BAB 6 BARISAN DAN DERET

CATATAN:

Untuk Pendalaman Materi, silahkan buka kembali pada materi BARIS DAN DERET kelompok TKPA Matematika Dasar. Khusus pada bagian ini hanya akan diberikan beberapa materi yang sifatnya pengulangan saja.

A Rumus Umum

	DERET	
	ARITMATIKA	GEOMETRI
	a = suku pertama b = beda	a = suku pertama r = rasio
Suku ke – n (U_n)	$U_n = a + (n-1)b$	$U_n = ar^{n-1}$
Jumlahan suku ke – n (S_n)	$S_n=\frac{n}{2}(a+U_n)$ $S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$	$Sn=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, r <1 $Sn=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$, r > 1
Jumlahan tak hingga		**Divergen:** $r\geq 1$ atau $r\leq -1$ **Konvergen/ punya jumlah** Syarat: - 1< r < 1 $S_\infty=\frac{a}{1-r}$
Di antara dua bilangan disisipkan k bilangan.	$b_{baru}=\frac{b_{lama}}{k+1}$	$r_{baru}=\sqrt[k+1]{r_{lama}}$
Suku Tengah (U_t)	$U_t=\frac{U_1+U_n}{2}$	$U_t=\sqrt{U_1\times U_n}$
Keduanya berlaku	$U_n=S_n-S_{n-1}$	

B Deret Aritmatika

Harus hafal!

a = suku pertama b = beda = $U_n - U_{n-1}$	
Suku ke – n (U_n)	$U_n = a + (n-1)b$
Jumlahan suku ke – n (S_n)	$S_n=\frac{n}{2}(a+U_n)$ $S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$

Trik Praktis!

Jika jumlah n suku pertama deret aritmatika adalah

$$S_n = an^2 + bn, \text{ maka}$$
$$U_n = S'_n - a = (2an + b) - a$$
$$b = \text{turunan kedua } S_n = S''_n = 2a$$

Trik Praktis!

Jika sebuah segitiga siku-siku panjang isinya membentuk barisan aritmatika, maka perbandingan ketiga sisinya adalah **3 : 4 : 5**

C Deret Geometri

a = suku pertama r = rasio = $\frac{U^n}{U_{n-1}}$	
Suku ke – n (U_n)	$U_n = ar^{n-1}$
Jumlahan suku ke – n (S_n)	$Sn=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, r <1 $Sn=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$, r > 1

D Deret Geometri Tak Hingga

Suatu deret tak hingga dikatakan konvergen atau punya jumlah jika berlaku

Syarat: - 1< r < 1

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Contoh:

1. Nilai-nilai x yang memenuhi $3-3x+3x^2-3x^3+\cdots<6$ adalah...

A. $x > -1$

B. $x > -\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2} < x < 1$

D. $-\frac{1}{2} < x < 0$ atau $0 < x < \frac{1}{2}$

E. $-\frac{1}{2} < x < 0$ atau $0 < x < 1$

Pembahasan :

Diketahui: $3-3x+3x^2-3x^3+\cdots < 6$

Artinya $S_\infty < 6$
Deret di atas merupakan deret geometri tak hingga dengan
a = 3, r = − x.

Ingat! $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$S_\infty < 6 \Rightarrow \frac{3}{1+x} < 6 \Rightarrow \frac{3}{1+x} - 6 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{3-6(1+x)}{1+x} < 0 \Rightarrow \frac{-6x-3}{1+x} < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 1 \qquad ....(1)$$

Syarat deret konvergen (punya jumlahan tak hingga)

$$-1 < r < 1 \Rightarrow -1 < -x < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \qquad ....(2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh $-\frac{1}{2} < x < 1$.

Jawaban : C

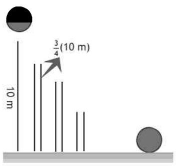
Contoh:

2. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 10 m dan memantul kembali dengan ketinggian ¾ kali tinggi sebelumnya, begitu seterusnya hingga bola berhenti. Jumlah seluruh lintasan bola adalah …

A. 65 m B. 70 m C. 75 m D. 77 m E. 80 m

Pembahasan :

Keterangan soal seperti di gambar. Total panjang lintasan sampai berhenti untuk gerak naik-turun adalah:



$$a = 10,\ r = \frac{3}{4}$$

$$2s_\infty = 2\left(\frac{a}{1-r}\right) = 2\left(\frac{10}{1-\frac{3}{4}}\right) = 80$$

Karena pada gerakan paling awal hanya berupa gerakan turun, maka panjang lintasan yang ditempuh bola 80-10 = 70 m.

