Имитационное моделирование течения разреженного газа в канале

Бережная Мария Владимировна, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., д. Христинич В.Б.
Рецензент: к.ф.-м.н., д. Кривулин Н.К.

Санкт-Петербург
2010г.

Цель дипломной работы

- Исследование свободномолекулярного течения разреженного газа в цилиндрическом канале методом имитационного статистического моделирования с помощью имеющихся теоретических результатов.
- Построение эмпирических плотностей скоростей частиц в заданных контрольных областях канала.
- Получение оценок характеристик газового потока в заданных контрольных областях канала.

Теоретическая постановка задачи течения газа в цилиндрическом канале

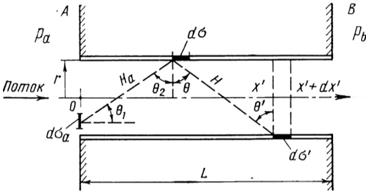


Рис. 1

$d\sigma$, $d\sigma_\alpha$, $d\sigma'$ – рассматриваемые контрольные участки поверхности канала.

θ, θ_1, θ_2, θ' – углы, определяющие траектории движения молекул.

H, H_α – расстояния между участками поверхности.

x', $x' + dx'$ – координаты участка поверхности $d\sigma'$.

- Рассматривается свободномолекулярное течение разреженного газа из камеры A в камеру B по цилиндрическому каналу.
- Характеристики канала: радиус канала r, длина канала L, задаваемые в единицах радиуса. Размеры канала много меньше размеров камер и средних длин свободных пробегов молекул в обеих камерах.
- Характеристики газа: в дали от входного и выходного сечений канала газ находится в равновесных состояниях соответственно при давлениях p_α и p_b, плотностях ρ_α и ρ_b, температуре $T_a = T_b = T$.
- Температура стенок канала отличается от температуры газа в камерах.

Максвелловская плотность распределения скоростей отражённых молекул:

$$f_r(\overline{r}_\omega, \overline{\xi}_r, t) = \beta_t f_i(\overline{r}_\omega, \overline{\xi}_i, t) + \alpha_t \frac{n_r}{(2\pi R T_r)^{3/2}} exp\left(-\frac{\xi_{rx}^2 + \xi_{ry}^2 + \xi_{rz}^2}{2RT_r}\right), \quad (1)$$

- f_r – плотность отраженных молекул, f_i – плотность падающих молекул,
- $\overline{r}_\omega$ – радиус-вектор точки поверхности тела,
- $\overline{\xi}_r = (\xi_{rx},\ \xi_{ry},\ \xi_{rz})$ – вектор скоростей отражённых молекул,
- $\beta_t = (1 - \alpha_t)$, α_t – коэффициент диффузного отражения, t – время,
- $\overline{\xi}_i = \overline{\xi}_r - 2\xi_{rn}\overline{n}$ – скорость молекулы до столкновения с поверхностью,
- $n_r = N_i\sqrt{\frac{2\pi}{RT_r}}$, N_i – число отражённых от стенок канала молекул,
- R - удельная газовая постоянная, T_r – подбираемая константа.

Уравнение баланса частиц для элемента поверхности канала $d\sigma$:

$$dN_{\sigma r} = dN_{\alpha\sigma} + dN_{\sigma\sigma}, \quad (2)$$

- $dN_{\sigma r}$ – число молекул, отражённых в единицу времени от $d\sigma$,
- $dN_{\alpha\sigma}$ – число падающих молекул в единицу времени на элемент $d\sigma$, прилетающих непосредственно из камеры A,
- $dN_{\sigma\sigma}$ – число падающих на элемент $d\sigma$ молекул, испытавших столкновение со стенкой канала.

Вывод основных уравнений

- Поток частиц, отражённых от элемента поверхности $d\sigma$ за единицу времени:

$$dN_{\sigma r} = d\sigma n_r(x)\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}, \tag{3}$$

  - $n_r(x)$ – числовая плотность для отражённых молекул от элемента $d\sigma$,
  - R – удельная газовая постоянная,
  - T – температура.

