Кафедра статистического моделирования
Дипломная работа
студентки 522-й группы Смирновой Алины Николаевны

Модели для предполагаемой волатильности

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент Ю.Н.Каштанов
Рецензент:
д. ф.-м. н., профессор В.Б.Мелас

Санкт-Петербург
2006 г.

Введение

- **Опцион** — контракт, дающий его владельцу право купить или продать определенную ценность по установленной в контракте цене в течение некоторого времени.
- Справедливую, рациональную стоимость опциона можно вычислить по формуле:

$$C_T(f_T) = \mathbf{E}e^{-rT} f_T(S_T),\ f_T = (S_T - K)^+. \tag{1}$$

- Рассмотрим стандартную диффузионную (B, S) модель Блэка-Мертона-Шоулса

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,\ dB_t = rB_t dt, \tag{2}$$

где r — процентная ставка в банковском счете, μ — коэффициент роста, σ — коэффициент изменчивости (волатильности), W_t — стандартный винеровский процесс.

- $$C_T = S_0\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right). \tag{3}$$

- $$C_T = S_0\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T(r+\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T(r-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$
- Мы можем обратить данную формулу и вычислить волатильность как функцию от цены и от страйка. В теории финансов она носит название предполагаемой волатильности (*implied volatility*).

Аналитическое выражение для локальной волатильности

- Emanuel Derman, Iraj Kani *The volatility smile and its implied tree*; Quantitative Strategies Research Notes, January 1994:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t)dt + \sigma(S,t)dW_t. \tag{4}$$

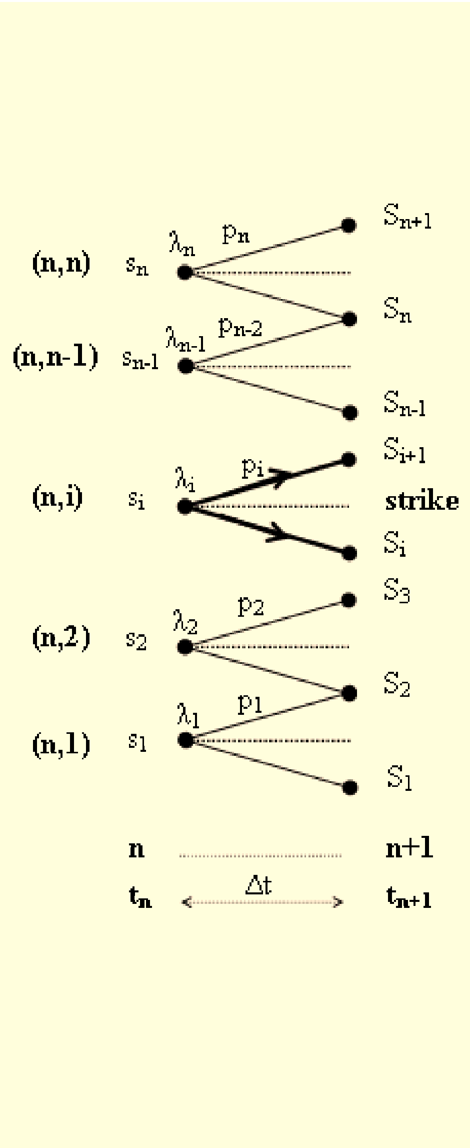
- $\Phi(S,K,t)$ — функция переходных вероятностей

$$\Phi(S,K,t) = \frac{\frac{\partial^2}{\partial K^2}C(S,K,t)}{e^{-\int_0^t r(u)du}}. \tag{5}$$

- $\sigma(S,t)$ — локальная волатильность

$$\frac{1}{2}\sigma^2(K,t)K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - r(t)K\frac{\partial C}{\partial K} - \frac{\partial C}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Биномиальные деревья



$$S_{i+1} = \frac{S_i[e^{r\Delta t}C(s_i, t_{n+1}) - \sum] - \lambda_i s_i(F_i - S_i)}{[e^{r\Delta t}C(s_i, t_{n+1}) - \sum] - \lambda_i(F_i - S_i)}, \qquad (7)$$

где $\sum = \sum_{j=i+1}^{n} \lambda_j(F_j - s_i)$.

