Оптимальное удержание при перестраховании N рисков

Калашникова Евгения Николаевна, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент, Товстик Т.М.
Рецензент: к.ф.-м.н., Москалева Н.М.

Санкт-Петербург
2015г.

Перестрахование — совокупность отношений между страховыми организациями по поводу заключенных со страхователями договоров страхования. В соответствии с договором перестрахования страховщик, принимая на страхование риски, определенную часть ответственности и премии по ним оставляет на собственном удержании, а оставшуюся часть передает другим страховщикам.
Собственное удержание –– часть риска, который остается у страховщика после перестрахования.
Перестраховщик — страховщик, принимающий риск в перестрахование.

Страховое возмещение при i -ом страховом случае:

$$X_i = \dot{X}_i + \widetilde{X}_i.$$

Суммарное страховое возмещение за год:

$$Z = \sum_{i=1}^{M} X_i, \quad Z = \widetilde{Z} + \dot{Z},$$

$$\widetilde{Z} = \sum_{i=1}^{M} \widetilde{X}_i, \quad \dot{Z} = \sum_{i=1}^{M} \dot{X}_i.$$

Исходная компания получает премию P:

$$P = (1+\delta)\mathsf{E}Z.$$

Перестраховочной компании исходная передает $\dot{P}$:

$$\dot{P} = (1+\dot{\delta})\mathsf{E}\dot{Z}.$$

Договор типа Стоп-Лосс имеет вид:

$$\widetilde{Z}_j = \begin{cases} Z_j, & \text{если } Z_j \le \rho_j P_j \\ \rho_j P_j, & \text{если } Z_j > \rho_j P_j \end{cases},$$

$$\dot{Z}_j = \begin{cases} 0, & \text{если } Z_j \le \rho_j P_j \\ Z_j - \rho_j P_j, & \text{если } Z_j > \rho_j P_j \end{cases}.$$

Цели работы

- Вывести обощение к теореме об оптимальных удержаниях в случае нескольких договоров и доказать его.
- Найти оптимальные удержания в случаях одного и нескольких договоров.
- Сравнить вероятности разорения суммарных страховых выплат до перестрахования и после.

$$\mathsf{E}(\widetilde{Z_j}) = \int\limits_0^{R_j} z dF_j(z) + R_j \overline{F_j}(R_j),$$

$$\mathsf{E}(\widetilde{Z_j}^2) = \int\limits_0^{R_j} z^2 dF_j(z) + (R_j)^2 \overline{F_j}(R_j),$$

$$\mathsf{E}(\dot{Z}_j) = \int\limits_{R_j}^{\infty} (z - R_j) dF_j(z),$$

$$\mathsf{E}(\dot{Z}_j^{\,2}) = \int\limits_{R_j}^{\infty} (z - R_j)^2 dF_j(z),$$

Потенциальная прибыль исходной компании до перестрахования:
$C = \mathsf{E}(Y), \quad Y = \delta Z.$
Потенциальная прибыль после перестрахования: $\widetilde{C} = \mathsf{E}(\widetilde{Y})$.
Потенциальная прибыль перестраховочной компании: $\dot{C} = \mathsf{E}(\dot{Y}) = C - \widetilde{C}$.

Теорема (Оптимальные удержания при N типах риска и при одном договоре каждого типа риска)

Пусть для N типов риска заключаются договора перестрахования вида Стоп-Лосс. Оптимальные удержания $R_j = \rho_j P_j, j = 1, .., N$, *минимизирующие дисперсию* $\min \mathsf{D}(\sum \widetilde{Z_j})$ *суммарных страховых возмещений при условии, что потенциальная прибыль перестраховщика ограничена константой* $\dot{C} = \mathsf{E}(\dot{Y})$, *подчиняются уравнениям:*

$$\int_0^{R_j} (R_j - z) dF_j(z) = \lambda \dot{\delta_j},$$

$$\lambda = \frac{\dot{C} - \sum_{j=1}^{N} \dot{\delta_j} \mathsf{E}(Z_j)(1 - \rho_j(1 + \dot{\delta_j}))}{\sum_{j=1}^{N} (\dot{\delta_j})^2}.$$

Теорема (Оптимальные удержания при N типах риска и заданном числе договоров каждого типа)

Пусть для каждого из N типов риска заключено $M_j, j = 1, .., N$ договоров вида Стоп-Лосс. Оптимальные удержания $R_j = \rho_j P_j, j = 1, .., N$ на основании минимизации дисперсии $\min \mathsf{D}(\sum \widetilde{Z_j})$ суммарных страховых возмещений при ограниченной потенциальной прибыли перестраховщика $\mathsf{E}(\dot{Y}) = \dot{C}$ подчиняются уравнениям:

$$M_j \int\limits_0^{R_j} (R_j - z) dF_j(z) = \lambda \dot{\delta_j},$$

$$\lambda = \frac{\dot{C} - \sum_{j=1}^{N} M_j \dot{\delta_j} \mathsf{E}(Z_j)(1 - \rho_j(1 + \dot{\delta_j}))}{\sum_{j=1}^{N} (\dot{\delta_j})^2}.$$

$$N = 3,$$
$$\alpha_1 = 1/10, \alpha_2 = 1/100, \alpha_3 = 1/200.$$
$$\alpha_j \int\limits_0^{R_j} (R_j - z)\exp(-\alpha_j z)dz = \delta\lambda,$$

