Применение тропической математики для решения минимаксных задач размещения с прямоугольной метрикой

Плотников Павел Владимирович, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — д.ф.-м.н., проф. **Кривулин Н.К.**
Рецензент: д.ф.-м.н., проф. **Чирков М.К.**

Введение

- Методы идемпотентной алгебры можно применять при решении некоторых задач размещения.
- Настоящая работа направлена на дальнейшее развитие приложений методов идемпотентной алгебры, исследованных в работе Кривулина Н.К. "Экстремальное свойство собственного значения неразложимых матриц в идемпотентной алгебре и решение задачи размещения Ролса".(Вестник СПбГУ, 2011)
- Важным отличием является то, что предлагается полное решение задачи на основе новых результатов изучения экстремальных свойств спектрального радиуса в идемпотентной алгебре.

Определения и обозначения

Идемпотентное полуполе $\mathbb{R}_{\max,+}$

- Обозначим
$$\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, +\rangle.$$
- Бинарные операции: $\max = \oplus$ и $+ = \otimes$.
- Нулевой и единичный элементы: $0 = \mathbb{1}$ и $-\infty = \mathbb{0}$.
- Сложение идемпотентно, т.е. $x \oplus x = x$.
- Умножение обратимо, т.е. у каждого элемента $x \neq \mathbb{0}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$.
- Для любой пары $x, y \in \mathbb{R}$ определена степень x^y, значение которой соответствует арифметическому произведению xy.
- Далее операция $\otimes$ естественным образом опускается.

Векторные операции над $\mathbb{R}_{\max,+}$

- Множество вектор-столбцов размерности n с элементами из $\mathbb{R}_{\max,+}$ будем обозначать через $\mathbb{R}^n_{\max,+}$.
- Для любых векторов $\boldsymbol{a} = (a_i)$ и $\boldsymbol{b} = (b_i)$ из $\mathbb{R}^n_{\max,+}$, а также скаляра $w \in \mathbb{R}_{\max,+}$ верны следующие покомпонентные равенства:

$$\{\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}\}_i = a_i \oplus b_i, \quad \{w\boldsymbol{a}\}_i = wa_i.$$

- Вектор $\boldsymbol{a}$ линейно зависит от набора векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, если верно равенство $\boldsymbol{a} = w_1\boldsymbol{b}_1 \oplus \cdots \oplus w_n\boldsymbol{b}_n$ для некоторых скаляров $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_{\max,+}$.

Алгебра матриц над $\mathbb{R}_{\max,+}$

- Обозначим через $\mathbb{R}_{\max,+}^{m\times n}$ множество матриц из m строк и n столбцов, состоящих из элементов множества $\mathbb{R}_{\max,+}$.
- Если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ – матрицы, а $w \in \mathbb{R}_{\max,+}$ – скаляр, то верны следующие выражения:

$$\{A \oplus B\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{BC\}_{ij} = \bigoplus_k b_{ik}c_{kj}, \quad \{wA\}_{ij} = wa_{ij}.$$

- Для любой квадратной матрицы A и целого числа $p > 0$ выполнены соотношения

$$A^0 = I, \quad A^p = AA^{p-1} = A^{p-1}A.$$

- Собственный вектор и собственное число матрицы определяются естественным образом.

- След матрицы $A = (a_{ij})$ – это величина, вычисляемая следующим образом:

$$\mathrm{tr} A = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

- Максимальное собственное число матрицы A называется спектральным радиусом и может быть найдено по формуле

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(A^m).$$

- Для любой матрицы A размерности $n \times n$ определим матрицу (матрица Клини)

$$A^* = I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^{n-1}.$$

Задача размещения: Минимаксная задача

Задача размещения одиночного объекта

- Задано множество точек метрического пространства.
- Найти новую точку, которая оптимизирует некоторую функцию расстояний от заданных точек до этой точки.

Минимаксная задача размещения (задача Ролса)

- Размещение по критерию максимальной справедливости.
- Минимизировать максимум расстояния до заданных точек.
- Такая проблема появляется при размещении объектов в городах с прямолинейными, перпендикулярными улицами.
- Таковыми могут являться пункты экстренной помощи населению, магазин или образовательное учереждение.

