

Статистическое моделирование в задаче об оптимальной остановке

Машковский Артем Викторович, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Каштанов Ю.Н.
Рецензент: к.ф.-м.н. Гормин А.А.



Санкт-Петербург
2015г.

Задача остановки.

Разные задачи остановки можно построить относительно траектории цены $(S_1, S_2, \dots, S_T, \dots)$:

- Цена опциона. Если f_t — опционные выплаты на момент t , то задача сводится к поиску следующего значения:

$$C = \sup_{\tau < T} E f_{\tau}(S_{\tau});$$

- Броски монетки. Если в роли точки траектории берутся $S_i = \{0, 1\}$ с вероятностью $1/2$, то можно поставить задачу остановки для платежной функции

$$f_n = \begin{cases} 1/2 & , n = 0; \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i & , 0 < n < \infty; \\ 1/2 & , n = \infty; \end{cases}$$

- Добыча ресурсов. В этой задаче платежная функция имеет более сложный вид, требуется найти

$$C = \sup_{\tau > 0} E \left[\int_0^{\tau} e^{-\rho(s+t)} (\lambda P(t) Q(t) - K) dt + \theta e^{-\rho(s+\tau)} P(\tau) Q(\tau) \right]$$

Метод статистической сетки:

- Глобальные понятия;
- Виды используемых стохастических сеток;
- Локальные особенности;
- Рандомизация зависимой переменной.

Примеры использования метода:

- Упрощенный пример;
- Добыча ресурсов.

Подведение итогов.

Для задач остановки известно рекурсивное соотношение, что если

$$\bar{\Phi}_N = \bar{f}_N, \quad \bar{\Phi}_n = \max(\bar{f}_n, E_n \bar{\Phi}_{n+1}),$$

то $\bar{\Phi}_0 = \Phi$ — решение. Основной целью метода стохастической сетки является приближение $\bar{\Phi}_n$. Происходит оно следующим образом:

- На каждом шаге n будем строить случайные $Z_n = \{z_n^i\}_{i=1}^M$ — сетки, которые в совокупности образуют марковскую цепь с вероятностями перехода

$$\bar{q}_n(Z, dZ') = q_{n,1}(Z, dz'_1) q_{n,2}(Z, dz'_2) \dots q_{n,M}(Z, dz'_M).$$

- Вероятности же перехода $p_n(i, j)$ между состояниями z_n^i и z_{n+1}^j также известны.
- Предположим, что существуют плотности

$$p_{n,j}(Z, z, z') = \frac{p_n(z, dz')}{q_{n,j}(Z, dz')}.$$

- \mathcal{F}_n — это σ -алгебра сгенерированная значениями Z_1, Z_2, \dots, Z_n . А $E^{\mathcal{F}_n}$ — условное математическое ожидание по отношению к \mathcal{F}_n .

★ Далее строится $\tilde{\Phi}$, удовлетворяющая

$$\tilde{\Phi}_N = \bar{f}_N, \quad \tilde{\Phi}_n = \max(\bar{f}_n, E^{\mathcal{F}_n} \tilde{\Phi}_{n+1}),$$

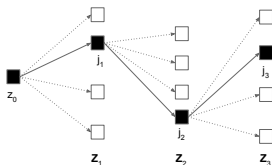
Вероятности перехода из сетки Z_n в состояние z_{n+1}^j :

$$q_n(j) = \frac{1}{M} \sum_i p_n(i, j).$$

Рекурсивное приближение $\tilde{\Phi}_n$:

$$\tilde{\Phi}_n(z_n) = \max \left(\bar{f}_n(z_n), \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M p_{n+1}(z_n, j) \tilde{\Phi}_{n+1}(j) \right).$$

Изображение схемы:



Усредненная схема.

Вероятности перехода из сетки Z_n в состояние z_{n+1}^j :

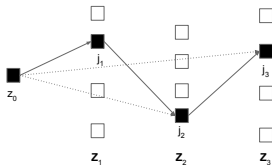
$$q_n(j) = c_n e^{\frac{-|z_n^j - z_0|^2}{2s^2n}} dz',$$

где $c_n = 1/s\sqrt{2\pi n}$ — нормирующий множитель.

Рекурсивное приближение $\tilde{\Phi}_n$:

$$\tilde{\Phi}_n(z_n) = \max \left(\bar{f}_n(z_n), \frac{\sum_j p_{n+1}(z_n, j) \tilde{\Phi}_{n+1}(j)}{\sum_j p_{n+1}(z_n, j)} \right).$$

Изображение схемы:



Сквозная схема.

