Стохастическое решение уравнений Больцмановского типа: наихудший случай

Советкин Евгений Алексеевич, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Некруткин В.В.
Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Голяндина Н.Э.

Санкт-Петербург
2013

Однородное уравнение Больцмановского типа

- Параметры: четвёрка $(E, \mathcal{E}, T, \varphi)$.
  - $(E, \mathcal{E})$ — фазовое пространство;
  - $T(dx; u_1, u_2)$ — ударная трансформанта;
  - φ — вероятностная мера.
- Обозначение:

$$\mathbf{T}(\mu_1, \mu_2)(dx) = \int\limits_{E^2} T(dx; u_1, u_2)\, \mu_1(du_1)\, \mu_2(du_2)\,;$$

- Уравнение:

$$\frac{d\varphi_t}{dt} = \mathbf{T}(\varphi_t, \varphi_t) - \varphi_t, \quad \varphi_0 = \varphi\,;$$

- Единственное положительное решение — вероятностная мера.

Применение: механика, физика, химия и пр.

Постановка задачи

Рассматриваются: случайные $(n,1)$- и $(n,2)$- процессы и системы.

Обозначения:

- $\mu_r^{(n)}(t)$ — распределение r координат n-мерного аппроксимирующего процесса/системы;
- $\varphi_t^{\otimes r}$ — r-кратное произведение решения уравнения.

Известно: (условия) $\operatorname{Var}\left(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\right) \to 0$ при $n \to \infty$ при любых t и r.

Задача: построить такую оценку сверху

$$\operatorname{Var}\left(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\right) \leqslant u(n,r,t),$$

которая достигается при любых n, t и r для некоторой четвёрки $(E, \mathcal{E}, T, \varphi)$.

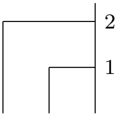
Разложение Вальда

Разложение Вальда решения уравнения: $r \geqslant 1$,

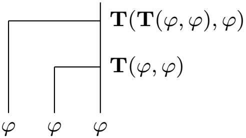
$$\varphi_t^{\otimes r} = \sum_{p=0}^{\infty} C_{p+r-1}^{p}\, e^{-rt}(1-e^{-t})^{p}\, \mathbf{D}_{p,p+r}\,,$$

где $\mathbf{D}_{p,p+r}$ распределения, связанные с бинарными деревьями.

Пример: $r=1$, $\mathbf{D}_{p,p+1} = \frac{1}{p!}\sum_{\delta\in M_{p,p+1}} B_\delta$, δ — бинарные деревья.



Бинарное дерево $\delta = (\,\cdot\, 2\,(\,\cdot\, 1\,\cdot\,))$

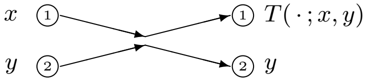


Мера $B_\delta = \mathbf{T}(\mathbf{T}(\varphi,\varphi),\varphi)$

$(n, 1)$-процесс. Определение

$\xi^{(n)}(t)$ — скачкообразный марковский процесс в $(E^n, \mathcal{E}^n)$.

- $\mathcal{L}\big(\xi^{(n)}(0)\big) = \varphi^{\otimes n}$;
- скачки через $\mathrm{Exp}(n)$;
- Столкновения: выбор двух «частиц».



Столкновение

Процесс определяется по четвёрке $(E, \mathcal{E}, T, \varphi)$.

$(n,1)$-процесс. Разложение распределений

Пусть $L = \{1,\ldots,r\}$ и $\xi_L^{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\xi_1^{(n)}(t),\ldots,\xi_r^{(n)}(t)\right)^{\mathrm{T}}$.

Результат [Nekrutkin and Tur, 1997]:

$$\mathcal{L}\big(\xi_L^{(n)}(t)\big) = \sum_{p=0}^{n-r} C_{p+r-1}^{p}\alpha_r(n,p,p+r)\,e^{-rt}(1-e^{-t})^p\mathbf{D}_{p,p+r} + p_{\mathbb{NT}}\,\mathbf{D}_{\mathbb{NT}},$$

где

- $\mathbf{D}_{p,p+r}$ — из разложения Вальда;
- α_r известны;
- $0 \leqslant p_{\mathbb{NT}} \leqslant 1$;
- $\mathbf{D}_{\mathbb{NT}}$ — некоторое распределение.

