Оценка второго собственного числа стационарных систем

Видяева Карина Олеговна, гр.522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Ермаков С.М.
Рецензент: аспирантка Загрубская В.А.

Санкт-Петербург
2009

Введение

Существует множество задач, для решения которых необходима информация о собственных значениях.

Проблема:

Необходимо решать эти задачи для матриц размерности 10^3-10^6.

Постановка задачи:

Разработать метод, позволяющий вычислять второе собственное число для матриц больших размерностей.

Системы массового обслуживания, задачи об изображениях

Вектор состояний системы в момент времени i

$$p(i) = (p_0(i), p_1(i), p_2(i), \dots), \qquad 0 \le p_n(i) \le 1, n = 0,1,2,3,\dots \sum_n p_n(i) = 1.$$

$(E_n, E_{n'}) - p_{nn'}$ $\quad p_{n'}(i+1) = \sum_n p_n(i) p_{nn'}$ – уравнение состояний системы

или в матричных обозначениях $p(i+1) = p(i)\mathcal{P}$.

Определения. Ядро $\mathcal{P}$ называется *реверсивным* по отношению к μ, если $\mu(x)\mathcal{P}(x,y) = \mu(y)\mathcal{P}(y,x)$ для всех x, y из $\mathcal{X}$. Матрица $\mathcal{P}$ называется *примитивной*, если при возведении ее в некоторую степень получается строго положительная матрица.

Стационарное распределение. Если матрица перехода является примитивной,то

$\lim_{t\to\infty} p_i(t) = p(\infty) = p$, где $p_n > 0, n = 0,1,2,\dots$

Известно, что для матриц масс. обсл. погрешность в установлении стац.реж. определяетя $|\lambda_2|$

Теорема. Если примитивное марковское ядро $\mathcal{P}$ реверсивно относительно инвариантного (стационарного) распределения μ, то $\|\nu\mathcal{P}^n - \mu\| \le c\lambda_2^n$, для всякого начального распределения ν и всех $n \ge 1$, где $c = D\mu(\rho_0)^{1/2}$, $\rho_0(x) = \nu(x)/\mu(x)$.

Вычисление первого собственного числа

$\mathcal{X}$ линейное нормированное пространство.

A – линейный оператор из $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ с дискретным спектром такой, что собственные функции A образуют базис $\mathcal{X}$,

$$X = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i , \qquad A\varphi_i = \lambda_i \varphi_i,$$

где λ_i –собственные числа A и $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|$;

$$A^n X = \sum_{i=1}^{m} A^n c_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i^n \varphi_i .$$

Обозначим $(c_i \varphi_i, Y) = a_i,\ i = 1..n$

Тогда $(A^n X, Y) = \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda_i^n .$

$$\boxed{\frac{(A^n X,Y)}{(A^{n-1} X,Y)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_1,\ \ a_1 \neq 0}$$

Вычисление второго собственного числа

1 случай: λ_2 – вещественное.

$$\boxed{\frac{((A^n - A^{n-1})X,Y)}{((A^{n-1} - A^{n-2})X,Y)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_2, \quad a_2 \neq 0}$$

2 случай: λ_2 – комплексное.

Пусть $\lambda_2 = a + ib$, $a = \operatorname{Re}\lambda_2$, $b = \operatorname{Im}\lambda_2$;

AX = $\varphi_1 + \rho(\cos\psi\,\alpha$ - $\sin\psi\,\beta) + \cdots$, где $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$; $\cos\psi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

A^2X = $\varphi_1 + C\rho^2(\cos(2\psi+\tau)) + \cdots$, где $\cos\tau = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

A^nX = $\varphi_1 + C\rho^n(\cos(n\psi+\tau)) + \cdots$.

$$\boxed{\frac{((A^n - A^{n-1})X,Y)}{((A^{n-1} - A^{n-2})X,Y)} = \frac{\rho^{n-1}(\rho\cos(n\psi+\tau)-\cos((n-1)\psi+\tau))}{\rho^{n-2}(\rho\cos((n-1)\psi+\tau)-\cos((n-2)\psi+\tau))} = \frac{\xi_n-\xi_{n-1}}{\xi_{n-1}-\xi_{n-2}}, \quad (*)}$$

