Методы тропической математики в задачах принятия решений

Агеев Владимир Анатольевич, гр. 16.М03-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Статистическое моделирование

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Кривулин Н. К.
Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Николаев Д. А.

Санкт-Петербург
2018

Пусть имеется

- n альтернатив принятия решения (варианты выбора товара),
- m критериев (различные характеристики товаров).

Проводится процедура парных сравнений, результатом которой являются:

- матрицы $\mathbf{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$ с положительными элементами, $k = 1, \ldots, m$,
- элемент $a_{ij}^{(k)}$ показывает во сколько раз альтернатива i предпочтительнее альтернативы j, где $i, j = 1, \ldots, n$,
- матрица $\mathbf{C} = (c_{rs})$ с положительными элементами,
- элемент c_{rs} показывает во сколько раз критерий r более важен для принятия решения, чем критерий s, где $r, s = 1, \ldots, m$.

Задача: по матрицам $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m, \mathbf{C}$ для каждой альтернативы определить абсолютную степень предпочтения (ранг, приоритет).

Матрица парных сравнений $\mathbf{A} = (a_{ij})$ может обладать свойствами:

- обратная симметричность: $a_{ij} = 1/a_{ji}$;
- транзитивность: $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$.

Матрица, обладающая обоими свойствами, называется согласованной.

Если матрица $\mathbf{X} = (x_{ij})$ является согласованной, то существует вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $x_i > 0$, который однозначно определяет ее элементы $x_{ij} = x_i/x_j$. Элемент x_i показывает приоритет альтернативы i.

Проблема: в практических задачах согласованность обычно нарушена.

Возникает **задача аппроксимации** матрицы $\mathbf{A}$ согласованной матрицей $\mathbf{X}$. Учитывая, что согласованная матрица задается некоторым вектором $\mathbf{x}$, задачу можно записать в виде

$$\min_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{A}, \mathbf{x}).$$

Задачи работы

Основная задача: построение процедуры решения поставленной многокритериальной задачи принятия решений.

Для этого потребуется:

- изучение и разработка методов тропической математики для анализа результатов парных сравнений, на основе аппроксимации матриц в log-чебышевской метрике;
- построение и изучение метода решения многокритериальных задач принятия решений, основанного на минимаксной аппроксимации взвешенных матриц;
- разработка методов анализа множества решений в случае, когда решение не единственно.

Идемпотентное полуполе $\mathbb{R}_{\max,\times}$:

- алгебраическая система $(\mathbb{R}_+, \max, \times, 0, 1)$ – $\max$-алгебра
- над множеством $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$;

- операция $\max$ играет роль операции сложения, которое обозначается знаком $\oplus$;
- сложение идемпотентно: $x \oplus x = x$ для любого $x \in \mathbb{R}_+$;

- операция умножения определена как обычно;
- умножение обратимо: для любого $x \neq 0$ существует обратный x^{-1}.

Матрицы и векторы над $\mathbb{R}_+$:

- векторы и матрицы над $\mathbb{R}_+$ образуют множества $\mathbb{R}_+^n$ и $\mathbb{R}_+^{m\times n}$;
- операции с матрицами и векторами следуют обычным правилам с заменой сложения на $\oplus$;
- любому ненулевому вектору-столбцу $\mathbf{x} = (x_i)$ соответствует мультипликативно сопряженный вектор-строка $\mathbf{x}^- = (x_i^-)$, где $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, иначе $x_i^- = \mathbb{0}$;
- любой ненулевой матрице $\mathbf{A} = (a_{ij})$ соответствует сопряженная матрица $\mathbf{A}^- = (a_{ij}^-)$, где $a_{ij}^- = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq \mathbb{0}$, иначе $a_{ij}^- = \mathbb{0}$;
- след матрицы вычисляется по формуле

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn};$$

- спектральным радиусом матрицы называется число

$$\lambda = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}^{1/n}(\mathbf{A}^n).$$

Аппроксимация в чебышевской метрике

Задача аппроксимации:

$$\min_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{A}, \mathbf{x}),$$

где $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица парных сравнений, $\mathbf{x} = (x_i)$ – вектор, который задает согласованную матрицу $\mathbf{X} = (x_{ij})$ с элементами $x_{ij} = x_i/x_j$.

