Анализ и синтез недетерминированных автоматов и эквивалентных им сетей Петри

Евстафьева Надежда Евгеньевна, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н. профессор Чирков М.К.
Рецензент: ассистент каф. общ. мат. и инф. Мосягина Е.Н.

Санкт-Петербург
2011г.

Введение

В отличии от сетей Петри, для недетерминированных автоматов известны методы синтеза, анализа и оптимизации. Целью моей работы является нахождение взаимосвязи между сетями Петри и недетерминированными автоматами для применения автоматных методов к сетям.

Рассмотрим алгебраическую систему

$$\Re = (\{0, 1\}, \vee, \&, \leq).$$

Пусть X, A, Y есть алфавиты входов, состояний и выходов: $|X| = n, |A| = m, |Y| = k$. Обобщенным недетерменированным конечным автоматом $\mathcal{A}_{nd}$ (ND-автоматом) называется система

$$\mathcal{A}_{nd} = \langle X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{D}(x, y)\}, \mathbf{q} \rangle,$$

где $\mathbf{r} \in \mathbf{R^{1,m}}$ - начальный вектор, $\mathbf{q} \in \mathbf{R^{m,1}}$ - финальный вектор и $\{\mathbf{D}(x, y)\}$ - совокупность nk матриц переходов и выходов размера $(m \times n)$:

$$\{\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} = \{\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R^{m,n}}, x \in X, y \in Y\}.$$

Обобщенным языком в алфавите X называется однозначное отображение $Z = \Phi_Z : X^* \to \{0, 1\}$.

Обобщенным недетерминированным автоматом с отмеченными состояниями называется ND-автомат

$$\mathcal{A}_{nd} = \langle X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{D}(x)\}, \varphi, \mathbf{q} \rangle,$$

где функция $\varphi : A \to Y$.

Теорема

Для каждого обобщенного ND-автомата

$$\mathcal{A}_{nd} = \langle X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}, \mathbf{q}, Y^{(k)} \rangle,$$

представляющего язык Z, могут быть построены эквивалентные ему (т.е представляющие тот же язык Z) ND-автомат с отмеченными состояниями и абстрактный ND-автомат, имеющие не более mk состояний.

Сетью Петри называют систему

$$C = \langle P, T, F, H, M_0 \rangle,$$

- P - алфавит *мест*, $|P| = m$;
- T - алфавит *переходов*, $|T| = n$;
- $F : P \times T \to \mathbb{N}$ - функция, устанавливающая отношения между местами и переходами;
- $H : T \times P \to \mathbb{N}$ - функция, устанавливающая отношения между переходами и местами;
- $M_0 : P \to \mathbb{N}$ - начальная разметка мест.

Срабатывание перехода t можно определить следующим образом:

$$M' = M - F(t) + H(t).$$

Введем отношение $[\rangle$ непосредственного следования разметок

$$M[\rangle M' \Longleftrightarrow \exists t \in T : (M \geq F(t)) \wedge (M' = M - F(t) + H(t)).$$

Разметка M' достижима из разметки M:

$$\exists M, M_1, M_2, ..., M', \tau = t_1 t_2 ... t_k \in T : M[t_1\rangle M_1[t_2\rangle M_2 ...[t_k\rangle M'.$$

Множество разметок, достижимых из разметки M:

$$R(C, M) = \{M' | M[\rangle M'\}.$$

Если $M = M_0$, то $R(C)$ - множество достижимых разметок.
Помеченная сеть Петри есть пара $(C, \Sigma) = \langle P, T, X, F, \Sigma, M_0 \rangle$, где $\Sigma : T \to X \cup \lambda$ - *помечающая функция* над некоторым алфавитом X, λ - пустой символ.
Синхронная сеть – сеть, при работе которой в начале каждого такта срабатывает максимальное количество взаимно неконфликтующих переходов.

Пусть множество $L(C)$ - последовательных срабатываний сети C, $M_f \in R(C)$ - терминальная разметка, $\widetilde{M_f}$ - подмножество терминальных разметок. Тогда:

- $L(C)$ – свободный язык в алфавите T. Множество свободных языков сетей Петри – класс свободных языков сетей Петри.
- $L(C, M_f) = \{\tau \in T^* | M_0[\tau\rangle M_f\}$ – свободный терминальный язык сети C.
- $L(C, \widetilde{M_f}) = \{\tau \in T^* | M_0[\tau\rangle M_f, M_f \in \widetilde{M_f}\}$ – обобщенный свободный терминальный язык сети C.

Две сети Петри называются эквивалентными, если представляют один и тот же обобщенный свободный терминальный язык.

Эквивалентность сети Петри ND-автомату

Теорема

Для любого обобщенного ND-автомата

$$\mathcal{A}_{nd} = \langle X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}, \mathbf{q}, Y^{(k)} \rangle$$

имеющего m состояний и представляющего язык Z может быть построена эквивалентная ему сеть Петри, имеющая не более mk мест и удовлетворяющая следующим условиям:
– граф разметок сети ограничен;
– все переходы помечаются буквами входного алфавита;
– сеть синхронная - в каждом такте срабатывают переходы, отмеченные одной буквой (те, что могут сработать);
– из каждого места исходят ребра к переходам, отмеченным всеми буквами алфавита X.

