Имитационная модель американских опционов

Анастасия Александровна Миллер, 622 группа

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д. ф.-м. н. Ермаков С. М.
Рецензент: нач. лаб. Дмитриев А. В.

СтатМод

Санкт-Петербург
5 июня 2017 г.

Что такое опцион

Опцион

Договор, по которому потенциальный покупатель или продавец актива получает право, но не обязательство, совершить покупку или продажу данного актива по заранее оговорённой цене в определённый договором момент в будущем или на протяжении определённого отрезка времени.

$\mathcal{T}$ – множество моментов, в которые можно *исполнить опцион* (реализовать право на покупку/продажу).

Европейский опцион
$\mathcal{T} = \{t\}$

Американский опцион
$\mathcal{T} = [0; T]$

Математическая модель оценки стоимости опциона

- Состояние базового актива описывается марковским случайным процессом $X_t \in \mathbb{R}^d, t \in [0;T]$, начальное состояние которого фиксировано ($X_0 = \mathrm{const}$).
- $h_t(X_t)$ – дисконтированное значение выигрыша, получаемого при исполнении опциона в момент t.
- В этих обозначениях в модели эффективного рынка стоимость опциона – это

$$V = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{E}\left[h_t(X_t)\right].$$

Для подсчёта V методом моделирования осуществляется переход к дискретному времени (конечному множеству $\mathcal{T}$, $\#\mathcal{T} = m$).

Оценка по методу случайных деревьев

В статье Broadie и Glasserman 1997 построены оценки сверху и снизу для стоимости опциона V. Для оценки сверху $\hat{V}^{RT}(b)$ доказано, что

$$\forall\, b \in \mathbb{N} \quad \mathrm{E}\hat{V}^{RT}(b) = V^{RT}(b) \geq V,$$
$$\lim_{b\to\infty} V^{RT}(b) = V.$$

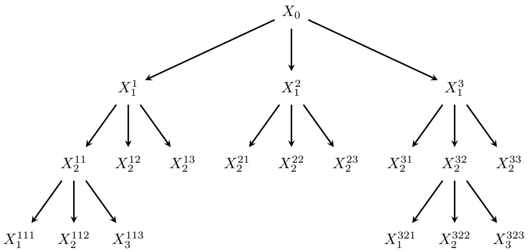

Рис.: Схема метода для $b = 3$

Квази Монте-Карло

Квази Монте-Карло последовательности (И.М. Соболь 2006) — это детерминированные последовательности $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, обладающие улучшенными по сравнению с Монте-Карло свойствами равномерности.

	обычный Монте-Карло	квази Монте-Карло
ошибка оценки по N испытаниям	$O(1/\sqrt{N})$	$O(\frac{(\ln N)^d}{N})$

- Для использования квази Монте-Карло последовательности необходимо заранее зафиксировать размерность используемых квазислучайных чисел.
- В квази Монте-Карло нет процедуры оценки погрешности.

Рандомизация квази Монте-Карло

$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$	квази Монте-Карло последовательность в $[0;1]^d$.
$(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$	последовательность случайных величин, равномерно распределённых в $[0;1]^d$.
$G\in\mathbb{N}$	размер группы.

Рандомизированная квази Монте-Карло последовательность $(\tilde{x}_i)_{i\in\mathbb{N}}$:

$$\tilde{x}_{kG+j} = x_{kG+j} + \xi_k \mod 1.$$

Оценка дисперсии оценки $\hat{V} = \frac{1}{NG}\sum_{i=1}^{NG}\hat{V}(\tilde{x}_i)$:

$$\hat{V}_k = \frac{1}{G}\sum_{j=1}^{G}\hat{V}(\tilde{x}_{kG+j}), \qquad \mathrm{Var}\hat{V} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\hat{V}-\hat{V}_k\right)^2.$$

Сравнение оценок для $V^{RT}(b)$

MC	классический метод Монте-Карло
QMC	квази Монте-Карло
RQMC	рандомизированный квази Монте-Карло

Таблица: Качество оценок $V^{RT}(b)$ с использованием различных последовательностей

тип	$\hat{V}^{RT}(b)$	$\mathrm{sd}\hat{V}^{RT}(b)$	$\hat{V}^{RT}(b) - V^{RT}(b)$
MC	11.232	1.456	0.007
QMC Соболя	11.267	-	0.042
RQMC Соболя	11.275	0.801	0.052
QMC Холтона	11.267	-	0.042
RQMC Холтона	11.273	1.969	0.050

Число ветвей $b = 2$, опцион на покупку на 2 актива $X_t = (S_t^{(1)}, S_t^{(2)})$ с начальной стоимостью $S_0^{(1)} = S_0^{(2)} = 100$, ценой из контракта $K = 100$ и функцией выплат $h_t(X_t) = (\max\{S_t^{(1)}, S_t^{(2)}\} - K)^+$. Число моментов исполнения $\#\mathcal{T} = 4$.

