Проблема согласованности и сравнение шкал в задачах принятия решений

Тимофеев Иван Михайлович, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Сушков Ю.А.
Рецензент: асп., Кушербаева В.Т.

Санкт-Петербург
2010г.

Введение

- $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — множество альтернатив,
- $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ — множество критериев,
- F — главная цель.

Задачи:

- Упорядочить альтернативы по степени важности;
- Найти вес каждой альтернативы в итоговом упорядочении.

Задача о лидере

Пусть $A = (a^i_j)$ — матрица смежности графа G с вершинами $x_1, \ldots, x_n$.
$p^i(k)$ — итерированная сила порядка k альтернативы x_i.

$$p^i(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{km} p^m(t-1).$$

Определим силу альтернативы x_i как предел:

$$\pi^i = \lim_{k\to\infty} \frac{p^i(k)}{\sum_{j=1}^{n} p^j(k)}.$$

Виды шкал

Определение

Шкала — функция метода: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$.

Мультипликативная и логистическая шкалы:

$$f_{MAI}(t) = (x_{mai}\,|t| + 1)^{sign(t)}.$$

$$f_{MLK}(t) = \frac{2}{1 + e^{\mu(1-t)}}.$$

Определение

- *Эмпирическая система* $U = (A, R_1, R_2, \ldots)$.
- *Числовая система* $V = (Z, W_1, W_2, \ldots)$.
- *Отображение* $\varphi : U \to V$.

Тогда φ *называют шкалой градаций.*

Сравнение шкал

Пусть имеется два набора чисел $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Сравнения производились по двум критериям:

- $SKO = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$.
- $c = a - b$,
  $MAD = median\left\{|c - median(c)|\right\}$.

Пример:оценка расстояний

Оценка расстояний:

Расстояние измерялось от Филадельфии до Каира, Токио, Чикаго, Сан-Франциско, Лондона и Монреаля.

Города	Расстояние до Филадельфии в милях	Нормализованное расстояние
Каир	5729	0.278
Токио	7449	0.361
Чикаго	660	0.032
Сан-Франциско	2732	0.132
Лондон	3658	0.177
Монреаль	400	0.019

Пример: оценка расстояний

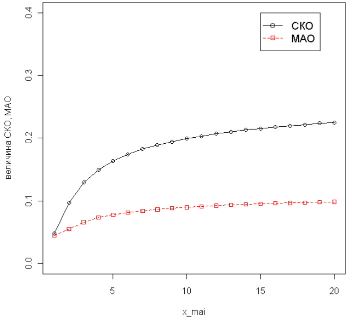


Рис.: Мультипликативная шкала.

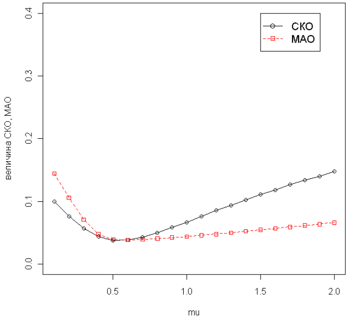


Рис.: Логистическая шкала.

При $x_{mai} = 1$:
$SKO = 0.048$;
$MAD = 0.045$.

При $\mu = 0.5$: $SKO = 0.038$;
$MAD = 0.039$.

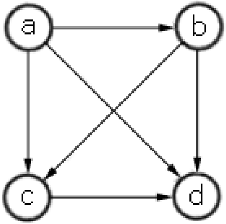
Определение

Считаем, что выполнена порядковая согласованность, если $a \succ b, b \succ c$, то $a \succ c$.

Пример несоблюдения порядковой согласованности, на примере трех объектов.
$X = (x_1, x_2, x_3)$. И пусть их упорядочили: $x_2 \succ x_3$, $x_3 \succ x_1$, $x_1 \succ x_2$. В итоге упорядочение $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$.

Представление упорядочения

Упорядочению $a \succ b \succ c \succ d$ соответствует:



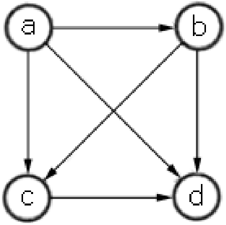
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Два способа возникновения контуров в графе упорядочений:

- Появление обратных дуг.
- Смена «ориентации» дуг.

Представление упорядочения

Упорядочению $a \succ b \succ c \succ d$ соответствует:



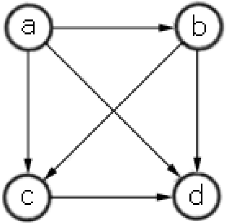
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Два способа возникновения контуров в графе упорядочений:

- Появление обратных дуг.
- Смена «ориентации» дуг.

Представление упорядочения

Упорядочению $a \succ b \succ c \succ d$ соответствует:



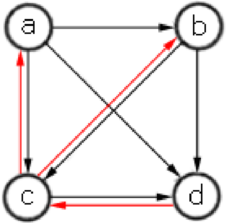
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Два способа возникновения контуров в графе упорядочений:

- Появление обратных дуг.
- Смена «ориентации» дуг.

Появление обратных дуг

Рассмотрим вершину c.

