Оценка параметров риска в моделях со стохастической волатильностью

Егорова Ольга Сергеевна

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра Статистического моделирования

Научный руководитель — к.ф.-м.н. Ю.Н. Каштанов
Рецензент — к.ф.-м.н. А.А. Гормин

15 июня 2011

Постановка задачи

Рассматривается стандартный (B, S)-рынок:

- $B_t = B_0 e^{rt}$ – банковский счет,
- $S = (S_t)_{t \geq 0}$ – акция:

  Модель с локальной волатильностью

$$dS_t / S_t = r dt + \sigma(S_t) dw_t.$$

  Модель со стохастической волатильностью

$$\begin{cases} dS_t / S_t = \sigma(y_t) dw_t^{(1)} + r dt, \\ dy_t = a(y_t) dw_t^{(2)} + b(y_t) dt, \end{cases}$$

Стандартный Европейский опцион, построенный на S_t.
Цена опциона с моментом исполнения T и ценой исполнения K:

$$C(S_0, T, K) = \mathbb{E} e^{-rT} h(S_T),\ h(S) \text{ – платежная функция.}$$

Параметры риска — меры чувствительности цены опциона к изменению её параметра:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S};\ \Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2};\ V = \frac{\partial C}{\partial \sigma};\ \text{и другие.}$$

Постановка задачи

Методы оценки цен опционов и параметров риска [Glasserman, 2003]:

- Дискретизация по времени:

$$\hat{S}_{t_{i+1}} = \hat{S}_{t_i} + a(\hat{S}_{t_i})(t_{i+1} - t_i) + b(\hat{S}_{t_i})\sqrt{t_{i+1} - t_i} z_i, \;\; z_i \sim N(0,1).$$

- Разностные приближения производных:

$$C'(S) \sim \frac{\bar{C}_n(S + \Delta S) - \bar{C}_n(S - \Delta S)}{2\Delta S}$$

$$C''(S) \sim \frac{\bar{C}_n(S + \Delta S) - 2\bar{C}_n(S) + \bar{C}_n(S - \Delta S)}{\Delta S^2}$$

Альтернатива — интегральное уравнение, по методу параметрикса [Ermakov, Nekrutkin, Sipin, 1989]

Задача:

- Вывод интегральных уравнений по методу параметрикса
- Построение несмещенной оценки с конечной дисперсией
- Программная реализация схем моделирования

Интегральное уравнение

В модели с локальной волатильностью цена опциона является решением задачи Коши (например, [Gatheral, 2004]):

$$\mathcal{L}C(S,t) = \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2(S)S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2},$$

$$C(S,t)\mid_{t=0} = h(S).$$

После замены переменных $S = e^x$, $a(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(e^x)$, $f(x) = h(e^x)$

$$\mathcal{L}C = \frac{\partial C}{\partial t} - a(x)\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x}\right).$$

$$Z_0(x,y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau a(y)}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\tau a(y)}\right),$$

$$K(x,y,\tau) = -\frac{Z_0(x,y,\tau)}{2\tau a(y)}\left[(a(y)-a(x))\left(\frac{(x-y)^2}{2\tau a(y)} - 1\right) - a(x)(x-y)\right].$$

Интегральное уравнение

Утверждение 1

Пусть функция $a(x)$ *ограничена, отделена от нуля и Липшицева:*

$$0 < a_m \le a(x) \le a_M < \infty, \tag{1}$$

$$|a(x) - a(y)| \le C_a |x - y|. \tag{2}$$

Тогда решение задачи выглядит следующим образом:

$$C(x,t) = \int_{\mathbb{R}} dx_0 Z_0(x, x_0, t) f(x_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}\times[0,t]} dx_1 dt_1 Z_0(x, x_1, t_1) \dots$$

$$\dots \int_{\mathbb{R}\times[t_{m-2},t]} dx_{m-1} dt_{m-1} K(x_{m-2}, x_{m-1}, t_{m-1} - t_{m-2}) \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} dx_m K(x_{m-1}, x_m, t - t_{m-1}) f(x_m).$$

