Оптимальные стратегии воздействия на нестационарный недетерминированный автомат, функционирующий в интервально нечетких условиях

Степанян Андраник Камоевич, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — д.ф.-м.н., проф. Чирков М.К.
Рецензент: к. ф.-м. н. Мосягина Е.Н.

СтатМод

Введение

- В ходе рассмотрения автоматных моделей, помимо задачи оптимизации, возникли ряд других задач, в том числе связанных с теорией нечетких множеств.
- Дальнейшее рассмотрение задачи выявило проблемы, связанные с принятием многошаговых решений в нечетко заданных условиях для максимального достижения.

Нечеткие множества и операции над ними

Нечеткое множество

$A = (x, \mu_A(x))$, где $\mu_A(x)$ — *значение характеристической функции принадлежности*, принимающая значения в некотором вполне упорядоченном множестве M (например, $M = [0, 1]$)

Основные операции

- Объединение нечетких множеств A, B в U:
  $\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad x \in U.$
- Пересечение нечетких множеств A, B в U:
  $\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad x \in U.$
- Выпуклая комбинация нечетких множеств $A_1, \ldots, A_n$ в U:
  $$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(x).$$

Нечеткие матрицы и операции над ними

Нечеткие матрицы

- $|A| = n,\ |B| = m$. Нечеткое бинарное отношение R на множествах A, B — фиксированное нечеткое множество декартова произведения $A \times B$, характеризующееся функцией принадлежности $\mu_R : A \times B \to [0, 1]$.
- Нечеткая $(n \times m)$-матрица $\mathbf{R} = (R_{ij})_{n,m}$, где $R_{ij} = \mu_R(a_i, b_j)\,, a_i \in A, b_j \in B$.
- $(m \times n)$-матрицы с элементами 0 и 1 — $\mathcal{D}^{m,n}$.
- В таком случае операции над нечеткими отношениями сводятся к операциями над нечеткими матрицами.

Основные операции

- Объединение нечетких $(n \times m)$-матриц $\mathbf{R}^{(1)}$ и $\mathbf{R}^{(2)}$:

$$\mu_{\mathbf{R}}(a_i, b_j) = \max[\mu_{\mathbf{R}^{(1)}}(a_i, b_j), \mu_{\mathbf{R}^{(2)}}(a_i, b_j)],\ a_i \in A, b_j \in B$$

- Пересечение:

$$\mu_{\mathbf{R}}(a_i, b_j) = \min[\mu_{\mathbf{R}^{(1)}}(a_i, b_j), \mu_{\mathbf{R}^{(2)}}(a_i, b_j)],\ a_i \in A, b_j \in B$$

- $|A| = n,\ |B| = m,\ |C| = l,\ (n \times m)$-матрица $\mathbf{R}^{(1)}$ и $(m \times l)$-матрица $\mathbf{R}^{(2)}$. Максиминным произведением называют нечеткую $(n \times l)$-матрицу $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(1)} \circ \mathbf{R}^{(2)}$ с элементами:

$$\mu_{\mathbf{R}}(a_i, c_j) = \max_{b_\nu} \min[\mu_{\mathbf{R}^{(1)}}(a_i, b_\nu), \mu_{\mathbf{R}^{(2)}}(b_\nu, c_j)],$$

$$a_i \in A,\ b_\nu \in B,\ c_j \in C.$$

Нестационарный недетерминированный автомат с периодически меняющейся структурой $\tilde{A}_{nd}$

$$\tilde{A}_{nd} = \langle\; X^{(\tau)}, A^{(\tau)}, \mathbf{r}_0, \{\mathbf{D}^{(\tau)}(x_s)\}, \mathbf{q}^{(\tau)}, t_0, T, \tilde{n}, t_p \rangle,$$