$\xi_n = (\widehat{A^n X, Y})$

Оценка погрешности вычисления первого и второго собственных чисел

Оценка погрешности вычисления первого собственного числа:

$$\xi_n = (\widehat{A^n X, Y}) = \frac{1}{N}\sum \zeta_i\,,\ \mathbf{E}\zeta_i = a;$$

$$\eta_n = (\widehat{A^{n-1} X, Y}) = \frac{1}{N}\sum \tau_i\,,\ \mathbf{E}\tau_i = b;$$

$$\mathbf{D}\frac{\xi_n}{\eta_n} = \frac{1}{b^2}\frac{\mathbf{D}\zeta_i}{N} + \frac{a^2}{b^4}\frac{\mathbf{D}\tau_i}{N} - \frac{2a}{b^3}\mathrm{cov}(\zeta_i, \tau_j) + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Для нахождения оценки погрешности второго собственного числа в вещественном случае

необходимо вычислять $\xi_n = ((\mathrm{A}^n - \widehat{\mathrm{A}^{n-1}})\ \mathrm{X}, \mathrm{Y})$; $\eta_n = ((\mathrm{A}^{n-1} - \widehat{\mathrm{A}^{n-2}})\ \mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Известно, что функция от средних $f(\frac{1}{N}\sum x_i, \frac{1}{N}\sum y_i)$ при больших N имеет нормальное распределение

со средним $f(\mathbf{E}x_i, \mathbf{E}y_i)$ и смещением $O\left(\frac{1}{N}\right)$.

Аналитические выражения для дисперсии оценок нужны при теоретических исследованиях, направленных на уменьшение дисперсии.

Вычисление спектра линейного оператора

$F = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$

Выберем l – длину окна и образуем $(\xi_i, \dots, \xi_{i+l-1})$, $1 \le i \le p$, с коэффициентами $c_0, c_1, \dots c_{l-1}$.

$$\sum_{t=k}^{k+m} (c_0 \xi_t + c_1 \xi_{t+1} + c_2 \xi_{t+2} \dots + c_{l-1} \xi_{t+l-1})^2 \to \min_{c_0, c_1, \dots c_{l-1}}$$

Утверждение

$c_0, c_1, \dots c_{l-1}$ – коэффициенты полинома, корни которого являются собственными числами оператора A

Дифференцирование по c_p, $p = 0..l-1$ дает нам систему линейных уравнений

$$\sum_{t=k}^{k+m} \xi_{t+p} \sum_{j=0}^{l-1} c_j \xi_{t+j} = 0, \qquad p = 0..l-1.$$

Подставляя в эту систему выражение для

$\xi_t = (A^t X, Y) = \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda_i^n, a_i \neq 0, i = 1..n,$ получаем

Вычисление спектра линейного оператора

Обозначим $Q(\lambda_i) = \sum_{j=0}^{l-1} c_j \lambda_i^j$, $i = 1..n$

Приводя систему к более наглядному виду,

$$a_1\left(\sum_{j=0}^{l-1} c_j\lambda_1^j\right)\sum_{t=k}^{k+m}\lambda_1^t\left(a_1\lambda_1^{t+p} + a_2\lambda_2^{t+p} + \cdots + a_n\lambda_n^{t+p}\right) +$$

$$+ a_2\left(\sum_{j=0}^{l-1} c_j\lambda_2^j\right)\sum_{t=k}^{k+m}\lambda_2^t\left(a_1\lambda_1^{t+p} + a_2\lambda_2^{t+p} + \cdots + a_n\lambda_n^{t+p}\right) + \cdots$$

$$+ a_n\left(\sum_{j=0}^{l-1} c_j\lambda_n^j\right)\sum_{t=k}^{k+m}\lambda_n^t\left(a_1\lambda_1^{t+p} + a_2\lambda_2^{t+p} + \cdots + a_n\lambda_n^{t+p}\right) = 0\,, p = 0..l-1$$

$l = n$, однородная система уравнений с n неизвестными $Q(\lambda_i)$, $i = 1..n$

$l < n$, то $Q(\lambda_i)$ не обязательно обращается в 0, более того, при $t \to \infty$

$\sum_{t=k}^{k+m}\lambda_i^t\left(a_1\lambda_1^{t+p} + a_2\lambda_2^{t+p} + \cdots + a_n\lambda_n^{t+p}\right) \to 0$, возникает погрешность порядка $O\left(\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^t\right)$

Вычисление спектра линейного оператора. Алгоритм

1. Вычисляем $\xi_t = ((A^{t+1} - A^t)\, X, Y)$ с помощью метода Монте-Карло.