Прямая схема. Модель с локальной волатильностью

Зафиксируем x и t и определим плотности:

$$p_{t_1}(t_2) = \frac{1}{2}(2(t-t_1)\min(t_2-t_1, t-t_2))^{-1/2}\chi_{[t_1,t]}(t_2),$$

$$\varphi_s(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s a_M}} \exp\left(-\frac{y^2}{4sa_M}\right),$$

$$q_s(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{|x_1-x_2|}{4sa_M} + \frac{|x_1-x_2|^3}{16s^2a_M^2}\right)\exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{4sa_M}\right),$$

через которые выразим начальную и переходные плотности:

$$\pi(x_1,t_1) = p_0(t_1)\varphi(x_1,t_1), \tag{3}$$

$$p(x_1,t_1;x_2,t_2) = p_{t_1}(t_2)q_{t_2-t_1}(x_1,x_2). \tag{4}$$

Прямая схема. Модель с локальной волатильностью

Представим оценку в следующем виде:

$$\hat{C}(x,t) = \frac{Z_0(x,x_0,t)f(x_0)}{\varphi(x-x_0,t)} + \sum_{m=1}^{M} \frac{Z_0(x,x_1,t_1)K(x_1,x_2,t_2-t_1)}{\pi(x-x_1,t_1)p(x_1,t_1;x_2,t_2)} \dots$$
$$\dots \frac{K(x_{m-2},x_{m-1},t_{m-1}-t_{m-2})K(x_{m-1},x_m,t-t_{m-1})f(x_m)}{p(x_{m-2},t_{m-2};x_{m-1},t_{m-1})q_{t-t_{m-1}}(x_{m-1},x_m)}. \quad (5)$$

Теорема 1

Пусть функция $a(x)$ модели с локальной волатильностью ограничена и Липшицева. Тогда для начальной плотности (3) *и переходной плотности* (4) *оценка вида* (5) *имеет конечную дисперсию.*

Обратная схема. Модель с локальной волатильностью

Определим плотности:

$$p_{t_1}(t_2) = \frac{1}{2}(2t_1 \min(t_2, t_1 - t_2))^{-1/2} \chi_{[0,t_1]}(t_2),$$

$$q_s(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{|x_1 - x_2|}{4sa(x_1)} + \frac{|x_1 - x_2|^3}{16s^2a^2(x_1)}\right) \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{4sa(x_1)}\right).$$

Начальная плотность при фиксированных x и t :

$$\pi(x_0) = \varphi_t(x - x_0). \tag{6}$$

Переходная плотность:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p_{t_1}(t_2) q_{t_1 - t_2}(x_1, x_2), \tag{7}$$

Обратная схема. Модель с локальной волатильностью

Представим оценку в следующем виде:

$$\check{C}(x,t) = \sum_{m=0}^{M} \frac{Z_0(x,x_m,t-t_m)K(x_m,x_{m-1},t_{m-1}-t_m)}{p(x_{m-1},t_{m-1};x_m,t_m)} \cdots \frac{K(x_1,x_0,t_1)f(x_0)}{p(x_0,t;x_1,t_1)\pi(x_0)}. \quad (8)$$

Теорема 2

Пусть выполнены условия Теоремы 1.
Тогда для начальной плотности (6) *и переходных плотностей* (7) *оценка вида* (8) *имеет конечную дисперсию.*

Сопряженное уравнение. Модель с локальной волатильностью

Переходная плотность $P(t, S_0, S)$ процесса S_t удовлетворяет прямому уравнению Коломогорова [Дынкин, Марковские процессы]:

$$\mathcal{L}^* P = \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(S)S^2 P\right) = 0$$

Тогда для процесса $x_t = \log S_t$ переходная плотность $p(t, x, y)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\mathcal{L}^* p = \frac{\partial p}{\partial t} - a(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + a_1^*(x)\frac{\partial p}{\partial x} + a_0^*(x)p.$$

