06

STATISTIKA, PELUANG, DAN LOGIKA

A. Statistika

Rumus untuk Data Tunggal

Misalkan, dari data tersusun atas: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$

1. **Mean** (rataan hitung)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

atau

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + ... + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

2. **Modus** (Mo) adalah nilai data yang paling banyak muncul/frekuensinya terbesar.
3. **Median** (Me) adalah nilai tengah data setelah data disusun dari yang terkecil hingga terbesar.
   Jika n ganjil maka mediannya adalah:

$$Me = X_{\frac{n+1}{2}}$$

   Jika n genap maka mediannya adalah:

$$Me = \frac{1}{2}\left(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

4. **Kuartil** (Q) adalah nilai data yang membagi sekelompok data menjadi 4 bagian sama banyak. Kuartil data terdiri atas kuartil bawah (Q_1), kuartil tengah (Q_2), dan kuartil atas (Q_3).
5. **Jangkauan** (J) adalah nilai data terbesar – nilai data terkecil.

$$J = X_{maks} - X_{min}$$

6. **Jangkauan antarkuartil**

$$H = Q_3 - Q_1$$

7. **Jangkauan semi interkuartil** atau simpangan kuartil (Q_d)

$$Q_d = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

8. **Simpangan rata-rata**

$$S_R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$$

9. **Ragam/variansi**

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|^2$$

10. **Simpangan baku**

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|^2}$$

Rumus untuk Data Kelompok

1. **Mean** (rataan hitung)

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Keterangan:

x_s = rataan sementara (nilai dari salah satu titik tengah interval kelas)

x_i = titik tengah interval kelas data ke-i

$d_i \ = \ x_i - \overline{x}_s$

f_i = frekuensi kelas ke-i

2. **Modus** (Mo)

$$Mo = t_b + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right).c$$

Dimana:

$d_1 = f_0 - f_{-1}$

$d_2 = f_0 - f_{+1}$

Keterangan:

tb = tepi bawah kelas modus data

c = panjang interval kelas

f_{-1} = frekuensi kelas data sebelum kelas modus

f0 = frekuensi kelas modus

f_{+1} = frekuensi kelas data setelah kelas modus

3. **Kuartil** (Q_i)

$$Q_i = t_b + \left(\frac{\frac{i}{4}\sum f - f_m}{f_{Q_n}}\right).c \text{, dimana } i = 1, 2, 3$$

Keterangan:

t_b = tepi bawah kelas kuartil ke-i (Q_i)

c = panjang interval kelas

$\sum f$ = jumlah frekuensi

f_m = frekuensi kumulatif sebelum kelas Q_i

f_{Qn} = frekuensi kelas Q_i

Perubahan Data

Jika terjadi perubahan pada data tunggal dengan nilai perubahan sama untuk setiap data maka perubahannya adalah:

	Setiap nilai data di:			
	ditambah p	dikurangi p	dikali p	dibagi p
$\overline{x}$	$\overline{x}_b = \overline{x} + p$	$\overline{x}_b = \overline{x} - p$	$\overline{x}_b = p\,\overline{x}$	$\overline{x}_b = \overline{x} + p$
M_o	$M_b = M_o + p$	$M_b = M_o - p$	$M_b = p.M_o$	$M_b = M_o : p$
Q	$Q_b = Q + p$	$Q_b = Q - b$	$Q_b = p.Q$	$Q_b = Q : p$
J	$J_b = J$	$J_b = J$	$J_b = J \,.\, p$	$J_b = J : p$

B. Peluang

Kaidah Pencacahan

Jika suatu kejadian dapat terjadi dalam p cara berlainan dan kejadian berikutnya dapat terjadi dalam q cara berlainan maka kedua kejadian tersebut dapat terjadi dalam (p x q) cara.

Perkalian bilangan asli yang pertama disebut faktorial (!).

n! dibaca " n faktorial "

n! = n x (n – 1) x (n – 2) x .... x 3 x 2 x 1

Contoh:

4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

1! = 1

0! = 1

Permutasi

Cara menempatkan n buah unsur ke dalam r tempat yang tersedia dengan urutan diperhatikan disebut permutasi r unsur dari n unsur, dinotasikan dengan nPr atau P(n, r) atau $P_n^{\ r}$ atau $P_{n,r}$.

