BAB 11 INTEGRAL

A Integral Tak Tentu

Integral (anti diferensial) adalah kebalikan (invers) dari diferensial/ turunan. Hubungan antara integral dengan turunan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F'(x) = f(x) \iff F(x) = \int f(x)\,dx$$

Keterangan:

$\int f(x)\,dx$ dibaca integral fungsi x terhadap x

$f(x)$ disebut integran

$F(x)$ disebut fungsi asal

Dari sifat-sifat diferensial, dapat diturunkan sifat-sifat integral sebagai berikut:

$$\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k.f(x)\,dx = k.\int f(x)\,dx$$

dengan f(x) dan g(x) fungsi x dan k adalah konstanta.

1. Integral Fungsi Aljabar

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

Rumus tersebut berlaku untuk $n \neq 1$.

2. Integral Fungsi Trigonometri

Rumus Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri

1) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

2) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

3) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

4) $\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$

5) $\int \tan x \sec x\,dx = \sec x + C$

6) $\int \cot x\ \mathrm{cosec}\ x\,dx = -\mathrm{cosec}\ x + C$

Rumus Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri dengan Sudut ax + b

1) $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

2) $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

3) $\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$

4) $\int \mathrm{cosec}^2(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

5) $\int \tan(ax+b)\sec(ax+b)\,dx$

$= \frac{1}{a}\sec(ax+b) + C$

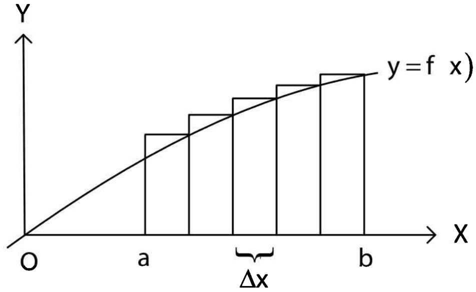
6) $\int \cot(ax+b)\,\mathrm{cosec}(ax+b)\,dx$

$= -\frac{1}{a}\mathrm{cosec}\,(ax+b) + C$

dengan a dan b bilangan real dan $a \neq 0$.

B Integral Tentu

Gambar berikut ini menunjukkan suatu daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), sumbu X, garis x = a, dan garis x = b.



Luas daerah tersebut didekati (diperkirakan) dengan jumlah semua persegi panjang dari x = a hingga x = b, yaitu: $L = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$ dengan n = banyaknya persegi panjang.

Luas daerah yang sebenarnya bisa diperoleh dengan cara membagi luas daerah L dengan persegi panjang yang jumlahnya sangat banyak $(n \to \infty)$. Ini berarti nilai Δx menjadi sangat kecil $(\Delta x \to 0)$ sehingga luas daerah ditentukan dengan:

$$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i \quad \text{atau} \quad L = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1} f(x_i).\Delta x_i$$

Bentuk-bentuk limit di atas dapat disederhanakan dengan bentuk integral yaitu:

$$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dengan demikian, integral tentu $\int_a^b f(x)\,dx$ dapat ditafsirkan sebagai luas daerah di bidang datar yang dibatasi kurva y = f(x), sumbu X, garis x = a, dan garis x = b.

Untuk menentukan nilai integral tentu digunakan Teorema Dasar Integral Kalkulus berikut:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

dengan $F(x)$ adalah anti turunan atau pengintegralan dari f(x).

C Metode Pengintegralan

1 Integral Subtitusi

Teknik perhitungan pengintegralan dengan menggunakan rumus integral subtitusi memerlukan dua langkah sebagai berikut:

a) Memilih fungsi u = g(x)

Sehingga $\int f(g(x)).g'(x)\,dx$ dapat diubah menjadi $\int f(u)\,du$.

b) Tentukan fungsi integral umum f(u) yang bersifat F'(u) = f(u).

