

Применение геометрии многообразия симметричных положительно полуопределенных матриц в анализе данных головного мозга

Беляева Дарья, гр. 177

Научный руководитель: Бурнаев Е.В., к.ф.-м.н

МФТИ(ГУ)

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра проблем передачи информации и анализа данных

Москва, 2017

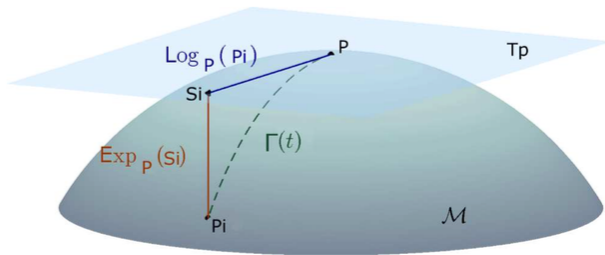
Постановка задачи

- Рассмотреть существующие подходы к классификации СПО и СППО матриц
- Предложить эффективный алгоритм классификации СППО матриц

Классификация в касательном пространстве

Существующие подходы

В пространстве СПО матриц возможно выполнить проекцию на касательное пространство:



Касательное пространство в точке P , S_i - касательный вектор к точке P и $\Gamma_i(t)$ - геодезическая между P и P_i

Подход использован, например, в [1], [2]

Классификация с помощью ядерных алгоритмов

Существующие подходы

Гауссовское ядро

$$K(x_i, x_j) = \exp\left(\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

Ядро на основе расстояний δ_{spd}

Пусть $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in S(n)$

$$K_{spd}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = \exp(-\gamma \delta_{spd}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)) \quad (2)$$

Подход использован в работах [5], [4]

Предложенные методы

Существующий подход	Предложенный подход
Проекция на касательное пространство	Снижение размерности Isomap [6] [] на СППО матрицах
Ядерный SVM + δ_{spds}	Ядерный SVM + δ_{spds} : $K_{spds}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = \exp(-\gamma \delta_{spds}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j))$

δ_{spds} - длина геодезической

$$\delta_{spds} = l^2(\gamma_{A \rightarrow B}) = \|\Theta\|_F^2 + k \|\log R_A^{-1} R_B^2 R_A^{-1}\|_F^2 \quad (3)$$

Предложено в [3]

Магнитно-резонансная томография

Методы исследования мозга

Современный, более точный неинвазивный метод

- регистрирует электромагнитный отклик атомных ядер
- данные воспроизводимы
- реализует объемную регистрацию

Два типа МРТ - диффузионная (структурная) и функциональная

- вершины - регионы мозга
- ребра - структурные (физиологические) либо функциональные связи



Данные

База данных Alzheimer's Disease Neuroimaging Initiative.

- 228 пациентов
- 4 класса: NC (61), EMCI (77), LMCI (43), AD (50)
- Средний возраст пациентов: 72.9 ± 7.4 лет
- Итоговый коннектом содержит 68 вершин для каждого снимка

Коннектом - симметричная не определенная матрица.
Применяем преобразование Лапласа [4]:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{D}_i^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{D}_i - \mathbf{A}_i)\mathbf{D}_i^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$\mathbf{D}_i|_{k,k} = \sum_l \mathbf{A}_i|_{k,l}$$

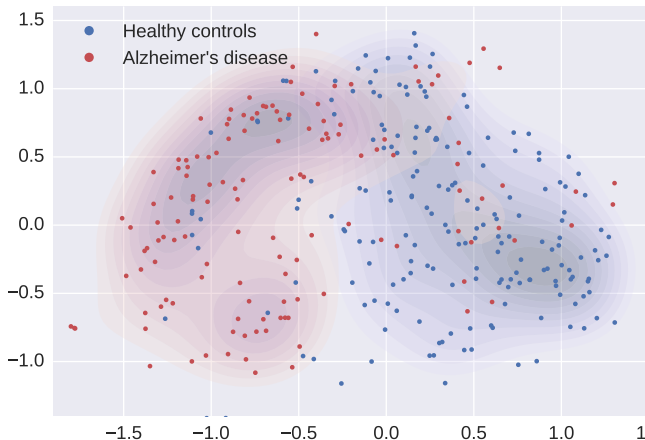
Сравнительные методы

Эксперименты

- Kernel SVM с матрицей $L2$ расстояний между матрицами
- Kernel SVM с матрицей логарифмированного евклидова расстояния между регуляризованными матрицами [4]

Результаты

Эксперименты



Данные классов AD и NC, спроецированные на двумерное пространство. Синий и красный цвета обозначают NC и AD группы соответственно.

