BAB 8 TRANSFORMASI GEOMETRI

CATATAN:
Untuk Pendalaman Materi, silahkan buka kembali materi TRANSFORMASI pada kelompok TKPA Matematika Dasar. Khusus pada bagian ini hanya pengulangan dari materi yang belum dibahas dalam bab sebelumnya.

A Matriks Transformasi

Jika titik (x,y) ditransformasikan menjadi titik (x',y') oleh transformasi T, maka ditulis: T(x,y) $\rightarrow$ (x',y'). Transformasi demikian disebut **Transformasi Geometri.**

Matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ yang mentransformasikan (x,y) menjadi titik (x',y') disebut sebagai matriks transformasi, dan berlaku

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\text{Bayangan}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{\text{Matriks Transforrmasi}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Titik awal}}$$

Jika suatu matrik Transformasi $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ memetakan bangun A menjadi A', maka:

Luas bangun A' = $|(a\,d - bc)|$ x luas bangun A

B Translasi (Pergeseran)

Translasi (pergeseran) adalah pemindahan suatu objek sepanjang garis lurus dengan arah dan jarak tertentu.

Translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memetakan titik P(x,y) ke titik P'(x',y'), dengan bayangan x' = x + a dan y' = y + b, atau P'(x+a,y+b).

Dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

atau

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\binom{a}{b}} P'\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

C Refleksi (Pencerminan)

Refleksi (pencerminan) adalah suatu transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan cermin dari titik-titik yang hendak dipindahkan itu.

1. Pencerminan terhadap garis x = a dan y =b

$$A(x,y) \xrightarrow{\text{Refleksi } x=a} A'(2a-x,y)$$

$$A(x,y) \xrightarrow{\text{Refleksi } y=b} A'(x,2b-y)$$

2. Pencerminan terhadap sumbu x, sumbu y, garis y = x, dan y = -x

$$A(x,y) \xrightarrow{\text{Refleksi Sumbu X}} A'(x,-y)$$

Matriks transformasinya adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow P'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x+0y \\ 0x-1y \end{pmatrix}$$

$$A(x,y) \xrightarrow{\text{Refleksi Sumbu Y}} A'(-x,y)$$

Matriks transformasinya adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow P'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1x+0y \\ 0x+1y \end{pmatrix}$$

$$A(x,y) \xrightarrow{\text{Refleksi Garis } x=y} A'(y,x)$$

Matriks transformasinya adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow P'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x+1y \\ 1x+0y \end{pmatrix}$$

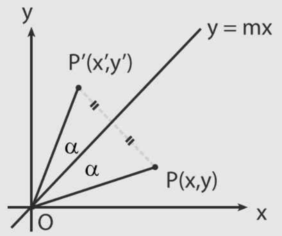
$$A(x,y) \xrightarrow{\text{Refleksi Garis } x=-y} A'(-y,-x)$$

Matriks transformasinya adalah $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\rightarrow P'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0x-1y\\-1x+0y\end{pmatrix}$$

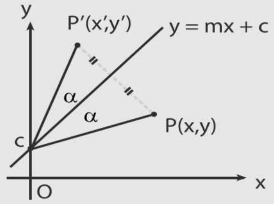
3. Pencerminan terhadap garis y = mx dan y = mx + c

(m = tg a, pusat(0,0))



$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

(m = tg a, pusat(0,c))



$$\begin{pmatrix}x'-0\\y'-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-0\\y-c\end{pmatrix}$$

4. Pencerminan terhadap dua garis yang saling berpotongan

$g; y = m_1x + c_1 \rightarrow m_1 = \text{tg}\ \theta_1$

$h; y = m_2x + c_2 \rightarrow m_2 = \text{tg}\ \theta_2$

- Pusat (a,b) adalah titik potong garis g dan h
- Sudut antara garis g dan h adalah α

$$\text{tg}\ \alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right| \text{atau } \alpha = \theta_2 - \theta_1 = \theta_1 - \theta_2$$

Jika suatu titik dicerminkan terhadap g dilanjutkan terhadap h maka arah sudut α adalah garis g ke garis h (**berlawanan jarum jam α = +, searah jarum jam α = -**)

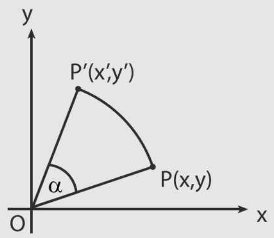
- Matriks transformasinya

$$\begin{pmatrix}x'-a\\y'-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$$

D Rotasi (Perputaran)

Suatu rotasi dikatakan memiliki arah positif jika rotasi itu berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam. Dan rotasi dikatakan memiliki arah negatif jika rotasi itu searah dengan arah putaran jarum jam.

