Многоуровневый метод Монте-Карло в финансовой математике
Выпускная квалификационная работа

Иван Суворов, 422 группа

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели
Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Ермаков С.М.
Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Каштанов Ю.Н.

Санкт-Петербург
2017г.

Постановка задачи

- В выпускной работе рассматривалась задача вычисления цены европейского опциона в случае, когда цена базового актива описывается СДУ.
- В ходе работы был изучен Многоуровневый метод Монте-Карло, предложена модификация, уменьшающая вычислительную сложность метода по сравнению со стандартным Многоуровневым ММК благодаря использованию квазислучайных чисел.
- На основании модификации написаны программы, проведены вычислительные эксперименты.

Многоуровневый метод Монте-Карло

Будем искать стоимость опциона $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(F(S(T)))$ с помощью $\hat{Y}$:

$$\hat{Y} = \sum_{l=0}^{L} \hat{Y}_l,$$

где

$$\hat{Y}_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \hat{P}_0^i = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \Delta \hat{P}_0^i,$$

и

$$\hat{Y}_l = \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} (\hat{P}_l^i - \hat{P}_{l-1}^i) = \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} \Delta \hat{P}_l^i.$$

$\hat{P}_l^i$ — прибл. $F(S(T))$ для одного выборочного пути с шагом h_l.
h_l уменьшается при увеличении l — номера уровня.

Многоуровневый метод Монте-Карло

1. $L=0$. Выбираем $M,\ \epsilon,\ \tilde{N},\ T$.
2. Вычислим $\hat{Y}_L$ и V_L — выборочную дисперсию разности приближений $\Delta\hat{P}^i_L$, используя $\tilde{N}$ выборочных путей с шагом по времени $h_L = T/M^L$.
3. Определим оптимальное количество выборочных путей по формуле $N_l = \lceil 2\epsilon^{-2}\sqrt[2]{V_l h_l}\sum_{j=0}^{L}\sqrt[2]{h_j^{-1}V_j}\rceil$.
4. Генерируем дополнительные выборочные пути с таким же шагом по времени h_L, если $\tilde{N} \le N_l$.
5. Начиная с $L=2$, проверяем критерий остановки: $max(M^{-1}|\hat{Y}_{L-1}|,\ \hat{Y}_L) < \frac{\epsilon}{\sqrt[2]{M-1}}$.
6. Если критерий не выполнен — переходим к шагу 2.

Вычислительная сложность метода имеет порядок $\epsilon^{-2}(log\epsilon)^2$.

Предложенная модификация

Выбираем и фиксируем некоторое K. Нахождение $\Delta \hat{P}_l^i$ в некоторый момент будем производить при использовании метода Скремблинга следующим образом:

1. Генерируем K векторов квазислучайных чисел Соболя $\bar{\beta}_{kl},\ k = 1 \dots K$ в $[0,1]^{M^l}$.
2. Генерируем N_l векторов сл. ч. $\bar{\alpha}_{il},\ i = 1 \dots N_l$, р-ти M^l, каждая коорд. вектора равномерно-распр. в $[0,1]$.
3. Метод скремблинга: $\bar{\gamma}_{ikl} = \{\bar{\alpha}_{il} + \bar{\beta}_{kl}\}$.
4. Разбиваем на группы с одинаковым псевдослучайным числом и считаем средние: $\Delta \hat{P}_l^i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \Delta \hat{P}_l^i(\bar{\gamma}_{ikl})$.

Будем применять следующий критерий остановки метода: $max(|\hat{Y}_L + 3\sigma_L|,\ |\hat{Y}_L - 3\sigma_L|) < \frac{(M-1)\epsilon}{\sqrt{2}}$, где σ_L — стандартное отклонение $\hat{Y}_L$. Ограничим L: $L < 6$, что повлияет только на систематическую ошибку.

Модификация, предложенная Джайлсом и Вотерхаузом

1. $L = l := 0,\ K_l = 1,\ l = 0 \ldots L.$
2. Генерируем K_l векторов чисел Соболя $\bar{\beta}_{kl},\ k = 1 \ldots K_l$ в $[0,1]^{M^l}$.
3. Генерируем $N = 32$ векторов сл. ч. $\bar{\alpha}_{il},\ i = 1 \ldots N$, р-ти M^l, каждая коорд. вектора равномерно-распр. в $[0,1]$.
4. Метод скремблинга: $\bar{\gamma}_{ikl} = \{\bar{\alpha}_{il} + \bar{\beta}_{kl}\}$.
5. Разбиваем на группы с одинаковым псевдослучайным числом и считаем средние: $\Delta\hat{P}_l^i = \frac{1}{K_l}\sum_{k=1}^{K_l} \Delta\hat{P}_l^i(\bar{\gamma}_{ikl})$.
6. Получаем оценку V_l как выборочную дисперсию $N = 32$ оценок $\Delta\hat{P}_l^i$.
7. Если $\sum_{l=0}^{L} V_l/N > \frac{\epsilon^2}{2}$, то удваиваем K_l на уровне, на котором $\frac{V_l}{2^l K_l}$ наибольшее. Пусть l равно номеру этого уровня. Возвращаясь к шагу 2, пересчитываем V_l.
8. Если $L < 2$ или критерий остановки не выполнен, то $L = l := L + 1$ и переходим к шагу 2.

