Реализация алгоритмов оптимизации нестационарного вероятностного автомата с периодически меняющейся структурой

Строилов Роман Владимирович, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Пономарева А.Ю.
Рецензент: д.ф.-м.н., проф. Чирков М.К.

Санкт-Петербург
2009г.

Определения автомата и автоматного отображения

Определение

Нестационарный конечный вероятностный автомат с периодически меняющейся структурой

$$\mathcal{A}_{pv} \overset{\text{def}}{=} \langle X^{(\tau)}, A^{(\tau)}, Y^{(\tau)}, \widetilde{\mathbf{p}}, \{\mathbf{P}^{(\tau)}(s,l)\}, t_p, T \rangle,$$

где $\{\mathbf{P}^{(\tau)}(s,l)\}, \mathbf{P}^{(\tau)}(s,l) = \mathbf{P}^{(\tau)}(x_s, y_l)$, $x_s \in X^{(\tau)}, y_l \in Y^{(\tau)}$ и

$$\tau = \tau(t) = \begin{cases} t, & t \le t_p, \\ (t - t_p - 1)(\text{mod } T) + t_p + 1, & t > t_p, \end{cases} \sum_{y_l \in Y^{(\tau)}} \mathbf{P}^{(\tau)}(s,l)\mathbf{e}^{(\tau)} = \mathbf{e}^{(\tau)},$$

$$\mathbf{e}^{(\tau(d))} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{m_{\tau(d)}})^T.$$

$Z_{\text{доп}} = \left\{(\omega, v) \mid \omega = x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_d}, v = y_{l_1} y_{l_2} \dots y_{l_d}, x_{s_t} \in X^{(\tau(t))}, y_{l_t} \in Y^{(\tau(t))}\right\}$.

$\Phi_{\mathcal{A}} : Z_{\text{доп}} \to [0,1]$.

Определение

Вероятностное отображение $\Phi_{\mathcal{A}}(\omega, v) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{p} \prod_{t=1}^{d} \mathbf{P}^{(\tau(t))}(s_t, l_t) \mathbf{e}^{(\tau(d))}$, где $(\omega, v) \in Z_{\text{доп}}$.

Эквивалентность автоматов. Приведенные формы.

Пусть $\mathcal{A}_{pv}$ и $\mathcal{B}_{pv}$ имеют одинаковые t_p, T и $X^{(\tau)}, Y^{(\tau)}, \tau = \overline{1, t_p + T}$.

Определение

Автоматы эквивалентны: $\mathcal{A}_{pv} \sim \mathcal{B}_{pv} \Leftrightarrow \widetilde{\Phi}_{\mathcal{A}} = \widetilde{\Phi}_{\mathcal{B}}$.

Автоматы *строго эквивалентны*:
$\mathcal{A}_{pv} \approx \mathcal{B}_{pv} \Leftrightarrow \forall q \in \overline{0, t_p + T}, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{p}}_q) \quad \exists \mathbf{p}' \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{p}}'_q)$

Определение

$\mathcal{A}_{pv}$ *находится в приведенной форме* $\Leftrightarrow \nexists \mathcal{B}_{pv}$ с теми же t_p и T:

$$\mathcal{A}_{pv} \approx \mathcal{B}_{pv} \text{ и } m_\tau^{(B)} = |B^{(\tau)}| \le m_\tau^{(A)} = |A^{(\tau)}|,$$

где $\tau = \overline{0, t_p + T}$, и $\sum_{\tau=0}^{t_p+T-1} m_\tau^{(B)} < \sum_{\tau=0}^{t_p+T-1} m_\tau^{(A)}$.

$a_i^{(\tau)} \in A^{(\tau)}$ ***t-недостижимое***, если $\forall(\omega, v) \in Z_{\text{доп}}$: $|\omega| = |v| = t$, $\tau(t) = \tau$:

$$\mathbf{P}_i = 0, \text{ где } \mathbf{P} = \widetilde{\mathbf{p}} \prod_{\theta=1}^{t} \mathbf{P}^{(\tau(\theta))}(s_\theta, l_\theta).$$

Недостижимое состояние: которое является t-недостижимым $\forall t$: $\tau(t) = \tau$.