1. Banyaknya permutasi n unsur berbeda disusun n unsur(seluruhnya) adalah:

$$P = n!$$

2. Banyaknya permutasi yang dapat disusun dari n anggota suatu himpunan diambil r unsur anggota adalah:

$$_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

4. Permutasi yang memuat beberapa unsur yang sama. Misalkan terdapat beberapa susunan n unsur dengan n_1 unsur sama, n_2 unsur sama, dan seterusnya maka:

$$_nP_{n1', n2', n3', \ldots} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \ldots}$$

5. Banyaknya permutasi siklis adalah permutasi yang disusun secara melingkar dengan memperhatikan urutannya (arah putarannya) adalah:

$${}_{n}P_{(siklis)} = (n-1)!$$

Kombinasi

Banyak kombinasi (susunan acak) k unsur dari n unsur yang tersedia adalah:

$${}_{n}C_{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \text{ dimana } n \geq k$$

Teorema Binomial Newton

$$(a+b)^n = {}_{n}C_{0}\, a^n + {}_{n}C_{1}\, a^{n-1}b + {}_{n}C_{2}\, a^{n-2}b^2 + \ldots + {}_{n}C_{n}\, b^n$$

Contoh:

$$(x+y)^3 = {}_{3}C_{0}\, x^3 + {}_{3}C_{1}\, a^{3-1}b + {}_{3}C_{2}\, a^{3-2}b^2 + {}_{3}C_{3}\, b^3$$
$$= x^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Peluang Suatu Kejadian

Peluang kejadian A dinotasikan dengan P(A) adalah perbandingan banyaknya hasil kejadian A dinotasikan n(A) terhadap banyaknya semua hasil yang mungkin dinotasikan dengan n(S) dalam suatu percobaan. Peluang suatu kejadian A dirumuskan sebagai berikut:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Keterangan:

n(A) = banyak anggota himpunan A

n(S) = banyak anggota himpunan ruang sampel

P(A) = peluang kejadian A

Kisaran Nilai Peluang

Nilai peluang berkisar antara $0 \leq P(A) \leq 1$. Untuk P(A) = 1, artinya kejadian A pasti terjadi. Sedangkan P(A) = 0, artinya kejadian A tidak mungkin terjadi (mustahil).

Frekuensi Harapan

Frekuensi harapan kejadian A adalah banyaknya kejadian A yang diharapkan dalam beberapa kali percobaan, dan dapat dirumuskan:

$$F(A) = P(A) \times n$$

Keterangan:
F(A) = frekuensi harapan kejadian A
n = banyak percobaan
P(A) = peluang kejadian A

Peluang Kejadian Majemuk

1. **Peluang gabungan dari dua kejadian**

   Misalkan, A dan B adalah dua kejadian yang terdapat dalam ruang sampel S maka peluang gabungan dua kejadiannya dituliskan sebagai berikut:

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

   Keterangan:

   P(A) = peluang kejadian A

   P(B) = peluang kejadian B

   $P(A \cup B)$ = peluang kejadian A atau B

   $P(A \cap B)$ = peluang kejadian A dan B

2. **Peluang dua kejadian yang saling lepas**

   Dua kejadian dikatakan saling lepas jika $P(A \cap B) = 0$ maka:

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. **Peluang gabungan dua kejadian yang saling bebas**

   Dua kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika kemunculan yang satu tidak dipengaruhi kemunculan kejadian lainnya (saling bebas).

   $$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

4. **Kejadian bersyarat**

   Peluang munculnya kejadian A dengan syarat kejadian B muncul dapat didefinisikan:

   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ; dimana } P(B) \neq 0.$$

   atau

   $$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

Keterangan:

$P(A|B)$ = peluang kejadian A setelah kejadian B terjadi

$P(A \cap B)$ = peluang kejadian A dan B

$P(A)$ = peluang kejadian A

$P(B)$ = peluang kejadian B

C. Logika Matematika

Tabel Kebenaran

1. Negasi atau ingkaran (~)

Negasi atau ingkaran adalah pernyataan baru dengan nilai kebenaran berlawanan dengan nilai pernyataan semula.

p	~p
B	S
S	B

2. Konjungsi

Konjungsi adalah penggabungan dua pernyataan menggunakan kata penghubung "dan". Konjungsi dari pernyataan p dan q dilambangkan $p \wedge q$.

p	q	p □ q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

3. Disjungsi

Disjungsi adalah penggabungan dua pernyataan menggunakan kata penghubung "atau". Disjungsi dari pernyataan p dan q dilambangkan $p \vee q$.

p	q	p □ q
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

4. Implikasi

Implikasi adalah penggabungan dua pernyataan menggunakan kata "jika... maka...". Implikasi dari pernyataan p dan q ditulis $p \rightarrow q$.

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

5. Biimplikasi

Biimplikasi adalah penggabungan dua pernyataan menggunakan kata penghubung "jika dan hanya jika". Biimplikasi dari pernyataan p dan q ditulis $p \leftrightarrow q$.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Pernyataan Berkuantor

Kuantor universal adalah suatu pernyataan yang berlaku umum dan dinotasikan dengan $\forall x$ dibaca "Untuk setiap nilai x". Kuantor eksistensial adalah suatu pernyataan yang berlaku secara khusus dan dinotasikan dengan $\exists x$ dibaca "ada/beberapa nilai x".

