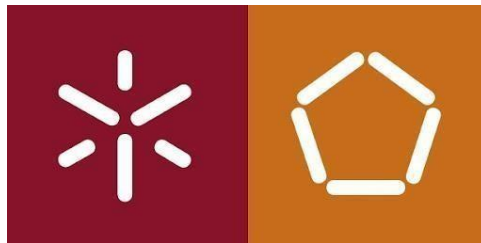


Universidade do Minho  
Licenciatura em Engenharia Informática



**Investigação Operacional**  
**Trabalho Prático 2**

*Maio 2023*

**Trabalho realizado por:**

Diogo Gabriel Lopes Miranda – a100839

João Ricardo Ribeiro Rodrigues – a100598

Rafael Lima Mesquita - a95097

Sandra Fabiana Pires Cerqueira – a100681

Sofia Manuela Rocha Leite- a95022

Índice

Trabalho realizado por: ..... 1

1. Introdução ..... 3

2. Formulação do Problema ..... 3

3. Modelo ..... 6

3.1-Apresentação da rede..... 6

3.2-Ficheiro de *Input Relax4* ..... 7

4.Solução ótima ..... 8

5.Validação do modelo ..... 10

6.Conclusão..... 12

## 1. Introdução

Existem certas circunstâncias em que é necessário atribuir a equipas serviços a efetuar a clientes distribuídos geograficamente, com o intuito de minimizar o custo total da operação. Esse custo total inclui não só os custos de deslocamento, mas também os custos fixos de utilização dos veículos.

Este trabalho prático de Investigação Operacional tem precisamente por base o problema de escalonamento de equipas para cobrir tarefas em datas fixas, uma vez que temos tempos bem definidos para determinados serviços, em que o objetivo é minimizar o custo de fluxo de rede.

## 2. Formulação do Problema

O principal objetivo, deste problema, é então minimizar o custo total da operação de uma empresa, sediada em Keleirós (K) que pretende efetuar entregas a diversos clientes, através de equipas, respeitando a hora à qual o serviço deve ser efetuado.

A cada cliente está associada uma hora de serviço, que nos indica qual a hora a que uma equipa deve estar no local, podendo esta estar lá mais cedo (tendo de esperar pela hora de início do serviço), mas nunca mais tarde.

Cada equipa inicia o trabalho às 09:00, na sede da empresa, em Keleirós (K). As horas de serviço dos clientes, em quartos de hora desde o início do período de trabalho ( $\frac{1}{4}h$ ) e em valores de relógio, são as indicadas no seguinte Quadro:

$j$	cliente	$a_j$ ( $\frac{1}{4}$ hora)	$a_j$ (hora do serviço)
1	Ana	$a_1$	depende de ABCDE
2	Beatriz	7	10:45
3	Carlos	4	10:00
4	Diogo	2	09:30
5	Eduardo	10	11:30
6	Francisca	6	10:30
7	Gonçalo	9	11:15
8	Helena	$a_8$	depende de ABCDE
9	Inês	2	09:30
10	José	5	10:15

*Tabela 1- Tempos de serviços*

Para determinar os valores em falta na tabela 1, recorreremos às seguintes regras:

Sendo xABCDE o número de inscrição do estudante do grupo com maior número de inscrição, em que x pode ser 0 ou 1.

- fazer  $a_1 = B + 1$ ;
- fazer  $a_8 = C + 1$ ;
- se D par, remover o cliente D;
- se E par, remover o cliente E;

Posto isto, o número que utilizamos foi **100839**, portanto, os valores de  $a_1$  e  $a_2$  são respetivamente 1 ( $0+1=1$ ) e 9 ( $8+1=9$ ) e como 3 e 9 são números ímpares os clientes D e E mantêm-se logo a entrega à cliente Ana deve ser efetuada às 9h:15min e a da cliente Helena às 11h:15min.

