

# Идентификация кратных корней знаменателя спектральной плотности стационарных моделей

Круглова Валентина Викторовна, гр. 422

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика  
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Товстик Т.М.  
Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Москалева Н. М.



Санкт-Петербург  
2016г.

**Цель работы** состоит в том, чтобы исследовать возможность идентификации и оценки кратных корней знаменателя спектральной плотности стационарных моделей.

## Задачи:

- Моделирование гауссовских стационарных процессов авторегрессии
- Построение адекватной модели
- Выявление возможности оценки кратности корней знаменателя спектральной плотности построенных моделей

## Определение

$X_t$  – процесс авторегрессии порядка  $n$  ( $AR(n)$ ), если

$$X_t + q_1 X_{t-1} + \dots + q_n X_{t-n} = p_0 \xi_t,$$

где  $\xi_t$  – независ. сл. величина с  $E\xi_t = 0$ ,  $E\xi_t^2 = 1$ .

Спектральная плотность  $X_t$ :  $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{p_0}{q(e^{-i\lambda})} \right|^2$

При этом характеристический полином

$$q(z) = \sum_{k=0}^n q_k z^k, \quad q_0 = 1$$

имеет действительные коэффициенты и корни вне единичного круга.

Пусть  $X_t$  – стационарный процесс  $AP(n)$

## Задачи:

- Промоделировать рассматриваемый процесс и получить его реализацию  $x_1, x_2, \dots, x_N$
- Оценив параметры процесса  $q_1, \dots, q_n$ , построить модель по временному ряду
- Проверить на стационарность полученную модель и определить корни характеристического полинома модели
- Идентифицировать наличие кратных корней в знаменателе спектральной плотности

- Для получения реализаций процесса был использован метод моделирования гауссовских стационарных процессов
- Для построения модели был реализован метод Юла–Уокера

**Проблема:** При наличии кратных корней в знаменателе спектральной плотности этот метод не всегда дает положительный результат: не всегда правильно определяется их кратность.

В качестве **решения** был построен и исследован метод (пошаговый алгоритм), который позволяет выявить корни знаменателя спектральной плотности и определить их кратность (по крайней мере, у всех рассмотренных примеров).

- Пусть  $X_t$  – стационарный процесс  $AP(n)$ ,  
 $x_1, x_2, \dots, x_N$  – реализация.
- Система Юла–Уокера:

$$\hat{q}_0 R_k^N + \hat{q}_1 R_{k-1}^N + \dots + \hat{q}_n R_{k-n}^N = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

- Систему Юла–Уокера можно продолжить:

$$\hat{q}_0 R_{n+k}^N + \hat{q}_1 R_{n+k-1}^N + \dots + \hat{q}_n R_k^N = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

- Метод наименьших квадратов:

$$\sum_{j=0}^n \hat{q}_j \sum_{k=1}^v R_{k-j}^N R_{k-t}^N = 0, \quad \hat{q}_0 = 1, \quad t = 1, \dots, n$$

- $\hat{p}_0 = \sqrt{R_0^N + \hat{q}_1 R_1^N + \dots + \hat{q}_n R_n^N}$

- Для процесса  $AP(n)$  справедлива гипотеза  $H_0 : q_{n+1} = 0$

- Пусть процесс  $AP(n)$ , причем  $n = 2k, k > 1$ :  $q(z)$  имеет корни  $z_{1,2} = e^{\alpha}(\cos \omega \pm i \sin \omega)$  кратности  $k$ . Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_N$  — наблюдения.

ШАГ 1. Считая, что порядок модели  $n = 2$ , вычислим

$$\hat{q}^{(1)}(z) = 1 + \hat{q}_1^{(1)}z + \hat{q}_2^{(1)}z^2, \quad \hat{z}_{1,2}^{(1)} = e^{\alpha^{(1)}}(\cos \omega^{(1)} \pm i \sin \omega^{(1)}).$$

ШАГ 2. Составим  $Y_t$ :  $Y_t = X_{t+2} + \hat{q}_1^{(1)}X_{t+1} + \hat{q}_2^{(1)}X_t$ . Получим

$y_1, \dots, y_{N-2}$ . Выполним ШАГ 1 с наблюдениями  $y_1, \dots, y_{N-2}$ :

$$\hat{q}^{(2)}(z) = 1 + \hat{q}_1^{(2)}z + \hat{q}_2^{(2)}z^2, \quad \hat{z}_{1,2}^{(2)} = e^{\alpha^{(2)}}(\cos \omega^{(2)} \pm i \sin \omega^{(2)}).$$

ШАГ 3. Повторим ШАГ 2 еще  $(k - 2)$  раза, используя наблюдения и оценки коэффициентов из предыдущего шага. Получим  $(\alpha^{(1)}, \omega^{(1)}), (\alpha^{(2)}, \omega^{(2)}), \dots, (\alpha^{(k)}, \omega^{(k)})$ .

- При этом, для рассматриваемых примеров все  $\alpha^{(j)}$  оказывались близкими к  $\alpha$ , а все  $\omega^{(j)}$  — к  $\omega$ .

