Моделирование одного класса систем массового обслуживания с отложенным обслуживанием

Загрубская Вера Александровна, 522-я группа

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

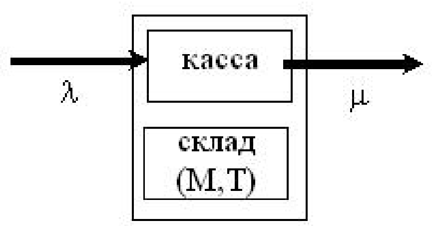
Научный руководитель — д.ф.-м.н. **С.М. Ермаков**
Рецензент — д.ф.-м.н. **Ю.А. Сушков**

Санкт-Петербург
2007г.

Постановка первой задачи

Пуассоновская система с отложенным обслуживанием

Интерпретация:

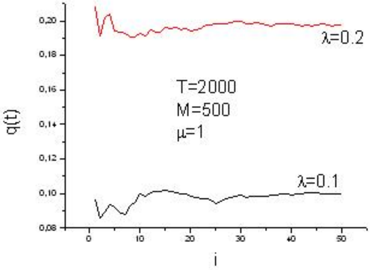


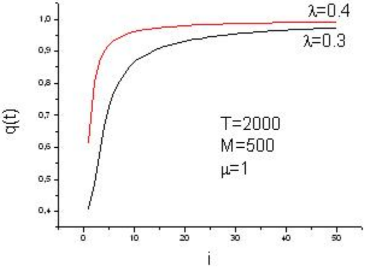
С помощью иммитационного моделирования определить:

- 1. Зависимость между параметрами.
- 2. Существует ли стационарный режим, и если да, то как быстро он устанавливается.
- 3. Описание важных характеристик системы.

Решение первой задачи: *доля необслуженных сразу клиентов*

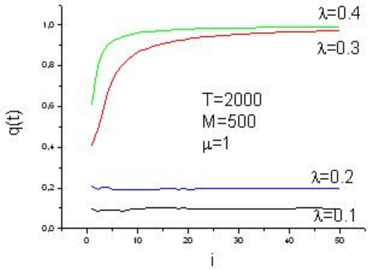
$q(t)$ - доля клиентов, не поступивших сразу на обслуживание, от общего числа клиентов, поступивших в систему до момента времени t.

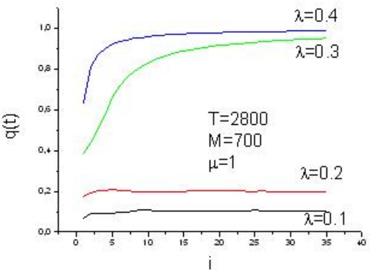




Решение первой задачи: *доля необслуженных сразу клиентов*

Диапазоны значений функции $q(t)$, при значениях параметров $(\lambda,\ \mu,\ T,\ M)$ и $(\lambda,\ \mu,\ aT,\ aM)$, где a - некоторое положительное число, близки.





Решение первой задачи: *время пребывания в системе*

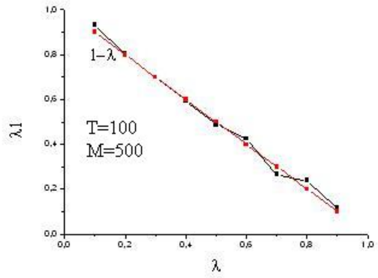
t_i- время пребывания в системе i-ого поступившего клиента.

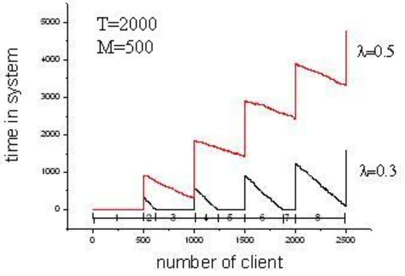
Склад не бывает пустым $\Rightarrow$ время пребывания в системе распределено по показательному закону с параметром $\lambda_1 \approx \mu - \lambda$.

Время пребывания в системе клиентов, ожидавших пополнения склада задается формулой :

$$t_i = t_{i-1} - \xi + \eta. \quad (1)$$

Время пребывания в системе не имеет стационарного распределения.



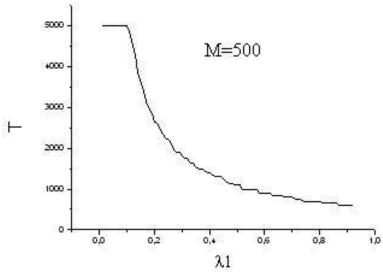


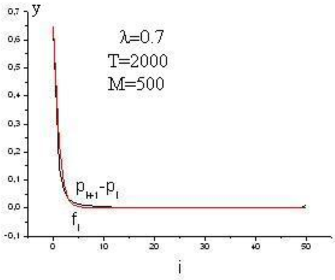
Решение первой задачи: *доля необслуженных клиентов*

$p(i)$ - доля необслуженных клиентов в период между $i-1$ - ым и i - ым пополнениями.

Существует значение параметра λ, при котором происходит переход от колебательного вида функции $p(i)$ к монотонно возрастающему.

Монотонно возрастающая функция $p(i)$ близка к функции распределения геометрического распределения.





