Кафедра статистического моделирования
Дипломная работа
студентки 522-й группы Ротенко Марии Михайловны

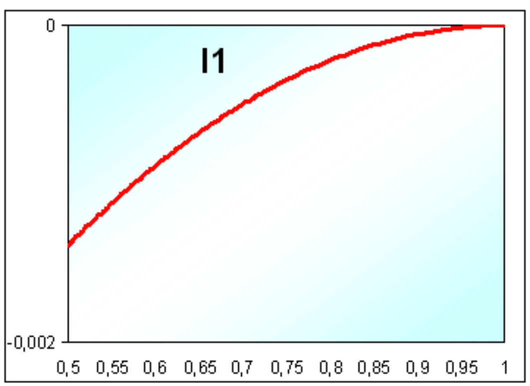
Оценивание параметров степенного гамма распределения с приложениями

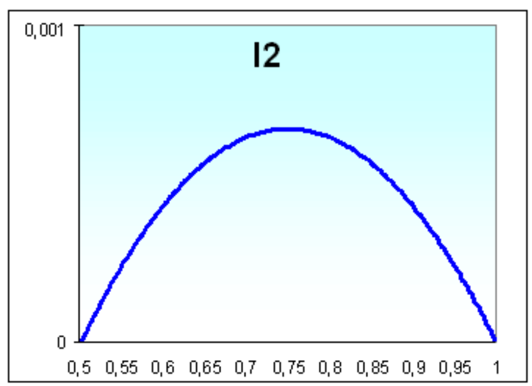
Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Алексеева Н. П.
Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Пепелышев А. Н.

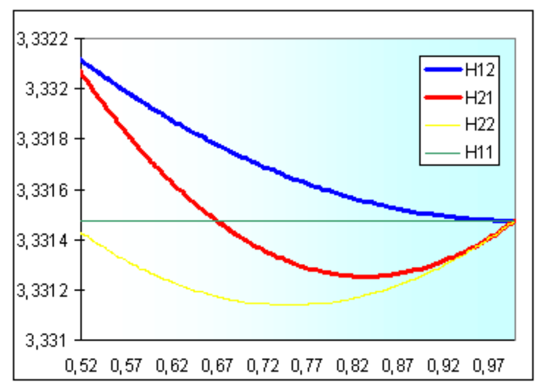
Санкт-Петербург
2006 г.

Введение

- $\xi_0 \sim \gamma(\alpha,\lambda)$ с $f(x|\alpha,\lambda) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}$, где α–параметр масштаба, λ–параметр формы $\Rightarrow \xi_1 = \xi_0^{\frac{1}{\kappa}} \sim G(\alpha,\lambda,\kappa)$ с $f_1(x|\alpha,\lambda,\kappa) = \frac{\kappa\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\kappa\lambda-1} e^{-\alpha x^\kappa}$.
  При этом, $\nu = \alpha\xi_1^\kappa \sim \gamma(1,\lambda)$, $\mathbf{cov}(\xi_1^\kappa, \ln \xi_1^\kappa) = \alpha^{-1}$.
- $f_2(x) \overset{\delta_1}{\triangleright} f_1(x)$, если $H_{12} - H_{11} < \delta_1$.
  $H_{ij} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln f_j(x)\, f_i(x) dx$ –смешанная дифференциальная энтропия.
- Если $f_2(x) \overset{\delta_1}{\triangleright} f_1(x)$, а $f_2(x) \overset{\delta_2}{\triangleleft} f_1(x)$ одновременно, то: $f_1(x) \overset{\delta}{\bowtie} f_2(x)$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$
- Информационные метрики разнообразия распределений
  $I_1 = (H_{12} - H_{11}) + (H_{21} - H_{22})$, $I_2 = (H_{12} - H_{21}) + (H_{11} - H_{22})$.







