

# Исследование алгоритмов «блуждания от границы»

Васильев Александр Владимирович, 522-я группа

Санкт-Петербургский Государственный Университет  
Математико-механический факультет  
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — д.ф.-м.н. **С.М. Ермаков**  
Рецензент — к.ф.-м.н. **Н.М. Москалева**

Санкт-Петербург  
2009г.

- ▶ Исследовать процесс «блуждания по сферам от границы» для решения некоторых задач математической физики.
- ▶ Рассмотреть процесс «блуждания по сетке от границы» для решения аналогичных задач.

Интегральное уравнение второго рода:

$$\varphi(x) = \int K(x, y)\varphi(y)\mu(dy) + f(x) \pmod{\mu}. \quad (1)$$

Пусть, для некоторого класса  $H$  функций  $h$  сходится ряд

$$\sum_{t=0}^{\infty} \int \mu(dx_0) \dots \int \mu(dx_t) |h(x_0)K(x_0, x_1) \dots K(x_{t-1}, x_t)f(x_t)|. \quad (2)$$

Сопряженное к (1) уравнение:

$$\varphi^*(x) = \int K(y, x)\varphi^*(y)\mu(dy) + h(x) \pmod{\mu}.$$

Тогда известно, что

$$(\varphi, h) = (\varphi^*, f).$$

Уравнениям (1) и (2) можно сопоставить цепь Маркова с множеством состояний  $X$  и дискретным временем  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Цепь задается плотностью начального распределения  $p^0(x)$  по отношению к мере  $\mu$  и плотностью перехода  $p(x \rightarrow y)$  (также по отношению к мере  $\mu$ ). Предполагается, что

$$\int p(x \rightarrow y)\mu(dy) = 1 - g(x), \quad 0 \leq g(x) < 1.$$

## Т е о р е м а. Оценки

$$J_1 = \frac{h(x_0)K(x_0, x_1) \dots K(x_{r-1}, x_r)f(x_r)}{p^0(x_0)p(x_0 \rightarrow x_1) \dots p(x_{r-1} \rightarrow x_r)g(x_r)} \text{ и } J_2 = \sum_{l=0}^r \frac{h_0 K_{01} \dots K_{l-1, l} f_l}{p_0^0 p_{01} \dots p_{l-1, l}}$$

являются несмещенными оценками функционала  $(\varphi, h) \Leftrightarrow$  сходится ряд (2) и выполняются следующие условия согласования:

- ▶ 1)  $p_0(x) > 0$  для тех  $x$ , для которых  $h(x) \neq 0$
- ▶ 2)  $p(x \rightarrow y) > 0$  для тех  $(x, y)$ , для которых  $K(x, y) \neq 0$
- ▶ 3)  $g(x) > 0$  для тех  $x$ , для которых  $f(x) \neq 0$

для  $J_2$  должны выполняться первые 2 условия.

## Т е о р е м а. Оценки

$$J_1^* = \frac{f(x_0)K(x_1, x_0) \dots K(x_r, x_{r-1})h(x_r)}{p^0(x_0)p(x_0 \rightarrow x_1) \dots p(x_{r-1} \rightarrow x_r)g(x_r)} \text{ и } J_2^* = \sum_{l=0}^r \frac{f_0 K_{10} \dots K_{l, l-1} h_l}{p_0^0 p_{01} \dots p_{l-1, l}}$$

являются несмещенными оценками функционала  $(\varphi^*, f) \Leftrightarrow$  сходится ряд (2) и выполняются следующие условия согласования:

- ▶ 1)  $p_0(x) > 0$  для тех  $x$ , для которых  $f(x) \neq 0$
- ▶ 2)  $p(x \rightarrow y) > 0$  для тех  $(x, y)$ , для которых  $K(y, x) \neq 0$
- ▶ 3)  $g(x) > 0$  для тех  $x$ , для которых  $h(x) \neq 0$

для  $J_2^*$  должны выполняться первые 2 условия.