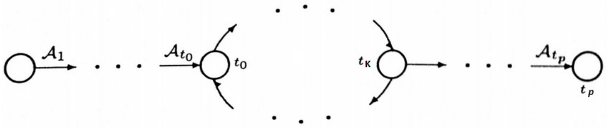

Рис.: 1

- $|X^{(\tau)}| = \tilde{n}_\tau,\ \tau = \overline{1, t_0 + T + t_p}$
- $|A^{(\tau)}| = m_\tau$
- $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{D}^{1,m_0}$
- $\{\mathbf{D}^{(\tau)}(x_s)\}$ - совокупность $\tilde{n}_\tau$ матриц размера $(m_{\tau-1} \times m_\tau)$
- $\mathbf{q}^{(\tau)} \in \mathcal{D}^{m_\tau,1}$

Постановка задачи

- Необходимо преобразовать метод автоматных итераций для задачи оптимального управления недетерминированного нестационарного автомата так, что на каждом такте эксперты задают матрицы нечетких ограничений, элементами которых являются интервалы
- На каждом такте необходимо сравнивать экспертов по степени их компетентности независимым экспертом
- Матрица с элементами $[\mu^{ij}_{\min}, \mu^{ij}_{\max}]$ должна обладать следующими свойтсвами:
  а) Для любого $\mu_{ij} \in [\mu^{ij}_{\min}, \mu^{ij}_{\max}]$ найдется $\mu_{ji} \in [\mu^{ji}_{\min}, \mu^{ji}_{\max}]$, что $\mu_{ji} = \frac{1}{\mu_{ij}}$,
  б) Для любого $\mu_{ik} \in [\mu^{ik}_{\min}, \mu^{ik}_{\max}]$ и $\mu_{kj} \in [\mu^{kj}_{\min}, \mu^{kj}_{\max}]$ найдется $\mu_{ij} \in [\mu^{ij}_{\min}, \mu^{ij}_{\max}]$, что $\mu_{ij} = \mu_{ik}\mu_{kj}$.

Интервальные матрицы парных сравнений

$$Q = ([a_{ij}; b_{ij}])_{n\times n} = \begin{pmatrix} [a_{11}; b_{11}] & \dots & [a_{1n}; b_{1n}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}; b_{n1}] & \dots & [a_{nn}; b_{nn}] \end{pmatrix},$$

$$0 < a_{ij} < b_{ij} \leq 1, \; i > j.$$

- $c_{ij} = \frac{1}{c_{ij}}$, где $c_{ij} \in [a_{ij}; b_{ij}]$
- $c_{ij} = c_{ik}c_{kj}$, где $c_{ij} \in [a_{ij}; b_{ij}]$
- Число n является максимальным собственным значением матрицы Q и для вектора $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$ выполняется равенство $Q\omega = n\omega$

$$a_{ij} = \min\left(\frac{a_{1j}}{a_{1i}}; \frac{b_{1j}}{b_{1i}}\right), \; b_{ij} = \max\left(\frac{a_{1j}}{a_{1i}}; \frac{b_{1j}}{b_{1i}}\right).$$

Формула нахождения степеней доверия

Рассмотрим матрицы:

$$Q^{(\min)} = \left(a_{ij}^{(1)}\right)_{n\times n} \text{ и } Q^{(\max)} = \left(b_{ij}^{(1)}\right)_{n\times n}.$$

Необходимо найти собственные вектора

$$\omega^{(\min)} = \left(\omega_1^{(\min)}, \ldots, \omega_n^{(\min)}\right)^T,\ \omega^{(\max)} = \left(\omega_1^{(\max)}, \ldots, \omega_n^{(\max)}\right)^T.$$

Компоненты собственных векторов вычисляются по формулам:

$$\omega_{1i}^{(\min)} = \frac{a_{1n}}{a_{1i}} \text{ и } \omega_{1i}^{(\max)} = \frac{b_{1n}}{b_{1i}}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Формула нахождения степеней доверия

Из найденных собственных векторов находим степени доверия экспертов по формулам:

$$\lambda_k = \left[\min\left(\frac{\frac{a_{1n}}{a_{1k}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_{1n}}{a_{1i}}}; \frac{\frac{b_{1n}}{b_{1k}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{b_{1n}}{b_{1i}}} \right), \max\left(\frac{\frac{a_{1n}}{a_{1k}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_{1n}}{a_{1i}}}; \frac{\frac{b_{1n}}{b_{1k}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{b_{1n}}{b_{1i}}} \right) \right], \quad (3)$$

