

**TUGAS**  
**CLUSTERING MACHINE LEARNING**  
**MENGGUNAKAN HIERARKIS DAN *K-MEANS***  
**MATA KULIAH MACHINE LEARNING**  
**KELAS C**



**DISUSUN OLEH:**  
**SANDRIA AMELIA PUTRI**  
**21083010005**

**DOSEN PENGAMPU:**  
**AVIOLLA TERZA DAMALIANA, S.SI., M.STAT**  
**DR. ENG. IR. ANGGRAINI PUSPITA SARI., ST., MT.**

**PROGRAM STUDI SAINS DATA**  
**FAKULTAS ILMU KOMPUTER**  
**UNIVERSITAS PEMBANGUNAN NASIONAL "VETERAN"**  
**JAWA TIMUR**  
**2023**

**1. Gunakan Single, Complete, dan Average Linkage untuk mengelompokkan data dan gambarkan dengan dendrogram data berikut ini:**

**(0 0 1 3 3 6 7 9 10 10)**

➤ Tabel dataset dengan 10 data yang akan dikelompokkan menggunakan metode AHC.

No	Data
1	0
2	0
3	1
4	3
5	3
6	6
7	7
8	9
9	10
10	10

➤ Menghitung jarak pada semua pasangan data dengan menggunakan rumus jarak Manhattan / Cityblock:

$$d_{cityblock} = \sum_j^n |x_j - y_j|$$

Berikut merupakan hasil perhitungan jarak pada semua pasangan data:

$$\begin{aligned}
 d(1,1) &= \sum_{j=1}^1 |x_j - y_j| = |0 - 0| = 0 & d(3,9) &= |1 - 10| = 9 \\
 d(1,2) &= |0 - 0| = 0 & d(3,10) &= |1 - 10| = 9 \\
 d(1,3) &= |0 - 1| = 1 & d(4,4) &= |3 - 3| = 0 \\
 d(1,4) &= |0 - 3| = 3 & d(4,5) &= |3 - 3| = 0 \\
 d(1,5) &= |0 - 3| = 3 & d(4,6) &= |3 - 6| = 3 \\
 d(1,6) &= |0 - 6| = 6 & d(4,7) &= |3 - 7| = 4 \\
 d(1,7) &= |0 - 7| = 7 & d(4,8) &= |3 - 9| = 6 \\
 d(1,8) &= |0 - 9| = 9 & d(4,9) &= |3 - 10| = 7 \\
 d(1,9) &= |0 - 10| = 10 & d(4,10) &= |3 - 10| = 7 \\
 d(1,10) &= |0 - 10| = 10 & d(5,5) &= |3 - 3| = 0 \\
 d(2,2) &= |0 - 0| = 0 & d(5,6) &= |3 - 6| = 3 \\
 d(2,3) &= |0 - 1| = 1 & d(5,7) &= |3 - 7| = 4 \\
 d(2,4) &= |0 - 3| = 3 & d(5,8) &= |3 - 9| = 6 \\
 d(2,5) &= |0 - 3| = 3 & d(5,9) &= |3 - 10| = 7 \\
 d(2,6) &= |0 - 6| = 6 & d(5,10) &= |3 - 10| = 7 \\
 d(2,7) &= |0 - 7| = 7 & d(6,6) &= |6 - 6| = 0 \\
 d(2,8) &= |0 - 9| = 9 & d(6,7) &= |6 - 7| = 1 \\
 d(2,9) &= |0 - 10| = 10 & d(6,8) &= |6 - 9| = 3 \\
 d(2,10) &= |0 - 10| = 10 & d(6,9) &= |6 - 10| = 4 \\
 d(3,3) &= |1 - 1| = 0 & d(6,10) &= |6 - 10| = 4 \\
 d(3,4) &= |1 - 3| = 2 & d(7,7) &= |7 - 7| = 0 \\
 d(3,5) &= |1 - 3| = 2 & d(7,8) &= |7 - 9| = 2 \\
 d(3,6) &= |1 - 6| = 5 & d(7,9) &= |7 - 10| = 3 \\
 d(3,7) &= |1 - 7| = 6 & d(7,10) &= |7 - 10| = 3 \\
 d(3,8) &= |1 - 9| = 8 & d(8,8) &= |9 - 9| = 0 \\
 & & d(8,9) &= |9 - 10| = 1
 \end{aligned}$$

$$d(8,10) = |9 - 10| = 1$$

$$d(9,10) = |10 - 10| = 0$$

$$d(9,9) = |10 - 10| = 0$$

$$d(10,10) = |10 - 10| = 0$$

Setelah melakukan perhitungan maka didapat hasil matriks jarak berikut ini:

Dman	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
2	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3	1	1	0	2	2	5	6	8	9	9
4	3	3	2	0	0	3	4	6	7	7
5	3	3	2	0	0	3	4	6	7	7
6	6	6	5	3	3	0	1	3	4	4
7	7	7	6	4	4	1	0	2	3	3
8	9	9	8	6	6	3	2	0	1	1
9	10	10	9	7	7	4	3	1	0	0
10	10	10	9	7	7	4	3	1	0	0

### Single Linkage

- Dengan memperlakukan data sebagai kelompok, selanjutnya pilih jarak dua kelompok yang terkecil.

Dman	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
2	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3	1	1	0	2	2	5	6	8	9	9
4	3	3	2	0	0	3	4	6	7	7
5	3	3	2	0	0	3	4	6	7	7
6	6	6	5	3	3	0	1	3	4	4
7	7	7	6	4	4	1	0	2	3	3
8	9	9	8	6	6	3	2	0	1	1
9	10	10	9	7	7	4	3	1	0	0
10	10	10	9	7	7	4	3	1	0	0

$$\min(D_{man}) = \min(d_{12}) = 0$$

Terpilih kelompok 1 dan 2, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok (1 dan 2) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan 10.

$$d_{(12)3} = \min\{d_{13}, d_{23}\} = \min\{1, 1\} = 1$$

$$d_{(12)4} = \min\{d_{14}, d_{24}\} = \min\{3, 3\} = 3$$

$$d_{(12)5} = \min\{d_{15}, d_{25}\} = \min\{3, 3\} = 3$$

$$d_{(12)6} = \min\{d_{16}, d_{26}\} = \min\{6, 6\} = 6$$

$$d_{(12)7} = \min\{d_{17}, d_{27}\} = \min\{7, 7\} = 7$$

$$d_{(12)8} = \min\{d_{18}, d_{28}\} = \min\{9, 9\} = 9$$

$$d_{(12)9} = \min\{d_{19}, d_{29}\} = \min\{10, 10\} = 10$$

$$d_{(12)10} = \min\{d_{110}, d_{210}\} = \min\{10, 10\} = 10$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok 1 dan 2, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (12) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	<del>0</del>	<del>0</del>	1	3	3	6	7	9	10	10

2	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3	1		0	2	2	5	6	8	9	9
4	3	3	2	0	0	3	4	6	7	7
5	3	3	2	0	0	3	4	6	7	7
6	6	6	5	3	3	0	1	3	4	4
7	7	7	6	4	4	1	0	2	3	3
8	9	9	8	6	6	3	2	0	1	1
9	10	10	9	7	7	4	3	1	0	0
10	10	10	9	7	7	4	3	1	0	0



Dman	(12)	3	4	5	6	7	8	9	10
(12)	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3	1	0	2	2	5	6	8	9	9
4	3	2	0	0	3	4	6	7	7
5	3	2	0	0	3	4	6	7	7
6	6	5	3	3	0	1	3	4	4
7	7	6	4	4	1	0	2	3	3
8	9	8	6	6	3	2	0	1	1
9	10	9	7	7	4	3	1	0	0
10	10	9	7	7	4	3	1	0	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{45}) = 0$$

Terpilih kelompok 4 dan 5, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok (4 dan 5) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (12), 3, 6, 7, 8, 9 dan 10.