Obtivemos então os dados apresentados na tabela abaixo:

$j$	cliente	$a_j$ (¼hora)	$a_j$ (hora do serviço)
1	Ana	1	09:15 ( $9h+1*15min$ )
2	Beatriz	7	10:45
3	Carlos	4	10:00
4	Diogo	2	09:30
5	Eduardo	10	11:30
6	Francisca	6	10:30
7	Gonçalo	9	11:15
8	Helena	9	11:15 ( $9h+9*15min$ )
9	Inês	2	09:30
10	José	5	10:15

Tabela 2-Tempos de serviços seguindo as regras

Para além disso, sabe-se que a duração do serviço é de ¼ de hora para todos os clientes. E temos de ter ainda em consideração o custo do transporte entre clientes e o tempo de deslocação entre os diversos serviços.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	4	1	2	2	3	2	1	0	3	1
B		3	5	3	3	2	3	4	2	5
C			3	2	3	2	0	1	1	2
D				1	3	3	3	2	3	1
E					2	1	2	2	2	2
F						2	3	3	3	4
G							2	2	2	3
H								1	1	1
I									3	2
J										4

tempos de deslocação

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	13	5	6	5	10	7	5	0	7	1
B		11	14	10	8	6	11	13	4	15
C			8	6	10	6	0	5	6	2
D				4	8	8	8	6	11	4
E					6	4	6	5	7	6
F						5	10	10	8	11
G							10	7	5	9
H								5	6	9
I									7	9
J										10

custos de deslocação

Tabela 3- Custos e tempos de deslocação entre clientes

Com base nestas informações, foram selecionados apenas os caminhos viáveis que uma equipa pode percorrer, tendo em consideração as restrições temporais, construímos um grafo de compatibilidades, em que cada vértice de A a J representa o cliente com a respetiva inicial correspondente e K representa Keleirós, e uma tabela, para tornar mais fácil a interpretação das deslocações possíveis entre clientes. A tabela apresenta o número do custo associado, aos caminhos existentes no grafo, por exemplo, a existência do número 13 (segunda coluna e primeira linha), indica-nos que é possível ser feito o caminho do cliente A para o B, e que o custo associado a essa deslocação é de 13 U.M.

