Моделирование СМО при байесовском подходе

Сизов Александр Юрьевич, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Ермаков С.М.
Рецензент: к. ф.-м. н. Шпилёв П.В.

Санкт-Петербург
2011г.

Основные понятия

Структуру СМО принятно обозначать последовательностью символов - $A|B|n|m$, где:

- A — распределение входящего потока требований.
- B — распределение времен обслуживания.
- n — количество приборов в системе.
- m — количество мест ожидания.

Одними из наиболее интересных и практически полезных характеристик СМО являются коэффициент загрузки ρ и π — вероятность того, что входящий в СМО вызов не будет потерян.
В этой работе будут рассматриваться системы вида $M|M|n|0$, где M — соответствует показательному распределению.

Байесовские СМО

Одним из усложнений классических СМО может быть ситуация, когда априори не известны параметр входящего потока λ и параметр обслуживания μ, а известны только их распределения.
Если рассматривать целый класс таких СМО, «рандомизированных» относительно некоторых параметров, то получим байесовскую СМО, для которой характеристики ρ и π становятся случайными величинами.
В случае СМО вида $M|M|1|0$ они вычисляются по формулам:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \pi = \frac{1}{1+\rho} = \frac{\mu}{\lambda+\mu},$$

В рамках изучения байесовских СМО, нахождение функции распределения, плотности и первых двух моментов с.в. ρ и π, представляет большой интерес.

Аналитический подход

Если принять предположение, что в рассматриваемой байесовской СМО наступил стационарный режим, то можно аналитически найти характеристики с.в. ρ и π.

- Кудрявцев А.А., Шоргин С.Я. Байесовский подход к анализу систем массового обслуживания и показательной надежности // Информатика и её применения, 2007. Т. 1. Вып. 2. С. 76—82.
- Кудрявцев А.А., Шоргин С.Я. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: экспоненциально-эрланговский случай // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 1. С. 44—48.
- Кудрявцев А.А., Шоргин В.С., Шоргин С.Я. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: общий эрланговский случай // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 4. С. 30—34.

Аналитические результаты

Таблица: Исследованные аналитически пары распределений

λ \ μ	Sing	Exp	Unif	Erlang
Sing	$*$	$+$	-	$+$
Exp	$\oplus$	$+$	-	$+$
Unif	-	-	$+$	-
Erlang	$\oplus$	$+$	-	$\oplus$

Символ «$*$» соответствует исходной постановке задачи, символ «-» — тем парам, которые еще не были рассмотрены авторами, символом «$+$» — распределениям, для которых по тем или иным причинам были найдены не все характеристики, или же некоторые из них обращаются в бесконечность. И наконец, символом «$\oplus$» отмечены распределения, для которых найдены плотности распределения $f_\rho(x)$ и $f_\pi(x)$ случайных величин ρ и π, а также, для каждой из них существуют (возможно при некоторых ограничениях) два первых момента.

Сравнение разных подходов

Таблица: Сравнение двух подходов

Аналитический метод	**Метод моделирования**
Требует индивидуального рассмотрения каждого случая	Универсален
Годится только для исследования стационарного режима	Подходит также и для переходного режима
Позволяет строить гладкие функции исследуемых характеристик, а также выделять особенности	Также есть возможность строить гладкие функции, и предполагать наличие особенностей
Вычисление конкретных значений происходит почти мгновенно	Моделирование системы может занять некоторое время

Цель

Цели работы:

- Написать программу, которая методом моделирования получает характеристики для СМО, рассмотренных при аналитическом подходе. Оценить точность получаемых прогнозов. Обосновать преимущества метода Монте-Карло.
- Добавить в программу возможность работы с переходным режимом, исследовать получаемые результаты.

На графиках отображено увеличение точности приближения с увеличением количества рассматриваемых устройств N.

