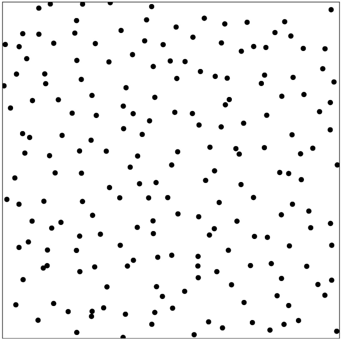
Transport optimal, processus ponctuel déterminantaux et le noyau de Bergman

William Driot

RECH202

Processus ponctuels



Un processus ponctuel est une variable aléatoire à valeur dans l'espaces des « configurations »(= parties localement finies, de $\mathbf{C}$ par exemple muni de la tribu engendrée par le topologie de la convergence vague).

Définition :
Un processus ponctuel sur E est **déterminantal** de noyau $k : E^2 \to \mathbf{C}$ si ses fonctions de corrélation s'écrivent :

$$\rho_n(x_1, \ldots, x_n) = \det(k(x_i, x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

où $k : E^2 \to \mathbf{C}$ est une fonction L^2.

Théorème : (fondamental)
Considérons un DPP de noyau k, dont les valeurs propres sont dans $[0,1]$.
D'après le théorème de Mercer, on peut écrire

$$k(x,y) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \lambda_i \phi_i(x) \overline{\phi_i(y)}$$

où les $(\lambda_i)_{i \in I}$ sont les valeurs propres de K dans $[0,1]$.

La loi induite par k est la même que celle induite en tirant $(B_i)_{i \in I}$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs λ_i, puis la loi induite par

$$k_B(x,y) = \sum_{j \in I} B_j \phi_j(x) \overline{\phi_j(y)}$$

Noyaux de Ginibre et Bergman

Noyau de Ginibre sur $E = \mathbf{C}$:

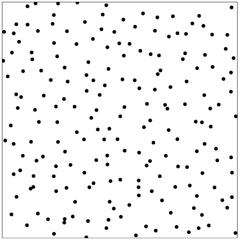
$$k(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{x\overline{y}} e^{-\frac{1}{2}(|x^2|+|y|^2)} = \sum_{n\in\mathbf{N}} \phi_n(x)\overline{\phi_n(y)}$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n!}} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} z^n$$

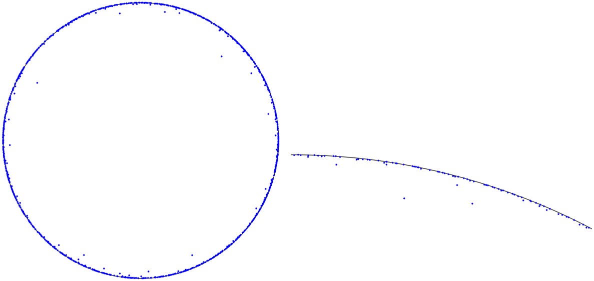
Noyau de Bergman sur $E = \mathcal{B}(0,1) \subset \mathbf{C}$:

$$k(x,y) = \frac{1}{\pi(1-x\overline{y})^2} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(x\overline{y})^k$$

Noyaux de Ginibre et Bergman



Ginibre



Bergman

Simulation

Problème : DPPs stationnaires (Ginibre) : les points s'étendent sur $\mathbf{C}$ tout entier.

Solution : Restriction à une partie Λ, opération mathématique qui construit une variante du DPP pour laquelle il n'y a que des points dans Λ.

Problème : ces DPPs présentent une infinité de points presque sûrement.

Solution : Troncation : On considère l'écriture de Mercer $\sum_{k=0}^{N-1}$ au lieu de $\sum_{n=0}^{\infty}$
Question : Ils sont donc impossibles à simuler stricto-censu. Mais on simule des processus différents ! Ce ne sont plus les mêmes lois !

$\rightarrow$ **Quelle sont les pertes induites par de telles modifications ?**

Théorème. Soit $\mathcal{B}(0, R)$ le disque de $\mathbf{C}$ de centre 0 et de rayon R. On peut (et c'est assez rare pour le souligner) calculer explicitement les valeurs propres et les fonctions propres, et donc la décomposition de Mercer du noyau $k^R(x, y)$ du DPP de Bergman retreint à $\mathcal{B}(0, R)$:

$$k^R(x, y) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n^R \phi_n^R(x) \overline{\phi_n^R(y)},$$

où les valeurs propres sont les

$$\lambda_k^R = R^{2k+2},$$

et les fonctions propres

$$\phi_k^R : x \mapsto \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} \frac{1}{R^{k+1}} x^k.$$

Cet opérateur restreint est à trace donc il présente un nombre *fini* de points p.s. !

Troncation du Bergman projeté

Rappel : On ne peut pas simuler un nombre infini de variables aléatoires de Bernoulli. Où s'arrêter alors ?

