

Два подхода к заполнению пропусков и прогнозированию временных рядов, основанные на SSA

Жукова Марина Михайловна, гр. 522

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра Статистического моделирования

Научный руководитель — к.ф.-м.н., доцент **Н.Э. Голяндина**
Рецензент — к.ф.-м.н., доцент **В.В. Некруткин**



Санкт-Петербург
2011г.

Временной ряд с пропусками: $(f_1, \dots, *, *, *, \dots, f_N)$.

Модель: $f_n = s_n + e_n$, где e_n — шум, s_n — сигнал, который управляется линейной рекуррентной формулой порядка r

$$s_n = \sum_{k=1}^r a_k s_{n-k}. \quad (1)$$

Если r минимальное, то его называют **рангом** сигнала.

Задача: заполнить пропуски значениями сигнала.

$$(f_1, \dots, *, *, *, \dots, f_N) \longrightarrow (f_1, \dots, s_{m-1}, s_m, s_{m+1}, \dots, f_N).$$

Замечание: прогноз является частным случаем заполнения пропусков, если пропуски расположены подряд в конце ряда.

Методы: два метода, основанные на Singular Spectrum Analysis.

Временной ряд с пропусками: $(f_1, \dots, *, *, *, \dots, f_N)$.

Модель: $f_n = s_n + e_n$, где e_n — шум, s_n — сигнал, который управляется линейной рекуррентной формулой порядка r

$$s_n = \sum_{k=1}^r a_k s_{n-k}. \quad (1)$$

Если r минимальное, то его называют **рангом** сигнала.

Задача: заполнить пропуски значениями сигнала.

$$(f_1, \dots, *, *, *, \dots, f_N) \longrightarrow (f_1, \dots, s_{m-1}, s_m, s_{m+1}, \dots, f_N).$$

Замечание: прогноз является частным случаем заполнения пропусков, если пропуски расположены подряд в конце ряда.

Методы: два метода, основанные на Singular Spectrum Analysis.

$$\mathcal{F}_N = \mathcal{S}_N + \mathcal{E}_N, \quad \mathcal{F}_N = (f_1, \dots, f_N)$$

Схема:

$$\mathcal{F}_N \xrightarrow[\boxed{\mathbf{L}}]{\mathcal{T}} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_K \\ f_2 & f_3 & \dots & f_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_L & f_{L+1} & \dots & f_N \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{\mathbf{r}}]{\text{SVD:}(\mu_i, U_i, V_i)}$$

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{L}}_r = \text{span}(U_1, \dots, U_r) \\ \widehat{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^r U_i (\mathbf{X}^T U_i)^T \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{H}} \widetilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \widetilde{s}_1 & \widetilde{s}_2 & \dots & \widetilde{s}_K \\ \widetilde{s}_2 & \widetilde{s}_3 & \dots & \widetilde{s}_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{s}_L & \widetilde{s}_{L+1} & \dots & \widetilde{s}_N \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{T}^{-1}} \widetilde{S}_N$$

Параметры SSA:

- L — длина окна.
- r — ранг сигнала.

- “Caterpillar-Fill”:

Предложен: Н.Голяндина и Е.Осипов, 2005

Основная идея: на основе полных векторов вложения строим аппроксимацию траекторного пространства сигнала \mathcal{L}_T , на его основе заполняем пропуски.

С помощью \mathcal{L}_T можно заполнить пропуски в векторах вложения:

$$X = \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_T, z \in \mathbb{R} \implies z = \varphi(Y).$$

- “Iteration-Fill”:

Предложен: J. Beckers and M. Rixen, 2003 и D. Kondrashov and M. Ghil, 2006

Основная идея: строить аппроксимацию траекторного пространства и заполнять пропуски итерациями алгоритма SSA.

❶ Первая часть:

- *Сходимость метода “Iteration-Fill”.*
- *Сравнение методов:*
 - точность заполнения пропусков;
 - точность прогноза.

❷ Вторая часть:

- *Оценка ранга сигнала r с помощью тестового множества.*
- *Определение размера m тестового множества:*
 - построение алгоритма TESTAR для нахождения m ;
 - сравнение с известными методами оценки ранга сигнала.

❸ Применение к реальному ряду.

