Кафедра статистического моделирования
Дипломная работа
студентки 522-й группы Недзвецкой Кристины Александровны

Матричные методы оптимизации нестационарных недетерминированных конечных автоматов с периодически меняющейся структурой

Научный руководитель:
к. ф.–м. н., доцент А.Ю.Пономарева
Рецензент:
д. ф.–м. н., профессор М.К. Чирков

Санкт–Петербург
2006 г.

Описание модели

- Область задания: $R_1 = (\{0,1\}, \vee, \&, \leq)$, $\vee$ — сложение, $\&$ — умножение; $R_1^{m,n}$ — множество всех матриц размера $(m \times n)$ над R_1.
- Модель: $\mathcal{A} = \langle X^{(\tau)},\ A^{(\tau)},\ Y^{(\tau)},\ \mathbf{r},\ \{\mathbf{D}^{(\tau)}(s,l)\},\ \mathbf{q}^{(\tau)},\ t_p,\ T\rangle$, где
    - $\tau = \tau(t) = \begin{cases} t, & t \leq t_p \\ (t - t_p - 1)(\operatorname{mod} T) + t_p + 1, & t > t_p \end{cases};$
    - $X^{(\tau)}$ – входной алфавит, $Y^{(\tau)}$ – выходной алфавит, $\tau = \overline{1, t_p + T}$;
    - $A^{(\tau)}$ – алфавит состояний, $|A^{(\tau)}| = m_\tau$, $\tau = \overline{0, t_p + T}$, $A^{(t_p+T)} = A^{(t_p)}$ (периодичность);
    - $\mathbf{r} \in R_1^{1,m_0}$ – начальный вектор (с каких состояний алфавита $A^{(0)}$ автомат начнет работу);
    - $\mathbf{D}^{(\tau)}(s,l) \in R_1^{m_{\tau-1},m_\tau}$ – правило перехода из состояний алфавита $A^{(\tau-1)}$ в состояния алфавита $A^{(\tau)}$, $x_s \in X^{(\tau)}$, $y_l \in Y^{(\tau)}$, $\tau = \overline{1, t_p + T}$;
    - $\mathbf{q}^{(\tau)} \in R_1^{m_\tau,1}$ – финальный вектор (в каких состояниях алфавита $A^{(\tau)}$ автомат закончит работу), $\tau = \overline{0, t_p + T}$, $\mathbf{q}^{(t_p+T)} = \mathbf{q}^{(t_p)}$ (периодичность).

Обобщенное отображение, эквивалентность автоматов

- Множество допустимых слов:

$$Z_{\text{доп}} = \{(w,v)|w = x_{s_1}\ldots x_{s_d},\ v = y_{l_1}\ldots y_{l_d},$$
$$x_{s_t} \in X^{(\tau(t))},\ y_{l_t} \in Y^{(\tau(t))}\ \forall t = \overline{1,d}\}\bigcup\{(e,e)\}.$$

- Обобщенное отображение:

$$\Phi_{\mathcal{A}}(w,v) = \begin{cases} \mathbf{r}\prod_{t=1}^{d}\mathbf{D}^{(\tau(t))}(s_t,l_t)\mathbf{q}^{(\tau(d))}, & |w| = |v| > 0, \\ \mathbf{r}\mathbf{q}^{(0)}, & w = v = e,\ |e| = 0 \end{cases},$$

где $w = x_{s_1}x_{s_2}\ldots x_{s_d}$, $v = y_{l_1}y_{l_2}\ldots y_{l_d}$, $(w,v) \in Z_{\text{доп}}$.

- Эквивалентность автоматов: $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, если

$$\Phi_{\mathcal{A}}(w,v) = \Phi_{\mathcal{B}}(w,v)\ \forall (w,v) \in Z_{\text{доп}}.$$

Цель работы

- Автомат $\mathcal{A}$ *находится в минимальной форме* если не существует эквивалентного ему автомата $\mathcal{B}$, такого, что

$$|B^{(\tau)}| \leq |A^{(\tau)}|,\ \tau = \overline{1, t_p + T},\quad \sum_{\tau=0}^{t_p+T-1} |B^{(\tau)}| < \sum_{\tau=0}^{t_p+T-1} |A^{(\tau)}|.$$

- Цель работы: построить автомат $\mathcal{B}$, такой, что
  1. $\mathcal{B} \sim \mathcal{A}$, $|B^{(\tau)}| \leq |A^{(\tau)}|,\ \tau = \overline{1, t_p + T}$ и хотя бы для одного τ это неравенство — строгое.
  2. $\mathcal{B}$ является минимальной формой автомата $\mathcal{A}$.

