«Статистический анализ ошибок при численном решении систем квазилинейных уравнений»

Фидельман Дмитрий Андреевич, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Христинич В.Б.
Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Ермаков С.М.

Санкт-Петербург
2011г.

Цели работы

Цели работы:

- Статистический анализ ошибок при численном решении систем линейных и квазилинейных уравнений в зависимости от параметров устойчивости на примере решения уравнений акустики.
- Исследование поведения статистических характеристик решения в зависимости от возмущения начальных условий по заданному вероятностному закону.
- Решение граничной задачи для уравнений акустики в случае упругого отражения акустической волны.

Уравнения газовой динамики:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + 1/\rho\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} + \rho a^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

В матричном виде:

$$I\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ P \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho a^2 & u \end{pmatrix}.$$

Характеристическая форма уравнений (1):

$$\mathbf{L}^k\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_k\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right) = 0, \tag{3}$$

где λ_k — собственные числа матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{L}^k$ — её левые собственные вектора.

Уравнения акустики

Пусть $p = p_0 + p'$ — давление в среде, $a = a_0 + a'$ — скорость звука в ней, $\rho = \rho_0 + \rho'$ — её плотность, $u = u_0 + u'$ — скорость возмущения, где $\rho_0, p_0,\ a_0$ и u_0 — характеристики среды, константы, $\rho', p',\ a'$ и u' - значения малых возмущений. Уравнения акустики:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 a_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

В матричном виде:

$$I\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \text{ где } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\rho \\ \rho a^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Уравнения характеристик и соотношение на характеристиках

$$\frac{dx}{dt} = \pm a_0 \,, \qquad \pm\rho_0 a_0 du + dp = 0\,. \tag{6}$$

Из уравнений акустики следуют два волновых уравнения второго порядка для возмущения давления p и скорости возмущения среды u:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_0^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{7}$$

Двухшаговая схема Лакса-Вендроффа

Для решения системы уравнений акустики используется двухшаговая схема Лакса-Вендроффа.
Уравнения акустики в векторном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{B} = 0, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0} p \\ \rho_0 a_0^2 u \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Двухшаговая схема Лакса-Вендроффа:

$$\text{Шаг 1. } 2\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{A}_{i+1}^{n} + \mathbf{A}_{i}^{n} - \nu(\mathbf{B}_{i+1}^{n} - \mathbf{B}_{i}^{n}), \tag{9}$$

$$\text{Шаг 2. } \mathbf{A}_{i+1}^{n} = \mathbf{A}_{i}^{n} - \nu(\mathbf{B}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}), \text{ где } \nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}. \tag{10}$$

Квазилинейный случай уравнений акустики:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 a^2(p)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $a^2(p) \approx a_0^2 + 2a_0 a' \approx \frac{\gamma(p_0+p)}{\rho_0}$.

Оценка моментов погрешности решения

Оценка моментов для значений решения $u_i = u(x_i)$ в узлах x_i:

- поиск выборочных моментов

$$a_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^j, \tag{12}$$

- определение центральных моментов

$$m_1 = a_1,\ m_2 = a_2 - a_1^2,\ m_3 = a_3 - 3a_2a_1 + 2a_1^3,\ m_4 = a_4 - 4a_3a_1 + 6a_2a_1^2 - 3a_1^4, \tag{13}$$

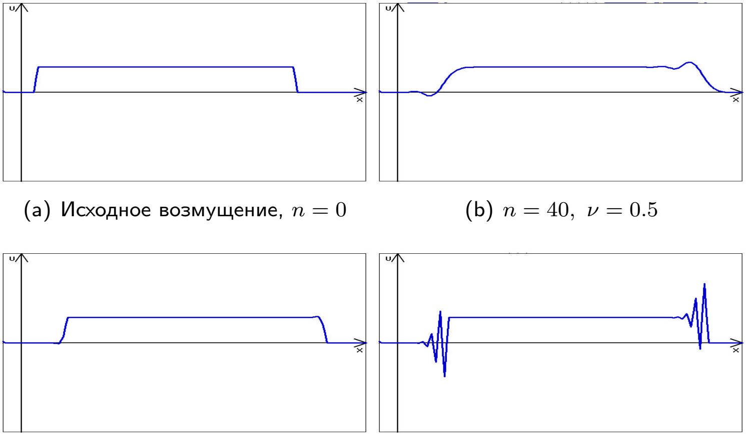
- вычисление несмещённых оценок моментов