В качестве функции ошибки возьмем чебышевскую метрику в логарифмической шкале:

$$\max_{1 \leq i,j \leq n} |\log a_{ij} - \log x_{ij}|.$$

Воспользовавшись монотонностью логарифма, задачу минимизации $\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{x})$ можно переписать так:

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{1 \leq i,j \leq n} \max\{x_i^{-1} a_{ij} x_j, x_i a_{ij}^{-1} x_j^{-1}\}.$$

В терминах $\mathbb{R}_{\max,\times}$ задача принимает вид

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-}(\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}^{-})\mathbf{x}.$$

Теорема (Кривулин Н.К., 2015)

- Пусть $\mathbf{A}$ – матрица парных сравнений,
- введем матрицу $\mathbf{D} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}^{-}$,
- пусть $\mu = \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(\mathbf{D}^m)$ – спектральный радиус матрицы $\mathbf{D}$,
- обозначим $\mathbf{D}_\mu = \mu^{-1}\mathbf{D}$,
- введем матрицу $\mathbf{D}_\mu^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{D}_\mu \oplus \cdots \oplus \mathbf{D}_\mu^{n-1}$.

Тогда

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-}\mathbf{D}\mathbf{x} = \mu,$$

причем минимум достигается тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}$ – положительный вектор, который имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}_\mu^*\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} > \mathbf{0}.$$

Аппроксимация взвешенных матриц

В результате сравнений n альтернатив относительно m критериев с весами w_k получены матрицы парных сравнений $\mathbf{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$, $k = 1, \ldots, m$.

Для вычисления вектора рейтингов, необходимо решить задачу

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{1 \leq k \leq m} w_k (\max_{1 \leq i,j \leq n} \max\{x_i^{-1} a_{ij}^{(k)} x_j, x_i (a_{ij}^{(k)})^{-1} x_j^{-1}\}).$$

Введем матрицу $\mathbf{D} = (d_{ij})$ с элементами

$$d_{ij} = \max_{1 \leq k \leq m} w_k \max\{a_{ij}^{(k)}, 1/a_{ji}^{(k)}\}.$$

Перейдем к задаче аппроксимации матрицы $\mathbf{D}$ матрицей $\mathbf{X} = (x_i/x_j)$:

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{1 \leq i,j \leq n} x_i^{-1} d_{ij} x_j.$$

Задача минимаксной аппроксимации в терминах $\mathbb{R}_{\max,\times}$ записывается так:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-} \mathbf{D} \mathbf{x}, \quad \mathbf{D} = w_1 (\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1^{-}) \oplus \cdots \oplus w_m (\mathbf{A}_m \oplus \mathbf{A}_m^{-}).$$

Решение такой задачи нам уже известно.

По матрице парных сравнений или взвешенной сумме таких матриц $\mathbf{D}$ находится множество решений $\mathcal{S}$. Охарактеризуем его векторами:

- **наилучший** дифференцирующий вектор, который **максимально** различает альтернативы с высшим и низшим рейтингом,
- **наихудший** дифференцирующий вектор, который **минимально** различает такие альтернативы.

Определим эти решения путем максимизации и минимизации отношения

$$\max_{1\leq i\leq n} x_i / \min_{1\leq i\leq n} x_i = \max_{1\leq i\leq n} x_i \times \max_{1\leq i\leq n} x_i^{-1}.$$

Задачи нахождения наилучшего и наихудшего решения принимают вид

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathcal{S}} \max_{1\leq i\leq n} x_i \times \max_{1\leq i\leq n} x_i^{-1}, \qquad \min_{\mathbf{x}\in\mathcal{S}} \max_{1\leq i\leq n} x_i \times \max_{1\leq i\leq n} x_i^{-1}.$$

Учитывая, что $\mathbf{x} = \mathbf{D}_{\mu}^{*}$, такие векторы дают решения задач

$$\max_{\mathbf{u}} \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mu}^{*}\mathbf{u}(\mathbf{D}_{\mu}^{*}\mathbf{u})^{-}\mathbf{1}, \quad \min_{\mathbf{u}} \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mu}^{*}\mathbf{u}(\mathbf{D}_{\mu}^{*}\mathbf{u})^{-}\mathbf{1},$$

где μ – спектральный радиус $\mathbf{D}$, и $\mathbf{D}_{\mu}^{*} = \mathbf{I} \oplus \mathbf{D}_{\mu} \oplus \cdots \oplus \mathbf{D}_{\mu}^{n-1}$.

Наилучший дифференцирующий вектор

Пусть $\mathbf{D}$ – матрица парных сравнений или взвешенная сумма матриц, со спектральным радиусом $\mu = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(\mathbf{D}^m)$. Введем матрицы $\mathbf{D}_\mu = \mu^{-1}\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}_\mu^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{D}_\mu \oplus \cdots \oplus \mathbf{D}_\mu^{m-1}$.

