Трудоемкость решения уравнения Пуассона с помощью процессов блуждания по сферам

Шныренкова Дарья Юрьевна, группа 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — к.ф.-м.н. Н.Э. Голяндина
Рецензент — к.ф.-м.н. В.В. Некруткин

Постановка задачи

Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, с границей $\Gamma = \partial G$:

$$\begin{cases} \Delta u = -q \\ u|_\Gamma = \varphi \end{cases}$$

Предположения:

- Γ является R_1-регулярной
- $\varphi \in \mathbf{C}(\Gamma)$ и q удовлетворяет условию Гельдера на G.

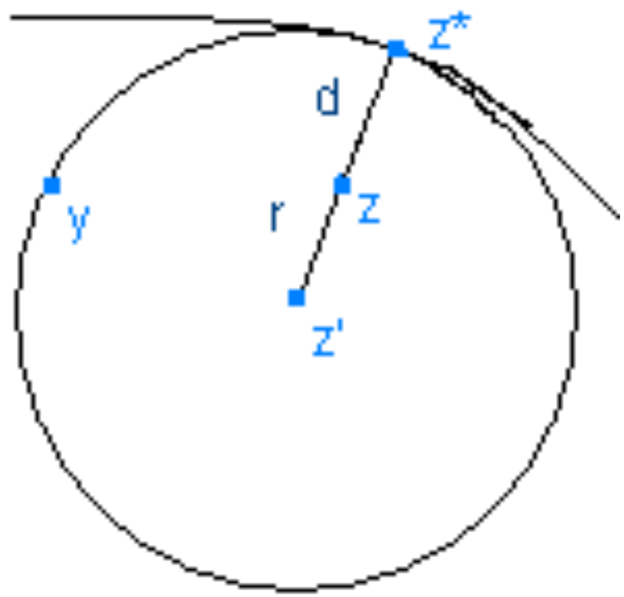
Оценка решения задачи методом Монте-Карло строится на траекториях марковских цепей, вложенных в броуновское движение:

- стандартный сферический процесс (ССП)
- сферический процесс со сдвинутыми центрами (СПСЦ)

Цель — реализовать оценки, исследовать и сравнить их трудоемкость

Сферические процессы: обозначения

- Область $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, с границей Γ;
- $d(\mathbf{z}) = \mathrm{dist}(\mathbf{z}, \Gamma)$;
- *Функция сдвига:*
  $k : G \mapsto \mathbb{R},\ k(\mathbf{z}) \geq 1$; — такая, что шар с центром в $\mathbf{z}'$ и радиусом kd лежит в $\overline{G}$,
  $\mathbf{z}' = \mathbf{z} + (k(\mathbf{z}) - 1)(\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)$;
- *Сфера с $k(\mathbf{z})$-сдвинутым относительно точки $\mathbf{z}$ центром:*
  $S_{\mathbf{z}'} = \partial B_{k(\mathbf{z})d(\mathbf{z})}(\mathbf{z}')$.



Сферические процессы: определения

Введем T: $0 \le T \le R_1$, $k(\mathbf{z}) = \max(T/d(\mathbf{z}), 1)$;

- *T-сферическое семейство со сдвинутыми центрами* — марковское семейство $\Xi = \{\xi_n, \mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n), \mathbf{P}_\mathbf{x}\}$ при $\mathbf{x} \in G$, имеющее переходную функцию с плотностью

$$p_\mathbf{z}(\mathbf{y}) = \frac{k^{m-2}(\mathbf{z})(2k(\mathbf{z}) - 1)d^m(\mathbf{z})}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^m}$$

  относительно равномерного распределения $\mu_{\mathbf{z}'}$ на сфере $S_{\mathbf{z}'}$;
- $T > 0$:
  - Если $d(\mathbf{z}) < T$, то $k(\mathbf{z}) > 1$ и радиус R сферы со сдвинутым центром равен T, $k(\mathbf{z}) \to \infty$ при $z \to \Gamma$.
  - Иначе $k(\mathbf{z}) = 1$ и $R = d(\mathbf{z})$.
- $T = 0$: $k(\mathbf{z}) \equiv 1$ — стандартный сферический процесс.

Оценка решения

Известно, что реализуемая оценка решения $u(x)$ внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = -q \\ u|_\Gamma = \varphi \end{cases}$$

имеет форму

$$\zeta_\varepsilon^* = \sum_{n=0}^{\nu_\varepsilon - 1} a(\xi_n) q(\lambda_n) + \varphi(\xi_{\nu_\varepsilon}^*),$$

где $\{\xi_l\}_{l=0}^{\infty}$ — T-сферический процесс со сдвинутыми центрами, начинающийся в точке x.

