Экспоненциальные ряды в анализе сингулярного спектра

Пимахов Кирилл Юрьевич, гр. 422

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: к.ф.-м.н., д. Некруткин В.В.
Рецензент: к.ф.-м.н., д. Голяндина Н.Э.

Санкт-Петербург
2016г.

Basic SSA: задача восстановления сигнала

- Исходный ряд (сигнал): $\mathrm{F}_N = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$, задаваемый минимальной рекуррентной формулой

$$x_n = \sum_{k=1}^{d} b_k x_{n-k}, \quad d \leqslant n \leqslant N.$$

- Помеха: $\mathrm{E}_N = (e_0, e_1, \ldots, e_{N-1})$.
- Наблюдаемый ряд: $\mathrm{F}_N(\delta) = \mathrm{F}_N + \delta \mathrm{E}_N$.

Цель — оценить сигнал F_N.

Basic SSA: траекторная матрица

- Траекторная матрица $L \times K$ ряда $F_N = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$, $L + K = N + 1$:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{K-1} \\ x_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x_{L+K-2} \\ x_{L-1} & \cdots & x_{L+K-2} & x_{L+K-1} \end{pmatrix}.$$

- $\operatorname{rank} \mathbf{H} = d$, где d — порядок рекуррентной формулы, задающей F_N.
- $\mathbf{E}$ — аналогичная траекторная матрица помехи.

- $\widehat{\mathbf{H}}$ — сумма d главных элементарных матриц сингулярного разложения $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$.
- $\widehat{\mathrm{F}}_N(\delta) = \mathcal{S}\widehat{\mathbf{H}}$ — восстановленный сигнал (диагональное усреднение).
- Ошибка восстановления траекторной матрицы:

$$\Delta_\delta(\mathbf{H}) = \widehat{\mathbf{H}} - \mathbf{H}.$$

- Максимальная ошибка восстановления исходного сигнала:

$$\|\widehat{\mathrm{F}}_N(\delta) - \mathrm{F}_N\|_{\max} = \max_{0 \le i \le N-1} |\widehat{f}_i(\delta) - f_i| = \\ = \max_{0 \le i \le N-1} \left|\mathcal{S}\big(\Delta_\delta(\mathbf{H})\big)_{[i]}\right|.$$

Формализация задачи: обозначения

- $\mathbf{H}$ — траекторная матрица сигнала F_N, $\operatorname{rank}\mathbf{H} = d$.
- $\mathbf{H}(\delta)$ — траекторная матрица возмущенного сигнала $\mathrm{F}_N(\delta)$.
- $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\delta)$.
- $\mathbb{U}_0^{\perp}$ — подпространство, порожденное собственными векторами $\mathbf{A}$, соответствующими ненулевым собственным числам (размерность d).
- $\mathbb{U}_0^{\perp}(\delta)$ — подпространство, образованное d главными собственными векторами матрицы $\mathbf{A}(\delta)$.
- $\mathbf{P}_0^{\perp}$ и $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ — соответственно операторы ортогонального проектирования на $\mathbb{U}_0^{\perp}$ и $\mathbb{U}_0^{\perp}(\delta)$.

Формализация задачи

В. В. Некруткин (SII, 2010).

Ошибка восстановления траекторной матрицы:

$$\Delta_\delta(\mathbf{H}) = \widehat{\mathbf{H}} - \mathbf{H} = \left(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\right)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}.$$

Нас интересует близость исходного и восстановленного сигналов при увеличении длины ряда $N \to \infty$.

Точность аппроксимации сигнала F_N зависит от $\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|$.

Техника: теорема Като

$$\mathbf{B}(\delta) = \mathbf{A}(\delta) - \mathbf{A} = \mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}} - \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}.$$

$\mu_{\min}$ — минимальное положительное собственное число $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$.

Теорема (T. Kato, Perturbation theory for linear operators, 1966)

Если существует такое δ_0 , *что при любом* $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$ *выполнено неравенство* $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} < 1/2$, *то*

$$\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathbf{V}_0^{(n)},$$

где $\mathbf{V}_0^{(n)}$ *— некоторые матрицы, выражающиеся через траекторные матрицы ряда и помехи.*

Цель работы

Для сигнала $f_n = a_1^n + c a_2^n$ с $a_1 > a_2 > 1$ и $c \neq 0$ и помехи $\mathrm{E}_N = (1, 1, \ldots, 1)$ при $L, K \to \infty$

- Уточнить условие существования разложения возмущенного оператора проектирования, получаемое из $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} < 1/2$;

  Для этих рядов требование $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} < 1/2$ при грубых оценках нормы $\|\mathbf{B}(\delta)\|$ порождает условие $a_1 < a_2^2$.

- Исследовать асимптотику $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\|$;

- Исследовать асимптотическое поведение ошибки восстановления исходного ряда F_N.

Результаты

$L, K \to \infty$, $a_1 < a_2^2$.

В. В Некруткин, SII, 2010	Новые результаты
$\\|\mathbf{B}(\delta)\\|/\mu_{\min} = O\left(\sqrt{LK}(a_1/a_2^2)^N\right)$	$\\|\mathbf{B}(\delta)\\|/\mu_{\min} \sim \|\delta\|\beta\sqrt{L}(a_1/a_2^2)^N$
$\\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\\| = O\left(\sqrt{LK}(a_1/a_2^2)^N\right)$	$\\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\\| = O\left(\sqrt{L}a_2^{-N}\right)$ при $a_1 < a_2^2 \le a_1^{4/3}$; $\\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\\| \sim \|\delta\|d\sqrt{L}a_2^{-N}$ при $a_1 < a_2^{3/2}$.