$$p_i = \frac{F_i - S_i}{S_{i+1} - S_i}. \qquad (8)$$

- число узлов на $(n+1)$ уровне нечетно

$$S_i = S_0,\ i = \frac{n}{2} + 1. \qquad (9)$$

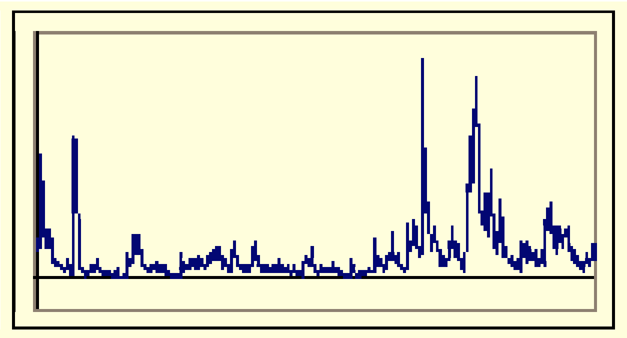
- число узлов на $(n+1)$ уровне четно

$$S_i = \frac{{s_i}^2}{S_{i+1}},\ i = (n+1)/2, \qquad (10)$$

$$S_{i+1} = \frac{S[e^{r\Delta t}C(s_i, t_{n+1}) - \sum + \lambda_i S]}{\lambda_i F_i - e^{r\Delta t}C(s_i, t_{n+1}) + \sum},\ i = n/2. \qquad (11)$$

Метод параметризации волатильности

- $\sigma(S,t) = \sigma(S)f(t)$.
- Модели параметризации:
  - $\sigma(S) = aS + b$ — линейная модель;
  - $\sigma(S) = \frac{1}{aS+b}$ — гиперболическая модель;
  - $\sigma(S) = aS^2 + bS + c$ — параболическая модель.



- Переходные вероятности:

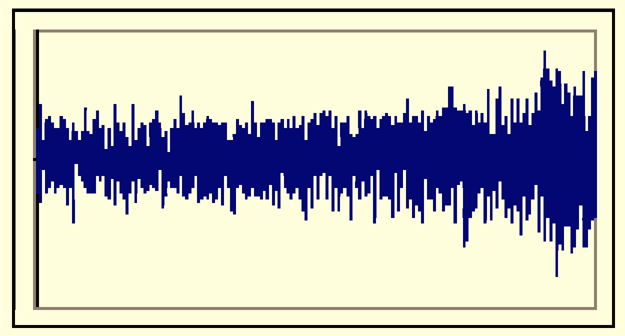
$$p_k = \sum_{i=1}^{n} p(S_0, [b_i; b_{i+1}])(p(a_i, [b_k; b_{k+1}])). \tag{12}$$

- Рациональная стоимость:

$$C(K) = e^{-rT} \sum_{i=1}^{d} p_i(a_i - K)^+. \tag{13}$$

Метод параметризации волатильности

- Оптимизационные задачи:
  - $\sum_i \left(C_i^{(x)} - \widehat{C_i}\right)^2 \to \min_x,$
  - $\sum_i \left(\sigma_i^{(x)} - \widehat{\sigma_i}\right)^2 \to \min_x .$
- Приращения винеровского процесса: $\Delta W_{(i)} = \frac{1}{\sigma(S,t)} \left(\frac{S_{i+1}-S_i}{S_i} - r\Delta t\right).$



- Проверка на независимость: "коэффициент последовательной корреляции"

$$C = \frac{n(U_0U_1 + ... + U_{n-2}U_{n-1} + U_{n-1}U_0) - (U_0 + ... + U_{n-1})^2}{n(U_0^2 + ... + U_{n-1}^2) - (U_0 + ... + U_{n-1})^2}. \tag{14}$$

  - Лин. модель: $C = 0.0345639 \in [-0.040540, 0.039733]$.
  - Пар. модель: $C = 0.034355 \in [-0.04054, 0.039733]$.

Метод параметризации волатильности

- Проверка на соответствие нормальному закону:
  - Лин. модель: $K - S\ d = .02021\ p > .20$.
  - Пар. модель: $K - S\ d = .01907\ p > .20$.

