

Численные методы решения волнового уравнения первого и второго порядка

Дмитриев Александр Андреевич, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Христинич Владимир Борисович
Рецензент: д.ф.-м.н. Ермаков Сергей Михайлович

Цель дипломной работы

- Анализ точности различных численных схем для волнового уравнения первого и второго порядка.
- Построение точных решений для сравнения с численными решениями.
- Применение рекуррентного метода Монте-Карло к волновому уравнению второго порядка.
- Разработка графического интерфейса, позволяющего:
 - иллюстрировать решения, полученные различными методами;
 - сравнивать точность различных методов;
 - анализировать их устойчивость.

Волновое уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Для численного решения использовались методы:

- метод Эйлера;
- метод использования разностей против потока;
- метод Лакса;
- метод Лакса-Вендроффа;
- метод Мак-Кормака;
- метод Бима-Уорминга;
- неявный метод Эйлера.

Точное решение задается формулой:

$$u(x, t) = f(x - at).$$

В качестве ошибки численного метода используется разница между численным и точным решением.

Возможности интерфейса программы

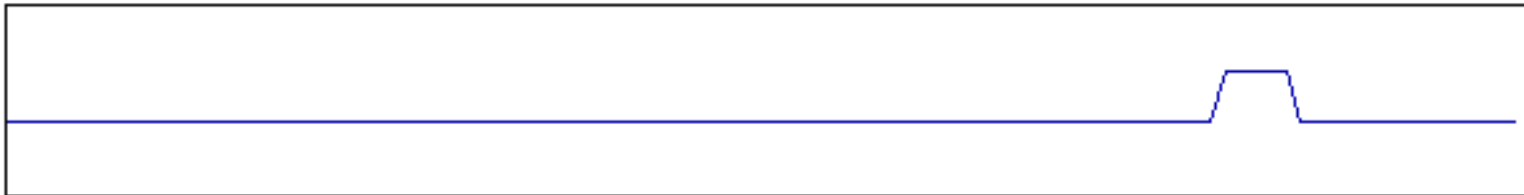
Программный интерфейс позволяет:

- получать решение одномерного волнового уравнения первого порядка меняя различные параметры: скорость переноса, начальные данные, шаг по пространству и времени;
- в режиме реального времени изучать поведение решения волнового уравнения;
- анализировать устойчивость численного решения из-за накопления ошибки;
- изучать накопление ошибки со временем. Накопленные ошибки выводятся в динамическом режиме при визуализации решения;
- анализировать динамику накопления ошибки по графику;
- сравнивать решения, полученные по различным разностным схемам, и оценивать различные методы по накопленным за одинаковый промежуток времени ошибкам.

Поведение решения со временем

число Куранта 1.000100

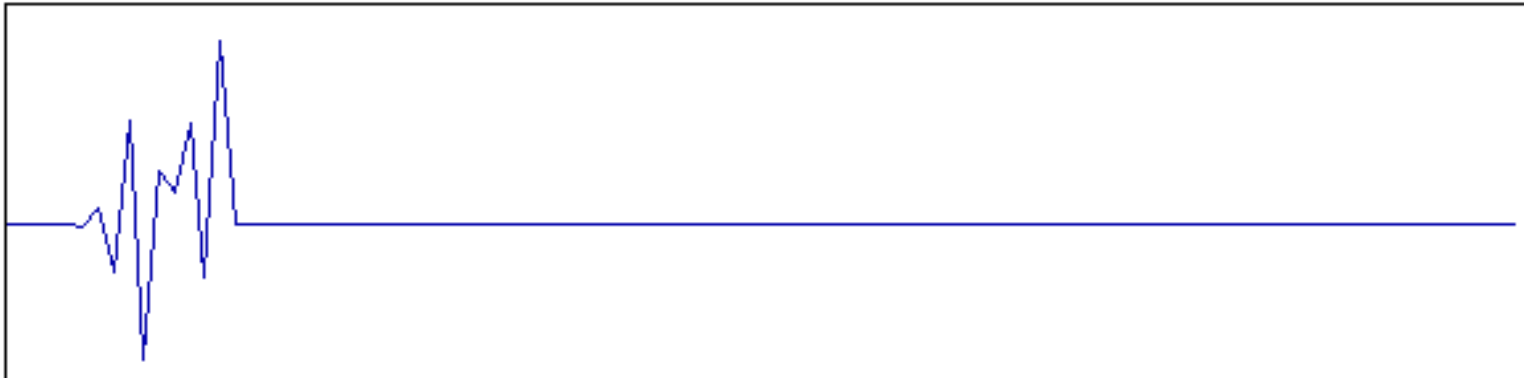
Ошибка решения 0.004620019812137 схема - разности против потока $t = 81$



