Оценка Европейского опциона методом Монте-Карло

Александров Андрей Владимирович, 522-я группа

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — д.ф.-м.н., профессор **С.М.Ермаков**
Рецензент — к.ф.-м.н., доцент **Ю.Н.Каштанов**

Санкт-Петербург
2011г.

Определение 1

Опцион — договор, по которому потенциальный покупатель или потенциальный продавец получает право, но не обязательство, совершить покупку или продажу актива (товара, ценной бумаги, и т.д.) по заранее оговоренной цене в определённый договором момент в будущем или на протяжении определённого отрезка времени.

Определение 2

Опцион "колл"(option $call$)- опцион, который даёт право своему владельцу ***купить*** *определённое количество базового актива по заранее фиксированной цене покупки.*

Определение 3

Тот, кто продаёт или выписывает опцион, называется ***продавцом*** *или* ***выписывающей стороной****. Чтобы приобрести опцион, его будущий владелец платит выписывающей стороне премию.Эта премия и называется* ***ценой опциона****.*

Определение 4

Европейский опцион - опцион, который может быть исполнен только лишь в момент его окончания.

Рассмотрим Европейский опцион, построенный на акциях.
Пусть C обозначает стоимость опциона "колл", P - цену опциона "пут", X - цену исполнения опциона, S(t) - цену акции, $t \in [0, T]$, где T - момент исполнения опциона.

Стоимость опциона в момент исполнения для опциона "колл"равна C=max(0,S(T)-X), а для опциона "пут"$-$ P = max(0,X-S(T)).

В теории опционов определяющим вопросом является цена опциона.

Какой должна быть "справедливая"цена опциона, которая бы устроила и продавца, и покупателя?

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (r-d)S\frac{\partial U}{\partial S} + \frac{1}{2}S^2\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} - rU = 0 \qquad (1)$$

с начальными и граничными условиями для опциона "колл"

$$\begin{aligned} &U(t,S)|_{S=0} = 0, \\ &S_{t=0} = S_0, \\ &U(t,S)|_{t=T} = max(0, S-K), \\ &\lim_{S\to+\infty}\frac{U(t,S)}{S} = 1. \end{aligned} \qquad (2)$$

K - цена исполнения опциона "колл", t - время, U - цена опциона "колл", r - процентная ставка, T - момент исполнения опциона, d - дивиденды, σ - волатильность .

$$U = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rt}\Phi(d_2). \qquad (3)$$

Φ - Функция распределения N(0,1),

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{ln(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 &= \frac{ln(S_0/K) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned} \qquad (4)$$

- Исследование численных методов решения дифференциального уравнения Блэка-Шоулса.
- Оценка Европейского опциона методом Монте-Карло.
- Исследование стохастической устойчивости метода Монте-Карло.

Явная разностная схема для решения дифференциального уравнения Блэка-Шоулса

Для того чтобы аппроксимировать дифференциальное уравнение Блэка-Шоулса, мы должны ввести область определения для цены акции и времени:
$[0,+\infty)\times[0,T]$
Разобьём их на равные промежутки и получим:
$[0,\Delta s,2\Delta s,..,+\infty)\times[0,\Delta t,2\Delta t,..T]$

Конечно-разностная схема для нашего уравнения будет иметь вид:

$$\frac{U_{i,k}-U_{i-1,k}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2(k\Delta S)^2\frac{U_{i,k+1}-2U_{i,k}+U_{i,k-1}}{(\Delta S)^2}+rk\Delta S\frac{U_{i,k+1}-U_{i,k-1}}{2\Delta S}-rU_{i,k}=0. \tag{5}$$

$$U_{i-1,k}=U_{i,k}a_1(k)+U_{i,k+1}a_2(k)+U_{i,k-1}a_3(k), \tag{6}$$

где:

$$\begin{aligned} a_1(k)&=[\frac{1}{\Delta t}-\sigma^2k^2-r]\Delta t,\\ a_2(k)&=[\frac{rk}{2}+\frac{1}{2}\sigma^2k^2]\Delta t,\\ a_3(k)&=[-\frac{rk}{2}+\frac{1}{2}\sigma^2k^2]\Delta t. \end{aligned} \tag{7}$$