Untuk menentukan fungsi integral umum f(u) yang bersifat F'(u) = f(u) dapat diperoleh dengan mengembangkan rumus integral tak tentu dari fungsi aljabar sebagai berikut:

$$\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1},\ n \neq -1$$

Dari rumus integral subtitusi di atas, dapat diturunkan beberapa rumus singkat yaitu:

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$$

$$\int f(x)\left[g(x)\right]^n\,dx = \frac{f(x)}{g'(x)}.\frac{1}{n+1}\left[g(x)\right]^{n+1} + c$$

$$\int \sin x\,.\,\cos x\,dx = \frac{1}{n+1}\sin^{(n+1)}x + C$$

$$\int \cos^n x.\sin x\,dx = \frac{-1}{n+1}\cos^{(n+1)}x + C$$

$$\int f(x).\cos(g(x))\,dx = \frac{f(x)}{g'(x)}.\sin g(x) + c$$

Keterangan: Konsepnya sama untuk fungsi trigonometri lain

2 Integral Parsial

Misalkan u(x) dan v(x) masing–masing adalah fungsi dalam variabel x, maka pengintegralan $\int u\,dv$ dapat ditentukan oleh:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Berhasil atau tidaknya pengintegralan dengan menggunakan rumus integral parsial ditentukan oleh dua hal berikut:

a) Memilih bagian dv sehingga v dapat ditentukan dengan rumus $v = \int dv$

b) $\int v\,du$ harus lebih mudah diselesaikan dibanding dengan $\int u\,dv$.

Integral parsial juga dapat diselesaikan dengan tabel differensial, dengan mendifferensialkan u(x) hingga diperoleh nilai 0 dan mengintegralkan dv. Kemudian mengalikan hasil differensial dan integral tersebut dengan mengubah tanda positif dan negatifnya secara bergantian.

Perhatikan contoh pengintegralan berikut:

$\int x^2 \sin 2x\,dx = ...$

Misal $u(x) = x^2$ dan $dv = \sin 2x\,dx$

Tabel differensialnya:

Tanda	Differensial u(x)	Integral dv
⊕	x^2	$\sin 2x\,dx$
–	$2x$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$
⊕	2	$-\frac{1}{4}\sin 2x$
–	0	$\frac{1}{8}\cos 2x$

Sehingga hasil dari

$$\int x^2 \sin 2x\,dx = x^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - 2x\left(-\frac{1}{4}\sin 2x\right) + 2\left(\frac{1}{8}\cos 2x\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

3 Integral Bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$ dan $\sqrt{a^2 + x^2}$

Untuk bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$ caranya yaitu dengan memisalkan:

$$x = a\sin\theta$$
$$dx = a\cos\theta\,d\theta$$
$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$$

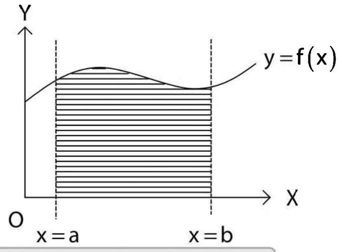
Untuk bentuk $\sqrt{a^2 + x^2}$ caranya yaitu dengan memisalkan:

$$x = a\tan\theta$$
$$dx = a\sec^2\theta\,d\theta$$
$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sec\theta$$
$$a^2 + x^2 = a^2\sec^2\theta$$

D Luas Daerah

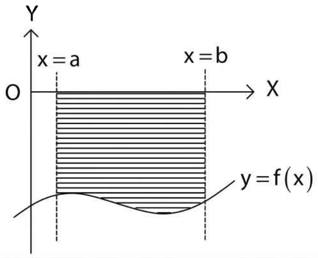
1. Luas Daerah yang Dibatasi oleh Kurva dengan Sumbu X

– Jika kurva y = f(x) berada di atas sumbu X (sumbu Y positif)



Luas daerah di atas: $L = \int_a^b f(x)\,dx$

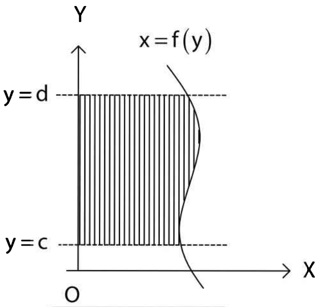
– Jika kurva y = f(x) berada di bawah sumbu X (sumbu Y negatif)