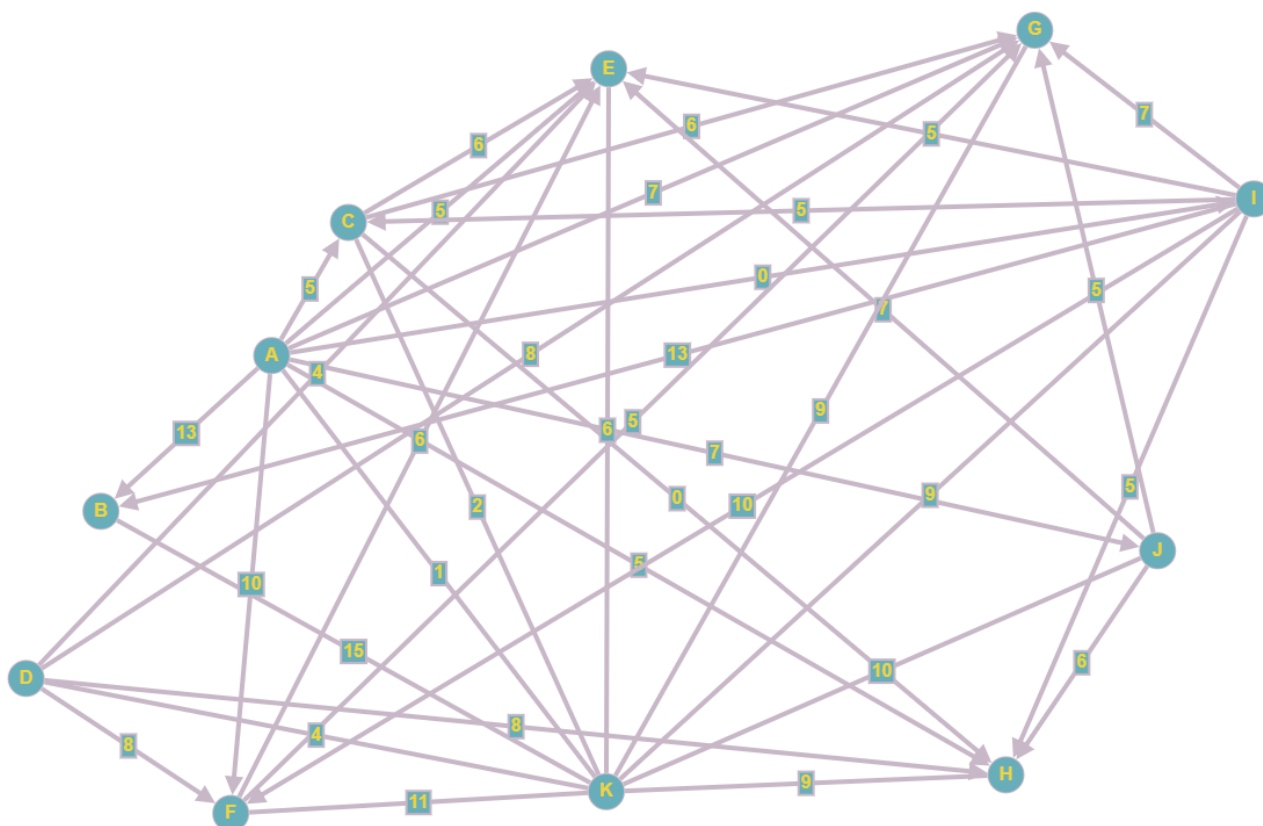


Figura 1-Grafo de compatibilidades

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A		13	5		5	10	7	5	0	7	2
B											16
C					6		6	0			3
D					4	8	8	8			5
E											7
F					6		5				12
G											10
H											10
I		13	5		5	10	7	5		7	10
J					7		5	6			11
k	1	15	2	4	6	11	9	9	9	10	

Tabela 4- Custos de deslocação dos caminhos possíveis

### 3. Modelo

#### 3.1-Apresentação da rede

Para resolver este problema, podemos então modelá-lo como um problema de fluxo de redes, em que o objetivo é encontrar o fluxo de custo mínimo na rede que definimos com os caminhos possíveis, permitindo-nos assim, obter a melhor atribuição de equipas a todos os clientes, de modo que o custo seja o mais baixo possível.

Para encontrar o fluxo mínimo da rede, garantindo que todos os clientes, representados no grafo por vértices, sejam percorridos por uma equipa, decidimos dividir cada vértice em dois, ficando estes então separados num vértice-origem e num vértice- destino. Ao definirmos a oferta dos vértices- origem como 1 e a procura dos vértices-destino como 1, é assegurada a passagem de fluxo de uma unidade nos vértices, portanto é assegurada a passagem de uma e só uma equipa pelos clientes.

