Вычисление скорости роста вектора состояний обобщенных линейных стохастических динамических систем второго порядка

Азаров Андрей Борисович, 522-я группа

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — доцент, к.ф.-м.н. **Н.К. Кривулин**
Рецензент — доцент, к.ф.-м.н. **А.Ю. Пономарева**

Санкт-Петербург
2008г.

Области применения моделей с синхронизацией

Модели с синхронизацией применяются для моделирования поведения:

- производственных систем;
- бизнес-процессов;
- систем передачи данных;
- транспортных систем.

Основной инструмент моделирования систем с синхронизацией:

- идемпотентная алгебра.

Основные понятия и свойства идемпотентной алгебры

Множество $\mathbb{R}_\varepsilon$ – расширение множества $\mathbb{R}$ путем добавления $\varepsilon = -\infty$

$$\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Операции обобщенного сложения и умножения

$$x \oplus y = \max(x, y), \qquad x \otimes y = x + y.$$

Свойства обобщенных операций:

- Коммутативность. Операции $\oplus$ и $\otimes$ коммутативны.
- Ассоциативность. Операции $\oplus$ и $\otimes$ ассоциативны.
- Дистрибутивность. Операция $\otimes$ дистрибутивна относительно $\oplus$.
- Идемпотентность. Операция $\oplus$ идемпотентна, т.е. $x \oplus x = x$.

Обобщенные операции над матрицами

$$\{A \oplus B\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \qquad \{A \otimes B\}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{m} a_{ik} \otimes b_{kj}.$$

Нулевая и единичная матрицы

$$e = \begin{pmatrix} \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \dots & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & 0 \end{pmatrix}.$$

Постановка задачи в общем виде

Стохастическая динамическая система второго порядка

$$\begin{aligned} x(k) &= \max\left(x(k-1)+\alpha_k, y(k-1)+\beta_k\right), \\ y(k) &= \max\left(x(k-1)+\gamma_k, y(k-1)+\delta_k\right). \end{aligned} \tag{1}$$

В терминах идемпотентной алгебры

$$\boldsymbol{z}(k) = A(k) \otimes \boldsymbol{z}(k-1) \tag{2}$$

где

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{z}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}.$$

Средняя скорость роста системы

$$\lambda = \mathsf{E}\left[\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\, \|\boldsymbol{z}(k)\|\right] = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E}\left[\max\left(x(k), y(k)\right)\right] \tag{3}$$

в терминах идемпотентной алгебры

$$\lambda = \mathsf{E} \lim_{k\to\infty} \left(x(k) \oplus y(k)\right)^{1/k}$$

Задача: Обосновать существование предела (3) и найти его для различных систем вида (1).

Последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$, $\{\delta_k\}$ состоят из независимых с.в. С.в. α_k, β_k, γ_k, δ_k – независимы и экспоненциально распределены, причем α_k и δ_k имеют распределение с параметром ν, а β_k и γ_k – с параметром μ.

- Переходная матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & \beta_k \end{pmatrix} \tag{4}$$

Средняя скорость роста

$$\lambda = \frac{\mu^4 + \mu^3\nu + \mu^2\nu^2 + \mu\nu^3 + \nu^4}{\mu\nu(\mu+\nu)(\mu^2+\nu^2)}$$

- Переходная матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix} \tag{5}$$

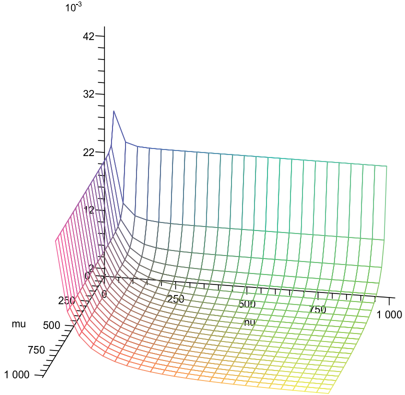
Средняя скорость роста

$$\lambda = \frac{P(\mu,\nu)}{Q(\mu,\nu)}$$

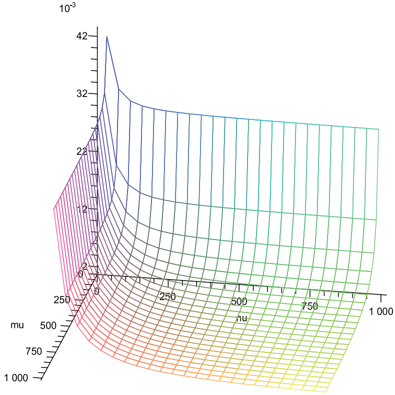
$$P(\mu,\nu) = 160\mu^{10} + 1776\mu^9\nu + 8220\mu^8\nu^2 + 21378\mu^7\nu^3 + 35595\mu^6\nu^4 + 41566\mu^5\nu^5 + \\ + 35595\mu^4\nu^6 + 21378\mu^3\nu^7 + 8220\mu^2\nu^8 + 1776\mu\nu^9 + 160\nu^{10},$$

$$Q(\mu,\nu) = 16\mu\nu(\mu+\nu)(8\mu^8 + 80\mu^7\nu + 321\mu^6\nu^2 + 690\mu^5\nu^3 + 880\mu^4\nu^4 + 690\mu^3\nu^5 + \\ + 321\mu^2\nu^6 + 80\mu\nu^7 + 8\nu^8)$$

Графическая зависимость средней скорости роста



Система с матрицей (4)



Система с матрицей (5)

Рассматриваемые в работе случаи

Последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\delta_k\}$ состоят из независимых с.в.

