

Minimaxní lineární regrese

Dáno je m bodů $(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_m, y_m)$, kde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ a $y_i \in \mathbb{R}$. Úkolem je nalézt takovou afinní funkci

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b, \quad (1)$$

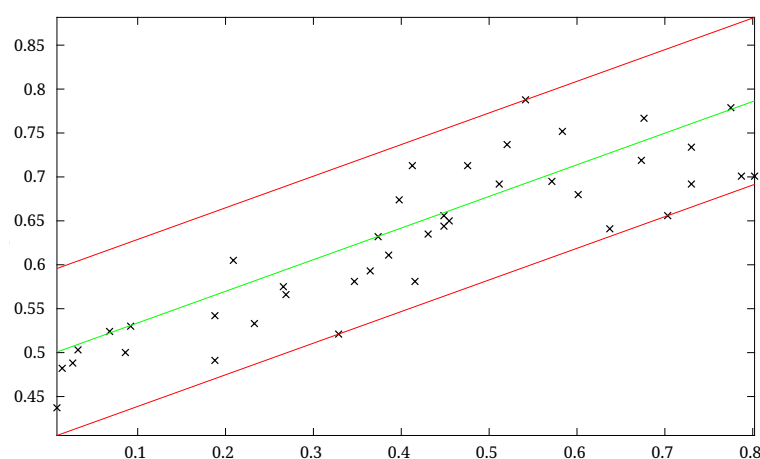
parametrizovanou vektorem $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a skalárem $b \in \mathbb{R}$, která 'nejlépe' aproximuje funkční závislost odpovídající daným bodům.

Je mnoho způsobů, jak formalizovat kvalitu aproximace. Určitě znáte formulaci ve smyslu nejmenších čtverců. V této úloze si jako míru kvality aproximace zvolíme maximální absolutní odchylku

$$r = \max_{i=1}^m |f(\mathbf{x}_i) - y_i|. \quad (2)$$

Cílem je nalézt parametry \mathbf{a}, b afinní funkce, pro které je číslo r nejmenší.

Pro $n = 1$ má úloha názorný geometrický význam (viz obrázek): hledáme pás s minimální šířkou (měřeno *svisle*), do něhož se vejdou všechny body.



<https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b0b33opt/cviceni/hw/lp1/linefit/body2.svg?id=courses%3Ab0b33opt%3Acviceni%3Ahw%3Alp1%3Alinefit%3Astart>

[lp1/linefit/body2.svg?id=courses%3Ab0b33opt%3Acviceni%3Ahw%3Alp1%3Alinefit%3Astart](https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b0b33opt/cviceni/hw/lp1/linefit/body2.svg?id=courses%3Ab0b33opt%3Acviceni%3Ahw%3Alp1%3Alinefit%3Astart)

Úkoly:

1. Úlohu (pro obecná m, n) převeďte na lineární program.

2. Implementujte funkci `[a,b,r]=minimaxfit(x,y)`, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ obsahují zadané dvojice $(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_m, y_m)$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$ jsou hledané parametry funkce (1), a $r \in \mathbb{R}$ je minimální hodnota kritéria (2). Funkce nemá nic vypisovat ani vykreslovat. Poznámka: \mathbf{y} je i v pythonu dvojrozměrný numpy array.
3. Implementujte funkci `plotline(x,y,a,b,r)`, která pro případ $n = 1$ vykreslí obrázek s body a nalezeným pásem, podle vzorového obrázku výše. Tedy $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$. Při implementaci použijte funkce `plot` a `hold on/off`, na konci zavolejte příkaz `axis tight equal`. Pro účely ladění si můžete sami vytvářet množiny bodů příkazem `ginput`.
4. Pro případ $n = 1$ vidíme v obrázku výše, že horní modrá přímka (horní okraj pásu) prochází jedním bodem a dolní modrá přímka (dolní okraj pásu) prochází dvěma body. Zamyslete se nad tímto jevem a co nejlépe ho vysvětlíte. Proč tomu tak je? Musí tomu pro $n = 1$ tak být vždy? Za jakých podmínek tomu může být jinak? Jak je to pro obecné n ? (Výstup tohoto úkolu se nijak neodevzdává, ale přesto ho splňte.)

Příklady I/O

Uvádíme příklady pro případ $n = 3$, kde je složitější vizuálně ověřit správnost. Primárně ale úlohu testujte na případech $n = 1$, kde vše vykreslíte funkcí `plotline`.

Pro python:

```
import numpy as np

x = np.array([[1, 2, 3, 3, 2], [4, 1, 2, 5, 6], [7,8,9, -5,7]])
y = np.array([[7,4,1,2,5]])
a, b, r = minimaxfit(x,y)

# a = [-2.776, 0.194, -0.030]
# b = 9.403
# r = 0.194
```

Pro matlab:

```
x = [1 2 3 3 2 ; 4 1 2 5 6; 7 8 9 -5 7]
y = [7 4 1 2 5]
[a b r] = minimaxfit(x,y)

% a = [-2.776 0.194 -0.030]
% b = 9.403
% r = 0.194
```