Представим цену опциона в виде вектора: U=$(U_1, U_2, ..., U_{(n+1)^2})$,где n = $\frac{T}{\Delta t}$.
U=AU+F, где A - матрица размерности $(n+1)^2 \times (n+1)^2$, а F - вектор длины $(n+1)^2$:

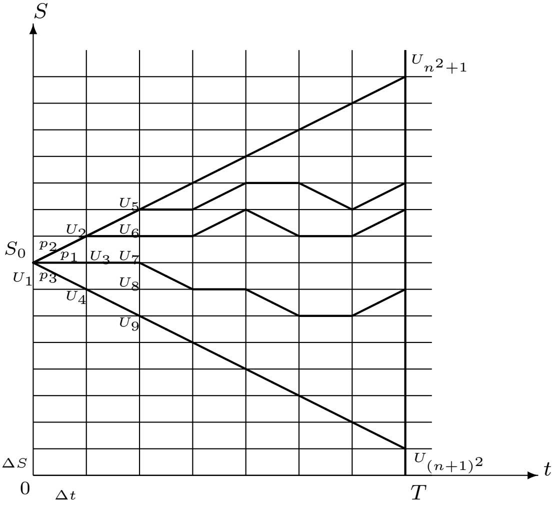

Рис.1: Блуждание по сетке(явная схема).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{F}=(0, 0, \dots, 0, f_{n^2+1}, f_{n^2+2}, \dots, f_{(n+1)^2})^T ,$$

где $f_g = f_{\{n,i\}} = max(0, i \cdot \Delta S - K) \quad \forall g \in 1 : (n+1)^2$, причём $\{n, i\}$ - координаты узла на границе t=T, а K - цена исполнения опциона.

Далее вводим $p_i = \frac{|a_i|}{\sum_{i=1}^{3} |a_i|}$.

$$\Phi(x_{i_0}, \dots, x_{i_n}) = \frac{a_{i_0,i_1} \dots a_{i_{n-1},i_n} f_{i_n}}{p_{i_0,i_1} \dots p_{i_{n-1},i_n}}. \tag{8}$$

Общая оценка по всем траекториям будет иметь следующий вид:

$$\hat{U} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \Phi_j. \tag{9}$$

Численные результаты(явная схема)

Пусть у нас в момент времени $t = 0$ цена акции S_0=1, к тому же:
K=1,$\Delta t = 0.01$,$\Delta S = 0.01$,T = 1, R = 10000(R - число траекторий).

Подставим эти данные в программу и посмотрим на результаты при разных σ и r.

Таблица 1.: Численные результаты. Явная схема.

		σ=3%	σ=5%	σ=10%
r=2%	теоретический результат	0.0242895	0.0312069	0.0501698
	практический результат	0.0232783	0.0291986	-2.2883$\cdot 10^{23}$
	δ_{st}	0.0002365	0.0003522	2.2038$\cdot 10^{23}$
r=4%	теоретический результат	0.0404571	0.0451008	0.0617846
	практический результат	0.0398021	0.0429361	-4.5249$\cdot 10^{23}$
	δ_{st}	0.0002809	0.0004056	5.2371$\cdot 10^{23}$

r - процентная ставка, σ - волатильность.

Устойчивость метода Монте-Карло(явная схема).

Достаточное условие для стохастической устойчивости метода Монте-Карло:

$$|a_1(k)| + |a_2(k)| + |a_3(k)| < 1. \tag{10}$$

$$r \leq 4\sigma^2 : \qquad \Delta t(k) < \frac{1}{\sigma^2 k^2 + \frac{r}{2}(k+1)}. \tag{11}$$

Таблица 2.: Численные результаты. Явная схема. Переменный Δt.