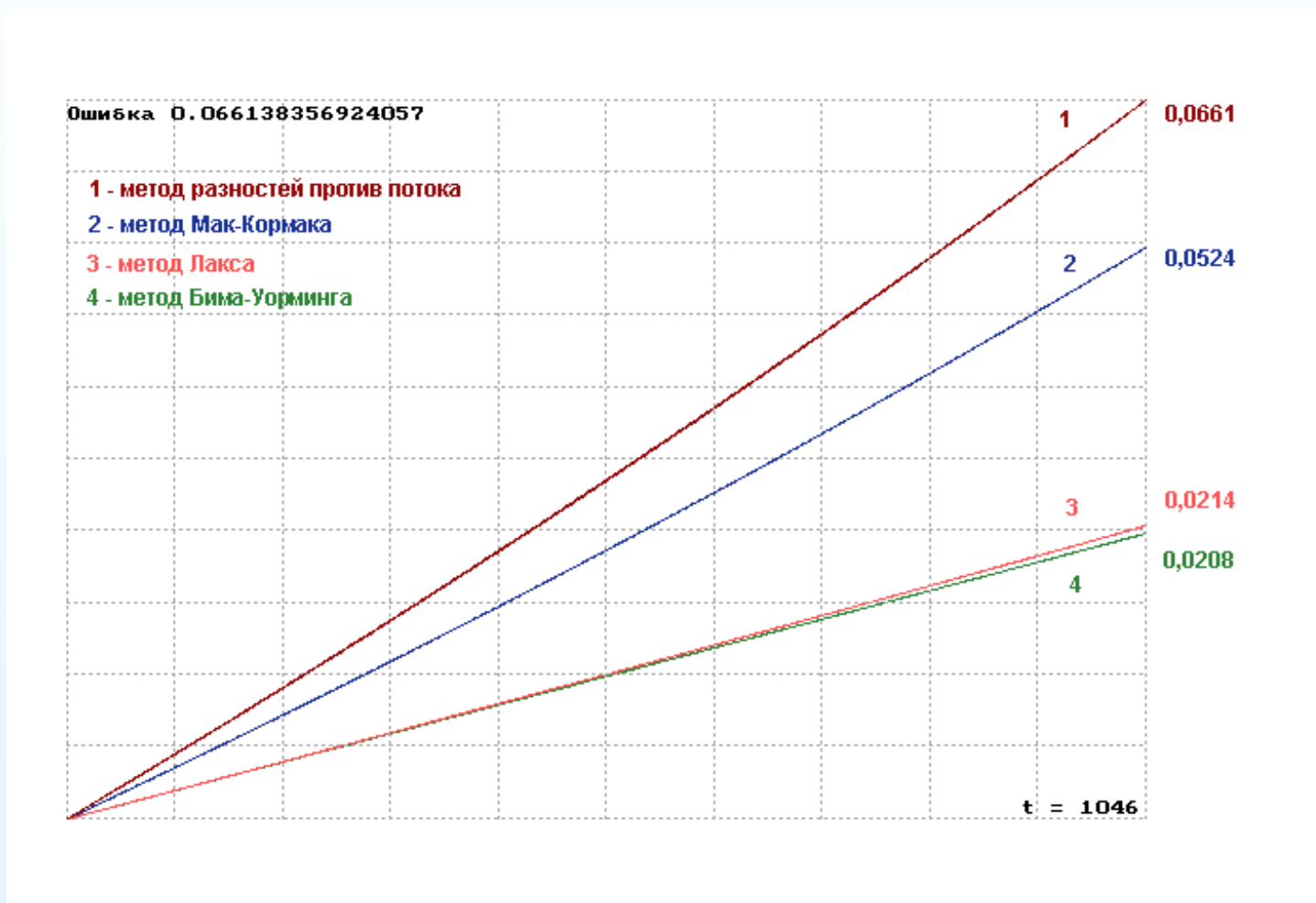
Ошибка решения 0.113183736801147 схема - разности против потока $t = 1661$