Ingkaran dari pernyataan berkuantor, yaitu:

1. $\sim(\exists P(x)) = \forall(\sim P(x))$
2. $\sim(\forall P(x)) = \exists(\sim P(x))$

Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Jika implikasi $p \rightarrow q$ maka:

Konvers	Invers	Kontraposisi
$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$

Pernyataan-pernyataan yang Ekuivalen

1. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
2. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
3. $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
4. $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
5. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
6. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ (implikasi $\equiv$ kontraposisi)
7. $q \rightarrow p \equiv \sim p \rightarrow \sim q$ (konvers $\equiv$ kontraposisi)

Penarikan Kesimpulan

1. Modus Ponens

Bentuk umum:

Premis 1: $p \rightarrow q$

Premis 2: p

Kesimpulan: q

2. Modus Tollens

Bentuk umum:

Premis 1: $p \rightarrow q$

Premis 2: $\sim q$

Kesimpulan: $\sim p$

3. Silogisme

Bentuk umum:

Premis 1: $p \rightarrow q$

Premis 2: $q \rightarrow r$

Kesimpulan: $p \rightarrow r$

CONTOH SOAL | STATISTIKA, PELUANG, DAN LOGIKA

1. **Soal Ujian SNMPTN**

   Jika nilai rata-rata tes matematika 20 siswa kelas A adalah 65 dan nilai rata-rata 10 siswa lainnya di kelas tersebut adalah 80 maka nilai rata-rata semua siswa kelas A adalah ....

   A. 72 D. 69
   B. 71 E. 68
   C. 70

   Pembahasan:

   Diketahui:

   $n_A = 20$ siswa; $\overline{x}_A = 65$

   $n_B = 10$ siswa; $\overline{x}_B = 80$

   Maka, rata-rata gabungannya adalah

   $$= \frac{n_A . \overline{x}_A + n_B . \overline{x}_B}{n_A + n_B}$$

   $$= \frac{20 . 65 + 10 . 80}{20 + 10} = \frac{2.100}{30} = 70$$

   Jawaban: C

2. **Soal Ujian SNMPTN**

   Suatu panitia yang terdiri atas 4 orang dengan rincian seorang sebagai ketua, seorang sebagai sekretaris, dan dua orang sebagai anggota (kedua anggota tidak dibedakan), akan dipilih 3 pria dan 3 wanita. Jika ketua panitia harus wanita dan sekretarisnya harus pria maka banyak susunan panitia berbeda yang bisa dibentuk adalah ....

   A. 36 D. 90
   B. 54 E. 108
   C. 72

Pembahasan:

3 pria dan 3 wanita dipilih menjadi ketua, sekretaris, dan anggota.

Karena ketua harus wanita maka cara memilih ketua dari wanita ada 3 cara.

Karena sekretaris harus pria maka cara memilih sekretaris dari pria ada 3 cara.

Sedangkan, cara memilih 2 anggota dari 4 orang (2 sudah dipilih menjadi ketua dan sekretaris).

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4.3.2!}{2!.2.1} = 6$$

Jadi, banyaknya susunan panitia adalah: 3 3 x 6 = 54 cara.

Jawaban: B

3. **Soal Ujian SNMPTN**
   Pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran sama dengan pernyataan: "Jika bilangan ganjil sama dengan bilangan genap maka 1 + 2 bilangan ganjil" adalah…
   A. "Bilangan ganjil sama dengan bilangan genap dan 1 + 2 bilangan genap"
   B. "Jika 1 + 2 bilangan ganjil maka bilangan ganjil sama dengan bilangan genap"
   C. "Jika bilangan ganjil sama dengan bilangan genap maka 1 + 2 bilangan genap"
   D. "Bilangan ganjil sama dengan bilangan genap dan 1 + 2 bilangan ganjil"
   E. "Jika bilangan ganjil tidak sama dengan bilangan genap maka 1 + 2 bilangan genap"

Pembahasan:

p = "bilangan ganjil sama dengan bilangan genap" bernilai **Salah**

q = "1 + 2 bilangan ganjil " bernilai **Benar**

Maka, $p \Rightarrow q$ bernilai **Benar**.

Perhatikan pilihan jawaban.

A. "Bilangan ganjil sama dengan bilangan genap dan 1 + 2 bilangan genap"
   $S \wedge S$ bernilai **Salah**

B. "Jika 1 + 2 bilangan ganjil maka bilangan ganjil sama dengan bilangan genap"
   $B \Rightarrow S$ bernilai **Salah**

C. "Jika bilangan ganjil sama dengan bilangan genap maka 1 + 2 bilangan genap"
   $S \Rightarrow S$ bernilai **Benar**

D. "Bilangan ganjil sama dengan bilangan genap dan 1 + 2 bilangan ganjil"
   $S \wedge B$ bernilai **Salah**

E. "Jika bilangan ganjil tidak sama dengan bilangan genap maka 1+2 bilangan genap"
   $B \Rightarrow S$ bernilai **Salah**

Jawaban: C