Результаты

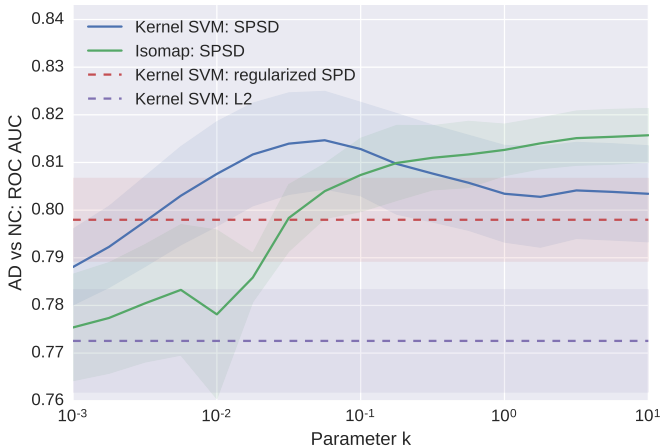
Эксперименты

Пара классов	SVM + L2	SVM + SPD	Isomap δ_{spds}	SVM + δ_{spds}
(AD, NC)	77.2 \pm 0.99	80 \pm 0.54	81.6 \pm 0.6	81.6 \pm 0.7
(AD, LMCI)	65.5 \pm 1.6	68.8 \pm 0.81	67.8 \pm 0.6	68.6 \pm 1.4
(LMCI, EMCI)	44.7 \pm 2.9	47.8 \pm 2.4	34.1 \pm 0.59	44.1 \pm 2.2
(EMCI, NC)	50.4 \pm 1.8	53.9 \pm 1.6	53.8 \pm 0.12	57.1 \pm 1.5

Сравнительные результаты классификации всех четырех алгоритмов, рассматривавшихся в работе. Цветом выделены лучшие результаты для каждой пары классов. Метрика качества – ROC AUC

Результаты

Эксперименты



Качество классификации как функция от параметра k .

Заклучение

- Рассмотрены подходы к классификации СПО, СППО матриц
- Предложен более эффективный алгоритм классификации СППО матриц

Список литературы

Список литературы

- [1] Barachant, A., Bonnet, S., Congedo, M., and Jutten, C. (2012). Multiclass brain-computer interface classification by Riemannian geometry. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 59(4):920–928.
- [2] Barachant, A., Bonnet, S., Congedo, M., and Jutten, C. (2013). Classification of covariance matrices using a Riemannian-based kernel for BCI applications. *Neurocomputing*, 112:172–178.
- [3] Bonnabel, S. and Sepulchre, R. (2008). Geometric distance and mean for positive semi-definite matrices of fixed rank. *arXiv preprint arXiv:0807.4462*.
- [4] Dodero, L., Minh, H. Q., San Biagio, M., Murino, V., and Sona, D. (2015). Kernel-based classification for brain connectivity graphs on the Riemannian manifold of positive definite matrices. In *Biomedical Imaging (ISBI), 2015 IEEE 12th International Symposium on*, pages 42–45. IEEE.
- [5] Jayasumana, S., Hartley, R., Salzmann, M., Li, H., and Harandi, M. (2013). Kernel methods on the riemannian manifold of symmetric positive definite matrices. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 73–80.
- [6] Krivov, E. and Belyaev, M. (2016). Dimensionality reduction with isomap algorithm for EEG covariance matrices. In *Brain-Computer Interfaces (BCI), 2016 4th International Winter Conference on*, pages 1–4. IEEE.

Обозначения

Математический аппарат

- $Sym(n) = \{ \mathbf{s} \in M(n) \mid \mathbf{s}^T = \mathbf{s} \}$ пространство всех симметричных матриц в $M(n)$.
- $S(n)$ - множество всех симметричных положительно определенных (СПО) матриц размера $n \times n$.
- $S^+(n, p)$ – множество всех симметричных положительно полуопределенных (СППО) матриц размера $n \times n$ и ранга $p \leq n$.
- $T_p \mathcal{M}$ - касательное пространство к многообразию \mathcal{M} в точке p .
- $V_{n,p}$ - множество матриц размера $n \times p$ с ортонормальными столбцами: $U^T U = I_p$
- $O(n)$ - ортогональная группа