Вероятность разорения страховой компании при некоторой модели риска

Богдан Владимир Юрьевич, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., д. Товстик Т.М.
Рецензент: д.ф.-м.н., пр. Ермаков С.М.

Санкт-Петербург
2013г.

Постановка задачи

- Изучение двух моделей функционирования страховой компании.
- Получение рекуррентного метода расчета вероятности разорения компании.
- Изучение зависимости вероятности разорения за конечное время от величины начального капитала.
- Моделирование процесса изменения финансов компании.
- Нахождение минимального капитала для фиксированного уровня риска разорения.

Классическая модель Крамера-Лундберга

Случай Эрланга (Штрауб Э.)

Частный случай, при котором выплаты случайны, распределены по показательному закону и происходят в случайные моменты времени. Количество выплат распределено по закону Пуассона.

- Выплаты
  ξ_i — величина i-ой выплаты с плотностью
  $$f_{\xi_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$
  τ_i — временной интервал между страховыми случаями с плотностью
  $$f_{\tau_i}(x) = \nu e^{-\nu t}, \quad t \geq 0.$$

Утверждение о количестве событий (Феллер В.)

Если промежутки между страховыми случаями распределены по экспоненциальному закону с параметром ν, то количество страховых случаев N(t) на интервале $[0; t]$ имеет Пуассоновский закон распределения с параметром νt.

Суммарные выплаты к моменту t: $R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i$.

- Премии
  Полагаем, что премии в компанию поступают непрерывно с некоторой фиксированной интенсивностью c.
  Суммарные премии к моменту t: $G(t) = ct, \quad c > 0.$
- Процесс изменения капитала компании

$$X(t) = u + G(t) - R(t), \tag{1}$$

где u — начальный капитал компании, $G(t)$ — суммарные премии к моменту t, $R(t)$ — суммарные выплаты к моменту t.

Условие положительности дохода

Стремление компании к увеличению своего капитала накладывает условие положительности дохода

$$\mathsf{E}G(t) > \mathsf{E}R(t) \Leftrightarrow c > \frac{\nu}{\lambda}. \tag{2}$$

Замечание: предполагается независимость в совокупности случайных величин $\xi_i, \ \tau_i \ \forall i$.

Модель p-прореживания

- Премии
  C_i — величина i-ой премии, τ_i — временной интевал между премиями.
  $$f_{C_i}(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0,$$
  $$f_{\tau_i}(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$
- Выплаты
  В модели предполагается, что выплаты могут происходить только в моменты, когда происходят взносы. В момент поступления премии с вероятностью p происходит и выплата. Y_i — величина выплаты с плотностью
  $$f_{Y_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$
- Процесс изменения капитала компании
  $$R(t) = u + \sum_{i=1}^{M^t} C_i - \sum_{i=1}^{M_p^t} Y_i = u + R^+(t) - R^-(t), \tag{3}$$
  где u — начальный капитал, M^t — Пуассоновский процесс с интенсивностью μ ($\mathsf{E}M^t = t\mu$), M_p^t — процесс p-прореживания для M^t($\mathsf{E}M_p^t = p\mu t$).

Используя утверждение о количестве событий к моменту времени t, можно записать процесс изменения капитала компании в виде:

$$R(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} (C_i - \gamma_i Y_i), \tag{4}$$

где $M(t)$ — количество премий, поступивших к моменту времени t, γ_i — случайная величина с распределением Бернулли с параметром p.

Условие положительности дохода

Условие положительности дохода в модели p-прореживания принимает вид

$$\mathsf{E}R^+(t) > \mathsf{E}R^-(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{p}{\lambda}. \tag{5}$$

Замечание: предполагается независимость в совокупности случайных величин C_i, Y_i, γ_i $\forall i$.

Различные теоретические результаты

- Для каждой из рассматриваемых моделей известны интегрально-дифференциальные уравнения в случаях конечного и бесконечного времени.
- Для классической модели известно точное решение уравнения в случае конечного временного интервала.
- Для обеих моделей известны вероятности разорения в случае бесконечного времени.
- В работе мною был получен рекуррентный метод нахождения вероятности разорения в случае конечного времени для модели p-прореживания.

