

BAB 2

PERSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT

CATATAN:

Untuk Pendalaman Materi, silahkan buka kembali pada materi PERSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT kelompok TKPA Matematika Dasar. Khusus pada bagian ini akan langsung diberikan model-model soal yang sering keluar dalam SBMPTN.

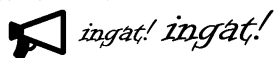
CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Persamaan kuadrat yang mempunyai akar a dan b

sehingga $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{7}{10}$ adalah

- A. $x^2 + 7x - 10 = 0$ D. $x^2 - 7x - 10 = 0$
B. $x^2 + 7x + 10 = 0$ E. $x^2 - 7x + 10 = 0$
C. $x^2 - 10x + 7 = 0$

Pembahasan SMART:



Persamaan kuadrat yang memiliki akar-akar a

dan b yaitu $x^2 - (a+b)x + a \cdot b = 0$

Suatu persamaan kuadrat memiliki akar-akar a dan b ,

$$\text{sehingga } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{7}{10}$$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah:

$$x^2 - (a+b)x + a \cdot b = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Jawaban: E

2. Diketahui $f(x) = \frac{10}{g(x)}$, dengan

$g(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ dan memiliki titik puncak di $(1, -2)$. Jika gradien garis singgung $g(x)$ di $x = 2$ sama dengan 2, maka persamaan asimtot tegak dari $f(x)$ adalah

- A. $x = 0$ dan $x = 1$
B. $x = -1$ dan $x = 3$
C. $x = 1 + \sqrt{2}$ dan $x = 1 - \sqrt{2}$

D. $x = 1 + \sqrt{3}$ dan $x = 1 - \sqrt{3}$

E. $x = 2\frac{1}{2}$ dan $y = -\frac{1}{2}$

Pembahasan SMART:



Asimtot tegak adalah sebuah garis dengan persamaan $x = h$ dimana garis tersebut tidak akan pernah dipotong ataupun disinggung oleh kurva. Hal ini berlaku pada fungsi rasional dan berbentuk pecahan yang digambarkan pada sebuah bidang Cartesius. Cara mencari asimtot tegaknya kita tinggal membentuk sebuah pembuat nol dari penyebut atau sama artinya kita mencari penyelesaian dari $g(x) = 0$.

Diketahui parabola $g(x)$ dengan puncak $(1, -2)$. Maka, persamaan parabola adalah:

$$y = a(x-1)^2 - 2 \Rightarrow y = ax^2 - 2ax + a - 2$$

Gradien garis singgung di $x = 2$ adalah 2, maka:

$$m = y' = 2ax - 2a \Rightarrow 2 = 2ax - 2a$$

$$x = 2 \Rightarrow 2 = 4a - 2a \Rightarrow a = 1$$

Sehingga, persamaan parabola adalah

$$g(x) = y = x^2 - 2x - 1$$

Bentuk persamaan $g(x) = 0$, yaitu $0 = x^2 - 2x - 1$

Nilai x ditentukan dengan rumus abc:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Jadi, persamaan asimtot tegak adalah $x = 1 + \sqrt{2}$ dan $x = 1 - \sqrt{2}$.

Jawaban: C

3. x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan $x^2 - (p+3)x + (2p+2) = 0$. Jika p bilangan asli dan $x_1 = 3x_2$, maka $p = \dots$

- A. 4 D. 7
B. 5 E. 8
C. 6

Pembahasan SMART:

$$x^2 - (p+3)x + (2p+2) = 0 \dots (i)$$

Persamaan yang dimaksud memiliki akar-akar $x_1 = 3x_2$ sehingga persamaannya yaitu:

$$(x - 3x_2)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (4x_2)x + 3x_2^2 = 0 \dots (ii)$$

Dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh:

$$4x_2 = p+3 \rightarrow x_2 = \frac{p+3}{4}$$

$$3x_2^2 = 2p+2 \dots (iii)$$

Kemudian $x_2 = \frac{p+3}{4}$ disubstitusikan ke dalam persamaan (iii), diperoleh:

$$3\left(\frac{p+3}{4}\right)^2 = 2p+2$$

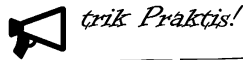
$$3(p+3)^2 = 32p+32$$

$$3p^2 + 18p + 27 = 32p + 32$$

$$3p^2 - 14p - 5 = 0$$

$$(3p+1)(p-5) = 0$$

$$p = -\frac{1}{3} \text{ atau } p = 5$$



$$mb^2 = ac(m+1)^2$$

$$3(p+3)^2 = 1 \cdot (2p+2)(3+1)^2$$

$$3(p+3)^2 = 32p+32$$

$$3p^2 - 14p - 5 = 0$$

$$(3p+1)(p-5) = 0$$

Sehingga, diperoleh $p = -\frac{1}{3}$ atau $p = 5$

Jawaban: B

4. Jika grafik fungsi $y = x^2 + 2mx + m$ di atas fungsi $y = mx^2 + 2x$, maka

- A. $m = 1$ D. $1 < m < 2$
 B. $m < \frac{1}{2}$ E. $m > 1$
 C. $\frac{1}{2} < m < 1$

Pembahasan SMART:

$$y_1 = x^2 + 2mx + m \text{ di atas } y_2 = mx^2 + 2x$$

$$x^2 + 2mx + m > mx^2 + 2x$$

$$(1-m)x^2 + (2m-2)x + m > 0$$

Syarat definit positif yaitu $a > 0$ dan $D < 0$.

$$1-m > 0$$

$$m < 1$$

$$(2m-2)^2 - 4(1-m)m < 0$$

$$2m^2 - 3m + 1 < 0$$

$$(2m-1)(m-1) < 0$$

$$m < \frac{1}{2}, m > 1$$

Penyelesaian yang memenuhi adalah $m < \frac{1}{2}$.

Jawaban: B

5. $y = (t+1)x^2 - tx$ berpotongan dengan garis $y = tx + (4-t)$. Jika kurva terbuka ke atas, maka nilai t yang memenuhi adalah

Pembahasan SMART:

Kurva terbuka ke atas, maka:

$$a > 0$$

$$t+1 > 0$$

$$t > -1$$

Karena kurva berpotongan dengan garis, maka:

$$y_1 = y_2$$

$$(t+1)x^2 - tx = tx + (4-t)$$

Karena saling berpotongan, maka $D > 0$

$$(-2t)^2 - 4(t+1)(t-4) > 0$$

$$4t^2 - 4(t^2 - 3t - 4) > 0$$

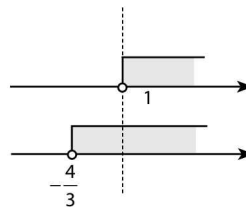
$$4t^2 - 4t^2 + 12t + 16 > 0$$

$$12t > -16$$

$$t > -\frac{16}{12}$$

$$t > -\frac{4}{3}$$

Daerah penyelesaian dari kedua pertidaksamaan tersebut adalah:



Penyelesaiannya adalah $t > -1$

6. Apabila a dan b adalah akar-akar persamaan kuadrat dari $3x^2 - 5x + 1 = 0$ maka persamaan kuadrat baru

yang akar-akarnya $\frac{1}{a^2} + 1$ dan $\frac{1}{b^2} + 1$ adalah...