Постановка задач

В общем виде основную задачу можно сформулировать следующим образом. Имеется автомат $\mathcal{A}_{pv}$. Необходимо реализовать программное обеспечение для построения автомата $\mathcal{B}_{pv}$, эквивалентного исходному автомату и имеющего при этом наименьшее число состояний. Могут быть выделены 3 этапа:

- В автомате может быть некоторое количество недостижимых состояний. Необходимо создать эффективный метод удаления недостижимых состояний автомата $\mathcal{A}_{pv}$ и написать программную реализацию.
- Дан исходный автомат $\mathcal{A}_{pv}$. Необходимо построить автомат $\mathcal{B}_{pv}$ — приведенную форму автомата $\mathcal{A}_{pv}$. Теоретическое решение данной задачи существует и обосновано в работах А.Ю. Пономаревой и М.К. Чиркова.
- Дан исходный автомат $\mathcal{A}_{pv}$, находящийся в приведенной форме, т.е. данный автомат уже невозможно оптимизировать, используя указанный выше метод. Однако, для стационарного вероятностного автомата существует метод дальнейшей оптимизации, который можно использовать при выполнении некоторых условий. Задача заключается в обобщении данного метода на случай нестационарного конечного вероятностного автомата.

Метод редукции недостижимых состояний

Строим семейство векторов $\hat{\mathbf{p}}_{Log}^{(\tau)}$, $\tau = \overline{0, t_p + T}$.

$$\aleph(\mathbf{M}) = \left(\widetilde{m}_{ij}\right)_{i=\overline{1,\mu}}^{j=\overline{1,\eta}} : \quad \widetilde{m}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } m_{ij} > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. $\hat{\mathbf{p}}_{Log}^{(0)} = \bigvee_{i=1}^{\xi} \aleph(\widetilde{\mathbf{p}}_i)$, $\hat{\mathbf{P}}_{Log}^{(\tau)} = \bigvee_{s,l} \aleph\left(\mathbf{P}^{(\tau)}(s,l)\right)$, $x_s \in X^{(\tau)}$, $y_l \in Y^{(\tau)}$
2. $\hat{\mathbf{p}}_{Log}^{(\tau)} = \hat{\mathbf{p}}_{Log}^{(\tau-1)} \wedge \hat{\mathbf{P}}_{Log}^{(\tau)}$
3. $\hat{\mathbf{p}}_{Log}^{(t_p)} = \hat{\mathbf{p}}_{Log}^{(t_p+T)}$
4. $\hat{\mathbf{p}}_{Log}^{(\tau)}(\nu+1) = \hat{\mathbf{p}}_{Log}^{(\tau)}(\nu)$, $\tau = \overline{t_p, t_p + T}$

Теорема

Пусть дан автомат $\mathcal{A}_{pv}$ и построено семейство векторов $\hat{\mathbf{p}}_{Log}^{(\tau)}$, $\tau = \overline{0, t_p + T}$. Тогда автомат $\mathcal{B}_{pv}$, построенный по формулам

$$B^{(\tau)} = \{a_i^{(\tau)}\}_{i\in\Pi^{(\tau)}}, \quad \widetilde{\mathbf{p}}_B = \left(\mathbf{p}_j\right)_{j\in\Pi^{(\tau)}}, \quad \mathbf{P}_B^{(\tau)}(s,l) = \left(p_{ij}^{(\tau)}\right)_{j\in\Pi^{(\tau)}}^{i\in\Pi^{(\tau-1)}},$$

где $\Pi^{(\tau)} = \{j \mid \hat{\mathbf{p}}_{Log}^{(\tau)}(j) = 1\}$, $\mathbf{p}_j$ – векторы-столбцы матрицы $\widetilde{\mathbf{p}}_A$, $p_{ij}^{(\tau)}$ – элементы матриц $\mathbf{P}_A^{(\tau)}(s,l)$, эквивалентен автомату $\mathcal{A}_{pv}$ и не содержит недостижимых состояний.

