

Анализ и синтез обобщенных недетерминированных автоматов со случайным входом

Шевченко Анна Сергеевна, 522 группа

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — д.ф.-м.н., профессор **М.К. Чирков**
Рецензент — к.ф.-м.н., доцент **А.Ю. Пономарева**

Санкт-Петербург
2007г.

Понятие о недетерминированном автомате со случайным входом

Обобщенным недетерминированным конечным автоматом со случайным входом

будем называть систему

$$A_{snd} = \langle Z \times X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{D}(z, x, y)\}, \mathbf{q}, \mu \rangle,$$

где заданы:

- а) входные алфавиты Z, X , алфавит состояний A и выходной алфавит Y ;
- б) $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{1,m}$ — вектор-строка начальных состояний (*начальный вектор*);
- в) $\{\mathbf{D}(z, x, y)\}$ — совокупность *qnk* матриц переходов и выходов размера $m \times m$, задающих отображение $Z \times X \times Y$ в $\mathbf{R}^{m,m}$;

$$\{\mathbf{D}(z, x, y)\} = \{\mathbf{D}(z, x, y) | \mathbf{D}(z, x, y) \in \mathbf{R}^{m,m}, z \in Z, x \in X, y \in Y\};$$

- г) $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^{m,1}$ — вектор-столбец конечных состояний (*финальный вектор*);
- д) распределение вероятностей $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{q-1})$ воздействия на автомат различных символов из множества Z в одном такте.

Частные случаи:

$$\tilde{A}_{snd} = \langle Z \times X, B, Y, \tilde{\mathbf{r}}, \{\tilde{\mathbf{D}}(z, x)\}, \varphi, \tilde{\mathbf{q}}, \mu \rangle,$$

$$A_{asnd} = \langle Z \times X, B, \tilde{\mathbf{r}}, \{\tilde{\mathbf{D}}(z, x)\}, \hat{\mathbf{q}}, \mu \rangle.$$

Вероятностный (стохастический) конечный автомат \mathcal{A}_{pr} определяется как совокупность

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, Y, \mathbf{p}, \{P(a_{i_t} y_{l_t} | a_{i_{t-1}} x_{s_t})\} \rangle$$

- а) входного алфавита X , алфавита состояний A и выходного алфавита Y ;
- б) начального распределения вероятностей состояний $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_{m-1})$;
- в) системы условных вероятностей $\{P(a_{i_t} y_{l_t} | a_{i_{t-1}} x_{s_t})\}$.

Нечетким языком \mathcal{Z} , представленным в автомате подмножеством конечных выходных символов $Y^{(K)}$, называется нечеткое множество слов

$$\mathcal{Z} = \{w, \chi(w)\}_{w \in X^*}$$

в алфавите X , удовлетворяющее условию

$$\chi(w) = \sum_{y_l \in Y^{(K)}} P(y_l | w)$$

для всех $w \in X^*$.

Любой нечеткий язык \mathcal{Z} в конечном алфавите, представленный в каком-либо вероятностном конечном автомате \mathcal{A}_{pr} , называют **нечетким вероятностным языком**.

- Установление эквивалентности исследуемой автоматной модели другим известным типам автоматов.
- Анализ языков, представимых недетерминированными автоматами со случайным входом.
- Синтез абстрактного недетерминированного автомата со случайным входом.

Эквивалентные преобразования недетерминированных автоматов со случайным входом

Теорема 1

Для любого обобщенного недетерминированного конечного автомата со случайным входом

$$\mathcal{A}_{snd} = \langle Z \times X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{D}(z, x, y)\}, \mathbf{q}, Y^{(K)}, \mu \rangle,$$

имеющего $m = |A|$ состояний и $k = |Y|$ выходных символов и представляющего подмножеством $Y^{(K)}$ нечеткий язык \mathcal{Z} , могут быть построены эквивалентные ему (то есть представляющие тот же язык \mathcal{Z}) обобщенный недетерминированный конечный автомат с отмеченными состояниями со случайным входом

$$\tilde{\mathcal{A}}_{snd} = \langle Z \times X, B, Y, \tilde{\mathbf{r}}, \{\tilde{\mathbf{D}}(z, x)\}, \varphi, \tilde{\mathbf{q}}, Y^{(K)}, \mu \rangle$$

