Методы решения задач тропической оптимизации

Сорокин Владимир Николаевич, 522-я группа

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — д.ф.-м.н. **Н.К. Кривулин**
Рецензент — д.ф.-м.н. **И.В. Романовский**

Санкт-Петербург
2015г.

Понятия идемпотентной (тропической) математики

Идемпотентное полуполе:

- набор $\langle \mathbb{X}, \oplus, \odot, \mathbb{0}, \mathbb{1} \rangle$, где $\mathbb{X}$ – непустое множество, с операциями сложения $\oplus$ и умножения $\odot$;
- сложение идемпотентно: для любого $x \in \mathbb{X}$ выполняется $x \oplus x = x$;
- умножение дистрибутивно относительно сложения и обратимо: для любого $x \neq \mathbb{0}$ существует x^{-1};
- можно задать целые степени: $x^0 = \mathbb{1}$, $x^p = x^{p-1} \odot x$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$.

Понятия идемпотентной (тропической) математики

- Пример идемпотентного полуполя:
  - $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0 \rangle$, где $\mathbb{X} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\oplus = \max$, $\odot = +$, $\mathbb{0} = -\infty$, $\mathbb{1} = 0$;
  - для любого $x \in \mathbb{R}$ существует обратный x^{-1} по умножению, равный противоположному числу $-x$;
  - степень x^y определена для $x, y \in \mathbb{R}$ и равна арифметическому произведению xy.
- Другие примеры:
  - $\mathbb{R}_{\min,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0 \rangle$;
  - $\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times, 0, 1 \rangle$;
  - $\mathbb{R}_{\min,\times} = \langle \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times, +\infty, 1 \rangle$ (здесь $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$).

Алгебра матриц

- Обозначим через $\mathbb{X}^{n\times n}$ множество квадратных матриц порядка n.
- Операции над матрицами $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ и $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$:

$$\{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \qquad \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

- Обозначим через $\boldsymbol{I}$ единичную матрицу, на главной диагонали которой стоят $\mathbb{1}$, вне ее — $\mathbb{0}$.
- Для любой квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ и натурального p, определим степень матрицы $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A}$.

Алгебра матриц (продолжение)

- След квадратной матрицы задается суммой ее диагональных элементов

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

- Введем функцию, которая ставит в соответствие любой матрице $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ скаляр по правилу

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^n.$$

- При условии, что $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, введем оператор (Kleene, 1952), который сопоставляет матрице $\boldsymbol{A}$ матрицу

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Алгебра матриц (продолжение)

- Обозначим через $\mathbb{X}^n$ множество векторов порядка n.
- Вектор регулярен, если у него нет нулевых компонент.
- Мультипликативно сопряженное транспонирование вектора $\boldsymbol{x} = (x_j)$ — это преобразование в $\boldsymbol{x}^- = (x_j^-)$ с элементами $x_j^- = x_j^{-1}$, если $x_j \neq \mathbb{0}$ и $x_j^- = \mathbb{0}$ иначе.
- Скаляр λ является собственным числом матрицы $\boldsymbol{A}$, если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

- Максимальное собственное число называется спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$, который вычисляется по формуле (Романовский, 1967):

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(\boldsymbol{A}^m).$$

Алгебра матриц (продолжение)

- Обозначим через $\mathbb{X}^n$ множество векторов порядка n.
- Вектор регулярен, если у него нет нулевых компонент.
- Мультипликативно сопряженное транспонирование вектора $\boldsymbol{x} = (x_j)$ — это преобразование в $\boldsymbol{x}^- = (x_j^-)$ с элементами $x_j^- = x_j^{-1}$, если $x_j \neq \mathbb{0}$ и $x_j^- = \mathbb{0}$ иначе.
- Скаляр λ является собственным числом матрицы $\boldsymbol{A}$, если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

- Максимальное собственное число называется спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$, который вычисляется по формуле (Романовский, 1967):

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(\boldsymbol{A}^m).$$

Пусть спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ равен λ. Рассмотрим задачу

$$\min \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

Лемма (Cuninghame-Green, Schneider, Кривулин)

Пусть $\boldsymbol{A}$ – матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$. Тогда минимум в задаче равен λ, а все регулярные решения задачи имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{n}.$$

Задачи тропической оптимизации

Пусть спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ равен λ. Рассмотрим задачу

$$\min \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

Лемма (Cuninghame-Green, Schneider, Кривулин)

Пусть $\boldsymbol{A}$ – матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$. Тогда минимум в задаче равен λ, а все регулярные решения задачи имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{n}.$$

Другие задачи тропической оптимизации

Известны решения для вариантов предыдущей задачи:

- Пусть заданы матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$, векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^n$, $r \in \mathbb{X}$. Требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, на которых достигается минимум в задаче

$$\min \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus r$$

  (более сложная целевая функция, Кривулин, 2012).

- Пусть заданы матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и вектор $\boldsymbol{p} \in \mathbb{X}^n$. Требуется найти все $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, на которых достигается

$$\min \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p},$$
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x},$$

  (накладываются ограничения на $\boldsymbol{x}$, Кривулин, 2013).

Другие задачи тропической оптимизации

Известны решения для вариантов предыдущей задачи:

- Пусть заданы матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$, векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^{n}$, $r \in \mathbb{X}$. Требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$, на которых достигается минимум в задаче

$$\min \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus r$$

  (более сложная целевая функция, Кривулин, 2012).

- Пусть заданы матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и вектор $\boldsymbol{p} \in \mathbb{X}^{n}$. Требуется найти все $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$, на которых достигается

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p}, \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \end{aligned}$$

  (накладываются ограничения на $\boldsymbol{x}$, Кривулин, 2013).

