Исследование оптимальных планов для оценивания производных функций регрессии полиномиального и дробно-рационального вида

Бонько Екатерина Владимировна, группа 522

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д. ф.-м.н., профессор Мелас В.Б.
Рецензент: к.ф.-м.н., ассистент Шпилев П.В.

СтатМод

Санкт-Петербург
2011 г.

Содержание

- **Общая модель регрессии** на интервале $[a, b]$ с ошибками с равной дисперсией:

$$E[Y(t)] = f^T(t)\theta, \qquad Var[Y(t)] = \sigma^2 > 0,$$

$t \in [a, b]$ – условие эксперимента,
$\theta = (\theta_0, \dots, \theta_d)^T$ – вектор неизвестных параметров,
$f(t) = (f_0(t), f_1(t), \dots, f_d(t))^T$ – вектор функций регрессии.
Предполагается, что различные наблюдения независимы.

- **Планом эксперимента** называется дискретная вероятностная мера, определенная на интервале $[a, b]$,

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ \omega_1 & \dots & \omega_k \end{pmatrix},$$

где $x_1, \dots, x_k$ определяют точки интервала $[a, b]$, в которых производятся измерения эксперимента,
а веса $\omega_1, \dots, \omega_k$, такие что $\omega_\nu > 0$ и $\sum_{\nu=1}^k \omega_\nu = 1$, пропорциональны количеству измерений.

- Матрицу $M(\xi) = \int_a^b f(t) f^T(t) d\xi(t)$ называют **информационной матрицей плана** ξ.

- План называется **допустимым**, если по результатам измерений в точках этого плана можно построить несмещенную оценку производной функций регрессии $\theta^T f'(x)$ в точке $x \in [a, b]$.

  План ξ_x^*, который минимизирует $(f'(x))^T M^-(\xi) f'(x)$ в классе всех допустимых планов, называется **локально оптимальным** планом для оценивания производной функций регрессии $\theta^T f'(x)$ в точке $x \in [a, b]$.

  Локально-оптимальный план ξ_x^* допустим, если $f'(x) \in Range(M(\xi))$, где $Range(M(\xi))$ — подпространство, натянутое на столбцы матрицы $M(\xi)$.

- **Задача**: Найти локально оптимальный план для оценивания производных функций регрессии полиномиального и дробно-рационального вида в некоторой точке $x \in [a, b]$:

$$\theta^T f'(x)$$

Теорема (Elfving, 1952; Sahm, 1998; Melas, Dette, Pepelyshev, 2009)

Пусть в общей модели регрессии с ошибками с одинаковой дисперсией на интервале $[-1, 1]$ *функции регрессии линейно независимы. Тогда план*

$$\xi_x^* = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & k_k \\ \omega_1 & \dots & \omega_k \end{pmatrix}$$

является локально оптимальным для оценивания производной функции регрессии в точке x, *если и только если существуют число* $\beta \neq 0$, *и полином* $u(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i f_i(t)$, *такие что выполняются следующие условия:*

(a) $u(t)$ *– полином наилучшего приближения*

$$|u(t)| \leq 1 \qquad \text{для всех} \quad t \in [-1, 1]$$

(b) *в точках плана* ξ_x^* $u(t)$ *принимает экстремальные значения*

$$u(t_i) = (-1)^{i-1} \quad i = 1, \dots, k$$

(c) *геометрическое представление оптимального плана*

$$\beta f'(x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega_i f(t_i)$$

Типом плана назовем тройку чисел (n_1, n_2, n_3), где

n_1 — количество точек в носителе плана, совпадающих с левым краем интервала регрессии

n_2 — количество точек в носителе плана, лежащих внутри интервала регрессии

n_3 — количество точек в носителе плана, совпадающих с правым краем интервала регрессии

Методология нахождения локально оптимальных планов (Melas, Dette, Pepelyshev, 2009)

Пусть в общей модели регрессии функции регрессии $f_0, f_1, \dots, f_d$ *образуют систему Чебышева на интервале* $[a, b]$.
Тогда локально оптимальный план для оценивания производной функций регрессии $\theta^T f'(x)$ *в точке* $x \in [a, b]$ *ищем в виде:*

1. *плана типа* $(1, d-1, 1)$
2.
   a. *плана типа* $(1, d-1, 0)$
   b. *плана типа* $(0, d-1, 1)$
3. *плана типа* $(1, d-2, 1)$

Оптимальность плана проверяем при помощи теоремы Элвинга.

