BAB 4 SUKU BANYAK

A Bentuk Umum

Bentuk umum suku banyak dalam variabel x yang berderajat n adalah:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dengan: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ adalah bilangan real

$a_n \neq 0$ dan a_0 merupakan konstanta

a_n adalah koefisien dari x^n

a^{n-1} koefisien dari x^{n-1}, . . . , dan seterusnya

B Pembagian Suku Banyak

Suatu suku banyak f(x) berderajat m jika dibagi suku banyak P(x) berderajat n, hasilnya H(x) berderajat p dan mempunyai sisa S(x) berderajat r, sehingga dapat dituliskan:

$$f(x) = P(x) \cdot H(x) + S(x)$$

dengan: f(x) berderajat m

pembagi P(x) berderajat n, $n \le m$

hasil bagi H(x) berderajat p, $p \le n$

sisa bagi S(x) berderajat r, $r < n - 1$

1. Pembagian Bersusun

Cara pembagian dengan cara ini dapat digunakan untuk mencari hasil bagi dan sisa pembagian dari pembagian suku banyak. Konsep cara pembagiannya sama seperti pembagian bersusun biasa.

Contoh:

1. Suku banyak $f(x) = x^3 + (a-3)x^2 + x - 2$ habis dibagi $(x+1)$. Hasil bagi $f(x)$ oleh $(x-2)$ adalah ....

Pembahasan:

Karena suku banyak $f(x)$ habis dibagi $(x+1)$ maka $f(-1) = 0$

$f(x) = x^3 + (a-3)x^2 + x - 2$

$f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0 \\ (-1)^3 + (a-3)(-1)^2 + (-1) - 2 &= 0 \\ -1 + (a-3)(1) - 1 - 2 &= 0 \\ -1 + a - 3 - 1 - 2 &= 0 \\ a - 7 &= 0 \\ a &= 7 \end{aligned}$$

Sehingga suku banyak f(x) adalah

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + (a-3)x^2 + x - 2 \\ &= x^3 + (7-3)x^2 + x - 2 \\ &= x^3 + 4x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

$f(x)$ dibagi oleh $(x-2)$

(dengan cara bersusun):

$$\begin{array}{r l} & x^2 + 6x + 13 \\ x - 2 \,\big) & x^3 + 4x^2 + x - 2 \\ & \underline{x^3 - 2x^2 \qquad\quad -} \\ & 6x^2 + x \\ & \underline{6x^2 - 12x \quad -} \\ & 13x - 2 \\ & \underline{13x - 26 \; -} \\ & 24 \end{array}$$

Jadi hasil bagi $f(x)$ oleh $(x-2)$ adalah $x^2 + 6x + 13$

2. Metode Horner

Hal yang perlu diperhatikan pada metode Horner adalah penulisan koefisien suku banyak harus berturut-turut dari pangkat tertinggi ke pangkat rendah. Jika dari variabel berpangkat tersebut tidak memiliki koefisien, maka koefisiennya adalah 0. Untuk lebih memahaminya perhatikan contoh pembagian suku banyak berderajat 3 berikut ini.

Diketahui $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, maka nilai f(x) untuk $x = k$ adalah $f(k) = ak^3 + bk^2 + ck + d$

k	a	b	c	d
		ak	$bk + ak^2$	$ck + bk^2 + ak^3$ +
	a	$b + ak$	$c + bk + ak^2$	$d + ck + bk^2$ ak^3

Jadi nilai suku banyak untuk $x = k$ adalah $d + ck + bk^2 + ak^3$.

C Teorema Sisa

Jika suatu suku banyak f(x) dibagi oleh (x – k), maka akan diperoleh hasil bagi H(x) dan sisa pembagian S, yang mempunyai hubungan:

$$f(x) = (x - k) \cdot H(x) + S$$

Karena suku banyak pembagi yaitu (x – k) berderajat 1, maka sisa pembagi adalah S dengan maksimum derajat nol, yaitu sebuah konstanta. Sisa pembagian S dapat ditentukan dengan menggunakan teorema berikut:

1. Jika suku banyak f(x) dibagi dengan (x – k), maka sisanya adalah $S = f(k)$
2. Jika suku banyak f(x) dibagi dengan (ax – b), maka sisanya adalah $S = f\left(\frac{b}{a}\right)$

3. Jika suku banyak f(x) dibagi (x – a)(x – b), maka sisanya adalah px + q dengan f(a) = pa + q dan f(b) = pb + q.

Contoh:

1. Jika suku banyak $2x^3 - kx^2 - x + 16$ dibagi $x - 1$ mempunyai sisa 10, maka nilai k adalah ….
   Pembahasan:
   Suku banyak $2x^3 - kx^2 - x + 16$ dibagi $x - 1$ mempunyai sisa 10, maka:
   Ketika x = 1, suku banyaknya bernilai 10.
   Sehingga:

$$\begin{aligned} 2.1^3 - k.1^2 - 1 + 16 &= 10 \\ 2 - k - 1 + 16 &= 10 \\ 17 - k &= 10 \\ k &= 7 \end{aligned}$$

D Teorema Faktor

Jika suku banyak f(x) dibagi dengan (x – k) sisanya adalah 0, maka menurut teorema sisa:
f(x) = (x – k) · H(x) + S
f(x) = (x – k) · H(x) + f(k), jika f(k) = 0
f(x) = (x – k) · H(x)
Jadi (x – k) adalah faktor dari f(x).

Bunyi teorema faktor:
Jika f(x) suatu suku banyak, maka (x – k) adalah faktor dari suku banyak f(x) jika dan hanya jika f(k) = 0.

Contoh:

1. Diketahui (x – 2) dan (x – 1) adalah faktor-faktor dari suku banyak $P(x) = x^3 + ax^2 - 13x + b$. Jika akar-akar persamaan suku banyak tersebut adalah x_1, x_2, dan x_3 untuk $x_1 > x_2 > x_3$, maka nilai $x_1 - x_2 - x_3 = \ldots.$
   Pembahasan:

   Teorema faktor:
   Jika (x + a) merupakan faktor dari polinomial P(x), maka P(–a) = 0
   (x – 2) dan (x – 1) adalah faktor-faktor dari suku banyak $P(x) = x^3 + ax^2 - 13x + b$, maka:
   1) $P(2) = 0$
   $\Rightarrow 2^3 + a\cdot 2^2 - 13\cdot 2 + b = 0$
   $\Rightarrow 8 + 4a - 26 + b = 0$
   $\Rightarrow 4a + b = 18$ ...(i)
   2) $P(1) = 0$
   $\Rightarrow 1^3 + a\cdot 1^2 - 13\cdot 1 + b = 0$
   $\Rightarrow 1 + a - 13 + b = 0$
   $\Rightarrow a + b = 12$ ...(ii)

   Dari persamaan (i) dan (ii), dengan metode eliminasi, diperoleh:

$$\begin{array}{l} 4a + b = 18 \\ \underline{\;\; a + b = 12} \; - \\ 3a \quad = 6 \Rightarrow a = 2 \end{array}$$

   Sehingga, dari persamaan a + b = 12, diperoleh:
   $2 + b = 12 \Rightarrow b = 10$
   Polinomial P(x) adalah $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$
   Jika difaktorkan, diperoleh $(x-2)(x-1)(x+5)$
   $x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ x_3 = -5$
   Jadi, nilai dari $x_1 - x_2 - x_3 = 2 - 1 - (-5) = 6$

E Faktor Linear

Berikut ini cara untuk menentukan akar-akar persamaan suku banyak f(x) = 0, yaitu:

1. Jika jumlah koefisien suku banyak sama dengan nol, maka x = 1 merupakan akar persamaan suku banyak.
2. Jika koefisien pangkat ganjil dan pangkat genap sama, maka x = –1 merupakan akar persamaan suku banyak.
3. Jika langkah 1 dan 2 tidak terpenuhi, maka digunakan cara coba-coba yaitu dengan menentukan faktor dari suku tetapnya yang menyebabkan f(k) = 0.

F Akar-akar Persamaan Suku Banyak

1. Jika $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, maka:
   a. $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$
   b. $x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 = \frac{c}{a}$
   c. $x_1 . x_2 . x_3 = -\frac{d}{a}$
2. Jika $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, maka:
   a. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$
   b. $x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_1 . x_4 + x_2 . x_3 + x_2 . x_4 + x_3 . x_4 = \frac{c}{a}$
   c. $x_1 . x_2 . x_3 + x_1 . x_2 . x_4 + x_2 . x_3 . x_4 + x_1 . x_3 . x_4 = -\frac{d}{a}$
   d. $x_1 . x_2 . x_3 . x_4 = \frac{e}{a}$

Contoh:

1. Jika $9, x_1$, dan x_2 merupakan tiga akar berbeda dari $x^3 - 6x^2 - ax + b = 0$ dengan $b - a = 5$, maka $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = \ldots.$