$$d_{(45)(12)} = \min\{d_{41}, d_{42}, d_{51}, d_{52}\} = \min\{3, 3, 3, 3\} = 3$$

$$d_{(45)3} = \min\{d_{43}, d_{53}\} = \min\{2, 2\} = 2$$

$$d_{(45)6} = \min\{d_{46}, d_{56}\} = \min\{3, 3\} = 3$$

$$d_{(45)7} = \min\{d_{47}, d_{57}\} = \min\{4, 4\} = 4$$

$$d_{(45)8} = \min\{d_{48}, d_{58}\} = \min\{6, 6\} = 6$$

$$d_{(45)9} = \min\{d_{49}, d_{59}\} = \min\{7, 7\} = 7$$

$$d_{(45)10} = \min\{d_{410}, d_{510}\} = \min\{7, 7\} = 7$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok 4 dan 5, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (45) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(12)	3	4	5	6	7	8	9	10
(12)	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3	1	0	2	2	5	6	8	9	9
4	3	2	0	0	3	4	6	7	7
5	3	2	0	0	3	4	6	7	7
6	6	5	3	3	0	1	3	4	4
7	7	6	4	4	1	0	2	3	3
8	9	8	6	6	3	2	0	1	1
9	10	9	7	7	4	3	1	0	0
10	10	9	7	7	4	3	1	0	0



Dman	(45)	(12)	3	6	7	8	9	10
------	------	------	---	---	---	---	---	----

(45)	0	3	2	3	4	6	7	7
(12)	3	0	1	6	7	9	10	10
3	2	1	0	5	6	8	9	9
6	3	6	5	0	1	3	4	4
7	4	7	6	1	0	2	3	3
8	6	9	8	3	2	0	1	1
9	7	10	9	4	3	1	0	0
10	7	10	9	4	3	1	0	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{910}) = 0$$

Terpilih kelompok 9 dan 10, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok (9 dan 10) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (45), (12), 3, 6, 7 dan 8.

$$d_{(910)(45)} = \min\{d_{94}, d_{95}, d_{104}, d_{105}\} = \min\{7, 7, 7, 7\} = 7$$

$$d_{(910)(12)} = \min\{d_{91}, d_{92}, d_{101}, d_{102}\} = \min\{10, 10, 10, 10\} = 10$$

$$d_{(910)3} = \min\{d_{93}, d_{103}\} = \min\{9, 9\} = 9$$

$$d_{(910)6} = \min\{d_{96}, d_{106}\} = \min\{4, 4\} = 4$$

$$d_{(910)7} = \min\{d_{97}, d_{107}\} = \min\{3, 3\} = 3$$

$$d_{(910)8} = \min\{d_{98}, d_{108}\} = \min\{1, 1\} = 1$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok 9 dan 10, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (910) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(45)	(12)	3	6	7	8	9	10
(45)	0	3	2	3	4	6	7	7
(12)	3	0	1	6	7	9	10	10
3	2	1	0	5	6	8	9	9
6	3	6	5	0	1	3	4	4
7	4	7	6	1	0	2	3	3
8	6	9	8	3	2	0	1	1
9	7	10	9	4	3	1	0	0
10	7	10	9	4	3	1	0	0



Dman	(910)	(45)	(12)	3	6	7	8
(910)	0	7	10	9	4	3	1
(45)	7	0	3	2	3	4	6
(12)	10	3	0	1	6	7	9
3	9	2	1	0	5	6	8
6	4	3	6	5	0	1	3
7	3	4	7	6	1	0	2
8	1	6	9	8	3	2	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(12)3}) = 1$$

Terpilih kelompok (12) dan 3, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok ((12) dan 3) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (910), (45), 6, 7 dan 8.

$$d_{(123)(910)} = \min\{d_{19}, d_{110}, d_{29}, d_{210}, d_{39}, d_{310}\} = \min\{10, 10, 10, 10, 9, 9\} = 9$$

$$d_{(123)(45)} = \min\{d_{14}, d_{15}, d_{24}, d_{25}, d_{34}, d_{35}\} = \min\{3, 3, 3, 3, 2, 2\} = 2$$

$$d_{(123)6} = \min\{d_{16}, d_{26}, d_{36}\} = \min\{6, 6, 5\} = 5$$

$$d_{(123)7} = \min\{d_{17}, d_{27}, d_{37}\} = \min\{7, 7, 6\} = 6$$

$$d_{(123)8} = \min\{d_{18}, d_{28}, d_{38}\} = \min\{9, 9, 8\} = 8$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok (12) dan 3, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (123) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(910)	(45)	(12)	3	6	7	8
(910)	0	7	10	9	4	3	1
(45)	7	0	3	2	3	4	6
(12)	10	3	0	1	6	7	9
3	9	2	1	0	5	6	8
6	4	3	6	5	0	1	3
7	3	4	7	6	1	0	2
8	1	6	9	8	3	2	0

Dman	(123)	(910)	(45)	6	7	8
(123)	0	9	2	5	6	8
(910)	9	0	7	4	3	1
(45)	2	7	0	3	4	6
6	5	4	3	0	1	3
7	6	3	4	1	0	2
8	8	1	6	3	2	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(67)}) = 1$$

Terpilih kelompok 6 dan 7, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok (6 dan 7) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (123), (910), (45) dan 8.

$$d_{(67)(123)} = \min\{d_{61}, d_{62}, d_{63}, d_{71}, d_{72}, d_{73}\} = \min\{6, 6, 5, 7, 7, 6\} = 5$$

$$d_{(67)(910)} = \min\{d_{69}, d_{610}, d_{79}, d_{710}\} = \min\{4, 4, 3, 3\} = 3$$

$$d_{(67)(45)} = \min\{d_{64}, d_{65}, d_{74}, d_{75}\} = \min\{3, 3, 4, 4\} = 3$$

$$d_{(67)8} = \min\{d_{68}, d_{78}\} = \min\{3, 2\} = 2$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok 6 dan 7, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (67) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(123)	(910)	(45)	6	7	8
(123)	0	9	2	5	6	8
(910)	9	0	7	4	3	1
(45)	2	7	0	3	4	6
6	5	4	3	0	1	3
7	6	3	4	1	0	2
8	8	1	6	3	2	0

Dman	(67)	(123)	(910)	(45)	8
(67)	0	5	3	3	2
(123)	5	0	9	2	8

(910)	3	9	0	7	1
(45)	3	2	7	0	6
8	2	8	1	6	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(910)8}) = 1$$

Terpilih kelompok (910) dan 8, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok ((910) dan 8) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (67), (123) dan (45).

$$d_{(9108)(67)} = \min\{d_{96}, d_{97}, d_{106}, d_{107}, d_{86}, d_{87}\} = \min\{4, 3, 4, 3, 3, 2\} = 2$$

$$d_{(9108)(123)} = \min\{d_{91}, d_{92}, d_{93}, d_{101}, d_{102}, d_{103}, d_{81}, d_{82}, d_{83}\} = \min\{10, 10, 9, 10, 10, 9, 9, 9, 8\} = 8$$

$$d_{(9108)(45)} = \min\{d_{94}, d_{95}, d_{104}, d_{105}, d_{84}, d_{85}\} = \min\{7, 7, 7, 7, 6, 6\} = 6$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok (910) dan 8, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (9108) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(67)	(123)	(910)	(45)	8
(67)	0	5	3	3	2
(123)	5	0	9	2	8
(910)	3	9	0	7	1
(45)	3	2	7	0	6
8	2	8	1	6	0

Dman	(9108)	(67)	(123)	(45)
(9108)	0	2	8	6
(67)	2	0	5	3
(123)	8	5	0	2
(45)	6	3	2	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(123)(45)}) = 2$$

Terpilih kelompok (123) dan (45), sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok ((123) dan (45)) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (9108) dan (67).

