Számítási feladatok megoldással a 6. fejezethez

1. Egy szinuszosan változó áram a polaritás váltás után 1 µs múlva éri el első maximumát. Mekkora az áram frekvenciája?

Megoldás:

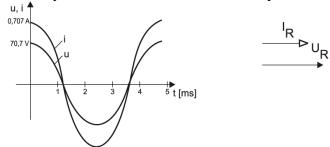
$$T = 4 \cdot t = 4 \cdot 1 = 4 \,\mu s$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-6}} = 0.25 \cdot 10^6 \ Hz = \underbrace{250 \ kHz}_{======}$$

- 2. Egy áramkörben I = 0,5 A erősségű és 200 Hz frekvenciájú áram folyik.
- a) Számítsuk ki az áramkör R = 100 Ω értékű ellenállásán eső feszültség csúcsértékét!
- c) Rajzoljuk fel az áram és a feszültség vektoriális képet,az áram a cos függvény szerint változik!

Megoldás:

- a) az áramerősség csúcsértéke: $I_p=I\sqrt{2}=0,5\sqrt{2}=0,707~A$, A feszültség ohm törvénye szerint: $U_p=I_p\cdot R=0,707~A\cdot 100~\Omega=70,7~V$.
- c) A tisztán ohmos jelleg miatt az ellenálláson átfolyó áram és az általa létrehozott feszültség azonos fázishelyzetű, vektoraik is azonos irányúak:



- 3. Egy tisztán kapacitív jellegű áramkörben a C = 10 nF kapacitású kondenzátoron 2,5 V szinuszosan váltakozó feszültségesés jön létre. Az áramkört tápláló generátor frekvenciája 10 kHz.
- a) Számítsuk ki az áramkörben folyó áram erősség csúcsértékét!
- c) Rajzoljuk fel az áramerősség és a feszültség vektoriális képet!

Megoldás:

$$U_p = U \cdot \sqrt{2} = 2.5 V \cdot 1.41 = 3.53 V$$

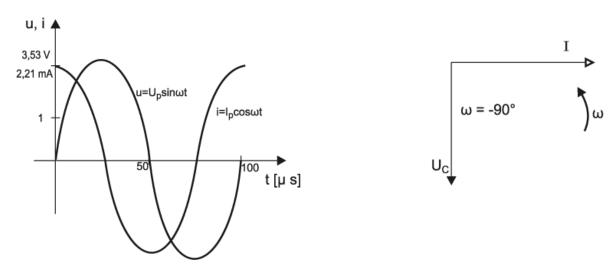
Az áramkörben folyó áram erősségét a kondenzátor reaktanciája és a rajta eső feszültség értékéből tudjuk meghatározni.

A kapacitív reaktancia:
$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{6.28 \cdot 10^4~Hz \cdot 10^{-8}~F} = 1.6 \cdot 10^3~\Omega$$
 .

Az áramkörben folyó áram csúcsértéke:

$$I_p = \frac{U_p}{X_C} = \frac{3,53 \, V}{1,6 \, k\Omega} = 2,21 \cdot 10^{-3} \, A = 2,21 \, mA$$
.

c) Rajzoljuk fel a feszültség és az áramerősség vektorábrát!



4. Számítsuk ki, mekkora a hatásos teljesítménye az L = 0,5 H és R = 200 Ω elemekből álló soros körnek, ha f = 200 Hz frekvenciájú és U = 24 V feszültségű generátorra kapcsoljuk!

Megoldás:

$$L = 0.5 H$$

$$R = 200 \Omega$$

$$f = 200 Hz$$

$$U = 24 V$$

$$P = ?$$

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 200 \cdot 0.5 = 628.3 \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{200^2 + 328.3^2} = 659.4 \,\Omega$$

 $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ (soros RL impedancia vektorábra; link 6.8.1)

$$\cos \varphi = 0.303$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{24}{659.4} = 0.0364 A$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 24 \cdot 0.0364 \cdot 0.303 = 0.26 W$$

5. Számítsuk ki, mekkora annak a berendezésnek a hatásos teljesítménye, amely a 230 V-os hálózatból 12 A áramot vesz fel! A berendezés hatásfoka η = 85 %, a teljesítménytényezője $\cos \varphi = 0.6$.

