

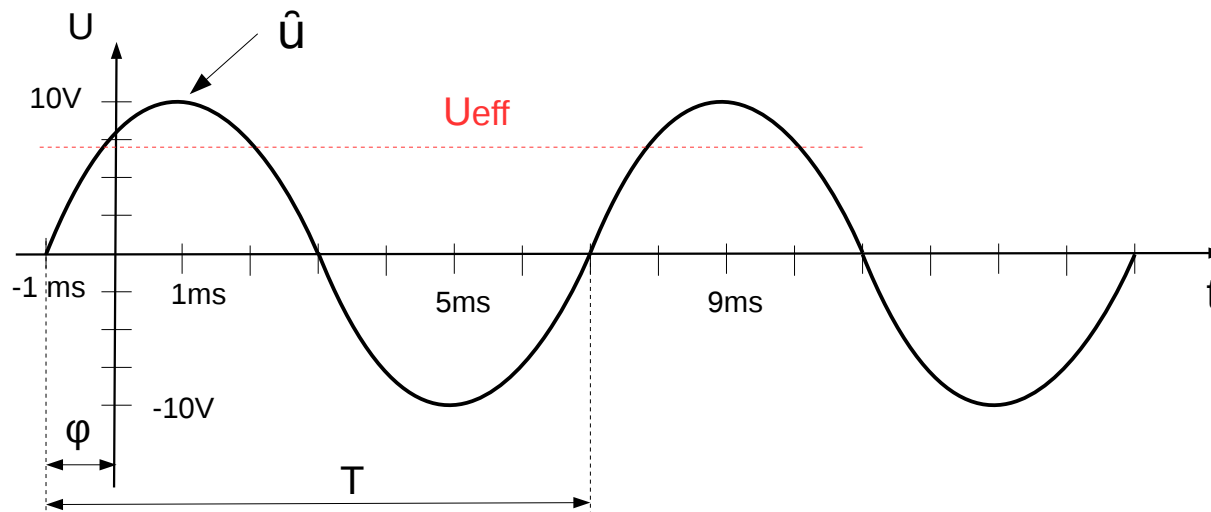
Elektrotechnika

VIII. Váltakozó áramú hálózatok

8.1. Váltakozó feszültség, áram jellemzői

Váltakozó feszültség, áram

- a feszültség/áram nagysága és iránya változik !
- a jelalak sokféle lehet: szinuszos, négyszög, háromszög, ...
- sok jellemzője van !



$\hat{U} = 10V$

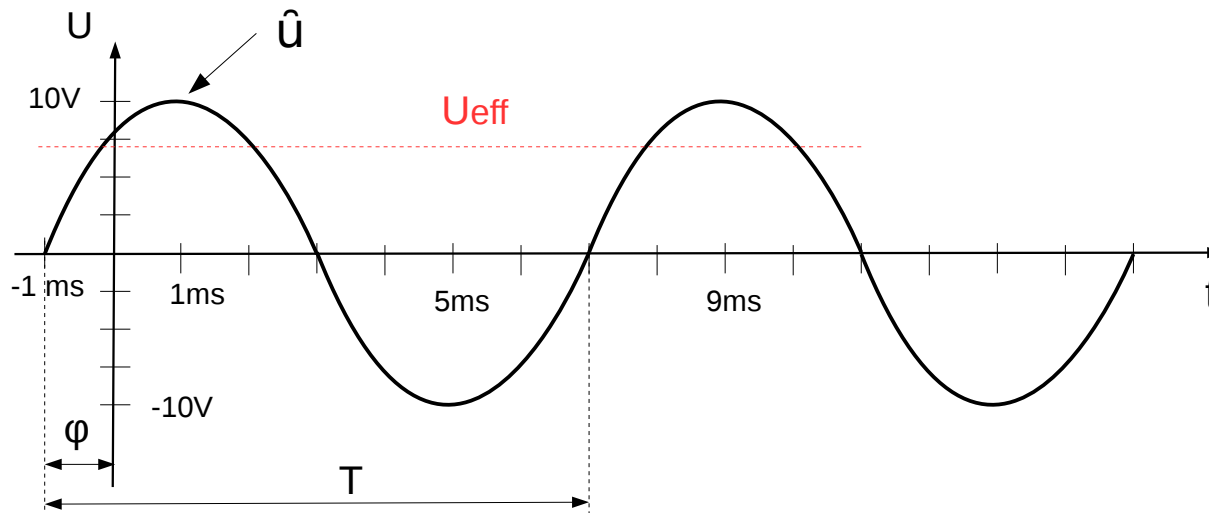
- **időfüggvény**, $u(t)$ vagy $i(t)$

Szinuszos jelnél $\rightarrow u(t) = \hat{U} * \sin(\omega * t + \varphi)$

- **amplitúdó**, csúcsérték

U_{cs} U_p \hat{U} vagy I_{cs} I_p \hat{I}

8.1. Váltakozó feszültség, áram jellemzői



$$T = 8 \text{ ms}$$

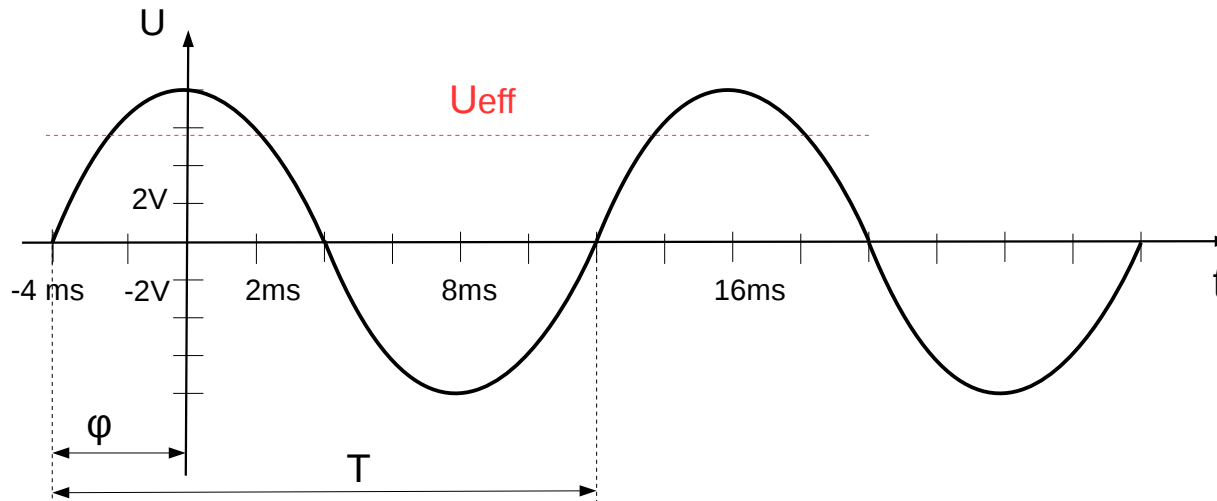
$$f = 1 / T = 1 / 8 \text{ ms} = 0,125 \text{ kHz}$$

$$U_{\text{eff}} = \hat{U} / \sqrt{2} = 10 / 1,41 \approx 7,1 \text{ V}$$

- **periódusidő**, T ismétlődési idő (egy szinuszhullám ideje)
- **frekvencia**, f másodpercenkénti periódusok száma, (rezgésszám)
mértékegysége $\rightarrow 1/\text{s} = \text{Hz}$ (Hertz) $f = 1 / T$
- **effektív érték**, U_{eff} vagy simán U vagy I_{eff} vagy egyszerűen I
négyzetes középérték, szinuszos jel esetén $U_{\text{eff}} = \hat{U} / \sqrt{2}$ $I_{\text{eff}} = \hat{I} / \sqrt{2}$
- **körfrekvencia**, ω (szögsebesség) $\omega = 2\pi \cdot f$ mértékegysége $\rightarrow \text{rad/s}$
- **fázisszög**, φ eltolás a 0 időponthoz képest, mértékegysége $\rightarrow \text{rad}$ (radián)

