01

BENTUK AKAR, PERSAMAAN KUADRAT, FUNGSI KUADRAT, DAN PERTIDAKSAMAAN

A. Bentuk Akar

Sifat-sifat Bentuk Akar

1. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ 3. $\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$
2. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ 4. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

1. $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$
2. $a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a-b)\sqrt{c}$

Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar

1. $\sqrt{a}.\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$
2. $\sqrt[n]{a}\ .\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
3. $\sqrt[n]{a^m}\ .\ \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$
5. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Merasionalkan Penyebut

1. $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$
2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{b}$
3. $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$
4. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{a-b}$

Persamaan Bentuk Akar

1. $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$
2. $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$, syarat a > b > 0
3. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a........}}}} = a$, syarat $a \geq 0$
4. $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a.....}}}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4a}+1\right)$, syarat $a > 0$
5. $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a.....}}}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4a}-1\right)$, syarat $a \geq 0$

B. Persamaan Kuadrat

Bentuk Umum

$ax^2 + bx + c = 0$

dimana a, b, c $\in$ bilangan Real dan a $\neq$ 0

Rumus Diskrimian (D)

$D = b^2 - 4ac$

Menentukan Akar-akar Persamaan Kuadrat

1. Faktorisasi
2. Melengkapi kuadrat sempurna
3. Rumus $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Hubungan Akar-akar Persamaan Kuadrat

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka:

1. $x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a}$
2. $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$
3. $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{D}}{a}$

Bentuk Simetri Akar-akar Persamaan Kuadrat

1. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2$
2. $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$
3. $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3.x_1.x_2 (x_1 + x_2)$

Jenis-jenis Akar-akar Persamaan Kuadrat

1. $D \geq 0$ maka memiliki dua akar real
   $D > 0$ maka memiliki dua akar real berbeda
   $D = 0$ maka memiliki dua akar kembar
2. $D < 0$ maka memiliki dua akar tidak real

Menyusun Persamaan Kuadrat Baru

Menyusun persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu:

1. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka persamaan kuadratnya adalah:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

2. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka persamaan kuadratnya adalah:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1.x_2) = 0$$

C. Fungsi Kuadrat

Bentuk Umum

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

dimana $a, b, c \in$ bilangan Real dan $a \neq 0$

$x \in R$ disebut domain (daerah asal), dan $y = f(x) \in R$ disebut range (daerah hasil)

Sifat-sifat Fungsi Kuadrat

Kurva $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ berbentuk parabola dengan sifat-sifat:

1. Bentuk parabola:
   - Jika $a > 0$ parabola terbuka ke atas.
   - Jika $a < 0$ parabola terbuka ke bawah.
2. Kedudukan kurva terhadap sumbu-Y:
   - Jika $a > 0, b > 0$ atau $a < 0, b < 0$ maka puncak berada di sebelah kiri sumbu-Y.
   - Jika $a > 0, b < 0$ atau $a < 0, b > 0$ maka puncak berada di sebelah kanan sumbu-Y
3. Selalu memotong sumbu-Y di titik $(0, c)$
4. Kedudukan kurva terhadap sumbu-X:
   - Jika $D > 0$ kurva memotong sumbu-x pada dua titik di $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$
   - Jika $D = 0$ kurva memotong sumbu-x pada satu titik (menyinggung sumbu-x)
   - Jika $D < 0$ kurva tidak memotong sumbu-X
   - Kurva disebut definit positif (selalu bernilai positif untuk setiap x), jika $a>0$ dan $D<0$
   - Kurva disebut definit negatif (selalu bernilai negatif untuk setiap x), jika $a<0$ dan $D<0$

Titik Ekstrem

$$(x_e, y_e) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right), \text{dimana:}$$

- $x_e = \frac{-b}{2a}$ disebut sumbu simetri
- $ye = \frac{-D}{4a}$ disebut sebagai nilai ekstrem (stasioner)

Menentukan Fungsi Kuadrat

1. Jika diketahui tiga buah titik yang dilalui kurva fungsi kuadrat maka substitusikan ketiga titik tersebut ke bentuk umum fungsi kuadrat ($y = f(x) = ax^2 + bx + c$).
2. Jika diketahui titik potong dengan sumbu-x di $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, dan sebuah titik sembarang

   $$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

3. Jika diketahui titik ekstrem (x_e, y_e) dan sebuah titik sembarang maka:

   $$y = a(x - x_e)^2 + y_e$$

D. Pertidaksamaan

Sifat-sifat Pertidaksamaan

1. Pemindahan ruas tanda pertidaksamaan ($<$, $>$, $\leq$, atau $\geq$) tetap.

   Jika $a + b > c$ maka menjadi: $a + b - c > 0$
2. Perkalian atau pembagian dengan bilangan negatif tanda pertidaksamaan ($<$, $>$, $\leq$, atau $\geq$) berubah.