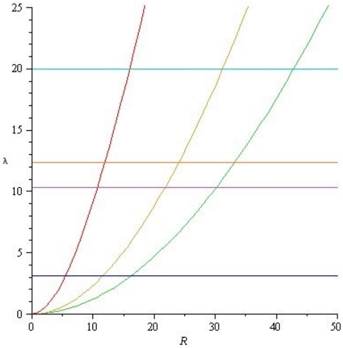

Рис.: Зависимость λ от R_j

Таблица: Зависимость λ от R_j

	R_1	R_2	R_3	λ	$\dot{C}$
1	5	14.96	20.293	3.15	109.172912
2	10	28.411	39.631	10.35	97.19872
3	15	40.614	56.3237	19.98	87.898

При $\mathsf{E}Z_1 = 10, \mathsf{E}Z_2 = 100, \mathsf{E}Z_3 = 200$, тогда
$C^* = 0.3\mathsf{E}Z = 0.3\sum_{j=1}^{N}\mathsf{E}Z_j = 93$.

$$C^* = 0.3\sum_{j=1}^{N}\mathsf{E}Z_j = \dot{C} = \sum_{j=1}^{N}\delta_j(-R_j + \mathsf{E}Z_j + \lambda\delta_j).$$

При $R_1 = 12.2$ получаем:
$\lambda = 12.2, R_1 = 13.2, R_2 = 33.4, R_3 = 45.3, \dot{C} = 93.009$, таким образом получаем, что наши значения $C^*, \dot{C}$ совпадают.

U – исходный капитал, $\psi(U)$ – вероятность разорения.

Неравенство Крамера

$$\psi(U) \le \exp(-\beta U), \quad \mathsf{E}(\exp(-\beta Y)) = 1$$

Приближенное значение β:

$$\beta \approx \frac{2\mathsf{E}(Y)}{\mathsf{D}(Z)},$$

После перестрахования:

$$\widetilde{\beta} \approx \frac{2\mathsf{E}(\widetilde{Y})}{\mathsf{D}(\widetilde{Z})},$$

$$\widetilde{\psi}(U) \le \exp(-\widetilde{\beta} U).$$

$\alpha_1 = 1/10, \alpha_2 = 1/100, \alpha_3 = 1/200.$

$$U = \sum \mathsf{E}(Z_j) + 5\sqrt{\mathsf{D}(Z_j)} = 1429.151$$

$$\beta \approx \frac{2\mathsf{E}(\sum_{j=1}^{N} Y_j)}{\sum_{j=1}^{N} \mathsf{D}(Z_j)} = 0.00495.$$

Вероятность разорения:

$$\psi(U) \leq \exp -\beta U = 0.0008465.$$

После перестрахования:

$$\lambda = 12.2, \quad R_1 = 13.2, \quad R_2 = 33.4, \quad R_3 = 45.3.$$

$$\widetilde{\beta} \approx \frac{2\mathsf{E}(\sum_{j=1}^{N} \widetilde{Y_j})}{\sum_{j=1}^{N} \mathsf{D}(\widetilde{Z_j})} = 0.15.$$

Вероятность разорения:

$$\widetilde{\psi}(U) \leq \exp -\widetilde{\beta} U = 0.00000002.$$

Таблица: Вероятности разорения и потенциальная прибыль исходной компании

	ψ	$\widetilde{\psi}$	C	$\widetilde{C}$
1	0.0008465	0.00000002	124	68.63

- Было выведено и доказано обобщение к теореме, которое позволяет вычислить оптимальные значения удержаний при N типах риска и заданном числе договоров каждого типа.
- При перестраховании оптимальность удержаний предполагает минимизацию дисперсии всех суммарных страховых возмещений исходной компании при условии, что потенциальная прибыль перестраховщика ограничена константой, которую определяет исходная компания.
- Потенциальная прибыль перестраховщика должна быть долей потенциальной прибыли исходной компании.
- Было установлено, что для оптимального удержания стоит брать коэффициент пропорциональности $\rho < 0.5$.
- Так же была исследована вероятность разорения страховых компаний при гамма-распределении и экспоненциальном распределении. Во всех примерах перестрахование ведет к уменьшению вероятности разорения исходной компании, но одновременно к уменьшению потенциальной прибыли исходной страховой компании.