

# PERSAMAAN GARIS LURUS, PROGRAM LINIER, DAN LINGKARAN

A.

## Persamaan Garis Lurus

### Bentuk Umum

Bentuk eksplisit:  $y = mx + c$ , dimana  $m = \text{gradien}$ .

Bentuk implisit:  $ax + by + c = 0$ , dimana  $m = -\frac{b}{a}$

### Kemiringan Garis Lurus (Gradien)

$$\text{Gradien (m)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan a$$

### Menyusun Persamaan Garis Lurus

1. Jika diketahui sebuah titik dan gradien ( $m$ ). Misalkan, diketahui sebuah titik  $(x_1, y_1)$  dengan gradien  $m$  maka berlaku:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

2. Jika diketahui dua buah titik Misalkan, diketahui dua buah titik  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$  maka berlaku:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

atau

$$(x_2 - x_1)y = (y_2 - y_1)x + (x_1y_2 - x_2y_1)$$

## Hubungan Dua Garis Lurus

### 1. Dua garis sejajar

Misalkan, garis  $g$  sejajar dengan garis  $h$  maka:

$$m_g = m_h$$

### b. Dua garis tegak lurus

Misalkan, garis  $g$  tegak lurus dengan garis  $h$  maka:

$$m_g \cdot m_h = -1$$

### c. Dua garis membentuk sudut $a$ jika:

$$\tan a = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$

B.

## Program Linear

Program linear adalah suatu metode matematis untuk mencari nilai optimum suatu fungsi sasaran/objektif dalam bentuk linear pada daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear.

### Menentukan Daerah Penyelesaian

Langkah umum:

1. Gambar garis  $Ax + By + C = 0$  sehingga garis tersebut membagi dua daerah penyelesaian.
2. Uji titik di luar garis tersebut, sampai memenuhi pertidaksamaan linear yang ada sebagai daerah penyelesaian.

## Menentukan Nilai Maksimum/Minimum

Langkah umum:

1. Tentukan daerah penyelesaian.
2. Tentukan titik-titik pojok pada daerah penyelesaian tersebut.
3. Substitusikan titik-titik pojok tersebut ke fungsi sasaran sehingga diperoleh nilai maksimum/minimum.

## C. Lingkaran

### Persamaan Lingkaran

1. Persamaan lingkaran yang berpusat di  $(0, 0)$  dengan jari-jari  $r$  adalah:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

2. Persamaan lingkaran yang berpusat di  $(a, b)$  dengan jari-jari  $r$  adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

3. Bentuk umum persamaan lingkaran:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Dimana:

$$\text{Pusat} = \left( -\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B \right)$$

$$\text{Jari-jari } (r) = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

4. Jarak antara titik pusat lingkaran A  $(x_1, y_1)$  ke garis  $Ax + By + C = 0$  adalah:

$$r = \frac{|A.x_1 + B.y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

## Persamaan Garis Singgung Lingkaran

### a. Persamaan Garis Singgung di Titik $(x_1, y_1)$ pada Lingkaran

1. Jika persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  maka persamaan garis singgungnya adalah:

$$x.x_1 + y.y_1 = r^2$$

2. Jika persamaan lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  maka persamaan garis singgungnya adalah:

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$$

3. Jika persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  maka persamaan garis singgungnya adalah:

$$x_1.x + y_1.y + \frac{1}{2}.a(x_1 + x) + \frac{1}{2}.a(y_1 + y) + c = 0$$

### b. Persamaan Garis Singgung dengan Gradien $(m)$ pada Lingkaran

1. Jika persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  maka persamaan garis singgungnya adalah:

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

2. Jika persamaan lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  maka persamaan garis singgungnya adalah:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

3. Jika persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  maka persamaan garis singgungnya adalah:

$$y + \frac{1}{2}b = m\left(x + \frac{1}{2}a\right) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

## Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

1. Jika garis memotong lingkaran di dua titik yang berbeda, syarat  $D > 0$
2. Jika garis memotong lingkaran di satu titik (menyinggung), syarat  $D = 0$
3. Jika garis tidak memotong ataupun menyinggung lingkaran, syarat  $D < 0$ .