Если  $\mu$  — дискретная мера, то уравнение второго рода становится системой линейных алгебраических уравнений вида

$$X = AX + F$$

аналогично интегральным уравнениям 2-го рода, для решения СЛАУ моделируется цепь Маркова, а оценкой служит

$$\Phi = \frac{h_{i_0} a_{i_0, i_1} \dots a_{i_{r-1}, r} f_{i_r}}{p_{i_0}^0 p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{r-1}, r} g_{i_r}}$$

условия согласования выглядят следующим образом

- ▶ 1)  $p_i^0 > 0$ , если  $h_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$
- ▶ 2)  $p_{i,j} > 0$ , если  $a_{i,j} \neq 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$
- ▶ 3)  $g_i > 0$ , если  $f_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$

Введем следующие обозначения:

$D'$  — замыкание области  $D$ ;

$D(P)$  — расстояние от точки  $P$  до границы  $\Gamma(D)$ ;

$\Gamma_\varepsilon$  —  $\varepsilon$ -окрестность границы  $\Gamma$ ;

$S(P)$  — максимальная из сфер с центром в точке  $P$ , целиком лежащих в  $D'$ .

Цепь Маркова:

$p_0(r) = \delta(r - P_0)$  — плотность начального распределения.

$p(r, r'') = \delta p(r')$  — плотность перехода из  $r$  в  $r'$  — плотность равномерного распределения вероятностей на сфере  $S(r)$ .

$g(r) = 1$ , если  $r \in \Gamma_\varepsilon$  — вероятность обрыва цепи равна 1, если цепь попадает в  $\varepsilon$ -окрестность границы.

$g(r) = 0$ , если  $r \notin \Gamma_\varepsilon$  — в противном случае.

- ▶ Первая краевая задача Дирихле для уравнения Гельмгольца в ограниченной области  $D$  трехмерного евклидова пространства  $X$ :

$$\Delta u - cu = -g, u|_{\Gamma} = \psi(x)$$

- ▶ Решение этого уравнения в точке  $P_0 \in D$ :

$$u(P_0) = \int_{S(P_0)} \frac{d_0 \sqrt{c}}{4\pi d_0^2 \operatorname{sh}(d_0 \sqrt{c})} u(s) ds + \int_{|r-P_0| \leq d_0} \frac{\operatorname{sh}[(d_0 - |r-P_0|)\sqrt{c}]}{4\pi |r-P_0| \operatorname{sh}(d_0 \sqrt{c})} g(r) dr$$

то есть интегральное уравнение 2-го рода

$$u(r) = \int_D k(r, r') u(r') dr' + \varphi(r)$$

- ▶ Для решения задачи Дирихле в точке  $P_0 \in D$  строится цепь Маркова, которая называется «блуждание по сферам».

Также эту задачу можно решать через двойственные оценки, но после проведенных исследований стало понятно, что это не даст ожидаемых результатов.



- ▶ Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u - cu = -g, u|_{\Gamma} = \psi(x)$$

- ▶ Если заменить производные вторыми разделенными разностями, то получится система  $(L-1)^2$  линейных алгебраических уравнений вида

$$u = Au + F$$

или

$$u_{i,j} = \frac{1}{4+cl^2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + l^2 g_{i,j}), \quad 1 \leq i, j \leq L-1$$

- ▶ Для нахождения решения этой задачи в узле  $u_{i,j}$  строится цепь Маркова, названная «блужданием по сетке».

# Уравнение Гельмгольца. Обратное «блуждание по сетке»

- ▶ Задача Дирихле для однородного уравнения Гельмгольца в единичном квадрате двумерного пространства:

$$\Delta u - cu = 0, u|_{\Gamma} = \psi(x)$$

- ▶ Соответствующая ей система уравнений:

$$u = Au$$

Известно, что матрица  $A$  в этом случае является симметричной.