- $H_{12} - H_{21} \approx H_{11} - H_{22}$

Параметры синонимичных распределений

- Смешанная дифференциальная энтропия для степенных гамма распределений $\xi_1 \sim G(\alpha_1, \lambda_1, \kappa_1)$, $\xi_2 \sim G(\alpha_2, \lambda_2, \kappa_2)$.

$$H_{12} = \ln \Gamma(\lambda_2) - \ln \kappa_2 - \lambda_2 \ln \alpha_2 - (\kappa_2 \lambda_2 - 1)\mathbf{E} \ln \xi_1 + \alpha_2 \mathbf{E} \xi_1^{\kappa_2}$$

- *Теорема (Алексеевой):* Система нормальных уравнений имеет тривиальное точное решение при $\kappa_2 = \kappa_1$.

$$\begin{cases} \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_2} = 0 \\ \frac{\partial H_{12}}{\partial \lambda_2} = 0 \\ \frac{\partial H_{12}}{\partial \kappa_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda_2}{\alpha_2} = \mathbf{E}\xi_2^{\kappa_2} = \mathbf{E}\xi_1^{\kappa_2} \\ \mathbf{E} \ln \xi_1 = \mathbf{E} \ln \xi_2 \\ \alpha_2^{-1} = \mathbf{cov}(\xi_2^{\kappa_2}, \ln \xi_2^{\kappa_2}) = \mathbf{cov}(\xi_1^{\kappa_2}, \ln \xi_1^{\kappa_2}). \end{cases} \tag{1}$$

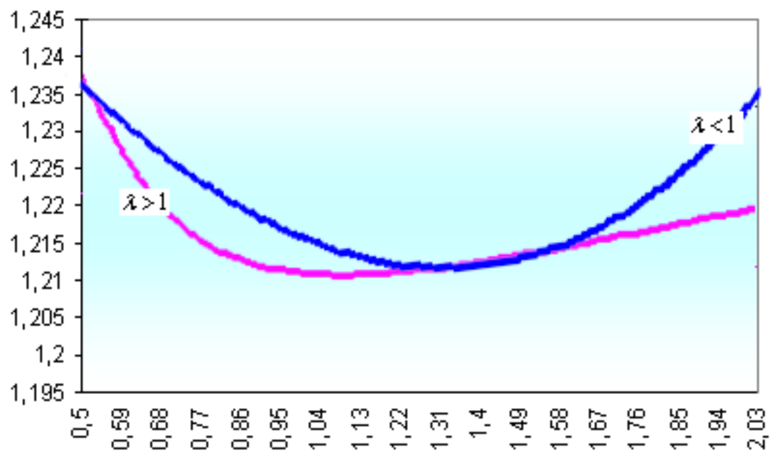
- *Следствие:* $G(\alpha_2, \lambda_2, \kappa_2) \triangleright G(\alpha_1, \lambda_1, \kappa_1)$. Тогда α_2 и λ_2 выражаются для любого $\kappa_2 > 0$ через α_1, λ_1 и κ_1 следующим образом:

$$\lambda_2 = \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\left(\psi\left(\lambda_1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right) - \psi(\lambda_1)\right)\right)^{-1}, \ \alpha_2 = \frac{\lambda_2 \alpha_1^{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} \Gamma(\lambda_1)}{\Gamma(\lambda_1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1})},$$

где $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ гамма-функция, $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ дигамма-функция.

Вычисление параметра κ номинативного распределения

- *Теорема (Алексеевой):* Пусть $G(\alpha,\lambda,\kappa)$ синонимично $\gamma(\alpha_0,\lambda_0)$. $H(\kappa,\alpha,\lambda)$ энтропия $G(\alpha,\lambda,\kappa)$, $\alpha=\alpha(\kappa,\alpha_0,\lambda_0)$, $\lambda=\lambda(\kappa,\alpha_0,\lambda_0)$. Тогда
  - $H(\kappa,\alpha_0,\lambda_0)=\lambda+\ln\Gamma(\lambda)-\lambda\psi(\lambda)-\ln\kappa+\frac{\psi(\lambda)-\ln\alpha}{\kappa}$,
  - $\frac{d}{d\kappa}H(\kappa,\alpha_0,\lambda_0)$ не зависит от α_0,
  - $H(\kappa,\alpha_0,\lambda_0)$ имеет локальный минимум в точке $\kappa=\tilde\kappa$, $\tilde\kappa<1$ при $\lambda_0>1$, $\tilde\kappa>1$ при $\lambda_0<1$ и $\tilde\kappa=1$ при $\lambda_0=1$,
  - $\frac{dI_2}{d\kappa}(\tilde\kappa)=0$ при $\lambda\to\infty$.



- Параметр κ ищется как решение уравнения $\frac{d}{d\kappa}H(\kappa,\alpha_0,\lambda_0)=0$.