$$d_{(12345)(9108)} =$$

$$\min\{d_{19}, d_{110}, d_{18}, d_{29}, d_{210}, d_{28}, d_{39}, d_{310}, d_{38}, d_{49}, d_{410}, d_{48}, d_{59}, d_{510}, d_{58}\} =$$

$$\min\{10, 10, 9, 10, 10, 9, 9, 8, 7, 7, 6, 7, 7, 6\} = 6$$

$$d_{(12345)(67)} = \min\{d_{16}, d_{17}, d_{26}, d_{27}, d_{36}, d_{37}, d_{46}, d_{47}, d_{56}, d_{57}\} =$$

$$\min\{6, 7, 6, 7, 5, 6, 3, 4, 3, 4\} = 3$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok (123) dan (45), serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (12345) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(9108)	(67)	(123)	(45)
(9108)	0	2	8	6
(67)	2	0	5	3
(123)	8	5	0	2
(45)	6	3	2	0

Dman	(12345)	(9108)	(67)
(12345)	0	6	3
(9108)	6	0	2
(67)	3	2	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(67)(9108)}) = 2$$

Terpilih kelompok (67) dan (9108), sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok ((67) dan (9108)) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (12345).

$$d_{(679108)(12345)} = \min \left\{ \begin{matrix} d_{61}, d_{62}, d_{63}, d_{64}, d_{65}, d_{71}, d_{72}, d_{73}, d_{74}, d_{75}, d_{91}, d_{92}, d_{93}, \\ d_{94}, d_{95}, d_{101}, d_{102}, d_{103}, d_{104}, d_{105}, d_{81}, d_{82}, d_{83}, d_{84}, d_{85} \end{matrix} \right\} = \min\{6,6,5,3,3,7,7,6,4,4,10,10,9,7,7,10,10,9,7,7,9,9,8,6,6\} = 3$$

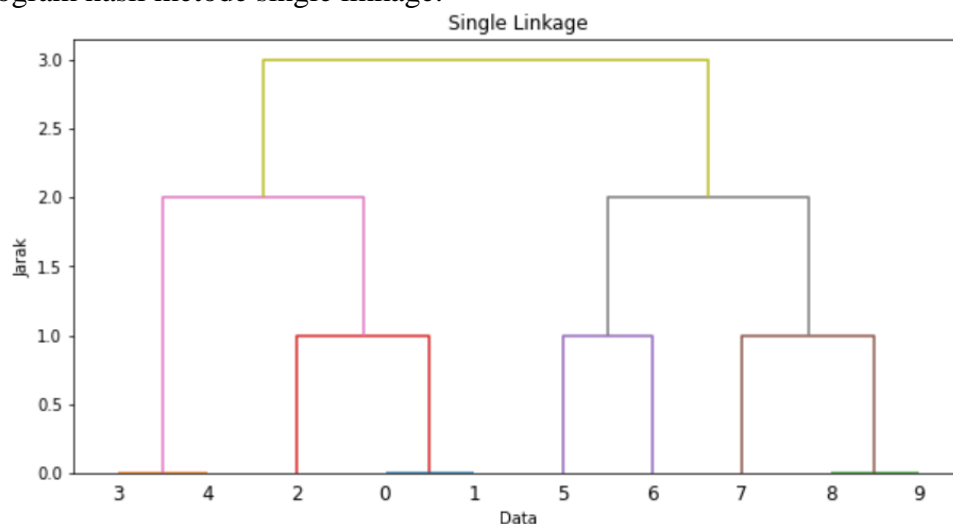
- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok (67) dan (9108), serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (679108) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(12345)	(9108)	(67)
(12345)	0	6	3
(9108)	6	0	2
(67)	3	2	0



Dman	(12345)	(679108)
(12345)	0	3
(679108)	3	0

- Jadi kelompok (12345) dan (679108) digabung untuk menjadi kelompok tunggal dari sepuluh data, yaitu kelompok (12345679108) dengan jarak terdekat 3. Berikut Dendrogram hasil metode single linkage:



### Complete Linkage

- Dengan memperlakukan data sebagai kelompok, selanjutnya pilih jarak dua kelompok yang terkecil.

Dman	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
2	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3	1	1	0	2	2	5	6	8	9	9



4	3	3	2	0	0	3	4	6	7	7
5	3	3	2	0	0	3	4	6	7	7
6	6	6	5	3	3	0	1	3	4	4
7	7	7	6	4	4	1	0	2	3	3
8	9	9	8	6	6	3	2	0	1	1
9	10	10	9	7	7	4	3	1	0	0
10	10	10	9	7	7	4	3	1	0	0

$$\min(D_{man}) = \min(d_{12}) = 0$$

Terpilih kelompok 1 dan 2, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok (1 dan 2) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan 10.

$$d_{(12)3} = \max\{d_{13}, d_{23}\} = \max\{1, 1\} = 1$$

$$d_{(12)4} = \max\{d_{14}, d_{24}\} = \max\{3, 3\} = 3$$

$$d_{(12)5} = \max\{d_{15}, d_{25}\} = \max\{3, 3\} = 3$$

$$d_{(12)6} = \max\{d_{16}, d_{26}\} = \max\{6, 6\} = 6$$

$$d_{(12)7} = \max\{d_{17}, d_{27}\} = \max\{7, 7\} = 7$$

$$d_{(12)8} = \max\{d_{18}, d_{28}\} = \max\{9, 9\} = 9$$

$$d_{(12)9} = \max\{d_{19}, d_{29}\} = \max\{10, 10\} = 10$$

$$d_{(12)10} = \max\{d_{110}, d_{210}\} = \max\{10, 10\} = 10$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok 1 dan 2, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (12) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
2	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3			0	2	2	5	6	8	9	9
4				0	0	3	4	6	7	7
5					0	3	4	6	7	7
6						0	1	3	4	4
7							0	2	3	3
8								0	1	1
9									0	0
10										0



Dman	(12)	3	4	5	6	7	8	9	10
(12)	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3	1	0	2	2	5	6	8	9	9
4	3	2	0	0	3	4	6	7	7
5	3	2	0	0	3	4	6	7	7
6	6	5	3	3	0	1	3	4	4
7	7	6	4	4	1	0	2	3	3
8	9	8	6	6	3	2	0	1	1
9	10	9	7	7	4	3	1	0	0
10	10	9	7	7	4	3	1	0	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{45}) = 0$$

Terpilih kelompok 4 dan 5, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok (4 dan 5) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (12), 3, 6, 7, 8, 9 dan 10.

$$d_{(45)(12)} = \max\{d_{41}, d_{42}, d_{51}, d_{52}\} = \max\{3, 3, 3, 3\} = 3$$

$$d_{(45)3} = \max\{d_{43}, d_{53}\} = \max\{2, 2\} = 2$$

$$d_{(45)6} = \max\{d_{46}, d_{56}\} = \max\{3, 3\} = 3$$

$$d_{(45)7} = \max\{d_{47}, d_{57}\} = \max\{4, 4\} = 4$$

$$d_{(45)8} = \max\{d_{48}, d_{58}\} = \max\{6, 6\} = 6$$

$$d_{(45)9} = \max\{d_{49}, d_{59}\} = \max\{7, 7\} = 7$$

$$d_{(45)10} = \max\{d_{410}, d_{510}\} = \max\{7, 7\} = 7$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok 4 dan 5, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (45) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(12)	3	4	5	6	7	8	9	10
(12)	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3	1	0	2	2	5	6	8	9	9
4	3	2	0	0	3	4	6	7	7
5	3	2	0	0	3	4	6	7	7
6	6	5	3	3	0	1	3	4	4
7	7	6	4	4	1	0	2	3	3
8	9	8	6	6	3	2	0	1	1
9	10	9	7	7	4	3	1	0	0
10	10	9	7	7	4	3	1	0	0

