

Методы типа ESPRIT для оценивания параметров временных рядов

Тимофеев Алексей Олегович, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Голяндина Н.Э.
Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Некруткин В.В.



Санкт-Петербург
2010г.

Постановка задачи: временной ряд

Пусть имеется комплекснозначный временной ряд вида

$$f_n = \sum_{k=1}^r c_k a_k^n + \epsilon_n, \quad n = 0 \dots N - 1.$$

Задача: оценить параметры $\{a_k\}$.

Метод: ESPRIT, Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques.

- Paulraj, Roy и Kailath, 1985 год,
- Mahata, Soderstrom, 2004 год,
- Badeau, Richard, David, 2008 год.

Общая постановка задачи

ESPRIT умеет работать с матрицами такого вида:

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{N}, \quad \mathbf{X}, \mathbf{S}, \mathbf{N} \in \mathbb{C}^{L \times K}.$$

$$s_{jl} = \sum_{k=1}^r c_{kl} a_k^j. \quad \mathbf{C} = \{c_{kl}\} \in \mathbb{C}^{r \times L}, \quad \text{rank } \mathbf{C} = r.$$

Две задачи:

- оценивание параметров временного ряда. \mathbf{X} — ганкелева ($x_{jl} = x_{1,l+j-1}$) траекторная матрица, $K = N - L + 1$.

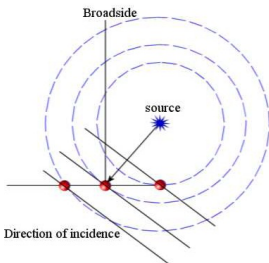
$$\mathbf{X} = [X_1 : \dots : X_K], \quad X_i = (f_{i-1}, \dots, f_{i+L-2})^T,$$

$$s_{jl} = \sum_{k=1}^r c_k a_k^{l-2} a_k^j, \quad n_{jl} = \epsilon_{j+l-2}.$$

- Direction Of Arrival.

Постановка задачи: описание DOA

x_{jl} — показание j -го сенсора в l -й момент времени.



При оценивании параметров ряда мы имеем возможность выбрать L , а в DOA L определяется числом сенсоров.

Постановка задачи: модификации

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{N}, \quad x_{jl} = s_{jl} + n_{jl} = \sum_{k=1}^r c_{kl} a_k^j + \epsilon_{jl}.$$

Решаемые задачи: DOA и анализ временных рядов.

Различия моделей данных:

- матрица шума \mathbf{N} м.б. ганкелевой ($n_{jl} = n_{1,l+j-1}$) или нет,
- $\mathbf{X}, \mathbf{S}, \mathbf{N} \in \mathbb{C}^{L \times K}$ или $\mathbb{R}^{L \times K}$,
- L фиксированное или произвольное,
- $|a_i| = 1, i = 1 \dots r$ — немодулированный ряд, или модулированный, т. е. $\exists i : |a_i| \neq 1$.

Модификации метода:

- TLS-ESPRIT, LS-ESPRIT,
- ESPRIT, ESPRIT₀,
- R-ESPRIT,
- Minimum Variance и SSA в качестве препроцессинга.

Линейная оболочка столбцов \mathbf{S} называется подпространством сигнала и имеет ранг r . Известен результат:

Теорема

Пусть есть базис подпространства сигнала $\{G_k\}_{k=1}^r$ и $\mathbf{G} = [G_1 : \dots : G_r]$. Тогда при некоторой матрице \mathbf{Z} выполнено

$$\mathbf{G}_\Delta \mathbf{Z} = \mathbf{G}^\nabla, \quad (1)$$

и собственные числа \mathbf{Z} равны $\{a_k\}_{k=1}^r$.

Замечание

При наличии шума мы можем лишь приближенно оценить подпространство сигнала. Тогда (1) превращается в приближенное равенство: $\mathbf{G}_\Delta \hat{\mathbf{Z}} \approx \mathbf{G}^\nabla$.

Модификации алгоритма ESPRIT

Возникают **два этапа**:

- оценить подпространство сигнала,
- решить приближенное равенство

$$\mathbf{G}_{\Delta} \hat{\mathbf{Z}} \approx \mathbf{G}^{\nabla}.$$

Способы оценки подпространства сигнала:

- SVD,
- используя MinVar в качестве препроцессинга,
- используя SSA в качестве препроцессинга.

Способы решения $\mathbf{G}_{\Delta} \hat{\mathbf{Z}} \approx \mathbf{G}^{\nabla}$:

- метод наименьших квадратов (LS-ESPRIT),
- обобщенный метод наименьших квадратов (TLS-ESPRIT).