		σ=3%	σ=5%	σ=10%
r=2%	теоретический результат	0.0242895	0.03135367	0.0498049
	практический результат	0.0251483	0.0321605	0.0508240
	δ_{st}	0.0002377	0.0003625	0.0006816
r=4%	теоретический результат	0.0404571	0.0451008	0.0617846
	практический результат	0.0413197	0.0451541	0.0619201
	δ_{st}	0.0002563	0.0004196	0.0007449

r - процентная ставка, σ - волатильность.

$$\frac{U_{i,k}-U_{i-1,k}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2(k\Delta S)^2\frac{U_{i-1,k+1}-2U_{i-1,k}+U_{i-1,k-1}}{(\Delta S)^2}+rk\Delta S\frac{U_{i-1,k+1}-U_{i-1,k-1}}{2\Delta S}$$
$-rU_{i,k}=0$.

$$U_{i-1,k}=U_{i,k}a_1(k)+U_{i-1,k+1}a_2(k)+U_{i-1,k+1}a_3(k). \tag{12}$$

$$a_1(k)=[\frac{\frac{1}{\Delta t}-r}{\frac{1}{\Delta t}+\sigma^2k^2}],a_2(k)=[\frac{\frac{1}{2}\sigma^2,k^2+\frac{1}{2}rk}{\frac{1}{\Delta t}+\sigma^2k^2}],a_3(k)=[\frac{\frac{1}{2}\sigma^2k^2-\frac{1}{2}rk}{\frac{1}{\Delta t}+\sigma^2k^2}]. \tag{13}$$

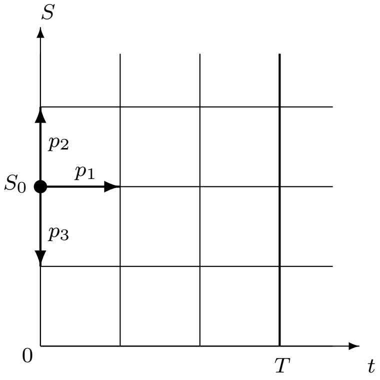

Рис.2: Блуждание по сетке(неявная схема).

Достаточное условие для стохастической устойчивости метода Монте-Карло:

$$|a_1(k)| + |a_2(k)| + |a_3(k)| < 1. \tag{14}$$

$$r \le 4\sigma^2 : \qquad \Delta t < \frac{2}{r + \frac{r^2}{4\sigma^2}}. \tag{15}$$

Таблица 3.: Численные результаты. Неявная схема.

		σ=3%	σ=5%	σ=10%
r=2%	теоретический результат	0.0242895	0.0312069	0.0501698
	практический результат	0.0237388	0.0299539	0.04647097
	δ_{st}	0.0002421	0.0003601	0.0006617
r=4%	теоретический результат	0.0404571	0.0451008	0.0617846
	практический результат	0.0391955	0.0431182	0.0534931
	δ_{st}	0.0002781	0.0004119	0.0008215

r - процентная ставка, σ - волатильность.

$$\frac{U_{i,k}-U_{i-1,k}}{\Delta t}+\frac{1}{2}r(k\Delta s)\frac{U_{i,k+1}-U_{i,k-1}}{2\Delta S}+\frac{1}{2}r(k\Delta s)\frac{U_{i-1,k+1}-U_{i-1,k-1}}{2\Delta S}+$$
$$+\frac{1}{4}(k\Delta s)^2\sigma^2\frac{U_{i,k+1}-2U_{i,k}+U_{i,k-1}}{(\Delta S)^2}+\frac{1}{4}(k\Delta s)^2\sigma^2\frac{U_{i-1,k+1}-2U_{i-1,k}+U_{i-1,k-1}}{(\Delta S)^2}-rU_{i,k}=0$$

$$U_{i-1,k} = a_1(k)U_{i,k}+a_2(k)U_{i,k+1}+a_3(k)U_{i,k-1}+a_4(k)U_{i-1,k+1}+a_5(k)U_{i-1,k-1}. \quad (16)$$

$$a1(k) = \frac{\frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{2}k^2\sigma^2 - r}{\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2}k^2\sigma^2}, a2(k) = a4(k) = \frac{\frac{1}{4}k^2\sigma^2 + \frac{1}{4}rk}{\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2}k^2\sigma^2}, a3(k) = a5(k) = \frac{\frac{1}{4}k^2\sigma^2 - \frac{1}{4}rk}{\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2}k^2\sigma^2}. \quad (17)$$

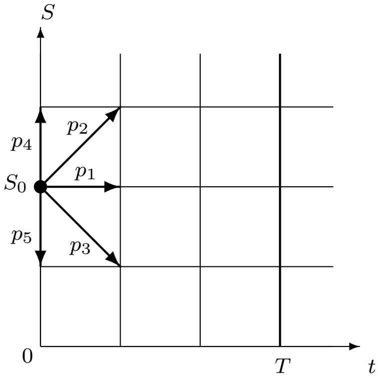

Рис.3: Блуждание по сетке(схема Кранка-Николсона).

