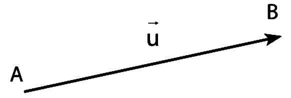
BAB 5 VEKTOR

A Pengertian dan Notasi Vektor

Vektor adalah besaran yang mempunyai nilai dan arah.

Contoh:



Vektor $\vec{u}$ atau AB menyatakan vektor yang berpangkal di titik A dan berujung di titik B.

Bentuk umumnya:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

Gaya, kecepatan, berat, dan momentum adalah contoh dari vektor.

B Vektor di R-2 dan R-3

Vektor di R-2 adalah suatu vektor yang diwakili oleh ruas garis berarah yang terletak pada sebuah bidang datar. Sedangkan, vektor di R-3 adalah suatu vektor yang diwakili oleh ruas garis berarah yang terletak pada sebuah ruang.

1. Operasi pada Vektor

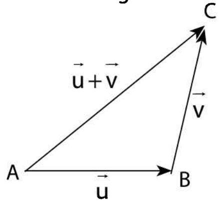
Jika suatu titik $A(a_1, a_2, a_3)$ dalam ruang (juga pada bidang) dan O titik pangkal, maka $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ adalah vektor posisi dari titik A dan dapat ditulis:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ atau } \overrightarrow{OA} = \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Secara geometri, vektor dapat dijumlahkan dengan aturan segitiga atau aturan jajargenjang.

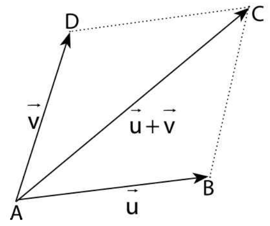
a. Aturan Segitiga

Misalkan $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ dan $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, maka $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$ dan digambarkan sebagai berikut:



b. Aturan Jajar Genjang

Misalkan $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ dan $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, maka $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$ dan digambarkan sebagai berikut:



c. Cara Aljabar

1) Untuk $\vec{u}$ dan $\vec{\ }$ di R_2

Jika $\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, maka:

$$\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$$

2) Untuk $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ di R_3

Jika $\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, maka:

$$\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

2. Panjang Vektor

a. Jika titik $P(x,y)$ dan $O(0,0)$ di R-2, maka panjang vektor OP = $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$

b. Jika titik $P(x,y,z)$ dan $O(0,0,0)$ di R-3, maka panjang vektor OP = $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

c. Jika titik $P(a_1,a_2,a_3), Q(b_1,b_2,b_3), O(0,0,0)$

$$PQ = OQ - OP = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Panjang vektor PQ yaitu:

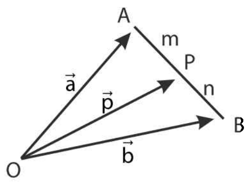
$$|PQ| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

d. Pada vektor p dan q berlaku:

1) $\left|\vec{p}+\vec{q}\right|^2 = \left|\vec{p}\right|^2 + \left|\vec{q}\right|^2 + 2\vec{p}\vec{q}$

2) $\left|\vec{p}-\vec{q}\right|^2 = \left|\vec{p}\right|^2 + \left|\vec{q}\right|^2 - 2\vec{p}\vec{q}$

3. Perbandingan Dua Vektor



Jika P membagi AB dengan perbandingan m : n, maka vektor posisi titik P:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

4. Perkalian Skalar Dua Vektor

Jika $\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, maka hasil kali skalar vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

atau $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

Sehingga, cosinus sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah:

$$\cos\angle\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3}{\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right)\cdot\left(\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\right)}$$

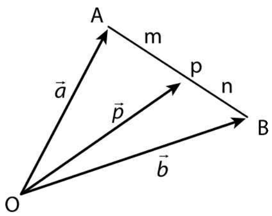
Jika:

a. $\cos\angle\left(\vec{u},\vec{v}\right)=1$, maka $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ berimpit dan searah.

b. $\cos\angle\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-1$, maka $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ berlawanan arah.

c. $\cos\angle\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$, maka $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ saling tegak lurus.