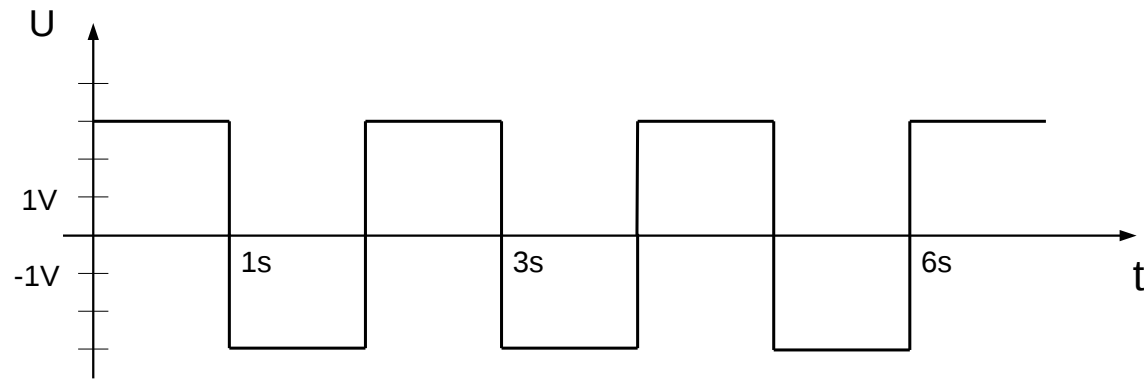
8.1. Váltakozó feszültség, áram jellemzői

minta feladat



- amplitúdó, $U_p = 8 \text{ V}$
- periódusidő, $T = 16\text{ms}$ ($-4\text{ms} - 12\text{ms}$)
- frekvencia, $f = 1 / 16\text{ms} = 0,0625 \text{ kHz} = 62,5 \text{ Hz}$
- effektív érték, $U = U_p / \sqrt{2} = 8\text{V} / 1,41 \approx 5,66 \text{ V}$
- fázisszög, $\varphi = \pi/2 \text{ rad}$ (90°)
- időfüggvény, $u(t) = 8 * \sin(2\pi * t / 0,016\text{s} + \pi/2)$

