Оценка предпочтений на основе парных сравнений альтернатив с использованием методов тропической математики

Агеев Владимир Анатольевич, гр. 422

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Кривулин Н. К.
Рецензент: д.ф.-м.н. Романовский И. В.

Санкт-Петербург
2016

Процедура парных сравнений

- Задача: анализ предпочтений респондентов на основе парных сравнений альтернатив (Л.Л. Терстоун)
- Сравнение альтернатив: во сколько раз A лучше B
- Результат представляется матрицей парных сравнений $\mathbf{A} = (a_{ij})$, где a_{ij} показывает во сколько раз альтернатива i предпочтительнее j
- Конечный результат анализа – вектор относительных предпочтений

Проблемы

- Нарушение транзитивности оценок
- Матрица может быть частично задана
- Матрица может содержать ошибки обработки данных

Задача о парных сравнениях

- Матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ является согласованной при условиях:
  1. $a_{ij} = 1/a_{ji}$ для всех i, j (обратная симметричность)
  2. $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ для всех i, j, k (транзитивность)
- Если матрица $\mathbf{X} = (x_{ij})$ – согласованная, то $x_{ij} = x_i/x_j$
- Вектор $\mathbf{x} = (x_i)$ и есть вектор рейтингов альтернатив
- Если согласованность матрицы $\mathbf{A}$ нарушена, то возникает задача аппроксимации согласованной матрицей $\mathbf{X}$:

$$\min_{\mathbf{X}} \rho(\mathbf{A}, \mathbf{X}),$$

  где ρ – величина отклонения $\mathbf{A}$ от $\mathbf{X}$

Известные подходы к решению задачи аппроксимации:

- при помощи собственного вектора для максимального собственного числа матрицы $\mathbf{A}$ (Т. Саати)
- аппроксимация в евклидовой метрике
- аппроксимация в метрике Чебышева

Цели работы

Новый подход в терминах тропической математики

- Решение можно рассматривать как аппроксимацию в лог-чебышевской метрике
- Для многих задач оптимизации может быть получено полное решение в явном виде
- Решение записывается в компактной векторной форме

Цели работы

- Изучение методов тропической оптимизации
- Применение этих методов для анализа матриц парных сравнений
- Решение задач для произвольных матриц парных сравнений
- Разработка методов анализа решений в случае, когда неясно, как выбрать итоговый вектор рейтингов
- Разработка программных средств, реализующих решение задачи

Идемпотентое полуполе

- Алгебраическая система $(\mathbb{X}, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1})$
- Идемпотентность сложения: $x \oplus x = x$, для любого $x \in \mathbb{X}$
- Обратимость умножения: для любого $x \neq \mathbb{0}$ существует x^{-1} такой, что $x^{-1} \otimes x = \mathbb{1}$

Пусть $\mathbb{R}_+ = \{x > 0 | x \in \mathbb{R}\}$. Примеры полуполей:

$$\mathbb{R}_{\max,\times} = (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times, 0, 1), \ \mathbb{R}_{\max,+} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0).$$

Далее в работе используется полуполе $\mathbb{R}_{\max,\times}$.

Матрицы и векторы

- Матрицы над $\mathbb{X}$ и операции с ними – замена обычного сложения на $\oplus$, а обычного умножения на $\otimes$
- Чебышевская норма: $\|\mathbf{X}\| = \mathbf{1}^T \mathbf{X} \mathbf{1}$, $\|\mathbf{x}\| = \mathbf{1}^T \mathbf{x}$, где $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$
- Согласованная матрица $\mathbf{X}$ в терминах $\mathbb{R}_{\max,\times}$ представляется в форме $\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^-$, где $\mathbf{x} = (x_i)$ – вектор-столбец, $\mathbf{x}^- = (x_i^{-1})^T$

Нахождение вектора рейтингов сводится в $\mathbb{R}_{\max,\times}$ к задаче аппроксимации

$$\min_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}),$$

где функция ρ для матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с положительными элементами имеет вид

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{-}\mathbf{B}) \oplus \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-}).$$

