



**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

## **Unidade Curricular de Métodos e Algoritmos para Otimização Multiobjetivo**

Ano Letivo de 2025/2026

### ***TRABALHO PRÁTICO 2 - Aplicação de Métodos e Algoritmos de Otimização Multiobjetivo a um problema real***

#### **Grupo 8**

Beatriz Peixoto (pg59996)

Diogo Miranda (pg60001)

Sandra Cerqueira (pg60016)

2026, janeiro

# MAOM

## Índice

Resumo .....	2
1. Definição do problema .....	3
1.1 Variáveis de decisão .....	3
1.2 Funções objetivo .....	3
1.3 Restrições .....	4
1.5 Formulação do problema .....	5
2.1 Opções utilizadas .....	5
2.2 Análise crítica dos resultados e visualizações gráficas .....	5
6. Conclusões finais .....	7
7. Anexos .....	8
Anexo 1 .....	8
Anexo 2 .....	8

## Resumo

Este projeto foi desenvolvido no âmbito da unidade curricular de Métodos e Algoritmos para Otimização Multiobjetivo, do Mestrado em Engenharia e Ciência de Dados da Universidade do Minho. O trabalho incide sobre a otimização do design de uma asa traseira de um carro de Fórmula 1, formulada como um problema de otimização não linear multiobjetivo. Consideraram-se três objetivos conflitantes: minimizar o coeficiente de arrasto aerodinâmico, maximizar a força descendente (*downforce*) e minimizar o índice de custo de manufatura associado à complexidade geométrica do componente. As variáveis de decisão incluem parâmetros geométricos da asa, como ângulos de ataque, curvatura e espaçamento entre elementos, estando o problema sujeito a restrições físicas e de desempenho. A resolução foi realizada recorrendo a um método escalarizante e à rotina *gamultiobj* do MATLAB, permitindo obter aproximações ao conjunto de soluções da frente de Pareto. Os resultados foram analisados através de representações gráficas que evidenciam os *trade-offs* entre desempenho aerodinâmico e índice de custo, bem como através de métricas de desempenho para comparar a qualidade das soluções obtidas pelos diferentes métodos. Por fim, é apresentada uma análise crítica dos resultados e descrita a interação com ferramentas de Inteligência Artificial como apoio ao desenvolvimento do modelo.

1.Definição do problema

A Fórmula 1 representa o mais elevado nível de engenharia aplicada à otimização, onde cada componente do veículo é concebido para maximizar o desempenho sob rigorosas restrições físicas, regulamentares e económicas. Entre esses componentes, a asa traseira assume um papel crucial, influenciando diretamente o compromisso entre força aerodinâmica descendente, isto é, a força que empurra o carro contra o solo (*downforce*), determinante para a velocidade em curva, e arrasto aerodinâmico, que condiciona a velocidade de ponta. Este compromisso constitui um exemplo clássico de objetivos conflitantes em engenharia, não existindo uma solução ótima única, mas sim um conjunto de soluções de compromisso. Adicionalmente, geometrias mais complexas tendem a aumentar o custo e a dificuldade de manufatura, tornando necessário equilibrar desempenho aerodinâmico e viabilidade económica.

Neste contexto, o presente trabalho aborda a formulação e resolução de um problema de otimização não linear multiobjetivo aplicado ao design de elementos aerodinâmicos da **parte superior da asa traseira** de um monolugar de Fórmula 1, considerando simultaneamente a minimização do arrasto, a maximização do *downforce* e a minimização de um índice de custo de manufatura. De forma a manter o problema tratável num contexto académico, a modelação foi simplificada, focando-se exclusivamente no design geométrico do elemento principal e do *flap* (elemento secundário localizado atrás do elemento principal) da asa traseira, não sendo considerado o sistema DRS (*Drag Reduction System*), cujo funcionamento introduziria uma dinâmica adicional fora do âmbito deste estudo.

