Выявление корней второй кратности при идентификации модели.

Москалева Ольга Владимировна

Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — доцент к.ф.-м.н. Т.М. Товстик

Рецензент — доцент к.ф.-м.н. А.Ф. Сизова

Задачи

В качестве временных рядов рассматриваются реализации стационарных процессов.

- Идентификация модели авторегрессии по методу наименьших квадратов(МНК);

  По реализации стационарного процесса нужно подобрать процесс авторегрессии.

- Оценка спектральной плотности и корреляционной функции.

- Выявление корней второй кратности характеристического полинома процесса авторегрессии;

Идентификация по МНК

По временному ряду конечной длины $x_1, x_2, ..., x_N$ нужно подобрать параметры $\hat{q}_1, ...\hat{q}_n, \hat{p}_0$ в модели авторегрессии

$$x_t + \hat{q}_1 x_{t-1} + ... + \hat{q}_n x_{t-n} = \hat{p}_0 \xi_t,$$

где ξ_t - последовательность независимых случайных величин с

$$E\xi_t = 0,\ E\xi_t\xi_s = \delta_{ts}.$$

Идентификация осуществляется по методу наименьших квадратов: $\hat{q}_j$ обращают в минимум функцию

$$\Phi(\hat{q}_j) = \sum_{k=1}^{v} \left(\sum_{j=0}^{n} \hat{q}_j R_{k-j}^N \right)^2, \quad v \geq n,$$

где R_k^N - выборочные корреляции, $k = 0, 1, ..., v$.

Идентификация по МНК

Вычисление минимума приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{n} \hat{q}_j \sum_{k=1}^{v} R_{k-j}^N R_{k-t}^N = 0, \quad \hat{q}_0 = 1, \quad t = 1, ..., n.$$

Обозначим $\hat{q}(z) = \sum_{k=0}^{n} \hat{q}_k z^k$.

Величину $\hat{p}_0$ можно получить из равенства

$$\frac{\hat{p}_0^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{\left|\hat{q}(e^{-i\lambda})\right|^2} = R_0^N.$$

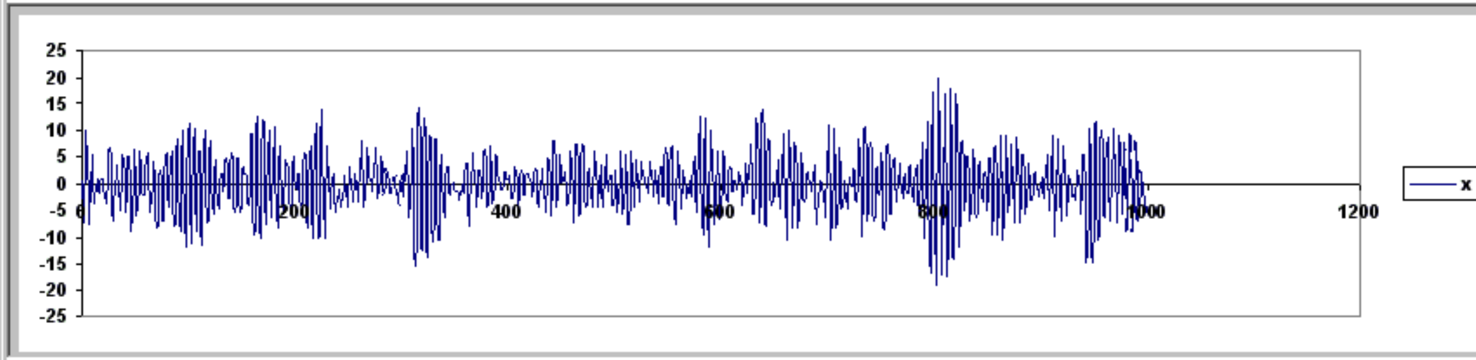
Оценка спектральной плотности и оценка кратных корней

- Моделируется процесс авторегрессии с характеристическим полиномом, имеющим корни второй кратности;
- в качестве временного ряда берется полученная реализация;
- по временному ряду идентифицируется модель авторегрессии с использованием МНК;
- находится оценка спектральной плотности и корреляционной функции;
- производится оценка кратных корней.

