Алгоритмы и программные средства решения вычислительных задач тропической математики

Губанов Сергей Александрович, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., доцент Кривулин Н.К.
Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Христинич В.Б.

Санкт-Петербург
2012г.

Введение

Введение

1. Идемпотентная алгебра занимается изучением полуколец с идемпотентным сложением.
2. Это быстро развивающийся раздел прикладной математики, находящий широкое применение.
3. Изучению идемпотентной алгебры посвящены работы Н.Н. Воробьева, И.В. Романовского, В.П. Маслова, а также других российских и зарубежных учёных.
4. Многие задачи оптимизации сводятся в терминах идемпотентной алгебры к решению линейных уравнений.
5. Целый ряд алгоритмов решения таких задач, после их перевода на язык идемпотентной алгебры, оказываются аналогами вычислительных процедур линейной алгебры.
6. Возникает потребность иметь программные средства для решения задач идемпотентной алгебры.

Дипломная работа содержит:

1. Основные определения идемпотентой алгебры, на которые опираются представленные алгоритмы,
2. Описание алгоритмов решения линейных уравнений 1–го и 2–го рода в идемпотентной алгебре,
3. Формализацию и решение различных уравнений и неравенств 1–го и 2–го рода в алгебре $\mathbb{R}_{\max,+}$,
4. Представление результатов в общем виде, удобном для их реализации в виде вычислительных процедур,
5. Разработанную на основе полученных результатов библиотеку классов.

Основные определения

Идемпотентное полуполе

1. Пусть $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$ – идемпотентное полуполе, то есть
   - коммутативное полукольцо с нулем $\mathbb{0}$ и единицей $\mathbb{1}$,
   - сложение идемпотентно, другими словами
   $$\forall x \in \mathbb{X} \quad x \oplus x = x.$$
   - каждый ненулевой элемент имеет обратный по умножению.
2. Определено отношение частичного порядка, так что $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$.
3. В дальнейшем будем рассматривать полуполе
$$\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, + \rangle,$$
где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.

Общие сведения

Идемпотентная алгебра матриц

- Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m \times n}$ матрица над полуполем.
- Операции сложения, умножения матриц и операция умножения на скаляр $x \in \mathbb{X}$ определяются как обычно:

$$\{A \oplus B\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{BC\}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj}, \quad \{xA\}_{ij} = x a_{ij}.$$

- Для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m \times n}$ можно определить псевдообратную матрицу $A^{-} = (a_{ij}^{-}) \in \mathbb{X}^{m \times n}$ с элементами

$$a_{ij}^{-} = \begin{cases} a_{ji}^{-1}, & \text{если } a_{ij} \neq \mathbb{0}, \\ \mathbb{0}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Линейные уравнения первого рода

Определение уравнения

- Для $A \in \mathbb{X}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^n$ линейным уравнением первого рода относительно вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ называется уравнение

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

- Определим величину

$$\Delta(A, \boldsymbol{b}) = (A(\boldsymbol{b}^{-}A)^{-})^{-}\boldsymbol{b}.$$

Теорема 1 (Кривулин, 2006)

1. Уравнение $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\Delta(A, \boldsymbol{b}) = \mathbb{1}$.
2. При этом $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^{-}A)^{-}$ является максимальным решением.
3. Если столбцы матрицы A образуют минимальную систему векторов, порождающую $\boldsymbol{b}$, то других решений нет.

Линейные уравнения первого рода

Общее решение уравнения

- Пусть I – набор индексов столбцов A, образующий минимальную порождающую $\boldsymbol{b}$ систему векторов.
- Пусть $\mathcal{I}$ – множество всех таких наборов индексов.
- Множество $\mathcal{I} \neq \emptyset$ только когда уравнение имеет решение.
- Для каждого $I \in \mathcal{I}$ так же определим матрицу

$$G_I = \operatorname{diag}(\boldsymbol{g}_1(I), \ldots, \boldsymbol{g}_n(I)),$$

где $\boldsymbol{g}_i(I) = \mathbb{0}$, если $i \in I$, и $\boldsymbol{g}_i(I) = \mathbb{1}$, если $i \notin I$.

