Одноранговая аппроксимация положительных матриц с помощью методов тропической математики

Романова Елизавета Юрьевна, гр. 422

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Кривулин Н.К.
Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Алексеева Н.П.

Санкт-Петербург
2018г.

Постановка задачи

Задача аппроксимации матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *матрицами* $\boldsymbol{X} \in \mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ *формулируется как задача оптимизации*

$$\min_{\boldsymbol{X} \in \mathsf{S}} \mathrm{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}),$$

где d *— функция расстояния на множестве матриц, измеряющая величину ошибки аппроксимации.*

Различные подходы к измерению ошибки:

- $\mathsf{d}_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) = (\sum_{i,j} |a_{ij} - x_{ij}|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$ — расстояние Минковского,
- $\mathsf{d}_\infty(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) = \max_{i,j} |a_{ij} - x_{ij}|$ — расстояние Чебышёва,
- $\mathrm{d}_{\log}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) = \max_{i,j} |\log a_{ij} - \log x_{ij}|$, где логарифм берется по основанию больше единицы — $\log$-чебышёвское расстояние.

Задача $\log$-чебышёвской аппроксимации матриц

Возможные подходы к решению задачи $\log$-чебышёвской аппроксимации матриц:

- применение методов математического программирования,
- применение методов тропической математики.

Подход на основе тропической математики позволяет

- получить полное решение задачи,
- записать решение в компактной векторной форме.

Цель работы: построить полное решение задачи одноранговой $\log$-чебышёвской аппроксимации положительных матриц, используя методы и результаты тропической математики.

Для этого необходимо:

- свести задачу аппроксимации к задаче оптимизации, записанной в компактной форме в терминах идемпотентного полуполя с операцией вычисления максимума в роли сложения;
- получить полное решение задачи тропической оптимизации.

Задача одноранговой аппроксимации матриц

- Задача $\log$-чебышёвской аппроксимации положительной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ при помощи положительной матрицы $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ имеет вид
$$\min_{\boldsymbol{X}} \max_{i,j} |\log a_{ij} - \log x_{ij}|,$$
где логарифм берется по основанию больше единицы.
- В силу свойства монотонности логарифма для целевой функции выполняется равенство
$$\max_{i,j} |\log a_{ij} - \log x_{ij}| = \log \max_{i,j} \max(a_{ij} x_{ij}^{-1}, x_{ij} a_{ij}^{-1}).$$
- Рассматриваемая задача эквивалентна задаче
$$\min_{\boldsymbol{X}} \max_{i,j} \max(a_{ij} x_{ij}^{-1}, x_{ij} a_{ij}^{-1}).$$
- Любая положительная матрица $\boldsymbol{X}$ ранга 1 имеет представление $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{s}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}$, где $\boldsymbol{s} = (s_i)$ и $\boldsymbol{t} = (t_j)$ — положительные векторы.
- Учитывая, что $x_{ij} = s_i t_j$, приходим к задаче
$$\min_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} \max_{i,j} \max(s_i^{-1} a_{ij} t_j^{-1}, s_i a_{ij}^{-1} t_j).$$

Приведем необходимые определения тропической математики из работ [Маслов и Колокольцов, 1994; Кривулин, 2009].

Идемпотентное полуполе

Идемпотентное полуполе — алгебраическая система $(\mathbb{X}, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1})$.

- Операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$ ассоциативны и коммутативны, умножение дистрибутивно относительно сложения. Далее знак умножения $\otimes$ для краткости опускается.
- Для каждого $x \neq \mathbb{0}$ существует обратный по умножению элемент x^{-1} такой, что $x^{-1}x = \mathbb{1}$.
- Сложение является идемпотентным, то есть $x \oplus x = x$ для всех $x \in \mathbb{X}$.

Примеры

- $(\max, +)$*-алгебра:* $\mathbb{R}_{\max,+} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$,
- $\max$*-алгебра:* $\mathbb{R}_{\max,\times} = (\mathbb{R}_+, \max, \times, 0, 1)$, *где* $\mathbb{R}_+$ *— множество неотрицательных вещественных чисел.*

Матрицы

- $\mathbb{X}^{m\times n}$ — множество матриц над $\mathbb{X}$ размера $m \times n$.
- Сложение и умножение двух матриц и умножение матрицы на число выполняются по стандартным правилам с заменой обычных арифметических операций на операции $\oplus$ и $\otimes$.
- Матрица называется регулярной по столбцам, если она не имеет нулевых столбцов.
- Для любой ненулевой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}$ определена мультипликативно сопряженная матрица $\boldsymbol{A}^{-} = (a_{ij}^{-}) \in \mathbb{X}^{n\times m}$ с элементами $a_{ij}^{-} = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq \mathbb{0}$, и $a_{ij}^{-} = \mathbb{0}$ — иначе.
- Для любой квадратной матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ определим матрицу $\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}$.
- Квадратная матрица называется неразложимой, если перестановкой строк вместе с такой же перестановкой столбцов ее нельзя привести к блочно-треугольному виду.

