Статистический анализ шкал в задачах принятия решений

Степаненко Илья Александрович, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д. ф.-м. н., проф. Ю. А. Сушков
Рецензент: асп. Г. С. Тамазян

Санкт-Петербург
2013г.

Ключевые аспекты Метода Анализа Иерархий

- МАИ - математический инструмент системного подхода для сложных проблем принятия решений.
- Ключевая фигура в методе анализа иерархий - лицо, принимающее решение (ЛПР).
- Сравнение альтернатив производится на **качественном** уровне.
- Шкала переводит качественные оценки в количественные.
- Метод собственного вектора - один из наиболее популярных методов получения вектора приоритетов.

Иерархическая структура

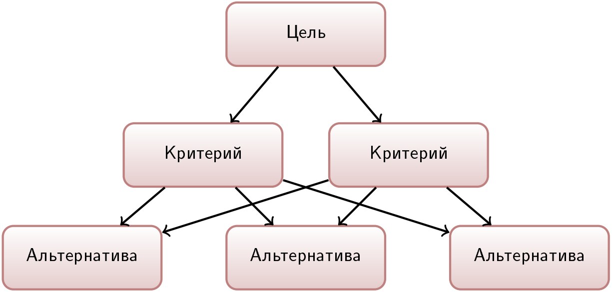

Рис. 1 : Пример иерархической структуры

Процесс принятия решения при помощи МАИ

1. построение иерархии, соответствующей исследуемой задаче,
2. проведение попарных сравнений альтернатив,
3. получение итогового вектора приоритетов.

Попарные сравнения альтернатив в МАИ

Множество K - набор степеней превосходства

эквивалентность	0
слабое превосходство	± 2
сильное превосходство	± 4
очень сильное превосходство	± 6
абсолютное превосходство	± 8
промежуточные оценки	± 1, ± 3, ± 5, ± 7,

Определение

Пусть X - множество объектов. Качественная оценка степени превосходства одного объекта над другим - это элемент образа отображения $X \times X \to K$.

Шкалы в Методе Анализа Иерархий

Λ - множество числовых эквивалентов элементов множества K.

Таким образом, множество $\Lambda = \{-8, -7, \dots, 7, 8\}$.

Определение

Функция шкалы - это отображение $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}^+$.

Определение

Расширенная шкала - это шкала с бесконечным Λ.

Требование к шкале

φ - монотонно возрастающая функция.

Метод собственного вектора

Суть метода собственного вектора

- находим собственный вектор, соответствующий максимальному по модулю собственному числу матрицы попарных сравнений,
- нормируем вектор, поделив его на сумму всех его компонент.

Метод собственного вектора предлагаетв качестве вектора приоритетов использовать нормированный главный собственный вектор матрицы попарных сравнений.

Определение

Итерированной силой порядка t объекта x_i называется величина $p^i(t)$:

$$p^i(0) = 1 \text{ для всех } 1 \leq i \leq n,$$

$$p^i(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} p^k(t-1),\ t \geq 1.$$

Согласованность оценок

Определение

Упорядочение $x_{s_1} > x_{s_2} > \ldots > x_{s_n}$ удовлетворяет условию ***порядковой согласованности****, если для любых трех объектов x_{s_i}, x_{s_j} и x_{s_k} из того, что $x_{s_i} > x_{s_j}$, $x_{s_j} > x_{s_k}$ следует, что $x_{s_i} > x_{s_k}$.*

Определение

Упорядочение $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ удовлетворяет условию ***численной согласованности для аддитивного случая****, если для любых трех объектов x_i, x_j и x_k и некоторой функция шкалы φ, таких, что $x_i \overset{\lambda_{ij}}{>} x_j$, $x_j \overset{\lambda_{jk}}{>} x_k$, $x_i \overset{\lambda_{ik}}{>} x_k$, выполняется условие $\varphi(\lambda_{ij}) + \varphi(\lambda_{jk}) = \varphi(\lambda_{ik})$. Аналогично, упорядочение удовлетворяет условию* ***численной согласованности для мультипликативного случая****, если выполняется условие $\varphi(\lambda_{ij}) \cdot \varphi(\lambda_{jk}) = \varphi(\lambda_{ik})$.*

