Об одном методе оценивания параметров распределений

Браун Мария Петровна, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н.,проф. Мелас В.Б.
Рецензент: к.ф.-м.н., Пепелышев А.Н.

Санкт-Петербург
2007г.

Постановка задачи

Пусть имеется распределение, зависящее от неизвестного параметра:

$$X \sim F_\vartheta, \quad \vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k.$$

По выборке $X_1, \ldots, X_N$ требуется оценить ϑ.
Фиксируются точки $\mathbf{t} = \{t_j\}_{j=1}^m$, в которых находятся эмпирические и теоретические значения характеристической функции.

Содержание работы:

- Нахождение оптимальных наборов $\{t_j\}_{j=1}^m$ и зависимости качества оценок от m.
- Итерационная процедура нахождения оценки ϑ для заранее промоделированной выборки.

Оценка обобщенного метода моментов

Определим вектора $\mathbf{K}(\mathbf{t}) = \{K(t_j)\}_{j=1}^m$, $\mathbf{K}_N(\mathbf{t}) = \{K_N(t_j)\}_{j=1}^m$ где

- $K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t,x)dF_\vartheta(x), \; t \in \mathbb{R}$
- $K_N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t,x)dF_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N k(t,X_i)$

Оценки строятся следующим образом:

1. $m = k$:
$$\mathbf{K}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}_N(\mathbf{t}).$$
2. $m > k$: обобщенный метод моментов: $\hat{\vartheta}_N = \mathrm{argmin}_\vartheta Q(\vartheta;\mathbf{t})$, где
$$Q(\vartheta;\mathbf{t}) = (\mathbf{K}_N(\mathbf{t}) - \mathbf{K}(\mathbf{t}))^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{K}_N(\mathbf{t}) - \mathbf{K}(\mathbf{t})),$$
$$\Sigma : \quad \sqrt{N}(\mathbf{K}_N(\mathbf{t}) - \mathbf{K}(\mathbf{t})) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(\mathbf{0},\Sigma).$$

Оптимальное планирование

На качество оценок влияет выбор $\{t_j\}_{j=1}^m$.
План эксперимента:

$$\xi = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_m \\ 1/m & 1/m & \dots & 1/m \end{pmatrix}.$$

Критерий оптимальности: локальная $D-$оптимальность:

$$\det M(\xi, \vartheta_*) \to \max,$$
$$M = F^T \Sigma^{-1} F,$$

где

$$F = \begin{pmatrix} \partial K(t_1)/\partial\theta_1 & \dots & \partial K(t_1)/\partial\theta_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial K(t_m)/\partial\theta_1 & \dots & \partial K(t_m)/\partial\theta_k \end{pmatrix}.$$

Устойчивые распределения

Частный случай: строго положительные устойчивые распределения (SPS).
В качестве $K(t)$ рассматривается преобразование Лапласа:

$$L(t) = E(-tX) = \exp(-ct^{\alpha}), \quad c > 0, \ \alpha \in (0,1).$$

Его эмпирический аналог:

$$L_N(t) = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \exp(tx_i)$$

Информационная матрица: $M = F^T \Sigma^{-1} F$, где

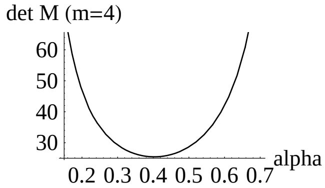
$$F = \left(\frac{\partial L(t_i)}{\partial c}, \frac{\partial L(t_i)}{\partial \alpha} \right)_{i=1}^{m}, \quad (\Sigma)_{i,j} = L(t_i + t_j) - L(t_i) L(t_j).$$

Утверждение:

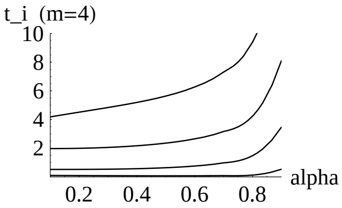
1. $c^2 \det \mathbf{M}(\xi, \vartheta)$ не зависит от c.
2. $\{t_i\}_{i=1}^m \to \{ct_i\}_{i=1}^m$.

SPS: зависимость оптимальных планов от параметра

Зависимость $\max \det M$ от параметра:



Зависимость точек оптимального плана от параметра:



Устойчивые распределения: численные результаты

Зависимость $\max \det M$ от числа точек плана:

α	$m = 2$	$m = 3$	$m = 5$	$m = 10$	$m = 14$
0.05	310.55	417.52	551.37	640.22	657.05
0.2	32.33	41.23	49.41	52.35	52.57
0.5	24.38	27.59	29.00	29.18	29.18
0.8	290.31	301.75	303.50	303.58	303.58
0.95	48684.25	49548.70	49582.67	49583.76	49583.77

При $m > 10$ рост $\max \det M$ практически прекращается для $\alpha > 0.2$. Таким образом, не имеет смысла выбирать большее число точек плана.

