Имитационное моделирование процесса обтекания разреженным газом сетчатой конструкции

Ненашева Анна Александровна, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., д. Христинич В.Б.
Рецензент: к.ф.-м.н., д. Кривулин Н.К.

СтатМод

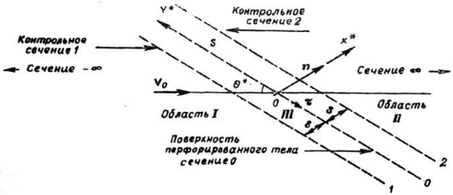
Введение

Цель работы:

- исследование обтекания сетчатой конструкции потоком разреженного газа методом имитационного статистического моделирования с использованием приближенного аналитического решения

Для реализации этого рассмотрено приближенное аналитическое решение процесса обтекания, методы статистического моделирования для решения интегральных уравнений и весовые методы Монте-Карло, разработана программа, моделирующая процесс обтекания и обрабатывающая полученные результаты.

Физическая картина обтекания сетчатой контрукции.



$\mathbf{n}$– нормаль поверхности, $\pi/2-\theta^*-$ угол между направлением $\mathbf{V_0}-$ вектора скорости потока газа и $\mathbf{n}$ внутренней нормалью к поверхности.
Параметры в сечении: $x^* =$ -∞ $-$ (n_0, V_0, T_0);
в сечении 1, x^* =-δ $-$ (n_1, V_1, T_1);
в сечении 2, x^* = -δ $-$ (n_2, V_2, T_2);
в сечении x^* =-∞ $-$ (n, V, T);

Вывод основных соотношений задачи обтекания

Локального равновестное распределение Максвелла-Больцмана:

$$f_M(n_i, \mathbf{V}_i, T_i, \mathbf{u}) = n_i\left[\frac{m}{2kT_i\pi}\right]^{3/2} exp\Big(-\frac{m}{2kT_i}(\mathbf{u}-\mathbf{V}_i)^2\Big), \quad (1)$$

где n_i– концентрация частиц в точке x_i,
$\mathbf{V}_i$– их макроскопическая скорость,
T_i–температура частиц газа в точке x_i.
$f_M(n_i, \mathbf{V}_i, T_i, \mathbf{u})/n_i$– плотность нормального трехмерного закона с независимыми компонентами вектора $\mathbf{u}$.
Мат. ожидание $E_i(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{V}_i$.
Дисперсия $D_i(\mathbf{u}) \equiv 3RT_i$.

Вывод основных соотношений задачи обтекания

Модель функции распределения в сечении 1, $x^* = -\delta$:

$$f_1(\mathbf{u}) = \begin{cases} f_M(n_1, \mathbf{V}_1, T_1, \mathbf{u}), & u_n > 0, \\ p f_M(n_2, \mathbf{V}_2, T_2, \mathbf{u}) + (1-p) f_r(n_{1r}, \mathbf{V}_{1r}, T_{1r}, \mathbf{u}), & u_n < 0. \end{cases} \tag{2}$$

В сечении решетки 0, $x^* = 0$:

$$f_0(\mathbf{u}) = \begin{cases} f_M(n_1, \mathbf{V}_1, T_1, \mathbf{u}), & u_n > 0, \\ f_M(n_2, \mathbf{V}_2, T_2, \mathbf{u}), & u_n < 0. \end{cases} \tag{3}$$

В сечении 2, $x^* = \delta$:

$$f_2(\mathbf{u}) = \begin{cases} f_M(n_2, \mathbf{V}_2, T_2, \mathbf{u}), & u_n < 0, \\ p f_M(n_1, \mathbf{V}_1, T_1, \mathbf{u}) + (1-p) f_r(n_{2r}, \mathbf{V}_{2r}, T_{2r}, \mathbf{u}), & u_n > 0. \end{cases} \tag{4}$$

p=d/D – коэффициент перфорации, где d– сумарная площадь отверстий, D– общая площадь потока.

Приближенное аналитическое решение

Рассмотрим скорости частиц $\mathbf{u}$, такие, что

$$\mathbf{u} \in \{\mathbf{u} : (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) > 0\} = \Omega(\mathbf{u}),$$

тогда при $\mathbf{r} \in \Delta S_{km}$ и $\mathbf{u} \in \Omega(\mathbf{u})$ плотность распределения отраженных частиц $f_r(n_{ir}, \mathbf{V}_{ir}, T_{ir}, \mathbf{u})$ удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) f_r(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = - \int\limits_{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1) < 0} T(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) f_r(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \qquad (5)$$

Функция $T(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$ – граничная трансформанта, плотность распределения отраженных частиц, удовлетворяет в $\Omega(\mathbf{u})$

$$\mathbf{u} \in \Omega(\mathbf{u}), \quad T(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) \geq 0, \quad \int\limits_{\Omega(\mathbf{u})} T(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u} = 1,$$

в остальных случаях $T(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = 0$.

