Синтез оптимального управления конечно-нестационарным недетерминированным автоматом в нечетко заданных условиях

Яковлева Юлия Алексеевна, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Чирков М.К.
Рецензент: ассистент каф. общ. мат. и инф. Мосягина Е.Н.

СтатМод

Санкт-Петербург
2012г.

Абстрактным стационарным нечетким автоматом, заданным над $\mathcal{L} = ([0,1], \max, \min, \leq)$, называют систему

$$\mathcal{B}_{sf} = \langle X, \ B, \ \mathbf{r}_B, \ \{\mathbf{R}_B(x)\}, \ \mathbf{q}_B \rangle,$$

где

- $\mathbf{r}_B \in \mathbf{L}^{1,m}$ — *начальный вектор*,
- $\mathbf{q}_B \in \mathbf{L}^{m,1}$ — *финальный вектор*,
- $\{\mathbf{R}_B(x)\}$ — совокупность *матриц степеней принадлежности множеству переходов*, $\mathbf{R}_B(x) \in \mathbf{L}^{m,m}, \ x \in X$.

Обозначим $\omega = x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_t}$ слово в алфавите X.
Нечеткое отображение, индуцируемое автоматом $\mathcal{B}_{sf}$, это отображение $\Phi_{sf} : X^* \to [0,1]$, такое что:

$$\Phi_{sf}(\omega) = \begin{cases} \mathbf{r}_B(\prod_{\tau=1}^{t} \mathbf{R}_B(x_{s_\tau}))\mathbf{q}_B, & t \neq 0; \\ \mathbf{r}_B \mathbf{q}_B, & t = 0. \end{cases}$$

Элементарной недетерминированной автоматной структурой, заданной над $\mathcal{R} = (\{0,1\}, \vee, \&, \leq)$, условимся называть систему

$$\mathcal{A}_{nd}^{(i,j)} = \langle X^{(i,j)},\ A_i,\ A_j,\ \{\mathbf{D}_A^{(i,j)}(x)\}\rangle,$$

где $\{\mathbf{D}_A^{(i,j)}(x)\}$ - совокупность матриц переходов из состояний алфавита A_i в состояния алфавита A_j, соответствующих входным символам $x,\ x \in X^{(i,j)}$.

Элементарной нечеткой автоматной структурой, заданной над $\mathcal{L} = ([0,1], \max, \min, \leq)$ условимся называть систему

$$\mathcal{A}_{f}^{(i,j)} = \langle X^{(i,j)},\ A_i,\ A_j,\ \{\mathbf{R}_A^{(i,j)}(x)\}\rangle,$$

где $\{\mathbf{R}_A^{(i,j)}(x)\}$ — совокупность матриц степеней принадлежности множеству переходов из состояний алфавита A_i в состояния алфавита A_j, соответствующих входным символам $x,\ x \in X^{(i,j)}$.

Абстрактный конечно-нестационарный недетерминированный автомат, заданный над $\mathcal{R}$, — это система

$$\mathcal{A}_{nd} = \langle X,\ \mathcal{A},\ \mathbf{r}_A,\ G_A(G, C, c_0, f_A),\ Q_A \rangle,$$

где G_A есть *структурный граф автомата*, имеющий:

- $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_k\}$ — множество вершин, каждой приписан алфавит состояний A_i и финальный вектор-столбец $\mathbf{q}_A^{(i)} \in Q_A,\ i = \overline{0, k}$. Для *начальной* вершины c_0 задан вектор-строка начальных состояний $\mathbf{r}_A \in \mathbf{L_0}^{1, m_0}$;
- множество G направленных ребер g_{ij}, соединяющих $c_i, c_j \in C$;
- функцию $f_A : G \to \mathcal{A}$, приписывающую каждому ребру заданную элементарную недетерминированную автоматную структуру $\mathcal{A}_{nd}^{(i,j)} \in \mathcal{A}$.

Абстрактный конечно-нестационарный нечеткий автомат $\mathcal{A}_f$ определяется аналогично, однако элементарные недетерминированные автоматные структуры, а так же начальный и все финальные вектора, заменяются нечеткими.

Пусть Ω_{0i} — путь из вершины c_0 в $c_i \in C$ графа G.
Пусть $\omega = x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_t}$, $x_{s_\tau} \in X^{i_{\tau-1}, i_\tau}$ — слово длины t.
Множество всех таких слов обозначим $Z^{(i)}$.