Dman	(45)	(12)	3	6	7	8	9	10
(45)	0	3	2	3	4	6	7	7
(12)	3	0	1	6	7	9	10	10
3	2	1	0	5	6	8	9	9
6	3	6	5	0	1	3	4	4
7	4	7	6	1	0	2	3	3
8	6	9	8	3	2	0	1	1
9	7	10	9	4	3	1	0	0
10	7	10	9	4	3	1	0	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{910}) = 0$$

Terpilih kelompok 9 dan 10, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok (9 dan 10) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (45), (12), 3, 6, 7 dan 8.

$$d_{(910)(45)} = \max\{d_{94}, d_{95}, d_{104}, d_{105}\} = \max\{7, 7, 7, 7\} = 7$$

$$d_{(910)(12)} = \max\{d_{91}, d_{92}, d_{101}, d_{102}\} = \max\{10, 10, 10, 10\} = 10$$

$$d_{(910)3} = \max\{d_{93}, d_{103}\} = \max\{9, 9\} = 9$$

$$d_{(910)6} = \max\{d_{96}, d_{106}\} = \max\{4, 4\} = 4$$

$$d_{(910)7} = \max\{d_{97}, d_{107}\} = \max\{3, 3\} = 3$$

$$d_{(910)8} = \max\{d_{98}, d_{108}\} = \max\{1, 1\} = 1$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok 9 dan 10, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (910) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(45)	(12)	3	6	7	8	9	10
(45)	0	3	2	3	4	6	7	7
(12)	3	0	1	6	7	9	10	10
3	2	1	0	5	6	8	9	9
6	3	6	5	0	1	3	4	4
7	4	7	6	1	0	2	3	3
8	6	9	8	3	2	0		
9	7	10	9	4	3	1	0	0
10	7	10	9	4	3	1	0	0

Dman	(910)	(45)	(12)	3	6	7	8
(910)	0	7	10	9	4	3	1
(45)	7	0	3	2	3	4	6
(12)	10	3	0	1	6	7	9
3	9	2	1	0	5	6	8
6	4	3	6	5	0	1	3
7	3	4	7	6	1	0	2
8	1	6	9	8	3	2	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(12)3}) = 1$$

Terpilih kelompok (12) dan 3, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok ((12) dan 3) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (910), (45), 6, 7 dan 8.

$$d_{(123)(910)} = \max\{d_{19}, d_{110}, d_{29}, d_{210}, d_{39}, d_{310}\} = \max\{10, 10, 10, 10, 9, 9\} = 10$$

$$d_{(123)(45)} = \max\{d_{14}, d_{15}, d_{24}, d_{25}, d_{34}, d_{35}\} = \max\{3, 3, 3, 3, 2, 2\} = 3$$

$$d_{(123)6} = \max\{d_{16}, d_{26}, d_{36}\} = \max\{6, 6, 5\} = 6$$

$$d_{(123)7} = \max\{d_{17}, d_{27}, d_{37}\} = \max\{7, 7, 6\} = 7$$

$$d_{(123)8} = \max\{d_{18}, d_{28}, d_{38}\} = \max\{9, 9, 8\} = 9$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok (12) dan 3, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (123) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(910)	(45)	(12)	3	6	7	8
(910)	0	7	10	9	4	3	1
(45)	7	0	3	2	3	4	6
(12)	10	3	0		6	7	9
3	9	2		0	5	6	8
6	4	3	6	5	0	1	3
7	3	4	7	6	1	0	2
8	1	6	9	8	3	2	0

Dman	(123)	(910)	(45)	6	7	8
(123)	0	10	3	6	7	9
(910)	10	0	7	4	3	1
(45)	3	7	0	3	4	6
6	6	4	3	0	1	3
7	7	3	4	1	0	2
8	9	1	6	3	2	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(67)}) = 1$$

Terpilih kelompok 6 dan 7, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok (6 dan 7) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (123), (910), (45) dan 8.

$$d_{(67)(123)} = \max\{d_{61}, d_{62}, d_{63}, d_{71}, d_{72}, d_{73}\} = \max\{6, 6, 5, 7, 7, 6\} = 7$$

$$d_{(67)(910)} = \max\{d_{69}, d_{610}, d_{79}, d_{710}\} = \max\{4, 4, 3, 3\} = 4$$

$$d_{(67)(45)} = \max\{d_{64}, d_{65}, d_{74}, d_{75}\} = \max\{3, 3, 4, 4\} = 4$$

$$d_{(67)8} = \max\{d_{68}, d_{78}\} = \max\{3, 2\} = 3$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok 6 dan 7, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (67) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(123)	(910)	(45)	6	7	8
(123)	0	10	3	6	7	9
(910)	10	0	7	4	3	1
(45)	3	7	0	3	4	6
6	6	4	3	0	1	3
7	7	3	4	1	0	2
8	9	1	6	3	2	0

Dman	(67)	(123)	(910)	(45)	8
(67)	0	7	4	4	3
(123)	7	0	10	3	9
(910)	4	10	0	7	1
(45)	4	3	7	0	6
8	3	9	1	6	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(910)8}) = 1$$

Terpilih kelompok (910) dan 8, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok ((910) dan 8) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (67), (123) dan (45).

$$d_{(9108)(67)} = \max\{d_{96}, d_{97}, d_{106}, d_{107}, d_{86}, d_{87}\} = \max\{4, 3, 4, 3, 3, 2\} = 4$$

$$d_{(9108)(123)} = \max\{d_{91}, d_{92}, d_{93}, d_{101}, d_{102}, d_{103}, d_{81}, d_{82}, d_{83}\} = \max\{10, 10, 9, 10, 10, 9, 9, 9, 8\} = 10$$

$$d_{(9108)(45)} = \max\{d_{94}, d_{95}, d_{104}, d_{105}, d_{84}, d_{85}\} = \max\{7, 7, 7, 7, 6, 6\} = 7$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok (910) dan 8, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (9108) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(67)	(123)	(910)	(45)	8
(67)	0	7	4	4	3
(123)	7	0	9	2	8
(910)	4	9	0	7	1
(45)	4	2	7	0	6
8	3	8	1	6	0

Dman	(9108)	(67)	(123)	(45)
------	--------	------	-------	------

(9108)	0	4	10	7
(67)	4	0	7	4
(123)	10	7	0	2
(45)	7	4	2	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(123)(45)}) = 2$$

Terpilih kelompok (123) dan (45), sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok ((123) dan (45)) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (9108) dan (67).

$$d_{(12345)(9108)} =$$

$$\max\{d_{19}, d_{110}, d_{18}, d_{29}, d_{210}, d_{28}, d_{39}, d_{310}, d_{38}, d_{49}, d_{410}, d_{48}, d_{59}, d_{510}, d_{58}\} =$$

$$\max\{10, 10, 9, 10, 10, 9, 9, 8, 7, 6, 7, 7, 6\} = 10$$

$$d_{(12345)(67)} = \max\{d_{16}, d_{17}, d_{26}, d_{27}, d_{36}, d_{37}, d_{46}, d_{47}, d_{56}, d_{57}\} =$$

$$\max\{6, 7, 6, 7, 5, 6, 3, 4, 3, 4\} = 7$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok (123) dan (45), serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (12345) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(9108)	(67)	(123)	(45)
(9108)	0	4	10	7
(67)	4	0	5	3
(123)	10	5	0	2
(45)	7	3	2	0

Dman	(12345)	(9108)	(67)
(12345)	0	10	7
(9108)	10	0	4
(67)	7	4	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(67)(9108)}) = 4$$

Terpilih kelompok (67) dan (9108), sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok ((67) dan (9108)) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (12345).

$$d_{(679108)(12345)} = \max\{d_{61}, d_{62}, d_{63}, d_{64}, d_{65}, d_{71}, d_{72}, d_{73}, d_{74}, d_{75}, d_{91}, d_{92}, d_{93}, d_{94}, d_{95}, d_{101}, d_{102}, d_{103}, d_{104}, d_{105}, d_{81}, d_{82}, d_{83}, d_{84}, d_{85}\} =$$