C Pembagian Ruas Garis



Jika $\vec{p}$ adalah vektor dari titik p yang membagi garis AB dengan perbandingan $\overline{AP}:\overline{PB} = m:n$ maka:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

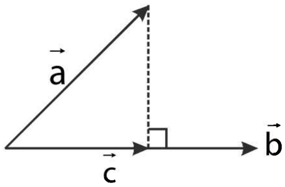
Sedangkan koordinat titik P yaitu $P\left(x_p, y_p, z_p\right)$

dengan: $x_P = \dfrac{m\,x_A + n\,x_B}{m+n}$

$$y_P = \frac{m\,y_A + n\,y_B}{m+n}$$

$$z_P = \frac{m\,z_A + n\,z_B}{m+n}$$

D Proyeksi Vektor



$\vec{c}$ adalah proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$\text{panjang } \vec{c} = \left|\vec{c}\right| = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

Proyeksi vektor orthogonal vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$, yaitu:

$$\frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\,.\,\vec{b}$$

TRIK PRAKTIS

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\vec{a}\,.\,\vec{b}}$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\,.\,\vec{b}}$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 + 2\left(\vec{a}\,\vec{b}+\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}\right)}$$

C Titik Berat Segitiga

Jka ΔABC dengan $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$, $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$, dan $C\left(x_C, y_C, z_C\right)$ maka koordinat titik berat ΔABC adalah $P\left(x_P, y_P, z_P\right)$ dengan:

$$x_P = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_P = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

$$z_P = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Diketahui panjang vektor $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=7$, $|\vec{c}|=3$ dan $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, maka panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$ adalah ....

A. 2 D. $\frac{14}{3}$

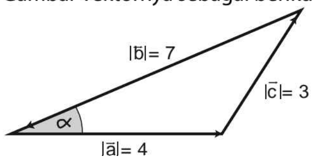
B. 3 E. $\frac{14}{5}$

C. 4

Pembahasan SMART:

Diketahui panjang vektor, $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=7$, $|\vec{c}|=3$ dan $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$.

Gambar vektornya sebagai berikut:



Dengan aturan cosinus, diperoleh:

$$\cos\alpha=\frac{4^2+7^2-3^2}{2.4.7}=\frac{16+49-9}{2.4.7}=\frac{56}{56}=1$$

Panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$

$$=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|.\cos\alpha}{|\vec{b}|}=|\vec{a}|.\cos\alpha=4.1=4$$

Jawaban: C

2. Diketahui vektor $\vec{u}=(a,-2,-1)$ dan $\vec{v}=(a,a,-1)$. Jika vektor $\vec{u}$ tegak lurus pada $\vec{v}$, maka nilai a adalah ....

A. 1

D. 2

B. 0 E. 3

C. 1

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

Sudut antara vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ adalah α, maka:

$$\cos\alpha=\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}|.|\bar{b}|}$$

Jika, vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ saling tegak lurus maka $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$

Diketahui vektor $\vec{u}=(a,-2,-1)$ tegak lurus dengan vektor $\vec{v}=(a,a,-1)$, maka:

$\vec{u}.\vec{v}=0$

$\Rightarrow a.a+(-2).a+(-1).(-1)=0$

$\Rightarrow a^2-2a+1=0$

$\Rightarrow (a-1)(a-1)=0$

$\Rightarrow a=1$

Jawaban: C

3. Diketahui $\|\vec{u}\|=1$ dan $\|\vec{v}\|=4$. Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ membentuk sudut $30°$, maka $(\vec{u}+\vec{v})\circ\vec{v}=...$

A. $2\sqrt{3}+16$ D. 5

B. $2\sqrt{3}+4$ E. 9

C. $\sqrt{3}+4$

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

$\vec{a}\circ\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$

Sifat operasi aljabar vektor:

Distributif: $(\vec{a}+\vec{b})\circ\vec{c}=\vec{a}\circ\vec{c}+\vec{b}\circ\vec{c}$

$(\vec{u}+\vec{v})\circ\vec{v}=\vec{u}\circ\vec{v}+\vec{v}\circ\vec{v}$

$=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\angle(\vec{u},\vec{v})+\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\angle(\vec{v},\vec{v})$