- A. $x^2 - 21x - 29 = 0$
- B. $x^2 - 21x + 29 = 0$
- C. $x^2 + 21x + 29 = 0$
- D. $x^2 - 29x + 21 = 0$
- E. $x^2 + 29x + 21 = 0$

Pembahasan:

$3x^2 - 5x + 1 = 0$ dengan akar-akar persamaan kuadrat a dan b

Jumlah :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + 1 + \frac{1}{b^2} + 1 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 2 \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} + 2 = \frac{(a+b)^2 - 2(ab)}{(ab)^2} + 2 \\ &= \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + 2 = \frac{\frac{25}{9} - \frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} + 2 = \frac{\frac{25-6}{9}}{\frac{1}{9}} + 2 \\ &= 19 + 2 = 21 \end{aligned}$$

Hasil kali :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a^2} + 1\right)\left(\frac{1}{b^2} + 1\right) &= \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1 \\ \frac{1}{(ab)^2} + \frac{a^2 + b^2}{(ab)^2} + 1 &= \frac{1}{(ab)^2} + \frac{(a+b)^2 - 2(ab)}{(ab)^2} + 1 \end{aligned}$$

Ingat !!!

Kita sudah menghitung $\frac{(a+b)^2 - 2(ab)}{(ab)^2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + 19 + 1 \\ &= 9 + 19 + 1 \\ &= 29 \end{aligned}$$

Persamaan kuadrat baru yang diperoleh adalah

$$x^2 - (\text{jumlah})x + \text{hasilkali} = 0$$

$$x^2 - 21x + 29 = 0$$

Jawaban: B

7. Persamaan kuadrat $x^2 + (a-1)x + 2 = 0$ memiliki akar-akar p dan q. Apabila $p=2q$ dan $a>0$ maka nilai a adalah...
- A. 2
 - B. 3
 - C. 4
 - D. 6
 - E. 8

Pembahasan:

$x^2 + (a-1)x + 2 = 0$ memiliki akar-akar p dan q
Apabila $p=2q$ dan $a>0$

Untuk $p+q = -\frac{b}{a}$ sehingga $2q + q = -(a-1)$

$$3q = -(a-1)$$

$$q = -\frac{(a-1)}{3} \text{ karena } p = 2q = -\frac{2(a-1)}{3}$$

Untuk $p \cdot q = \frac{c}{a}$ sehingga $-\frac{2(a-1)}{3} \cdot -\frac{(a-1)}{3} = 2$

$$\frac{(a-1)}{3} \cdot \frac{(a-1)}{3} = 1$$

$$(-1)^2 = 3^2$$

$$(a-1)^2 - 3^2 = 0, \text{ ingat! } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a-1+3)(a-1-3) = 0$$

$$(a+2)(a-4) = 0$$

$$(a+2) = 0 \text{ atau } (a-4) = 0$$

$$a = -2 \text{ (tidak memenuhi) atau } a = 4 \text{ (memenuhi)}$$

Jawaban: C

8. Jika a dan b adalah akar-akar persamaan kuadrat dari

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \text{ maka } a^4 + 6a^2b^2 + b^4 = \dots$$

- A. 121
- B. 125
- C. 127
- D. 130
- E. 136

Pembahasan:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 = a^4 + b^4$$

$$\text{Maka } a^4 + 6a^2b^2 + b^4$$

$$= (a+b)^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 + 6a^2b^2$$

$$= (a+b)^4 - 4a^3b - 4ab^3$$

$$= (a+b)^4 - 4ab(a^2 + b^2)$$

$$= \{(a+b)^4 - 4ab\} \{(a+b)^2 - 2ab\}$$

$$= \left\{ \left(-\frac{b}{a} \right)^4 - 4 \left(\frac{c}{a} \right) \right\} \left\{ \left(-\frac{b}{a} \right)^2 - 2 \left(\frac{c}{a} \right) \right\}$$

$$= (3)^4 - 4(-1) \{ (3)^2 - 2(-1) \}$$

$$= 81 + 4 \cdot 11$$

$$= 125$$

Jawaban: B

9. Jika akar $x^2 + ax + b = 0$ adalah $\frac{1}{3}$ akar $x^2 + cx + a = 0$

dengan $a, b, c \neq 0$ maka $\frac{a+c}{b} = \dots$

- A. $\frac{10}{27}$ C. 30
B. $\frac{28}{9}$ D. 36
E. 40

Pembahasan:

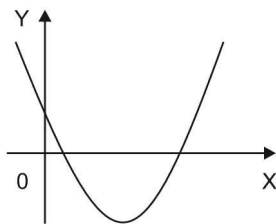
- Misal: akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + ax + b = 0$ adalah a dan b akar akar persamaan kuadrat $x^2 + cx + a = 0$ adalah x_1 dan x_2 dengan $a, b, c \neq 0$

$$\begin{array}{l} a = \frac{1}{3}x_1 \text{ dan} \\ b = \frac{1}{3}x_2 \\ a + b = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ a + b = \frac{1}{3}(x_1 + x_2) \\ -\frac{b}{a} = \frac{1}{3}\left(-\frac{b}{a}\right) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (-a) = \frac{1}{3} \cdot (-c) \\ 3a = c \dots(i) \\ a \cdot b = \frac{1}{3}x_1 \cdot \frac{1}{3}x_2 \\ a \cdot b = \frac{1}{9}x_1 \cdot x_2 \\ \left(\frac{c}{a}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{c}{a}\right) \\ b = \frac{1}{9} \cdot a \dots(ii) \end{array} \right.$$

• Nilai $\frac{a+c}{b} = \frac{a+3a}{\frac{1}{9}a} = \frac{4a}{\frac{1}{9}a} = 36$

Jawaban: D

10.



Gambar di atas adalah grafik fungsi

$f(x) = ax^2 + bx + c$. Pernyataan yang benar adalah...

- A. $ab > 0$ dan $a - b + c = 0$
B. $ab < 0$ dan $a - b + c > 0$
C. $ab < 0$ dan $a - b + c < 0$
D. $ab > 0$ dan $a - b + c < 0$
E. $ab < 0$ dan $a - b + c = 0$

Pembahasan:

Grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ menunjukkan:

- Kurva terbuka ke atas : $a > 0$
- Titik puncak di kanan sumbu Y maka tanda a, b berbeda : $b < 0$
- Memotong sumbu Y di atas sumbu X : $c > 0$

Maka : $ab < 0$ dan $a - b + c > 0$

Jawaban: B

11. Diketahui ordinat titik puncak fungsi kuadrat

$f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah 2.

Jika $f(2) = f(4) = 0$ maka $a + b + c = \dots$

- A. -10 D. 4
B. -6 E. 6
C. -4

Pembahasan:

Ingat -ingat!!!

$$y_p = -\frac{D}{4a}$$

$$2 = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$8a = -(b^2 - 4ac) \dots(i)$$

$$f(2) = 4a + 2b + c = 0 \dots(ii)$$

$$f(4) = 16a + 4b + c = 0 \dots(iii)$$

Eliminasi (ii) dan (iii)

$$4a + 2b + c = 0$$

$$16a + 4b + c = 0$$

$$-12a - 2b = 0$$

$$-2b = 12a$$

$$b = -6a \dots(iv)$$

Substitusi (iv) ke (i) diperoleh

$$8a = -((-6a)^2 - 4ac)$$

$$8a = -(-6a)^2 + 4ac$$

$$8a = -36a^2 + 4ac$$

$$8a + 36a^2 = 4ac$$

$$4a(2 + 9a) = 4ac \text{ bagilah dengan } 4a$$

$$2 + 9a = c \dots(v)$$

Substitusikan $b = -6a$ dan $2 + 9a = c$ ke (ii) diperoleh

$$4a + 2(-6a) + 2 + 9a = 0$$

$$4a - 12a + 2 + 9a = 0$$

$$a + 2 = 0$$

$$a = -2 \text{ maka } b = -6(-2) = 12 \text{ dan}$$

$$c = 2 + 9(-2) = -16$$

$$\text{Nilai } a + b + c = -2 + 12 - 16 = -6$$

Jawaban: B