- Поток частиц к элементу $d\sigma$ отражённых от стенок канала:

$$dN_{\sigma\sigma} = \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} d\sigma \int\limits_0^L \left(1 - |\bar{x} - \bar{x}'| \frac{2(\bar{x} - \bar{x}')^2 + 3}{2((\bar{x} - \bar{x}')^2 + 1)^{3/2}}\right) n_r(\bar{x}') dx', \tag{4}$$

  - $\bar{x} = x/2r$,
  - $\bar{x}' = x'/2r$.

- Поток частиц к элементу поверхности $d\sigma$ от входного сечения:

$$dN_{\alpha\sigma} = \frac{1}{2} n_\alpha \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \left[\frac{1 + 2\bar{x}^2}{\sqrt{1 + \bar{x}^2}} - 2\bar{x}\right] d\sigma, \tag{5}$$

  - n_α – концентрация газа на входном сечении.

Уравнение Клаузинга. Его решение и функционал от его решения

Уравнение Клаузинга, описывающее значение концентрации частиц $\omega(\bar{x})$ в различных точках канала:

$$\omega(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \int\limits_0^{\bar{L}} K(\bar{x}, \bar{x}')\omega(\bar{x}')dx'; \qquad (6)$$

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1+2\bar{x}^2}{\sqrt{1+\bar{x}^2}} - 2\bar{x}\right], \quad K(\bar{x}, \bar{x}') = 1 - |\bar{x} - \bar{x}'|\frac{2(\bar{x}-\bar{x}')^2+3}{2((\bar{x}-\bar{x}')^2+1)^{3/2}},$$

$$\omega(\bar{x}) = \frac{n_r(\bar{x})}{n_\alpha}.$$

Приближённое решение уравнения Клаузинга $\omega = 1 - \frac{1}{2(1+\bar{L})} - \frac{\bar{x}}{1+\bar{L}}$.

Функционал от решения уравнения (6):

Коэффициент Клаузинга $W = 1 - 2\int\limits_0^{\bar{L}} \omega(\bar{x})\left[\frac{1+2\bar{x}^2}{\sqrt{1+\bar{x}^2}} - 2\bar{x}\right]d\bar{x}$.

Характеристики газового потока, получаемые с помощью коэффициента Клаузинга:

Молекулярный расход газа $N = W \cdot \pi r^2 \sqrt{\frac{RT}{2\pi}}(n_\alpha - n_b)$,

Массовый расход газа $G = W \cdot \pi r^2 \frac{p_\alpha - p_\beta}{\sqrt{2\pi RT}}$.

Уравненеие Клаузинга является интегральным уравнением Фредгольма 2го рода, в следствии чего рассматривается решение интегрального уравненения (7)

$$z(P) = \int\limits_G K(P,P')z(P')dP' + f(P) \Leftrightarrow z = Kz + f. \qquad (7)$$

Решение представимо в виде ряда Неймана $z = \sum\limits_{i=0}^{\infty} K^i f$.

Оценка функционала от решения: $(\psi, z^{(i)}) \approx \frac{1}{N} \sum\limits_{s=1}^{N} \xi_i[\psi]_s$,

- $\psi(P) \in L_2(G)$,
- $z^{(i)} = Kz^{(i-1)} + f$, – последовательные приближения решения уравнения,
- $\xi_i[\psi]_s = \frac{\psi(Q_0)}{p(Q_0)} \left[\sum\limits_{j=0}^{i-1} W_j f(Q_j) + W_i \varphi(Q_i) \right]$ – случайная величина, вычисленная на s-й случайной траектории T_i,
- $T_i = (Q_0 \to Q_1 \to \ldots \to Q_i)$ – случайная траектория, состоящая из точек Q_0, $Q_1, \ldots, Q_i$, где $p(P)$ – плотность Q_0, $p(Q_{j-1}, P)$– плотность Q_j при известной Q_{j-1},
- $W_j = \frac{K(Q_0,Q_1)K(Q_1,Q_2)\ldots K(Q_{j-1},Q_j)}{p(Q_0,Q_1)p(Q_1,Q_2)\ldots p(Q_{j-1},Q_j)}$, $W_0 = 1$ $j = 1, 2, \ldots, i$.

