Методы Монте-Карло для оценивания американских опционов

Плеханов Роман Георгиевич, 522-я группа

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — к.ф.-м.н. доц. Ю.Н. Каштанов
Резензент — аспирант А.А. Гормин

Санкт-Петербург
2008г.

Постановка задачи

Американский опцион - опцион, который может быть предъявлен к исполнению в любое время до окончания срока его действия.
Стоимость американского опциона:

$$Q(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} E_{t,x}\left(e^{-\int_t^T r_s \ ds} \Phi(\tau, X_\tau)\right), \tag{1}$$

где

- r - ставка дисконтирования;
- $\Phi(t,x)$ - платежная функция опциона;
- $\mathcal{T}_{t,T}$ - множество моментов остановки в промежутке от t до T;
- S_t - марковский процесс определяющий динамику базовых активов;

Методы оценки

Вводя дискретизацию по времени можно прийти к формуле

$$\begin{aligned} &Q(T, x) = \Phi(T, x), \\ &Q(t_k, x) = \max(\Phi(t_k, x), e^{-r\Delta}\mathbb{E}(Q(t_{k+1}, S_{t_{k+1}}) \mid S_{t_k} = x)). \end{aligned} \tag{2}$$

Методы оценки стоимости американского опциона:

- Метод Броади-Глассермана;
- Метод Балли-Кармелино-Занетти;
- Модифицированный метод.

Рассмотрим одномерный случай

$$S_t = S_u \exp(\mu_t - \mu_u + \sigma(W_t - W_u)), \tag{3}$$

где W_t - винеровский процесс, $\mu_t = (r - \sigma^2/2)t$.
Условные переходные плотности задаются формулой

$$p(S_t|S_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t-u}} \frac{1}{S_t} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2(t-u)}[\log \frac{S_t}{S_u} - (\mu_t - \mu_u)]^2). \tag{4}$$

Преимущества:

- Можно доказать состоятельность оценки;
- Конкретный алгоритм.

Пусть $p(S_t|S_u) = f(u, S_u, t, S_t)$ - известна. Тогда условное математическое ожидание $\mathbb{E}(f(S_t)|S_u = \alpha)$ можно представить в виде:

$$\mathbb{E}(f(S_t)|S_u = \alpha) = \mathbb{E}\left(f(X_t)\frac{f(u, \alpha, t, X_t)}{g(t, X_t)}\right), \tag{5}$$

где $g(t, X_t)$ - плотность распределения X_t.
Основываясь на этой формуле можно построить алгоритм состоящий из следующих шагов:

- Моделирование точек сетки $\{X_t^i\}$ $t = 0, \ldots, T,\ i = 1, \ldots, N$:
  - $X_0^i = S_0$, S_0 - начальная цена;
  - $X_k^i \sim g(k, X_k^i)$ - независимая выборка.
- Оценка стоимости:

$$\hat{Q}_N(t_k, X_k^j) = \max(\Phi(t_k, X_k^j), \frac{e^{-r\Delta}}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{Q}_N(t_{k+1}, X_{k+1}^i)\frac{f(t_k, X_k^j, t_{k+1}, X_{k+1}^i)}{g(t+1, X_{k+1}^i)}).$$

Можно рассмотреть две разные плотности g:

«Начальная» плотность: функция $g(t,\cdot)$ в данном случае задается следующей формулой:

$$g(k,u) = f(0, S_0, t_k, u) \qquad 1 < t < T \tag{6}$$

«Средняя» плотность: функция $g(t,\cdot)$ задается следующей формулой:

$$g(k,u) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(t_{k-1}, X_{k-1}^j, t_k, u) \qquad 1 < t < T \tag{7}$$

То есть в этом случае точка X_k^j моделируется как смесь N условных распределений S_{t_k} при условии что $S_{t_{k-1}} = X_{k-1}^j$.