NVG и NVIG распределения: определение

NVG распределение:

1. $\xi \sim \Gamma(1, \lambda),\ \lambda > 0;$
2. $\eta \sim N(\beta\xi, 2\xi),\ \beta \in \mathbb{R};$
3. $X = c\eta + \delta,\ (\delta, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$

Характеристическая функция NVG:

$$\varphi(t) = \exp(i\delta t)(1 - i\beta ct + c^2t^2)^{-\lambda}.$$

NVIG распределение:

1. $\xi \sim IG(1, \lambda),\ \lambda > 0;$
2. $\eta \sim N(\beta\xi, \xi),\ \beta \in \mathbb{R};$
3. $X = c\eta + \delta,\ (\delta, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$

Плотность IG распределения: $f_{IG}(x, \mu, \lambda) = \frac{\lambda\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(\frac{-(x-\mu\lambda)^2}{2\mu x}\right).$
Характеристическая функция NVIG:

$$\varphi(t) = \exp(i\delta t) \exp\left(\lambda(1 - \sqrt{1 - 2i\beta ct + c^2t^2})\right).$$

NVG и NVIG: зависимость качества планов от числа опорных точек

В качестве $K(t)$ рассматривается характеристическая функция:
$\mathbf{K}(\mathbf{t}) = (C(t_1), C(t_2), ..., C(t_l), S(t_1), S(t_2), ..., S(t_l))^{\mathrm{T}}$,
где $C(t) = \mathrm{E}[\cos(tX)]$, $S(t) = \mathrm{E}[\sin(tX)]$.
Результаты максимизации определителя информационной матрицы при различных значениях параметров ($c = 1, \delta = 0$):

β	λ	m=4	m=5	m=10	m=15	m=20	
0	1	5.958	6.742	8.302	8.778	8.999	$\times\mathbf{10^{-3}}$
0.5	1.7	3.694	3.969	4.247	4.275	4.281	$\times\mathbf{10^{-4}}$
2	2.5	2.972	5.519	10.96	11.13	11.35	$\times\mathbf{10^{-6}}$

Таблица: Зависимость max $\det M$ от числа опорных точек плана, NVG

β	λ	m=4	m=5	m=10	m=15	m=20	
0	1	3.676	3.720	3.739	3.739	3.739	$\times\mathbf{10^{-3}}$
0.5	1.7	3.804	3.913	3.955	3.955	3.955	$\times\mathbf{10^{-4}}$
2	2.5	1.596	2.485	4.631	4.840	4.868	$\times\mathbf{10^{-6}}$

Таблица: Зависимость max $\det M$ от числа опорных точек плана, NVIG

NVG и NVIG: оценка параметров

Обозначим вектор параметров $\vartheta = (\vartheta_j)_{j=1}^4 = (\lambda, \beta, c, \delta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Моделируется выборка: $x_1, \ldots, x_n$.

Процедура:

- **Шаг 1**: Нахождение ϑ при фиксированных $(t_1, \ldots, t_l)$ — минимизация $Q(\vartheta; \mathbf{t})$.
- **Шаг 2**: Нахождение $(t_1, \ldots, t_l)$ при фиксированных значениях параметров ϑ — максимизация $\det M$.

На первом шаге фиксируем равноотстоящие t_j. Повторяем до тех пор, пока процедура не сойдется.

Моделируется 1000 выборок; для каждой сохраняются результаты первого и последнего шага оптимизации.

$\mathbf{eff} = (\det M_1 / \det M_0)^{(1/4)}$, где M_1 — информационная матрица для оптимальных t_i, а M_0 — информационная матрица для равноотстоящих t_i.

NVG: численные результаты

ssize=100	$\lambda = 1.7$	$\beta = 0.7$	$c = 0.6$	$\delta = 0.4$
сред., равном.	1.77	0.82	0.69	0.42
сред., опт.	1.80	0.78	0.65	0.39
откл., равном.	1.19	0.65	0.28	0.41
откл., опт.	1.12	0.45	0.20	0.34
$\mathbf{eff : 1.63}$	равн.	**858**	опт.	**933**
ssize=1000	λ	β	c	δ
сред., равном.	1.75	0.71	0.60	0.39
сред., опт.	1.71	0.71	0.61	0.40
откл., равном.	0.40	0.15	0.08	0.12
откл., опт.	0.29	0.09	0.06	0.09
$\mathbf{eff : 1.53}$	равн.	**1000**	опт.	**1000**

Таблица: Средние и стандартные отклонения оценок параметров NVG распределения для равномерных и оптимальных t_i

NVIG: численные результаты

ssize=100	$\lambda = 1.7$	$\beta = 0.7$	$c = 0.6$	$\delta = 0.4$
сред., равном.	1.76	0.86	0.77	0.40
сред., опт.	1.68	0.81	0.76	0.40
откл., равном.	1.41	0.51	0.41	0.36
откл., опт.	1.34	0.39	0.35	0.33
$\mathbf{eff : 1.45}$	равн.	**814**	опт.	**887**
ssize=1000	λ	β	c	δ
сред., равном.	1.78	0.73	0.61	0.38
сред., опт.	1.67	0.72	0.63	0.40
откл., равном.	0.58	0.13	0.12	0.15
откл., опт.	0.46	0.10	0.10	0.12
$\mathbf{eff : 1.32}$	равн.	**1000**	опт.	**1000**

Таблица: Средние и стандартные отклонения оценок параметров NVIG распределения для равномерных и оптимальных t_i

Сравнение эффективности

Фиксируем $c = 0.6$, $\delta = 0.4$ и сравним значение эффективности при различных истинных значениях параметров NVG и NVIG:

λ	β	NVG	NVIG
1	0	1.23	1.08
1	0.5	1.24	1.11
1	2.0	1.65	1.42
2.5	0	2.12	1.43
2.5	0.5	2.35	1.62
2.5	2.0	3.92	3.20

Таблица: Эффективность при различных истинных значениях параметров