8.2. Feladatok

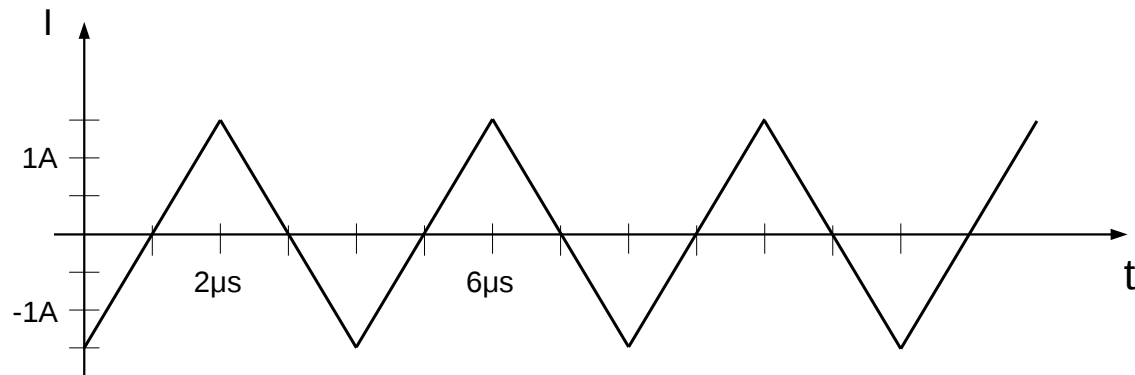


$$T=?$$

$$f=?$$

$$\hat{U}=?$$

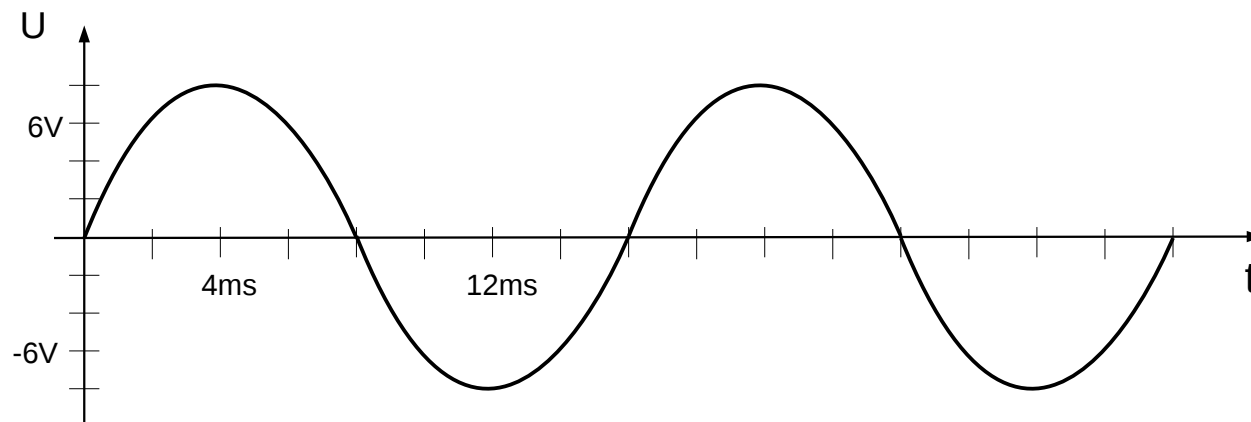
$$U_{pp}=?$$



$$T=?$$

$$f=?$$

$$\hat{I}=?$$



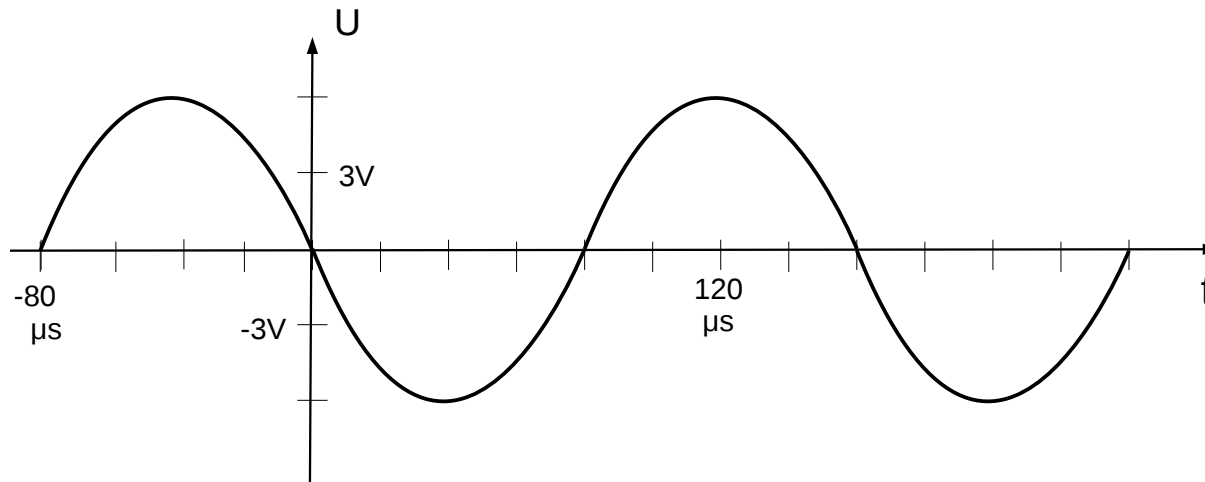
$$T=?$$

$$f=?$$

$$\hat{U}=?$$

$$U_{eff}=?$$

8.2. Feladatok



- amplitúdó, $U_p =$
- periódusidő, $T =$
- frekvencia, $f =$
- effektív érték, $U =$
- fázisszög, $\varphi =$
- időfüggvény, $u(t) =$

8.3. Egyes alkatrészek egyenletei

Általános esetben

Ellenállás $\rightarrow u_R(t) = R * i_R(t)$

Tekercs $\rightarrow u_L(t) = L * \frac{di_L(t)}{dt}$

Kondenzátor $\rightarrow i_C(t) = C * \frac{du_C(t)}{dt}$

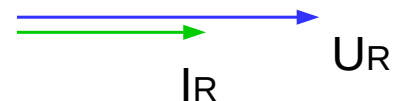
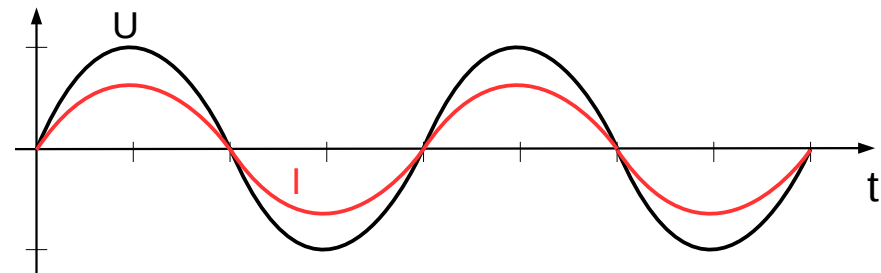
Szinuszosan váltakozó áram esetén

Szinuszosan váltakozó áram és feszültség esetén egyszerűsödnek az összefüggések

Ellenállás $i_R(t) = \hat{I} * \sin(\omega * t) \rightarrow u_R(t) = R * \hat{I} * \sin(\omega * t) = \hat{U} * \sin(\omega * t)$

Az áram és feszültség „fázisban van”
(ugyanott van a maximumuk
és nulla értékük)

$$\hat{U} = R * \hat{I}$$



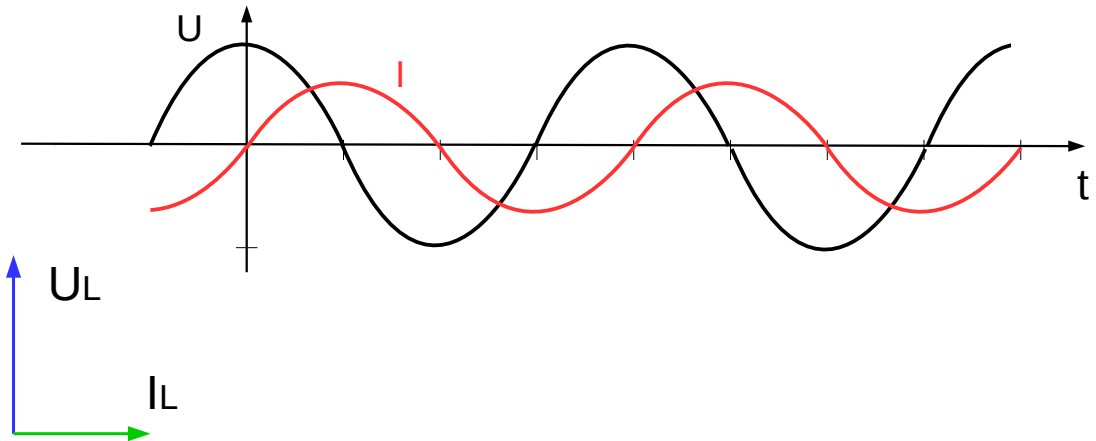
8.3. Egyes alkatrészek egyenletei

Tekercs $i_L(t) = \hat{I} * \sin(\omega * t) \rightarrow u_L(t) = \omega * L * \hat{I} * \cos(\omega * t) = \hat{U} * \sin(\omega * t + \pi/2)$

Az áram és feszültség nincs „fázisban”
(nem ugyanott van a maximumuk
és nulla értékük) \rightarrow

A feszültség negyedhullámot (90° -ot)
siet az áramhoz képest

$$\hat{U} = \omega * L * \hat{I}$$

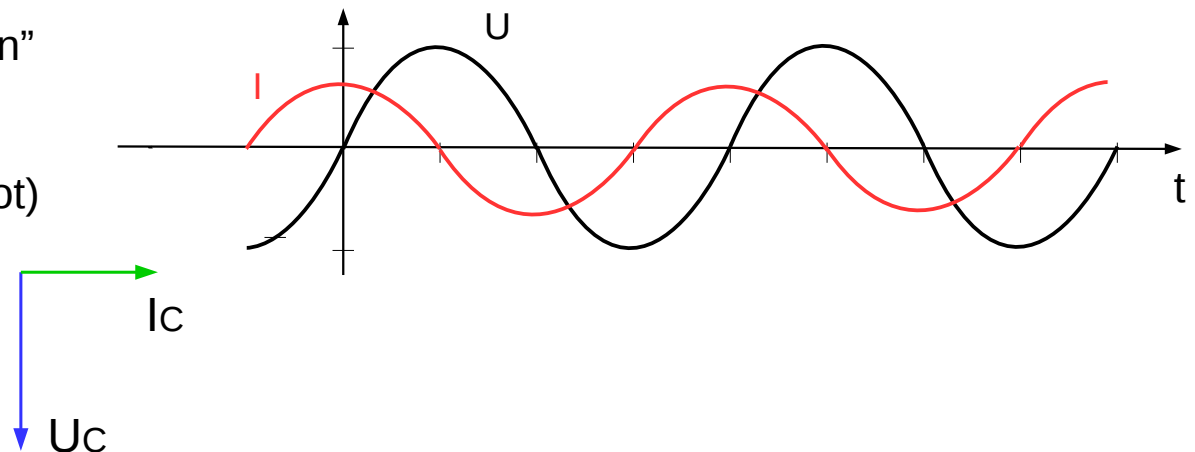


Kondenzátor $u_L(t) = \hat{U} * \sin(\omega * t) \rightarrow i_L(t) = \omega * C * \hat{U} * \cos(\omega * t) = \hat{I} * \sin(\omega * t + \pi/2)$