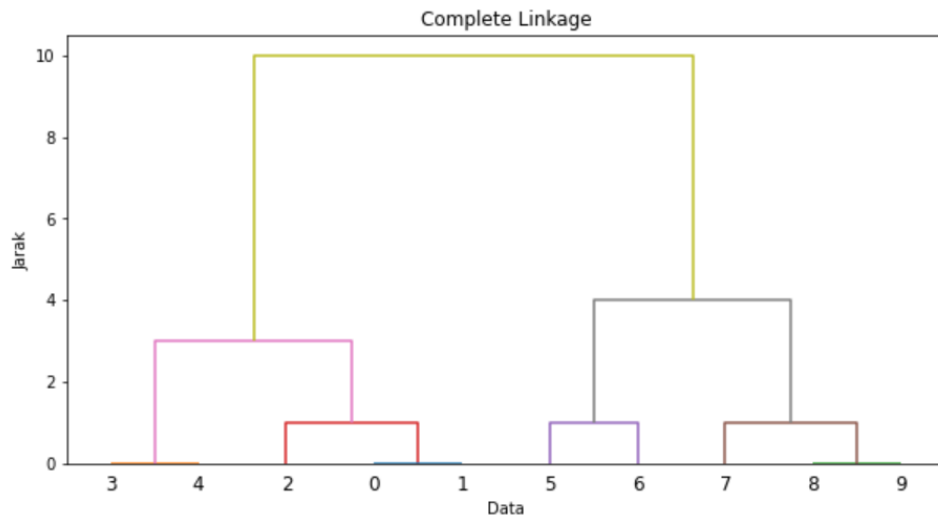
$$\max\{6, 6, 5, 3, 3, 7, 7, 6, 4, 4, 10, 10, 9, 7, 7, 10, 10, 9, 7, 7, 9, 9, 8, 6, 6\} = 10$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok (67) dan (9108), serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (679108) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(12345)	(9108)	(67)
(12345)	0	10	7
(9108)	10	0	4
(67)	7	4	0

Dman	(12345)	(679108)
(12345)	0	10
(679108)	10	0

- Jadi kelompok (12345) dan (679108) digabung untuk menjadi kelompok tunggal dari sepuluh data, yaitu kelompok (12345679108) dengan jarak terdekat 10. Berikut Dendrogram hasil metode complete linkage:



### Average Linkage

- Dengan memperlakukan data sebagai kelompok, selanjutnya pilih jarak dua kelompok yang terkecil.

Dman	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
2	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3	1	1	0	2	2	5	6	8	9	9
4	3	3	2	0	0	3	4	6	7	7
5	3	3	2	0	0	3	4	6	7	7
6	6	6	5	3	3	0	1	3	4	4
7	7	7	6	4	4	1	0	2	3	3
8	9	9	8	6	6	3	2	0	1	1
9	10	10	9	7	7	4	3	1	0	0
10	10	10	9	7	7	4	3	1	0	0

$$\min(D_{man}) = \min(d_{12}) = 0$$

Terpilih kelompok 1 dan 2, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok (1 dan 2) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan 10.

$$d_{(12)3} = \text{average}\{d_{13}, d_{23}\} = \text{average}\{1, 1\} = (1 + 1)/2 = 1$$

$$d_{(12)4} = \text{average}\{d_{14}, d_{24}\} = \text{average}\{3, 3\} = (3 + 3)/2 = 3$$

$$d_{(12)5} = \text{average}\{d_{15}, d_{25}\} = \text{average}\{3, 3\} = (3 + 3)/2 = 3$$

$$d_{(12)6} = \text{average}\{d_{16}, d_{26}\} = \text{average}\{6, 6\} = (6 + 6)/2 = 6$$

$$d_{(12)7} = \text{average}\{d_{17}, d_{27}\} = \text{average}\{7, 7\} = (7 + 7)/2 = 7$$

$$d_{(12)8} = \text{average}\{d_{18}, d_{28}\} = \text{average}\{9, 9\} = (9 + 9)/2 = 9$$

$$d_{(12)9} = \text{average}\{d_{19}, d_{29}\} = \text{average}\{10, 10\} = (10 + 10)/2 = 10$$

$$d_{(12)10} = \text{average}\{d_{110}, d_{210}\} = \text{average}\{10, 10\} = (10 + 10)/2 = 10$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok 1 dan 2, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (12) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
2	0	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3	1	1	0	2	2	5	6	8	9	9
4	3	3	2	0	0	3	4	6	7	7
5	3	3	2	0	0	3	4	6	7	7
6	6	6	5	3	3	0	1	3	4	4
7	7	7	6	4	4	1	0	2	3	3
8	9	9	8	6	6	3	2	0	1	1
9	10	10	9	7	7	4	3	1	0	0
10	10	10	9	7	7	4	3	1	0	0



Dman	(12)	3	4	5	6	7	8	9	10
(12)	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3	1	0	2	2	5	6	8	9	9
4	3	2	0	0	3	4	6	7	7
5	3	2	0	0	3	4	6	7	7
6	6	5	3	3	0	1	3	4	4
7	7	6	4	4	1	0	2	3	3
8	9	8	6	6	3	2	0	1	1
9	10	9	7	7	4	3	1	0	0
10	10	9	7	7	4	3	1	0	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{45}) = 0$$

Terpilih kelompok 4 dan 5, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok (4 dan 5) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (12), 3, 6, 7, 8, 9 dan 10.

$$d_{(45)(12)} = \text{average}\{d_{41}, d_{42}, d_{51}, d_{52}\} = \text{average}\{3, 3, 3, 3\} = (3 + 3 + 3 + 3)/4 = 3$$

$$d_{(45)3} = \text{average}\{d_{43}, d_{53}\} = \text{average}\{2, 2\} = (2 + 2)/2 = 2$$

$$d_{(45)6} = \text{average}\{d_{46}, d_{56}\} = \text{average}\{3, 3\} = (3 + 3)/2 = 3$$

$$d_{(45)7} = \text{average}\{d_{47}, d_{57}\} = \text{average}\{4, 4\} = (4 + 4)/2 = 4$$

$$d_{(45)8} = \text{average}\{d_{48}, d_{58}\} = \text{average}\{6, 6\} = (6 + 6)/2 = 6$$

$$d_{(45)9} = \text{average}\{d_{49}, d_{59}\} = \text{average}\{7, 7\} = (7 + 7)/2 = 7$$

$$d_{(45)10} = \text{average}\{d_{410}, d_{510}\} = \text{average}\{7, 7\} = (7 + 7)/2 = 7$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok 4 dan 5, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (45) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(12)	3	4	5	6	7	8	9	10
(12)	0	1	3	3	6	7	9	10	10
3	1	0	2	2	5	6	8	9	9
4	3	2	0	0	3	4	6	7	7
5	3	2	0	0	3	4	6	7	7
6	6	5	3	3	0	1	3	4	4
7	7	6	4	4	1	0	2	3	3
8	9	8	6	6	3	2	0	1	1
9	10	9	7	7	4	3	1	0	0

10	10	9	7	7	4	3	1	0	0
----	----	---	---	---	---	---	---	---	---

Dman	(45)	(12)	3	6	7	8	9	10
(45)	0	3	2	3	4	6	7	7
(12)	3	0	1	6	7	9	10	10
3	2	1	0	5	6	8	9	9
6	3	6	5	0	1	3	4	4
7	4	7	6	1	0	2	3	3
8	6	9	8	3	2	0	1	1
9	7	10	9	4	3	1	0	0
10	7	10	9	4	3	1	0	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{910}) = 0$$

Terpilih kelompok 9 dan 10, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok (9 dan 10) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (45), (12), 3, 6, 7 dan 8.

