is M een $n \times n$ matrix en B een vector met n elementen. Je kan eenvoudig nagaan dat de elementen M_{ij} van de matrix M op rij i en kolom j worden gegeven door

$$M_{ij} = \psi_j(x_i),$$

en dat de elementen B_i van het rechterlid worden gegeven door

$$B_i = f(x_i).$$

Het is zinvol om te interpoleren in de nulpunten van orthogonale veeltermen omdat dit aanleiding geeft tot een stabiele methode. Ga na dat de nulpunten van de k-de Chebyshev veelterm $T_k(x)$ gegeven zijn door

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi(2i-1)}{2k}\right), \quad i = 1, \ldots, k.$$

[1] Merk op: de afstand $d(y_n, f)$ is niet de afstand die geïnduceerd wordt door het scalair product $(\cdot, \cdot)$.

1. Schrijf een efficiënte Matlab-functie voor het berekenen van de interpolerende veelterm van een functie f in n punten $\{x_k\}_{k=1}^n$ en het evalueren van deze veelterm in een stel punten t. Gebruik als basisfuncties $\psi_k(x) = T_k(x)$, de Chebyshev veeltermen van de eerste soort zoals in het vorige deel van de opgave. De functie `function [c,kappa] = interpolate(x, f)` krijgt als invoer een vector x met n interpolatiepunten en een function handle f. De functie berekent de vector `c` van coefficienten $c_0, \ldots, c_{n-1}$ van de interpolerende veelterm $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k T_k(x)$ en het conditiegetal `kappa` van de matrix M in (5).

2. Bereken de interpolerende veelterm van de functies $f_1(x) = \cos x$ en $f_2(x) = \frac{1}{25x^2+1}$ op het interval $[-1, 1]$. Gebruik als interpolatiepunten achtereenvolgens n equidistant verdeelde punten op $[-1, 1]$ en de nulpunten van $T_n(x)$. Maak enkele grafieken van de interpolaties en van het verschil $g - f$. Om de interpolant te evalueren gebruik je de functie `evalCheb`. Maak voor elke familie van punten ook een grafiek van de fout $d(g, f)$ (zie (3)) in functie van de graad n. Daartoe bereken je voor toenemende waarden van n de interpolerende veelterm en bereken je het maximum van $|g(x) - f(x)|$ voor een groot aantal equidistante punten x. Plot ook het verloop van het conditiegetal van M in functie van n voor beide puntenfamilies. Bespreek bondig je resultaten.

Praktische richtlijnen

- Je werkt individueel aan dit practicum.
- Stuur het verslag (in PDF) **tesamen met alle Matlab code** door per mail ten laatste op **15 april 2020** om 12:00 uur op onderstaand e-mailadres.
- In het verslag wordt minstens de code `evalCheb.m`, `approxCheby.m` en `interpolate.m` verwacht. Neem ook alle gevraagde figuren op in het verslag.
- Bespreek bondig je resultaten en je aanpak in een duidelijke vergezellende tekst. Hou de lengte evenwel onder de 10 pagina's.

Succes!

Simon Telen (200A 01.152)
`simon.telen@kuleuven.be`