Кафедра статистического моделирования
Дипломная работа
студента 522-й группы Сека Ипполита

Абстрактный анализ нестационарных недетерминированных автоматов с периодически меняющейся структурой

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор М.К.Чирков
Рецензент:
к.ф.-м.н., доцент А.Ю.Пономарева

Санкт-Петербург
2006 г.

Основные определения

Понятие об обобщенном недетерминированном автомате с периодически меняющейся структурой

Слово в X: $w = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_t}$, где $x_i \in X$, $t \geq 0$ и $t = |w|$ - длина слова w.
$F^{1,m}$ и $F^{m,1}$ - множества всех m-мерных векторов-строк и векторов-столбцов над F соответственно; $F^{m,n}$ - множество всех $(m \times n)$-матриц над F, где $F = \{\{0,1\}, \vee, \&, 1 > 0\}$. Нестационарный обобщенный конечный автомат с периодически меняющейся структурой A_{ndv}, заданный над F, это система

$$A_{\mathrm{ndv}} = \left\langle X^{(\tau)}, A^{(\tau)}, Y^{(\tau)}, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}^{(\tau)}(s,l)\}, \mathbf{q}^{(\tau)}, t_p, T \right\rangle . \tag{1.1}$$

Автомат A_{ndv} индуцирует обобщенное отображение $\Phi_A : Z_{\text{доп}} \longrightarrow \{0,1\}$, определяемое выражением

$$\Phi_A(w,v) = \begin{cases} \mathbf{r} \prod_{t=1}^{d} \mathbf{R}^{(\tau(t))}(s_t, l_t) \mathbf{q}^{(\tau(d))}, & \text{если } d \neq 0, \\ \\ \mathbf{r}\mathbf{q}^{(0)}, & \text{если } d = 0, \end{cases}$$

Здесь и в дальнейшем знаки умножение векторов и матриц означают применение к их элементам операций $\bigvee$ и $\&$.

Основные определения

- **Абстрактный недетерминированный автомат с периодически меняющейся структурой**

$$D_{\mathrm{ndv}} = \left\langle X^{(\tau)}, D^{(\tau)}, \mathbf{r}_D, \{\mathbf{R}_D^{(\tau)}(s)\}, \mathbf{q}_D^{(\tau)}, t_p, T \right\rangle, \tag{1.2}$$

индуцирует обобщенное отображение

$$\Phi_D : Z_{\text{доп}} \longrightarrow \{0, 1\}$$

определяемое выражением

$$\Phi_D(w) = \begin{cases} \mathbf{r}_D \prod_{t=1}^{d} \mathbf{R}_D^{(\tau(t))}(s_t)\mathbf{q}_D^{(\tau(d))}, & \text{если } d \neq 0, \\ \mathbf{r}_D \mathbf{q}_D^{(0)}, & \text{если } d = 0. \end{cases}$$

Основные определения

- **Представление языков недетерминированными автоматами с периодически меняющейся структурой**

Языком в алфавите X называется множество слов $Z \subset X^*$ в алфавите X, определяемое характеристической функцией

$$\Phi_z : X^* \to \{0, 1\}.$$

- Задан автомат A_{ndv} (1.1) и выделено $Y^{(\text{к})} \subseteq Y$. Язык Z *представлен* в A_{ndv} *подмножеством* $Y^{(\text{к})}$, если для индуцированного автомата A_{ndv}, отображения выполняется

$$\Phi_Z(w) = \begin{cases} \bigvee_v \bigvee_{y_l \in Y^{(\text{к})}} \Phi_A(w, vy_l), \text{ где } (w, vy_l) \in Z_{\text{доп}}, \\ 0, \text{ если при всех } vy_l \ (w, vy_l) \overline{\in} Z_{\text{доп}}. \end{cases}$$

- Задан автомат D_{ndv} (1.2). Язык Z *представлен* в D_{ndv}, если для индуцированного автомата D_{ndv}, отображения выполняется

$$\Phi_Z(w) = \begin{cases} \Phi_D(w) \text{ при } w \in Z_{\text{доп}}, \\ 0, \text{ при } w \overline{\in} Z_{\text{доп}}. \end{cases}$$

Постановка задачи

- **Анализ обобщенного недетерминированного автомата с периодически меняющейся структурой**
  Задан
  $$A_{\mathrm{ndv}} = \langle X^{(\tau)}, A^{(\tau)}, Y^{(\tau)}, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}^{(\tau)}(s,l)\}, \mathbf{q}^{(\tau)}, t_p, T\rangle$$
  и выделены подмножества $Y_1^{(\text{к})}, Y_2^{(\text{к})}, ..., Y_d^{(\text{к})} \subseteq Y$ его конечных выходных символов. Требуется найти языки $Z_1, Z_2, ..., Z_d$, представленные в A_{ndv} этими подмножествами выходных букв.

