Škatlasti zlepki

Sandra Kerševan, Sara Močnik

Januar 2020

Abstract

...

1 Uvod

2 Zlepki tipa 1

Triangulacija ravnine Δ_I: regularna triangulacija tipa 1: mreža $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, kvadratki in diagonale (x=y)

Točke triangulacije: $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Oznaka posamezne točke: (x, y) ali v

Multiindeks: $\mu = (i, j)$

Prostor C^r zlepkov stopnje d: $S_d^r(\Delta_I) = \{s \in C^r(\Omega) : \ s|_T \in \mathbb{P}_n^2 \ \forall T \in \Delta_I\}$

Konstruirati želimo zlepke B, ki ustrezajo naslednjim pogojem:

1. nosilec B je majhen: $supp\ B = nosilec\ B = \overline{\{x;\ Bx \neq 0\}}$
2. B je pozitivna na $Int(supp\ B)$
3. $S := span\{B(v - \mu)\}_{\mu \in \mathbb{Z}^2}$ vsebuje polinome stopnje d
4. $\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} B(v - \mu) = 1$ za vse $v \in \mathbb{R}^2$
5. Prostor S aproksimira gladke funkcije na poljubni kompaktni podmnožici $\mathbb{R}^2$

Primer: B_{111}

B_{111} je Courantova funkcija (tudi trikotna funkcija - v ravnini zavzame obliko trikotnika višine 1); zanjo velja:

$B_{111} \in S_1^0(\Delta_I)$
$B_{111}((1,1)) = 1$
$B_{111}((i,j)) = 0 \ \forall (i,j) \neq (1,1)$

Za zlepke višje stopnje definiramo še smeri:

1. premik v levo: $e_1 = (1,0)$
2. premik navzgor: $e_2 = (0,1)$
3. premik po diagonali: $e_3 = (1,1)$

Za $n \geq 3$ definiramo množico $X_n := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, kjer so $v_1, v_2, v_3 \in \{e_1, e_2, e_3\}$ in X_n vsebuje vsakega od e_1, e_2, e_3 vsaj enkrat. Množici X_n rečemo množica smeri tipa 1. Brez škode za splošnost: $v_i = e_i$ za $i = 1, 2, 3$.

Definicija 1 *Naj bo $n > 3$ in $X_n := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ množica smeri tipa 1. Definirajmo množice $X_i := \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ za $i = 3, 4, \ldots, n$. Potem za $4 \leq i \leq n$ rekurzivno definiramo škatlati zlepek tipa 1 z enačbo:*

$$B(v|X_i) := \int_0^1 B(v - tv_i|X_{i-1})dt,$$

kjer je $B(v|X_3)$ škatlasti zlepek B_{111}.

Da se pokazati, da zlepki $B(v|X_i)$ niso odvisni od vrstnega reda smeri v množici smeri tipa 1 X_n.

Oznaka: $B_{ijk}(v)$ škatlasti zlepek tipa 1 $B(v|X_n)$, kjer je X_n množica smeri tipa 1, za katero velja: $X_n = \{e_1^{<i>}, e_2^{<j>}, e_3^{<k>}\}$.

Izrek 1 *Naj bo X_n množica smeri tipa 1. Škatlasti zlepek $B(v|X_n)$ ima nosilec na zaprtju množice*

$$[X_n] := \{\sum_{j=1}^{n} t_j v_j : \ 0 \leq t_j < 1; \ j = 1, \ldots, n\}$$

. Za vse točke v v notranjosti množice $[X_n]$ je $B(v|X_n) > 0$.

Množici $[X_n]$ rečemo tudi afina kocka X_n.

Nosilci za različne izbire i, j, k:

1. B_{211} je škatlasti zlepek tipa 1, njegova množica smeri tipa 1 je $X_n = \{e_1^{<2>}, e_2^{<1>}, e_3^{<1>}\}$ (dvakrat levo, enkrat navzgor in enkrat po diagonali)

2. B_{221} je škatlasti zlepek tipa 1, njegova množica smeri tipa 1 je $X_n = \{e_1^{<2>}, e_2^{<2>}, e_3^{<1>}\}$

3. B_{322} je škatlasti zlepek tipa 1, njegova množica smeri tipa 1 je $X_n = \{e_1^{<3>}, e_2^{<2>}, e_3^{<2>}\}$

Znotraj teh območij je zlepek pozitiven, zunaj pa enak 0.