В модели с локальными волатильностями ($a(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(e^x)$):

$$a_1^*(x) = -2a'(x)\sqrt{2a(x)} - a(x),$$
$$a_0^*(x) = -a'^2(x) - e^x\sqrt{2a(x)}a''(x).$$

$$0 < c_1 \le a'(x) \le C_1,\ 0 < c_2 \le e^x a''(x) \le C_2. \tag{9}$$

Сопряженное уравнение. Модель с локальной волатильностью

Цена опциона может быть выражена следующим образом:

$$
\begin{aligned}
C(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} p(t,x,y) f(y) dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}} Z_0^*(x_0,x,t) f(x_0) dx_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}\times[0,t]} K^*(x_0,x,t-t_0) dx_0 dt_0 \ldots \\
&\quad \ldots \int_{\mathbb{R}\times[0,t_{m-2}]} K^*(x_{m-1},x_{m-2},t_{m-2}-t_{m-1}) dx_{m-1} dt_{m-1} \times \\
&\qquad \times \int_{\mathbb{R}} Z_0^*(x_m,x_{m-1},t_{m-1}) f(x_m) dx_m.
\end{aligned}
$$

Определим плотности:

$$
p_{t_1}(t_2) = \frac{1}{2}(2t_1 \min(t_2, t_1 - t_2))^{-1/2} \chi_{[0,t_1]}(t_2),
$$

$$
\varphi_s(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s a(x)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4sa(x)}\right),
$$

$$
q_s(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{|x_1-x_2|}{4sa(x_1)} + \frac{|x_1-x_2|^3}{16s^2a^2(x_1)}\right) \exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{4sa(x_1)}\right).
$$

Сопряженное уравнение. Модель с локальной волатильностью

Переходная плотность :

$$p(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_{t_1}(t_2) q_{t_1 - t_2}(x_1, x_2). \tag{10}$$

Начальная плотность:

$$\pi_K(x_0, t_0) = p(x, x_0; t, t_0), \tag{11}$$

Оценка:

$$\check{C}(x,t) = \sum_{m=0}^{M} \frac{K^*(x_0, x, t - t_0)}{\pi_K(x_0, t_0)} \dots \frac{K^*(x_{m-1}, x_{m-2}, t_{m-2} - t_{m-1})}{p(x_{m-2}, t_{m-2}; x_{m-1}, t_{m-1})} \frac{Z_0^*(x_m, x_{m-1}, t_{m-1}) f(x_m)}{\varphi_{t_{m-1}}(x_{m-1}, x_m)}. \tag{12}$$

Теорема 3

Пусть для функции $a(x)$ выполнены условия Теоремы 1, а также (9). Тогда для начальной плотности (11) и переходной плотности (10) оценка вида (12) имеет конечную дисперсию.

Пример

$$\sigma(S) = \gamma(1 - \delta \arctan(\beta S^2 / S_0^2)),$$
$$\gamma = \delta = 0.6, \beta = 1.5, S_0 = 100$$

