Оценка по траекториям в методе стохастической сетки

Галиуллина Эльмира Ринатовна, гр. 422

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Каштанов Ю. Н.
Рецензент: к.ф.-м.н. Гормин А. А.

Санкт-Петербург,
2017г.

Введение

Метод стохастической сетки был разработан Броуди и Глассерманом (2004) для вычисления цены многомерных американских опционов.
Авторами были предложены 2 вида оценок: сеточная (оценка сверху) и траекторная (оценка снизу).

Целью данной работы была проверка работоспособности траекторных оценок в более общих случаях многомерных диффузионных процессов со скачками на примере 2-х задач оптимальной остановки:

- нахождения справедливой цены опциона;
- оптимальной остановки добычи ресурсов.

Постановка задачи оптимальной остановки

- Положим $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ вероятностное пространство, $J(dt, dy)$ задает распределение скачков на $[0, T) \times [0, 1]^d$.
  Рассмотрим процесс, удовлетворяющий СДУ

$$d\xi_t = a(t, \xi_t)dt + b(t, \xi_t)dw_t + \int_{[0,1]^d} \gamma(t, \xi_{t-}, y)J(dt, dy),$$

  где w_t — d-мерный винеровский процесс. Положим что $a : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$,
  $\gamma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times [0, 1]^d \to \mathbb{R}^d$, γ определяет размер скачка.
- f_t — функционал на траекториях.
- Задача оптимальной остановки может быть сформулирована как нахождение $\mathcal{C}$ и τ^* — время остановки, таких что

$$\mathcal{C} = \sup_{\tau \leqslant T} \mathbf{E}\, f_\tau = \mathbf{E}\, f_{\tau^*}.$$

- Положим, что $\xi_n = (\xi_n^{(1)}, \dots, \xi_n^{(d)})$ — марковская цепь с вероятностями переходов $p_n(x, dy)$, которая является дискретизацией процесса диффузии со скачками, $\mathcal{F}_n$ — σ-алгебра, порожденная величинами $\xi_1, \dots, \xi_n$.
- Пусть f_n последовательность $\mathcal{F}_n$-измеримых (платежных) функций. Рекуррентно определим величины Y_n:

$$Y_N = f_N, \quad Y_n = \max(\, f_n, \mathbf{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)),$$

  тогда значение $\mathcal{C}$ определяется как $\mathcal{C} = Y_0$.
- В случае когда $f_n = f_n(\xi_n)$ справедлива формула

$$Y_N(x) = f_N(x), \quad Y_n(x) = \max(\, f_n(x), \mathbf{E}_{n,x} Y_{n+1}(\xi_{n+1})).$$

Метод описан в (Broadie and Glasserman, 2004).

- На каждом шаге n, строится набор случайных точек $\overline{x}_n = \{x_{n,i}\}_{i=1}^{M}$ («сетка») как марковская цепь с переходными вероятностями
$$\bar{r}_n(\bar{x}, d\bar{y}) = r_{n,1}(\bar{x}, dy_1)\dots r_{n,M}(\bar{x}, dy_M).$$
- Относительно $r_{n,j}(\bar{x}, dy)$ будем предполагать, что определены плотности
$$\rho_{n,\,j}(\bar{x}, x, y) = p_n(x, dy)/r_{n,\,j}(\bar{x}, dy).$$
- При условии $\check{Y}_N(x) = f_N(x)$ определим последовательность

$$\check{Y}_n(x) = \max\left(f_n(x), \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \rho_{n+1,\,j}(\bar{x}_n, x, x_{n+1,\,j})\, \check{Y}_{n+1}(x_{n+1,\,j}) \right).$$

Величина $\check{Y}_0(\xi_0)$ является оценкой сверху для $\mathcal{C}$.

Оценка снизу

По траектории $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_N)$, независимой от сетки, строится $\tilde{Y}$ — оценка снизу для $\mathcal{C}$.

$$\tilde{Y} = f_{\bar{\tau}}(\xi_{\bar{\tau}}), \qquad \bar{\tau} = \min\{n : f_n(\xi_n) = \check{Y}_n(\xi_n)\}.$$

Утверждение

При определенных условиях $\check{Y}_0$ *является состоятельной оценкой, а* $\mathbf{E}\tilde{Y} \to \mathcal{C}$ *при* $M \to \infty$ *т. е. оценка снизу является асимптотически несмещенной.*

Пусть $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_R$ — независимые стохастические сетки, ξ^{ij}, $i = 1, \ldots, Q$, $j = 1, \ldots, R$ — траектории, независимые при фиксированной сетке; обозначим
$Y_j = Y(\mathcal{M}_j) = \mathbf{E}_{\mathcal{M}_j} f(\xi^j_{\bar{\tau}_j})$, $\bar{Y}_j = \frac{1}{Q} \sum_i f(\xi^{ij}_{\bar{\tau}_j})$.