1.1 Variáveis de decisão

Para representar o problema de forma matemática, foram definidas as seguintes variáveis de decisão, sendo:

Variável	Significado
$\alpha_1$	Ângulo do elemento principal: indica a inclinação da parte principal da asa em relação ao vento; valores mais elevados aumentam o <i>downforce</i> nas curvas, mas também o arrasto, reduzindo a velocidade nas retas
$\alpha_2$	Ângulo do <i>flap</i> : indica a inclinação da segunda parte da asa; valores mais elevados reforçam o <i>downforce</i> gerado, mas aumentam significativamente o arrasto aerodinâmico.
$s$	Espaçamento entre elementos: distância entre a parte principal da asa e o <i>flap</i> ; menor distância aumenta o efeito aerodinâmico entre os elementos, mas reduz a estabilidade; maior distância melhora a estabilidade, mas diminui a eficiência.
$c$	Curvatura da asa: mede o quanto a asa é curva; maior curvatura aumenta o <i>downforce</i> mas também o arrasto e a complexidade de fabricação.

Para uma melhor compreensão visual destas variáveis recorreremos às suas ilustrações nas imagens que podem ser consultadas no [Anexo 1](#).

1.2 Funções objetivo

De seguida iremos explicar todo o processo que fizemos até obtermos as nossas funções objetivo. O problema foi formulado, recorrendo ao *Chatgpt*, como um problema de otimização não linear com três objetivos conflitantes, sendo eles, minimizar o arrasto aerodinâmico, maximização da força aerodinâmica (*downforce*) e minimização do índice do custo de manufatura.

- O **primeiro objetivo** do problema consiste na **minimização do coeficiente de arrasto aerodinâmico,  $C_D$** . O arrasto representa a resistência exercida pelo ar ao movimento do veículo e tem impacto direto na velocidade máxima e na eficiência em retas. Deste modo, valores elevados de arrasto penalizam significativamente o desempenho global do carro.  
O coeficiente de arrasto foi modelado como uma função não linear das variáveis geométricas da asa traseira, nomeadamente os ângulos de ataque ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) dos elementos, a curvatura do perfil ( $c$ ) e o espaçamento entre elementos ( $s$ ). A presença de termos quadráticos e de interação permite capturar efeitos aerodinâmicos não lineares, como o aumento do arrasto devido a ângulos de ataque elevados ou à interação entre os dois elementos da asa.

Assim, o primeiro objetivo é formulado como:

$$\begin{aligned} \min f_1(\mathbf{x}) &= C_D(\mathbf{x}) \\ \text{com} \\ C_D(\mathbf{x}) &= 0.02 + 0.01\alpha_1 + 0.012\alpha_2 + 0.15c + 0.0005s + 0.0008\alpha_1\alpha_2 + 0.0003\alpha_1^2 + 0.0004\alpha_2^2 \end{aligned}$$

Este objetivo tende a favorecer configurações mais conservadoras da asa, com menores ângulos de ataque e menor curvatura, resultando em menor resistência ao avanço.

- O **segundo objetivo** visa **maximizar o downforce**, que é responsável por aumentar a aderência dos pneus ao solo, melhorando o desempenho do veículo nas curvas, na travagem e na aceleração. Uma vez que os algoritmos de otimização do *MATLAB* estão programados por defeito para resolver problemas de minimização, a maximização do downforce foi reformulada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min f_2(\mathbf{x}) &= -C_L(\mathbf{x}) \\ \text{com} \\ C_L(\mathbf{x}) &= 1.0 + 0.08\alpha_1 + 0.06\alpha_2 + 0.5c - 0.0003s + 0.002\alpha_1\alpha_2 - 0.0002\alpha_1^2 - 0.0001\alpha_2^2 \end{aligned}$$

O *downforce* foi modelado como uma função não linear das variáveis de decisão, refletindo o facto de que o aumento dos ângulos de ataque e da curvatura do perfil conduz, até certo ponto, a um aumento do downforce. É introduzida uma penalização do espaçamento porque espaçamentos maiores diminuem a eficiência do *downforce*. Além disso, termos quadráticos negativos são introduzidos para representar fenómenos de saturação aerodinâmica, em que aumentos excessivos do ângulo de ataque deixam de produzir ganhos significativos de *downforce*.

Este objetivo conduz, em geral, a soluções com configurações que tentam maximizar de forma agressiva o *downforce*, mas que entram naturalmente em conflito com o objetivo de minimização do arrasto.