$$\hat{m}_2 = \frac{n}{n-1}m_2,\ \hat{m}_3 = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}m_3, \hat{m}_4 = \frac{n(n^2-2n+3)m_4 - 3n(2n-3)m_2^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}, \tag{14}$$

- получение оценок характеристик решения и эмпирической плотности распределения

$$\bar{x} = \hat{m}_1,\ s^2 = \hat{m}_2,\ A = \frac{\hat{m}_3}{\hat{m}_2^{\frac{3}{2}}},\ K = \frac{\hat{m}_4}{\hat{m}_2^2} - 3,\ F_{N\Delta x}(x) = \frac{1}{N\Delta x}\sum_{l=1}^{N} I_{[x_i, x_i+\Delta x)}(u_l). \tag{15}$$

Изменения формы возмущения скорости в зависимости от времени, линейный случай



(a) Исходное возмущение, $n = 0$

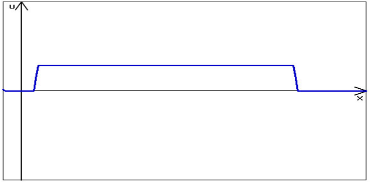
(b) $n = 40, \ \nu = 0.5$

(c) $n = 200, \ \nu = 0.999$

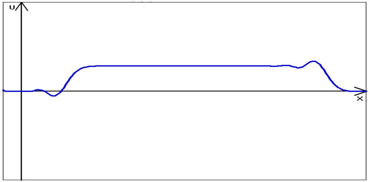
(d) $n = 20, \ \nu = 1.03$

Рис.: Изменения формы возмущения при различных значениях коэффициента ν в моменты времени n для линейной задачи.

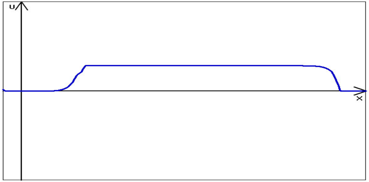
Изменения формы возмущения скорости в зависимости от времени, квазилинейный случай



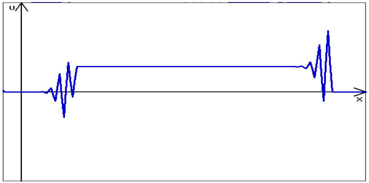
(a) Исходное возмущение, $n = 0$



(b) $n = 40, \ \nu = 0.5$



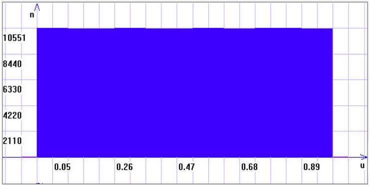
(c) $n = 200, \ \nu = 0.999$



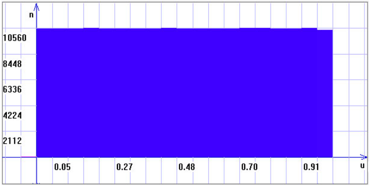
(d) $n = 20, \ \nu = 1.03$

Рис.: Изменения формы возмущения при различных значениях коэффициента ν в моменты времени n для квазилинейной задачи.

