

# Приближенное решение задачи коммивояжера в единичном кубе

Просвирнина Мария Константиновна

Санкт-Петербургский государственный университет  
Математико-механический факультет  
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к. ф.-м. н., доцент Товстик Т.М.  
Рецензент: к. ф.-м. н. Москалева Н.М.

Санкт-Петербург  
2015г.

# Цель работы

- Построение алгоритмов приближенного решения задачи коммивояжера в единичном кубе.

# Постановка задачи

Задача коммивояжера: найти кратчайший путь обхода  $N$  городов.

Условия:

- a) Замкнутый путь;
- b)  $d(i, j)$  – расстояние между  $i$  и  $j$ .  $d(i, j) \geq 0$ ;
- c) Симметричная задача:  $d(i, j) = d(j, i)$ ;
- d)  $\varphi : C \rightarrow C$  – маршрут,  $C$  – множество городов,  
 $\varphi^2(i) = \varphi(\varphi(i))$  ;  $\varphi^k(i) = \varphi^{k-1}(\varphi(i))$   
 $\varphi^k(i) \neq i \quad \forall i = 1, \dots, N-1$   
 $\varphi^N(i) = i$ .

# Метод имитации отжига

Метод имитации отжига был предложен в работе [N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.N. Teller and E. Teller, 1953].

1. Моделирование новой конфигурации  $y$  по некоторому правилу модификации  $G$ ;
2. Принятие или отклонение конфигурации:
  - а) если  $H(y) \leq H(x)$ , то  $y$  – новая конфигурация;
  - б) если  $H(y) > H(x)$ , то  $y$  – новая конфигурация с вероятностью  $e^{\frac{H(x) - H(y)}{T}}$ ;
  - в) если  $y$  отклоняется, то остается старая конфигурация  $x$ .
- Особенность алгоритма – модификация  $y$  с большей энергией, чем энергия  $x$ , принимается с вероятностью  $H(y) - H(x)$ .
- Эта особенность позволяет выходить из точек локального минимума.
- Введем коэффициент отжига  $\beta = \frac{1}{T}$ .
- Конфигурация - маршрут обхода точек в определенном направлении.
- $H(y)$  равна длине маршрута  $y$ .

# Двойная замена

В качестве следующего маршрута будет браться случайно выбранный смежный маршрут. Правило модификации — двойная замена.

Путь  $\psi$  - смежный для пути  $\varphi$  (или получено из  $\varphi$  двойной заменой).

1. Убрать две связи, не являющиеся соседними и выходящие из  $p$  и  $\varphi^{-1}(q)$ ,  $p$  и  $q$  — случайные точки;
2. Заменить их на связи от  $p$  до  $\varphi^{-1}(q)$ , от  $\varphi(p)$  до  $q$ ;
3. Поменять направление связей между  $\varphi(p)$  и  $\varphi^{-1}(q)$  на противоположное;

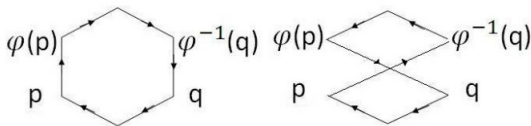


Рис. : Двойная замена.

# Выбор коэффициента отжига

$$\beta = \frac{\beta_0}{\sigma(\Delta H)}.$$

**Случайные, независимые и равномерно распределенные в единичном кубе точки**

Пусть разыгрываются точки для двойной замены, и при  $\Delta H > 0$  отрезки  $\xi_1$  и  $\xi_2$  заменяются на  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . Тогда

$$\Delta H = \eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2, \quad \Delta H > 0,$$

$$\sigma^2(\Delta H | \Delta H > 0) = \sigma^2(\eta_1 - \xi_1) + \sigma^2(\eta_2 - \xi_2) + 2\rho_{\eta_1 - \xi_1; \eta_2 - \xi_2} \sigma(\eta_1 - \xi_1) \sigma(\eta_2 - \xi_2).$$

Делая оценку методом Монте-Карло, получаем:

$$\sigma^2(\Delta H | \Delta H > 0) \approx 0.75(\sigma^2(\eta_1) + \sigma^2(\xi_1)).$$

$$\beta = \frac{\beta_0}{\sqrt{\sigma^2(\eta_1) + \sigma^2(\xi_1)}},$$

где  $\beta_1 \approx \beta_0/0.75$ .