Теорема

Пусть есть ряд длины N с пропуском на месте m вида $f_n = s_n + \delta e_n$, где s_n — сигнал ранга r , δe_n — возмущение сигнала, $w = s_m + \delta v$ — начальное значение итерационного алгоритма, $\delta \in \mathbb{R}$. В рамках линейной теории возмущения ошибка заполнения на k -ом шаге итерационного алгоритма имеет вид $\delta \Delta_m^{(1)}(k)$, где:

$$\Delta_m^{(1)}(k) = \begin{cases} \frac{1-\gamma^k}{1-\gamma} \sum_{i=1, i \neq m}^N c_i e_i + \gamma^k v, & \text{если } \gamma \neq 1; \\ k \sum_{i=1, i \neq m}^N c_i e_i + v, & \text{если } \gamma = 1, \end{cases} \quad (2)$$

коэффициенты γ и c_i , $i = 1, \dots, N$, $i \neq m$, не зависят от возмущения сигнала и номера итерации.

Литература: В.Некруткин, 2010

Сходимость итерационного алгоритма

Пример: Для $s_n \equiv c$ получен явный вид формулы (2):

При $1 \leq m < L$ и $N/3 < L \leq N/2$, $L \leq K$:

$$\Delta_m^{(1)}(k) = \frac{1 - \gamma^k}{1 - \gamma} \left(\frac{N + 1 - m}{LKm} \sum_{i=1}^{m-1} i e_i + \sum_{i=m+1}^L \frac{N + 1 - i}{LK} e_i - \sum_{i=K+m}^N \frac{N + 1 - i}{LK} e_i + g(m, L) \right) + \gamma^k v,$$

где $\gamma = (N + 1 - m)/KL$,

$$g(m, L) = \begin{cases} \sum_{i=L+1}^{L+m-1} \frac{L+m-i}{Lm} e_i + \sum_{i=K+1}^{K+m-1} \frac{(L-m)(K-i)}{LKm} e_i, \\ \text{при } 1 \leq m < N - 2L + 2; \\ \sum_{i=L+1}^K \frac{L+m-i}{Lm} e_i + \sum_{i=K+1}^{L+m-1} \frac{2LK-i(N+1-m)}{LKm} e_i + \\ + \sum_{i=L+m}^{K+m-1} \frac{(L-m)(K-i)}{LKm} e_i, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Модель: $f_n = s_n + \delta e_n$, где $s_n \equiv 1$, e_n — белый шум с дисперсией σ^2 .

Предложение

При $N \rightarrow \infty$ будем предполагать, что $L \sim \alpha N$ и $m \sim \lambda N$, где $\alpha \leq 1/2$, и $\lambda \leq 1/2$.

Тогда для фиксированного k верно

$$\mathbf{D}\Delta_m^{(1)}(k) = \mathcal{O}(1/N) \text{ и } \mathbf{E}\Delta_m^{(1)}(k) = v\gamma^k,$$

$$\text{где } \gamma = \begin{cases} \frac{1-\lambda}{\alpha(1-\alpha)N}, & \text{если } 1 \leq \lambda < \alpha; \\ \frac{1}{\alpha N}, & \text{если } \lambda \geq \alpha, \end{cases}$$

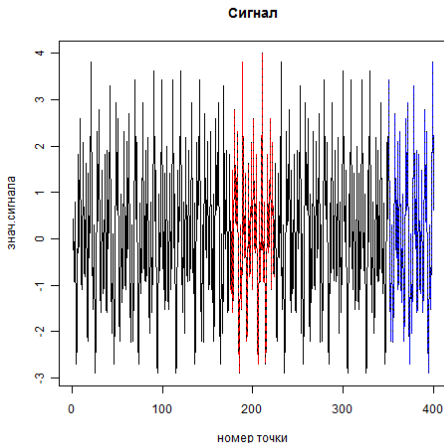
Следствие: Для константного сигнала $\gamma \sim 1/N$.

