Исследование шкал в методе анализа иерархий

Воеводин Георгий Дмитриевич, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д. ф.-м. н., профессор Ю. А. Сушков
Рецензент: мл. научный сотрудник Г. С. Тамазян

СтатМод

Санкт-Петербург
2014

Ключевые понятия Метода Анализа Иерархий

Тезис

Любая задача принятия решения может быть сведена к задаче выбора наилучшей в определенном смысле альтернативы из множества имеющихся.

Решение задачи принятия решений с помощью МАИ

Три этапа:

- построение иерархии,
- проведение попарных сравнений,
- синтез результатов.

Ключевые понятия Метода Анализа Иерархий

Тезис

Любая задача принятия решения может быть сведена к задаче выбора наилучшей в определенном смысле альтернативы из множества имеющихся.

Решение задачи принятия решений с помощью МАИ

Три этапа:

- построение иерархии,
- проведение попарных сравнений,
- синтез результатов.

Ключевые понятия Метода Анализа Иерархий

Тезис

Любая задача принятия решения может быть сведена к задаче выбора наилучшей в определенном смысле альтернативы из множества имеющихся.

Решение задачи принятия решений с помощью МАИ

Три этапа:

- построение иерархии,
- проведение попарных сравнений,
- синтез результатов.

Ключевые понятия Метода Анализа Иерархий

Тезис

Любая задача принятия решения может быть сведена к задаче выбора наилучшей в определенном смысле альтернативы из множества имеющихся.

Решение задачи принятия решений с помощью МАИ

Три этапа:

- построение иерархии,
- проведение попарных сравнений,
- синтез результатов.

Иерархия задачи

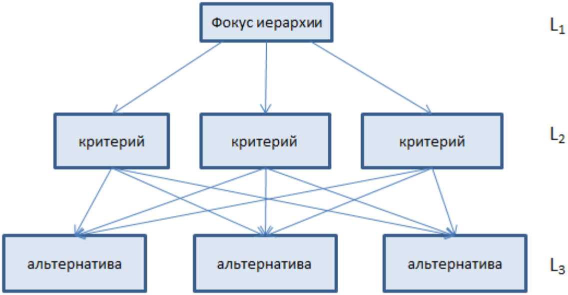

Рис.: Структура иерархии, состоящей из 3 уровней

Кошелек Миллера, 1956

Кратковременная человеческая память способна одновременно хранить и обрабатывать 7 ± 2 объекта.

Иерархия задачи

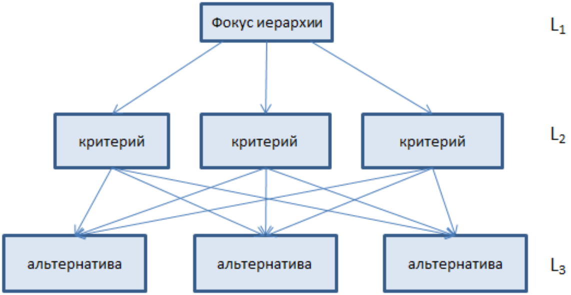

Рис.: Структура иерархии, состоящей из 3 уровней

Кошелек Миллера, 1956

Кратковременная человеческая память способна одновременно хранить и обрабатывать 7 ± 2 объекта.

Попарные сравнения элементов задачи

Попарные сравнения позволяют использовать качественные суждения о сравниваемых объектах в процессе диалога.

Качественные оценки превосходства и обозначающие их числа

0	эквивалентность
± 2	слабое превосходство
± 4	сильное превосходство
± 6	очень сильное превосходство
± 8	абсолютное превосходство
$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$	промежуточные оценки

Попарные сравнения элементов задачи

Попарные сравнения позволяют использовать качественные суждения о сравниваемых объектах в процессе диалога.

