# Классификация корреляционных функций гауссовских марковских процессов и связь с теорией катастроф

Ганночка Андрей Викторович, группа 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — доц., к.ф.-м.н. **Т.М. Товстик**
Рецензент — доц., к.ф.-м.н. **А.Ф. Сизова**

Санкт-Петербург
2007

- Молодая теория (1972), новое направление в рамках анализа и топологии.
- Основные понятия:
  - *Катастрофа* — внезапное изменение поведения системы.
  - *Структурная устойчивость* — нечувствительность к малым изменениям параметров системы.
- Многие изменения системы совершаются *скачками*. Природа скачков бывает самой разнообразной.
- *Внезапные* изменения — катастрофы — обычно вызываются *гладкими* изменениями ситуации:
  - кипение воды;
  - вскрытие рек;
  - биржевые крахи.
- Будет рассмотрена связь теории катастроф и теории вероятностей (теории *случайных процессов*).

# Основные понятия

## Определение

Случайный процесс $\xi_t$ с непрерывным параметром $t \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, называется **марковским**, если для любой функции $\varphi(x)$, определенной на области изменения процесса $\xi_t$, и для любого упорядоченного по возрастанию набора моментов времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_m < t$ из множества $\mathcal{T}$ выполняется равенство:

$$\mathbf{E}(\varphi(\xi_t)|\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_m}) = \mathbf{E}(\varphi(\xi_t)|\xi_{t_m}).$$

## Определение

**Производной в среднем квадратичном** процесса $\xi_t$ называется процесс $\xi'_t$ такой, что

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{E}\left|\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \xi'_t\right|^2 = 0.$$

## Определение

**Марковским процессом** $n$**-го порядка** называется случайный процесс $\xi_t$, для которого векторный процесс $(\xi_t, \xi'_t, \ldots, \xi_t^{(n)})$ является марковским.

# Постановка задачи

- Рассматриваются вещественные стационарные гауссовские процессы с нулевым математическим ожиданием.
- В качестве спектральной плотности рассматривается функция

$$f(\lambda) = \frac{C}{\left|\sqrt{\pi} P_n(i\lambda)\right|^2}, \qquad (1)$$

где $P_n(x) = p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0,\ p_j \in \mathbb{R}$.

**Предложение**

*Если в числителе спектральной плотности (1) константа, а многочлен, стоящий в знаменателе, имеет корни в левой полуплоскости, то соответствующий случайный процесс — марковский $(n-1)$-го порядка.*

- Описание ситуации:
    - в случае $n = 1$ спектральной плотности соответствует *единственный* стационарный марковский процесс *нулевого* порядка;
    - в случае $n = 2$ спектральной плотности соответствует стационарный марковский процесс *второго* порядка, *но вид его корреляционной функция уже не будет определяться единственным образом*;
- Цель работы — продемонстрировать, как находить области в пространстве параметров $p_0, p_1, \ldots, p_n$, в каждой из которых корреляционная функция процесса будет иметь уникальный вид, и классифицировать корреляционные функции в случае $n = 4$.

- При малых $t$ корреляционная функция стационарного гауссовского марковского процесса допускает следующее представление:

$$R(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{a_{2j} t^{2j}}{(2j)!} + (-1)^n a_{2n-1} \frac{|t|^{2n-1}}{(2n-1)!} (1 + o(1)), t \to 0.$$

## Определение

Параметры $p_0, p_1, \ldots, p_n$ и $a_0, a_2, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}$ будем называть **управляющими параметрами** корреляционной функции $R(t)$.

## Теорема

*Пусть* $p_0, p_1, \ldots, p_n$ *и* $a_0, a_2, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}$ *— управляющие параметры корреляционной функции* $R(t)$*. Тогда*

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{\left[\frac{j+k+1}{2}\right]} a_{j+k} p_j = 0, \ 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

- Оба множества управляющих параметров совершенно однозначно соответствуют друг другу.
- В приложениях часто встречается и то, и другое.

