Аналитический подход к решению минимаксных задач планирования эксперимента

Торбеева Ольга Юрьевна, гр. 14.Б02-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Шпилев П.В.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. Мелас В.Б.

СтатМод

Санкт-Петербург
2018 г.

Пусть результаты эксперимента описываются уравнением регрессии:

$$y_i = \eta(x_i, \theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где

- $\eta(x, \theta)$ — функция регрессии, известная с точностью до вектора параметров $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$;
- $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{X}$ — условия проведения эксперимента;
- $y_1, \ldots, y_n$ — результаты наблюдений;
- $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ — независимые случайные ошибки.

Определение

Планом эксперимента *называется дискретная вероятностная мера на множестве планирования $\mathfrak{X}$ с конечным носителем, задаваемая таблицей:*

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_n \end{pmatrix},$$

- x_i — *точки, в которых проводятся измерения;*
- ω_i — *доля наблюдений, проводимых в точке* x_i, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, $\omega_i > 0$.

Рассмотрим тригонометрические регрессионные модели на множестве планирования $\mathfrak{X} = [0, 2\pi)$:

$$\eta_1(x, \theta_1) = \theta_{1,0} + \sum_{i=1}^{m} \big(\theta_{1,2i-1} \sin(ix) + \theta_{1,2i} \cos(ix)\big),$$

$$\eta_2(x, \theta_2) = \theta_{2,0} + \sum_{i=1}^{m-2} \big(\theta_{2,2i-1} \sin(ix) + \theta_{2,2i} \cos(ix)\big).$$

Введем разность моделей:

$$\bar{\eta}(x, q, b) = b_1 \cos(mx) + b_2 \sin(mx) + b_3 \cos((m-1)x) + b_4 \sin((m-1)x) + \\ + \sum_{i=1}^{m-2} \big(q_{2i} \cos(ix) + q_{2i-1} \sin(ix)\big) + q_0.$$

В дальнейшем будем рассматривать только случай $b_1^2 + b_2^2 = 1$.

Определения T-оптимальных планов

Определение

*План ξ^* называется **Т-оптимальным планом**, если*

$$\xi^* = \arg\max_{\xi} \min_{q\in\mathbb{R}^{2m-3}} \int_{\mathfrak{X}} \bar\eta(x,q,b)^2 \xi(dx),$$

$$R_\xi(b) = \min_{q\in\mathbb{R}^{2m-3}} \int_{\mathfrak{X}} \bar\eta(x,q,b)^2 \xi(dx), \quad \bar R(b) = \max_{\xi} R_\xi(b).$$

Определение

1. *План ξ^* называется **байесовским Т-оптимальным планом**, если он максимизирует величину*
$$\int_{\mathbb{R}^4} R_\xi(b)\,\bar\pi(db),$$
где $\bar\pi$ — априорное распределение параметра b.
2. *План ξ^* называется **стандартизированным максиминным Т-оптимальным планом**, если он максимизирует величину эффективности*
$$\mathrm{eff}(\xi) = \inf_{b\in\mathfrak{B}\subset\mathbb{R}^4} \frac{R_\xi(b)}{\bar R(b)}.$$

Определение (Сильно симметричный план)

Будем говорить, что план ξ **сильно симметричен относительно** α*, если он одновременно симметричен относительно* α *и* $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Определение

Будем говорить, что $\bar{\eta}(x, q, b)$ *является*

- *разностью типа* cos-cos *со сдвигом* α*, если при* $q = 0$ *она имеет вид:*
$$\bar{\eta}(x, 0, b) = \cos(m(x-\alpha)) + b\cos((m-1)(x-\alpha)) =: CC_{m,\alpha}(x, b).$$
- *разностью типа* cos-sin *со сдвигом* α*, если ее степень* m *четна и при* $q = 0$ *она имеет вид:*
$$\bar{\eta}(x, 0, b) = \cos(m(x-\alpha)) + b\sin((m-1)(x-\alpha)) =: CS_{m,\alpha}(x, b).$$
- *разностью типа* sin-cos *со сдвигом* α*, если ее степень* m *нечетна и при* $q = 0$ *она имеет вид:*
$$\bar{\eta}(x, 0, b) = \sin(m(x-\alpha)) + b\cos((m-1)(x-\alpha)) =: SC_{m,\alpha}(x, b).$$