- O **terceiro objetivo** introduz uma perspetiva económica no problema, consistindo na minimização de um **indicador relativo de custo de manufatura** da asa traseira. Este objetivo não pretende representar um custo industrial real em unidades monetárias, mas sim quantificar, de forma coerente, a **complexidade construtiva associada a diferentes configurações geométricas**.

O índice de custo de manufatura foi modelado através de uma função simplificada que penaliza: curvaturas elevadas, associadas a moldes mais complexos; espaçamentos maiores entre elementos, que implicam maior consumo de material e levam a exigências estruturais superiores; e grandes diferenças entre os ângulos de ataque dos elementos, que dificultam o ajuste e a montagem da asa. A presença de termos quadráticos reflete o aumento não linear da dificuldade de fabrico à medida que o design se torna mais extremo.

Apesar do seu carácter simplificado, esta formulação é adequada ao contexto da otimização multiobjetivo, uma vez que permite introduzir de forma consistente o impacto económico relativo no processo de decisão e analisar os compromissos entre desempenho aerodinâmico e complexidade de fabrico.

Este objetivo foi então formulado como:

$$\begin{aligned} \min f_3(\mathbf{x}) &= C_{\text{man}}(\mathbf{x}) \\ \text{com} \\ C_{\text{man}}(\mathbf{x}) &= 100 + 15c^2 + 0.05s + 0.8(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \end{aligned}$$

### 1.3 Restrições

Para manter o problema dentro de limites realistas e garantir que as soluções obtidas fazem sentido do ponto de vista físico e aerodinâmico, foi necessário definir um conjunto de restrições que traduzem as limitações geométricas, estruturais e de desempenho da asa traseira. Estas restrições foram formuladas em conjunto com o *ChatGPT*, tendo como base princípios gerais de aerodinâmica e engenharia mecânica.

Restrições	Definição	Tipo
$0 \leq \alpha_1 \leq 15$	Limita o ângulo do elemento principal a valores realistas.	Limites simples
$0 \leq \alpha_2 \leq 15$	Limita o ângulo do <i>flap</i> a valores fisicamente admissíveis.	Limites simples
$5 \leq s \leq 50$	Limita a distância entre elementos para estabilidade e viabilidade	Limites simples
$0 \leq c \leq 0.1$	Limita a curvatura da asa a valores possíveis de fabricar.	Limites simples
$ \alpha_1 - \alpha_2  \leq 10$	Estabilidade aerodinâmica de modo a garantir que o <i>flap</i> não fique muito inclinado em relação ao elemento principal	Restrição de desigualdade
$C_L \geq 1.2$	<i>Downforce</i> mínima que assegura que a asa gere força suficiente para que o carro tenha aderência adequada nas curvas.	Restrição de desigualdade

## 1.5 Formulação do problema

Todo este processo de desenvolvimento anteriormente descrito levou-nos então a um problema de otimização multiobjetivo. A formulação matemática do problema é apresentada de seguida:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) = C_D(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) = -C_L(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) = C_{\text{man}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ \text{sujeito a:} \quad & \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 15] \\ & s \in [5, 50] \\ & c \in [0, 0.1] \\ & |\alpha_1 - \alpha_2| \leq 10 \\ & C_L(\mathbf{x}) \geq 1.2 \end{aligned}$$

Minimizar o vetor de funções objetivos  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  corresponde à identificação da configuração da asa traseira que melhor equilibra o arrasto aerodinâmico, nível de *downforce* e o índice de custo de produção. Valores reduzidos das funções objetivo indicam soluções com elevado desempenho aerodinâmico e menor complexidade construtiva, enquanto valores mais elevados refletem compromisso menos eficientes entre desempenho e índice de custo.

## 2. Resolução com MATLAB

### 2.1 Opções utilizadas

Para a resolução no MATLAB recorreremos a duas abordagens distintas: utilizamos o algoritmo genético multiobjetivo, **gamultiobj**, e a abordagem com o  **$\varepsilon$ -constraint**.

