Модели финансового рынка со стохастической волатильностью.

Казаков Денис Викторович, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н. доц. Каштанов Ю.Н.
Рецензент: аспирант Гормин А.А.

Санкт-Петербург
2008г.

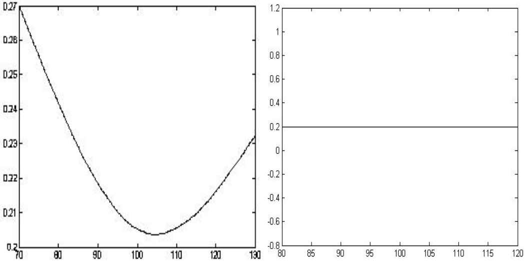
Модель Блэка-Шоулса

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t,\ dB_t = rB_t dt. \qquad (1)$$

Преимущество данной модели - аналитическая формула для расчета цен европейских опционов:

$$C_T = S_0 \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right). \qquad (2)$$

Недостатки: предполагаемая волатильность данной модели не совпадает с реальными данными:



Модель локальной волатильности

$$\frac{dS}{S} = r(t)dt + \sigma(S,t)dW_t. \tag{3}$$

Способы построения модели:

- Аналитическое выражение для локальной волатильности:

$$\frac{1}{2}\sigma^2(K,t)K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - r(t)K\frac{\partial C}{\partial K} - \frac{\partial C}{\partial t} = 0; \tag{4}$$

- Построение локальной волатильности с помощью биномиальных и триномиальных деревьев.

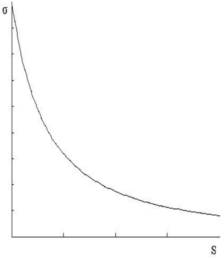
Преимущества модели:

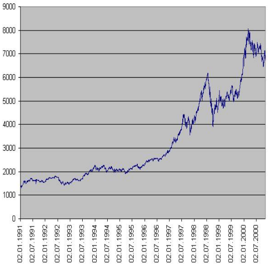
- реализует эффект "volatility smile".

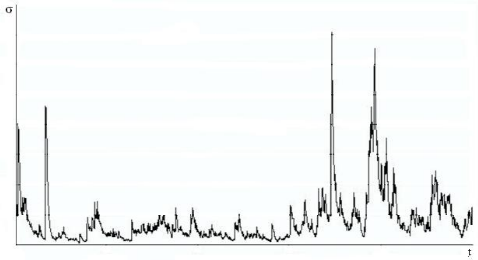
Модель локальной волатильности

Недостатки модели:

- зависимость волатильности от времени в данной модели лишь локально соответствует реальному поведению:







Задача: построить модель, которая сохраняет основные свойства реального рынка.
Общие предположения относительно поведения волатильности в реальном рынке:

- при возрастании цен волатильность уменьшается, при падении цен волатильность возростает;
- наблюдается стационарность в поведении волатильности: в относительно спокойные периоды(нет резких колебаний цен) волатильность стремится к некоторому определенному значению.

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} & = & \sigma_t dw_t, \\ d\sigma_t & = & -\alpha \frac{dS_t}{S_t} + \beta(\sigma_t)dt + c(\sigma_t)d\tilde{w}_t. \end{cases} \tag{5}$$

Модель с логарифмической функцией $\beta(\sigma_t)$

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} &= \sigma_t dw_t, \\ d\sigma_t &= -\alpha \frac{dS_t}{S_t} - \mu \sigma_t \ln \frac{\sigma_t}{\sigma^*} dt. \end{cases} \tag{6}$$

Решение данной системы:

$$\begin{cases} S_T &= S_0 \exp\left(\int_0^T \sigma_t dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_t^2 dt \right), \\ \sigma_t &= \sigma_0^{e^{-\mu t}} \exp\left(\left(\ln \sigma^* - \frac{\alpha^2}{2\mu} \right) (1 - e^{-\mu t}) - \alpha \int_0^t e^{-\mu(t-s)} dw_s \right). \end{cases} \tag{7}$$