Пример

$$\widetilde{\mathbf{p}}_A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0,5 & 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,4 & 0,2 & 0 & 0,4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_A^{(1)}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_A^{(1)}(x_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{Log}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{p}}_{Log}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{p}}_B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_B^{(1)}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}, < \ldots >$$

Инициальные автоматы

Определение

Автомат $\mathcal{A}_{pv}$ называется инициальным $\Leftrightarrow A^{(0)} = \{a_0\}$. Вектор начальных распределений состояний в данном случае $\widetilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}) = (1)$.

Теорема

Любой вероятностный автомат с периодически меняющейся структурой $\mathcal{A}_{pv}$ с заданным начальным распределением $\mathbf{p}_A$ и предпериодом $t_p > 0$ может быть представлен эквивалентным ему инициальным вероятностным автоматом $\mathcal{B}_{pv}$ с периодически меняющейся структурой.

Число состояний $m_B = m - m_0 + 1$, где m_0 — число состояний автомата $\mathcal{A}_{pv}$ в начальный момент времени.

Пример $\mathbf{p}_A = (1/2, 1/2) \Rightarrow \mathbf{p}_B = (1)$,

$$\mathbf{P}_A^{(1)}(s,l) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/8 & 5/8 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \mathbf{P}_B^{(1)}(s,l) = \begin{pmatrix} 7/24 & 11/48 & 23/48 \end{pmatrix}.$$

Семейство базисных матриц. Нормализованные формы

Пусть $\mathbf{h}^{(\tau)}(\omega_2, v_2) = \prod_{t=d_1+1}^{d} \mathbf{P}^{(\tau(t))}(s_t, l_t)\mathbf{e}^{(\tau(d))}$, где $x_{s_t} \in X^{(\tau)}, y_{l_t} \in Y^{(\tau)}$.
$\mathcal{L}(\mathcal{A}_{pv}^{(\tau)})$ — векторное пространство, порождаемое $\mathbf{e}^{(\tau)}$ и всеми $\mathbf{h}^{(\tau)}(\omega_2, v_2)$ при всевозможных $(\omega_1\omega_2, v_1v_2) \in Z_{\text{доп}}$ таких, что $|\omega_1| = |v_1| = d_1$, $|\omega_1\omega_2| = |v_1v_2| = d$, и $d = d_1 + d_2, d_2 = 1, 2, \ldots$.

Определение

Базисной матрицей автомата $\mathcal{A}_{pv}$ в такте τ называется любая матрица $\mathbf{H}^{(\tau)}$ размера $(m_\tau \times \eta_\tau)$, столбцы которой образуют базис в $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{pv}^{(\tau)})$.

Определение

Семейством базисных матриц автомата $\mathcal{A}_{pv}$ называется совокупность матриц $\mathbf{H}^{(\tau)}$, $\tau = \overline{0, t_p + T}$, где $\mathbf{H}^{(t_p)} = \mathbf{H}^{(t_p+T)}$.

Определение

Нормализованной формой матрицы $\mathbf{H}^{(\tau)}$ называется матрица

$$\widetilde{\mathbf{H}}^{(\tau)} = \mathbf{H}^{(\tau)}\alpha,$$

где α — такая матрица размера $(\eta_\tau \times \eta_\tau)$, что $\alpha^{-1} = \left(\mathbf{r}_{j_\nu}^{(\tau)}\right)_{\nu=\overline{1,\eta_\tau}}$.

Преобразующие матрицы. Псевдообратные.