   Pembahasan:
   $x^3 - 6x^2 - ax + b = 0$ mempunyai akar $9, x_1$, dan x_2 maka:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 + x_2 + 9 &= -\frac{-6}{1} = 6 \\ x_1 + x_2 &= 6 - 9 = -3 \end{aligned}$$

Karena 9 merupakan akar dari suku banyak maka:

$$x^3 - 6x^2 - ax + b = 0$$

$$9^3 - 6(9)^2 - a(9) + b = 0$$

$$729 - 486 - 9a + b = 0$$

$$b - 9a = -243$$

$$b = 9a - 243$$

Karena $b - a = 5$ dan $b = 9a - 243$ maka:

$$b - a = 5$$

$$(9a - 243) - a = 5$$

$$8a = 248$$

$$a = 31$$

Sehingga, $b = 5 + a = 5 + 31 = 36$

Maka:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot 9 = -\frac{b}{1}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot 9 = -36$$

$$x_1 \cdot x_2 = -4$$

Jadi, $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = (-3) + (-4) = -7$

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Sisa pembagian $Ax^{2016} - Bx^{2015} + 3x - 1$ oleh $x^2 - 1$ adalah $x + 4$. Nilai $A + B$ adalah...

A. 7 D. −3
B. 3 E. −7
C. 1

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

Rumus pembagian suku banyak:

$f(x)\ \Re p(x)\ h(x)\ \ s(x)$

dengan:

f(x) = yang dibagi	h(x) = hasil bagi
p(x) = pembagi	s(x) = sisa

Sisa pembagian $Ax^{2016} - Bx^{2015} + 3x - 1$ oleh $x^2 - 1$ adalah $x + 4$ dapat ditulis:

$$Ax^{2016} - Bx^{2015} + 3x - 1 = (x^2 - 1) \cdot h(x) + (x + 4)$$

$$Ax^{2016} - Bx^{2015} + 3x - 1 = (x + 1)(x - 1) \cdot h(x) + (x + 4)$$

Pembuat nol $(x + 1)(x - 1) = 0$ adalah $x = -1$ atau $x = 1$

Sehingga, untuk $x = -1$ diperoleh:

$$A(-1)^{2016} - B(-1)^{2015} + 3(-1) - 1 = ((-1) + 4)$$

$$A + B - 3 - 1 = 3$$

$$A + B - 4 = 3$$

$$A + B = 7$$

Jawaban: A

2. Jika sisa pembagian f(x) oleh $x^3 + 2x + 3$ adalah $x^2 + 5$ dan sisa pembagian $x^2 f(x) + f^2(x)$ oleh $x^3 + 2x + 3$ adalah $ax^2 + bx + c$, maka nilai dari a + b + c adalah ....

A. −30 D. 30
B. −24 E. 36
C. 24

Pembahasan SMART:

Sisa pembagian f(x) oleh $x^3 + 2x + 3$ adalah $x^2 + 5$.

Misalkan $x^3 + 2x + 3 = P$, maka:

$$f(x) = P.Q + (x^2 + 5)$$

dengan:

$P =$ pembagi

$Q =$ hasil bagi

$(x^2 + 5) =$ sisa

$$g(x) = x^2 f(x) + f^2(x)$$

$$= x^2(P.Q + (x^2 + 5)) + (P.Q + (x^2 + 5))^2$$

$$= PQ.x^2 + (x^2 + 5)x^2 + (PQ)^2 + 2PQ(x^2 + 5) + (x^2 + 5)^2$$

$$= PQ.x^2 + (PQ)^2 + 2PQ(x^2 + 5) + (x^2 + 5)x^2 + (x^2 + 5)^2$$

$$= PQ.x^2 + (PQ)^2 + 2PQ(x^2 + 5) + (x^4 + 5x^2) + (x^4 + 10x^2 + 25)$$

$$= PQ.x^2 + (PQ)^2 + 2PQ(x^2 + 5) + (2x^4 + 15x^2 + 25)$$

Jika g(x) dibagi P

$$= \frac{PQ.x^2 + (PQ)^2 + 2PQ(x^2 + 5) + (2x^4 + 15x^2 + 25)}{P}$$

maka sisanya adalah sisa pembagian

$$= \frac{(2x^4 + 15x^2 + 25)}{P} = \frac{(2x^4 + 15x^2 + 25)}{x\ \ + 2x + 3}$$

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^3 + 2x + 3 \overline{\big)\, 2x^4 + 15x^2 + 25} \\ 2x^4 + 4x^2 + 6x \quad - \\ \hline 11x^2 - 6x + 25 \end{array}$$

Artinya:

$$11x^2 - 6x + 25 = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow a = 11;\ b = -6;\ c = 25$$

$$\Rightarrow a + b + c = 11 - 6 + 25 = 30$$

Jawaban: D

3. Diketahui suku banyak *g(x) = ax² – bx – (a + b)* habis dibagi *x – 4* dan salah satu akar persamaan suku banyak f(*x*) = 0 adalah 4. *f(x)* dibagi *g*(*x*) sisanya *ax* + *b* – 2, maka nilai *a* adalah ....