Моменты процесса σ_t:

$$\mathbf{E}\sigma_t^l = \sigma_0^{le^{-\mu t}} \exp\left(l \left(\ln \sigma^* - \frac{\alpha^2}{2\mu} \right) (1 - e^{-\mu t}) \right) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{l^{2m} \alpha^{2m}}{2^{m+1} \mu} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{(2\mu)^{m-1}} - e^{-2\mu t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!(2\mu)^{m-1-k}} \right) \right). \tag{8}$$

Модель с логарифмической функцией $\beta(\sigma_t)$

Характеристическая функция процесса σ_t:

$$F(x,t) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma_0^{le^{-\mu t}} x^l i^l}{l!} e^{\left(l\left(\ln\sigma^* - \frac{\alpha^2}{2\mu}\right)(1-e^{-\mu t})\right)} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{l^{2m}\alpha^{2m}}{2^{m+1}\mu} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{(2\mu)^{m-1}} - e^{-2\mu t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!(2\mu)^{m-1-k}}\right)\right). \quad (9)$$

Теорема

Предельное распределение процесса σ_t имеет плотность

$$p(y) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi\alpha^2}}\, e^{-\frac{\alpha^2\left(2\frac{\mu}{\alpha^2}\ln\sigma^* - 1\right)^2}{4\mu}}\, y^{2\left(\frac{\mu}{\alpha^2}\ln\sigma^* - 1\right)} e^{-\frac{\mu}{\alpha^2}(\ln y)^2} \quad (10)$$

со средним

$$\exp\left(\frac{\mu}{\alpha^2}(\ln\sigma^*)^2 - \frac{\alpha^2(2\frac{\mu}{\alpha^2}\ln\sigma^* - 1)^2}{4\mu}\right) \quad (11)$$

и дисперсией равной

$$\exp\left(2\ln\sigma^* - \frac{\alpha^2}{2\mu}\right)\left(e^{\frac{\alpha^2}{2\mu}} - 1\right). \quad (12)$$

Модель с линейной функцией $\beta(\sigma_t)$

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} & = & \sigma_t dw_t, \\ d\sigma_t & = & -\alpha\sigma_t dw_t - \beta(\sigma_t - \sigma^*)dt. \end{cases} \tag{13}$$

Решение данной системы:

$$\begin{cases} S_T & = & S_0 \exp\left(\int_0^T \sigma_t dw_t - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t^2 dt\right), \\ \sigma_t & = & \beta\sigma^* \int_0^t e^{-\alpha(w_t - w_s) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s) - \beta(t-s)} ds + \sigma_0 e^{-\alpha w_t - (\beta + \frac{\alpha^2}{2})t}. \end{cases} \tag{14}$$

Математическое ожидание процесса σ_t:

$$\mathbf{E}\sigma_t = \sigma^* - e^{-\beta t}(\sigma^* - \sigma_0). \tag{15}$$

Дисперсия процесса σ_t:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\sigma_t \; = \; & \left(\left(\frac{2\beta^2\sigma^{*2}}{(\alpha^2 - \beta)(\alpha^2 - 2\beta)} + \sigma_0^2\right) e^{\alpha^2 t} + (\sigma^* - \sigma_0)^2\right) e^{-2\beta t} + \frac{2\alpha^2\sigma^*}{\alpha^2 - \beta} \times \\ \times \; & (\sigma^* - \sigma_0)e^{-\beta t} + \frac{2\beta\sigma^*\sigma_0}{\alpha^2 - \beta} e^{(\alpha^2 - \beta)t} - \frac{\alpha^2\sigma^{*2}}{\alpha^2 - 2\beta}. \end{aligned} \tag{16}$$

Модель с линейной функцией $\beta(\sigma_t)$

Теорема

Предельное распределение процесса σ_t имеет плотность

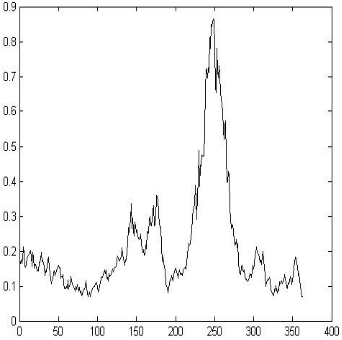
$$p(y) = \frac{\left(\frac{2\beta}{\alpha^2}\right)^{1+\frac{2\beta}{\alpha^2}}}{\Gamma(1+\frac{2\beta}{\alpha^2})}\, y^{-2-\frac{2\beta}{\alpha^2}} e^{-\frac{2\beta\sigma^*}{\alpha^2 y}} \qquad (17)$$

со средним σ^*. В случае $\beta > \alpha^2/2$ предельное распределение имеет конечную дисперсию равную $((\sigma^*)^2\alpha^2)/(2\beta-\alpha^2)$.