Лемма (Кривулин Н.К., Агеев В.А., Гладких И.В., 2017)

Обозначим матрицу $\mathbf{D}_\mu^*$ *через* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_j)$. *Матрица* $\mathbf{B}_{sk}$ *получена из* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *обращением в ноль всех элементов, кроме* b_{sk}.

Тогда

$$\max_{\mathbf{u}} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_\mu^* \mathbf{u} (\mathbf{D}_\mu^* \mathbf{u})^{-} \mathbf{1} = \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \mathbf{B} \mathbf{B}^{-} \mathbf{1}.$$

Любой наилучший дифференцирующий вектор имеет вид

$$\mathbf{x}_{best} = \mathbf{B}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{B}_{sk}^{-} \mathbf{B})\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} > \mathbf{0},$$

где индексы k *и* s *определяются из условий*

$$k = \operatorname*{argmax}_{1 \leq i \leq n} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^{-} \mathbf{1}, \quad s = \operatorname*{argmax}_{1 \leq i \leq n} b_{ik}^{-1}.$$

Лемма (Кривулин Н.К., Агеев В.А., Гладких И.В., 2017)

Обозначим матрицу $\mathbf{D}_{\mu}^{*}$ *через* $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_j)$ *со столбцами* $\mathbf{b}_j = (b_{ij})$ *и положим* $\Delta = (\mathbf{B}(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-})^{-}\mathbf{1}$. *Определим матрицу* $\widehat{\mathbf{B}} = (\widehat{b}_{ij})$ *с элементами*

$$\widehat{b}_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{если } b_{ij} \geq \Delta^{-1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ *множество матриц, полученных фиксацией одного ненулевого элемента в каждой строке* $\widehat{\mathbf{B}}$ *с обращением остальных в* 0.

Тогда

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mu}^{*}\mathbf{u}(\mathbf{D}_{\mu}^{*}\mathbf{u})^{-}\mathbf{1} = \Delta,$$

причем любой наихудший дифференцирующий вектор имеет вид

$$\mathbf{x}_{worst} = \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{I} \oplus \Delta^{-1}\mathbf{B}_1^{-}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\widehat{\mathbf{B}})\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_1 \in \mathcal{B}.$$

Недостаток подхода: требуется вычисление в общем случае комбинаторного числа матриц.

Наихудший дифференцирующий вектор

Следующий результат позволяет вычислять решение более эффективно.

Утверждение

Пусть $\mathbf{D}$ *– матрица парных сравнений или взвешенная сумма матриц, со спектральным радиусом* $\mu = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(\mathbf{D}^m)$.
Введем матрицы $\mathbf{D}_\mu = \mu^{-1}\mathbf{D}$ *и* $\mathbf{D}_\mu^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{D}_\mu \oplus \cdots \oplus \mathbf{D}_\mu^{m-1}$.
Определим скаляр $\delta = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_\mu^*\mathbf{1}$.

Тогда

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_\mu^*\mathbf{u}(\mathbf{D}_\mu^*\mathbf{u})^{-}\mathbf{1} = \delta.$$

Любой наихудший дифференцирующий вектор имеет вид

$$\mathbf{x}_{worst} = (\delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \oplus \mu^{-1}\mathbf{D})^*\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \geq \mathbf{0}.$$

Метод анализа иерархий

Многокритериальная задача принятия решений:

- пусть $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ – матрицы парных сравнений альтернатив относительно m критериев;
- матрица $\mathbf{C}$ – матрица парных сравнений критериев;
- необходимо найти вектор рейтингов альтернатив.

Метод анализа иерархий (**МАИ**) использует обычную математику и решает эту задачу в два этапа:

1. для каждой из матриц $\mathbf{A}_k$ и матрицы $\mathbf{C}$ решаются системы
$$\mathbf{A}_k\mathbf{a}_k = \lambda_{max}^{(k)}\mathbf{a}_k, \quad \mathbf{C}\mathbf{w} = \mu_{max}\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_m)^{\mathrm{T}},$$
где $\lambda_{max}^{(k)}$ и μ_{max} – максимальные собственные числа матриц $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{C}$;
2. после нормирования $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ и $\mathbf{w}$ вычисляется вектор рейтингов
$$\mathbf{x} = w_1\mathbf{a}_1 + \ldots + w_m\mathbf{a}_m.$$

Новая процедура:

1. по теореме об аппроксимации решается задача
$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^{-}\mathbf{C}\mathbf{w},$$
2. если вектор $\mathbf{w}$ не единственный, вычисляются $\mathbf{w}_{best}$ и $\mathbf{w}_{worst}$ согласно утверждениям об анализе решений,
3. для векторов весов $\mathbf{w}_{best}$ и $\mathbf{w}_{worst}$ решается задача
$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-}(w_1(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1^{-}) \oplus \cdots \oplus w_m(\mathbf{A}_m \oplus \mathbf{A}_m^{-}))\mathbf{x},$$
4. если решение не единственно, в случае $\mathbf{w}_{best}$ находится наилучший вектор рейтингов $\mathbf{x}_{best}$, в случае $\mathbf{w}_{worst}$ – наихудший $\mathbf{x}_{worst}$.