Luas daerah di atas: $L = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

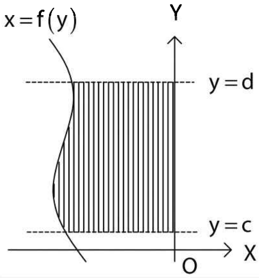
2. Luas Daerah yang Dibatasi oleh Kurva dengan Sumbu Y

– Jika kurva x = f(y) berada di sumbu X positif



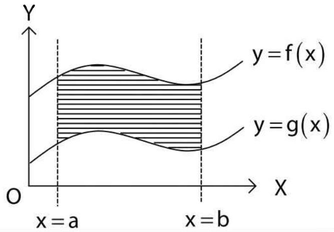
$L = \int_c^d f(y)\,dy$

– Jika kurva x = f(y) berada pada sumbu X negatif



$L = -\int_c^d f(y)\,dy = \int_d^c f(y)\,dy$

3. Luas Daerah yang Dibatasi oleh Beberapa Kurva

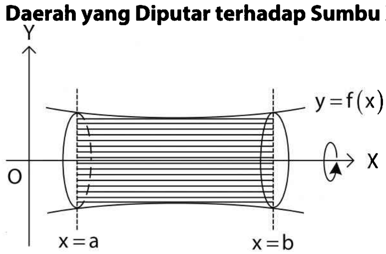


Luas daerah di atas: $L = \int \{f(x) - g(x)\}\,dx$

dengan f(x) $\geq$ g(x) dalam interval tertutup $a \leq x \leq b$.

E Volume Benda Putar

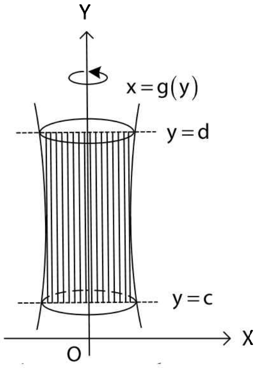
1. Daerah yang Diputar terhadap Sumbu X



Jika daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), sumbu X, garis x = a, dan garis x = b diputar sejauh 360^0 mengelilingi sumbu X, maka volume benda putar yang terjadi adalah:

$V = \pi \int_a^b y^2\,dx$ atau $V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$

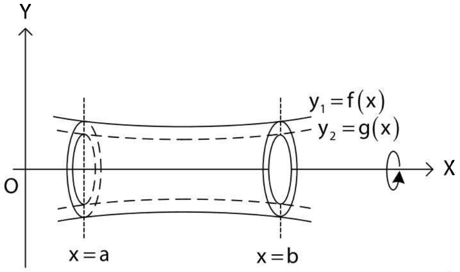
2. Daerah yang Diputar terhadap Sumbu Y



Jika daerah yang dibatasi oleh kurva x = g(y), sumbu Y, garis y = c dan garis y = d diputar sejauh 360^0 mengelilingi sumbu Y, maka volume benda putar yang terjadi adalah:

$$V = \pi\int_c^d x^2\,dy \quad \text{atau} \quad V = \pi\int_c^d \{g(y)\}^2\,dy$$

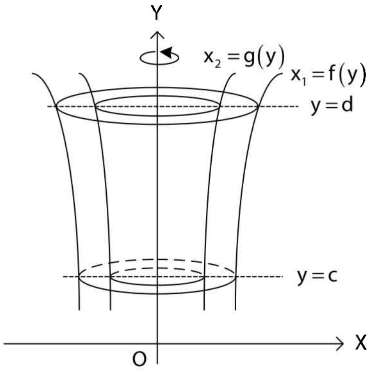
3. Dua Daerah yang Diputar terhadap Sumbu X



Jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$, kurva $y_2 = g(x)$, garis x = a, garis x = b, diputar sejauh 360^0 mengelilingi sumbu X, maka volume benda putar yang terjadi adalah:

$$V = \pi\int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right)dx \ \text{ atau } \ V = \pi\int_a^b \left\{f^2(x) - g^2(x)\right\}dx$$

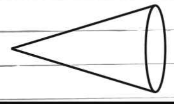
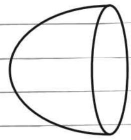
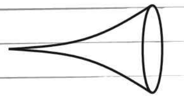
4. Dua Daerah yang Diputar terhadap Sumbu Y



Jika daerah yang dibatasi oleh kurva $x_1 = f(y)$, kurva $x_2 = g(y)$, garis y = c, garis y = d, diputar sejauh 360^0 mengelilingi sumbu Y, maka volume benda putar yang terjadi adalah:

$$V = \pi\int_c^d \left(x_1^2 - x_2^2\right)dy \ \text{ atau } \ V = \pi\int_c^d \left\{f^2(y) - g^2(y)\right\}dy$$

Rumus Praktis

	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$
	$V = \frac{\pi}{2p}b^2$
	$V = \frac{\pi}{5}p^2.b^5$

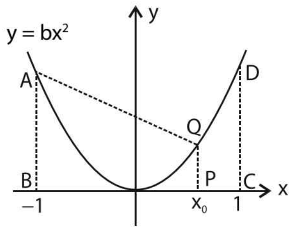
b = batas atas integral

p = koefisien x^2 atau y^2

~~khusus untuk~~ bentuk kurva $y = px^2$ atau $x = py^2$

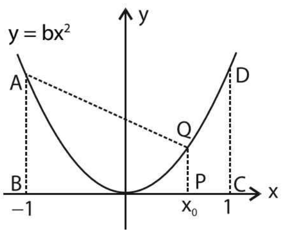
CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Misalkan A(t) menyatakan luas daerah di bawah kurva $y = bx^2$, $0 \le x \le t$. Jika titik $P(x_0, 0)$, sehingga $A(x_0) : A(1) = 1 : 8$, maka perbandingan luas trapesium ABPQ : DCPQ = …. **(SOAL SBMPTN SAINTEK)**



A. 2 : 1
B. 3 : 1
C. 6 : 1
D. 8 : 1
E. 9 : 1

Pembahasan SMART:



$AB = b(-1)^2 = b$

$CD = b(1)^2 = b$

Diketahui $\frac{A(x_0)}{A(1)} = \frac{1}{8}$, maka:

$$\frac{\int_0^{x_0} bx^2\,dx}{\int_0^1 bx^2\,dx} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\left.\frac{1}{3}bx^3\right]_0^{x_0}}{\left.\frac{1}{3}bx^3\right]_0^1} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{{x_0}^3}{1} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$

$$PQ = bx^2 \Rightarrow PQ = b\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{b}{4}$$

Perhatikan trapesium ABPQ dan CDPQ!

$$\frac{\text{Luas ABPQ}}{\text{Luas CDPQ}} = \frac{\frac{(AB+PQ)\times BP}{2}}{\frac{(CD+PQ)\times PC}{2}}$$

$$= \frac{(AB+PQ)\times BP}{(CD+PQ)\times PC}$$

$$= \frac{\left(b+\frac{b}{4}\right)\times\frac{3}{2}}{\left(b+\frac{b}{4}\right)\times\frac{1}{2}} = \frac{3}{1}$$

Jadi, perbandingan luas ABPQ dan luas CDPQ adalah 3 : 1.

