Škatlasti zlepki

Sandra Krševan in Sara Močnik

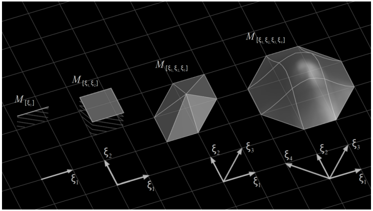
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

januar 2021

Motivacija

Škatlasti zlepek:

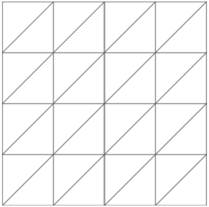
- zlepki polinomskih funkcij več spremenljivk
- uporabni pri aproksimaciji in interpolaciji funkcije več spremenljivk



Slika: Škatlasti zlepki dveh spremenljivk v prostoru z 1, 2, 3 in 4 vektorji.

Škatlasti zlepki tipa 1
Triangulacija

Regularna triangulacija tipa 1:



Slika: Regularna triangulacija tipa 1.

Oznaka: Δ_I
Točke triangulacije: $(x, y) = v \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Škatlasti zlepki tipa 1

Definicija

Prostor C^r zlepkov stopnje n: $S_d^r(\Delta_I) = \{s \in C^r(\Omega):\ s|_T \in \mathbb{P}_d^2\ \forall T \in \Delta_I\}$

Cilj:

Konstruirati zlepke B, $B \in S_n^r(\Delta_I)$, za katere velja:

1. Nosilec zlepka B je majhen. $\left[supp\ B = nosilec\ B = \overline{\{x;\ Bx \neq 0\}}\ \right]$
2. B je pozitiven na $Int(supp\ B)$.
3. $S := Lin\{B(v-\mu)\}_{\mu\in\mathbb{Z}^2}$ vsebuje polinome stopnje d.
4. $\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^2} B(v-\mu) = 1$ za vse $v \in \mathbb{R}^2$
5. Prostor S aproksimira gladke funkcije na poljubni kompaktni podmnožici $\mathbb{R}^2$.

Škatlasti zlepki tipa 1
Smeri triangulacije

Smeri v triangulaciji:

- premik v levo: $e_1 = (1, 0)$
- premik navzgor: $e_2 = (0, 1)$
- premik po diagonali: $e_3 = (1, 1)$

Za $n \geq 3$ definiramo množico

$$X_n := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

kjer so $v_i \in \{e_1, e_2, e_3\}$ in X_n vsebuje vsako od smeri e_1, e_2, e_3 vsaj enkrat. Množici X_n rečemo **množica smeri tipa 1**.

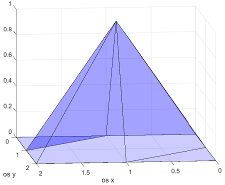
$X_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$

Škatlasti zlepki tipa 1
Najmanjši zlepek

$$B_{111} \in S_1^0(\Delta_I)$$

$$B_{111}((1,1)) = 1$$

$$B_{111}(v) = 0 \;\forall v \neq (1,1)$$



Slika: Zlepek B_{111}.

Zlepki višjih stopenj

Definicija

Naj bo $n > 3$ in $X_n := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ množica smeri tipa 1. Definirajmo množice $X_i := \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ za $i = 3, 4, \dots, n$. Potem za $4 \leq i \leq n$ rekurzivno definiramo škatlati zlepek tipa 1 z enačbo:

$$B(v|X_i) := \int_0^1 B(v - tv_i|X_{i-1})dt,$$

kjer je $B(v|X_3)$ škatlasti zlepek B_{111}.

Oznaka:

$B_{ijk}(v)$ škatlasti zlepek tipa 1 $B(v|X_n)$, kjer je X_n množica smeri tipa 1, za katero velja: $X_n = \{e_1^{<i>}, e_2^{<j>}, e_3^{<k>}\}$.

