Программный комплекс по обучению моделированию систем

Табала Татьяна Сергеевна, 522-я группа

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д. ф.-м. н., профессор Ю. А. Сушков
Рецензент: младший научный сотрудник Г. С. Тамазян

Санкт-Петербург
2014г.

Постановка задачи

Цель.

Создание обучающей программы для студентов, которая помогала бы решать задачи, представленные в курсе «Моделирования систем».

Задачи.

Исходя из заданной цели, в работе решаются следующие задачи:

1) создание классификации схем систем, рассматриваемых в рамках данной работы;

Постановка задачи

Цель.
Создание обучающей программы для студентов, которая помогала бы решать задачи, представленные в курсе «Моделирования систем».

Задачи.
Исходя из заданной цели, в работе решаются следующие задачи:

1) создание классификации схем систем, рассматриваемых в рамках данной работы;
2) описание каждой из полученных схем с помощью составления матриц переходов;

Постановка задачи

Цель.
Создание обучающей программы для студентов, которая помогала бы решать задачи, представленные в курсе «Моделирования систем».

Задачи.
Исходя из заданной цели, в работе решаются следующие задачи:

1) создание классификации схем систем, рассматриваемых в рамках данной работы;
2) описание каждой из полученных схем с помощью составления матриц переходов;
3) составление аналитических моделей полученных схем для дальнейшего использования их в программе;

Постановка задачи

Цель.
Создание обучающей программы для студентов, которая помогала бы решать задачи, представленные в курсе «Моделирования систем».

Задачи.
Исходя из заданной цели, в работе решаются следующие задачи:

1) создание классификации схем систем, рассматриваемых в рамках данной работы;
2) описание каждой из полученных схем с помощью составления матриц переходов;
3) составление аналитических моделей полученных схем для дальнейшего использования их в программе;
4) разработка программы, позволяющей студенту решать соответствующие задачи.

Предмет исследования

Пусть A и B – два аппарата, на которых могут выполняться операции Ω_1 или Ω_2 со средним временем τ_1 или τ_2. Рассмотрим различные дисциплины обслуживания заявок, поступающих в систему с плотностью (интенсивностью) λ – число заявок, поступающих в систему в единицу времени.

Кроме операции Ω_1 или Ω_2 рассмотрим также операцию Ω_{12}, которая означает выполнение первой и второй операции вместе, т.е $\Omega_{12} = \Omega_1 + \Omega_2$. Среднее время такой операции τ_{12}, причем $\tau_{12} \neq \tau_1 + \tau_2$.

Системы рассматриваются без очереди. Время ожидания заявок для выполнения той или иной операции предположим неограниченным, т.е $\theta = \infty$.

Предмет исследования

Пусть А и В – два аппарата, на которых могут выполняться операции Ω_1 или Ω_2 со средним временем τ_1 или τ_2. Рассмотрим различные дисциплины обслуживания заявок, поступающих в систему с плотностью (интенсивностью) λ – число заявок, поступающих в систему в единицу времени.

Кроме операции Ω_1 или Ω_2 рассмотрим также операцию Ω_{12}, которая означает выполнение первой и второй операции вместе, т.е $\Omega_{12} = \Omega_1 + \Omega_2$. Среднее время такой операции τ_{12}, причем $\tau_{12} \neq \tau_1 + \tau_2$.

Системы рассматриваются без очереди. Время ожидания заявок для выполнения той или иной операции предположим неограниченным, т.е $\theta = \infty$.

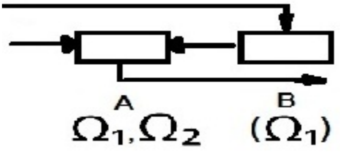

Рис.: Пример системы

Ограничения по работе системы

Введем следующие ограничения на работу систем:

- $\rightarrow$ В первую очередь должен работать аппарат А, а затем В.
- $\rightarrow$ Обе операции – Ω_1 и Ω_2 – обязательно должны быть выполнены. Причем, сначала Ω_1, затем Ω_2, $(\Omega_1 \succ \Omega_2)$.
- $\rightarrow$ Операцию (Ω_i) будем называть дополнительной для аппарата X.
- $\rightarrow$ Если операция Ω_i на X не является дополнительной, то она выполняется в первую очередь.
- $\rightarrow$ Одновременно два события произойти не могут.
- $\rightarrow$ Переход заявки с одного аппарата на другой и освобождение аппарата, считаем за одно событие.

