Фильтр Калмана-Бьюси

Ширинкина Дарья Андреевна

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Статистическое моделирование

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Товстик Т. М.
Рецензент: нач. лаборатории АО "Котлин-Новатор"
Дмитриев А. В.

СтатМод

Санкт-Петербург,
2018г.

Введение

Фильтрация — оптимальная оценка значений одного процесса, например, θ_n, по значениям другого процесса ξ_n, коррелированного с исходным.

До выхода статьи Kalman R.[1960] под фильтрацией подразумевался прогноз $\theta_{n+\tau}$ по значениям ξ_s, $s \leq n$ (Колмогоров А.Н.[1941], Wiener N.[1949], Розанов Ю.А.[1963]).

Фильтр Калмана-Бьюси — это оптимальная оценка (например, в среднеквадратичном смысле) при $n = 0, 1, 2, \dots$ процесса θ_n по $(\xi_0, \xi_1, ..\xi_n)$.

Введение

Модель: наблюдаемый процесс ξ_n является суммой

$$\xi_n = \theta_n + \eta_n$$

независимых гауссовских процессов авторегрессии θ_n (сигнал) и η_n (шум).

В работе выводятся рекуррентные уравнения для вычисления

- фильтрации $m_n = \mathbb{E}(\theta_n|\mathfrak{F}_n^\xi)$ процесса θ_n,
- ошибки фильтрации $\boldsymbol{\gamma}_n = \mathbb{E}[(\theta_n - m_n)(\theta_n - m_n)^{\mathrm{T}}|\mathfrak{F}_n^\xi]$,
- взаимных ковариаций $\boldsymbol{r}_n = \mathbb{E}\{[\theta_n - m_n][\theta_{n-1} - m_{n-1}]^{\mathrm{T}}|\mathfrak{F}_n^\xi\}$.

на основе наблюдений процесса ξ_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Результаты были получены с помощью теоремы о нормальной корреляции (см. например, Ширяев А.Н.[2004]).

Задача

Рассматриваем в качестве сигнала θ_n и шума η_n векторные процессы авторегрессии (AR) при $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \theta_n &= -\boldsymbol{P}_1\theta_{n-1} - \boldsymbol{P}_2\theta_{n-2} + \boldsymbol{\Sigma}_1\varepsilon_1(n), \\ \eta_n &= -\boldsymbol{Q}_1\eta_{n-1} + \boldsymbol{\Sigma}_2\varepsilon_2(n). \end{aligned}$$

где ε_k — белые гауссовские шумы такие, что $\mathbb{E}\varepsilon_k(i)\varepsilon_\ell(j)^{\mathrm{T}} = \mathrm{diag}(\delta_{k\ell}\delta_{ij})$, а $\mathbb{E}\varepsilon_k(n) = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{cov}(\varepsilon_k(n), \varepsilon_k(n)) = \boldsymbol{I}$, $k, \ell \in \{1, 2\}$.

При этом процессы θ_n и η_n

- гауссовские стационарные (в широком смысле);
- независимые между собой;
- $\mathbb{E}\theta_n = \mathbb{E}\eta_n = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$.

Задача: найти рекуррентные уравнения для оптимальной в среднеквадратичном смысле оценки m_n сигнала θ_n и ошибки фильтрации γ_n.

Фильтр Калмана-Бьюси

Определение фильтра Калмана-Бьюси (Ширяев А. Н., 2004)

Если векторные процессы ξ (наблюдаемый) и θ (оцениваемый) связаны рекуррентными соотношениями ($\varepsilon_1(n)$ и $\varepsilon_2(n)$ — независимые гауссовские векторы):

$$\theta_n = a_{01} + \boldsymbol{A}_{11}\theta_{n-1} + \boldsymbol{A}_{21}\xi_{n-1} + \boldsymbol{B}_{11}\varepsilon_1(n) + \boldsymbol{B}_{21}\varepsilon_2(n),$$
$$\xi_n = a_{02} + \boldsymbol{A}_{12}\theta_{n-1} + \boldsymbol{A}_{22}\xi_{n-1} + \boldsymbol{B}_{12}\varepsilon_1(n) + \boldsymbol{B}_{22}\varepsilon_2(n),$$

то величины $m_n = \mathbb{E}(\theta_n|\mathfrak{F}_n^{\xi})$ и $\gamma_n = \mathbb{E}[(\theta_n - m_n)(\theta_n - m_n)^{\mathrm{T}}|\mathfrak{F}_n^{\xi}]$ называются фильтром Калмана-Бьюси.

$\mathfrak{F}_n^{\xi} = \sigma\{\omega : \xi_0, \ldots, \xi_n\}$ — наименьшая σ-алгебра, порожденная $\xi_0, \ldots, \xi_n$.