- ξ_n распределено на сфере со сдвинутым относительно ξ_{n-1} центром
- λ_n распределено в шаре со сдвинутым относительно ξ_{n-1} центром

Сравнение трудоемкости

Факторы, влияющие на трудоемкость:

- среднее число шагов T-сферического процесса до попадания в ε-окрестность границы:
  - $$\begin{array}{rll} \text{ССП} & (T = 0): & \leq C_1 \ln|\varepsilon| + C_2 \\ \text{СПСЦ} & (T > 0): & \leq C_1 \ln\ln|\varepsilon| + C_2 \end{array}$$
- дисперсия оценки решения
  - дисперсия конечна и ограничена константой, не зависящей от выбора T;
- трудоемкость моделирования одного шага сферического процесса, т.е. моделирования ξ_n и λ_n
  - моделирование СПСЦ более трудоемко, чем ССП

Цель:

- уменьшение трудоемкости решения задачи методом Монте-Карло путем построения хороших методов моделирования ξ_n и λ_n.

Вид распределений ($m = 3$)

- $\xi \sim p_{\mathbf{z}}(\mathbf{y})$ — распределение на сфере:

$$p_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}) = \frac{k(2k-1)d^3}{4\pi R^2 |\mathbf{z}-\mathbf{y}|^3}; \qquad k = k(\mathbf{z}),\ d = d(\mathbf{z});$$

- $\lambda \sim \phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{y})$ — распределение в шаре:

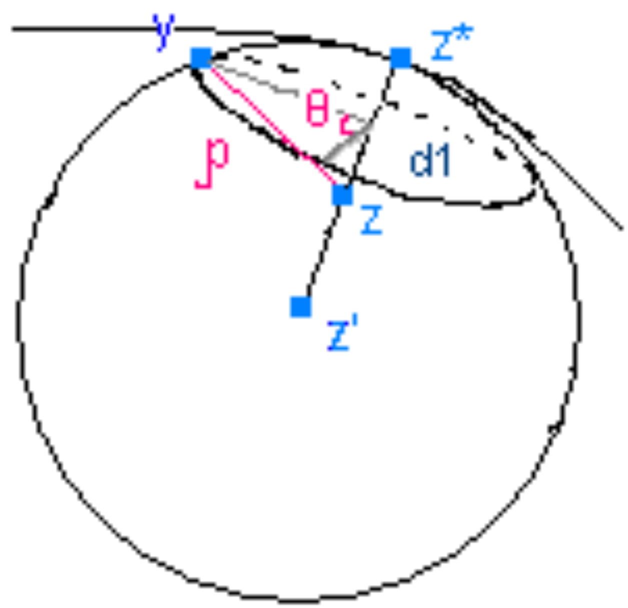
$$\phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}) = g_{\mathbf{z}}(\mathbf{y})/a_{\mathbf{z}};$$

  - $a_{\mathbf{z}} = \dfrac{R^2 - |\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^2}{6};$
  - $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}) = \dfrac{1}{4\pi} \begin{cases} \left(\dfrac{1}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} - \dfrac{R}{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}\dfrac{1}{|\mathbf{z}^*-\mathbf{y}|}\right), & \text{если } \mathbf{z} \neq \mathbf{z}', \\ \left(\dfrac{1}{|\mathbf{y}|} - \dfrac{1}{d}\right), & \text{если } \mathbf{z} = \mathbf{z}'. \end{cases}$

Моделирование распределения на сфере

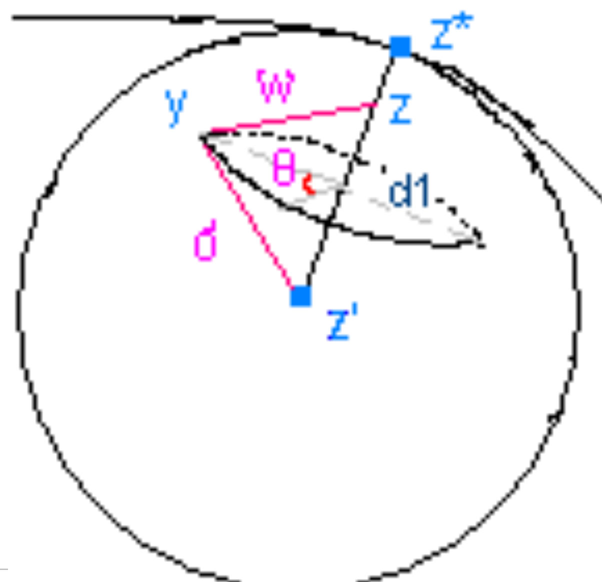
$$p_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}) = \frac{k(2k-1)d^3}{4\pi R^2 |\mathbf{z}-\mathbf{y}|^3}; \qquad k = k(\mathbf{z}),\ d = d(\mathbf{z});$$