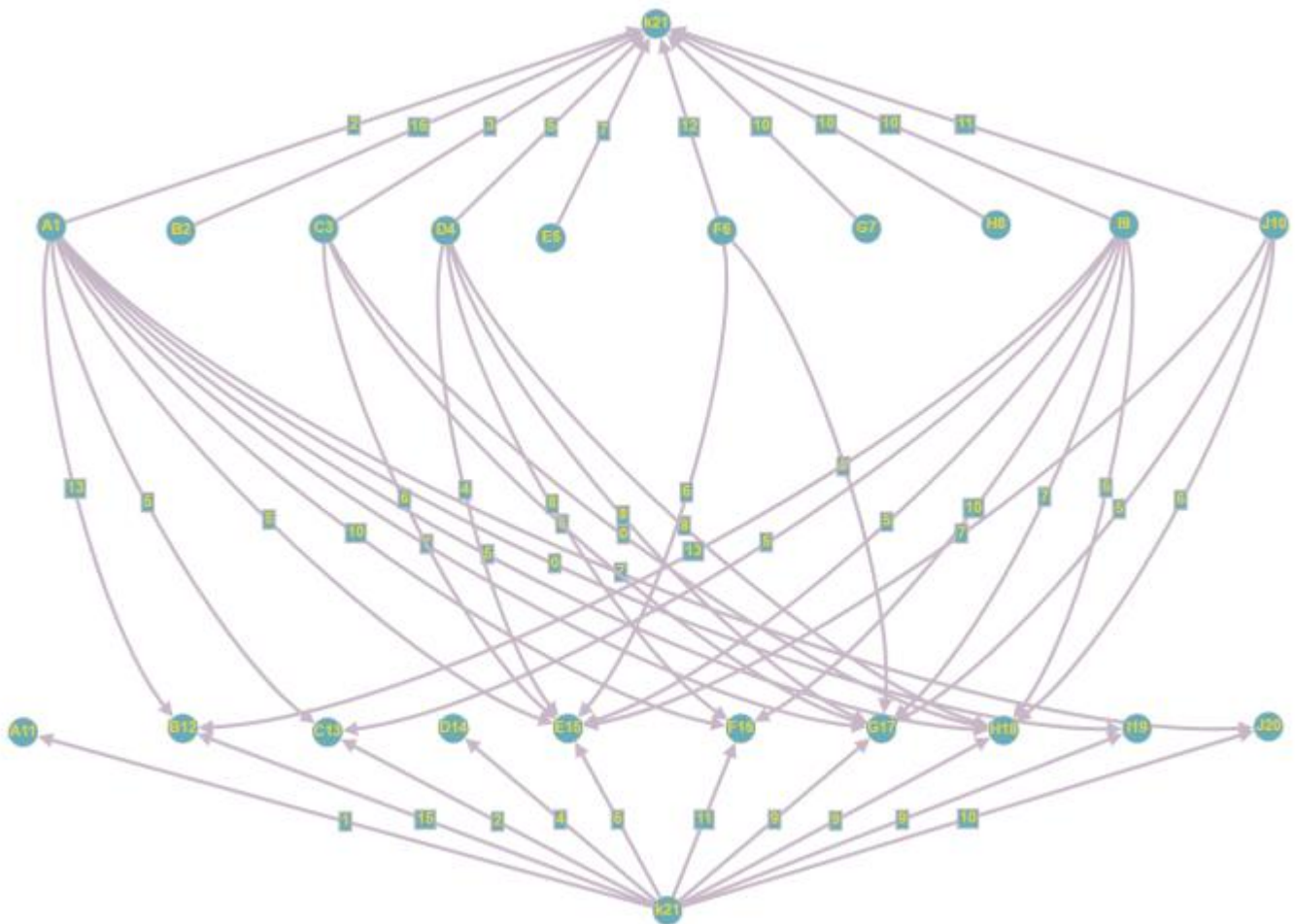


Figura 2- Grafo de fluxo de rede

Na figura2, os vértices origem são os da parte de cima e os vértices destino são os da parte de baixo.

### 3.2-Ficheiro de *Input Relax4*

Tendo o grafo devidamente modulado conforme o nosso problema, podemos agora passá-lo para o *software Relax4*, criando o nosso ficheiro de *input*. O ficheiro de *input*, abaixo apresentado, corresponde a um ficheiro de texto, no qual é indicada a existência de 21 vértices e de 46 arcos, tal como se pode ver na primeira e segunda linhas do ficheiro de *input* parte 1 respetivamente.

```
21
46
21 11 1 1
1 21 2 1
21 12 15 1
2 21 16 1
21 13 2 1
3 21 3 1
21 14 4 1
4 21 5 1
21 15 6 1
5 21 7 1
21 16 11 1
6 21 12 1
21 17 9 1
7 21 10 1
21 18 9 1
8 21 10 1
21 19 9 1
9 21 10 1
21 20 10 1
10 21 11 1
1 12 13 1
```

Figura 5-Input parte 1

```
1 13 5 1
1 15 5 1
1 16 10 1
1 17 7 1
1 18 5 1
1 19 0 1
1 20 7 1
3 15 6 1
3 17 6 1
3 18 0 1
4 15 4 1
4 16 8 1
4 17 8 1
4 18 8 1
6 15 6 1
6 17 5 1
9 12 13 1
9 13 5 1
9 15 5 1
9 16 10 1
9 17 7 1
9 18 5 1
10 15 7 1
```

Figura 4-Input parte 2

```
10 17 5 1
10 18 6 1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
0
```

Figura 3- Input parte 3

De seguida, temos 48 linhas, equivalentes ao número de arestas, a indicar o vértice de origem, o vértice de destino, o custo e a capacidade de cada aresta. Os vértices-origem de A até J estão numerados de 1 a 10, os vértices-destino de A até J estão numerados de 11 a 20 e o vértice da sede da empresa, por sua vez, está numerado como 21 não sendo preciso parti-lo em dois. A capacidade de todas as arestas está definida como 1, de forma a assegurar que um cliente é atendido por uma, e só uma equipa. Na Fig.3 a partir da linha 3, inclusive, temos definido a oferta/procura de cada vértice, tendo os vértices-origem (1 a 10) uma oferta igual a 1, sendo definida pelo valor 1, e os vértices-destino (11 a 20) uma procura igual a 1, sendo definida pelo valor -1, e por fim o vértice que representa a sede da empresa com valor 0, não tendo, portanto, nem oferta nem procura.