Результаты: сигнал — AR(1), шум — AR(1)

Для одномерного случая авторегрессии первого порядка (AR(1)) сигнала и шума (σ_θ^2 и σ_η^2 — дисперсии сигнала и шума)

$$\theta_n + \rho_1 \theta_{n-1} = \sigma_\theta \sqrt{1-\rho_1^2}\varepsilon_1(n),$$
$$\eta_n + q_1 \eta_{n-1} = \sigma_\eta \sqrt{1-q_1^2}\varepsilon_2(n)$$

из теоремы [Ширяев А. Н., 2004] рекуррентные соотношения оптимальной фильтрации имеют вид:

$$\begin{aligned} m_n = \quad & -\rho_1 m_{n-1} + \frac{\sigma_\theta^2(1-\rho_1^2) + \rho_1 \boldsymbol{\gamma}_{n-1}(\rho_1 - q_1)}{\sigma_\theta^2(1-\rho_1^2) + \sigma_\eta^2(1-q_1^2) + (\rho_1 - q_1)^2 \boldsymbol{\gamma}_{n-1}} \times \\ & \times [\xi_n + q_1 \xi_{n-1} + (\rho_1 - q_1) m_{n-1}], \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \quad \rho_1^2 \boldsymbol{\gamma}_{n-1} + \sigma_\theta^2(1-\rho_1^2) - \frac{[\sigma_\theta^2(1-\rho_1^2) + \rho_1(\rho_1 - q_1)\boldsymbol{\gamma}_{n-1}]^2}{\sigma_\theta^2(1-\rho_1^2) + \sigma_\eta^2(1-q_1^2) + (\rho_1 - q_1)^2 \boldsymbol{\gamma}_{n-1}}.$$

Для ошибки фильтрации γ_n были найдены предельные значения $\gamma_\infty = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$.

1. Случай $\rho_1 = q_1$:

$$\gamma_0 = \ldots = \gamma_\infty = \frac{\sigma_\theta^2 \sigma_\eta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma_\eta^2}.$$

2. Случай $\rho_1 \neq q_1$:

$$\gamma_\infty = \frac{-(1-\rho_1^2)(1-q_1^2)(\sigma_\theta^2+\sigma_\eta^2)}{2(\rho_1-q_1)^2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(1-\rho_1^2)(1-q_1^2)((1-\rho_1^2)(1-q_1^2)(\sigma_\theta^2+\sigma_\eta^2)^2 + 4(\rho_1-q_1)^2\sigma_\theta^2\sigma_\eta^2)}}{2(\rho_1-q_1)^2}.$$

Результаты: векторные сигнал — AR(2), шум — AR(1)

В работе была рассмотрена линейная модель для векторных процессов (при $n \geq 0$), где сигнал θ является AR(2), а шум η — AR(1).

$$\begin{aligned} \eta_n &= -\boldsymbol{Q}_1\eta_{n-1} + \boldsymbol{\Sigma}_2\varepsilon_2(n), \\ \theta_n &= -\boldsymbol{P}_1\theta_{n-1} - \boldsymbol{P}_2\theta_{n-2} + \boldsymbol{\Sigma}_1\varepsilon_1(n). \end{aligned}$$

В этом случае наблюдаемый процесс ξ выражается через сигнал следующим образом

$$\xi_n = \theta_n + \eta_n =$$
$$= -\boldsymbol{Q}_1\xi_{n-1} - (\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{Q}_1)\theta_{n-1} - \boldsymbol{P}_2\theta_{n-2} + \boldsymbol{\Sigma}_1\varepsilon_1(n) + \boldsymbol{\Sigma}_2\varepsilon_2(n).$$

Теорема

При $n \geq 2$ фильтр Калмана-Бьюси подчиняется рекуррентным уравнениям

$$\begin{aligned} m_n &= -\boldsymbol{P}_1 m_{n-1} - \boldsymbol{P}_2 m_{n-2} + \boldsymbol{D}_{12}^{(n)} \left(\boldsymbol{D}_{22}^{(n)}\right)^{-1} \cdot \\ & \cdot (\xi_n + \boldsymbol{Q}_1 \xi_{n-1} + (\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{Q}_1) m_{n-1} + \boldsymbol{P}_2 m_{n-2}), \end{aligned}$$

ошибка фильтрации $\boldsymbol{\gamma}_n$ при $n \geq 2$ удовлетворяет уравнению

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \boldsymbol{D}_{11}^{(n)} - \boldsymbol{D}_{12}^{(n)} \left(\boldsymbol{D}_{22}^{(n)}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{D}_{12}^{(n)}\right)^{\mathrm{T}},$$