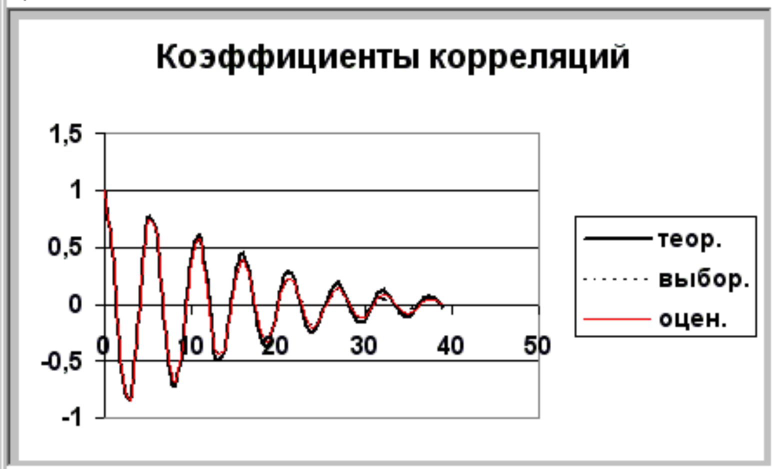
Оценка кратных корней

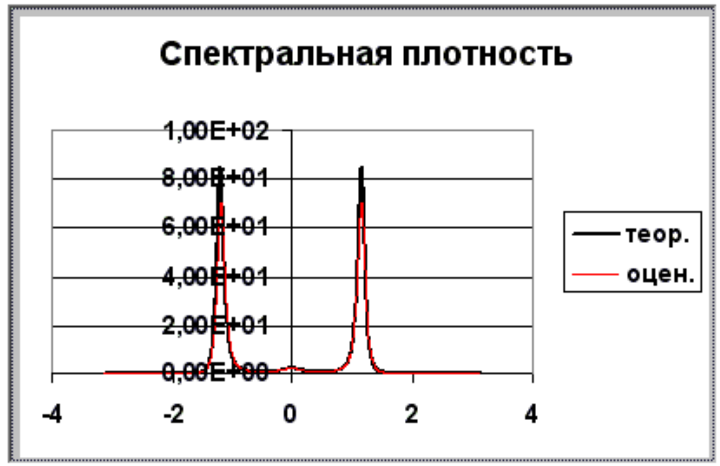
model1

исходный процесс x(t)-2.209 x(t-1)+3.235 x(t-2)-2.852 x(t-3)+1.578 x(t-4)-0.543 x(t-5)=0.750 e(t)



ср.кв. отклонение = 5.55





По наблюдениям над исходным процессом с помощью метода наименьших квадратов оцениваются параметры модели.

Получаем стационарный процесс **x(t)-2.197 x(t-1)+3.195 x(t-2)-2.793 x(t-3)+1.536 x(t-4)-0.523 x(t-5)=0.781 e(t)** **(идент. процесс)**

корни хар.полинома

исх.процесс	кратность	модуль	аргумент	**идент.процесс**	модуль	аргумент
0.426 + 1.028i	2	1.113	1.178	1.2134		
0.426 - 1.028i	2			0.410 - 1.053i	1.129	1.200
1.200	1			0.410 + 1.053i		
				0.452 - 1.015i	1.111	1.152
				0.452 + 1.015i		

Моделирование АР(n) с корнями второй кратности

Рассмотрим стационарный процесс авторегрессии

$$x_t + q_1 x_{t-1} + \ldots + q_n x_{t-n} = p_0 \xi_t,$$

где характеристический полином имеет корни второй кратности

$$q(z) = \sum_{k=0}^{n} q_k z^k = q_n \prod_{k=1}^{n_1} (z - z_k)^2 \prod_{l=1}^{n_2} (z - z_{l+n_1}), \quad 2n_1 + n_2 = n.$$

Спектральная плотность процесса x_t равна

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{p_0}{q(e^{-i\lambda})} \right|^2.$$

Моделирование АР(n) с корнями второй кратности

Для моделирования процесса x_t необходимо вычислить корреляции

$$R_j = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda} f(\lambda) d\lambda.$$

Теорема 1. *Если характеристический полином стационарного процесса авторегрессии имеет вид*