Достаточное условие для стохастической устойчивости метода Монте-Карло:

$$|a_1(k)| + |a_2(k)| + |a_3(k)| + |a_4(k)| + |a_5(k)| < 1. \tag{18}$$

$$r \leq 4\sigma^2 : \qquad \Delta t(k) < \frac{1}{\sigma^2 k^2 + rk}. \tag{19}$$

Таблица 4.: Численные результаты. Схема Кранка-Николсона.

		σ=3%	σ=5%	σ=10%
r=2%	теоретический результат	0.0242895	0.0312069	0.0501698
	практический результат	0.0237028	0.0281521	0.0425748
	δ_{st}	0.0002436	0.0003475	0.0006305
r=4%	теоретический результат	0.0404571	0.0451008	0.0617846
	практический результат	0.0394061	0.0411697	0.0539332
	δ_{st}	0.0002811	0.0004069	0.0013204

r - процентная ставка, σ - волатильность.

- Исследованы конечно-разностные схемы для решения дифференциального уравнения Блэка-Шоулса.
- Разработаны алгоритмы и программы для реализации метода Монте-Карло с использованием различных разностных схем, в том числе разностных схем с переменным шагом по времени Δt.
- Найдены условия для стохастической устойчивости методов Монте-Карло.
- Показан абсолютный параллелизм всех рассматриваемых методов Монте-Карло.

$\Phi(x_{i_0}, ..., x_{i_n}) = \frac{a_{i_0,i_1} \cdots a_{i_{n-1},i_n} f_{i_n}}{p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n}}$

Описание алгоритма:

1. Инициализируем временную переменную β=0
2. Задаём начальные значения t=0, $S = S_0$, а также переменную α=1
3. Моделируем случайное число (используем равномерное распределение на [0,1])
4. С вероятностью p_1 переходим в узел с индексами i,k; при этом: $\alpha = \alpha \cdot sign(a_1(k))(\sum_{i=1}^{3} |a_i(k)|)$
5. С вероятностью p_2 переходим в узел с индексами i,k+1; при этом: $\alpha = \alpha \cdot sign(a_2(k))(\sum_{i=1}^{3} |a_i(k)|)$
6. С вероятностью p_3 переходим в узел с индексами i,k-1; при этом: $\alpha = \alpha \cdot sign(a_3(k))(\sum_{i=1}^{3} |a_i(k)|)$
7. Если мы не достигли узла на границе, то переходим к п.3(т.е. заново моделируем случайное число)
8. Если достигли узла границы, то $\alpha = \alpha \cdot f(\Delta s \cdot i, \Delta t \cdot k))$ и $\beta = \beta + \alpha$
9. Повторяем процесс n раз
10. В итоге, получим нашу оценку в виде $\frac{1}{n}\beta$

Рассмотрим Марковскую цепь:
p^0, $P = \|p_{i,k}\|$, $\sum_{k=1}^{n} p_{i,k} = 1$.

$i_0 \to i_1 \to i_2 \ldots \to i_\tau,$ $\qquad p^0_{i_0} p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \ldots p_{i_{\tau-1},i_\tau}$

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{i_0=1}^{n} \ldots \sum_{i_\tau=1}^{n} p^0_{i_0} p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \ldots p_{i_{\tau-1},i_\tau} = 1 \tag{20}$$

(Ермаков С.М., 1975г.)

$$E\Phi = \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{i_0=1}^{n} \ldots \sum_{i_\tau=1}^{n} \Phi = \Phi(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_\tau}) p^0_{i_0} p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \ldots p_{i_{\tau-1},i_\tau} \tag{21}$$

X = AX + F, A = $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$,X =$(x_1, \ldots, x_n)^T$,F = $(f_1, \ldots, f_n)^T$
$X_m = AX_{m-1} + F, X_0 = F, m = 1, 2, \ldots$

$$\tilde{X} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k F \tag{22}$$

(H,$\tilde{X}$), где H = $(h_1, \ldots, h_n)$ произвольный вектор.

