BAB 3 LINGKARAN

A Persamaan Lingkaran

Lingkaran merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu. Titik tertentu tersebut adalah **pusat lingkaran** dan jarak yang sama disebut **jari-jari**.

1. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di O(0,0) dan Berjari-jari r

Persamaan lingkaran yang berpusat di O(0,0) dan berjari-jari r adalah:

$$x^2+y^2=r^2$$

Kedudukan titik A(a,b) terhadap lingkaran $L\equiv x^2+y^2=r^2$ yaitu:

a. Titik A(a, b) terletak **di dalam** lingkaran L, jika $a^2+b^2<r^2$

b. Titik A(a, b) terletak **pada** lingkaran L, jika $a^2+b^2<r^2$

c. Titik A(a, b) terletak **di luar** lingkaran L, jika $a^2+b^2=r^2$

2. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di P(a,b) dan Berjari-jari r

Persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dan berjari-jari r adalah:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Kedudukan titik $Q(m,n)$ terhadap lingkaran $L\equiv(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, yaitu:

a. Titik Q (m, n) terletak **di dalam** lingkaran L, jika $(m-a)^2+(n-b)^2<r^2$

b. Titik Q (m, n) terletak **pada** lingkaran L, jika $(m-a)^2+(n-b)^2=r^2$

c. Titik Q (m, n) terletak **di luar** lingkaran L, jika $(m-a)^2+(n-b)^2>r^2$

3. Bentuk Umum Persamaan Lingkaran

Perhatikan persamaan lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$!

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2+r^2=0 \quad ...(i)$$

Misalkan, A = −2a, B = −2b, dan C = $a^2+b^2+r^2$, maka $a=-\frac{1}{2}A$, $b=-\frac{1}{2}B$, dan $r=\sqrt{a^2+b^2-C}$ atau $r=\sqrt{\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}B^2-C}$.

Persamaan lingkaran (i) dapat diubah menjadi $x^2+y^2+Ax+By+C=0$.

Persamaan $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ disebut **bentuk umum persamaan lingkaran**.

Dari persamaan tersebut diperoleh pusat lingkaran yaitu $P\left(-\frac{1}{2}A,-\frac{1}{2}B\right)$ dan jari-jari lingkarannya adalah $r=\sqrt{\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}B^2-C}$.

Dapat disimpulkan, bentuk umum persamaan lingkaran adalah:

Persamaan lingkaran:
$L\equiv x^2+y^2+Ax+By+C=0$
- Pusat : $P\left(-\frac{1}{2}A,-\frac{1}{2}B\right)$
- Jari-jari : $r=\sqrt{\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}B^2-C}$

B Posisi Garis Terhadap Lingkaran

Ada dua metode untuk menentukan posisi garis terhadap lingkaran, yaitu:

1. Metode Diskriminan

Misalkan diketahui persamaan garis $h: y=mx+c$ dan persamaan lingkaran $L\equiv x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Substitusikan persamaan garis h ke persamaan lingkaran L, maka diperoleh persamaan gabungan:

$$(1+m^2)x^2+(2mn+A+Bm)x+(n^2+Bn+C)=0$$

Hitung nilai diskriminan dari persamaan gabungan tersebut $(D=b^2-4ac)$.

Sehingga, ada 3 kemungkinan hubungan garis dengan lingkaran, yaitu:

a. Garis h memotong lingkaran di dua titik jika D > 0.

b. Garis h menyinggung lingkaran jika D = 0.

c. Garis h tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran jika D < 0.

TRIK PRAKTIS

Menentukan diskriminan (D) dari hubungan antara garis $y=mx+n$ dan lingkaran $x^2+y^2=r^2$ adalah $D=4m^2r^2-4n^2+4r^2$

2. Metode Jarak Pusat

Jarak pusat lingkaran (x_p, y_p), dengan garis ax + by +c = 0 adalah:

$$d=\left|\frac{ax_p+by_p+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

Bandingkan jari-jari (r) dengan nilai d, maka:

a. Garis g memotong lingkaran di dua titik jika r > d.
b. Garis g menyinggung lingkaran jika r = d.
c. Garis g tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran jika r < d.

