Исследование МАИ методом статистического моделирования

Смирнова Дарья Алексеевна, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., пр. Сушков Ю.А.
Рецензент: Тамазян Г.С.

Санкт-Петербург
2015г.

Метод анализа иерархий (МАИ)

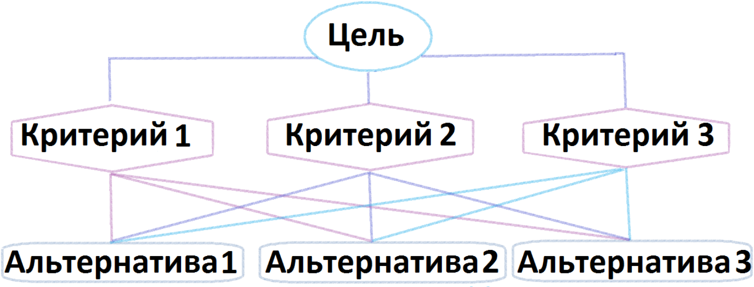


Рис.: Пример трехуровневой иерархии.

Шкала

Качественные оценки превосходства и обозначающие их числа

эквивалентность	0
слабое превосходство	± 2
сильное превосходство	± 4
очень сильное превосходство	± 6
абсолютное превосходство	± 8
промежуточные оценки	$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$

Определение

Пусть $\Lambda = \{-8, \ldots, 8\}$. *Шкала — это функция* $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}^+$.

Рассматриваемые шкалы

- **Саати:** $\varphi_S(\lambda) = (1 + x_S|\lambda|)^{\operatorname{sign} \lambda}$.
- **Лутсма:** $\varphi_L(\lambda) = c^\lambda$.
- **Логистическая:** $\varphi_{log}(\lambda) = \dfrac{2}{1 + \exp(-\mu\lambda)}$.

Способы получения вектора приоритетов по матрице попарных сравнений

Обозначения

- матрица попарных сравнений $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in \Lambda = \{-8, \ldots, 8\}$;
- φ — шкала: $\Lambda \to \mathbb{R}^+$;
- $\varphi(A) = (\varphi(a_{ij}))_{i,j=1}^n$;
- $A^+ = (a_{ij}^+)_{i,j=1}^n = \varphi(A)$.

Метод собственного вектора (Берж, 1962)

В качестве вектора приоритетов берется нормированный главный собственный вектор матрицы A^+.

Метод геометрических средних (Crawford & Williams,1985)

Приоритеты получаются следующим образом:

$$w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}^+}.$$

Согласованность упорядочения объектов $x_1, \ldots, x_n$

Обозначения:
в записи $\overset{\lambda}{\succ}$ знак $\succ$ обозначает превосходтво, λ — степень превосходства.

Условие порядковой согласованности

$\forall x_i, x_j, x_k$, из того, что $x_i \succ x_j, x_j \succ x_k$, следует $x_i \succ x_k$.

Моделирование порядково согласованной матрицы попарных сравнений

- $i < j:\ a_{ij} = \xi_k, k = n(n-1)/2,\ \xi_k$ — р. р. на $\Lambda^+ = \{\lambda | \lambda \geq 0, \lambda \in \Lambda\}$;
- $i > j : a_{ij} = -a_{ji}$;
- $a_{ii} = 0, i = 1, \ldots, n$.

Условие численной согласованности

$\forall x_i, x_j, x_k$: $x_i \overset{\widetilde{\lambda}}{\succ} x_j \overset{\widetilde{\widetilde{\lambda}}}{\succ} x_k$, где $\lambda, \widetilde{\lambda}, \widetilde{\widetilde{\lambda}} \in \Lambda$, выполняется $x_i \overset{\min(\widetilde{\lambda} + \widetilde{\widetilde{\lambda}}, 8)}{\succ} x_k$.

Моделирование численно согласованной матрицы попарных сравнений

$a_{ij} = \min(\lfloor \frac{\xi_i - \xi_j}{0.1} \rfloor, 8)$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ равномерно распределены на $[0, 2]$.