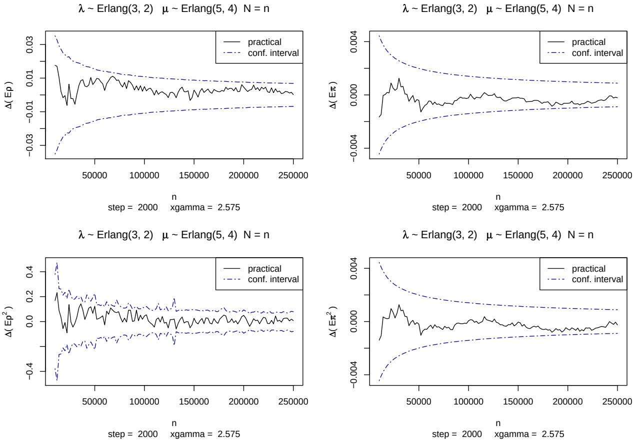

Рис.: Увеличение точности прогнозов

Построение гладких графиков

Использование метода зависимых испытаний позволяет получать гладкие графики методом моделирования. [Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. 2-ое изд. Наука, 1975. С. 472.]

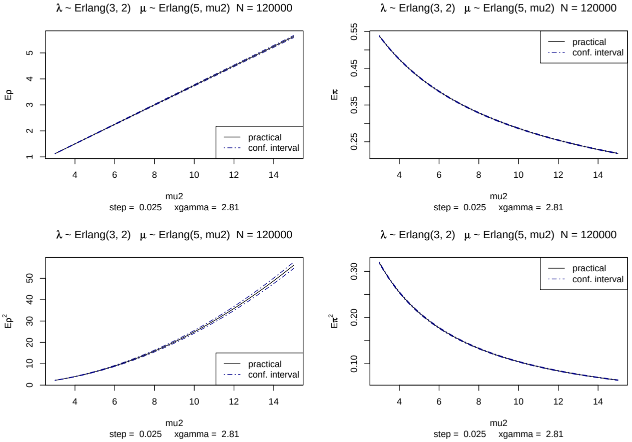

Рис.: Результаты метода зависимых испытаний

Построение плотностей

Типичный пример плотностей, получаемых двумя методами.

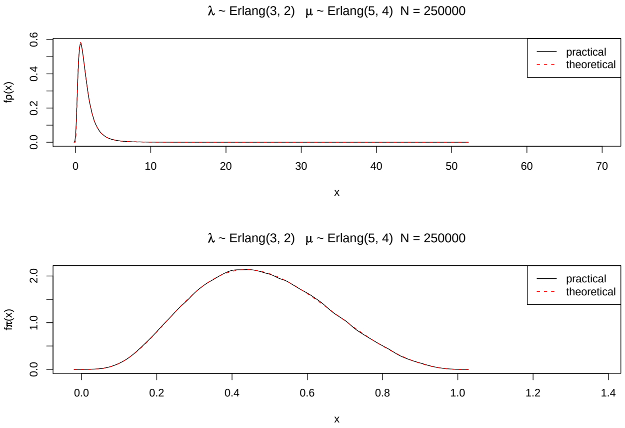

Рис.: Плотности распределений

Случай бесконечного математического ожидания

В рассматриваемом случае $E\rho = \infty$.
Дальнейшую проверку можно проводить проверяя статистическую гипотезу.

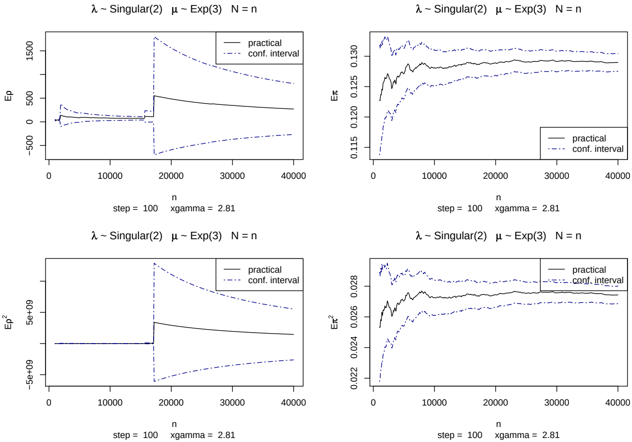

Рис.: Случай бесконечного математического ожидания

Переходный режим

Когда рассматриваем переходный режим, считаем, что система проработала только заданное время T. В этом случае $\mathrm{P}(\pi = 1) \neq 0$.

