Решение систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений Фредгольма второго рода с помощью метода Монте-Карло

Кипрушкин Михаил Андреевич, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра Статистического Моделирования

Научный руководитель: д. ф.-м. н., профессор Ермаков С.М.
Рецензент: к. ф.-м. н. Каштанов Ю.Н.

Санкт-Петербург
2015г.

Ряд Неймана

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_X k(x,y)\varphi(y)dy + f(x), \qquad (1)$$

ядро k — ограничено и суммируемо в смысле Лебега, f — ограничено, X — l–мерное евклидово пространство.
Введем *итерированные* ядра

$$k_1(x,y) = k(x,y),\ \ k_n(x,y) = \int\limits_X k_{n-1}(x,s)k(s,y)ds.$$

Ядро $k_n(x,y)$ есть ядро оператора $k^n(x,y)$.
Ряд $R(x,y;\lambda) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} k_{m+1}(x,y)\lambda^m$ называется *резольвентой*.
Если сходится ряд Неймана (достаточное условие: $||\lambda k|| < 1$), то решение интегрального уравнения (1) представимо в виде

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_X R(x,y;\lambda)f(y)dy + f(x).$$

Ряд Фредгольма. λ — не особое значение.

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int\limits_X \cdots \int K \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n,$$

$$D(x, y; \lambda) = k(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int\limits_X \cdots \int K \begin{pmatrix} x & t_1 & \dots & t_n \\ y & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n,$$

$$K \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} k(t_1, t_1) & \dots & k(t_1, t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ k(t_1, t_1) & \dots & k(t_n, t_n) \end{vmatrix}.$$

Если λ не является корнем уравнения $D(\lambda) = 0$, то уравнение (1) имеет только одно решение и оно представимо в виде:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_X \frac{D(x, y, \lambda)}{D(\lambda)} f(y) dy + f(x).$$

Ряд Фредгольма. λ — особое значение.

$$\begin{aligned}
b_t(x_0, x_0) &= \frac{(-\lambda)^t}{t!} \underset{X}{\int \cdots \int} dx_1 \dots dx_t \; K\begin{pmatrix} x_0, x_1, \dots, x_t \\ x_0, x_1, \dots, x_t \end{pmatrix}, \\
c_t(x, y, x_0, x_0) &= \frac{(-\lambda)^t}{t!} \underset{X}{\int \cdots \int} dx_1 \dots dx_t \; K\begin{pmatrix} x, x_0, x_1, \dots, x_t \\ y, x_0, x_1, \dots, x_t \end{pmatrix}, \\
D(x_0, x_0) &= \sum_{t=0}^{\infty} b_t(x_0, x_0), \;\; D(x, y, x_0, x_0) = \sum_{t=0}^{\infty} c_t(x, y, x_0, x_0),
\end{aligned}$$

$$\varphi(x) = \int_X \frac{D(x, y, x_0, x_0) f(y)}{D(x_0, x_0)} dy + f(x).$$

Моделирование определителей Фредгольма, λ — не особое значение (Каштанов Ю.Н.).

- Пусть $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ случайная последовательность в X и $p_{1,n}(x_1, \dots, x_n)$ — совместная плотность $x_1, \dots, x_n$. Положим:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q_n = K_n Q_{n-1} = \begin{bmatrix} \hat{b}_n \\ \hat{a}_n \end{bmatrix},$$

$$K_n = \begin{bmatrix} k(x_{n+1}, x_{n-1}) & k(x_{n+1}, x_n) \\ -\frac{1}{n} k(x_n, x_{n-1}) & -\frac{1}{n} k(x_n, x_n) \end{bmatrix} \qquad \text{для четных } n,$$

$$K_n = \begin{bmatrix} k(x_{n-1}, x_{n+1}) & k(x_n, x_{n+1}) \\ -\frac{1}{n} k(x_{n-1}, x_n) & -\frac{1}{n} k(x_n, x_n) \end{bmatrix} \qquad \text{для нечетных } n.$$

Известно, что:

$$\mathrm{E}\left(\frac{\hat{a}_n}{p_{1,n}}\right) = a_n, \qquad \mathrm{E}\left(\frac{\hat{b}_n}{p_{1,n-1}} | x_n, x_{n+1}\right) = \begin{cases} b_n(x_{n+1}, x_n), & n \text{ — четное;} \\ b_n(x_n, x_{n+1}), & n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Моделирование определителей Фредгольма, λ — не особое значение (Каштанов Ю.Н.).