Способы оценивания подпространства сигнала

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} (L \times r) & \\ \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (r \times r) & \\ \boldsymbol{\Sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (K \times r) & \\ \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix}^H.$$

SVD. Базис из сингулярных векторов $\{U_i\}_{i=1}^r$ матрицы \mathbf{X} .

Препроцессинг MinVar.

$$\mathbf{X}_{MV} = \mathbf{U}_1 \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} (\boldsymbol{\Sigma}_1^2 - K \sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{V}_1^H,$$

$\mathbf{X}_{MV,hankel}$ — ганкелизованная \mathbf{X}_{MV} .

Базис из сингулярных векторов $\{U'_i\}_{i=1}^r$ матрицы $\mathbf{X}_{MV,hankel}$.

Препроцессинг SSA.

$$\mathbf{X}_{SSA} = \mathbf{U}_1 \boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{V}_1^H,$$

$\mathbf{X}_{SSA,hankel}$ — ганкелизованная \mathbf{X}_{SSA} .

Базис из сингулярных векторов $\{U''_i\}_{i=1}^r$ матрицы $\mathbf{X}_{SSA,hankel}$.

Способы решения приближенного равенства

Имеем приближенное равенство:

$$\mathbf{G}_{\Delta} \hat{\mathbf{Z}} \approx \mathbf{G}^{\nabla}.$$

Least Squares

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}^{\nabla} - \mathbf{G}_{\Delta} \hat{\mathbf{Z}}\|^2 &\longrightarrow \min, \\ \hat{\mathbf{Z}} &= (\mathbf{G}_{\Delta})^{\dagger} \mathbf{G}^{\nabla}. \end{aligned}$$

Total Least Squares

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_{\Delta} - \mathbf{H}\|^2 + \|\mathbf{G}^{\nabla} - \mathbf{F}\|^2 &\longrightarrow \min, \\ (\mathbf{H}, \mathbf{F}) &\in \{(\mathbf{H}, \mathbf{F}) : \exists \hat{\mathbf{Z}}, \mathbf{H} \hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}\}. \end{aligned}$$

Так возникают разновидности LS-ESPRIT и TLS-ESPRIT.

Шаг 1 метода ESPRIT₀.

Сформируем из матрицы \mathbf{X} матрицу \mathbf{X}' следующим образом:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{\Delta} \\ \mathbf{X}_{\nabla} \end{pmatrix}.$$

Шаг 2 метода ESPRIT₀. SVD-разложение.

Возьмем матрицу \mathbf{G} , составленную из первых r сингулярных векторов SVD-разложения \mathbf{X}' :

$$\mathbf{G} = [\mathbf{U}_1 : \dots : \mathbf{U}_r].$$

Обозначим за \mathbf{G}_1 верхнюю половину матрицы \mathbf{G} , за \mathbf{G}_2 — нижнюю половину:

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}[1 : (L - 1),], \quad \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}[L : (2L - 2),].$$

В отсутствие шума выполнено $\mathbf{G}_1 \hat{\mathbf{Z}} \approx \mathbf{G}_2$, что можно решать в терминах LS или TLS.

Данные:

$$f_n = \sum_{k=1}^d c_k \cos(2\pi w_k n + \phi_k) + \epsilon_n, \quad n = 1 \dots N.$$

Построение матриц

$$\mathbf{Y} = [Y_1 : \dots : Y_{K-L}],$$

$$Y_j = 0.5((f_{j+L}, \dots, f_{j+2L-1})^T + (f_{j+L-1}, \dots, f_j)^T).$$

$$\{U_i\}_{i=1}^d \text{ — сингулярные вектора } \mathbf{Y}, \quad \mathbf{G} = [U_1 : \dots : U_d].$$

Приближенное равенство:

$$\mathbf{T}^{(1)} \mathbf{G} \hat{\mathbf{Z}} \approx \mathbf{T}^{(2)} \mathbf{G},$$

где $\mathbf{T}^{(1)}$ и $\mathbf{T}^{(2)}$ — тензорные матрицы размерности $(L-2) \times L$.

Собственные числа $\hat{\mathbf{Z}}$ оценивают $\cos(2\pi w_1), \dots, \cos(2\pi w_d)$.

Кроме самих методов были собраны результаты для границ Рао-Крамера. Пусть $L \leq K$.

Порядок убывания дисперсий оценок ESPRIT.

- Оценка параметров ряда в немодулир. случае: $1/(LK^2)$.
Можно выбрать такие L и K , что порядок совпадет с CRB.
Badeau, Richard, David, 2008.
- DOA, L фиксировано, $K \rightarrow \infty : 1/K$,
Otterstein, Viberg, Kailath, 1991.