### 1. Soal Ujian SNMPTN

Garis yang melalui titik (1, 1) dan (2, 3) tegak lurus pada garis.....

- (A)  $y = 2x + 1$
- (B)  $y = -2x + 1$
- (C)  $y = \frac{1}{2}x - 1$
- (D)  $y = -\frac{1}{2}x + 1$
- (E)  $y = x - 1$

#### Pembahasan:

Gradien garis melalui titik (1, 1) dan (2, 3) adalah:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = 2$$

Maka gradien garis yang tegak lurus dengan  $m_1$  adalah:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$2 \cdot m_2 = -1$$

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

Jadi, gradien garis (m) =  $-\frac{1}{2}$  adalah pilihan D.

**Jawaban: D**

### 2. Soal Ujian SNMPTN

Pak Rahman mempunyai sekantong permen yang dibagikan kepada anak-anak. Jika tiap anak diberi 2 permen maka di kantong tersisa 4 permen. Namun bila tiap anak diberi 3 permen, 2 anak tidak mendapat permen dan 1 anak mendapat 2 permen. Jika x menyatakan banyak permen dalam kantong dan y menyatakan banyak anak maka persamaan yang mewakili masalah di atas adalah.....

- A.  $x + 4 = 2y$       D.  $x + 4 = y$
- $x - 7 = 3y$        $x - 7 = 2y$
- B.  $x - 4 = 3y$       E.  $x - 4 = 2y$
- $x + 7 = 2y$        $x + 7 = 3y$

- C.  $x - 4 = 3y$
- $x + 7 = y$

#### Pembahasan:

##### Step 1: membuat persamaan berdasarkan pernyataan pertama

x = banyak permen dalam kantong

y = banyak anak

Perhatikan pernyataan:

Tiap anak diberi 2 permen maka di dalam kantong masih tersisa 4 permen.

Maka, persamaannya adalah:

$$x - 2y = 4 \text{ maka } x - 4 = 2y \text{ ....(1)}$$

##### Step 2: membuat persamaan berdasarkan pernyataan kedua

Perhatikan pernyataan:

Tiap anak diberi 3 permen, 2 anak tidak mendapat permen dan 1 anak mendapat 2 permen.

Maka, persamaannya adalah:

$$x - 3y = (-2) \cdot 3 + (2 - 3)$$

$$x - 3y = -7$$

$$x + 7 = 3y \text{ ....(2)}$$

**Jawaban: E**

### 3. SNMPTN 2006

Jika lingkaran  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  yang berpusat di (1, -1) menyinggung garis  $y = x$  maka nilai  $a + b + c = \dots$

- A. 0      D. 3
- B. 1      E. 4
- C. 2

#### Pembahasan:

##### Step 1: mencari nilai a dan b

Persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  berpusat di (1, -1) maka:

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2 - c} = \sqrt{2 - c}$$

Ingat: jika persamaan lingkaran:  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  maka pusatnya adalah:

$$\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$$

Maka:

$$1 = -\frac{1}{2}a$$

$$a = -2$$

$$-1 = -\frac{1}{2}b$$

$$b = 2$$

**Step 2: mencari nilai c**

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Substitusikan nilai  $a = -2$  dan  $b = 2$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + c = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 - 2 + c = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2 - c$$

Substitusikan persamaan garis  $y = x$  maka:

$$(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 2 - c$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 2 - c$$

$$2x^2 + 2 = 2 - c$$

$$2x^2 + c = 0$$

Karena menyinggung ( $D = 0$ ) maka:

$$D = 0$$

$$0 - 4 \cdot 2 \cdot c = 0$$

$$c = 0$$

Jadi:

$$a + b + c = -2 + 2 + 0 = 0$$

**Jawaban: A**