и абстрактный недетерминированный автомат со случайным входом

$$\mathcal{A}_{asnd} = \langle Z \times X, B, \tilde{\mathbf{r}}, \{\tilde{\mathbf{D}}(z, x)\}, \hat{\mathbf{q}}, \mu \rangle,$$

имеющие не более mk состояний.

Эквивалентные преобразования недетерминированного автомата со случайным входом в детерминированный автомат со случайным входом

Теорема 2

Для любого абстрактного недетерминированного конечного автомата со случайным входом

$$\tilde{\mathcal{A}}_{snd} = \langle Z \times X, B, \tilde{r}, \{\tilde{D}(z, x)\}, \hat{q}, \mu \rangle,$$

имеющего \tilde{m} состояний и представляющего нечеткий язык \tilde{Z} , можно построить эквивалентный ему по представляемому языку абстрактный детерминированный конечный автомат со случайным входом

$$\mathcal{A}_{inp} = \langle Z \times X, C, c_0, \Psi, C^{(K)}, \mu \rangle,$$

имеющий не более $2^{\tilde{m}}$ состояний, где c_0 — начальное состояние, $C^{(K)}$ — множество конечных состояний и Ψ — однозначная функция: $Z \times X \times C \rightarrow C$.

Эквивалентность детерминированного автомата со случайным входом вероятностному автомату

Следующие утверждения (теоремы 3, 4) являются обобщенной формулировкой результатов В.М. Ченцова и других на случай эквивалентности по представляемым языкам.

Теорема 3

Для каждого абстрактного детерминированного конечного автомата со случайным входом

$$A_{inp} = \langle Z \times X, A, a_0, \Psi, A^{(K)}, \mu \rangle,$$

имеющего m состояний и представляющего нечеткий язык Z , может быть построен эквивалентный ему по представляемому языку абстрактный вероятностный конечный автомат

$$A_{pr} = \langle X, A, a_0, \{P(x)\}, e^{(K)} \rangle,$$

имеющий не более m состояний.

Эквивалентность вероятностного автомата детерминированному автомату со случайным входом. Представимость языков

Теорема 4

Для каждого абстрактного вероятностного конечного автомата

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, a_0, \{P(x)\}, e^{(K)} \rangle,$$

имеющего $m = |A|$ состояний и $n = |X|$ входных символов и представляющего нечеткий вероятностный язык Z , может быть построен эквивалентный ему по представляемому языку абстрактный детерминированный конечный автомат со случайным входом

$$\mathcal{A}_{inp} = \langle Z \times X, A, a_0, \Psi, A^{(K)}, \mu \rangle,$$

имеющий не более чем $m^2n - (mn - 1) - T_0$ символов в алфавите Z , где T_0 — число нулевых элементов в матрицах вероятностей переходов $P(x)$, $x \in X$, исходного автомата \mathcal{A}_{pr} .

Следствие (из теорем 3, 4)

Нечеткие вероятностные языки и только они могут быть представлены в абстрактных конечных детерминированных автоматах со случайным входом.

Эквивалентность недетерминированного автомата со случайным входом вероятностному автомату. Представимость языков

Теорема 5

Для любого обобщенного недетерминированного конечного автомата со случайным входом

$$\mathcal{A}_{snd} = \langle Z \times X, A, Y, \mathbf{r}, \{\mathbf{D}(z, x, y)\}, \mathbf{q}, Y^{(K)}, \mu \rangle,$$

имеющего $m = |A|$ состояний, $n = |X|$ входных символов, $k = |Y|$ выходных символов и представляющего подмножеством $Y^{(K)}$ нечеткий язык \mathcal{Z} , может быть построен эквивалентный ему по представляемому языку абстрактный вероятностный конечный автомат

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, a_0, \{\mathbf{P}(x)\}, \mathbf{e}^{(K)} \rangle,$$

имеющий не более 2^{mk} состояний.