### Предложение

*Корреляционная функция стационарного гауссовского марковского процесса* $(n-1)$*-го порядка есть решение уравнения*

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right)R(t) = 0. \tag{2}$$

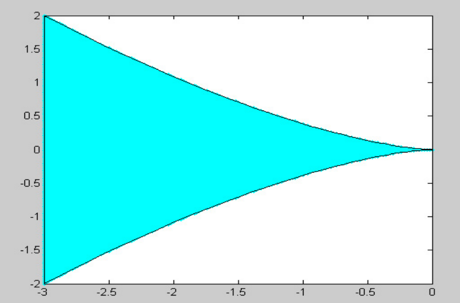
### Определение

Уравнение (2) называется **управляющим**.

# Теорема о структурной устойчивости

**Теорема**

*Структурно устойчивые корреляционные функции стационарного гауссовского марковского процесса $(n-1)$-го порядка в пространстве управляющих параметров разделяются бифуркационным множеством (сепаратрисой) каспоидной серии катастроф $\mathcal{A}_n$.*
*Корреляционные функции, определяемые бифуркационным множеством, не являются структурно устойчивыми.*



# Процесс третьего порядка

- Разложение корреляционной функции:

$$r(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + b\frac{t^4}{4!} - c\frac{t^6}{6!} + d\frac{|t|^7}{7!} + o(|t|^7),\ t \to 0,\ b, c, d > 0.$$

- Дифференциальное уравнение:

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right) r(t) = p_4 r^{IV}(t) + p_3 r'''(t) + p_2 r''(t) + p_1 r'(t) + p_0 = 0.$$

## Предложение

*Топологическая структура множества управляющих параметров, на котором кратность корней характеристического уравнения превышает единицу, совпадает с сепаратрисой катастрофы.*

- Отсюда определяется структурная устойчивость/неустойчивость корреляционной функции.

# Пример области структурной устойчивости - 1

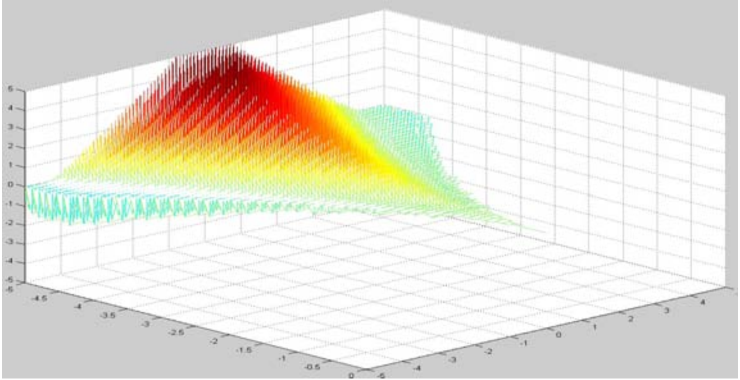


Рис. 1. Область, в которой характеристическое уравнение имеет четыре различных вещественных корня (соответствует
$r_4(t) = C_1 e^{-\lambda_1 |t|} + C_2 e^{-\lambda_2 |t|} + C_3 e^{-\lambda_3 |t|} + C_4 e^{-\lambda_4 |t|}, \ \lambda_j > 0$).