ШАГ 4. Реализуем ШАГ 2 при условии, что  $n = 1$ :

$\hat{q}^{(k+1)}(z) = 1 + \hat{q}_1^{(k+1)}z$ . Проверим  $H_0 : q_1^{(k+1)} = 0$ . Если гипотеза не отвергается, то остался только белый шум.

- Позволяет оценить параметры процесса по временному ряду для построения адекватной модели
- Дает возможность идентификации наличия кратных корней знаменателя спектральной плотности и определения их кратности
- Применим в случаях с высоким порядком кратности корней и при наличии «мешающего воздействия»



# Оценка погрешностей $\hat{\alpha}$ и $\hat{\omega}$ у процесса $AP(2)$

**Модель  $AP(2)$ :**  $X_t + \hat{q}_1 X_{t-1} + \hat{q}_2 X_{t-2} = \hat{p}_0 \xi_t$ , где

$$\hat{q}_1 = -2e^{-\hat{\alpha}} \cos(\hat{\omega}), \quad \hat{q}_2 = e^{-2\hat{\alpha}} \quad \hat{\alpha} = \alpha + \mathcal{E}_1, \quad \hat{\omega} = \omega + \mathcal{E}_2,$$

где  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  – завис. сл. величины с  $E\mathcal{E}_1 = 0$ ,  $E\mathcal{E}_2 = 0$ .

- $\tilde{F} = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{B}^k \tilde{\sigma} (\tilde{B}^T)^k$ , где  $\tilde{B} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} p_0^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $\tilde{F}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies D\hat{q}_1 = \frac{p_0^2 a}{N} = \frac{C_1}{N}, \quad D\hat{q}_2 = \frac{p_0^2 d}{N} = \frac{C_2}{N}$

- $D\hat{q}_2 = 4e^{-4\alpha} E\mathcal{E}_1^2 \implies E\mathcal{E}_1^2 = \frac{C_2}{4N} e^{4\alpha}$

- Из уравнений Юла–Уокера получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cos(\omega)(E\mathcal{E}_1^2 - E\mathcal{E}_2^2) + \sin(\omega)E\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 = 0 \\ \cos^2(\omega)E\mathcal{E}_1^2 + \sin^2(\omega)E\mathcal{E}_2^2 + \sin(2\omega)E\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 = \frac{C_1}{4N} e^{2\alpha} \end{cases} \implies E\mathcal{E}_2^2 = \frac{C_1}{4N} e^{2\alpha}$$

- Проверка совпадения  $\hat{\omega}^{(1)}$  и  $\hat{\omega}^{(2)}$ :  $E|\hat{\omega}^{(1)} - \hat{\omega}^{(2)}| \leq 2\sigma_\omega$ ,  $\sigma_\omega^2 = E\mathcal{E}_2^2$

- С вероятностью 0.95:  $|\hat{\omega}^{(1)} - \hat{\omega}^{(2)}| \leq 2(1.96\sigma_\omega)$

$$|\hat{\omega}^{(i)} - \omega| \leq 1.96\sigma_\omega, \quad i = 1, 2$$

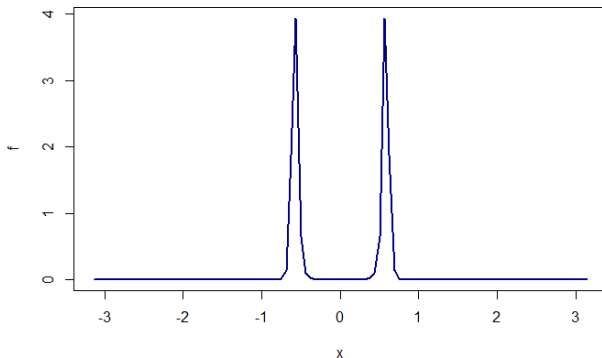
- Проведено моделирование процесса с дискретным параметром и спектральной плотностью, имеющей в знаменателе корни разной кратности
- Реализован метод Юла–Уокера для построения модели и оценивания параметров стационарного процесса с дробно–рациональной спектральной плотностью
- Предложен вариант решения проблемы идентификации кратных корней знаменателя спектральной плотности и определения их кратности
- Построенный пошаговый алгоритм исследован на процессах, у которых характеристический полином содержал действительные и комплексно–сопряженные корни, как кратные, так и простые

Пусть  $X_t$  – процесс **AP(6)**:

$$X_t - 4.615X_{t-1} + 9.665X_{t-2} - 11.531X_{t-3} + 8.260X_{t-4} - \\ - 3.372X_{t-5} + 0.624X_{t-6} = 0.0028\xi_t$$