Правосторонне приведенная форма автомата

$$\Phi_i(w,v) = \mathbf{e}_i \prod_{t=1}^{d} \mathbf{D}^{(\tau(t))}(s_t, l_t)\mathbf{q}^{(\tau(d))}$$

$$w = x_{s_1}x_{s_2}\ldots x_{s_d},\ v = y_{l_1}y_{l_2}\ldots y_{l_d},\ (w,v) \in Z_{\text{доп}}.$$

- Начально эквивалентные в такте τ состояния: a_i, $a_j \in A^{(\tau)}$, такие, что

$$\Phi_i(w,v) = \Phi_j(w,v),$$

$$\forall (w,v) : \quad \left[\begin{array}{l} |w| = |v| = \tau,\ \tau = \overline{0, t_p}, \\ |w| = |v| = \tau + (k-1)T,\ \forall k = 1,2,\ldots,\ \tau = \overline{t_p+1, t_p+T} \end{array} \right. .$$

$$A^{(\tau)} = \bigsqcup_{\rho,\ \rho \le m_\tau} \Omega_\rho^{(\tau)}.$$

- Правосторонняя преобразующая матрица автомата в такте τ : $\mathbf{H}_q^{(\tau)} \in R_1^{m_\tau,\rho}$, у которой каждый вектор–столбец сопоставлен одному из класов $\Omega_\rho^{(\tau)}$.
- Правосторонне приведенная форма автомата $\mathcal{A}$: любой автомат $\mathcal{B}$, такой, что $\mathcal{B} \sim \mathcal{A}$ и $\mathbf{H}_q^{(\tau)}(\mathcal{B}) = \mathbf{I}(|B^{(\tau)}|)$, $\tau = \overline{0, t_p+T}$ (у $\mathcal{B}$ ни в одном такте нет ни одной пары начально эквивалентных состояний).

Результаты: построение правосторонне приведенной формы

$$\mathcal{A} = \langle X^{(\tau)},\ A^{(\tau)},\ Y^{(\tau)},\ \mathbf{r},\ \{\mathbf{D}^{(\tau)}(s,l)\},\ \mathbf{q}^{(\tau)},\ t_p,\ T\rangle,$$
$$\mathbf{H}_q^{(\tau)},\ \tau = \overline{0, t_p + T}.$$

- **Лемма.** $\mathbf{H}_q^{(\tau)}\mathbf{H}_q^{(\tau)T}\mathbf{q}^{(\tau)} = \mathbf{q}^{(\tau)}$; кроме того, если
  - $w = w_1 w_2,\ v = v_1 v_2,\ |w_1| = |v_1| = d_1,\ |w_2| = |v_2| = d_2,\ d = d_1 + d_2;$
  - $\mathbf{h}_q(w_2, v_2) = \prod\limits_{t=d_1+1}^{d} \mathbf{D}(s_t, l_t)\mathbf{q}^{(\tau(d))},\ d_1 = \overline{0, d-1},\ (w_2, v_2) \in Z_{\text{доп}},$

  то
  $$\mathbf{H}_q^{(\tau(d_1)-1)}\mathbf{H}_q^{(\tau(d_1)-1)T}\mathbf{h}_q(w_2, v_2) = \mathbf{h}_q(w_2, v_2).$$

- **Теорема.** Если автомат $\mathcal{B}$ получен из автомата $\mathcal{A}$ с помощью следующего преобразования:

  $$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}\mathbf{H}_q^{(0)},\ \mathbf{D}_B^{(\tau)}(s,l) = \mathbf{H}_q^{(\tau-1)T}\mathbf{D}^{(\tau)}(s,l)\mathbf{H}_q^{(\tau)},\ \mathbf{q}_B^{(\tau)} = \mathbf{H}_q^{(\tau)T}\mathbf{q}^{(\tau)},$$

  то $\mathcal{B} \sim \mathcal{A}$ и автомат $\mathcal{B}$ правосторонне приведен.

Левосторонне приведенная форма автомата

$$\Phi^j(w,v) = \mathbf{r}\prod_{t=1}^{d}\mathbf{D}^{(\tau(t))}(s_t,l_t)\mathbf{e}_j$$

$$w = x_{s_1}x_{s_2}\dots x_{s_d},\ v = y_{l_1}y_{l_2}\dots y_{l_d},\ (w,v)\in Z_{\text{доп}}.$$

- Финально эквивалентные в такте τ состояния: $a_i,\ a_j \in A^{(\tau)}$, такие, что

$$\Phi^i(w,v) = \Phi^j(w,v),$$

$$\forall (w,v):\quad \left[\begin{array}{l} |w| = |v| = \tau,\ \tau = \overline{0,t_p}, \\ |w| = |v| = \tau + (k-1)T,\ \forall k = 1,2,\dots,\ \ \tau = \overline{t_p+1, t_p+T} \end{array}\right. .$$

$$A^{(\tau)} = \bigsqcup_{g,\ g\le m_\tau} \Theta_g^{(\tau)}.$$

- Левосторонняя преобразующая матрица автомата в такте τ : $\mathbf{H}_r^{(\tau)} \in R_1^{g,m_\tau}$, у которой каждый вектор–строка сопоставлен одному из класов $\Theta_g^{(\tau)}$.
- Левосторонне приведенная форма автомата: любой автомат $\mathcal{B}$, такой, что $\mathcal{B}\sim\mathcal{A}$ и $\mathbf{H}_r^{(\tau)}(\mathcal{B}) = \mathbf{I}(|B^{(\tau)}|)$, $\tau = \overline{0, t_p+T}$ (у $\mathcal{B}$ ни в одном такте нет ни одной пары финально эквивалентных состояний).

