Связность в абстрактных графах

Горбунов Сергей Александрович, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Сушков Ю.А..
Рецензент: Зорина Ю.А.

Санкт-Петербург
2010г.

Введение

Общая теория систем - концепция исследования объектов, представляющих собой системы.

Теорема. Систему n-го порядка можно разложить на $(n-2)$ трехместных отношения .

Гиперграфы описывают:

- структуру трехместных отношений;
- математические модели:

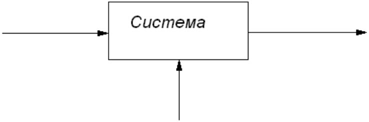

Рис.: Модель

Постановка задачи

Понятие **абстрактной независимости**, или **матроида**, было введено как обобщение независимости в линейной алгебре.

Понятие **абстрактного графа**, или φ-**графа**, вводим с целью усилить аналогию между графами и матроидами.

Основная цель:

- обобщить понятия теории графов на гиперграфы, а затем на абстрактные графы;
- сравнить получившиеся результаты с теорией матроидов.

Основные определения

Пусть $\varphi : 2^D \to Z$ и $\varphi(\emptyset) = 0$. Функция φ называется:
-*монотонной*, если $A \subseteq B \subseteq D \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$,
-*субмодулярной*, если

$$A, B \in D \Rightarrow \varphi(A) + \varphi(B) \geq \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B), \tag{1}$$

-*нормированной*, если для любого $\{a\} \in D$ $\varphi(\{a\}) = 1$.

Определение

Абстрактным графом (или φ-графом) называется пара $\Gamma = \langle \varphi, D \rangle$, где D - конечное множество его ребер, а $\varphi : 2^D \to Z$ - монотонная субмодулярная покрывающая функция.

Множество ребер $W \subseteq D$ φ-графа называется **лесом**, если для любого $A \subseteq W$ выполняется условие независимости:

$$\varphi(A) \geq |A|\,. \tag{2}$$

Каркас - максимальный подграф, являющийся лесом.

Компоненты связности леса

- D - лес

Теорема 1. Для всякого леса $\langle\varphi, W\rangle$ существует единственное разбиение множества его ребер $W = T_1 + T_2 + ... + T_b$, удовлетворяющее следующим условиям:
a) $\varphi(T_i) = |T_i|$ для любого $i \in 1 : b$;
b) для любого $T' \subseteq W$, $\varphi(T') = |T'|$, найдется такое T_i, что $T' \subseteq T_i$.

Определение

Абстрактный граф $\langle\varphi, T_i\rangle$, порожденный элементом разбиения T_i множества W, называется компонентой связности леса $\langle\varphi, W\rangle$, а лес с одной компонентой связности - деревом.

Компоненты связности абстрактного графа

- D - зависимое множество

H_i - множество хорд компоненты T_i, тогда $D_i = H_i + T_i$.

Теорема 2. Разбиение абстрактного графа $\langle \varphi, D \rangle$, где $D = D_1 + D_2 + ... + D_b$, на компоненты связности $\langle \varphi, D_i \rangle$, $i \in 1 : b$, не зависит от способа выбора его каркаса.

Определение

Подграфы $\langle \varphi, D_i \rangle$, $i \in 1 : b$ называется компонентами связности абстрактного графа $\langle \varphi, D \rangle$. Абстрактный граф связный, если он состоит из одной компоненты связности.

S-разбиение

Разбиение абстрактного графа на компоненты связности в соответствии с теоремой 2 называется его s-**разбиением**.

Теорема

При заданном алгоритме разбиения абстрактного графа на компоненты связности условие субмодулярности функции φ *является необходимыми и достаточными для единственности* s*-разбиения.*

Квазиизоморфизм графов

Определение

Два абстрактных графа квазиизоморфны, если в s-разбиении они имеют изоморфные компоненты связности.

