

## ПРОГРАММА КУРСА ПО "МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ".

Необходимо знать содержательный смысл каждого понятия, результата, статистической процедуры, а также понимать зачем они нужны и какие у них достоинства и недостатки.

1. Задачи математической статистики. Описательная статистика. Теория статистических выводов. Типы данных: количественные и качественные; первичные, вторичные (степень их достоверности). Случайная и систематическая ошибки. Примеры.

2. Выборка. Статистика. Частота. Относительная частота. Связь относительной частоты события и вероятности события.

3. Эмпирическая функция распределения и гистограмма. Их связь с теоретической функцией распределения и плотностью распределения. Уметь их строить.

4. Основные числовые характеристики выборки и общий принцип построения их оценок. Выборочные среднее и дисперсия, начальный и центральный моменты.

5. Оценки параметров положения. Медиана, мода, выборочное среднее.

6. Оценки параметров рассеяния. Выборочная дисперсия, стандартное отклонение, абсолютное отклонение, квантили, квартили, персентили, интерквартильный размах, размах.

7. Оценки параметров формы плотности. Асимметрия и эксцесс.

8. Роль нормального распределения в статистике.

9. Теорема об асимптотической нормальности функций от асимптотически нормальных случайных величин. Ее следствия.

10. Примеры применения теоремы об асимптотической нормальности функций от асимптотически нормальных случайных величин.

11. Теория статистического оценивания. Общая постановка задачи. Определения статистики, статистической оценки, функции потерь, квадратичной функции риска и ее связь с дисперсией оценки. Примеры статистических оценок.

12. Доверительное оценивание (зачем оно нужно?). Доверительный интервал, уровень доверия.

13. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения (дисперсия известна и неизвестна). Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения. Доверительный интервал для биномиального распределения.

14. Построение доверительного интервала на основе асимптотически нормальных статистических оценок. Многомерное нормальное распределение. Доверительный эллипсоид.

15. Двумерное нормальное распределение для единичной и диагональной ковариационной матрицы. Его плотность и график. Болезнь размерности.

16. Двумерное нормальное распределение для произвольной ковариационной матрицы. Его плотность и график. