Кафедра статистического моделирования
Дипломная работа
студентки 522 группы Кургановой Альбины Бориславовны

Исследование линейных уравнений в идемпотентной алгебре

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент Н.К. Кривулин
Рецензент:
д. ф.-м. н., профессор М.К.Чирков

Санкт-Петербург
2006

Основные понятия

Идемпотентная алгебра $R_{\max}$

$$a \oplus b = \max(a,b) \qquad a,b \in R_\varepsilon$$

$$a \otimes b = a + b$$

$R_\varepsilon = R \bigcup \{\varepsilon\}$, где $\varepsilon = -\infty$

$$a^{-1} = -a \qquad \varepsilon^{-1} = \varepsilon$$

Линейное векторное пространство

$$a \oplus b = (a_1 \oplus b_1, \ldots, a_n \oplus b_n)^T$$

$$x \otimes a = (x \otimes a_1, \ldots, x \otimes a_n)^T$$

$$L(a_1, \ldots, a_n) = \left\{ \bigoplus_{k=1}^{n} \lambda_k \otimes a_k \,\middle|\, \lambda_k \in R \right\}$$

-- это линейная оболочка векторов

Операции с матрицами

$y = A \otimes x$, где $A = (a_{ij}) \in R_\varepsilon^{m \times n}$,

$$x \in R_\varepsilon^n,\ y \in R_\varepsilon^m$$

$$y_i = \bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij} \otimes x_j,\ i = 1, \ldots, m.$$

$$\mathrm{TrA} = \bigoplus_{m=1}^{n} \bigoplus_{i_0, \ldots, i_{m-1}} a_{i_0 i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_{m-1} i_0}$$

Собственные значения и векторы

$$A \otimes x = \lambda \otimes x,$$

где $x \in R_\varepsilon^n,\ x \neq \varepsilon,\ \lambda \in R$

λ – собственное значение

x – собственный вектор

$\varepsilon = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$

Системы линейных уравнений

$$A \otimes x = b$$

$$A \otimes x = x \oplus d$$

$$A \otimes x \oplus b = C \otimes x$$

где $x, b, d \in R^n$

A, C – квадратные матрицы

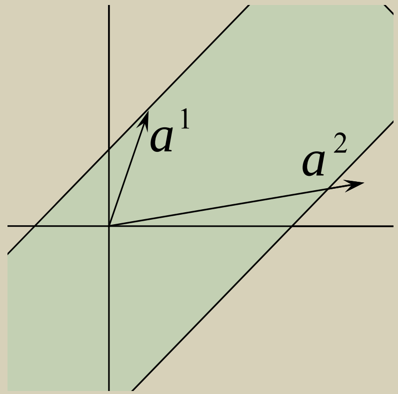
Применение:

- Задачи планирования
- Производственные задачи
- Системы с очередями

Имеющиеся результаты

- Известна геометрическая интерпретация линейной оболочки двух векторов в R^2.

  Это полоса, натянутая на векторы.



- Доказан следующий результат

$$b \in L(A) \Leftrightarrow \left(A \otimes \left(b^- \otimes A\right)^-\right)^- \otimes b = 0$$

- Найдено частное решение уравнения $A \otimes x = b$

$$x = \left(b^- \otimes A\right)^-, \quad b^- = -b^T$$

Кривулин Н.К. О решении линейных уравнений в идемпотентной алгебре// Математические модели. Теория и приложения. Вып.5. Сборн. Научн. Статей./ Под ред. М.К. Чиркова. СПб. ВВМ, 2004. с.105

Общее решение $A \otimes x = b$.

Утверждение.

Общее решение имеет следующий вид:

$$x = \left(b^{-} \otimes A \oplus D(A,b) \otimes v\right)^{-},$$

где $v \in R$, $D(A,b) \in \{ D_1, \ldots, D_s \}$, $D_k = diag\{ d_{k_{pp}} \}$

$$d_{k_{pp}} = \begin{cases} \varepsilon, \ p \in \{ k_1, \ldots, k_p \} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \qquad \begin{matrix} k = 1, \ldots, s \\ p = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

вектора $a^{k_1}, \ldots, a^{k_p}$ образуют минимальную линейно независимую систему и $\exists \ x \in R^p$ $\left(a^{k_1}, \ldots, a^{k_p}\right) \otimes x = b$

Общее решение $A \otimes x = b$.