Ошибка решения 0.998446345329285 схема - разности против потока $t = 6471$



Сравнение точности разностных методов



Сравнение точности различных разностных методов. Отклонение от точного решения за одинаковый промежуток времени.

Волновое уравнение второго порядка

$$u_{xx} - a^2 u_{tt} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0.$$

- Граничные условия: $U(0, t) = U(L, t) = 0, \quad t \geq 0.$
- Начальные условия: $U(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L,$
 $U_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L.$

Для сравнения использовались:

- точное решение, полученное методом Фурье;
- численное решение, полученное методом конечно-разностной аппроксимации на основе явной схемы "Крест" и неявной схемы "Т";
- решение, полученное рекуррентным методом Монте-Карло на основе явной схемы "Крест" и неявной схемы "Т".

Кроме того, для рекуррентного метода Монте-Карло реализована возможность исследования всего множества трехслойных разностных схем.

Точное решение

Для граничных и начальных условий:

$$\begin{aligned}u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \\u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\u_t(x, 0) &= \psi(x), \quad 0 < x < L\end{aligned}$$

точное решение представляется в виде ряда Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\psi_k \sin \frac{\pi k}{l} t + \varphi_k \cos \frac{\pi k}{l} t] \sin \frac{\pi k x}{l},$$

где

$$\psi_k = \frac{l}{\pi k} \int_0^l \psi(x) \sin(\pi k x) dx, \quad \varphi_k = \int_0^l \varphi(x) \sin(\pi k x) dx.$$

Для того, чтобы получать решение для любых начальных условий, коэффициенты φ_k и ψ_k вычислялись численным методом.

Рекуррентный метод Монте-Карло

Волновое уравнение второго порядка сводится к итерационному процессу вида:

$$x^n = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + f, \quad n \geq 2.$$

Рекуррентному методу Монте-Карло соответствует одношаговый итерационный процесс:

$$y^n = \mathcal{A}_0 y^n + \mathcal{A}_1 y^{n-1} + \varphi, \quad n \geq 1,$$

где

$$y^n = \begin{pmatrix} x^n \\ x^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix}.$$

Зная y^0 из начальных условий и решая на каждом шаге по времени методом Монте-Карло систему линейных уравнений $y^n = \mathcal{A}_0 y^n + F$, где $F = \mathcal{A}_1 y^{n-1} + \varphi$, получается решение на следующем временном слое.

Построение итерационного процесса

Введём дифференциальный оператор второго порядка:

$$(\Delta_h z)_k := \frac{z_{k+1} - 2z_k + z_{k-1}}{h^2}, \quad k = 1, \dots, m,$$

действующий на векторах $z = (z_1, \dots, z_m)$, где $z_0 = z_{m+1} := 0$. Иначе его можно записать как:

$$\Delta_h z = \frac{1}{h^2} (B - 2I)z,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построение итерационного процесса

Рассмотрим семейство трехслойных разностных схем:

$$\frac{x_k^{j+1} - 2x_k^j + x_k^{j-1}}{\tau^2} = \alpha(\Delta_h x^{j+1})_k + \beta(\Delta_h x^j)_k + \gamma(\Delta_h x^{j-1})_k,$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Веса α, β, γ задают бесконечное множество разностных схем, каждая из которых обладает своими свойствами, такими как точность и устойчивость, исследовать которые можно лишь для конкретных α, β, γ .