A. $\frac{6}{7}$ D. $\frac{2}{7}$

B. $\frac{5}{7}$ E. $\frac{1}{7}$

C. $\frac{4}{7}$

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

Teorema sisa:
~~Sisa pembagian suku banyak f(x) oleh (x – a) adalah f(a).~~

Diketahui:

$g(x)=ax^2-bx-(a+b)$ habis dibagi x – 4, maka:

$g(4)=0\Rightarrow a.4^2-b.4-(a+b)=0$

$\Rightarrow 16a-4b-a-b=0$

$\Rightarrow 15a-5b=0$

$\Rightarrow 15a=5b\Rightarrow 3a=b$

Salah satu akar persamaan suku banyak $f(x)=0$ adalah 4. $f(x)$ dibagi $g(x)$ sisa $ax+b-2$

Maka, $\frac{f(x)}{g(x)}$ bersisa $ax+b-2$

Jika x = 4, maka sisa = 0

$\Rightarrow a(4)+b-2=0$

$\Rightarrow 4a+3a-2=0$

$\Rightarrow 7a=2\Rightarrow a=\frac{2}{7}$

Jawaban: D

4. Jika $x^4+ax+(b-10)x^2+24x-15=f(x)(x-1)$ dengan $f(x)$ habis dibagi $x-1$, maka nilai b adalah ....

A. 8
B. 6
C. 4
D. 2
E. 1

Pembahasan SMART:

ingat! ingat!

Teorema Sisa:
~~Setiap suku banyak f(x) habis dibagi (x – a), maka f(a) = 0.~~

Diketahui:

$$x^4+ax^3+(b-10)x^2+24x-15=f(x)(x-1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^4+ax^3+(b-10)x^2+24x-15}{(x-1)}=f(x)$$

Dengan cara Horner, maka:

1	1	a	b - 10	24	-15
		1	a+1	a+b-9	a+b+15
	1	a+1	a+b-9	a+b+15	a+b

sisa

Hasilnya adalah:

$$x^3+(a+1)x^2+(a+b-9)x+(a+b+15)$$

Dengan sisa $a+b$, dimana $a+b=0$ karena $f(x)$ habis dibagi (x – 1).

Sehingga:

$$x^3+(a+1)x^2+(a+b-9)x+(a+b+15)=f(x)$$

karena $f(x)$ habis dibagi (x – 1), maka:

(1) 0

$\Rightarrow 1^3+(a+1)1^2+(a+b-9)1+(a+b+15)=f(1)$

Ingat, bahwa nilai $a+b=0$

$\Rightarrow 1+a+1+0-9+0+15=0$

$\Rightarrow a+8=0$

$\Rightarrow a=-8$

Karena, $a+b=0\Rightarrow -8+b=0\Rightarrow b=8$

Jawaban: A

5. Diketahui fungsi $g(x)=(x-1)^3+(x+1)^2+(x+2)$ dan $f(x)=g(x+3)$. Jika f(x) dibagi $(x-1)^2$, maka sisanya adalah ....

A. $7x+4$
B. $7x$
C. $7x-4$
D. $6x+4$
E. $6x+3$

Pembahasan SMART:

Fungsi f(x) diperoleh dengan menyubstitusikan nilai $x+2$ pada g(x), yaitu:

$f(x)=g(x+3)$

$f(x)=((x+3)-4)^3+((x+3)-2)^2+((x+3)-1)$

$f(x)=(x-1)^3+(x+1)^2+(x+2)$

$f(x)=x^3-2x^2+6x+2$

Untuk menentukan sisa pembagian f(x) oleh $(x-1)^2$ dapat menggunakan Teorema Sisa maupun pembagian dengan bagan, namun pada soal ini karena pembagi berderajat 2, maka lebih mudah jika membagi dengan menggunakan bagan, yaitu:

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline (x^2-1) & x^3-2x^2+6x+2 \\ & x^3 \qquad\quad -x \\ \hline & \quad -2x^2+7x \\ & \quad -2x^2 \qquad +2 \\ \hline & \qquad\quad 7x \end{array}$$

Jadi, sisanya adalah 7x .

Jawaban: B