Škatlasti zlepki tipa 1

Izrek

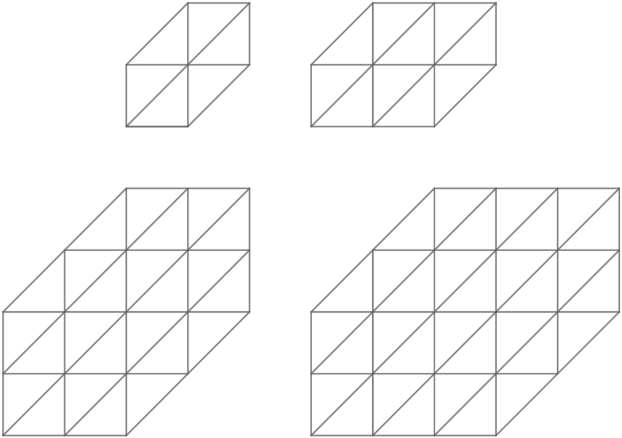
Naj bo X_n množica smeri tipa 1.
Škatlasti zlepek $B(v|X_n)$ ima nosilec na zaprtju množice

$$[X_n] := \{\sum_{j=1}^{n} t_j v_j : \ 0 \leq t_j < 1; \ j = 1, \ldots, n\}$$

. Za vse točke v v notranjosti množice $[X_n]$ je $B(v|X_n) > 0$.

Množici $[X_n]$ rečemo tudi afina kocka X_n.

Škatlasti zlepki tipa 1



Slika: Nosilci za B_{111}, B_{211}, B_{222} in B_{322}.

Škatlasti zlepki tipa 1
Odvodi

Dan imamo vektor $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $u \neq (0,0)$.
Naj bo D_u smerni odvod, $\bigtriangledown_u$ pa nazaj diferenčen operator, za katerega velja:

$$\bigtriangledown_u f(\cdot) = f(\cdot) - f(\cdot - u)$$

.

Lema

Naj bo X_n množica smeri tipa 1 in naj bo $n \geq 4$.
Potem za $4 \leq j < n$ velja:

$$D_{v_j} B(\cdot|X_n) = \bigtriangledown_{v_j} B(\cdot|X_n \setminus \{v_j\}).$$

Škatlasti zlepki tipa 1

Izrek

Naj bo $X_n = \{e_1^{<i>}, e_2^{<j>}, e_3^{<k>}\}$ *množica smeri tipa 1 in* $i + j + k = n$. *Potem* $B_{ijk} := B(\cdot|X_n) \in S^r_{n-2}(\Delta_I)$, *kjer je*

$$r := r(X_n) = min\{i + j, j + k, k + i\} - 2.$$

Škatlasti zlepki tipa 1

Izrek

Naj bo $X_n = \{e_1^{<i>}, e_2^{<j>}, e_3^{<k>}\}$ *množica smeri tipa 1 in* $i + j + k = n$. *Potem* $B_{ijk} := B(\cdot|X_n) \in S_{n-2}^r(\Delta_I)$, *kjer je*

$$r := r(X_n) = min\{i + j, j + k, k + i\} - 2.$$

Zgornji izrek nam da naslednje rezultate:

- $B_{111} := B(\cdot|X_3) \in S_1^0(\Delta_I)$
- $B_{221} := B(\cdot|X_5) \in S_3^1(\Delta_I)$
- $B_{222} := B(\cdot|X_6) \in S_4^2(\Delta_I)$
- $B_{322} := B(\cdot|X_7) \in S_5^2(\Delta_I)$
- $B_{332} := B(\cdot|X_8) \in S_6^3(\Delta_I)$
- $B_{333} := B(\cdot|X_9) \in S_7^4(\Delta_I)$