2. Выбираем l, образуем $(\xi_i,\ldots,\xi_{i+l-1})$, с коэффициентами $c_0, c_1, \ldots c_{l-1}$,

$$\sum_{t=k}^{k+m} (c_0\xi_t + c_1\xi_{t+1} + c_2\xi_{t+2} \ldots + c_{l-1}\xi_{t+l-1})^2 \to \min_{c_0, c_1, \ldots c_{l-1}}$$

Решаем систему из l уравнений:

$$\begin{cases} c_0 \sum\limits_{t=k}^{k+m} {\xi_t}^2 + c_1 \sum\limits_{t=k}^{k+m} \xi_t\xi_{t+1} + c_2 \sum\limits_{t=k}^{k+m} \xi_t\xi_{t+2} + \cdots + c_{l-1} \sum\limits_{t=k}^{k+m} \xi_t\xi_{t+l-1} = 0 \\ c_0 \sum\limits_{t=k}^{k+m} \xi_t\xi_{t+1} + c_1 \sum\limits_{t=k}^{k+m} {\xi_{t+1}}^2 + c_2 \sum\limits_{t=k}^{k+m} \xi_{t+1}\xi_{t+2} + \cdots + c_{l-1} \sum\limits_{t=k}^{k+m} \xi_{t+1}\xi_{t+l-1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 \sum\limits_{t=k}^{k+m} \xi_t\xi_{t+l-1} + c_1 \sum\limits_{t=k}^{k+m} \xi_{t+1}\xi_{t+l-1} + c_2 \sum\limits_{t=k}^{k+m} \xi_{t+1}\xi_{t+l-1} + \cdots + c_{l-1} \sum\limits_{t=k}^{k+m} {\xi_{t+l-1}}^2 = 0 \end{cases}$$

Обозначим найденные коэффициенты $\hat{c}_0, \hat{c}_1 \ldots \hat{c}_{l-1}$.

3. $Q(\lambda) = \hat{c}_0 + \hat{c}_1\lambda + \hat{c}_2\lambda^2 + \cdots + \hat{c}_{l-1}\lambda^{l-1}$.

Корни многочлена $Q(\lambda)$ –2, 3 … (l-1) с. ч. A.

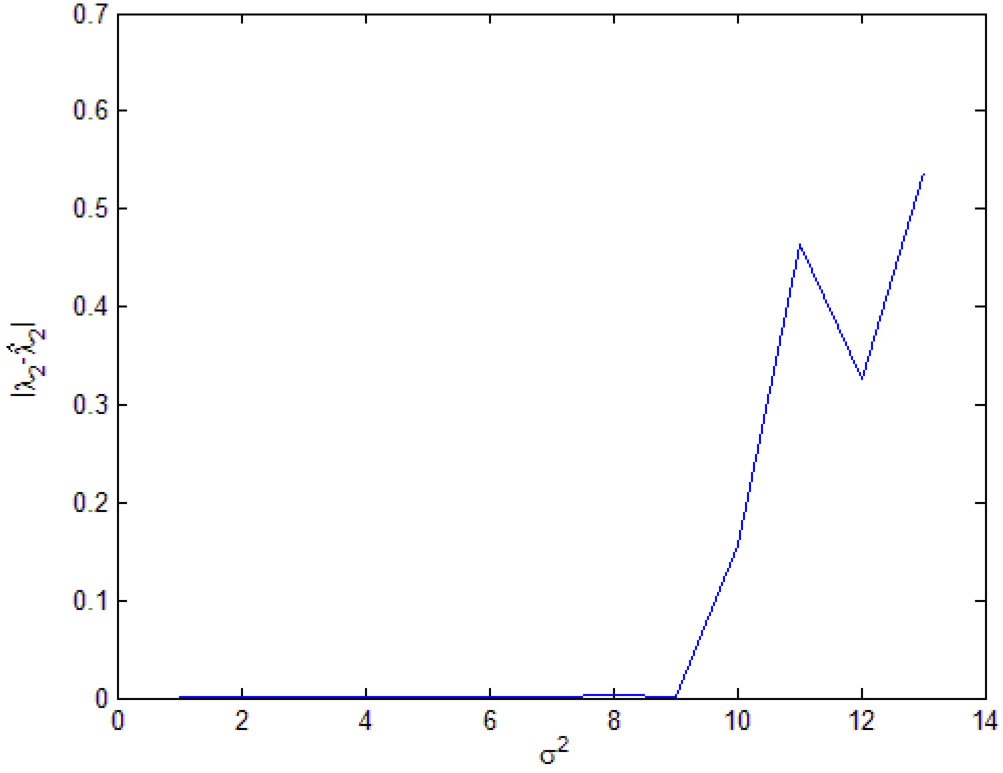
Трудоемкость: $O(l^3)$ умножений и $O(ml^2)$ сложений.