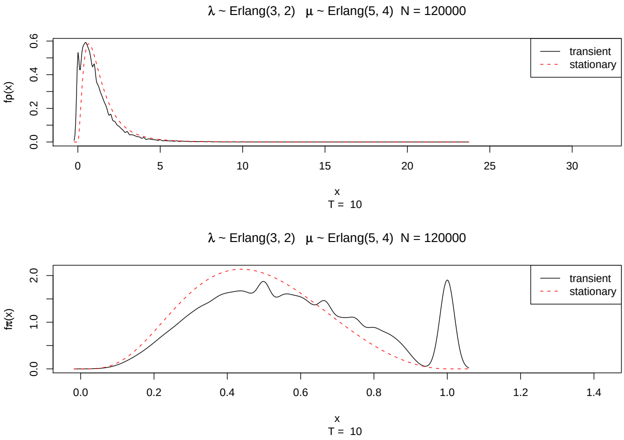

Рис.: Плотности распределений в двух случаях

Характеристики переходного режима

99.5%-доверительные интервалы позволяют получить представление о точности получаемых значений.

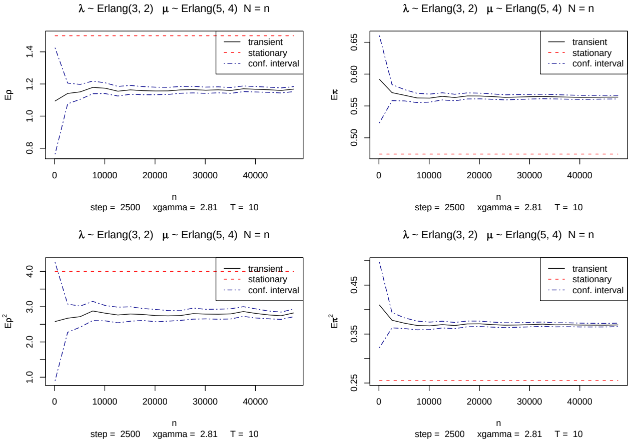

Рис.: Зависимость получаемых характеристик от N

Отличие переходного и стационарного режимов

В случае, когда значение T «не очень велико» (когда существуют системы, в которых были выполнены все заявки) получаемые значения могут отличаться в несколько раз.

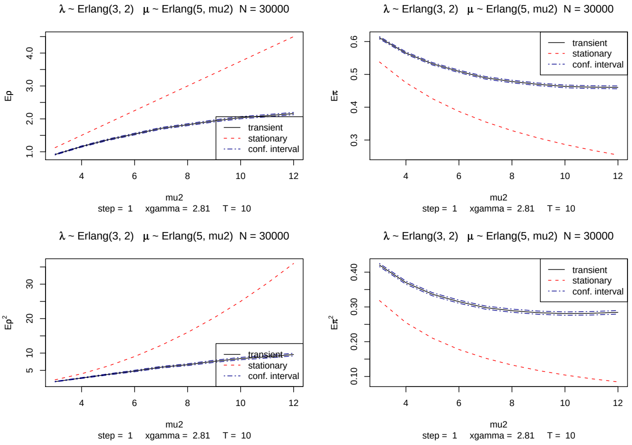

Рис.: Отличие моментов ρ и π

Результаты работы

Результаты работы:

- Разработан алгоритм и программа, которая реализует решение поставленной задачи.
- Показаны преимущества метода моделирования.