$\mathbf{H}^{(\tau)}$ – базисная $(m_\tau \times \eta_\tau)$-матрица
$\widetilde{\mathbf{H}}^{(\tau)}$ – нормализованная форма содержащая g_τ строк с неотрицательными элементами.
$\hat{\mathbf{H}}^{(\tau)}$ – преобразующая матрица размера $(m_\tau \times (\eta_\tau - g_\tau))$.

Определение

$\hat{\mathbf{H}}^{(\tau)I}$ размера $((\eta_\tau - g_\tau) \times m_\tau)$ *псевдообратная* для матрицы $\hat{\mathbf{H}}^{(\tau)}$, если выполнено условие: $\hat{\mathbf{H}}^{(\tau)I}\hat{\mathbf{H}}^{(\tau)} = \mathbf{I}(\eta_\tau - g_\tau)$.

Теорема (Пономарева, Чирков)

Автомат $\mathcal{B}_{pv}$, построенный согласно с преобразованиями:

$$B^{(\tau)} = A^{(\tau)} \backslash \{a_{j_\nu^{(\tau)}}\}_{\nu=\overline{1,g_\tau}}, \widetilde{\mathbf{p}}_B = \widetilde{\mathbf{p}}_A \hat{\mathbf{H}}^{(0)},$$

$$\mathbf{P}_B^{(\tau)}(s,l) = \hat{\mathbf{H}}^{(\tau-1)I}\mathbf{P}_A^{(\tau)}(s,l)\hat{\mathbf{H}}^{(\tau)}, \mathbf{e}_B^{(\tau)} = \hat{\mathbf{H}}^{(\tau)I}\mathbf{e}_A^{(\tau)},$$

обладает следующими свойствами:

1. $\mathcal{A}_{pv} \approx \mathcal{B}_{pv}$;
2. $|B^{(\tau)}| = m_\tau - g_\tau$;
3. $\mathbf{H}^{(\tau)}(\mathcal{B}_{pv}) = \hat{\mathbf{H}}^{(\tau)I}(\mathcal{A}_{pv})\mathbf{H}^{(\tau)}(\mathcal{A}_{pv})$.

Общие преобразующие матрицы.

- Первое приближение: $\mathbf{H}_1^{(\tau)} = \mathbf{H}^{(\tau)}$.
- Если построено i-е приближение $\mathbf{H}_i^{(\tau)}$, то следующее приближение находим по формуле $\mathbf{H}_{i+1}^{(\tau)} = \hat{\mathbf{H}}_i^{(\tau)I}\mathbf{H}_i^{(\tau)}$.
- Условие остановки алгоритма: $\hat{\mathbf{H}}_{\eta_\tau}^{(\tau)} = \mathbf{I}(m_\tau)$.

Определение

Общая преобразующая матрица: $\hat{\mathbf{H}}_\Sigma^{(\tau)} = \prod_{i=1}^{\eta_\tau} \hat{\mathbf{H}}_i^{(\tau)}$;
Псевдообратная к ней: $\hat{\mathbf{H}}_\Sigma^{(\tau)I} = \left(\prod_{i=1}^{\eta_\tau} \hat{\mathbf{H}}_i^{(\tau)}\right)^I = \prod_{i=1}^{\eta_\tau} \hat{\mathbf{H}}_{\eta_\tau+1-i}^{(\tau)I}$.

Теорема (Пономарева, Чирков)

$\mathcal{A}_{pv}$ — нестационарный вероятностный автомат с периодически меняющейся структурой; $\hat{\mathbf{H}}_\Sigma^{(\tau)}$, $\hat{\mathbf{H}}_\Sigma^{(\tau)I}$, $\tau = \overline{0, t_p + T}$ — семейства общих преобразующих и псевдообратных к ним матриц.
Тогда автомат $\mathcal{B}_{pv}$, построенный по формулам

$$\widetilde{\mathbf{p}}_B = \widetilde{\mathbf{p}}_A \hat{\mathbf{H}}_\Sigma^{(0)}, \quad \mathbf{P}_B^{(\tau)}(s,l) = \hat{\mathbf{H}}_\Sigma^{(\tau-1)I}\mathbf{P}_A^{(\tau)}(s,l)\hat{\mathbf{H}}_\Sigma^{(\tau)}, \quad \mathbf{e}_B^{(\tau)} = \hat{\mathbf{H}}_\Sigma^{(\tau)I}\mathbf{e}_A^{(\tau)},$$

эквивалентен исходному автомату $\mathcal{A}_{pv}$.