Пусть вектора $x^j = (x_1^j, \dots, x_m^j)$, $j = 2, \dots, n$.

Тогда разностная схема сводится к итерационному процессу:

$$x^{j+1} = A_0 x^{j+1} + A_1 x^j + A_2 x^{j-1},$$

где

$$A_0 = \frac{\alpha}{2\alpha + \mu^2} B, \quad A_1 = \frac{2[\mu^2 - \beta]}{2\alpha + \mu^2} I + \frac{\beta}{2\alpha + \mu^2} B,$$

$$A_2 = -\frac{\mu^2 + 2\gamma}{2\alpha + \mu^2} I + \frac{\gamma}{2\alpha + \mu^2} B, \quad \mu^2 := \frac{h^2}{\tau^2}.$$

Описание интерфейса программы

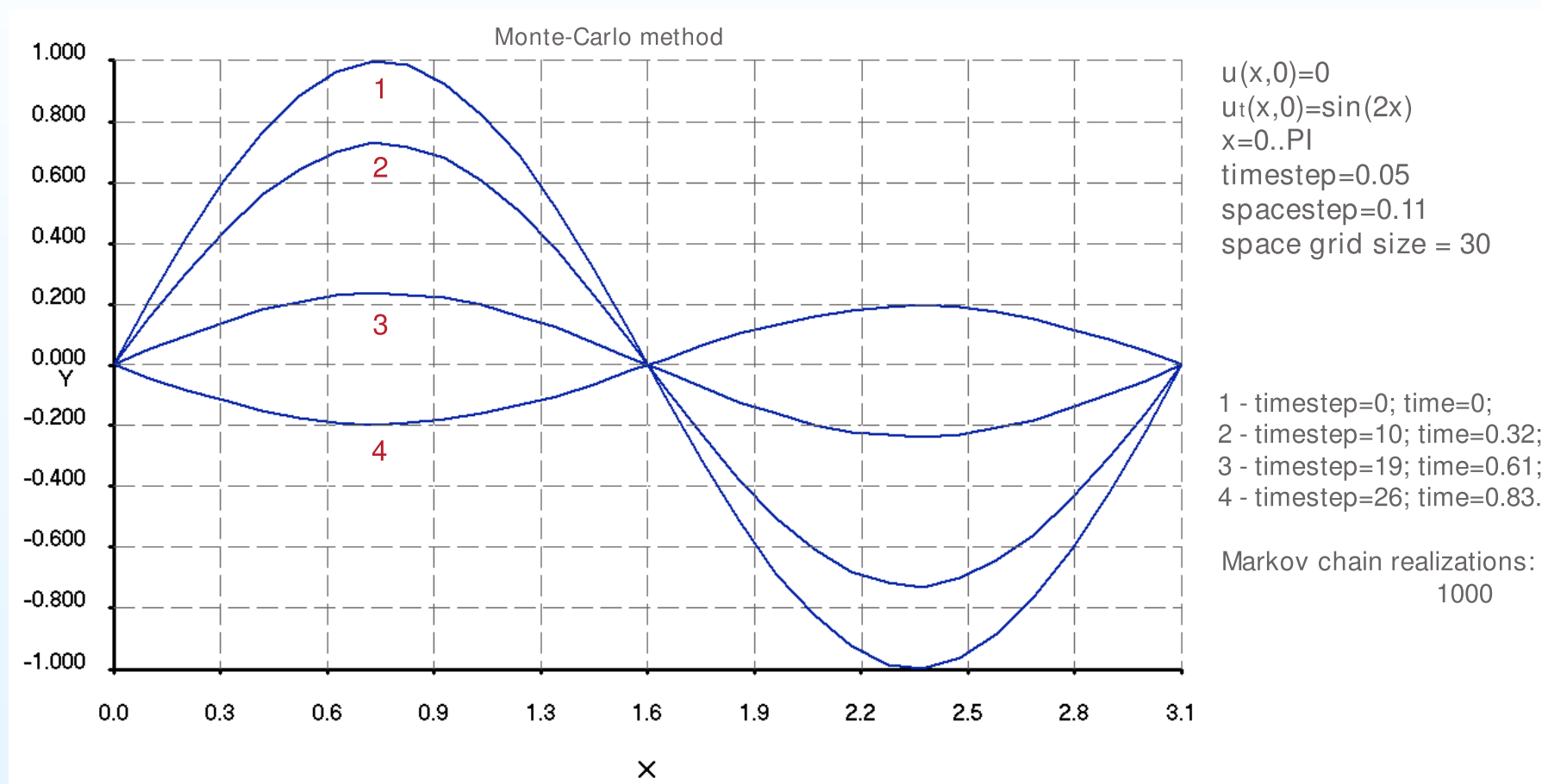
Совокупность программ, входящих в интерфейс решения волнового уравнения второго порядка, позволяет с использованием графической визуализации решений в режиме реального времени анализировать точность, давать визуальную оценку устойчивости. Реализованы методы получения решения:

- точное решение, полученное с помощью рядов Фурье;
- численное решение, полученное методом конечно-разностной аппроксимации;
- решение, полученное рекуррентным методом Монте-Карло.

Для метода Монте-Карло реализованы возможности:

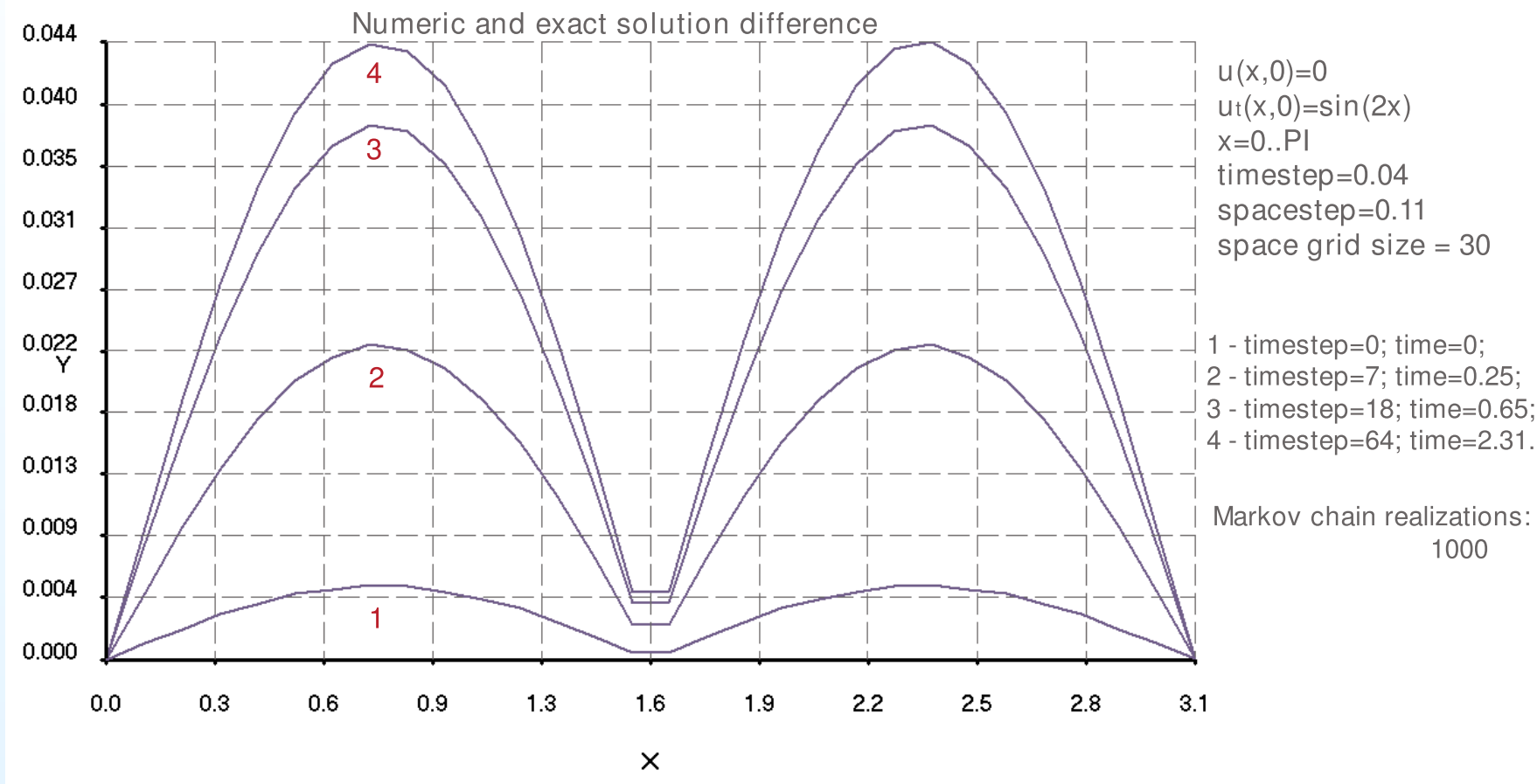
- исследования всего многообразия трехслойных разностных схем;
- анализа точности и устойчивости метода в зависимости от количества реализаций цепи Маркова.