$k \in [1; n]$, *где* n — *количество экспертов,*

при этом $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{(\min)} = 1$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{(\max)} = 1.$

$$\lambda_k^{(\text{ср})} = \frac{\lambda_k^{(\min)} + \lambda_k^{(\max)}}{2}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Второй способ нахождения степеней доверия

- Для каждой матрицы $Q_1, \ldots, Q_n$ находим интервалы степени доверия из процедуры предложенной выше.
- Из каждой матрицы получим n интервалов $[\lambda_{kl}^{(\min)}; \lambda_{kl}^{(\max)}]$, $k, l = \overline{1, n}$.
- В качестве степеней доверия будем брать интервалы:

$$\lambda_m = [\lambda_{1m}^{(\min)}; \lambda_{1m}^{(\max)}] \cap \cdots \cap [\lambda_{nm}^{(\min)}; \lambda_{nm}^{(\max)}], \qquad (5)$$

$$m = \overline{1, n}.$$

Методика решения задачи

Структурные такты исходного автомата разбиваются в соответствии со структурными тактами

$$t_0 \leq \tau = N < t_0 + T,\ \tau = M = t_p,$$

в которых заданы нечеткие цели G^N и G^M, и структурным тактом

$$N \leq \tau = K < N + T - 1,$$

в котором начинается постпериод t_p.

Алгоритм решения задачи

Рассмотрим недетерминированный нестационарный абстрактный конечный автомат с периодически меняющейся структурой:

$$\tilde{A}_{nd} = \langle\, X^{(\tau)}, A^{(\tau)}, r_0, \{D^{(\tau)}(x_s)\}, q^{(\tau)}, t_0, T, \tilde{n}, t_p \rangle,$$

- В структурных тактах $\tau = t_0 = N$, $\tau = t_0 + T + t_p = M$ экспертами заданы нечеткие цели, $\mu_{GN}^{(m)}(a_i)$ и $\mu_{GM}^{(m)}(a_i)$, где $m \in \overline{1, n}$ и n-количество экспертов.
- На входные управляющие символы автомата экспертами наложены нечеткие ограничения $C_{(m)}^{(\tau)}(x_s|a_i)$, $\tau = \overline{1, M}$, $m = \overline{1, n}$.

- На каждом такте находятся нечеткие автоматные матрицы

$$\tilde{U}^{(\tau)}_{\min} = \left(\tilde{U}_{\min_{i_{\tau-1} i_\tau}}\right)_{m_{\tau-1}, m_\tau}$$

с элементами

$$\tilde{U}_{\min_{i_{\tau-1} i_\tau}} = \bigcup_s D^{(\tau)}{}_{i_{\tau-1} i_\tau}(x_s) \mu^{(\tau)}_{\min}(x_s | a_{i_{\tau-1}}) x_s,$$

$$\tilde{U}^{(\tau)}_{\max} = \left(\tilde{U}_{\max_{i_{\tau-1} i_\tau}}\right)_{m_{\tau-1}, m_\tau}$$

с элементами

$$\tilde{U}_{\max_{i_{\tau-1} i_\tau}} = \bigcup_s D^{(\tau)}{}_{i_{\tau-1} i_\tau}(x_s) \mu^{(\tau)}_{\max}(x_s | a_{i_{\tau-1}}) x_s$$

- $\mu^{(\tau)}_{\min}(x_s | a_{i_{\tau-1}}) x_s$ состоит из элементов a_{mk} и $\mu^{(\tau)}_{\max}(x_s | a_{i_{\tau-1}}) x_s$ состоит из элементов b_{mk}, где $a_{mk} = \sum_{j=1}^{n} \alpha^{(j)}_{mk} \lambda_j$ и $b_{mk} = \sum_{j=1}^{n} \beta^{(j)}_{mk} \lambda_j$, $[\alpha^{(j)}_{mk}; \beta^{(j)}_{mk}]$ — элементы матриц нечетких ограничений.

