Построение усеченных D-оптимальных планов для тригонометрических моделей

Волканова Маргарита Дмитриевна, гр.14.Б02-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Шпилев П.В.
Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Мелас В.Б.

Санкт-Петербург
2018г.

Введение

Уравнение регрессии

$$y_j = \eta(t_j, \theta) + \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

- $y_1, \dots, y_n$ – результаты эксперимента;
- $\eta(t, \theta) = \theta^{\mathrm{T}} f(t)$ – функция регрессии:
  - $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^{\mathrm{T}}$ – параметры;
  - $f(t) = (f_1(t), \dots, f_k(t))^{\mathrm{T}}$,
    $f_i(t)$ – заданные базисные функции;
  - $t_1, \dots, t_n$ – условия планирования эксперимента;
- $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ – случайные ошибки – независимые нормально распределенные случайные величины, $\mathbb{E}\epsilon_i = 0$, $\mathbb{E}\epsilon_i^2 = \sigma^2$.

Рассмотрим план эксперимента размерности n:

$$\xi = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}, \quad t_i \in \chi, \quad w_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Основные понятия

- Информационная матрица (*ИМ*) плана:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) f^{\mathrm{T}}(t_i) w_i, \quad M(\xi) \in \mathrm{R}^{k\times k};$$

- Представим *ИМ* в блочном виде:

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} M_{11}(\xi) & M_{12}^{\mathrm{T}}(\xi) \\ M_{12}(\xi) & M_{22}(\xi) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \dim M_{22}(\xi) = s\times s, \quad s \leq k;$$

- Введем матрицу

$$M_s(\xi) = M_{22}(\xi) - X^{\mathrm{T}} M_{11}(\xi) X,$$

где $X(\xi)$ — произвольное решение системы

$$M_{11}(\xi) X(\xi) = M_{12}^{\mathrm{T}}(\xi);$$

Оптимальные планы

Определение 1

План называется D-оптимальным, если он максимизирует величину определителя *ИМ*:

$$\det M(\xi) \longrightarrow \max_{\xi}.$$

Определение 2

План называется усеченным D-оптимальным (D_s-оптимальным), если он максимизирующий величину определителя $M_s(\xi)$:

$$\det M_s(\xi) \longrightarrow \max_{\xi}.$$

Теорема эквивалентности

Теорема 1 (Стадден В., 1976)

План ξ^* является усеченным D_s-оптимальным планом тогда и только тогда, когда существует матрица X, удовлетворяющая условиям:

- $M_{11}(\xi)X = M_{12}(\xi)^{\mathrm{T}}$;
- $\max_{x\in X} \psi(x)^{\mathrm{T}}(M_s(\xi))^{-1}\psi(x) = s$, где $M_s = M_{22} - X^{\mathrm{T}} M_{11} X$, $\psi(t) = f_{(2)}(x) - X^{\mathrm{T}} f_{(1)}(x)$.

Тригонометрическая модель

Введем обозначения:

- m — порядок модели;
- θ — вектор неизвестных параметров: $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{2m})^{\mathrm{T}}$;
- $f(t)$ — вектор регрессионных функций: $f(t) = (1, \sin t, \cos t, \ldots, \sin(mt), \cos(mt))^{\mathrm{T}}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Тригонометрическая функция регрессии

$$\eta(t, \theta) = \theta^T f(t) = \theta_0 + \sum_{j=1}^{m} \theta_{2j-1} \sin(jt) + \sum_{j=1}^{m} \theta_{2j} \cos(jt).$$

Связь D_s-оптимальных планов с D-оптимальными

Теорема 2

Усеченным D_s-оптимальным планом для тригонометрической регрессионной модели является любой план

$$\xi^* = \begin{pmatrix} t_1^* & \dots & t_n^* \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}, \quad t_i^* = \frac{i-1}{n} 2\pi, \quad n \geq 2m+1,$$

для четного числа старших параметров ($s = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^+$), где $t_i^* \in [0, 2\pi]$, $i = 1, \dots, n$, m — порядок регрессионной модели.

D_s-оптимальные планы с опорными точками D-оптимальных планов

Таблица: Планы первого типа

Вид плана	m	s
$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} & \pi & \frac{4\pi}{3} & \frac{5\pi}{3} \\ z & \frac{1}{3}-z & z & \frac{1}{3}-z & z & \frac{1}{3}-z \end{pmatrix}$	2	2;4
$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi & \frac{5\pi}{4} & \frac{3\pi}{2} & \frac{7\pi}{4} \\ z & \frac{1}{4}-z & z & \frac{1}{4}-z & z & \frac{1}{4}-z & z & \frac{1}{4}-z \end{pmatrix}$	3	2;3;4;6
$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{5} & \frac{2\pi}{5} & \frac{3\pi}{5} & \frac{4\pi}{5} & \pi & \frac{6\pi}{5} & \frac{7\pi}{5} & \frac{8\pi}{5} & \frac{9\pi}{5} \\ z & \frac{1}{5}-z & z & \frac{1}{5}-z & z & \frac{1}{5}-z & z & \frac{1}{5}-z & z & \frac{1}{5}-z \end{pmatrix}$	4	2;4;6;8

