Сравнительная характеристика вероятностной модели и модели динамики средних

Портянко Иван Александрович, гр. 522

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра Статистического моделирования

Научный руководитель: д. ф.-м. н., профессор Ю. А. Сушков
Рецензент: асп. Тамазян Г.С.

Санкт-Петербург
2012г.

Модель поиска и слежения

- Количество самолетов и лодок: M, N соответственно ($M \geq N$).
- Вероятность обнаружения лодки одним самолетом: $\mu t + o(t)$.
- Вероятность потери контроля над лодкой: $\nu t + o(t)$.
- $\alpha = \frac{\mu}{\nu}$, $\varphi = \alpha^{-1} = \frac{\nu}{\mu}$, $p_n(t)$ — вероятность того, что в момент времени t контролируются ровно n лодок.
- Среднее число контролируемых лодок: $\overline{n}(t) = \sum\limits_{n=1}^{N} n p_n(t). \qquad (1)$
- Интенсивность перехода: $\Lambda_{n+1 \to n}(n) = \begin{cases} (n+1)\nu, & 0 \leq n < N; \\ 0, & n = N. \end{cases} \quad (2)$
- Интенсивность перехода:
$$\Lambda_{n-1 \to n}(n) = \begin{cases} (M-n+1)(N-n+1)\mu, & 0 < n \leq N; \\ 0, & n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Модель поиска и слежения

- Граф состояний системы поиска:

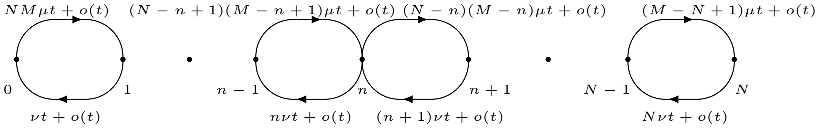

Рис. 1. Граф состояний системы поиска

- Среднее число контролируемых лодок в стационарном режиме:

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{N} np_n = \frac{\sum\limits_{n=0}^{N} n\alpha^n \binom{N}{n}\binom{M}{n} n!}{\sum\limits_{n=0}^{N} \alpha^n \binom{N}{n}\binom{M}{n} n!}. \qquad (4)$$

Среднее число контролируемых лодок

- S_1—лодка обнаружена и за ней ведется наблюдение.
- S_2—лодка не обнаружена.
- Дифференциальное уравнение: $\frac{d\bar{n}_d}{dt} = -\Omega_{S_1 \to S_2}(\bar{n}_d) + \Omega_{S_2 \to S_1}(\bar{n}_d)$. (5)
- Интенсивность перехода: $\Omega_{S_1 \to S_2}(\bar{n}_d) = \Lambda_{n \to n-1}(\bar{n}_d) = \nu \bar{n}_d$.
- Интенсивность перехода: $\Omega_{S_2 \to S_1}(\bar{n}_d) = \Lambda_{n \to n+1}(\bar{n}_d) = \mu(N - \bar{n}_d)(M - \bar{n}_d)$.
- $\frac{d\bar{n}_d}{dt} = -\nu \bar{n}_d + \mu(M - \bar{n}_d)(N - \bar{n}_d), 0 \le \bar{n}_d \le N. \qquad (6)$
- $2\bar{n}_d(N, M) = M + N + \varphi - \sqrt{(M + N + \varphi)^2 - 4MN}. \qquad (7)$
- $E\left((M - n)(N - n)\right) = (M - \bar{n}_d)(N - \bar{n}_d) + D. \qquad (8)$
- Численные результаты:

Таблица: 1. Сравнение моделей, $\alpha = 1, M = N$.

N	3	4	5
$\bar{n}_d$	1,697	2,438	3,209
$\bar{n}$	1,853	2,603	3,380
% различия	8,4	6,3	5,1

Таблица: 2. Относительная ошибка метода динамики средних, $\alpha = 1, M = 1, \dots, 8, N = 1, \dots 8$.

$M \ \ N$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.236	0.121	0.070	0.045	0.031	0.022	0.017	0.013
2		0.122	0.079	0.052	0.037	0.023	0.023	0.011
3			0.081	0.065	0.047	0.036	0.023	0.019
4				0.061	0.051	0.038	0.030	0.023
5					0.050	0.043	0.033	0.026
6						0.043	0.037	0.029
7							0.036	0.032
8								0.030

Теорема

При фиксированных N и α, $M \to \infty$ выполнено

$$\bar{n}_d(N, M) = N - \frac{N\varphi}{M} + o(M^{-1}).$$

Теорема

При фиксированных $d = M - N$ и α, $N \to \infty$ выполнено

$$\bar{n}_d(N, M) = N - \sqrt{N\varphi} + \frac{d + \varphi}{2} - \frac{(d + \varphi)^2}{8\sqrt{N\varphi}} + o(N^{-1/2}).$$

Вспомогательные сведения о гипергеометрических функциях

- Символ Похгаммера: $(b)_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0; \\ b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-1), & \text{если } n > 0. \end{cases}$
- Гипергеометрическая функция: ${}_2F_0(a,b;z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!} z^n.$
- Вырожденная гипергеометрическая функция Куммера:
$$ {}_1F_1(a;b;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n n!} z^n = M(a;b;z). \qquad (9)$$
- Пример: $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} M(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2).$

Приложение цепных дробей к функциям Куммера

- Цепная дробь – это выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}},$$ где a_0 есть целое число и все остальные a_n натуральные числа (положительные целые).

