

Datenstrukturen und Algorithmen

Übung 8 – Rot-Schwarz-Bäume

Abgabefrist: 28.04.2022, 16:00 h

Verspätete Abgaben werden nicht bewertet.

Theoretische Aufgaben

1. Wir definieren einen *relaxierten Rot-Schwarz-Baum* als einen binären Suchbaum, der die Rot-Schwarz-Eigenschaften 1, 3, 4 und 5 erfüllt. Mit anderen Worten, die Wurzel darf entweder rot oder schwarz sein. Betrachten Sie einen relaxierten Rot-Schwarz-Baum T , dessen Wurzel rot ist. Ist der resultierende Baum ein Rot-Schwarz-Baum, wenn wir die Wurzel von T schwarz färben, aber sonst keine Änderungen an T vornehmen? Begründen Sie, bzw. zeigen Sie ein möglichst kleines Gegenbeispiel. **(1 Punkt)**
2. Zeigen Sie, dass der längste einfache Pfad von einem Knoten x eines Rot-Schwarz-Baumes zu einem nachfolgenden Blatt höchstens die doppelte Länge des kürzesten einfachen Pfades von Knoten x zu einem nachfolgenden Blatt hat. **(1 Punkt)**
3. Wie gross ist die maximale Anzahl innerer Knoten in einem Rot-Schwarz-Baum mit der Schwarz-Höhe h ? Wie gross ist die minimale Anzahl innerer Knoten? **(1 Punkt)**
4. Schreiben Sie die Prozedur RIGHT-ROTATE in Pseudocode. **(1 Punkt)**
5. Zeigen Sie, dass jeder beliebige binäre Suchbaum mit n Knoten durch $\mathcal{O}(n)$ Rotationen in jeden anderen binären Suchbaum mit n Knoten überführt werden kann. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass $n - 1$ Rechtsrotationen ausreichen, um den Baum in eine rechtsläufige Kette zu überführen. Da in der Aufgabe generell nach binären Suchbäumen und nicht nach Rot-Schwarz-Bäumen im speziellen gefragt ist, können die Wächter ignoriert werden und stattdessen angenommen werden, dass die Blätter volle Knoten sind. **(2 Punkte)**
6. Zeichnen Sie diejenigen Rot-Schwarz-Bäume, die durch sukzessives Einfügen der Schlüssel

41, 38, 31, 12, 19, 8

in einen anfangs leeren Baum entstehen. Zeichnen Sie dabei nach jedem INSERT den entstehenden Baum sowohl *vor*, wie auch *während*, und *nach* dem Aufruf von RB-INSERT-FIXUP. **(2 Punkte)**

7. Angenommen, die Schwarz-Höhe jedes Teilbaums $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ in den Abbildungen 13.5 und 13.6 aus dem Buch ist k . Überprüfen Sie, dass Eigenschaft 5 durch die gezeigte Transformation im gesamten Baum erhalten bleibt indem Sie die Abbildungen kopieren und alle Knoten mit ihren jeweiligen Schwarz-Höhen annotieren. **(1 Punkt)**
8. Angenommen, ein Knoten x wird mithilfe von RB-INSERT in einen Rot-Schwarz-Baum eingefügt und unmittelbar danach mit RB-DELETE wieder entfernt. Ist der entstehende Rot-Schwarz-Baum der gleiche wie ursprünglich? Beweisen Sie die Aussage oder finden Sie ein Gegenbeispiel. **(1 Punkt)**