Устойчивость

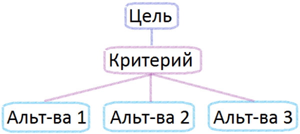


Рис.: Трехуровневая иерархия с одним критерием.

- A — матрица попарных сравнений с элементами из Λ.
- Зададим матрицу ошибок $\mathcal{E} = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^{n}$:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{3}, \\ -1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{3}. \end{cases}$$

- Матрица отклонений $A^1 := A + \mathcal{E}$.
- Вектора приоритетов v, v^1 получены по матрицам $\varphi(A), \varphi(A^1)$ соответственно.

Определение

Под устойчивостью шкалы φ будем понимать совпадение ***упорядочений*** *компонент векторов приоритетов, полученных по матрицам $\varphi(A)$ и $\varphi(A^1)$.*

Шкала Саати. Метод собственного вектора

Шкала Саати: $\varphi_S(\lambda) = (1 + x_S|\lambda|)^{\operatorname{sign}\lambda}$, x_S — параметр.

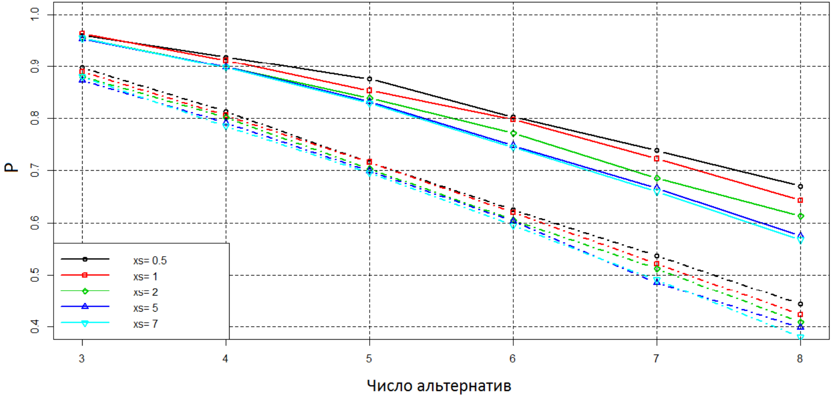


Рис.: Оценки вероятностей совпадения упорядочений главных собственных векторов матриц $\varphi(A)$ и $\varphi(A+\mathcal{E})$.

Сравнение устойчивости шкал Саати и логистической при использовании метода собственного вектора

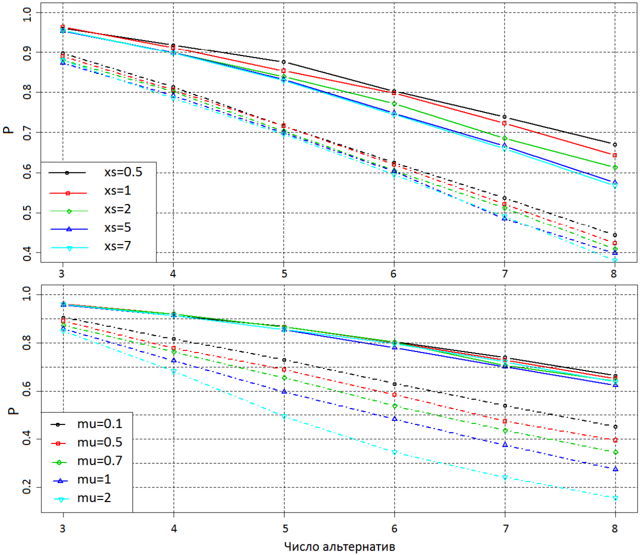


Рис.: Устойчивость шкал в зависимости от параметров.

Сравнение методов получения вектора приоритетов на примере логистической шкалы

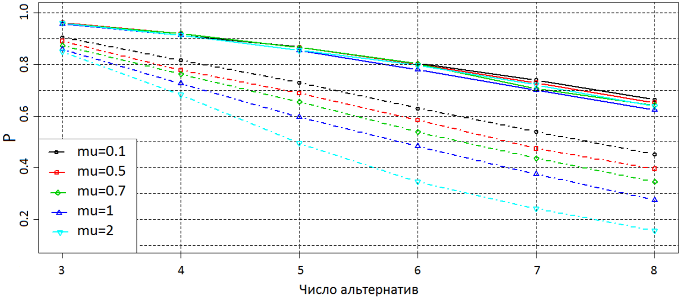


Рис.: Метод собственного вектора.