Theorem (Смещенность сеточной оценки)

Сеточная оценка смещена вверх, то есть

$$\mathbb{E}(\hat{Q}_N(0, S_0)) \geqslant Q(0, S_0).$$

Theorem (Сходимость сеточной оценки)

Пусть выполнено условие:

$$\mathbb{E}\Big(\frac{f(t_k, x, t_{k+1}, X^i_{k+1})}{g(k+1, X^1_{k+1})} \frac{f(t_{k+1}, X^1_{k+1}, t_{k+2}, X^1_{k+2})}{g(k+2, X^1_{k+2})} \times \cdots$$
$$\cdots \times \frac{f(t_{m-1}, X^1_{m-1}, t_m, X^1_m)}{g(m, X^1_m)} Q(m, X^1_m)\Big)^2 < \infty,$$

для всех x,$k < m$. *Тогда при* $N \to \infty$ *для всех* x, t *оценка сходится:*

$$\mathbb{E}(\hat{Q}_N(t, x) - Q(t, x))^2 \to 0.$$

Метод Броади-Глассермана. Теоретические результаты (2)

Theorem (Состоятельность сеточной оценки)

Пусть $g(t, \cdot 1)$ *- «средняя» плотность , тогда оценка* $\hat{Q}_N$ *сходится при всех* x*, и следовательно состоятельна:*

$$\mathbb{E}(\hat{Q}_N(0,x) - Q(0,x))^2 \leqslant Cm\frac{3^m}{N} \to 0 \qquad \text{при } N \to \infty.$$

Замечание. В случае оценки «начальной» плотности достаточное условие не выполняется.

Метод Балли-Кармелино-Занетти

Условное математическое ожидание можно представить в виде:

$$\mathbb{E}(f(S_t) \mid S_u = \alpha) = \frac{\mathbb{E}(f(S_t)\Pi_{u,t}(\alpha))}{\mathbb{E}\Pi_{u,t}(\alpha)}, \tag{8}$$

где $\Pi_{u,t}(\alpha)$ некоторые случайные веса.
Основываясь на этой формуле можно построить следующий алгоритм:

- Смоделируем сетку $\{X_t^i\}$ $t = 0, \ldots, T,\ i = 1, \ldots, N$:
  - $X_0^i = S_0$, S_0 - начальная цена.
  - $X_t^i \sim S_t$ - независимая выборка.
- Оценка стоимости:

$$\tilde{Q}_N(t_k, X_k^j) = \max(\Phi(t_k, X_k^j), \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \tilde{Q}_N(t_{k+1}, X_{k+1}^i)\Pi_k^i(X_k^j)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \Pi_k^i(X_k^j)}), \tag{9}$$

где $\Pi_k^i(\alpha),\ i = 1, \ldots, N$ - независимые реализации $\Pi_{t_k, t_{k+1}}(\alpha)$ (при фиксированном α).

Пусть $\theta_c(x) = 1 - c, x < 0$ и $\theta_c(x) = c, x \geqslant 0, 0 \leqslant c \leqslant 1$.
В качестве весов $\Pi_{s,t}(\alpha)$ можно рассматривать:

- *Нелокализованные веса*

$$\Pi_{s,t}(\alpha) = \theta_c(X_s - \alpha)\pi_{s,t}, \qquad (10)$$

  где $\pi_{s,t} = \frac{(t-s)(\sigma s + W_s) - s(W_t^i - W_s)}{s(t-s)\sigma X_s}$.

- *Локализованные веса*
  Рассмотрим гладкую и измеримую функцию $\psi(x)$ и ее первообразную $\Psi_b(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy + b$. Тогда в качестве весов $\Pi_{s,t}$ можно рассматривать:

$$\Pi_{s,t}(\alpha) = \psi(X_s - \alpha) + (\theta_c - \Psi_b)(X_s - \alpha)\pi_{s,t}. \qquad (11)$$

  Один из критериев выбора локализующей функции и ее первообразной - минимизация функционала

$$I^f(\psi, b) = \int E(f^2(X_t)\left[\psi(X_s - \alpha) + (\theta_c - \Psi_b)(X_s - \alpha)\pi_{s,t}\right]^2)d\alpha. \qquad (12)$$

  В этом случае $\psi^*(x)$ - плотность распределения Лапласа, а $b = c - 1$.