Утверждение.

Общее решение имеет следующий вид:

$$x = \left(b^{-} \otimes A \oplus D(A,b) \otimes v\right)^{-},$$

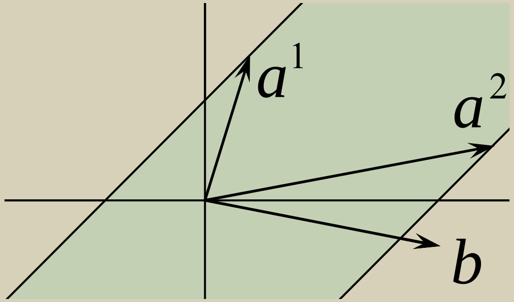
где $v \in R,\quad D(A,b) \in \{ D_1, \dots, D_s \},\ D_k = diag\{ d_{k_{pp}} \}$

$$d_{k_{pp}} = \begin{cases} \varepsilon,\ p \in \{ k_1, \dots, k_p \} \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases} \qquad \begin{matrix} k = 1, \dots, s \\ p = 1, \dots, n \end{matrix}$$

вектора $a^{k_1}, \dots, a^{k_p}$ образуют минимальную линейно независимую систему и $\exists\, x \in R^{p}$

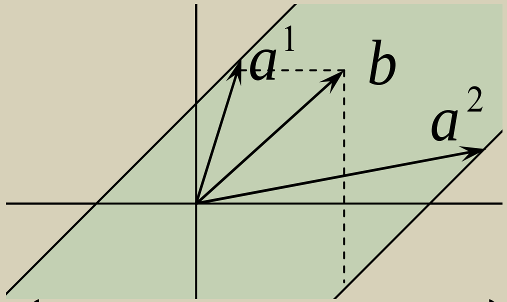
$$\left(a^{k_1}, \dots, a^{k_p}\right) \otimes x = b$$

Геометрическая интерпретация



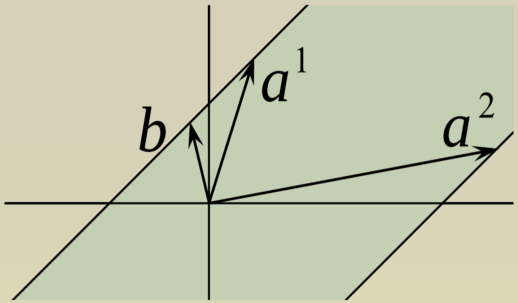
$$b \notin L(A)$$

Решений нет



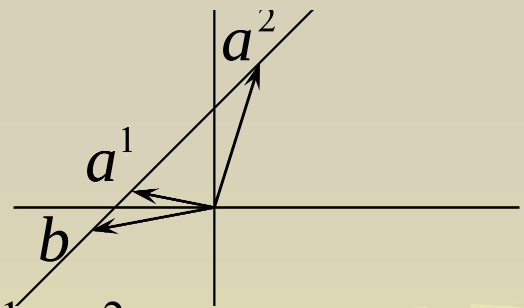
$$b \in \left\{ L(A) \setminus \partial\left(L(A)\right) \right\}$$

Решение существует и единственно



$$b \in \partial\left(L(A)\right)$$

Решений бесконечно много



a^1, a^2 - линейно зависимы

2 бесконечных семейства решений

Линейная оболочка векторов

Утверждение.