Начальное упорядочение альтернатив

Любое упорядочение объектов, если оно не содержит противоречий, можно привести к следующему: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. Достичь этого можно путем изменения индексов объектов. При этом, при перестановке элементов i и j, в матрице попарных сравнений произойдет перестановка строк и столбцов с номерами i и j. Матрица попарных сравнений для упорядочения $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ выглядит следующим образом:

- над главной диагональю расположены неотрицательные элементы,
- на главной диагонали расположены нули,
- под главной диагональю расположены неположительные элементы.

В дальнейшем будем считать, что объекты упорядочены $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$.

Сохранение порядка объектов

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 9 \\ 1/2 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор приоритетов: $(0.43, 0.45, 0.1)$

Теорема

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, P_Λ *- матрица попарных сравнений,* φ *- некоторая шкала. Если для любых различных объектов*

$x_i, x_j, x_k \in X$, $x_i \overset{\lambda_{ij}}{>} x_j$, $x_j \overset{\lambda_{jk}}{>} x_k$, $x_i \overset{\lambda_{ik}}{>} x_k$, $\lambda_{ij}, \lambda_{jk}, \lambda_{ik} > 0$,

выполнено условие

$$\lambda_{ik} > \max(\lambda_{ij}, \lambda_{jk}),$$

тогда верно:

1) *условие порядковой согласованности будет выполнено;*
2) *упорядочение, полученное методом собственного вектора, будет совпадать с изначальным.*

Описание шкал в МАИ

Определение

Шкалой Саати называется функция $\varphi_S(\lambda) = (1 + |\lambda| x_S)^{sign(\lambda)}$, *где* x_S *- это масштаб шкалы.*

Определение

Шкалой Брука называется функция $\varphi_B(\lambda) = c_B + \lambda x_B$, *где* c_B *- это центр шкалы, а* x_B *- масштаб.*

Определение

Логистической шкалой называется функция $\varphi_{log}(\lambda) = \dfrac{2}{1 + \exp(-\mu\lambda)}$, *где* μ *- крутизна шкалы.*

Определение

Шкалой Лутсма называется функция $\varphi_L(\lambda) = c^{\lambda}$, *где* c *- степенной параметр (принимают* $c = 2$, $x = \sqrt{2}$*).*

Логистическая шкала

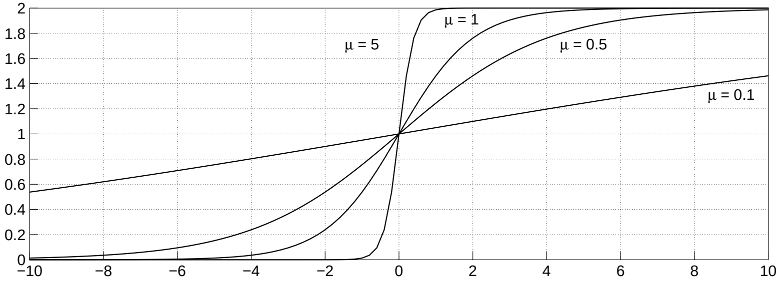

Рис. 2 : Варианты логистической шкалы с различными значениями параметра μ

Предельное свойство для вектора приоритетов

Пусть среди объектов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нет эквивалентных. w - вектор приоритетов, полученный методом собственного вектора.

$$\lim_{\mu\to\infty} w_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i > x_j \text{ для любого } i \neq j; \\ 0, & \text{для остальных объектов.} \end{cases}$$

Критерии сравнения шкал

Критерии:

- минимальный номер итерации, начиная с которого порядок вектора, полученного на любой последующей итерации в методе собственного вектора, будет совпадать с упорядочением главного собственного вектора,
- изменение порядка вектора приоритетов, полученного методом собственного вектора, при добавлении к матрице попарных сравнений случайной ошибки,
- устойчивость первой компоненты вектора приоритетов.

