Метод Монте-Карло решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ)

Погосян Анна, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Ермаков С.М.
Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Товстик Т.М.

Санкт-Петербург
2015г.

Поставленная задача

Существующие методы решения СДУ имеют как случайную, так и систематическую погрешность, зависящую от дискретизации по времени.

Задача

- Разработка метода, который не будет иметь этой систематической погрешности, основанный на
  1. сведении задачи к интегральному уравнению;
  2. применении известной схемы Неймана-Улама.
- Создание алгоритма для решения, по крайней мере, некоторых классов таких задач.

Стохастическое дифференциальное уравнение

В интегральной форме СДУ имеет вид

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dB(s), \quad t \in [0, T],$$

или в форме дифференциалов

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB(t), \quad t \in [0, T] \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $b(t, X(t))$ и $\sigma(t, X(t))$ — некоторые заданные функции от времени t и текущего состояния x, а $B(t)$ — случайный процесс, описывающий броуновское движение.

Существование и единственность решения

Теорема

Пусть решение принимает значения в n-мерном эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, где определен m-мерный случайный процесс $B(t)$, описывающий броуновское движение; пусть $T > 0$ и $b : [0, T] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $\sigma : [0, T] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n \times m}$ — измеримые функции, удовлетворяющие условиям: $\exists 0 < C < \infty$,

$$|b_i(t, x) - b_i(t, y)| \leq C|x - y| \ \forall t \in \mathbf{R} \text{ и } x, y \in \mathbf{R}^n$$

$$|\sigma_{ij}(t, x) - \sigma_{ij}(t, y)| \leq C|x - y| \ \forall t \in \mathbf{R} \text{ и } x, y \in \mathbf{R}^n$$

$$|b_i(t, x)| \leq C|x| \ \forall t \in \mathbf{R} \text{ и } x \in \mathbf{R}^n,$$

$$|\sigma_{ij}(t, x)| \leq C|x| \ \forall t \in \mathbf{R} \text{ и } x \in \mathbf{R}^n.$$

Тогда для любого $X_0 \in \mathbf{R}^n$ существует единственное (в смысле «почти наверное») решение системы (1), такое что $X(0) = X_0$.

Метод Эйлера-Маруямы

Дискретизация

$X_{i+1} = X_i + b(t_i, X_i)\Delta t + \sigma(t_i, X_i)\Delta B_i, \quad X_0 = X(0),$

- узлы по времени равноотстоящие $t_i = i\Delta t,\ \Delta t = T/N,$
- $X_i \approx X(t_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots, N-1,$
- $\Delta B_i = (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \sim N(0, \Delta t).$

Квадрат стандартного отклонения в узловых точках пропорционален Δt

$$\mathsf{E}|X(t_i) - X_i|^2 \leq c\Delta t$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, и где c — положительная константа.

Численные методы решения

Метод Мильштейна

Дискретизация

$$X_{i+1} = X_i + b(t_i, X_i)\Delta t + \sigma(t_i, X_i)\Delta B_i +$$

$$+\frac{1}{2}\sigma(t_i, X_i)\frac{\partial\sigma(t_i, X_i)}{\partial x}[(\Delta B_i)^2 - \Delta t] \quad X_0 = X(0),$$

- узлы по времени равноотстоящие $t_i = i\Delta t,\ \Delta t = T/N$,
- $X_i \approx X(t_i),\ i = 0, 1, 2, \dots, N-1$,
- $\Delta B_i = (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \sim N(0, \Delta t)$.

Квадрат стандартного отклонения в узловых точках пропорционален $(\Delta t)^2$

$$\mathsf{E}|X(t_i) - X_i|^2 \le p(\Delta t)^2,\ i = 0, 1, 2, \dots, N,\ p > 0.$$

Сведение к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра

$$\begin{cases} dX - A(t)Xdt = \left(b(t,X) - A(t)X\right)dt + \sigma(t,X)dB(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases};$$

- $A(t)$ — положительно определенная матрица $n \times n$, и пусть $G(t,X) = b(t,X) - A(t)X, \ C(t) = \int_0^t A(\tau)d\tau$, тогда

$$X(t) = e^{C(t)} \int_0^t e^{-C(\tau)} G(\tau, X)d\tau +$$

$$+ e^{C(t)} \int_0^t e^{-C(\tau)} \sigma(\tau, X)dB(\tau) + e^{C(t)} X_0$$

или в общем виде

$$X(t) = \int\limits_0^t K(t,\tau)G(\tau, X(\tau))d\tau + f(t).$$

Аппроксимация полиномом

Аппрокисмируем функцию $G(t, X(t))$, чтобы уравнение

$$X(t) = \int_0^t K(t,\tau)G(\tau, X(\tau))d\tau + f(t)$$

стало уравнением с полиномиальной нелинейностью. Воспользуемся, например, многочленом Тейлора второго порядка в окрестности точки $(t, X(t)) = (0, X_0)$.

$$G(t, X(t)) = G(0, X_0) + \frac{\partial G(0, X_0)}{\partial t} t + \frac{\partial G(0, X_0)}{\partial X}(X - X_0) +$$

$$+ \frac{\partial^2 G(0, X_0)}{2\partial t^2} t^2 + \frac{\partial^2 G(0, X_0)}{\partial t \partial X} t(X - X_0) + \frac{\partial^2 G(0, X_0)}{2\partial X^2}(X - X_0)^2 + o(\rho^2),$$

где $\rho = \sqrt{t^2 + (X - X_0)^2}$

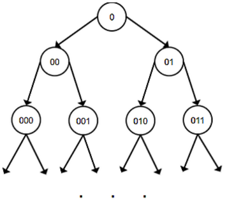
Метод Монте-Карло решения уравнений с полиномиальной нелинейностью

$$X(t) = \int_0^t \dots \int_0^t K(t, \tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{i=1}^{m} X(\tau_i) d\tau_i + f(t).$$

Оцениваем функционал

$(X, h) = \int_0^\infty X(\tau)h(\tau)d\tau,\ h(t) = \delta(t - T)$при фиксированном T.

Общая схема с использованием ветвящегося процесса для $m = 2$:



Ветвящийся процесс

1. Начальная плотность $p_0(t): \int_0^t p_0(\tau)d\tau = 1$;
2. Вероятность гибели частицы $g(t): 0 \le g(t) < 1$;
3. Плотность распределения вновь родившихся частиц

$$\frac{p(t \to \tau)}{1 - g^2(t)}, \quad \int_0^t p(t \to \tau) = 1 - g^2(t);$$

4. По дереву γ строим оценку $J(\gamma)$, $J(0) := h(0)/p_0(0)$, домножая ее на $K(t,\tau)/p(t \to \tau)$ при переходе из точки t в τ и на $f(t)/g(t)$ в точках гибели;
5. Среднее значение $J(\gamma)$ по N деревьям даст оценку (X, h).

Вычисление стохастического интеграла

Рассмотрим

$$I(f) = \int_0^T f(t)dB(t).$$

- $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ — разбиение $[0, T]$, где $t_i = i\Delta t$ для $i = 0, 1, \ldots N$;
- $I_N(f)$ — аппроксимация интеграла $I(f)$:

$$I(f) \approx I_N(f) = \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i)\eta_i \quad \text{и} \quad \eta_i = B(t_{i+1}) - B(t_i);$$

- Систематическая ошибка аппроксимации имеет порядок $\mathbf{O(1/\sqrt{N})}$.

Возможные вычислительные схемы метода Монте-Карло

- **Сплошной счет**. Случайная оценка в точке T зависит только от значения в этой точке.
- **Послойный счет**. Промежуток $[0, T]$ разбивается на M частей. Последовательно вычисляя значения в промежуточных точках, двигаясь из 0 в T, строится оценка в точке T.

Метод Монте-Карло для решения СДУ и систем СДУ

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB(t),\ \ X(0) = X_0$$

$$\Downarrow$$

$$X(t) = \int_0^t K(t,\tau)G(\tau, X(\tau))d\tau + f(t)$$

$$\Downarrow$$

$$X(t) = \int_0^t \dots \int_0^t K(t, \tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{i=1}^m X(\tau_i)d\tau_i + f(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{E}J(\gamma) = (X, h)$$

Численные эксперименты для решения простейших СДУ

$$dX = 2X dt + \frac{1}{2} dW(t), \; X(0) = 1.$$

- Точный первый момент решения $\mathsf{E}\left(X(t)\right) = e^{2t}$.
- Применим схему Неймана-Улама к равносильному уравнению

$$X(t) = \int_0^t e^{t-\tau} X(\tau) d\tau + e^t + \int_0^t \frac{1}{2} e^{t-\tau} dW(\tau).$$

- Вычислим $(X, h)(T)$. Оценка $J(\gamma)$ строится по цепи Маркова, и имеет вид

$$J(\gamma) = \frac{h(t_0) K(t_0, t_1) \ldots K(t_{\gamma-1}, t_\gamma) f(t_\gamma)}{p^0(t_0) p(t_0 \to t_1) \ldots p(t_{\gamma-1} \to x_\gamma) g(t_\gamma)}.$$

Таблица: Сравнение метода Эйлера и метода Монте-Карло (сплошной счет) для $dX = 2X dt + \frac{1}{2} dW(t)$.

