Метод стохастической сетки для оценки стоимости опциона американского типа

Моторин Павел Константинович, гр.422

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: к. ф.-м. н. Каштанов Ю.Н.

Рецензент: к. ф.-м. н. Гормин А.А.

Санкт-Петербург
2017

Введение

Целью данной работы является применение метода стохастической сетки для нахождения оптимальной цены азиатского опциона американского типа.

Азиатский опцион — опцион, в котором платежная функция зависит от средней цены базового актива за некоторый период.

Опцион называется опционом американского типа, если его можно исполнить в любой момент до даты исполнения.

Данная задача может решаться как задача оптимальной остановки. Авторы метода стохастической сетки(Марк Броуди и Пол Глассерман) отмечали, что применение метода стохастической сетки представляет сложность, так как переходные плотности имеют сингулярность в виде δ-функции.

Процесс цен

Предположим, что процесс цен базового актива выражается следующим образом:

$$S_t = S_0 e^{x_t},$$

где x_t — диффузионный процесс вида

$$dx_s = a(x_s)dw_s + b(x_s)ds.$$

Данная модель в финансовой математике носит название модель локальной волатильности.
Функция $a(x)$ называется локальной волатильностью,

$$b(x) = -\frac{1}{2}a^2(x) + r,$$

где r — текущая процентная ставка. Данный выбор $b(x)$ обеспечивает безарбитражность выбранной модели.

Постановка задачи

Рассмотрим случай, когда цены зависят от среднего значения за некоторый период:

- Геометрическое среднее

$$\overline{S}_t = S_0 e^{\frac{1}{t}\int_0^t x_s ds}$$

  с платежной функцией $f_t = \left(\overline{S}_t - K\right)^+$,

- Арифметическое среднее

$$\hat{S}_t = S_0 \frac{1}{t} \int_0^t e^{x_s} ds$$

  с платежной функцией $f_t = \left(\hat{S}_t - K\right)^+$.

Задача состоит в оценке значения:

$$\mathsf{C} = \sup_{\tau \le T} \mathbf{E}(e^{-r\tau} f_\tau),$$

где τ — произвольный марковский момент.

Дискретизация

Обозначим:

- $\Delta = T/N$ — шаг дискретизации,
- $t_n = n\Delta$,
- $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^d)$ — марковская цепь в $\mathbb{R}^d$, $n \leq N$, аппроксимирующая процесс x_t $(x_n = x_{t_n})$,
- вероятности перехода $p(\cdot, \cdot)$.

Рассматриваем случай, когда $f_n = f_n(x_n)$.
Задача состоит в оценке значения C $= \sup_{\tau \leq N} \mathbb{E} f_\tau$.
Значение C можно представить как C $= Y_0$, где Y_n выражается с помощью обратной рекурсии:

$$Y_N(x) = f_N(x), \qquad Y_n(x) = \max(f_n(x), \mathbb{E}_{n,x} Y_{n+1}(x_{n+1})).$$

Рассмотрим дискретизацию задачи

$$\overline{S}_t = S_0 e^{\frac{1}{t}\int_0^t x_s ds}$$

в случае, когда $a(x) = const$.
Обозначим:

- $x_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n + bt_n$, где $\xi_i \sim \mathrm{N}(0, a^2\Delta)$ и независимы,
- $y_n = \sum_1^n x_i \Delta$.

Чтобы платежные функции f_n и f_{t_n} имели одинаковые распределения, введем коэффициенты

$$c_n = \sqrt{(1 + 0.5/n)(1 + 1/n)}, \quad d_n = n\Delta^2 b/2$$

и положим

$$f_n = (y_n - d_n)/(t_n c_n).$$

Детерминированная сетка

Рассмотрим модельный пример(при $d = 1$) решения задачи:

$$\overline{S}_t = S_0 e^{\frac{1}{t}\int_0^t x_s ds}.$$

Введем дискретизацию по пространству: $x_i = ih\sqrt{\Delta}$, $i = -N, \ldots, N$, $S_i = S_0 e^{x_i}$.

Если переходы возможны только в близлежащие (к точке S) m узлов сетки и $p(i, j) = p(S_i, S_j)$ отличны от нуля только при $j = i - 1, i, i + 1$, т.е. $m = 3$, то такая сетка называется **триномиальным** деревом

Дискретные аналоги моментных условий для исходного процесса:

$$\sum_j p(S, S_j) S_j = S e^{r\Delta},$$

$$\sum_j p(S, S_j) S_j^2 = S^2 e^{2r + a^2(S)\Delta}.$$

Для двумерного процесса (x_t, y_t), можно построить двумерную сетку с узлами (x_i, y_j).