**Корни  $q(z)$ :**  $0.9 \pm 0.6i$  кратности 3  
 $\alpha = 0.07706$ ,  $\omega = 0.58871$

**Спектральная плотность:**



# Подбор модели по методу Юла–Уокера

Точные характеристики процесса			
Корни $q(z)$	$\alpha$	$\omega$	Период
$z_{1,2} = 0.9 \pm 0.6i$ кратности 3	0.07706	0.58871	10.6728
Характеристики модели AP(7)			
Корни $\hat{q}(z)$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\omega}$	Период
$\hat{z}_{1,2} = 0.897 \pm 0.542i,$	0.04715, $\varepsilon_1^{(\alpha)} = 0.03,$	0.54354, $\varepsilon_1^{(\omega)} = 0.05,$	11.56,
$\hat{z}_{3,4} = 0.836 \pm 0.6i,$	0.02877, $\varepsilon_2^{(\alpha)} = 0.05,$	0.62278, $\varepsilon_2^{(\omega)} = 0.03,$	10.09,
$\hat{z}_{5,6} = 1.001 \pm 1.123i,$	0.4087, $\varepsilon_3^{(\alpha)} = 0.3,$	0.84275, $\varepsilon_3^{(\omega)} = 0.25,$	7.46,
$\hat{z}_7 = -1.28$	0.24707, $\varepsilon_4^{(\alpha)} = 0.17$	3.14159, $\varepsilon_4^{(\omega)} = 2.6$	2

**Модель AP(7)** по методу Юла–Уокера:

$$X_t - 3.315X_{t-1} + 4.514X_{t-2} - 2.291X_{t-3} - 1.045X_{t-4} + \\ + 2.182X_{t-5} - 1.241X_{t-6} + 0.296X_{t-7} = 0.016\xi_t$$

# Подбор модели по пошаговому алгоритму

Результат оценивания при $n = 2$ , ШАГ 1			
Корни $\hat{q}^{(1)}(z)$	$\alpha^{(1)}$	$\omega^{(1)}$	Период
$z_{1,2}^{(1)} = 0.844 \pm 0.562i$ , $\sqrt{E\mathcal{E}_1^2} = 0.0224$ , $\sqrt{E\mathcal{E}_2^2} = 0.0171$	$0.01434$ , $\varepsilon_1^{(\alpha)} = 0.06$	$0.58724$ , $\varepsilon_1^{(\omega)} = 0.001$	10.69
Результат оценивания при $n = 2$ , ШАГ 2			
Корни $\hat{q}^{(2)}(z)$	$\alpha^{(2)}$	$\omega^{(2)}$	Период
$z_{1,2}^{(2)} = 0.907 \pm 0.582i$	$0.07433$ , $\varepsilon_2^{(\alpha)} = 0.003$	$0.57043$ , $\varepsilon_2^{(\omega)} = 0.02$	11.01
Результат оценивания при $n = 2$ , ШАГ 3			
Корни $\hat{q}^{(3)}(z)$	$\alpha^{(3)}$	$\omega^{(3)}$	Период
$z_{1,2}^{(3)} = 0.999 \pm 0.699i$	$0.19874$ , $\varepsilon_3^{(\alpha)} = 0.12$	$0.6109$ , $\varepsilon_3^{(\omega)} = 0.02$	10.29
Результат оценивания при $n = 1$ , ШАГ 4			
Корни $\hat{q}^{(4)}(z)$	$\alpha^{(4)}$	$\omega^{(4)}$	Период
$z_1^{(4)} = 21.74087$	3.07919	0	—

- Методом Юла–Уокера кратные корни выявить не удалось, разница между исходными корнями и полученными оценками существенна
- Пошаговый алгоритм позволил идентифицировать кратные корни и определить их порядок кратности
- При пошаговом алгоритме величины погрешности оказались меньше, чем при методе Юла–Уокера
- По пошаговому алгоритму оценивание  $\omega$  оказалось лучше, чем оценивание  $\alpha$

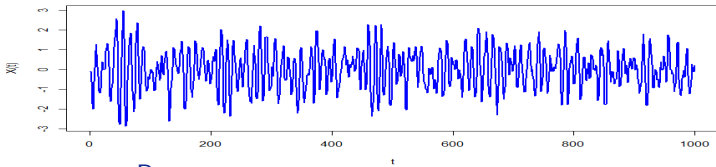


Рис.: Реализация процесса  $AR(2)$ , кратность 1

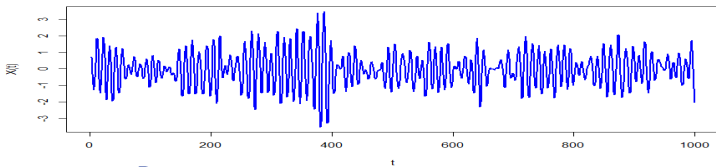


Рис.: Реализация процесса  $AR(4)$ , кратность 2

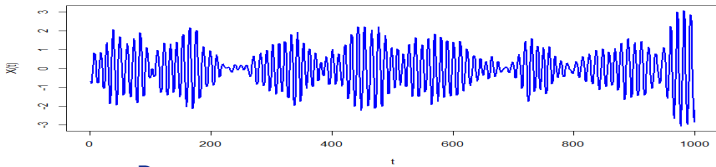


Рис.: Реализация процесса  $AR(6)$ , кратность 3