Вероятность разорения в случае бесконечного времени

Вероятность разорения за бесконечное время для классической модели

Во введенных обозначениях вероятность разорения при начальном капитале u на бесконечном временном интервале равна

$$\psi(u) = \frac{\nu}{\lambda c} e^{-\lambda(1-\frac{\nu}{\lambda c})u}, \tag{6}$$

если выполнено условие положительности дохода. В противном случае вероятность разорения равна 1.

Вероятность разорения за бесконечное время для модели p-прореживания

Во введенных обозначениях вероятность разорения при начальном капитале u на бесконечном временном интервале равна

$$\psi(u) = \frac{\alpha p}{\lambda} e^{(\alpha p-\lambda)u}, \tag{7}$$

если выполнено условие положительности дохода. В противном случае вероятность разорения равна 1.

Другой подход к изучению вероятности разорения

Исследуемый мной в работе подход основан на рекуррентном вычислении вероятности разориться на момент очередного изменения капитала компании.

Идея метода:

- Вводится случайная величина ζ_i, равная разности размеров капитала в двух соседних моментах времени, в которых происходили эти изменения.
- Рассматриваются вероятности $P_n(u) = \mathsf{P}(\zeta_1 < u, \zeta_1 + \zeta_2 < u, \ldots, \zeta_1 + \cdots + \zeta_n > u)$.
- Решается задача нахождения $P_n(u)$ через найденную $P_{n-1}(u)$.

Полученные теоретические результаты

- Классическая модель

$$\zeta_i = -c\tau_i + \xi_i \tag{8}$$

Теорема о нахождении $P_n(u)$ для классической модели.

Вероятность разорения на n-ой выплате равна

$$P_n(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n)} \frac{e^{-\lambda u} u^i}{i!}, \quad n > 0.$$

При этом $a_i^{(n)}$ рекуррентно выражается следующим образом:

$$a_i^{(n)} = \frac{a_{i-1}^{(n-1)} \nu\lambda}{\nu + c\lambda} + \sum_{m=i}^{n-2} \frac{c^{m+1-i}\nu\lambda}{(\nu + c\lambda)^{m+2-i}} a_m^{(n-1)}, \quad i = 1 \ldots (n-2),$$

$$a_{n-1}^{(n)} = \frac{a_{n-2}^{(n-1)} \nu\lambda}{\nu + c\lambda},$$

$$a_0^{(n)} = \sum_{m=0}^{n-2} \frac{c^{m+1}\nu\lambda}{(\nu + c\lambda)^{m+2}} a_m^{(n-1)}.$$

- Модель p-прореживания

$$\zeta_i = -C_i + \gamma_i Y_i \tag{9}$$

Теорема о нахождении $P_n(u)$ для модели p-прореживания

Вероятность разорения после n-ого изменения капитала равна

$$P_n(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n)} \frac{e^{-\lambda u} u^i}{i!}, \quad n > 0.$$

При этом имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$a_{n-1}^{(n)} = \frac{a_{n-2}^{(n-1)} p\alpha\lambda}{\alpha+\lambda},$$

$$a_i^{(n)} = \frac{a_{i-1}^{(n-1)} p\alpha\lambda}{\alpha+\lambda} + \sum_{m=i}^{n-2} \frac{a_m^{(n-1)}(\alpha+\lambda-p\alpha)\alpha}{(\alpha+\lambda)^{m+2-i}}, \quad i = 1\ldots(n-2),$$

$$a_0^{(n)} = \sum_{m=0}^{n-2} \frac{a_m^{(n-1)}(\alpha+\lambda-p\alpha)\alpha}{(\alpha+\lambda)^{m+2}}.$$

Вычисление вероятности разорения

- При исследуемом подходе вероятность разорения за время t при начальном капитале u равна

$$\psi_t^{rec}(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(\zeta_1 < u, \dots, \zeta_1 + \dots + \zeta_i > u, \tau_1 + \dots + \tau_i < t). \quad (10)$$

