BAB 10 TURUNAN

CATATAN:

Untuk Pendalaman Materi, silahkan buka kembali pada materi TURUNAN kelompok TKPA Matematika Dasar. Khusus pada bagian ini hanya akan diberikan beberapa tambahan materi dan trik praktis yang belum di bahas dalam bab TURUNAN sebelumnya.

A Turunan Fungsi Trigonometri

Fungsinya	Turunannya
f(x) = sin x	**f'(x) = cos x**
f(x) = cos x	**f'(x) = –sin x**
f(x) = tg x	**$f'(x) = \sec^2 x$**
f(x) = cotg x	$f'(x) = -\text{cosec}^2\, x$
f(x) = sec x	f'(x) = sec x. tan x
f(x) = cosec x	f'(x) = –cosec x. cotg x

Logika Praktis Menghafal

Pertama, yang wajib kalian hafal adalah hanya turunan yang dicetak tebal, yaitu turunan dari sin, cos, tan. Ayo! Hafalkan sekarang.

Kedua, cara menghafal turunan sec. Turunan dari **SEX** adalah **SETAN**, maka turunan dari **sec** adalah **sec.tan**. Miripkan bunyinya!!

Ketiga, perhatikan, turunan dari **co**s, **co**tg, can **co**sec semua ada tanda negatifnya. Jadi, ingat bahwa turunan dari semua fungsi yang depannya **co** adalah **negatif.**

Keempat, turunan tg x adalah $\sec^2 x$, jika depannya ditambah **co**, maka turunannya juga ditambah **co**. Artinya turunan **co**tg x adalah - **co**$\sec^2$ x. Perhatikan kesamaannya.

Perhatikan kembali polanya!

Fungsinya	Turunannya
f(x) = tg x	$f'(x) = \sec^2 x$
f(x) = **co**tg x	f'(x) = –**co**$\sec^2$ x

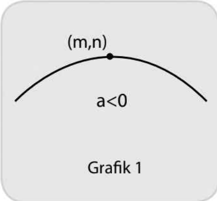
Fungsinya	Turunannya
f(x) = sec x	f'(x) = sec x. tan x
f(x) = **co**sec x	f'(x) = –**co**sec x. **co**tg x

Apabila diketahui bahwa u adalah fungsi x, yaitu u(x), maka berlaku:

$$f(x) = \sin u \Rightarrow f'(x) = \cos u.\, u'$$
$$f(x) = \cos u \Rightarrow f'(x) = -\sin u.\, u'$$

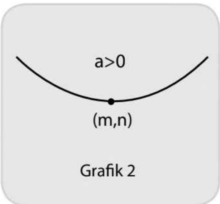
B NIlai Stationer dan Rumus Praktis

Perhatikan Gambar!



Grafik 1

atau



Grafik 2

Itu artinya (a,b) adalah titik puncak. Titik puncak sering disebut sebagai titik stasioner, titik balik, dan juga titik ekstrim.

Pada titik puncak (m,n), berlaku f'(m) = 0.

Untuk grafik 1, nilai **m** disebut **nilai maksimal**, karena berada di puncak atas.
Untuk grafik 2, nilai **m** disebut sebagai **nilai minimal** karena berada di puncak bawah.

Berikut adalah rumus-rumus praktis terkait maksimum dan minimum.

1 Rumus Praktis

Luas maksimum segi empat dalam segitiga adalah setengah dari luas segitiga

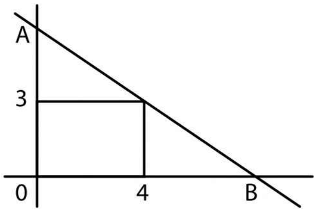
$$L_{max}\square = \frac{1}{2} L\,\Delta$$

Dengan, Panjang sisi-sinya $\frac{1}{2}$alas Δ dan $\frac{1}{2}$tinggi Δ

Contoh:

Garis *g* melalui titik (4,3) memotong sumbu *x* positif di *A* dan sumbu *y* positif di *B*. Agar luas ΔAOB minimum, maka panjang ruas garis *AB* adalah....