- $k = 1$: равномерное распределение на сфере радиуса d;
- $k > 1$:
  - моделирование ρ с плотностью $\vartheta(\rho) = \dfrac{(R^2 - r^2)}{2r}\dfrac{1}{\rho^2}$ методом обратных функций;
  - равномерное распределение на окружности радиуса $d_1 = d_1(\rho)$.



Моделирование распределения в шаре

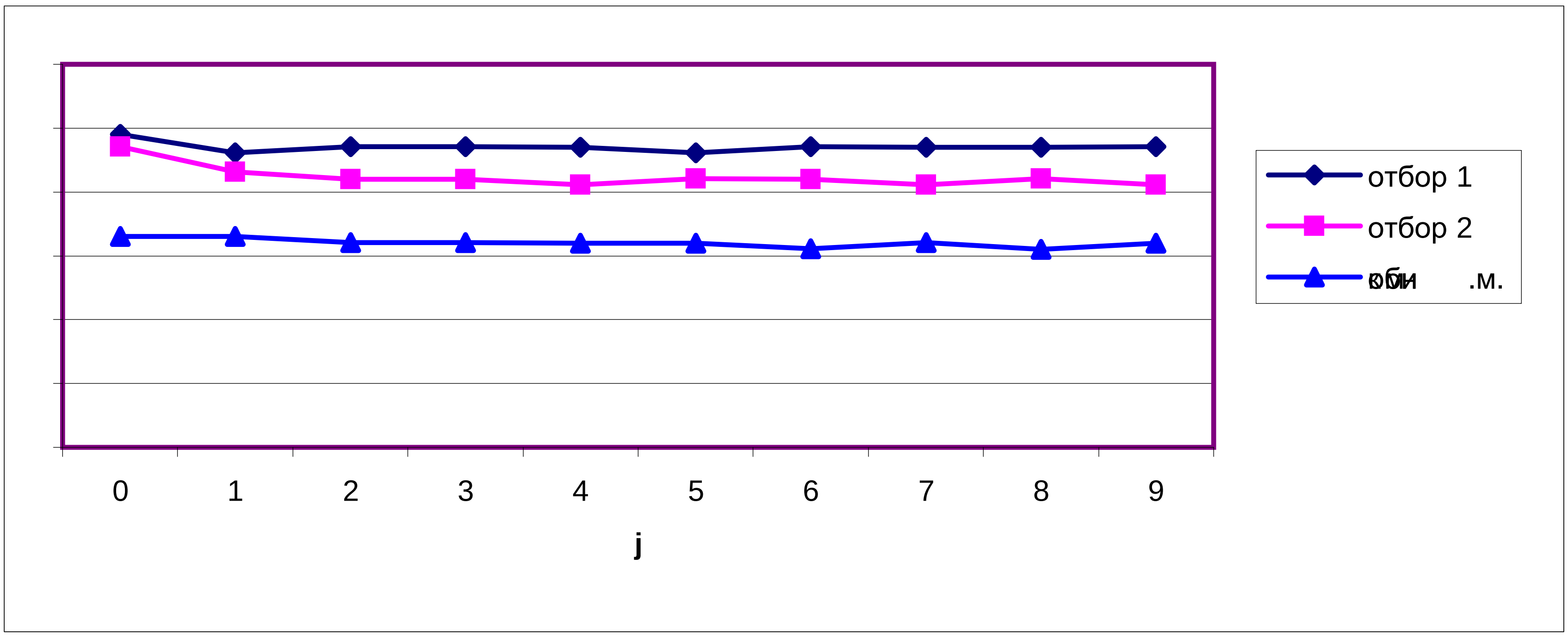
- $k = 1$: равномерное распределение на сфере с центром в точке $\mathbf{z}$ радиуса σ, где плотность $\vartheta(\sigma) = \dfrac{6\sigma(d-\sigma)}{d^3}$, $\sigma \in [0, d]$, моделируется с помощью второй порядковой статистики из трех р.р. случайных величин;
- $k > 1$:
  - моделирование переходом в новые координаты (ω, σ, θ);
  - $\phi_{\mathbf{z}}(\omega, \sigma, \theta) = \phi_1(\theta) \times \phi_2(\sigma) \times \phi_3(\omega|\sigma)$.
    - $\phi_1(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}$