Классификация систем

Рассмотрим основные признаки (ограничения), согласно которым была составлена классификация систем:

A) аппараты взаимодействуют между собой.

B) аппараты не взаимодействуют между собой.

Рис.: Классификация систем.

Для случая A введем более детальные различия:

I) заявка, поступая в систему, переходит на обслуживание только на аппарат A;

II) заявка, поступая в систему, переходит на обслуживание на аппарат A, но, в случае если он уже занят, может перейти аппарат B.

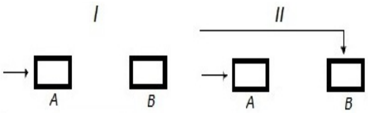

Рис.: Классификация систем.

Классификация систем

Затем в каждой из групп выделим следующие случаи:

1) заявка уходит из системы после полного обслуживания на аппарате B;
2) заявка уходит из системы после полного обслуживания на аппарате A;
3) заявка уходит из системы после полного обслуживания либо на аппарате A, либо на аппарате B.

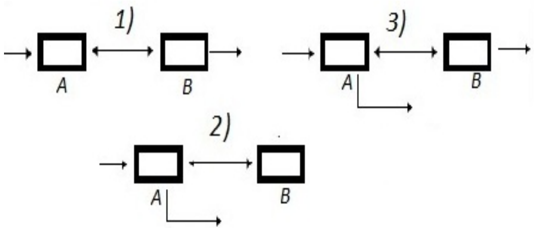

Рис.: Классификация систем.

Классификация систем

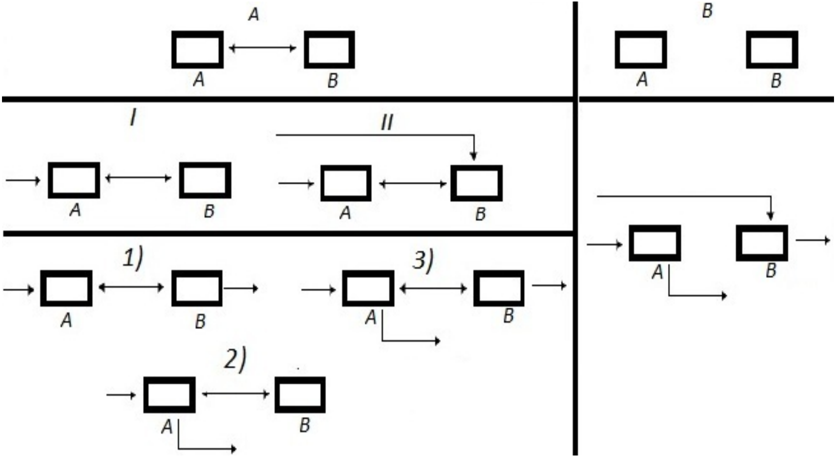

Рис.: Классификация систем.

Системы

С учетом распределения операций на аппаратах и заранее продуманного пути прохождения заявки полного обслуживания, получили следующие схемы:

1. $A_{\Omega_1}B_{\Omega_2}$;
2. $A_{\Omega_1}B_{\Omega_2,(\Omega_1)}$;
3. $A_{\Omega_1,\Omega_2}B_{(\Omega_1)}$;
4. $A_{\Omega_1,(\Omega_2)}B_{\Omega_2}$;
5. $A_{\Omega_1,(\Omega_2)}B_{\Omega_2,(\Omega_1)}$;
6. $A_{\Omega_1,\Omega_2}B_{\Omega_1,\Omega_2}$;
7. $A_{\Omega_1}B_{\Omega_2,(\Omega_{12})}$;
8. $A_{\Omega_{12}}B_{(\Omega_{12})}$;
9. $A_{\Omega_{12}}B_{(\Omega_1),(\Omega_2)}$;
10. $A_{\Omega_1,(\Omega_2)}B_{\Omega_2,(\Omega_{12})}$;