Сеть, описанная в формулировке теоремы называется NDA-сетью Петри.

Эквивалентность сети Петри ND-автомату

Доказательство. Рассмотрим обобщенный ND-автомат:

$$\mathcal{A}_{nd} = \langle X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{D}(x,y)\}, \mathbf{q}, Y^{(k)} \rangle.$$

1. Строим из данного автомата абстрактный ND-атомат, имеющий не более mk состояний:

$$\mathcal{A}_{nd} = \langle X, B, \tilde{\mathbf{r}}, \{\tilde{\mathbf{D}}(x)\}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle,$$

где $|B| \leq mk$.
2. Для абстрактного ND-автомата строится матрица прямых переходов по формуле:

$$\mathbf{U} = \bigcup_{s=0}^{n-1} \mathbf{D}(x_s) x_s.$$

3. По матрице прямых переходов строится граф ND-автомата.
4. Полученный граф ND-автомата модифицируем в граф NDA-сети Петри. Начальной разметкой сети будет вектор $\tilde{\mathbf{r}}$, а терминальной - вектор $\tilde{\mathbf{q}}$.
Таким образом будет построена NDA-сеть, эквивалентная исходному ND-автомату. Теорема доказана ■

Эквивалентность сети Петри ND-автомату

Теорема

Для любой NDA-сети Петри, имеющей m мест и представляющей язык Z, может быть построен эквивалентный абстрактный ND-автомат, имеющий не более m состояний.

Доказательство теоремы заключается в построении алгоритма перехода от NDA-сети к абстрактному ND-автомату.

Пример. Пусть задан ND-автомат:

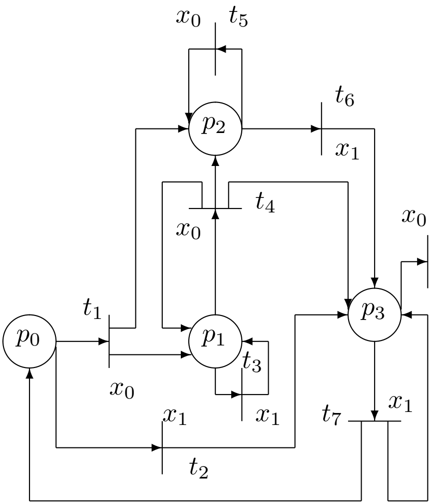
$X = \{x_0, x_1\},\ A = \{a_0, a_1, a_2\},\ Y = \{y_0, y_1\}, Y^{(k)} = \{y_1\}, \mathbf{r} = (1,0,0), \mathbf{q}^T = (1,1,0)$,

$$\mathbf{D}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}(x_0, y_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}(x_1, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентность сети Петри ND-автомату

Граф NDA-сети Петри, эквивалентной исходному ND-автомату, имеет следующий вид:



Автоматный метод анализа сети Петри

Формулировка задачи. Пусть задана NDA-сеть Петри

$$(C, \Sigma) = \langle P, T, X, F, \Sigma, M_0 \rangle.$$

Нужно найти регулярное выражение языка Z, который представляет данная сеть.

Алгоритм анализа.

- Переходим от заданной NDA-сети к эквивалентному ND-автомату.
- Проводим анализ ND-автомата и в результате получаем выражение регулярного языка, представимого исходной сетью Петри.

Автоматный метод синтеза сети Петри

Формулировка задачи. Пусть задано регулярное выражение языка Z в алфавите X

$$Z = Z(e, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Требуется построить сеть Петри, представляющую этот язык.

Алгоритм синтеза сети Петри.

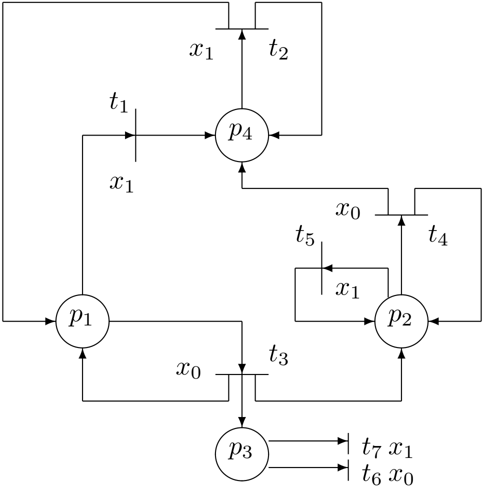
- По регулярному выражению языка синтезируем абстрактный ND-автомат
$$\mathcal{A}_{nd} = \langle X,\ A,\ \mathbf{r},\ \{\mathbf{D}(x)\},\ \mathbf{q}\rangle.$$
- Используя матрицы $\mathbf{D}(x_s), s = \overline{0, n-1}$, находим матрицу прямых переходов $\mathbf{U} = \bigcup_{s=0}^{n-1} \mathbf{D}(x_s)x_s$.
- По матрице прямых переходов строим граф абстрактного ND-автомата.
- По графу автомата строим граф сети Петри.