Вычислительная сложность

Будем оценивать вычислительную сложность как общее количество обращений к датчику псевдослучайных чисел и таблице квазислучайных чисел. При использовании Многоуровневого метода Монте-Карло:

$$\sum_{l=0}^{L} N_l h_l.$$

При использовании модификации Джайлса, Вотерхауза:

$$\sum_{l=0}^{L} N h_l K_l.$$

При использовании авторской модификации:

$$\sum_{l=0}^{L} N_l h_l K.$$

Модель Блэка-Шоулза

Произведены расчёты цены европейского опциона покупки в модели Блэка-Шоулза:

$$F(\{S_t\}_{0 \le t \le T}) = e^{-rT} \max(S_T - X, 0),$$

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW_t,$$

при
$T = 1,\ M = 2,\ \tilde{N} = 20,\ \epsilon = 0.01,\ S_0 = 100,\ r = 0.05,\ \sigma = 0.2$
и разных значениях цены исполнения $X = \{80, 100, 120\}$.

Модель локальных волатильностей

Произведены расчёты цены европейского опциона покупки в модели локальных волатильностей:

$$F(\{S_t\}_{0\le t\le T}) = e^{-rT}\max(S_T - X, 0),$$

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma(S(t))S(t)dW_t.$$

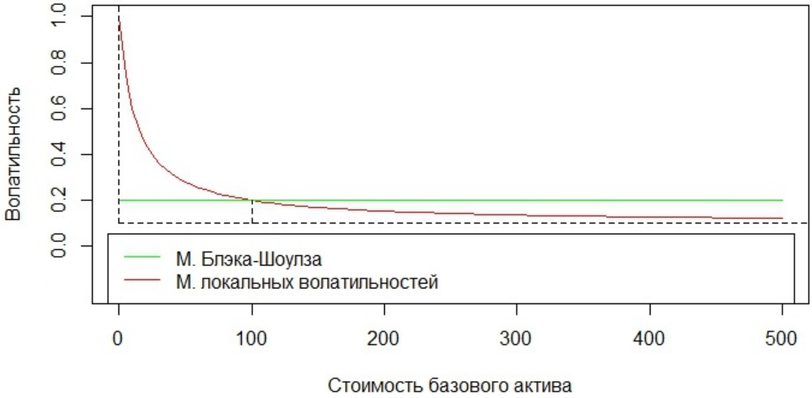
при $T = 1,\ M = 2,\ \tilde{N} = 20,\ \epsilon = 0.01,\ S_0 = 100,\ r = 0.05,$

$$\sigma(S) = \frac{0.9}{0.08S + 1} + 0.1$$

и разных значениях цены исполнения $X = \{80, 100, 120\}$.

Модель локальных волатильностей

$$\sigma(S) = \frac{0.9}{0.08S + 1} + 0.1$$



	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
	K_0 / N_0	K_1 / N_1	K_2 / N_2	K_3 / N_3
Стандарт	0 / 8485576	0 / 339417	0 / 171556	0 / 86291
Суворов	128 / 4932	128 / 341	128 / 187	128 / 126
Дж.,В.	8192 / 32	1024 / 32	512 / 32	512 / 32

$l=4$	$l=5$	Вычисл. слож.	Цена
K_4 / N_4	K_5 / N_5	N	$\mathbf{E}(F(\tilde{S}))$
0 / 45646	0 / 22725	11998498	24.74
128 / 67	128 / 39	1239168	24.74
256 / 32	128 / 32	786432	24.74

Модель локальных волатильностей. $X = 100$

	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
	K_0 / N_0	K_1 / N_1	K_2 / N_2	K_3 / N_3
Стандарт	0 / 4542304	0 / 189980	0 / 101016	0 / 50390
Суворов	256 / 1334	256 / 134	256 / 82	256 / 42
Дж.,В.	8192 / 32	1024 / 32	512 / 32	256 / 32

$l=4$	$l=5$	Вычисл. слож.	Цена
K_4 / N_4	K_5 / N_5	N	$\mathbf{E}(F(\tilde{S}))$
0 / 26058	0 / 13599	6563544	10.44
256 / 32	256 / 20	875008	10.46
256 / 32	128 / 32	720896	10.46

Модель локальных волатильностей. $X = 120$

	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
	K_0 / N_0	K_1 / N_1	K_2 / N_2	K_3 / N_3
Стандарт	0 / 1307492	0 / 102520	0 / 48469	0 / 16346
Суворов	256 / 644	256 / 69	256 / 49	256 / 33
Дж.,В.	8192 / 32	1024 / 32	512 / 32	256 / 32

$l=4$	$l=5$	Вычисл. слож.	Цена
K_4/N_4	K_5/N_5	N	$\mathbf{E}(F(\tilde{S}))$
0/10851	0/3386	2119143	2.98
256 / 22	256 / 20	736768	2.98
128 / 32	64 / 32	589824	2.98

Заключение

- Предложена собственная модификация Многоуровневого метода Монте-Карло для решения стохастических дифференциальных уравнений, использующая рандомизацию квазислучайных чисел.
- Проведены численные эксперименты, с помощью которых проведено сравнение с известной модификацией М. Джайлса и Б. Вотерхауза.
- Получен приблизительно одинаковый в смысле вычислительной сложности результат.
- Предложенная модификация может быть полезной в задачах, где конструктивная размерность алгоритма ограничена.