Megoldás:

$$\begin{array}{l} \text{U} = 230 \text{ V} \\ \text{I} = 12 \text{ A} \\ \eta = 85 \% \\ \underline{\cos \varphi} = 0.6 \\ \text{P} = ? \\ S = U \cdot I = 230 \cdot 12 = 2760 \, VA \\ P_{fel} = S \cdot \cos \varphi = 2760 \cdot 0.6 = 1656 \, W \text{ (a hálózatból felvett teljesítmény)} \\ \underline{P_{le}} = P_{fel} \cdot \eta = \underline{1407.6 \, W} \text{ (a berendezés által leadott teljesítmény)} \end{array}$$

6. Egy egyfázisú motor 20 A áramot vesz fel a 230 V-os hálózatból. Számítsuk ki a teljesítménytényezőjét, ha 80%-os hatásfok mellett 2640 W hatásos teljesítményt fejt

Megoldás:

Megoldas.

$$I = 20 \text{ A}$$

 $U = 230 \text{ V}$
 $\eta = 80 \%$
 $P_{le} = 2640 \text{ W}$
 $\cos \varphi = ?$
 $S = U \cdot I = 230 \cdot 20 = 4600 \text{ VA}$
 $P_{fel} = \frac{P_{le}}{\eta} = \frac{2640}{0.8} = 3300 \text{ W}$
 $\frac{\cos \varphi}{S} = \frac{P_{fel}}{S} = \frac{3300 \text{ W}}{4600 \text{ VA}} = \frac{0.72}{S}$

7. Egy soros kapcsolás 540 Ω-os ellenállásból és 95 mH induktivitású tekercsből áll. Mekkora az áramkörben folyó áram effektív értéke, és mekkora az ellenálláson ill. az induktivitáson eső feszültség, ha a soros R-L kapcsolásra 21,2 V amplitúdójú, 1 kHz frekvenciájú feszültséget kapcsolunk? Számítsuk ki a feszültség és az áram közötti fáziseltérést!

Megoldás:

R = 540
$$\Omega$$

L = 95 mH
 U_0 = 21,2 V
 \underline{f} = 1 kHz
I = ?; U_R = ?; U_L = ?; φ = ?
 X_L = $2\pi f L$ = $2\pi \cdot 10^3 \cdot 95 \cdot 10^{-3}$ = 596,9 Ω
 $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{540^2 + 596,9^2}$ = 804,9 Ω

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 15 V$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{15}{804,9} = 18,7 \text{ mA}$$

$$U_R = I \cdot R = 0,0187 \cdot 540 = 10,1 V$$

$$U_L = I \cdot X_L = 0,0187 \cdot 596,9 = 11,1 V$$

$$tg\varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{596,9}{540} = 1,1053 \rightarrow \varphi = 47,8^{\circ}$$

8. Számítsuk ki, mekkora ohmos ellenállás kell bekötnünk az L = 100 μH induktivitású soros körbe, hogy az áramkör határfrekvenciája 30 kHz legyen!

Megoldás:

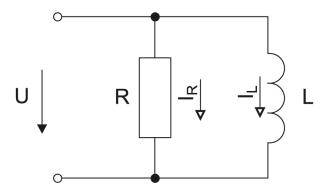
$$L = 100 \mu H$$

$$F_h = 30 \text{ kHz}$$

$$R = ?$$

$$f_h = \frac{R}{2\pi L} \rightarrow R = 2\pi L \cdot f_h = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 10^3 = 18,84 \,\Omega$$

9. Kapcsoljunk párhuzamosan egy 10 mH induktivitású tekercset és egy 300 Ω értékű ellenállást. Az áramkört tápláló generátor frekvenciája 1200 Hz és 5 V feszültség esik a párhuzamosan kapcsolt R-L áramkörön.

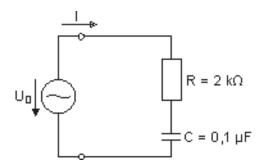


Számítsuk ki az ágáramokat és az eredő áramerősséget! Határozzuk meg a feszültség – áram fázisszögét!