Моделирование распределения в шаре. Плотность $\phi_2(\sigma)$

$$\phi_2(\sigma) = \frac{1}{R(2R-d)} \begin{cases} \dfrac{6\sigma(R-\sigma)}{d}, & \text{если } R-d \le \sigma < R, \\ \dfrac{6\sigma^2}{R-d}. & \text{если } 0 < \sigma < R-d \end{cases}$$

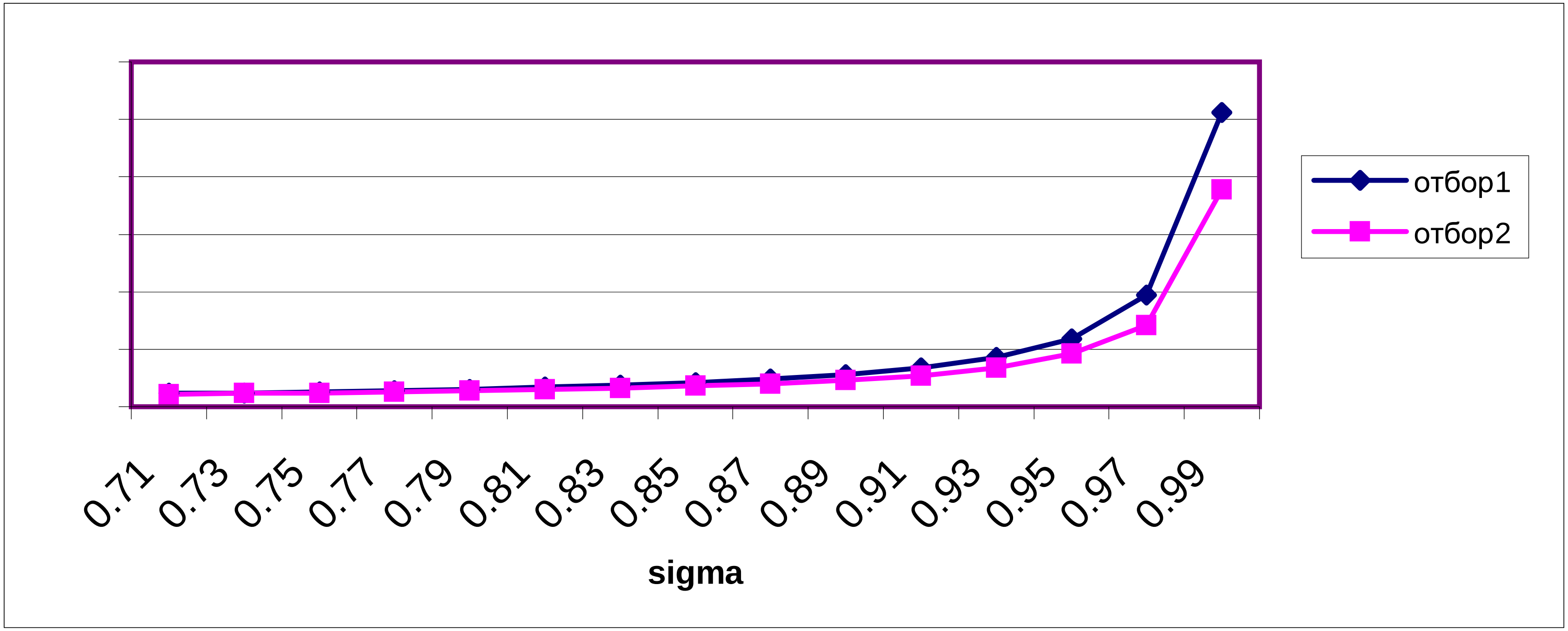
Время моделирования, оцененное с помощью 1000000 реализаций, в зависимости от коэффициента сдвига $k = 3 \cdot 5^j$.



Моделирование распределения в шаре. Плотность $\phi_3(\omega|\sigma)$

$$\phi_3(\omega|\sigma) = L \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{R^2-(R-d)^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{\sigma^2}{R^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\right),\ |R-\sigma| \le \omega < R+\sigma$$

Время моделирования для $k = 300$, оцененное с помощью 1000000 реализаций, в зависимости от σ ($T = 1$).