С помощью моделирования показано, что $\gamma \sim 1/N$ и для гармонического сигнала вида:

$$s_n = 2 \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/7) + \cos(2\pi n/10).$$

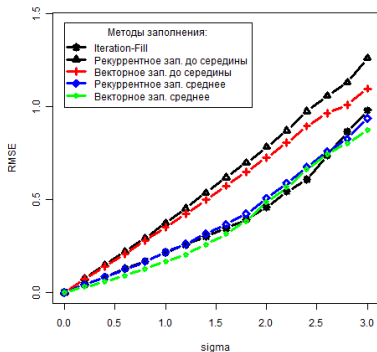
Ряд длины 400 вида $f_n = s_n + e_n$, где e_n — гауссовский белый шум с дисперсией σ^2 , $s_n = 2 \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/7) + \cos(2\pi n/10)$.

Индексы пропусков: [175,224] и [351,400].

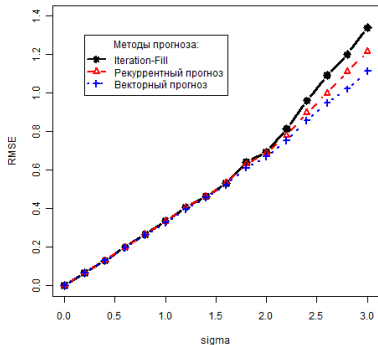


Ряд длины 400 вида $f_n = s_n + e_n$, где
 e_n — гауссовский белый шум с дисперсией σ^2 ,
 $s_n = 2 \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/7) + \cos(2\pi n/10)$.
 $L = 150$, $r = 6$, $\varepsilon = 10^{-5}$

Ошибка заполнения 50 проп. в середине ряда



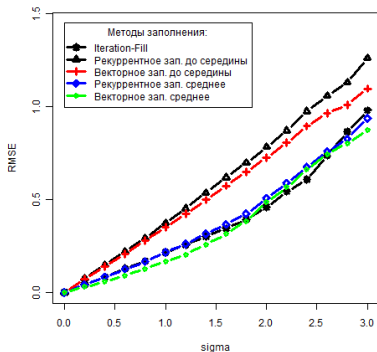
Ошибка заполнения 50 проп. в конце ряда



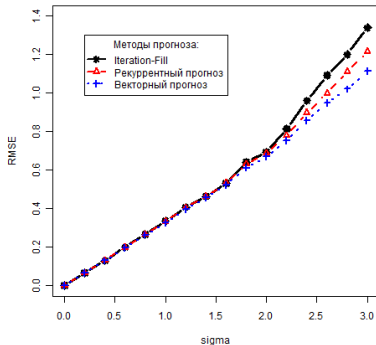
Трудоемкость: "Caterpillar-Fill" — 1 SVD, "Iteration-Fill" — 10 SVD.

Ряд длины 400 вида $f_n = s_n + e_n$, где
 e_n — гауссовский белый шум с дисперсией σ^2 ,
 $s_n = 2 \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/7) + \cos(2\pi n/10)$.
 $L = 150$, $r = 6$, $\varepsilon = 10^{-5}$

Ошибка заполнения 50 проп. в середине ряда



Ошибка заполнения 50 проп. в конце ряда



Трудоемкость: “Caterpillar-Fill” — 1 SVD, “Iteration-Fill” — 10 SVD.

Модель: $f_n = s_n + e_n$, где e_n — шум, s_n — сигнал, который управляется линейной рекуррентной формулой порядка r

$$s_n = \sum_{k=1}^r a_k s_{n-k}, \text{ где } r \text{ — ранг сигнала.}$$

Задача: оценить ранг сигнала r .

Известные методы: AIC, MDL.

Условия применимости:

- параметрическая модель шума;
- “хорошее” расположение пропусков.

Рассмотрим: алгоритм оценки ранга с помощью тестового множества.

- нет условий на модель шума;
- нет условий на расположение пропусков.

Модель: $f_n = s_n + e_n$, где e_n — шум, s_n — сигнал, который управляется линейной рекуррентной формулой порядка r

$$s_n = \sum_{k=1}^r a_k s_{n-k}, \text{ где } r \text{ — ранг сигнала.}$$

Задача: оценить ранг сигнала r .

Известные методы: AIC, MDL.

Условия применимости:

- параметрическая модель шума;
- “хорошее” расположение пропусков.

Рассмотрим: алгоритм оценки ранга с помощью тестового множества.

- нет условий на модель шума;
- нет условий на расположение пропусков.

Алгоритм оценки ранга сигнала с помощью тестового множества

Идея: оценивать ранг по качеству заполнения искусственных пропусков методом “Iteration-Fill”.