Линейная оболочка матрицы A равна $L(A)=M(S)$,

где S – это проекция линейной оболочки на плоскость $x_1+\dots+x_n=0$,

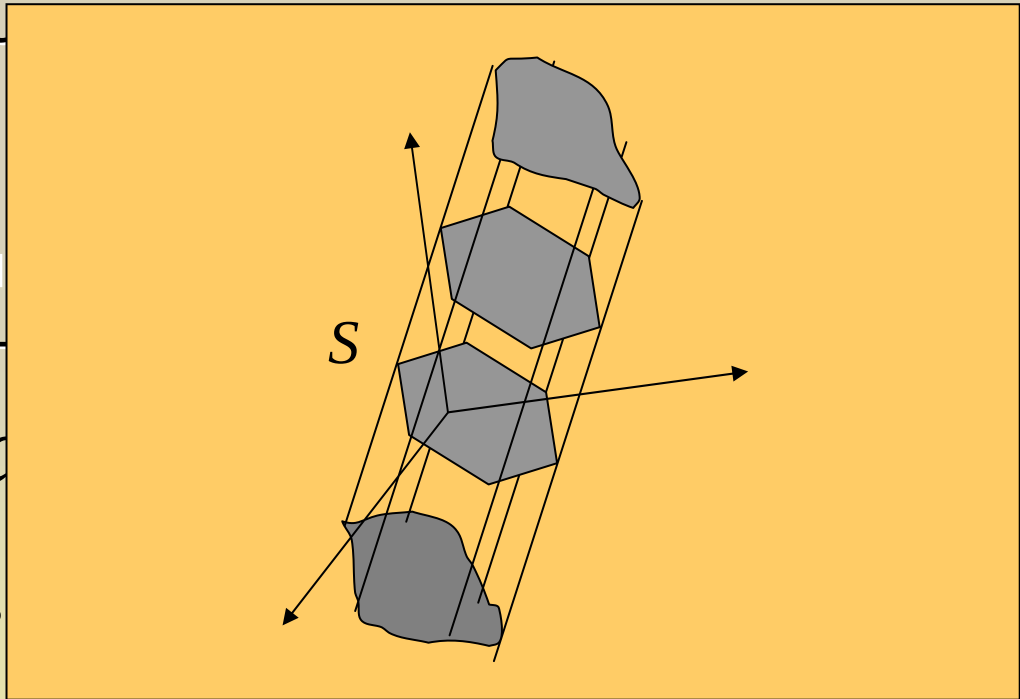
M – это движение параллельно вектору $\vec{1}=(1,\dots,1)$

В общем случ… …ставляет собой заполненный…

Выведены ан… …ющие координаты вершин сечен…

$$p_i = b \oplus c\ldots$$

где $i=1,\dots,n,$…

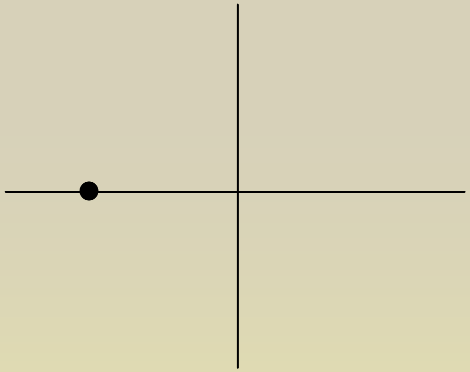


Сечение линейной оболочки

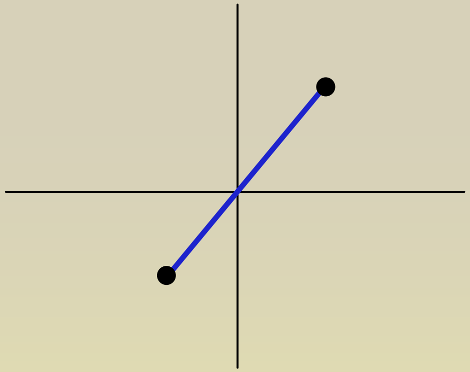
С помощью численного моделирования получены все возможные виды линейных оболочек 1,2,3-х векторов в R^n
Алгоритм основан на следующем утверждении

$$b \in L(A) \Leftrightarrow \left(A \otimes \left(b^- \otimes A\right)^-\right)^- \otimes b = 0$$