Оценка для $Y = \mathbf{E}Y(\mathcal{M})$: $\bar{\bar{Y}} = \frac{1}{R} \sum_j \bar{Y}_j$, $\quad \mathbf{E}\bar{\bar{Y}} = Y$.

Дисперсия оценки $D(\bar{\bar{Y}}) = D_1 + D_2$.
Оценка для D_1:

$$\bar{D}_1 = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{R}\sum_j \bar{Y}_j^2 - \bar{\bar{Y}}^2\right] + \frac{1}{RQ}\left[\frac{1}{R}\sum_j\left(\frac{1}{Q}\sum_i f^2(\xi^{ij}_{\bar{\tau}_j}) - \bar{Y}_j^2\right)\right].$$

Вычислим D_2. Возможны случаи:
1) ξ^{ij} независимы в совокупности, тогда $D_2 = 0$;

2) $\xi^{ij} = \xi^i$, то оценка для D_2

$$\bar{D}_2 = \frac{1}{Q^2}\sum_i\left(\frac{1}{R}\sum_j f(\xi^i_{\bar{\tau}_j})\right)^2 - \frac{1}{R^2Q^2}\left[\sum_j\sum_i f^2(\xi^i_{\bar{\tau}_j}) + (R-1)\bar{\bar{Y}}^2\right]$$

Модифицированная схема метода

Положим $\check{Y}_N(x) = f_N(x)$,

$$\check{Y}_n(x) = \max\left(f_n(x), \frac{\sum_{j=1}^{M} \rho_{n+1,j}(\bar{x}_n, x, x_{n,j})\check{Y}_{n+1}(x_{n+1,j})}{\sum_{j=1}^{M} \rho_{n+1,j}(\bar{x}_n, x, x_{n,j})} \right). \quad (*)$$

Теорема (Kashtanov, 2014)

Пусть $p_n(x,y) \leqslant C\,\varphi(\bar{a}^{-1}I, x-y)$ *и переходные по сетке вероятности имеют вид*

$$r_{n,j}(\bar{x}, dy) = r_n(y)dy = \varphi((sn)^{-1}I, x_0 - y)dy,$$

при условии что $s > \bar{a}/2$, $f_n(x) \leqslant F$, *тогда неравенство* $\mathbf{E}(\check{Y}_0 - \mathcal{C})^2 \leqslant C/M$ *выполнено для схемы* $(*)$, *где* $C = const$.

Выполнение этого неравенства означает, что оценка $\check{Y}_0$ состоятельна для $\mathcal{C}$.

Платежная функция как сумма по траектории

Рассмотрим случай, когда платежные функции имеют вид

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} g_i(\xi_i) + F_n(\xi_n).$$

Для того, чтобы метод стохастической сетки был применим, проведем рандомизацию. Обозначим $\tilde{g}_i = g_i(\xi_i) + \sigma_i \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i \in N(0,1)$ и независимы, $\tilde{G}_n = \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}_i$. Рассмотрим новую цепь $\tilde{z}_n = (\xi_n, \tilde{G}_n)$. Тогда $\tilde{z}_n$ будет марковской с переходными вероятностями из $z = (x, G)$ в $z' = (x', G')$ задаваемыми как

$$p_n(z, dz') = p_n(x, dx')\, \varphi(\sigma_n, G' - G - g_n(x'))dG',$$

Теорема (Kashtanov, 2017)

Определим платежные функции $\tilde{f}_n(z) = G + F_n(x)$ *и пусть случайная последовательность* $\tilde{Y}_n$, *задается как* $\tilde{Y}_N = \tilde{f}_N$, $\tilde{Y}_n = \max(\tilde{f}_n, \mathbf{E}_{n,x}\tilde{Y}_{n+1})$, *тогда* $\tilde{Y}_0 = Y_0$.

