Anwendungen der linearen Algebra (ala)
FS 2024
Roger Burkhardt, Cédric Huwyler

Repetition / Vorbereitung ala Teil 2

Nachname	Vorname

Datum, Zeit, Ort: FS 2023

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Ablauf: Die Prüfung wird in zwei Teilen gelöst:

- Teil 1: schriftlich, ohne Laptop, Gewichtung ca. 2/3, benötigte Zeit ca. 60 Minuten
- Teil 2: mit Laptop und Python, Gewichtung ca. 1/3, benötigte Zeit ca. 30 Minuten

Damit der Laptop benutzt werden darf, muss der erste Teil abgegeben werden.

Lösungen: Für die maximale Punktzahl wird ein **vollständiger, übersichtlicher und nachvollziehbarer** Lösungsweg erwartet. Antworten werden nur **mit** Lösungsweg bewertet. Falsche Lösungsansätze müssen klar als solche gekennzeichnet werden, ansonsten fliessen sie in die Bewertung ein.

Erlaubte Hilfsmittel:

- handgeschriebene und selber verfasste Zusammenfassung auf 4 A4-Blättern
- nicht-algebra- und nicht-grafikfähiger Taschenrechner
- eigener Laptop (nur für Python-Teil)

Ausdrücklich nicht-erlaubte Hilfsmittel im zweiten Teil:

- Kommunikation mit anderen Studierenden

Zuwiderhandlungen resultieren für alle Beteiligten in einer Note 1 und in einer Meldung an die Studiengangleitung.

Abgabe

(a) Schicken Sie Ihre Lösungswege als Jupyter Notebook per Mail an cedric.huwyler@fhnw.ch.

(b) Übertragen Sie Ihre Lösungen (ohne Lösungsweg) auf die entsprechenden Boxen auf der Prüfung.

Benotung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Total	Note
Maximale Punktzahl	6	12	8	10	10	13	9	68	

Für die Note 4 (bzw. 6) braucht es 33 (bzw. 55) Punkte!

Aufgabe 6 (Python). **(2+4+2+3+2 Punkte)**

Wir haben in Grundlagen der linearen Algebra gesehen, dass für nicht-quadratische Matrizen keine Inverse existiert. Mit der Singulärwertzerlegung können wir den Begriff der Inversen erweitern und eine sogenannte *Pseudoinverse* definieren, die für alle Matrizen existiert:

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit der Singulärwertzerlegung $A = U\,\Sigma\,V^T$ mit $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist ihre Pseudoinverse die $(n \times m)$-Matrix

$$A^+ = V\,\Sigma^+\,U^T,$$

wobei Σ^+ aus dem transponierten Σ besteht, in dem von allen von Null verschiedenen Werten der Kehrwert berechnet wurde. Im Folgenden möchten wir die Pseudoinverse einer Matrix berechnen.

Hinweis: Wenn Sie die Singulärwerte und alle Matrizen exakt ohne Rundung hinschreiben können, bekommen Sie einen Punkt Bonus.

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ihre Singulärwertzerlegung mit Python und schreiben Sie die Singulärwerte auf.

b) Erstellen Sie nun die Matrix Σ^+ und berechnen Sie daraus A^+. Schreiben Sie Σ^+ und A^+ auf.

c) Berechnen Sie ebenfalls die Produkte A^+A und AA^+ und schreiben Sie sie auf. Was stellen Sie fest?

d) Gegeben sei das singuläre lineare Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{ccc} 3x+4y & = & 1 \\ 3x-y & = & 2 \\ 2x & = & 3 \end{array} \right|$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Pseudoinversen A^+ die Näherungslösung des Systems?

e) Vergleichen Sie die Lösung der letzten Teilaufgabe mit der Näherungslösung welche Sie mit der Normalengleichung erhalten.

Aufgabe 7 (Python). **(2+5+2 Punkte)**

Gegeben sei die quadratische Form

$$q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

a) Sie haben gesehen, dass sich die quadratische Form als $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ mit $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $A^T = A$ darstellen lässt. Bestimmen Sie A.

b) Wie lautet die Basis B, in der die Mischterme verschwinden? Geben Sie die quadratische Form in dieser Basis an (der Vektor $\mathbf{x}$ werde dabei in den Vektor $\mathbf{y}$ transformiert).

c) Ist die quadratische Form positiv definit?