## 4. Solução ótima

Após a submissão do ficheiro de input apresentado acima, obtivemos a seguinte solução ótima.

```

END OF READING
NUMBER OF NODES = 21, NUMBER OF ARCS = 46
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
 21 11 1.
 2 21 1.
 21 13 1.
 21 14 1.
 5 21 1.
 7 21 1.
 8 21 1.
 21 20 1.
 1 19 1.
 3 18 1.
 4 16 1.
 6 15 1.
 9 12 1.
10 17 1.
OPTIMAL COST = 92.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 36
NUMBER OF ITERATIONS = 13
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 0
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 0
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 0
*****

```

*Figura 6-Solução ótima*

Com isto, conseguimos verificar que a solução ótima tem um custo de 92 U.M. e que são utilizadas 4 equipas para atender os vários clientes, uma vez que saem 4 unidades de fluxo da sede da empresa (Keleirós, identificada pelo número 21), tal como se pode ver na figura acima. As seguintes tabelas e esquema mostram os percursos de cada equipa:

### Equipa 1

j	Cliente	aj (1/4 hora)	aj (hora de início do serviço)	aj+dj (hora fim de serviço)	Tempo de deslocação	Custo de deslocação
21	Keleirós	0	-	09:00	[KA]: 1/4 hora	1
1	Ana	1	09:15	09:30	[AI]: 0	0
9	Inês	2	9:30	09:45	[IB]: 4/4 hora	13
2	Beatriz	7	10:45	11:00	[BK]: 5/4 hora	15
21	Keleirós	13	12:15	-	-	1
<b>Custo de operação da equipa</b>						<b>30</b>

*Tabela 5- Percurso Equipa 1*



### Equipa 2

j	Cliente	aj (1/4 hora)	aj (hora de início do serviço)	aj+dj (hora fim de serviço)	Tempo de deslocação	Custo de deslocação
21	Keleirós	0	-	09:00	[KC]: 2/4 hora	2
3	Carlos	4	10:00	10:15	[CH]: 0	0
8	Helena	9	11:15	11:30	[HK]: 1/4 hora	9
21	Keleirós	11	11:45	-	-	1
<b>Custo de operação da equipa</b>						<b>12</b>

Tabela 6- Percurso Equipa 2

### Equipa 3

j	Cliente	aj (1/4 hora)	aj (hora de início do serviço)	aj+dj (hora fim de serviço)	Tempo de deslocação	Custo de deslocação
21	Keleirós	0	-	09:00	[KD]= ¼ hora	4
4	Diogo	2	09:30	09:45	[DF]=3/4 hora	8
6	Francisca	6	10:30	10:45	[FE]=2/4 hora	6
5	Eduardo	10	11:30	11:45	[EK]=2/4 hora	6
21	Keleirós	13	12:15	-	-	1
<b>Custo de operação da equipa</b>						<b>25</b>

Tabela 7-Percurso Equipa 3

### Equipa 4

j	Cliente	aj (1/4 hora)	aj (hora de início do serviço)	aj+dj (hora fim de serviço)	Tempo de deslocação	Custo de deslocação
21	Keleirós	0	-	09:00	[KJ]:4/4 hora	10
10	José	5	10:15	10:30	[JG]:2/4 hora	5
7	Gonçalo	9	11:15	11:30	[GK]:3/4 hora	9
21	Keleirós	13	12:15	-	-	1
<b>Custo de operação da equipa</b>						<b>25</b>

Tabela 8-Percurso Equipa 4

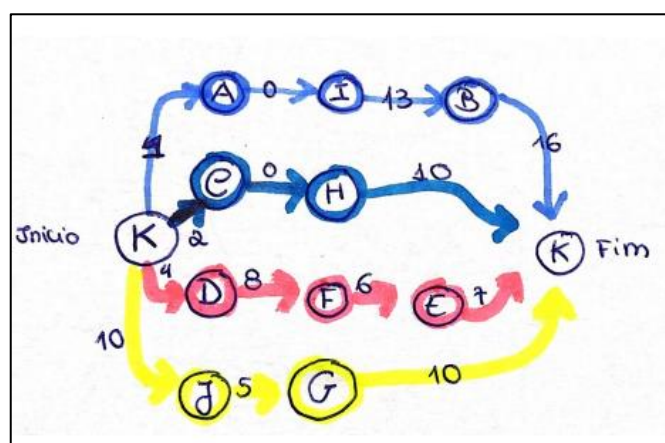


Figura 7-Representação da solução ótima

Com estas tabelas fica confirmado o custo total de 92 U.M., uma vez que, esse valor corresponde à soma do custo de operação de cada equipa  $30 + 12 + 25 + 25 = 92$ .

## 5. Validação do modelo

Para verificarmos se o nosso modelo é válido, primeiramente verificamos se a solução que obtivemos respeita as restrições de horário de atendimento dos clientes e se todas as equipas faziam um percurso apropriado (sair de Keleirós, deslocar-se ao local, atender os clientes e voltar a Keleirós), verificando que não existiam situações fora do possível na nossa solução.