A. 8 B. 10 C. $8\sqrt{2}$ D. 12 E. $10\sqrt{2}$



Pembahasan:

Luas maksimum persegi panjang

= ½ x Luas Segitiga

atau

Luas minimum segitiga = 2 x luas persegi panjang

OA = 2. 4 = 8

OB = 2. 3 = 6

Jadi, $AB=\sqrt{(OA)^2+(OB)^2} \;=\sqrt{8^2+6^2}=10$

Jawaban: B

2 Rumus Praktis

Bila diketahui a + b = p, maka $a^m.b^n$ mencapai nilai stasioner (maksimum/minimum) pada saat:

$$a=\left(\frac{m}{m+n}\right)p$$

$$b=\left(\frac{n}{m+n}\right)p$$

Contoh:

Diketahui jumlah dua bilangan adalah 8. Pada saat hasil kali kuadrat kedua bilangan tersebut mencapai nilai maksimum, maka selisih bilangan terbesar dan terkecil adalah...

A. 0 B. 4 C. 8 D. 10 E. 12

Penyelesaian:

Cara Praktis:

$x+y=8$

$x^2.y^2$ maksimum

Maka

$$x=\frac{2}{2+2}.8=4$$

$$y=\frac{2}{2+2}.8=4$$

Jadi, $x-y=0$

3 Rumus Praktis

Dari karton berbentuk persegi dengan sisi *c* cm akan dibuat sebuah kotak tanpa tutup dengan cara menggunting empat persegi dipojoknya sebesar *h* cm. Volume kotak akan maksimum untuk $h=\frac{1}{6}c$

Contoh:

Dari karton berbentuk persegi dengan sisi *c* cm akan dibuat sebuah kotak tanpa tutup dengan cara menggunting empat persegi dipojoknya sebesar *h* cm. Volume kotak akan maksimum untuk *h* =…

A. $\frac{1}{2}c$ atau $\frac{1}{6}c$

B. $\frac{1}{3}c$

C. $\frac{1}{6}c$

D. $\frac{1}{8}c$

E. $\frac{1}{4}c$

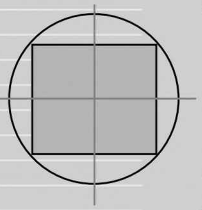
Pembahasan:

Lihat Trik! Langsung bisa kita simpulkan bahwa $h=\frac{1}{6}c$

Jawaban: C

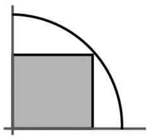
4 Rumus Praktis

Sebuah segi empat di mana ujung-ujungnya menyinggung lingkaran, maka segi empat tersebut akan maksimal luasnya jika berbentuk bujur sangkar/persegi. Jika jari-jari lingkaran = r, maka panjang sisi bujur sangkar tersebut adalah $sisi=r\sqrt{2}$



Contoh:

Diketahui sebuah lingkaran dengan jari-jari = 8 cm. Luas maksimum segi empat dalam seperempat luas lingkaran seperti gambar di samping adalah... cm^2



A. 32 C. 64 D. 144

B. 42 D. 72

Penyelesaian:

Berdasarkan rumus praktis, jelas bahwa daerah yang diarsir adalah bujur sangkar, artinya

$$sisi=\frac{1}{2}r\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

$$Luas=s^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2=32\ cm^2$$

Jawaban: A

5 Rumus Praktis

Tabung dalam Bola

Misal, jari-jari tabung r dan jari-jari bola R

Perbandingan jari-jari agar volume tabung maksimal:

$$\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Misal, tinggi tabung t dan jari-jari bola t

Perbandingan tinggi agar volume tabung maksimal:

$$\frac{R}{t}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

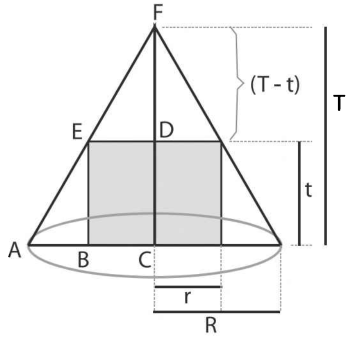
Contoh:

Di dalam kerucut dengan tinggi t dan jari-jari alas R, dibuat tabung dengan alas dan sumbu berimpit dengan alas dan sumbu kerucut. Jika V_1 menyatakan volume kerucut dan V_2 adalah volume maksimum tabung yang dapat dibuat, maka perbandingan dari V_1 dengan V_2 adalah...