- 10. Az ábrán látható áramkört 12 V, 400 Hz frekvenciájú feszültséggel tápláljuk. Számítsuk ki, mekkora:
 - az áramkör eredő impedanciája,
 - az ohmos és kapacitív tagon eső feszültség,
 - az eredő feszültség,
 - az áramkör fázisszöge!

Rajzoljuk meg:

- az eredő feszültség és az áramerősség időfüggvényét,
- a feszültség áramerősség vektorábrát



Megoldás:

Az áramkör eredő impedanciája: $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$

Határozzuk meg a kapacitív reaktanciát!
$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{6,28 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-7}} = \frac{1}{25,1 \cdot 10^{-5}} = 3980 \, \Omega \, .$$

Számítsuk ki az eredő impedanciát!

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{(2 \cdot 10^3)^2 + (3980)^2} = \sqrt{22.4 \cdot 10^6} = 4454 \Omega$$

A részfeszültségek kiszámításához ismerni kell a körben folyó áramot:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{12 V}{4454 \Omega} = 2,69 \cdot 10^{-3} A = 2,69 mA$$
.

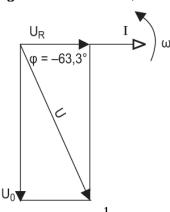
Az ohmos tagon eső feszültség: $U_R = I \cdot R = 2,69 \cdot 10^{-3} \ A \cdot 2 \cdot 10^3 \ \Omega = 5,38 \ V$ A kapacitív tagon eső feszültség:

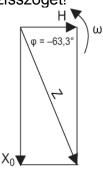
$$U_C = I \cdot X_C = 2,69 \cdot 10^{-3} \ A \cdot 3,98 \cdot 10^3 \ \Omega = 10,7 \ V$$
.

Az eredő feszültség:

$$U_e = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{5,38^2 + 10,7^2} = \sqrt{28,9 + 114,5} = 11,97 V.$$

Rajzoljuk meg a vektorábrákat, számítsuk ki az áramkör fázisszögét!





A fázisszög:
$$tg\varphi = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot C}$$
,

behelyettesítve:
$$tg\phi = \frac{1}{2 \cdot 10^3 \cdot 6.28 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-7}} = \frac{10^2}{50.24} = 1,99$$
,

ebből $\varphi = arc \ tg1,99 = 63,3^{\circ}$

11. Egy 85 Ω-os ellenállással 500 nF kapacitású kondenzátor van párhuzamosan kötve. A kondenzátoron 5 kHz frekvenciájú, 540 mA effektív értékű áram folyik. Mekkora az ellenálláson folyó áram? Mekkora a két áram közötti fáziskülönbség és az eredő impedancia? Ellenőrizzük az áramkörben folyó eredő áramot a feszültség és impedancia, valamint az áramháromszög felhasználásával!

Megoldás:

$$R = 85 \Omega$$

$$C = 500 \text{ nF}$$

$$f = 5 \text{ kHz}$$

$$I_{\rm C} = 540 \, {\rm mA}$$

$$I_{P} = ?: Z = ?: \omega = ?$$

$$I_R = ?; Z = ?; \varphi = ?$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi \cdot 5000 \cdot 500 \cdot 10^{-9}} = 63,69 \,\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 \times X_C^2} = \sqrt{85^2 \times 63,69^2} = 51 \Omega$$

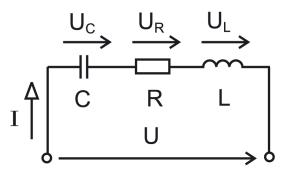
$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{34.4}{85} = 0.4 A$$
 $U = I_C \cdot X_C = 540 \cdot 10^{-3} \cdot 63.69 = 34.4 V$ $tg\varphi = \frac{R}{X_C} = \frac{85}{63.69} \rightarrow \varphi = -53.2^{\circ}$

12. Egy kondenzátor kapacitása 0,72 µF. A vele párhuzamosan kapcsolt fogyasztó ellenállása 57 Ω. Mekkora áram folyik az áramkör két ágában, ha a kétpólus kapcsain 24 V amplitúdójú, 16 kHz frekvenciájú szinuszos feszültség mérhető? Mekkora az eredő áram és mekkora a fázisszöge?