Az áram és feszültség nincs „fázisban”
(nem ugyanott van a maximumuk
és nulla értékük) \rightarrow

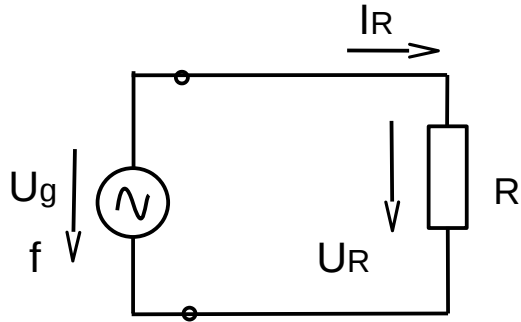
A feszültség negyedhullámot (90° -ot)
késik az áramhoz képest

$$\hat{I} = \omega * C * \hat{U}$$



8.4. Az alaptörvények szinuszos áram esetén

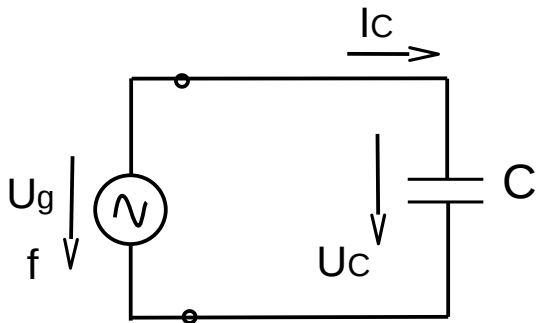
Ellenállás



Az effektív értékek, a csúcsértékek, és a pillanatnyi értékek között is igaz az Ohm törvény

$$R = \frac{U_R}{I_R} \quad \text{vagy} \quad R = \frac{\hat{U}_R}{\hat{I}_R}$$

Kondenzátor



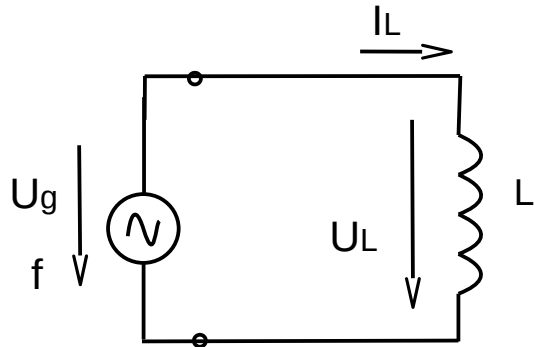
Az effektív, vagy csúcsértékek között igaz az Ohm törvény (egy adott frekvencián)

$$X_C = \frac{U_C}{I_C} \quad X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$$

X_C → a kondenzátor „ellenállása”
(kapacitív reaktancia) → függ a frekvenciától !!

8.4. Az alaptörvények szinuszos áram esetén

Tekercs



Az effektív, vagy csúcsértékek között igaz az Ohm törvény (egy adott frekvencián)

$$X_L = \frac{U_L}{I_L}$$

$$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L$$

X_L → a tekercs „ellenállása”
(induktív reaktancia) → függ a frekvenciától !!

Csomóponti törvény, Hurok törvény

Természetesen most is igazak, de a feszültségek, áramok összegzése nem olyan egyszerű.

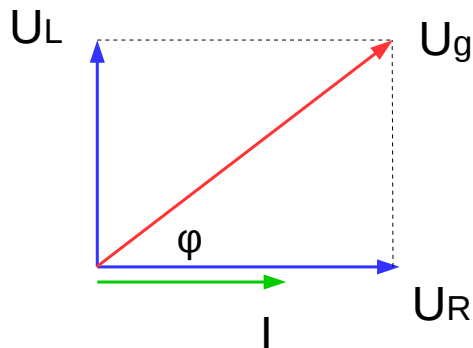
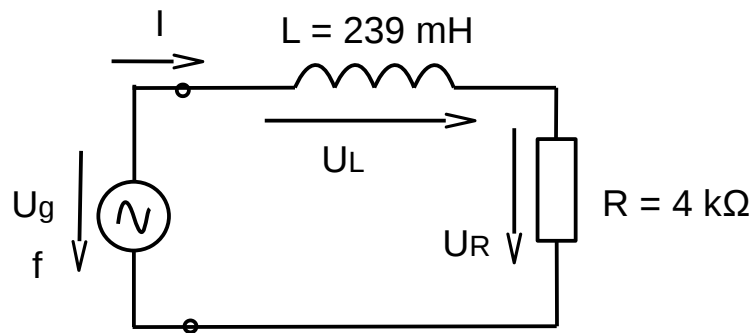
Az előzőek alapján váltakozó áram esetén az áramok, feszültségek egymáshoz képest elcsúsznak, fázisszögük eltér → időfüggvényként összegzésük nehézkes !!

Nem csak nagyságuk van tehát hanem irányuk, fázisszögük is → vektorok ! → vektorosan összegezhetők

8.4. Az alaptörvények szinuszos áram esetén

minta feladat 1.

Mekkora áram (I) fog folyni az áramkörben és mennyi lesz U_R és U_g értéke, ha $U_L = 6V$ és $f = 2kHz$?



U_g és I közötti fázisszög
→ $\tan \varphi = U_L / U_R = X_L / R$

A tekercs „ellenállása”:

$$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 2000 \text{ Hz} \cdot 0,239 \text{ H}$$
$$X_L = 3003,36 \, \Omega \approx 3 \text{ k}\Omega$$

Ohm törvénnyel:

$$I = U_L / X_L = 6 \text{ V} / 3 \text{ k}\Omega = 2 \text{ mA}$$

és

$$U_R = I \cdot R = 2 \text{ mA} \cdot 4 \text{ k}\Omega = 8 \text{ V}$$

Hurok törvénnyel:

$$\bar{U}_g = \bar{U}_R + \bar{U}_L \quad !! \text{ vektorosan} \rightarrow$$

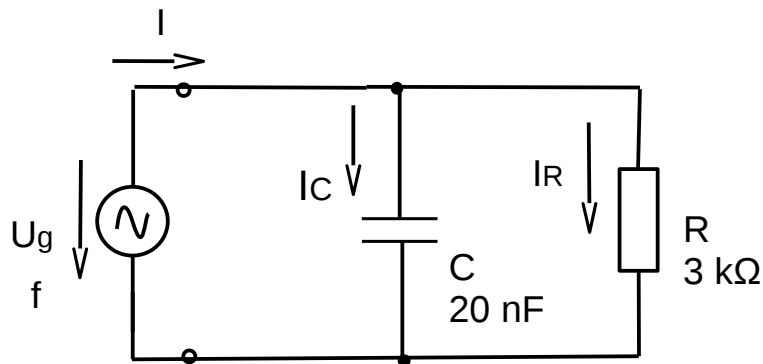
← U_R és I fázisban van és U_L 90° -ot siet I -hez képest !

$$U_g^2 = U_R^2 + U_L^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$
$$U_g = 10 \text{ V}$$

8.4. Az alaptörvények szinuszos áram esetén

minta feladat 2.

Mekkora áramok fognak folyni az áramkörben (mennyi lesz I , I_R és I_C értéke), ha $U_g = 12V$ és $f = 2kHz$?



