Статистическое исследование мер согласованности в методе анализа иерархий

Тамазян Гайк Симакович, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Ю. А. Сушков
Рецензент: асп. М. М. Нефедова

СтатМод

Санкт-Петербург
2011 г.

Метод анализа иерархий (МАИ)

Тезис

Любая задача принятия решения может быть сведена к задаче выбора наилучшей в определенном смысле альтернативы из множества имеющихся.

Решение задачи принятия решений с помощью МАИ

Три этапа:

- построение иерархии,
- проведение попарных сравнений,
- синтез результатов.

Иерархия задачи

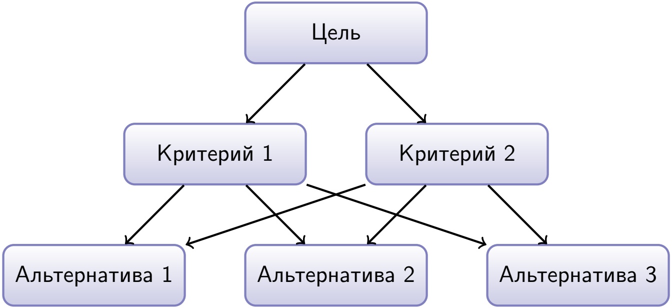

Рис. 1: Пример иерархии.

Кошелек Миллера (Miller, 1956)

Кратковременная человеческая память способна одновременно хранить и обрабатывать 7 ± 2 объекта.

Попарные сравнения элементов задачи

Попарные сравнения позволяют использовать качественные суждения о сравниваемых объектах в процессе диалога.

Качественные оценки превосходства и обозначающие их числа

эквивалентность	0
слабое превосходство	± 2
сильное превосходство	± 4
очень сильное (очевидное) превосходство	± 6
абсолютное превосходство превосходство	± 8
промежуточные оценки	$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 7$

Попарные сравнения

Шкала

Шкала — это функция, действующая из Λ в множество положительных вещественных чисел.

Фундаментальная шкала Саати (Saaty, 1977)

$$f_S(\lambda) = (1 + |\lambda|)^{\operatorname{sign}\lambda}, \text{ где } \lambda \in \Lambda. \tag{1}$$

$$1/9, 1/8, \ldots, 1/2, 1, 2, \ldots, 8, 9$$

Матрица попарных сравнений

$A = \{a_{ij}\}$ называется матрицей попарных сравнений, если $a_{ij} = f(\lambda_{ij}) > 0$ представляет результат сравнения i-ого объекта с j-ым.

Синтез результатов

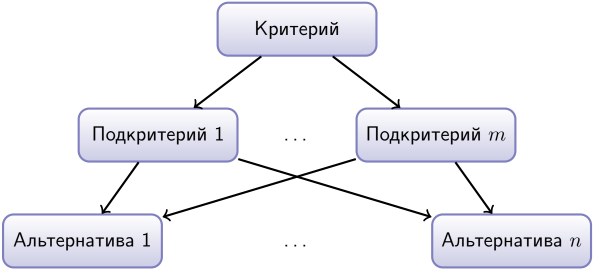

Рис. 2: Фрагмент иерархии.

u_i^j — приоритет i-ой альтернативы относительно j-ого подкритерия, v_j — приоритет j-ого подкритерия относительно критерия, w_i — приоритет i-ой альтернативы относительно критерия.

$$w_i = \sum_{j=1}^{m} u_i^j v_j. \tag{2}$$

Индекс согласованности Саати

Теорема (Саати, 1993)

Пусть $A = \{a_{ij}\}$ — матрица попарных сравнений n объектов. Ее главное собственное число $\mu_{\max}$ такое, что справедливо неравенство $\mu_{\max} \geqslant n$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение:

$$a_{ik} = a_{ij}a_{jk} \; \forall i, j, k \in 1 : n. \tag{3}$$

Индекс согласованности Саати (CI) (Саати, 1993)

Пусть $A = \{a_{ij}\}$ — матрица попарных сравнений n объектов.

$$CI = \frac{\mu_{\max} - n}{n - 1}, \tag{4}$$

где $\mu_{\max}$ — главное собственное число A, n — ее размер.

Геометрический индекс согласованности

Метод геометрических средних (Crawford & Williams, 1985)

Пусть $A = \{a_{ij}\}$ — матрица попарных сравнений n объектов, тогда относительные приоритеты $w_1, \ldots, w_n$ этих объектов получаются следующим образом:

$$w_i = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij} \right)^{1/n}. \tag{5}$$

Геометрический индекс согласованности (GCI) (Crawford & Williams, 1985)

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} \ln^2(a_{ij} w_j / w_i). \tag{6}$$

Гармонический индекс согласованности

Метод аддитивной нормализации (Stein & Mizzi, 2007)

Пусть $A = \{a_{ij}\}$ — матрица попарных сравнений n объектов, тогда относительные приоритеты $w_1, \ldots, w_n$ этих объектов получаются следующим образом:

$$w_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right). \tag{7}$$

Гармонический индекс согласованности (HCI) (Stein & Mizzi, 2007)

$$HCI = \frac{n \left(\frac{1}{\frac{1}{s_1} + \ldots + \frac{1}{s_n}} - 1 \right) (n+1)}{n(n-1)}. \tag{8}$$

Коэффициент Кендалла-Смита

Коэффициент Кендалла-Смита (KS) (Kendall & Smith, 1940)

Пусть A — матрица попарных сравнений n объектов, такая что $a_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $i = j$.

$$KS = \begin{cases} 1 - \frac{24c}{n(n^2-1)}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 1 - \frac{24c}{n(n^2-4)}, & \text{если } n \text{ четно,} \end{cases} \tag{9}$$

где c — количество циклических триад в графе, задаваемом матрицей попарных сравнений.