Пример работы программы



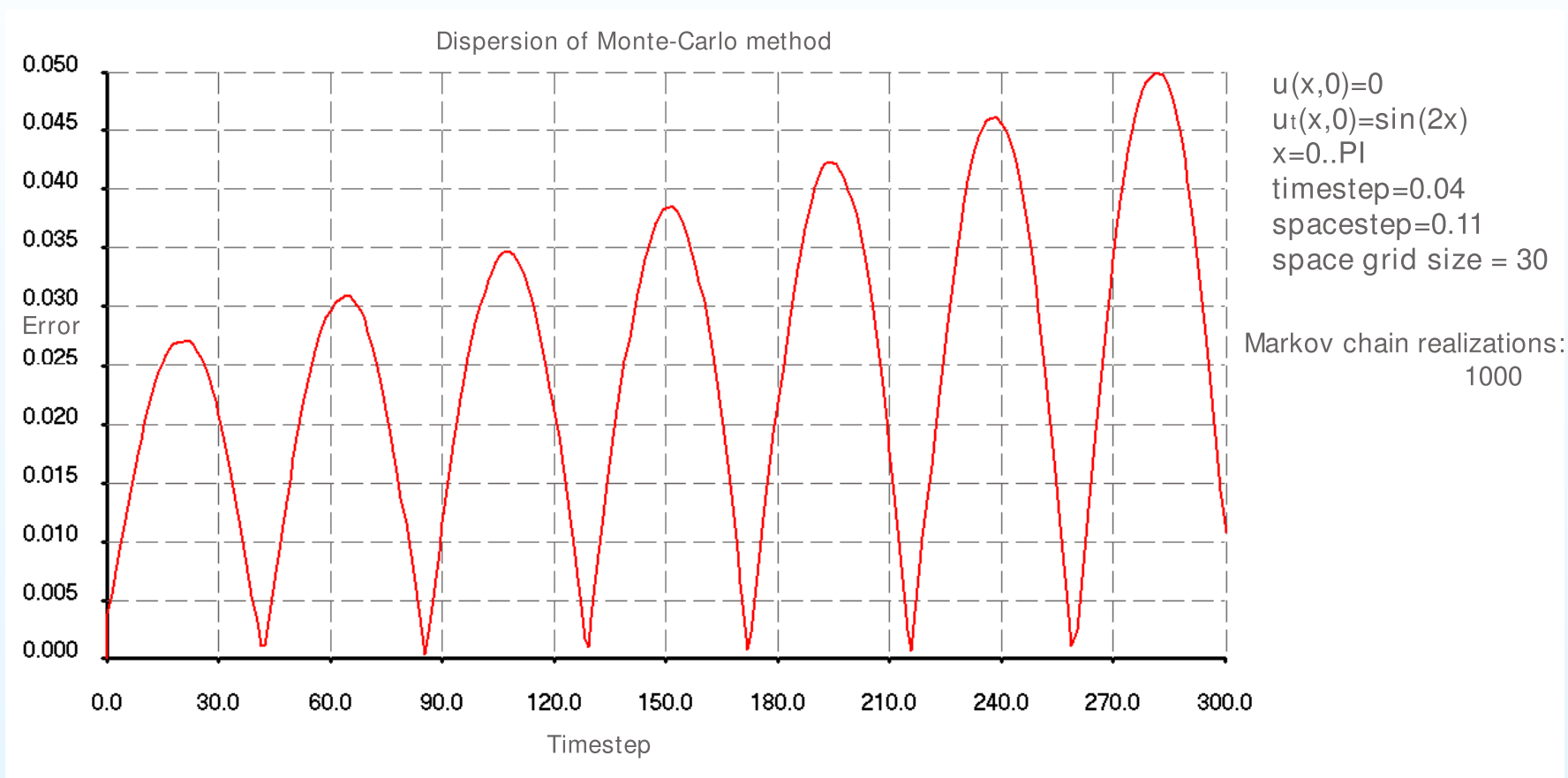
Поведение решения волнового уравнения, полученного рекуррентным методом Монте-Карло, в различные моменты времени.