Следствие (из теорем 1-5)

Нечеткие вероятностные языки и только они могут быть представлены обобщенными недетерминированными автоматами со случайным входом.

Алгоритм преобразования обобщенного недетерминированного автомата со случайным входом в абстрактный вероятностный автомат

Алгоритм 1

- построение для обобщенного недетерминированного автомата со случайным входом \mathcal{A}_{snd} эквивалентного ему абстрактного недетерминированного автомата со случайным входом \mathcal{A}_{asnd} согласно **Теореме 1**;
- оптимизация автомата \mathcal{A}_{asnd} ;
- построение для автомата \mathcal{A}_{asnd} эквивалентного ему по представляемому языку абстрактного детерминированного автомата со случайным входом \mathcal{A}_{inp} согласно алгоритму, приведенному в доказательстве **Теоремы 2**;
- оптимизация автомата \mathcal{A}_{inp} ;
- построение абстрактного вероятностного конечного автомата \mathcal{A}_{pr} , эквивалентного по представляемому языку автомату \mathcal{A}_{inp} , согласно **Теореме 3**.

Синтез обобщенного недетерминированного автомата со случайным входом

Теорема 6

Для любого вероятностного конечного автомата

$$\mathcal{A}_{pr} = \langle X, A, a_0, \{P(x)\}, e^{(K)} \rangle,$$

имеющего M состояний и представляющего нечеткий вероятностный язык Z , может быть построен эквивалентный ему по представляемому языку абстрактный недетерминированный конечный автомат со случайным входом

$$\mathcal{A}_{asnd} = \langle Z \times X, B, \tilde{r}, \{\tilde{D}(z, x)\}, \hat{q}, \mu \rangle,$$

имеющий не более m состояний, где $m = \mathcal{O}(\log_2 M + \delta)$.

Синтез обобщенного недетерминированного автомата со случайным входом

Алгоритм 2

- минимизация исходного автомата \mathcal{A}_{pr} ;
- синтез автомата \mathcal{A}_{inp} , эквивалентного автомату \mathcal{A}_{pr} , согласно Теореме 4;
- замена входных символов, подаваемых по двум входным каналам:
 $Z \times X = \tilde{X}$, $(z_i, x_j) \mapsto \tilde{x}_{ij}$, и выделение из $\mathcal{A}_{inp} = \langle Z \times X, A, a_0, \Psi, A^{(K)}, \mu \rangle$ детерминированного автомата $\mathcal{A}_{det} = \langle \tilde{X}, A, a_0, \Psi, A^{(K)} \rangle$;
- оптимизация автомата \mathcal{A}_{det} ;
- синтез недетерминированного абстрактного автомата \mathcal{A}_{nd} , эквивалентного детерминированному абстрактному \mathcal{A}_{det} , при помощи специальной процедуры последовательного введения кодов состояний автомата \mathcal{A}_{det} и элементов матриц $\tilde{\mathbf{D}}(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$, удовлетворяющих системе уравнений, задаваемых функцией переходов;
- переход от недетерминированного автомата \mathcal{A}_{nd} к недетерминированному автомату со случайным входом \mathcal{A}_{snd} с учетом распределения вероятностей μ и выделения алфавита Z .

- Доказана эквивалентность недетерминированных конечных автоматов со случайным входом абстрактным вероятностным конечным автоматам.
- Доказано, что нечеткие вероятностные языки и только они представимы недетерминированными конечными автоматами со случайным входом.
- Доказана возможность синтеза абстрактного недетерминированного конечного автомата со случайным входом, эквивалентного заданному абстрактному вероятностному конечному автомату, с существенным уменьшением количества состояний, и описана процедура такого синтеза.
- Построенные алгоритмы эквивалентных преобразований и синтеза недетерминированного автомата со случайным входом проиллюстрированы примерами.