Здесь d, β — константы, выражающиеся через a_1, a_2, c.

Результаты: асимптотика нормы разности проекторов

$\delta\mathbf{V}_0^{(1)}$ — линейный член разложения возмущенного оператора проектирования $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$.

Теорема

При $L, K \to \infty$

$$\left\|\mathbf{V}_0^{(1)}\right\| \sim d\,\frac{\sqrt{L}}{a_2^N},$$

где d *— константа, выраженная через* a_1, a_2, c.

Следствие

Если $a_1 < a_2^{3/2}$, *то* $\delta\mathbf{V}_0^{(1)}$ *— главный член разности* $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}$.

Результаты. Точность восстановления сигнала F_N

- $\widehat{F}_N = (\widehat{f}_0, \widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_{N-1})$ — аппроксимация сигнала F_N.
- $\|\widehat{F}_N - F_N\|_{\max} = \max_{1 \le i < N} |\widehat{f}_i - f_i|$ — максимальная ошибка восстановления.

Теорема

Если $a_1^{3/2}/a_2^2 < 1$ и $L, K \to \infty$, то

$$|\widehat{f}_{N-1} - f_{N-1}| = |\delta|\, r_{LK} + o(1),$$

где $r_{LK} \to r_\infty \in \mathbb{R}$.

Замечание

Вообще говоря, $r_\infty \neq 0$. В этом случае $\|\widehat{F}_N - F_N\|_{\max} \nrightarrow 0$ при $L, K \to \infty$.

Пример. Значения r_∞

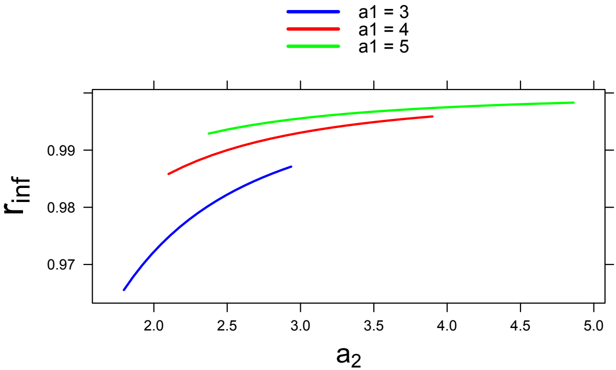

Рис.: Значение r_∞ в зависимости от a_2 для нескольких a_1.

Численный пример. Ошибки восстановления в последней точке ряда

$$D_{SSA}(N) = \frac{|\widehat{f}_{N-1} - f_{N-1}|}{|\delta| r_\infty}.$$

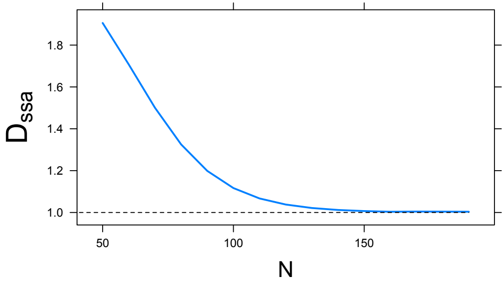

Рис.: Нормированная ошибка восстановления последнего элемента ряда. Параметры: $a_1 = 1.15$, $a_2 = 1.13$, $c = -2$, $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$, $\delta = 1$.

Численный пример. Ошибки восстановления

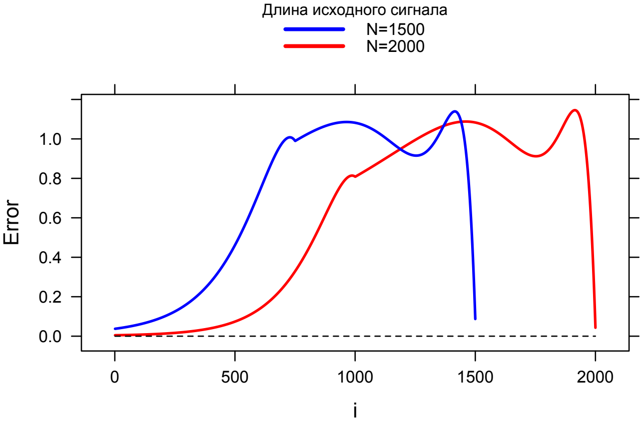

Рис.: Ошибка восстановления i-го элемента ряда $0 \leq i < N$ при $N = 1500, 2000$. Параметры:
$a_1 = 1.01, a_2 = 1.0095, c = -1, \delta = 1, L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$.

Итог

Для сигнала $f_n = a_1^n + c a_2^n$ с $a_1 > a_2 > 1$ и $c \neq 0$ и константной помехи при $L, K \to \infty$:

- Доказано, что с помощью точной оценки $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}$ нельзя ослабить условие $a_1 < a_2^2$.
- Уточнена оценка $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\|$.
- Доказано, что полученная оценка точна при $a_1 < a_2^{3/2}$.
- Доказано, что ошибка восстановления, вообще говоря, не стремится к нулю.