Некоторые задачи аппроксимации подпространства сигнала

Горбунова Ирина Николаевна, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. В.В. Некруткин
Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Н.Э. Голяндина

Санкт-Петербург
2012г.

Основные обозначения: подпространство сигнала

- $F_N = (x_0, \ldots, x_{N-1})$ — сигнал: $x_n = \sum_{k=1}^{d} a_k x_{n-k}$;
- Минимальная ЛРФ;
- $\mathbf{H}$ — траекторная ганкелева матрица сигнала размерности $L \times K$, где $N = K + L - 1$, т.е. $\mathbf{H}[i, j] = x_{i+j-2}$;
- $\min(L, K) > d = \text{rank}\ \mathbf{H}$;
- $\mathrm{U}_0^{\perp}$ — линейное пространство, натянутое на столбцы матрицы $\mathbf{H}$; $\dim \mathrm{U}_0^{\perp} = d$;
- $\mathbf{P}_0^{\perp}$ — ортогональный проектор на $\mathrm{U}_0^{\perp}$.

Пространство $\mathrm{U}_0^{\perp}$ содержит большую информацию о сигнале.

Основные обозначения: возмущение сигнала

- $E_N = (e_0, \ldots, e_{N-1})$ — помеха;
- $F_N(\delta) = F_N + \delta E_N$ — возмущенный сигнал, δ — формальный параметр возмущения;
- $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$;
- $\mathrm{U}_0^\perp(\delta)$ — линейное пространство, натянутое на d главных сингулярных векторов SVD матрицы $\mathbf{H}(\delta)$;
- $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ — ортогональный проектор на $\mathrm{U}_0^\perp(\delta)$.

Близость подпространств

На близости возмущенного и невозмущенного подпространств сигнала основаны многочисленные методы анализа временных рядов (Signal Subspace Methods):

- методы Прони и Писаренко;
- ESPRIT и MUSIC;
- SSA (*Singular Spectrum Analysis*),
- и др.

Мера близости — $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\|$ — синус максимального угла между подпространствами.

Асимптотическая постановка задачи

- F_N, E_N и $F_N(\delta)$ — конечные отрезки рядов, $N \to \infty$;
- Выбор $L = L(N)$; $K = N - L + 1$;
- $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}(\delta)$; $\mathrm{U}_0^\perp$ и $\mathrm{U}_0^\perp(\delta)$; $\mathbf{P}_0^\perp$ и $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$.

Общая задача

Найти условия, при которых (при $N \to \infty$ и $L = L(N)$) $\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|$ стремится к нулю, и оценить скорость этой сходимости.

Подход к решению

В.В. Некруткин (SII, 2010):

1. Оценки сверху норм $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\|$.
2. Примеры (условия сходимости и скорость сходимости).

1. **Сигналы:**
   - полиномиальные;
   - экспоненциальные;
   - тригонометрические.
2. **Помехи:**
   - тех же типов;
   - линейные стационарные последовательности.

Задача диплома

Задача

Распространить результаты на:

1. случай сигнала, имеющего вид экспоненциально-модулированной гармоники;
2. многомерные временные ряды, траекторными матрицами которых являются блок-ганкелевые матрицы.

Модулированная гармоника: базовое утверждение

- $\mathbf{H}, \mathbf{E}$ — траекторные матрицы сигнала и помехи;
- $\mu_{\min}, \mu_{\max}$ — минимальное и максимальное положительные собственные числа матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$;
- $\nu_{\max}$ — максимальное собственное число матрицы $\mathbf{E}\mathbf{E}^T$;
- $$\Theta = \sqrt{\frac{\nu_{\max}}{\mu_{\max}} \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}}\ .$$

В.В. Некруткин, 2010:

Теорема

Если $\Theta \to 0$ *при* $N \to \infty$, *тогда для любого* δ

$$\limsup_N \Theta^{-1} \|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\| \le C|\delta|.$$

ТЕХНИКА:
Вычисление асимптотики максимального и минимального сингулярных чисел ганкелевых и блок-ганкелевых матриц.

ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ:
Экспоненциально–модулированная гармоника, многомерные ряды тригонометрического, экспоненциального и полиномиального типов.

Результаты: модулированная гармоника — сигнал

Сигнал: $x_n = a^n \cos(2\pi\omega n + \phi)$, $\omega \in (0, 1/2)$, $a > 1$.