Пример работы программы



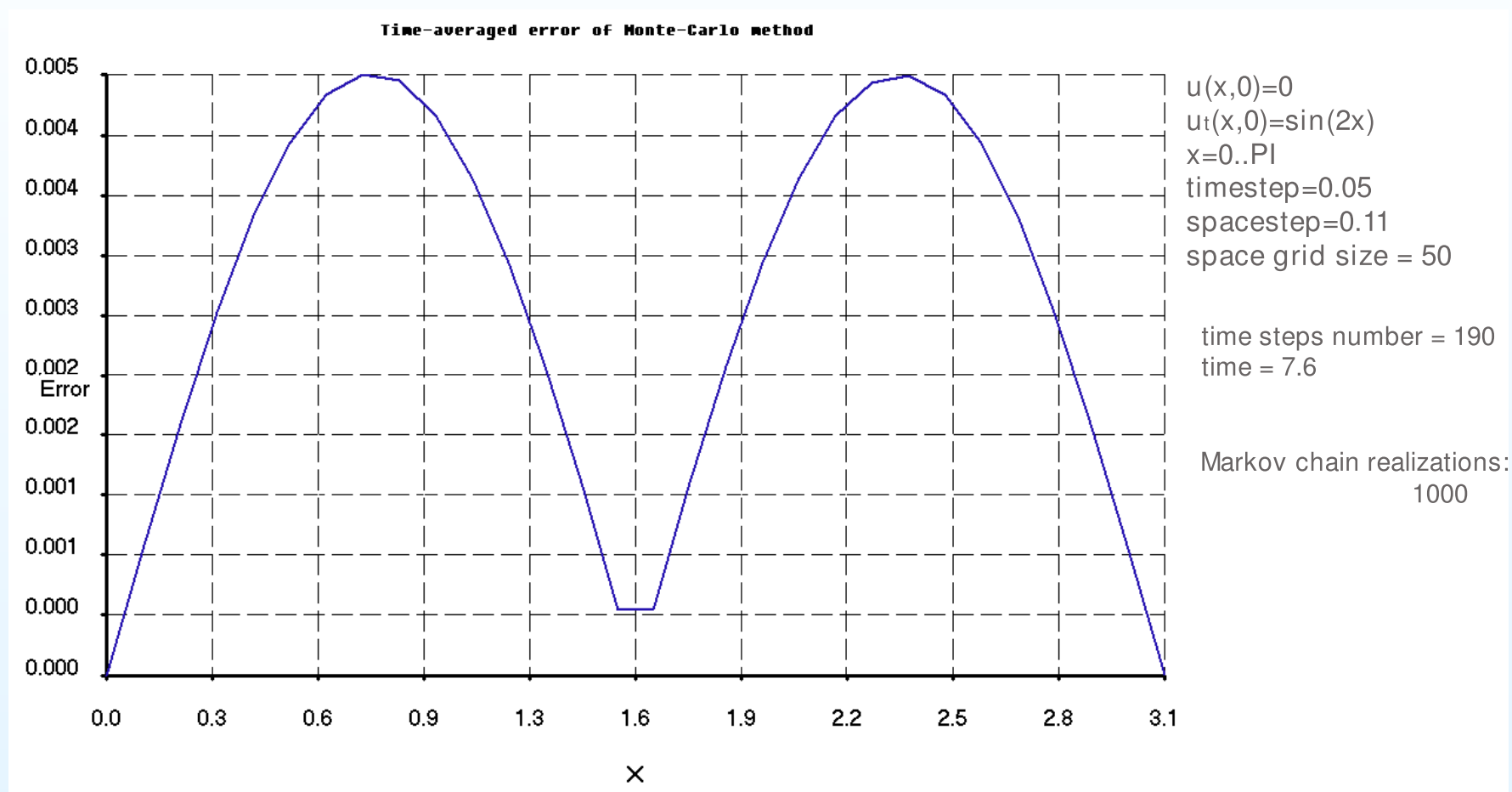
Ошибка, полученная в результате численного решения волнового уравнения методом Монте-Карло.