Размещение с прямоугольной метрикой

Прямоугольная метрика в $\mathbb{R}^2$ (Манхэттенская метрика)

- Для любой пары векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ расстояние вычисляется по формуле

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

- Прямоугольная метрика в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ записывается следующим образом:

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1^{-1} y_1 \oplus y_1^{-1} x_1)(x_2^{-1} y_2 \oplus y_2^{-1} x_2).$$

Минимаксная задача размещения с прямоугольной метрикой

- Рассмотрим набор точек $\boldsymbol{r}_i = (r_{1i}, r_{2i})^T \in \mathbb{R}^2$ и чисел $w_i \in \mathbb{R}$ для $i = 1, \ldots, m$.
- Требуется найти все векторы $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$, которые дают

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2} \max_{1 \leq i \leq m} (\rho(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{x}) + w_i).$$

- Существует геометрическое решение такой задачи.
- Алгебраическое решение задачи является более удобным для дальнейшего анализа и разработки приложений.
- Целью работы было получение полного решения задачи в алгебраической форме.

Преобразование задачи размещения

В идемпотентной форме задача переписывается следующим образом:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2} \bigoplus_{i=1}^{m} w_i(x_1^{-1}r_{1i} \oplus r_{1i}^{-1}x_1)(x_2^{-1}r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1}x_2).$$

Раскрываем скобки и вводим обозначения

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}^{-1}, \quad b = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i},$$
$$c = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}, \quad d = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1},$$

задача принимает вид

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2} (a x_1^{-1} x_2 \oplus b x_1 x_2^{-1} \oplus c x_1^{-1} x_2^{-1} \oplus d x_1 x_2).$$

Сведение задачи к известной

Введем вектор и матрицу

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^{-1} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & a & \mathbb{0} \\ b & \mathbb{0} & c \\ \mathbb{0} & d & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Теперь можно записать расширенную задачу с учетом введенных матрицы и вектора

$$\min_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3} \boldsymbol{y}^- A \boldsymbol{y}.$$

При этом вектор $\boldsymbol{y}$ должен удовлетворять условию $y_1 = y_3^{-1}$.

Решение экстремальной задачи

Пусть $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}_{\max,+}$ и $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\max,+}$. Рассмотрим экстремальную задачу, сформулированную в терминах идемпотентной математики

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n} \boldsymbol{x}^{-} A \boldsymbol{x}.$$

Теорема (Об экстремальном свойстве спектрального радиуса, Н.К. Кривулин 2013)

Пусть A — матрица со спектральным радиусом λ и $A_\lambda = \lambda^{-1} A$. Тогда минимум в задаче равен λ. Общее решение имеет вид

$$\boldsymbol{x} = A_\lambda^{*} \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n}_{\max,+}.$$

Основной результат

- Доказана теорема, которая полностью решает задачу размещения точечного объекта на плоскости.
- Сначала сформулируем теорему в терминах идемпотентной алгебры.

Теорема

Минимум $\lambda = (ab \oplus cd)^{1/2}$ в экстремальной задаче достигается тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \lambda^{1-2\alpha}(a^{\alpha}b^{\alpha-1}c^{\alpha}d^{\alpha-1})^{1/2} \\ (a^{-\alpha}b^{1-\alpha}c^{\alpha}d^{\alpha-1})^{1/2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Переменные a, b, c, d имеют тот же смысл, что и раньше.

Перейдем к стандартным обозначениям.

Следствие

Минимум $\lambda = \max(a+b, c+d)/2$ *в экстремальной задаче достигается тогда и только тогда, когда*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} (1-2\alpha)\lambda + \alpha(a+c)/2 + (\alpha-1)(b+d)/2 \\ \alpha(c-a)/2 + (\alpha-1)(d-b)/2 \end{pmatrix},$$

при $0 \le \alpha \le 1$, *где*

$$a = \max_{1\le i\le m}(w_i + r_{1i} - r_{2i}), \quad b = \max_{1\le i\le m}(w_i - r_{1i} + r_{2i}),$$

$$c = \max_{1\le i\le m}(w_i + r_{1i} + r_{2i}), \quad d = \max_{1\le i\le m}(w_i - r_{1i} - r_{2i}).$$

Обзор доказательства

- Доказательство сводится к поиску всех возможных векторов $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, являющимися решениями задачи $\min_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3} \boldsymbol{y}^{-} A \boldsymbol{y}$, при $y_1 = y_3^{-1}$.
- Вычисляется значение $\lambda = (ab \oplus cd)^{1/2}$.
- Примененяем теорему о спектральном радиусе и удаляем линейно зависимый столбец.
- Тогда $\boldsymbol{y}$ – решение системы для любого $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= v_1 \oplus \lambda^{-2} acv_2, \\
y_2 &= \lambda^{-1} bv_1 \oplus \lambda^{-1} cv_2, \\
y_3 &= \lambda^{-2} bdv_1 \oplus v_2.
\end{aligned}
$$