Нахождение справедливой цены американского опциона

Платежная функция опциона продажи геометрического среднего

$$f_t = e^{-rt}[K - (S_t^{(1)} \cdots S_t^{(d)})^{1/d}]^+,$$

где $[x]^+ = \max(x, 0)$, K — цена поставки, $S_t^{(i)}$ — цена акции i-го типа в момент времени t, которая находится из

$$dS_t^{(i)}/S_{t-}^{(i)} = \rho(t, S_t^{(i)})dt + a(t, S_t^{(i)})dw_t + \int_0^1 \delta(t, S_{t-}^{(i)}, \alpha)J(dt, d\alpha),$$

где $J([0,t] \times A) = \sum_{i=1}^{N_t} 1_A(\alpha_i)$, w_t и N_t — винеровский и пуассоновский процессы, $\alpha_i \in U(0,1)$.

Задача сводится к вычислению

$$\mathcal{C} = \sup_{\tau \leqslant T} \mathbf{E}\, f_\tau(S_\tau).$$

Остановка добычи ресурсов (Oksendal, 2007)

$$f_t = \int_0^t e^{-ru}[S_u \lambda e^{-\lambda u} - K]du + \theta S_t e^{-(r+\lambda)t},$$

где K — затраты, S_t — цена за единицу ресурса в момент времени t. Задача ставится как нахождение $\mathcal{C}$ и τ^* т. ч.

$$\mathcal{C} = \sup_{\tau < T} \mathbf{E} f_\tau = \mathbf{E} f_{\tau^*}.$$

При $T = \infty$ имеет место выражение $\mathcal{C} = u(p^*)$, где u является решением уравнения

$$\frac{1}{2} a^2 p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \mu p \frac{\partial u}{\partial p} - ru = -p + K.$$

Данное уравнение имеет явное решение, а p^* находится из условий гладкости решения.

Пример 1. Цена американского опциона

Для тестирования взят одномерный опцион, поскольку для него существует аналитическое решение. Пусть цена и платежная функция имеют вид

$$S_t = S_0 e^{aw_t + (r - 0.5a^2 - \lambda\delta)t}(1+\delta)^{N_t}, \quad f_t = e^{-rt}[S_t - K]^+,$$

где δ — размер скачка, a — волантильность, r — процентная ставка, w_t и N_t — винеровский и пуассоновский процессы.

Пример 1. Цена американского опциона

Аналитическое решение

Известно, что для цены стандартных опционов верно, что:

- Цена опциона покупки американского типа равна цене опциона покупки европейского типа.

Для цены без скачков верна формула Блэка-Шоулза, которая дает аналитическое решение для цены европейского опциона.

$$\mathcal{C}_{BS}(S_0) = \Phi(y_+)S_0 - \Phi(y_-)e^{-rT}K,$$

где $\Phi(x)$ – это функция стандартного норм. распределения,

$$y_\pm = \frac{\ln(S_0/K) + rT \pm 0.5a^2T}{a\sqrt{T}}.$$

Для цены со скачками было получено аналитическое решение

$$\mathcal{C} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_{BS}(S_0 e^{-\lambda\delta T}(1+\delta)^k)\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^k}{k!}.$$

Пример 1. Цена американского опциона

Решение методом стохастической сетки

- Случайная последовательность $\check{Y}_n(x)$ строится с помощью модифицированной схемы, находится оценка снизу для цены опциона.
- Берется дискретизация процесса цен — промежуток времени делится на $N = 24$ частей, $T = 1$.
- Обозначим $\Delta = T/N$ — шаг, $t_n = n\Delta$, $S_n = S_{t_n}$, $n = 0, \dots, N$.

$$S_n = S_{n-1} e^{a\sqrt{\Delta}\varepsilon_n + \bar{\mu}} (1+\delta)^{k_n}, \qquad \varepsilon_n \in N(0,1),$$

где k_n принимает значения 1 и 0, $\bar{\mu} = (r - 0.5a^2)\,\Delta - \ln(1+\delta p)$.

Значения параметров

$a = 0.2,\ r = 0.05,\ \lambda = 0.5,\ \delta = -0.3,\ S_0 = 100,\ K = 100.$

Значения в узлах сетки

$$x_{n,\,i} = x_0 + \mu_s n + s\sqrt{n\,\Delta}\,Z_{n,\,i},$$

где $s = 0.5,\ Z_{n,\,i} \in N(0,1),\ \mu_s = (r - 0.5s^2)\Delta$.

$$p_n(x,y) = (1-p)\,\varphi((a^2\Delta)^{-1}, x - y + \bar{\mu}) + \\ + p\,\varphi((a^2\Delta)^{-1}, x - y + \bar{\mu} + h)),$$

где $\varphi(B,x) = c\,\exp(-1/2(Bx,x))$, $h = \ln(1+\delta)$,
$p = 1 - e^{-\lambda\Delta}$ — вероятность скачка.