Лемма (О виде R_ξ)

Для разностей cos-cos, sin-cos, cos-sin *и сильно симметричного относительно* α *плана* ξ *справедливо следующее: выражение*

$$\mathcal{M}_{m,\alpha}(x,b) + \sum_{i=0}^{m-2} (q^*_{2i}\cos(ix) + q^*_{2i+1}\sin(ix)),$$

где

$$(q^*_0, \dots, q^*_{2m-3}) =$$
$$= \arg \min_{q \in \mathbb{R}^{2m-2}} \int_{\mathfrak{X}} \left| \mathcal{M}_{m,\alpha}(x,b) + \sum_{i=0}^{m-2} (q_{2i}\cos(ix) + q_{2i+1}\sin(ix)) \right|^2 d\xi,$$

является многочленом от $\cos(x-\alpha)$ *для* $\mathcal{M}_{m,\alpha} = CC_{m,\alpha}$ *и многочленом от* $\sin(x-\alpha)$ *для* $\mathcal{M}_{m,\alpha} = SC_{m,\alpha}$ *и* $\mathcal{M}_{m,\alpha} = CS_{m,\alpha}$.

Лемма (О $\bar{R}(b)$)

Выражение

$$\mathcal{M}_{m,\alpha}(x,b) + \sum_{i=0}^{m-2} (q^*_{2i}\cos(ix) + q^*_{2i+1}\sin(ix)),$$

где

$$(q^*_0, \ldots, q^*_{2m-3}) =$$
$$= \arg \min_{q\in\mathbb{R}^{2m-2}} \max_{x\in\mathfrak{X}} \left| \mathcal{M}_{m,\alpha}(x,b) + \sum_{i=0}^{m-2} (q_{2i}\cos(ix) + q_{2i+1}\sin(ix)) \right|^2,$$

является многочленом от $\cos(x-\alpha)$ *для* $\mathcal{M}_{m,\alpha} = CC_{m,\alpha}$ *и многочленом от* $\sin(x-\alpha)$ *для* $\mathcal{M}_{m,\alpha} = SC_{m,\alpha}$ *и* $\mathcal{M}_{m,\alpha} = CS_{m,\alpha}$*. При этом*

$$\bar{R}(b) = \max_{x\in\mathfrak{X}} \left| \mathcal{M}_{m,\alpha}(x,b) + \sum_{i=0}^{m-2} (q^*_{2i}\cos(ix) + q^*_{2i+1}\sin(ix)) \right|^2.$$

Предполагаем $m \geq 2$.
Рассмотрим нули $-1 = t_0 < \ldots < t_m = 1$ многочлена

$$(t^2 - 1)(U_{m-1}(t) + \beta U_{m-3}(t)).$$

Положим $\varphi_k = \arccos(t_k)$, $k = 0, \ldots, m$,

$$p_0 = p_m = \frac{1+\beta}{2[m + \beta(m-2)]}, \quad p_k = \frac{1}{2}\left[m - 1 - \frac{(1+\beta)U_{m-2}(t_k)}{U_m(t_k) + \beta U_{m-2}(t_k)}\right]^{-1}.$$

Определим план $\xi_{m,\beta,\alpha}$:

$$\xi_{m,\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} \varphi_m + \alpha & \ldots & \varphi_1 + \alpha & \varphi_0 + \alpha & 2\pi - \varphi_1 + \alpha & \ldots & 2\pi - \varphi_{m-1} + \alpha \\ p_m & \ldots & p_1 & p_0 & p_1 & \ldots & p_{m-1} \end{pmatrix}.$$

A1. $\bar{\pi}(db)$ — произвольное распределение, симметричное относительно нуля, с конечным математическим ожиданием (тогда оно равно нулю)

$$\xi_{m,\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} \varphi_m + \alpha & \dots & \varphi_1 + \alpha & \varphi_0 + \alpha & 2\pi - \varphi_1 + \alpha & \dots & 2\pi - \varphi_{m-1} + \alpha \\ p_m & \dots & p_1 & p_0 & p_1 & \dots & p_{m-1} \end{pmatrix}$$