Jawaban: B

2. Jika $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ dan $f(x) = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ maka $\int_0^3 f(x)\,dx = ...$

A. 8
B. 9
C. 10
D. 11
E. 12

Pembahasan SMART:

$$y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2(x^2+2)}$$

$$= \sqrt{x^4+2x^2+1} = \left((x^2+1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = x^2+1$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^3 = 12$$

Jawaban: E

3. Diketahui $\int f(x)\,dx = \frac{1}{4}ax^2 + bx + c$ dan $a \neq 0$ jika $f(a) = \frac{a+2b}{2}$ dan $f(b) = 6$, maka fungsi $f(x) = ...$

A. $\frac{1}{2}x+4$
B. $2x+4$
C. $\frac{1}{2}x-4$
D. $x+4$
E. $-\frac{1}{2}x+4$

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

$$\int f(x)\,dx = ax^n + b \Rightarrow f(x) = anx^{n-1}$$

- $\int f(x)dx = \frac{1}{4}ax^2 + bx + c; a \neq 0$

  $\Rightarrow f(x) = 2.\frac{1}{4}.ax^{2-1} + 1.bx^0 = \frac{1}{2}ax + b$

  $\Rightarrow f(x) = \frac{ax+2b}{2}$
- $f(a) = \frac{a+2b}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x+2b}{2} \Rightarrow a = 1$
- $f(b) = 6 \Rightarrow \frac{b+2b}{2} = 6 \Rightarrow \frac{3b}{2} = 6 \Rightarrow b = \frac{6.2}{3} = 4$

Jadi, $f(x) = \frac{ax+2b}{2} = \frac{x+2.4}{2} = \frac{x+8}{2} = \frac{1}{2}x+4$

Jawaban: A

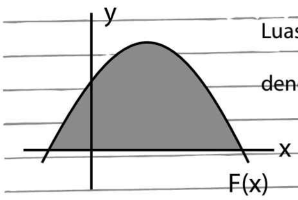
4. Jika L(a) adalah luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x dan parabola $y = ax + x^2, 0 < a < 1$, maka peluang nilai a sehingga $L(a) \geq \frac{1}{48}$ adalah ....

A. $\frac{11}{12}$
B. $\frac{7}{8}$
C. $\frac{5}{6}$
D. $\frac{3}{4}$
E. $\frac{1}{2}$

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

Luas daerah yang dibatasi grafik f(x) dan sumbu x:



$\text{Luas} = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}$

dengan $D = b^2 - 4ac$

Luas daerah yang dibatasi oleh grafik $y = ax + x^2,\ 0 < a < 1$ dan sumbu-x adalah:

$$\frac{b^2 - 4ac\sqrt{b^2-4ac}}{6a^2} = \frac{a^2 - 4.1.0\sqrt{a^2-4.1.0}}{6(1)^2}$$

$$= \frac{a^2\sqrt{a^2}}{6} = \frac{a^3}{6}$$

$$L(a) \geq \frac{1}{48} \Rightarrow \frac{a^3}{6} \geq \frac{1}{48}$$

$$\Rightarrow a^3 \geq \frac{1}{8} \Rightarrow a \geq \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$$

Sehingga, peluang a adalah $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Jawaban: E

5. $\int 2\cos(1-2x)\sin x\ dx = ...$

A. $\cos(x-1) + \frac{1}{3}\cos(3x-1) + c$

B. $\cos(x-1) - \frac{1}{3}\cos(3x-1) + c$

C. $-\sin(x-1) + \frac{1}{3}\sin(3x-1) + c$

D. $-\sin(x-1) - \frac{1}{3}\sin(3x-1) + c$

E. $\sin(x-1) + \frac{1}{3}\sin(3x-1) + c$

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

$2\sin A.\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$2\cos A.\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

Nilai dari, $\int 2\cos(1-2x).\sin x\ dx$

$$= \int 2\sin x.\cos(1-2x)\ dx$$

$$= \int \sin(x+(1-2x)) + \sin(x-(1-2x))\ dx$$

$$= \int \sin(-x+1) + \sin(3x-1)\ dx$$

$$= -\cos(x-1) - \frac{1}{3}\cos(3x-1) + C$$

$$= \cos(x-1) + \frac{1}{3}\cos(3x-1) + C$$

Jawaban: A

Catatan