A. 3:1 C. 9:4 E. 27:8

B. 3:2 D. 9:8

Penyelesaian:



Cara Praktis

Berlaku $\frac{R}{r}=\frac{3}{2}\Rightarrow r=\frac{2}{3}R$ dan $\frac{T}{t}=\frac{3}{1}\Rightarrow t=\frac{1}{3}T$

Maka, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2T}{\pi r^2 t}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2T}{\pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2\left(\frac{1}{3}T\right)}=\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{9}{4}$

Jawaban: C

6 Rumus Praktis

$$y=Ax(B-x)$$

$$y_{max}=A\left(\frac{B^2}{2}\right)$$

Contoh:

Nilai maksimum dari fungsi y = 4x (8-x) adalah....

A. 32 C. 72 E. 144

B. 64 D. 84

Penyelesaian:

$y=4x(8-x)=32x-4x^2$

$y'=0\Rightarrow 32-8x=0\Rightarrow x=4$

$y_{max}=4x(8-x)=4.4(8-4)=64$

Cara praktis

$y=4x(8-x)$

$y_{max}=4\left(\frac{8}{2}\right)^2=4.16=64$

Jawaban: B

7 Rumus Praktis

Jika F(X) dalam Interval Tertutup $a\le x\le b$, maka nilai maksimum dan minimum fungsi F(x) dapat ditentukan dengan langlah-langkah sebagai berikut:

1. Tentukan nilai balik dalam interval $a\le x\le b$
2. Tentukan nilai ujung interval f(a) dan f(b)
3. Pilih nilai-nilai diantara langkah 1 dan 2
   - Yang terbesar merupakan nilai maksimum
   - Yang terkecil merupakan nilai minimum

Catatan: interval terbuka $a < x < b$, $x \neq a$ dan $x \neq b$

Contoh:

Nilai maksimum $f(x)=x^3+3x^2-9x$ dalam interval $-3\le x\le 2$ ...

Pembahasan:

Untuk menentukan nilai maksimum atau minimum suatu fungsi pada suatu selang $a\le x\le b$ harus dicek dulu titik-titik ekstrimnya kalau-kalau selang tersebut memuat titik-titik ekstrim. Selanjutnya akan dicari nilai fungsi itu pada titik ekstrimnya dan pada kedua ujungnya, kemudian bandingkan nilai yang terbesar.

$f(x)=x^3+3x^2-9x$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2+6x-9=0$

$\Rightarrow (x+3)(x-1)=0$

Titik-titik ekstrimnya x = -3 dan x = 1.

$f(-3)=(-3)^3+3.(-3)^2-9.(-3)=-27+27+27=27$

$f(1) = 1+1.3-9.1=-5$

$f(2) = 8+3.4-9.2 = 2$ (x = 2 adalah titik ujungnya)

Jadi nilai maksimumnya yang terdapat dalam selang interval tersebut adalah 27.

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Jika $f(x)=\sec^2(\tan 2x)$, maka $f'(x)=....$

   A. $(4\sec(\tan 2x).\sec 2x)^2(\tan(\tan 2x))$

   B. $(2\sec(\tan 2x).\sec 2x)^2(\tan(\tan 2x))$

   C. $-(4\sec(\tan 2x).\sec 2x)^2(\tan(\tan 2x))$

   D. $(2\sec(\tan 2x).\sec 2x)^2(\tan 2x)^2$

   E. $4(\sec^2(\tan 2x)).\sec 2x.(\tan 2x)^2$

   Pembahasan SMART:

   Ingat!

f(x)	$\Rightarrow f'(x)$		
sin	$\Rightarrow \cos$	sec	$\Rightarrow \sec.\tan$
cos	$\Rightarrow -\sin$	cosec	$\Rightarrow -\text{cosec}.\cot an$
tan	$\Rightarrow \sec^2$	cotan	$\Rightarrow -\text{cosec}^2$