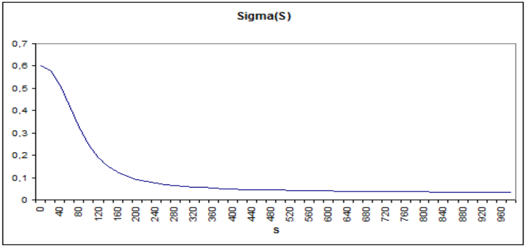
Таблица: **Оценки цены опциона**

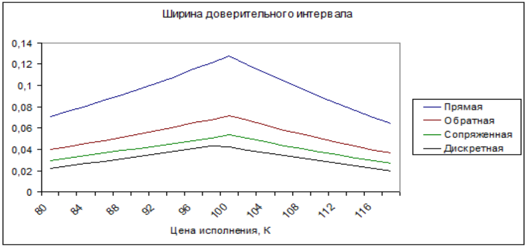
K	Прямая	Обратная	Сопряженная	Дискретная	"По поглощению"
90	5.76	5.78	5.80	5.74	6.11
92	6.46	6.47	6.49	6.43	6.82
94	7.2	7.22	7.23	7.19	7.58
96	8.02	8.03	8.04	8.00	8.41
98	8.89	8.90	8.91	8.88	9.31
100	9.79	9.80	9.73	9.80	9.53
102	8.79	8.78	8.74	8.80	8.55
104	7.86	7.83	7.79	7.87	7.64
106	6.99	6.96	6.93	7.00	6.79
108	6.19	6.16	6.14	6.2	5.99

Пример

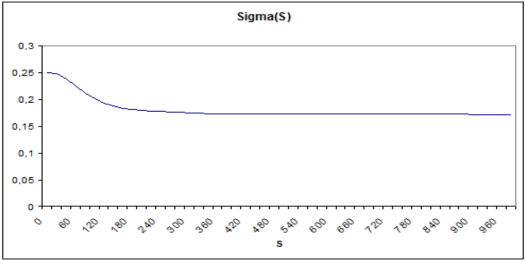
Сравнение оценок "по поглощению" и "по столкновениям"
Погрешность
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
80
84
88
92
96
100
104
108
112
116
Цена исполнения, K
по столкновению
по поглощению

Пример


Sigma(S)
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0 40 80 120 160 200 240 280 320 360 400 440 480 520 560 600 640 680 720 760 800 840 880 920 960
s


Ширина доверительного интервала
0,14
0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
80 84 88 92 96 100 104 108 112 116
Цена исполнения, K
Прямая
Обратная
Сопряженная
Дискретная

Пример


Sigma(S)
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
60
120
180
240
300
360
420
480
540
600
660
720
780
840
900
960
s


Ширина доверительного интервала
0,10
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0,00
80
84
88
92
96
100
104
108
112
116
Цена исполнения, K
Прямая
Дискретная

Пример

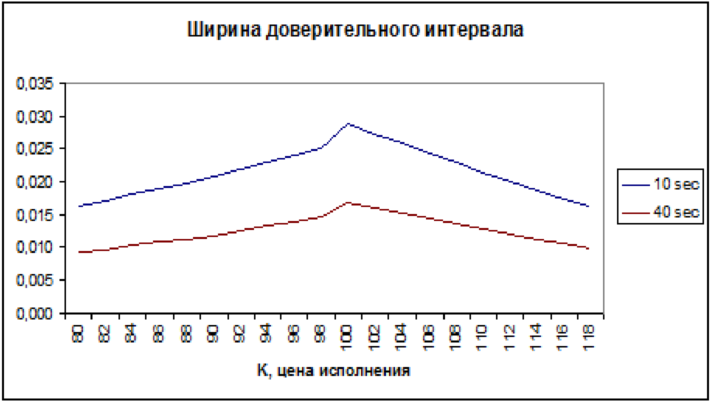
$$\sigma(S_T) = \gamma(1 - \delta \arctan(\beta S^2/S_0^2)),$$
$$\gamma = \delta = 0.6, \beta = 1.5, S_0 = 100$$

Таблица: **Оценки** Δ

K	Прямая	Обратная	Сопряженная	Дискретная
80	-0.226	-0.227	-0.227	-0.229
82	-0.251	-0.252	-0.253	-0.254
84	-0.277	-0.278	-0.278	-0.280
86	-0.304	-0.305	-0.305	-0.306
88	-0.333	-0.334	-0.334	-0.335
90	-0.362	-0.363	-0.363	-0.365
92	-0.393	-0.394	-0.394	-0.396

Пример

$$\sigma(S) = \gamma(1 - \delta \arctan(\beta S^2/S_0^2)),$$
$$\gamma = \delta = 0.6, \beta = 1.5, S_0 = 100$$



Результаты

- Построены несмещенные оценки для цены опциона и параметров риска
- Доказана конечность их дисперсий
- Проведено практическое моделирование в трех схемах