Пример

$$\mathbf{P}^3_{A,1,1} = \begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}06 & 0{,}036 & 0{,}024 & 0{,}2 \\ 0{,}0365 & 0{,}01825 & 0{,}32575 & 0{,}0073 & 0{,}2275 \\ 0 & 0 & 0{,}42 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}071 & 0{,}05 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^3_{A,1,2} = \begin{pmatrix} 0{,}26 & 0{,}13 & 0{,}018 & 0{,}052 & 0{,}1 \\ 0{,}129 & 0{,}0645 & 0{,}0229 & 0{,}0258 & 0{,}1425 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}15 \\ 0{,}04 & 0{,}02 & 0{,}236 & 0{,}008 & 0{,}2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{H}}^{(3)}_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,32 & 0,08 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{H}}^{(2)I}_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^3_{B,1,1} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}04 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}5 & 0{,}02 \\ 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}071 & 0{,}05 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^3_{B,1,2} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}06 \\ 0{,}16 & 0{,}08 & 0{,}058 & 0{,}032 \\ 0{,}12 & 0{,}06 & 0{,}3 & 0{,}024 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{(\tau)}_{B}(s,l) = \hat{\mathbf{H}}^{(\tau-1)I}_{\Sigma}\mathbf{P}^{(\tau)}_{A}(s,l)\hat{\mathbf{H}}^{(\tau)}_{\Sigma}.$$

Формулировка задачи. Левосторонние базисные матрицы

$\mathcal{A}_{pv} = \langle X, A^{(\tau)}, Y, \widetilde{\mathbf{p}}, \{\mathbf{P}^{(\tau)}(s,l)\}, t_p, T\rangle$, где $X^{(\tau)} = X,\ Y^{(\tau)} = Y\ \forall\tau = \overline{1, t_p + T}$

Пусть $\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{p}}\mathcal{A}_{pv}^{(\tau)})$ векторное пространство, порожденное при $\tau = \overline{1, t_p + T}$:

$$\mathbf{h}_{\mathbf{p}}^{(\tau)}(\omega, v) = \mathbf{p}\prod_{t=1}^{d}\mathbf{P}^{(\tau(t))}(s_t, l_t), \mathbf{p} \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{p}}), (\omega, v) \in Z_{\text{доп}}.$$

Определение

Левосторонней базисной матрицей будем называть любую матрицу $\mathbf{H}_p^{(\tau)}$ размера $(\xi_\tau \times m_\tau)$, где ξ_τ – размерность пространства $\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{p}}\mathcal{A}_{pv}^{(\tau)})$, строки которой образуют базис в этом пространстве.

Определение

Нормализованной формой матрицы $\mathbf{H}_p^{(\tau)}$ называется матрица

$$\widetilde{\mathbf{H}}_p^{(\tau)} = \alpha\mathbf{H}_p^{(\tau)},$$

где α - такая матрица размера $(\xi_\tau \times \xi_\tau)$, что $\alpha^{-1} = \left(\mathbf{h}_{j_\nu}^{(\tau)}\right)_{\nu=\overline{1,\xi_\tau}}$.