Автоматный метод синтеза сети Петри

Пример. Рассмотрим выражение регулярного языка:

$$Z = (x_0 \cup x_0(x_0 \cup x_1)^* x_0 x_1^* x_1 \cup x_1 x_1^* x_1)^* x_0.$$

Проведя синтез, получим NDA-сеть Петри:

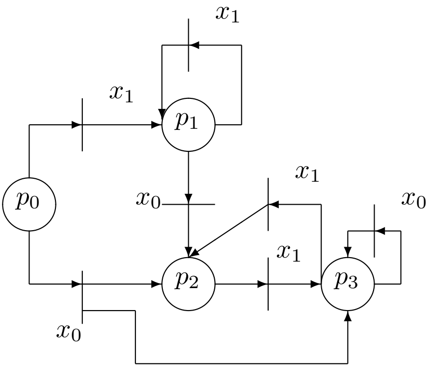


Автоматная оптимизация сети Петри

Формулировка задачи. Пусть имеется сеть Петри $C = (P, T, F, H, M_0)$. Задача заключается в построении эквивалентной ей сети Петри $C' = (P', T, F', H', M_0')$, имеющей наименьшее количество мест.
Такая сеть будет называться сетью Петри в минимальной форме.
Алгоритм оптимизации.

- Строим для исходной сети Петри C эквивалентный ей абстрактный ND-автомат $\mathcal{A}_{nd} = \langle X, A, \mathbf{r}, \{\mathbf{D}(\mathbf{x})\}, \mathbf{q} \rangle$.
- Приводим ND-автомат $\mathcal{A}_{nd}$ к его минимальной форме путем удаления заведомо недостижимых и эквивалентных состояний. В результате этой процедуры получаем автомат $\mathcal{A}'_{nd} = \langle X, A', \mathbf{r}', \{\mathbf{D}'(\mathbf{x})\}, \mathbf{q}' \rangle$.
- Строим для автомата $\mathcal{A}'_{nd}$ эквивалентную NDA-сеть Петри C'.

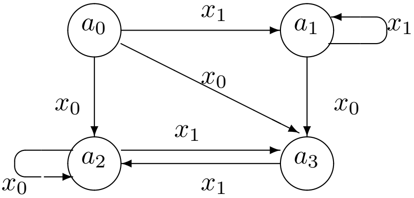
Пример. Рассмотрим процесс оптимизации следующей помеченной сети Петри:



с начальной разметкой $M_0 = (0, 1, 0, 0)$ и терминальной разметкой $M_f = (0, 0, 1, 0)$.

Автоматный оптимизация сети Петри

1. По графу сети построим граф абстрактного ND-автомата, с начальным вектором $\mathbf{r} = (0, 1, 0, 0)$ и финальным вектором $\mathbf{q} = (0, 0, 1, 0)^T$.



По полученному графу автомата строим матрицу его прямых переходов:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_0 & x_0 \\ 0 & x_1 & x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

Из матрицы U получаем матрицы переходов $\mathbf{D}(x_0)$ и $\mathbf{D}(x_1)$:

$$\mathbf{D}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

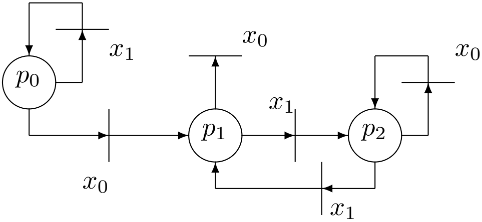
2. Удаляем заведомо недостижимое состояние a_0 и меняем нумерацию состояний, получаем новые матрицы переходов:

$$\mathbf{D}'(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}'(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а также векторы $\mathbf{r}' = (1, 0, 0)$ и $\mathbf{q}' = (0, 1, 0)^T$.
Матрица прямых переходов абстрактного автомата $\mathcal{A}'_{nd}$, полученная по формуле $\mathbf{U} = \bigcup_{s=0}^{n-1} \mathbf{D}(x_s) x_s$:

$$\mathbf{U}' = \begin{pmatrix} x_1 & x_0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \\ 0 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

3. По матрице прямых переходов строится помеченная сеть Петри, которая будет являться минимальной формой исходной сети:



Результаты

В работе были изучены ND-автоматы, методы их синтеза и анализа, а также сети Петри.
Были сформулированы и доказаны теоремы о возможности прямого и обратного перехода от ND-автомата к эквивалентной сети Петри.
На основании этой теоремы были разработаны методы:

- метод автоматного анализа NDA-сети Петри;
- метод автоматного синтеза NDA-сети Петри;
- метод автоматной оптимизации NDA-сети Петри.