В работе на основе этого разложения доказаны следующие утверждения.

Предложение

Существуют такие вероятностные меры $\mathbf{G}_1$ *и* $\mathbf{G}_2$, *что*

$$\mathrm{Var}\left(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\right) = p_{\mathbb{NT}} \mathrm{Var}\left(\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2\right),$$

причём $p_{\mathbb{NT}}$ *не зависит от четвёрки* $(E, \mathcal{E}, T, \varphi)$.

Следствие

Имеет место оценка $\mathrm{Var}\left(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\right) \leqslant p_{\mathbb{NT}}$. Оценка достигается тогда и только тогда, когда $\operatorname{supp}\mathbf{G}_1 \cap \operatorname{supp}\mathbf{G}_2 = \varnothing$.

$(n, 1)$-процесс. Основной результат

Предложение

Существует такая четвёрка $(E, \mathcal{E}, T, \varphi)$, *что для любых* n, t *и* r

$$\mathrm{Var}\left(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\right) = p_{\mathbb{NT}},$$

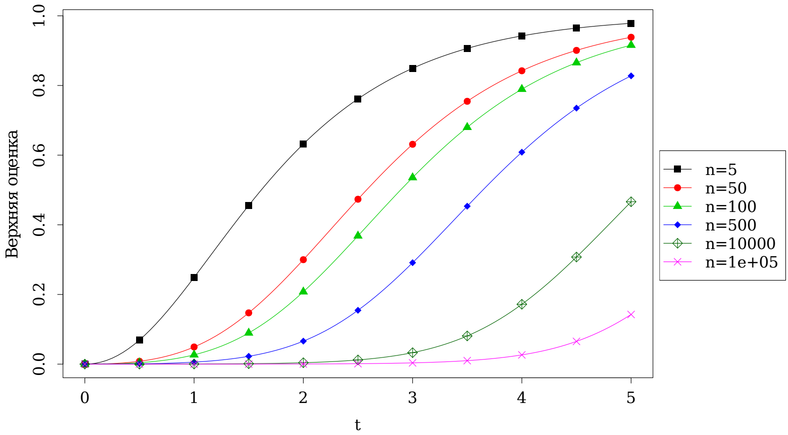
где

$$p_{\mathbb{NT}} = 1 - \sum_{p=0}^{n-r} \alpha_r(n, p, p+r)\, C_{p+r-1}^{p}\, e^{-rt}(1 - e^{-t})^p,$$

и

$$\alpha_r(n, p, p+r) = \prod_{i=r-1}^{p+r-2} \left(1 - \frac{i}{n-1}\right).$$

$(n, 1)$-процесс. Иллюстрация



Оценка сверху величины $\operatorname{Var}\left(\mu_1^{(n)}(t) - \varphi_t\right)$ для $(n, 1)$-процесса

$(n,1)$-системы. Определение. Известные результаты

Определение:

- Вложенная в $(n,1)$-процесс марковская цепь $\eta^{(n)} = \left\{\eta_i^{(n)}\right\}$;
- Число скачков τ_n независимо от $\eta^{(n)}$. f_n — производящая функция τ_n;
- Тогда $\zeta^{(n)} = \eta_{\tau_n}^{(n)}$ — $(n,1)$-система.

Известные результаты ([Nekrutkin, 2000]):

1. Если $\tau_n/n \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathcal{P}$, то $\mathcal{L}\big(\zeta_L^{(n)}\big) \xrightarrow{\mathrm{Var}} \int_0^\infty \varphi_t^{\otimes r}\mathcal{P}(dt)$.
2. Разложение

$$\mathcal{L}\big(\zeta_L^{(n)}\big) = \sum_{p=0}^{n-r} C_{p+r-1}^{p}\alpha_r(n,p,p+r)\,\omega(p,n,r)\,\mathbf{D}_{p,p+r} + p_{\mathbb{NT}}\,\mathbf{D}'_{\mathbb{NT}},$$

где $\omega(p,n,r) = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j\, f_n(1-(r+j)/n)$.