Решения получаются в явном виде, удобном для дальнейшего анализа и непосредственных вычислений.

Численный пример

Рассмотрим задачу Саати (1989) о выборе одной из средних школ A, B и C согласно критериям

- качество обучения основным предметам,
- друзья (количество знакомых),
- школьная жизнь (мероприятия для школьников),
- качество профессионального обучения,
- качество подготовки к колледжу,
- качество обучения музыке.

Матрицы парных сравнений альтернатив

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1/5 & 1 & 1/5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 1/9 & 1 & 1/5 \\ 1/7 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 1/6 & 1 & 1/3 \\ 1/4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица парных сравнений критериев

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1/5 & 1 & 3 & 1/5 & 1/6 & 1/6 \\ 1/7 & 1/3 & 1 & 1/4 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 5 & 4 & 1 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 6 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

По матрице $\mathbf{C}$ найдены векторы весов критериев

$$\mathbf{w}_{worst} \approx \begin{pmatrix} 8{,}58 & 1{,}00 & 0{,}69 & 2{,}43 & 5{,}89 & 7{,}07 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} v, \quad v > 0,$$
$$\mathbf{w}_{best}^{(1)} \approx \begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}10 & 0{,}07 & 0{,}25 & 0{,}60 & 0{,}71 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} u, \quad u > 0,$$
$$\mathbf{w}_{best}^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 1{,}46 & 0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}36 & 1{,}00 & 1{,}04 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} z, \quad z > 0.$$

По $\mathbf{w}_{worst}$ найден наихудший вектор рейтингов альтернатив

$$\mathbf{x}_{worst} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}78 & 0{,}78 \\ 0{,}78 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}.$$

По $\mathbf{w}_{best}^{(1)}$ и $\mathbf{w}_{best}^{(2)}$ найден наилучший вектор рейтингов альтернатив

$$\mathbf{x}_{best} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}84 \\ 0{,}56 \end{pmatrix} z, \quad z > 0.$$

Полученные нормированные наилучшее и наихудшее решения

$$\mathbf{x}_{best} \approx \begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}35 \\ 0{,}23 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{worst}^{(1)} \approx \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{worst}^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 0{,}36 \\ 0{,}28 \\ 0{,}36 \end{pmatrix}.$$

В результате применения МАИ был получен вектор рейтингов

$$\mathbf{x} \approx \begin{pmatrix} 0{,}40 \\ 0{,}36 \\ 0{,}24 \end{pmatrix}.$$

В результате обоих подходов окончательное решение было принято в пользу школы A, а наилучшее решение дало рейтинги, близкие к тем, что получаются в обычном анализе иерархий.

Результаты работы:

- разработан подход к решению задачи оценки рейтингов альтернатив, основанный на аппроксимации матриц в log-чебышевской метрике,
- развита концепция наихудшего и наилучшего решения,
- предложен метод вычисления наилучшего решения,
- для вычисления наихудшего решения предложено два подхода: основанный на построении разреженной матрицы, однако требующий перебора комбинаторного числа матриц, а затем более эффективный,
- разработана процедура решения многокритериальной задачи принятия решений, которую можно рассматривать в качестве тропического аналога МАИ,
- проведено экспериментальное исследование полученного метода с помощью известного численного примера,
- предложенная процедура реализована на языке R,
- построены решения для общих случаев матриц малой размерности.

Результаты были представлены на конференции СПИСОК-2017 (Санкт-Петербург, 2017):

Агеев В.А., Кривулин Н. К.
Применение методов тропической оптимизации для анализа результатов оценки альтернатив на основе парных сравнений
Материалы 7-й всероссийской научной конференции по проблемам информатики СПИСОК-2017.– СПб.: ВВМ, 2017. – С. 536-542.

Основные результаты опубликованы в статье

Кривулин Н. К., Агеев В. А., Гладких И. В.
Применение методов тропической оптимизации для оценки альтернатив на основе парных сравнений
Вестник Санкт- Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2017. – № 1. – С. 27–41.