Вес отображения ω, порождаемого путем Ω_{0i}, — это величина

$$\Phi_i^{(A)}(\omega) = \begin{cases} \mathbf{r}_A(\prod_{\tau=1}^{t} \mathbf{R}_A^{(i_{\tau-1}, i_\tau)}(x_{s_\tau}))\mathbf{q}_A^{(i)}, & \omega \in Z^{(i)}; \\ \mathbf{r}_A \mathbf{q}_A^{(i)}, & \omega \notin Z^{(i)}. \end{cases}$$

Пусть $\widetilde{\Omega}_{0i}^{(t)}$ - множество путей, ведущих из c_0 в какую-либо вершину $c_i \in C$ и имеющих длину t.

Нечетким отображением, индуцируемым вершиной c_i автомата $\mathcal{A}_f$, назовем отображение:

$$\widetilde{\Phi}_i^{(A)} : Z(\widetilde{\Omega}_{0i}^{(t)}) \to R,$$

определяемое выражением:

$$\widetilde{\Phi}_i^{(A)}(\omega) = \begin{cases} \max_{\Omega_{0i}^{(t)} \in \widetilde{\Omega}_{0i}^{(t)}} \Phi_i^{(A)}(\omega) & \widetilde{\Omega}_{0i}^{(t)} \neq \emptyset, \\ 0, & \widetilde{\Omega}_{0i}^{(t)} = \emptyset. \end{cases}$$

Нечеткая среда - это совокупность

$$C = \langle \boldsymbol{\mu}_c^\tau, \tau = \overline{1, t_p} \rangle,$$

матриц нечетких ограничений, устанавливаемых средой на входные символы $x_{s_t} \in X^{(\tau(t))}$ автомата в такте t, если в предыдущем такте автомат воздействовал на среду подмножеством состояний $\{a_{i_1}^{(t-1)}, a_{i_2}^{(t-1)}, \ldots, a_{i_k}^{(t-1)}\} \in A^{(\tau(t-1))}$.

Нечеткая цель — это множество конечных состояний $A_i^{(K)}$, определяемых заданным для каждой вершины $c_i \in C$ графа G_A финальным вектор-столбцом $\mathbf{q}_A^{(i)}$, с учетом заданных для них нечетких вектор-столбцов $\boldsymbol{\mu}_g^{(i)}$.

Пусть $\omega = x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_t}$ — входная управляющая последовательность.
$\widetilde{G}_i(\omega) \subseteq G_i$. Управляющая последовательность ω обеспечивает оптимальное поведение $\mathcal{A}_{nd}$ в вершине c_i графа G_A, если
$\forall \omega' = x_{g_1} x_{g_2} \dots x_{g_t},\ \widetilde{G}_i(\omega') \subseteq G_i$

$$\max[\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}_i}(\omega')] \leq \max[\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}_i}(\omega)].$$

Пусть $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_k}$ — последовательность нечетких целей.
$\mathcal{A}_{nd}$ обладает оптимальным поведением, если входное управляющее слово обеспечивает ее оптимальное поведение для каждой из нечетких целей.

Формулировка общей задачи.
Пусть автомат $\mathcal{A}_{nd} = \langle X,\ \mathcal{A},\ \mathbf{r}_A,\ G_A(G, C, c_0, f_A),\ Q_A \rangle$ находится в нечеткой среде C.
$G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_k}$ — последовательные нечеткие цели в множестве k вершин $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_k}$ соответственно графа G_A.
Необходимо найти множество входных управляющих слов, обеспечивающих оптимальное поведение всей системы в целом.

1. Из автомата $\mathcal{A}_{nd}$ удаляются все недостижимые состояния;
2. Из матриц ограничений $\boldsymbol{\mu}_c$ а также векторов целей $\boldsymbol{\mu}_g$ удаляются элементы, соответствующие удаленным недостижимым состояниям автомата $\mathcal{A}_{nd}$;
3. На автомат $\mathcal{A}_{nd}$ накладываются нечеткие ограничения, за счет чего происходит сведение этого типа автомата к конечно-нестационарному нечеткому автомату $\mathcal{A}_f$;
4. Для автомата $\mathcal{A}_f$ находится эквивалентный ему абстрактный стационарный нечеткий автомат $\mathcal{B}_{sf}$
5. Исходная задача решается для абстрактного стационарного нечеткого автомата $\mathcal{B}_{sf}$ и для новых векторов целей методом автоматных итераций.