Качественные оценки превосходства и обозначающие их числа

0	эквивалентность
± 2	слабое превосходство
± 4	сильное превосходство
± 6	очень сильное превосходство
± 8	абсолютное превосходство
$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$	промежуточные оценки

Шкала

Определение

Функцией шкалы назовем функцию φ, отображающую множество качественных оценок Λ в множество положительных вещественных чисел: $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}^+$, а множество значений φ назовем шкалой.

Шкалы

- Шкала Брука: $\varphi_B(\lambda) = c_B + \lambda x_B,\ \varphi_B > 0,\ \lambda \in \Lambda,$
- Шкала Саати: $\varphi_S(\lambda) = (1 + x_S|\lambda|)^{sign\lambda},\ \varphi_S > 0,\ \lambda \in \Lambda,$
- Логистическая шкала: $\varphi_{log}(\lambda) = \frac{2}{1+e^{-\mu\lambda}}.$

Шкала

Определение

Функцией шкалы назовем функцию φ, отображающую множество качественных оценок Λ в множество положительных вещественных чисел: $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}^+$, а множество значений φ назовем шкалой.

Шкалы

- Шкала Брука: $\varphi_B(\lambda) = c_B + \lambda x_B, \ \varphi_B > 0, \ \lambda \in \Lambda,$
- Шкала Саати: $\varphi_S(\lambda) = (1 + x_S|\lambda|)^{sign \lambda}, \ \varphi_S > 0, \ \lambda \in \Lambda,$
- Логистическая шкала: $\varphi_{log}(\lambda) = \frac{2}{1+e^{-\mu\lambda}}.$

Шкала

Определение

Функцией шкалы назовем функцию φ, отображающую множество качественных оценок Λ в множество положительных вещественных чисел: $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}^+$, а множество значений φ назовем шкалой.

Шкалы

- Шкала Брука: $\varphi_B(\lambda) = c_B + \lambda x_B,\ \varphi_B > 0,\ \lambda \in \Lambda,$
- Шкала Саати: $\varphi_S(\lambda) = (1 + x_S|\lambda|)^{sign\lambda},\ \varphi_S > 0,\ \lambda \in \Lambda,$
- Логистическая шкала: $\varphi_{log}(\lambda) = \frac{2}{1+e^{-\mu\lambda}}.$

Шкала

Определение

Функцией шкалы назовем функцию φ, отображающую множество качественных оценок Λ в множество положительных вещественных чисел: $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}^+$, а множество значений φ назовем шкалой.

Шкалы

- Шкала Брука: $\varphi_B(\lambda) = c_B + \lambda x_B,\ \varphi_B > 0,\ \lambda \in \Lambda,$
- Шкала Саати: $\varphi_S(\lambda) = (1 + x_S|\lambda|)^{sign\lambda},\ \varphi_S > 0,\ \lambda \in \Lambda,$
- Логистическая шкала: $\varphi_{log}(\lambda) = \frac{2}{1+e^{-\mu\lambda}}.$

Синтез результатов

Матрица попарных сравнений

$A = \{a_{ij}\}, \quad a_{ij} = \varphi(\lambda_{ij}) > 0$ – результат сравнения i-ого объекта с j-ым.

Метод собственного вектора

Итерированной силой порядка t объекта x_i назовем $p^i(t) = \sum\limits_{m=1}^{n} a_{im} p^m(t-1), p^i(0) = 1$. Нормированная итерированная сила объекта x_i порядка t стремится к i-й компоненте нормированного собственного вектора матрицы A, соответствующего максимальному по модулю собственному числу.

$$\lim_{t \to \infty} \frac{p^i(t)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p^j(t)} = \omega_i.$$

Синтез результатов

Матрица попарных сравнений

$A = \{a_{ij}\}, \quad a_{ij} = \varphi(\lambda_{ij}) > 0$ – результат сравнения i-ого объекта с j-ым.

