Оценка Американских опционов методом Монте-Карло

Дмитриев Алексей Валерьевич, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Ермаков С.М.
Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Каштанов Ю.Н.

СтатМод

Санкт-Петербург
2011г.

Опционы

Определение 1

Опцион — это ценная бумага, предоставляющая своему владельцу право купить или продать некоторый базовый актив в установленный период или момент времени на заранее оговариваемых условиях.

Определение 2

Американский опцион — опцион, который может быть предъявлен к исполнению в любой момент до окончания его срока действия.

Рассматриваемые методы нахождения цены Американского опциона:

- метод подвижной границы
- метод штрафной функции

Метод подвижной границы

Цена Американского опциона $P(S,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0, \quad S > B(t), \quad 0 \le t < T \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &P(S,T) = \max(K - S, 0), \quad S \ge 0,\\ &\lim_{S\to\infty} P(S,t) = 0, \quad 0 \le t < T,\\ &P(B(t),t) = K - B(t), \quad \frac{\partial P}{\partial S}(B(t),t) = -1,\\ &B(T) = K, \end{aligned} \tag{2}$$

где S — цена акции, t — время, K — цена исполнения, T — срок окончания действия опциона, $B(t)$ — подвижная граница, r — процентная ставка, σ — постоянная волатильность.

Метод подвижной границы. Фиксация границы и дискретизация

После замены переменных

$$x = \frac{S}{B(t)} \tag{3}$$

и дискретизации на

$$1 \leq x \leq x_\infty, \; 0 \leq t \leq T \tag{4}$$

задача сведется к системе нелинейных уравнений

$$F(y_j) = 0, \quad j = N-1, \ldots 0, \tag{5}$$

где

$$F : R^{M+1} \to R^{M+1}, \tag{6}$$

$$y_j = (p_{0,j}, ..., p_{M-1,j}, B_j)^T. \tag{7}$$

Метод штрафной функции

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP + f(P) = 0, \quad S > 0, \quad 0 \le t < T, \tag{8}$$

где $f(P)$ — штрафная функция

$$f(P) = \frac{\varepsilon C}{P(S,t) + \varepsilon - K + S}, \quad C \ge rK, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{9}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} &P(S,T) = \max(K - S, 0),\\ &\lim_{S\to\infty} P(S,t) = 0,\\ &P(0,t) = K. \end{aligned} \tag{10}$$

Известен следующий результат(Nielsen et al, 2002):

Теорема 1

При $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (8)-(10) стремиться к цене Американского опциона

Метод штрафной функции. Разностный аналог

После дискретизации уравнения по t и S получится

$$P_{i,j} = a_i P_{i-1,j} + c_i P_{i+1,j} + f_{i,j+1}, \quad i = 1, \dots, M-1,\ j = 0, \dots, N-1, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &P_{i,N} = \max(K - i\Delta S, 0), \quad i = 1, \dots, M-1, \\ &P_{M,j} = 0, \quad j = 0, \dots, N-1, \\ &P_{0,j} = K, \quad j = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

$$a_i = \frac{\Delta t(i^2\sigma^2 - ri)}{2(1 + i^2\sigma^2\Delta t + r\Delta t)}, \quad c_i = \frac{\Delta t(i^2\sigma^2 + ri)}{2(1 + i^2\sigma^2\Delta t + r\Delta t)}. \tag{12}$$

Или, если представить это в более компактной форме:

$$X_j = AX_j + F(X_{j+1}), \quad j = N-1, \dots, 0, \tag{13}$$

где $X_j = (P_{1,j}, P_{2,j}, \dots, P_{M-1,j})^T$.

Цель работы

Задачи свелись к решению систем нелинейных уравнений большой размерности:

- метод подвижной границы:

$$F(y_j) = 0, \quad j = N-1, \dots, 0; \tag{14}$$

- метод штрафной функции:

$$X_j = AX_j + F(X_{j+1}), \quad j = N-1, \dots, 0. \tag{15}$$

Цель работы

Применение и математическое обоснование применения метода Монте-Карло для решения получившихся задач.

Метод штрафной функции. Результаты

$$X_j = AX_j + F(X_{j+1}), \quad j = N-1, \ldots, 0, \tag{16}$$

где $X_j = (P_{1,j}, P_{2,j}, \ldots, P_{M-1,j})^T$, а матрица A имеет следующую структуру:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & c_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{M-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{M-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_i &= \frac{\Delta t(i^2\sigma^2 - ri)}{2(1 + i^2\sigma^2\Delta t + r\Delta t)} \\ c_i &= \frac{\Delta t(i^2\sigma^2 + ri)}{2(1 + i^2\sigma^2\Delta t + r\Delta t)} \end{aligned} \tag{17}$$

Утверждение 1

Условие $\Delta t < \frac{1}{r(M-1)-\sigma^2}$ *является достаточным для того, чтобы* $\rho(|A|) < 1$.