No método  **$\varepsilon$ -constraint**, o problema multiobjetivo foi convertido num uniobjetivo onde o coeficiente de arrasto  $C_D$  é minimizado, enquanto o coeficiente de *downforce*  $C_L$  e o índice de custo de manufatura viraram restrições e foram limitados por valores máximos admissíveis, em particular, impôs-se que o *downforce* fosse superior a um determinado valor mínimo ( $C_L \geq \varepsilon_{CL}$ ) e que o índice de custo não excedesse um valor máximo admissível ( $\text{Custo} \leq \varepsilon_C$ ).

Para explorar os *trade-offs* entre os objetivos, foram definidos **valores  $\varepsilon$  distribuídos uniformemente** para ambas as restrições. O limite mínimo de *downforce* foi variado entre **1.2 e 2.2**, abrangendo configurações com desempenho aerodinâmico moderado até elevado, enquanto o limite máximo do índice do custo foi considerado no intervalo **[100, 200]**, representando diferentes níveis de exigência económica.

Para cada combinação de valores ( $\varepsilon_{CL}, \varepsilon_C$ ), foi resolvido um problema de otimização não linear utilizando a rotina **fmincon**, com o algoritmo **SQP**, respeitando os limites físicos impostos às variáveis de projeto.

Adicionalmente, foi utilizado o algoritmo genético multiobjetivo **gamultiobj**, que permite tratar explicitamente os três objetivos. Na implementação do algoritmo, consideramos uma população de **150 indivíduos** e um máximo de **150 gerações**, garantindo diversidade suficiente para uma boa aproximação da fronteira de Pareto.

### 2.2 Análise crítica dos resultados e visualizações gráficas

Seguidamente, é apresentada a análise dos resultados obtidos, com o objetivo de avaliar o desempenho dos dois métodos de otimização considerados e analisar os *trade-offs* entre os três objetivos do problema. Para tal, após a implementação dos algoritmos, as soluções geradas foram representadas através de diferentes gráficos, escolhidos de modo a facilitar a interpretação dos resultados.