Алгоритм построения семейства преобразующих матриц

Введем обозначения:

$$\widetilde{\mathbf{H}}_1^{(\tau)} = \widetilde{\mathbf{H}}^{(\tau)}, \widetilde{\mathcal{H}}_1^{(\tau)} = \widetilde{\mathcal{H}}_{1,0}^{(\tau)} = \{\widetilde{\mathbf{h}}_j^{(\tau)} \mid j = j_{\nu(\tau)}, \nu(\tau) = \overline{1, \xi_\tau}\},$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\sigma^{(\tau)} = \bigcup_{j=1}^{g_\tau} \widetilde{\mathcal{H}}_{\sigma,j}^{(\tau)}, \widetilde{\mathcal{H}}_{\sigma,j}^{(\tau)} = \{\widetilde{\mathbf{h}}_j^{(\tau)} \mid \widetilde{\mathbf{h}}_j^{(\tau)T} = \left(\widetilde{\mathbf{h}}_{1j}^{(\tau)}, \widetilde{\mathbf{h}}_{2j}^{(\tau)}, \dots, \widetilde{\mathbf{h}}_{\xi_\tau j}^{(\tau)}\right),$$

$$\widetilde{\mathbf{h}}_{ij}^{(\tau)} = \sigma_{ij} \geq 0, \exists l : \widetilde{\mathbf{h}}_{lj} = 0, \widetilde{\mathbf{h}}_j^{(\tau)} \notin \widetilde{\mathcal{H}}_1^{(\tau)}\}, \hat{\mathcal{H}}^{(\tau)} = \{\widetilde{\mathbf{h}}_j \mid \widetilde{\mathbf{h}}_j \notin \widetilde{\mathcal{H}}_1^{(\tau)} \cup \widetilde{\mathcal{H}}_\sigma^{(\tau)}\}.$$

Алгоритм:

1. Строим семейство левосторонних базисных матриц автомата $\mathcal{A}_{pv}$, находим их нормализованные формы для всех тактов $\tau = \overline{0, t_p + T}$.
2. Если $\widetilde{\mathcal{H}}_\sigma^{(\tau)} \neq \emptyset$, рассматриваем приближение $\widetilde{\mathbf{H}}_\eta^{(\tau)}$. Если $\hat{\mathcal{H}}^{(\tau)} = \{\widetilde{\mathbf{h}}_{i_\beta}^{(\tau)}\}_{\beta=\overline{1,c_\tau}} \neq \emptyset$, то для каждого $\beta = 1, 2, \dots, c_\tau$ выполняем:
   - Заменяем все столбцы из $\hat{\mathcal{H}}^{(\tau)}$ и вставляем строки $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$
   - Повторяем предыдущий пункт для каждого $\beta = \overline{1, c_\tau}$.
   - Из полученной матрицы строим матрицу $\hat{\mathbf{H}}_\eta^{(\tau)}$, для чего делим каждую строку на сумму всех ее элементов. Таким образом, матрица $\hat{\mathbf{H}}_\eta^{(\tau)}$ – стохастическая; $\mathbf{H}_{\eta+1}^{(\tau)} = \mathbf{H}_\eta^{(\tau)} \hat{\mathbf{H}}_\eta^{(\tau)I}$.
3. Повторяем до тех пор, пока не перестанет выполняться условие $\widetilde{\mathcal{H}}_\sigma^{(\tau)} \neq \emptyset$.

Теорема эквивалентности

Теорема

Пусть задан автомат $\mathcal{A}_{pv}$, находящийся в приведенной форме. Пусть $\mathbf{H}_p^{(\tau)}, \tau = \overline{0, t_p + T}$ – семейство его левосторонних базисных матриц, и пусть для некоторых тактов $\tau_\gamma \in \{1, \ldots, t_p + T\}$ выполнено условие

$$\mathbf{h}_{i_{\nu(\tau)}} = \alpha_{\nu(\tau)} \mathbf{h}_{q(\tau)}, \quad \nu(\tau) = \overline{1, d^{(\tau)}}, \quad \alpha_{\nu(\tau)} \geq 0.$$