1. $A_{\Omega_1,(\Omega_{12})}B_{\Omega_2}$;
2. $A_{\Omega_{12},(\Omega_2)}B_{\Omega_1}$;
3. $A_{\Omega_{12},\Omega_2}B_{(\Omega_1),(\Omega_2)}$;
4. $A_{\Omega_1,(\Omega_{12})}B_{\Omega_2,(\Omega_1)}$;
5. $A_{\Omega_1,(\Omega_{12})}B_{\Omega_2,(\Omega_{12})}$;
6. $A_{\Omega_{12},(\Omega_2)}B_{\Omega_1,(\Omega_{12})}$;
7. $A_{\Omega_1,\Omega_2,(\Omega_{12})}B_{(\Omega_1)}$;
8. $A_{\Omega_1,\Omega_2}B_{(\Omega_{12})}$;
9. $A_{\Omega_1,(\Omega_2),(\Omega_{12})}B_{\Omega_2,(\Omega_1)}$;
10. $A_{\Omega_1,\Omega_2,(\Omega_{12})}B_{\Omega_{12}}$;

1. $A_{\Omega_1,\Omega_2,(\Omega_{12})}B_{\Omega_1,\Omega_2}$;
2. $A_{\Omega_{12},(\Omega_1),(\Omega_2)}B_{\Omega_{12}}$;
3. $A_{\Omega_{12},(\Omega_1),(\Omega_2)}B_{\Omega_1,\Omega_2}$;
4. $A_{\Omega_{12},(\Omega_1),(\Omega_2)}B_{\Omega_{12},\Omega_2}$;
5. $A_{\Omega_{12},(\Omega_1)}B_{\Omega_{12},(\Omega_2)}$;
6. $A_{\Omega_1,(\Omega_2),(\Omega_{12})}B_{\Omega_2,(\Omega_{12})}$

Описание систем

При описании состояний аппаратов будем использовать следующие обозначения:

- 0 – аппарат свободен;
- 1, 2, <u>12</u> – аппарат занят, обрабатывает поступившую заявку;
- W – аппарат занят, находится в состоянии ожидания.

Описание систем

При описании состояний аппаратов будем использовать следующие обозначения:

- 0 – аппарат свободен;
- 1, 2, 12 – аппарат занят, обрабатывает поступившую заявку;
- W – аппарат занят, находится в состоянии ожидания.

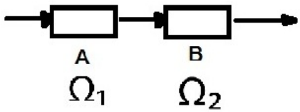

Рис.: Схема A.I.1.1

Описание систем

При описании состояний аппаратов будем использовать следующие обозначения:

- 0 – аппарат свободен;
- 1, 2, <u>12</u> – аппарат занят, обрабатывает поступившую заявку;
- W – аппарат занят, находится в состоянии ожидания.

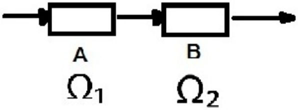

Рис.: Схема A.I.1.1

Граф переходов в матричном виде:

Таблица: Матрица переходов для схемы A.I.1.1

00	**02**	**10**	**12**	**W2**
10, λ	00, τ_2^B	02, τ_1^A	W2, τ_1^A	02, τ_2^B
	12, λ		10, τ_2^B	

Метод Δt

Для реализации Δt - принципа весь интервал моделирования разбивается на достаточно малые фиксированные промежутки времени Δt. На каждом отдельном промежутке данный метод предполагает моделирование следующих событий:

1) появление очередной заявки;
2) конец обслуживания заявки.

Для этого достаточно обратиться к датчику случайных чисел и сравнить полученное значение α с соответствующей вероятностью $P_{\tau(*)}(t, \Delta t)$, где $P_{\tau(*)}(t, \Delta t)$ может быть:

- $P_{\tau(n)}(t, \Delta t)$ – вероятность того, что заявка поступит в систему;
- $P_{\tau(k)}(t, \Delta t)$ – вероятность того, что заявка освободит канал;

Если $\alpha < P_{\tau(*)}(t, \Delta t)$, то считаем, что соответствующее событие наступило. В противном случае - нет.

Метод узловых точек (УТ-принцип)

При использовании УТ-принципа моделирование случайных величин производится только в узловых точках (тот ближайший момент времени, когда происходит очередное интересующее нас событие). Алгоритм моделирования методом узловых точек можно описать следующим образом:

- В начальном состоянии система пуста. Генерируем случайную величну $\xi \in p.p.[0,1]$, решаем уравнение $F_{\tau_n}(\tau_n^1) = \xi$. Получаем время прихода первой заявки $t_n^1 = \tau_n^1$.
- Затем моделируем время появление двух событий: время поступление второй заявки t_n^2 и время конца обслуживания первой заявки t_k^1. Генерируем ξ_1, ξ_2 и нахожим:

  $\tau_n^2 = F_{\tau_n}^{-1}(\xi_1)$, $\quad \tau_k^1 = F_{\tau_n}^{-1}(\xi_2)$,

  $t_n^2 = t_n^1 + \tau_n^2$, $\quad t_k^1 = t_n^1 + \tau_k^1$.