#### Visualização individual das soluções obtidas para cada algoritmo

##### **gamultiobj**

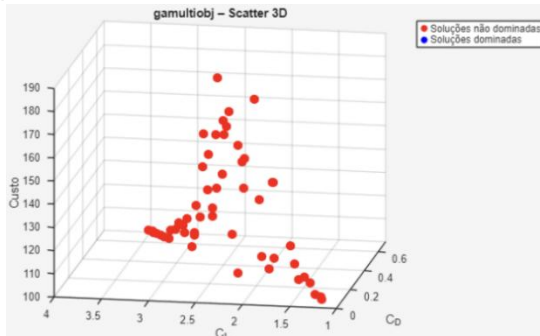


Figura 2-ScatterPlot gamultiobj

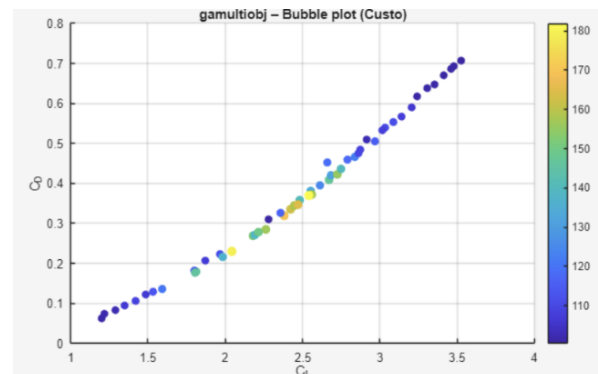


Figura 1-Bubble plot gamultiobj

## $\varepsilon$ -constraint

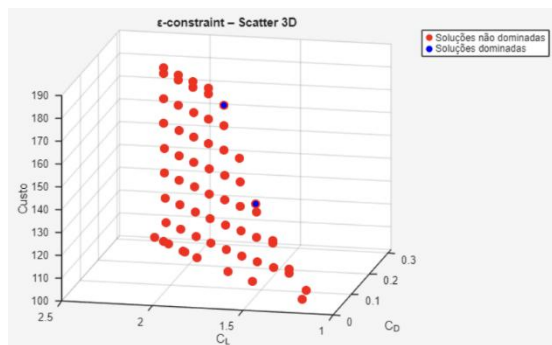


Figura 3-ScatterPlot  $\varepsilon$ - constraint

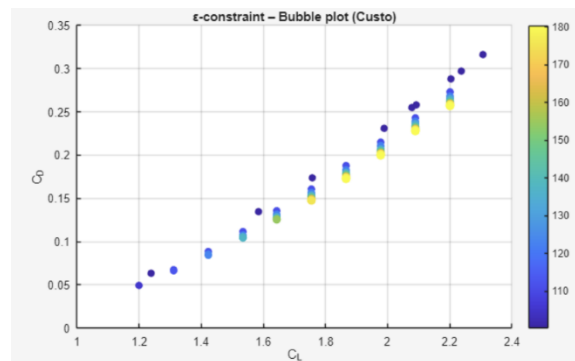


Figura 4-Bubble plot  $\varepsilon$ - constraint

## Comparação entre algoritmos

Para complementar a análise visual das soluções obtidas, foram também calculadas métricas quantitativas de desempenho multiobjetivo, permitindo uma comparação mais objetiva entre o método  $\varepsilon$ -constraint e o algoritmo *gamultiobj*. A tabela abaixo apresenta os resultados obtidos.

Métrica	$\varepsilon$ -constraint	<i>gamultiobj</i>
GD	0.0000	0.0627
IGD	0.0999	0.0848
Espaçamento (S)	0.0845	0.9128
Spread	0.9327	0.6453
Hipervolume (HV)	334.25	385.82

## Análise dos resultados

### GD e IGD

A Distância Geracional (GD) apresenta um valor nulo para o método  $\varepsilon$ -constraint, o que à primeira vista sugeriria uma superioridade absoluta em convergência. No entanto, é fundamental notar que o GD pode ser uma métrica tendenciosa uma vez que apenas confirma que os pontos encontrados estão na fronteira, mas não garante que a fronteira foi bem explorada.

Consequentemente, nesta análise valorizamos mais o IGD, que avalia simultaneamente a convergência e a diversidade das soluções. Neste indicador, o *gamultiobj* obteve um valor inferior, indicando uma melhor cobertura global da fronteira de Pareto.

### Espaçamento e Spread

O método  $\varepsilon$ -constraint apresenta um valor de Espaçamento (S) inferior, indicando uma distribuição aparentemente mais uniforme das soluções. No entanto, esta uniformidade ocorre apenas numa região limitada da frente de Pareto, resultado da elevada sensibilidade à escolha dos parâmetros  $\varepsilon$ , o que reduz a diversidade global das soluções.

O *gamultiobj*, embora apresente um Espaçamento ligeiramente superior, explora uma região significativamente mais ampla da frente de Pareto, capturando melhor o compromisso entre os objetivos.

Relativamente ao *Spread*, o *gamultiobj* é claramente melhor, refletindo a sua maior capacidade de alcançar os extremos da fronteira de Pareto. Este método estende-se até valores de  $C_L > 3.5$  e  $C_D > 0.7$ , enquanto o método  $\varepsilon$ -constraint ignora estas soluções devido às limitações impostas pela sua parametrização.

Assim, apesar do menor Espaçamento do  $\varepsilon$ -constraint, o *gamultiobj* apresenta maior diversidade global e fornece uma representação mais completa da frente de Pareto, sendo mais adequado para apoiar a tomada de decisão.

### Hipervolume

A análise do Hipervolume evidencia uma vantagem clara do algoritmo *gamultiobj*, que apresenta um valor superior quando comparado com o método  $\varepsilon$ -constraint. Este resultado indica que o *gamultiobj* é capaz de gerar soluções mais diversificadas e distribuídas ao longo de uma região mais ampla da frente de Pareto.

Apesar do método  $\varepsilon$ -constraint apresentar um valor de GD nulo, refletindo uma boa convergência das soluções obtidas, a sua exploração do espaço de objetivos revela-se mais limitada, com as soluções concentradas numa zona restrita da fronteira. Esta concentração conduz a um hipervolume inferior, uma vez que apenas uma parte reduzida da frente de Pareto é efetivamente representada.