Пусть для автомата $\mathcal{A}_{pv}$ согласно выше изложенному алгоритму построено семейство специальных преобразующих матриц $\hat{\mathbf{H}}_p^{(\tau)}$ и $\hat{\mathbf{H}}_p^{(\tau)I}$, $\tau = \overline{0, t_p + T}$. Тогда автомат $\mathcal{B}_{pv}$, построенный по формулам

$$\widetilde{\mathbf{p}}_B = \widetilde{\mathbf{p}}_A \hat{\mathbf{H}}_p^{(0)I}, \mathbf{P}_B^{(\tau)}(s,l) = \hat{\mathbf{H}}_p^{(\tau-1)} \mathbf{P}_A^{(\tau)}(s,l) \hat{\mathbf{H}}_p^{(\tau)I}, \mathbf{e}_B^{(\tau)} = \hat{\mathbf{H}}_p^{(\tau)} \mathbf{e}_A^{(\tau)},$$

находящийся в приведенной форме, эквивалентен автомату $\mathcal{A}_{pv}$ и имеет меньшее, чем $\mathcal{A}_{pv}$, число состояний.

Матрицы $\hat{\mathbf{H}}_p^{(\tau)}$ и $\hat{\mathbf{H}}_p^{(\tau)I}$ находятся по формулам:

$$\hat{\mathbf{H}}_p^{(\tau)} = \prod_{i=0}^{N_\tau - 1} \hat{\mathbf{H}}_{p, N_\tau - i}^{(\tau)}, \hat{\mathbf{H}}_p^{(\tau)I} = \prod_{i=1}^{N_\tau} \hat{\mathbf{H}}_{p,i}^{(\tau)I}.$$

Пример

$$\mathbf{P}_A^{(3)}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,04 \\ 0,1 & 0,05 & 0,5 & 0,02 \\ 0,25 & 0,125 & 0,071 & 0,05 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_A^{(3)}(x_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,15 & 0,05 & 0,06 \\ 0,16 & 0,08 & 0,058 & 0,032 \\ 0,12 & 0,06 & 0,3 & 0,024 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,0465789 & 0,02328945 & 0,077777718 & 0,00931578 \\ 0,04223295 & 0,021116475 & 0,070189029 & 0,00844659 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{H}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{H}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 10/17 & 5/17 & 0 & 2/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_B^{(3)}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 0,357 & 0,0942 \\ 0,17 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_B^{(3)}(x_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0,4488 & 0,1 \\ 0,272 & 0,058 \end{pmatrix}.$$

Структура программы и представление данных

Реализация: .NET приложение Windows.Forms, язык C#

- Математический аппарат для проведения всех необходимых расчетов и хранения нужных данных (матрицы, векторы и т.д.);
- Инструментарий ввода данных пользователем, их сохранения на диске (и возможность последующей загрузки) и отображение структуры автомата на экране;
- Алгоритмы нахождения минимальных (приведенных) форм автомата согласно изложенным методам.

- Реализована длинная арифметика
- Создана структура,представляющая рациональные дроби
- Реализован алгоритм Евклида
- Сложение и умножение векторов, матриц.
- Все арифметические операции с рациональными дробями
- Умножение числа на вектор и матрицу
- Нахождение обратной матрицы и нормализованной формы матрицы.
- Возможность вывода результатов в формат $\TeX$

Память и особенности реализации алгоритмов

Общий объем памяти, необходимый программе для хранения структуры автомата , примерно таков:

$$M = \sum_{\tau=1}^{t_p+T} \left(m_{(\tau-1)} m_{(\tau)} s + 8 \right) n_\tau k_\tau$$

где s – средний объем памяти, нужный для хранения дроби. Так, для хранения структуры автомата модельных примеров, требуется около 1 килобайта оперативной памяти.

1. Поиск нормализованной формы: C_n^k комбинаций строк (столбцов) исходной матрицы.
2. Приведение к верхнетреугольному виду, поиск определителя матрицы и поиск обратной матрицы.
3. Линейная зависимость нового вектора в базисной матрице с ранее добавленными:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \quad \boxed{c \stackrel{?}{=} \alpha a + \beta b}$$

Интерфейс программы