$$q(z) = q_n \prod_{k=1}^{n_1} (z - z_k)^2 \prod_{l=1}^{n_2} (z - z_{l+n_1}),$$

то корреляционная функция может быть представлена как

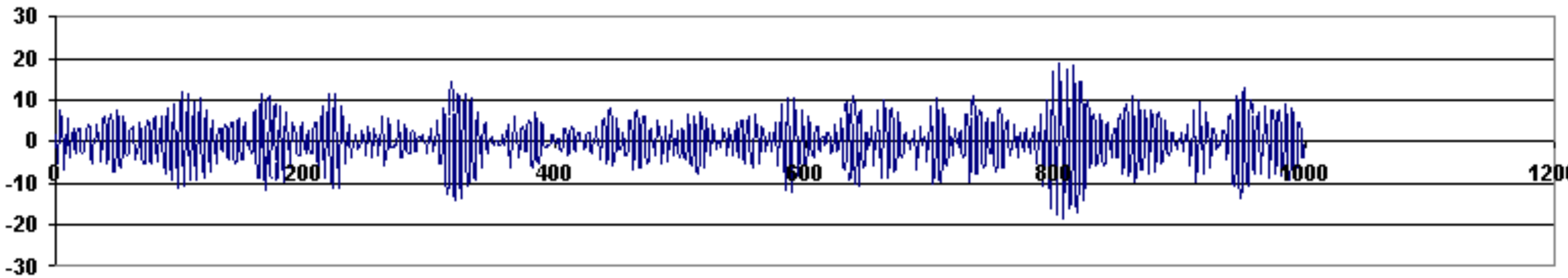
$$R_j = \sum_{k=1}^{n_1} (A_k j + B_k)(z_k)^{-j} + \sum_{k=1}^{n} C_k (z_k)^{-j}.$$

Выявление корней второй кратности

- Вид реализации;
- скорость убывания выборочной корреляционной функции;
- наличие близких корней у спектральной плотности идентифицированного процесса;
- идентификация модели с пониженным порядком.

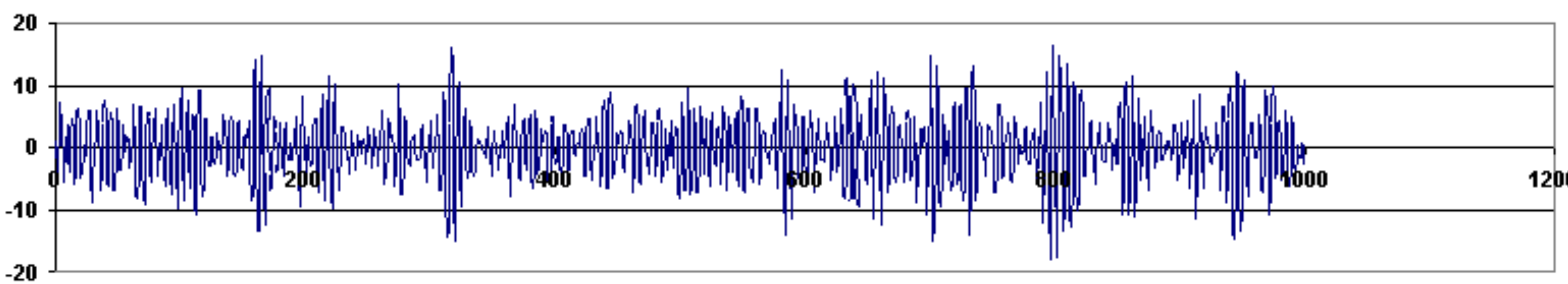
Вид реализации

Реализация процесса авторегрессии с кратными корнями



исх.процесс	кратность	модуль	аргумент
0.426 + 1.028i	2	1.113	1.178
0.426 - 1.028i	2		

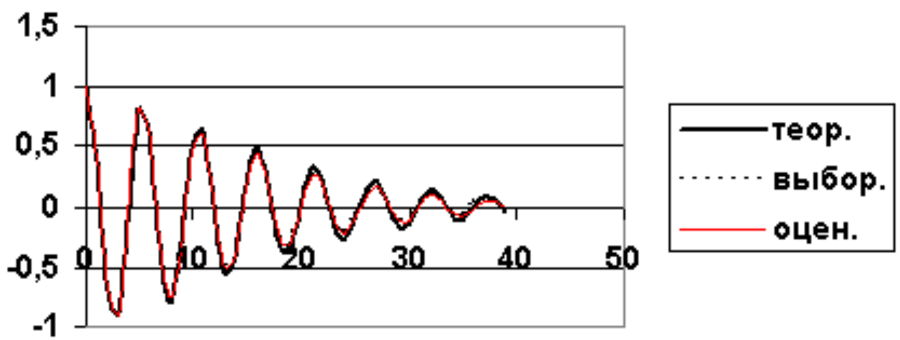
Реализация процесса авторегрессии без кратных корней



исх.процесс	кратность	модуль	аргумент
0.289 + 1.075i	1	1.113	1.308
0.289 - 1.075i	1		
0.556 + 0.964i	1	1.113	1.048
0.556 - 0.964i	1		