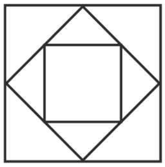
Cara cepat:
Tinggi awal Ho = 10m

Rasio = $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ (artinya, a = 3 dan b = 4)

Panjang Lintasan $= \frac{b+a}{b-a} \times H_o = \frac{4+3}{4-3} \times 10 = 70$

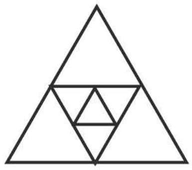
Jawaban: D

Trik Praktis!
Jika dalam sebuah bujur sangkar dibuat lagi bujur sangkar di dalamnya seperti gambar di samping, maka



- Rasio deret luas = $\frac{1}{2}$
- Rasio deret keliling = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Jika dalam segitiga sama sisi dibuat lagi segitiga sama sisi di dalamnya seperti gambar di samping, maka



- Rasio deret luas = $\frac{1}{4}$
- Rasio deret keliling = $\frac{1}{2}$

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika dinotasikan dengan Sn. Jika suku pertama deret tersebut tak nol dan S4, S8 dan S16 membentuk barisan geometri, maka $\frac{S_8}{S_4}$ = ...

A. 2 D. 8
B. 4 E. 10
C. 6

Pembahasan SMART:

- $S_4 = \frac{1}{2}.4.(2a+3b) = 2(2a+3b)$

$S_8 = \frac{1}{2}.8.(2a+7b) = 4(2a+7b)$

$S_{16} = \frac{1}{2}.16.(2a+15b) = 8(2a+15b)$

- S_4, S_8, S_{16} membentuk barisan geometri.

  Berlaku : $S_8{}^2 = S_4 \cdot S_{16}$

  $\left[4(2a+7b)\right]^2 = 2.(2a+3b).8(2a+15b)$

  $16(2a+7b)^2 = 16(2a+7b-4b)(2a+7b+8b)$

  $(2a+7b)^2 = ((2a+7b)-4b)((2a+7b)+8b)$

  $(2a+7b)^2 = (2a+7b)^2 + 8b(2a+7b) - 4b(2a+7b) - 32b^2$

  $8ab + 28b^2 + 32b^2 = 16ab + 56b^2$

  $4b^2 - 8ab = 0$

  $4b(b-2a) = 0$

  $b = 0$ atau $b = 2a$

- Untuk b = 2a, maka

  $$\frac{S_8}{S_4} = \frac{4(2a+7.2a)}{2(2a+3.2a)} = \frac{4.16a}{2.8a} = 4$$

Jawaban: B

2. Diketahui barisan bilangan real $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ merupakan barisan geometri. Jika $a_1 + a_4 = 20$ maka nilai minimum dari jumlah 6 suku pertama deret ini adalah ....

A. 15
B. 18
C. 24
D. 28
E. 32

Pembahasan SMART:

Diketahui $a_1 + a_4 = 20 \Rightarrow a + ar^3 = 20$

Jumlah 6 suku pertama deret ini

$= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5$

$= a + ar^3 + ar + ar^4 + ar^2 + ar^5$

$= \left(a+ar^3\right) + r\left(a+ar^3\right) + r^2\left(a+ar^3\right)$

$= 20 + 20r + 20r^2$

$= f(r)$

Bernilai minimum jika $f'(r) = 0$

$f'(r) = 40r + 20 = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$

Selanjutnya diketahui

$a + ar^3 = 20 \Rightarrow a\left(1+r^3\right) = 20$

$\Rightarrow a\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) = 20$

$\Rightarrow a\left(\frac{7}{8}\right) = 20 \Rightarrow a = \frac{160}{7}$

Maka, dari jumlah 6 suku pertama

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} = \frac{\frac{160}{7}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{160}{7}\left(1-\left(\frac{1}{64}\right)\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{160}{7}\left(\frac{63}{64}\right) \times \frac{2}{3} = 15$$

Jawaban: A

3. Diketahui $x^2 - \left(k^2 - k - 4\right)x + 4k - 1 = 0$ mempunyai akar-akar bulat positif a dan b. Apabila nilai (3a – b), (k + 3), (2b – 2a + 6) merupakan tiga suku pertama deret aritmetika dengan nilai k positif, maka jumlah n suku pertama dapat dituliskan sebagai ....

