Условия представимости обобщенных $\mathbb{R}_1$–языков в вероятностных автоматах

Трубников Владимир Николаевич, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: Засл. работник ВШ РФ, действ. член РАЕН, д.ф.-м.н., профессор М.К. Чирков
Рецензент: асс. каф. Общей мат. и инф. Е.Н. Мосягина

Санкт-Петербург
2010г.

Определение конечных вероятностного и $\mathbb{R}_1$– автоматов

Определение (Вероятностные автоматы)

Конечный вероятностный автомат общего вида.

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, Y, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(x_s, y_l)\}\rangle$$

Частный случай: конечный абстрактный вероятностный автомат.

$$\mathcal{B}_{pr} = \langle X, B, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(x_s)\}\rangle$$

Определение ($\mathbb{R}_1$–автоматы)

Конечный $\mathbb{R}_1$–автомат общего вида.

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}_1} = \langle X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(x_s, y_l)\}, \mathbf{q}\rangle$$

Частный случай: конечный абстрактный $\mathbb{R}_1$–автомат.

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1} = \langle X, B, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(x_s)\}, \mathbf{q}\rangle$$

Языки представимые в вероятностных автоматах

Обобщенным вероятностным языком Z, представленном в вероятностном автомате общего вида $\mathcal{A}_{pr}$ подмножеством конечных выходных символов $Y^{(K)}$, называется «нечеткое» множество слов $Z = \{\omega, \mu_Z(\omega)\}_{\omega \in X^*}$ такое, что

$$\mu_Z : X^* \to [0,1], \quad \mu_Z(\omega) = \sum_{y_l \in Y^{(K)}} P(y_l|\,\omega).$$

Обобщенным вероятностным языком Z, представленном в абстрактном автомате $\mathcal{B}_{pr}$ подмножеством конечных состояний $B^{(K)}$, называется «нечеткое» множество слов $Z = \{\omega, \mu_Z(\omega)\}_{\omega \in X^*}$ такое, что

$$\mu_Z : X^* \to [0,1], \quad \mu_Z(\omega) = \mathbf{p}\mathbf{P}(\omega)\mathbf{e}^{(K)},$$

где

$$\omega = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_t},$$

$$\mathbf{e}^{(K)} = (e_1^{(K)}, e_2^{(K)}, \ldots, e_m^{(K)})^T, \quad e_i^{(K)} = \begin{cases} 0, & \text{если } b_i \notin B^{(K)}, \\ 1, & \text{если } b_i \in B^{(K)}, \end{cases}$$

$$\mathbf{P}(\omega) = \begin{cases} \mathbf{P}(\mathbf{e}) = \mathbf{I}(m), & \text{при } t = 0, \\ \mathbf{P}(\omega) = \prod_{\nu=1}^{t} \mathbf{P}(s_\nu), & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Определение обобщенного регулярного $\mathbb{R}_1$–языка и его производной

Определение

Элементарными языками *в алфавите* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *называют языки* $Z_s = x_s$ *и* $Z_0 = e$.

Операции:

- *Скалярное произведение:* $\mu_{\alpha Z}(\omega) = \mu_{Z\alpha}(\omega) = \alpha\mu_Z(\omega)$,
- *Дизъюнкция:* $\mu_{Z_1 \cup Z_2}(\omega) = \mu_{Z_1}(\omega) + \mu_{Z_2}(\omega)$,
- *Произведение:* $\mu_{Z_1 Z_2}(\omega) = \sum \mu_{Z_1}(\omega_1)\mu_{Z_2}(\omega_2), \quad \omega_1\omega_2 = \omega$,
- *Итерация:* $\mu_{Z^*}(\omega) = \sum \mu_Z(\omega_1)\mu_Z(\omega_2)\ldots\mu_Z(\omega_l), \quad \omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_l$.

Языки, полученные из элементарных языков с помощью конечного числа операций умножения на скаляр, дизъюнкции, произведения и итерации, называются ***обобщенными регулярными*** $\mathbb{R}_1$***–языками***.

Определение обобщенного регулярного $\mathbb{R}_1$–языка и его производной

Определение

Элементарными языками *в алфавите* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *называют языки* $Z_s = x_s$ *и* $Z_0 = e$.