Теорема (О байесовских T-оптимальных планах)

При $\beta = \min\{1, \int b^2\,\bar{\pi}(db)\}$ *планы*

- $\xi_{m,\beta,\alpha}$ *для разности* cos-cos,
- $\xi_{m,\beta,\alpha+\frac{\pi}{2}}$ *для разности* cos-sin *и четного* m,
- $\xi_{m,\beta,\alpha+\frac{\pi}{2}}$ *для разности* sin-cos *и нечетного* m

есть единственные байесовские T-оптимальные планы на множестве сильно симметричных относительно α планов при априорном распределении $\bar{\pi}(db)$, удовлетворяющем предположению **A1**.

A2. $\mathfrak{B}$ — произвольное замкнутое множество из $\mathbb{R}$, симметричное относительно нуля

$$\xi_{m,\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} \varphi_m + \alpha & \dots & \varphi_1 + \alpha & \varphi_0 + \alpha & 2\pi - \varphi_1 + \alpha & \dots & 2\pi - \varphi_{m-1} + \alpha \\ p_m & \dots & p_1 & p_0 & p_1 & \dots & p_{m-1} \end{pmatrix}$$

Теорема (О максиминных T-оптимальных планах)

При $\beta = 1 - 2h^*$ планы

- $\xi_{m,\beta,\alpha}$ *для разности* $\cos$-$\cos$,
- $\xi_{m,\beta,\alpha+\frac{\pi}{2}}$ *для разности* $\cos$-$\sin$ *и четного* m,
- $\xi_{m,\beta,\alpha+\frac{\pi}{2}}$ *для разности* $\sin$-$\cos$ *и нечетного* m

есть единственные стандартизированные максиминные T-оптимальные планы на множестве сильно симметричных относительно α планов с множеством $\mathfrak{B}$, удовлетворяющим предположению **A2**, *где h^* — единственная на интервале $[0, \frac{1}{2}]$ точка максимума функции*

$$\inf_{b \in \mathfrak{B}} \frac{b^2 + h}{\bar{R}(b)}(1 - h).$$

Рассмотрим один из простейших случаев, когда разность моделей не сводится к полиному. Пусть эта разность равна

$$\bar{\eta}(x, b, q) = \sin 2x + b \cos x + q.$$

- При $\mathfrak{B} = [-d, d]$ опорные точки максиминных планов симметричны как относительно 0, так и относительно $\frac{\pi}{2}$, а веса равны между собой
- При $d \geq d_* \approx 1.15$ максиминный план постоянен и равен

$$\xi_{d_*} = \begin{pmatrix} 0.62 & 2.57 & 3.76 & 5.67 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix},$$

при этом величина эффективности $\mathrm{eff}(\xi_{d_*}) \approx 0.5$

При $d < d_*$ максиминные планы зависят от d, а $\mathrm{eff}(\xi_d)$ монотонно возрастает с уменьшением d и достигает 1 в нуле.

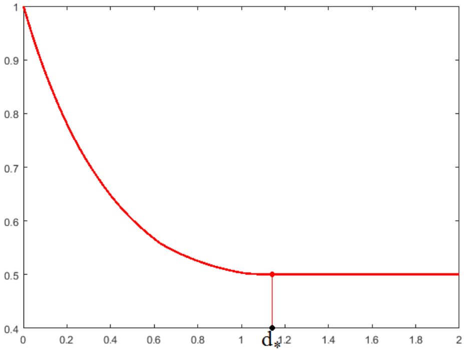

График зависимости величины эффективности максиминных планов от d.

- Исследована задача дискриминации тригонометрических регрессионных моделей, отличающихся на два порядка.
- Несколько типов таких задач удалось свести к задаче дискриминации полиномиальных моделей.
- Для нескольких задач, сводящихся к полиномиальным моделям, и одной из задач, не сводящейся к полиномиальным моделям, решение получено численно.