Обозначения: $\mathcal{P}^{(m)}$ — множество индексов искусственных пропусков объёма m ; $T_\rho^{(m)}$ — значения на $\mathcal{P}^{(m)}$, заполненные “Iteration-Fill”; $\mathcal{R} = \{1, \dots, \rho_{\max}\}$.

Параметры: объём тестового множества и его расположение.

OneTest

$$\hat{r} = \arg \min_{\rho \in \mathcal{R}} \|T_\rho^{(m)} - F_N|_{\mathcal{P}^{(m)}}\|^2.$$

Литература: J. Beckers and M. Rixen, 2003 и D. Kondrashov and M. Ghil, 2006

Алгоритм оценки ранга сигнала с помощью тестового множества

Идея: оценивать ранг по нескольким случайным тестовым множествам и в качестве оценки брать среднее.

Параметры: b — количество повторных реализаций тестового множества, m — объём тестового множества.

SampleTest

- 1 Генерируем b реализаций тестового множества объёма m : $\{\tilde{\mathcal{P}}_k^{(m)}, k = 1, \dots, b\}$.
- 2 Вычисляем $\hat{r}_k^{(m)} = \mathbf{OneTest}(\tilde{\mathcal{P}}_k^{(m)})$.
- 3 Определяем $\mathbf{R}^{(m)} = \{\hat{r}_1^{(m)}, \dots, \hat{r}_b^{(m)}\}$.

$$\hat{r}^{(m)} = \text{round} \left(\frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \hat{r}_k^{(m)} \right).$$

Литература: J. Beckers and M. Rixen, 2003 и D. Kondrashov and M. Ghil, 2006

Меры точности оценки ранга:

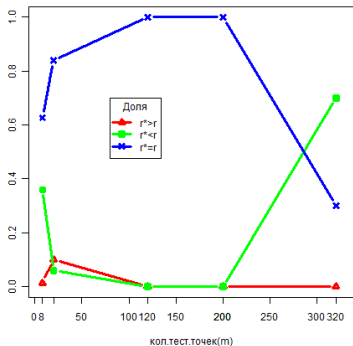
- $\overline{\text{MSE}} = \sum_{k=1}^M \text{MSE}_k / M$, где $\text{MSE}_k = \sum_{i=1}^b (r_i^{(m)} - r)^2 / b$;
- $\%r_{\text{eq}}$ — доля $\hat{r}_i^{(m)}$, $i = 1, \dots, b$ равных r ;
- $\%r_{\text{less}}$ — доля $\hat{r}_i^{(m)}$, $i = 1, \dots, b$ меньше r ;
- $\%r_{\text{more}}$ — доля $\hat{r}_i^{(m)}$, $i = 1, \dots, b$ больше r .

Далее в примере: $M = 150$, $b = 30$.

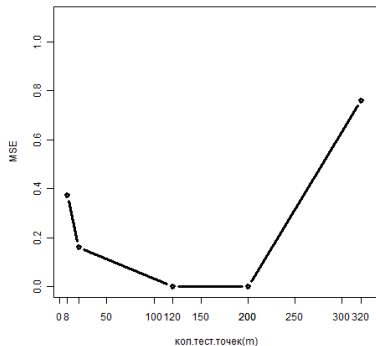
Пример: результаты оценки ранга при различных m

Ряд длины 400 вида $f_n = s_n + e_n$, где
 e_n — гауссовский белый шум с дисперсией σ^2 ,
 $s_n = 2 \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/7) + \cos(2\pi n/10)$,
 $L = 150$, $r = 6$, $M = 150$, $b = 30$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

Меры точности: доли



MSE



Задача: выбирать m и оценивать ранг сигнала r .

Идея: выбирать m так, чтобы разброс оценок ранга по разным тестовым множествам был минимальным.