A. $\frac{3n^2+5n}{2}$

B. $\frac{2n^2+5n}{2}$

C. $\frac{n^2+5n}{2}$

D. $\frac{3n^2+2n}{2}$

E. $\frac{n^2+3n}{2}$

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

p,q,r $\Rightarrow$ tiga suku aritmetika

$\Rightarrow$ berlaku : $2q = p + r$

1) Untuk k positif:
   (3a – b), (k + 3), (2b – 2a + 6)
   merupakan tiga suku pertama deret aritmetika.
   Maka berlaku:

   $2(k+3) = (3a-b) + (2b-2a+6)$

   $\Rightarrow 2k + 6 = a + b + 6 \Rightarrow a + b = 2k$ .... (1)

2) Diketahui $x^2 - \left(k^2 - k - 4\right)x + 4k - 1 = 0$
   mempunyai akar-akar bulat positif a dan b.

Hasil penjumlahan akar-akarnya:

$a + b = \frac{\left(k^2 - k - 4\right)}{1}$ (lihat (1))

$\Rightarrow \left(k^2 - k - 4\right) = 2k$

$\Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0$

$\Rightarrow (k-4)(k+1) = 0$

$\Rightarrow k = 4$ atau $k = -1$

Karena k positif, kita ambil k = 4. Selanjutnya jika kita subtitusikan ke persamaan, maka akan diperoleh:

$x^2 - \left(k^2 - k - 4\right)x + 4k - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \left(4^2 - 4 - 4\right)x + 4.4 - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-5) = 0$

$\Rightarrow x = 3$ atau $x = 5$

Artinya, akar-akarnya adalah a = 3 dan b = 5
Selanjutnya kita subtitusikan ke (3a – b), (k + 3), (2b – 2a + 6), diperoleh barisan aritmetika 4, 7, 10; yaitu barisan dengan beda = 3 dan suku pertama = 4.

Jumlah n suku pertamanya adalah:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a+(n-1)b\right)$$
$$= \frac{n}{2}\left(2.4+(n-1)3\right)$$
$$= \frac{n}{2}(8+3n-3)$$
$$= \frac{3n^2+5n}{2}$$

Jawaban: A

4. Jika $U_1, U_2, U_3, \ldots.$ adalah barisan geometri yang memenuhi $U_2 - U_5 = x$ dan $U_3 - U_5 = 2y$, maka $\frac{y}{x} = \ldots$

A. $\frac{r(1+r)}{(1+r+r^2)}$

B. $\frac{r+r^2}{2(1+r+r^2)}$

C. $\frac{r+r^2}{2(1+r-r^2)}$

D. $\frac{2(1+r+r^2)}{r+r^2}$

E. $\frac{(1+r+r^2)}{2r+2r^2}$

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

U_n adalah suku ke-n barisan geometri, dengan:

$U_n = ar^{n-1}$

$x = u_2 - u_5 \Rightarrow x = ar - ar^4$

$x = ar(1-r^3)$

$2y = u_3 - u_5 \Rightarrow 2y = ar^2 - ar^4$

$2y = ar^2(1-r^2)$

Sehingga:

$$\frac{2y}{x} = \frac{ar^2(1-r^2)}{ar(1-r^3)} \Leftrightarrow \frac{2y}{x} = \frac{r(1-r)(1+r)}{(1-r)(1+r+r^2)}$$

$$\frac{2y}{x} = \frac{r(1+r)}{(1+r+r^2)} \text{ (dikalikan } \frac{1}{2}\text{)}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r+r^2}{2(1+r+r^2)}$$

Jawaban: B

5. Jumlah tak hingga dari deret geometri adalah 64 dan suku pertamanya adalah 16. Jumlah semua suku bernomor genap deret tersebut adalah ....

A. $\frac{108}{16}$

B. $\frac{192}{9}$

C. $\frac{192}{7}$

D. $\frac{265}{9}$

E. $\frac{256}{7}$

Pembahasan SMART:

Rasio dari deret tak hingga tersebut dapat ditentukan dari jumlah tak hingganya, yaitu:

$$S = \frac{a}{1-r} \Rightarrow 64 = \frac{16}{1-r}$$
$$64 - 64r = 16$$
$$-64r = -48$$
$$r = \frac{48}{64}$$
$$r = \frac{3}{4}$$

Deret geometri dengan suku genap adalah:
$ar, ar^3, ar^5, \ldots$

Sehingga, suku pertamanya menjadi ar dan rasionya menjadi r^2.

Jumlah semua suku bernomor genap deret tersebut adalah:

$$S = \frac{ar}{1-r^2} = \frac{16\left(\frac{3}{4}\right)}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{12}{\frac{7}{16}} = \frac{192}{7}$$

Jawaban: C