

Вероятностное решение некоторых нелинейных уравнений относительно мер

Суrowикина Тамара Олеговна

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент В. В. Некруткин
Рецензент: д.ф.-м.н., профессор А. С. Сипин

Санкт-Петербург
2019г.

Некоторые физические процессы описываются нелинейными уравнениями в мерах.

Например: ϕ_t — распределение столкновительного процесса в момент времени t удовлетворяет (см. Ermakov, Nekrutkin, Sipin, 1989, §4.1)

$$\begin{aligned}\phi_t(dy) = & e^{-\lambda t} \int_D \phi_0(dx) \delta_{S_t(x)}(dy) + \\ & + \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-s)} ds \left(\int_D \delta_{S_{t-s}(x)}(dy) T(dx; y_1, y_2) \int_{D^2} \phi_s(dy_1) \phi_s(dy_2) \right).\end{aligned}$$

Соответствует нелинейному уравнению Больцмана для псевдомаксвелловского газа.

Algorithm 1 Столкновительный процесс

```
1:  $n \leftarrow 0, s_0 \leftarrow t$ 
2:  $y_n \leftarrow \phi_0(\cdot), s_n \leftarrow 0$ 
3:  $\eta \leftarrow \text{EXP}(\lambda)$ 
4: if  $\eta + s_n \leq s_{n-1}$  then
5:    $y_n \leftarrow S_\eta(y_n), s_n \leftarrow s_n + \eta,$ 
6:    $n \leftarrow n + 1, \text{goto } 2$ 
7:  $r \leftarrow s_{n-1} - s_n, y_n \leftarrow S_r(y_n)$ 
8: if  $n > 1$  then
9:    $y_{n-1} \leftarrow T(\cdot; y_{n-1}, y_n),$ 
10:   $n \leftarrow n - 1, \text{goto } 3$ 
11: else
12:   $\xi \leftarrow y_1, \text{STOP}.$ 
```

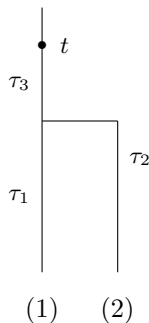


Рис.: Пример работы алгоритма

Структура: уравнение в мерах и имитационный процесс, его решающий. **Процесс имеет некоторую физическую интерпретацию.**

Было: уравнение, описывающее динамику движения сталкивающихся частиц. Решение зависит от времени.

Цель

Хотим построить “стационарный” процесс (решение соответствующего уравнения не зависит от времени).

Столкновительный процесс обрывался по времени t .

Как обрывать “стационарный” процесс?

Идея: частицы могут вылетать из области. Тогда интересует положение частицы после её последнего столкновения.

- ❶ (G, ρ, \mathcal{B}) — фазовое пространство движущихся частиц.
 $G = D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где D, Γ_1, Γ_2 — дизъюнкты непустые подмножества G .
- ❷ Свободное движение. Отображение $S_t : G \mapsto G$, $t \geq 0$.
- ❸ Момент вылета из области. $t(x) = \inf\{t > 0 : S_t(x) \in \Gamma_2\}$.
- ❹ Начальное положение частиц.
Вероятностное распределение ψ на Γ_1 .
- ❺ Ударная трансформанта.
Распределение $T(\cdot; y_1, y_2)$ в D .
- ❻ p — вероятность гибели частицы, $0 < p < 1$ (см. Ermakov, Nekrutkin, Sipin, 1989, §3.4).

Algorithm 2 Моделирование процесса

```
1:  $n \leftarrow 1$ .  
2:  $z_n \leftarrow \psi(\cdot)$ ,  $t \leftarrow t(z_n)$ .  
3:  $\tau \leftarrow \text{EXP}(\lambda)$ .  
4: if  $\tau < t$  then  $z_n \leftarrow S_\tau(z_n)$   
   else  $\Phi \leftarrow \Delta$ , STOP.  
5:  $\alpha \leftarrow U_{0,1}(\cdot)$ .  
6: if  $\alpha > p$  then  $n \leftarrow n + 1$ ,  
   goto 2.  
7: else  
8:   if  $n > 1$  then  
9:      $z_{n-1} \leftarrow T(\cdot; z_{n-1}, z_n)$ ,  
10:     $t \leftarrow t(z_{n-1})$ ,  
11:     $n \leftarrow n - 1$ , goto 3.  
12:  else  $\Phi \leftarrow z_1$ , STOP.
```

Интересует: $\mathcal{L}(\Phi, \Phi \neq \Delta)$.

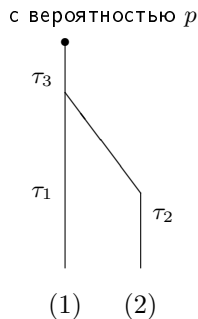


Рис.: Пример работы алгоритма

Результат. Движение с искусственными ограничениями. Уравнение в мерах

Предложение

Пусть вероятность гибели частиц $p > 1/2$, тогда мера $\mathcal{L}(\Phi, \Phi \in D)$ удовлетворяет уравнению

$$\phi(\cdot) = \int_{D^2} \Psi(\cdot; x_1, x_2) \phi(dx_1) \phi(dx_2) + \theta(\cdot), \text{ где}$$

$$\theta(A) = p \int_{\Gamma_1} \psi(dx) \int_0^{t(x)} \lambda e^{-\lambda z} \delta_{S_z(x)}(A) dz,$$

$$\Psi(A; x_1, x_2) = (1 - p) \int_D T(dy; x_1, x_2) \int_0^{t(y)} \lambda e^{-\lambda z} \delta_{S_z(y)}(A) dz.$$

Мотивация. Описанный процесс имеет два недостатка:

- есть искусственное ограничение — вероятность “гибели” p ,
- столкновения не синхронизованы по времени.