$f_0, f_1, \ldots, f_d$ образуют систему Чебышева на интервале $[a, b]$.

- $(1, d-1, 1) \longrightarrow$ чебышевский план:
  точки плана являются чебышевскими на интервале $[a, b]$
- $(1, d-1, 0) \longrightarrow$ получебышевский план:
  точки плана являются чебышевскими на интервале $[a, b'], \quad b' > b$
- $(0, d-1, 1) \longrightarrow$ получебышевский план:
  точки плана являются чебышевскими на интервале $[a', b], \quad a' < a$
- $(1, d-2, 1) \longrightarrow$ не чебышевский план

Тип искомого плана зависит от места положения точки x, в которой оценивается производная функций регрессии

Функция регрессии $f = (1, t, \frac{1}{t+a})^T, a > 1$,
интервал регрессии $[-1, 1]$.

- Ищем локально оптимальный план типа $(1, 1, 1)$.
  Точки носителя плана $\{-1, z, 1\}, \quad z \in (-1, 1)$

  Полином наилучшего приближения для такой системы построен в книге Н. И. Ахиезера "Лекции по теории аппроксимации"и имеет вид:

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(v\frac{\alpha - v}{1 - \alpha v} + v^{-1}\frac{1 - \alpha v}{\alpha - v}\right),$$

где

$$t = \frac{1}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right), \quad a = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha = a - \sqrt{a^2 - 1} < 1.$$

и $u(t)$ есть рациональная функция от t.

$u(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 \frac{1}{t+a}$ в точках плана принимает экстремальные значения:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \dfrac{\alpha_3}{a-1} = -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dfrac{\alpha_3}{a+1} = -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 z + \dfrac{\alpha_3}{z+a} = 1 \\ \alpha_2 - \dfrac{\alpha_3}{(z+a)^2} = 0 \end{cases}$$

Откуда находим третью точку плана $z = -a + \sqrt{a^2 - 1}$.

Носитель плана найден.

Чтобы найти веса, используем геометрическое представление плана из теоремы Элвинга

$$\beta\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{-1}{(x+a)^2}\end{pmatrix}=-\omega_1\begin{pmatrix}1\\-1\\\frac{1}{a-1}\end{pmatrix}+\omega_2\begin{pmatrix}1\\-a+\sqrt{a^2-1}\\\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\end{pmatrix}-(1-\omega_1-\omega_2)\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{a+1}\end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\omega_1=\frac{(x^2+2ax+a^2-a\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2-1})(\sqrt{a^2-1}+1-a)}{4(x^2+2ax+1)}$$

$$\omega_2=1/2,$$

$$\omega_3=\frac{(x^2+2ax+a^2-a\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2-1})(1-\sqrt{a^2-1}+a)}{4(x^2+2ax+1)}$$

Локально оптимальный план чебышевского типа найден:

$$\begin{pmatrix}-1 & -a+\sqrt{a^2-1} & 1\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\end{pmatrix}$$

$$x\in(-\infty,-a-\sqrt{a\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2-1}})\bigcup(-a-\sqrt{a\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2-1}},$$
$$-a+\sqrt{a\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2-1}})\bigcup(-a+\sqrt{a\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2-1}},+\infty)\quad(1)$$

- Ищем локально оптимальный план типа $(1,1,0)$.
  Точки плана $\{-1,t_2\}$, чебышевские на интервале $[-1,b']$, $\quad b'>1$.

  Требования теоремы Элвинга к полиному к полиному наилучшего приближения $u(t)$ выполнены.

  Геометрическое представление плана из теоремы Элвинга

$$\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-1}{(x+a)^2} \end{pmatrix} = -\omega_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{a-1} \end{pmatrix} + (1-\omega_1) \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 \\ \frac{1}{t_2+a} \end{pmatrix}$$

  позволяет найти план получебышевского типа $(1,1,0)$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{(x+a)^2}{a-1} - a \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x \in [-a-\sqrt{a^2-1}, -a-\sqrt{a\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2-1}}) \bigcup$$

$$\bigcup(-a+\sqrt{a\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2-1}}, -a+\sqrt{a^2-1}] \quad (2)$$

- Ищем локально оптимальный план типа $(0, 1, 1)$.
  Точки плана $\{t_1, 1\}$, чебышевские на интервале $[a', 1]$, $\quad a' < -1$.

  Требования теоремы Элвинга к полиному к полиному наилучшего приближения $u(t)$ выполнены.

