Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра статистического моделирования

Дипломная работа

Гормина Анатолия Андреевича

Минимизация усредненной по параметру дисперсии оценки цены опционного контракта

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент Ю.Н. Каштанов

Рецензент
к.ф.-м.н., доцент Н.Э. Голяндина

Введение

- В дипломной работе получены оценки цен опционных контрактов с минимальной дисперсией, усредненной по параметру опциона. Рассмотрены случаи различных параметров усреднения.
- Процесс эволюции цен базового актива S_t задается уравнением

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \quad S_0 = s_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

где $(W_t)_{t \geqslant 0}$ — винеровский процесс относительно $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$,
$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ — естественная фильтрация винеровского процесса.

- Платежная функция опциона f_k с параметром k имеет вид

$$f_k = f((S(t,\omega))_{t \in [0,T]}; k). \tag{2}$$

- Рациональная цена опциона с f_k, датой исполнения T и параметром k

$$C_k = \mathbf{E} e^{-\int_0^T r(s)ds} f_k. \tag{3}$$

Постановка задачи

- Пусть $(\Theta, \mathfrak{B}, \mathsf{Q})$ — измеримое пространство. Параметр опциона $k \in \Theta$.
- Требуется построить оценки $\widehat{C}_k$ величин $C_k = \mathbf{E} e^{-\int_0^T r(s)ds} f_k$, минимизирующие усредненную по k дисперсию

$$\int_\Theta \mathrm{Var}(\widehat{C}_k)\mathsf{Q}(dk). \tag{4}$$

- Рассмотрим оценки $\widehat{C}_k = e^{-\int_0^T r(s)ds} f_k \exp\left(-\int_0^T \upsilon_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \upsilon_s^2 ds\right)$.
- **Постановка задачи**

$$\min_{\upsilon} \int_\Theta \widetilde{\mathbf{E}}(\widehat{C}_k)^2 \mathsf{Q}(dk). \tag{5}$$

- Мера $\widetilde{\mathbf{P}}$ такая, что

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \exp\left(\int_0^T \upsilon_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^T \upsilon_s^2 ds\right), \tag{6}$$

где υ_s — измеримая относительно $\mathcal{F}_s$ функция.

Теорема 1

Обозначим

$$\gamma_t = \mathbf{E}\left(\left(\int_\Theta f_k^2(S(\cdot,\omega))\mathsf{Q}(dk) \right)^{\frac{1}{2}} \middle| \mathcal{F}_t \right). \tag{7}$$

Теорема 1. *При определенных условиях на платежные функции опционов f_k минимум*

$$\min_{\upsilon} \int_\Theta \widetilde{\mathbf{E}}(\widehat{C}_k)^2 \mathsf{Q}(dk) = \gamma_0^2 \tag{8}$$

достигается при

$$\upsilon_t = -\frac{\alpha_t}{\gamma_t}, \tag{9}$$

где процесс $\alpha_t = \alpha_t(\omega)$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ и находится из условия

$$d\gamma_t = \alpha_t dW_t. \tag{10}$$

Случай барьерных опционных контрактов

- Платежная функция барьерного опциона покупки с барьером b имеет вид

$$f_b = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{если } S_t < b \text{ для любого } t \in [0,T], \\ 0, & \text{если } S_t \geqslant b \text{ для некоторого } t \in [0,T]. \end{cases} \tag{11}$$

- Рассмотрим в качестве параметра усреднения барьер $b \in \Theta$.
- Определим

$$M_t = \sup_{\tau \in [0,t]} S_\tau, \quad Q(M_T) = \sqrt{\mathsf{Q}(\Theta \cap (M_T, +\infty))}. \tag{12}$$

Утверждение 1. *Оптимальная $(\mathcal{F}_t)$ - подчиненная функция υ_t, в случае барьерных опционов имеет вид*

$$\upsilon_t = -\sigma(t, S_t) S_t \frac{u'_x(t, S_t, M_t)}{u(t, S_t, M_t)}, \tag{13}$$

где

$$u(t,x,y) = \mathbf{E}\left((S_T - K)^+ Q(M_T) \;\Big|\; S_t = x, M_t = y \right). \tag{14}$$

Вид оценки в случае усреднения по времени

- Рассмотрим стандартный европейский опционный контракт с платежной функцией

$$f_t = f(S_t) = (S_t - K)^+, \tag{15}$$

где K — цена исполнения, t — дата исполнения опциона.