- Строятся матрицы максимальных весов переходов $R_{\min}^{(\tau)} = \left(R_{\min_{i_{\tau-1} i_\tau}}\right)_{m_{\tau-1}, m_\tau}$, $R_{\max}^{(\tau)} = \left(R_{\max_{i_{\tau-1} i_\tau}}\right)_{m_{\tau-1}, m_\tau}$ элементы которых есть:

$$R_{\min_{i_{\tau-1} i_\tau}} = \min_{x_s} [D^{(\tau)}{}_{i_{\tau-1} i_\tau}(x_s) \mu_{\min}^{(\tau)}(x_s | a_{i_{\tau-1}})],$$

$$R_{\max_{i_{\tau-1} i_\tau}} = \max_{x_s} [D^{(\tau)}{}_{i_{\tau-1} i_\tau}(x_s) \mu_{\max}^{(\tau)}(x_s | a_{i_{\tau-1}})].$$

- $q_{\min}^{(N)}$ корректируется заменой элементов 1 на соответствующие этим состояниям значения функции принадлежности нечеткой цели $\mu_{\min_{GN}}(a_{i_N})$. Аналогично для $q_{\max}^{(N)}$.
- Находятся вектора $\tilde{q}_{\min}^{(N-\nu-1)}$ и $\tilde{q}_{\max}^{(N-\nu-1)}$ по формулам:

$$\tilde{q}_{\min}^{(N-\nu-1)} = R_{\min}^{(n-\nu)} \tilde{q}_{\min}^{(N-\nu)},$$

$$\tilde{q}_{\max}^{(N-\nu-1)} = R_{\max}^{(n-\nu)} \tilde{q}_{\max}^{(N-\nu)}.$$

- Максимальная компонента $\tilde{q}^{(0)}_{\min} - \tilde{q}^{(0)}_{\min_{i_{\max}}}$ является левой границей интервала степени достижения нечеткой цели G^N. Правая граница аналогично находится как $\tilde{q}^{(0)}_{\max_{i_{\max}}}$.
- Из матриц $\tilde{U}^{(\tau)}_{\min}$ и $\tilde{U}^{(\tau)}_{\max}$, удаляются входные символы, умноженные на числовые коэффициенты значения которых меньше, чем $\tilde{q}^{(0)}_{\min_{i_{\max}}}$ и $\tilde{q}^{(0)}_{\max_{i_{\max}}}$ соответсвенно. Численные коэффициенты оставшихся входных символов заменяются на 1. Получаем автоматные матрицы $\tilde{U}^{(\tau)}_{\min}$, $\tilde{U}^{(\tau)}_{\max}$, $\tau = \overline{1, N}$.
- Вектора конечных состояний $\hat{q}^{(N)}_{\min}$ и $\hat{q}^{(N)}_{\max}$ получаем аналогично.

Окончательные регулярные выражения решения задачи для автомата $\tilde{A}'_{nd}$ представлюется в виде (где $\hat{r}_0 = r_0$):

$$Z_{\min_0} = \hat{r}_0 \prod_{\tau=1}^{N} \hat{U}_{\min}^{(\tau)} \hat{q}_{\min}^{(N)},$$

$$Z_{\max_0} = \hat{r}_0 \prod_{\tau=1}^{N} \hat{U}_{\max}^{(\tau)} \hat{q}_{\max}^{(N)}.$$

В общем случае множество управляющих слов, обеспечивающих оптимальное управление в заданных условиях, будет определяться регулярным выражением:

$$Z = \begin{cases} Z_{\min_0} \prod\limits_{\eta=1}^{n} Z_{\min_\eta} Z_{\min_p} \\ Z_{\max_0} \prod\limits_{\eta=1}^{n} Z_{\max_\eta} Z_{\max_p} \end{cases}$$

Итоги

- Разработаны две процедуры нахождения степеней доверия экспертов.
- Выведена формула нахождения степеней доверия экспертов.
- Переделан алгоритм поиска оптимального управления для недетерминированного периодичкески нестационарного абстрактного автомата методом автоматных итераций на случай интервального представления нечетких ограничений и нечеткой цели экспертами на каждом такте работы указанного автомата.

Спасибо за внимание!