

# **Numerieke Modelling en Benadering: Eigenwaardeproblemen en iteratieve methoden**

Sander Prenen, r0701014

20 mei 2020

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Gelijktijdige iteratie</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Inverse iteratie en Rayleigh quotiënt iteratie</b>	<b>3</b>
3.1	Rayleigh quotiënt iteratie . . . . .	3
3.2	Vergelijking inverse iteratie en Rayleigh quotiënt iteratie . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Jacobi-methode</b>	<b>4</b>
4.1	De coëfficiënten $c$ en $s$ . . . . .	4

# Lijst van figuren

# 1 Inleiding

In dit verslag worden verschillende methodes bestudeerd om eigenwaardenproblemen op te lossen.

## 2 Gelijktijdige iteratie

Bij gelijktijdige iteratie of 'simultaneous iteration' wordt de methode van de machten toegepast op  $p$  kolommen tegelijk. De methode convergeert naar de  $p$  grootste eigenwaarden en de bijhorende eigenvectoren. Door de methode licht te wijzigen, kunnen de  $p$  eigenwaarden van een symmetrische niet-singuliere matrix  $A$ , die het dichtst bij een gegeven waarde  $\mu$  liggen, bepaald worden. Hiervoor wordt verondersteld dat  $\mu$  geen eigenwaarde is van  $A$ . Het algoritme kan hiervoor gebruikt worden als de  $p$  eigenwaarden het dichtst bij  $\mu$  ook de  $p$  grootste eigenwaarden zijn. Hiervoor kan gezorgd worden door de matrix  $A$  te vervangen door  $A - \mu I$ . Deze matrix heeft eigenwaarden die  $\mu$  lager liggen dan de eigenwaarden van de originele matrix  $A$ . Dit kan als volgt worden ingezien. De originele eigenwaarden  $\lambda_o$  zijn de oplossing van volgende vergelijking:

$$\det(A - \lambda_o I) = 0$$

De eigenwaarden  $\lambda_n$  van de nieuwe matrix zijn de oplossingen van onderstaande vergelijking:

$$\det(A - \mu I - \lambda_n I) = 0 \Leftrightarrow \det(A - (\mu + \lambda_n) I) = 0$$

Dit leidt tot volgende gelijkheid  $\lambda_o = \mu + \lambda_n$ . Dit betekent dat de nieuwe eigenwaarden  $\lambda_n$  inderdaad  $\mu$  lager liggen dan de originele eigenwaarden  $\lambda_o$ .

Nu zijn de  $p$  gezochte eigenwaarden de kleinste van alle eigenwaarden. Om er voor te zorgen dat ze de  $p$  grootste eigenwaarden worden, wordt de inverse matrix gebruikt. De inverse matrix heeft namelijk als eigenwaarden de reciproke eigenwaarden van de originele matrix.

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ A \frac{1}{\lambda} x &= x \\ A^{-1} A \frac{1}{\lambda} x &= A^{-1} x \\ \frac{1}{\lambda} x &= A^{-1} x \end{aligned}$$

Nu zijn de  $p$  eigenwaarden die het dichtst bij  $\mu$  liggen de grootste eigenwaarden van de matrix en kan de methode van gelijktijdige iteratie gebruikt worden. In algoritme 1 kan de pseudocode voor deze methode gevonden worden. De kolommen van  $\hat{Q}^{(k)}$  convergeren naar de eigenvectoren horende bij de eigenwaarden. Op deze kolommen  $q^{(k)}$  wordt het Rayleigh quotiënt toegepast om de bijbehorende eigenwaarden te benaderen.

```
1 Kies  $\hat{Q}^{(0)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  met orthonormale kolommen
2 for  $k = 1, 2, \dots$  do
3    $Z = (A - \mu I)^{-1} \hat{Q}^{(k-1)}$ 
4    $\hat{Q}^{(k)} \hat{R}^{(k)} = Z$ 
5    $\lambda^{(k)} = q^{(k)\top} (A - \mu I)^{-1} q^{(k)}$ 
6 end
```

Algoritme 1: Gelijktijdige iteratie

### 3 Inverse iteratie en Rayleigh quotiënt iteratie

#### 3.1 Rayleigh quotiënt iteratie

Om eigenwaarden te benaderen kan de Rayleigh quotiënt iteratie gebruikt worden. Deze methode convergeert kubisch naar de correct waarde. Elke iteratiestap moet het volgende stelsel opgelost worden:

$$(A - \lambda^{(k-1)}I)w = v^{(k-1)}$$

Indien de benaderende eigenwaarde  $\lambda^{(k-1)}$  dicht in de buurt komt van de exacte eigenwaarde, wordt dit stelsel meer en meer singulier. Hierdoor kan de oplossing  $w$  van dit stelsel opblazen. Dit vormt echter geen probleem voor de iteratie aangezien  $w$  genormeerd wordt. Enkel de richting van de vector  $w$  is dus belangrijk en deze wordt niet veranderd.