- При $t \to \infty$ событие $\{\tau_1 + \dots + \tau_j < t\}$ — достоверное событие $\forall j \in \mathbb{N}$.
- В модели p-прореживания есть независимость ζ_i и τ_i. Можно использовать полученные формулы для нахождения вероятности разорения на конечном временном интервале.
- Метод приближенного вычисления вероятности разорения:
  - Для достаточно большого $\tilde{p}$ (в работе $\tilde{p} = 0.999$) находим минимальное $n : \mathsf{P}(\tau_1 + \dots + \tau_n > t) = \mathsf{P}(M(t) < n) \geq \tilde{p}$.
  - Вычисляем $\psi_t^{rec}(u) = \sum_{i=1}^{n} P_i(u)\, \mathsf{P}(M(t) \geq i)$.
- В классической модели случайные величины ζ_i и τ_i зависимы, поэтому такой метод для классической модели не применим. Можно применять только для случая бесконечного времени.

Вычисление вероятности разорения

- При исследуемом подходе вероятность разорения за время t при начальном капитале u равна

$$\psi_t^{rec}(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(\zeta_1 < u, \dots, \zeta_1 + \dots + \zeta_i > u, \tau_1 + \dots + \tau_i < t). \quad (10)$$

- При $t \to \infty$ событие $\{\tau_1 + \dots + \tau_j < t\}$ — достоверное событие $\forall j \in \mathbb{N}$.
- В модели p-прореживания есть независимость ζ_i и τ_i. Можно использовать полученные формулы для нахождения вероятности разорения на конечном временном интервале.
- Метод приближенного вычисления вероятности разорения:
  - Для достаточно большого $\tilde{p}$ (в работе $\tilde{p} = 0.999$) находим минимальное $n : \mathsf{P}(\tau_1 + \dots + \tau_n > t) = \mathsf{P}(M(t) < n) \geq \tilde{p}$.
  - Вычисляем $\psi_t^{rec}(u) = \sum_{i=1}^{n} P_i(u)\, \mathsf{P}(M(t) \geq i)$.
- В классической модели случайные величины ζ_i и τ_i зависимы, поэтому такой метод для классической модели не применим. Можно применять только для случая бесконечного времени.

Вычисление вероятности разорения

- При исследуемом подходе вероятность разорения за время t при начальном капитале u равна

$$\psi_t^{rec}(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(\zeta_1 < u, \ldots, \zeta_1 + \cdots + \zeta_i > u, \tau_1 + \cdots + \tau_i < t). \quad (10)$$

- При $t \to \infty$ событие $\{\tau_1 + \cdots + \tau_j < t\}$ — достоверное событие $\forall j \in \mathbb{N}$.
- В модели p-прореживания есть независимость ζ_i и τ_i. Можно использовать полученные формулы для нахождения вероятности разорения на конечном временном интервале.
- Метод приближенного вычисления вероятности разорения:
  - Для достаточно большого $\tilde{p}$ (в работе $\tilde{p} = 0.999$) находим минимальное $n : \mathsf{P}(\tau_1 + \cdots + \tau_n > t) = \mathsf{P}(M(t) < n) \geq \tilde{p}$.
  - Вычисляем $\psi_t^{rec}(u) = \sum_{i=1}^{n} P_i(u)\,\mathsf{P}(M(t) \geq i)$.
- В классической модели случайные величины ζ_i и τ_i зависимы, поэтому такой метод для классической модели не применим. Можно применять только для случая бесконечного времени.

Вычисление вероятности разорения

- При исследуемом подходе вероятность разорения за время t при начальном капитале u равна

$$\psi_t^{rec}(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(\zeta_1 < u, \ldots, \zeta_1 + \cdots + \zeta_i > u, \tau_1 + \cdots + \tau_i < t). \quad (10)$$

- При $t \to \infty$ событие $\{\tau_1 + \cdots + \tau_j < t\}$ — достоверное событие $\forall j \in \mathbb{N}$.
- В модели p-прореживания есть независимость ζ_i и τ_i. Можно использовать полученные формулы для нахождения вероятности разорения на конечном временном интервале.
- Метод приближенного вычисления вероятности разорения:
  - Для достаточно большого $\tilde{p}$ (в работе $\tilde{p} = 0.999$) находим минимальное $n : \mathsf{P}(\tau_1 + \cdots + \tau_n > t) = \mathsf{P}(M(t) < n) \geq \tilde{p}$.
  - Вычисляем $\psi_t^{rec}(u) = \sum_{i=1}^{n} P_i(u)\, \mathsf{P}(M(t) \geq i)$.
- В классической модели случайные величины ζ_i и τ_i зависимы, поэтому такой метод для классической модели не применим. Можно применять только для случая бесконечного времени.