Škatlasti zlepki tipa 1
B-ordinate

$X_n := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je množica smeri tipa 1. Zanjo velja, da je $v_i \in \{e_1, e_2, e_3\}$.
Potem je $D_{v_i}B(v|X_n)$ na kateremkoli trikotniku triangulacije smerni odvod v smeri ene od stranic trikotnika.
Po lemi od prej velja:

$$D_{v_j}B(v|X_n) = \bigtriangledown_{v_j}B(v|X_n \setminus \{v_j\}).$$

Škatlasti zlepki tipa 1
B-ordinate

$$p_{n-2}(v) := \sum_{i+j+k=n-2} c_{ijk} B_{ijk}^{n-2}(v)$$

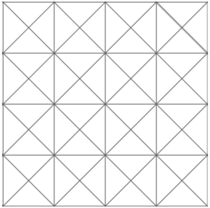
Oznaka za zožitev $B(\cdot|X_n)$ na trikotnik $T = \langle(0,0),(1,0),(1,1)\rangle$.
Vemo: $B_{ijk}^{n-2}(v) = \frac{(n-2)!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$, $i,j,k \in \mathbb{N}_0, i+j+k = n-2$ in $(u,v,w) = Bar(v;T)$
Potem velja:

$$D_{e_1} p_{n-2}(v) = (n-2) \sum_{i+j+k=n-3} (c_{i,j+1,k} - c_{i+1,j,k}) B_{ijk}^{n-3}(v)$$

$$D_{e_2} p_{n-2}(v) = (n-2) \sum_{i+j+k=n-3} (c_{i,j,k+1} - c_{i,j+1,k}) B_{ijk}^{n-3}(v)$$

$$D_{e_3} p_{n-2}(v) = (n-2) \sum_{i+j+k=n-3} (c_{i,j,k+1} - c_{i+1,j,k}) B_{ijk}^{n-3}(v)$$

Regularna triangulacija tipa 2:



Slika: Regularna triangulacija tipa 2.

Oznaka: Δ_{II}

Škatlasti zlepki tipa 2

Smeri v triangulaciji:

- premik v levo: $e_1 = (1, 0)$
- premik navzgor: $e_2 = (0, 1)$
- premik po diagonali: $e_3 = (1, 1)$
- premik po drugi diagonali: $e_3 = (-1, 1)$

Za $n \geq 3$ definiramo množico

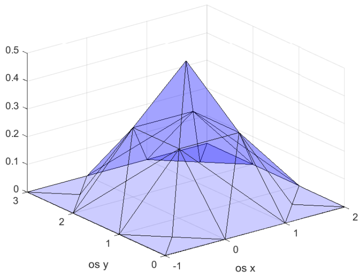
$$X_n := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

kjer so $v_i \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ in X_n vsebuje vsako od smeri e_1, e_2, e_3, e_4 vsaj enkrat.
Množici X_n rečemo **množica smeri tipa 2**.

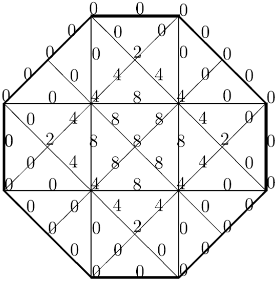
$X_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Škatlasti zlepki tipa 2
Najmanjši zlepek

$$B_{1111} \in S_2^1(\Delta_{II})$$



Slika: Zlepek B_{1111}.



Slika: B-ordinate $16B_{1111}$.

Zlepki višjih stopenj

Definicija

Naj bo $n > 4$ *in* $X_n := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *množica smeri tipa 2. Definirajmo množice* $X_i := \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ *za* $i = 4, \ldots, n$*. Potem za* $5 \leq i \leq n$ *rekurzivno definiramo škatlati zlepek tipa 2 z enačbo:*

$$B(v|X_i) := \int_0^1 B(v - tv_i|X_{i-1})dt,$$

kjer je $B(v|X_4)$ *škatlasti zlepek* B_{1111}*.*

Oznaka:
$B_{ijkl}(v)$ škatlasti zlepek tipa 1 $B(v|X_n)$, kjer je X_n množica smeri tipa 2, za katero velja: $X_n = \{e_1^{<i>}, e_2^{<j>}, e_3^{<k>}, e_4^{<l>}\}$.