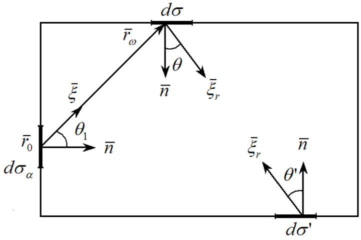
Оценка функционала от решения уравнения с использованием траекторий с поглощением: $(\psi, z) \approx \frac{1}{N} \sum\limits_{s=1}^{N} \tilde{\xi}_\nu[\psi]_s$.

- $\psi(P) \in L_2(G)$,
- z – оценка решение уравнения (7),
- $\tilde{\xi}_\nu[\psi]_s = \frac{\psi(Q_0)}{p(Q_0)} \tilde{W}_\nu \frac{f(Q_\nu)}{\alpha(Q_\nu)}$ – случайная величина, вычисленная на s-й случайной траектории $\tilde{T}_\nu$,
- $\tilde{T}_\nu = (Q_0 \to Q_1 \to \cdots \to Q_\nu)$ – случайная траектория случайной длины ν, состоящая из точек $Q_0,\ Q_1, \ldots, Q_\nu$, где $p(P)$ – плотность Q_0, $0 < \alpha(P) < 1$ вероятность обрыва траектории в точке P, $p(Q_{j-1}, P)$– плотность Q_j при известной Q_{j-1},
- $\tilde{W}_\nu = \frac{K(Q_0,Q_1)K(Q_1,Q_2)\ldots K(Q_{\nu-1},Q_\nu)}{s(Q_0)s(Q_1)\ldots s(Q_{\nu-1}p(Q_0,Q_1)p(Q_1,Q_2)\ldots p(Q_{\nu-1},Q_\nu)}$, $\tilde{W}_0 = 1$ j=1,2,. . . , ν,
- $s(P) = 1 - \alpha(P)$ – вероятность рассеяния точки P.

Постановка задачи прямого статистического имитационного моделирования

- Моделирование процесса течения газа в канале в плоском случае на основе теоретических данных.
- Получение эмпирических плотностей скоростей молекул на контрольных участках канала.
- Получение оценок характеристик газа на контрольных участках канала:
  - вычисление математического ожидания скоростей молекул для оценки скорости газового потока,
  - вычисление дисперсий скоростей молекул для оценки температуры газа,
  - вычисление коэффициента асимметрии и эксцесса скоростей молекул для оценки теплопроводности и вязкости газа.

Схема задачи прямого статистического моделирования:



- $\bar{r}_0 = (r_{0x},\ r_{0y})$ – точка старта молекулы, r_{0y}–равномерно распределённая случайная величина на $[0,\ 2r]$,
- $\bar{\xi} = (\xi_x,\ \xi_y)$ – вектор скоростей молекул с распределёнными по нормальному закону компонентами,
- $(sin\theta_1,\ cos\theta_1)$ – единичный вектор направления движения молекулы,
- $\bar{r}_\omega$ – радиус-вектор точки столкновения молекулы с поверхностью,
- $\bar{\xi}_r = (\xi_{rx},\ \xi_{ry})$ – вектор скоростей молекул, отразившихся от стенки канала в точке $\bar{r}_\omega$,
- $d\sigma,\ d\sigma',\ d\sigma_\alpha$ – контрольные участки поверхности канала.

Тестирование входного потока

Контрольная гистограмма скоростей частиц, вылетевших со входного сечения.

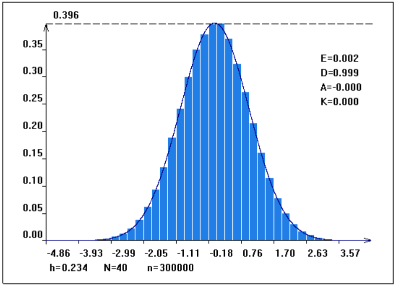


Рис.1. Гистограмма скоростей ξ_y частиц, вылетевших со входного сечения канала.