Векторы

- $\mathbb{X}^n$ — множество векторов-столбцов размера n.
- Вектор называется регулярным, если он не содержит нулей.
- Для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ определен мультипликативно сопряженный вектор-строка $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$, где $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ — иначе.

Собственное число и вектор матрицы

- Число $\lambda \in \mathbb{X}$ и ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ называются собственным значением и собственным вектором матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$, если они удовлетворяют равенству $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.
- Любая матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n имеет собственное число, которое называется спектральным радиусом и вычисляется по формуле

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \bigoplus_{1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n} (a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_m i_1})^{1/m}.$$

- Для неразложимой матрицы спектральный радиус является единственным собственным числом.

Нахождение собственных векторов

Предположим, что λ — ненулевое собственное число матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$, и введем следующие матрицы:

$$\boldsymbol{A}_\lambda = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{A}_\lambda^+ = \boldsymbol{A}_\lambda \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}_\lambda^n.$$

Собственные векторы матрицы $\boldsymbol{A}$, соответствующие λ, находятся следующим образом:

- строятся матрицы $\boldsymbol{A}_\lambda$ и $\boldsymbol{A}_\lambda^+$;
- из тех столбцов матрицы $\boldsymbol{A}_\lambda^+$, у которых диагональный элемент равен числу $\mathbb{1}$, составляется матрица $\bar{\boldsymbol{A}}_\lambda$;
- все собственные векторы имеют вид $\bar{\boldsymbol{A}}_\lambda \boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u}$ — произвольный регулярный вектор.

Все собственные векторы неразложимой матрицы регулярны.

Решение задачи аппроксимации

Задача аппроксимации положительной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ при помощи матрицы $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{s}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}$, где $\boldsymbol{s} = (s_i)$, $\boldsymbol{t} = (t_j)$, имеет вид

$$\min_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} \max_{i,j} \max(s_i^{-1} a_{ij} t_j^{-1}, s_i a_{ij}^{-1} t_j).$$

При замене арифметических операций на операции идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$ получим задачу

$$\min_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} \bigoplus_{i,j} (s_i^{-1} a_{ij} t_j^{-1} \oplus s_i a_{ij}^{-1} t_j).$$

В векторном виде задача принимает вид

$$\min_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} \boldsymbol{s}^{-} \boldsymbol{A} (\boldsymbol{t}^{-})^{\mathrm{T}} \oplus \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{-} \boldsymbol{s}.$$

Положив $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{t}^{-})^{\mathrm{T}}$, получим задачу тропической оптимизации в форме

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-} \boldsymbol{A}^{-} \boldsymbol{x}.$$

Задача тропической оптимизации

Пусть задана ненулевая матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, которые решают задачу

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}.$$

Известен следующий результат:

Лемма (Кривулин, 2009)

Пусть $\boldsymbol{A}$ — неразложимая матрица, μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Тогда минимум в задаче тропической оптимизации равен $\mu^{1/2}$ и достигается тогда, когда $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} = \mu^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}$ — собственные векторы матриц $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ и $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$, соответствующие μ.

Решение задачи тропической оптимизации

Для ненулевой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ требуется решить задачу тропической оптимизации в виде

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}.$$

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A}$ *— ненулевая матрица,* μ *— спектральный радиус матрицы* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$*. Пусть* $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})_{\mu} = \mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ *и* $(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})_{\mu} = \mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$*.*
Тогда минимум в задаче тропической оптимизации равен $\mu^{1/2}$*, а все регулярные решения имеют вид*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})_{\mu}^{*}\boldsymbol{v} \oplus \mu^{-1/2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})_{\mu}^{*}\boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{y} &= \mu^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})_{\mu}^{*}\boldsymbol{v} \oplus (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})_{\mu}^{*}\boldsymbol{w}, \end{aligned} \qquad \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathbb{X}^{n}.$$

Решение задачи аппроксимации

Найдем решение задачи однораноговой $\log$-чебышёвской аппроксимации путем решения эквивалентной задачи оптимизации

$$\min_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} \boldsymbol{s}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}^{-})^{\mathrm{T}} \oplus \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{s}.$$

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A}$ — положительная матрица, μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Пусть $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})_{\mu} = \mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ и $(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})_{\mu} = \mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$. Тогда минимальная погрешность $\log$-чебышёвской аппроксимации матрицы $\boldsymbol{A}$ равна $\log\mu^{1/2}$, а все аппроксимирующие матрицы имеют вид $\boldsymbol{s}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}$, где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s} &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})_{\mu}^{*}\boldsymbol{v} \oplus \mu^{-1/2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})_{\mu}^{*}\boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} &= (\mu^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})_{\mu}^{*}\boldsymbol{v} \oplus (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})_{\mu}^{*}\boldsymbol{w})^{-}, \end{aligned} \qquad \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathbb{X}^{n}.$$

В частности, минимальная погрешность достигается, когда $\boldsymbol{s}$ — собственный вектор матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$, а $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = \mu^{1/2}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{s})^{-}$.