A kondenzátor „ellenállása”:

$$X_C = 1 / (2\pi \cdot f \cdot C) = 1 / (2\pi \cdot 2000 \text{ Hz} \cdot 20 \cdot 10^{-9} \text{ F})$$
$$X_C = 1 / 0,0002513 = 3979 \Omega \approx 4 \text{ k}\Omega$$

Ohm törvénnyel:

$$I_C = U_g / X_C = 12 \text{ V} / 4 \text{ k}\Omega = 3 \text{ mA}$$

és

$$I_R = U_g / R = 12 \text{ V} / 3 \text{ k}\Omega = 4 \text{ mA}$$

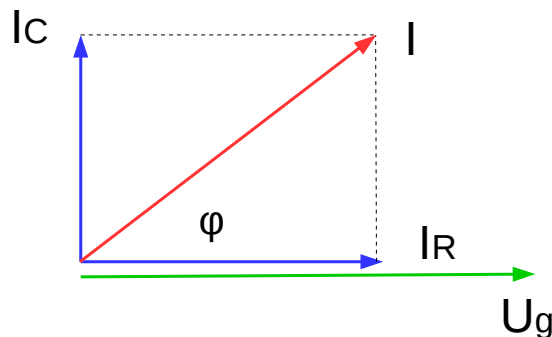
Csomóponti törvénnyel:

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_C \quad !! \text{ vektorosan } \rightarrow$$

U_g és I_R fázisban van és I_C 90° -ot siet U_g -hez képest !

$$I^2 = I_R^2 + I_C^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$
$$I = 5 \text{ mA}$$

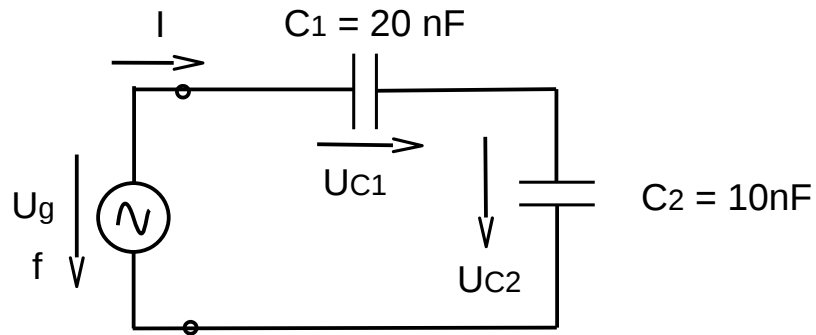
U_g és I közötti fázisszög
 $\rightarrow \tan \varphi = I_C / I_R = R / X_C$



8.5. Feladatok

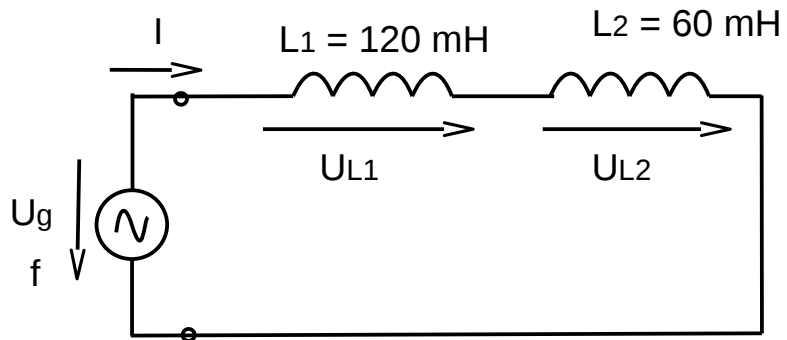
1. feladat

Mekkora áram (I) fog folyni az áramkörben és mennyi lesz U_{C2} és U_g értéke, ha $U_{C1} = 6V$ és $f = 4kHz$?



2. feladat

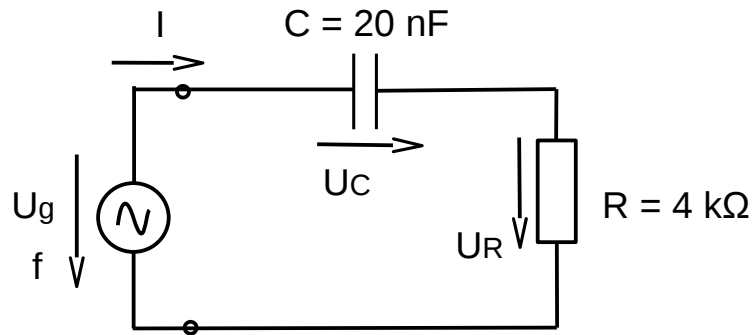
Mennyi lesz U_g , U_{L1} és U_{L2} értéke, ha $I = 5 \text{ mA}$ és $f = 8kHz$?



8.5. Feladatok

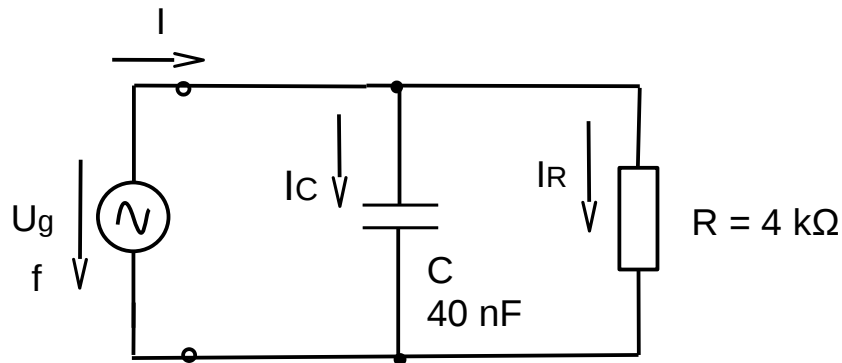
3. feladat

Mekkora áram (I) fog folyni az áramkörben és mennyi lesz U_C és U_g értéke, ha $U_R = 6V$ és $f = 4kHz$?



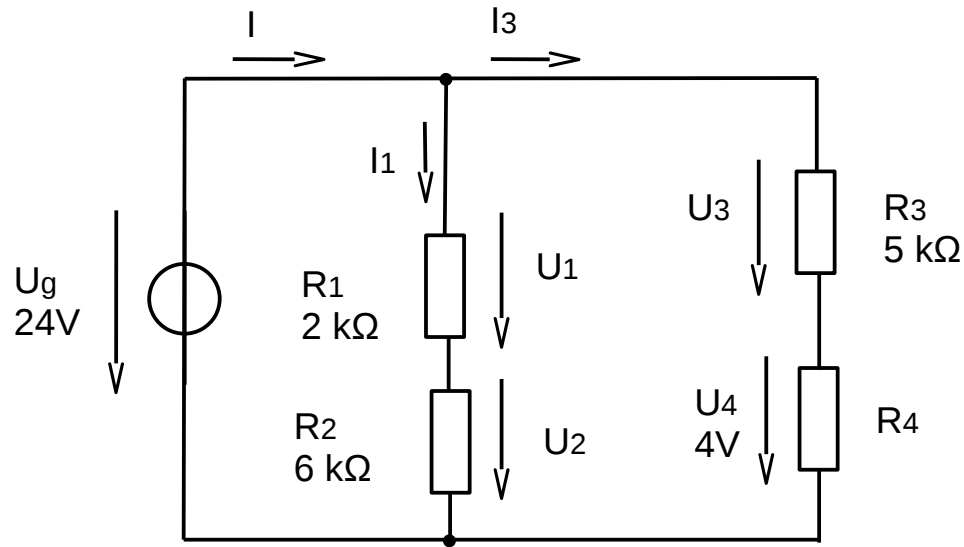
4. feladat

Mennyi lesz U_g és I_C és I értéke, ha $I_R = 5 \text{ mA}$ és $f = 4kHz$?