Метод собственного вектора

Итерированной силой порядка t объекта x_i назовем $p^i(t) = \sum\limits_{m=1}^{n} a_{im}p^m(t-1), p^i(0) = 1$. Нормированная итерированная сила объекта x_i порядка t стремится к i-й компоненте нормированного собственного вектора матрицы A, соответствующего максимальному по модулю собственному числу.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p^i(t)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p^j(t)} = \omega_i.$$

Алгоритм случайного поиска

Постановка задачи

Пусть F – ограниченная снизу целевая функция, заданная на $X \in \mathbb{R}$. Задача минимизации: $F(x) \to \min\limits_{x \in X}$.

Описание алгоритма

Поиск разбивается на n_{step} шагов. На каждом шаге случайным образом выбираются значения вектора x^j (j – номер шага), подсчитывается $F^j = F(x^j)$ и наименьшее значение $F^j_{min} = \min\{F^j, F^{j-1}_{min}\}$.

Объем перспективной области

Пусть $I^i_j \subset [0,1]$ – *перспективная область* для x_i на шаге j.

Ширина интервала $s_j = 2q_j$, где $q_j = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+(\frac{1}{V_0-1})e^{-\mu j/n_{step}}}\right)$.

Алгоритм случайного поиска

Постановка задачи

Пусть F – ограниченная снизу целевая функция, заданная на $X \in \mathbb{R}$. Задача минимизации: $F(x) \to \min\limits_{x \in X}$.

Описание алгоритма

Поиск разбивается на n_{step} шагов. На каждом шаге случайным образом выбираются значения вектора x^j (j – номер шага), подсчитывается $F^j = F(x^j)$ и наименьшее значение $F^j_{min} = \min\{F^j, F^{j-1}_{min}\}$.

Объем перспективной области

Пусть $I^i_j \subset [0,1]$ – *перспективная область* для x_i на шаге j.

Ширина интервала $s_j = 2q_j$, где $q_j = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+(\frac{1}{V_0-1})e^{-\mu j/n_{step}}}\right)$.

Алгоритм случайного поиска

Постановка задачи

Пусть F – ограниченная снизу целевая функция, заданная на $X \in \mathbb{R}$. Задача минимизации: $F(x) \to \min\limits_{x \in X}$.

Описание алгоритма

Поиск разбивается на n_{step} шагов. На каждом шаге случайным образом выбираются значения вектора x^j (j – номер шага), подсчитывается $F^j = F(x^j)$ и наименьшее значение $F^j_{min} = \min\{F^j, F^{j-1}_{min}\}$.

Объем перспективной области

Пусть $I^i_j \subset [0,1]$ – *перспективная область* для x_i на шаге j.

Ширина интервала $s_j = 2q_j$, где $q_j = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+(\frac{1}{V_0}-1)e^{-\mu j/n_{step}}}\right)$.

Основные определения

Определение

Ошибкой данных *назовем случайную величину* $\epsilon_{ij} \in \Lambda$, *имеющую равномерное распределение на* $\Lambda = \{-8 \ldots 8\}$.

$$\widetilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}_{ij=1}^{n} = \{\varphi(\lambda_{ij} + \epsilon_{ij})\}_{ij=1}^{n}.$$

Определение

Ошибкой метода *назовем упорядочивание объектов, отличное от упорядочивания, полученного методом собственного вектора без введения ошибки данных.*

Основные определения

Определение

Ошибкой данных *назовем случайную величину* $\epsilon_{ij} \in \Lambda$, *имеющую равномерное распределение на* $\Lambda = \{-8 \ldots 8\}$.

$$\widetilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}_{ij=1}^{n} = \{\varphi(\lambda_{ij} + \epsilon_{ij})\}_{ij=1}^{n}.$$

Определение

Ошибкой метода *назовем упорядочивание объектов, отличное от упорядочивания, полученного методом собственного вектора без введения ошибки данных.*

Основные определения

Определение

Ошибкой данных *назовем случайную величину* $\epsilon_{ij} \in \Lambda$, *имеющую равномерное распределение на* $\Lambda = \{-8 \dots 8\}$.