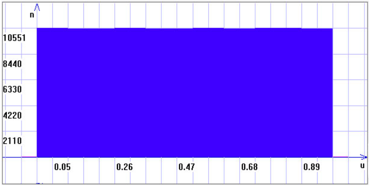
Гистограммы результатов статистических испытаний в линейном случае



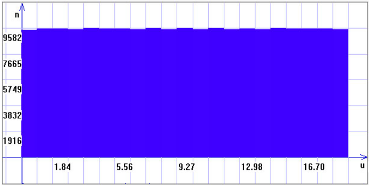
(a) $n = 0$



(b) $\nu = 0.5$



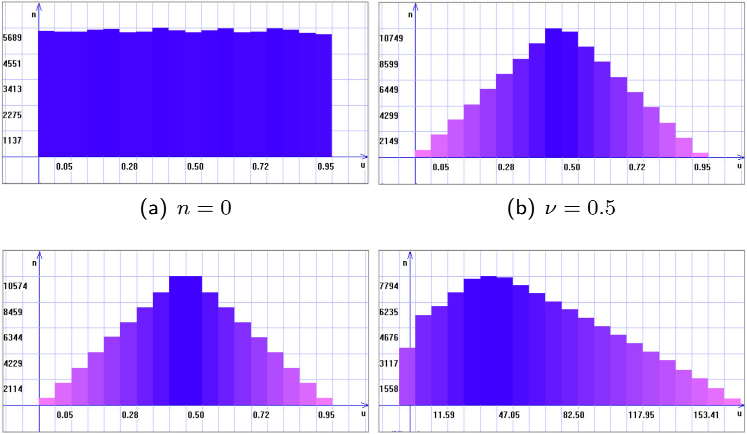
(c) $\nu = 0.999$



(d) $\nu = 1.03$

Рис.: Гистограммы возмущения решения в случае равномерно распределённых на [0,1] начальных условий, линейный случай.

Гистограммы результатов статистических испытаний, квазилинейный случай



(a) $n = 0$

(b) $\nu = 0.5$

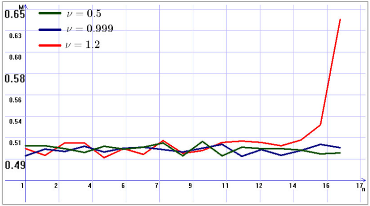
(c) $\nu = 0.999$

(d) $\nu = 1.03$

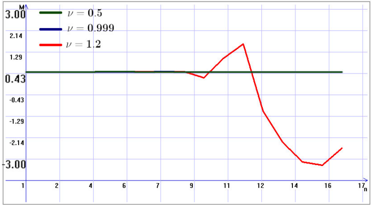
Рис.: Гистограммы возмущения решения в случае равномерно распределённых на [0,1] начальных условий, квазилинейный случай.

Графики зависимости среднего и дисперсии от времени.

Среднее, $n = 17,\ N = 10000$:

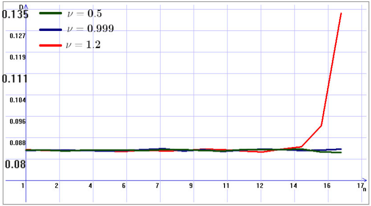


(a) линейная задача

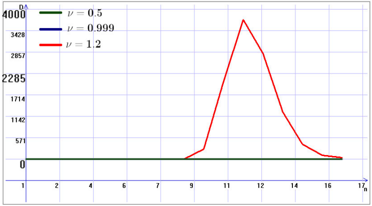


(b) нелинейная задача

Дисперсия, $n = 17,\ N = 10000$:

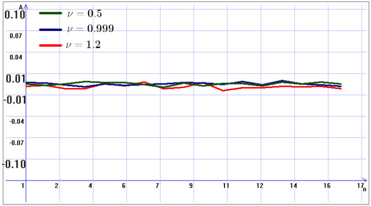


(c) линейная задача

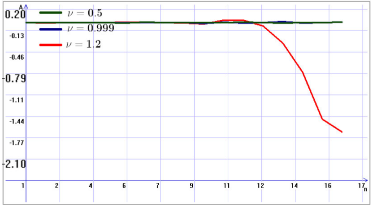


(d) нелинейная задача

Асимметрия, $n = 17$, $N = 10000$:

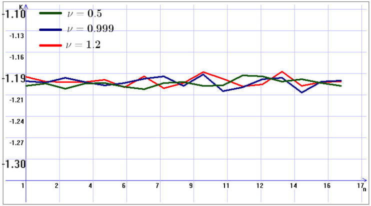


(e) линейная задача

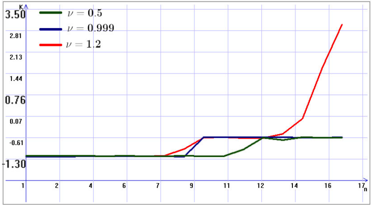


(f) нелинейная задача

Эксцесс, $n = 17$, $N = 10000$:



(g) линейная задача

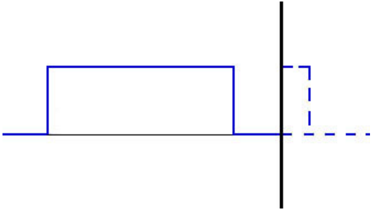


(h) нелинейная задача

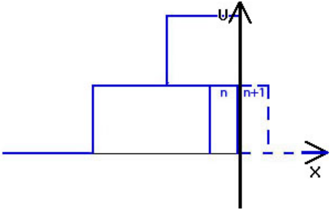
Решение граничной задачи

Упругое отражение акустической волны. На границе происходит скачок и, следовательно, разрыв решения.

- Граница окружается контуром, который сжимается до одной ячейки, находящейся за рабочей областью, т.е в границе. Появляется фиктивная ячейка.
- На фиктивную ячейку накладываются конкретные условия, соответствующие физической картине процесса (значение скорости возмущения u меняет знак, давление p сохраняется, меняется направление характеристики).
- После отражения волны производится расчёт по двухшаговой схеме Лакса-Вендроффа с измененными параметрами.



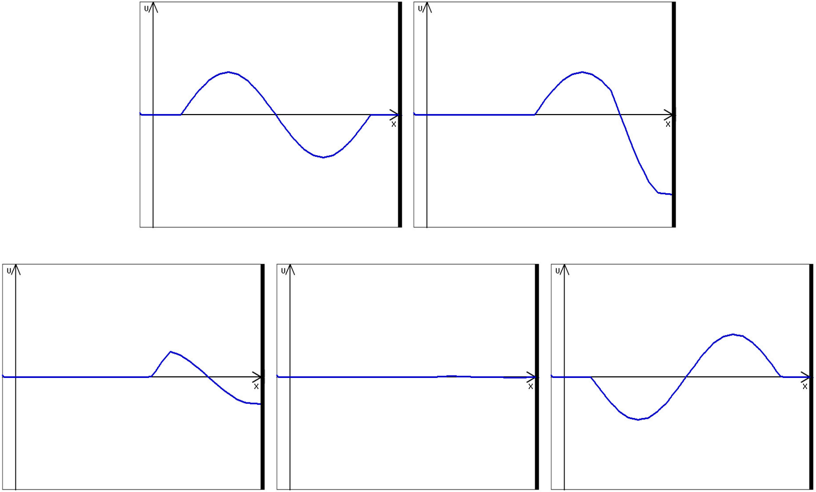
(i) До и после падения



(j) В процессе взаимодействия

Результаты построения отраженной волны

В качестве демонстрации работы метода приведён пример упругого отражения акустической волны, начальными данными для которой выбран период синусоиды:



Заключение

Результаты работы:

- Проведён статистический анализ ошибок при решении систем линейных и квазилинейных уравнений на примере решения уравнений акустики.
- Исследовано поведение статистических характеристик решения в зависимости от возмущения начальных условий по заданному вероятностному закону.
- Решена граничная задача для уравнений акустики в случае упругого отражения акустических волн различной формы.
- Разработаны алгоритмы и программы для получения вышеперечисленных результатов, которые позволяют просматривать решения в различных режимах, легко менять форму начального возмущения и проводить статистический анализ решения.

Спасибо за внимание!