$=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos 30°+\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos 0°$

$=1\cdot4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}+4\cdot4\cdot1$

$=2\sqrt{3}+16$

Jawaban: A

4. Diketahui vaktor-vektor $\bar{u}=(a,1,-a)$ dan $\bar{v}=(1,a,a)$. Jika $\bar{u}_1$ vektor proyeksi $\bar{u}$ pada $\bar{v}$, $\bar{v}_1$ vektor proyeksi $\bar{v}$ pada $\bar{u}$, dan θ sudut antara $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ dengan $\angle(\bar{u},\bar{v})$, maka luas jajar genjang yang dibentuk oleh $\bar{u}_1$ dan $\bar{v}_1$ adalah ....

A. $\frac{2}{9}\sqrt{2}$ D. $\frac{2}{3}\sqrt{6}$

B. $\bar{u}.\bar{v}$ E. 2

C. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

Pembahasan SMART:

1) $\bar{u}=(a,1,-a)$, $\bar{v}=(1,a,a)$, $\angle(\bar{u},\bar{v})=\theta$ dengan $\cos\theta=\frac{1}{3}$.

$\bar{u}.\bar{v} = |\bar{u}|.|\bar{v}|\cos\theta$

$$a + a - a^2 = \sqrt{a^2+1+a^2}.\sqrt{1+a^2+a^2}.\frac{1}{3}$$

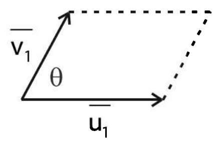
$6a - 3a^2 = 2a^2 + 1$
$5a^2 - 6a + 1 = 0$
$(5a - 1)(a - 1) = 0$

$a = \frac{1}{5}$ atau $a = 1$

2) Untuk $a = 1$, maka $\bar{u} = (1,1,-1)$, $\bar{v} = (1,1,1)$.
Karena $\bar{u}_1$ adalah proyeksi $\bar{u}$ pada $\bar{v}$, maka $\bar{u}_1 // \bar{v}$
Karena $\bar{v}_1$ adalah proyeksi $\bar{v}$ pada $\bar{u}$, maka $\bar{v}_1 // \bar{u}$
Akibatnya, $\angle(\bar{u}_1, \bar{v}_1) = \angle(\bar{u}, \bar{v}) = \theta$

3) $|\bar{u}_1| = \dfrac{\bar{u}.\bar{v}}{|\bar{v}|} = \dfrac{1+1-1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$|\bar{v}_1| = \dfrac{\bar{v}.\bar{u}}{|\bar{u}|} = \dfrac{1+1-1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

4)


Luas jajargenjang yang dibentuk oleh $\bar{u}_1$ dan $\bar{v}_1$ adalah $|\bar{u}_1|.|\bar{v}_1|.\sin\theta$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{2}$$

Jawaban: A

5. Misalkan diberikan vektor $\vec{b} = (y, -2z, 3x)$ dan $\vec{c} = (2z, 3x, -y)$. Diketahui vektor $\vec{a}$ membentuk sudut tumpul dengan sumbu y dan $\|\vec{a}\| = 2\sqrt{3}$. Jika $\vec{a}$ membentuk sudut yang sama dengan $\vec{b}$ maupun $\vec{c}$, dan tegak lurus dengan $\vec{d} = (1, -1, 2)$, maka $\vec{a} =$ ....

A. $(1, 0, -1)$
B. $(-2, -2, -2)$
C. $(2, 0, -2)$
D. $(-2, 0, 2)$
E. $(2, -2, -2)$

Pembahasan SMART:

Vektor $\vec{a}$ tegak lurus vektor $\vec{d}$ maka $\vec{a}\cdot\vec{d} = 0$.
Pilhan yang memenuhi adalah opsi E yaitu $\vec{a} = (2, -2, -2)$ karena:

$$\vec{a}\cdot\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$$

Jadi, vektor $\vec{a} = (2, -2, -2)$.

Jawaban: E

Catatan