- Частные случаи С.в. α_k, β_k, δ_k – независимы, экспоненциально распределены с единичными параметрами.
  Переходные матрицы систем

$$\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ \beta_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & \delta_k \end{pmatrix}$$

- Общие случаи С.в. α_k, β_k, δ_k – независимы, экспоненциально распределены с параметрами η, μ, ν.
  Переходные матрицы систем

$$\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & \delta_k \end{pmatrix}$$

Этапы решения поставленной задачи

- Замена переменных

$$X(k) = x(k) - x(k-1) \qquad Y(k) = y(k) - x(k)$$

стохастическая динамическая система в новых переменных

$$\begin{aligned} X(k) &= \max(\alpha_k, \beta_k + Y(k-1)), \\ Y(k) &= \max(\gamma_k, \delta_k + Y(k-1)) - \max(\alpha_k, \beta_k + Y(k-1)). \end{aligned}$$

- Построение соотношений для распределений с.в.

$$\Psi_k(t) = \mathsf{P}\left(Y(k) < t\right), \quad \Psi_k'(t) = \psi_k(t),$$
$$\Phi_k(t) = \mathsf{P}\left(X(k) < t\right), \quad \Phi_k'(t) = \phi_k(t).$$

- Доказательство равномерной сходимости последовательности $\{\psi_k\}$ и нахождение предельной плотности $\psi(t)$.
- Доказательство равномерной сходимости последовательности $\{\Phi_k\}$ и нахождение предельной функции распределения $\Phi(t)$.
- Вычисление средней скорости роста

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E}\left[\max(0, Y(k))\right] + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}\left[X(i)\right] = \mathsf{E}\left[X\right]$$

Методика решения при использовании функций распределения с.в.

Этапы решения поставленной задачи

- Замена переменных

$$Z(k) = \|z(k)\| - \|z(k-1)\| \qquad Y(k) = y(k) - x(k)$$

стохастическая динамическая система в новых переменных

$$\begin{aligned} Z(k) &= \max(\alpha_k, \gamma_k, Y(k-1) + \max(\beta_k, \delta_k)) - \max(0, Y(k-1)), \\ Y(k) &= \max(\gamma_k, \delta_k + Y(k-1)) - \max(\alpha_k, \beta_k + Y(k-1)). \end{aligned}$$

- Построение соотношений для функций распределения с.в. $Y(k)$ и $Z(k)$ с использованием формул полной вероятности

$$\Phi_k(t) = \mathsf{P}(Z(k) < t) \qquad \Psi_k(t) = \mathsf{P}(Y(k) < t)$$

- Доказательство равномерной сходимости последовательности $\{\Psi_k\}$ и нахождение предельной функции распределения $\Psi(t)$.
- Доказательство равномерной сходимости последовательности $\{\Phi_k\}$ и нахождение предельной функции распределения $\Phi(t)$.
- Вычисление средней скорости роста

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathsf{E}\|\boldsymbol{z}(k)\| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}[Z(i)] = \mathsf{E}[Z]$$

Нахождение средней скорости роста первым методом

Переходная матрица системы

$$\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

α_k – имеет функцию распределения $F(t) = \max(0, e^{-\nu t})$.
β_k – имеет функцию распределения $G(t) = \max(0, e^{-\mu t})$.

Уравнение системы в новых переменных

$$\begin{aligned} X(k) &= \max(\alpha_k, \beta_k + Y(k-1)), \\ Y(k) &= \max(0, Y(k-1)) - \max(\alpha_k, \beta_k + Y(k-1)). \end{aligned}$$

Связь между случайными величинами

$$\Phi_k(t) = \mathsf{P}(X(k) < t) = F(t) \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\psi_{k-1}(s)ds,$$
$$\Psi_k(t) = \mathsf{P}(Y(k) < t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\psi_{k-1}(s)ds,$$

где ядро интегрального оператора

$$K(t,s) = \mathsf{P}(Y(k) < t | Y(k-1) = s) = \mathsf{P}(\max(0,s) - \max(\alpha_k, \beta_k + s) < t).$$

Нахождение средней скорости роста первым методом

Результат вычислений

$$K(t,s) = \begin{cases} e^{\eta t} + e^{\mu(t+s)} - e^{(\eta+\mu)t+\mu s}, & \text{если } t \leq 0, s \leq 0, \\ e^{\eta(t-s)} + e^{\mu t} - e^{\eta t+\mu t-\eta s}, & \text{если } t \leq 0, s > 0, \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

При $t > 0$ $\psi_k(t) = 0$. Общий вид функции плотности при $t \leq 0$

$$\psi_k(t) = \eta e^{\eta t} \int_{-\infty}^{0} \psi_{k-1}(s)ds + \left(\mu e^{\mu t} - (\eta+\mu)e^{(\eta+\mu)t}\right) \int_{-\infty}^{0} e^{\mu s}\psi_{k-1}(s)ds$$

