Связность в гиперграфах и матроидах

Сергеева Оксана Александровна, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Сушков Ю.А.
Рецензент: аспирант Прудникова Ю.А.

Санкт-Петербург
2008г.

Введение

Многорежимные системы (МРС) – системы, у которых настройка на определенный режим работы осуществляется путем дискретного изменения составляющих элементов и связей между ними, то есть путем изменения структуры системы.
Примеры МРС: механические коробки передач, электрические фильтры и другие радиоэлектронные устройства, дискретно настраиваемые регуляторы давления с изменяемой структурой и др.

Гиперграфы – представление МРС.

Настройка на определенный режим работы МРС – объединение разных компонент в одну введением дополнительных связей $\Rightarrow$ понятие связности.

Конкретные интерпретации понятия связности определяют и конкретные приложения соответствующих математических моделей систем.

Связность можно вводить:

- через гиперграфы,
- через матроиды.

Основные определения

Гиперграфом называется пара $\Gamma = \langle \Gamma D, D \rangle$, где ΓD – конечное множество вершин гиперграфа, а D – конечное множество его ребер.
Если у каждого ребра q вершин, то такой гиперграф называется *q-униформным*. $(q = 3)$

Определение

Условие независимости для множества ребер D –

$$|\Gamma D| \geq |D| + q - 1.$$

Степень свободы – $\sigma = |\Gamma D| - |D|$.

Степень вершины – количество инцидентных ей ребер.

Гипердерево (одна компонента связности) – $\sigma = 2$, все подмножества ребер удовлетворяют условию независимости.

Гиперлес (несколько компонент связности) – $\sigma > 2$, все подмножества ребер удовлетворяют условию независимости.

Гиперцикл – $\sigma = 1$, все нетривиальные подмножества ребер удовлетворяют условию независимости.

Примеры и постановка задачи

Примеры различных гиперграфов:

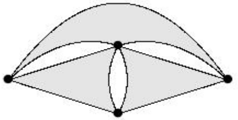


Рис. 1. Гиперцикл

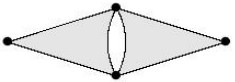


Рис. 2. Гипердерево

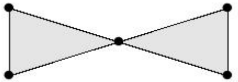


Рис. 3. Гиперлес

Задача перечисления всех гиперлесов, гипердеревьев и гиперциклов:

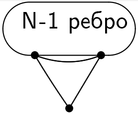
1) построение списка объектов, принадлежащих данному множеству,
2) определение числа этих объектов.

Два подхода к решению поставленных задач:

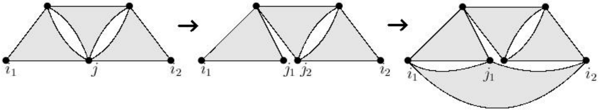
- рекурсивный,
- морфологический.

Рекурсивное получение гипердеревьев

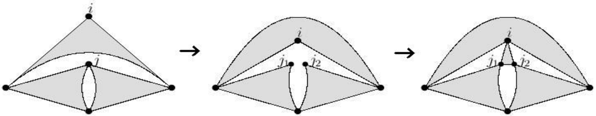
1-ый способ



2-ой способ



3-ий способ

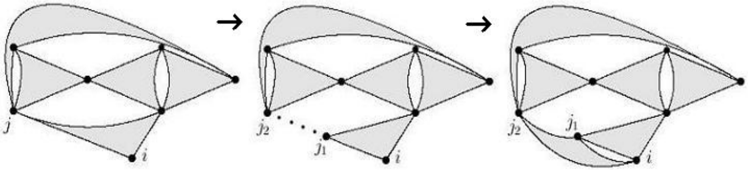


Теорема

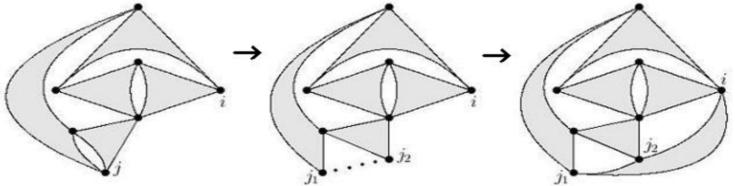
Используя приведенные выше 3 способа, можно получить все возможные гипердеревья с N ребрами, где $N < 6$.

Рекурсивное получение гипердеревьев

4-ый способ



5-ый способ



Теорема

Используя приведенные выше 5 способов, можно получить все возможные гипердеревья с N ребрами, где $N < 8$.

Морфологический способ получения гиперграфов

Построение гиперграфов, все собственные подмножества ребер которых удовлетворяют условию независимости, с любым количеством ребер N и любой степенью свободы σ.

Морфологический метод – перебор всех возможных кодов вида $\alpha_1\beta_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_2\gamma_2 - \ldots - \alpha_N\beta_N\gamma_N$.

Коды должны удовлетворять следующим условиям:

1. в любом выбранном коде должны содержаться все числа от 1 до $N + \sigma$;
2. номера вершин в каждой тройке должны быть упорядочены строго по возрастанию;
3. тройки должны быть упорядочены между собой строго по возрастанию;
4. все номера вершин должны быть объявлены в порядке возрастания;
5. в каждой тройке чисел $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ должен быть хотя бы один номер вершины, содержащийся в других тройках;
6. для любой совокупности троек должно выполняться условие независимости;
7. код должен быть минимальным.