Megoldás:

Megoldás:
C = 0,72 μF
R = 57 Ω
U₀ = 24 V

$$\frac{f}{f} = \frac{16 \text{ kHz}}{1 \text{ C}} = \frac{1}{27 \text{ F}} = \frac{1}{2$$



Feladatok:

- a) Határozza meg az RLC kör impedanciáját (Z) és áramfelvételét (I)!
- b) Határozza meg UL, UC és UR értékét a megadott frekvencián!
- c) Készítsen vektorábrát! A vektorábrának tartalmaznia kell I, U_R, U_L és U_C értékét.
- d) Határozza meg a tápfeszültség (U) és a tápáram (I) közötti fázisszög (φ) abszolút értékét!

a)
$$X_{L} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 10^{2} \ Hz \cdot 0.2 \ H = 1.01 \ k\Omega$$

$$X_{C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 10^{2} \ Hz \cdot 1.2 \cdot 10^{-7} \ F} = 1.66 \ k\Omega$$

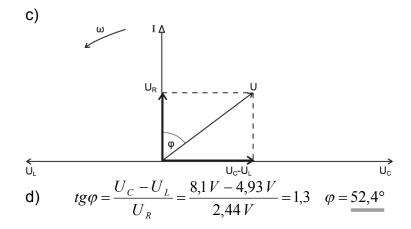
$$Z = \sqrt{(X_{C} - X_{L})^{2} + R^{2}} = \sqrt{(1.66 \ k\Omega - 1.01 \ k\Omega)^{2} + (0.5 \ k\Omega)^{2}} = 0.82 \ k\Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{4 \ V}{0.82 \ k\Omega} = 4.88 \ mA$$

b)
$$U_L = I \cdot X_L = 4,88 \text{ mA} \cdot 1,01 \text{ k}\Omega = 4,93 \text{ V}$$

$$U_C = I \cdot X_C = 4,88 \text{ mA} \cdot 1,66 \text{ k}\Omega = 8,1 \text{ V}$$

$$U_R = I \cdot R = 4,88 \text{ mA} \cdot 0,5 \text{ k}\Omega = 2,44 \text{ V}$$



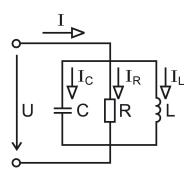
14. Adatok
$$f_0$$
 = 1 MHz L = 150 μH R = 80 kΩ

U = 400 mV

Feladatok:

a) Határozza meg a rezgőköri kondenzátor kapacitását (C)!

- b) Határozza meg a rezgőkör jósági tényezőjét (Q) és sávszélességét (B)!
- c) Határozza meg I, I_L, I_R és I_C értékét rezonanciafrekvencián!



a)
$$f_{0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

$$C = \frac{1}{4 \cdot \pi^{2} \cdot f_{0}^{2} \cdot L} = \frac{1}{4 \cdot \pi^{2} \cdot (10^{6} \ Hz^{2}) \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \ H} = \frac{168,9 \ pF}{\underline{= 168,9 \ pF}}$$
b)
$$X_{L} = 2 \cdot \pi \cdot f_{0} \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 10^{6} \ Hz \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \ H = 942,5 \ \Omega$$

$$Q = \frac{R}{X_{L}} = \frac{80 \ k\Omega}{0,9425 \ k\Omega} = \frac{84,9}{\underline{= 1000 \ kHz}} \qquad B = \frac{f_{0}}{Q} = \frac{1000 \ kHz}{84,9} = \frac{11,8 \ kHz}{\underline{= 11,8 \ kHz}}$$
c)
$$I_{R} = \frac{U}{R} = \frac{400 \ mV}{80 \ k\Omega} = \frac{5 \ \mu A}{\underline{= 12,8 \ pA}} \qquad I = I_{R} = \frac{5 \ \mu A}{\underline{= 12,4 \ pA}}$$

$$I_{C} = I_{L} = \frac{424,4 \ \mu A}{\underline{= 12,4 \ pA}}$$

15. Határozzuk meg a tekercs induktív reaktanciáját és a rajta áthaladó áram effektív értékét, ha a tekercs induktivitása 58 mH, a rákapcsolt szinuszos feszültség amplitúdója 25 V, frekvenciája 4,5 kHz!