- **Анализ абстрактного автомата с периодически меняющейся структурой**
  Задан
  $$D_{\mathrm{ndv}} = \langle X^{(\tau)}, D^{(\tau)}, \mathbf{r}_D, \{\mathbf{R}_D^{(\tau)}(s)\}, \mathbf{q}_D^{(\tau)}, t_p, T\rangle \,. \tag{1.2}$$
  Требуется найти язык Z, представленный в D_{ndv}.

Преобразование автомата A_{ndv} в автомат B_{nd}

- **Формулировка задачи**

  Задача состоит в следующем. Пусть задан нестационарный недетерминированный автомат с периодически меняющейся структурой

  $$A_{\mathrm{ndv}} = \langle X^{(\tau)}, A^{(\tau)}, Y^{(\tau)}, \mathbf{r}_A, \{\mathbf{R}_A^{(\tau)}(s,l)\}, \mathbf{q}_A^{(\tau)}, t_p, T\rangle \,. \tag{1.3}$$

  Требуется определить существует ли эквивалентный ему стационарный недетерминированный автомат

  $$B_{\mathrm{nd}} = \langle X, B, Y, \mathbf{r}_B, \{\mathbf{R}_B(s,l)\}, \mathbf{q}_B\rangle \tag{1.4}$$

  и если существует, то построить его.

- **Теорема 1** *Пусть задан нестационарный недетерминированный автомат с периодически меняющейся структурой* A_{ndv} (1.3). *Тогда может быть построен стационарный недетерминированный автомат с постоянной структурой* B_{nd} (1.4), *эквивалентный автомату* A_{ndv} *и имеющий* $m = \sum_{\tau=0}^{t_p+T-1} |A^{(\tau)}|$ *состояний.*

Преобразование автомата A_{ndv} в автомат B_{nd}

- Построим B_{nd} таким образом, что

$$\mathbf{r}_B = (\mathbf{r}_A, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}), \quad \mathbf{q}_B = (\mathbf{q}_A^{(0)}, \mathbf{q}_A^{(1)}, \dots, \mathbf{q}_A^{(t_p-1)}, \mathbf{q}_A^{(t_p)}, \mathbf{q}_A^{(t_p+1)}, \dots, \mathbf{q}_A^{(t_p+T-1)})^T,$$

$$B = A^{(0)} \cup \dots \cup A^{(t_p)} \cup A^{(t_p+1)} \cup \dots \cup A^{(t_p+T-1)},$$

$$\mathbf{R}_B(s,l) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{R}_A^{(1)}(s,l) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \mathbf{R}_A^{(t_p)}(s,l) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \mathbf{R}_A^{(t_p+T-1)}(s,l) \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}_A^{(t_p+T)}(s,l) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_B^{(\tau)}(s,l) = 0, \text{ если } x_s \overline{\in} X^{(\tau)} \text{ или } y_l \overline{\in} Y^{(\tau)}.$$

- **Следствие.** *Регулярные языки и только они представимы в нестационарных недетерминированных обобщенных конечных автоматах с периодически меняющейся структурой.*

Оптимизация автомата B_{nd}

Теорема 2 *Обобщенный недетерминированный стационарный конечный автомат* B_{nd} (1.4) *находится в минимальной форме в том и только в том случае, если для его преобразующих матриц выполняется* $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_r = \mathbf{I}(\mathrm{m})$.

Теорема 3 *Пусть* B_{nd} (1.4) *есть обобщенный недетерминированный конечный автомат,* $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_d\}$ *есть его начально эквивалентное разбиение и* $\mathbf{H}_q$, $\mathbf{H}_q^I$ *есть соответствующие ему правосторонняя преобразующая и псевдообратная к ней матрицы. Пусть* B'_{nd} *есть обобщенный недетерминированный конечный автомат, удовлетворяющий условиям:*

$$|B'| = d, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}\mathbf{H}_q, \quad \mathbf{q}' = \mathbf{H}_q^I\mathbf{q}, \quad \mathbf{R}'_B(x,y) = \mathbf{H}_q^I\mathbf{R}_B(x,y)\mathbf{H}_q, \quad x \in X, y \in Y,$$

и $w = \{w_1, w_1, ..., w_g\}$ *есть его финально эквивалентное разбиение, и пусть* $\mathbf{H}_{r'}$, $\mathbf{H}_{r'}^I$ *есть соответствующие ему левосторонняя преобразующая и псевдообратная к ней матрицы автомата* B'_{nd}. *Тогда, если обобщенный недетерминированный конечный автомат* $C_{\mathrm{nd}} = \langle X, C, Y, \mathbf{r}_C, \{\mathbf{R}_C(s,l)\}, \mathbf{q}_C\rangle$ *удовлетворяет условиям*

$$|C| = g, \quad \mathbf{r}_C = \mathbf{r}'\mathbf{H}_{r'}^I, \quad \mathbf{q}_C = \mathbf{H}_{r'}\mathbf{q}', \quad \mathbf{R}_C(x,y) = \mathbf{H}_{r'}\mathbf{R}'_B(x,y)\mathbf{H}_{r'}^I, \quad x \in X, y \in Y,$$

то $C_{\mathrm{nd}} = \min B_{\mathrm{nd}}$.