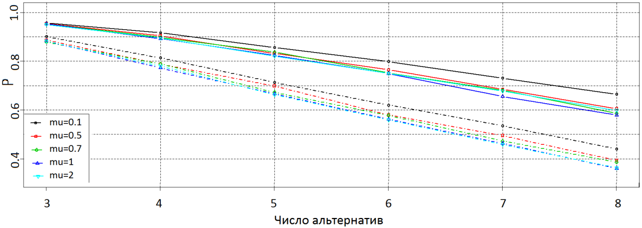


Рис.: Метод геометрических средних.

Выводы по устойчивости в однокритериальном случае

Выбор шкалы при фиксированном методе

	Согласованность: численная	Согласованность: порядковая
Метод собственного вектора	Логистическая	Саати
Метод геометрических средних	Лутсма	

Выбор метода при фиксированной шкале

	Согласованность: численная	Согласованность: порядковая
Саати	Геометрических средних	Собственного вектора
Лутсма	Геометрических средних	
Логистическая	Собстсвенного вектора	Геометрических средних

Устойчивость уменьшается при:

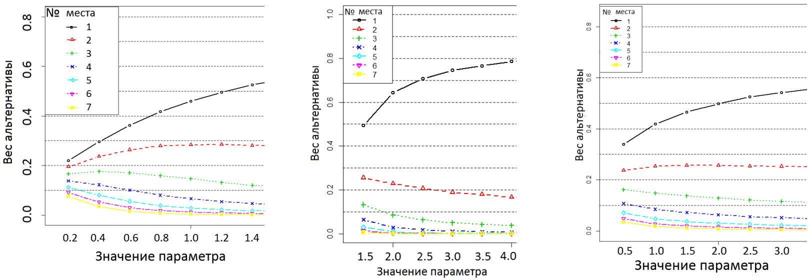
- увеличении числа альтернатив;
- увеличении значения параметра шкалы.

Средние веса альтернатив

Пусть $N = 10^5$ — число реализаций, φ — функция шкалы, n — количество альтернатив. Итерация:

- A^i — матрица попарных сравнений, удовлетворяющая условию численной согласованности;
- ω^i — отнормированный главный собственный вектор матрицы $\varphi(A^i)$;
- упорядочиваем ω^i и перенумеровываем: $\omega_1^i \geq \omega_2^i \geq \cdots \geq \omega_n^i$.

Средний вес k-ой альтернативы: $\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\omega_k^i$.



а) б) в)

Рис.: Шкалы: а) логистическая, б) Лутсма , в) Саати.

Генерация начальных упорядочений

В однокритериальном случае: $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$.

Задание начальных упорядочений альтернативам при моделировании

Приоритеты альтернативы x_i по первому критерию: $f(i)$.
Приоритеты альтернативы x_i по k-ому критерию: $f(i) + \xi_i^k$,
ξ_i^k р.р. на $[-0.7, 0.7]$, $i = 1, \ldots, n$.

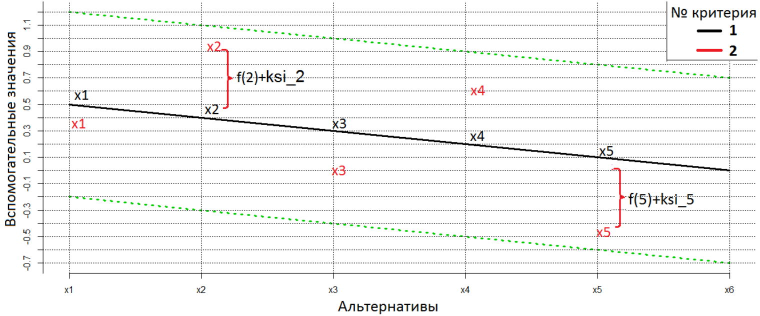


Рис.: Процесс задания начальных упорядочений.