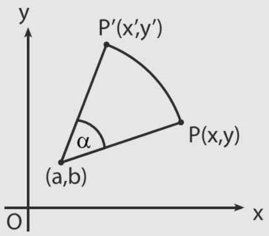
Titik Pusat O(0,0)



$\left.\begin{array}{l}\text{Pusat } 0 = (0,0)\\ \text{sudut } \alpha\end{array}\right\}|0,\alpha|$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Titik Pusat A(a,b)



$\left.\begin{array}{l}\text{Pusat } (a,b)\\ \text{sudut } \alpha\end{array}\right\}|(a,b),\alpha|$

$$\begin{pmatrix}x'-a\\y'-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$$

Matriks transformasi rotasi terhadap titik asal O(0,0)

- Sebesar θ : $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$
- Sebesar $\frac{\pi}{2}$ atau 90^0: $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
- Sebesar $-\frac{\pi}{2}$ atau - 90^0: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$
- Sebesar π atau 180^0: $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Hafalkan!

$P(x,y) \xrightarrow{R\ 90^0} P'(-y,x)$

$\xrightarrow{R\ -90^0 \text{ atau } 270^0} P'(y,-x)$

$\xrightarrow{R\ 180^0} P'(-x,-y)$

$\xrightarrow{R\ 90^0} P'(-y,x)$

E Dilatasi (Perkalian)

Dilatasi adalah suatu transformasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) suatu bangun, tetapi tidak mengubah bentuk bangunan yang bersangkutan. Dilatasi ditentukan oleh titik pusat dan faktor dilatasi (faktor skala).

Titik Pusat O(0,0)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pusat } 0 = (0,0)\\ \text{faktor skala } k\end{array}\right\}\left|0,k\right|$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Titik Pusat A(a,b)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pusat } (a,b)\\ \text{faktor skala } k\end{array}\right\}\left|(a,b),k\right|$$

$$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Luas sebuah persegi panjang bila dirotasi tidak merubah luas. Bila didilatasi dengan dilatasi [0,a], maka luasnya menjadi

$$\mathbf{L_{baru} = (L_{lama}) \times (a^2)}$$

Matriks transformasi dilatasi dengan faktor skala K: $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

E Komposisi Transformasi

Misalkan T_1 adalah transformasi yang memetakan titik A(x,y) ke titik A'(x',y'), kemudian oleh T_2 titik A'(x',y') dipetakan kembali ke titik A"(x",y"). Transformasi T_1 dilanjutkan dengan T_2 memetakan titik A(x,y) $\rightarrow$ (x",y")

dapat ditulis dalam bentuk $T_2 \circ T_1 : A(x,y) \rightarrow A(x",y")$ dengan $T_2 \circ T_1$ disebut **komposisi transformasi**, dibaca T_2 komposisi T_1)

$T_2 \circ T_1$ artinya T_1 dilanjutkan dengan T_2

$T_1 \circ T_2$ artinya T_2 dilanjutkan dengan T_1

Misal matriks transformasi $T_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, maka komposisi transformasinya adalah sebagai berikut:

- $T_1 \circ T_2$ bersesuaian dengan matriks berikut
  $T_1.T_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$
- $T_2 \circ T_1$ bersesuaian dengan matriks berikut
  $T_2.T_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ puncaknya (p,q), dicerminkan tehadap garis $y = q$ menghasilkan parabola $y = kx^2 + lx + m$. Nilai $a + b + c + k + l + m$ adalah ….

   A. q
   B. 2p
   C. p
   D. 2q
   E. p+q

   Pembahasan SMART:

   Fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$

   Titik puncak (p,q) $\Rightarrow y = A(x-p)^2 + q$

   $ax^2 + bx + c = A(x^2 - 2px + p^2) + q$

   $ax^2 + bx + c = Ax^2 - 2Apx + Ap^2 + q$

   Dari $y = Ax^2 - 2Apx + Ap^2 + q$ diketahui $a = A$, $b = -2Ap$, dan $c = Ap^2 + q$

   Pencerminan terhadap $y = q$ menghasilkan:

   $x' = x \Rightarrow x = x'$

   $y = 2q - y \Rightarrow y = 2q - y'$

   Jadi, bayangan $y = Ax^2 - 2Apx + Ap^2 + q$ terhadap pencerminan garis $y = q$ adalah:

   $y = Ax^2 - 2Apx + Ap^2 + q \xrightarrow[y=2q-y']{x=x'}$

   $2q - y' = Ax'^2 - 2Apx' + Ap^2 + q$

   (dikalikan -1)

