

## Статистическое моделирование, ч.1 (4/7, 2014)

Некруткин В.В., вопросы к экзамену 4/7, 2014/2015.

### Условные математические ожидания

1. УМО относительно сигма-алгебр и отображений. Примеры и простейшие свойства УМО.
2. Функция регрессии. Примеры.
3. Предельный переход под знаком УМО. Свойства, связанные с измеримостью и независимостью.
4. Неравенство Иенсена. УМО как проектор. Условная дисперсия и ее свойства.
5. Основное дисперсионное тождество. Корреляционное отношение и его смысл.
6. Регулярные варианты условных распределений. Существование. Частные случаи. Дисперсия выборочного среднего для условно независимых случайных величин.
7. Теорема о монотонном классе. Формулировка и доказательство.
8. Теорема о монотонном классе. Применение к УМО. Следствие.

### Слабая сходимость вероятностных распределений. Общая теория

1. Метрика и топология: сепарабельность, компактность, непрерывность, произведение пространств.
2. Измеримые метрические пространства. Меры в метрических пространствах.
3. Слабая сходимость. Основная теорема (вспомогательные утверждения).
4. Слабая сходимость. Основная теорема (доказательство).
5. Слабая сходимость и отображения. Примеры.
6. Равномерная интегрируемость и слабая сходимость.
7. Классы функций, определяющие слабую сходимость. Роль условия плотности семейства распределений. Следствие о моментах и сходимость beta-распределений.
8. Классы функций, определяющие слабую сходимость. Примеры: теорема непрерывности для характеристических функций.

### Слабая сходимость вероятностных распределений. Применение в статистике

1. Сходимость по вероятности к константе.
2. Замена мешающего параметра на его состоятельную оценку. Общее утверждение и простейшие примеры.
3. Замена мешающего параметра на его состоятельную оценку в доверительных интервалах.
4. Модифицированная теорема Леви. Построение доверительных интервалов для среднего.
5. Многомерная теорема Леви и ЦПТ для мультиномиального распределения.
6. Сохранение гауссовского предела при линейном отображении. Теория критерия  $\chi^2$ .
7. Теорема о гладком отображении. Пример с условной вероятностью.
8. Теорема о гладком отображении. Пример с выборочной дисперсией.

## **Статистическое моделирование. Часть 2.**

**(Теория метода Монте-Карло (4/7, 2014/2015))**

Некруткин В.В., вопросы.

### **1 Вычисление интегралов**

- 1 Заряды и их свойства.
- 2 Вычисление интегралов методом Монте-Карло. Общая схема.
- 3 Методы уменьшения трудоемкости: выделение главной части и существенная выборка.
- 4 Методы уменьшения трудоемкости: использование преобразования, сохраняющего меру и понижение порядка интегрирования.
- 5 Метод расщепления. Пример.
- 6 Вычисление функций от интегралов. Метод зависимых испытаний.

### **2 Решение линейных уравнений**

- 1 Вычисление суммы ряда. Оценки "по поглощению" для нахождения одной координаты решения линейных алгебраических уравнений методом Монте-Карло. Несмещенность.
- 2 Оценка "по поглощению". Дисперсия. Минимальная дисперсия.
- 3 Вычисление линейных функционалов от решения линейных алгебраических уравнений. Оценки решения. Пример.
- 4 Леммы о марковских цепях и минимальном решении уравнений.
- 5 Решение интегральных уравнений. Оценка "по поглощению". Несмещенность.
- 6 Оценка "по поглощению". Дисперсия. Минимальная дисперсия.
- 7 Оценка "по столкновениям". Пример. Интегральные уравнения относительно мер. Простейшая задача переноса излучений.
- 8 Решение внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа. Построение оценки и ее свойства.
- 9 Лемма Вальда и элементарная теорема восстановления.
- 10 Сферический процесс в полупространстве и выпуклой области. Среднее число шагов до попадания в  $\epsilon$ -окрестность границы.