Théorème : Soit

$$N_R := \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n+2} = \frac{R^2}{(1-R)(1+R)}.$$

Soit $\mathfrak{S}^R$ la loi de Bergman restreint au disque compact de rayon R centré en 0, et $\mathfrak{S}^R_\alpha$ la loi de sa troncation à α points. Si on tronque à βN_R points, on a

$$\mathcal{W}_{KR}(\mathfrak{S}^R, \mathfrak{S}^R_{\beta N_R}) \leqslant N_R e^{-2\beta g(R)}$$

où $g(R) = \frac{R^2}{1+R}$
Notations : $\mathfrak{S}^R$ = Bergman restreint à $\mathcal{B}(0, R)$, $\mathfrak{S}^R_N$ = Bergman restreint tronqué à N points

Distance de Kantorovitch-Rubinstein $\mathcal{W}_{KR}$

Distance de Kantorovitch-Rubinstein : Pour $E =$ espace des configurations muni de la distance de variation totale $d(\xi, \zeta) = |\xi \Delta \zeta|$;

$$\mathcal{W}_{KR}(\mu, \nu) = \inf_{\substack{\text{law}(\xi)=\mu \\ \text{law}(\zeta)=\nu}} \mathbf{E}(|\xi \Delta \zeta|) = \inf_{\substack{\text{law}(\xi)=\mu \\ \text{law}(\zeta)=\nu}} \mathbf{E}(d(\xi, \zeta)).$$

C'est une distance entre lois de processus ponctuels issue du Transport Optimal.

Troncation du Bergman projeté

Théorème : Soit

$$N_R := \sum_{n=0}^{\infty} R^{2n+2} = \frac{R^2}{(1-R)(1+R)}.$$

Soit $\mathfrak{S}^R$ la loi de Bergman restreinte du disque compact de rayon R centré en 0, et $\mathfrak{S}^R_\alpha$ la loi de sa troncation à α points. Si on tronque à βN_R points, on a

$$\mathcal{W}_{KR}(\mathfrak{S}^R, \mathfrak{S}^R_{\beta N_R}) \leqslant N_R e^{-2\beta g(R)}$$

où $g(R) = \frac{R^2}{1+R}$

Corollaire :

$$\mathbf{P}(\mathfrak{S}^R \neq \mathfrak{S}^R_{\beta N_R}) \leqslant N_R e^{-2\beta \frac{R^2}{1+R}}.$$

Autrement dit, tronquer au delà de N_R induit des distances (de Wasserstein) exponentiellement faibles entre les lois des processus. Donc N_R est un bon choix.

Démarche : pourquoi ce N_R là ?

Théorème : (Decreusefond, Moroz, 2021)
Soit $R > 0$. On tronque le Ginibre projeté à $N_R = (R+c)^2$ points. Soient ξ^R et $\xi^R_{N_R}$ des DPPs ayant ces lois (projeté / projeté et tronqué). Alors

$$\mathcal{W}_{KR}(\xi^R, \xi^R_{N_R}) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} R e^{-c^2}$$

Observation : En fait, il s'avère que R^2 n'est autre que l'espérance du nombre de points !

$\rightarrow$ ce résultat majore la **déviation** du nombre de points autour de son espérance.
Le nôtre aussi, et en est un analogue pour le processus de Bergman.

Question : Notre borne ne tend pas vers 0 quand $R \to 1^-$. Mais a-t-on quand même convergence au sens de Wasserstein ?

$$\mathcal{W}_{KR}(\mathfrak{S}^R, \mathfrak{S}^R_{N_R}) \xrightarrow[R \to 1^-]{} 0$$

Autre question : Tronquer à l'espérance ? Mais, par définition, une v.a. peut dépasser son espérance, non ?
Proposition : Pour tout $\delta > 0$, si on tronque à $N_R^{1+\delta}$, on a

$$\mathcal{W}_{KR}(\mathfrak{S}^R, \mathfrak{S}^R_{N_R^{1+\delta}}) \xrightarrow[R \to 1^-]{} 0$$

Proposition : Plus généralement on a toujours la convergence au sens de Wasserstein si

$$N_R \sim_{R \to 1^-} \frac{1}{(1-R)^{1+\delta}}$$

et encore plus généralement, la borne tend vers 0 si et seulement si

$$2N_R \log(R) - \log(1-R) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} -\infty$$

$\to$ CNS sur la croissance en R de N_R pour le choix du nombre de points (troncation) pour que la borne tende vers 0 (CS de Wasserstein convergence)

Théorème. On a

$$\mathfrak{S}_N^R \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathfrak{S}^R,$$

en loi.

En particulier, $\mathfrak{S}_{N_R}^R \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathfrak{S}^R$ dès que $N_R \xrightarrow[R\to 1^-]{} \infty$, donc en particulier pour notre N_R précédent.

