

# Об одном классе моделей системы с дискретными состояниями

Баранов Антон Игоревич, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет  
Математико-механический факультет  
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: проф. Сушков Ю.А.



Санкт-Петербург  
2008г.

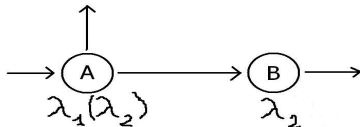
# История появления задачи

Похожие задачи были рассмотрены сотрудником Копенгагенской телефонной компании, ученым Агнером Эрлангом, в период между 1908 и 1922 годами. Стояла задача упорядочить работу телефонной станции и заранее рассчитать качество обслуживания потребителей в зависимости от числа используемых устройств. Но Эрланг рассматривал системы с фиксированными операциями на аппаратах.

Впервые такие задачи были рассмотрены в диссертации Г. Ф. Кропычева с помощью аппарата Эрланга.

## Перечисление схем

Задача: построить всевозможные схемы моделей систем некоторого класса с дискретными состояниями, где число аппаратов равно двум, а число операций – трем.



### Определение

*Элементарная операция – неделимое действие по обслуживанию заявки в системе.*

### Определение

*Составная операция – операция, состоящая из нескольких элементарных операций.*

## Перечисление схем

### Допущения:

- на аппаратах могут быть элементарные и составные операции;
- на аппаратах неограниченное количество операций;
- обслуживание заявки может начинаться и заканчиваться на любом из аппаратов;
- на аппаратах могут быть условные и безусловные операции;
- на аппаратах не могут одновременно находиться безусловные операции с одинаковыми наименьшими элементарными операциями;
- на аппарате не может быть одинаковых условной и безусловной операций одновременно;
- если на первом из аппаратов есть безусловная операция  $\lambda_i$ , то на другом аппарате могут быть условные операции:  $(\lambda_i)$ ;  $(\lambda_{i-1,i})$ , если на первом есть безусловная операция  $\lambda_{i-1}$ ;  $(\lambda_{i-2,i-1,i})$ , если на первом аппарате есть безусловные операции  $\lambda_{i-2}$ ,  $\lambda_{i-1}$  или безусловная операция  $\lambda_{i-2,i-1}$  и так далее;
- на аппарате не может быть недоступных операций, то есть если на аппарате есть операция, то она должна выполняться в процессе функционирования аппарата обязательно;
- все элементарные операции должны быть выполнены в системе;
- система обладает свойством марковости.

# Алгоритм построения схем.

Алгоритм:

- генерирование возможных операций;
- генерирование возможных наборов безусловных операций на одном аппарате;
- генерирование возможных совокупностей наборов безусловных операций на всех аппаратах;
- генерирование возможных условных операций на всех аппаратах;
- генерирование возможных переходов (связей) между аппаратами;
- проверка на эквивалентность полученных схем моделей систем.

Преимущество данного алгоритма:

- возможность на начальном этапе отбрасывать невозможные состояния системы: 00 01 02 10 11 12 W0 W1 W2 WW 0W.

# Генерирование возможных наборов безусловных операций на одном аппарате

Правила генерации наборов безусловных операций на одном аппарате:

- на одном аппарате не может быть несколько одинаковых операций;
- на аппарате не может быть одновременно безусловных операций вида  $\lambda_1; \lambda_{1,2}; \lambda_{1,2,3}$ , то есть на аппарате безусловная операция может включать в себя какую-то элементарную операцию только тогда, когда на аппарате нет безусловной операции с меньшим числом элементарных операций, включающей эту элементарную операцию (операции располагаются по возрастанию).