Для любого δ при $N \to \infty$:

Предложение

- *Пусть* $e_n = \sum_{l=1}^{p} \gamma_l \cos(2\pi\omega_l n + \phi_l)$. *Тогда*

$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\| = |\delta| O\big(\sqrt{LK} a^{-N}\big), \quad \forall L = L(N).$$

- *Пусть* e_n *— полином степени* m.

  1. Если $L/N \to \alpha \in (0, 1)$, *то*

$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\| = |\delta| O\big(N^{m+1} a^{-N}\big).$$

  2. Если L *или* K *постоянны, то*

$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\| = |\delta| O\big(N^{m+1/2} a^{-N}\big).$$

Результаты: модулированные гармоники— помеха

Сигнал:

$$x_n = \beta_1 a_1^n + \ldots + \beta_p a_p^n, \quad a_i > 1.$$

Помеха:

$$e_n = \sum_{j=1}^{\ell} c_j b_j^n \cos(2\pi\omega_j n + \phi_j), \quad b_j > 1.$$

$b_{\max} = \max_j b_j$, $a_{\max} = \max_i a_i$, $a_{\min} = \min_i a_i$.

Предложение

Если $\tau = b_{\max} a_{\max}/a_{\min}^2 < 1$, *то при* $N \to \infty$

$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\| = |\delta| O\big(\tau^{-N}\big)$$

для любых δ *и* $L = L(N)$.

Многомерный сигнал: постановка задачи

- $F_N^{(1)}, \ldots, F_N^{(\ell)}$ — компоненты многомерного сигнала, которые управляются ЛРФ порядков $d_i, i \in (1, \ldots, \ell)$;
- $\mathbf{H}^{(i)}$ размера $L \times K$ — траекторные матрицы $(\min(L, K) > \max\{d_i\})$;
- $\mathbf{H} = [\mathbf{H}^{(1)} : \ldots : \mathbf{H}^{(\ell)}]$ — матрица размера $L \times \ell K$.

Предположение: Подпространства компонент сигнала совпадают.

$\mathbf{P}_0^{\perp}$ — проектор на это общее подпространство.

Постановка задачи

Выделить «общую часть» из возмущенных рядов.
Формально: найти условия, при которых $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\|$ стремится к нулю, и оценить скорость этой сходимости.

Результаты: многомерные тригонометрические сигналы и помехи

Сигналы и помехи: ($\ell = 1, 2,\ \alpha_{i\ell} \neq 0$):

$$x_n^{(\ell)} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i\ell} \cos(2\pi\omega_i n), \quad e_n^{(\ell)} = \sum_{i=1}^{r_\ell} b_{i\ell} \cos(2\pi\nu_{i\ell} n).$$

Условие: множества $\{\nu_i^{(1)}\}$ и $\{\nu_i^{(2)}\}$ не пересекаются с $\{\omega_i\}$,

Предложение

Если $\min(L, K) \to \infty$, *то существует такое* $\delta_0 > 0$, *что при* $|\delta| < \delta_0$

$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\| = |\delta| O\big(1/\min(L, K)\big).$$

Результаты: многомерные полиномиальные сигналы и случайные помехи

Двумерный сигнал: два полинома степени m.

Помеха: линейные стационарные последовательности

$$e_n^{(1)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j^{(1)} \epsilon_{j+n}^{(1)}, \quad e_n^{(2)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j^{(2)} \epsilon_{j+n}^{(2)},$$

где $\epsilon_n^{(i)}$ — н. о. р. в. с $\mathbb{E}\epsilon_n^{(i)} = 0$, $\mathbb{D}\epsilon_n^{(i)} = 1$ и $\mathbb{E}|\epsilon_n^{(i)}|^3 < \infty$, $\sum_j |c_j^{(i)}| < \infty$. Процессы $\epsilon_i^{(1)}$ и $\epsilon_i^{(2)}$ могут быть зависимы.

Предложение

Если $L/N \to \alpha \in (0,1)$, то для любого δ и $N > N_0(\delta)$ почти наверное $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\| = |\delta| O\left(\sqrt{\ln N} N^{-m-1}\right)$.

Итоги

- Выведены условия, при которых $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\| \to 0$, и получена оценка скорости этой сходимости для сигнала, имеющего вид экспоненциально-модулированной гармоники, и некоторых аддитивных помех;
- Рассмотрены случаи, когда такой временной ряд выступает в качестве аддитивной помехи;
- Решена аналогичная задача для многомерных сигналов в случае, если подпространства их компонент совпадают.