Переходы:

$$(x_i, y_j) \quad \to \begin{cases} (x_{i+1}, y_j + x_{i+1}), & \text{с вероятностью } p_{i,i+1} \\ (x_i, y_j + x_i), & \text{с вероятностью } p_{i,i} \\ (x_{i-1}, y_j + x_{i-1}), & \text{с вероятностью } p_{i,i-1} \end{cases}$$

Затем вычисляем по формуле:

$$Y_N(x_i, y_j) = f_N(y_j),\ Y_n(x_i, y_j) = \max(f_n(y_j), \sum_k p_{i,k} Y_{n+1}(x_k, y_j + x_k)).$$

Метод стохастической сетки

Множество случайных точек $\overline{x}_n = x_{n,i}{}_{i=1}^{M}$ строится как марковская цепь с вероятностями перехода:

$$\overline{q}_n(\overline{x}, d\overline{y}) = q_{n,1}(\overline{x}, dy_1) \dots q_{n,M}(\overline{x}, dy_M).$$

Рекурсивно построим случайную последовательность $\hat{Y}_n(x)$: сначала положим $\hat{Y}_N(x) = f_N(x)$, затем определим

$$\hat{Y}_n(i) = \max\left(f_n(i), \frac{\sum_j \rho_{n+1}(i,j)\hat{Y}_{n+1}(j)}{\sum_j \rho_{n+1}(i,j)} \right),$$

где $\rho_{n,j}(\overline{x}, x, y) = p_n(x, dy)/q_{n,j}(\overline{x}, dy)$.

Случай геометрического среднего

Дискретизация диффузионного процесса:

- $\Delta = T/N$,
- $t_n = n\Delta$,
- $\xi_n \in \mathrm{N}(0,1), n = 1, 2 \ldots, N$.

Положим:

$$x_{2n+1} = x_{2n} + a(x_{2n})\xi_{2n+1}\sqrt{\Delta} + b(x_{2n})\Delta,$$

$$x_{2n+2} = x_{2n+1} + a(x_{2n})\xi_{2n+2}\sqrt{\Delta} + b(x_{2n})\Delta.$$

Строим двумерную сетку с узлами $z_n = (x_{2n}, y_{2n})$.

Случай геометрического среднего

Переходные плотности

$$p(z,z'') = \varphi(x + 2b(x)\Delta - x'', 2a^2(x)\Delta)\times$$
$$\times\varphi(y'' - y - x\Delta/2 - 3x''\Delta/2, a^2(x)\Delta^3/2).$$

Маргинальные вероятности перехода с плотностью q за n шагов:

$$q^{(n)}(z) = q^{(n)}(z_0, z) = \varphi(x, A^2 t_{2n})\,\varphi(y - a_{2n}x\Delta,\ A^2 s_{2n}\Delta^3),$$

где

- $a_{2n+1} = a_{2n}\frac{2n}{2n+1} + 1,$
- $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n}^2\frac{2n}{2n+1},$
- $\max_x |a(x)| \le A,$
- φ — плотность нормального распределения.

По аналогичным формулам можно посчитать коэффициенты a_{2n+2}, s_{2n+2}.

Результаты

Процесс цен

$$S_t = S_0 \exp(aw_t + (r - 0.5a^2)t),$$

с параметрами $a = 0.2, \quad r = 0.5a^2, \quad S_0 = 100, \quad T = 1.$

Задача

$$\mathsf{C} \;=\; \sup_{\tau \le T} \mathbf{E}(e^{-r\tau} f_\tau),$$

где $f_t = \Big(S_t - K\Big)^+$, $K = 100.$

В результате работы программы, реализующей детерминированную сетку, при $N = 100$ получено значение $\mathsf{C} = 5.49587.$

В результате работы программы, реализующей метод стохастической сетки, при $M = 2000,\ N = 24$ справедливая цена опциона равна $\mathsf{C} = 5.42621 \pm 0.0836014$. В качестве оценки для a берется $A = 0.3.$

Итоги

В результате:

- Изучены теоретические подходы для вычисления справедливой цены азиатского опциона американского типа.
- Получены переходные плотности для метода стохастической сетки в случае платежной функции геометрического среднего.
- Реализованы на C++ алгоритмы вычисления справедливой цены через детерминированную и стохастическую сетку.

Дальнейшие цели:

- Сравнение трудоемкости метода весов максимальной энтропии с другими методами вычисления справедливой цены азиатского опциона американского типа.
- Рассмотреть случай платежной функции арифметического среднего.