

LIMIT DAN FUNGSI KOMPOSISI

A.

Limit

Definisi Limit

Limit suatu fungsi $f(x)$ untuk x mendekati a adalah L , ditulis:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Teorema Limit

1. $\lim_{x \rightarrow a} k = k$, k adalah konstanta
2. Jika k adalah konstanta maka:
 $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
6. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^n = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\}^n$

Limit Fungsi Aljabar

1. Bentuk: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Langkah umum penyelesaian:

- Substitusikan nilai $x = a$ ke $f(x)$
- Jika hasilnya bentuk tertentu, itulah hasil limitnya.

- Jika hasilnya bentuk tak tentu $\left\{ \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty \right\}$ maka $f(x)$ harus diuraikan.

2. Bentuk: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Langkah umum penyelesaian:

- Membagi pembilang dan penyebut dengan x pangkat tertinggi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots}{px^n + qx^{n-1} + \dots} \begin{cases} \infty, & \text{jika } m > n \\ \frac{a}{b}, & \text{jika } m = n \\ 0, & \text{jika } m < n \end{cases}$$

- Rumus jumlah dan selisih akar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d}) \begin{cases} \infty, & \text{untuk } a < c \\ 0, & \text{untuk } a = c \\ -\infty, & \text{untuk } a < c \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}) \begin{cases} \infty, & \text{untuk } a < c \\ 0, & \text{untuk } a = c \\ -\infty, & \text{untuk } a < c \end{cases}$$

- Rumus selisih akar kuadrat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} \begin{cases} \frac{b-p}{2\sqrt{a}}, & \text{jika } a = p \\ -\infty, & \text{jika } a < p \\ \infty, & \text{jika } a > p \end{cases}$$

Limit Fungsi Trigonometri

1. Bentuk: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Langkah umum penyelesaian:

- Substitusikan nilai $x = a$ ke $f(x)$
- Jika hasilnya bentuk tertentu, itulah hasil limitnya.
- w Jika hasilnya bentuk tak tentu $\left\{ \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty \right\}$ maka $f(x)$ harus diuraikan.

2. Langkah menguraikan fungsi $f(x)$

- Menggunakan rumus dasar trigonometri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

- Jika fungsinya mudah diturunkan maka gunakan Dalil L'Hospital (turunan limit).

B.

Fungsi Komposisi & Invers

Domain Fungsi

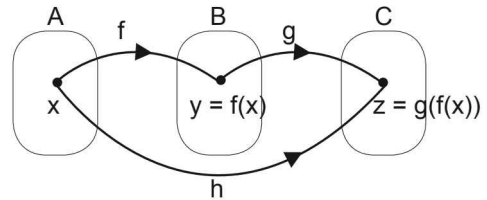
Di bawah ini adalah syarat agar fungsi terdefinisi.

1. $y = \sqrt{f(x)}$ → syaratnya: $f(x) \geq 0$
2. $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ → syaratnya: $g(x) \neq 0$
3. $y = {}^a\log b$ → syaratnya $a > 0$ dan $a \neq 1, b > 0$
4. $\sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}}$ → syaratnya $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ dan $g(x) \neq 0$

Komposisi Fungsi

Komposisi fungsi adalah pemetaan dua fungsi (atau lebih) secara berurutan.

Notasi komposisi fungsi sebagai berikut:



Jika $f(x): A \rightarrow B$ maka $y = f(x)$

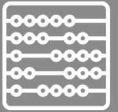
Jika $g(x): B \rightarrow C$ maka $z = g(f(x))$

Fungsi komposisi g dan f dirumuskan:

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

Fungsi Invers

No.	$f(x)$	$f^{-1}(x)$
1.	$y = ax + b$	$y^{-1} = \frac{x-b}{a}$
2.	$y = \frac{x}{a} + b$	$y^{-1} = a(x-b)$
3.	$y = x^a + b$	$y^{-1} = (x-b)^{\frac{1}{a}}$
4.	$y = a^{bx}$	$y^{-1} = \frac{{}^a\log x}{b}$
5.	$y = \frac{ax+b}{cx+d}$	$y^{-1} = \frac{-dx+b}{cx-a}$
6.	$y = \sqrt[n]{ax+b}$	$y^{-1} = \frac{x^n-b}{a}$
7.	$y = {}^a\log x$	$y^{-1} = a^x$



1. Soal Ujian SNMPTN

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4(x - \pi) \cos^2 x}{\pi(\pi - 2x) \tan(x - \frac{\pi}{2})} = \dots$$

- A. -2
- B. -1
- C. 0
- D. 1
- E. 2

Pembahasan:

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4(x - \pi) \cos^2 x}{\pi(\pi - 2x) \tan(x - \frac{\pi}{2})}$$

Ingat: $\cos^2 x = \sin^2(x - 90)$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4(x - \pi) \sin^2(x - \frac{\pi}{2})}{\pi(\pi - 2x) \tan(x - \frac{\pi}{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2(x - \pi)}{-\pi} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{(x - \frac{\pi}{2})} \cdot \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{\sin(x - \frac{\pi}{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2(x - \pi)}{-\pi} = \frac{2(\frac{\pi}{2} - \pi)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$$

Jawaban: D

2. Soal Ujian SPMB

Agar $y = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}}$ bernilai real,

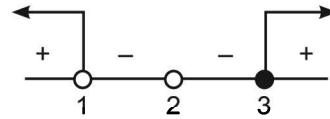
syaratnya adalah x memenuhi

- A. $1 < x \leq 3$
- B. $1 < x < 3$
- C. $x < 1$ atau $x \geq 3$
- D. $1 < x < 2$ atau $x \geq 3$
- E. $x > 1$ atau $2 < x \leq 3$

Pembahasan:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$$

$$\frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 1)(x - 2)} \geq 0$$



Jadi, HP = $\{x < 1 \text{ atau } x \geq 3\}$

Jawaban: C

3. Soal Ujian SNMPTN

Jika $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = 3x + b$, dan $f^{-1}(g(0)) = 1$ maka nilai $g(2)$ adalah

- A. 5
- B. 6
- C. 8
- D. 11
- E. 12

Pembahasan:

Step 1: Mencari nilai b

Ingat:

$$\text{Jika } f^{-1}(g(A)) = B \Rightarrow f(B) = f(A)$$

Jika diketahui $f^{-1}(g(0)) = 1$ maka:

$$f(1) = g(0)$$

$$5 \cdot 1 - 3 = 3 \cdot 0 + b$$

$$2 = b$$

$$\text{Maka, } g(x) = 3x + 2$$

Step 2: Mencari nilai g(2)

$$g(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$

Jawaban: C