Алгоритм (TESTAR)

- ❶ Строим $\mathbf{R}^{(m)} = \text{SampleTest}(m)$ и вычисляем

$$s_m^2 = \frac{1}{b-1} \sum_{k=1}^b (\hat{r}_k^{(m)} - \hat{r}^{(m)})^2, \text{ где } \hat{r}^{(m)} = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \hat{r}_k^{(m)}$$

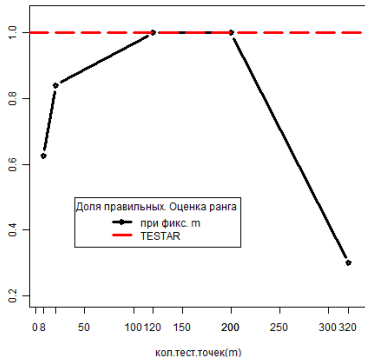
при $m = m_{\min}, \dots, m_{\max}$.

- ❷ Тогда $m_{\text{testar}} = \arg \min_m s_m^2$ и $\hat{r}_{\text{testar}} = \text{round}(\hat{r}^{(m_{\text{testar}})})$.

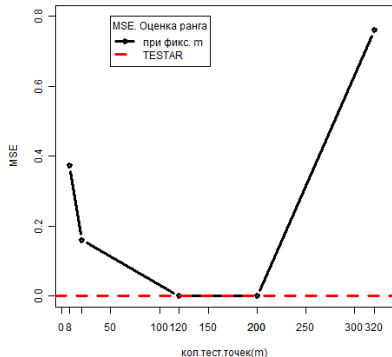
Пример: результаты метода TESTAR

Ряд длины 400 вида $f_n = s_n + e_n$, где e_n — гауссовский белый шум с дисперсией σ^2 ,
 $s_n = 2 \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/7) + \cos(2\pi n/10)$,
 $L = 150$, $r = 6$, $M = 150$, $b = 30$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

Доля правильных оценок



MSE



Задача: сравнить точность оценки ранга методом TESTAR и методами AIC/MDL.

Целевая функция:

$$g(\rho) = -(L - \rho)N \log \left(\frac{\prod_{i=\rho+1}^L \lambda_i^{1/(L-\rho)}}{\frac{1}{L-\rho} \sum_{i=\rho+1}^L \lambda_i} \right) + \varphi(\rho),$$

где $\varphi_{\text{AIC}}(\rho) = k$, $\varphi_{\text{MDL}}(\rho) = 0.5k \log N$, $k = \rho(2L - \rho)$,

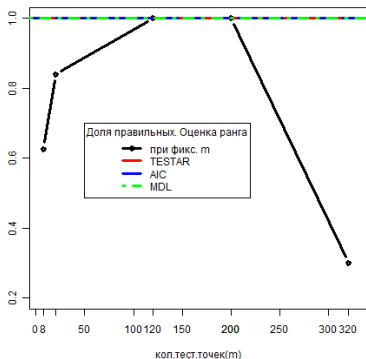
λ_i — собственные числа матрицы $\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^T$,

где $\tilde{\mathbf{X}}$ состоит из полных векторов вложения траекторной матрицы ряда.

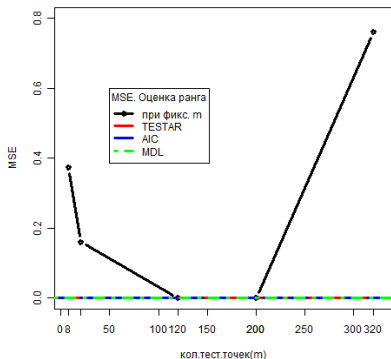
Пример: сравнение точности оценки ранга

Ряд длины 400 вида $f_n = s_n + e_n$, где
 e_n — гауссовский белый шум с дисперсией σ^2 ,
 $s_n = 2 \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/7) + \cos(2\pi n/10)$,
 $L = 150$, $r = 6$, $M = 150$, $b = 30$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

Доля правильных оценок

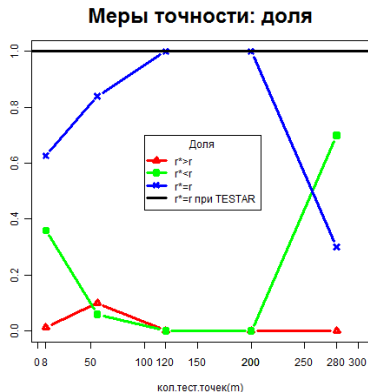
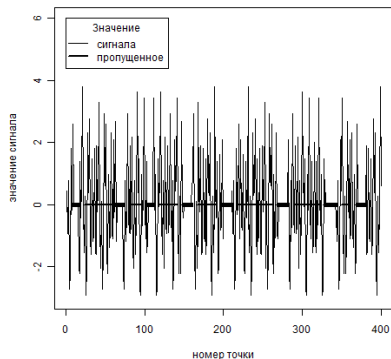