Устойчивость

- $A_1, \ldots, A_k$ — матрицы попарных сравнений для каждого критерия;
- $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_k$ — матрицы ошибок;
- $A_1^1, \ldots, A_k^1$ — матрицы отклонений: $A_i^1 := A_i + \mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, k$;
- φ — функция шкалы;
- $v_1, \ldots, v_k$: v_i — главный нормир. собственный вектор матрицы $\varphi(A_i)$;
- $v_1^1, \ldots, v_k^1$: v_i^1 — главный нормир. собственный вектор матрицы $\varphi(A_i^1)$;
- $v = \frac{1}{k}(v_1 + \cdots + v_k)$;
- $v^1 = \frac{1}{k}(v_1^1 + \cdots + v_k^1)$.

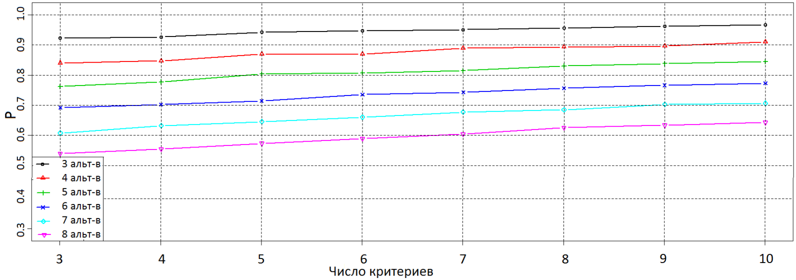


Рис.: Оценки вероятностей сохранения упорядочения для шкалы Саати.

Совпадение с медианой Кемени

Пусть $v_1, \ldots v_k$ — вектора приоритетов по каждому критерию. Рассмотрим их как ранжирования.

Матрица упорядочений:

$$z_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \text{ и } j \text{ равноценны,} \\ 1, & \text{если } i \text{ предпочтительнее } j, \\ -1, & \text{если } j \text{ предпочтительнее } i. \end{cases}$$

Расстояние Кемени (Кемени и Снелл, 1972)

$$d(Y, Z) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} |y_{ij} - z_{ij}|.$$

Медиана Кемени (Кемени и Снелл, 1972)

Для множества ранжирований $P_1, \ldots, P_k$ медиана Кемени

$$P = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^{k} d(P_i, P).$$

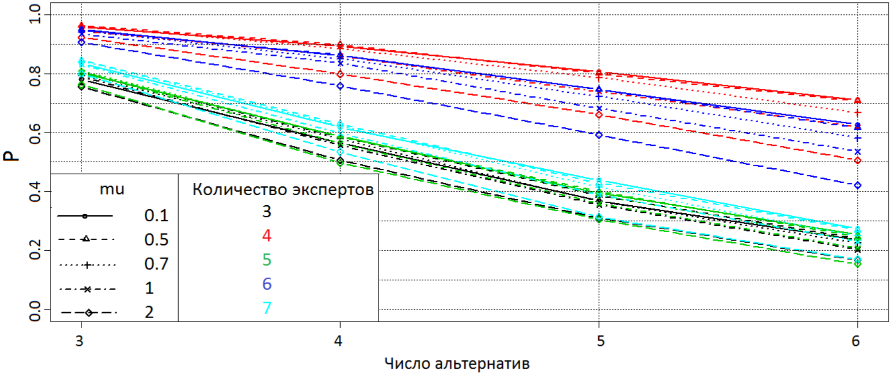


Рис.: Оценки вероятности совпадения с медианой Кемени для логистической шкалы.

Заключение

- Предложен способ моделирования матрицы попарных сравнений, элементы которой удовлетворяют описанному условию численной согласованности.
- В однокритериальном случае шкалы статистически исследованы на устойчивость как при использовании метода собвстенного вектора, так и при использовании метода геометрических средних.
- Предложен способ моделирования многокритериальной задачи принятия решения.
- В многокритериальном случае шкалы статистически исследованы на устойчивость при использовании метода собстенного вектора.
- Получены оценки вероятностей совпадения итогового вектора МАИ с медианой Кемени.