# Генерирование возможных совокупностей наборов безусловных операций на всех аппаратах

## Определение

*Минимумом безусловной операции называется наименьший номер элементарной операции*

## Определение

*Максимумом безусловной операции называется наибольший номер элементарной операции*

## Определение

*Минимальное множество аппарата – множество объединений минимумов всех операций на этом аппарате.*

## Определение

*Максимальное множество аппарата – множество объединений максимумов всех операций на этом аппарате.*

# Генерирование возможных совокупностей наборов безусловных операций на всех аппаратах

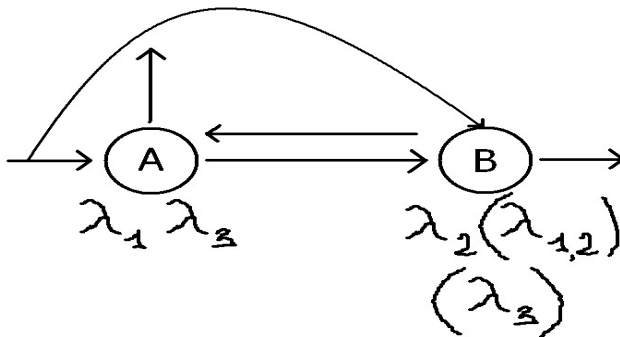
Правила генерации совокупностей наборов безусловных операций на всех аппаратах:

- на любых аппаратах должны присутствовать безусловные операции, включающие в себя элементарные начальную и конечную операции;
- для каждого элемента из максимального множества аппарата на любом другом аппарате должна существовать такая операция, что если из ее минимума вычесть 1, то получится данный элемент максимального множества;
- для каждого элемента из минимального множества аппарата на любом другом аппарате должна существовать такая операция, что если к ее максимуму прибавить 1, то получится данный элемент минимального множества;
- на аппаратах не могут одновременно находиться операции с одинаковыми минимумами.



# Пример схемы

Рассмотрим пример решения одной из сгенерированных моделей системы.  
Пусть у нас есть такая схема:



# Возможные состояния системы

Теперь запишем состояния, в которых могут находиться наши аппараты:

A	B
0	0
1	2
3	12
W	3

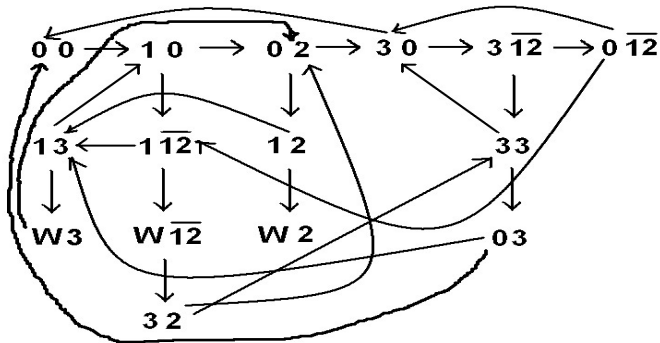
Запишем состояния всей системы:

0 0	0 2	0 12	0 3
1 0	1 2	1 12	1 3
3 0	3 2	3 12	3 3
W 0	W 2	W 12	W 3

Исключим заведомо невозможные состояния, здесь оно только одно - W0.

## Граф состояний системы

Следующим шагом необходимо построить граф состояний системы:



# Система дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений, построенная по графу состояний:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dP_{0,0}}{dt} & = & \frac{1}{t_3} \frac{dP_{3,0}}{dt} + \frac{1}{t_3} \frac{dP_{0,3}}{dt} - \frac{1}{\lambda} \frac{dP_{0,0}}{dt}, \\ \frac{dP_{1,0}}{dt} & = & \frac{1}{t_3} \frac{dP_{1,3}}{dt} + \frac{1}{\lambda} \frac{dP_{0,0}}{dt} - \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{\lambda} \right) \frac{dP_{1,0}}{dt}, \\ \frac{dP_{0,2}}{dt} & = & \frac{1}{t_3} \frac{dP_{W,3}}{dt} + \frac{1}{t_3} \frac{dP_{3,2}}{dt} - \left( \frac{1}{t_2} + \frac{1}{\lambda} \right) \frac{dP_{0,2}}{dt}, \\ \frac{dP_{1,2}}{dt} & = & \frac{1}{\lambda} \frac{dP_{0,2}}{dt} - \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) \frac{dP_{1,2}}{dt}, \\ \frac{dP_{1,12}}{dt} & = & \frac{1}{\lambda} \frac{dP_{1,0}}{dt} + \frac{1}{\lambda} \frac{dP_{0,12}}{dt} - \left( \frac{1}{t_{12}} + \frac{1}{t_1} \right) \frac{dP_{1,12}}{dt}, \\ & \vdots & \\ \frac{dP_{3,0}}{dt} & = & \frac{1}{t_2} \frac{dP_{3,0}}{dt} + \frac{1}{t_{12}} \frac{dP_{0,12}}{dt} - \left( \frac{1}{t_3} + \frac{1}{\lambda} \right) \frac{dP_{3,0}}{dt}, \\ \frac{dP_{3,12}}{dt} & = & \frac{1}{\lambda} \frac{dP_{3,0}}{dt} - \left( \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_{12}} \right) \frac{dP_{3,12}}{dt}, \\ \frac{dP_{0,12}}{dt} & = & \frac{1}{t_3} \frac{dP_{3,12}}{dt} - \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{t_{12}} \right) \frac{dP_{0,12}}{dt}, \\ \frac{dP_{3,3}}{dt} & = & \frac{1}{t_{12}} \frac{dP_{3,12}}{dt} + \frac{1}{t_2} \frac{dP_{3,2}}{dt} - \left( \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_3} \right) \frac{dP_{3,3}}{dt}, \\ \sum_{i,j} P_{i,j} & = & 1, \\ P_{i,j} & \geq & 0. \end{array} \right.$$

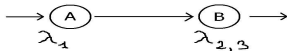
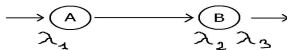
# Область применения результатов данной работы

Результаты данной работы могут найти применение:

- в практических приложениях;
- в обучении студентов;
- в разработке математических моделей;
- и т.д.

# Различие выполнения двух операций последовательно и параллельно

Пусть есть схемы:



Составим системы дифференциальных уравнений наших схем моделей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_{0,0}}{dt} = \frac{1}{t_3} \frac{dP_{0,3}}{dt} - \frac{1}{\lambda} \frac{dP_{0,0}}{dt}, \\ \frac{dP_{1,0}}{dt} = \frac{1}{t_3} \frac{dP_{1,3}}{dt} + \frac{1}{\lambda} \frac{dP_{0,0}}{dt} - \frac{1}{t_1} \frac{dP_{1,0}}{dt}, \\ \vdots \\ \sum_{i,j} P_{i,j} = 1, \\ P_{i,j} \geq 0. \end{array} \right.$$

# Различие выполнения двух операций последовательно и параллельно

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dP_{0,0}}{dt} & = & \frac{1}{t_{23}} \frac{dP_{0,23}}{dt} - \frac{1}{\lambda} \frac{dP_{0,0}}{dt}, \\ \frac{dP_{1,0}}{dt} & = & \frac{1}{t_{23}} \frac{dP_{1,23}}{dt} + \frac{1}{\lambda} \frac{dP_{0,0}}{dt} - \frac{1}{t_1} \frac{dP_{1,0}}{dt}, \\ \frac{dP_{0,23}}{dt} & = & \frac{1}{t_1} \frac{dP_{1,0}}{dt} + \frac{1}{t_{23}} \frac{dP_{W,23}}{dt} - \frac{1}{\lambda} \frac{dP_{0,23}}{dt} - \frac{1}{t_{23}} \frac{dP_{0,23}}{dt}, \\ \frac{dP_{1,23}}{dt} & = & \frac{1}{\lambda} \frac{dP_{0,23}}{dt} - \frac{1}{t_1} \frac{dP_{1,23}}{dt} - \frac{1}{t_{23}} \frac{dP_{1,23}}{dt}, \\ \frac{dP_{W,23}}{dt} & = & \frac{1}{t_1} \frac{dP_{1,23}}{dt} - \frac{1}{t_{23}} \frac{dP_{W,23}}{dt}, \\ \sum_{i,j} P_{i,j} & = & 1, \\ P_{i,j} & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Если делаем предположение, что  $t_{12} = t_1 + t_2$ . То получаем, что такие две схемы не изоморфны.