а взаимные ковариации при $n \geq 2$ вычисляются следующим образом

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_n = & \left(\boldsymbol{D}_{12}^{(n)} \left(\boldsymbol{D}_{22}^{(n)}\right)^{-1} - \boldsymbol{I}\right) \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{r}_{n-1}^{\mathrm{T}} + \\ & + \left(\boldsymbol{D}_{12}^{(n)} \left(\boldsymbol{D}_{22}^{(n)}\right)^{-1} (\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{Q}_1) - \boldsymbol{P}_1\right) \boldsymbol{\gamma}_{n-1}. \end{aligned}$$

В теореме используются обозначения $\boldsymbol{D}_{11}^{(n)}$, $\boldsymbol{D}_{12}^{(n)}$ и $\boldsymbol{D}_{22}^{(n)}$ — условные ковариации сигнала θ_n и наблюдаемого процесса ξ_n:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{11}^{(n)} &= \operatorname{cov}(\theta_n, \theta_n | \mathfrak{F}_{n-1}^{\xi}) = \\
&= \mathbb{E}\{[\theta_n - \mathbb{E}(\theta_n | \mathfrak{F}_{n-1}^{\xi})]^2 | \mathfrak{F}_{n-1}^{\xi}\}, \\
\boldsymbol{D}_{12}^{(n)} &= \operatorname{cov}(\theta_n, \xi_n | \mathfrak{F}_{n-1}^{\xi}) = \\
&= \mathbb{E}\{[\theta_n - \mathbb{E}(\theta_n | \mathfrak{F}_{n-1}^{\xi})][\xi_n - \mathbb{E}(\xi_n | \mathfrak{F}_{n-1}^{\xi})] | \mathfrak{F}_{n-1}^{\xi}\}, \\
\boldsymbol{D}_{22}^{(n)} &= \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_n | \mathfrak{F}_{n-1}^{\xi}) = \\
&= \mathbb{E}\{[\xi_n - \mathbb{E}(\xi_n | \mathfrak{F}_{n-1}^{\xi})]^2 | \mathfrak{F}_{n-1}^{\xi}\}.
\end{aligned}$$

Матрицы $\boldsymbol{D}_{11}^{(n)}$, $\boldsymbol{D}_{12}^{(n)}$ и $\boldsymbol{D}_{22}^{(n)}$ были найдены в работе. Они выражаются через параметры исходных процессов.

Начальные данные при $n = 0$ и $n = 1$ вычисляются с помощью теоремы о нормальной корреляции и теоремы о фильтрации Калмана-Бьюси [Ширяев А. Н., 2004].

Начальные данные при $n = 0$:

$$m_0 = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}} \right)^{-1} \xi_0,$$

$$\gamma_0 = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}} \right)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}},$$

где $\boldsymbol{\Sigma}_\theta = \mathbb{E}(\theta_n \theta_n^{\mathrm{T}})$ — ковариационная матрица сигнала θ, а $\boldsymbol{\Sigma}_\eta = \mathbb{E}(\eta_n \eta_n^{\mathrm{T}})$ — ковариационная матрица процесса η.

Задание начальных данных

Начальные данные при $n = 1$: аппроксимируем процесс θ при $n = 1$ авторегрессией 1-го порядка, так как θ_{-1} не существует

$$\theta_1 = -\boldsymbol{C}_1\theta_0 + \boldsymbol{\Sigma}_1'\varepsilon_1(1).$$

Матрицы $\boldsymbol{C}_1$ и $\boldsymbol{\Sigma}_1'(\boldsymbol{\Sigma}_1')^{\mathrm{T}}$ находятся с помощью ковариаций $\boldsymbol{R}_\theta(k) = \mathbb{E}(\theta_{n+k}\theta_n^{\mathrm{T}})$ и $\boldsymbol{\Sigma}_\theta = \boldsymbol{R}_\theta(0)$ сигнала θ

$$\boldsymbol{C}_1 = -\boldsymbol{R}_\theta(1)\boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1},$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_1'(\boldsymbol{\Sigma}_1')^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Sigma}_\theta + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{R}_\theta(1)^{\mathrm{T}}.$$

Задание начальных данных

При $n = 1$:

Фильтрация и ошибка фильтрации

$$m_1 = -\boldsymbol{C}_1 m_0 + \boldsymbol{D}_{12}^{(0)} \left(\boldsymbol{D}_{22}^{(0)}\right)^{-1} \left(\xi_1 + \boldsymbol{Q}_{\mathbf{1}} \xi_0 + (\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{Q}_1) m_0\right),$$

$$\gamma_1 = \boldsymbol{Q}_1 \gamma_0 \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Sigma}_1' (\boldsymbol{\Sigma}_1')^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{D}_{12}^{(0)} \left(\boldsymbol{D}_{22}^{(0)}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{D}_{12}^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Ковариационная матрица равна

$$\boldsymbol{r}_1 = \left(\boldsymbol{D}_{12}^{(0)} \left(\boldsymbol{D}_{22}^{(0)}\right)^{-1} (\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{Q}_1) - \boldsymbol{C}_1\right) \gamma_0.$$