Пример 1. Цена американского опциона. Результаты

Для этого примера с заданными параметрами получено аналитическое решение ≈ 14.49.

Таблица : Результаты оценки для цены опциона, $M = 1200$ — число случайных точек на каждом шаге, $Q = 10000$ — число траекторий, $R = 40$ — число реализаций.

Оценка сеточная	Ошибка	Оценка снизу	Ошибка
14.48	0.01	14.41	0.14

Пример 2. Цена опциона геометрического среднего

Обобщим результаты предыдущего примера на многомерный случай. Цена находится методом стохастической сетки.

$$S_t^{(i)} = S_0 e^{aw_t + (r - 0.5a^2 - \lambda\delta)t}(1+\delta)^{N_t}, \quad i = 1, \ldots, d$$

$$f_t = e^{-rt}[K - (S_t^{(1)} \cdots S_t^{(d)})^{1/d}]^+$$

Значения параметров

$d = 3$, $a = 0.2$, $r = 0.05$, $\lambda = 0.5$, $\delta = -0.3$, $S_0 = 100$, $K = 100$, $T = 1$.

Таблица : Результаты оценки для цены опциона, $M = 2400$ — число случайных точек на каждом шаге, $Q = 10000$ — число траекторий, $R = 20$ — число реализаций. В работе (Kashtanov, 2017) с помощью регулярной сетки получен результат для этого примера $\mathcal{C} = 6.45$.

Оценка сеточная	Ошибка	Оценка снизу	Ошибка
6.45	0.01	6.22	0.25

Пример 3. Остановка добычи ресурсов

Введем обозначения

$$g_t = e^{-rt}[S_t \lambda e^{-\lambda t} - K], \quad G_t = \int\limits_0^t g_u du, \quad F_t = \theta S_t e^{-(r+\lambda)t}.$$

Цены, образующие диффузионный процесс, и платежная функция имеют вид

$$S_t = S_0 e^{a w_t + (r - 0.5a^2)t}, \quad f_t = G_t + F_t.$$

Проводим рандомизацию $\tilde{G}_t = G_t + \sigma w_t$ и строим стохастическую сетку для двумерного диффузионного процесса $(S_t, \tilde{G}_t)$.

Пример 3. Остановка добычи ресурсов

Значения параметров модели

$a = 0.2$, $s = 0.3$, $r = 0.05$, $\lambda = 0.5$, $\theta = 0.1$, $S_0 = 100$, $K = 10$, $N = 24$, $\sigma = 1$, $T = 1$.

Аналитическое решение на бесконечности

$$\mathcal{C}_\infty = \sup_\tau \mathbf{E} f_\tau = 53.51.$$

Значения параметров моделирования

$Q = 1000$ — число траекторий, $R = 20$ — число реализаций, M — число случайных точек на каждом шаге.

Таблица : Результаты, полученные с помощью биномиального дерева при разных T

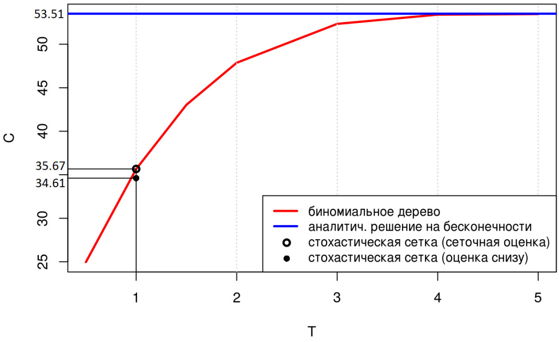
T	0.5	1	1.5	2	3	4	5
$\mathcal{C}_T$	24.97	35.66	43.04	47.87	52.34	53.40	53.47

Пример 3. Остановка добычи ресурсов

Таблица : Результаты, полученные методом стохастической сетки

M	Оценка сеточная	Ошибка	Оценка снизу	Ошибка
600	35.56	0.23	34.57	0.17
1200	35.67	0.14	34.61	0.14

Рис. : Сравнение значений $\mathcal{C}$, полученных разными методами



Заключение

Результаты:

- изучен модифицированный метод стохастической сетки, использующийся для решения задачи остановки;
- найдена оценка дисперсии для траекторной оценки;
- получено аналитическое решение для цены одномерного американского опциона;
- разработаны программные средства, решающие задачу оптимальной остановки для примеров.

Направление дальнейших исследований:

* улучшение эффективности метода за счет применения квазислучайных чисел.