Numerieke Modellering en Benadering: Eigenwaardeproblemen en iteratieve methoden

Sander Prenen, r0701014

20 mei 2020

Inhoudsopgave

Lijst van figuren

1 Inleiding

In dit verslag worden verschillenden methodes bestudeerd om eigenwaardenproblemen op te lossen.

2 Gelijktijdige iteratie

Bij gelijktijdige iteratie of 'simultaneous iteration' wordt de methode van de machten toegepast op p kolommen tegelijk. De methode convergeert naar de p grootste eigenwaarden en de bijhorende eigenvectoren. Door de methode licht te wijzigen, kunnen de p eigenwaarden van een symmetrische niet-singuliere matrix A, die het dichtst bij een gegeven waarde μ liggen, bepaald worden. Hiervoor wordt verondersteld dat μ geen eigenwaarde is van A. Het algoritme kan hiervoor gebruikt worden als de p eigenwaarden het dichtst bij μ ook de p grootste eigenwaarden zijn. Hiervoor kan gezorgd worden door de matrix A te vervangen door $A - \mu I$. Deze matrix heeft eigenwaarden die μ lager liggen dan de eigenwaarden van de originele matrix A. Dit kan als volgt worden ingezien. De originele eigenwaarden λ_o zijn de oplossing van volgende vergelijking:

$$\det(A - \lambda_o I) = 0$$

De eigenwaarden λ_n van de nieuwe matrix zijn de oplossingen van onderstaande vergelijking:

$$\det(A - \mu I - \lambda_n I) = 0 \Leftrightarrow \det(A - (\mu + \lambda_n)I) = 0$$

Dit leidt tot volgende gelijkheid $\lambda_o = \mu + \lambda_n$. Dit betekent dat de nieuwe eigenwaarden λ_n inderdaad μ lager liggen dan de originele eigenwaarden λ_o.
Nu zijn de p gezochte eigenwaarden de kleinste van alle eigenwaarden. Om er voor te zorgen dat ze de p grootste eigenwaarden worden, wordt de inverse matrix gebruikt. De inverse matrix heeft namelijk als eigenwaarden de reciproke eigenwaarden van de originele matrix.

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ A\frac{1}{\lambda}x &= x \\ A^{-1}A\frac{1}{\lambda}x &= A^{-1}x \\ \frac{1}{\lambda}x &= A^{-1}x \end{aligned}$$

Nu zijn de p eigenwaarden die het dichtst bij μ liggen de grootste eigenwaarden van de matrix en kan de methode van gelijktijdige iteratie gebruikt worden. In algoritme 1 kan de pseudocode voor deze methode gevonden worden. De kolommen van $\hat{Q}^{(k)}$ convergeren naar de eigenvectoren horende bij de eigenwaarden.

Kies $\hat{Q}^{(0)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ met orthonormale kolommen
for $k = 1, 2, \ldots$ **do**
    $Z = (A - \mu I)^{-1}\hat{Q}^{(k-1)}$
    $\hat{Q}^{(k)}\hat{R}^{(k)} = Z$
end

Algoritme 1: Gelijktijdige iteratie