Задача оптимизации с ограничениями

Пусть заданы матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{n \times n}$, векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^{n}$ и скаляр $r \in \mathbb{X}$. Требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$, которые решают задачу

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus r, \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Задача оптимизации с ограничениями

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A}$ *– матрица со спектральным радиусом* $\lambda > \mathbb{0}$*, а* $\boldsymbol{B}$ *– матрица, для которой* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$*. Для любого натурального* m *обозначим*

$$\boldsymbol{S}_{0m} = \bigoplus_{i=0}^{m} \boldsymbol{B}^{i}, \quad \boldsymbol{S}_{km} = \bigoplus_{0 \leq i_0 + \cdots + i_k \leq m-k} \boldsymbol{B}^{i_0} \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}^{i_k}.$$

Тогда минимум в задаче равен

$$\theta = r \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_{kn}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{S}_{k,n-1} \boldsymbol{p})^{1/(k+2)},$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1} \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*} \boldsymbol{u}, \qquad \theta^{-1} \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq \theta(\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1} \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*})^{-}.$$

Схема доказательства

Для решения задачи реализуются следующие шаги.

- Вводится вспомогательная переменная θ, которая описывает минимум целевой функции.
- Задача сводится к решению неравенства, в котором вспомогательная переменная играет роль параметра.
- Необходимые и достаточные условия существования решений неравенства используются для вычисления θ.
- Общее решение неравенства берется в качестве решения задачи оптимизации.

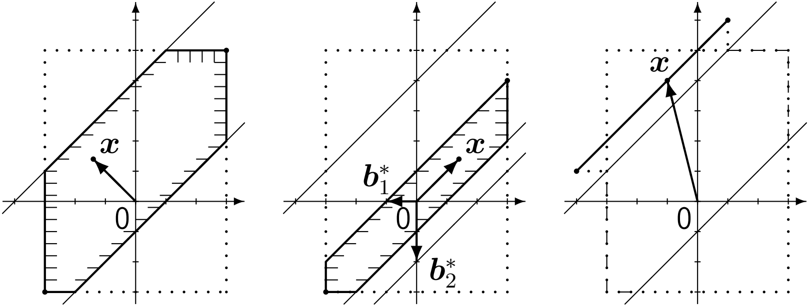

Рис.: Примеры множества решений задачи: без ограничений (слева) и с ограничениями (в центре и справа).

- Параметры: матрица $\boldsymbol{A}$, векторы $\boldsymbol{p} = (1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{q} = (-1,1)^{\mathrm{T}}$ и $r = 2$ одинаковы для всех случаев.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Оценка вычислительной сложности

- Основная сложность в необходимости вычисления

$$\boldsymbol{S}_{0m} = \bigoplus_{i=0}^{m} \boldsymbol{B}^{i}, \quad \boldsymbol{S}_{km} = \bigoplus_{0 \leq i_0 + \cdots + i_k \leq m-k} \boldsymbol{B}^{i_0} \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}^{i_k}.$$

- Эти слагаемые требуются для нахождении θ:

$$\theta = r \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_{kn}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{S}_{k,n-1} \boldsymbol{p})^{1/(k+2)}.$$

- При прямом подходе сложность экспоненциальная.
- Предложенная схема вычислений обеспечивает полиномиальное по размерности задачи время.

Оценка вычислительной сложности

- Основная сложность в необходимости вычисления

$$\boldsymbol{S}_{0m} = \bigoplus_{i=0}^{m} \boldsymbol{B}^{i}, \quad \boldsymbol{S}_{km} = \bigoplus_{0 \leq i_0+\cdots+i_k \leq m-k} \boldsymbol{B}^{i_0}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}.$$

- Эти слагаемые требуются для нахождении θ:

$$\theta = r \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_{kn}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{S}_{k,n-1}\boldsymbol{p})^{1/(k+2)}.$$

- При прямом подходе сложность экспоненциальная.
- Предложенная схема вычислений обеспечивает полиномиальное по размерности задачи время.

Применение в составлении расписания проекта

- Задачи:
  - обследование местности;
  - создание плана первичных работ;
  - проведение запланированных работ.
- Участники:
  - исследователи;
  - проектировщики/руководители;
  - рабочая группа.
- Цель:
  - минимизация максимального (учетного) времени нахождения в зараженной зоне каждой из групп (для минимизации полученной дозы радиации).

Применение в составлении расписания проекта

- Задачи:
  - обследование местности;
  - создание плана первичных работ;
  - проведение запланированных работ.
- Участники:
  - исследователи;
  - проектировщики/руководители;
  - рабочая группа.
- Цель:
  - минимизация максимального (учетного) времени нахождения в зараженной зоне каждой из групп (для минимизации полученной дозы радиации).

Применение в составлении расписания проекта

- Задачи:
  - обследование местности;
  - создание плана первичных работ;
  - проведение запланированных работ.
- Участники:
  - исследователи;
  - проектировщики/руководители;
  - рабочая группа.
- Цель:
  - минимизация максимального (учетного) времени нахождения в зараженной зоне каждой из групп (для минимизации полученной дозы радиации).

Итоги

- Представлен обзор некоторых задач тропической оптимизации.
- Полностью решена задача оптимизации с целевой функцией наиболее общего вида с ограничениями.
- Проведена оценка вычислительной сложности, и предложен метод, который позволяет существенно снизить сложность.
- Приведены числовые примеры с графическими иллюстрациями.
- Доказанная теорема применена к задаче составления расписания, представлена математическая модель.
- Подробно разобран пример, демонстрирующий применение этой модели для решения задачи.