Здесь $\boldsymbol{D}_{12}^{(0)}$ и $\boldsymbol{D}_{22}^{(0)}$ выражаются через параметры процессов θ_1 и η_1:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_{12}^{(0)} &= \boldsymbol{C}_1 \gamma_0 (\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{Q}_1)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Sigma}_1' (\boldsymbol{\Sigma}_1')^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{D}_{22}^{(0)} &= (\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{Q}_1) \gamma_0 (\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{Q}_1)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Sigma}_1' (\boldsymbol{\Sigma}_1')^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Sigma}_2 \boldsymbol{\Sigma}_2^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Результаты: одномерные сигнал — AR(2), шум — AR(1)

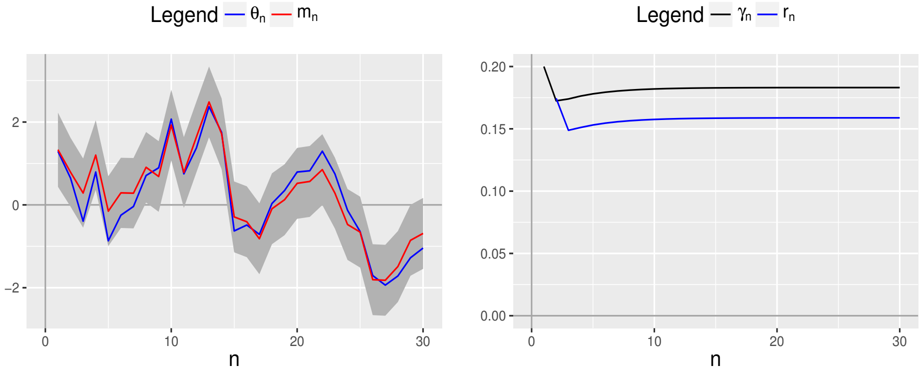

Рис.: Процесс θ и его оценка m_n (слева). Ошибка фильтрации γ и взаимные ковариации r (справа). Параметры: $q_1 = -0.9$, $\rho_1 = -5/6$, $\rho_2 = 1/6$, $\sigma_\eta = 0.5$, $\sigma_\theta = 1$.

Результаты: одномерные сигнал — AR(2), шум — AR(1)

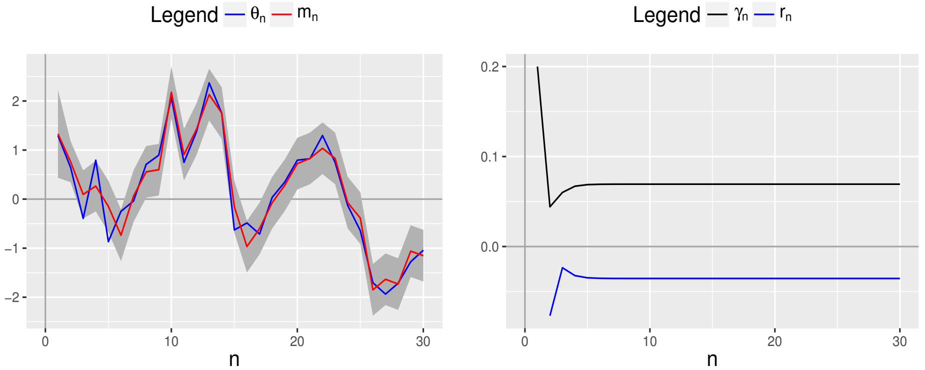

Рис.: Процесс θ и его оценка m_n (слева). Ошибка фильтрации γ и взаимные ковариации r (справа). Параметры: $q_1 = 0.9$, $\rho_1 = -5/6$, $\rho_2 = 1/6$, $\sigma_\eta = 0.5$, $\sigma_\theta = 1$.

Итоги

Для стационарных гауссовских процессов авторегрессии были получены следующие результаты.

Сигнал — AR(1), шум — AR(1):

- Получено предельное значение ошибки фильтрации для *одномерных* сигнала и шума.

Сигнал — AR(2), шум — AR(1):

- Выведены рекуррентные уравнения для фильтрации Калмана-Бьюси и ее ошибки для *векторных* сигнала и шума.

- Найдены начальные данные для фильтрации сигнала и ее ошибки.