  Геометрическое представление плана из теоремы Элвинга

$$\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-1}{(x+a)^2} \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 \\ \frac{1}{t_1+a} \end{pmatrix} - (1-\omega_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

  позволяет найти план получебышевского типа $(0, 1, 1)$

$$\begin{pmatrix} \frac{(x+a)^2}{a+1} - a & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x \in \left(-a - \sqrt{a\sqrt{a^2-1} + \sqrt{a^2-1}}, -a - \sqrt{a^2-1}\right] \bigcup$$
$$\bigcup \left[-a + \sqrt{a^2-1}, -a + \sqrt{a\sqrt{a^2-1} + \sqrt{a^2-1}}\right) \quad (3)$$

Квадратичная регрессия: $f = (1, t, t^2)^T$, интервал регрессии $[-1, 1]$

Решение:

- План чебышевского типа $(1, 1, 1)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{8x} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + \frac{1}{8x} \end{pmatrix}$$

$$x \in (-\infty, -1/2) \bigcup (1/2, \infty).$$

-
    - План получебышевского типа $(1, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2x+1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x \in (-1/2, 0]$$

    - План получебышевского типа $(1, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 2x-1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x \in [0, 1/2)$$

Кубическая регрессия: $f = (1, t, t^2, t^3)^T$, интервал регрессии $[-1, 1]$

Решение:

- План чебышевского типа $(1, 2, 1)$

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{12x^2-8x-1}{18(4x^2-1)} & \frac{4}{9}\,\frac{3x^2-x-1}{4x^2-1} & \frac{4}{9}\,\frac{3x^2+x-1}{4x^2-1} & \frac{12x^2+8x-1}{18(4x^2-1)} \end{pmatrix}$$

$$x \in \left[-\infty, (-2-\sqrt{7})/6\right) \bigcup \left((2-\sqrt{7})/6, (-2+\sqrt{7})/6\right) \bigcup \left((2+\sqrt{7})/6, \infty\right]$$

- Планы получебышевского типа $(1, 2, 0)$
  -
$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{x(4+\sqrt{7})+(1+\sqrt{7})}{3} & x(4+\sqrt{7})+(3+\sqrt{7}) \\ \frac{2}{9}\,\frac{4+\sqrt{7}}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{18}\,\frac{11-4\sqrt{7}}{3} \end{pmatrix}$$

$$x \in \left((-\sqrt{7}-2)/6, (-2\sqrt{7}-1)/9\right]$$

  -
$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{x(4-\sqrt{7})+(1-\sqrt{7})}{3} & x(4-\sqrt{7})+(3-\sqrt{7}) \\ \frac{2}{9}\,\frac{4-\sqrt{7}}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{18}\,\frac{11+4\sqrt{7}}{3} \end{pmatrix}$$

$$x \in \left((\sqrt{7}-2)/6, (2\sqrt{7}-1)/9\right]$$

- Планы получебышевского типа $(0, 2, 1)$
  - $$\begin{pmatrix} x(4+\sqrt{7})-(3+\sqrt{7}) & \frac{x(4+\sqrt{7})-(1+\sqrt{7})}{3} & 1 \\ \frac{1}{18}\,\frac{11-4\sqrt{7}}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{9}\,\frac{4+\sqrt{7}}{3} \end{pmatrix}$$
    $$x \in \left[(1+2\sqrt{7})/9, (2+\sqrt{7})/6\right)$$
  - $$\begin{pmatrix} x(4-\sqrt{7})-(3-\sqrt{7}) & \frac{x(4-\sqrt{7})-(1-\sqrt{7})}{3} & 1 \\ \frac{1}{18}\,\frac{11+4\sqrt{7}}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{9}\,\frac{4-\sqrt{7}}{3} \end{pmatrix}$$
    $$x \in \left[(1-2\sqrt{7})/9, (2-\sqrt{7})/6\right)$$
- План не чебышевского типа $(1, 1, 1)$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{3x^2-1}{2x} & 1 \\ \frac{8x^3-3x^4-6x^2+1}{32x^3} & \frac{1}{2} & \frac{8x^3+3x^4+6x^2-1}{32x^3} \end{pmatrix}$$

$$x \in \left[-(2\sqrt{7}+1)/9, (1-2\sqrt{7})/9\right) \bigcup \left((2\sqrt{7}-1)/9, (1+2\sqrt{7})/9\right]$$

Итоги

Проанализирована методология построения локально оптимальных планов, и при помощи нее найдены решения в явном виде для моделей:

- регрессии дробно-рационального вида
- квадратичной регрессии
- кубической регрессии