$$d_{(910)(45)} = \text{average}\{d_{94}, d_{95}, d_{104}, d_{105}\} = \text{average}\{7, 7, 7, 7\} = (7 + 7 + 7 + 7)/4 = 7$$

$$d_{(910)(12)} = \text{average}\{d_{91}, d_{92}, d_{101}, d_{102}\} = \text{average}\{10, 10, 10, 10\} = (10 + 10 + 10 + 10)/4 = 10$$

$$d_{(910)3} = \text{average}\{d_{93}, d_{103}\} = \text{average}\{9, 9\} = (9 + 9)/2 = 9$$

$$d_{(910)6} = \text{average}\{d_{96}, d_{106}\} = \text{average}\{4, 4\} = (4 + 4)/2 = 4$$

$$d_{(910)7} = \text{average}\{d_{97}, d_{107}\} = \text{average}\{3, 3\} = (3 + 3)/2 = 3$$

$$d_{(910)8} = \text{average}\{d_{98}, d_{108}\} = \text{average}\{1, 1\} = (1 + 1)/2 = 1$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok 9 dan 10, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (910) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(45)	(12)	3	6	7	8	9	10
(45)	0	3	2	3	4	6	7	7
(12)	3	0	1	6	7	9	10	10
3	2	1	0	5	6	8	9	9
6	3	6	5	0	1	3	4	4
7	4	7	6	1	0	2	3	3
8	6	9	8	3	2	0	1	1
9	7	10	9	4	3	1	0	0
10	7	10	9	4	3	1	0	0

Dman	(910)	(45)	(12)	3	6	7	8
(910)	0	7	10	9	4	3	1
(45)	7	0	3	2	3	4	6
(12)	10	3	0	1	6	7	9
3	9	2	1	0	5	6	8
6	4	3	6	5	0	1	3
7	3	4	7	6	1	0	2
8	1	6	9	8	3	2	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(12)3}) = 1$$



Terpilih kelompok (12) dan 3, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok ((12) dan 3) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (910), (45), 6, 7 dan 8.

$$d_{(123)(910)} = \text{average}\{d_{19}, d_{110}, d_{29}, d_{210}, d_{39}, d_{310}\} = \text{average}\{10, 10, 10, 10, 9, 9\} = (10 + 10 + 10 + 10 + 9 + 9)/6 = 9.6$$

$$d_{(123)(45)} = \text{average}\{d_{14}, d_{15}, d_{24}, d_{25}, d_{34}, d_{35}\} = \text{average}\{3, 3, 3, 3, 2, 2\} = (3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2)/6 = 2.6$$

$$d_{(123)6} = \text{average}\{d_{16}, d_{26}, d_{36}\} = \text{average}\{6, 6, 5\} = (6 + 6 + 5)/3 = 5.6$$

$$d_{(123)7} = \text{average}\{d_{17}, d_{27}, d_{37}\} = \text{average}\{7, 7, 6\} = (7 + 7 + 6)/3 = 6.6$$

$$d_{(123)8} = \text{average}\{d_{18}, d_{28}, d_{38}\} = \text{average}\{9, 9, 8\} = (9 + 9 + 8)/3 = 8.6$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok (12) dan 3, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (123) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(910)	(45)	(12)	3	6	7	8
(910)	0	7	10	9	4	3	1
(45)	7	0	3	2	3	4	6
(12)	10	3	0	1	6	7	9
3	9	2	1	0	5	6	8
6	4	3	6	5	0	1	3
7	3	4	7	6	1	0	2
8	1	6	9	8	3	2	0



Dman	(123)	(910)	(45)	6	7	8
(123)	0	9.6	2.6	5.6	6.6	8.6
(910)	9.6	0	7	4	3	1
(45)	2.6	7	0	3	4	6
6	5.6	4	3	0	1	3
7	6.6	3	4	1	0	2
8	8.6	1	6	3	2	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(67)}) = 1$$

Terpilih kelompok 6 dan 7, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok (6 dan 7) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (123), (910), (45) dan 8.

$$d_{(67)(123)} = \text{average}\{d_{61}, d_{62}, d_{63}, d_{71}, d_{72}, d_{73}\} = \text{average}\{6, 6, 5, 7, 7, 6\} = (6 + 6 + 5 + 7 + 7 + 6)/6 = 6.16$$

$$d_{(67)(910)} = \text{average}\{d_{69}, d_{610}, d_{79}, d_{710}\} = \text{average}\{4, 4, 3, 3\} = (4 + 4 + 3 + 3)/4 = 3.5$$

$$d_{(67)(45)} = \text{average}\{d_{64}, d_{65}, d_{74}, d_{75}\} = \text{average}\{3, 3, 4, 4\} = (3 + 3 + 4 + 4)/4 = 3.5$$

$$d_{(67)8} = \text{average}\{d_{68}, d_{78}\} = \text{average}\{3, 2\} = (3 + 2)/2 = 2.5$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok 6 dan 7, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (67) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(123)	(910)	(45)	6	7	8
(123)	0	9.6	2.6	5.6	6.6	8.6

(910)	9.6	0	7	4	3	1
(45)	2.6	7	0	3	4	6
6	5.6	4	3	0	1	3
7	6.6	3	4	0	0	2
8	8.6	1	6	3	2	0

Dman	(67)	(123)	(910)	(45)	8
(67)	0	6.16	3.5	3.5	2.5
(123)	6.16	0	9.6	2.6	8.6
(910)	3.5	9.6	0	7	1
(45)	3.5	2.6	7	0	6
8	2.5	8.6	1	6	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(910)8}) = 1$$

Terpilih kelompok (910) dan 8, sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok ((910) dan 8) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (67), (123) dan (45).

$$d_{(9108)(67)} = \text{average}\{d_{96}, d_{97}, d_{106}, d_{107}, d_{86}, d_{87}\} = \text{average}\{4, 3, 4, 3, 3, 2\} = (4 + 3 + 4 + 3 + 3 + 2)/6 = 3.16$$

$$d_{(9108)(123)} = \text{average}\{d_{91}, d_{92}, d_{93}, d_{101}, d_{102}, d_{103}, d_{81}, d_{82}, d_{83}\} = \text{average}\{10, 10, 9, 10, 10, 9, 9, 9, 8\} = (10 + 10 + 9 + 10 + 10 + 9 + 9 + 9 + 8)/9 = 9.3$$

$$d_{(9108)(45)} = \text{average}\{d_{94}, d_{95}, d_{104}, d_{105}, d_{84}, d_{85}\} = \text{average}\{7, 7, 7, 7, 6, 6\} = (7 + 7 + 7 + 7 + 6 + 6)/6 = 6.6$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok (910) dan 8, serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (9108) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(67)	(123)	(910)	(45)	8
(67)	0	6.16	3.5	3.5	2.5
(123)	6.16	0	9	2	8
(910)	3.5	9	0	7	1
(45)	3.5	2	7	0	6
8	2.5	8	1	6	0

Dman	(9108)	(67)	(123)	(45)
(9108)	0	3.16	9.3	6.6
(67)	3.16	0	6.16	3.5
(123)	9.3	6.16	0	2
(45)	6.6	3.5	2	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(123)(45)}) = 2$$

Terpilih kelompok (123) dan (45), sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok ((123) dan (45)) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (9108) dan (67).

$$d_{(12345)(9108)} = \text{average}\{d_{19}, d_{110}, d_{18}, d_{29}, d_{210}, d_{28}, d_{39}, d_{310}, d_{38}, d_{49}, d_{410}, d_{48}, d_{59}, d_{510}, d_{58}\} =$$

$$\text{average}\{10,10,9,10,10,9,9,9,8,7,7,6,7,7,6\} =$$

$$(10 + 10 + 9 + 10 + 10 + 9 + 9 + 9 + 8 + 7 + 7 + 6 + 7 + 7 + 6)/15 = 8.26$$

$$d_{(12345)(67)} = \text{average}\{d_{16}, d_{17}, d_{26}, d_{27}, d_{36}, d_{37}, d_{46}, d_{47}, d_{56}, d_{57}\} =$$

$$\text{average}\{6,7,6,7,5,6,3,4,3,4\} = (6 + 7 + 6 + 7 + 5 + 6 + 3 + 4 + 3 + 4)/10 = 5.1$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok (123) dan (45), serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (12345) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(9108)	(67)	(123)	(45)
(9108)	0	3.16	9.3	6.6
(67)	3.16	0	5	3
(123)	9.3	5	0	2
(45)	6.6	3	2	0

Dman	(12345)	(9108)	(67)
(12345)	0	8.26	5.1
(9108)	8.26	0	3.16
(67)	5.1	3.16	0

- Selanjutnya dipilih jarak dua kelompok yang terkecil.

$$\min(D_{man}) = \min(d_{(67)(9108)}) = 3.16$$

Terpilih kelompok (67) dan (9108), sehingga kedua kelompok ini digabungkan.