Решение первой задачи: *результаты*

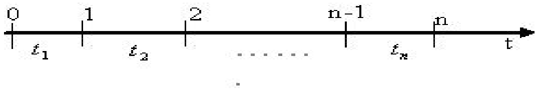
Результаты:

- Для величин $q(t)$ и $p(i)$ существуют значения параметра λ, при которых их вид меняется. Моделирование показывает, что при прочих равных параметрах (M, T и μ), эти значения λ совпадают.
- Для фиксированных значений парметров T, M, μ существует значение λ, наименьшее из тех, при которых время пребывания клиента в системе стремится к бесконечности при возрастании порядкового номера клиента. Это значение параметра λ также совпадает с предыдущими двумя.
- Выбор значений параметров основывался на том, что $\lambda < \mu$, а также на зависимости M и T, полученной при исследовании $q(t)$.
- В дипломной работе было проведено достаточно полное исследование системы для значений параметров:

$$M = 500, \mu = 1, T = (2000, 1000, 500, 250, 100), \lambda = (j * 0.1, j = \overline{1:9}). \qquad (2)$$

- При других значениях параметров проводились отдельные вычисления, которые позволяют предположить, что, для других значений система будет вести себя аналогичным образом.

Постановка второй задачи



$$(t_i, i = \overline{1:n}) \in N((a_i, i = \overline{1:n}), S). \qquad (3)$$

- 1. Найти эффективный метод вычисления вероятности того, что заявки с номерами $j_1, ..., j_k$ поступят в систему до моментов времени $T_1, ..., T_k$, соответственно, а заявка с номером n поступит в систему в интервале времени (a, b).
  $k \geq 1,\ j_1 < j_2 < \cdots < j_k < n,\ T_1 < T_2 < \cdots < T_k < a < b$ - заданные постояные величины.
- 2. Аналогично п. 1, но $T_1, ...T_k$ - это случайные величины, имеющие заданное распределение.

Решение второй задачи

- $k = 1,\ t_i, i = \overline{1:n}$ - независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону.

Требуемая вероятность записывается в виде:

$$P(a < \sum_{i=1}^{n} t_i < b, \sum_{i=1}^{j_1} t_i < T_1) = \int_{-\infty}^{T_1} dx p_{j_1}(x) \int_{a-x}^{b-x} p_{n-j_1}(y) dy. \quad (10)$$

$p_{j_1}(x)$ - плотность распределения величины

$$\sum_{i=1}^{j_1} t_i \in N(\sum_{i=1}^{j_1} a_i, \sum_{i=1}^{j_1} S_{ii}^2),$$

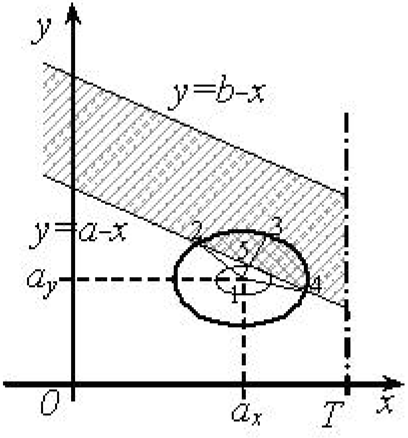
$p_{n-j_1}(x)$ - плотность распределения величины

$$\sum_{i=j_1+1}^{n} t_i \in N(\sum_{i=j_1+1}^{n} a_i, \sum_{i=j_1+1}^{n} S_{ii}).$$

Решение второй задачи

Вычисление вероятности осуществляется с помощью метода Монте-Карло.

Эффективность повышается путем уменьшения области моделирования.



Решение второй задачи

- T_1- случайная величина с плотностью распределения $f_{T_1}(x), x \in (-\infty, \infty)$.

Искомая вероятность имеет вид:

$$
\begin{gathered}
P(a < \sum_{i=1}^{n} t_i < b, \sum_{i=1}^{j_1} t_i < T_1) = \\
\int_{-\infty}^{+\infty} dt f_{T_1}(t) \int_{-\infty}^{t} dx p_{j_1}(x) \int_{a-x}^{b-x} p_{n-j_1}(y) dy = \\
\int_{t:(a_x < t, a_y \in (a-a_x, b-a_x))} dt f_{T_1}(t) \int_{-\infty}^{t} dx p_{j_1}(x) \int_{a-x}^{b-x} p_{n-j_1}(y) dy + \\
\int_{t:(a_x > t) or (a_y \notin (a-a_x, b-a_x))} dt f_{T_1}(t) \int_{-\infty}^{t} dx p_{j_1}(x) \int_{a-x}^{b-x} p_{n-j_1}(y) dy. \quad (11)
\end{gathered}
$$

Выводы

Выводы:

- Данная работа имеет важное прикладное значение. Рассмотренную систему можно обобщить, заменив слова „касса“, „товар“ на „прибор“ и „ресурс“, соответственно. Система является частью большей системы и следовательно, имеет смысл описать поведение ее характеристик, имеющих большой потребительский интерес.
- Зависимость параметров M и T, связь монотонно возрастающих функций $p(i)$ с геометрическим распределением, описание времени пребывания в системе через показательное распределение и рекурентную формулу могут быть использованы в более сложных моделях.
- Найден метод эффективного вычисления многомерного интеграла, позволяющий значительно увеличить скорость вычисления вероятностей поступления ресурсов в систему вовремя.
- Для решения поставленных задач, была создана иммитационная модель системы (программа на C++). Все расчеты велись в зависимости от значений параметров: λ, μ, M, T и времени, в течении которого моделируется работа системы.
- Написанная программа может быть использована при расчетах характеристик аналогичных систем, имеющих другие распределения, которые задают входной поток и время непосредственного обслуживания.