При диффузно-зеркальном отражении с λ долей диффузно отраженных частиц

$$f_r(n_{ir}, \mathbf{V}_{ir}, T_{ir}, \mathbf{u}) = (1-\lambda) f_M(n_i, \mathbf{V}_i, T_i, \mathbf{u} - 2\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})) + \\ + \lambda f_M(n_{ir}, 0, T_{ir}, \mathbf{u}). \tag{6}$$

Для стационарного течения газа в случае отсутствия внешних сил выполняются следующие уравнения для моментов распределения скоростей частиц:

$$\frac{d}{dx^*}\int\limits_{(\mathbf{u})} u_{x^*}\psi(\mathbf{u}) f(x^*, \mathbf{u}) d\omega = 0, \quad \psi(\mathbf{u}) = \{m, m\mathbf{u}, m\frac{u^2}{2}\}. \tag{7}$$

В результате решения системы уравнений получим параметры в распределениях (2)- (4). Проинтегрируем распределения (2)- (4) с найденными параметрами, получим концентрации, скорости и температуры в различных сечениях.

Приближенное аналитическое решение

Концентрации в сечениях 1,0,2 (в асимптотическом пределе при $S_j > 3$) :

$$\frac{n(x^* = -\delta)}{n_0} = \frac{n_1}{n_0}\frac{(1-p)}{p}\sqrt{\pi T_{W0}}S_0 sin(\theta^*),$$
$$\frac{n(x^* = 0)}{n_0} = \frac{n_1}{n_0} = n_{10}, \quad \frac{n(x^* = \delta)}{n_0} = p\frac{n_1}{n_0} = pn_{10}. \tag{8}$$

Модуль векторов скорости в сечениях 1,0,2:

$$\frac{V(x^* = -\delta)}{V_0} = \frac{n_0}{n(x^* = -\delta)},$$
$$\frac{V(x^* = 0)}{V_0} = \frac{n_0}{n(x^* = 0)}, \quad \frac{V(x^* = \delta)}{V_0} = \frac{n_0}{n(x^* = \delta)}, \tag{9}$$

где $S_j = V_j/c_j = V_j(\sqrt{2RT_j})^{-1})$, $T_{W0} = T_W/T_0$.

Приближенное аналитическое решение

Температура газа перед решеткой $x^* = -\delta$:

$$\frac{T(x^*=-\delta)}{T_0} = \frac{1}{3}\frac{n_0}{n(x^*=-\delta)}\left[1+2S_0^2\left(sin^2(\theta^*)-\frac{n_0}{n(x^*=-\delta)}\right)+\right.$$
$$\left.+2n_{10}c_{10}^2 gS_1 + 2\frac{1-p}{p}S_0 sin(\theta^*)\sqrt{\pi T_{W0}}\right], \quad (10)$$

температура газа в сечении решетки $x^* = 0$:

$$\frac{T(x^*=0)}{T_0} = \frac{1}{3}\frac{n_0}{n(x^*=0)}\left[1+2S_0^2\left(sin^2(\theta^*)-\frac{n_0}{n_1}\right)+2n_{10}c_{10}^2 gS_1\right], \quad (11)$$

в сечении $x^* = \delta$:

$$\frac{T(x^*=\delta)}{T_0} = \frac{1}{3}\frac{n_0}{n(x^*=\delta)}\left[1+2S_0^2\left(sin^2(\theta^*)-\frac{n_0}{n(x^*=\delta)}\right)+\right.$$
$$\left.+2pn_{10}c_{10}^2 gS_1\right], \quad gS_j = 1+(S_j cos(\theta^*))^2, c_{10} = c_1/c_0.$$

Решение интегральных уравнений 2-го рода методом Монте-Карло

Интегральное уравнение 2-го рода:

$$\varphi(x) = \int\limits_X k(x', x)\varphi(x')dx' + f(x). \qquad (13)$$

Представление решения уравнения (13) рядом Неймана:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n f, \qquad (14)$$

где $[K^n f](x) = \int\limits_X \ldots \int\limits_X f(x_0)k(x_0, x_1)\ldots k(x_{n-1}, x)dx_0 \ldots dx_{n-1}$.
Уравнение (13) рассматривается в пространстве $N_1(X)$ обобщенных плотностей мер ограниченной вариации.
Сопряженное: $\varphi^* = K^*\varphi^* + h$ - в пространстве $C_1(X) = C_+(X) \cup C_0(X)$.
Функция $\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} K^{*n}h = \sum_{n=0}^{\infty}(K^n\delta, h)$.