Megoldás:

 $X_{L} = 1640 \Omega;$

I = 15,24 A;

$$X_{L} = \frac{U}{I} = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 4,5 \cdot 10^{3} \cdot 58 \cdot 10^{-3} = 1640 \Omega$$

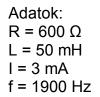
$$I_{cs} = \frac{U_{cs}}{X_{L}} = \frac{25}{1640} = 15,24mA$$

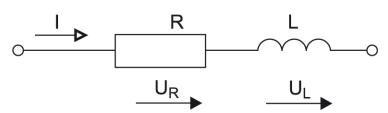
$$I = \frac{I_{cs}}{\sqrt{2}} = \frac{15,24}{\sqrt{2}} = 10,8 \ mA$$

16. Számítsuk ki az ábrán látható soros R-L kapcsolás:

- eredő impedanciáját,
- az ellenálláson és a tekercs látszólagos ellenállásán eső feszültséget,
- az eredő feszültségét,
- a feszültség és az áram fázisszögét,
- jósági tényezőjét!

Rajzoljuk meg az áramerősség és az eredő feszültség vektorábráját!





Az eredő impedancia abszolút értéke a $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ összefüggésből határozható meg.

Az induktív látszólagos ellenállás:

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L = 6.28 \cdot 1.9 \cdot 10^3 \ Hz \cdot 50 \cdot 10^{-3} \ H = 597 \ \Omega \approx 600 \ \Omega$$
.

Behelyettesítve az impedancia képletébe:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{(6 \cdot 10^2)^2 + (6 \cdot 10^2)^2} = \sqrt{72 \cdot 10^4} \approx 8.5 \cdot 10^2 \approx 850 \,\Omega$$

Az ellenálláson eső feszültség: $U_R = I \cdot R = 3 \cdot 10^{-3} \ A \cdot 6 \cdot 10^2 \ \Omega = 1.8 \ V$.

A tekercs reaktanciáján eső feszültség:

$$U_L = I \cdot X_L = 3 \cdot 10^{-3} A \cdot 6 \cdot 10^2 \Omega = 1.8 V$$
.

Az eredő feszültség abszolút értéke:

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{1.8^2 + 1.8^2} = \sqrt{3.24 + 3.24} = \sqrt{6.48} = 2.55 V$$
.

Az önindukció miatt a feszültség siet az áramerősséghez képest, a közöttük lévő fázisszög az ohmos és az induktív ellenállástól függ.

A látszólagos és a vesztségi ellenállás viszonyszáma az áramkör (a tekercs) jósági tényezőjét (Q) adja meg.

Az áramkör jósági tényezője: $Q = \frac{\omega L}{R}$

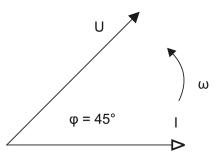
$$tg\phi=rac{X_L}{R}=rac{600\,\Omega}{600\,\Omega}=1$$
 , a fázisszög: $\phi=arc\,tg1=45^\circ$

A ϕ = 45° fáziseltérés egy kiemelt frekvencián (f₀) jön létre, elnevezése határfrekvencia. A feladatból jól látható, hogy az

$$R = X_L = 2\pi \cdot f_0 \cdot L$$
 , ebből $f_0 = \frac{R}{2\pi \cdot L}$.

A feladatban az adott R és L esetén a határfrekvencia f_0 = 1900 Hz.

A határfrekvencián tehát a ϕ = 45°. Az ohmos és az induktív látszólagos ellenállás vektora ugyanakkora. Az induktivitáson a feszültség vektora siet az áramerősséghez képest.