- Проверка критериев однородности дисперсии Левена($\mathbf{E}|\xi_i - \mathbf{E}\xi_i|$) и Брауна-Форсайта($|\xi_i^j - \overline{\xi_j}|$).
  - Лин. модель: $Levene\ F(1, df) = 201.5657\ p = 0.00$,
    $Brn - Fors\ F(1, df) = 194.4909\ p = 0.00$;
  - Пар. модель: $Levene\ F(1, df) = 188.3546\ p = 0.00$,
    $Brn - Fors\ F(1, df) = 181.7789\ p = 0.00$.

- Модель с усреднением:

$$x_{k\Delta} = x_{(k-1)\Delta} + \sigma \Delta W \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{(k-j)\Delta}, \tag{15}$$

где $x_{k\Delta}$ — процесс изменения цен за время $k\Delta$.

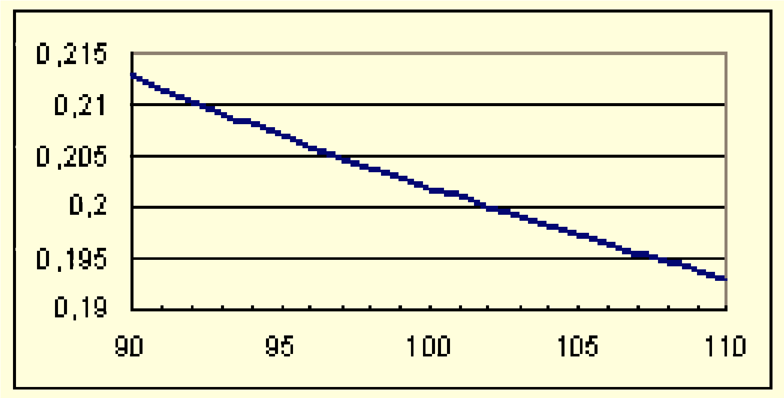


рис. 1.

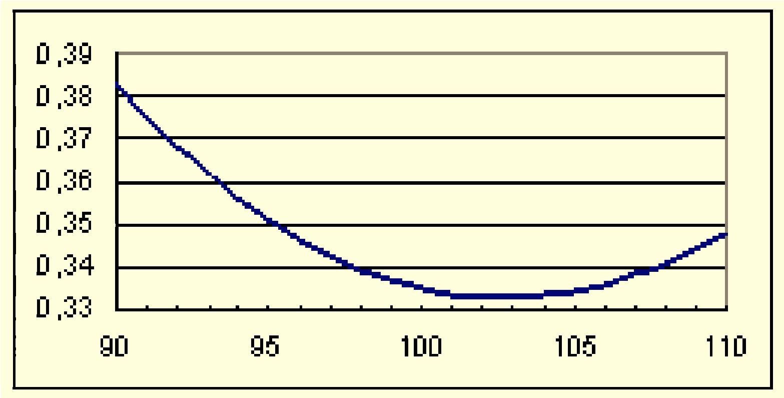


рис. 2.

- Модель с α-устойчивым процессом Леви:

$$x_{k\Delta} = x_{(k-1)\Delta} + \sigma \Delta Z \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{(k-j)\Delta}, \tag{16}$$

где $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ — симметричный α-устойчивый процесс Леви с характеристической функцией $\varphi_t(\theta) = e^{i\theta Z_t} = e^{-t|\theta|^\alpha} \quad 0 < \alpha < 2$.

Модель со скачками с усреднением

- Определим пространство функций $\mathscr{D}_t$ и отображение θ_t из $\mathscr{D}_t$ в $\mathscr{D}_0$: $(\theta_t \varphi)(s) = \varphi(t+s),\ s \le 0.$
- Будем предполагать, что процесс цен S_t рассматривается на полупрямой $(-\infty, T]$, где $T > 0$, причем, на полупрямой $(-\infty, 0]$ процесс считается известной функцией из $\mathscr{D}_0^+$, а на промежутке $(0, T]$ он удовлетворяет уравнению

$$\boxed{dS_t = r\, S_t\, dt + \sigma(\theta_t S) dw_t + S_t\, dM_t} \tag{17}$$

- Функционал σ определим на функциях из $\mathscr{D}_0$ формулой

$$\sigma(\varphi) = \min\left(I(\varphi),\ C_0 \varphi(0)\right), \qquad I(\varphi) = \sigma_0 \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(u) F(du),\ C_0 > 1, \tag{18}$$

где F — некоторое распределение на $(-\infty, 0]$.