C Persamaan Garis Singgung Lingkaran

1. Persamaan Garis Singgung Lingkaran $L \equiv x^2+y^2=r^2$

a. Persamaan garis singgung melalui titik (x_1,y_1) pada lingkaran L adalah:

$$x_1x+y_1y=r^2$$

b. Persamaan garis singgung dengan gradien m adalah:

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$$

2. Persamaan Garis Singgung Lingkaran $L\equiv(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

a. Persamaan garis singgung melalui titik (x_1,y_1) pada lingkaran L adalah:

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

b. Persamaan garis singgung dengan gradien m adalah:

$$y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{m^2+1}$$

3. Persamaan Garis Singgung Lingkaran $L\equiv x^2+y^2+Ax+By+C=0$

a. Persamaan garis singgung melalui titik (x_1,y_1) pada lingkaran L adalah:

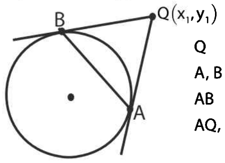
$$x_1x+y_1y+\frac{A}{2}(x_1+x)+\frac{B}{2}(y_1+y)+C=0$$

b. Persamaan garis singgung dengan gradien m adalah:

$$y+\frac{1}{2}B=m\left(x+\frac{1}{2}A\right)\pm r\sqrt{m^2+1}$$

4. Persamaan Garis Singgung Melalui Sebuah Titik di Luar Lingkaran

Dari titik $Q(x_1,y_1)$ yang berada di luar lingkaran L dapat ditarik dua buah garis singgung lingkaran dengan titik singgungnya A dan B, seperti pada gambar di bawah. Garis hubung kedua titik singgungnya (garis BC) disebut garis polar atau garis kutub.



Q = titik polar
A, B = titik singgung lingkaran
AB = garis polar
AQ, BQ = garis singgung lingkaran

Ada dua metode untuk menentukan persamaan garis polar pada lingkaran, yaitu:

a. Metode Diskriminan

Langkah-langkah:

1) Persamaan garis singgung yang melalui titik $Q(x_1,y_1)$ dengan gradien m adalah:

$y-y_1=m(x-x_1)$ lalu susun menjadi

$y=mx-mx_1+y_1$.

2) Substitusikan ke persamaan lingkaran sehingga diperoleh persamaan kuadrat gabungan $ax^2+bx+c=0$, lalu gunakan nilai diskriminan $(D=b^2-4ac=0)$, untuk menentukan nilai m.

3) Substitusikan nilai m ke persamaan yang diperoleh pada langkah pertama.

b. Metode Garis Polar

Langkah-langkah:

1) Persamaan garis polar yang melalui $Q(x_1,y_1)$ pada l ingkaran $L\equiv x^2+y^2=r^2$ adalah $x_1x+y_1y=r^2$.

2) Susunlah persamaan menjadi $y=\dfrac{r^2-x_1x}{y_1}$, kemudian substitusikan ke persamaan lingkaran sehingga terbentuk persamaan kuadrat gabungan. Hitung akar-akarnya dan substitusikan ke persamaan y sehingga diperoleh dua titik singgung.

3) Substitusikan kedua titik ke persamaan garis singgung pada langkah pertama.

D Irisan Dua Lingkaran

1. Kuasa Lingkaran

a. Kuasa Titik terhadap Lingkaran

Kuasa pada sebuah lingkaran disimbolkan dengan K, menggambarkan posisi sebuah titik pada lingkaran. Kuasa sebuah titik dengan koordinat (x_1,y_1) terhadap lingkaran dengan persamaan $x_2+y_2+Ax_1+By_1+C=0$ yaitu:

$$K=x_2+y_2+Ax_1+By_1+C$$

Sehingga, jika:

$K<0$ titik (x_1,y_1) terletak di dalam lingkaran
$K=0$ titik (x_1,y_1) terletak pada lingkaran
$K>0$ titik (x_1,y_1) terletak di luar lingkaran

b. Garis Kuasa terhadap Dua Lingkaran

Garis kuasa adalah suatu garis lurus yang merupakan tempat kedudukan semua titik-titik yang mempunyai kuasa sama terhadap dua lingkaran.

