

# Об одном примере, относящемся к анализу сингулярного спектра временных рядов

Иванова Елизавета, 422 группа

Санкт-Петербургский государственный университет  
Математико-механический факультет  
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. В. В. Некруткин  
Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Н. Э. Голяндина

Санкт-Петербург  
2015 г.

- $F_N = (x_0, \dots, x_{N-1})$  — сигнал;
- $x_n = \sum_{k=1}^d a_k x_{n-k}$  — минимальная ЛРФ ранга  $d$ ;
- $\mathbf{H}$  — траекторная (ганкелева) матрица размерности  $L \times K$ ,  $N = K + L - 1$ , со столбцами  $(x_j, \dots, x_{L+j-1})^T$ ;
- $\mathbb{U}_0^\perp$  — линейное пространство, натянутое на столбцы матрицы  $\mathbf{H}$  — «сигнальное подпространство»,  $\dim \mathbb{U}_0^\perp = d$ ;
- $\mathbf{P}_0^\perp$  — ортогональный проектор на  $\mathbb{U}_0^\perp$ .

- $\mathbf{E}_N = (e_0, \dots, e_{N-1})$  — помеха;
- $\mathbf{F}_N(\delta) = \mathbf{F}_N + \delta \mathbf{E}_N$  — возмущенный сигнал,  $\delta$  — формальный параметр возмущения;
- $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta \mathbf{E}$ ;
- $\mathbb{U}_0^\perp(\delta)$  — линейное пространство, натянутое на  $d$  главных левых сингулярных векторов SVD матрицы  $\mathbf{H}(\delta)$ ;
- $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$  — ортогональный проектор на  $\mathbb{U}_0^\perp(\delta)$ ;
- $\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|$  — синус наибольшего главного угла между  $\mathbb{U}_0^\perp$  и  $\mathbb{U}_0^\perp(\delta)$ .

- $\tilde{\mathbf{H}}$  — сумма  $d$  главных элементарных матриц SVD  $\mathbf{H}(\delta)$ ;
- $\mathcal{S}$  — оператор диагонального осреднения;
- $\mathcal{S}\tilde{\mathbf{H}} =: \tilde{\mathbf{F}}_N(\delta) = (\tilde{x}_0(\delta), \dots, \tilde{x}_{N-1}(\delta))$  — аппроксимация  $\mathbf{F}_N$ ;
- $\|\tilde{\mathbf{F}}_N(\delta) - \mathbf{F}_N\|_{\max} = \max_{0 \leq n < N} |\tilde{x}_n(\delta) - x_n|$ .

Ошибка аппроксимации  $\mathbf{H}$ :

$$\tilde{\mathbf{H}} - \mathbf{H} = (\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}.$$

Тогда  $\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{H}} - \mathbf{H})$  — ошибка аппроксимации  $\mathbf{F}_N$ .

Получаем частный случай метода Basic SSA.

## Известные результаты:

Некруткин В.В.,

«Perturbation expansions of signal subspaces», (SII, 2010):

Для сигнала  $x_n = a^n$ ,  $a > 1$  и помехи  $e_n = 1$  при  $N \rightarrow \infty$

1.

$$\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\| = O(\sqrt{N}a^{-N});$$

2.

$$\limsup_N \|\tilde{\mathbf{F}}_N(\delta) - \mathbf{F}_N\|_{\max} > 0 \text{ при } \delta \neq 0.$$

## 1. Замена помехи

- $x_n = a^n$
- $e_n = 1 \mapsto e_n = (-1)^n$ .

## 2. Дискретизация

- $x(t)$  – непрерывная функция,  $t \in [0, T]$ :  
$$x_i = x(iT/N), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad N \rightarrow \infty, \quad T = T(N).$$
  
Здесь:  $x_i = a^{iT/N}$ .

## 3. Замена помехи + дискретизация

Для сигнала  $x_n = a^n, a > 1$  до и после дискретизации при двух видах помех и  $N \rightarrow \infty$

- Исследовать сближение возмущенного и невозмущенного сигнальных подпространств;
- Проанализировать максимальную ошибку восстановления.

# Результаты: случай $e_n = (-1)^n$

Сигнал:  $x_n = a^n$ , помеха:  $e_n = (-1)^n$  и  $L \sim \alpha N$ .

## Основной результат:

- Доказано, что проекторы сближаются со скоростью  $\sqrt{N}a^{-N}$ .
- Доказано, что максимальная ошибка восстановления не стремится к нулю.

## Кроме того:

- Определен главный член нормы разности проекторов.
- Найдены асимптотики ошибок восстановления  $r_n = \tilde{x}_n(\delta) - x_n$  для  $n = 0, \dots, N-1$  при  $N \rightarrow \infty$ .



# Результаты: дискретизация с $e_n = 1$

Сигнал:  $x_n = a^n$ , помеха:  $e_n = 1$ .