- Пусть $p_n(x_n|x_0,\ldots,x_{n-1})$ — условная плотность распределения случайной величины x_n. Положим:

$$E = \{\delta_{i,j}\}_{i,j=0}^m, \qquad K = \left\{ \frac{k(x_i,x_j)}{\sqrt{p_i p_j}} \right\}_{i,j=0}^m, \qquad h_i = \frac{h(x_i)}{\sqrt{p_i}}, \qquad f_i = \frac{f(x_i)}{\sqrt{p_i}},$$

$$B_0(i,j) = 0, \qquad A_0 = 1, \qquad B_n = K(B_{n-1} + A_{n-1}E), \qquad A_n = -\frac{1}{n}\mathrm{sp}\, B_n,$$

$$\hat{A}_n = \frac{(m-n)!}{m!}A_n, \qquad \hat{B}_n = \frac{(m-n-1)!}{m!}\sum_{i\neq j} h_i B_n(i,j) f_j.$$

Известно, что для $n = 0, 1, \ldots, m-1$

$$\mathrm{E}\hat{A}_n = a_n, \qquad \mathrm{E}\hat{B}_n = \iint\limits_X \pi(dx)\pi(dy)h(x)b_n(x,y)f(y).$$

Моделирование определителей Фредгольма, λ — особое значение (Ермаков С.М. и Каштанов Ю.Н.).

- Промоделируем независимо точки $x_1, \ldots, x_n$ с некоторой плотностью $p(x)$ на X, $p(x) \geq p_0 > 0$.

$$K = \left\{ \frac{k(x_i, x_j)}{\sqrt{p_i p_j}} \right\}_{i=0,j=0}^{n,n}, \quad p_i = \begin{cases} p(x_i), & i \geq 1 \\ 1, & i \leq 0 \end{cases}$$

-

$$\begin{aligned} B_0 &= \{K(i,j)\}_{i,j=0}^{n}, \quad C_0 = \left\{ K \begin{pmatrix} i, 0 \\ j, 0 \end{pmatrix} \right\}_{i=1,j=0}^{n,n}, \\ B_{t+1} &= \left(B_t - \frac{\operatorname{sp} B_t}{t+1} I \right) K, \\ C_{t+1} &= \left[C_t + B_{t+1}(0,0)\, I \right] K - B_{t+1}(\cdot, 0) K(0, \cdot). \end{aligned}$$

- Известно, что

$$b_t(x_0, x_0) = \frac{(n-t)!}{n!} \mathsf{E} B_t(0,0),$$

$$c_t(x_i, x_j, x_0, x_0) = \frac{(n-t-2)!}{(n-2)!} \mathsf{E} C_t(i,j).$$

Метод рандомизации интегрального уравнения

- Пусть точки $x_1, \dots, x_n$ распределены в X независимо с плотностью $p(x)$. Число точек n может быть случайным, обозначим $\mathsf{E}n = L$.
- Матрица $A(x_1, \dots, x_n)$ с элементами

$$\delta_{i,j} - \frac{k(x_i, x_j)}{Lp(x_j)}$$

- Матрица $A_x(x_1, \dots, x_n)$ порядка $n+1$, получаемая из матрицы A добавлением строки $(-k(x, x_1)/L, \dots, -k(x, x_n)/L)$ и столбца $(f(x_1), \dots, f(x_n), f(x))^{\mathrm{T}}$.

Теорема (Булавский Ю.В.)

Пусть число точек распределено по закону Пуассона с параметром L. Тогда решение интегрального уравнения представимо в виде:

$$\varphi(x) = \frac{\mathsf{E}|A_x(x_1, \dots, x_n)|}{\mathsf{E}|A(x_1, \dots, x_n)|}.$$

Метод рандомизации интегрального уравнения

- $$K = \left\{ \frac{k(x_i, x_j)}{\sqrt{p_i p_j}} \right\}_{i=0, j=0}^{n,n}, \quad p_i = \begin{cases} p(x_i), \ i \geq 1 \\ 1, \ i = 0 \end{cases},$$

$$A(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} K(0,0) & K(0,1) & \dots & K(0,n) \\ -\frac{1}{L}K(1,0) & 1 - \frac{1}{L}K(1,1) & \dots & -\frac{1}{L}K(1,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{L}K(n,0) & -\frac{1}{L}K(n,1) & \dots & 1 - \frac{1}{L}K(n,n) \end{pmatrix}.$$