Por sua vez, o *gamultiobj*, embora apresente um valor de GD ligeiramente superior, consegue distribuir as soluções por diferentes regiões da fronteira de Pareto, incluindo zonas mais extremas. Essa maior abrangência traduz-se num ganho significativo de hipervolume, confirmando que este método fornece uma representação mais completa da frente de Pareto e se revela mais adequado como ferramenta de apoio à tomada de decisão.

### Desempenho Global e Perspetiva do Decisor

Em termos de desempenho global, o **gamultiobj revelou-se melhor** para o nosso problema. A análise conjunta das escalas e do Hipervolume mostra que o algoritmo populacional fornece uma representação mais completa e diversificada da frente de Pareto.

Do ponto de vista do decisor, o método  **$\varepsilon$ -constraint revela-se limitativo**, uma vez que não permite o acesso imediato a um conjunto alargado de soluções. Por outro lado, o *gamultiobj* disponibiliza um número significativamente maior de soluções, permitindo ao decisor explorar melhor o compromisso entre minimização do arrasto e maximização do downforce, com uma perceção clara do impacto no índice custo.

Neste contexto, as soluções azuis mais escuras localizadas na região intermédia do **bubble plot da Figura 1** assumem particular relevância, uma vez que representam um equilíbrio eficiente entre elevados níveis de *downforce* e valores moderados de arrasto, evitando simultaneamente índices de custos excessivos. Estas soluções constituem, assim, as opções mais atrativas para uma escolha final de projeto.

### Gráfico Path Value

Adicionalmente, elaboramos um gráfico *Path Value*, que se encontra no [Anexo 2](#), que permite analisar a variação simultânea dos objetivos ao longo da fronteira de Pareto obtida pelo **gamultiobj**, com os valores apresentados de forma normalizada. Observa-se claramente o conflito entre arrasto ( $C_D$ ) e downforce ( $C_L$ ), evidenciado pela tendência oposta entre estas duas componentes ao longo das soluções. Verifica-se ainda que soluções com elevado desempenho aerodinâmico (baixo  $C_D$  e alto  $C_L$ ) estão associadas a um aumento do índice do custo de manufatura, confirmando o carácter conflitante do terceiro objetivo. O gráfico evidencia a existência de diferentes regimes de soluções, permitindo ao decisor identificar regiões da frente que equilibram de forma mais adequada desempenho aerodinâmico e índice de custo. Deste modo, o *Path Value* complementa as métricas quantitativas, fornecendo uma interpretação física e intuitiva das soluções da fronteira de Pareto.

## 5. Balanço da Utilização da Inteligência Artificial (IA)

A utilização de ferramentas de Inteligência Artificial foi crucial na formulação do problema de otimização multiobjectivo baseado na Formula 1, auxiliando na definição das variáveis de decisão, das funções objetivo e das restrições, de modo a tornar o problema computacionalmente realizável, mantendo a coerência física e a proximidade com um cenário realista. A sua utilização foi sempre guiada e supervisionada por nós.

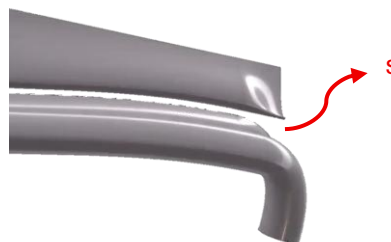
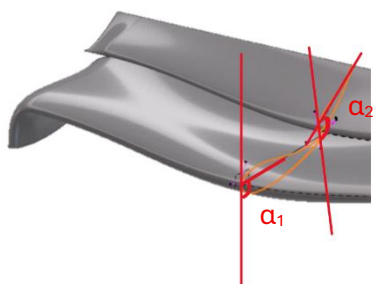
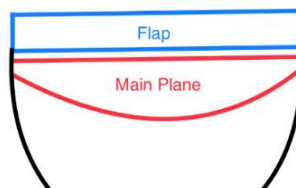
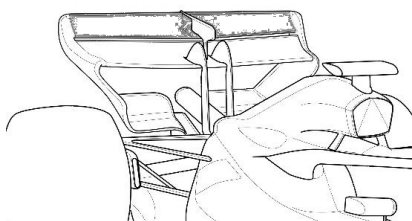
## 6. Conclusões finais