Вид сечения зависит от вектора $\delta = b \otimes a^-$

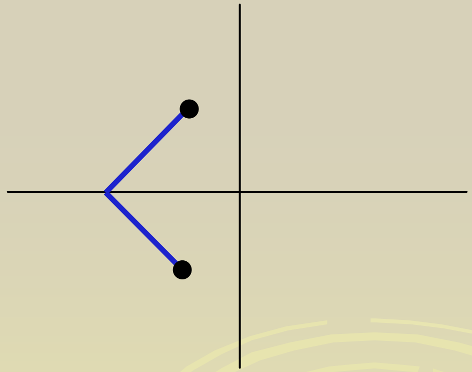


$L(a)$



$L(a,b)$

$\delta_1 = \delta_3$



$L(a,b)$

$\delta_1 \neq \delta_2 \neq \delta_3$

Сечение линейной оболочки 3-х векторов

Классификация:

- 1 класс. Для любой пары векторов различны координаты вектора δ
- 2 класс. У одной пары векторов есть равные координаты вектора δ
- 3 класс. У 2-х пар векторов есть равные координаты вектора δ
- 4 класс. Вектор δ для любой пары имеет равные координаты

Уравнение $A \otimes x = x \oplus d$

Утверждение.

- если $\mathrm{Tr}A=0$, то решением является любой собственный вектор матрицы , для несобственных векторов уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} A \otimes x = d \\ x \le d \end{cases}$
- если $\mathrm{Tr}A<0$, то решений нет
- при $\mathrm{Tr}A>0$ если d собственный вектор, тогда решение есть $x = \lambda^{-1} \otimes d$
- Все решения должны удовлетворять неравенству

$$x \ge \delta \otimes \left(d^{-} \otimes A\right)^{-}, \quad \delta = \left(A \otimes \left(d^{-} \otimes A\right)^{-}\right)^{-} \otimes d$$

Уравнение $A \otimes x = x \oplus d$

Утверждение.

- если $\mathrm{Tr}A<0$, то решений нет
- если $\mathrm{Tr}A=0$, то решением является любой собственный вектор матрицы , для несобственных векторов уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} A \otimes x = d \\ x \leq d \end{cases}$
- при $\mathrm{Tr}A>0$ если d собственный вектор, тогда решение есть $x = \lambda^{-1} \otimes d$
- Все решения должны удовлетворять неравенству

$$x \geq \delta \otimes \left(d^{-} \otimes A\right)^{-}, \ \delta = \left(A \otimes \left(d^{-} \otimes A\right)^{-}\right)^{-} \otimes d$$

Уравнение $A\otimes x = C\otimes x \oplus d$

Утверждение.

Если $L(A^T)\subset L(C^T)$, то исходная система

эквивалентна $\begin{cases} R\otimes y\oplus d = y \\ C\otimes x = y \end{cases}$

Если $L(A^T)\supset L(C^T)$, то исходная система

эквивалентна $\begin{cases} y\oplus d = R\otimes y \\ A\otimes x = y \end{cases}$

R находится из уравнения $C^T\otimes R^T = A^T$

Результаты

- Получены формулы, описывающие сечение линейной оболочки двух векторов
- Построен алгоритм нахождения координат вершин сечения линейной оболочки векторов
- Предложена классификация линейной оболочки векторов
- Найдено общее решение уравнения $A \otimes x = b$
- Для уравнения $A \otimes x = x \oplus b$ получено частное решение
- Доказано, что уравнение $A \otimes x \oplus b = C \otimes x$ при выполнении некоторых условий на линейные оболочки матриц можно свести к системе известных уравнений

Результаты

- Получены формулы, описывающие сечение линейной оболочки двух векторов
- Построен алгоритм нахождения координат вершин сечения линейной оболочки векторов
- Предложена классификация линейной оболочки векторов
- Найдено общее решение уравнения $A \otimes x = b$
- Для уравнения $A \otimes x = x \oplus b$ получено частное решение
- Доказано, что уравнение $A \otimes x \oplus b = C \otimes x$ при выполнении некоторых условий на линейные оболочки матриц можно свести к системе известных уравнений