Задача перечисления деревьев:

	$\varphi(\emptyset) = 0$	$\varphi(\emptyset)$ не рассматривается
$n = 1$	1	1
$n = 2$	1	1
$n = 3$	1	4
$n = 4$	1	35

Таблица: Влияние значения $\varphi(\emptyset)$ на число деревьев, при заданном числе ребер n в φ-графе

N-связность матроидов

Определение

Матроидом *называется пара $\langle I, D \rangle$, в которой D - непустое конечное множество, а $I \subseteq 2^D$- непустая совокупность подмножеств из D (называемых независимыми), удовлетворяющих следующим аксиомам:*
$i1$) если $A \subseteq B \in I$, то $A \in I$;
$i2$) если $A \in I$, $B \in I$ и $|A| = |B| - 1$, то существует элемент $a \in B \backslash A$, такой, что $A + a \in I$.

Ранг матроида - мощность наибольшего независимого множества.
$M = \langle I, D \rangle$ - матроид, $\{S, T\}$ - разбиение D.

Определение

Матроид M k-отделяем, если:

1. $\rho(M) - \rho(S) - \rho(T) + 1 = k$,
2. $Min(|S|, |T|) \geq k$.

$Min(k) = \lambda(M)$ - связность матроида.
Матроид M n-связен, если $0 \leq n \leq \lambda(M)$.

Сравнение абстрактных графов и матроидов

Со всяким φ-графом можно связать матроид, определенный на множестве его ребер, если в качестве независимых множеств матроида взять множества лесов графа $\Longrightarrow$ сравнение понятий связности.

	φ-графы	Матроиды
Дерево	+	-
Лес с n компонентами связности	-	-
Цикл в абстрактном графе	+	+
Абстрактный граф с n компонентами связности	-	-

Таблица: Сравнение связности матроидов и абстрактных графов

Цепь в теории графов и гиперграфов

Основная задача: дать определение цепи, используя лишь первичные понятия (ребра, вершины, функцию φ).

Пусть D - множество ребер графа. Тогда $C \subseteq D$ называется цепью, если выполняются следующие условия:
1. $\varphi(C) = |C|$
2. $\forall A \subseteq C : \varphi(A) \geq |A|$

- $3(a)$. $\exists$ лишь две вершины, каждой из которых инцидентно всего одно ребро.
- $3(b)$. Существует лишь два ребра, удаление одного из которых не приводит к разбиению графа на две компоненты связности.
- $3(c)$. Степени всех вершин графа не больше двух.

Цепь в теории графов и гиперграфов

- для графов: $\varphi(A) = |\Gamma A| - 1$
- для гиперграфов: $\varphi(A) = |\Gamma A| - q + 1$

Обобщим на гиперграфы определение цепи, используя условие 3c.

Определение

$C \subseteq D$ будем называть цепью, если выполняются:

1. $\varphi(C) = |C|$;
2. $\forall A \subseteq C : \varphi(A) \geq |A|$;
3. *Степени всех вершин не превосходят q.*

Перечислим все цепи, согласно данному определению.

Перечисление цепей

Для гиперграфа с четырьмя ребрами:

1. 123-124-125-346
2. 123-124-135-236
3. 123-124-135-246
4. 123-124-135-256
5. 123-124-135-456
6. 123-124-156-256
7. 123-124-156-345
8. 123-124-156-356
9. 123-124-356-456
10. 123-145-246-356

Число ребер	1	2	3	4	5	6
Число цепей	1	1	3	10	58	564

Таблица: Число цепей в зависимости от числа ребер в гиперграфе

Цепь в теории абстрактных графов

Определение

$\langle \varphi, C \rangle$ *будем называть цепью, если выполняются:*

1. $\varphi(C) = |C|$;
2. $\forall A \subseteq C : \varphi(A) \geq |A|$;
3. *Не существует* L: $K \subseteq L \subset C : \varphi(L) = |L|$, *где* K *- множество ребер, которые соединяет цепь.*

Результаты

- Сформулирована теорема о необходимости и достаточности условия субмодулярности функции φ для единственности s-разбиения.
- Сформулированы понятия изоморфизма и квазиизоморфизма абстрактных графов.
- Используя понятие квазиизоморфизма, изучено влияние условия субмодулярности функции φ на число деревьев.
- Проведено сравнение связности в абстрактных графах и в матроидах.
- Изучены некоторые определения цепи, обобщены на гиперграфы и абстрактные графы, приведены примеры.