Теорема 2 (Кривулин, 2006)

Если уравнение $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ разрешимо,то его общим решением является семейство решений

$$x_I = (\boldsymbol{b}^{-} A \oplus \boldsymbol{v}^T G_I)^{-}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n, \quad I \in \mathcal{I}.$$

Алгоритм решения уравнения

- Будем считать, что уравнение $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ является приведённым (в $\boldsymbol{b}$ нет нулевых элементов).

Алгоритм решения уравнения $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

1. Если $A = \mathbb{0}$ и $\boldsymbol{b} = \mathbb{0}$, то любое $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ является решением.
2. Если $A = \mathbb{0}$ и $\boldsymbol{b} \neq \mathbb{0}$ или $(A(\boldsymbol{b}^- A)^-)^- \boldsymbol{b} > \mathbb{1}$, решений нет.
3. Если $A \neq \mathbb{0}$ и $\boldsymbol{b} = \mathbb{0}$, то $\exists!$ решение $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$.
4. Если $(A(\boldsymbol{b}^- A)^-)^- \boldsymbol{b} = \mathbb{1}$, то максимальным решением является вектор $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^- A)^-$.
5. Если $(A_I(\boldsymbol{b}^- A_I)^-)^- \boldsymbol{b} = \mathbb{1}$, где I — подмножество столбцов матрицы A, то уравнение имеет решение

$$x_I = (\boldsymbol{b}^- A \oplus \boldsymbol{v}^T G_I)^-, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n, \quad I \in \mathcal{I}.$$

Уравнения второго рода

Основные определения

- Однородное уравнение второго рода: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.
- Неоднородное уравнение второго рода: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$.
- Нормальная форма матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbb{0} & \dots & \mathbb{0} \\ A_{21} & A_{22} & & \mathbb{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{pmatrix},$$

где A_{ii} — неразложимая или нулевая квадратная матрица порядка n_i, A_{ij} — произвольная матрица размера $n_i \times n_j$ для всех $j < i, i = 1, \dots, s$, при условии $n_1 + \dots + n_s = n$.

- Матрица разложима, если одинаковыми перестановками строк и столбцов ей можно придать нормальную форму.

Вспомогательные величины

- Введём величину $\mathrm{Tr}(A)$

$$\mathrm{Tr}\,A = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}(A^m), \qquad \mathrm{tr}(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

- Определим следующие вспомогательные матрицы

$$A^+ = I \oplus A \oplus \dots \oplus A^{n-1}, \qquad A^\times = AA^+.$$

- Для любой A такой, что $\mathrm{Tr}\,A = \mathbb{1}$, обозначим через A^* матрицу, столбцы которой удовлетворяют условию

$$a_i^* = \begin{cases} a_i^+, & \text{если } a_i^+ = a_i^\times \\ \mathbb{0}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n,$$

Решение уравнений 2–го рода и смешанных систем

Теорема 3 (Кривулин, 2006)

Пусть $\boldsymbol{x}$ общее решение однородного уравнения с неразложимой матрицей A. Тогда справедливы утверждения:

1. если $\operatorname{Tr} A = \mathbb{1}$, то $\boldsymbol{x} = A^{*}\boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^{n}$,
2. если $\operatorname{Tr} A \neq \mathbb{1}$, то уравнение имеет только решение $\boldsymbol{x} = \mathbb{0}$.