Задачу аппроксимации можно переформулировать так:

$$\min_{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^{-}\mathbf{A}\mathbf{x}).$$

Решение (Кривулин, 2013)

- Если матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}^{-}$ не содержит нулевых элементов, то
- Минимум равен $\mu = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(\mathbf{B}^{m})$ и достигается на $\mathbf{x} = \mathbf{B}_{\mu}^{*}\mathbf{u},\ \mathbf{u} > \mathbf{0}$
- $\mathbf{B}_{\mu}^{*} = \mathbf{I} \oplus \mathbf{B}_{\mu} \oplus \ldots \oplus \mathbf{B}_{\mu}^{n-1}$, где $\mathbf{B}_{\mu} = \mu^{-1}\mathbf{B}$
- $\mathbf{x}$ – определяет рейтинг

Обратно симметричная матрица порядка 2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & a \\ a^{-1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} u, \; u > \mathbb{0}.$$

Обратно симметричная матрица порядка 3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & a & b \\ a^{-1} & \mathbb{1} & c \\ b^{-1} & c^{-1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} (ab)^{1/3} \\ (a^{-1}c)^{1/3} \\ (b^{-1}c^{-1})^{1/3} \end{pmatrix} v, \; v > \mathbb{0}.$$

Случай произвольной матрицы порядка 2

Матрица парных сравнений и минимум в задаче аппроксимации:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mu = (a \oplus a^{-1}) \oplus (d \oplus d^{-1}) \oplus (bc \oplus (bc)^{-1})^{1/2}.$$

- Если $\mu > (bc \oplus (bc)^{-1})^{1/2}$, то

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mu^{-1}(b \oplus c^{-1}) \\ \mu^{-1}(b^{-1} \oplus c) & \mathbb{1} \end{pmatrix} \mathbf{u}, \;\; \mathbf{u} > 0$$

- Если $\mu = (bc \oplus (bc)^{-1})^{1/2}$, то

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (b \oplus c^{-1})^{1/2} \\ (b^{-1} \oplus c)^{1/2} \end{pmatrix} v, \;\; v > 0$$

Проблема

- Неясно какой вектор выбрать в первом случае!

Исходные данные

- $\mathbf{A}$ – матрица парных сравнений
- Полученный по $\mathbf{A}$ вектор рейтингов: $\mathbf{x} = (\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}^{-})^{*}_{\mu}\mathbf{u},\ \mathbf{u} > \mathbf{0}$
- $\mathbf{B} \in \mathbb{X}^{m \times n}$ – матрица, полученная из $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}^{-})^{*}_{\mu}$ вычеркиванием линейно-зависимых столбцов

Найдем решения, максимально ("наилучшее") и минимально ("наихудшее") различающие альтернативы с максимальным и минимальным рейтингом. Целевая функция – максимум отношения между элементами вектора:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} x_i \bigoplus_{j=1}^{n} x_j^{-1} = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\mathbf{x}^{-}\mathbf{1} = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{B}\mathbf{u})^{-}\mathbf{1} = \|\mathbf{B}\mathbf{u}\|\|(\mathbf{B}\mathbf{u})^{-}\|.$$

Возникают задачи оптимизации:

$$\max_{\mathbf{u}} \|\mathbf{B}\mathbf{u}\|\|(\mathbf{B}\mathbf{u})^{-}\|, \quad \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{B}\mathbf{u}\|\|(\mathbf{B}\mathbf{u})^{-}\|.$$

Методы решения таких задач предложены в работах (Кривулин, 2013) и (Кривулин, 2015).