Алгоритмы вычисления специальных функций

- Гамма функция $\Gamma(x)$

$$\ln\Gamma(x) = -\sum_{k=0}^{\theta-1}\ln(x+k)+(x+\theta-\tfrac{1}{2})\ln(x+\theta)-(x+\theta)+\tfrac{1}{2}\ln(2\pi)+\sum_{m=1}^{N}\frac{B_{2m}}{2m(2m-1)(x+\theta)^{2m-1}}$$

- Ди-гамма функции $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

$$\psi(x) = -\sum_{k=0}^{\theta-1}\frac{1}{x+k}+\ln(x+\theta)-\frac{1}{2(x+\theta)}-\sum_{m=1}^{N}\frac{B_{2m}}{2m(x+\theta)^{2m}}$$

- Три-гамма функции $\varphi(x) = \psi'(x)$

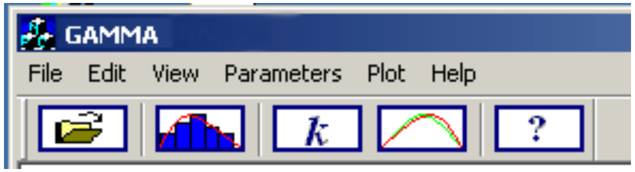
$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\theta-1}\frac{1}{(x+k)^2}+\frac{1+\sqrt{1+4(x+\theta)^2}}{2(x+\theta)^2}$$

B_{2m} – числа Бернулли,

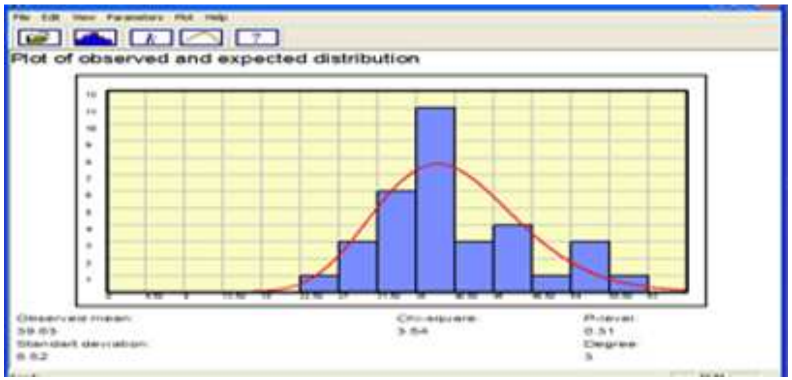
N – точность ассимптотического выражения,

θ – точность приближения к ассимптотическому выражению.