Результаты. Поведение ошибки

Матрица пятого порядка k = 5, n = k+10.

$$\widehat{\xi_t} = ((A^{t+1} - A^t)\, X, Y) + N(0, \sigma^2)$$

	σ^2	$\lvert\widehat{\lambda_2} - \lambda_2\rvert$
1	0.00001	.306e-4
2	0.000025	.514e-4
3	0.00005	.147e-3
4	0.000075	.231e-3
5	0.0001	.269e-3
6	0.00025	.460e-3
7	0.0005	.153e-2
8	0.00075	.225e-2
9	0.001	.152e-2
10	0.0025	.156e-0
11	0.005	.464e-0
12	0.0075	.325e-0
13	0.01	.536e-0



Результаты. Массовое обслуживание.

Система обслуживания с одним прибором, интенсивность поступающего потока λ, интенсивность обслуживания μ.

λdt – вероятность поступления требования в интервале dt, а μdt – вероятность поступления требования в этом интервале, n –число состояний системы.

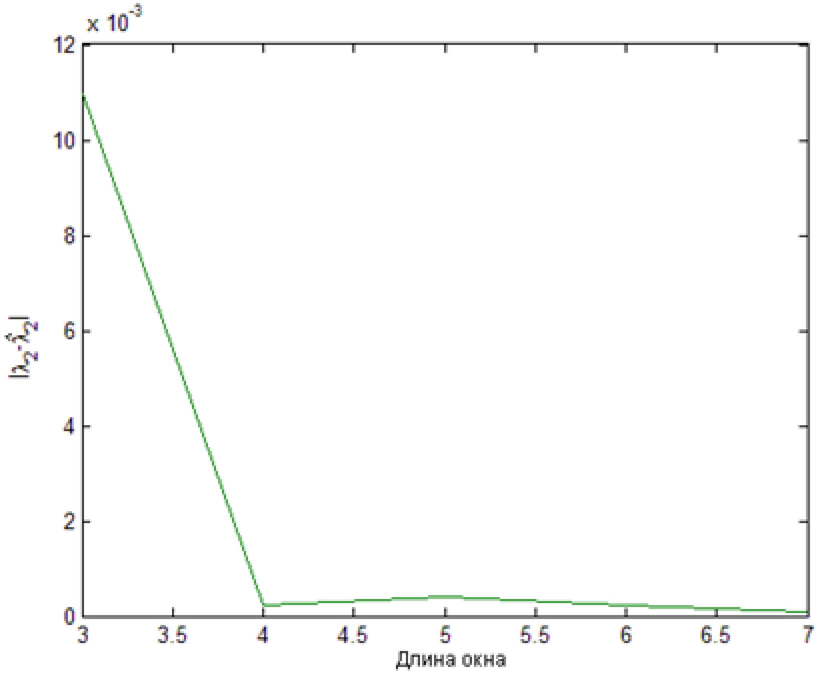
Матрица перехода:

	n = 0	n =1	n = 2	n = 3	
n = 0	$1-\lambda dt$	λdt	0	0	…
n = 1	μdt	$1-(\lambda+\mu)dt$	λdt	0	…
n = 2	0	μdt	$1-(\lambda+\mu)dt$	λdt	…
n = 3	0	0	μdt	$1-(\lambda+\mu)dt$	…
	…	…	…	…	…

Результаты. Поведение ошибки

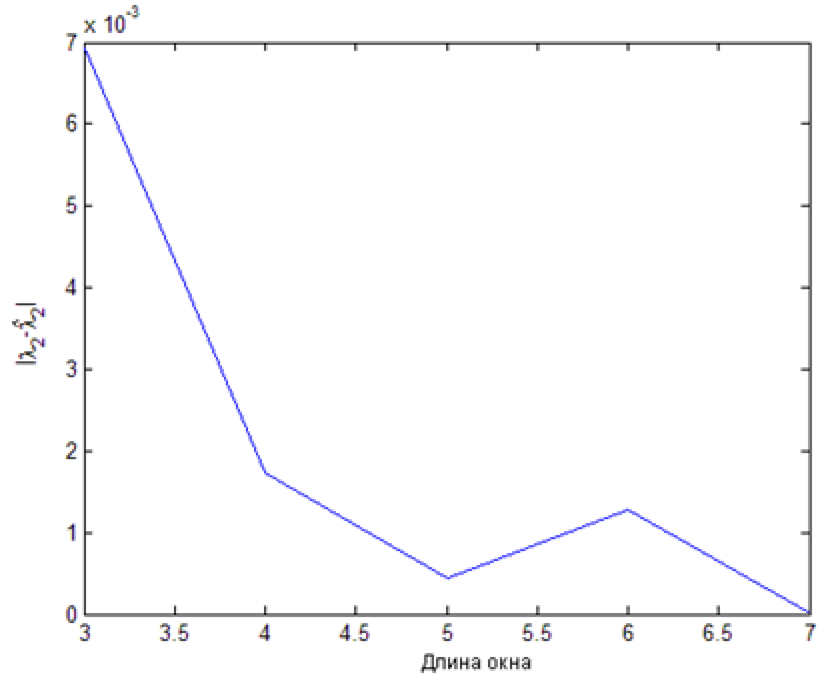
1) n = 8, $\lambda = 0.34$, $\mu = 0.23$