   Contoh: $4x > -3$ (kedua ruas dibagi -1)

   $-4x < 3$
3. Perpangkatan:
   - an > bn, jika n genap dan a, b > 0 maka tanda pertidaksamaan tetap
   - an > bn, jika n genap dan a, b < 0 maka tanda pertidaksamaan berubah

   Contoh:
   - ❑ $3 > 1$, jika kedua ruas dikuadratkan maka:

     $3^2 > 1^2$

     $9 > 1$
   - ❑ $-3 < -1$, jika kedua ruas dikuadratkan maka:

     $(-3)^2 < (-1)^2$

     $9 > 1$

Pertidaksamaan Linier

Bentuk umum:

$ax - b > 0$

$ax > b$

$a > \frac{b}{a}$

Pertidaksamaan Kuadrat

Bentuk umum: $ax^2 + bx + c > 0$

Langkah-langkah umum penyelesaiannya sebagai berikut:

- Nolkan ruas kanan, pindah ke ruas kiri
- Faktorkan menjadi faktor-faktor linear
- Buat garis bilangan untuk menentukan penyelesaian.

Pertidaksamaan Pecahan

Bentuk umum: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, syarat $b \neq 0$ dan $d \neq 0$

Langkah-langkah umum penyelesaiannya sebagai berikut:

- Nolkan ruas kanan, pindah ke ruas kiri
- Faktorkan pembilang dan penyebut menjadi Buatlah garis bilangan untuk menentukan penyelesaian

Pertidaksamaan Bentuk Akar

1. Bentuk $\sqrt{f(x)} > g$ maka penyelesaiannya:

- Jika $g > 0$ maka:

  $$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 > (g)^2 \text{ dan } f(x) \geq 0$$
- Jika $g < 0$ maka:

  $f(x) \geq 0$

2. Bentuk $\sqrt{f(x)} < g$ maka penyelesaiannya:

- Jika g > 0 maka:

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 < (g)^2 \text{ dan } f(x) \geq 0$$

- Jika g < 0 maka tidak ada penyelesaiannya.

Pertidaksamaan Nilai Mutlak

1. Jika $|f(x)| < g$ maka penyelesaiannya:
   $-g < f(x) < g$
2. Jika $|f(x)| > g$ maka penyelesaiannya:
   $f(x) > g$ atau $f(x) < -g$

BENTUK AKAR, PERSAMAAN KUADRAT, FUNGSI KUADRAT, DAN PERTIDAKSAMAAN

CONTOH SOAL

1. **Soal Ujian SPMB**
   Jika dirasionalkan maka:

   $$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}} = \ldots\ldots$$

   A. $-1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   B. $-1-\sqrt{2}$
   C. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $2+\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   Pembahasan:

   $$= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

   Penyebut dirasionalkan maka

   $$= 1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

   $$= 1+\frac{1}{2}\sqrt{2}-1-\sqrt{2}$$

   $$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

   Jawaban: C

2. **Soal Ujian SNMPTN**
   Grafik fungsi $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx + 20$ naik, jika …
   (A) $b^2 - 4a < 0$ dan $a > 0$
   (B) $b^2 + 4a < 0$ dan $a < 0$
   (C) $b^2 + 3a > 0$ dan $a < 0$
   (D) $b^2 + 3a < 0$ dan $a > 0$
   (E) $b^2 - 3a < 0$ dan $a < 0$

   Pembahasan:
   Grafik fungsi f(x) naik jika $f'(x) > 0$

   $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx + 20$

   $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - c$

   Nilai $f'(x) > 0$ artinya fungsi f(x) definit positif, syaratnya: $a > 0$ dan $D < 0$.

   Maka:

   $$\begin{aligned} D &< 0 \\ (2b)^2 - 4 \,.\, (3a) \,.\, (-c) &< 0 \\ 4b^2 + 12ac &< 0 \\ b^2 + 3ac &< 0 \end{aligned}$$

   Jawaban: D

3. **Soal Ujian SNMPTN**
   Jika $p < -3$ dan $q > 5$ maka nilai $q - p = \ldots$
   A. Lebih besar daripada 8
   B. Lebih besar daripada 7
   C. Lebih kecil daripada 8
   D. Lebih kecil daripada 2
   E. Lebih kecil daripada -2

   Pembahasan:

   $$\begin{array}{rl} p < -3 & \\ \hline -p > 3 & \times -1 \\ q > 5 & \\ \hline q - p > 8 & + \end{array}$$

   Jadi, nilai q – p lebih besar daripada 8.

   Jawaban: A