Операции:

- *Скалярное произведение:* $\mu_{\alpha Z}(\omega) = \mu_{Z\alpha}(\omega) = \alpha\mu_Z(\omega)$,
- *Дизъюнкция:* $\mu_{Z_1 \cup Z_2}(\omega) = \mu_{Z_1}(\omega) + \mu_{Z_2}(\omega)$,
- *Произведение:* $\mu_{Z_1 Z_2}(\omega) = \sum \mu_{Z_1}(\omega_1)\mu_{Z_2}(\omega_2), \quad \omega_1\omega_2 = \omega$,
- *Итерация:* $\mu_{Z^*}(\omega) = \sum \mu_Z(\omega_1)\mu_Z(\omega_2)\ldots\mu_Z(\omega_l), \quad \omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_l$.

Языки, полученные из элементарных языков с помощью конечного числа операций умножения на скаляр, дизъюнкции, произведения и итерации, называются ***обобщенными регулярными*** $\mathbb{R}_1$***–языками****.*

Регулярные языки:

$$\omega \cup \omega = \omega \quad \forall\, \omega \in X^*$$

Определение обобщенного регулярного $\mathbb{R}_1$–языка и его производной

Определение

Элементарными языками *в алфавите* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *называют языки* $Z_s = x_s$ *и* $Z_0 = e$.

Операции:

- *Скалярное произведение:* $\mu_{\alpha Z}(\omega) = \mu_{Z\alpha}(\omega) = \alpha\mu_Z(\omega)$,
- *Дизъюнкция:* $\mu_{Z_1 \cup Z_2}(\omega) = \mu_{Z_1}(\omega) + \mu_{Z_2}(\omega)$,
- *Произведение:* $\mu_{Z_1 Z_2}(\omega) = \sum \mu_{Z_1}(\omega_1)\mu_{Z_2}(\omega_2), \quad \omega_1\omega_2 = \omega$,
- *Итерация:* $\mu_{Z^*}(\omega) = \sum \mu_Z(\omega_1)\mu_Z(\omega_2)\ldots\mu_Z(\omega_l), \quad \omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_l$.

Языки, полученные из элементарных языков с помощью конечного числа операций умножения на скаляр, дизъюнкции, произведения и итерации, называются ***обобщенными регулярными*** $\mathbb{R}_1$***–языками***.

Регулярные языки:

$$\omega \cup \omega = \omega \quad \forall\, \omega \in X^*$$

Обобщенные регулярные языки:

$$\omega \cup \omega = 2\omega \quad \forall\, \omega \in X^*$$

Определение обобщенного регулярного $\mathbb{R}_1$–языка и его производной

Определение

Элементарными языками *в алфавите* $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ *называют языки* $Z_s = x_s$ *и* $Z_0 = e$.

Операции:

- *Скалярное произведение:* $\mu_{\alpha Z}(\omega) = \mu_{Z\alpha}(\omega) = \alpha\mu_Z(\omega)$,
- *Дизъюнкция:* $\mu_{Z_1 \cup Z_2}(\omega) = \mu_{Z_1}(\omega) + \mu_{Z_2}(\omega)$,
- *Произведение:* $\mu_{Z_1 Z_2}(\omega) = \sum \mu_{Z_1}(\omega_1)\mu_{Z_2}(\omega_2), \quad \omega_1\omega_2 = \omega$,
- *Итерация:* $\mu_{Z^*}(\omega) = \sum \mu_Z(\omega_1)\mu_Z(\omega_2)\dots\mu_Z(\omega_l), \quad \omega = \omega_1\omega_2\dots\omega_l$.

Языки, полученные из элементарных языков с помощью конечного числа операций умножения на скаляр, дизъюнкции, произведения и итерации, называются ***обобщенными регулярными*** $\mathbb{R}_1$***–языками***.

Определение

Левой производной *обобщенного регулярного* $\mathbb{R}_1$*–языка* Z *по букве* $x_s \in X$ *называется обобщенный регулярный* $\mathbb{R}_1$*–язык* $x_s^{-1}Z$ *такой, что*

$$\mu_{x_s^{-1}Z}(\omega) = \mu_Z(x_s\omega) \quad \forall\, \omega \in X^*.$$

Постановка задачи

Известны:

- методы анализа $\mathbb{R}_1$–автомата, для получения регулярного выражения представленного в нем обобщенного $\mathbb{R}_1$–языка;
- методы синтеза $\mathbb{R}_1$–автомата по регулярному выражению обобщенного $\mathbb{R}_1$–языка, для получения автомата представляющего этот язык;
- методы синтеза вероятностного автомата по его автоматному отображению с конечной областью определения.

Задачи:

- исследовать обобщенные вероятностные автоматы;
- исследовать свойства обобщенных вероятностных языков;
- найти необходимые и достаточные условия представимости обобщенных регулярных $\mathbb{R}_1$–языков в вероятностных автоматах;
- разработать метод синтеза вероятностного автомата по регулярному выражению обобщенного $\mathbb{R}_1$–языка, удовлетворяющему необходимым и достаточным условиям представимости.