# Пример области структурной устойчивости - 2

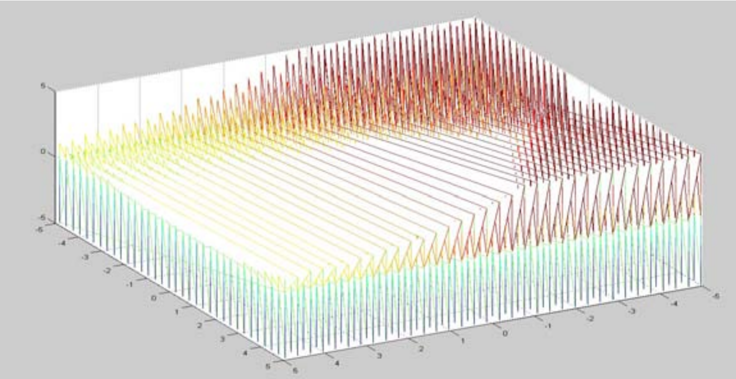


Рис. 2. Область, в которой характеристическое уравнение имеет два различных вещественных и пару комплексно-сопряженных корней (соответствует $r_8(t) = e^{-\mu|t|}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega |t|) + C_3 e^{-\lambda_1 |t|} + C_4 e^{-\lambda_2 |t|},\ \lambda_1, \lambda_2, \mu > 0$).

- Зададим спектральную плотность формулой

$$f(\lambda) = \frac{C}{\pi |P_4(i\lambda)|^2}, \quad P_4(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

- Характеристическое уравнение имеет совпадающие пары комплексно-сопряженных корней.
- По нашей классификации это соответствует неустойчивой корреляционной функции

$$r_5(t) = e^{-|t|/2}\left(\left(\frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}|t|\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|t| + \left(1 + \frac{1}{6}|t|\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

- Начальные условия при решении дифференциального уравнения выбирались таким образом, чтобы процесс был *марковским третьего порядка*.

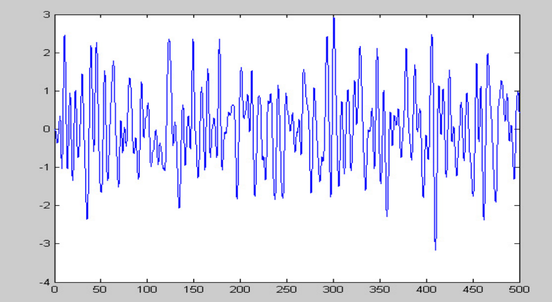



Рис. 3. Реализации стационарного гауссовского процесса $(T = 500,\ \Delta t = 0.1)$ с корреляционной функцией

$$r_5(t) = e^{-|t|/2}\left(\left(\frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}|t|\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|t| + \left(1 + \frac{1}{6}|t|\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

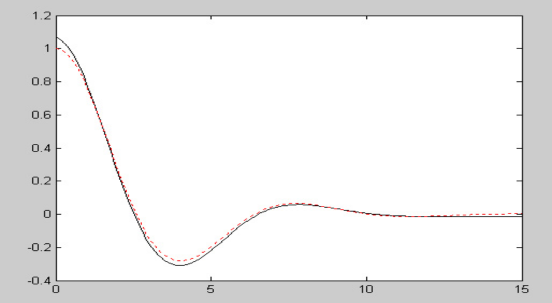



Рис. 4. Графики корреляционной функции для параметров $p_4 = 1, p_3 = 2, p_2 = 3, p_1 = 2, p_0 = 1$, равной

$$r_5(t) = e^{-|t|/2}\left(\left(\frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}|t|\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|t| + \left(1 + \frac{1}{6}|t|\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

и оцененной корреляционной функции $\hat{R}_5(t)$.

# Результаты

- Гауссовский марковский процесс третьего порядка описывается *девятью* корреляционными функциями $r_0(t),\ r_1(t), \ldots, r_8(t)$:
  - три из них структурно устойчивы $(r_4(t), r_6(t), r_8(t))$,
  - шесть из них не являются структурно устойчивыми $(r_0(t), r_1(t), r_2(t), r_3(t), r_5(t), r_7(t))$.
- Удалось параметризовать сепаратрису — *двумерную поверхность в трехмерном пространстве*.
- Мы встретились с катастрофой типа $\mathcal{A}_4$ — *ласточкин хвост*.
- Высшая степень вырождения (четыре совпадающих вещественных корня) — «острие» ласточкиного хвоста (единственная точка).