Dengan menggunakan aturan rantai

$f(x)=h(g(x))\Rightarrow f'(x)=h'(g(x)).(g'(x))$

maka, turunan dari $f(x)=\sec^2(\tan 2x)$ adalah:

$$f'(x)=2(\sec(\tan 2x))(\sec(\tan 2x)\tan(\tan 2x))\sec^2 2x.2$$
$$=4(\sec^2(\tan 2x))(\tan(\tan 2x)).\sec^2 2x$$
$$=4(\sec^2(\tan 2x)).\sec^2 2x.(\tan(\tan 2x))$$
$$=(2\sec(\tan 2x).\sec 2x)^2(\tan(\tan 2x))$$

Jawaban: B

2. Diketahui $f(x)=x^{\frac{1}{3}}\sin x$. Persamaan garis singgung di f yang melalui titik asal adalah ....

A. $x=0$
B. $y=0$
C. $y=x$
D. $y=-x$
E. tidak ada

Pembahasan SMART:

Garis singgung pada $f(x)=x^{\frac{1}{3}}\sin x$, memiliki gradien (m) = f'(x), maka:

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}\sin x$$

Misal, $u=x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow u'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$v=\sin x\Rightarrow v'=\cos x$

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}\sin x=u.v$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'.v+u.v'$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.\sin x+x^{\frac{1}{3}}.\cos x$$

Garis melalui titik (0,0), maka gradiennya (m):

$$=\frac{1}{3}0^{-\frac{2}{3}}.\sin 0+0^{\frac{1}{3}}.\cos 0=0$$

Sehingga, persamaan garisnya adalah:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-0=0(x-0)$$
$$y=0$$

Jawaban: B

3. Jika $v=(x-1)(x+1)(x^2-1)(x^4+1)$, maka $\frac{dv}{dx}$ untuk $x=-1$ adalah ..... **(SOAL SIMAK UI)**

A. -8
B. -2
C. 0
D. 2
E. 8

Pembahasan SMART:

$$v=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$
$$v=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$$
$$v=(x^4-1)(x^4+1)$$
$$v=(x^8-1)$$
$$\frac{dv}{dx}=v'=8x^7$$

Untuk $x=-1\Rightarrow v'(-1)=8(-1)^7=-8$

Jawaban: A

4. Diketahui $F(x)=(a+1)x^3-3bx^2+9x$.
Jika $F''(x)$ habis dibagi $x-1$, maka kurva $y=F(x)$ tidak mempunyai titik ekstrim lokal jika ....

A. $-3<b<0$
B. $0<b<3$
C. $-4<b<-1$
D. $-4<b<0$
E. $1<b<4$

Pembahasan SMART:

$$F(x)=(a+1)x^3-3bx^2+9x$$
$$\Rightarrow F'(x)=3(a+1)x^2-6bx+9$$
$$\Rightarrow F''(x)=6(a+1)x-6b$$

Karena $F''(x)$ habis dibagi $x-1$, maka:

$$x=1\Rightarrow 6(a+1)-6b=0$$
$$\Rightarrow 6(a+1)=6b$$
$$\Rightarrow (a+1)=b$$
$$F(x)=(a+1)x^3-3bx^2+9x$$
$$\Rightarrow F(x)=bx^3-3bx^2+9x$$

ingat! ingat!

Nilai ekstrim dari F(x) diperoleh dari F'(x) = 0.

Sehingga:

$$F'(x)=3bx^2-6bx+9$$
$$\Rightarrow 0=3bx^2-6bx+9$$

Agar tidak mempunyai titik ekstrem lokal maka $D<0$ sehingga:

$$(-6b)^2-4.3b.9<0$$
$$\Rightarrow 36b^2-108b<0$$
$$\Rightarrow b^2-3b<0$$
$$\Rightarrow b(b-3)<0$$

Pembuat nolnya adalah $b=0$ dan $b=3$

Daerah penyelesaiannya adalah $0<b<3$.

Jawaban: B