Odvodi škatlastih zlepkov

Dan imamo vektor $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $u \neq (0,0)$. Naj bo D_u smerni odvod $\triangle_u, \bigtriangledown_u$ naprej in nazaj diferenčna operatorja za katera velja:

$$\triangle_u f(\cdot) = f(\cdot + u) - f(\cdot)$$

$$\bigtriangledown_u f(\cdot) = f(\cdot) - f(\cdot - u)$$

.

Bolj splošno: Če je $Y \subset \mathbb{R}^2$ končna množica neničelnih vektorjev, potem označimo:

$$D_Y := \prod_{u \in Y} D_u$$

$$\triangle_Y := \prod_{u \in Y} \triangle_u$$

$$\bigtriangledown_Y := \prod_{u \in Y} \bigtriangledown_u$$

Lema 1 *Naj bo X_n množica smeri tipa 1 in naj bo $n \geq 4$. Potem za $4 \leq j < n$ velja:*

$$D_{v_j} B(\cdot|X_n) = \bigtriangledown_{v_j} B(\cdot|X_n \setminus \{v_j\}).$$

Izrek 2 *Naj bo $X_n = \{e_1^{<i>}, e_2^{<j>}, e_3^{<k>}\}$ množica smeri tipa 1 in $i+j+k = n$. Potem $B_{ijk} := B(\cdot|X_n) \in S_{n-2}^r(\Delta_I)$, kjer je $r := r(X_n) = min\{i+j, j+k, k+i\} - 2$.*

Zgornji izrek nam da naslednje rezultate:

- $B_{111} := B(\cdot|X_n) \in S_1^0(\Delta_I)$
- $B_{221} := B(\cdot|X_n) \in S_3^1(\Delta_I)$
- $B_{222} := B(\cdot|X_n) \in S_4^2(\Delta_I)$
- $B_{322} := B(\cdot|X_n) \in S_5^2(\Delta_I)$
- $B_{332} := B(\cdot|X_n) \in S_6^3(\Delta_I)$
- $B_{333} := B(\cdot|X_n) \in S_7^4(\Delta_I)$

Izrek 3 *Za vse gladke funkcije $f \in C(\mathbb{R}^2)$ velja:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} B(v|X_n)f(v)dv = \int_{[0,1]^n} f(\sum_{i=1}^n t_i v_i)dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Če v zgornji izrek vstavimo funkcijo $f(v) = e^{-iv\cdot\omega}$, kjer sta $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ in $i = \sqrt{-1}$ imaginarna enota, dobimo naslednji izrek.

Izrek 4 *Fourierova transformacija funkcije $B(\cdot|X_n)$ je*

$$\hat{B}(\cdot|X_n)(\omega) = \prod_{j=1}^n \frac{1 - e^{-i\omega\cdot v_j}}{i\omega \cdot v_j}$$

Greenova formula za škatlaste zlepke

Izrek 5 *Naj bo $n \geq 3$. Za vsako $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ velja:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} B(v|X_n)D_{v_i}f(v)dv = -\int_{\mathbb{R}^2} D_{v_i}B(v|X_n)f(v)dv$$

kjer je $i = 1, \dots, n$.

Peanova formula za škatlaste zlepke:

Izrek 6 *Za vsako $f \in C^n(\mathbb{R}^2)$ velja:*

$$\triangle_{X_n} f((0,0)) = \int_{\mathbb{R}^2} B(v|X_n)D_{X_n}f(v)dv$$

kjer je $i = 1, \dots, n$.

Izpopolnitvena formula za škatlaste zlepke:

Izrek 7 *Obstaja končno zaporedje $\{a_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}^2}$, tako da velja:*

$$B(v|X_n) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^2} a_\nu B(2v - \nu|X_n)$$

kjer je $i = 1, \dots, n$.

2.1 B-ordinate za poljuben škatlast zlepek tipa 1

V tem razdelku bomo pokazali, kako najdemo B-ordinato za poljuben škatlast zlepek tipa 1. S pomočjo izračunanih Bezierjevih ordinat in deCasteljaujevega postopka nato izračunamo zlepek.