- Пример: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \cdots]$.
- Свойство функций Куммера:

$$\frac{M(a+1;b+1;z)}{bM(a;b;z)} = \cfrac{1}{b + \cfrac{(a-b)z}{b+1+\cfrac{(a+1)z}{b+2+\cfrac{(a-b-1)z}{b+3+\cfrac{(a+2)z}{b+4+\cfrac{(a-b-2)z}{b+5+\ddots}}}}}} \quad . \tag{10}$$

Анализ формулы из вероятностного метода

- Среднее число лодок: $\overline{n} = \sum_{n=0}^{N} np_n = \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{N} n\alpha^n \binom{N}{n}\binom{M}{n} n!}{\sum\limits_{n=0}^{N} \alpha^n \binom{N}{n}\binom{M}{n} n!}$.
- Среднее число лодок и функции Куммера: $\overline{n} = N \frac{M(1-N,M+1-N;-\varphi)}{M(-N,M+1-N;-\varphi)}$. (11)
- Среднее число лодок и цепные дроби:

$$\frac{\overline{n}}{N} = 1 - \cfrac{\varphi}{M+1-N+\cfrac{(M+1)\varphi}{M+2-N+\cfrac{(N-1)\varphi}{M+3-N+\cfrac{(M+2)\varphi}{M+4-N+\ddots}}}}.$$

(12)

- Формула связи для среднего числа лодок:

$$\frac{\overline{n}(N,M)}{N} = \frac{(M+1-N)(M+1-\overline{n}(N-1,M+1)) + \overline{n}(N-1,M+1)\varphi}{(M+1-N)(M+1-\overline{n}(N-1,M+1)) + (M+1)\varphi}. \tag{13}$$

- Итеративное вычисление:

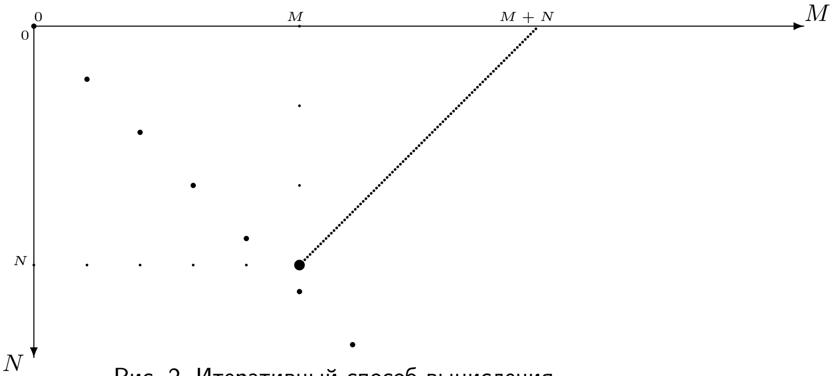

Рис. 2. Итеративный способ вычисления

Асимптотические результаты для вероятностного метода

Теорема

При фиксированных N и α, $M \to \infty$ выполнено

$$\overline{n}(N,M) = N\frac{1+o(M^{-1})}{1+o(M^{-1})} = N - o(M^{-1}).$$

Теорема

При фиксированных $d = M - N$ и α, $N \to \infty$ выполнено

$$\overline{n}(N,M) = N - \sqrt{N\varphi} + \frac{d+\varphi+1/2}{2} - \frac{3d+2\varphi+3}{12}\sqrt{\frac{\varphi}{N}} + o(N^{-1/2}).$$

Заключение

Теорема

При фиксированных N и α, $M \to \infty$ выполнено

$$\overline{n}(N,M) - \bar{n}_d(N,M) = \frac{N\varphi}{M} + o(M^{-1}).$$

Теорема

При фиксированных $d = M - N$ и α, $N \to \infty$ выполнено

$$\overline{n}(N,M) - \bar{n}_d(N,M) = \frac{1}{4} + \frac{3d^2 - 6\varphi - \varphi^2}{24\sqrt{N\varphi}} + o(N^{-1/2}).$$

Выводы

- Проведено численное и аналитическое сравнение метода динамики средних и вероятностного метода для модели поиска и слежения.
- Затраты на вычисления по методу динамики средних меньшие; результаты, полученые двумя путями, близки. Метод динамики средних является приемлемым огрублением вероятностного метода.
- Получен итеративный способ вычисления среднего числа лодок в вероятностном методе.
- Для отношения двух гипергеометрических функций специального вида (11) получена аппроксимационная формула.