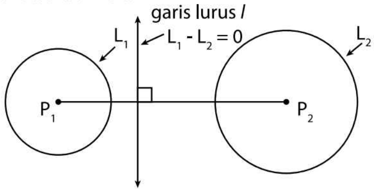
Persamaan garis kuasa pada lingkaran
$L_1 \equiv x + y + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dan
$L_2 \equiv x + y + A_2x + B_2y + C_2 = 0$ yaitu:

$$L_1(x,y) - L_2(x,y) = 0$$

atau

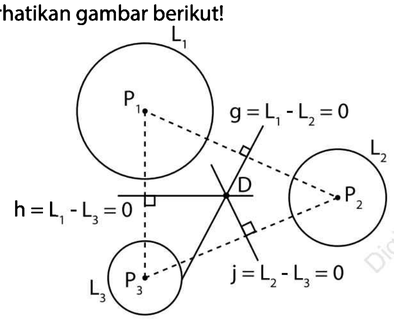
$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) = 0$$

Teorema garis kuasa menyatakan bahwa kuasa dua lingkaran adalah tegak lurus terhadap garis yang menghubungkan kedua pusat lingkaran, seperti pada sketsa berikut:



c. Titik kuasa terhadap Tiga Lingkaran

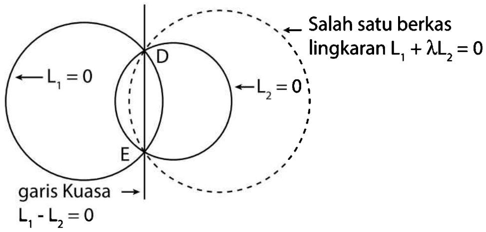
Perhatikan gambar berikut!



Garis g, h, dan j masing-masing merupakan garis kuasa dari lingkaran $L_1 - L_2$, $L_2 - L_3$, dan $L_1 - L_3$. Ketiga garis tersebut berpotongan pada titik D, yang disebut sebagai titik kuasa.

2. Berkas Lingkaran

Berkas lingkaran adalah lingkaran-lingkaran yang dapat dibuat melalui tali busur sekutu dua lingkaran. Tali busur sekutu adalah garis pada lingkaran L_1 dan L_2 yang melalui kedua titik potong lingkaran-lingkaran tersebut. Perhatikan gambar berikut!



Persamaan berkas lingkaran L_1 dan L_2 adalah:

$$L_1 + \lambda L_2 = 0$$

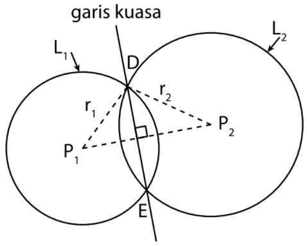
dengan λ adalah suatu parameter. Nilai parameter ini dapat ditentukan dari titik lain yang dilalui oleh berkas lingkaran.

Jika $\lambda = 0$, maka $L_1 = 0$
Jika $\lambda = \infty$, maka $L_2 = 0$
Jika $\lambda = -1$, maka $L_1 - L_2 = 0$

3. Jenis-jenis Irisan Dua Lingkaran

a. Dua Lingkaran Berpotongan

Dua buah lingkaran akan berpotongan jika jarak kedua pusat lingkaran tersebut kurang dari jumlah jari-jarinya.



Jarak $P_1P_2 < r_1 + r_2$

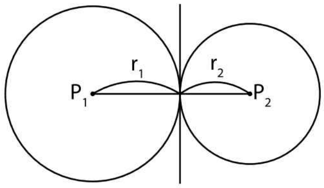
Hal ini juga dapat dibuktikan dengan ketaksamaan segitiga, dimana jumlah dua sisi segitiga selalu lebih besar dari panjang sisi ketiganya.