8.6. Ismétlő feladatok

1. Számítsd ki az áramokat, feszültségeket ! (I_1 , U_1 , U_2 , U_3 , I_3 , I)

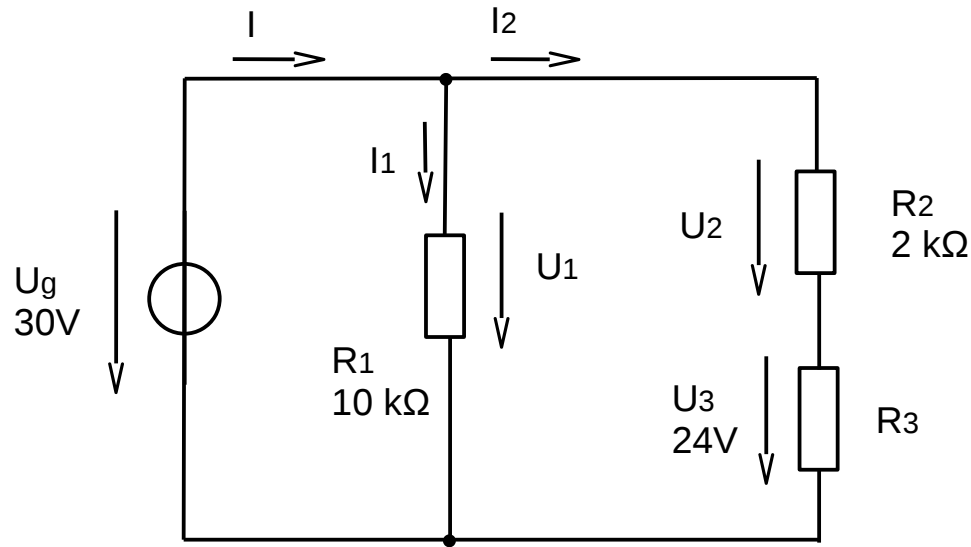


2. $f = 8\text{kHz}$, $C = 4\text{nF}$ $\rightarrow X_C = ?$

3. $f = 5\text{kHz}$, $L = 0,5\text{H}$ $\rightarrow X_L = ?$

8.7. Ismétlő feladatok

1. Számítsd ki az áramokat, feszültségeket ! (I_1 , U_1 , U_2 , I_2 , I)



2. $f = 4\text{ kHz}$, $L = 0,2\text{ H}$ \rightarrow $X_L = ?$

3. $f = 500\text{ Hz}$, $C = 300\text{ nF}$ \rightarrow $X_C = ?$

4. $f = 0,3\text{ kHz}$, $X_L = 1\text{ k}\Omega$ \rightarrow $L = ?$

8.8. Impedancia

Impedancia

Mindenfajta áramkorlátozó hatást impedanciának nevezünk („általános ellenállás”)

Speciális fajtái: az ellenállás, induktív reaktancia, kapacitív reaktancia

Jele: Z , mértékegysége: Ω

A feszültséghez és áramhoz hasonlóan vektoros mennyiség \rightarrow van nagysága és fázisszöge !!

Ellenállás impedanciája

nagysága $\rightarrow Z_R = R$

fázisszöge $\rightarrow \varphi_R = 0^\circ$

$Z_R (R)$



Tekercs impedanciája

nagysága $\rightarrow Z_L = X_L$

fázisszöge $\rightarrow \varphi_L = 90^\circ$

Z_L
(X_L)



Kondenzátor impedanciája

nagysága $\rightarrow Z_C = X_C$

fázisszöge $\rightarrow \varphi_C = -90^\circ$

Z_C
(X_C)

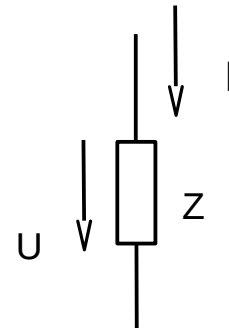


U , I és Z nagyságának és fázisszögének kapcsolata

$$Z = \frac{U}{I}$$

és

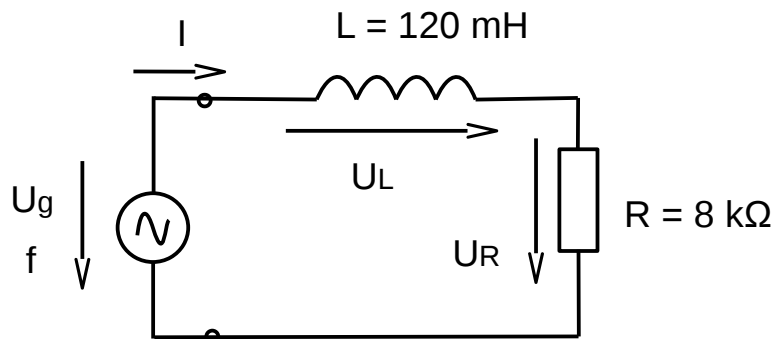
$$\varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I$$



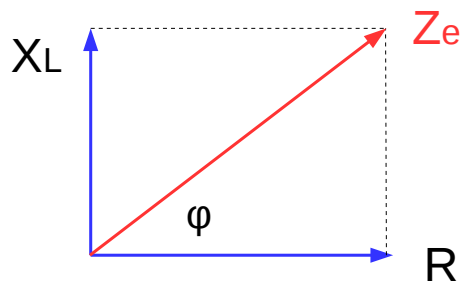
8.8. Impedancia

1. minta feladat, soros RL áramkör

Mennyi lesz az eredő impedancia (Z), és mekkora áram (I) fog folyni az áramkörben, ha $U_g = 24V$ és $f = 8kHz$?



fázisszögek \rightarrow
 $\varphi_R = 0^\circ$ és $\varphi_L = 90^\circ$



$$Z_e = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

A tekercs „ellenállása”:

$$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 8000 \text{ Hz} \cdot 0,12 \text{ H}$$
$$X_L = 6031,86 \Omega \approx 6 \text{ k}\Omega$$

Eredő impedancia számítása \rightarrow vektorosan !

$$\bar{Z}_e = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L \quad !! \text{ vektorosan } \rightarrow$$

$$Z_e^2 = R^2 + X_L^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$
$$Z_e = 10 \text{ k}\Omega$$

Ohm törvénnyel:

$$I = U_g / Z_e = 24 \text{ V} / 10 \text{ k}\Omega = 2,4 \text{ mA}$$

és

$$U_R = I \cdot R = 2,4 \text{ mA} \cdot 8 \text{ k}\Omega = 19,2 \text{ V}$$

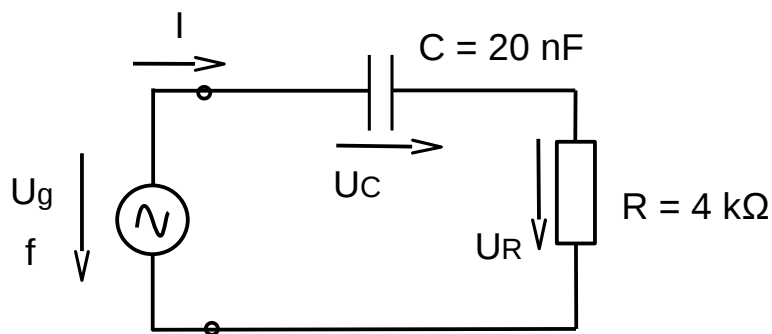
$$U_L = I \cdot X_L = 2,4 \text{ mA} \cdot 6 \text{ k}\Omega = 14,4 \text{ V}$$

$$Z_e \text{ fázisszöge, } \varphi \rightarrow \tan \varphi = X_L / R$$

8.8. Impedancia

2. minta feladat, soros RC áramkör

Mennyi lesz az eredő impedancia (Z), és mekkora áram (I) fog folyni az áramkörben, ha $U_g = 24V$ és $f = 4kHz$?