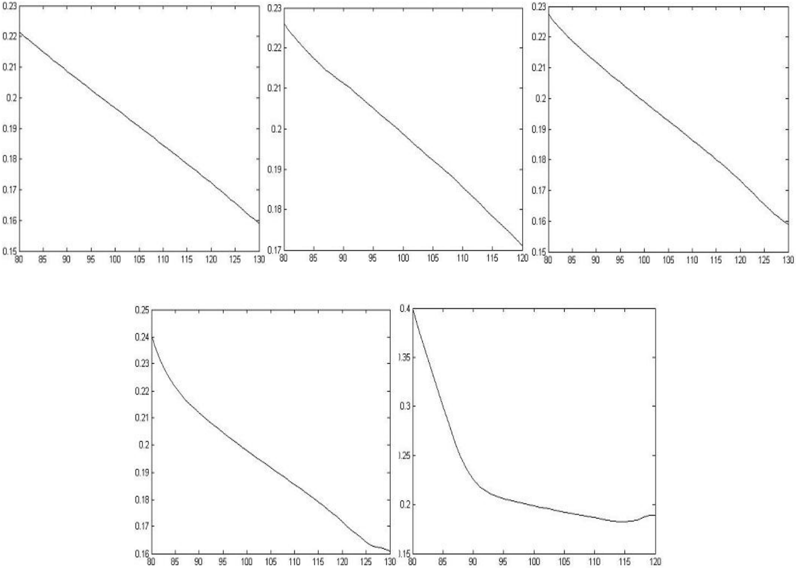
Также была рассмотрена модель Хестона:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} &= \sqrt{\sigma_t}dw_t, \\ d\sigma_t &= -\alpha\sqrt{\sigma_t}dw_t - \beta(\sigma_t - \sigma^*)dt. \end{cases} \qquad (18)$$

Модель с линейной функцией $\beta(\sigma_t)$.



Поведение предполагаемой волатильности при различных временах до исполнения опциона:



Хеджирование.

Рассмотрим обобщенную модель:

$$\begin{cases} dS_t = \sigma(Y_t)S_t dw_t^1, \\ dY_t = a(Y_t)dw_t^2 + b(Y_t)dt. \end{cases} \tag{19}$$

Стратегией π_t называется процесс, который в каждый момент времени показывает сколько единиц акций держит на руках инвестор.

Определение

Стратегия π_t называется оптимальной хеджирующей по среднеквадратичному критерию, если она доставляет минимум функционала $\mathbf{E}(X(t) - h(S_T))^2$, где $X(t)$ - капитал, $h(S_T)$ - платежная функция.

Теорема

Оптимальная хеджирующая по критерию среднеквадратичного отклонения стратегия имеет вид:

$$\pi_t = \frac{\partial C}{\partial S} + \rho \frac{a(Y_t)}{\sigma(Y_t)S_t} \frac{\partial C}{\partial Y}, \tag{20}$$

где ρ— коэффицент корреляции между w^1 и w^2.

Вычислительные схемы.

- метод Монте-Карло;

$$\begin{cases} \Delta S_i = S_i\sqrt{\sigma_i}\Delta w, \\ \Delta\sigma_i = -\alpha\sqrt{\sigma_i}\Delta w + \beta(\sigma^* - \sigma_i)\Delta t. \end{cases} \tag{21}$$

- двумерная сетка; Дискретизация:$(s_i, \sigma_j, t_k) = \left(S_0 e^{i\delta}, \sigma_0 e^{j\gamma}, k\Delta t\right)$. Из узла (s_i, σ_j, t_k) возможен по переход в узлы содержащие s_{i-1}, либо s_i, либо s_{i+1}.

