Вычисление показателя Ляпунова для одного класса обобщенных линейных стохастических динамических систем второго порядка

Ширяева Инна Михайловна
522-я группа

Научный руководитель — к.ф.-м.н., доцент **Н.К. Кривулин**
Рецензент — к.ф.-м.н., доцент **А.Ю. Пономарева**

Санкт-Петербург
2008

Цель дипломной работы

- В дипломной работе как частный случай сетевых систем с очередями рассматриваются модели с синхронизацией. Эволюция во времени такой системы описывается уравнением вида
$$z(k) = A(k) \otimes z(k-1)$$
- Это динамическое уравнение для вектора $z(k)$ завершения обслуживания k-ых требований в узлах сети. Ясно,что оценка среднего времени рабочего цикла может иметь важное прикладное значение.
- Целью настоящей работы является вычисление точного значения и оценка средней скорости роста вектора $z(k)$ динамической системы второго порядка с матрицей, элементы которой независимы и экспоненциально распределены.

Постановка задачи в общем виде

Рассмотрим линейную систему, динамика которой описывается уравнением

$$z(k) = A(k) \otimes z(k-1),$$

где матрица $A(k)$ имеет вид:

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix},$$

Здесь $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ и $\{\delta_k\}$ - последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин.
Состояние системы на k-ом шаге определяется вектором

$$z(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}$$

Постановка задачи в общем виде

Средняя скорость роста λ вектора состояний этой системы определяется следующим образом:

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\|z(k)\| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\mathbb{E}\|z(k)\|,$$

где норма понимается в смысле идемпотентной алгебры, а именно:

$$\|z(k)\| = x(k) \oplus y(k) = \max(x(k), y(k)).$$

Рассматриваемый случай

В данной работе рассматривается частный случай с матрицей $A(k)$ следующего вида:

$$A(k) = \left(\begin{array}{cc} 0 & \beta_k \\ \gamma_k & 0 \end{array} \right),$$

где диагональные элементы β_k и γ_k матрицы $A(k)$ имеют экспоненциальное распределение вероятностей с параметрами μ и ν соответственно.

Метод решения

Введем случайные величины

$$Z(k) = \|z(k)\| - \|z(k-1)\|, \quad Y(k) = y(k) - x(k)$$

и их функции распределения

$$\Phi_k(t) = \mathsf{P}\{Z(k) < t\}, \quad \Psi_k(t) = \mathsf{P}\{Y(k) < t\}$$

Заметим, что $\|z(k)\| = Z(1) + \ldots + Z(k)$.
Решая интегральное уравнение, находим функции распределения $\Psi_k(t)$ с обоснованием их равномерной сходимости к предельной функции $\Psi(t)$.
С помощью формулы полной вероятности выводится связь между $\Phi_k(t)$ и $\Psi_k(t)$. Затем доказывается равномерная сходимость $\Phi_k(t)$ и находится предельная функция распределения $\Phi(t)$.
И приходим к выражению для вычисления λ в виде

$$\lambda = \int\limits_0^{\infty} t\phi(t)dt$$

Результат

Таким образом был получено следующее значение скорости роста вектора состояний

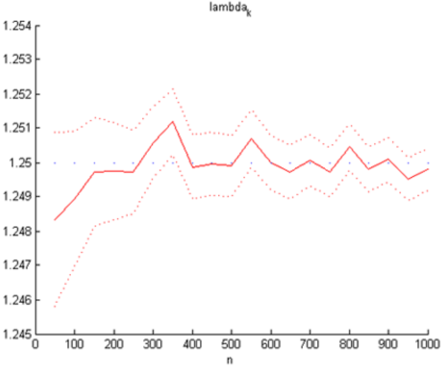
$$\lambda = \frac{4\nu^2 + 7\mu\nu + 4\mu^2}{6\nu\mu(\mu + \nu)}$$

- симметрия относительно μ и ν;
- при $\mu = \nu = 1$ имеем $\lambda = \frac{5}{4}$;

Вычислительный эксперимент

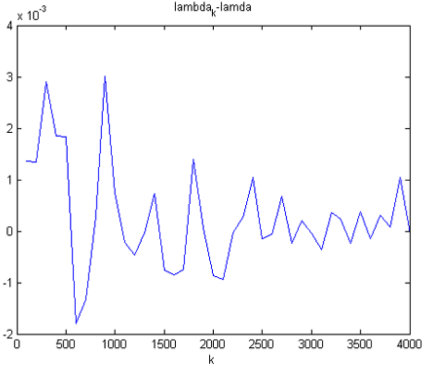
В целях проверки полученного результата был проведен следующий выч. эксперимент:

- при $\mu = \nu = 1$ была промоделирована с.в. $z(k) = \max(x(k), y(k))$ и вычислена величина $\lambda_k = \frac{1}{k}\mathbb{E}z(k)$



Вычислительный эксперимент

- при $\mu = \nu = 1$ оценена разность точного и промоделированного значений



Вычислительный эксперимент

- при $\mu, \nu = [0.5 : 0.5 : 10]$ была получена таблица разностей между промоделированной величиной и полученной аналитически(ниже приведен фрагмент)

-0.0004	0.0008	0.0082	0.0052
-0.0053	-0.0024	0.0013	0.0006
-0.0057	-0.0006	-0.0018	0.0002
-0.0009	0.0020	-0.0002	0.0016
0.0089	-0.0005	0.0009	-0.0009
-0.0017	-0.0010	-0.0005	0.0001
-0.0050	0.0031	0.0018	-0.0002
0.0126	0.0003	-0.0006	0.0002

Заключение

В данной работе была проанализирована динамическая система, эволюция во времени которой описывается уравнением вида

$$z(k) = A(k) \otimes z(k-1). \tag{1}$$

Рассматривался частный случай такой системы с матрицей $A(k)$ следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_k \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}$$

с экспоненциально распределенными (с параметрами μ и ν соответственно) случайными величинами β_k и γ_k.

Заключение

Было вычислено точное значение средней скорости роста состояний вектора $z(k)$ данной системы:

$$\lambda = \frac{4\nu^2 + 7\mu\nu + 4\mu^2}{6\nu\mu(\mu + \nu)}$$

Для проверки и анализа результата была написана программа на Matlab. С ее помощью можно не только проверить полученное значение, но и получить его приближенное значение в тех случаях, когда аналитически получить решение не представляется возможным.