Posteriormente, para validarmos a nossa solução ótima decidimos resolver o mesmo problema recorrendo ao *software* *LPSolve* utilizando o seguinte ficheiro de *input*, de acordo com o grafo de compatibilidades.

```

1  /* Objective function */
2  min:
3  2*AK + 13*AB + 5*AC + 5*AE + 10*AF + 7*AG + 5*AH + 0*AI + 7*AJ +
4  16*BK +
5  3*CK + 6*CE + 6*CG + 0*CH +
6  5*DK + 4*DE + 8*DF + 8*DG + 8*DH +
7  7*EK +
8  12*FK + 6*FE + 5*FG +
9  10*GK +
10 10*HK +
11 11*IK + 13*IB + 5*IC + 5*IE + 10*IF + 7*IG + 5*IH +
12 11*JK + 7*JE + 5*JG + 6*JH +
13 1*KA + 15*KB + 2*KC + 4*KD + 6*KE + 11*KF + 9*KG + 9*KH + 9*KI + 10*KJ ;
14
15 /* Variable bounds */
16 KA + KB + KC + KD + KE + KF + KG + KH + KI + KJ = AK + BK + CK + DK + EK + FK + GK + HK + IK + JK;
17 KA= 1;
18 AK + AB + AC + AE + AF + AG + AH + AI + AJ = 1;
19 AB+ IB+ KB= 1;
20 BK= 1;
21 AC+ IC+ KC= 1;
22 CE+ CG+ CH+ CK= 1;
23 KD= 1;
24 DE+ DF+ DG+ DH+ DK= 1;
25 AE + CE + DE + FE + IE + JE + KE=1;
26 EK=1;
27 AF + DF + IF + KF= 1;
28 FE + FG + FK= 1;
29 AG + CG + DG + FG + IG + JG + KG= 1;
30 GK=1;
31 AH + CH + DH + IH + JH+ KH= 1;
32 HK=1;
33 AI + KI= 1;
34 IB + IC+ IE+ IF+ IG+ IH+ IK= 1;
35 AJ + KJ= 1;
36 JE +JG + JH+ JK= 1;
37 int AK, AB, AC, AE, AF, AG, AH, AI, AJ,
38 BK,
39 CK, CE, CG, CH,
40 DK, DE, DF, DG, DH,
41 EK,
42 FK, FE, FG,
43 GK,
44 HK,
45 IK, IB, IC, IE, IF, IG, IH,
46 JK, JE, JG, JH,
47 KA, KB, KC, KD, KE, KF, KG, KH, KI, KJ;

```

Figura 8-Ficheiro .lp para o programa LPSolve

Com isto, obtivemos o seguinte *output*:

Variables	MILP ...	result
	92	92
AK	0	0
AB	0	0
AC	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	1	1
AJ	0	0
BK	1	1
CK	0	0
CE	0	0
CG	0	0
CH	1	1
DK	0	0
DE	0	0
DF	1	1
DG	0	0
DH	0	0
EK	1	1
FK	0	0
FE	1	1
FG	0	0
GK	1	1
HK	1	1
IK	0	0
IB	1	1
IC	0	0
IE	0	0
IF	0	0
IG	0	0
IH	0	0
JK	0	0
JE	0	0
JG	1	1
JH	0	0
KA	1	1
KB	0	0
KC	1	1
KD	1	1
KE	0	0
KF	0	0
KG	0	0
KH	0	0
KI	0	0
KJ	1	1

Figura 9- Output do LPSolve

Verificámos então que tanto no Relax4 como no LPSolve obtivemos a mesma solução ótima, que nos indica que o custo ótimo é de 92 U.M. com 4 equipas que seguem os seguintes percursos:

K-> A ->I -> B-> K

K-> C->H->K

K-> D -> F-> E->K

K->J->G->K

Percursos estes que são iguais aos que obtivemos através do Relax4 e se encontram devidamente esquematizados na figura 7.

Para além disto, podemos ainda verificar que todas as equipas têm tempo suficiente para chegar ao próximo serviço, que serviços com a mesma hora de início são realizados por equipas diferentes e que nenhum serviço é repetido por qualquer equipa. Confirmando-nos mais uma vez de que a solução que obtivemos é a correta.

## 6.Conclusão

Após estes resultados, o grupo encontra-se satisfeito pois, utilizando as ferramentas introduzidas na Unidade Curricular, nomeadamente o *software Relax4* e o *LPSolve*, fomos capazes de chegar a uma solução que é ótima e que cumpre todos os requisitos pré estabelecidos no problema.