   $\Leftrightarrow -2q + y' = -Ax'^2 + 2Apx' - Ap^2 - q$

   $\Leftrightarrow y' = -Ax'^2 + 2Apx' - Ap^2 - q + 2q$

   $\Leftrightarrow y' = -Ax'^2 + 2Apx' - Ap^2 + q$

   $\Leftrightarrow kx^2 + lx + m = -Ax'^2 + 2Apx' - Ap^2 + q$

   Sehingga, diperoleh persamaan:

   $k = -A$, $l = 2Ap$, dan $m = -Ap^2 + q$

   Jadi, $a + b + c + k + l + m$

   $= A - 2Ap + Ap^2 + q - A + 2Ap - Ap^2 + q$

   $= 2q$

   Jawaban: D

2. Transformasi T merupakan pencerminan terhadap garis $y = \dfrac{x}{3}$ dilanjutkan pencerminan terhadap garis $y = -3x$. Matriks penyajian T adalah ….

   A. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   B. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   E. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

Jika pencerminan terhadap garis I kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis II, dimana garis I dan garis II saling tegak lurus, maka transformasi tersebut sama halnya dengan mencerminkan terhadap titik perpotongan garis I dan garis II tersebut.

Garis $y = \frac{x}{3}$ (memiliki gradien (m1) = $\frac{1}{3}$)

Garis $y = -3x$ (memiliki gradien (m2) = −3)

Sehingga kedua garis tegak lurus, karena:

$$m_1 \times m_2 = \frac{1}{3} \times (-3) = -1$$

(syarat dua garis saling tegak lurus)

Titik perpotongan kedua garis:

$$\frac{x}{3} = -3x \Rightarrow \frac{x}{3} + 3x = 0 \Rightarrow 3\frac{1}{3}x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Ketika x = 0, maka y = 0

Jadi, titik perpotongannya (0,0).

Oleh karena itu, suatu transformasi pencerminan terhadap garis $y = \frac{x}{3}$ kemudian dilanjut pencerminan terhadap garis $y = -3x$, sama halnya transformasi pencerminan terhadap titik (0,0).

Matrik pencerminan terhadap titik (0,0) adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Jawaban: A

3. Pencerminan garis $y = 2x + 3$ terhadap garis $x = 2$ menghasilkan garis ...

A. $y = 2x + 11$
B. $y = 2x + 5$
C. $y = 2x - 5$
D. $y = -2x + 5$
E. $y = -2x + 11$

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

Bayangan P(x,y) terhadap garis $x = h$ adalah $P'(2h - x, y)$

Bayangan titik P(x,y) terhadap garis $x = 2$ adalah $P'(4 - x, y)$

Dari koordinat bayangan tersebut diperoleh:

$x' = 4 - x \Rightarrow x = 4 - x'$

$y' = y \Rightarrow y = y'$

Maka: $y = 2x - 3 \Rightarrow y' = 2(4 - x') - 3$

$y' = 8 - 2x' - 3$

$y' = -2x' + 5$

ingat! ingat!

Garis $y = 2x - 3$ dan garis bayangannya pasti perpotongan pada $x = 2$. Jadi ketika $x = 2$, maka $y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

Jadi, saat $x = 2$ nilai $y = 1$, dan hal ini hanya dipenuhi pada $y = -2x + 5$.

Jawaban: D

4. Vektor $\vec{x}$ dicerminkan terhadap garis $y = x$, kemudian hasilnya diputar terhadap titik asal O(0,0) sebesar $q > 0$ searah jarum jam, menghasilkan vektor $\vec{y}$. Jika $\vec{y} = A\vec{x}$, maka matriks A = ...

A. $\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix}$

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

Matriks transformasi pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah: $M_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ingat! ingat!

Matriks transformasi rotasi terhadap titik asal O(0,0) sebesar q berlawanan arah dengan jarum jam adalah:

$$R_{(O,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Konsep komposisi transformasi jika vektor $\vec{x}$ secara berturut-turut ditransformasikan oleh matriks transformasi T_1 lalu dilanjutkan transformasi oleh matriks transformasi T_2 maka:

$$\vec{y} = (T_2 \circ T_1)\vec{x} \Rightarrow \vec{y} = (R_{(O,-q)} \circ M_{y=x})\vec{x}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \cos(-q) & \sin(-q) \\ -\sin(-q) & \cos(-q) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{x}$$

$$y = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{x}$$

Karena $\vec{y} = A\vec{x}$, maka matriks *A yaitu:*

$$A = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jawaban: D