**Таблица:** Скорость сближения возмущенного и невозмущенного подпространств сигнала в случае постоянной помехи.

Условия на $L$	Условия на $T$	Порядок сход-сти
$L = \text{const}$	$T = T_0 + o(1)$	$C(\delta)N^{-1}$
	$T \rightarrow \infty, T = o(N)$	$ \delta TN^{-1}a^{-T}$
	$T = \beta N + o(N)$	$ \delta a^{-T}$
	$T \rightarrow \infty, T = \omega(N)$	$ \delta a^{-(T-T/N)}$
$L = \alpha N + o(N),$ $\alpha \in (0, 1)$	$T = T_0 + o(1)$	—
	$T \rightarrow \infty, T = o(N)$	$ \delta \sqrt{T}a^{-T}$
	$T = \beta N + o(N)$	$ \delta \sqrt{T}a^{-T}$
	$T \rightarrow \infty, T = \omega(N)$	$ \delta \sqrt{N}a^{-(T-T/N)}$

Сигнал:  $x_n = a^{nT/N}$ ,  $T = T_0 + o(1)$ , помеха:  $e_n = 1$  и  $L \sim \alpha N$ .

## Норма разности проекторов:

Существует  $\delta_1 > 0$  и такая неотрицательная функция  $C(\delta)$ , определенная на интервале  $(-\delta_1, \delta_1)$ , что

$$\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\| \geq C(\delta) > 0$$

при любом  $\delta \in (-\delta_1, \delta_1) \setminus \{0\}$ .

Ошибки восстановления не стремятся к 0 — подтверждается вычислительными экспериментами.

Сигнал:  $x_n = a^{nT/N}$ ,  $T = T_0 + o(1)$ , помеха:  $e_n = (-1)^n$  и  $L \sim \alpha N$ .

## Основной результат:

- Доказано, что проекторы сближаются со скоростью  $1/N$ .
- Доказано, что максимальная ошибка восстановления стремится к нулю со скоростью  $1/N$ .

## Кроме того:

- Найдены порядки асимптотик ошибок восстановления  $r_n = \tilde{x}_n(\delta) - x_n$  для  $n = 0, \dots, N-1$  при  $N \rightarrow \infty$ .

**Получено:** теоретические результаты для постоянной и пилообразной помехи в случае  $T = T_0 + o(1)$  и  $L \sim \alpha N$ .

**Вопрос:** другие случаи поведения  $T = T(N)$ .

**Вычислительные эксперименты:** ошибки восстановления при  $T \rightarrow \infty$ ,  $T = o(N)$  ведут себя аналогично  $T = T_0 + o(1)$ .

## Другие случаи: дискретизация с $e_n = 1$

Вычислительный эксперимент:  $T = \sqrt{N}$ ,  $L = \lfloor N/3 \rfloor$ ,  $r_i = \tilde{x}_i(\delta) - x_i$ .

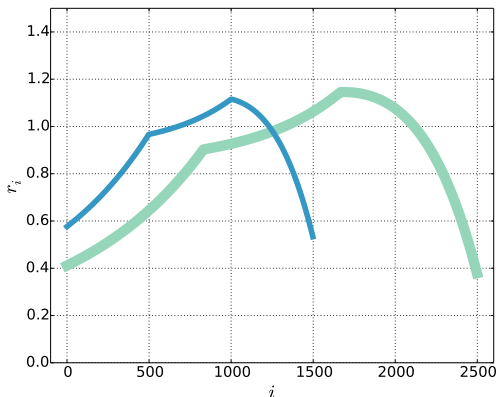


Рис.: Ошибки восстановления ряда  $x_i = a^{iT/N}$  из зашумленного ряда  $f_i = x_i + \delta$ ,  $T = \sqrt{N}$ ,  $L = \lfloor N/3 \rfloor$ ,  $a = 1.1$ ,  $\delta = 1$  и  $N = 1499, 2499$ .

## Другие случаи: дискретизация с $e_n = (-1)^n$

Вычислительный эксперимент:  $T = \sqrt{N}$ ,  $L = \lfloor N/3 \rfloor$ ,  $r_i = \tilde{x}_i(\delta) - x_i$ .

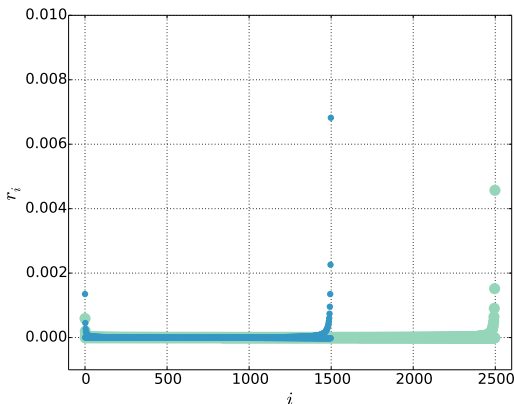


Рис.: Ошибки восстановления ряда  $x_i = a^{iT/N}$  из зашумленного ряда  $f_i = x_i + \delta(-1)^i$ ,  $T = \sqrt{N}$ ,  $L = \lfloor N/3 \rfloor$ ,  $a = 1.1$ ,  $\delta = 1$  и  $N = 1499, 2499$ .

- Для сигнала  $x_n = a^n$  с помехой  $e_n = (-1)^n$  доказано, что максимальная ошибка восстановления не стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ ;
- Для дискретизованного сигнала  $x_i = a^{iT/N}$  с помехой  $e_n = (-1)^n$  в случае  $T = T_0$  и  $L \sim \alpha N$  доказано, что максимальная ошибка восстановления стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ ;
- Для дискретизованного сигнала  $x_i = a^{iT/N}$  с помехой  $e_n = 1$  при различных зависимостях  $T = T(N)$  исследованы асимптотики скорости сближения сигнальных подпространств. Выделен случай, когда подпространства не сходятся.
- Проведена численная проверка полученных теоретических результатов.