$$\widetilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}_{ij=1}^{n} = \{\varphi(\lambda_{ij} + \epsilon_{ij})\}_{ij=1}^{n}.$$

Определение

Ошибкой метода *назовем упорядочивание объектов, отличное от упорядочивания, полученного методом собственного вектора без введения ошибки данных.*

Цель исследования

Рассмотрим два упорядоченных набора объектов:
$X_1 =< x_{i_1} \succ \dots \succ x_{i_n} >$, $X_2 =< x_{j_1} \succ \dots \succ x_{j_n} >$,
$i, j = 1 \dots n$. Функция J показывает, насколько похожи упорядочивания в двух наборах объектов:

$$J(X_1, X_2) = |\{k \mid i_k = j_k, \quad k \in 1 \dots n\}|. \tag{1}$$

Критерий устойчивости

Критерием устойчивости МАИ к введенной ошибке данных назовем вероятность полного совпадения упорядочиваний X_0 и X_i, то есть $P(J(X_0, X_i) = n), \quad i = 1 \dots n_{step}$.

Постановка задачи

$$1 - P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\rightarrow} min, \quad i = 1 \dots n_{step}. \tag{2}$$

Цель исследования

Рассмотрим два упорядоченных набора объектов:
$X_1 =< x_{i_1} \succ \dots \succ x_{i_n} >$, $X_2 =< x_{j_1} \succ \dots \succ x_{j_n} >$, $i, j = 1 \dots n$. Функция J показывает, насколько похожи упорядочивания в двух наборах объектов:

$$J(X_1, X_2) = |\{k \mid i_k = j_k, \quad k \in 1 \dots n\}|. \qquad (1)$$

Критерий устойчивости

Критерием устойчивости МАИ к введенной ошибке данных назовем вероятность полного совпадения упорядочиваний X_0 и X_i, то есть $P(J(X_0, X_i) = n), \quad i = 1 \dots n_{step}$.

Постановка задачи

$$1 - P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\rightarrow} min, \quad i = 1 \dots n_{step}. \qquad (2)$$

Цель исследования

Рассмотрим два упорядоченных набора объектов:
$X_1 =< x_{i_1} \succ \dots \succ x_{i_n} >$, $X_2 =< x_{j_1} \succ \dots \succ x_{j_n} >$,
$i, j = 1 \dots n$. Функция J показывает, насколько похожи упорядочивания в двух наборах объектов:

$$J(X_1, X_2) = |\{k \mid i_k = j_k, \quad k \in 1 \dots n\}|. \tag{1}$$

Критерий устойчивости

Критерием устойчивости МАИ к введенной ошибке данных назовем вероятность полного совпадения упорядочиваний X_0 и X_i, то есть $P(J(X_0, X_i) = n), \quad i = 1 \dots n_{step}$.

Постановка задачи

$$1 - P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\rightarrow} min, \quad i = 1 \dots n_{step}. \tag{2}$$

Ход исследования

Определение

Набор параметров шкалы, удовлетворяющий условию (2), назовем ***оптимальным****.*

Статистические данные

- Случайным образом генерируется матрица A, для которой при помощи МАИ находится итоговый вектор упорядочиваний X_0 длины n.
- Добавлением *ошибки данных* получается матрица $\widetilde{A_i}$, для которой находится ветор $X_i, \quad i = 1 \dots 20000$.
- Вычисляется значение $1 - P(J(X_0, X_i) = n)$,
- Методом случайного поиска находятся параметры шкалы, удовлетворяющие условию $1 - P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\rightarrow} min, \quad i = 1 \dots 20000$.

