Теория случайных процессов (4/8, 2015/2016)

Некруткин В.В., **темы и вопросы к экзамену 4/8.**

Темы к экзамену

1. Общие понятия. Цилиндрические множества. Распределения случайных процессов. Конечномерные распределения процессов. Классификация случайных процессов.
2. Теорема Колмогорова о конечномерных распределениях. Существование гауссовских процессов. Существование процессов с независимыми приращениями.
3. Теорема Колмогорова о непрерывных реализациях.
4. Броуновское движение и пуассоновский процесс. Моделирование броуновского движения.

5. Комплекснозначные процессы с конечными вторыми моментами. Ковариационная функция и ее свойства. Теорема существования процесса с заданной ковариационной функцией.
6. Лемма о сходимости в L^2. Непрерывность и дифференцируемость в среднем квадратическом. Интегрирование случайных процессов. Закон больших чисел в L^2.
7. Разложение процессов в биортогональный ряд (разложение Карунена-Лоэва).
8. Стохастические ортогональные меры. Интеграл по стохастической ортогональной мере, его свойства. Свойства стохастических интегралов.
9. Стационарные последовательности и процессы. Теорема Крамера. ЗБЧ.
10. Линейные преобразования, Белый шум и процесс скользящего суммирования.
11. Авторегрессия и реализуемая авторегрессия.
12. Авторегрессионные прдолжения.

Вопросы к экзамену

1. Алгебра цилиндрических множеств и согласованность конечномерных распределений процессов.
2. Распределение случайного процесса. Объяснение конструкции. Классификация процессов.
3. Теорема Колмогорова о конечномерных распределениях (ход доказательства) . Пример: почему существует бесконечная последовательность независимых случайных величин с произвольными распределениями?
4. Согласованность конечномерных распределений в терминах характеристических функций. Существование гауссовских процессов.
5. Существование процессов с независимыми приращениями. Примеры.
6. Теорема Колмогорова о непрерывных реализациях на конечном и бесконечном промежутках. Ход доказательства.
7. Броуновское движение. Его существование, свойства и моделирование.
8. Комплекснозначные процессы с конечными вторыми моментами. Ковариационная функция и ее свойства. Лемма о сходимости в L^2 и стиль ее использования.

9. Теорема существования комплекснозначного процесса с заданной ковариационной функцией.
10. Лемма о сходимости в L^2. Непрерывность и дифференцируемость в среднем квадратическом.
11. Интегрирование случайных процессов. Закон больших чисел в L^2.
12. Разложение процессов в биортогональный ряд (разложение Карунена-Лоэва).
13. Стохастические ортогональные меры. Интеграл по стохастической ортогональной мере, его свойства.
14. Леммы об стохастических интегралах.

15. Стационарные в широком смысле процессы и последовательности. Существование и простейшие свойства. Лемма о продолжении на отрицательную полуось.
16. Спектральное представление стационарных процессов (теорема Крамера).
17. Спектральная мера и закон больших чисел в L^2.
18. Линейные преобразования случайных процессов (непрерывное и дискретное время). Примеры.
19. Белый шум и процесс скользящего суммирования.
20. Процессы авторегрессии с дискретным временем. Простейшие свойства. Спектральное представление процессов авторегрессии.
21. Реализуемые процессы авторегрессии.
22. Авторегрессия первого порядка. Вещественные гауссовские марковские стационарные последовательности.
23. Утверждение о неотрицательно определенных теплицевых матрицах. Теплицевы матрицы, порожденные стационарными последовательностями. Реализуемые процессы авторегресии и уравнения Юла-Уолкера.
24. Авторегрессионные продолжения стационарных последовательностей. Точность аппрокси-мации авторегресионного продолжения.
25. Полиномы Сегё, их свойства и применение к нахождению коэффициентов авторегрессии.

Вопросы по процессам Пуассона

1. Как можно моделировать пуассоновский процесс и почему?
2. Какие вероятностные модели приводят к пуассоновскому процессу? Как это объяснить «на пальцах»?
3. Какими свойствами обладают моменты скачков пуассоновского процесса и его конечномерные распределения? Примерные идеи доказательств.
4. Что такое расщепление пуассоновского процесса? Чем оно интересно? Как примерно доказываются свойства расщепления?
5. Предельные теоремы для процесса Пуассона. Ход доказательств.
6. Пуассоновские ансамбли как обобщение пуассоновских процессов. Конструкция (идея и ход доказательства).
7. Примеры задач, связанных с пуассоновскими ансамблями (постановки и ход доказательств.)
8. Гамма-пуассоновские процессы. Способ вычисления их различных характеристик. Моменты скачков. Смысл параметров.