Введём два типа частиц и рассмотрим процесс, описывающий столкновения пробной частицы с частицами среды.

Определим:

- 1 **Свободное движение частиц среды.**

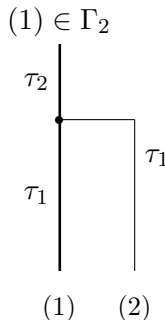
Отображение $U_t : D \mapsto D$, заданное для $\forall t \geq 0$.

- 2 **Распределение μ на D — начальное положение частиц среды.**

Algorithm 3 Линейный процесс

```
1:  $y_1 \leftarrow \psi(\cdot), \eta \leftarrow \text{EXP}_{t(y_1)}(\lambda),$   
    $r \leftarrow 0.$   
2:  $y_1 \leftarrow S_\eta(y_1), r \leftarrow r + \eta.$   
3:  $y_2 \leftarrow \mu(\cdot), y_2 \leftarrow U_r(y_2).$   
4:  $y_1 \leftarrow T(\cdot; y_1, y_2).$   
5:  $\eta \leftarrow \text{EXP}(\lambda).$   
6: if  $\eta < t(y_1)$  then goto 2  
7: else  $\Phi \leftarrow y_1, \Theta \leftarrow r, \text{STOP}.$ 
```

Интересует: $\mathcal{L}(\Phi, \Theta).$



Особенности:

- нет взаимодействий между частицами среды;
- результат — координата и время.

Рис.: Пример работы алгоритма

Предложение

Пусть $\sup_{x \in D} e^{-t(x)} > 0$, тогда $\phi := \mathcal{L}(\Phi, \Theta)$ удовлетворяет

$$\phi(dydr) = \int_{D^2} \int_0^\infty \Psi(dydr; y_1, y_2, t_1) \phi(dy_1 dt_1) \mu(dy_2) + \theta(dydr),$$

$$\begin{aligned} \Psi(dydr; y_1, y_2, t_1) = & e^{\lambda(t(y_1) - t(y))} \int_0^{t(y_1)} \lambda e^{-\lambda t_2} \times \\ & \times T(dy; S_{t_2}(y_1), U_{t_1+t_2}(y_2)) \delta_{t_1+t_2}(dr) dt_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(dydr) = & e^{-\lambda t(y)} \int_D \int_{\Gamma_1} \psi(dx) \frac{\lambda e^{-\lambda r}}{1 - \exp(-\lambda t(x))} \delta_{S_r(x)}(dy_1) \times \\ & \times \int_D \mu(dy_2) T(dy; y_1, U_r(y_2)) dr. \end{aligned}$$

Algorithm 4 Нелинейный процесс

```
1:  $n \leftarrow 1$ .  
2:  $y_n \leftarrow \psi(\cdot), \eta_n \leftarrow 0$ .  
3:  $\tau \leftarrow \text{EXP}(\lambda)$ .  
4: if  $n = 1$  and  $\tau > t(y_n)$  then  
5:    $\Phi \leftarrow y_n, \Theta \leftarrow \eta_n$  STOP.  
6: if  $n > 1$  and  $\eta_n + \tau > \eta_{n-1}$  then  
7:    $t \leftarrow \eta_{n-1} - \eta_n, y_n \leftarrow S_t(y_n),$   
8:    $y_{n-1} \leftarrow T(\cdot; y_{n-1}, y_n),$   
9:    $n \leftarrow n - 1, \text{goto } 3$ .  
10: else  
11:    $\eta_n \leftarrow \eta_n + \tau, y_n \leftarrow S_\tau(y_n),$   
12:    $n \leftarrow n + 1, \text{goto } 2$ .
```

Особенность: ударная трансформанта действует на (G, \mathcal{B}) .

Интересует: $\mathcal{L}(\Phi, \Theta)$.

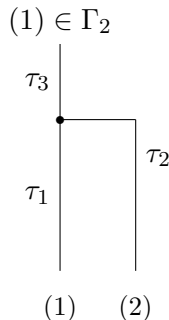


Рис.: Пример работы алгоритма

Предложение

Пусть $\sup_{x \in D} e^{-t(x)} > 0$.

Тогда мера $\phi := \mathcal{L}(\Phi, \Theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\phi(dydr) &= \int_G \int_0^\infty \phi(dy_1 dr_1) \int_G \int_0^r \phi(dy_2 dr_2) M(dydr, y_1, y_2, r_1, r_2) + B^{\gamma_0}(dydr), \\ M(dydr, y_1, y_2, r_1, r_2) &= e^{-\lambda(t(y)-t(y_1)-t(y_2))} \times \\ &\times \int_0^{t(y_1)} dt_1 \lambda e^{-\lambda t_1} \delta_{r_1+t_1}(dr) e^{-\lambda(r-r_2)} T(dy; S_{r-r_1}(y_1), S_{r-r_2}(y_2)), \\ B^{\gamma_0}(dydr) &= \psi(dy) \delta_0(dr) e^{-\lambda t(y)}.\end{aligned}$$

- ❶ Построены три процесса:
 - нелинейный процесс с параметром p и несинхронизированными по времени столкновениями;
 - линейный процесс, описывающий столкновения пробной частицы с частицами среды;
 - нелинейный процесс движения частицы в сосуде с взаимодействующими частицами такого же типа.
- ❷ Описаны уравнения в мерах, соответствующие этим процессам, и — для первых двух — способы уменьшения дисперсий соответствующих оценок.
- ❸ Для нелинейного процесса с искусственными ограничениями промоделированы два примера:
 - для сравнения результатов, получающихся при помощи двух способов оценивания функционалов;
 - для сравнения аналитического решения с “монтекарловским”.