Dari gambar diketahui bahwa garis DE adalah tali busur persekutuan lingkaran L_1 dan L_2. Garis DE juga terletak pada garis kuasa kedua lingkaran tersebut.

b. Dua Lingkaran Bersinggungan

1) Bersinggungan di Luar

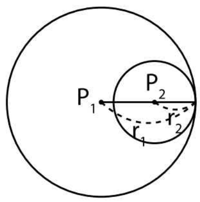
Dua buah lingkaran bersinggungan di luar apabila jarak kedua pusat lingkaran tersebut sama dengan jumlah jari-jari keduanya.



Jarak $P_1P_2 = r_1 + r_2$

2) Bersinggungan di Dalam

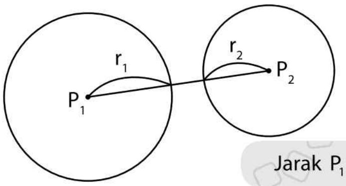
Dua buah lingkaran bersinggungan di dalam jika jarak kedua pusat lingkaran tersebut sama dengan selisih jari-jari keduanya.



Jarak $P_1P_2 = |r_1 - r_2|$

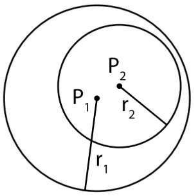
c. Dua Lingkaran Sama Sekali Tidak Berpotongan

Dua buah lingkaran sama sekali tidak berpotongan jika jarak antara kedua pusat lingkaran tersebut lebih besar dari pada jumlah jari-jari keduanya.



Jarak $P_1P_2 > r_1 - r_2$

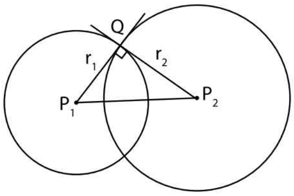
Jika lingkaran terletak di dalam lingkaran dan kedua lingkaran tersebut tidak berpotongan sama sekali, maka:



Jarak $P_1P_2 < r_2 < r_1$

4. Dua Lingkaran Orthogonal

Dua lingkaran yang orthogonal adalah dua lingkaran yang saling berpotongan tegak lurus. Hal ini terjadi jika garis singgung kedua lingkaran membentuk sudut $90°$ (saling tegak lurus), seperti ditunjukkan pada gambar berikut.



Pada dua lingkaran yang orthogonal, kuadrat jarak antara kedua pusat lingkaran $(P_1P_2)^2$ sama dengan jumlah kuadrat kedua jari-jarinya $(r_1^2 + r_2^2)$, yaitu:

$$(P_1P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$$

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Lingkaran $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 49$ menyinggung garis $x = -4$ di titik ....

A. $(-4,2)$
B. $(-4,-2)$
C. $(-4,4)$
D. $(-4,-4)$
E. $(-4,8)$

Pembahasan SMART:

Letak titik singgung lingkaran terhadap garis $x = -4$ ditentukan dengan menyubstitusikan $x = -4$ ke persamaan lingkaran, yaitu:

$x = -4 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 49$

$\Leftrightarrow 49 + y^2 - 4y + 4 = 49$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 53 - 49 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow y_{1,2} = 2$

Jadi, titik singgung lingkaran dengan garis $x = -4$ adalah $(-4,2)$.

TRIK PRAKTIS

Substitusikan semua pilihan jawaban pada persamaan lingkaran, maka $(-4,2)$ adalah jawabannya karena $(-4-3)^2 + (2-2)^2 = 49$

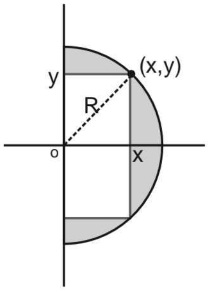
Jawaban: A

2. Di dalam setengah lingkaran yang berjari-jari R dibuat persegi panjang yang salah satu sisinya berhimpit dengan garis tengah lingkaran. Jika luas persegi panjang itu maksimum, maka luasan yang tersisa adalah ....

A. $R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$
B. $R^2\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$
C. $\frac{\pi}{4}R^2$
D. $R^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$
E. $R^2\left(3 - \frac{\pi}{2}\right)$

Pembahasan SMART:

Soal bisa kita sederhanakan menjadi gambar berikut.