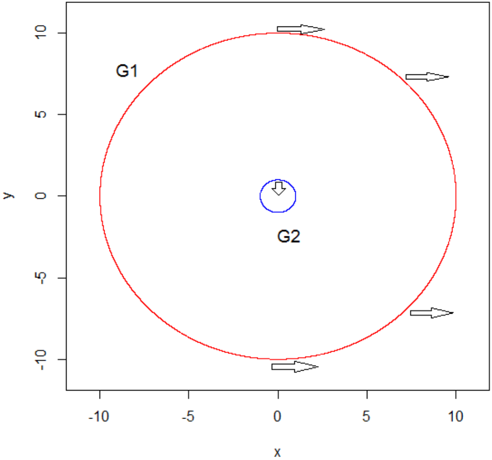
- Матрица $A_x(x_0, x_1, \dots, x_n)$, получаемая из матрицы A добавлением строки $(-K(x, x_0)/L, \dots, -K(x, x_n)/L)$ и столбца $(0, \frac{f(x_1)}{\sqrt{p_1}}, \dots, \frac{f(x_n)}{\sqrt{p_n}}, f(x))^{\mathrm{T}}$.

Теорема

Пусть число точек распределено по закону Пуассона с параметром L. Тогда решение интегрального уравнения представимо в виде:

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{E}|A_x(x_0, x_1, \dots, x_n)|}{\mathrm{E}|A(x_0, x_1, \dots, x_n)|}.$$

Обтекание цилиндра



$$\Delta u = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{G1} = cos\varphi,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{G2} = 0.$$

Ядро со слабой особенностью

$$\phi(x) - \int_X K(y,x)\phi(y)dy = \frac{f(x)}{2\pi},$$

где $K(y,x) = -\frac{\cos\psi}{\pi r}$, ψ — угол между нормалью в точке x и прямой, проходящей через точки x и y.
Обозначим

$$l(x,y) = k(x,y)\chi_{(|x-y|>\delta)}(x,y),\ m(x,y) = k(x,y)\chi_{(|x-y|<\delta)}(x,y),$$

где δ достаточно мало. Предполагаем, что

$$||l(\cdot,\cdot)|| = \sup_{x,y\in X}|l(x,y)| \le l_1 < \infty,\ \sup_{x\in X}\int_X dy|m(x,y)| \le m_1 < 1.$$

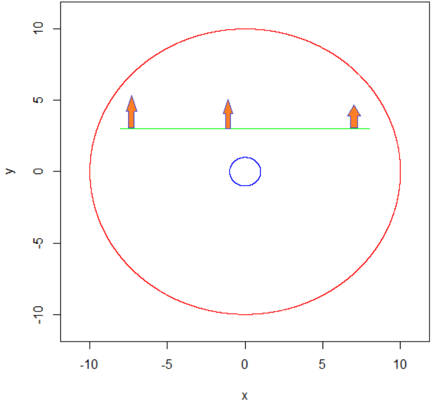
Далее, обозначим $M(x,y) = \sum_{t=1}^{\infty} m^{(t)}(x,y)$, где $m^{(t)}(x,y)$ — t-я итерация ядра m, и положим

$$\tilde{k}(x,y) \quad = \quad l(x,y) + \int_X dzM(x,z)l(z,y).$$

Обтекание цилиндра

Если радиус цилиндра равен 1, радиус дополнительной окружности равен 10 и $V = 1$ (единичная скорость), то точное решение выглядит как

$$u = \frac{100x}{99}\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right) \text{ или } u = \frac{100}{99}\cos\varphi\left(r + \frac{1}{r}\right).$$



Численные результаты

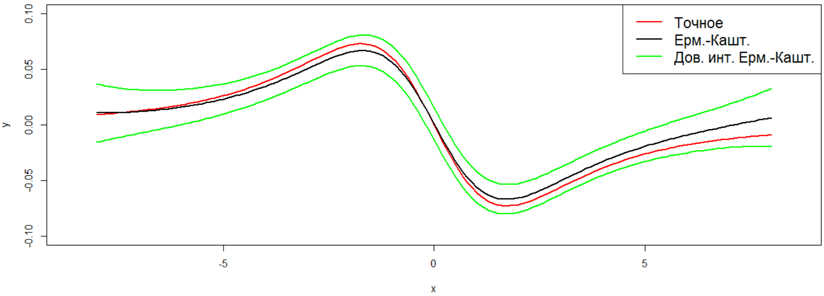


Рис. 1: Ермаков-Каштанов. 60 секунд. 1513 реализаций.