$(n,1)$-системы. Полученные результаты

Основной результат.

Предложение

Для любой $(n,1)$-системы существует такая функция $u(n,r,t)$, не зависящая от четвёрки $(E,\mathcal{E},T,\varphi)$, что

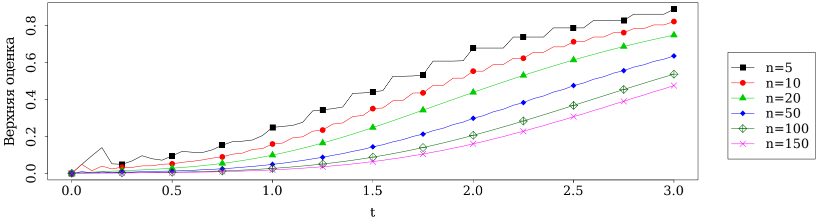
$$\operatorname{Var}\left(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\right) \leqslant u(n,r,t),$$

причём это неравенство превращается в равенство при любых n, r и t для некоторой четвёрки $(E,\mathcal{E},T,\varphi)$.

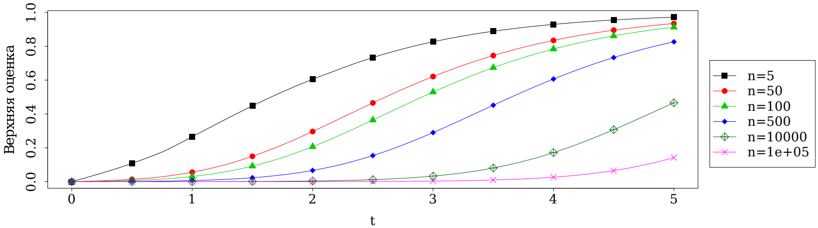
Вычислительные особенности.

- $f_n(x) = \exp(\lambda t(x-1))$ — Пуассоновский случай — удобно для вычислений;
- $f_n(x) = m$ — константный случай — рекуррентная процедура.

$(n, 1)$-системы. Иллюстрации



Константный случай. $m = \lfloor nt \rfloor\,,\ r = 1$



Пуассоновский случай. $\lambda = n - 1,\ r = 1$

$(n,2)$-процесс. Определение

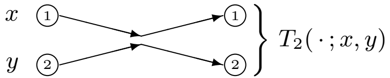
2-х частичная ударная трансформанта: $T_2(du_1 \times du_2;\, v_1, v_2)$.
Условия:

$$T_2(A_1 \times A_2; v_1, v_2) = T_2(A_2 \times A_1; v_1, v_2) = T_2(A_1 \times A_2; v_2, v_1),$$

и $T(dx; v_1, v_2) = T_2(dx \times E; v_1, v_2)$.

$\xi^{(n)}(t)$ — скачкообразный марковский процесс в $(E^n, \mathcal{E}^n)$:

- $\mathcal{L}\big(\xi^{(n)}(0)\big) = \varphi^{\otimes n}$;
- скачки через $\mathrm{Exp}(n/2)$;
- Столкновения: выбор двух «частиц».



Столкновение

$(n,2)$-процесс. Полученные результаты

Полученные результаты (сводка):

- Исправлен вид разложения распределения $\mathcal{L}\big(\xi_L^{(n)}(t)\big)$ из статьи [Иванов et al., 1996];
- Доказано, что при этом результат $\mathcal{L}\big(\xi_L^{(n)}(t)\big) \xrightarrow{\mathrm{Var}} \varphi_t^{\otimes r}$, анонсированный в [Иванов et al., 1996], остаётся верным;
- Получена оценка сверху погрешности $\mathrm{Var}\left(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\right)$;
- Доказано, что эта оценка является достижимой.