Циклические триады

Пример циклической триады для объектов C_i, C_j и C_k:

$$C_i \succ C_j, \; C_j \succ C_k, \; C_k \succ C_i. \tag{10}$$

Порядковая и численная согласованность

Порядковая согласованность

Пусть имеются три объекта C_i, C_j и C_k. Будем говорить, что для них выполняется условие *порядковой согласованности*, если из $C_i \succ C_j$ и $C_j \succ C_k$ следует, что $C_i \succ C_k$.

Численная согласованность

Пусть имеются три объекта C_i, C_j и C_k. Будем говорить, что для них выполняется условие *численной согласованности*, если из $C_i \overset{a}{\succ} C_j$ и $C_j \overset{b}{\succ} C_k$ следует, что $C_i \overset{a+b}{\succ} C_k$.

Статистическое исследование мер

Два способа моделирования матриц попарных сравнений:

- верхние треугольные элементы - равномерно распределенные на $\{-8, \ldots, -1, 1, \ldots, 8\}$ независимые случайные величины,
- верхние треугольные элементы - равномерно распределенные на $\{1, \ldots, 8\}$ независимые случайные величины.

Статистическое исследование мер: результаты

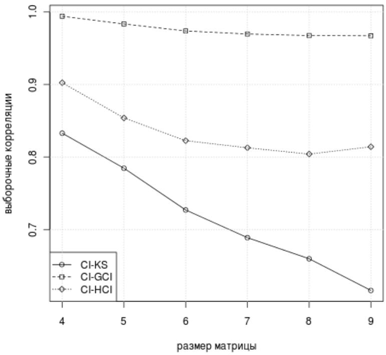

Рис. 3: Абсолютные значения выборочных коэффициентов корреляции Пирсона между индексом согласованности Саати (CI) и остальными мерами согласованности для распределения 1.

Статистическое исследование мер: результаты

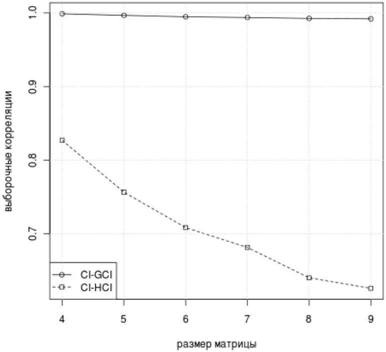

Рис. 4: Абсолютные значения выборочных коэффициентов корреляции Пирсона между индексом согласованности Саати (CI) и остальными мерами согласованности для распределения 2.

Триадный индекс согласованности (TCI)

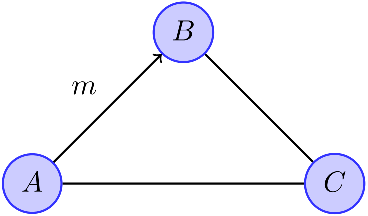

Рис. 5: Один из классов триад.

$$A \overset{5}{\succ} B,\ B \sim C,\ A \sim C. \tag{11}$$

Статистическое исследование TCI

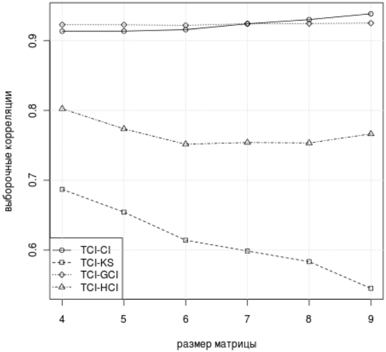

Рис. 6: Абсолютные значения выборочных коэффициентов корреляции Пирсона между триадным индексом согласованности и остальными мерами согласованности для распределения 1.

Статистическое исследование TCI

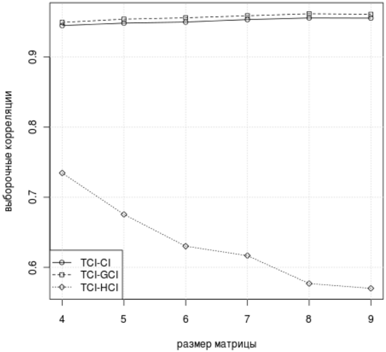

Рис. 7: Абсолютные значения выборочных коэффициентов корреляции Пирсона между триадным индексом согласованности и остальными мерами согласованности для распределения 2.

Заключение

Преимущества предлагаемой в работе меры

- Не зависит от используемой шкалы и способа получения относительных приоритетов.
- Отражает нарушения порядковой и численной согласованности.
- Имеет интуитивную интерпретацию в виде троек сравниваемых элементов.
- Коррелирует с введенными ранее мерами согласованности.

Дальнейшие исследования

- Исследование прочих аспектов метода анализа иерархий.
- Разработка расширений метода анализа иерархий.
- Реализация результатов в виде диалоговой системы принятия решений.