Для вершины c_j рассмотрим $c_{j_{out}}, j_{out} \in \{j_1, \ldots, j_\mu\}$ — множество таких вершин графа, что существует ребро $g_{jj_{out}} \in G$, соединяющее их. Для каждого ребра определим матрицу:

$$\mathbf{P}^{(j,j_{out})} = \bigvee_s \mathbf{D}^{(i,j)}(x_s),\ x_s \in X^{(j,j_{out})}.$$

Построим теперь семейство векторов $\mathbf{p}^{(i)}$, $i = \overline{1, t-1}$:

1. $\mathbf{p}_0^{(i)}$ — не содержат ни одного элемента, $\mathbf{p}_1^{(0)} = \mathbf{r}_A$;
2. Для всех $c_{j_{out}}$ (ν)-е приближение вектора $\mathbf{p}_\nu^{(j_{out})}$ находится по формуле:
$$\mathbf{p}_\nu^{(j_{out})} = \mathbf{p}_{\nu-1}^{(j_{out})} \bigvee \mathbf{p}_\nu^{(j)} \bigwedge \mathbf{P}^{(j,j_{out})};$$
3. Если $\mathbf{p}_\nu^{(j)}$ равно $\mathbf{p}_{\nu-1}^{(j)}$, то вектор $\mathbf{p}^{(i)}$ найден. Процедуру применяем для всех вершин, после чего процесс нахождения семейства векторов $\mathbf{p}^{(i)}$ считаем законченным.

Те состояния будут **недостижимы**, для которых соответствующий компонент вектора $\mathbf{p}^{(i)}$ будет равен 0.

Для построенного алгоритма оказывается справедливым утверждение:

Теорема 2.1.

Пусть задан недетерминированный конечно-нестационарный автомат $\mathcal{A}_{nd}$, пусть также построено семейство векторов $\mathbf{p}^{(i)}$, $i = \overline{1, t-1}$. Тогда автомат $\mathcal{B}_{nd}$, построенный по формулам:

$$B_i = \{a_\nu \in A_i | \nu \in \prod^{(i)}\}, \ \mathbf{r}_B = (r_\nu)_{\nu \in \prod^{(0)}}, \ \mathbf{D}_B^{(i,j)}(s) = (d_{\rho\nu}^{(i,j)})_{\rho \in \prod^{(j)}}^{\nu \in \prod^{(i)}},$$

где $\prod^{(i)} = \{\nu | \mathbf{p}^{(i)}(\nu) = 1\}$ — множество состояний, для которых соответствующие компоненты вектора $\mathbf{p}^{(i)}$ равны 1, r_ν — элементы вектора $\mathbf{r}_A, d_{\rho\nu}^{(i,j)}$ — элементы матриц $\mathbf{D}_A^{(i,j)}(s)$, эквивалентен автомату $\mathcal{A}_{nd}$ и не содержит недостижимых состояний.

Данная теорема - аналог теоремы А.Ю. Пономаревой и Р.В. Строилова, адаптированный для исследуемой задачи.

Совокупность матриц степеней принадлежности множеству переходов $\mathbf{R}_B^{(i,j)}(x) \in \mathbf{L}^{m_i,m_j}$, $x \in X$, получается из совокупности матриц переходов $\mathbf{D}_A^{(i,j)}(x) \in \mathbf{L_0}^{m_i,m_j}$ из состояний алфавита A_i в состояния алфавита A_j путем применения к ним нечетких ограничений C.

Эквивалентность автоматов $\mathcal{A}_f$ и $\mathcal{B}_{sf}$

$\mathcal{A}_f$ и $\mathcal{B}_{sf}$ называются эквивалентными, если они индуцируют одинаковое автоматное отображение, т.е. $\Phi(A_f) = \Phi(B_{sf})$.

Теорема 2.2. (Теорема эквивалентности)

Для каждого абстрактного конечно-нестационарного нечеткого автомата $\mathcal{A}_f$ может быть построен эквивалентный ему абстрактный стационарный нечеткий автомат $\mathcal{B}_{sf}$, имеющий $m = \sum_{i=0}^{k} |A_i|$ состояний.

Данная теорема - аналог теоремы Ж.-Б. Мбайтара и М.К. Чиркова, адаптированный для исследуемой автоматной модели.

Теорема 2.3.

Для нечеткого стационарного автомата $\mathcal{B}_{sf}$ множество входных слов Z_{max} непусто и существует $\omega^{opt} = x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_d}$ такое, что выполняется

$$\Phi_f(\omega^{opt}) = \mu_{max} = \max_{\omega \in X} (\mathbf{r}_0 \prod_{\tau=1}^{d} \mathbf{R}(x_{s_\tau}) \mathbf{q}),$$

в том и только том случае, если $\mu_{max} = \mathbf{r}_0 \mathbf{q}^{(0)} > 0$, где $\mathbf{q}^{(0)}$ определяется рекуррентным соотношением

$$\mathbf{q}^{(d-\nu-1)} = \mathbf{R}^{(d-\nu)} \mathbf{q}^{(d-\nu)}, \ \ \nu = \overline{0, d-1}.$$

Метод был разработан Е.Н. Мосягиной и М.К.Чирковым, применительно к периодически-нестационарным автоматным моделям.

$$\hat{\mathbf{U}} = \bigcup_{x_{s_\tau} \in X} \mathbf{D}(x_{s_\tau}) x_{s_\tau}, \ \tau = \overline{1, d},$$