Ход исследования

Определение

Набор параметров шкалы, удовлетворяющий условию (2), назовем ***оптимальным****.*

Статистические данные

- Случайным образом генерируется матрица A, для которой при помощи МАИ находится итоговый вектор упорядочиваний X_0 длины n.
- Добавлением *ошибки данных* получается матрица $\widetilde{A_i}$, для которой находится ветор $X_i, \quad i = 1 \ldots 20000.$
- Вычисляется значение $1 - P(J(X_0, X_i) = n)$,
- Методом случайного поиска находятся параметры шкалы, удовлетворяющие условию $1 - P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\rightarrow} min, \quad i = 1 \ldots 20000.$

Ход исследования

Определение

Набор параметров шкалы, удовлетворяющий условию (2), назовем ***оптимальным****.*

Статистические данные

- Случайным образом генерируется матрица A, для которой при помощи МАИ находится итоговый вектор упорядочиваний X_0 длины n.
- Добавлением *ошибки данных* получается матрица $\widetilde{A_i}$, для которой находится ветор $X_i, \quad i = 1 \dots 20000$.
- Вычисляется значение $1 - P(J(X_0, X_i) = n)$,
- Методом случайного поиска находятся параметры шкалы, удовлетворяющие условию $1 - P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\to} min, \quad i = 1 \dots 20000$.

Ход исследования

Определение

Набор параметров шкалы, удовлетворяющий условию (2), назовем ***оптимальным****.*

Статистические данные

- Случайным образом генерируется матрица A, для которой при помощи МАИ находится итоговый вектор упорядочиваний X_0 длины n.
- Добавлением *ошибки данных* получается матрица $\widetilde{A}_i$, для которой находится ветор $X_i, \quad i = 1 \ldots 20000.$
- Вычисляется значение $1 - P(J(X_0, X_i) = n)$,
- Методом случайного поиска находятся параметры шкалы, удовлетворяющие условию $1 - P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\rightarrow} min, \quad i = 1 \ldots 20000.$

Ход исследования

Определение

Набор параметров шкалы, удовлетворяющий условию (2), назовем ***оптимальным****.*

Статистические данные

- Случайным образом генерируется матрица A, для которой при помощи МАИ находится итоговый вектор упорядочиваний X_0 длины n.
- Добавлением *ошибки данных* получается матрица $\widetilde{A_i}$, для которой находится ветор $X_i, \quad i = 1 \dots 20000$.
- Вычисляется значение $1 - P(J(X_0, X_i) = n)$,
- Методом случайного поиска находятся параметры шкалы, удовлетворяющие условию $1 - P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\rightarrow} min, \quad i = 1 \dots 20000.$

Результат

Для шкалы Саати:

$\varphi_S(\lambda) = (1 + x_S|\lambda|)^{sign\lambda}$, $\varphi_S > 0$, $\lambda \in \Lambda$ значения $1 - P(J(X_0, X_i) = n)$ наименьшие для трех шкал и достигаются при значении параметра $x_S \in [0.5, 1.5]$.

Для шкалы Брука:

$\varphi_B(\lambda) = c_B + \lambda x_B$, $\varphi_B > 0$, $\lambda \in \Lambda$ изменение параметров c_B и x_B ведет к незначительному изменению значений функции $1 - P(J(X_0, X_i) = n)$, которые являются наименьшими для трех шкал.

Результат

Для шкалы Саати:

$\varphi_S(\lambda) = (1 + x_S|\lambda|)^{sign\lambda}$, $\varphi_S > 0$, $\lambda \in \Lambda$ значения $1 - P(J(X_0, X_i) = n)$ наименьшие для трех шкал и достигаются при значении параметра $x_S \in [0.5, 1.5]$.

Для шкалы Брука:

$\varphi_B(\lambda) = c_B + \lambda x_B$, $\varphi_B > 0$, $\lambda \in \Lambda$ изменение параметров c_B и x_B ведет к незначительному изменению значений функции $1 - P(J(X_0, X_i) = n)$, которые являются наименьшими для трех шкал.