A kondenzátor „ellenállása”:

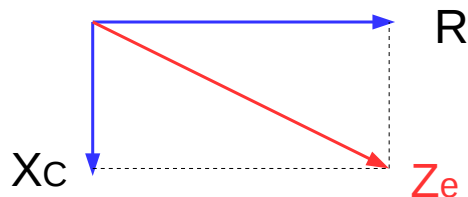
$$X_C = 1 / (2\pi \cdot f \cdot C) = 1 / (2\pi \cdot 4000 \text{ Hz} \cdot 20 \cdot 10^{-9} \text{ F})$$
$$X_C = 1 / 0,000502655 = 1989,4 \Omega \approx 2 \text{ k}\Omega$$

Eredő impedancia számítása → vektorosan !

$$\bar{Z}_e = \bar{Z}_R + \bar{Z}_C \quad !! \text{ vektorosan} \rightarrow$$

$$Z_e^2 = R^2 + X_C^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$
$$Z_e = 4,472 \text{ k}\Omega$$

fázisszögek →
 $\varphi_R = 0^\circ$ és $\varphi_C = -90^\circ$



$$Z_e = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

Ohm törvénnyel:

$$I = U_g / Z_e = 24 \text{ V} / 4,472 \text{ k}\Omega = 5,36 \text{ mA}$$

és

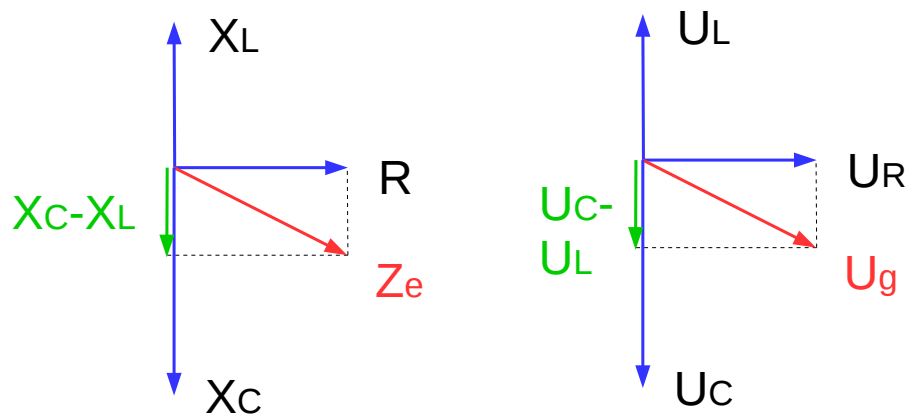
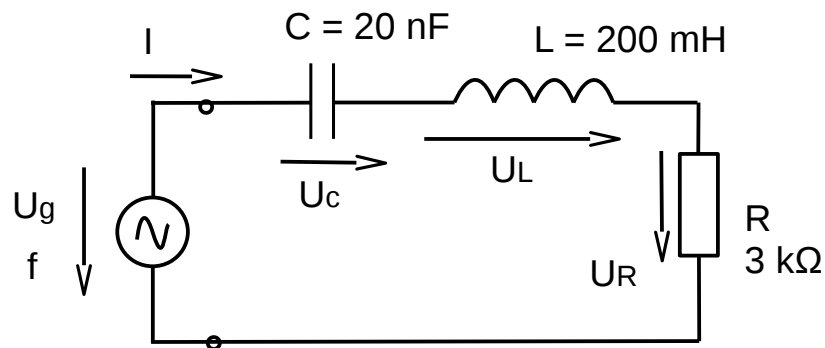
$$U_R = I \cdot R = 5,36 \text{ mA} \cdot 4 \text{ k}\Omega = 21,44 \text{ V}$$

$$U_C = I \cdot X_C = 5,36 \text{ mA} \cdot 2 \text{ k}\Omega = 10,72 \text{ V}$$

8.8. Impedancia

3. minta feladat, soros RLC áramkör

Mekkora lesz az áramkör eredő impedanciája (Z_e), és mekkora áram (I) fog folyni ha $U_g=5V$ és $f=2kHz$?



$$Z_e = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 2000 \text{ Hz} \cdot 0,2 \text{ H}$$

$$X_L = 2513,274 \Omega \approx 2,5 \text{ k}\Omega$$

$$X_C = 1 / (2\pi \cdot f \cdot C) = 1 / (2\pi \cdot 2000 \text{ Hz} \cdot 20 \cdot 10^{-9} \text{ F})$$

$$X_C = 3978,87 \Omega \approx 4 \text{ k}\Omega$$

Eredő impedancia számítása → vektorosan !

$$\bar{Z}_e = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C \quad !! \text{ vektorosan } \rightarrow$$

$$Z_e^2 = R^2 + (X_C - X_L)^2 = 3^2 + 1,5^2 = 11,25$$

$$Z_e = 3,35 \text{ k}\Omega$$

Ohm törvénnyel:

$$I = U_g / Z_e = 5 \text{ V} / 3,35 \text{ k}\Omega = 1,5 \text{ mA}$$

és

$$U_R = I \cdot R = 1,5 \text{ mA} \cdot 3 \text{ k}\Omega = 4,5 \text{ V}$$

$$U_L = I \cdot X_L = 1,5 \text{ mA} \cdot 2,5 \text{ k}\Omega = 3,75 \text{ V}$$

$$U_C = I \cdot X_C = 1,5 \text{ mA} \cdot 4 \text{ k}\Omega = 6 \text{ V}$$

Hurok törvényből →

$$U_g^2 = U_R^2 + (U_C - U_L)^2$$

8.9. Gyakorló feladatok

1. $f = 2\text{kHz}$, $C = 10\text{nF}$ $\rightarrow X_C = ?$
2. $f = 8000\text{Hz}$, $C = 600\text{pF}$ $\rightarrow X_C = ?$
3. $f = 2\text{kHz}$, $L = 100\text{mH}$ $\rightarrow X_L = ?$
4. $f = 600\text{Hz}$, $L = 300\text{mH}$ $\rightarrow X_L = ?$
5. Mennyi az eredő impedanciája az alábbi kétpólusnak ?