$$(H, \tilde{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} h_{i_0} a_{i_0,i_1} a_{i_1,i_2} \ldots a_{i_{k-1},i_k} f_{i_k} \tag{23}$$

$$\Phi(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_\tau}) = \sum_{l=0}^{\tau} \frac{h_{i_0} a_{i_0,i_1} a_{i_1,i_2} \ldots a_{i_{l-1},i_l} f_{i_l}}{p^0_{i_0} p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \ldots p_{i_{l-1},i_l}} \tag{24}$$

Определение 5

Модель Блэка - Шоулса *- модель фондового рынка со следующими предположениями:*

1) отсутствуют арбитражные возможности;

2) торговля акциями непрерывна;

3) отсутствуют налоги;

4) все ценные бумаги можно делить (например, возможно купить любую часть акции);

5) возможно заимствовать и предоставить наличные деньги по постоянной надежной процентной ставке.

Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(x,t). \tag{25}$$

Область: $0 \le t \le T$, $0 \le x \le 1$. Шаг: $h = \frac{1}{M}$, $\Delta t = \frac{T}{L}$.

Явная схема:

$$\frac{u_{k,l+1} - u_{k,l}}{\Delta t} = a^2 \frac{u_{k+1,l} - 2u_{k,l} + u_{k-1,l}}{h^2} \tag{26}$$

$$u_{k,l+1} = (1 - \frac{1}{\mu^2})u_{k,l} + (\frac{1}{2\mu^2})u_{k+1,l} - (\frac{1}{2\mu^2})u_{k-1,l}, \qquad \mu^2 = \frac{h^2}{2\Delta t a^2}. \tag{27}$$

Неявная схема:

$$\frac{u_{k,l+1} - u_{k,l}}{\Delta t} = a^2 \frac{u_{k+1,l+1} - 2u_{k,l+1} + u_{k-1,l+1}}{h^2} \tag{28}$$

$$u_{k,l} = -\frac{1}{2\mu^2}u_{k+1,l+1} + \frac{(2+2\mu^2)}{2\mu^2}u_{k,l+1} - (\frac{1}{2\mu^2})u_{k-1,l+1}, \qquad \mu^2 = \frac{h^2}{2\Delta t a^2}. \tag{29}$$

$\sum_i |a_i| < 1$.

$k > \frac{r}{\sigma^2}$.
Явная схема:
$\Delta t(k) < \frac{2}{2\sigma^2 k^2 + r}$.
Неявная схема:
$\Delta t(k) < \frac{2}{r}$.
Схема Кранка-Николсона:
$\Delta t(k) < \frac{1}{\sigma^2 k^2 + rk}$.

1. Взять ΔS таким, чтобы в начале нашего движения номер слоя k(по шкале S) допустим не менее чем в 2 раза(вообще можно выбрать любое число большее 1) превосходил $[\frac{r}{\sigma^2}] + 1$, т.е. берём ,например, k=$2 \cdot ([\frac{r}{\sigma^2}] + 1)$.
2. Делаем специальный счётчик, который показывает сколько раз во время движения по каждой из траекторий мы побывали ниже слоя $[\frac{r}{\sigma^2}] + 1$, если значения этого счётчика отличаются от нуля, то применяем алгоритм для оценки цены опциона заново, только берём уже k=$4 \cdot ([\frac{r}{\sigma^2}] + 1)$, т.е. в 2 раза увеличиваем номер слоя с которого мы начинаем движение, если же счётчик нулевой, то мы получаем оценку цены опциона у которой дисперсия гарантированно будет стохастический устойчивой.
3. Увеличивая номер начального слоя, как показано в п.2, мы рано или поздно получим счётчик с нулевыми значениями. Это обусловлено тем, что вероятность (движения вниз по сетке) $p_3 < p_2$, т.е. $p_3 < \frac{1}{2}$. А это значит, что вероятность попасть в зону, где k<$[\frac{r}{\sigma^2}] + 1$, будет уменьшаться в разы с увеличением номера слоя с которого мы начинаем движение по сетке.