Теоремы о решении уравнений

- **Теорема 4** *Пусть* $Z = SZ \bigcup Q$ $(Z = ZS \bigcup Q)$ *есть уравнение в алгебре регулярных языков, где* S, Q*—заданные регулярные языки а* Z *- неизвестный язык в алфавите* X*, причем для пустого слова* e *и* S *выполняется* $e \overline{\in} S$*. Тогда это уравнение имеет единственное решение* $Z = S^*Q$ $(Z = QS^*)$*.*
- **Теорема 5** *Пусть* $Z_i = (\bigcup_{j=1}^{m} Z_j S_{ji}) \bigcup Q_i$*,* $(Z_i = (\bigcup_{j=1}^{m} S_{ij} Z_j) \bigcup Q_i)$ *есть система уравнений в алгебре регулярных языков, где* $S_{ji}, Q_i, i, j = \overline{1, m}$ *- заданные регулярные языки, а* Z_i *- неизвестные языки, причем* $e \overline{\in} S_{ij}$ *для всех* $i, j = \overline{1, m}$*. Тогда система имеет единственное решение, регулярное выражение которого может быть получено методом последовательного исключения неизвестных с использованием теоремы* 4*.*
- **Теорема 6** *Системы* $\{Z_1^{(\mathbf{r})}, Z_2^{(\mathbf{r})}, ..., Z_m^{(\mathbf{r})}\}$ *и* $\{Z_1^{(\mathbf{q})}, Z_2^{(\mathbf{q})}, ..., Z_m^{(\mathbf{q})}\}$ *регулярных языков, представленных в стационарном абстрактном недетерминированном автомате соответственно различными конечными состояниями при заданном векторе начальных состояний* $\mathbf{r}$*, и различными начальными состояниями, при заданном финальном вектором* $\mathbf{q}$*, удовлетворяют соответственно системам уравнений* $Z_j^{(\mathbf{r})} = (\bigcup_{i=1}^{m} Z_i^{(\mathbf{r})} S_{ij}) \cup r_j$ *и* $Z_i^{(\mathbf{q})} = (\bigcup_{j=1}^{m} S_{ij} Z_j^{(\mathbf{q})}) \cup q_i$ *где* $S_{ij} = \bigcup_{s=1}^{n} R_{ij}(x_s) x_s$*,* $\hat{r}_j = \begin{cases} e & \text{при } r_j = 1, \\ \Lambda & \text{при } r_j = 0, \end{cases}$*,* $\hat{q}_i = \begin{cases} e & \text{при } q_i = 1, \\ \Lambda & \text{при } q_i = 0. \end{cases}$.

- **Метод анализа языков представленных в A_{ndv} путем преобразования A_{ndv} в B_{nd}**

1) преобразуем автомат A_{ndv} (1.3) в автомат B_{nd} (1.4);
2) удаляем недостижимые состояния B_{nd};
3) оптимизируем B_{nd} и получаем $C_{\mathrm{nd}} =< X, C, Y, \mathbf{r}_C, \{\mathbf{R}_C(s,l)\}, \mathbf{q}_C >$;
4) используя матрицы $\mathbf{R}_C(x_s, y_l)$, $s = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,k}$, находим матрицу прямых переходов $\mathbf{S} = \bigcup_{s=1}^{n}(\bigvee_{l=1}^{k} \mathbf{R}_C(x_s, y_l))x_s$;
5) находим вектора-столбцы $\mathbf{q}(s,\nu) = \bigvee_{y_l \in Y_\nu^{(k)}} \mathbf{R}_C(x_s, y_l)\mathbf{q}_C, \quad x_s \in X$;
6) для каждого $\nu = \overline{1,d}$, решаем систему уравнений

$$Z_i^{(\nu)} = (\bigcup_{j=1}^{m} S_{ij} Z_j^{(\nu)}) \bigcup (\bigcup_{s=1}^{n} q_i(s,\nu)x_s), \quad i = \overline{1,m};$$

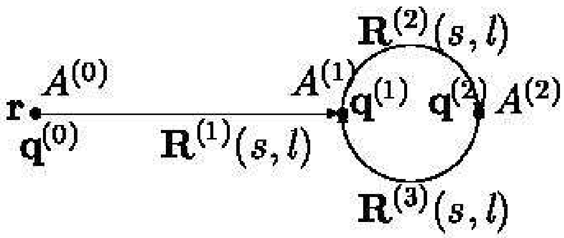
7) находим регулярные выражения по формуле $Z_\nu = \bigcup_{i=1}^{m} r_i Z_i^{(\nu)}$.