Метод	точное E $(X(T))$	оценка E $(X(T))$	$\widehat{\sigma^2}$	Дов. инт. $\gamma = 0.95$
$T = 0.1$				
Эйлер	1.2214	1.2130	0.0311	(1.2021; 1.2239)
МК	1.2214	1.2214	1.2325e-30	(1.2214; 1.2214)

Сравнение метода Эйлера и метода МК

$$dX = 2X dt + t^2 dW(t), \;\; X(0) = 1.$$

- Точные моменты $\mathsf{E}\left(X(t)\right)$, $\mathsf{E}\left(X^2(t)\right)$ вычисляются с помощью формулы Ито.
- К равносильному уравнению

$$X(t) = \int_0^t e^{t-\tau} X(\tau) d\tau + e^t + \int_0^t e^{t-\tau} \tau^2 dW(\tau)$$

применим пошаговую оценку методом Монте-Карло.

Ошибка метода Монте-Карло и метода Эйлера

Таблица: Ошибка $\mathsf{E}|X(1) - X_N|^2$ для метода Монте-Карло и метода Эйлера.

M	ошибка Эйлера	ошибка Монте-Карло
10	3.474284	1.363274
100	2.600295	1.283009
1000	2.576797	1.282814

- M — число шагов по времени;
- $N = 10000$ траекторий смоделировано на каждом шаге;
- Значение $X(1)$ посчитано для каждой траектории по схеме Эйлера с 50000 шагами;
- Ошибка имеет вид $\frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}|X^{(j)}(1) - X_M^{(j)}|^2 \approx \mathsf{E}|X(1) - X_M|^2$ для каждого метода, здесь для каждого M $X_M^{(j)}$ обозначает оценку $X^{(j)}(1)$ на j–ой траектории в схеме с M шагами.

Вычисление моментов

Для $M = 10,\ 100,\ 1000$ были произведены оценки

- $\mathsf{E}\left(X(1)\right) \approx \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{X_M^{(j)}}{N}$
- $\mathsf{E}\left(X^2(1)\right) \approx \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{(X_M^{(j)})^2}{N}$, где $X_M^{(j)}$ — оценка $X(1)$ для j-ой траектории в схеме с M шагами.

В скобках рядом с оценками стоят ошибки. $\mathsf{E}\left(X(1)\right) = 7.38$ и $\mathsf{E}\left(X^2(1)\right) = 54.66$ — точные значения.

Вычисление моментов

Таблица: Оценка $\mathsf{E}\left(X(1)\right)$ по методу Эйлера и методу Монте-Карло.

M	оценка Эйлера	оценка Монте-Карло
10	6.17 (1.21)	7.40 (0.02)
100	7.25 (0.13)	7.38 (0.00)
1000	7.37 (0.01)	7.38 (0.00)

Таблица: Оценка $\mathsf{E}\left(X^2(1)\right)$ по методу Эйлера и методу Монте-Карло.

M	оценка Эйлера	оценка Монте-Карло
10	38.92 (15.74)	54.93 (0.27)
100	53.93 (0.73)	54.60 (0.06)
1000	55.61 (0.95)	54.59 (0.07)

Выводы

1. Изучены известные численные методы решения СДУ.
2. Предложен новый класс методов решения СДУ, в частности возможен сплошной и пошаговый счет.
3. Показано, что в некоторых случаях новые методы обладают преимуществом (отсутствие смещения при дискретизации по времени и другие).
4. Возможно дальнейшее уточнее подсчета стохастического интеграла добавлением нового члена как в схеме Мильштейна, а также в разработанных методах можно применять различную технику понижения дисперсии.
5. Вопросы оценки погрешности требуют дополнительных исследований, так же как и определение класса задач, к которым предложенные методы целесообразно применять.