Решение систем линейных алгебраических уравнений в идемпотентной алгебре

Колесник Дмитрий Владимирович, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Н.К. Кривулин
Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Ю.А. Сушков

СтатМод

Санкт-Петербург
2007г.

Введение

- Области применения идемпотентной алгебры:
  - задачи оптимизации и оптимального управления,
  - задачи классической механики и экономики,
  - задачи синхронизации различных процессов,
  - описание технических, экономических, производственных моделей.

- Цели работы:
  - изучение методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в идемпотентной алгебре,
  - разработка алгоритмов решения СЛАУ,
  - разработка програмных средств, включающих пользовательский интерфейс.

Введение

- Области применения идемпотентной алгебры:
    - задачи оптимизации и оптимального управления,
    - задачи классической механики и экономики,
    - задачи синхронизации различных процессов,
    - описание технических, экономических, производственных моделей.

- Цели работы:
    - изучение методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в идемпотентной алгебре,
    - разработка алгоритмов решения СЛАУ,
    - разработка програмных средств, включающих пользовательский интерфейс.

Идемпотентная алгебра

$$\mathbb{R}_\varepsilon = \left\{\mathbb{R} \cup \{\varepsilon = -\infty\}, \oplus, \otimes\right\}, \text{ где } \begin{cases} x \oplus y = max(x, y), \\ x \otimes y = x + y. \end{cases}$$

- Свойства алгебраической структуры $\mathbb{R}_\varepsilon$:
  - коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность $\oplus$ относительно $\otimes$,
  - существуют нейтральные элементы относительно $\oplus$ и $\otimes$,
  - существует обратный относительно $\otimes$,
  - идемпотентность $x \oplus x = x$,
  - свойство поглощения $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$,
  - не существует обратного относительно $\oplus$.

- Общий вид систем: $A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b} = C \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{d}$.
- Стандартные методы решения неприменимы:
  - отсутствие обратного элемента относительно $\oplus$,
  - отсутствие возможности сокращения,
  - уравнение $a \otimes x = b$ неоднозначно неразрешимо,
  - нельзя переносить через знак равенства.
- Возможные методы решения:
  - методы без участия дополнительных конструкций,
    - \+ решение в терминах $\mathbb{R}_\varepsilon$;
  - методы с дополнительными конструкциями, метод симметризации,
    - \+ возможность применения некоторых стандартных алгоритмов.

Известны методы решения следующих уравнений:

- $A \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}, A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$,

решение: Если $\mathbf{b} \in L(A)$ – линейная оболочка $\Rightarrow$
$\mathbf{x} = (\mathbf{b}^- \otimes A)^-$ – решение, но возможно не единственное,
$a^- = -a,\ \varepsilon^- = \varepsilon$;

- $A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{x},\ A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$, A – неразложимая матрица.

решение: $\mathbf{x} = \begin{cases} A^+ \otimes \mathbf{b}, \text{ если } det(A) < 0; \\ A^+ \otimes \mathbf{b} \oplus A^* \otimes \mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}_\varepsilon^n, \text{ если } det(A) = 0; \\ \varepsilon, \text{ если } det(A) > 0. \end{cases}$

A^*, A^+ – вспомогательные матрицы, полученные из A,
$\det(A) = \bigoplus_{m=1}^{n} tr(A^m), \quad tr(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}$

Также можно решать уравнения вида:
$A \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes \mathbf{x},\ A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b} = C \otimes \mathbf{x}$.

Группа ученых INRIA (F. Baccelli, G. Cohen, Olsder G. J.)(1992) предложила расширить множество $\mathbb{R}_\varepsilon$.

Был применен метод присоединения обратных элементов.

- $\begin{cases} (x', x'') \oplus (y', y'') = (x' \oplus y', x'' \oplus y''), \\ (x', x'') \otimes (y', y'') = (x'y' \oplus x''y'', x'y'' \oplus x''y'), \end{cases}$
- $x = (x', x'') \Leftrightarrow \ominus x = (x'', x'),$
- $x \nabla y$ (x балансирует y), если $x' \oplus y'' = x'' \oplus y'$.

Но ∇ не является отношением эквивалентности, так как $\oplus$ не удовлетворяет свойству сокращения.

Модифицированное отношение эквивалентности:

$$(x', x'')\mathcal{R}(y', y'') \Leftrightarrow \begin{cases} x' \oplus y'' = x'' \oplus y', & \text{если } x' \neq x'', y' \neq y'', \\ (x', x'') = (y', y''), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Симметризацией $\mathbb{S}$ называется $\mathbb{R}_\varepsilon^2/\mathcal{R}$.

$\mathbb{S}$ можно разбить на три множества классов:

$$\begin{cases} S^{\oplus} : (t, \varepsilon) = \{(t, x'') \mid x'' < t\}; \\ S^{\ominus} : (\varepsilon, t) = \{(x', t) \mid x' < t\}; \\ S^{\bullet} : (t, t) = \{(t, t)\}. \end{cases}$$

Искомое расширение: $\{\mathbb{S}, \oplus, \otimes, \ominus, \nabla\}$

$\mathbb{R}_\varepsilon \hookrightarrow \mathbb{S}$: $t \in \mathbb{R}_\varepsilon \longleftrightarrow (t, \varepsilon) \in \mathbb{R}_\varepsilon^2$ вложение сохраняет операции $\oplus$, $\otimes$, $(\cdot)^{-1}$(взятие обратного относительно $\otimes$).