- ▶ Сопряженная система:

$$u^* = A^T u^*, \text{ но } A^T = A, \text{ тогда сопряженная система есть } u^* = Au^*.$$

- ▶ Учитывая условия согласования, сопряженной системе сопоставляется следующая цепь Маркова:

- 1) начальная точка траектории моделируется на границе области пропорционально значению искомой функции;
- 2) с вероятностью единица траектория уходит внутрь области;
- 3) на каждом шаге с вероятностью  $1/(4 + cl^2)$  траектория переходит в один из соседних узлов, а с вероятностью  $1 - 4/(4 + cl^2)$  обрывается; также обрыв траектории происходит при попадании на границу области;
- 4) попадая в какой-либо узел, счетчик этого узла увеличивается на

$$\frac{l}{4 + cl^2} \int_{\Gamma} \psi dx$$

# Уравнение Гельмгольца. Обратное «блуждание по сетке». Результаты

Задача Дирихле для однородного уравнения Гельмгольца в единичном квадрате двумерного пространства:

$$\Delta e^{\sqrt{\frac{c}{2}}(x+y)} - ce^{\sqrt{\frac{c}{2}}(x+y)} = 0, u|_{\Gamma} = e^{\sqrt{\frac{c}{2}}(x+y)}.$$

Область:  $D = \{(x, y) \mid x \in [0; 1], y \in [0; 1]\}$ .

Оценивалось решение этой задачи в квадратах  $1/10$  на  $1/10$ , шаг сетки  $l = 0, 1$ .  
Результаты приведены в слое  $x \in [0; 1], y \in [0, 5; 0, 6]$ .

$c = 1$ :

$T_i$	0,015	0,016	0,018	0,019	0,020	0,022	0,023	0,025	0,027	0,029
$\hat{I}_i$	0,014	0,017	0,025	0,020	0,026	0,034	0,031	0,031	0,029	0,031
$\hat{\sigma}_i$	0,002	0,003	0,004	0,003	0,004	0,005	0,005	0,005	0,003	0,003

$c = 10$ :

$T_i$	0,038	0,048	0,060	0,075	0,094	0,117	0,147	0,184	0,230	0,287
$\hat{I}_i$	0,040	0,031	0,063	0,040	0,060	0,118	0,140	0,185	0,231	0,308
$\hat{\sigma}_i$	0,010	0,009	0,019	0,009	0,020	0,025	0,027	0,031	0,031	0,025

$T_i$  — теоретическое решение (интеграл по квадрату  $[(i-1)/10; i/10] \times [0, 5; 0, 6], i = 1, \dots, 10$ ).

$\hat{I}_i$  — оценка решения.

$\hat{\sigma}_i$  — выборочное стандартное отклонение.

# Уравнение Гельмгольца. «Гибрид блужданий по сетке и сферам»

Основная проблема при моделировании «блуждания по сферам» — выход траектории с границы области.

Решение проблемы — начинать моделирование траектории по сетке, а дальше переходить на сферы.

$D = \{(x, y) \mid x \in [0; 1], y \in [0; 1]\}$ ,  $\varepsilon = 0,05$ ,  $l = r = 0,1$ . Результаты приведены в слое  $x \in [0; 1]$ ,  $y \in [0,5; 0,6]$ .

$c = 1$ :

$T_i$	0,015	0,016	0,018	0,019	0,020	0,022	0,023	0,025	0,027	0,029
$\hat{T}_i$	0,016	0,018	0,019	0,018	0,014	0,017	0,024	0,025	0,027	0,035
$\hat{\sigma}_i$	0,002	0,003	0,004	0,004	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004	0,003

$c = 10$ :

$T_i$	0,038	0,048	0,060	0,075	0,094	0,117	0,147	0,184	0,230	0,287
$\hat{T}_i$	0,040	0,068	0,078	0,094	0,124	0,117	0,124	0,147	0,220	0,283
$\hat{\sigma}_i$	0,010	0,020	0,020	0,027	0,038	0,032	0,023	0,024	0,029	0,025

$T_i$  — теоретическое решение (интеграл по квадрату  $[(i-1)/10; i/10] \times [0,5; 0,6]$ ,  $i = 1, \dots, 10$ ).

$\hat{T}_i$  — оценка решения.

$\hat{\sigma}_i$  — выборочное стандартное отклонение.

- ▶ Было исследовано «блуждания по сферам». В ходе исследования было выявлено, что построение обратного алгоритма представляется достаточно сложным из-за наличия большого числа параметров.
- ▶ Построен алгоритм «блуждания по сетке» для решения первой краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.
- ▶ Построен «гибрид блужданий по сетке и сферам» для решения первой краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.

Оба этих алгоритма дают неплохие оценки решения рассматриваемых задач и могут применяться в дальнейшем для решения более сложных вопросов математической физики.