Асимптотический F-критерий для проверки равенства дисперсий в коррелированных выборках

Бакалаврская работа

Явейн Анна Никитична, 422 гр.

Научный руководитель: к. ф.-м. н., доцент В. В. Некруткин
Рецензент: к. ф.-м. н., доцент А. И. Коробейников

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

2016

Постановка задачи

$(x,\ y)$ – случайный вектор; $\sigma_x^2,\ \sigma_y^2$ – дисперсии x и y.

$(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)$ – двумерная повторная выборка.

Нулевая гипотеза

$$H_0 : \{\sigma_x^2 = \sigma_y^2\}\,.$$

- Разработать **асимптотический** критерий со слабыми условиями на $(x,\ y)$:
  - Допустимы отклонения от **нормальности**.
  - Допустимы отклонения от **независимости**.
- Исследовать свойства критерия на **разных моделях** распределений.
- Сравнить с другими критериями.

Некоторые существующие тесты

Для **независимых гауссовских** x и y:

- Критерий **Фишера**.
- Levene's, Brown–Forsythe's test.
- Bartlett's, Cochran's, Hartley's tests.

Для **гауссовских** (x, y):

- Критерии для коррелированных (x, y) [Kanji, 2006] (рассмотрен **P-критерий**).

Ранговые:

- Mood's test.
- Ansari-Bradley's, Siegel-Tukey's, Capon's, Klotz's tests.

Построение статистики критерия

$(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)$ – двумерная выборка, $\quad \tilde{s}_x^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$

$$\widehat{\rho}(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) = \frac{\sqrt{n}}{\widehat{\sigma}_{lim}}\left(\frac{\tilde{s}_x^2}{\tilde{s}_y^2} - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\right).$$

Утверждение (доказано через delta-method [Serfling, 2002])

При любом соотношении σ_x и σ_y и $n \to \infty$

$$\mathcal{L}(\widehat{\rho}(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)) \Rightarrow \mathrm{N}(0,1)$$

при условии, что

- **Четвертые моменты** x и y конечны.
- Распределение y **непрерывно**.
- $\widehat{\sigma}_{lim}^2$ – **состоятельная** оценка $\sigma_{lim}^2 = \dfrac{\mathbb{D}\Big((x-\mathbb{E}x)^2\sigma_y^2 - (y-\mathbb{E}y)^2\sigma_x^2\Big)}{\sigma_y^8}.$
- $\mathbb{P}(\widehat{\sigma}_{lim}^2 = 0) = 0.$

Построение критерия

$(x,\ y)$ – случайная величина; $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)$ – двумерная выборка.

Нулевая гипотеза

$$H_0 : \{\sigma_x^2 = \sigma_y^2\}\,.$$

Статистика:

$$\widehat{\rho}(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) = \frac{\sqrt{n}}{\widehat{\sigma}_{lim}} \left(\frac{\tilde{s}_x^2}{\tilde{s}_y^2} - 1 \right)\,.$$

Доверительная область критерия

$$|\widehat{\rho}(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)| < \tau_{1-\frac{\alpha}{2}}\,,$$

где τ_β – квантиль уровня β распределения $\mathrm{N}(0, 1)$.

Условия

Утверждение

Критерий **асимптотически точен** и **состоятелен** для любой альтернативы $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, если

- Четвертые моменты x и y конечны.
- Распределение y непрерывно.
- $\mathbb{P}(\widehat{\sigma}_{lim}^2 = 0) = 0$.
- $\widehat{\sigma}_{lim}^2$ – **состоятельная оценка** для σ_{lim}^2.

Ослабление условий

Утверждение

Критерий **асимптотически точен** и **состоятелен** для любой альтернативы $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, если

- Четвертые моменты x и y конечны.
- Распределение y непрерывно.
- $\mathbb{P}(\widehat{\sigma}_{lim}^2 = 0) = 0$.

- При $\sigma_\mathbf{x} = \sigma_\mathbf{y}$: $\widehat{\sigma}_{lim}^2$ – **состоятельная** оценка для σ_{lim}^2.
- При $\sigma_\mathbf{x} \neq \sigma_\mathbf{y}$: $\exists\ M$ такое, что $\mathbb{P}(\widehat{\sigma}_{lim}^2 < M) \to 1$.

Два критерия

SE-критерий:

$$\widehat{\sigma}^2_{lim} = \frac{s^4_{y,n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_n)^4 + s^4_{x,n}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y}_n)^4 - 2s^2_{x,n}s^2_{y,n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_n)^2(y_i-\overline{y}_n)^2}{n\, s^8_{y,n}}$$

– генеральные моменты заменены на выборочные.
Удовлетворяет **изначальным** условиям.

SEM-критерий:

$$\widehat{\sigma}^2_{lim} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_n)^4 + \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y}_n)^4 - 2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_n)^2(y_i-\overline{y}_n)^2}{n\, s^4_{y,n}}$$

– удовлетворяет **ослабленным** условиям.