- Будем рассматривать $t \in [0, T]$ — параметр усреднения дисперсии.
- Строим оценки цен опционов в виде

$$\widehat{C}_t = e^{-\int_0^t r(s)ds} f_t \rho_t, \tag{16}$$

$$\rho_t(\omega) = \exp\left(\int_0^t \upsilon_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \upsilon_s^2 ds\right), \quad t \in [0, T]. \tag{17}$$

- Определим меру $d\widetilde{\mathbf{P}} = \rho_T^{-1} d\mathbf{P}$.
- Задача минимизации взвешенной дисперсии в классе оценок $\widehat{C}_t$

$$\min_{\upsilon} \int_0^T \mathbf{E}_{\widetilde{\mathbf{P}}} \left(e^{-\int_0^t r(s)ds} f_t \rho_t\right)^2 \mathsf{Q}(dt). \tag{18}$$

Задача минимизации для случая усреднения по времени

- Задачу минимизации запишем в виде

$$\min_{\upsilon} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \int_0^T f^2(S_t) \exp\left(\int_0^t \upsilon_s^2 - 2r_s ds \right) \mathsf{Q}(dt), \tag{19}$$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \exp\left(\int_0^T \upsilon_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \upsilon_s^2 ds \right). \tag{20}$$

- Более общая задача:

$$\min_{\upsilon} U(t, x; \upsilon), \quad \text{для любых } (t, x) \in \mathcal{D} = [0, T) \times (0, +\infty), \tag{21}$$

где

$$U(t, x; \upsilon) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(\int_t^T \mathbf{e}^{\int_t^\tau \upsilon_s^2 - 2r_s ds} f^2(S_\tau) \mathsf{Q}(d\tau) \middle| S_t = x \right). \tag{22}$$

- Задачу минимизации (19) можно записать в виде $\min\limits_{\upsilon} U(0, s_0; \upsilon)$, где s_0 — начальное значение для процесса $(S_t)_{t \in [0,T]}$.

Вид оптимальной функции

Утверждение 2. *При определенных условиях на* $\sigma(t,x)$, $r(t)$ *и плотность* $p(t)$ *меры* Q *функция*

$$U^*(t,x) = U(t,x;\upsilon^*) = \min_{\upsilon} U(t,x;\upsilon) \tag{23}$$

удовлетворяет уравнению

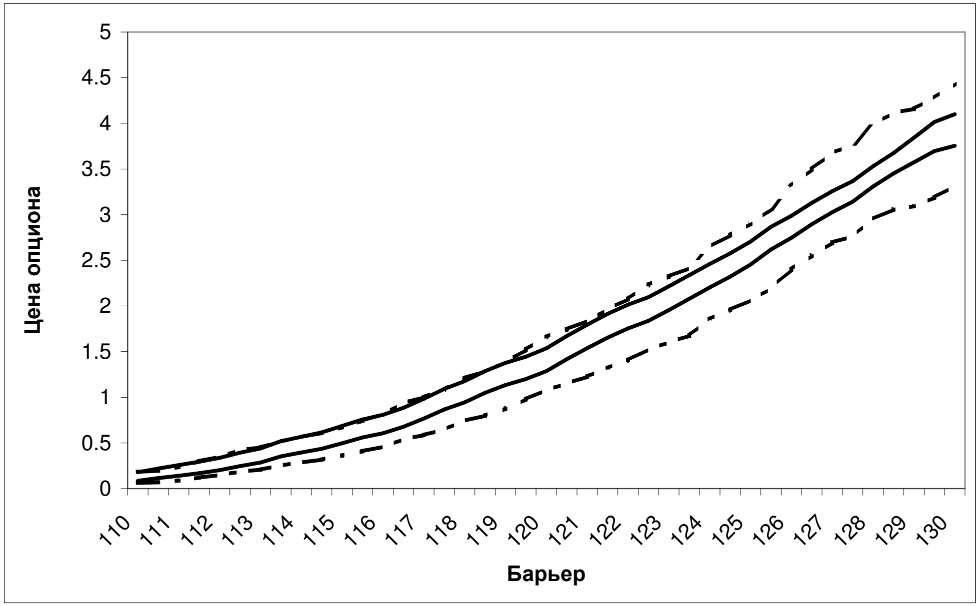
$$\dot{U}^* + \frac{\sigma^2(t,x)x^2}{2}U^{*\prime\prime} + r(t)xU^{*\prime} - 2r(t)U - \frac{(\sigma(t,x)xU^{*\prime})^2}{4U^*} = -(x-K)^{+2}p(t) \tag{24}$$

в $\mathcal{D} = [0,T) \times (0,\infty)$. *Соответствующая* $U^*(t,x)$ *оптимальная функция* $\upsilon^*(t,x)$ *имеет вид*

$$\upsilon^*(t,x) = -\sigma(t,x)x\frac{U^{*\prime}(t,x)}{2U^*(t,x)}. \tag{25}$$

- В работе строится функциональная последовательность $\{\upsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, которая при определенных условиях сходится к оптимальной функции υ^*.