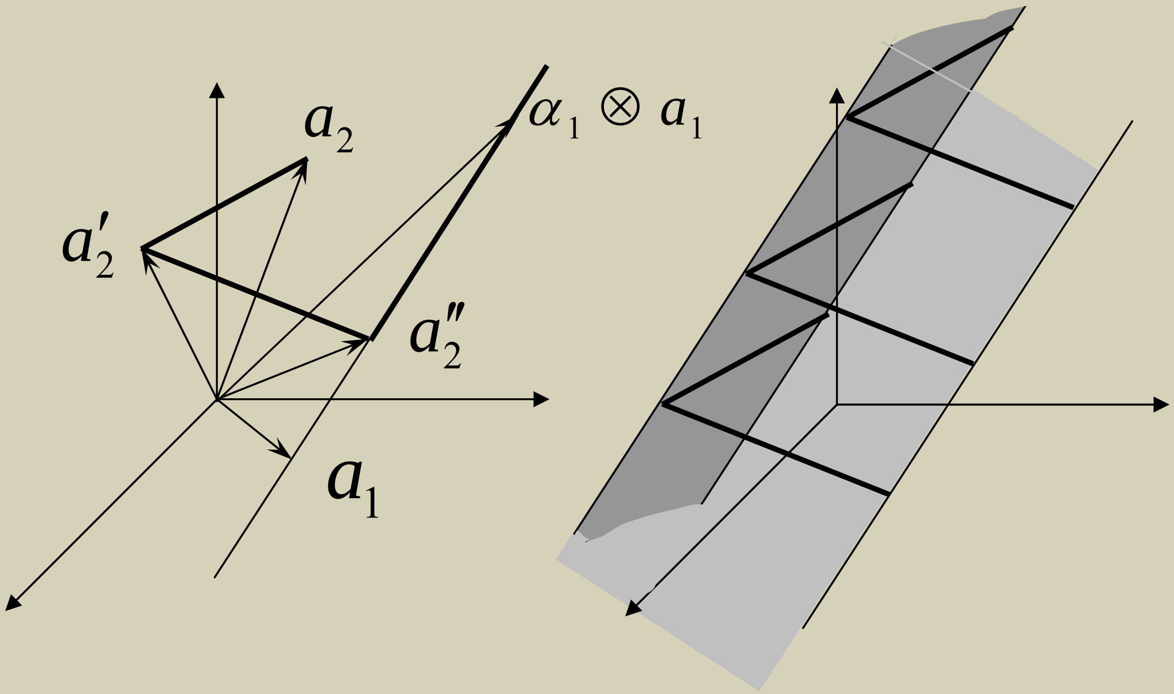


Рис. 4. Построение линейной оболочки двух векторов.

