serie1

Donnerstag, 24. Februar 2022 12:48

Alan Andrey, 20-124-525

Sandro Beer, 19-535-006

Aufgabe 1
Zeichnen Sie eine Wahrheitstabelle für die folgenden Ausdrücke:

$$\neg a \vee b,\ \neg(a \wedge \neg b),\ a \Rightarrow b$$

Was fällt Ihnen auf?

die Implikation ist definiert über $\boxed{(a \Rightarrow b) := (\neg a \vee b)}$

a	b	¬a	¬b	¬a ∨ b	¬(a ∧ ¬b)	a ⇒ b
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Es fällt auf, dass die Spalten für die Ausdrücke $\neg a \vee b$, $\neg(a \wedge \neg b)$ und $a \Rightarrow b$ völlig identisch sind.
Somit sind diese drei logischen Ausdrücke äquivalent.

Aufgabe 2
Erinnerung (vgl. Def 1.10 im Buch):
Ein Prädikat $\varphi(x)$ ist Komprehensionsformel einer Menge M, falls

$$x \in M \text{ gdw. } \varphi(x)$$

für alle Objekte x gilt.

a) Finden Sie Komprehensionsformeln für die folgenden Mengen:

$$A \cup B,\ A \setminus B,\ \emptyset \text{ (leere Menge)}$$

b) Begründen Sie: Falls $\varphi(x)$ Komprehensionsformel von M ist, dann gilt:

$$M = \{x \mid \varphi(x)\}$$

a) für die Menge $A \cup B$:

$$\varphi(x) = x \in A \vee x \in B$$

logisches oder

für die Menge $A \setminus B$:

$$\varphi(x) = x \in A \wedge \neg(x \in B)$$

für die Menge $\emptyset$:

$$\varphi(x) = x \in \mathbb{R} \wedge (x = x + 1)$$

b) Sei also M die Menge aller Objekte x, die folgendes erfüllen:
$x \in M$ gdw. $\varphi(x)$
Weiterhin bezeichnen wir mit $N := \{x \mid \varphi(x)\}$. Wir möchten nun zeigen, dass die Gleichheit zwischen den beiden Mengen M und N gilt, d.h. $M = N$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass wir nun $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ zu zeigen haben.

„$M \subseteq N$": Sei also $x \in M$, d.h. $\varphi(x)$. Somit gilt tatsächlich auch $x \in N$, da die Bedingung $\varphi(x)$ erfüllt ist, dass x in der Menge N enthalten ist.

„$N \subseteq M$": Sei $x \in N$, d.h. $x \in \{x \mid \varphi(x)\}$. Somit muss zwingend $\varphi(x)$ erfüllt sein, ansonsten würde nicht $x \in N$ gelten. Somit gilt aber automatisch auch $x \in M$, da die Voraussetzung $\varphi(x)$ erfüllt ist und $x \in M$ gdw. $\varphi(x)$.

Dies schliesst den Beweis der Aussage in Teilaufgabe b).

Aufgabe 3
Gegeben seien folgende drei Relationen:

- $R_1 = \{(1, a), (1, b), (1, b)\}$
- $R_2 = \{(2, c), (2, d)\}$
- $R_3 = \{(3, e, A), (3, f, B)\}$

Bestimmen Sie:

a) $R_3 \times R_2$
b) $(R_1 \times R_2) \times R_3$
c) $R_1 \times (R_2 \times R_3)$
d) $(R_2 \times R_3) \times R_1$

a) $R_3 \times R_2 = \{(3, e, A, 2, c), (3, e, A, 2, d), (3, f, B, 2, c), (3, f, B, 2, d)$

b) Bemerke, dass in R_1 das Tupel $(1, b)$ doppelt vorkommt.
$(R_1 \times R_2) \times R_3 = \{(1, a, 2, c, 3, e, A), (1, a, 2, c, 3, f, B), (1, a, 2, d, 3, e, A), (1, a, 2, d, 3, f, B)$
$(1, b, 2, c, 3, e, A), (1, b, 2, c, 3, f, B), (1, b, 2, d, 3, e, A), (1, b, 2, d, 3, f, B)\}$

c) Bemerke, dass aufgrund der Assoziativität des flachen Produktes gilt:

$R_1 \times (R_2 \times R_3) = (R_1 \times R_2) \times R_3 = R_1 \times R_2 \times R_3 \Rightarrow$ betrachte b)

d) Verschiebe jeweils die Komponenten aus A_1 in b) an den Schluss.
$(R_2 \times R_3) \times R_1 = \{(2, c, 3, e, A, 1, a), (2, c, 3, f, B, 1, a), (2, d, 3, e, A, 1, a), (2, d, 3, f, B, 1, a)$
$\{(2, c, 3, e, A, 1, b), (2, c, 3, f, B, 1, b), (2, d, 3, e, A, 1, b), (2, d, 3, f, B, 1, b)\}$

Aufgabe 4
Finden Sie zu den folgenden Aussagen jeweils ein Gegenbeispiel!

a) Falls $A \cup B = A \cup C$, dann folgt $B = C$, für beliebige Mengen A, B und C
b) $R \times P = P \times R$ für beliebige Relationen R und P

a) Betrachte $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$
$\Rightarrow A \cup B = \{1, 2\}$, $A \cup C = \{1, 2\}$ aber $B \neq C$

b) Betrachte $R = \{(a)\}$, $P = \{(b)\}$
$\Rightarrow R \times P = \{(a, b)\}$, $P \times R = \{(b, a)\}$
$\Rightarrow R \times P \neq P \times R$ da $(a, b) \neq (b, a)$