Длина окна (l)	$\lvert\lambda_2 - \widehat{\lambda_2}\rvert$
3	.109e-1
4	.232e-3
5	.410e-3
6	.999e-3
7	.202e-3



2) n = 10, $\lambda = 0.34$, $\mu = 0.23$

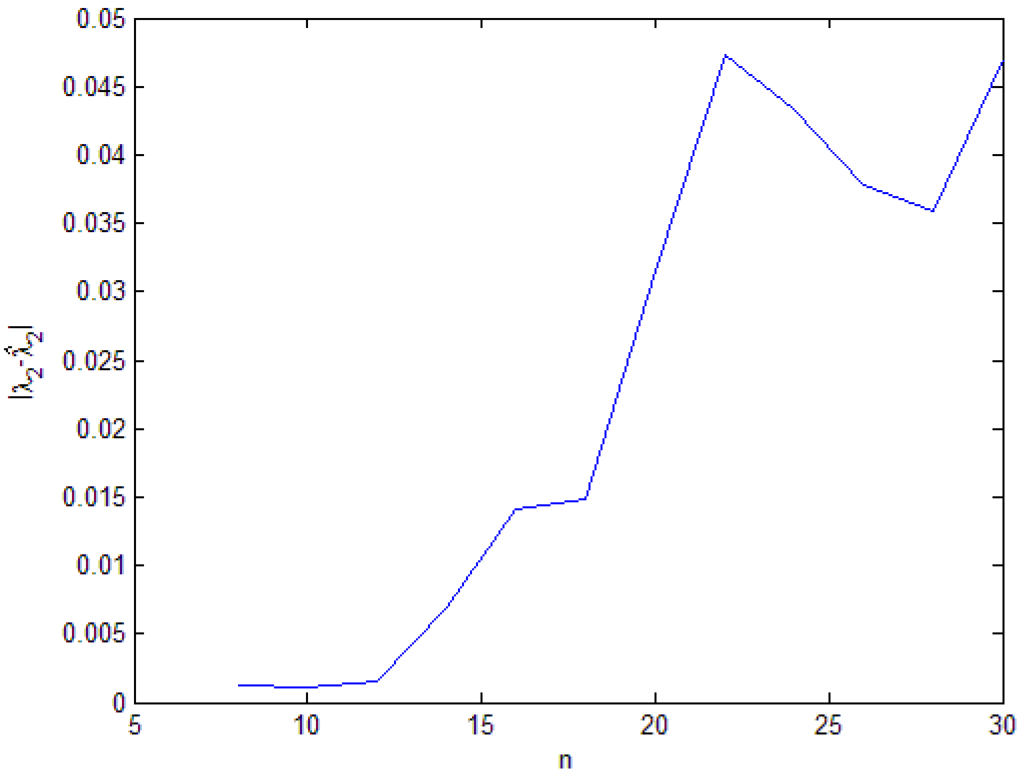
Длина окна (l)	$\lvert\lambda_2 - \widehat{\lambda_2}\rvert$
3	.691e-2
4	.172e-2
5	.442e-3
6	.127e-2
7	.134e-4



Результаты. Поведение ошибки

N(0,0.001), $l = 5$, $\lambda = 0.34$, $\mu = 0.23$, n – число состояний системы (размерность матрицы)

n	$\lvert\lambda_2 - \widehat{\lambda_2}\rvert$
8	.122e-2
10	.106e-2
12	.157e-2
14	.688e-2
16	.141e-1
18	.148e-1
20	.314e-1
22	.472e-1
24	.432e-1
26	.377e-1
28	.358e-1
30	.470e-1



Выводы

- Предложен метод вычисления второго собственного числа для стохастической матрицы, при этом рассмотрен как вещественный, так и комплексный случай.
- Приведены оценки погрешности вычислений первого собственного числа и второго собственного числа для стохастической матрицы, вещественный случай.
- Рассмотрен и исследован метод, позволяющий вычислять весь спектр линейного оператора.
- Построен алгоритм, вычисляющий второе собственное число для стохастических матриц. Исследованы зависимости полученных результатов от различных начальных данных и параметров на примере системы массового обслуживания.