Метод линейной регрессии

Предложен в статье Longstaff и Schwartz 2001. Строится оценка $\hat{V}^{LS}(b)$ стоимости Американского опциона, где b – ширина сетки. Доказано, что

$$\hat{V}^{LS}(b) \leq V, \quad \hat{V}^{LS}(b) \xrightarrow[b\to\infty]{\mathbb{P}} V.$$

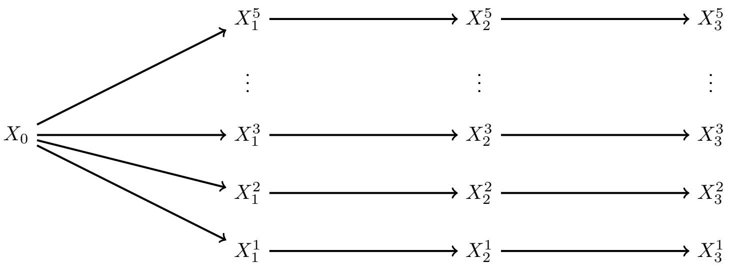

Рис.: Схема метода для $\#\mathcal{T} = 4$ и $b = 5$

Метод сглаженных деревьев

Предлагаемая оценка $V^{PT}(b,n,h)$ асимптотически состоятельная и асимптотически несмещённая при $b \to \infty$ и $n \to \infty$.

Параметры:

b	количество ветвей в дереве
n	число точек, по которым строится оценка стоимости удержания опциона
h	высота деревьев

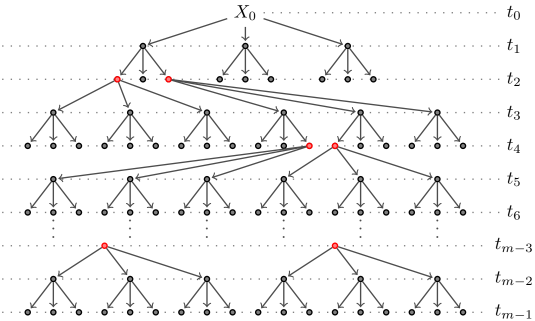

Рис.: Схема метода

Сравнение метода сглаженных деревьев с методом линейной регрессии

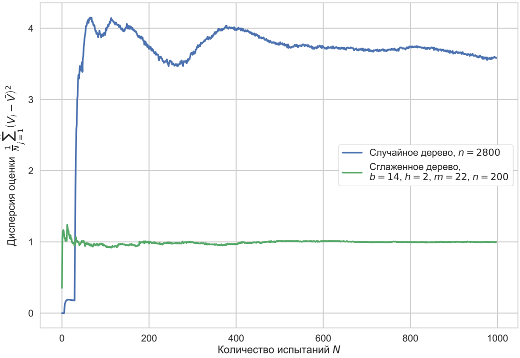

Рис.: Дисперсия оценок методов сглаженного дерева и наименьших квадратов для $m = 22$ и одинаковой конструктивной размерности алгоритмов

Применение квази Монте-Карло к методу сглаженных деревьев

Таблица: Оценки $\hat{V}^{PT}$ с использованием различных последовательностей

b	h	n	тип	$\hat{V}$	$\mathrm{sd}\hat{V}$	$\mathrm{se}\hat{V}$	$\mathrm{bias}\hat{V}$
14	2	200	MC	13.379	0.208	3.748	3.742
14	2	200	QMC grid	11.632	-	-	1.995
14	2	200	RQMC grid	13.426	0.893	3.893	3.789

Выводы

- В существующих алгоритмах оценки стоимости Американского опциона с помощью моделирования возможно применение метода квази Монте-Карло и рандомизованного квази Монте-Карло при условии соблюдения требования на конструктивную размерность алгоритма.
- Предложенный модифицированный метод показал снижение дисперсии в 4.6 раз относительно метода наименьших квадратов с использованием MC. Применение QMC в этой задаче позволило уменьшить смещение построенной оценки относительно истинной стоимости опциона.

Вопросы