Сечение линейной оболочки 3-х векторов

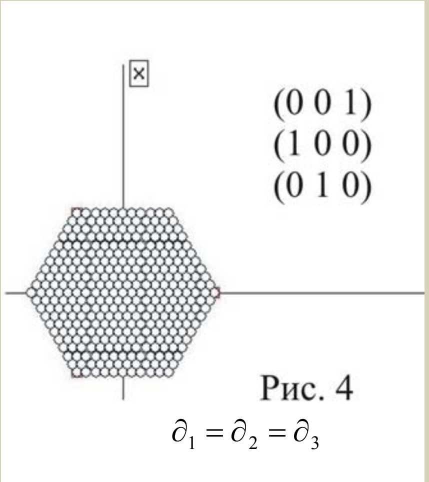


Рис. 4

$\partial_1 = \partial_2 = \partial_3$

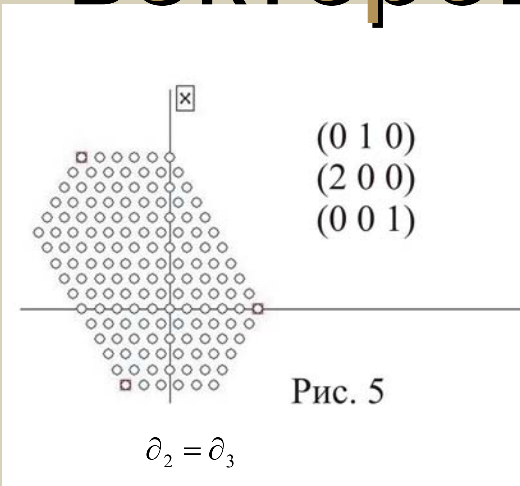


Рис. 5

$\partial_2 = \partial_3$

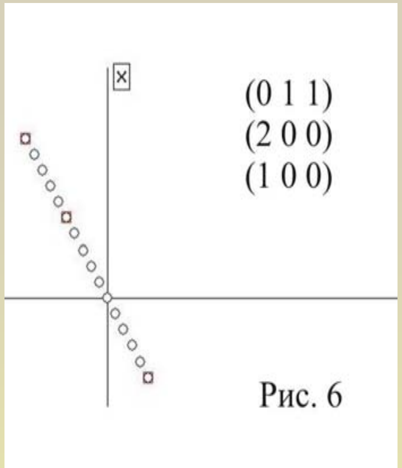


Рис. 6

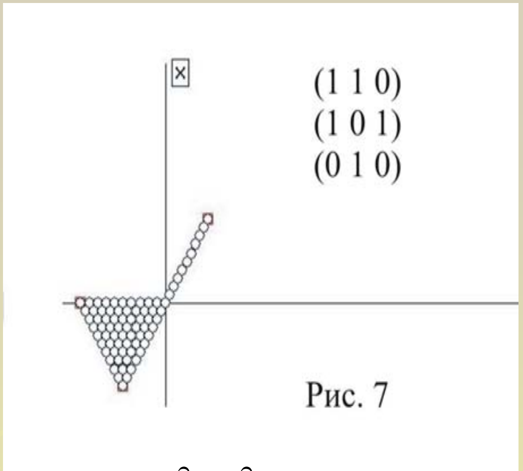


Рис. 7

$\partial_2 = \partial_3$

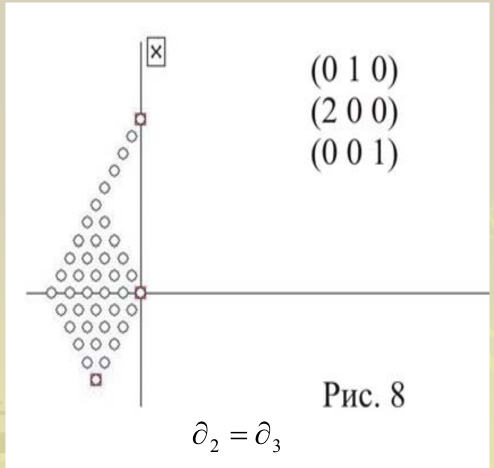
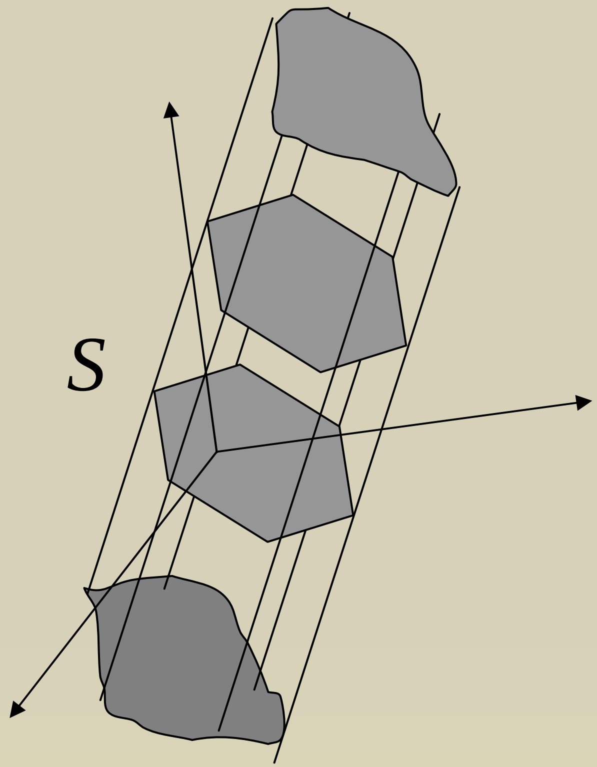


Рис. 8

$\partial_2 = \partial_3$


S