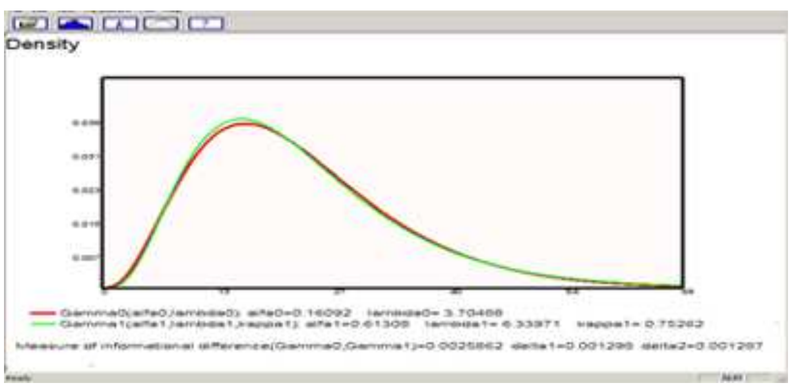
Описание программы

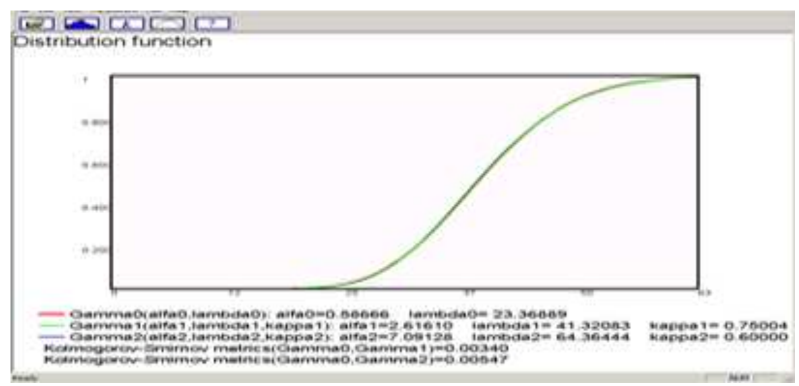


- Гистограмма и вычисление параметров номинативного распределения

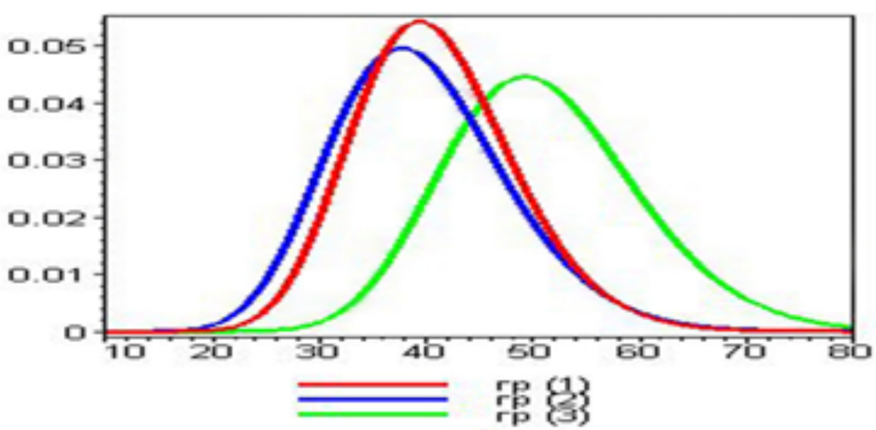


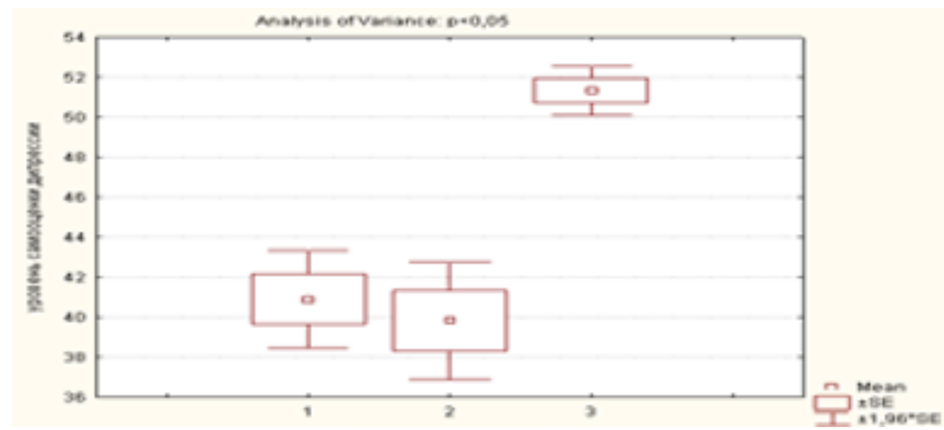
- Графики плотностей и функций распределенния синонимичных распределений





- Проверка однородности данных уровня самооценки депрессии по методу Зунга.
  - (1) Студенты
    ср. возраст: 18.18±0.82 , ср. уровень самооценки: 40.89±7.69
  - (2) Работающие
    ср. возраст: 41.69±9.77 , ср. уровень самооценки: 39.83±8.65
  - (3) Пенсионеры
    ср. возраст: 61.29±9.43 , ср. уровень самооценки: 51.34±9.21