Решим задачу максимизации:

$$\max_{\mathbf{u}} \|\mathbf{B}\mathbf{u}\| \|(\mathbf{B}\mathbf{u})^{-}\|.$$

Решение

- Максимум равен $\Delta = \|\mathbf{B}\mathbf{B}^{-}\|$
- Достигается на $\mathbf{u} = (u_i)$:

$$\begin{aligned} u_k &= \alpha \|\mathbf{b}_k^{-}\|, \text{ где } \mathbf{b}_k \text{ – } k\text{-й столбец матрицы } \mathbf{B}, \\ u_j &\leq \alpha b_{sj}^{-1}, \ j \neq k, \\ \alpha &> \mathbb{0} \end{aligned}$$

- Индексы k и s определяются из условий:

$$k = \operatorname*{argmax}_{1 \leq i \leq n} \|\mathbf{b}_i\| \|\mathbf{b}_i^{-}\|, \qquad s = \operatorname*{argmax}_{1 \leq i \leq m} b_{ik}^{-1}$$

Для произвольной матрицы $\mathbf{B}$ порядка 2 в работе показано, что максимум достигается на векторах

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{b}_k, \ \alpha > \mathbb{0}.$$

Случай произвольной матрицы порядка 2

По матрице парных сравнений $\mathbf{A}$ найдем наилучшее решение,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Если вектор рейтингов альтернатив имеет вид

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mu^{-1}(b \oplus c^{-1}) \\ \mu^{-1}(b^{-1} \oplus c) & \mathbb{1} \end{pmatrix} \mathbf{u},$$

то, решив задачу $\max\limits_{\mathbf{u}} \|\mathbf{Bu}\| \|(\mathbf{Bu})^{-}\|$, получим наилучшее решение:

- Если $b \leq c$, то наилучшее решение

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mu(b \oplus c^{-1})^{-1} \end{pmatrix} v, \quad v > 0$$

- Если $b > c$, то наилучшее решение

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mu(b^{-1} \oplus c)^{-1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad v > 0$$

Наихудшее решение

Решим задачу минимизации:

$$\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{B}\mathbf{u}\| \|(\mathbf{B}\mathbf{u})^{-}\|.$$

Разреживание матрицы

- Пусть $\Delta = (\mathbf{B}\mathbf{1})^{-}\mathbf{1}$
- Разреженная матрица $\widehat{\mathbf{B}} = (\widehat{b}_{ij})$:

$$\widehat{b}_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & b_{ij} \geq \Delta^{-1}\|\mathbf{b}_j\|, \\ \mathbb{0}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Решение

- Минимум – Δ, достигается на векторах $\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{v},\ \mathbf{v} > \mathbf{0}$
- $\mathbf{D}$ – матрица, столбцы которой являются максимальной линейно независимой системой столбцов всех матриц $\mathbf{I} \oplus \Delta^{-1}\mathbf{B}_i^{-}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\widehat{\mathbf{B}}$
- $\mathbf{B}_i$ – матрица, полученная из $\widehat{\mathbf{B}}$ фиксацией одного ненулевого элемента в каждой строке с обнулением остальных элементов

По матрице парных сравнений $\mathbf{A}$ найдем наихудшее решение,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Если вектор рейтингов альтернатив имеет вид

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mu^{-1}(b \oplus c^{-1}) \\ \mu^{-1}(b^{-1} \oplus c) & \mathbb{1} \end{pmatrix} \mathbf{u},$$

то, решив задачу $\min\limits_{\mathbf{u}} \|\mathbf{Bu}\| \|(\mathbf{Bu})^{-}\|$, получим:

- Если $b \leq c$, то наихудшее решение

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mu^{-1}(b^{-1} \oplus c) \oplus \mathbb{1} \end{pmatrix} v, \quad v > 0$$

- Если $b > c$, то наихудшее решение

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mu^{-1}(b \oplus c^{-1}) \oplus \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} v, \quad v > 0$$

Матрица парных сравнений и полученный по ней вектор рейтингов:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 3/4 & 1 \\ 3/2 & 2 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u}, \ \mathbf{u} > 0.$$

Наилучшее и наихудшее решения соответственно:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} u, \quad \mathbf{x}_* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} v, \quad u, \ v > 0.$$

Результаты

- Изучена задача о нахождении вектора рейтингов альтернатив по матрице парных сравнений и ее решение, основанное на методах тропической математики
- Получены решения в общем виде для матриц порядков 2 и 3
- Построены процедуры анализа решений на основе методов тропической оптимизации
- Найден общий вид "наилучшего" и "наихудшего" решения для произвольной матрицы порядка 2
- Разработаны программные средства на языке C#, реализующие описанные методы