Вычисление вероятности разорения

- При исследуемом подходе вероятность разорения за время t при начальном капитале u равна

$$\psi_t^{rec}(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(\zeta_1 < u, \ldots, \zeta_1 + \cdots + \zeta_i > u, \tau_1 + \cdots + \tau_i < t). \qquad (10)$$

- При $t \to \infty$ событие $\{\tau_1 + \cdots + \tau_j < t\}$ — достоверное событие $\forall j \in \mathbb{N}$.
- В модели p-прореживания есть независимость ζ_i и τ_i. Можно использовать полученные формулы для нахождения вероятности разорения на конечном временном интервале.
- Метод приближенного вычисления вероятности разорения:
  - Для достаточно большого $\tilde{p}$ (в работе $\tilde{p} = 0.999$) находим минимальное $n : \mathsf{P}(\tau_1 + \cdots + \tau_n > t) = \mathsf{P}(M(t) < n) \geq \tilde{p}$.
  - Вычисляем $\psi_t^{rec}(u) = \sum_{i=1}^{n} P_i(u)\, \mathsf{P}(M(t) \geq i)$.
- В классической модели случайные величины ζ_i и τ_i зависимы, поэтому такой метод для классической модели не применим. Можно применять только для случая бесконечного времени.

Моделирования процесса изменения капитала

- Результат одной реализации можно представить в виде таблицы, состоящей из двух столбцов:
  - Моменты времени, когда происходит изменение капитала (скачок процесса)
  - Текущее значение капитала компании с учетом нового скачка
- Взяв изначально нулевой начальный капитал, моделируется процесс финансовых поступлений в компанию.

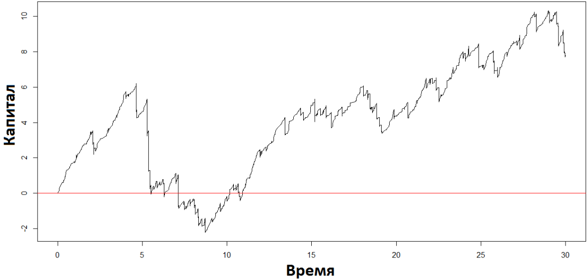

Рис. 1 : Пример реализации процесса изменения баланса компании за 30 лет

Оценка вероятности разорения методом Монте-Карло

Алгоритм вычисления оценки вероятности разорения

1. Процесс моделируется $N = 10^5$ раз. Каждый раз берется нулевой начальный капитал. Зачение капитала компании в момент t равно $X_i(t)$.
2. Для исследуемого времени T находим N чисел: $X_i^{min}(T) = \min\{X_i(t)|t < T\}$. Разорение в i-ой реализации с начальным капиталом u за время T наступает в случае, если $|X_i^{min}(T)| > u$.
3. Находим $X^{min}(T) = \min_{i=1\ldots N} X_i^{min}(T)$. Разбиваем отрезок $[0; |X^{min}(T)|]$ на k равных отрезков $[x_{l-1}; x_l]$, $l = 1\ldots k$. Для каждого x_l считаем m_l — количество $X_i^{min}(T)$, что $|X_i^{min}(T)| > x_l$.
4. Оценка вероятности разорения за время T с начальным капиталом x_l равна m_l/N.

Нахождение капитала для фиксированного уровня риска p

Находим такое минимальное u, что $\#\{X_i^{min}(T) : |X_i^{min}(T)| > u\} \leq pN$.