Вычисленные параметры:

- $E\xi_y = 0.002$
- $D\xi_y = 0.999$
- $A\xi_y = 0.000$
- $K\xi_y = 0.000$

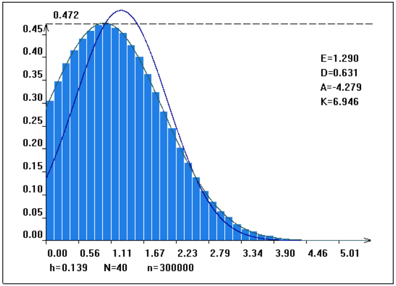


Рис.2. Гистограмма скоростей ξ_x частиц, вылетевших со входного сечения канала.

Вычисленные параметры:

- $E\xi_x = 1.290$
- $D\xi_x = 0.631$
- $A\xi_x = -4.279$
- $K\xi_x = 6.946$

Гистограммы скоростей частиц, попавших в заданный наверху участок поверхности канала и отразившихся от заданного участка поверхности канала.

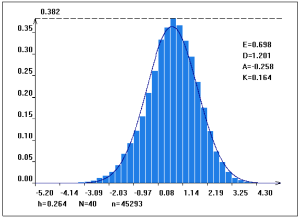


Рис.3. Гистограмма скоростей ξ_x частиц, попавших в отрезок $d\sigma$.

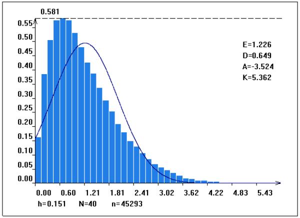


Рис.4. Гистограмма скоростей ξ_y частиц, попавших в отрезок $d\sigma$.

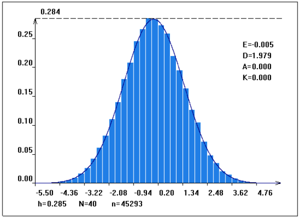


Рис.5. Гистограмма скоростей ξ_x частиц, отразившихся от отрезка $d\sigma$.

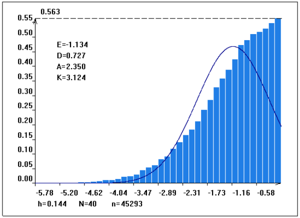


Рис.6. Гистограмма скоростей ξ_y частиц, отразившихся от отрезка $d\sigma$.

Результаты задачи имитационного моделирования

Гистограммы скоростей частиц, вышедших из участка входного сечения канала $d\sigma_\alpha$ или отразившихся от заданного внизу участка поверхности канала $d\sigma'$ и попавших в заданный наверху участок поверхности канала $d\sigma$.

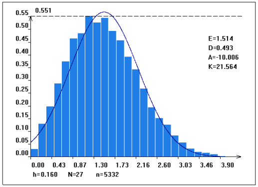


Рис.7. Гистограмма скоростей ξ_x частиц, вылетевших из отрезка $d\sigma_\alpha$ и попавших в $d\sigma$.

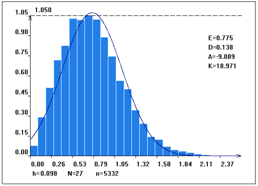


Рис.8. Гистограмма скоростей ξ_y частиц, вылетевших из отрезка $d\sigma_\alpha$ и попавших в $d\sigma$.

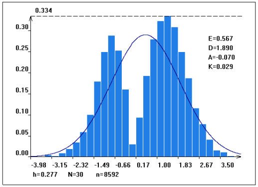


Рис.9. Гистограмма скоростей ξ_x частиц, вылетевших из отрезка $d\sigma_\alpha$ или отразившихся от отрезка $d\sigma'$, попавших в отрезок $d\sigma$.