MSE

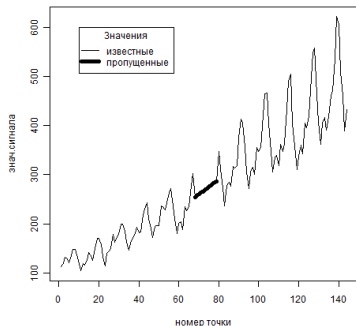


Пример: оценка ранга ряда с пропусками

Ряд длины 400 вида $f_n = s_n + e_n$, где
 e_n — гауссовский белый шум с дисперсией σ^2 ,
 $s_n = 2 \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/7) + \cos(2\pi n/10)$,
 $L = 150, r = 6, M = 150, b = 30, \varepsilon = 10^{-5}, 77$ пропусков.



Реальные данные: Ежемесячный пассажиропоток на международных авиалиниях с января 1949г.



Метод оценки	оценка ранга
AIC $L = 36$	5
MDL $L = 36$	3
TESTAR $L = 72$	16
Визуальный $L = 36$	13

Замечание: в отсутствие пропусков при $L = 36$
 $\hat{r}_{\text{AIC}} = 15$, $\hat{r}_{\text{MDL}} = 6$.

Реальные данные: Ежемесячный пассажиропоток на международных авиалиниях с января 1949г.

Таблица: Ошибки заполнения при разных оценках ранга

r /Метод заполнения	3	5	13	16
Рекуррентное заполнение средним $L = 36$	20.9	13	7.95	6.8
Векторное заполнение средним $L = 36$	21.14	13	11.7	10
"Iteration-Fill" $L = 72$	20.13	12.24	5.7	9.98

- В рамках линейной теории возмущения была доказана теорема о виде ошибки заполнения сигнала методом “Iteration-Fill” в рядах с одним пропуском вида $f_n = s_n + \delta e_n$, где s_n — сигнал конечного ранга, δe_n — возмущение сигнала.
- Для константного сигнала получен явный вид ошибки заполнения и показано, что дисперсия ошибки заполнения не зависит от количества итераций и уменьшается с ростом длины ряда как $1/N$.
- Получены результаты сравнения методов для $s_n = 2 \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/7) + \cos(2\pi n/10)$:
 - метод “Caterpillar-Fill” точнее, если $\sigma < 1.8$, и требует 1 SVD разложение;
 - метод “Iteration-Fill” точнее, если $1.8 \leq \sigma < 2.6$, но требует в среднем 10 SVD разложений.

- Разработан алгоритм оценки ранга сигнала, названный TESTAR.
- На примере вида $f_n = s_n + e_n$, где $s_n = 2 \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/7) + \cos(2\pi n/10)$, e_n — гауссовский белый шум с дисперсией 0.64 показано, что:
 - TESTAR оценивает ранг также точно как MDL и AIC;
 - трудоёмкость методов AIC и MDL существенно (в сотни раз) ниже;
 - в отличие от TESTAR, методы AIC и MDL имеют довольно жёсткие ограничения на расположение пропусков.
- На примере реального ряда показано:
 - наличие пропусков существенно ухудшает качество оценок ранга методами AIC и MDL;
 - оценка ранга, полученная автоматической процедурой TESTAR выше, а оценка ранга, полученная методом MDL (даже для ряда без пропусков) значительно ниже, чем оценка ранга, построенная с помощью визуального анализа собственных векторов.