Моделирование для статистического исследования

Моделирование матриц попарных сравнений

Моделируем $P'_1, \dots, P'_N$, $N = 10000$ - матрицы, такие, что:

- над главной диагональю: λ_{ij} р.р. на множестве $\{0, 1, \dots, 9\}$,
- на главной диагонали: нули,
- под главной диагональю: $\lambda_{ij} = -\lambda_{ji}$, $i > j$.

Применим к ним шкалу φ: $P_i = \varphi(P'_i)$, $i = 1..N$.
$R_i = \{r_{kl}\}_{k,l=1}^n$ - матрица ошибки, где r_{kl} имеет распределение:

$$\begin{cases} \pm 1, & \text{с вероятностью } \Phi(-1), \\ 0, & \text{с вероятностью } \Phi(1) - \Phi(-1); \end{cases}$$

Обозначим $\widetilde{P}_i = P_i + R_i$, $i = 1..N$.

Минимальный номер итерации

Формулировка задачи

$P_1, P_2, \ldots, P_N,\ N = 10000$ - матрицы попарных сравнений.
Найти $t_{\min}$, такое, что $\forall \tau \geqslant t_{\min}$:

$$\widetilde{p^i}(\tau) > \widetilde{p^j}(\tau) \Leftrightarrow w_i > w_j,$$

для любых $i, j = 1..n$.

Полученные эмпирические характеристики $t_{\min}$

	Минимум	Среднее	Максимум
Шкала Саати	1.1944	2.7469	5.3788
Шкала Брука	1.0463	3.5273	10.998
Логистическая шкала	1.0798	1.7121	3.352
Шкала Лутсма	1.7133	6.5915	10.209