- Процесс M_t представляет собой мартингал:

$$dM_t = \sum_{i=1}^{2} h_i \left[dP_i(t) - \lambda_i dt\right], \tag{19}$$

где P_i — стандартные пуассоновские процессы с интенсивностью λ_i, независимые друг от друга и от процесса w, причем, $-1 < h_2 < 0 < h_1$.

Модель со скачками с усреднением

- **Теорема 1** *Пусть $S_t > 0$ при $t \le 0$, тогда уравнение (17) имеет единственное решение в H_2^*, причем, п.н. $S_t > 0$ при $t > 0$.*

- Мера K на $(-\infty, 0]$: $K(A) = F(A) + \delta_0(A)$ и полунорма $\|\cdot\|_*$ в $\mathscr{D}$:

$$\|\varphi\|_*^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi^2(s)\, K(ds). \tag{20}$$

- H^* — пространство случайных процессов: процесс $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, подчинен потоку σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$, величины $\xi(s)$ $\mathcal{F}_0$ измеримы при $s < 0$ и выборочные функции процесса $\xi(t)$ с вероятностью 1 принадлежат $\mathscr{D}_T^m$.

- $H_2^* \in H^*$:

$$\|\xi(\cdot)\|_2 = \{\sup_{0 \le t \le T} \mathbf{E}(|\xi(t)|^2)\}^{1/2} < \infty, \tag{21}$$

$$(\mathbf{E}(\sup_{0 \le t \le T} |\xi(t)|^2) < \infty). \tag{22}$$

Модель со скачками с усреднением

- "Случайные" поля $\alpha(\varphi, t, \omega)$ и $\beta(\varphi, t, \omega)$, $\varphi \in \mathscr{D}_0$:

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi, t, \omega) &= \alpha(\varphi) = r\varphi(0), & (23) \\ \beta(\varphi, t, \omega) &= \sigma(\varphi)w_t + \varphi(0)M_t. & (24) \end{aligned}$$

- В терминах введенных обозначений можно переписать уравнение (17) в виде

$$dS_t = \alpha(\theta_t S, t)dt + \beta(\theta_t S, dt), \qquad t \geq 0. \tag{25}$$

- Для полей α и β доказывалась "линейная ограниченность по полунорме":

$$|\alpha(\varphi, \Delta)| + |\beta(\varphi, \Delta)| \leq \delta(1 + \|\varphi\|_*)C \tag{26}$$

и равномерное условие Липшица:

$$|\alpha(\varphi, \Delta) - \alpha(\psi, \Delta)| + |\beta(\varphi, \Delta) - \beta(\psi, \Delta)| \leq \delta\|\varphi - \psi\|_* C. \tag{27}$$

Модель со скачками с усреднением

- Для доказательства положительности решения доказывалось существование и единственность вспомогательного уравнения:

$$\begin{aligned} \xi_t &= \ln(S_t), \quad t \le 0, & (28) \\ d\xi_t &= \widetilde{\sigma}(\theta_t \xi) dw_t + \left(r - 0.5\widetilde{\sigma}^2(\theta_t \xi)\right) dt + dL_t, \quad t > 0, & (29) \end{aligned}$$