B-ordinate za B_{111} $B_{111} \in S_1^0(\Delta_I)$
$B_{111}((1,1)) = 1$
$B_{111}((i,j)) = 0 \; \forall (i,j) \neq (1,1)$

B-ordinate za škatlaste zlepke tipa 1 višje stopnje:

Spomnimo se: $X_n := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je množica smeri tipa 1. Zanjo velja, da je $v_i \in \{e_1, e_2, e_3\}$. Potem je $D_{v_i} B(v|X_n)$ na kateremkoli trikotniku triangulacije smerni odvod v smeri ene od stranic trikotnika.

Oznaka: $p_{n-2}(v) := \sum_{i+j+k=n-2} c_{ijk} B_{ijk}^{n-2}(v)$ zožitev $B(\cdot|X_n)$ na trikotnik $T =< (0,0), (1,0), (1,1) >$. $B_{ijk}^{n-2}(v) = \frac{(n-2)!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$, $i, j, k \in \mathbb{N}_0, i + j + k = n - 2$ in $(u, v, w) = Bar(v; T)$

Potem velja:

$$D_{e_1} p_{n-2}(v) = (n-2) \sum_{i+j+k=n-3} (c_{i,j+1,k} - c_{i+1,j,k}) B_{ijk}^{n-3}(v)$$

$$D_{e_2} p_{n-2}(v) = (n-2) \sum_{i+j+k=n-3} (c_{i,j,k+1} - c_{i,j+1,k}) B_{ijk}^{n-3}(v)$$

$$D_{e_3} p_{n-2}(v) = (n-2) \sum_{i+j+k=n-3} (c_{i,j,k+1} - c_{i+1,j,k}) B_{ijk}^{n-3}(v)$$

Po 1 velja:

$$D_{v_j} B(v|X_n) = \bigtriangledown_{v_j} B(v|X_n \setminus \{v_j\}).$$

Recimo, da so znane vse B-oridnate $B(v|X_n \setminus \{v_j\})$. Potem so po zgornji enačbi znane vse B-ordinate $\triangle_{v_j} B(\cdot|X_n \setminus \{v_j\})$.

Torej B-ordinate $B(\cdot|X_n)$ lahko izračunamo s pomočjo prvih odvodov in znanja, da je rob nosilca škatlastega zlepka enak 0. Znano imamo B-ordinate B_{111}. Iz teh lahko izračunamo B_{211}. Rekurzivno tako izračunamo B_{ijk} za poljubne $i, j, k \geq 1$.

Primer:

Naj bo $X_4 = \{e_1^{<2>}, e_2^{<1>}, e_3^{<1>}\}$ in $X_3 = \{e_1^{<1>}, e_2^{<1>}, e_3^{<1>}\}$. Spomnimo se oznake: $B(\cdot|X_4) = B_{211}$. Izračunajmo B-ordinate za B_{211}:

$$D_{e_1} B_{211} = B(\cdot|X_3) - B(\cdot - e_1|X_3)$$

$$D_{e_1}B_{211} = B_{111}(\cdot) - B(\cdot - e_1|X_3)$$

Če označimo B-ordinate B_{211} z a_{ij} in B-ordinate $D_{e_1}B_{211}$ z b_{ij} dobimo enačbe:

$$b_{01} = a_{12} - a_{11} = a_{03} - a_{02}$$

$$b_{02} = a_{04} - a_{03} = a_{14} - a_{13}$$

$$b_{03} = a_{06} - a_{05} = a_{16} - a_{15}$$

$$b_{10} = a_{21} - a_{20}$$

$$b_{11} = a_{22} - a_{21} = a_{32} - a_{31} = a_{23} - a_{22} = a_{13} - a_{12}$$

$$b_{12} = a_{24} - a_{23} = a_{15} - a_{14} = a_{25} - a_{24} = a_{34} - a_{33}$$

$$b_{13} = a_{26} - a_{25}$$

$$b_{20} = a_{31} - a_{30} = a_{41} - a_{40}$$

$$b_{21} = a_{42} - a_{41} = a_{33} - a_{32}$$

$$b_{22} = a_{44} - a_{43} = a_{35} - a_{34}$$

Ob upoštevanju, da je rob nosilca škatlastega zlepka enak 0, dobimo dodatne pogoje:

$$a_{01} = a_{02} = a_{03} = a_{04} = a_{05} = a_{06} = 0$$

$$a_{20} = a_{30} = a_{40}$$

$$a_{11} = 0$$

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = a_{44} = 0$$

$$a_{16} = a_{26} = a_{35} = 0$$

Tako dobimo:

$$b_{01} = a_{12} = 0$$

$$b_{02} = 0 = a_{14} - a_{13}$$

$$b_{03} = 0 = 0 - a_{15}$$

$$b_{10} = a_{21}$$

$$b_{11} = a_{22} - a_{21} = a_{32} - a_{31} = a_{23} - a_{22} = a_{13} - a_{12}$$

$$b_{12} = a_{24} - a_{23} = a_{15} - a_{14} = a_{25} - a_{24} = a_{34} - a_{33}$$

$$b_{13} = 0 - a_{25}$$

$$b_{20} = a_{31} = 0$$

$$b_{21} = 0 = a_{33} - a_{32}$$

$$b_{22} = 0 = 0 - a_{34}$$

Formula za notrjanji produkt dveh škatlastih zlepkov:

Izrek 8 *Za vsako $i, j, k \geq 1$ in $m, n, o \geq 1$ velja:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} B_{ijk} B_{mno} dv = B_{i+m,j+n,k+o}(i+k, j+k)$$

.

3 Zlepki tipa 2

Triangulacija ravnine Δ_{II}: regularna triangulacija tipa 2: mreža $\frac{\mathbb{Z}}{2} \times \frac{\mathbb{Z}}{2}$, kvadratki in diagonale (x=y, x =-y) Točke triangulacije: $(\frac{i}{2}, \frac{j}{2}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Oznaka posamezne točke: (x, y) ali v

Osnovna 'celica': blok B_{1111}, zlepek sodi v družino $S_2^1(\Delta_{II})$

Za $n \geq 4$ definiramo množico smeri tipa 2 $X_n := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, kjer so $v_i \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ in $e_4 = (-1, 1)$. Brez škode za splošnost: $v_i = e_i$ za $i = 1, 2, 3, 4$.

Definicija 2 *Naj bo $n > 4$ in $X_n := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ množica smeri tipa 2. Definirajmo množice $X_i := \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ za $i = 4, \ldots, n$. Potem za $5 \leq i \leq n$ rekurzivno definiramo škatlati zlepek tipa 2 z enačbo:*

$$B(v|X_i) := \int_0^1 B(v - tv_i|X_{i-1})dt,$$

kjer je $B(v|X_4)$ škatlasti zlepek B_{1111}.

Oznaka: $B_{ijkl}(v)$ škatlasti zlepek tipa 2 $B(v|X_n)$, kjer je X_n množica smeri tipa 2, za katero velja: $X_n = \{e_1^{<i>}, e_2^{<j>}, e_3^{<k>}, e_4^{<l>}\}$.

Škatlasti zlepki tipa 2 imajo podobne lastnosti, kot škatlasti zlepki tipa 1. Iz prejšnjega razdelka lahko hitro pokažemo, da imajo škatlasti zlepki tipa 2 nosilec na afini kocki $[X_n]$ in so pozitivni v njeni notranjosti.

Če je $n \geq 5$ in je X_n množica smeri tipa 2, potem formula v 1 drži.

Izrek 9 *Naj bo* $X_n = \{e_1^{<i>}, e_2^{<j>}, e_3^{<k>}, e_4^{<l>}\}$ *množica smeri tipa 2 in* $i + j + k + l = n$*. Potem* $B_{ijkl} := B(\cdot|X_n) \in S_{n-2}^r(\Delta_{II})$*, kjer je* $r := r(X_n) = min\{i+k+l, j+k+l, i+j+k, i+j+l\} - 2$*.*

Izrek 10 *Za vse gladke funkcije* $f \in C(\mathbb{R}^2)$ *velja:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} B(v|X_n)f(v)dv = \int_{[0,1]^n} f(\sum_{i=1}^{n} t_i v_i)dt_1 dt_2 \ldots dt_n$$

Ker velja zgornji izrek, velja izrek o Fourierovi transformaciji tako za škatlaste zlepke tipa 1 kot za škatlaste zlepke tipa 2.

Velja:

- $B_{1111} := B(\cdot|X_n) \in S_2^1(\Delta_{II})$
- $B_{2111} := B(\cdot|X_n) \in S_3^1(\Delta_{II})$
- $B_{2211} := B(\cdot|X_n) \in S_4^2(\Delta_{II})$
- $B_{2221} := B(\cdot|X_n) \in S_5^3(\Delta_{II})$
- $B_{2222} := B(\cdot|X_n) \in S_6^2(\Delta_{II})$