Спасибо за внимание!

$$(f_1, f_2, f_3, ?, ?, f_6, f_7, f_8, f_9) \xrightarrow{L=3} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & ? & ? & f_6 & f_7 \\ f_2 & f_3 & ? & ? & f_6 & f_7 & f_8 \\ f_3 & ? & ? & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 \end{pmatrix}$$

Заполнение: первый шаг

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} f_1 & f_6 & f_7 \\ f_2 & f_7 & f_8 \\ f_3 & f_8 & f_9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r]{SVD} \widetilde{\mathcal{L}}_r = \text{span}(\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_r) \rightarrow$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \overline{s}_{1,1} & \overline{s}_{1,2} & \overline{s}_{1,3} \\ \overline{s}_{2,1} & \overline{s}_{2,2} & \overline{s}_{2,3} \\ \overline{s}_{3,1} & \overline{s}_{3,2} & \overline{s}_{3,3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \overline{s}_{1,1} & * & * & ? & ? & \overline{s}_{1,2} & \overline{s}_{1,3} \\ \overline{s}_{2,1} & * & ? & ? & * & \overline{s}_{2,2} & \overline{s}_{2,3} \\ \overline{s}_{3,1} & ? & ? & * & * & \overline{s}_{3,2} & \overline{s}_{3,3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{H}}$$

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \widetilde{s}_1 & \widetilde{s}_2 & \widetilde{s}_3 & ? & ? & \widetilde{s}_6 & \widetilde{s}_7 \\ \widetilde{s}_2 & \widetilde{s}_3 & ? & ? & \widetilde{s}_6 & \widetilde{s}_7 & \widetilde{s}_8 \\ \widetilde{s}_3 & ? & ? & \widetilde{s}_6 & \widetilde{s}_7 & \widetilde{s}_8 & \widetilde{s}_9 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 & \tilde{s}_2 & \tilde{s}_3 & ? & ? & \tilde{s}_6 & \tilde{s}_7 \\ \tilde{s}_2 & \tilde{s}_3 & ? & ? & \tilde{s}_6 & \tilde{s}_7 & \tilde{s}_8 \\ \tilde{s}_3 & ? & ? & \tilde{s}_6 & \tilde{s}_7 & \tilde{s}_8 & \tilde{s}_9 \end{pmatrix}$$

Заполнение: **второй шаг**

$$Y = \begin{pmatrix} * \\ ? \\ * \\ * \\ ? \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^L \quad \begin{array}{l} \mathcal{I} = \{1, \dots, L\}, \\ \mathcal{P} \text{ — индексы пропущенных точек.} \end{array}$$

Для произвольного расположения пропусков:

Если $Y \in \mathcal{L}_r$ то

$$Y|_{\mathcal{P}} = \left(\mathbf{E} - \mathbf{U}|_{\mathcal{P}} (\mathbf{U}|_{\mathcal{P}})^T \right)^{-1} \mathbf{U}|_{\mathcal{P}} (\mathbf{U}|_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{P}})^T Y|_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{P}},$$

где \mathbf{E} — единичная матрица размерности $|\mathcal{P}| \times |\mathcal{P}|$; $\mathbf{U} = [\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_r]$.

Частные случаи расположения пропусков:

- подряд $(f_1, \dots, f_k, *, *, \dots, *, \dots, f_{N-1})$;
- подряд в конце ряда $(f_1, \dots, f_k, *, *, \dots, *)$;

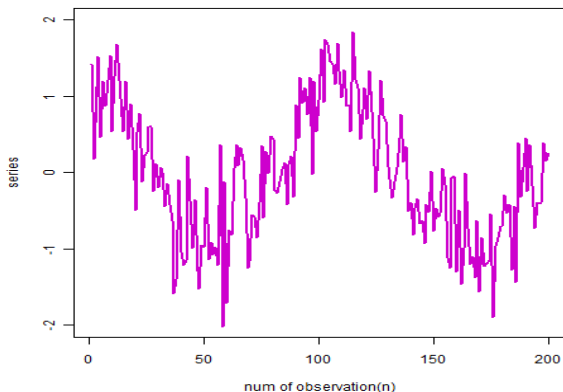
Предложение

Обозначим $\nu^2 = \pi_1^2 + \dots + \pi_r^2$, где π_i^2 — L -ая компонента вектора U_i , $\{U_i^\nabla\}_{i=1}^r$ — вектора $\{U_i\}_{i=1}^r$ без последней компоненты.