Diketahui persamaan lingkaran:

$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$

Luas kotak $= L(x) = 2 \cdot x \cdot y = 2 \cdot x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$

Luas maksimum $\Rightarrow L'(x) = 0$

$L'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} + \dfrac{2x(-2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$

$\Rightarrow \left(2\sqrt{R^2 - x^2}\right)\left(2\sqrt{R^2 - x^2}\right) = 4x^2$

$\Rightarrow 4\left(R^2 - x^2\right) = 4x^2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}R$

$y = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}R\right)^2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}R$

$$\text{Luas} = 2 \cdot x \cdot y = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}R = R^2$$

$$\text{Luas arsiran} = \left(\text{Luas } \tfrac{1}{2} \odot\right) - \left(\text{Luas kotak}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\pi R^2 - R^2 = R^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right)$$

Jawaban: A

3. Jika tiitik $(a,-5)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 21 = 0$, maka nilai a yang memenuhi adalah ….

A. 2 atau 0
B. 0 atau −2
C. 1 atau −6
D. −1 atau 6
E. 3 atau 1

Pembahasan SMART:

Jika $(a,-5)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 21 = 0$, maka:

$$a^2 + (-5)^2 - 5a + 2(-5) - 21 = 0$$
$$\rightarrow a^2 + 25 - 5a - 10 - 21 = 0$$
$$\rightarrow a^2 - 5a - 6 = 0$$
$$\rightarrow (a+1)(a-6) = 0$$

Sehingga $a = -1$ atau $a = 6$.

Jawaban: D

4. Titik pusat lingkaran yang menyinggung garis $y = 2$ di $(3,2)$ dan menyinggung garis $y = -x\sqrt{3} + 2$ adalah ….

A. $(3,\sqrt{3})$
B. $(3,3\sqrt{3})$
C. $(3,2+\sqrt{3})$
D. $(3,2+2\sqrt{3})$
E. $(3,2+3\sqrt{3})$

Pembahasan SMART:

Lingkaan menyinggung y = 2 di (3,2), maka pusat lingkaran (3,a).

Karena $y = 2$ dan $y = -x\sqrt{3} + 2$ adalah garis singgung, maka:

$$d\left[(3, a), y - 2 = 0\right] = d\left[(3,a), x\sqrt{3} + y - 2 = 0\right]$$

dengan d berarti jarak.

ingat! ingat!

$$d\left[(x_1, y_1), ax + by + c = 0\right] = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

$$d\left[(3, a), y - 2 = 0\right] = d\left[(3,a), x\sqrt{3} + y - 2 = 0\right]$$

$$\left|\frac{a-2}{\sqrt{1}}\right| = \left|\frac{3\sqrt{3} + a - 2}{\sqrt{3+1}}\right|$$

$$a - 2 = \frac{3\sqrt{3} + a - 2}{2}$$

$$2a - 4 = 3\sqrt{3} + a - 2$$
$$a = 3\sqrt{3} + 2$$

Pusat lingkaran yaitu $\left(3, 3\sqrt{3} + 2\right)$

Jawaban: E

5. Lingkaran yang sepusat dengan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ dan menyinggung garis $3x - 4y + 7 = 0$ mempunyai persamaan ….

A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$
B. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
C. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$
D. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$
E. $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 25$

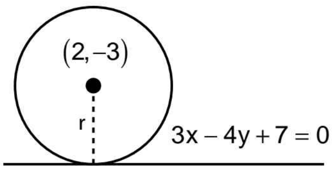
Pembahasan SMART:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$$

Dengan pusat: $\left(\frac{-(-4)}{2}, \frac{-6}{2}\right) = (2,-3)$

Lingkaran menyinggung garis $3x - 4y + 7 = 0$ maka:

$$R = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$
$$= \left|\frac{3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 7}{\sqrt{25}}\right|$$
$$= \left|\frac{25}{\sqrt{25}}\right|$$
$$= 5$$



Jadi persamaan lingkarannya:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$$
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Jawaban: A