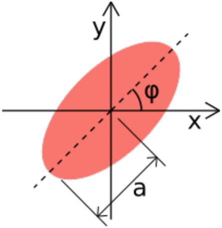
Моделирование

Модели:

- (x, y) – двумерный **нормальный** случайный вектор.

$$\mathcal{L}(x, y) = \mathrm{N}(0, \Sigma), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2, & \rho\,\sigma_x\sigma_y \\ \rho\,\sigma_x\sigma_y, & \sigma_y^2 \end{pmatrix}.$$

- (x, y) – **равномерно** распределен на повернутом эллипсе.

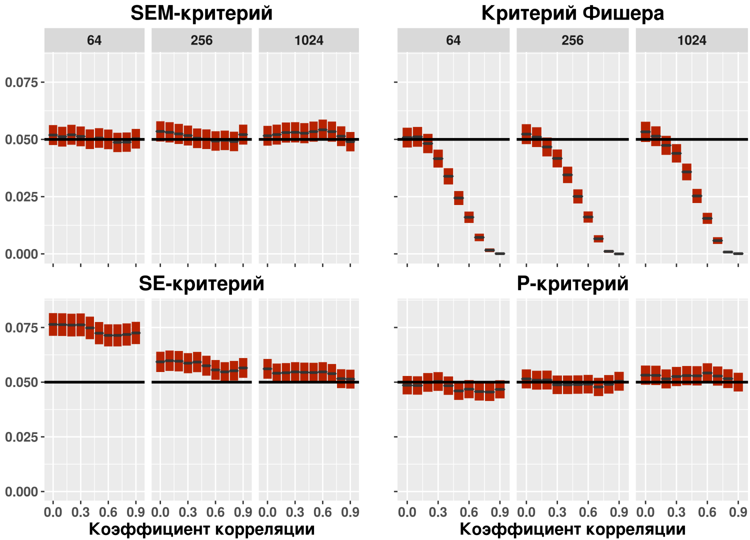


- (x, y) – двумерный **логнормальный** случайный вектор.

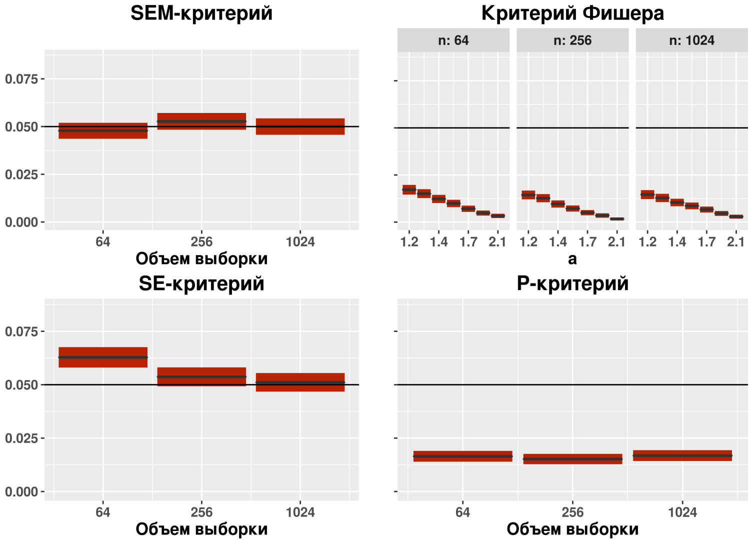
$$\mathcal{L}(x, y) = \mathrm{LogN}(\mu, \Sigma), \qquad \mu = (\mu_x, \mu_y),\ \Sigma = \begin{pmatrix} s_x^2, & r\,s_x s_y \\ r\,s_x s_y, & s_y^2 \end{pmatrix}.$$

- Для различных пар (n, θ) – метод зависимых выборок (θ – вектор параметров распределения).
- Количество повторов $\mathbf{N} = \mathbf{10000}$.

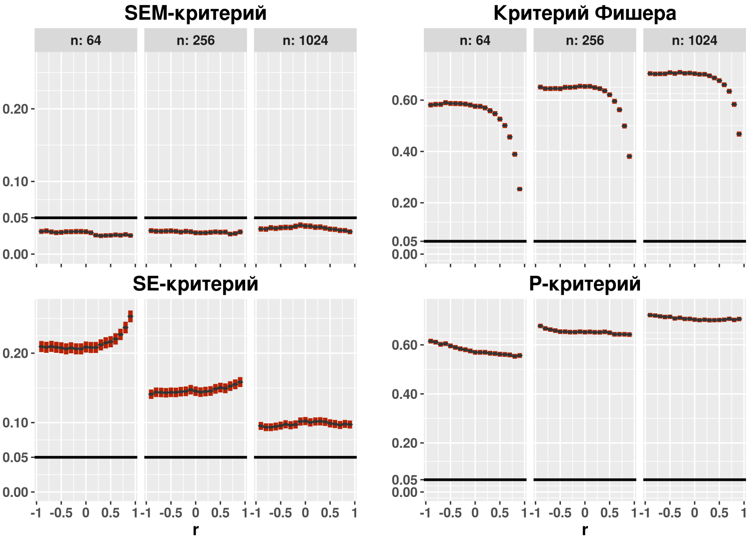
Истинный уровень, гауссовская модель, $\alpha = 0.05$