Решение интегральных уравнений 2-го рода методом Монте-Карло

Для оценки линейных функционалов вида

$$I_h = (\varphi, h) = \int\limits_X \varphi(x)h(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(K^n f, h), \;\; h \in C_1(X). \quad (15)$$

Прямое моделирование исходной цепи Маркова:

$$I_h = E\left[\sum_{n=0}^{N} h(x_n)\right].$$

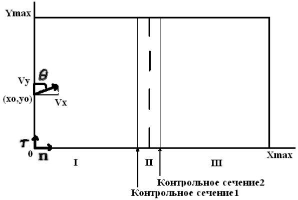
Можно ввести вспомогательные веса по формулам:

$$Q_0(x_0) = \frac{f(x_0)}{\pi(x_0)}, \quad Q_n = Q_{n-1}\frac{k(x_{n-1}, x_n)}{p(x_{n-1}, x_n)}. \quad (16)$$

Тогда весовая оценка по столкновениям:

$$\xi = \sum_{n=0}^{N} Q_n h(x_n).$$

Постановка задачи прямого моделирования процесса обтекания сетчатой конструкции

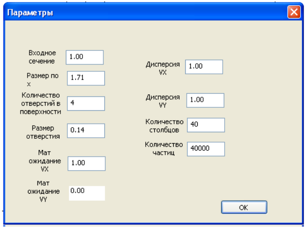


Y_{max}– размер входного сечения;
X_{max}– размер рассматриваемой области по оси X;
Вектор скорости: $\mathbf{V} = V_x\ \mathbf{n} + V_y\ \tau$,

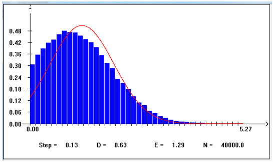
$$V_x = |\mathbf{V}| sin(\theta),\ V_y = |\mathbf{V}| cos(\theta).$$

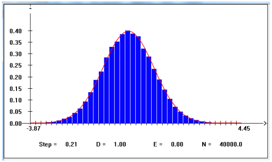
Местоположение частицы: $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{V}t$, где $\mathbf{r_0} = y_0\tau$ вектор начального положения частицы с координатами (x_0, y_0).

Задание параметров задачи прямого моделирования



Гистограмма на левой границе расчетной области по скоростям вдоль направления $\mathbf{n}$ (V_x): и вдоль направления τ (V_y):





Результаты расчетов

Для моделирования движения частиц предусмотрено два способа:

- Моделирование движения частиц проводится посредством дискретных шагов времени. На каждом шаге для каждой частицы определяются местоположение центра и значение составляющих скоростей по обеим осям. Происходит визуализация процесса.
- Последовательное моделирование траекторий движения каждой частицы. Для каждой частицы по начальным данным просчитывается траектория и вычисляется последующее ее местоположение на поверхности, границах области или в сечениях.

Результаты расчетов

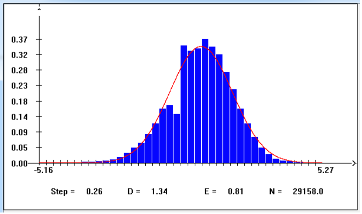


рис.1. Скорости по оси X частиц, попавших в отверстие конструкции.

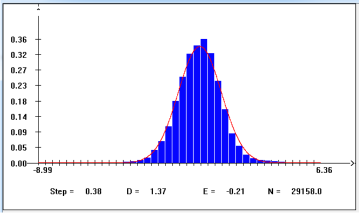


рис.2. Скорости по оси Y частиц, попавших в отверстие конструкции.

Результаты расчетов

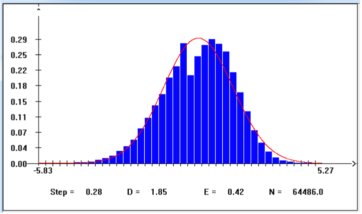


рис.3.Скорости по оси X частиц, попавших в контрольное сечение 1.

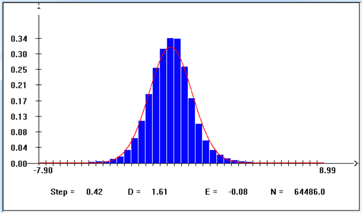


рис.4. Скорости по оси Y частиц, попавших в контрольное сечение 1.

Результаты расчетов

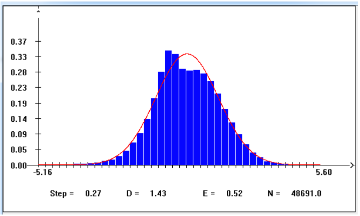


рис.5. Скорости по оси X частиц, попавших в контрольное сечение 2.

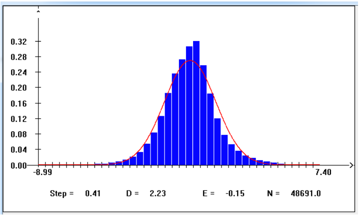


рис.6. Скорости по оси Y частиц, попавших в в контрольное сечение 2.

Заключение.

- Рассмотрена задача и приведено приближенное аналитическое решение задачи обтекания сетчатой конструкции.
- Сформулирована постановка задачи прямого моделирования, на основании которой разработана программа моделирования процесса.
- Приведены гистограммы эмпирической плотности распределения скоростей частиц, произведены оценки параметров распределения, на сетчатой поверхности и в контрольных сечениях, осуществлена визуализация процесса движения частиц. Полученные данные в дипломе позволяют оценить скорость потока и температуру в различных точках.