Теорема о сводимости

Теорема

Пусть задан конечный абстрактный $\mathbb{R}_1$–автомат следующего вида:

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \langle X, \widetilde{A}, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(s)\}, \mathbf{q}\rangle,$$

где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\widetilde{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $\mathbf{r} \in [0,1]^m$, $\mathbf{q} \in [0,1]^m$, $\mathbf{R}(s) \in [0,1]^m \times [0,1]^m$ $s = \overline{1, n}$, *и пусть для него выполнены следующие условия:*

1) $\mathbf{r} = (1, 0, 0, \ldots, 0) \in \{0, 1\}^m$,
2) $\sum\limits_{j=1}^{m} R_{ij}(s) \leqslant 1 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\},\ \forall\, s \in \{1, \ldots, n\}$.

Тогда можно построить эквивалентный ему по представляемому обобщенному $\mathbb{R}_1$*–языку абстрактный вероятностный автомат* $\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(s)\}, \mathbf{e}^{(K)}\rangle$, *то есть чтобы выполнялось равенство*

$$\mathbf{r}\mathbf{R}(\omega)\mathbf{q} = \mathbf{p}\mathbf{P}(\omega)\mathbf{e}^{(K)}, \quad \forall\, \omega \in X^*.$$

Понятие квазивыпуклости и правильности системы обобщенных регулярных $\mathbb{R}_1$–языков

Определение

Систему обобщенных регулярных $\mathbb{R}_1$–языков $\widetilde{Z} = \{\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2, \dots, \widetilde{Z}_p\}$ в алфавите X назовем квазивыпуклой относительно левых производных, если выполнены следующие условия:

$$x_s^{-1}\widetilde{Z}_i = \bigcup_{j=1}^{p} \alpha_{ij}(s)\widetilde{Z}_j, \quad \forall\, x_s \in X, i = \overline{1,p} \quad \text{где} \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij}(s) \leqslant 1, \quad \alpha_{ij}(s) \geqslant 0.$$

Условимся квазивыпуклую относительно левых производных систему называть L-квазивыпуклой системой.

Определение

Систему обобщенных регулярных $\mathbb{R}_1$–языков $\widetilde{Z} = \{\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2, \dots, \widetilde{Z}_p\}$ в алфавите X назовем правильной, если выполнено

$$0 \leqslant \mu_{\widetilde{Z}_i}(e) \leqslant 1, \quad \forall\, i = \overline{1,p}.$$

Необходимые и достаточные условия в терминах производных

Теорема

Для того, чтобы обобщенный регулярный $\mathbb{R}_1$–язык Z был представим в конечном абстрактном вероятностном автомате, необходимо и достаточно, чтобы по языку Z можно было построить правильную L-квазивыпуклую систему обобщенных регулярных $\mathbb{R}_1$–языков.

Понятия канонической формы обобщенного регулярного языка

Определение

***Языком** Z, **представленным в элементарной канонической форме**, называется язык, который может быть представлен в виде*

$$Z = \bigcup_{k=1}^{p} \alpha_k \omega_k, \quad \text{где } \omega_k \in X^*, \alpha_k \in \mathbb{R}.$$

***Канонической формой** обобщенного регулярного $\mathbb{R}_1$–языка Z в алфавите X назовем его представление в виде*

$$Z = \bigcup_{i=1}^{r} \alpha_i \omega_{i0} \left(\prod_{j=1}^{l} Z_{ij}^* \omega_{ij} \right), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \ \omega_{ij} \in X^*,$$

где Z_{ij} — обобщенные регулярные $\mathbb{R}_1$–языки в канонической форме.

Так как количество операций итерации в любом регулярном выражении конечно, то за конечное количество представлений языка Z через языки Z_{ij} мы дойдем до момента, когда язык Z_{ij} будет находиться в элементарной канонической форме.

Понятия канонической единицы обобщенного регулярного языка

Определение

Канонической единицей *обобщенного регулярного* $\mathbb{R}_1$*–языка* Z *в алфавите* X, *находящегося в канонической форме, назовем каждый элемент объединения, без коэффициента* α_i, *то есть каждый элемент вида*

$$\omega_{i0}\left(\prod_{j=1}^{l} Z_{ij}^{*}\,\omega_{ij}\right)$$

Достаточные условия в терминах весовой функции

Теорема

Если обобщенный регулярный $\mathbb{R}_1$–язык Z можно представить в каноническом виде, где все скаляры (в том числе и находящиеся под знаком итерации) неотрицательны, а вес любого слова из $\mathbb{R}_1$–языка Z неотрицателен и не превосходит единицы:

$$0 \leqslant \mu_Z(\omega) \leqslant 1 \quad \forall\, \omega \in Z,$$

то тогда существует абстрактный вероятностный автомат $\mathcal{A}_{pr}$, представляющий этот язык Z.