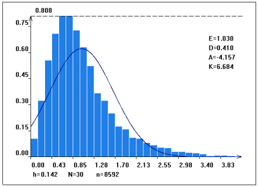


Рис.10. Гистограмма скоростей ξ_y частиц, вылетевших из отрезка $d\sigma_\alpha$ или отразившихся от отрезка $d\sigma'$, попавших в отрезок $d\sigma$.

Результаты задачи имитационного моделирования

Гистограммы скоростей частиц, покинувших канал через выходное сечение.

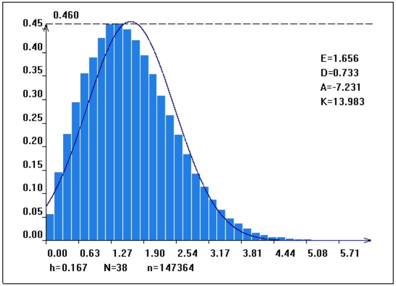


Рис.11. Гистограмма скоростей ξ_x частиц, вылетевших через выходное сечение.

Вычисленные параметры:

- $E\xi_x = 1.656$
- $D\xi_x = 0.733$
- $A\xi_x = -7.231$
- $K\xi_x = 13.983$

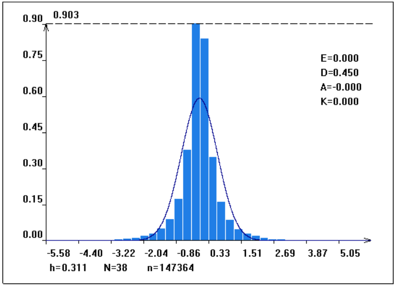


Рис.12. Гистограмма скоростей ξ_y частиц, вылетевших через выходное сечение.

Вычисленные параметры:

- $E\xi_y = 0.000$
- $D\xi_y = 0.450$
- $A\xi_y = 0.000$
- $K\xi_y = 0.000$

Результаты задачи имитационного моделирования

Гистограммы скоростей частиц, попавших в заданную область прямоугольной формы внутри канала.

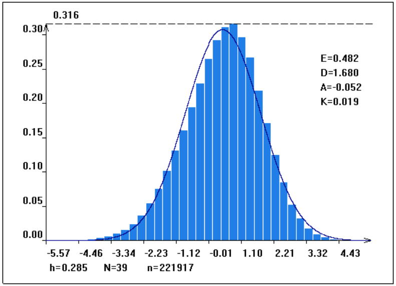


Рис.13. Гистограмма скоростей ξ_x частиц, попавших в заданную прямоугольную область канала.

Вычисленные параметры:

- $E\xi_x = 0.482$
- $D\xi_x = 1.680$
- $A\xi_x = -0.052$
- $K\xi_x = 0.019$

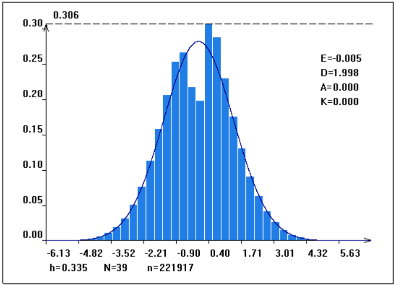


Рис.14. Гистограмма скоростей ξ_y частиц, попавших в заданную прямоугольную область канала.

Вычисленные параметры:

- $E\xi_y = -0.005$
- $D\xi_y = 1.998$
- $A\xi_y = 0.000$
- $K\xi_y = 0.000$

Заключение

- Рассмотрена теоретическая задача течения разреженного газа в канале, вывод уравнения Клаузинга, являющегося интегральным уравнением Фредгольма втророго рода и рассмотрено решение интегрального уравнения методом Монте-Карло.
- Методом статистического имитационного моделирования построены эмпирические плотности скоростей молекул, попавших в заданные контрольные области канала.
- Получены оценки характеристик распределений скоростей молекул, позволяющие оценить скорость потока, температуру, вязкость газа и теплопроводность в заданных областях канала.