# Выбор коэффициента отжига

Среднее значение вероятности принятия новой конфигурации:

$$P_0 = E(\exp(-\beta_0 \frac{\Delta H}{\sigma(\Delta H)}) | \Delta H > 0).$$

Таблица : Выбор  $\beta_0$

$\beta_0$	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_0$	0.4367	0.2727	0.1974	0.1546	0.1270	0.1077	0.0935	0.0827

**Конфигурация исходных точек задана и не является случайной**

$$\beta = \frac{\beta_0}{\sqrt{(\hat{\sigma}^{(k)})^2 + (\hat{\sigma}^{(k+1)})^2}},$$

где  $(\hat{\sigma}^{(k)})^2 = \frac{1}{N} \sum (r_i^{(k)})^2 - (\hat{r}^{(k)})^2$  — разброс,  $\hat{r}^{(k)} = \frac{1}{N} \sum r_i^{(k)}$  — среднее значение расстояний между точками,  $(\hat{\sigma}^{(k+1)})^2$  вычислена у пробной конфигурации  $y$ .

# Первая модификация

- Первая модификация предложена в работе [Husamettin, Sahin, 2013].
- $f_1, \dots, f_N$  — массив всех ребер графа.

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^N f_i}$$

- Правило модификации  $G$ :
  - 1 С вероятностью  $p_i$  выбираем ребро, которое будет заменено.
  - 2 Делаем двойную замену, используя для этого одну из вершин выбранного ребра и вершину, находящуюся через две вершины от первой в пути обхода графа.



# Вторая модификация

- Вторая модификация предложена в работе [Husamettin, Sahin, 2013].
- Будем сохранять в матрице  $A$  количество произведенных двойных замен, в матрице  $B$  получающуюся при этом энергию по каждой паре точек графа.
- Вводятся следующие дополнения в алгоритм:
  - ❶ Если принимается модификация  $y$ , в матрице  $A$  в ячейку  $[i, j]$  прибавляется единица. В матрице  $B$  в ячейку  $[i, j]$  прибавляется  $H(y)$ .
  - ❷ Вычисление матрицы средних энергий. Матрица  $B$  поэлементно делится на матрицу  $A$ , результат записывается в матрицу  $C$ .
- По правилу модификации  $G$  с наибольшей вероятностью берется ребро с наибольшим соответствующим значением в матрице  $C$ .

# Разделение множества городов на кластеры

- Приведенные алгоритмы плохо работают для большого числа городов. Решение проблемы — разделение множества узлов графа на кластеры. В каждом кластере производится поиск кратчайшего маршрута, далее поиск пути между центрами масс кластеров — так определяются «соседние» маршруты, которые объединяются друг с другом.
- Для объединения маршрутов в каждом кластере нужно выбрать ребро, которое будет удалено, а его узлы соединятся с «соседними» кластерами. Выбор происходит таким образом:

$$\frac{R(i_k, M_{k-1}) + R(j_k, M_{k+1})}{R(i_k, j_k)} \xrightarrow{(i_k, j_k) \in P_k} \min,$$

где  $M_k$  — центр масс  $k$ -го кластера,  $P_k$  — множество пар  $(i_k, j_k)$  узлов, соединенных ребрами в маршруте обхода  $k$ -го кластера,  $R(i_k, M_l)$  — расстояние между узлом  $i_k$  и центром масс  $M_l$ ,  $R(i_k, j_l)$  — расстояние

# Адаптивная теория резонанса

- В качестве метода кластеризации множества городов рассматривается нейронная сеть ART1 из адаптивной теории резонанса, разработанной в [Carpenter, Grossberg, 1988].
- Архитектура ART1 представлена на рис. 2. Она состоит из двух слоев нейронов: слоя сравнения  $C$  и слоя распознавания  $R$ , нейрона сброса и двух управляющих нейронов:  $G_1$  и  $G_2$ .