Численные результаты

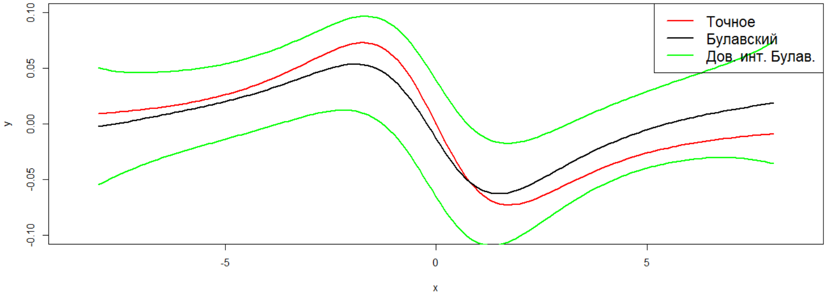


Рис. 2: Булавский. 60 секунд. 2074 реализаций.

Численные результаты

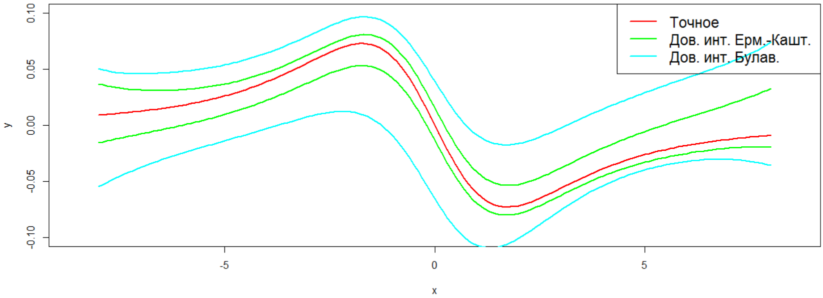


Рис. 3: Ермаков-Каштанов и Булавский. 60 секунд.

Численные результаты

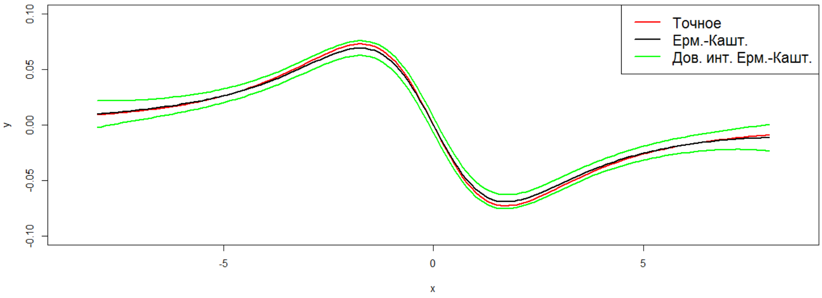


Рис. 4: Ермаков-Каштанов. 300 секунд. 7779 реализаций.

Численные результаты

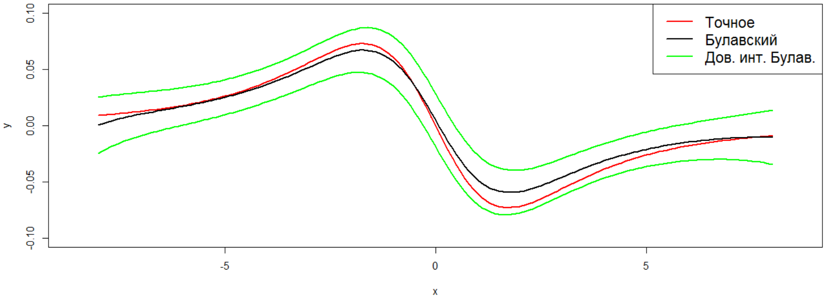


Рис. 5: Булавский. 300 секунд. 10366 реализаций.

Численные результаты

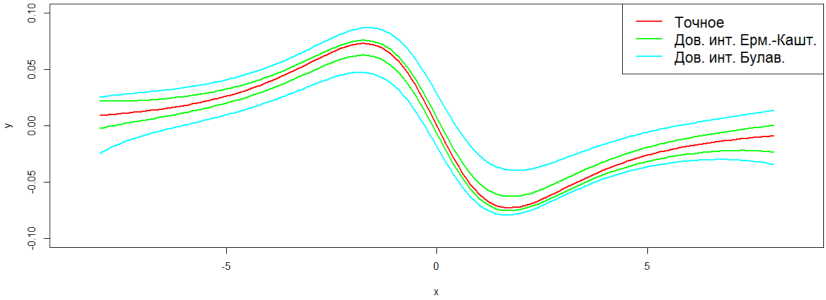


Рис. 6: Ермаков-Каштанов и Булавский. 300 секунд.

Результаты

- Построение несмещенной оценки на основе метода рандомизации для решения интегрального уравнения в особом случае.
- Численная реализация различных методов на примере интегрального уравнения, возникающего при решении задачи Неймана.
- Сравнение методов на кривой.