Истинный уровень, эллиптическая модель, $\alpha = 0.05$

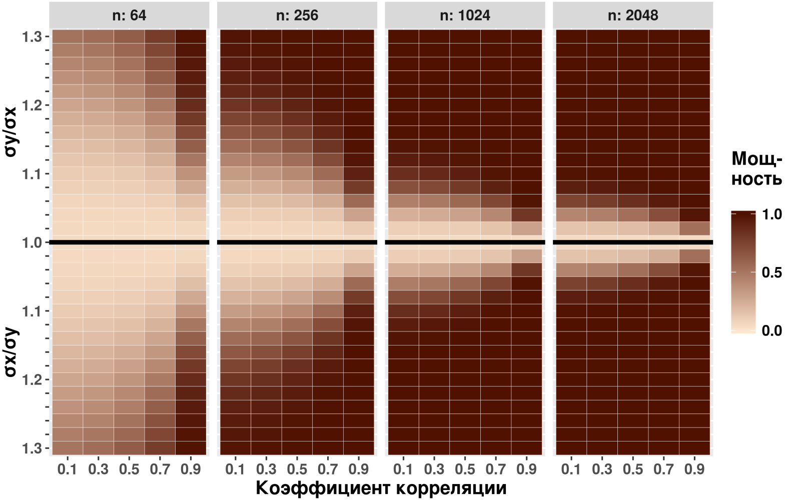


Истинный уровень, логнормальная модель, $\alpha = 0.05$



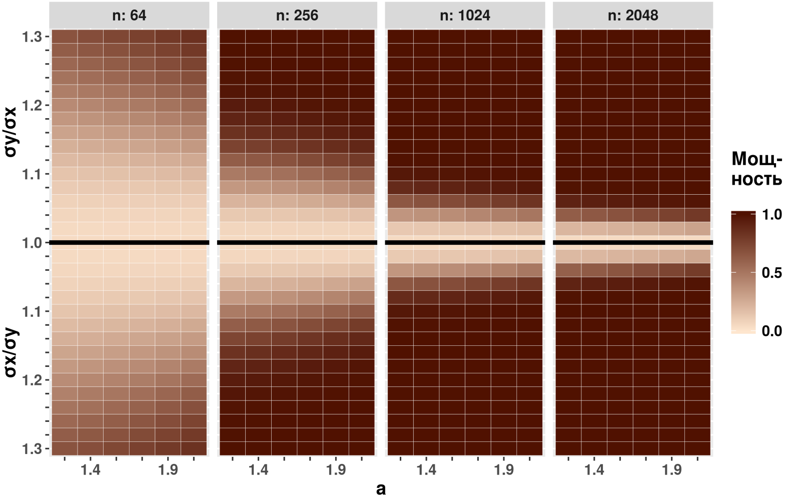
Мощность, гауссовская модель, $\alpha = 0.05$

SEM-критерий.



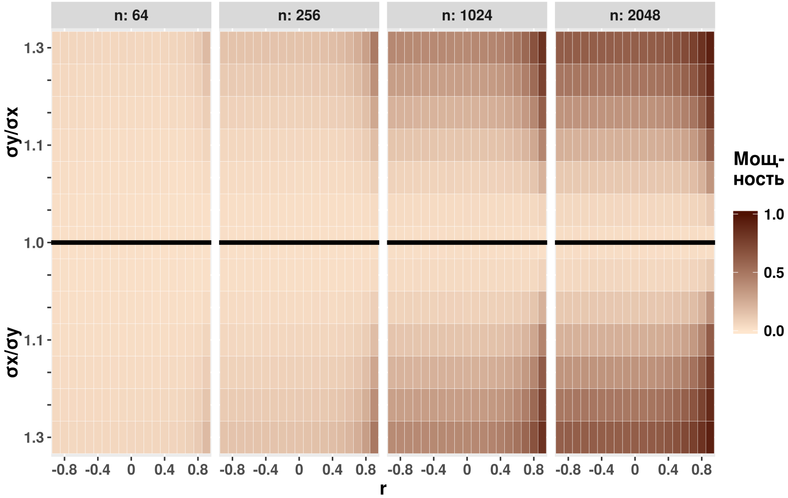
Мощность, эллиптическая модель, $\alpha = 0.05$

SEM-критерий.



Мощность, логнормальная модель, $\alpha = 0.05$

SEM-критерий.



Итог

Результаты:

- Разработан **асимптотический аналог** критерия Фишера.
- Предложены **несколько** вариантов **статистики** критерия.
- Доказаны **состоятельность** и **асимптотическая точность** предложенных **SE** и **SEM** критериев.
- Проведены численные **эксперименты** в трех разных моделях.
- Проведено **сравнение** с некоторыми критериями.

Выводы:

- В рассмотренных **негауссовских** моделях построенные **SE** и **SEM** критерии **превосходят** референсные **по точности**.
- Свойства **SEM** критерия **сравнимы** со свойствами критериев, рассчитанных на **гауссовость** модели.
- Во всех рассмотренных моделях из двух разработанных критериев **предпочтительно** использование **SEM**-критерия.