- Условие на первую и третью координаты вектора $\boldsymbol{y}$, можно записать

$$
(\lambda^{-2} bdv_1 \oplus v_2)(v_1 \oplus \lambda^{-2} acv_2) = \mathbb{1}.
$$

- Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые, тогда задача сводится к системе неравенств

$$\begin{aligned} v_1 &\le \lambda b^{-1/2} d^{-1/2}, \\ v_1 v_2 &\le \mathbb{1}, \\ v_2 &\le \lambda a^{-1/2} c^{-1/2}, \end{aligned}$$

  при этом по крайней мере одно является равенством.
- Общая задача разбивается на случаи, когда λ принимает различные значения. ($\lambda^2 = ab$ или $\lambda^2 = cd$)
- Затем выделяются подслучаи соответствующие равенствам на месте каждого из неравенств.
- Все результаты приводится к одинаковому виду введением параметра $0 \le \alpha \le 1$.

Численный пример

Результатом для примера с девятью точками и нулевыми весами является отрезок, представленный на рисунке.

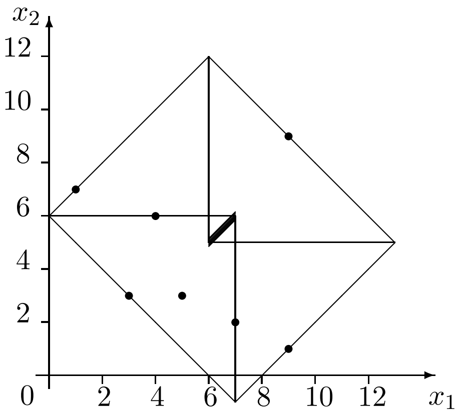

Рис.1 Результат для примера в случае $w_i = 0$

Рассмотрим набор ненулевых весов. Результат представлен на рисунке.

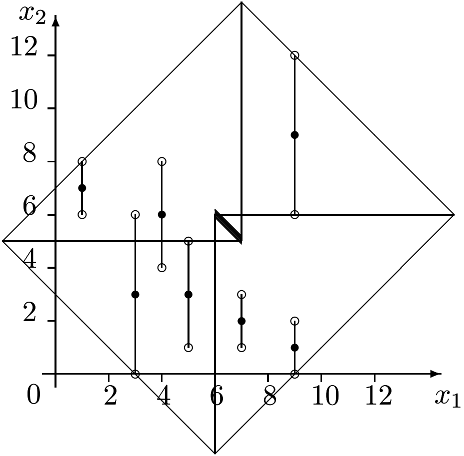

Рис.2 Результат для примера в случае $w_i \neq 0$

Результат работы программы с нулевыми весами и ненулевыми представлены на рисунках.

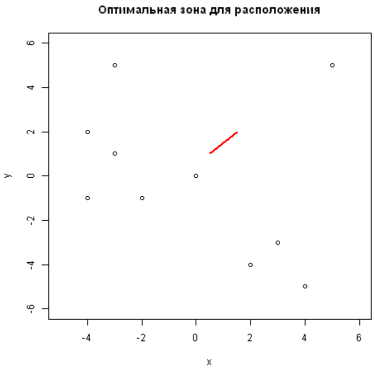

Рис.3 Случай $w_i = 0$

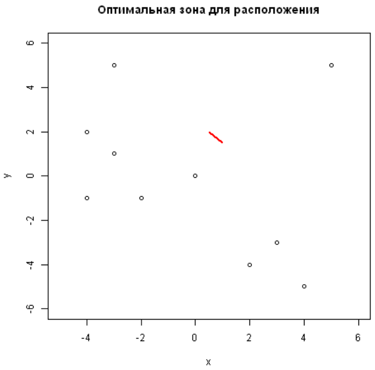

Рис.4 Случай $w_i \neq 0$

Итоги

- Исследована минимаксная задача размещения объекта на плоскости с прямоугольной метрикой и дано представление задачи в терминах идемпотентной математики.
- Дано полное решение задачи. Результат сформулирован в виде теоремы. Предложено её доказательство.
- Представлены примеры численного решения задач размещения и приведены графические иллюстрации полученных результатов.
- Разработана процедура на языке R для решения практических задач размещения и визуализации результатов.

Спасибо за внимание!