Преобразование автомата A_{ndv} в абстрактный D_{ndv}

Теорема 7 *Пусть любого заданного недетерминированного нестационарного автомата с периодически меняющейся структурой A_{ndv} (1.3) имеющего m_τ состояний и k_τ выходных символов в каждом такте τ, можно построить абстрактный недетерминированный нестационарный автомат с периодически меняющейся структурой D_{ndv} (1.2), имеющий $m_\tau k_\tau$ и такой, что для каждого подмножества $Y^{(\kappa)} \subseteq Y$ найдется такой вектор $\mathbf{q}_D^{(\tau)}$, что регулярное выражение представленное в A_{ndv} подмножеством $Y^{(\kappa)}$, будет представлено в D_{ndv}.*

Метод анализа языков представленного в A_{ndv}, путем преобразования A_{ndv} в D_{ndv}

1) преобразуем A_{ndv} (1.3) в D_{ndv} (1.2);
2) преобразуем D_{ndv} (1.2) в $B_{\mathrm{nd}} = \langle X, B, \mathbf{r}_B, \{\mathbf{R}_B(s)\}, \mathbf{q}_B \rangle$;
3) удаляем недостижимые состояния и оптимизируем автомата B_{nd};
4) находим матрицу $\mathbf{S} = \bigcup_{s=1}^{n} \mathbf{R}_B(x_s) x_s$;
5) составляем и решаем систему $Z_i^{(\mathbf{q})} = (\bigcup_{j=1}^{m} S_{ij} Z_j^{(\mathbf{q})}) \cup q_i$;
6) находим Z по формуле $Z = \bigcup_{i=1}^{m} r_i Z_i$.



$$t_p = 1,\ T = 2,\ \mathbf{r} = (0,1)$$
$$|A^{(0)}| = |A^{(2)}| = 2,$$
$$|A^{(1)}| = |A^{(3)}| = 3,$$
$$\mathbf{q}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$X^{(1)} = \{x_1, x_2\}, Y^{(1)} = \{y_1, y_2\}$$
$$X^{(2)} = \{x_1, x_3\}, Y^{(2)} = \{y_1, y_3\}$$
$$X^{(3)} = \{x_2, x_3\}, Y^{(3)} = \{y_2, y_3\}$$

$$\mathbf{R}^{(1)}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(1)}(x_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{R}^{(1)}(x_2, y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(1)}(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{R}^{(2)}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(2)}(x_1, y_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{R}^{(2)}(x_3, y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(2)}(x_3, y_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{R}^{(3)}(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(3)}(x_2, y_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{R}^{(3)}(x_3, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(3)}(x_3, y_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Y^{(\text{к})} = \{y_2\}.$$

Результат анализа - регулярное выражение.

$$Z = (x_1 \cup x_2)(x_1 \cup x_3)((x_2 \cup x_3)(x_1 \cup x_3))^{\star}((x_2 x_1 \cup x_2 x_3 \cup x_3 x_3) x_2 \cup x_3) \cup (x_1 \cup x_2)(x_3 x_2 \cup e) \cup x_1 x_1 x_2.$$

Сравнение методов

- Первый метод применим к любому нестационарному недетерминированному автомату общего вида с периодически меняющейся структурой при любом количестве d заданных подмножеств конечных символов $Y_{\nu}^{(\text{к})}$, $\nu = \overline{1, d}$, но не применим к абстрактным нестационарным недетерминированным автоматам с периодически меняющейся структурой.
- Второй метод применим как к абстрактному нестационарному недетерминированному автомату с периодически меняющейся структурой, так и к автомату общего вида, однако, в последнем случае его целесообразно использовать при $d = 1$.
- Сложность анализа этими методами нестационарного недетерминированного автомата общего вида с периодически меняющейся структурой при заданных $|A|$, $|Y|$ и $Y^{(\text{к})}$ в существенной степени зависит от мощности множества $Y^{(\text{к})}$ - с увеличением $|Y^{(\text{к})}|$ становится удобнее применять второй метод.
- В приведенных примерах анализа автомата рис.1 при $|Y^{(\text{к})}| = 1$ сложность анализа обоими методами примерно одинакова.