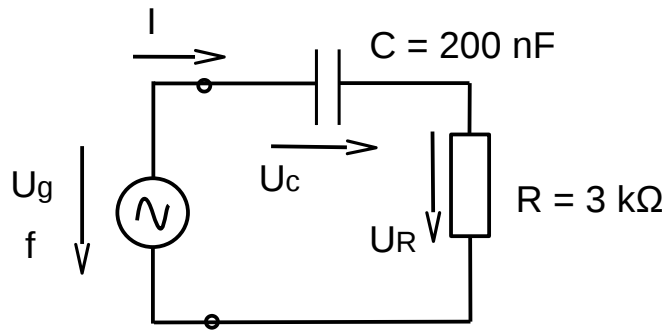
8.9. Gyakorló feladatok

1. $f = 5\text{kHz}$, $C = 80\text{nF}$ $\rightarrow X_C = ?$
2. $f = 200\text{Hz}$, $C = 4\mu\text{F}$ $\rightarrow X_C = ?$
3. $f = 300\text{Hz}$, $L = 0,4\text{H}$ $\rightarrow X_L = ?$
4. $f = 4000\text{Hz}$, $L = 200\text{mH}$ $\rightarrow X_L = ?$
5. Mennyi az eredő impedanciája az alábbi kétpólusnak ?

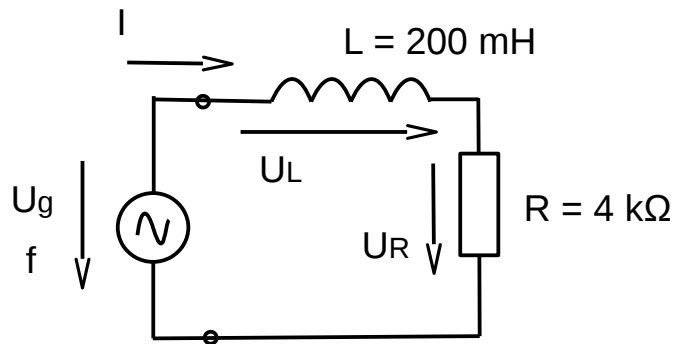


8.10. Feladatok

1. Mekkora lesz az áramkör eredő impedanciája (Z_e), és mekkora áram (I) fog folyni ha $U_g=5V$ és $f=800Hz$?

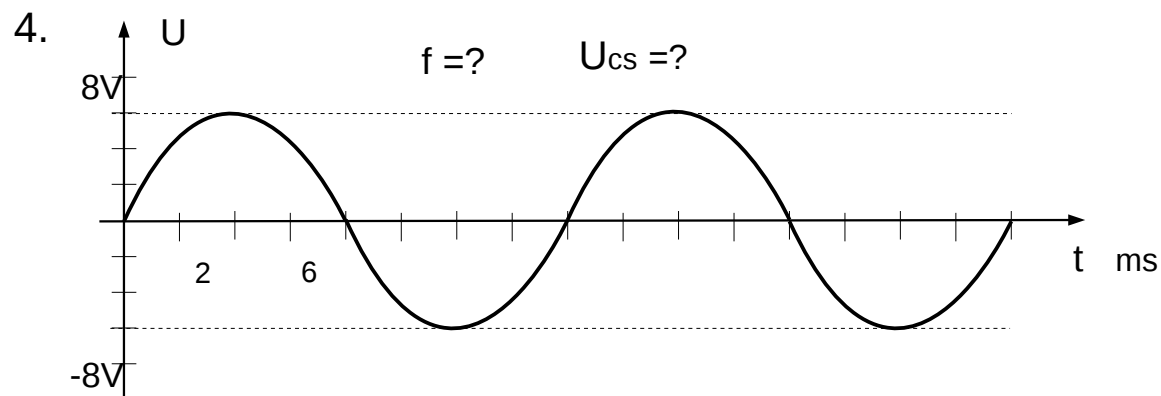


2. Mekkora lesz az áramkör eredő impedanciája (Z_e), és mekkora áram (I) fog folyni ha $U_g=10V$ és $f=2400Hz$?



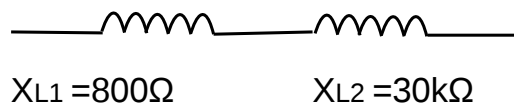
8.11. Ellenőrző feladatok

1. szinuszos jel effektív értéke 3V , mennyi a csúcsértéke ?
2. Mennyi a periódusidő ha $f=20\text{Hz}$?
3. $f=100\text{Hz}$, $X_L=62,8\Omega$ mennyi a tekercs induktivitása ?



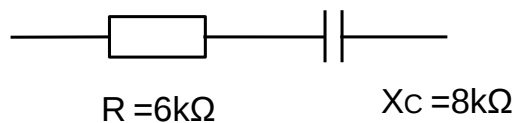
8.11. Ellenőrző feladatok

5. Mennyi az eredő impedanciája az alábbi kétpólusnak ?



6. $f = 10kHz$, $C = 2000nF$ $X_C = ?$

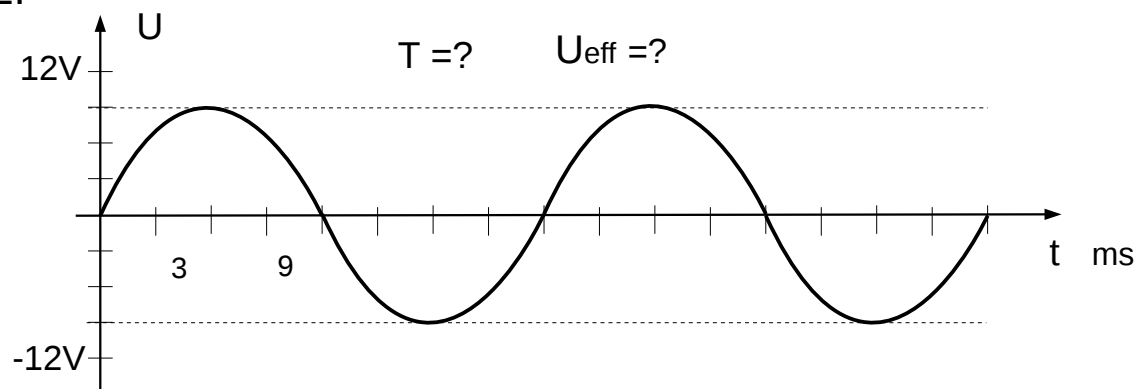
7. Mennyi az eredő impedanciája az alábbi kétpólusnak ?



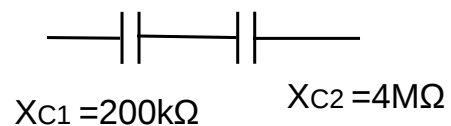
8.12. Ellenőrző feladatok

1. $f = 400\text{Hz}$, $L = 100\text{mH}$ $X_L = ?$

2.



3. Mennyi az eredő impedanciája az alábbi kétpólusnak ?

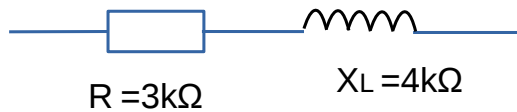


4. $T = 0,2\text{s}$ mennyi a frekvencia ?

8.12. Ellenőrző feladatok

5. szinuszos jel effektív értéke 5V, mennyi a csúcsértéke ?

6. Mennyi az eredő impedanciája az alábbi kétpólusnak ?



7. $f = 5\text{kHz}$, $X_C = 2000\Omega$ $C = ?$