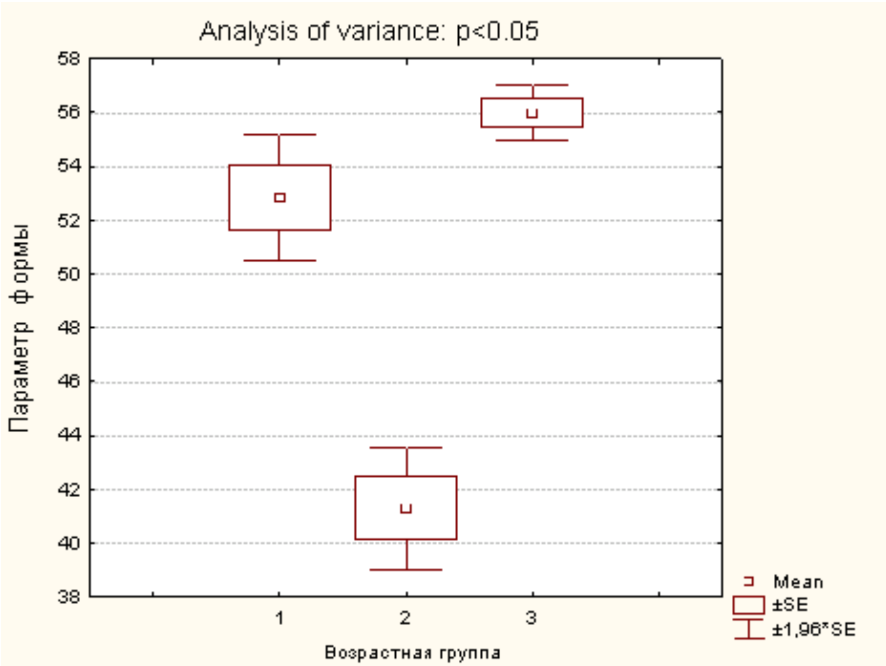
Проверка однородности параметров распределения

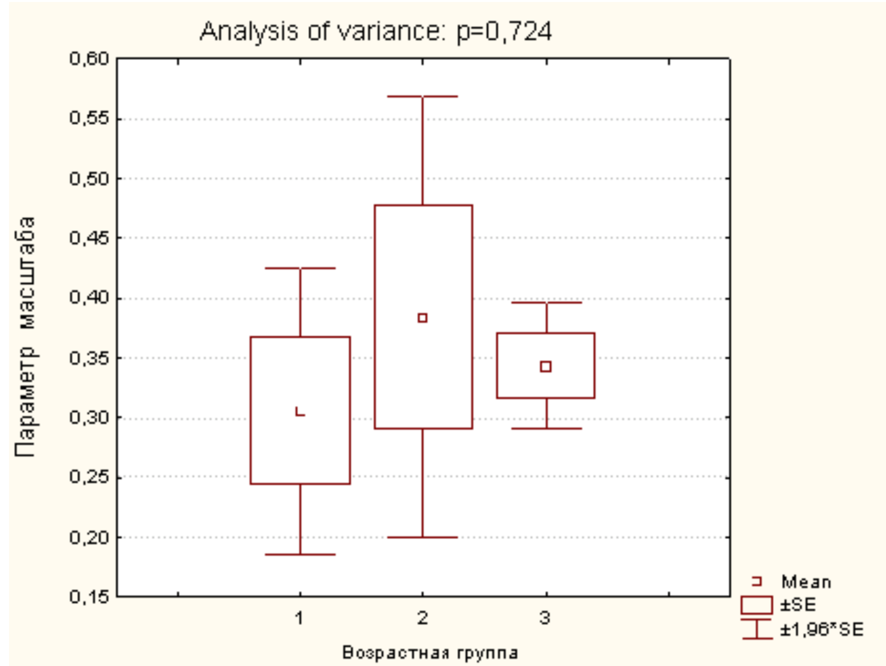
Параметр формы λ

$\nu = \alpha\xi^{\kappa}$

Параметр масштаба $\beta = \alpha^{-1}$

$\zeta = (\xi^{\kappa} - \mathbf{E}\xi^{\kappa})(\ln \xi^{\kappa} - \mathbf{E}(\ln \xi^{\kappa}))$