- Menghitung jarak antar kelompok ((67) dan (9108)) dengan kelompok lain yang tersisa, yaitu (12345).

$$d_{(679108)(12345)} = \min\{d_{61}, d_{62}, d_{63}, d_{64}, d_{65}, d_{71}, d_{72}, d_{73}, d_{74}, d_{75}, d_{91}, d_{92}, d_{93}, d_{94}, d_{95}, d_{101}, d_{102}, d_{103}, d_{104}, d_{105}, d_{81}, d_{82}, d_{83}, d_{84}, d_{85}\} =$$

$$\min\{6,6,5,3,3,7,7,6,4,4,10,10,9,7,7,10,10,9,7,7,9,9,8,6,6\} =$$

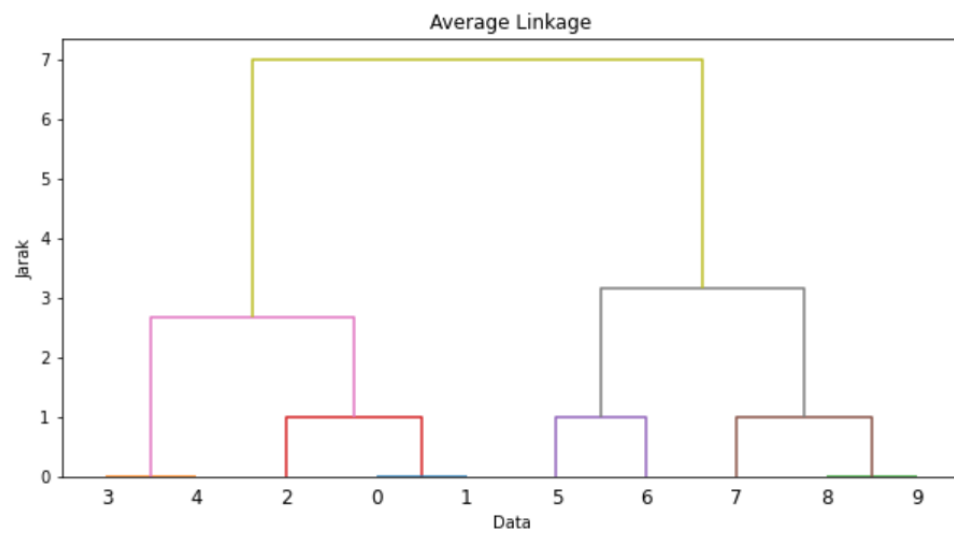
$$(6 + 6 + 5 + 3 + 3 + 7 + 7 + 6 + 4 + 4 + 10 + 10 + 9 + 7 + 7 + 10 + 10 + 9 + 7 + 7 + 9 + 9 + 8 + 6 + 6)/25 = 7$$

- Dengan menghapus baris-baris dan kolom-kolom matriks jarak yang bersesuaian dengan kelompok (67) dan (9108), serta menambahkan baris dan kolom untuk kelompok (679108) didapatkan tabel berikut ini.

Dman	(12345)	(9108)	(67)
(12345)	0	8.26	5.1
(9108)	8.26	0	3.16
(67)	5.1	3.16	0

Dman	(12345)	(679108)
(12345)	0	7
(679108)	7	0

- Jadi kelompok (12345) dan (679108) digabung untuk menjadi kelompok tunggal dari sepuluh data, yaitu kelompok (12345679108) dengan jarak terdekat 7. Berikut Dendogram hasil metode average linkage:



2. Suppose that we have the following data:

$a(2, 0); b(1, 2); c(2, 2); d(3, 2); e(2, 3); f(3, 3); g(2, 4); h(3, 4); i(4, 4); j(3, 5)$

Identify the cluster by applying the *k-means* algorithm, with  $k = 2$ . Try using initial cluster centers as far apart as possible.

Misalkan titik pusat cluster adalah  $m_1 = (1, 1)$  dan  $m_2 = (2, 3)$

Maksimal 3 iterasi

- Tabel dataset dengan 10 data yang akan dikelompokkan menjadi 2 bagian yaitu kelompok 1 dan kelompok 2.

Data	Fitur x	Fitur y
1	2	0
2	1	2
3	2	2
4	3	2
5	2	3
6	3	3
7	2	4
8	3	4
9	4	4
10	3	5

- Titik pusat cluster.

Cluster 1	1	1
Cluster 2	2	3

**Iterasi 1**

- Alokasikan semua data ke dalam cluster terdekat. Hasil dari jarak ke cluster diperoleh dari perhitungan dengan rumus jarak Euclidean:

$$d_{Euclidean}(x, y) = \sqrt{\sum_j^n (x_j - y_j)^2}$$

Berikut merupakan hasil dari alokasi data ke jarak cluster:

$$d(1,1) = \sqrt{\sum_{j=1}^2 (x_j - y_j)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2} = 1.41421$$

$$d(1,2) = \sqrt{(2-2)^2 + (0-3)^2} = 3$$

$$d(2,1) = \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2} = 1$$

$$d(2,2) = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2} = 1.41421$$

$$d(3,1) = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = 1.41421$$

$$d(3,2) = \sqrt{(2-2)^2 + (2-3)^2} = 1$$

$$d(4,1) = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = 2.23607$$

$$d(4,2) = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = 1.41421$$

$$d(5,1) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = 2.23607$$

$$d(5,2) = \sqrt{(2-2)^2 + (3-3)^2} = 0$$

$$d(6,1) = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} = 2.82843$$

$$d(6,2) = \sqrt{(3-2)^2 + (3-3)^2} = 1$$

$$d(7,1) = \sqrt{(2-1)^2 + (4-1)^2} = 3.16228$$

$$d(7,2) = \sqrt{(2-2)^2 + (4-3)^2} = 1$$

$$d(8,1) = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} = 3.60555$$

$$d(8,2) = \sqrt{(3-2)^2 + (4-3)^2} = 1.41421$$

$$d(9,1) = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = 4.24264$$

$$d(9,2) = \sqrt{(4-2)^2 + (4-3)^2} = 2.23607$$

$$d(10,1) = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2} = 4.47214$$

$$d(10,2) = \sqrt{(3-2)^2 + (5-3)^2} = 2.23607$$

Setelah melakukan perhitungan maka didapat hasil seperti berikut ini:

Data	Jarak ke Cluster		Hasil
	C1	C2	
1	1.41421	3	1
2	1	1.41421	1
3	1.41421	1	2
4	2.23607	1.41421	2
5	2.23607	0	2
6	2.82843	1	2
7	3.16228	1	2
8	3.60555	1.41421	2
9	4.24264	2.23607	2
10	4.47214	2.23607	2

### Iterasi 2

- Tentukan Kembali titik pusat cluster yang baru berdasarkan rata-rata yang didapat dari rumus:

$$C = \frac{\text{nilai hasil}}{\text{banyak hasil}}$$

Berikut merupakan hasil dari perhitungan titik pusat cluster yang baru:

$$C1(x) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$C1(y) = \frac{0+2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$C2(x) = \frac{2+3+2+3+2+3+4+3}{8} = \frac{11}{8} = 2.75$$

$$C2(y) = \frac{2+2+3+3+4+4+4+5}{8} = \frac{27}{8} = 3.375$$

Setelah melakukan perhitungan maka didapat nilai cluster baru antara lain:

Cluster 1	1.5	1
Cluster 2	2.75	3.375

- Alokasikan Kembali semua data ke dalam cluster terdekat dengan menggunakan rumus jarak Euclidean. Berikut merupakan hasil dari alokasi data ke jarak cluster:

$$d(1,1) = \sqrt{\sum_{j=1}^2 (x_j - y_j)^2} = \sqrt{(2-1.5)^2 + (0-1)^2} = 1.11803$$

$$d(1,2) = \sqrt{(2-2.75)^2 + (0-3.375)^2} = 3.45733$$

$$d(2,1) = \sqrt{(1-1.5)^2 + (2-1)^2} = 1.11803$$

$$d(2,2) = \sqrt{(1-2.75)^2 + (2-3.375)^2} = 2.225566$$

$$\begin{aligned}
d(3,1) &= \sqrt{(2-1.5)^2 + (2-1)^2} = 1.11803 \\
d(3,2) &= \sqrt{(2-2.75)^2 + (2-3.375)^2} = 1.56625 \\
d(4,1) &= \sqrt{(3-1.5)^2 + (2-1)^2} = 1.80278 \\
d(4,2) &= \sqrt{(3-2.75)^2 + (2-3.375)^2} = 1.39754 \\
d(5,1) &= \sqrt{(2-1.5)^2 + (3-1)^2} = 2.06155 \\
d(5,2) &= \sqrt{(2-2.75)^2 + (3-3.375)^2} = 0.838525 \\
d(6,1) &= \sqrt{(3-1.5)^2 + (3-1)^2} = 2.5 \\
d(6,2) &= \sqrt{(3-2.75)^2 + (3-3.375)^2} = 0.450694 \\
d(7,1) &= \sqrt{(2-1.5)^2 + (4-1)^2} = 3.04138 \\
d(7,2) &= \sqrt{(2-2.75)^2 + (4-3.375)^2} = 0.976281 \\
d(8,1) &= \sqrt{(3-1.5)^2 + (4-1)^2} = 3.3541 \\
d(8,2) &= \sqrt{(3-2.75)^2 + (4-3.375)^2} = 0.673146 \\
d(9,1) &= \sqrt{(4-1.5)^2 + (4-1)^2} = 3.90512 \\
d(9,2) &= \sqrt{(4-2.75)^2 + (4-3.375)^2} = 1.39754 \\
d(10,1) &= \sqrt{(3-1.5)^2 + (5-1)^2} = 4.272 \\
d(10,2) &= \sqrt{(3-2.75)^2 + (5-3.375)^2} = 1.64412
\end{aligned}$$

Setelah melakukan perhitungan maka didapat hasil seperti berikut ini:

Data	Jarak ke Cluster		Hasil
	C1	C2	
1	1.11803	3.45733	1
2	1.11803	2.225566	1
3	1.11803	1.56625	1
4	1.80278	1.39754	2
5	2.06155	0.838525	2
6	2.5	0.450694	2
7	3.04138	0.976281	2
8	3.3541	0.673146	2
9	3.90512	1.39754	2
10	4.272	1.64412	2

### Iterasi 3

- Tentukan Kembali titik pusat cluster yang baru berdasarkan rata-rata. Berikut merupakan hasil dari perhitungan titik pusat cluster yang baru:

$$\begin{aligned}
C1(x) &= \frac{2+1+2}{3} = \frac{5}{3} = 1.6 \\
C1(y) &= \frac{0+2+2}{3} = \frac{4}{3} = 1.3 \\
C2(x) &= \frac{3+2+3+2+3+4+3}{7} = \frac{20}{7} = 2.857 \\
C2(y) &= \frac{2+3+3+4+4+4+5}{7} = \frac{25}{7} = 3.571
\end{aligned}$$

Setelah melakukan perhitungan maka didapat nilai cluster baru antara lain:

Cluster 1	1.6	1.3
Cluster 2	2.857	3.571

- Alokasikan Kembali semua data ke dalam cluster terdekat dengan menggunakan rumus jarak Euclidean. Berikut merupakan hasil dari alokasi data ke jarak cluster:

$$d(1,1) = \sqrt{\sum_{j=1}^2 (x_j - y_j)^2} = \sqrt{(2 - 1.6)^2 + (0 - 1.3)^2} = 1.36015$$

$$d(1,2) = \sqrt{(2 - 2.857)^2 + (0 - 3.571)^2} = 3.6724$$

$$d(2,1) = \sqrt{(1 - 1.6)^2 + (2 - 1.3)^2} = 0.921954$$

$$d(2,2) = \sqrt{(1 - 2.857)^2 + (2 - 3.571)^2} = 2.43238$$

$$d(3,1) = \sqrt{(2 - 1.6)^2 + (2 - 1.3)^2} = 0.806226$$

$$d(3,2) = \sqrt{(2 - 2.857)^2 + (2 - 3.571)^2} = 1.78955$$

$$d(4,1) = \sqrt{(3 - 1.6)^2 + (2 - 1.3)^2} = 1.56525$$

$$d(4,2) = \sqrt{(3 - 2.857)^2 + (2 - 3.571)^2} = 1.57749$$

$$d(5,1) = \sqrt{(2 - 1.6)^2 + (3 - 1.3)^2} = 1.74642$$

$$d(5,2) = \sqrt{(2 - 2.857)^2 + (3 - 3.571)^2} = 1.0298$$

$$d(6,1) = \sqrt{(3 - 1.6)^2 + (3 - 1.3)^2} = 2.20227$$

$$d(6,2) = \sqrt{(3 - 2.857)^2 + (3 - 3.571)^2} = 0.588634$$

$$d(7,1) = \sqrt{(2 - 1.6)^2 + (4 - 1.3)^2} = 2.72947$$

$$d(7,2) = \sqrt{(2 - 2.857)^2 + (4 - 3.571)^2} = 0.958379$$

$$d(8,1) = \sqrt{(3 - 1.6)^2 + (4 - 1.3)^2} = 3.04138$$

$$d(8,2) = \sqrt{(3 - 2.857)^2 + (4 - 3.571)^2} = 0.452206$$

$$d(9,1) = \sqrt{(4 - 1.6)^2 + (4 - 1.3)^2} = 3.61248$$

$$d(9,2) = \sqrt{(4 - 2.857)^2 + (4 - 3.571)^2} = 1.22086$$

$$d(10,1) = \sqrt{(3 - 1.6)^2 + (5 - 1.3)^2} = 3.95601$$

$$d(10,2) = \sqrt{(3 - 2.857)^2 + (5 - 3.571)^2} = 1.43614$$

Setelah melakukan perhitungan maka didapat hasil seperti berikut ini:

Data	Jarak ke Cluster		Hasil
	C1	C2	
1	1.36015	3.6724	1
2	0.921954	2.43238	1
3	0.806226	1.78955	1
4	1.56525	1.57749	1
5	1.74642	1.0298	2
6	2.20227	0.588634	2
7	2.72947	0.958379	2
8	3.04138	0.452206	2
9	3.61248	1.22086	2
10	3.95601	1.43614	2

- Setelah melakukan 3 iterasi, didapatkan bahwa hasil dari pengelompokan cluster masih belum stabil atau konvergen. Sehingga, diperlukan pemrosesan lebih lanjut untuk mengetahui apakah hasil dari iterasi ke-3 sudah stabil atau belum. Berikut merupakan hasil akhir dari pengelompokan dengan melakukan 3 iterasi:

$$C_1 = \{1,2,3,4\} = \{(2,0), (1,2), (2,2), (3,2)\}$$

$$C_2 = \{5,6,7,8,9,10\} = \{(2,3), (3,3), (2,4), (3,4), (4,4), (3,5)\}$$