Устойчивость для шкалы Саати

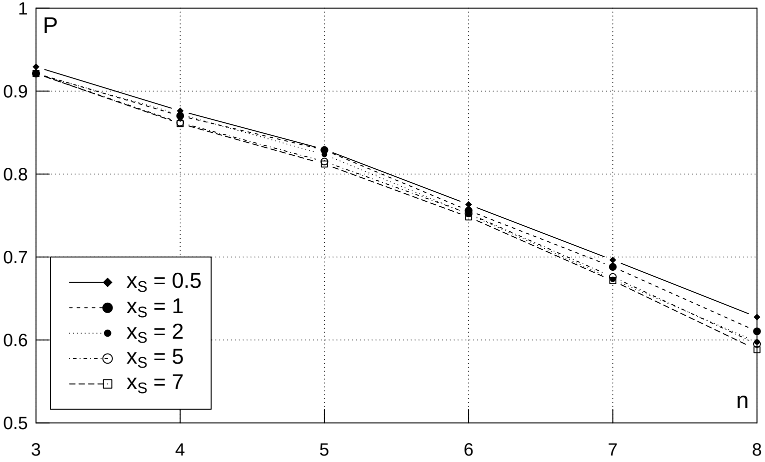

Рис. 3 : Вероятность сохранения порядка при различных параметрах шкалы Саати

Устойчивость для шкалы Брука

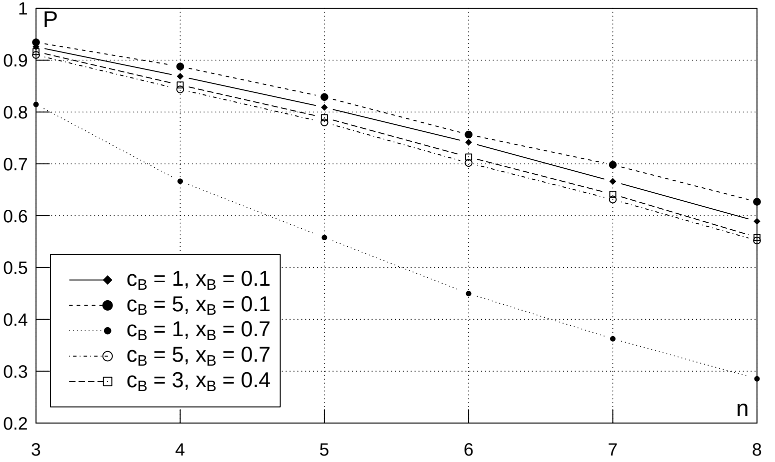

Рис. 4 : Вероятность сохранения порядка при различных параметрах шкалы Брука

Устойчивость для логистической шкалы

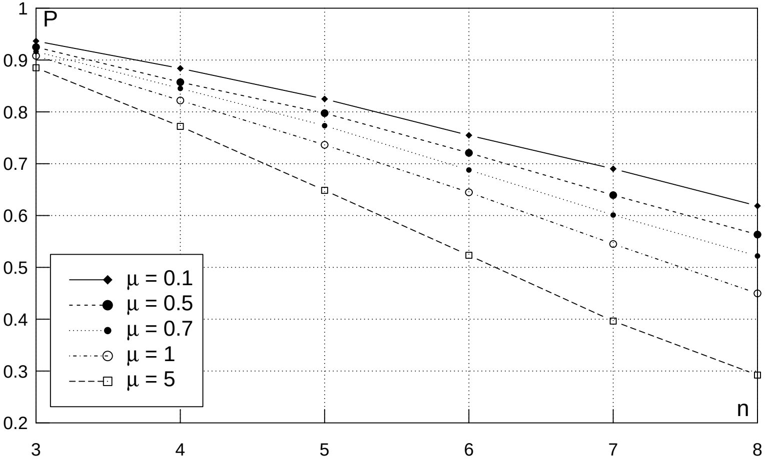

Рис. 5 : Вероятность сохранения порядка при различных параметрах логистической шкалы

Устойчивость для шкалы Лутсма

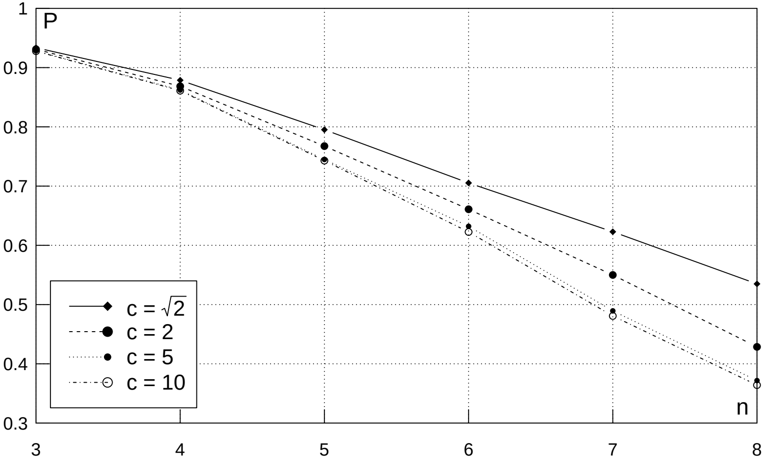

Рис. 6 : Вероятность сохранения порядка при различных параметрах шкалы Лутсма

Изменение среднего значения

Формулировка задачи

$P_i, \widetilde{P}_i,\ i = 1..10000$ - набор исходных матриц и матриц с ошибкой соответственно.
$v_i, \widetilde{v}_i,\ i = 1..10000$ - соответствующие им вектора приоритетов.
v_i^k - k-ая компонента вектора v_i.
Проверить $\overline{v_i^1} = \overline{\widetilde{v}_i^{\,1}}$.
Будем использовать t-критерий Стьюдента для проверки нулевой гипотезы о равенстве мат. ожиданий.

Результаты

- для шкалы Саати отвергается при всех параметрах,
- для шкалы Брука не отвергается при всех параметрах,
- для логистической шкалы не отвергается при малых значениях параметра μ,
- для шкалы Лутсма не отвергается при малых значениях параметра c.

Заключение

- получено условие порядковой согласованности,
- найдены предельные значения вектора приоритетов для логистической шкалы,
- статистически исследована устойчивость вектора приоритетов,
- статистически исследована скорость устанавливания порядка элементов в методе собственного вектора.