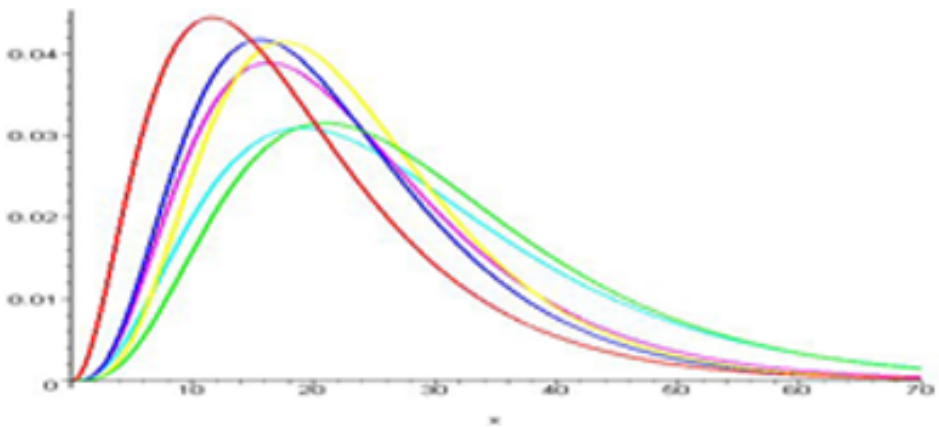


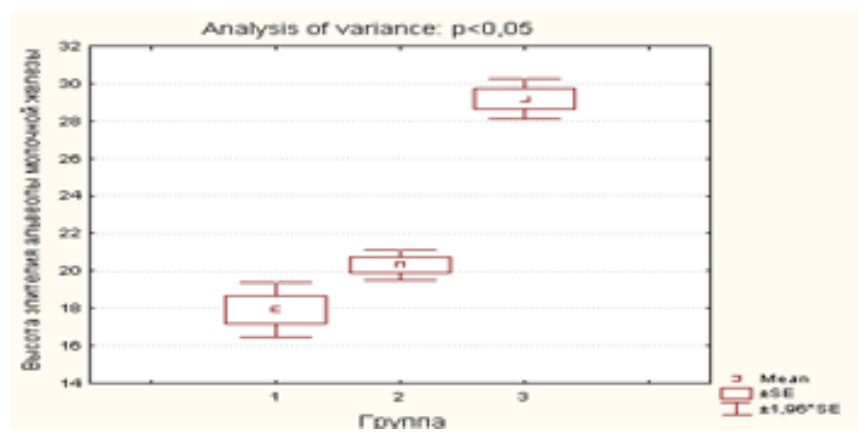


- Интерпретация параметров λ и α
  - параметр формы – самооценка количества источников депрессии,
  - параметр масштаба – мера реакции на эти источники.

Влияние простагландина на лактацию

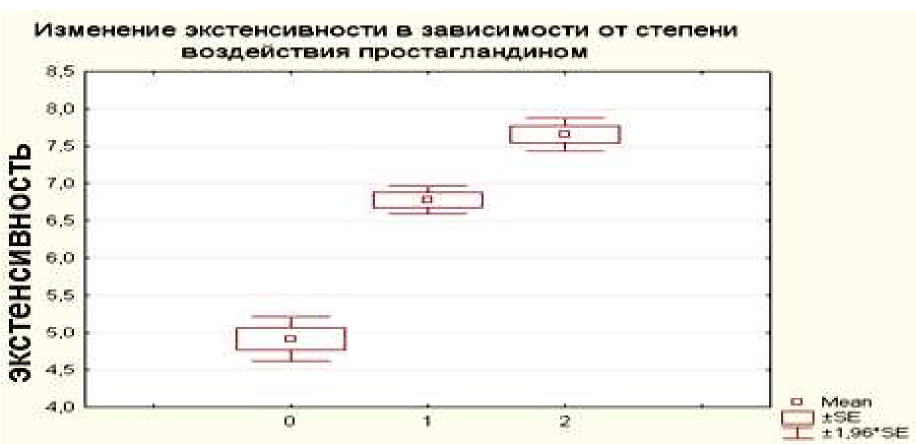
- Исследование влияния простагландина на лактацию у лабораторных мышей Исходными являются данные (1638 измерений) о высоте секреторного эпителия альвеолы молочной железы 9 лактирующих мышей, которым в разные периоды лактации вводился простагландин $F_{2\alpha}$.
  - (1) контрольная группа
  - (2) состоит из трёх животных, которым вводился простагландин в период лактопоэза (на 13 день)
  - (3) состоит из четырёх животных, которым вводился простагландин в период лактогенеза (на 3 день)





Интерпретация параметров α^{-1}, λ и κ ($\mathbf{E}\xi^{\kappa} = \alpha^{-1}\lambda$)

α (scale parameter) – интенсивность,
λ (shape parameter) – экстенсивность,
κ (power parameter) – энергичность.



Степень воздействия простагландина: 0 – гр (1), 1 – гр (3), 2 – гр (2).