  Следующая узловая точка определяется по формуле:

$$t_2^* = min(t_k^1, t_n^2). \tag{1}$$

Аналитические модели

Найдем дифференциальное уравнение для вероятности $P_i(t)$ промежуточного состояния S_i. Дадим t малое приращение Δt и найдем вероятность того, что в момент $t + \Delta t$ система будет находиться в состоянии S_i.

- Вероятность того, что в момент t система была в состоянии S_i и за время Δt не перешла ни в состояние S_{i-1}, ни в состояние S_{i+1} равна
$$P_i(t) \cdot (1 - \lambda_{i,i-1}\Delta t - \lambda_{i,i+1}\Delta t); \tag{2}$$
- Вероятность того, что в момент t система была в состоянии S_{i-1} и за время Δt перешла в состояние S_i равна
$$P_{i-1}(t) \cdot \lambda_{i-1,i}\Delta t; \tag{3}$$
- Вероятность того, что в момент t система была в состоянии S_{i+1} и за время Δt перешла в состояние S_i равна
$$P_{i+1}(t) \cdot \lambda_{i+1,i}\Delta t. \tag{4}$$

Аналитические модели

Плотностью вероятностей перехода из состояния S_i в состояние S_j называется величина

$$\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, \tag{5}$$

где $P_{ij}(\Delta t)$– вероятность того, что система, находящаяся в момент времени t в состоянии S_i, за время Δt перейдет в состояние S_j. С точностью до бесконечно малых высшего порядка $P_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t$.

Аналитические модели

Плотностью вероятностей перехода из состояния S_i в состояние S_j называется величина

$$\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, \qquad (5)$$

где $P_{ij}(\Delta t)$– вероятность того, что система, находящаяся в момент времени t в состоянии S_i, за время Δt перейдет в состояние S_j. С точностью до бесконечно малых высшего порядка $P_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t$.

Система линейных дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = P_{i-1}(t)\lambda_{i-1,i} + P_{i+1}(t)\lambda_{i+1,i} - (\lambda_{i,i-1} + \lambda_{i,i+1}) \cdot P_i(t), \qquad (6)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Решая полученную систему, при определенных начальных условиях находим функцию $P_i(t)$, т.е можем определить показатели эффективности системы.