Симметричные D_s-оптимальные планы общего вида

Таблица: Планы второго типа

Вид плана	m	s
$\begin{pmatrix} 0 & p & \pi - p & \pi & \pi + p & 2\pi - p \\ z & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} & z & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} \end{pmatrix}$	2	2;3;4
$\begin{pmatrix} 0 & p & \pi - p & \pi & \pi + p & 2\pi - p \\ z & z_1 & \frac{1}{2} - z - z_1 & z & z_1 & \frac{1}{2} - z - z_1 \end{pmatrix}$	2	2;3;4
$\begin{pmatrix} 0 & p & \frac{\pi}{2} & \pi - p & \pi & \pi + p & \frac{3\pi}{2} & 2\pi - p \\ z & \frac{1}{4} - z & z & \frac{1}{4} - z & z & \frac{1}{4} - z & z & \frac{1}{4} - z \end{pmatrix}$	3	2;3;4;5;6
$\begin{pmatrix} 0 & p & \frac{\pi}{2} & \pi - p & \pi & \pi + p & \frac{3\pi}{2} & 2\pi - p \\ z & z_1 & \frac{1}{2} - z - z_1 & z_1 & z & z_1 & \frac{1}{2} - z - z_1 & z_1 \end{pmatrix}$	3	2;3;4;5;6

Рассматривается тригонометрическая модель второго порядка и план второго типа:

$$\xi^* = \begin{pmatrix} 0 & p & \pi - p & \pi & \pi + p & 2\pi - p \\ z & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} & z & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} & \frac{1}{4} - \frac{z}{2} \end{pmatrix}$$

- При $p = \frac{\pi}{2}$, $z = \frac{1}{4}$ план ξ^* имеет вид:

$$\xi^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} & \frac{3\pi}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

- Экстремальный многочлен: $\psi(x) = \cos(2x)^2$.

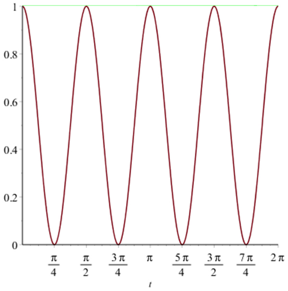


Рис.: График $\psi(x)$ при N=6, m=2, s=1.

Алгоритм построения усеченных D-оптимальных планов

Для построения усеченных D-оптимальных планов разработан алгоритм:

- Задание порядка модели;
- Выбор типа плана (первый или второй);
- Нахождение плана;
- Проверка численного плана по теореме эквивалентности;
- Анализ плана с помощью графика.

T-критерий для задачи дискриминации

Критерий T-оптимальности можно записать в следующем виде:

$$T(\xi, \tilde{q}) = \min_q \int_0^{2\pi} (\eta_2(x, \tilde{q}) - \eta_1(x, q))^2 \xi(dx).$$

Тогда T-оптимальный план максимизирует $T(\xi, \tilde{q})$:

$$\xi^* = \operatorname*{argmax}_\xi T(\xi, \tilde{q}).$$

Эффективность

- *Эффективность* D_s-оптимального плана ξ относительно T-оптимального плана ξ^* при фиксированном $\tilde{q}$:

$$\frac{T(\xi, \tilde{q})}{T(\xi^*, \tilde{q})},$$

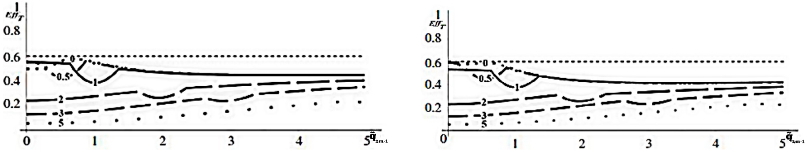
- *Эффективность* D_s-оптимального плана ξ_1 относительно D-оптимального ξ_2:

$$\frac{\sqrt[n]{det M(\xi_1)}}{\sqrt[n]{det M(\xi_2)}}$$

Эффективность относительно соответствующих планов:

$$\xi_D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi & \frac{5\pi}{4} & \frac{3\pi}{2} & \frac{7\pi}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

$$\xi_{D_3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi & \frac{5\pi}{4} & \frac{3\pi}{2} & \frac{7\pi}{4} \\ \frac{3}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$



а) б)

Рис.: Графики T-эффективности для D-оптимального (а) и D_3-оптимального плана (б) для модели, где m $= 3$; $\tilde{q}_{2m} = 0,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5$; $\tilde{q}_{2m-1} \in [0,\ 5]$; $\tilde{q}_{2m-2} = 1$.

Таблица эффективности D-критерия

Таблица: Эффективность D-оптимального плана относительно D_s-оптимальных для тригонометрической модели порядка m.

планы	m=2	m=3
D_2 относительно D	1	1
D_3 относительно D	0.976	0.983
D_4 относительно D	1	1
D_5 относительно D	–	0.977
D_6 относительно D	–	1

Заключение

- Разработан алгоритм построения усеченных D-оптимальных планов;
- Рассмотрены планы двух типов и проверены на D_s-оптимальность;
- Найдена связь D_s-оптимальных планов с D-оптимальными;
- Проведенно численное сравнение эффективности D, D_s и T-оптимальных планов для дискриминационной задачи;