Neste trabalho foi formulado e resolvido um problema de otimização não linear multiobjetivo aplicado ao design da asa traseira de um monolugar de Fórmula 1, evidenciando o compromisso entre arrasto aerodinâmico, downforce e índice de custo de manufatura. A formulação do modelo destacou a importância da definição adequada das variáveis, funções objetivo e restrições, de forma a garantir coerência física e viabilidade computacional. Os resultados obtidos confirmam o carácter conflitante dos objetivos, justificando a abordagem multiobjetivo. A comparação entre o método  $\varepsilon$ -constraint e o algoritmo *gamultiobj* mostrou que, apesar da boa convergência local do método escalarizante, o *gamultiobj* apresentou melhor diversidade e cobertura da fronteira de Pareto, conforme evidenciado pelas métricas de desempenho. Assim, conclui-se que o modelo proposto é consistente e adequado para a análise de compromissos em problemas de conceção aerodinâmica.



## 7. Anexos

### Anexo 1



### Anexo 2

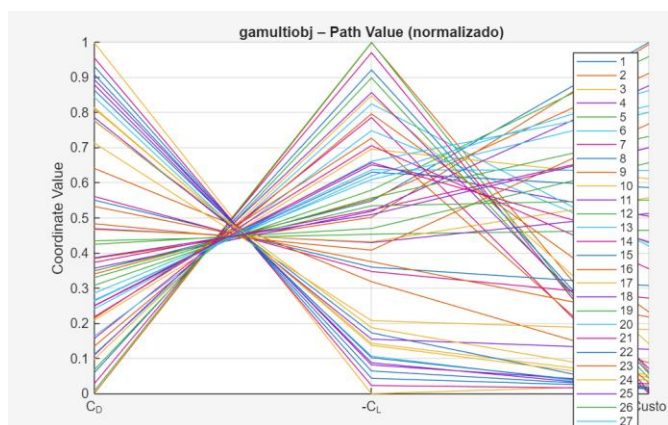


Figura 6-Path Value normalizado para o gamultiobj

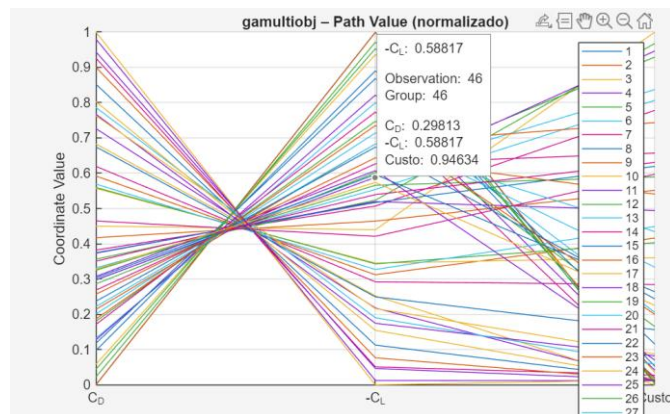


Figura 5-Solução com excelente downforce e baixo arrasto mas com índice custo muito elevado, seria uma solução válida caso o índice custo não fosse um problema

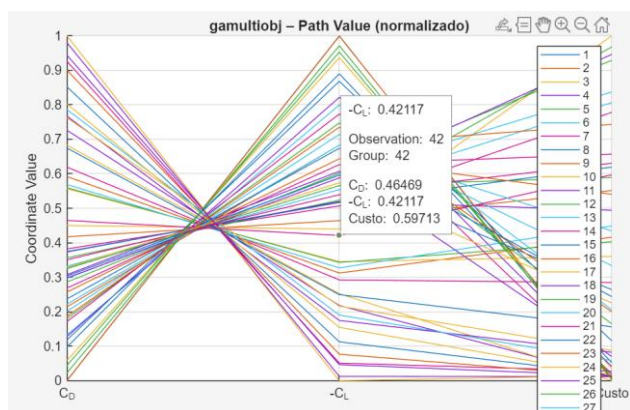


Figura 7-Solução intermédia da frente de Pareto. Representa um compromisso equilibrado entre redução de arrasto, aumento de downforce e índice custo de manufatura, correspondendo ao tipo de solução mais interessante.