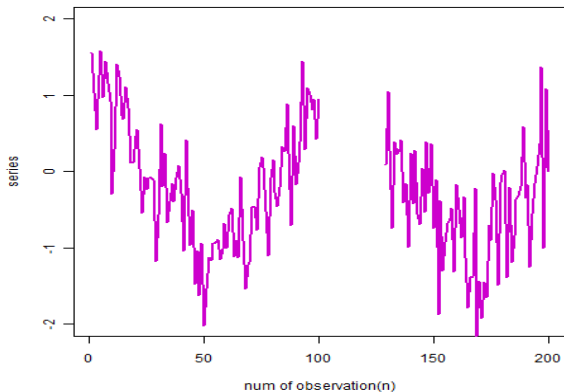
Предположим, что $e_L \notin \tilde{\mathcal{L}}_r$ и $X \in \tilde{\mathcal{L}}_r$. Тогда $\nu^2 < 1$ и

$$x_L = \sum_{k=1}^{L-1} a_k x_{L-k}, \text{ где } (a_{L-1}, \dots, a_1) = \frac{1}{1 - \nu^2} \sum_{i=1}^r \pi_i^2 U_i^\nabla.$$

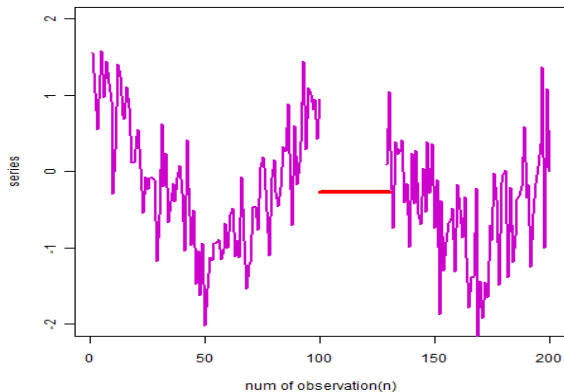
Первоначальный ряд: $\mathcal{S}_N = \cos(2\pi n/110)$ с гауссовским шумом $\sigma^2 = 0.25$



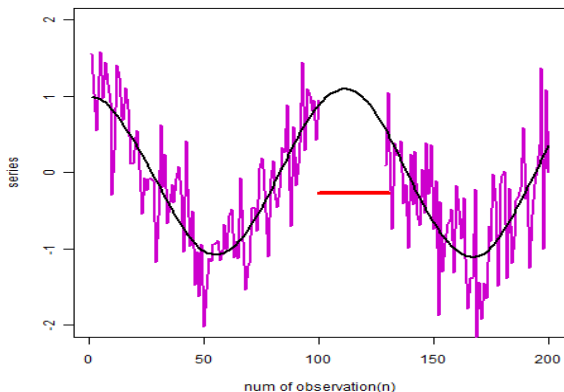
В первоначальном ряде есть 30 пропусков.



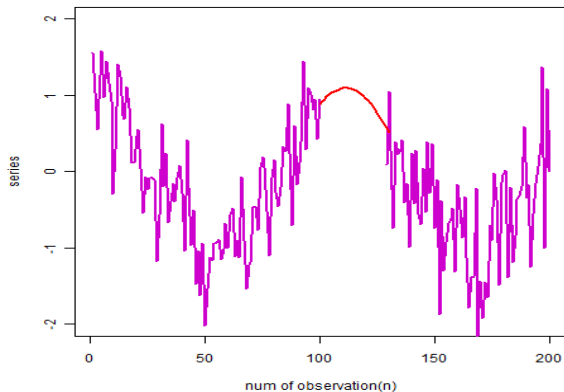
Начальное приближение пропусков перед первой итерацией.



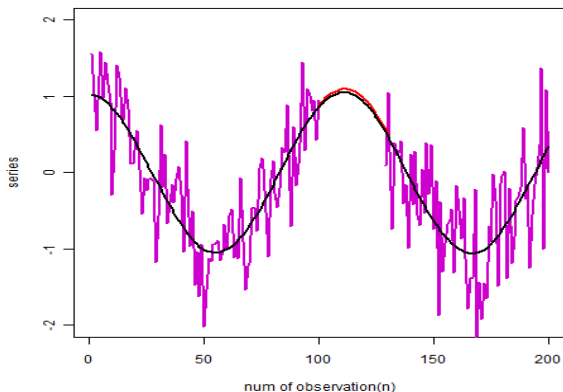
Результат применения SSA ($L = 100$, $r = 2$) после первой итерации.



Ряд перед второй итерацией.



Результат применения SSA ($L = 100$, $r = 2$) после второй итерации.



Результат заполнения.