Модифицированный метод

Рассмотрим условное математическое ожидание

$$\mathbb{E}(f(S_t) \mid S_u = x) = \frac{\mathbb{E}(f(S_t)\mathbb{E}_{S_t}\Pi_{u,t}(x))}{\mathbb{E}\mathbb{E}_{S_t}(\Pi_{u,t}(x))}. \tag{13}$$

В случае модели Блэка-Шоулса $\mathbb{E}_{S_t}(\Pi_{u,t}(x))$ можно вычислить аналитически. Можно посторить следующий алгоритм:

- Смоделируем сетку $\{X_t^i\}$ $t = 0, \ldots, T,\ i = 1, \ldots, N$:
  - $X_0^i = S_0$, S_0 - начальная цена.
  - $X_t^i \sim S_t$ - независимая выборка.
- Оценка стоимости:

$$\dot{Q}_N(t_k, X_k^j) = \max(\Phi(t_k, X_k^j), \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \dot{Q}_N(t_{k+1}, X_{k+1}^i)\dot{\Pi}_k^i(X_k^j)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \dot{\Pi}_k^i(X_k^j)}), \tag{14}$$

где

$$\dot{\Pi}_k^i(\alpha) = \exp\left(\frac{{W_{t_{k+1}}^i}^2}{2t_{k+1}} - \frac{(Y - W_{t_{k+1}}^i)^2}{2(t_{k+1} - t_k)}\right), \tag{15}$$

$$Y = \frac{\log \alpha / X_0 - \mu_{t_k}}{\sigma}. \tag{16}$$

Сравнение методов. Волатильность $\sigma = 0.2$

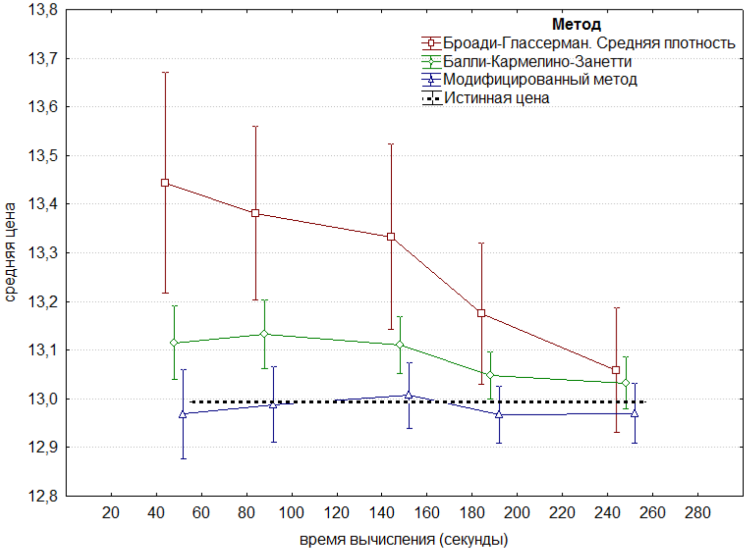

Рис.: увеличение числа точек сетки, $\sigma = 0.2$

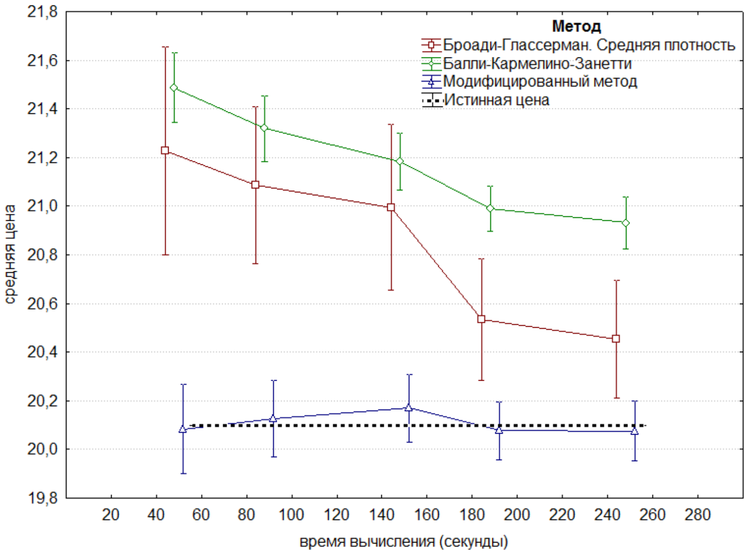

Рис.: увеличение числа точек сетки, $\sigma = 0.4$

Заключение

- Рассмотрены два метода оценки американских опционов, кроме того, предложен новый, модифицированный метод;
- Упрощены доказательства основных теоретических результатов статьи В. Балли, Л. Кармелино, А. Занетти;
- Проведено сравнение методов.