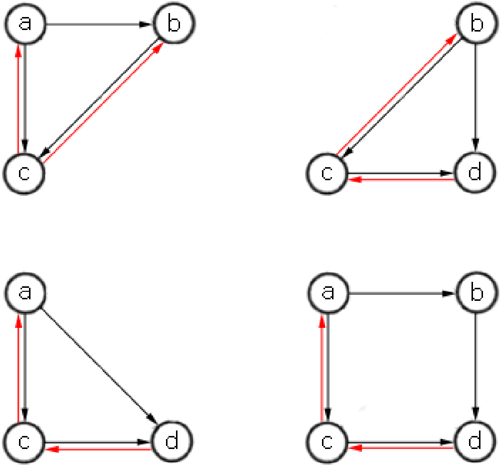


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Рис.: Граф упорядочений и матрица с градациями.

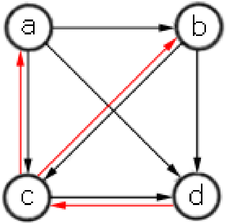
Появление обратных дуг

Рис.: Контуры.



Появление обратных дуг

Рассмотрим вершину c.



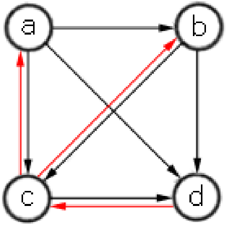
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Рис.: Граф упорядочений и матрица с градациями.

Итоговый вектор: $(0.295, 0.230, 0.295, 0.180)$.

Появление обратных дуг

Рассмотрим вершину c.



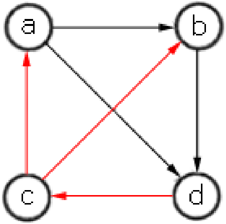
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Рис.: Граф упорядочений и матрица с градациями.

Итоговый вектор: $({\color{red}0.295}, 0.230, {\color{red}0.295}, 0.180)$.

Смена «ориентации» дуг

Рассмотрим вершину c.

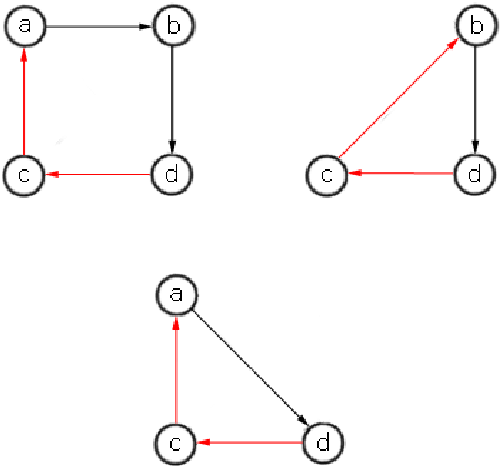


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \text{-}\mathbf{1} & 1 \\ -1 & 0 & \text{-}\mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \text{-}\mathbf{1} \\ -1 & -1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Рис.: Граф упорядочений и матрица с градациями.

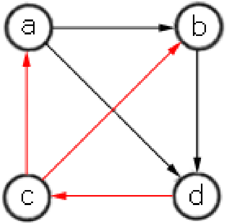
Смена «ориентации» дуг

Рис.: Контуры.



Смена «ориентации» дуг

Рассмотрим вершину c.



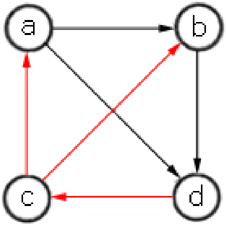
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \text{-}\mathbf{1} & 1 \\ -1 & 0 & \text{-}\mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \text{-}\mathbf{1} \\ -1 & -1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Рис.: Граф упорядочений и матрица с градациями.

Итоговый вектор: $(0.276, 0.203, 0.294, 0.227)$.

Смена «ориентации» дуг

Рассмотрим вершину c.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \text{-}\mathbf{1} & 1 \\ -1 & 0 & \text{-}\mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \text{-}\mathbf{1} \\ -1 & -1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Рис.: Граф упорядочений и матрица с градациями.

Итоговый вектор: $(0.276, 0.203, 0.294, 0.227)$.

Правила заполнения матриц

Правило 1

Матрица с градациями A может заполняться таким образом, что в результате сравнения объектов i и j, a_{ij} присваивается t, где $t \in \mathbb{Z}^+$, и при этом $a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, n$.

Правило 2

Матрица с градациями A может заполняться таким образом, что в результате сравнения объектов i и j, a_{ij} и a_{ji} присваиваются числа из $\mathbb{Z}$ так, чтобы выполнялось $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Поиск несогласованности

Утверждение

A — матрица размера $n \times n$, составленная по правилу 1, тогда, если $p^+ \neq \frac{n(n-1)}{2}$, либо $p^- \neq \frac{n(n-1)}{2}$, где p^+ — количество положительных элементов, а p^- — количество отрицательных элементов в матрице A, то в A имеется несогласованность.

Утверждение

A — матрица размера $n \times n$, составленная по правилу 2, тогда если $p^+_{i\cdot} = p^+_{j\cdot}$ и $p^-_{i\cdot} = p^-_{j\cdot}, \quad \forall i, j \in \overline{1, n}, i \neq j$, где $p^+_{i\cdot}$ — количество положительных элементов матрицы A в i-й строке, $p^-_{i\cdot}$ — количество отрицательных элементов, то в A имеется несогласованность.

Заключение

- Разработаны рекомендации по выбору параметров шкал.
- Исследовано влияние несогласованности на итоговое упорядочение.
- Предложены способы поиска несогласованности.

Перспективы развития:

- Обобщить полученные результаты на большее количество градаций и альтернатив.
- Поиск оптимальной шкалы.