Алгоритм решения уравнения Пуассона

$$\zeta_\varepsilon^* = \sum_{n=0}^{\nu_\varepsilon - 1} a(\xi_n) q(\lambda_n) + \varphi(\xi_{\nu_\varepsilon}^*),$$

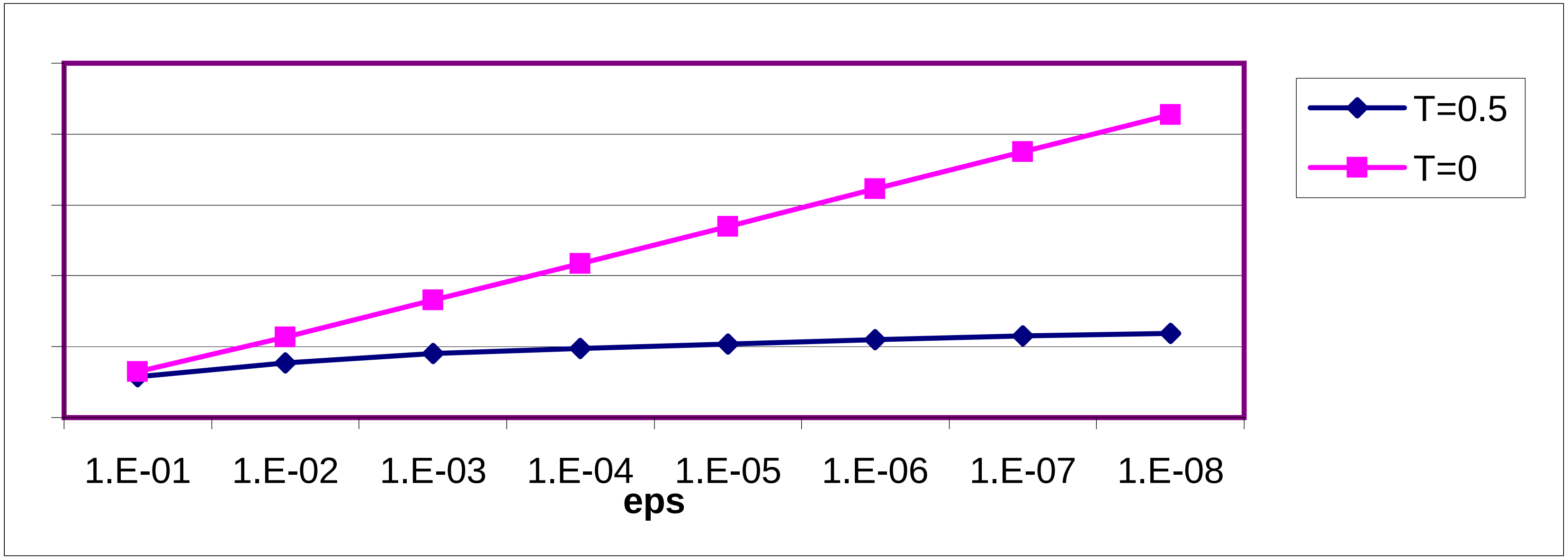
Вход: φ, q, T, ε, x_0
Выход: ζ_ε^*

1. $j \leftarrow 0$, $\xi_j \leftarrow x_0$, $f \leftarrow 0$, $f_0 \leftarrow 0$;
2. $d \leftarrow \mathrm{dist}(\xi_j, \Gamma)$, if $(d < \varepsilon)$ go to 7;
3. $\lambda_j \leftarrow \phi(\xi_j, y)$;//Алгоритмы “отбор+через максимум” и “отбор 2”, переход к глоб. координатам
4. $f \leftarrow f + a(\xi_j) q(\lambda_j)$
5. $\xi_{j+1} \leftarrow p(\xi_j, y)$; //Алгоритм “м. обр. функций”, переход к глоб. координатам
6. $j \leftarrow j + 1$, go to 2 ;
7. $f_0 \leftarrow \varphi(\xi_j^*)$ (ξ_j^* — граничная точка, ближайшая к ξ_j);
8. $\zeta_\varepsilon^* \leftarrow f_0 + f$.

Пример. Однородная задача

Область — шар радиуса 1 с центром в нуле.
Начальная точка — $x_0 = (0.1, 0, 0.1)$, 100000 реализаций.
Задача: $u(x) = 1/\mathrm{dist}(\mathbf{x}, K)$, $\varphi(x) = u|_\Gamma$, $q = 0$, $K = (2, 2, 2)$.