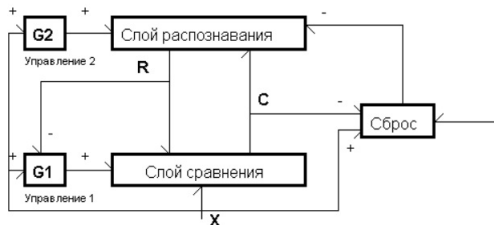


Рис. : Архитектура ART1.

# Нейронная сеть ART1

## Определение (Правило 2/3)

Каждый из нейронов  $S$  имеет три входа: сигнал от соответствующей компоненты  $X$ , сигнал от  $G_1$  и сигнал обратной связи от  $R$ . Правило состоит в том, то для активации нейрона требуется, чтобы по крайней мере два из трех сигналов были равны единице.

## Определение («Победитель Забирает Все»)

Принцип заключается в том, что активируется только один нейрон слоя  $R$ , у которого выходное значение максимально.

# Нейронная сеть ART1

1. На вход подается  $x$ . Выходы  $G_1$  и  $G_2$  равны 1, когда  $x$  ненулевой. Сигнал от  $R$  равен нулю.
2. По правилу 2/3 рассчитываются выходы нейронов слоя  $C$ .
3. Рассчитываются веса, связанные с нейронами слоя  $R$ :

$$b_i = \frac{Lc_i}{L - 1 + \sum_i c_i}, \quad (1)$$

где  $L \geq 1$  — константа,  $c_i$  — выходы слоя  $C$ . Мы берем  $L = 2$ .

Рассчитываются выходы нейронов слоя распознавания  $R$ :  $r_j = \sum_i c_i b_i$ .

4. По принципу «Победитель забирает все» активируется один нейрон слоя  $R$ . Если нет победителя, то  $x$  образует новый класс.
5.  $\frac{\sum_i c_i}{\sum_i x_i} > \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Мы берем  $\alpha = 0.3$ .

Если соотношение не выполняется — ложный нейрон-победитель. Он полностью затормаживается. Переход к пункту 2. Иначе состояние резонанса,  $x$  классифицирован, веса модифицируются согласно 1.

# Результаты работы алгоритмов

- Смоделируем случайные полные графы с количеством узлов 500, 1000 и 2000 в одномерном кубе и рассмотрим результаты работы имитации отжига без кластеризации, а также имитации отжига и двух приведенных в работе модификаций с кластеризацией.

Таблица : Полученные длины путей

Кол-во узлов	Кластеры	$H_0$	$H_1$	$H_2$	$H_3$
500	9	147.7303	125.0862	114.3072	108.6318
1000	17	316.6137	283.6415	269.8771	241.7399
2000	34	598.4925	521.7372	483.5913	457.4347

$H_0$  — имитация отжига без кластеризации,  $H_1$  — имитация отжига с кластеризацией,  $H_2$  — первая модификация с кластеризацией,  $H_3$  — вторая модификация с кластеризацией.

# Полученные результаты

- Рассмотрен выбор коэффициента отжига в методе имитации отжига.
- Предложены алгоритмы приближенного решения задачи коммивояжера в единичном кубе, основанные на сочетании метода имитации отжига и его модификаций с кластеризацией узлов графа нейронной сетью ART1 из адаптивной теории резонанса. Предложен способ соединения маршрутов отдельных кластеров в единый маршрут.
- Программными средствами на языке MATLAB реализованы алгоритмы для приближенного решения задачи коммивояжера.
- Полученные результаты демонстрируют высокую эффективность предложенных алгоритмов, качество полученных решений от которых лучше, чем от алгоритма имитации отжига.