Примеры применения метода в случае конечного времени

- $p = 0.1,\ \mu = 50,\ \lambda = 2.625,\ \alpha = 25,\ \mathsf{E}(R^{+}(1)) = 2,\ \mathsf{E}(R^{-}(1)) \approx 1.905.$
- $p = 0.2,\ \mu = 50,\ \lambda = 5.25,\ \alpha = 25,\ \mathsf{E}(R^{+}(1)) = 2,\ \mathsf{E}(R^{-}(1)) \approx 1.905.$

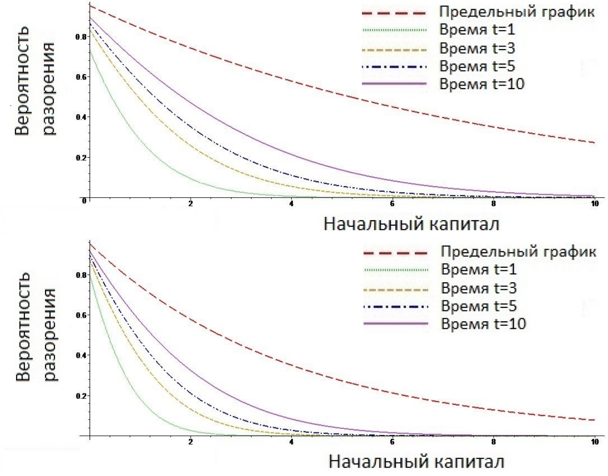

Рис. 2 : Зависимость вероятности разорения от начального капитала.

- $p = 0.1,\ \mu = 50,\ \lambda = 2.375,\ \alpha = 25,\ \mathsf{E}(R^{+}(1)) = 2,\ \mathsf{E}(R^{-}(1)) \approx 2.105.$

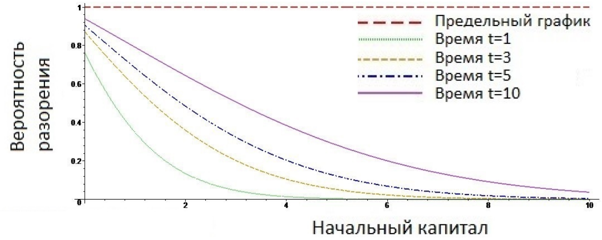

Рис. 3 : Зависимость вероятности разорения от начального капитала.

Моделирование примеров методом Монте-Карло

- Классическая модель. Параметры:
  $\lambda = 35,\ \nu = 50,\ c = 2,\ \mathsf{E}(G(1)) = 2,\ \mathsf{E}(R(1)) \approx 1.43.$

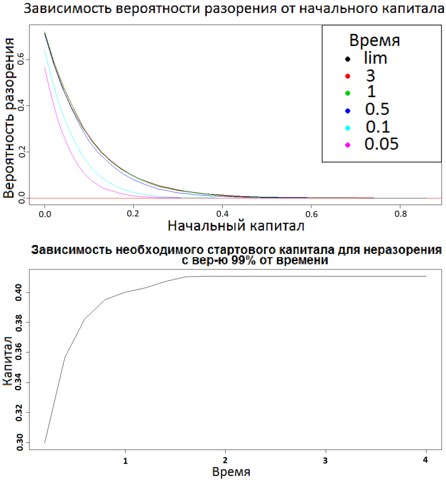

Рис. 4 : Результаты моделирования.

- Модель p-прореживания. Параметры:
  $\alpha = 25, \ \lambda = 2.625, \ \mu = 50, \ p = 0.1.$

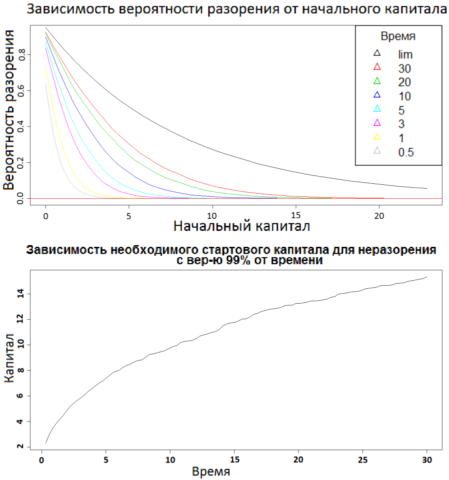

Рис. 5 : Результаты моделирования.