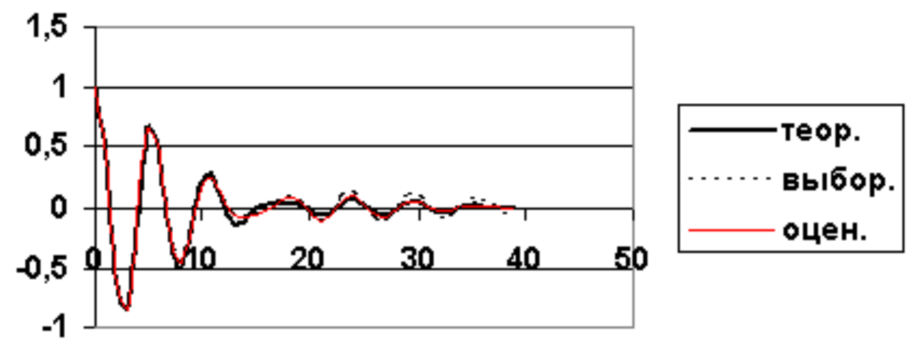
Скорость убывания выборочной корреляционной функции

Коэффициенты корреляций при наличии кратных корней



исх.процесс	кратность	модуль	аргумент
0.426 + 1.028i	2	1.113	1.178
0.426 - 1.028i	2		

Коэффициенты корреляций без кратных корней



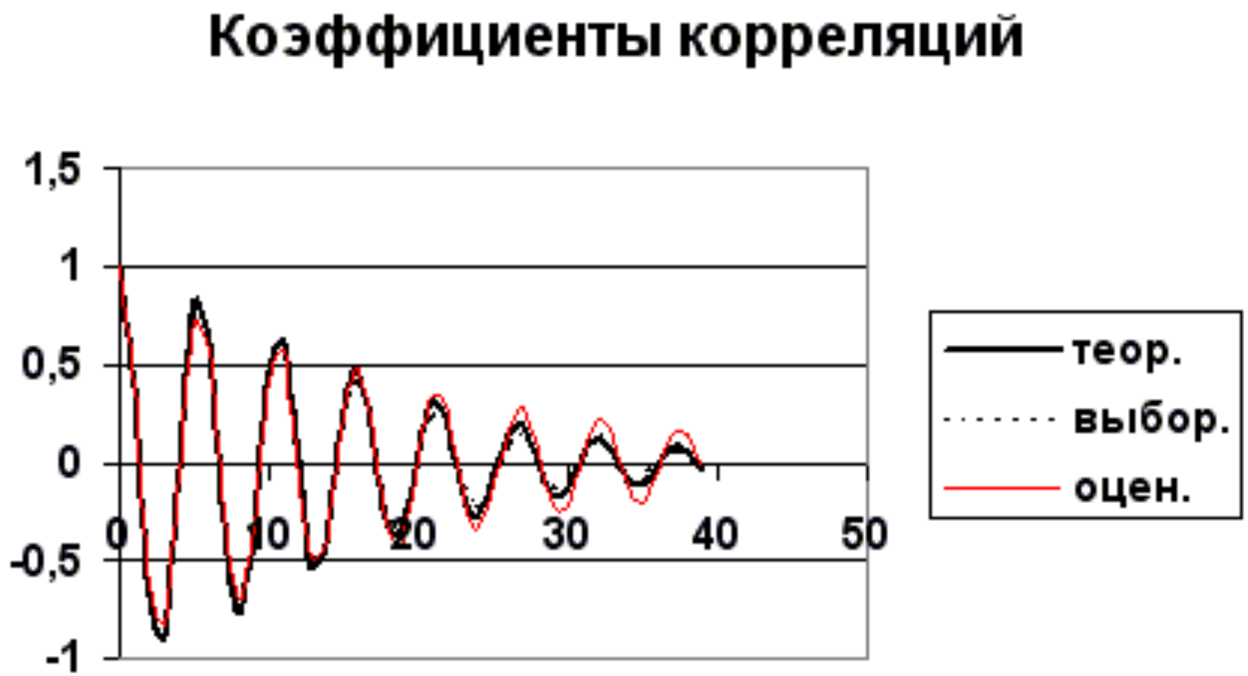
исх.процесс	кратность	модуль	аргумент
0.289 + 1.075i	1	1.113	1.308
0.289 - 1.075i	1		
0.556 + 0.964i	1	1.113	1.048
0.556 - 0.964i	1		

Идентификация модели с пониженным порядком

- Идентифицируется модель n-ого порядка, получаем k пар близких корней,
  - предположение: у исходного процесса k кратных корней - $z_1, ..., z_k$;
- по тем же исходным данным идентифицируется модель порядка $n-k$,
  - предположение: корни $z_1, ..., z_k$ - первой кратности;
- если выборочная корреляционная функция и корреляционная функция идентифицированного процесса совпадают по периодам, то предположение о наличии k кратных корней подтверждается, иначе отвергается.