Лемма

‘ Если язык Z удовлетворяет условиям теоремы, то выполнены свойства:

- *все скаляры (в том числе и находящиеся под знаком итерации) канонических форм $\mathbb{R}_1$–языка Z и всех его производных любого порядка не превосходят единицы;*
- *каждое слово принадлежащее канонической единице, содержащейся в канонической форме производной любого порядка $\mathbb{R}_1$–языка Z, принадлежит этой канонической единице с весом не более единицы.*

Необходимые и достаточные условия в терминах весовой функции

Теорема

Для того, чтобы обобщенный регулярный $\mathbb{R}_1$–язык Z был представим в вероятностном автомате, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1. *Регулярное выражение $\mathbb{R}_1$–языка Z может быть представлено в канонической форме, где все входящие в выражение языка скаляры неотрицательны.*
2. *Вес любого слова $\omega \in Z$ не превышает единицы, то есть*

$$0 \leqslant \mu_Z(\omega) \leqslant 1, \quad \forall\, \omega \in Z.$$

Алгоритм синтеза абстрактного вероятностного автомата по обобщенному регулярному $\mathbb{R}_1$–языку Z

Синтез абстрактного вероятностного автомата $\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, \mathbf{p}, \{\mathbf{P}(s)\}, \mathbf{e}^{(K)} \rangle$ по заданному обобщенному регулярному $\mathbb{R}_1$–языку Z (находящемся в канонической форме удовлетворяющей необходимым и достаточным условиям представимости) с помощью вычисления левых производных по буквам алфавита X может быть выполнен следующим образом:

1. Пусть $Z = Z_0$. В исходном положении множество введенных состояний $A^{(0)}$ есть одноэлементное множество $A^{(0)} = \{a_0\}$, сопоставленное соответственно одноэлементному множеству $\widetilde{Z}^{(0)} = \{Z_0\}$, а также множество коэффициентов $\Gamma = \varnothing$.

Алгоритм синтеза абстрактного вероятностного автомата по обобщенному регулярному $\mathbb{R}_1$–языку Z

2. Пусть на h-м шаге имеем $A^{(h-1)} = \{a_0, a_1, \ldots, a_h\}$ и $A^{(h)} = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, $k > h$ и соответственно $\widetilde{Z}^{(h-1)} = \{Z_0, Z_1, \ldots, Z_h\}$ и $\widetilde{Z}^{(h)} = \{Z_0, Z_1, \ldots, Z_k\}$, $k > h$, где $Z_i \neq Z_j$, $i \neq j$. Пусть $m_h = |\widetilde{Z}^{(h)}|$ — мощность множества $\widetilde{Z}^{(h)}$.
   Тогда для добавившихся в $\widetilde{Z}^{(h-1)}$ $\mathbb{R}_1$–языков Z_i $i = \overline{h+1, k}$ находим их производные по каждой букве алфавита X. При этом, если

$$x_s^{-1} Z_i = \left(\bigcup_{j=0}^{m_h - 1} \alpha_{ij}(s) Z_j \right) \cup \widehat{Z}_i,$$

   где $Z_j \in \widetilde{Z}^{(h)}$, $\widehat{Z}_i = \bigcup\limits_{j=0}^{l} \beta_{ij}(s) \widehat{Z}_{ij}$ и никакое подмножество слов языка $\widehat{Z}_i$ не представимо в виде αZ_k, где $Z_k \in \widetilde{Z}^{(h)}$, а $\widehat{Z}_{ij}$ — каноническая единица языка $\widehat{Z}_i$ и $\alpha_{ij}(s), \beta_{ij}(s) \geqslant 0$,
   то возможны следующие варианты:

Алгоритм синтеза абстрактного вероятностного автомата по обобщенному регулярному $\mathbb{R}_1$–языку Z

2.1 $\widehat{Z}_i = \Lambda$, тогда

- а) если $\sum\limits_{j=0}^{m_h-1} \alpha_{ij}(s) \leqslant 1$, то в множество Γ добавляются все коэффициенты $\alpha_{ij}(s)$, где индекс $j = \overline{0, m_h - 1}$, а в множества $A^{(h)}$ и $\widetilde{Z}^{(h)}$ ничего не добавляем и переходим к следующему номеру $i \in \{h+1, \ldots, k\}$.
- б) если $\sum\limits_{j=0}^{m_h-1} \alpha_{ij}(s) \geqslant 1$, то в множество Γ добавляется элемент $\alpha_{im_h}(s) = 1$, а в множества $A^{(h)}$ и $\widetilde{Z}^{(h)}$ добавляем соответственно состояние a_{m_h} и язык $Z_{m_h} = x_s^{-1} Z_i$, m_h увеличиваем на единицу, т. е. $m_h := m_h + 1$ и переходим к следующему номеру $i \in \{h+1, \ldots, k\}$.