Анализ результатов и выводы

- При сравнении вычисленной рекуррентным методом вероятности разорения и её оценки, полученной моделированием, максимальное расхождение имеет порядок 10^{-3}.
- В рассматриваемых примерах, где премии примерно равны выплатам, малая вероятность разорения достигается при большом стартовом капитале. Накопления практически не происходит. Сходимость к предельному значению медленная.
- В случае, когда прибыль достаточно велика по сравнению с выплатами, сходимость к пределу будет быстрая. Разорения не будет за счет получаемой прибыли, а не за счет большого начального капитала.
- На практике параметры моделей можно оценить статистически.
- Чтобы компенсировать убытки и увеличить доход привлекаются дополнительные источники дохода: инвестиции, управление портфелями и т. п.

Анализ результатов и выводы

- При сравнении вычисленной рекуррентным методом вероятности разорения и её оценки, полученной моделированием, максимальное расхождение имеет порядок 10^{-3}.
- В рассматриваемых примерах, где премии примерно равны выплатам, малая вероятность разорения достигается при большом стартовом капитале. Накопления практически не происходит. Сходимость к предельному значению медленная.
- В случае, когда прибыль достаточно велика по сравнению с выплатами, сходимость к пределу будет быстрая. Разорения не будет за счет получаемой прибыли, а не за счет большого начального капитала.
- На практике параметры моделей можно оценить статистически.
- Чтобы компенсировать убытки и увеличить доход привлекаются дополнительные источники дохода: инвестиции, управление портфелями и т. п.

Анализ результатов и выводы

- При сравнении вычисленной рекуррентным методом вероятности разорения и её оценки, полученной моделированием, максимальное расхождение имеет порядок 10^{-3}.
- В рассматриваемых примерах, где премии примерно равны выплатам, малая вероятность разорения достигается при большом стартовом капитале. Накопления практически не происходит. Сходимость к предельному значению медленная.
- В случае, когда прибыль достаточно велика по сравнению с выплатами, сходимость к пределу будет быстрая. Разорения не будет за счет получаемой прибыли, а не за счет большого начального капитала.
- На практике параметры моделей можно оценить статистически.
- Чтобы компенсировать убытки и увеличить доход привлекаются дополнительные источники дохода: инвестиции, управление портфелями и т. п.

Анализ результатов и выводы

- При сравнении вычисленной рекуррентным методом вероятности разорения и её оценки, полученной моделированием, максимальное расхождение имеет порядок 10^{-3}.
- В рассматриваемых примерах, где премии примерно равны выплатам, малая вероятность разорения достигается при большом стартовом капитале. Накопления практически не происходит. Сходимость к предельному значению медленная.
- В случае, когда прибыль достаточно велика по сравнению с выплатами, сходимость к пределу будет быстрая. Разорения не будет за счет получаемой прибыли, а не за счет большого начального капитала.
- На практике параметры моделей можно оценить статистически.
- Чтобы компенсировать убытки и увеличить доход привлекаются дополнительные источники дохода: инвестиции, управление портфелями и т. п.

Анализ результатов и выводы

- При сравнении вычисленной рекуррентным методом вероятности разорения и её оценки, полученной моделированием, максимальное расхождение имеет порядок 10^{-3}.
- В рассматриваемых примерах, где премии примерно равны выплатам, малая вероятность разорения достигается при большом стартовом капитале. Накопления практически не происходит. Сходимость к предельному значению медленная.
- В случае, когда прибыль достаточно велика по сравнению с выплатами, сходимость к пределу будет быстрая. Разорения не будет за счет получаемой прибыли, а не за счет большого начального капитала.
- На практике параметры моделей можно оценить статистически.
- Чтобы компенсировать убытки и увеличить доход привлекаются дополнительные источники дохода: инвестиции, управление портфелями и т. п.

Итоги работы

- В работе были формализованы две модели изменения капитала страховой компании.
- В ходе работы были получены теоретические формулы для вычисления вероятности разорения.
- Составлен метод для приближенного вычисления вероятности разорения на конечном временном интервале для одной из моделей. Для теоретических расчетов использовалась среда Maple.
- Проведено моделирование процесса изменения капитала страховой компании для каждой рассматриваемой модели. Моделирование и дальнейший анализ проводился с помощью языка программирования для статистической обработки данных R.
- На основании рассмотреных примеров были сделаны выводы о поведении вероятности разорения для разных соотношений между параметрами.