где

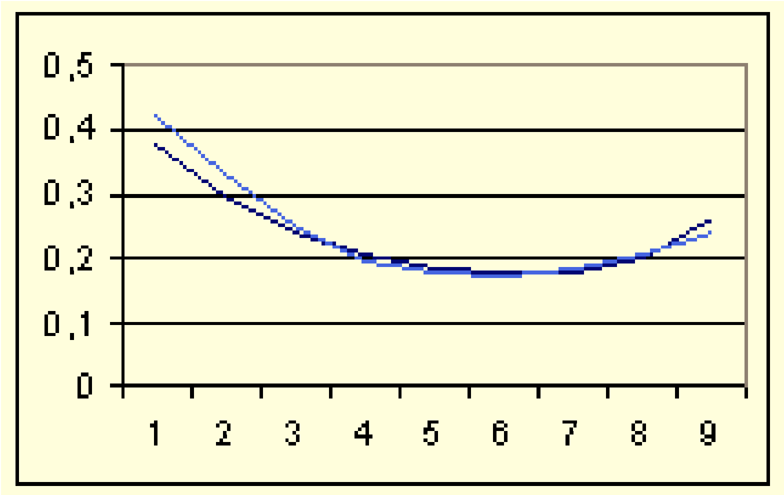
$$\widetilde{\sigma}(\varphi) = \sigma(e^{\varphi}) e^{-\varphi(0)}, \tag{30}$$

$$dL_t = \sum_i [\ln(1 + h_i)) dP_i(t) - \lambda_i h_i dt]. \tag{31}$$

- Вводился процесс $\widetilde{S}_t = e^{\xi_t} > 0$ и с помощью обобщенной формулы Ито доказывалось, что $\widetilde{S}_t$ удовлетворяет уравнению (17).

Модель со скачками с усреднением

- В случае оптимизации по волатильности были получены следующие оптимальные значения для параметров: $\sigma_0 = 0.164331$, $h_1 = 0.110122$, $\lambda_1 = 0.124512$, $h_2 = 0.581073$, $\lambda_2 = 0.084$.



- Коэффициент последовательной корреляции: $C = 0.0263044 \in [-0.04053991; 0.03973346]$.
- Критерий Колмогорова-Смирнова: $K - Sd = .01952$, $p > .20$.
- Проверка критериев однородности дисперсии Левена и Брауна-Форсайта:
  - $Levene\ F(1, df) = 10.1529$, $df = 2478$, $p = 0.001459$;
  - $Brn - Fors\ F(1, df) = 9.5112$, $df = 2478$, $p = 0.002065$.

Модель со скачками с усреднением

- Рынок, определяемый моделью (17) в общем случае не является полным.
- Оптимальной считается стратегия $\pi^* = (\gamma^{*1}, ..., \gamma^{*d})$, на которой достигается минимум $\mathbf{E}[X_N^\pi(x) - f_N]^2$:

$$\inf_{(\pi,x)} R_N(\pi; x) = R_N(\pi^*; x^*). \tag{32}$$

- Ширяев А. Н. *Основы стохастической финансовой математики*, 1998:

$$\gamma_n^{*i} = \frac{\mathbf{E}(f_N \Delta S_n^i | \mathcal{F}_{n-1})}{\mathbf{E}((\Delta S_n^i)^2 | \mathcal{F}_{n-1})}. \tag{33}$$

- **Теорема 2** *Хеджирующая по критерию среднеквадратичного отклонения стратегия имеет вид:*

$$\gamma_t = \frac{1}{\sigma^2 + \sum_i h_i^2 \lambda_i} \left(\sigma^2 \frac{\partial C_{T-t}(S_t)}{\partial x} + \sum_i h_i^2 \lambda_i \frac{C_{T-t}(S_t(1+h_i)) - C_{T-t}(S_t)}{S_t h_i} \right). \tag{34}$$

Результаты

- В данной работе была предпринята попытка найти обобщение модели Блэка-Мертона-Шоулса, дающее объяснение наблюдаемым на финансовых рынках эффектам.
- Были рассмотрены различные варианты параметризации модели локальной волатильности. Данный подход позволил выделить базовый винеровский процесс и провести статистический анализ, который по ряду критериев отверг рассматриваемые модели.
- Наиболее адекватные результаты были получены в модели с усреднением на основе смеси винеровского и пуассоновского процессов. Данная модель исследовалась теоретически: были доказаны существование, единственность и положительность решения для неё, а также найдена оптимальная по критерию среднеквадратичного отклонения стратегия для хеджирования.
- Были реализованы программы, позволяющие вычислять (в том числе по методу Монте-Карло) предполагаемые волатильности и оптимизировать параметры. Полученные результаты оптимизации по критерию наилучшего согласования с реальными данными предполагают наличие редких, но значительных скачков.