Трудоемкость решения: не более, чем $O(n^4)$.

Для матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ требуется решить задачу тропической оптимизации

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}.$$

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A}$ — регулярная по столбцам матрица, а μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Пусть $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})_{\mu} = \mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$.
Тогда минимум в задаче тропической оптимизации равен $\mu^{1/2}$, а все регулярные решения определяются условиями

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})_{\mu}^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{n},$$
$$\mu^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \leq \mu^{1/2}(\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A})^{-}.$$

Предложение

В случае регулярной по столбцам матрицы $\boldsymbol{A}$ множество решений задачи тропической оптимизации, описанное в этой теореме, совпадает с множеством решений, данным предыдущей теоремой.

Найдем решение задачи одноранговой $\log$-чебышёвской аппроксимации путем решения эквивалентной задачи оптимизации

$$\min_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} \boldsymbol{s}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}^{-})^{\mathrm{T}} \oplus \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{s}.$$

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A}$ — положительная матрица, μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Пусть $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})_{\mu} = \mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$.
Тогда минимальная погрешность $\log$-чебышёвской аппроксимации матрицы $\boldsymbol{A}$ равна $\log\mu^{1/2}$, а все аппроксимирующие матрицы имеют вид $\boldsymbol{s}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}$, где

$$\begin{gathered}\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})_{\mu}^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{n}, \\ \mu^{-1/2}\boldsymbol{s}^{-}\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \leq \mu^{1/2}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{s})^{-}.\end{gathered}$$

Трудоемкость решения: не более, чем $O(n^4)$.

Пусть дана произвольная положительная матрица

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

- минимальная погрешность одноранговой аппроксимации в $\log$-чебышёвском смысле равна

$$\frac{1}{2}|\log(a_{11}a_{12}^{-1}a_{21}^{-1}a_{22})|,$$

- аппроксимирующая матрица единственна и имеет вид

$$\begin{pmatrix} (a_{11}^3 a_{12} a_{21} a_{22}^{-1})^{1/4} & (a_{11} a_{12}^3 a_{21}^{-1} a_{22})^{1/4} \\ (a_{11} a_{12}^{-1} a_{21}^3 a_{22})^{1/4} & (a_{11}^{-1} a_{12} a_{21} a_{22}^3)^{1/4} \end{pmatrix}.$$

Положительная матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ является обратно симметрической, если $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-}$.
При $n = 3$ обратно симметрическую матрицу можно записать в виде

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} & b^{-1} \\ a & 1 & c^{-1} \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

- минимальная погрешность одноранговой аппроксимации в $\log$-чебышёвском смысле равна

$$\frac{1}{3}|\log(ab^{-1}c)|,$$

- аппроксимирующая матрица единственна и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & (a^2bc^{-1})^{-1/3} & (ab^2c)^{-1/3} \\ (a^2bc^{-1})^{1/3} & 1 & (a^{-1}bc^2)^{-1/3} \\ (ab^2c)^{1/3} & (a^{-1}bc^2)^{1/3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Заключение

Результаты:

- Исследована задача одноранговой аппроксимации положительных матриц с использованием расстояния Чебышёва в логарифмической шкале.
- Осуществлен переход от задачи минимизации $\log$-чебышёвского расстояния к эквивалентной задаче, которая может быть записана и решена в терминах тропической математики.
- Получены полные решения задачи тропической оптимизации для произвольной и регулярной по столбцам матриц.
- Показано, что в случае регулярной по столбцам матрицы полученные решения эквивалентны.
- Доказаны теоремы, описывающие все множество аппроксимирующих матриц в задачах одноранговой аппроксимации в $\log$-чебышёвском смысле.
- Найден явный вид аппроксимирующей матрицы для произвольной положительной матрицы порядка 2 и обратно симметрической матрицы порядка 3.

Заключение

Представление результатов на конференциях:

- 7-я Всероссийская научная конференция по проблемам информатики СПИСОК-2017 (Санкт-Петербург, 2017).
- Международная научная конференция по математическому моделированию MATHMODEL'17 (Боровец, Болгария, 2017).

Публикации по теме работы:

- *Кривулин Н. К., Романова Е. Ю.* Одноранговая аппроксимация положительных матриц с использованием методов тропической математики // Материалы 7-й всероссийской научной конференции по проблемам информатики СПИСОК-2017. СПб: Изд-во ВВМ, 2017. С. 529–535.
- *Кривулин Н. К., Романова Е. Ю.* Одноранговая аппроксимация положительных матриц с использованием методов идемпотентной математики // 2017 Proceedings of International Scientific Conference Mathematical Modeling. Borovets, Bulgaria: 2017. Vol. 1/1. P. 33–35.
- *Кривулин Н. К., Романова Е. Ю.* Одноранговая аппроксимация положительных матриц на основе методов тропической математики // Вестник СПбГУ. Математика. 2018. Т. 5(63). Вып. 2. С. 225–239.