Оценка смещения

Решение системы

$$X_j = AX_j + F(X_{j+1}), \quad j = N-1, \ldots, 0 \tag{18}$$

методом Монте-Карло при каждом фиксированном j означает построение последовательности оценок

$$\xi_j = \widetilde{(I-A)}^{-1} F(\hat{\xi}_{j+1}(N_{j+1})). \tag{19}$$

При этом будут иметь место два два типа ошибок:

- детерминированная ошибка
- случайная ошибка

В силу нелинейности функции F при переходе со слоя на слой возникает смещение.

Утверждение 2

Порядок убывания детерминированной ошибки в зависимости от числа N_j моделируемых траекторий есть $1/N_j$.

Оценка случайной ошибки

$\mathcal{E}_j = \xi_j - X_j$ — вектор-столбец случайных ошибок на каждом слое.

$$X_j + \mathcal{E}_j = \widetilde{(I - A)}^{-1} (F(X_{j+1} + \mathcal{E}_{j+1})). \tag{20}$$

Утверждение 3

Условие

$$\max_j \rho(|(I + A)F_j'|) < 1 \tag{21}$$

является достаточным для стохастической устойчивости алгоритма метода Монте-Карло решения задачи нахождения цены Американского опциона методом штрафной функции.

$$F_j = F(X_j), \quad F' \text{—якобиан } F \tag{22}$$

Численные эксперименты

Параметры: $T = 0.75$, $S_\infty = 100$, $M = 100$, $N = 700$,
$\sigma \equiv 0.15$, $r \equiv 0.055$, $K = 35$, $\varepsilon = 0.001$, $C = 2$.

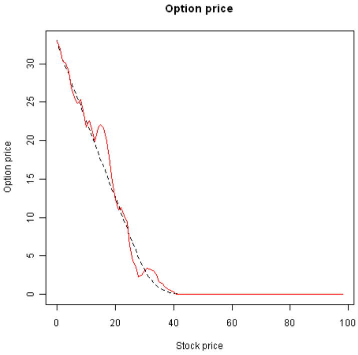

Рис. 1: Кол-во траекторий — 10

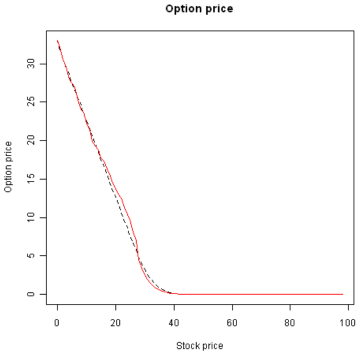

Рис. 2: Кол-во траекторий — 50

Метод подвижной границы

При каждом фиксированном j решается $F(y_j) = 0$.
Метод Ньютона: $y_j^{(k)} = y_j^{(k-1)} - J^{-1}(y_j^{(k-1)})F(y_j^{(k-1)})$

$$J(y_j^{(k-1)})Y = F(y_j^{(k-1)}). \tag{23}$$

Альтернативный подход — случайный поиск.
Целевая функция:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{M+1} (F_i(x))^2 \tag{24}$$

Идет поиск x^* такого, что

$$\Phi(x^*) = \min_{x \in G} \Phi(x), \tag{25}$$

G — малая окрестность решения на предыдущем слое.

Численные эксперименты

$$x_\infty = 2,\ T = 1,\ \sigma = 0.15,\ r = 0.05,\ M = 500,\ N = 1000,\ K = 1.$$

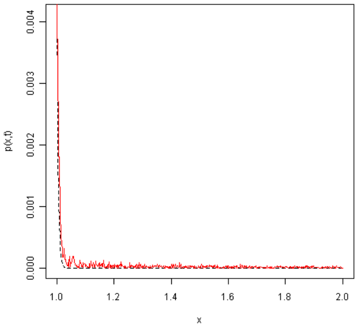

Рис. 3: Решение на первых этапах

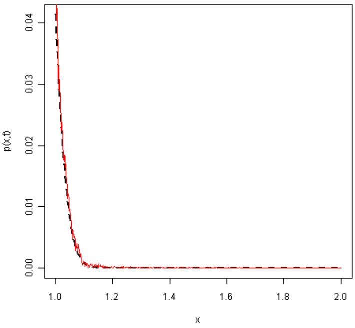

Рис. 4: Решения при равных условиях

Выводы

- Рассмотрены два метода нахождения цены Американского опциона: метод подвижной границы и метод штрафной функции
- Для метода штрафной функции:
  - построен алгоритм метода Монте-Карло для нахождения цены Американского опциона;
  - получены достаточные условия его применимости и стохастической устойчивости.
- Для метода подвижной границы:
  - рандомизированный метод Ньютона при рассматриваемых подходах не дал положительных результатов;
  - был предложен альтернативный метод — случайный поиск.
- Были составлены программы, реализующие предложенные алгоритмы.