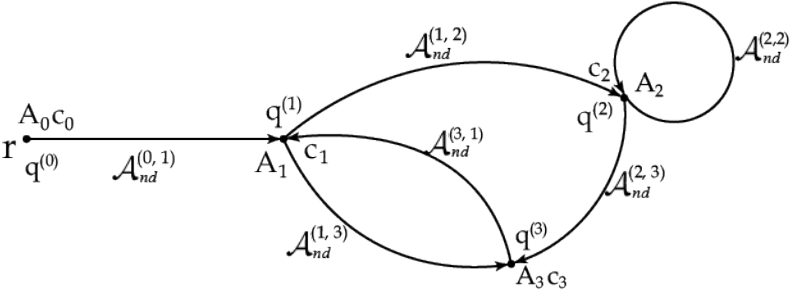
— автоматные матрицы автомата $\mathcal{B}_{snd}$.

Теорема 2.4.

Если нечеткий стационарный абстрактный автомат $\mathcal{B}_{sf}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3, и недетерминированный стационарный абстрактный автомат $\mathcal{B}_{snd}$ получен из автомата $\mathcal{B}_{sf}$ заменой элементов векторов $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}$ и матриц $\{\mathbf{R}(x)\}$, которые больше или равны μ_{max}, на элементы 1 и остальных их элементов на 0, то множество входных слов Z_{max} представлено в автомате $\mathcal{B}_{snd}$, причем его регулярное выражение имеет вид:

$$Z_{max} = \hat{\mathbf{r}}_0 \prod_{\tau=1}^{d} \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{q}},$$

Пусть задан $\mathcal{A}_{nd}$, у которого $X^{(i,j)} = X = \{x_0, x_1\}$, $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, $|A_0| = |A_2| = |A_3| = 2$, $|A_1| = 3$, структурный граф которого имеет вид:



а матрицы $\mathbf{D}^{(i,j)}(x_s)$ элементарных автоматных структур, отмечающих ребра графа, следующие:

$$\mathbf{D}^{(0,1)}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}^{(0,1)}(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \ldots$$

Также заданы начальный вектор и конечные вектора, ненулевые для двух вершин:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \qquad \mathbf{q}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Пусть для нашего автомата также заданы матрицы ограничений:

$\boldsymbol{\mu}_c^{(0)}$	a_1	a_2
x_0	0.7	1
x_1	1	0.8

,

$\boldsymbol{\mu}_c^{(1)}$	a_1	a_2	a_3
x_0	1	0.9	0.8
x_1	0.7	1	0.8

, ...

и цели:

$$\boldsymbol{\mu}_g^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 \end{pmatrix}^T, \qquad \boldsymbol{\mu}_g^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}^T.$$

Решение.
В соответствии с п.1 алгоритма - строим семейство векторов $p^{(i)}$ для удаления недостижимых состояний.

$$\mathbf{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По теореме 2.1. недостижимыми являются состояния $a_2 \in A_0$, $a_3 \in A_1$ и $a_2 \in A_3$.

Пример

Опуская процесс приведения автомата $\mathcal{A}_{nd}$ к $\mathcal{B}_{sf}$, сразу выпишем результат:

$$\mathbf{R}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

$$\boldsymbol{\mu}_g^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad \boldsymbol{\mu}_g^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}^T.$$

Объединим нечеткие цели в одну:

$$\boldsymbol{\mu}_g = \boldsymbol{\mu}_g^{(2)} \bigcup \boldsymbol{\mu}_g^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.7 & 0.6 \end{pmatrix}^T.$$

Пример

Матрица весов переходов $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_0) \cup \mathbf{R}(x_1)$. Используя результаты теоремы 2.3, найдем μ_{max} - максимальную степень достижения нечеткой цели:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.8 & 0.7 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{R}\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}^{(3)} = \mathbf{R}\mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{q}^{(4)} = \mathbf{q}^{(3)}.$$

Таким образом, процесс стабилизировался, $\mu_{max} = 0.7$. Воспользуемся теоремой 2.4. Опуская вычисления,

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x_1 x_1 x_0 \\ \Lambda \\ x_1 x_0 \\ \Lambda \end{pmatrix}$$

— искомое регулярное выражение для достижения цели $\mathbf{q}_B$ со степенью 0.7.

Результаты

- был разработан алгоритм решения задачи синтеза оптимального управления конечно-нестационарным недетерминированным автоматом;
- теорема эквивалентности была адаптирована и доказана для исследуемой автоматной модели;
- метод автоматных итераций, разработанный в монографии Е.Н.Мосягиной и М.К.Чиркова, был применен к существенно более сложной конечно-нестационарной автоматной модели;
- был разобран пример, наглядно демонстрирующий работоспособность построенного алгоритма.