Алгоритм синтеза абстрактного вероятностного автомата по обобщенному регулярному $\mathbb{R}_1$–языку Z

2.2 $\widehat{Z}_i \neq \Lambda$, тогда

а) если $\sum\limits_{j=0}^{m_h-1} \alpha_{ij}(s) + \sum\limits_{j=0}^{l} \beta_{ij}(s) \leqslant 1$, то в множества Γ добавляется все элементы $\alpha_{ij}(s)$ и элемент $\alpha_{im_h}(s) = \left(1 - \sum\limits_{j=0}^{m_h-1} \alpha_{ij}(s)\right)$, а в множества $A^{(h)}$ и $\widetilde{Z}^{(h)}$ добавляем соответственно состояние a_{m_h} и язык $Z_{m_h} = \frac{1}{\alpha_{im_h}(s)} \widehat{Z} = \bigcup\limits_{j=0}^{l} \frac{\beta_{ij}(s)}{\alpha_{im_h}(s)} \widehat{Z}_{ij}$, m_h увеличиваем на единицу, т. е. $m_h := m_h + 1$ и переходим к следующему номеру $i \in \{h+1, \ldots, k\}$.

б) если $\sum\limits_{j=0}^{m_h-1} \alpha_{ij}(s) + \sum\limits_{j=0}^{l} \beta_{ij}(s) \geqslant 1$, то в множество Γ добавляется элемент $\alpha_{im_h}(s) = 1$, в множества $A^{(h)}$ и $\widetilde{Z}^{(h)}$ добавляем соответственно состояние a_{m_h} и язык $Z_{m_h} = x_s^{-1} Z_i$, m_h увеличиваем на единицу, т. е. $m_h := m_h + 1$ и переходим к следующему номеру $i \in \{h+1, \ldots, k\}$.

Алгоритм синтеза абстрактного вероятностного автомата по обобщенному регулярному $\mathbb{R}_1$–языку Z

В результате вычислений всех указанных производных будут определены множества $A^{(h+1)}$ и $\widetilde{Z}^{(h+1)}$. Повторение данной процедуры заканчивается, когда $\widetilde{Z}^{(h+1)} = \widetilde{Z}^{(h)}$.

Данный этап завершается построением обобщенного $\mathbb{R}_1$-автомата $\widetilde{\mathcal{A}} = \langle X, \widetilde{A}, \mathbf{r}, \{\mathbf{R}(s)\}, \mathbf{q}\rangle$, где

$$\widetilde{A} = A^{(h+1)} = A^{(h)}, \quad \mathbf{r} = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_{m_h})^T,$$

$$q_i = \Phi_{Z_i}(e), \; i = \overline{1, m_h},$$

а матрицы переходов $\mathbf{R}(s) = (R_{ij}(s))_{i,j=1}^{m_h}$ строятся следующим образом:

$$R_{ij}(s) = \begin{cases} \alpha_{ij}(s) & \text{если } \alpha_{ij}(s) \in \Gamma \\ 0 & \text{если } \alpha_{ij}(s) \notin \Gamma \end{cases}.$$

3. Искомый автомат $\mathcal{A}_{pr}$ получается из $\widetilde{\mathcal{A}}$ применением Теоремы о сводимости.

Заключение

Итоги:

- доказана эквивалентность обобщенных вероятностных автоматов обычным вероятностным автоматам;
- изучены свойства обобщенных вероятностных языков;
- найдены необходимые и достаточные условия представимости обобщенных регулярных $\mathbb{R}_1$–языков в вероятностных автоматах;
- разработан алгоритм синтеза на основе процедуры взятия производных.

Возможное дальнейшее развитие:

- найти алгоритм, который за конечное количество шагов находит $\sup_{\omega \in X^*} \mu_Z(\omega)$;
- найти критерий проверки выполнения условия о существовании канонической формы требуемого вида и алгоритм приведения к ней;
- обобщить полученные результаты со случая поля вещественных чисел на случай произвольного полукольца (возможно с применением Теории идемпотентных алгебр).