$(n, 2)$-системы. Определение

Определение.

- Вложенная в $(n, 2)$-процесс марковская цепь $\eta^{(n)} = \left\{\eta_i^{(n)}\right\}$;
- Число скачков τ_n независимо от $\eta^{(n)}$. f_n — производящая функция τ_n;
- Тогда $\zeta^{(n)} = \eta_{\tau_n}^{(n)}$ — $(n, 2)$-система.

Частный случай: $\tau_n \sim \Pi(nt/2)$ — $(n, 2)$-процесс.

$(n, 2)$-системы изучались в [Nekrutkin and Romkin, 2002].

$(n,2)$-системы. Полученные результаты

Полученные результаты (сводка):

- Исправлен вид разложения распределения $\mathcal{L}\big(\xi_L^{(n)}(t)\big)$ из статьи [Nekrutkin and Romkin, 2002];
- Доказано, что при этом основной результат статьи

Предложение

Если $2\tau_n/n \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathcal{P}$, *то* $\mathcal{L}\big(\zeta_L^{(n)}\big) \xrightarrow{\mathrm{Var}} \int\limits_0^\infty \varphi_t^{\otimes r}\mathcal{P}(dt)$.

остаётся верным;

- Получена оценка сверху погрешности $\mathrm{Var}\left(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\right)$;
- Доказано, что эта оценка является достижимой.

Заключение

Полученные результаты:

- $(n,1)$- и $(n,2)$-процессы и системы: получена оценка
  $$\operatorname{Var}\left(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\right) \leqslant u(n,r,t),$$
  не зависящая от $(E,\mathcal{E},T,\varphi)$;
- построены $(E,\mathcal{E},T,\varphi)$, для которых оценка достигается;
- $(n,2)$-процессы и системы: исправлен вид разложения распределения $\mu_r^{(n)}(t)$.

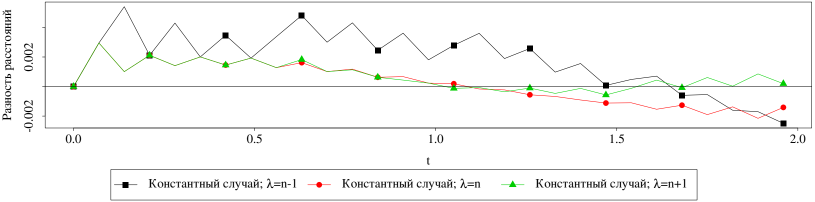
Приложение. Интерпретация погрешности

Интерпретация погрешности $\mathrm{Var}\left(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\right)$:

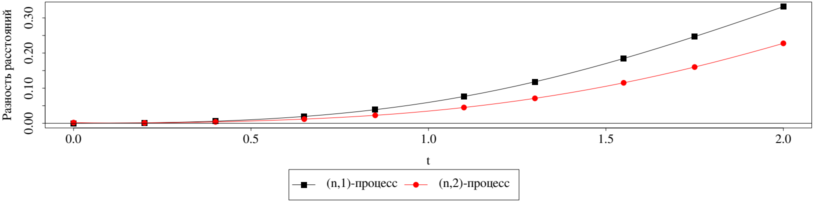
$$\mathrm{Var}\left(\mu_r^{(n)}(t) - \varphi_t^{\otimes r}\right) = \frac{1}{2} \sup_{|f| \leqslant 1} \left| \int f \, d\mu_r^{(n)}(t) - \int f \, d\varphi_t^{\otimes r} \right|.$$

Задача оценивания $\int f \, d\varphi_t$. Оценка $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)}(t))/n$.

$r = 1$: $\mathrm{Var}\left(\mu_1^{(n)}(t) - \varphi_t\right)$ — максимальное смещение.



$(n, 1)$-системы и процесс. $n = 150, \ r = 1$



$(n, 1)$- и $(n, 2)$ процессы. $n = 40, \ r = 1$