Изначально имеем $\{\xi_n\} = \{\xi(\tau_n)\}$ — первую переменную, $\phi_n = \sum_{i=1}^n g_i(\xi_i)$ — вторую переменную и платежную функцию вида $f_n = \phi_n + F_n(\xi_n)$. $z_n = \{\xi_n, \phi_n\}$ — марковская цепь. Однако ее переходные вероятности — негладкие функции:

$$p_n(z, dz') = p_n(x, dx') \delta_{\phi + g_n(x')} (df').$$

Это не позволяет нам пользоваться стохастической сеткой. Рандомизируем вторую переменную с помощью ε_i —, например, н.н.р.с.в., и покажем чему станет равна переходная вероятность в этом случае:

$$\bar{\phi}_n = \phi_n + \Sigma_n = \phi_n + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i,$$

$$p_n(\bar{z}; d\bar{z}') = p_n(x, dx') \varphi(\bar{\phi}' - \bar{\phi} - g_n(x')) d\bar{\phi}'.$$

Тем самым мы добились непрерывности вероятности перехода двух переменных относительно друг друга. Более того для $\bar{f}_n = \bar{\phi}_n + F_n(\xi_n)$ верно:

Утверждение

Если ввести:

$$\bar{\Phi}_N = \bar{f}_N, \quad \bar{\Phi}_n = \max(\bar{f}_n, E_n \bar{\Phi}_{n+1}),$$

то будет справедливо: $\bar{\Phi}_0 = \Phi$.

Примеры. Упрощенный пример. Постановка задачи.

Рассмотрим процесс, описанный на рисунке:

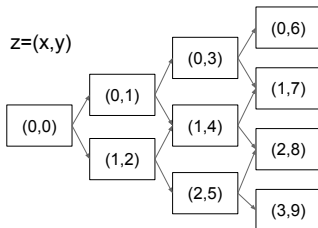


Рис.: Простой процесс перемещения по дереву. Первая переменная — функции цены $x = \xi_n$, вторая переменная — прибыль на соответствующем шаге $y = g_n(\xi_n)$, которая, как видно, зависит лишь от номера итерации и текущего значения первой переменной.

Если ввести функцию общей прибыли $f_n = \sum_{i=0}^n g_i(\xi_i)$, то требуется найти

$$\mathcal{C} = \sup_{n \leq 3} \mathbf{E} f_n$$

Этот пример нужен для демонстрации состоятельности метода рандомизации зависимой переменной, как самостоятельного метода. Будем рандомизировать вторую переменную. И также рассмотрим два случая подсчета вероятностей $q_n(j)$. Получим:

	Усредненные плотности		Сквозные плотности	
$M =$	Среднее	Ошибка	Среднее	Ошибка
300	14.097	0.028	12.953	0.072
600	14.121	0.017	13.033	0.056
1200	14.109	0.012	12.965	0.036
2400	14.120	0.010	13.000	0.015

Таблица: Показаны средние значения и стандартные отклонения при 50 итерациях каждого метода. Точным результатом оптимальной накопленной прибыли в данной задаче является **13.00**.

Известный факт, что метод с усредненными плотностями дает систематический сдвиг.

Дано:

- Функция изменения цены ресурса ($B(t)$ — броуновское движение):

$$dP(t) = \alpha P(t)dt + \beta P(t)dB(t), \quad P(0) = p > 0,$$

- Функция изменения запаса ресурсов:

$$dQ(t) = -\lambda Q(t)dt, \quad Q(0) = q > 0.$$

Найти:

- ★ $\Phi(s, p, q)$ — оптимальную цену и такое τ^* — оптимальное время остановки, на котором достигается:

$$\Phi(s, p, q) = J^{\tau^*}(s, p, q) = \sup_{\tau \geq 0} J^{\tau}(s, p, q),$$

где $J^{\tau}(s, p, q) =$

$$E^{(s, p, q)} \left[\int_0^{\tau} e^{-\rho(s+t)} (\lambda P(t)Q(t) - K) dt + \theta e^{-\rho(s+\tau)} P(\tau)Q(\tau) \right].$$

α -0.02
 β 0.2
 ρ -0.05
 λ 0.5
 θ 0.1
 K 10
 p 100
 q 1

	Усредн.		Сквозн.	
Пар-ры:	Res	Err	Res	Err
T = 1, N = 10				
$M = 300$	32.7026	1.4448	33.6465	0.3076
$M = 600$	31.2193	1.18046	33.9738	0.3541
$M = 1200$	32.9338	0.9291	34.5769	0.3772
T = 4, M = 300				
$N = 10$	58.3838	4.0296	43.3463	0.3409
$N = 20$	64.2606	4.1942	48.7894	0.1662
$N = 30$	—	—	51.0256	0.2409
$N = 40$	—	—	53.4150	0.2322

Рис.: Сравнение схем. Res — приближение, Err — выборочное стандартное отклонение, полученные при реализации алгоритма 10 раз. M — размер сетки, N — количество шагов. Точное решение для $T = \infty$: **53.693**. Промоделированные приближения с помощью бинарного дерева для $T = 1$: **34.7**, для $T = 4$: **50.8**.

■ Итого:

- Метод стохастической сетки работает лучше на ограниченных по времени процессах. При увеличении количества итераций, но с сохранением шага Δ_t время выполнения алгоритма стремится к ∞ .
- Для метода с усредненными вероятностями перехода, для большей точности, нужно строить более сложные случайные сетки. Метод же со сквозными вероятностями не привязан к специфике сеток, считает с сопоставимой точностью и требует на это меньших затрат.
- ★ Метод рандомизации случайной переменной имеет место быть. Это основной результат.

■ Планы развития:

- Расширение размерности пространства.
- Усложнение марковского процесса.
- ★ Развитие идеи рандомизации зависимых переменных.