Škatlasti zlepki tipa 2

Izrek

Naj bo $X_n = \{e_1^{<i>}, e_2^{<j>}, e_3^{<k>}, e_4^{<l>}\}$ *množica smeri tipa 2 in* $i + j + k + l = n$. *Potem* $B_{ijkl} := B(\cdot|X_n) \in S^r_{n-2}(\Delta_{II})$, *kjer je* $r := r(X_n) = min\{i + k + l, j + k + l, i + j + k, i + j + l\} - 2.$

Škatlasti zlepki tipa 2

Izrek

Naj bo $X_n = \{e_1^{<i>}, e_2^{<j>}, e_3^{<k>}, e_4^{<l>}\}$ *množica smeri tipa 2 in* $i + j + k + l = n$. *Potem* $B_{ijkl} := B(\cdot|X_n) \in S^r_{n-2}(\Delta_{II})$, *kjer je* $r := r(X_n) = min\{i + k + l, j + k + l, i + j + k, i + j + l\} - 2$.

Zgornji izrek nam da naslednje rezultate:

- $B_{1111} := B(\cdot|X_4) \in S^1_2(\Delta_{II})$
- $B_{2111} := B(\cdot|X_5) \in S^1_3(\Delta_{II})$
- $B_{2211} := B(\cdot|X_6) \in S^2_4(\Delta_{II})$
- $B_{2221} := B(\cdot|X_7) \in S^3_5(\Delta_{II})$
- $B_{2222} := B(\cdot|X_8) \in S^2_6(\Delta_{II})$

Vrsta iz škatlastega zlepka

Opazujemo vrste tipa:

$$s(\cdot) := \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c_j B(\cdot - j | X_n)$$

Linearni prostor škatlastih zlepkov:

$$S(X_n) := \{ \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} c_j B(\cdot - j | X_n) ; c_j \in \mathbb{R} \, \mathrm{za} \, \forall j \in \mathbb{Z}^2 \}$$

Izrek

Naj bo X_n množica smeri tipa 1 ali 2. Potem pripadajoči škatlasti zlepki tvorijo particijo enote na $\mathbb{R}^2$ oz. velja

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} B(\cdot - j | X_n) = 1.$$

Izrek

Naj bo X_n množica smeri tipa 1 ali 2. Potem pripadajoči škatlasti zlepki tvorijo particijo enote na $\mathbb{R}^2$ oz. velja

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} B(\cdot - j | X_n) = 1.$$

Izrek

Naj bo X_n množica smeri tipa 2. Potem velja

$$\sum_{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2} B(\cdot - j_1 e_3 - j_2 e_4 | X_n) = \frac{1}{2}.$$

Linearna neodvisnost

Premaknjeni škatlasti zlepki $\{B(\cdot - j|X_n)\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ so **linearno neodvisni**, kadar velja:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} a_j B(v - j|X_n) = 0 \,\text{za}\, \forall v \in \mathbb{R}^2 \implies a_j = 0 \,\text{za}\, \forall j \in \mathbb{Z}^2.$$

Linearna neodvisnost

Izrek

Naj bo X_n množica smeri tipa 1. Potem je množica $\{B(\cdot - j|X_n)\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ linearno neodvisna.
Velja tudi: Naj bo $a = \{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ omejeno zaporedje. Potem velja

$$A\,\|a\|_\infty \le \left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} a_j B(\cdot - j|X_n)\right\|_\infty \le \|a\|_\infty\,,$$

kjer je $\|a\|_\infty = \max_{j\in\mathbb{Z}^2}|a_j|$.

Linearna neodvisnost

Izrek

Naj bo X_n množica smeri tipa 1. Potem je množica $\{B(\cdot - j|X_n)\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ linearno neodvisna.
Velja tudi: Naj bo $a = \{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ omejeno zaporedje. Potem velja

$$A\left\|a\right\|_\infty \leq \left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} a_j B(\cdot - j|X_n)\right\|_\infty \leq \left\|a\right\|_\infty,$$

kjer je $\left\|a\right\|_\infty = \max_{j\in\mathbb{Z}^2}|a_j|$.

Izrek

Naj bo X_n množica smeri tipa 2. Potem je množica $\{B(\cdot - j|X_n)\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ linearno odvisna.