Найденную плотность можно представить как

$$\psi_k(t) = \eta e^{\eta t} + a_k\left(\mu e^{\mu t} - (\eta+\mu)e^{(\eta+\mu)t}\right),$$

где $\{a_k\}$ - последовательность чисел, связанных соотношением

$$a_k = \left(\frac{1}{2} - \frac{\eta+\mu}{\eta+2\mu}\right)a_{k-1} + \frac{\eta}{\eta+\mu}.$$

Нахождение средней скорости роста первым методом

В силу условия

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{\eta+\mu}{\eta+2\mu}\right|<1$$

числовая последовательность $\{a_k\}$ сходится к

$$a=\lim_{k\to\infty}a_k=\frac{\eta(2\eta+4\mu)}{(\mu+\eta)(3\eta+4\mu)},$$

а последовательность функций плотности $\{\psi_k(t)\}$ равномерно сходится к предельной $\psi(t)$.
Последовательность $\{\Phi_k(t)\}$ равномерно сходится к предельной функции распределения

$$\Phi(t)=\begin{cases}\left(1-e^{-\eta t}\right)\left(1-ae^{-\mu t}\right), & \text{если } t>0,\\ 0, & \text{если } t\le 0.\end{cases}$$

Соответствующее ей математическое ожидание

$$\lambda=\mathsf{E}[X]=\frac{1}{\eta}+\frac{a}{\mu}-\frac{a}{\mu+\eta}=\frac{11\,\mu^3\eta+4\,\mu^4+10\,\mu^2\eta^2+7\,\mu\,\eta^3+2\,\eta^4}{\eta\mu\,(\mu+\eta)^2\,(3\,\eta+4\,\mu)}.$$

Переходная матрица системы

$$\begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

α_k и β_k – имеют экспоненциальное распределение со средним 1. Новые переменные

$$Y(k) = y(k) - x(k),$$
$$Z(k) = \|z(k)\| - \|z(k-1)\|.$$

Уравнения системы в новых переменных

$$Y(k) = \max(\gamma_k, Y(k-1)) - \max(\alpha_k, Y(k-1)),$$
$$Z(k) = \max(\alpha_k, \gamma_k, Y(k-1)) - \max(Y(k-1), 0).$$

Связь распределений с.в. $Z(k)$ и $Y(k-1)$

$$\Phi_k(t) = \mathsf{P}(Z(k) < t) = \begin{cases} \Psi_{k-1}(0)F^2(t) + \int_0^\infty F^2(t+s)d\Psi_k(s), & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t \leq 0. \end{cases}$$

Рекуррентное соотношение для $\Psi_k(t)$

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} 1 - \int_0^\infty \int_{v+t}^\infty \Psi_{k-1}(u-t) f(u) f(v) du dv, & \text{если } t > 0, \\ \int_0^\infty \int_{u-t}^\infty \Psi_{k-1}(v+t) f(v) f(u) dv du, & \text{если } t \le 0. \end{cases}$$

Общий вид функции $\Psi_k(t)$

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} 1 - a_k e^{-t}, & \text{если } t > 0, \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} a_k\right) e^t, & \text{если } t \le 0. \end{cases}$$

Рекуррентное соотношение для a_k

$$a_{k+1} = -\frac{1}{6} a_k + \frac{1}{2}.$$

Последовательность a_k сходится, функциональная последовательность $\{\Psi_k(t)\}$ сходится равномерно.
Общий вид функции $\Phi_k(t)$ при $t \ge 0$

$$\Phi_k(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} + a_k \left(\frac{7}{6} - \frac{4}{3} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right).$$

Последовательность $\{\Phi_k(t)\}$ сходится равномерно.

Последовательность с.в. $\{Z(k)\}$ слабо сходится к с.в. Z с функцией распределения

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1 - \frac{11}{7}e^{-t} + \frac{5}{7}e^{-2t}, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Средняя скорость роста линейной динамической системы с матрицей (6)

$$\lambda = \mathsf{E}[Z] = \frac{17}{14}.$$

- Частные случаи(с.в. α_k, β_k, δ_k имеют экспоненциальные распределения с единичными параметрами)

Матрицы системы	$\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ \beta_k & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & \delta_k \end{pmatrix}$
Средняя скорость роста	$\lambda = \frac{17}{14}$	$\lambda = \frac{17}{14}$	$\lambda = \frac{515}{352}$

- Общие случаи (с.в. α_k, β_k, δ_k экспоненциально распределены с параметрами η, μ, ν соответственно)

$$\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda = \frac{4\,\mu^4 + 11\,\mu^3\eta + 10\,\mu^2\eta^2 + 7\,\mu\,\eta^3 + 2\,\eta^4}{\eta\mu\,(\mu+\eta)^2\,(3\,\eta + 4\,\mu)}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ 0 & \delta_k \end{pmatrix} \qquad \lambda = \frac{P(\eta,\mu,\nu)}{Q(\eta,\mu,\nu)}$$