Результаты

	гиперциклы	гипердеревья	гиперлеса				
N	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$	$\sigma = 4$	$\sigma = 5$	$\sigma = 6$	$\sigma = 7$
2	-	1	1	-	-	-	-
3	1	3	3	2	-	-	-
4	3	13	16	10	4	-	-
5	10	72	103	77	31	8	-
6	71	634	952	830	444		19
7	659	7604					
8	8656						

Пример (список всех гипердеревьев с 4 ребрами):

1. 1 2 3 - 1 2 4 - 1 2 5 - 1 2 6
2. 1 2 3 - 1 2 4 - 1 2 5 - 1 3 6
3. 1 2 3 - 1 2 4 - 1 2 5 - 3 4 6
4. 1 2 3 - 1 2 4 - 1 3 5 - 1 4 6
5. 1 2 3 - 1 2 4 - 1 3 5 - 2 3 6
6. 1 2 3 - 1 2 4 - 1 3 5 - 2 4 6
7. 1 2 3 - 1 2 4 - 1 3 5 - 2 5 6
8. 1 2 3 - 1 2 4 - 1 3 5 - 4 5 6
9. 1 2 3 - 1 2 4 - 1 5 6 - 2 5 6
10. 1 2 3 - 1 2 4 - 1 5 6 - 3 4 5
11. 1 2 3 - 1 2 4 - 1 5 6 - 3 5 6
12. 1 2 3 - 1 2 4 - 3 5 6 - 4 5 6
13. 1 2 3 - 1 4 5 - 2 4 6 - 3 5 6

Матроиды

Определение

D – непустое конечное множество. $I \subseteq 2^D$ – непустое семейство подмножеств, называемых *независимыми*, из D, удовлетворяющее условиям:
1) если $A \subseteq B \in I$, то $A \in I$;
2) если $A \in I$, $B \in I$ и $|A| = |B| - 1$, то существует элемент $a \in B \backslash A$ такой, что $A + a \in I$.
Тогда пара $M = \langle I, D \rangle$ называется матроидом.

Цикл $A \in D$ – $A \notin I$, все непустые подмножества независимы.
Ранг $\rho(M)$ – мощность наибольшего независимого множества из I.

Подходы к связности в матроидах:

- ввод функции ϕ,
- n-связность.

Связь между матроидами и гиперграфами

Функция $\phi : 2^D \to Z$, $\phi(\emptyset) = 0$, такая что:

1. ϕ монотонна: если $A \subseteq B \subseteq D$, то $\phi(A) = \phi(B)$;
2. ϕ субмодулярна: для любых двух множеств $A, B \subseteq D$ выполнено $\phi(A) + \phi(B) \geq \phi(A \cup B) + \phi(A \cap B)$;
3. ϕ покрывающая: $I = \{A|(A \subseteq D)\&(\phi(A) \geq |A|)\&(\cup_{A \in I} A = D)\}$.

Если матроид $M = \langle I, D \rangle$, такой что $A \in I \Leftrightarrow \phi(A) \geq |A|$, то с помощью ϕ можно однозначно разбить множество D на компоненты связности $D = D_1 + D_2 + ... + D_n$, так что выполнено:
1) $\phi(D_i) = |D_i|$ для любого $i = 1 : n$;
2) если $\phi(D') = |D'|$, то найдется такое D_i, что $D' \subseteq D_i$.

$\phi(A) = |\Gamma A| - q + 1 \Rightarrow$ с любым гиперграфом $\Gamma = \langle Z, D \rangle$ можно связать матроид $M = \langle I, D \rangle$, получим теорию связности в гиперграфах.

Теория связности Татта

$M = \langle I, D \rangle$ – матроид, $\{S, T\}$ – разбиение D.

Определение

Матроид называется k-*разделимым*, если выполнено:

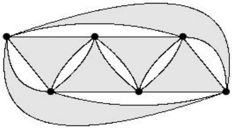
$$\begin{cases} \rho(S) + \rho(T) - \rho(M) + 1 = k \\ \min(|S|, |T|) \geq k \end{cases}$$

$\min(k) = \lambda(M)$ – *связность* матроида.

Матроид M называется n-*связным*, если выполнено $0 \leq n \leq \lambda(M)$.

Применим эту теорию к гиперграфам:

- $\lambda(M) = 1$ для матроидов, построенных на гиперлесах и гипердеревьях.
- $\lambda(M) = 2$ для матроидов, построенных на гиперциклах.
- $\lambda(M) = 3$ см. рис.



Заключение

- Получены способы построения гипердеревьев с количеством ребер ≤ 7.
- Получены схемы гиперциклов, гипердеревьев, гиперлесов.
- Построена таблица количества гиперграфов различных типов.
- Рассмотрена связь между связностью матроидов и связностью гиперграфов.
- Рассмотрено понятие n-связности для матроидов, приведены примеры.