Исходный процесс с кратными корнями

исходный процесс $x(t)-1.376\,x(t-1)+2.089\,x(t-2)-1.111\,x(t-3)+0.652\,x(t-4)=0.750\,e(t)$



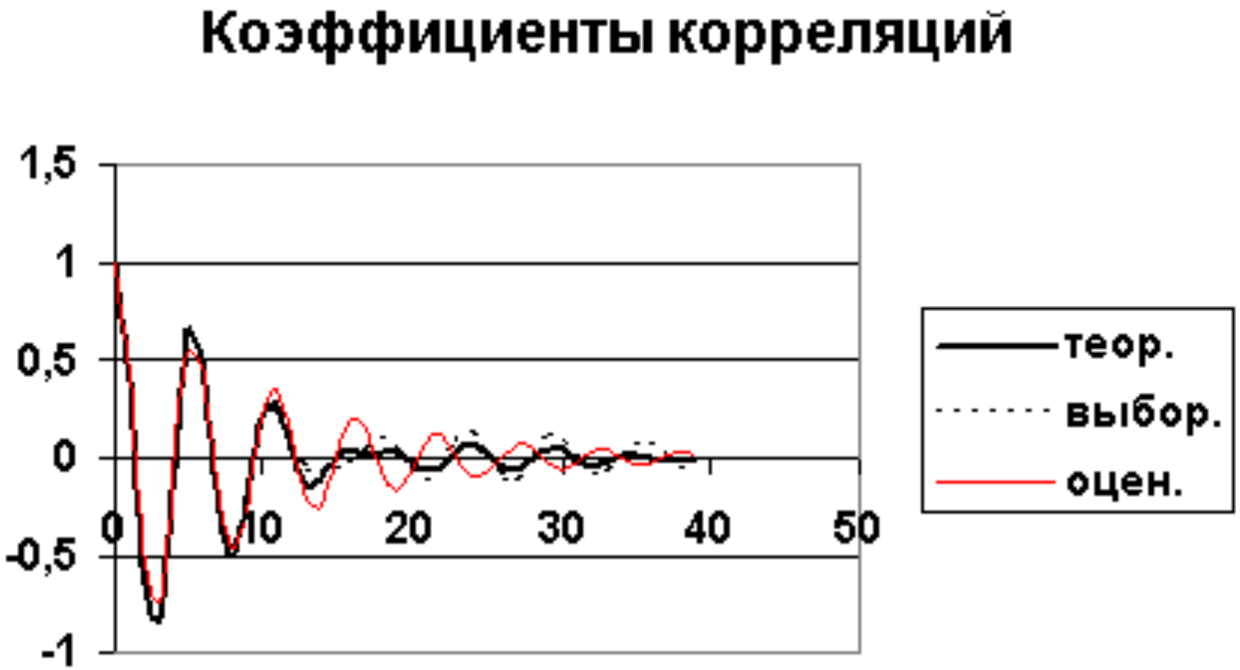
Получаем стационарный процесс $x(t)-0.743\,x(t-1)+0.913\,x(t-2)=1.525\,e(t)$ **(идентифицированный процесс)**

корни хар.полинома

исх.процесс	кратность	модуль	аргумент	**идент.процесс**	модуль	аргумент
0.426 + 1.028i	2	1.113	1.178	0.407 - 0.964i	1.047	1.172
0.426 - 1.028i	2			0.407 + 0.964i		

Исходный процесс без кратных корней

исходный процесс $x(t)-1.364\,x(t-1)+2.033\,x(t-2)-1.101\,x(t-3)+0.652\,x(t-4)=1.116\,e(t)$



Получаем стационарный процесс $x(t)-0.734\,x(t-1)+0.827\,x(t-2)=5.008\,e(t)$ **(идентифицированный процесс)**

корни хар.полинома

исх.процесс	кратность	модуль	аргумент	**идент.процесс**	модуль	аргумент
0.556 + 0.964i	1	1.113	1.048	0.444 - 1.006i	1.100	1.155
0.556 - 0.964i	1			0.444 + 1.006i		
0.289 + 1.075i	1	1.113	1.308			
0.289 - 1.075i	1					