Порядок убывания границ Рао-Крамера.

- Оценка параметров ряда : $1/N^3$,
Yao, Pandit, 1995.
- DOA, L фиксировано, $K \rightarrow \infty : 1/K$,
Steedly, Moses, 1993, Stoica, Nehorai, 1989.

8 тестовых примеров: $f_n = c_a r_a^n + c_b r_b^n + \sigma \epsilon_n$, $n = 0 \dots 99$.

Вещественные параметры c_a , r_a , c_b и r_b подобраны так, что:

- с увеличением номера теста убывает минимальное сингулярное число сигнала, т.е. ухудшается разделимость,
- соотношение сигнала и шума по норме во всех тестах совпадает,
- вклады обеих экспонент в сигнал равны.

Сравнивались:

- LS-ESPRIT и TLS-ESPRIT,
- ESPRIT и ESPRIT₀,
- ESPRIT и МНК.

Считалось MSD оценок параметров.

Особенность: комплексные оценки вещественных параметров.

Сравнение методов LS-ESPRIT и TLS-ESPRIT

$$f_n = c_a r_a^n + c_b r_b^n + \sigma \epsilon_n, \quad n = 0 \dots 99.$$

TLS-ESPRIT чаще дает комплексные оценки, немного лучше оценивает r_a, c_a, c_b , немного хуже — r_b .

$$r_a = 0.905, \quad r_b = 1, \quad c_a = 1.09, \quad c_b = 0.12, \quad \sigma = 0.03.$$

Таблица: MSD оценок параметров

L		\hat{r}_a	\hat{r}_b	\hat{c}_a	\hat{c}_b	$\hat{\sigma}$
50	LS	0.0047	0.00212	0.0234	0.0187	0.02935
	TLS	0.0046	0.00213	0.0233	0.0184	0.02934
10	LS	0.014	0.0071	0.065	0.066	0.0326
	TLS	0.013	0.0073	0.058	0.058	0.0324

$$f_n = c_a r_a^n + c_b r_b^n + \sigma \epsilon_n, \quad n = 0 \dots 99.$$

λ_{\min} — минимальное собственное число сигнала \mathbf{S} .

- Большое λ_{\min} — МНК-оценка r_b лучше ESPRIT-оценки, маленькое λ_{\min} — ESPRIT лучше.
- Большое λ_{\min} — МНК-оценка и ESPRIT-оценка r_a сравнимы по качеству, маленькое λ_{\min} — преимущество МНК.

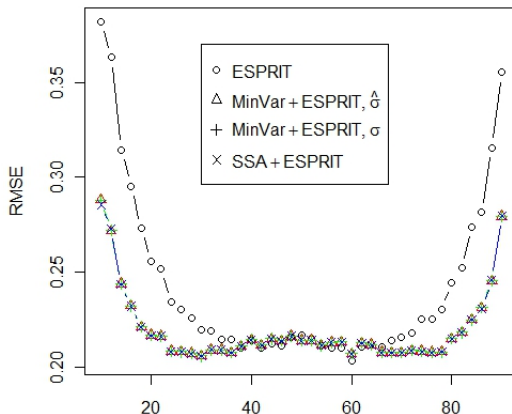
Таблица: Доля «проваленных» случаев в МНК.

μ_{\min}	ideal ($\sigma = 0.1$)	ideal ($\sigma = 0.01$)	ESPRIT ($\sigma = 0.1$)	ESPRIT ($\sigma = 0.01$)
8.66E-01	0	0	0	0
3.80E-01	0	0	0	0
9.90E-02	0	0	0	0
5.83E-02	0.0002	0	0.02375	0
1.07E-02	0.0258	0	0.34125	0
3.44E-03	0.1236	0	0.445	0
5.90E-04	0.3573	0.0002	0.48375	0.03875
5.27E-05	0.7556	0.2031	0.48125	0.44

Сравнение методов преобработки

Сигнал: $s_n = \cos(0.2\pi n)$, $n = 0 \dots 99$.

Дисперсия шума: $\sigma^2 = 1$.



Что сделано:

- систематизированы результаты различных авторов,
- проведены сравнения LS-ESPRIT и TLS-ESPRIT, ESPRIT и ESPRIT_0 , ESPRIT и МНК,
- проведено сравнение SSA и MinVar в качестве препроцессинга.

Открытые вопросы:

- Нужно расширить круг исследуемых примеров. Не рассмотрен случай близких частот. Качество разделения близких частот — это важная характеристика алгоритма.
- Необходимо глубже исследовать результаты сравнения.
- Не доведено до конца исследование границ Рао-Крамера и порядков убывания дисперсий оценок ESPRIT.