Пример работы программы



Среднеквадратичное отклонение численного решения, полученного методом Монте-Карло, от точного решения, полученного с помощью ряда Фурье.

Пример работы программы



Ошибка, полученная в результате численного решения волнового уравнения методом Монте-Карло, усредненная по времени.

Сравнение эффективности методов.

Было проведено сравнение эффективности исследуемых методов. Эффективность оценивалась следующим образом. Были заданы одинаковые параметры разностных схем: размерность сетки по пространству N_X , шаг по пространству h , шаг по времени τ . Фиксировалось время вычисления решения на одинаковом промежутке времени различными методами.

В следующей таблице приведено время вычисления решений для волнового уравнения второго порядка с начальными условиями $u(x, 0) = \sin 2x$, $u_t(x, 0) = 0$, $x = 0.. \pi$ и нулевыми граничными условиями. $N_X = 30$, $h = 0.1083$, $\tau = 0.0022$, количество реализаций цепи Маркова в методе Монте-Карло $N = 1000$. Под периодом понимается время периода колебания струны. Сравнение проводилось на процессоре AMD Sempron 2.0GHz.

| | Сх. "Крест" | Сх. "Т" | м. М.-К., сх. "Крест" | м. Фурье |
|-------------|-------------|---------|-----------------------|-----------|
| 10 периодов | 8 мс | 16 мс | 19016 мс | 257641 мс |
| 20 периодов | 16 мс | 32 мс | 38024 мс | 535500 мс |
| 30 периодов | 24 мс | 47 мс | 57094 мс | 811407 мс |

Время, затраченное на расчет.

Прогноз эффективности методов.

Сравнение сделано в одномерном случае по пространству. В $R^2(t, x, y)$ и $R^3(t, x, y, z)$ эффективность схем "Крест" и "Т" падает в степенной зависимости, а для метода Монте-Карло такой зависимости нет и можно оценить, насколько он будет эффективен по сравнению с другими методами в R^2 и R^3 .

| | Схема "Крест" | Схема "Т" | м. М.-К., схема "Крест" |
|-------------|---------------|-----------|-------------------------|
| 10 периодов | 64 мс | 256 мс | 19016 мс |
| 20 периодов | 256 мс | 1024 мс | 38024 мс |
| 30 периодов | 576 мс | 2209 мс | 57094 мс |

Прогноз времени, которое будет затрачено на расчет в пространстве R^2 .

| | Схема "Крест" | Схема "Т" | м. М.-К., схема "Крест" |
|-------------|---------------|-----------|-------------------------|
| 10 периодов | 512 мс | 4096 мс | 19016 мс |
| 20 периодов | 4096 мс | 32768 мс | 38024 мс |
| 30 периодов | 13824 мс | 103823 мс | 57094 мс |

Прогноз времени, которое будет затрачено на расчет в пространстве R^3 .