Er kan aangetoond worden dat voor een matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  en een vector  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , met  $x$  een benadering voor een eigenvector van  $A$ , de oplossing  $\rho \in \mathbb{R}$  van het volgende minimalisatieprobleem

$$\min_{\rho \in \mathbb{R}} \|Ax - \rho x\|_2$$

overeenkomt met het Rayleigh quotiënt van  $x$ .

De functie  $f(\rho) = \|Ax - \rho x\|_2 = (Ax - \rho x)^\top (Ax - \rho x)$  moet geminimaliseerd worden. De afgeleide  $f'(\rho)$  moet dus nul zijn.

$$\begin{aligned}(Ax - \rho x)^\top (Ax - \rho x) &= x^\top A^\top Ax - x^\top A^\top \rho x - x^\top \rho Ax + \rho^2 x^\top x \\ &= x^\top A^\top Ax - 2\rho x^\top Ax + \rho^2 x^\top x\end{aligned}$$

Deze vergelijking afleiden naar  $\rho$  en gelijk stellen aan nul geeft volgende uitdrukking:

$$-2x^\top Ax + 2\rho x^\top x = 0 \Leftrightarrow \rho = \frac{x^\top Ax}{x^\top x}$$

Deze laatste uitdrukking is inderdaad het Rayleigh quotiënt.

#### 3.2 Vergelijking inverse iteratie en Rayleigh quotiënt iteratie

Door de kubische convergentie van de Rayleigh quotiënt iteratie heeft deze methode vaak de voorkeur over de inverse iteratie. Toch zijn er ook gevallen waar de inverse iteratie de voorkeur geniet. Er worden in deze tekst twee gevallen besproken:

- De matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  is (zeer) groot: In elke iteratiestap van de Rayleigh quotiënt iteratie moet een nieuwe matrix geïnverteerd worden. Hierdoor zijn er  $\mathcal{O}(m^3)$  flops nodig per stap. Voor de inverse iteratie moet er een lineair stelsel worden opgelost in elke stap. Dit lijkt op het eerste zicht  $\mathcal{O}(m^3)$  flops te vragen, maar als de matrix  $A$  op  $QR$ -gefactoriseerd is, vermindert het aantal flops naar  $\mathcal{O}(m^2)$ . Hierdoor is de inverse iteratie beter geschikt voor grote matrices.
- De spectrale eigenschappen van  $A$  zijn nauwelijks gekend: Het doel is om een eigenpaar te vinden die het dichtst bij  $\mu \in \mathbb{R}$  ligt, maar een goede startwaarde voor de eigenvector is niet gekend. De Rayleigh quotiënt iteratie vertrekt van een startwaarde van een eigenvector. Deze startwaarde is hier niet gekend dus is de inverse iteratie, die vertrekt van een startwaarde voor de eigenwaarde, beter geschikt.

## 4 Jacobi-methode

De Jacobi-methode steunt op de diagonalisatie van  $2 \times 2$  symmetrische matrices met behulp van een orthogonale matrix  $J$ ,

$$J^T \begin{bmatrix} a & d \\ d & b \end{bmatrix} J = \begin{bmatrix} \neq 0 & 0 \\ 0 & \neq 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Hierbij wordt de orthogonale matrix  $J$  gedefinieerd als een rotatie-matrix:

$$J = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (2)$$

### 4.1 De coëfficiënten $c$ en $s$

In deze sectie worden de coëfficiënten  $c$  en  $s$  van de matrix  $J$  uit vergelijking (2) bepaald zodat (1) geldt. Aangezien  $J$  een rotatie-matrix is, is de determinant van  $J$  gelijk aan 1.

$$\det J = c^2 + s^2 = 1$$

Volgende oplossing is een oplossing van het stelsel:

$$\begin{cases} c = \cos(\theta) \\ s = \sin(\theta) \end{cases}$$

Indien de niet-diagonaal elementen in vergelijking (1) worden bepaald, wordt volgende uitdrukking verkregen:

$$\frac{1}{2} \sin(2\theta)(a - b) + d \cos(2\theta) = 0$$

Hieruit kan  $\theta$  gehaald worden:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2d}{b - a} \right)$$

Als  $a$  gelijk is aan  $b$  wordt  $\theta$  gelijk aan  $\frac{\pi}{4}$  aangezien voor deze hoek de boogtangens oneindig wordt.