Результаты: построение левосторонне приведенной формы

$$\mathcal{A} = \langle X^{(\tau)},\ A^{(\tau)},\ Y^{(\tau)},\ \mathbf{r},\ \{\mathbf{D}^{(\tau)}(s,l)\},\ \mathbf{q}^{(\tau)},\ t_p,\ T\rangle,$$
$$\mathbf{H}_r^{(\tau)},\ \tau = \overline{0, t_p + T}.$$

- **Лемма.** $\mathbf{r}\mathbf{H}_r^{(\tau)T}\mathbf{H}_r^{(\tau)} = \mathbf{r}$; кроме того, если
  - $w = w_1 w_2$, $v = v_1 v_2$, $|w_1| = |v_1| = d_1$, $|w_2| = |v_2| = d_2$, $d = d_1 + d_2$;
  - $\mathbf{h}_r(w_1, v_1) = \mathbf{r} \prod_{t=1}^{d_1} \mathbf{D}(s_t, l_t),\ d_1 = \overline{0, d-1},\ (w_1, v_1) \in Z_{\text{доп}},$

  то
  $$\mathbf{h}_r(w_1, v_1)\mathbf{H}_r^{(\tau(d_1)-1)T}\mathbf{H}_r^{(\tau(d_1)-1)} = \mathbf{h}_r(w_1, v_1).$$

- **Теорема.** Если автомат $\mathcal{B}$ получен из автомата $\mathcal{A}$ с помощью следующего преобразования:
  $$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}\mathbf{H}_r^{(0)T},\ \mathbf{D}_B^{(\tau)}(s,l) = \mathbf{H}_r^{(\tau-1)}\mathbf{D}^{(\tau)}(s,l)\mathbf{H}_r^{(\tau)T},\ \mathbf{q}_B^{(\tau)} = \mathbf{H}_r^{(\tau)}\mathbf{q}^{(\tau)},$$

  то $\mathcal{B} \sim \mathcal{A}$ и автомат $\mathcal{B}$ левосторонне приведен.

Результаты: свойства приведенных форм

$$\mathbf{H}_q^{(\tau)},\ \tau = \overline{0, t_p + T},$$
$$\mathbf{H}_r^{(\tau)},\ \tau = \overline{0, t_p + T}.$$

- **Теорема.** Если автомат $\mathcal{B}$ — правосторонне приведенная форма автомата $\mathcal{A}$, то его левосторонняя преобразующая матрица $\mathbf{H}_r^{(\tau)}(\mathcal{B})$ может быть построена из различных строк матрицы $\mathbf{H}_r^{(\tau)}\mathbf{H}_q^{(\tau)}$.
- **Теорема.** Если автомат $\mathcal{B}$ — левосторонне приведенная форма автомата $\mathcal{A}$, то его правосторонняя преобразующая матрица $\mathbf{H}_r^{(\tau)}(\mathcal{B})$ может быть построена из различных столбцов матрицы $\mathbf{H}_r^{(\tau)}\mathbf{H}_q^{(\tau)}$.

Эти теоремы показывают, что если

- автомат $\mathcal{A}$ был левосторонне приведен, то автомат $\mathcal{B}$ так же будет левосторонне приведен;
- автомат $\mathcal{A}$ был правосторонне приведен, то автомат $\mathcal{B}$ так же будет правосторонне приведен.

Результаты: построение минимальных форм

- Недостижимое состояние: $a_i \in A^{(\tau(d))}$, такое, что для любых (w, v), $w = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_d}$, $v = y_{l_1} y_{l_2} \ldots y_{l_d}$, $\mathbf{r} \prod_{t=1}^{d} \mathbf{D}^{(\tau(t))}(s_t, l_t)\mathbf{e}_i = 0$.
- **Теорема.** Если
  1. удалить из состояний автомата $\mathcal{A}$ все недостижимые, а затем
  2. построить левосторонне приведенную форму, из нее —
  3. построить правосторонне приведенную форму,

  то полученный автомат будет находиться в минимальной форме (у него ни в одном такте не будет ни одной пары начально эквивалентных состояний и ни одной пары финально эквивалентных состояний).
- При этом, если поменять 2. и 3. местами, то получившийся в результате автомат так же будет находиться в минимальной форме.