Результат

Для Логистической шкалы:

$\varphi_{log}(\lambda) = \frac{2}{1+e^{-\mu\lambda}}$, при уменьшении параметра μ $\varphi_{log}(\lambda) \underset{\mu \to 0}{\to} 1.$

Дополнительное условие

$$1 - P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\to} min, \quad i = 1 \dots n_{step}, \quad \epsilon_{ij} \in \{0, 1, -1\},$$

$$P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\to} min, \quad i = 1 \dots n_{step}, \quad \epsilon_{ij} \in \{0, 2, -2\}.$$

Результат

значения параметра, удовлетворяющие поставленной задаче, достигаются на $\mu \in [0.6, 1.1]$, при этом значения функции (2) больше, чем для шкалы Саати, но меньше, чем для шкалы Брука.

Результат

Для Логистической шкалы:

$\varphi_{log}(\lambda) = \frac{2}{1+e^{-\mu\lambda}}$, при уменьшении параметра μ $\varphi_{log}(\lambda) \underset{\mu\to 0}{\to} 1$.

Дополнительное условие

$$1 - P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\to} min, \quad i = 1 \dots n_{step}, \quad \epsilon_{ij} \in \{0, 1, -1\},$$

$$P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\to} min, \quad i = 1 \dots n_{step}, \quad \epsilon_{ij} \in \{0, 2, -2\}.$$

Результат

значения параметра, удовлетворяющие поставленной задаче, достигаются на $\mu \in [0.6, 1.1]$, при этом значения функции (2) больше, чем для шкалы Саати, но меньше, чем для шкалы Брука.

Результат

Для Логистической шкалы:

$\varphi_{log}(\lambda) = \frac{2}{1+e^{-\mu\lambda}}$, при уменьшении параметра μ $\varphi_{log}(\lambda) \underset{\mu\to 0}{\to} 1$.

Дополнительное условие

$$1 - P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\to} min, \quad i = 1 \dots n_{step}, \quad \epsilon_{ij} \in \{0, 1, -1\},$$

$$P(J(X_0, X_i) = n) \underset{\varphi}{\to} min, \quad i = 1 \dots n_{step}, \quad \epsilon_{ij} \in \{0, 2, -2\}.$$

Результат

значения параметра, удовлетворяющие поставленной задаче, достигаются на $\mu \in [0.6, 1.1]$, при этом значения функции (2) больше, чем для шкалы Саати, но меньше, чем для шкалы Брука.

Пример

Используя МАИ, сравним шкалы Брука, Саати и Логистическую по следующим критериям:

Критерии сравнения

- Устойчивость к *ошибке данных*,
- Дисперсия первого объекта в упорядочивании, полученном при использовании МАИ.

Параметры МАИ:

- Критерии равновесны,
- Используется Логистическая шкала с параметром $\mu = 0.9$.

Пример

Используя МАИ, сравним шкалы Брука, Саати и Логистическую по следующим критериям:

Критерии сравнения

- Устойчивость к *ошибке данных*,
- Дисперсия первого объекта в упорядочивании, полученном при использовании МАИ.

Параметры МАИ:

- Критерии равновесны,
- Используется Логистическая шкала с параметром $\mu = 0.9$.

Пример

Используя МАИ, сравним шкалы Брука, Саати и Логистическую по следующим критериям:

Критерии сравнения

- Устойчивость к *ошибке данных*,
- Дисперсия первого объекта в упорядочивании, полученном при использовании МАИ.

Параметры МАИ:

- Критерии равновесны,
- Используется Логистическая шкала с параметром $\mu = 0.9$.

Пример

Таблица: Сравнение шкал по критериям устойчивости к ошибке данных и уменьшения дисперсии первого объекта в упорядочивании

Шкала	Количественная оценка шкалы $(X_i \quad i \in 1 \dots 3)$
Брука	0.036
Саати	0.438
Логистическая	0.524

Заключение

- В рамках поставленной задачи проведено статистическое исследование шкал МАИ,
- С помощью алгоритма случайного поиска найдены *оптимальные* (в данных условиях) параметры шкал МАИ,
- При помощи МАИ проведено сравнение шкал Саати, Брука и Логистической.