В $\mathbb{S}$ нет обратного относительно $\oplus$, но:

- ✓ $\forall a \in \mathbb{S}\ a \ominus a \nabla \varepsilon$;
- ✓ $a \nabla b, c \nabla d \Rightarrow a \oplus c \nabla b \oplus d$;
- ✓ $a \nabla b \Leftrightarrow a \ominus b \nabla \varepsilon$;
- ✓ $a \nabla b \Rightarrow a \otimes c \nabla b \otimes c$;

поэтому вместо решения линейных систем целесообразно рассматривать уравнения линейного баланса.

Связь решений систем в S и $\mathbb{R}_\varepsilon$

В работах группы INRIA показано:

$\mathbf{x}$ – решение $(A \ominus C) \otimes \mathbf{x} \nabla (\mathbf{d} \ominus \mathbf{b})\varepsilon$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{\oplus}$, $\Leftrightarrow$
$\mathbf{x}$– решение $A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b} = C \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{d}$ в $\mathbb{R}_\varepsilon$.

Благодаря свойствам $\mathbb{S}$:

- разрешимость уравнения $a \otimes x \oplus b \ \nabla \ \varepsilon$,
- возможность переноса $a \nabla b \Leftrightarrow a \ominus b \nabla \varepsilon$,
- подстановка: $x \nabla a, c \otimes x \nabla b \Rightarrow c \otimes x \nabla b$,
- транзитивность: $a \nabla x, x \nabla b$, $x \in \mathbb{S}^{\vee} \Rightarrow a \nabla b$,
- приведение баланса: $x \nabla y$, $x, y \in \mathbb{S}^{\vee} \Rightarrow x = y$,

для уравнений линейного баланса применима теорема Крамера (с классическим определителем).

Программная реализация

Разработаны:

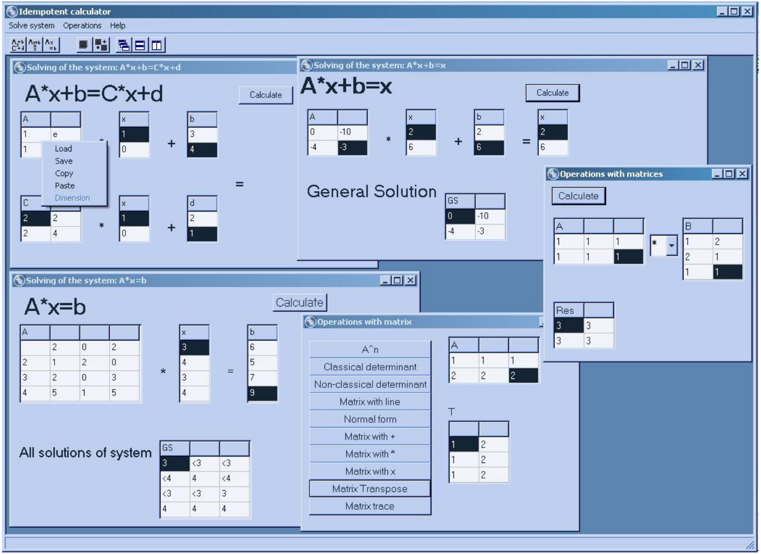
- библиотека классов:
    - классы объектов идемпотентной алгебры,
    - переопределенные операции $\oplus$ и $\otimes$,
    - реализованы методы решения уравнений:
        - $A \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$,
        - $A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{x}$,
        - $A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b} = C \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{d}$;
- пользовательский интерфейс:
    - формы для задания указанных видов уравнений,
    - формы для проведения матричных вычислений,
    - файл помощи.

Библиотека классов включает в себя:

- класс *element*, представляющий элемент из $\mathbb{R}^2_\varepsilon$:
  - переопределены операции $+$ и $*$ в соответствии с определениями $\oplus$ и $\otimes$,
  - определены методы сравнения;
- класс *matrix*, представляющий матрицу элементов из $\mathbb{R}^2_\varepsilon$:
  - переопределены операции $\oplus$ и $\otimes$ для матриц,
  - реализованы дополнительные методы работы с матрицами;
- класс calculator:
  - определены методы решения СЛАУ различных видов,
  - реализованы дополнительные методы работы с несколькими матрицами.

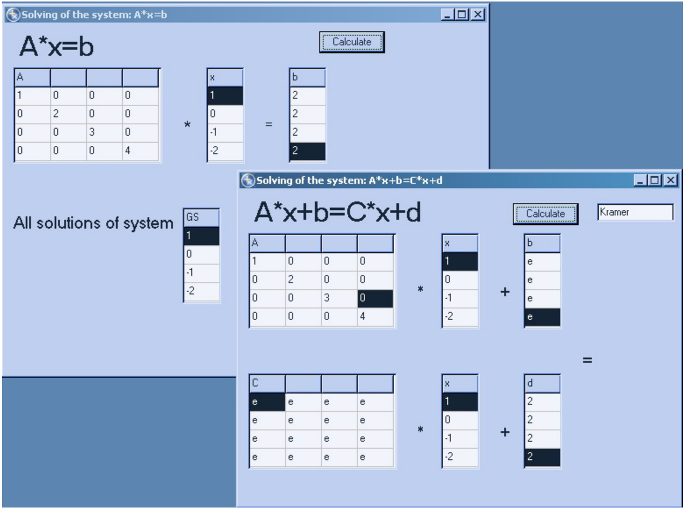
Пользовательский интерфейс

Среда: C++ Builder. Тип: многооконное приложение.



Пример

Рассмотрим решения двух систем различного типа.
Системы эквивалентны $\Rightarrow$ решения совпадают.



В рамках дипломной работы:

- изучены методы решения уравнений вида:
    - $A \otimes \mathbf{x} = \mathbf{b}$,
    - $A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{x}$,
    - $A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b} = C \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{d}$;
- разработаны программные средства для решения уравнений:
    - библиотека классов,
    - пользовательский интерфейс.