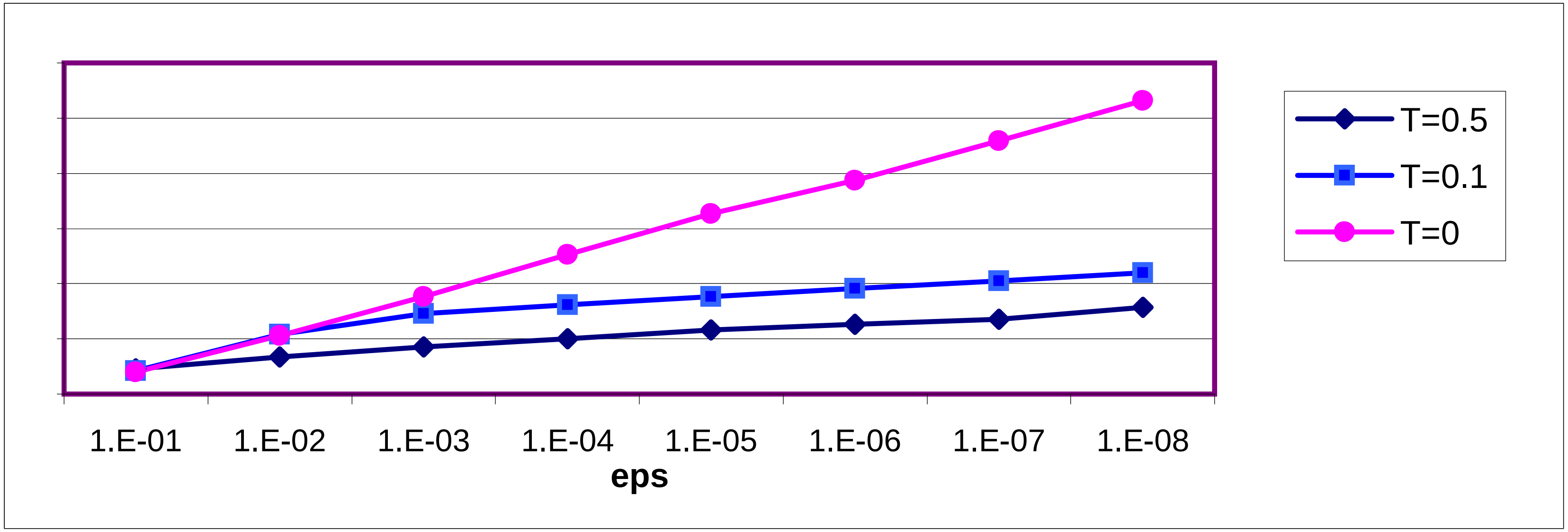
- Трудоемкость решения методом Монте-Карло с ростом параметра T уменьшается;
- Преимущество в трудоемкости решения методом Монте-Карло с помощью СПСЦ с параметром $T = 0.5$ по сравнению со ССП (T=0).



Пример. Неоднородная задача

Область — шар радиуса 1 с центром в нуле.
Начальная точка — $x_0 = (0.1, 0, 0.1)$, 100000 реализаций.
Задача: $u(x) = \mathrm{dist}^4(\mathbf{x}, K)$, $\varphi(x) = u|_\Gamma$, $q(x) = -20\mathrm{dist}^2(\mathbf{x}, K)$, $K = (2, 2, 2)$.

- Трудоемкость решения методом Монте-Карло в данном примере с ростом параметра T уменьшается;
- Преимущество в трудоемкости решения методом Монте-Карло с помощью СПСЦ с параметрами $T = 0.5$ и $T = 0.1$ по сравнению со ССП (T=0).



Двумерный случай

$$k \to \infty,\ d \to 0,\ r = R - d \to R.$$

- Распределение на окружности:

  $p_{\mathbf{z}}(\varphi) = \dfrac{R^2 - r^2}{2\pi(R^2 + r^2 - 2rR\sin\varphi)},\ \varphi \in [0, 2\pi);$

- Распределение в круге:

  $\phi_z(x, \psi) = \dfrac{1}{\pi(R^2 - r^2)} x \ln\left(\dfrac{r^2}{R^2} + \left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)\dfrac{R^2 - r^2 - 2rx\sin\psi}{x^2}\right),$

  $\psi \in [0, 2\pi),\ x \in [0, -r\sin\psi + \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\psi}].$