

Вопросы к экзамену по курсу «Моделирование распределений» (бакалавриат)

В.В. Некруткин

кафедра статистического моделирования <http://statmod.ru>, матмех СПбГУ
Материал к специальному курсу, 2017 г.

1. Докажите предложение о виде плотности кусочно-гладкого преобразования случайного вектора. Приведите два существенно различных (и многомерных) примера применения этого утверждения для моделирования распределений.
2. В чем заключается модификация последовательного метода обратных функций? Почему она уменьшает трудоемкость? Докажите этот факт.
3. В чем состоит простейший табличный метод? Чем он хорош и чем плох? Что означает, что он «табличный»? Почему он является одним из вариантов метода обратных функций?
4. В чем состоит метод дихотомии? Чему равна его трудоемкость? Какие у него преимущества перед последовательным методом обратных функций?
5. В чем состоит метод Чжень? Какие у него особенности? Приведите подробный вывод оценки его трудоемкости.
6. Докажите утверждение, на котором основан метод Уолкера. В чем состоит особенность его реализации? Является ли он вариантом метода обратных функций? Сравните его трудоемкость с трудоемкостью метода Чжень.
7. Приведите (и объясните) алгоритмы последовательного метода обратных функций для биномиального, пуассоновского и геометрического распределений.
8. Докажите, что сумма n независимых $\text{EXP}(\lambda)$ случайных величин имеет гамма-распределение $\text{Gamma}(n, \lambda)$. Какой метод моделирования гамма-распределения с целым параметром из этого следует?
9. Исходя из вида функции распределения $\text{Gamma}(n, \lambda)$ выведите способ и алгоритм моделирования пуассоновского распределения. Какие особенности имеет этот метод?
10. Сравните трудоемкости двух различных реализаций метода обратных функций для моделирования геометрического распределения $\text{Geom}(p)$. Обоснуйте эти методы. В чем состоят особенности этих методов при маленьких вероятностях успеха?
11. Приведите вывод моделирующей функции для общего метода обратных функций. Как и почему этот метод выглядит для дискретных распределений? Для распределения Рэлея?
12. Докажите утверждение, обосновывающее дискретный метод декомпозиции и объясните его особенности. Приведите пример, относящийся к моделированию многомерных распределений.
13. Докажите общее утверждение, позволяющее сэкономить одно обращение к генератору псевдослучайных чисел при моделировании одномерного распределения методом дискретной декомпозиции. Какой общий стиль использования этого утверждения при моделировании?
14. В чем состоит модификация метода дискретной декомпозиции для моделирования одномерного распределения? Докажите соответствующее утверждение.
15. Что такое производная Радона-Никодима? Что Вы знаете о ее существовании и единственности? Докажите утверждение о существовании и виде производной Радона-Никодима в случае, когда обе меры являются распределениями, абсолютно непрерывными относительно некоторой меры μ . Как это утверждение используется в методе отбора?

16. Приведите формулировку и доказательство общей теоремы о методе отбора. Приведите алгоритмическую схему метода и пример его использования.
17. Какие требования (и почему) накладываются на метод отбора при практическом моделировании? Какие здесь возникают сложности и как они преодолеваются? Приведите пример «отбора с ограничениями» и объясните его суть.
18. Как (и почему) выглядит метод отбора для моделирования дискретных распределений? Приведите и проанализируйте пример.
19. Что такое сужение распределения на некоторое множество? Как (и почему) выглядит метод отбора для моделирования сужения некоторого распределения? Какие у него особенности и трудоемкость? Приведите пример.
20. Опишите и обоснуйте полярный метод моделирования равномерного распределения на окружности. Какие у него особенности? Чему (и почему) равна его трудоемкость?
21. Моделирование одномерного нормального распределения с произвольными параметрами. Полярный метод и его модификация (с обоснованием). Трудоемкость.
22. Моделирование равномерного распределения на сфере в \mathbb{R}^3 (методы, их сравнение и обоснование). Трудоемкость полярного метода.
23. Методы моделирования распределения Коши (с обоснованием и обсуждением).
24. Многомерное гауссовское распределение. Определение и характеристическая функция, независимость и линейные преобразования. Формулировки и доказательства.
25. Многомерное гауссовское распределение. Вывести вид плотности в невырожденном случае.
26. Многомерное гауссовское распределение. Вырожденный случай. Формулировка и доказательство.
27. Моделирование многомерного гауссовского распределения приведением ковариационной матрицы к диагональной форме. Моделирующая формула и доказательство.
28. Моделирование многомерного гауссовского распределения разложением Холецкого. Какие особенности у этого метода?
29. Вывести вид плотности для невырожденного двумерного гауссовского распределения. Как его можно моделировать? Обосновать алгоритм.
30. Приведите и обоснуйте альтернативный метод моделирования показательного распределения. Сравните этот метод с обычным методом обратных функций.
31. Особенности и сложности моделирования гамма-распределения с произвольными параметрами. Случай параметра формы, меньшего 1.
32. Моделирование бета-распределения с целыми параметрами через порядковые статистики. Формулировка и доказательство.
33. Моделирование бета-распределения с помощью гамма-распределения. Формулировка и доказательство. Как выглядит этот алгоритм при целых параметрах бета-распределения?