- 17. Kapcsoljunk párhuzamosan egy ellenállást és egy kondenzátort! A tápláló generátor frekvenciája 1500 Hz, feszültsége 6 V.
- a) Számítsuk ki az eredő áramerősséget és az ágak áramát!
- b) Határozzuk meg az áramkör határfrekvenciáját!
- c) Mekkora az áramkör feszültség-áramerősség fázisszöge?

$$f = 1500 Hz$$

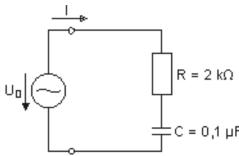
$$U = 6 V$$

$$R = 4 k\Omega$$

$$C = 10 \text{ nF}$$

b)
$$f_h = ?$$

c)
$$\varphi = ?$$



a)
$$\underline{I_R} = \frac{U}{R} = \frac{6}{4000} = 0,0015 A = 1,5 \text{ mA}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1500 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 10615,7 \Omega$$

$$\underline{I_C} = \frac{U}{X_C} = \frac{6}{10615,7} = 0,0005652 A = 0,565 \text{ mA}$$

$$\underline{I_C} = \sqrt{I_C^2 + I_R^2} = \sqrt{0,0015^2 + 0,0005652^2} = 0,0016 A = 16 \text{ mA}$$

c)
$$tg\varphi = -\frac{R}{X} = \frac{4000}{10615.7} = 0.3768 \rightarrow \frac{\varphi = -20.6^{\circ}}{2000}$$

18.

Adatok:

U = 1 V

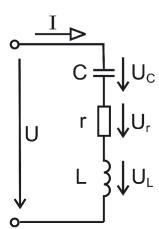
 $f_0 = 1 \text{ MHz}$ (rezonanciafrekvencia)

Q = 50 (a rezgőkör jósági tényezője)

C = 100 pF

Feladatok

- a) Határozza meg a rezgőköri tekercs induktivitását (L)!
- b) Határozza meg a rezgőkör soros veszteségi ellenállását (r)!
- c) Határozza meg az áram (I) értékét rezonanciafrekvencián!
- d) Határozza meg U_L és U_C értékét rezonanciafrekvencián!
- e) Számítsa ki a rezgőkör sávszélességét (B) terhelés nélkül!



b)
$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 10^6 \ Hz \cdot 2,53 \cdot 10^{-4} \ H = 1,59 \ k\Omega$$

$$r = \frac{X_L}{Q} = \frac{1590 \,\Omega}{50} = \underbrace{31,8 \,\Omega}_{}$$

c)
$$I = \frac{U}{r} = \frac{1 V}{31.8 \Omega} = \frac{31.4 \text{ mA}}{2000 \text{ m/s}}$$

d)
$$U_C = U_L = Q \cdot U = 50 \cdot 1 V = \underline{50 V}$$

e)
$$B = \frac{f_0}{O} = \frac{1 MHz}{50} = \frac{20kHz}{100}$$

19.

Adatok:

f0 = 800 kHz (rezonanciafrekvencia)

Q = 100 (a rezgőkör jósági tényezője)

 $L = 200 \mu H; U = 1 V$

Feladatok:

- a) Határozza meg a rezgőköri kapacitás (C) értékét!
- b) Határozza meg a rezgőkör párhuzamos veszteségi ellenállását (R)!
- c) Számítsa ki a rezgőkör sávszélességét!
- d) Határozza meg az áramok (I, I_L, I_R és I_C) értékét rezonanciafrekvencián!

Megoldás:

a)
$$C = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2 \cdot L} = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot 8^2 \cdot 10^{10} \ Hz^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \ H} = \frac{197.9 \ pF}{\frac{1}{2}}$$

b)
$$X_{L} = 2 \cdot \pi \cdot f_{0} \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 10^{5} \ Hz \cdot 2 \cdot 10^{-4} \ H = 1,005 \ k\Omega$$
$$R = Q \cdot X_{L} = 100 \cdot 1,005 \ k\Omega = 100,5 \ k\Omega$$

c)
$$B = \frac{f_0}{Q} = \frac{800 \text{ kHz}}{100} = \frac{8 \text{ kHz}}{=}$$

d)
$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{1 V}{100 k\Omega} = \frac{10 \mu A}{M} \qquad I = I_R = \frac{10 \mu A}{M}$$

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{1 V}{1 k\Omega} = \frac{1 mA}{M} \qquad I_C = I_L = \frac{1 mA}{M}$$