Рассмотрим систему $A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}, \quad A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$

Алгоритм решение системы

1. Решение второго уравнения $A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$:
   $\boldsymbol{x} = A_2^{*}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^{l}, \quad l \leq n.$
2. Подстановка в первое уравнение: $A_1 A_2^{*}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{d}.$
3. Решение первого уравнения $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{d}^{-} A_1 A_2^{*} \oplus \boldsymbol{u}^{T} G)^{-}$,
   $\boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{k}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^{l}, \quad k, l \leq n, \quad G \in \mathcal{G}, \quad \boldsymbol{x} = A_2^{*}\boldsymbol{v}.$
4. Подстановка во второе уравнение
   $\boldsymbol{x} = A_2^{*}(\boldsymbol{d}^{-} A_1 A_2^{*} \oplus \boldsymbol{u}^{T} G)^{-}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{k}, \quad k \leq n, \quad G \in \mathcal{G}.$

Общий вид решения

- При помощи рассмотренных выше алгоритмов можно решать следующие уравнения и неравенства идемпотентной алгебры:

$$\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{A x} \oplus \boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{A x} \leq \boldsymbol{d}, \qquad A \in \mathbb{X}^{m \times n}, \quad \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{X}^{m}.$$

  и

$$\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{A x} \oplus \boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{A x} \oplus \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}, \qquad A \in \mathbb{X}^{n \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^{n}.$$

- Аналогично можно решать составленные из них системы.
- Оказалось, что решение всех рассматриваемых уравнений, неравенств и их систем можно представить в виде

$$\boldsymbol{x}=Q \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{s}_{G} \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{t}, \quad G \in \mathcal{G},$$

  где

$$Q \in \mathbb{X}^{n \times m}, \quad \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}_{G}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{X}^{n}.$$

- На основе метода, предложенного Бутковичем, осуществляется сведение к базовым задачам.
- Для $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$ введём матрицу A' и вектора $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{d}$:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{d}' = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

- Для $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{d}$ введём матрицу A' и вектора $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{d}$:

$$A' = \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d}' = \boldsymbol{d}.$$

- Эти задачи сводятся к уравнению $A'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{d}'$.

- Для неоднородного уравнения второго рода $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$ введём следующие матрицы A' и A'' и вектора $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{d}$:

$$A' = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix},$$

$$A'' = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \dots & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} = (\mathbb{1}).$$

- Для неоднородного неравенства второго рода $A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}$ введём следующие матрицы A' и A'' и вектора $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{d}$:

$$A' = \begin{pmatrix} A & I & \boldsymbol{b} \\ \mathbb{0} & I & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n+1} \end{pmatrix},$$

$$A'' = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \dots & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} = (\mathbb{1}).$$

- Эти задачи сводятся к системе:

$$A'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}',$$
$$A''\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{d}.$$

- Система уравнений $A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_1, A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_2$. сводится к уравнению $A'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{d}'$ с матрицей A' и векторами $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{d}$:

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{d}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \end{pmatrix}.$$

- Однородное неравенство $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}$ сводится к уравнению $A'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'$, где матрица A' и вектор $\boldsymbol{x}'$:

$$A' = \begin{pmatrix} A & I \\ \mathbb{0} & I \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}.$$

Общее описание

- Разработанны программные средства для решения линейных уравнений, неравенств и их систем над $\mathbb{R}_{\max,+}$.
- Для написания программы используется среда Microsoft Visual Studio 2008. При этом используются только библиотеки, изначально содержащихся в C++.
- Это позволяет обеспечить переносимость исходного кода в любую операционную среду.
- Выбран общий вид решения для базовых задач.
- В программе реализованы класс матриц, позволяющий производить вычисления над полуполем $\mathbb{R}_{\max,+}$.
- Класс задач, проверяющий корректность условия задачи, и подготавливающий данные для класса решений.
- Класс решений, реализующий описанные алгоритмы и формирующий общий вид решения.

Заключение

- Рассмотрены алгоритмы решения линейных однородных уравнений первого и второго рода.
- Предложен способ сведения уравнений, неравенств и их систем к однородным уравнениям первого и второго рода.
- Предложен общий вид решения линейных уравнений, неравенств и их систем.
- Выполнена программная реализация решений линейных уравнений, неравенств и их систем.
- Обеспечена возможность работы программы в любой операционной системе, без значительных изменений.