Описание системы и задание таблицы переходов

Описание системы и задание таблицы переходов

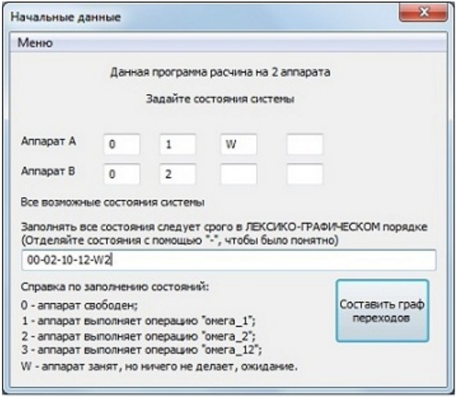

Рис.: Исходные данные

Описание системы и задание таблицы переходов

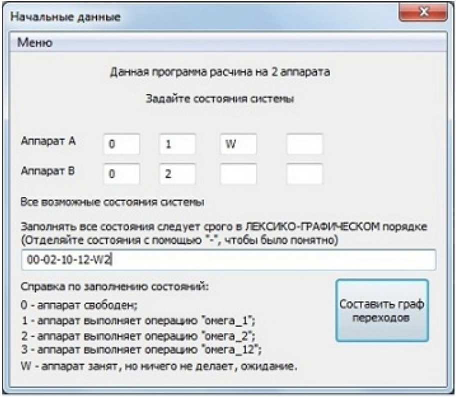

Рис.: Исходные данные

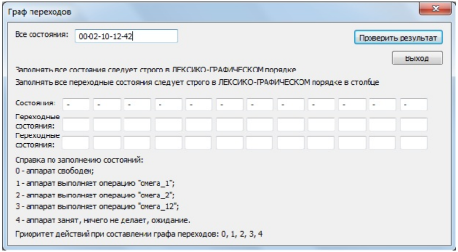

Рис.: Матрица переходов

Моделирование системы

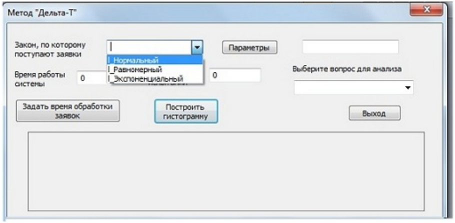

Рис.: Выбор данных для моделирования

Моделирование системы

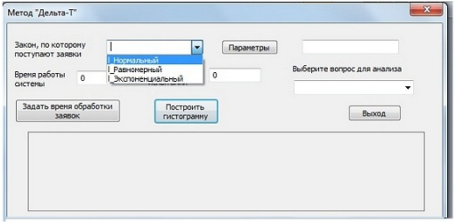

Рис.: Выбор данных для моделирования

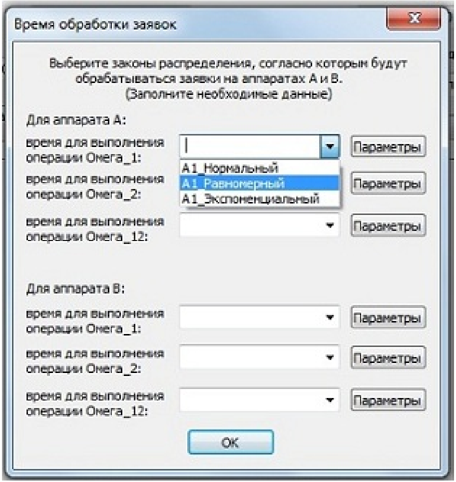

Рис.: Выбор данных для времени

Результаты моделирования системы

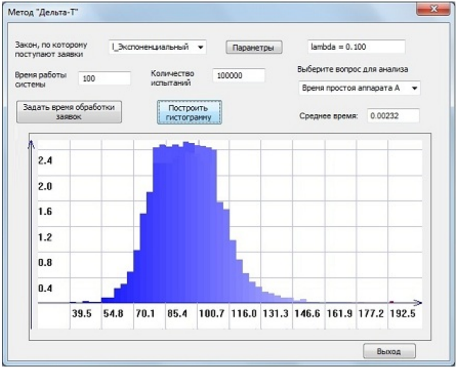

Рис.: Статистический метод моделирования

Результаты моделирования системы

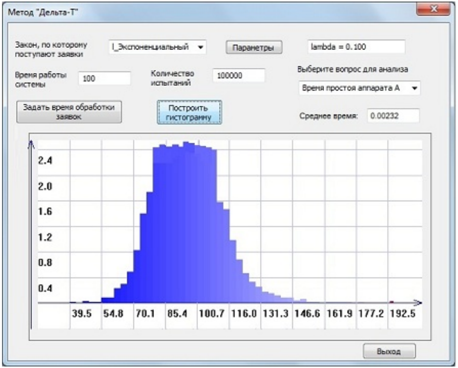

Рис.: Статистический метод моделирования

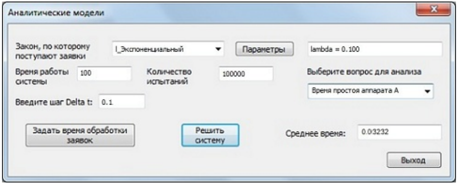

Рис.: Аналитические модели

Результаты

- Произведен анализ системы с двумя аппаратами, которые могут выполнять две операции.
- Составлена классификация основных, типовых, схем рассматриваемой системы обслуживания.
- Были составлены матрицы переходов в возможные состояния системы для всех схем из полученного списка.
- Составлены дифференциальные системы для всех схем, для дальнейшего использования их при составлении аналитических моделей.
- Создана программа, которая позволяет:
  - проверить результат своей работы при решении задач по курсу «Моделирование систем»;
  - проверить правильность построения графа переходов;
  - выбрать метод моделирования системы, с помощью которого можно подсчитать показатели эффективности ситемы.

Спасибо за внимание!