Théorème. On a, dès que $N_R \xrightarrow[R\to 1^-]{} +\infty$ (erreur ici ! dans la preuve aussi !)

$$\mathfrak{S}_{N_R}^R \xrightarrow[R\to 1^-]{} \mathfrak{S},$$

en loi.

Restriction à un anneau (cf. observations)

Théorème. Soit $T(r, R)$ l'anneau compact centré en 0, de rayon intérieur r et de rayon extérieur R. La décomposition de Mercer du noyau $k_{r,R}(x, y)$ du processus ponctuel déterminantal de Bergman restreint à $T(r, R)$ est

$$k_{r,R}(x, y) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n^{r,R} \phi_n^{r,R}(x) \overline{\phi_n^{r,R}(y)}$$

où les valeurs propres sont

$$\lambda_k^R = R^{2k+2} - r^{2k+2}$$

et les vecteurs propres

$$\phi_k^R : x \mapsto \sqrt{\frac{k+1}{\pi(R^{2k+2} - r^{2k+1})}} x^k$$

Autrement dit, on peut restreindre à un anneau aussi. D'ailleurs,
Proposition. On peut calculer la loi de la plus petite distance entre un point et l'origine est $\sim x^2$ quand $x \to 0$.
Ceci montre qu'il y a de toute manière très peu de points à l'origine.

Restriction à un anneau de rayon extérieur 1 ?

Notation : Dans la suite, on note

$$Z(A) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \in A\}.$$

Ces parties sont invariantes par rotation.
Théorème :
La restriction du Bergman à toute région de la forme $Z(A)$, $A \subset [0,1]$ contenant $Z([1-\varepsilon, 1])$ présente presque sûrement un nombre infini de points.
Autrement dit, pour la simulation, il faut abandonner l'idée de vouloir absolument simuler les points au voisinnage du cercle unité $Z(\{1\})$.

Simuler les points au voisinnage du cercle unité ?

Théorème. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres positifs telle que

$$\sum_{n\geq 0} u_n < +\infty.$$

Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs dans $(0,1)$ avec $0 < a_0 < b_0 < 1$ qui satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} a_{n+1} \in (b_n, 1) \\ b_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a_{n+1}^2 + u_n(1 - a_{n+1}^2)}{a_{n+1}^2 + (1+u_n)(1-a_{n+1}^2)}} \end{cases}$$

Alors le processus ponctuel déterminantal de Bergman restreint à

$$Z\left(\bigcup_{n\geq 0}[a_n, b_n]\right)$$

présente presque sûrement un nombre fini de points. De plus, si on choisit $a_n \to 1$, cette région adhère au cercle unité, et si on prend $b_0 \geqslant 1 - \delta < 1$, la mesure de Lebesque de cette région est proche de π !

Théorème. Soit $\mathfrak{S}$ un DPP et $\mathfrak{S}_n$ sa troncation à n points. On note m_n la moyenne du nombre de points de $\mathfrak{S}_n$ et σ_n^2 sa variance.
Alors

$$\frac{|\mathfrak{S}_n| - m_n}{\sigma_n^2 \sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathcal{N}(0, 1)$$

en loi.

Résultats généraux autour des DPPs

Théorème. Soit $\mathfrak{S}$ un processus ponctuel déterminantal. Supposons que l'opérateur intégral associé soit à trace. Notons m le nombre moyen de points de $\mathfrak{S}$.
Alors, m est fini, et pour tout $c \in (0,1)$, on a

$$\mathbf{P}(|\mathfrak{S}| \leqslant (1-c)m) \leqslant \exp\Big(-m\big(c+(1-c)\log(1-c)\big)\Big),$$

et pour tout $c > 0$,

$$\mathbf{P}(|\mathfrak{S}| \geqslant (1+c)m) \leqslant \exp\Big(-m\big((1+c)\log(1+c)-c\big)\Big).$$

Définition :
Soit ξ un processus ponctuel, λ une mesure de référence sur E. ξ admet (ρ_n) pour fonctions de corrélations si pour toutes parties $A_1, \ldots, A_n$ mesurables *deux à deux disjointes* de E, on a

$$\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} \xi(A_k)\right] = \int_{A_1 \times \ldots \times A_n} \rho_n(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}\lambda^{\otimes n}$$

Les fonctions de corrélation $(\rho_n)_{n \in \mathbf{N}}$ caractérisent la loi d'un processus ponctuel.

Écriture de Mercer

Théorème : (Mercer)

Sur (E, μ), soit $k \in L^2$ un noyau. On suppose que k est de type positif et que l'opérateur intégral K associé à k est auto-adjoint.

Alors les valeurs propres λ_i de l'opérateur intégral K associé à k sont positives, et il existe une base hilbertienne $(\phi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de L^2 formée de vecteurs propres pour K, telle que

$$k(x, y) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}$$