$$p_{-1} = \frac{\sigma^2\Delta t}{\delta^2}\frac{e^\delta - 1}{e^\delta - e^{-\delta}}, \quad p_1 = \frac{\sigma^2\Delta t}{\delta^2}\frac{1 - e^{-\delta}}{e^\delta - e^{-\delta}}, \quad p_0 = 1 - \frac{\sigma^2\Delta t}{\delta^2}. \tag{22}$$

Волатильность определяется из соотношения:

$$\sigma_{t+1} = \sigma_t - \alpha(S_{t+1} - S_t)/S_t + \beta(\sigma^* - \sigma_t)\Delta t.$$

Вычислительные схемы.

- преобразование Фурье для модели Хестона;

$$C(S,v,t) = SP_1 - KP_2,$$

где

$$\begin{aligned}
P_j &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty Re\left[\frac{e^{-ix\ln(K)} f_j(\ln S, v, T, x)}{i\,x}\right] dx, \\
f_j(x,v,t,\phi) &= e^{C(T-t,\phi)+D(T-t,\phi)v+i\phi x}, \\
C(\tau,\phi) &= \frac{\beta v^*}{\alpha^2}\left((b_j + \alpha\phi i + d)\tau - 2\ln\left[\frac{1-ge^{d\tau}}{1-g}\right]\right), \\
D(\tau,\phi) &= \frac{b_j + \alpha\phi i + d}{\alpha^2}\left(\frac{1-e^{d\tau}}{1-ge^{d\tau}}\right), \\
g &= \frac{b_j + \alpha\phi i + d}{b_j + \alpha\phi i - d}, \\
d &= \sqrt{(\alpha\phi i + b_j)^2 - \alpha^2(2u_j\phi i - \phi^2)}.
\end{aligned}$$

Вычислительные схемы.

- одномерная сетка: Дискретизация $(s_i, t_k) = \left(S_0 e^{i\delta}, k\Delta t\right)$. Из узла (s_i, t_k) переходы возможны в узлы (s_{i+j}, t_{k+1}), $j = -1, 0, 1$, с вероятностями $p_j(\sigma)$:

$$\begin{cases} \sum_j p_j s_{i+j} = s_i, \\ \sum_j p_j \delta^2 j^2 = \tilde{v}(s_i, t_k)\Delta t, \\ \sum_j p_j = 1. \end{cases} \tag{23}$$

Локальные волатильности $\tilde{v}(s,t)$ можно построить последовательно по формуле

$$\tilde{v}(s, t{+}1) = \mathbf{E}\left(\tilde{v}(S_t, t) - \alpha(S_{t+1} - S_t)/S_t + \beta(v^* - \tilde{v}(S_t, t))\Delta t | S_{t+1} = s\right).$$

Сравнение методов.

- метод Монте-Карло (синий);
- двумерный сеточный метод (пурпурный);
- одномерный сеточный метод(зеленый);
- преобразование Фурье для модели Хестона(красный).

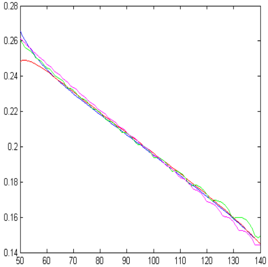


Рис.: предполагаемая волатильность в модели Хестона

Метод	Время, сек.
Преобразование Фурье	9
Одномерная сетка	0.1
Двумерная сетка	7
Монте-Карло	10

Моделирование цен опционов.

Результаты моделирования методами при длительности их работы 0.1 секунды:

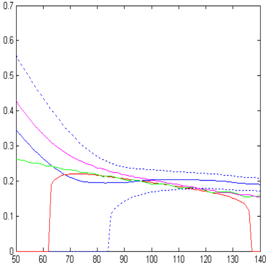


Рис.: предполагаемая волатильность в модели Хестона

Заключение.

- рассмотрены различные модели стохастической волатильности, выписаны основные характеристики волатильности(ковариации, предельные распределения, моменты);
- указана оптимальная по среднеквадратичному критерию хеджирующая стратегия в моделях со стохастической волатильностью;
- проведено сравнение вычислительных методов расчета цен опционов в указанных моделях.