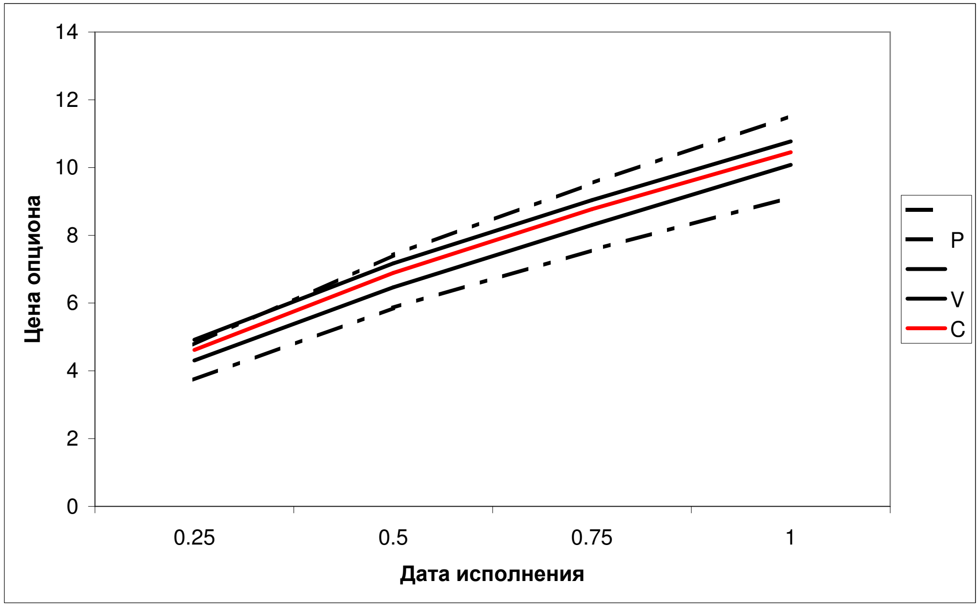
График доверительных границ цен барьерных опционов



Данные: $r(t) \equiv 0.05$, $T = 1$, $S_0 = 100$, $K = 100$. Волатильность $\sigma(x)$ зависит от цены базового актива.

- Оцениваем барьерные колл опционы с барьером $b \in [110, 130]$.
- Положим Q — равномерное распределение на интервале $[110, 130]$.
- Для 1000 моделирований процесса $(S_t)_{t \in [0,T]}$ и надежности $\gamma = 0.99$ вычислены доверительные границы цен опционов.
- Взвешенную дисперсию удалось уменьшить почти в 9 раз — с 16.6 до 1.9.

График доверительных границ цен европейских опционов



Данные: $r(t) \equiv 0.05$, $S_0 = 100$, $K = 100$. Волатильность $\sigma(t, x) \equiv 0.2$. Дата исполнение $t \in \Theta = \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$, Q — равномерное распределение на Θ. Для 1000 моделирований процесса $(S_t)_{t \in [0,T]}$ и надежности $\gamma = 0.99$ вычислены границы доверительных интервалов цен опционов.

- C — цена опциона, вычисленная по формуле Блэка и Шоулса,
  V — доверительные границы с использованием построенной выше оценки,
  P — доверительные границы цен опционов без использования этой оценки.
- Взвешенную дисперсию удалось уменьшить в 7 раз.
- Временные затраты на моделирование одной траектории процесса увеличились в 2 раза.

Итог

- В дипломной работе получены оценки цен опционных контрактов с минимальной дисперсией, усредненной по параметру опциона. Рассмотрены случаи различных параметров усреднения.
- Результаты прикладных расчетов показывают уменьшение трудоемкости для случая стандартных европейских опционов, когда усреднение происходит по дате исполнения и цене исполнения.
- Решение задачи оптимизации вычисления оптимальных функций, построенных в случаях барьерных и азиатских опционов, позволит эффективно использовать предложенный подход для оценивания опционных контрактов данных видов.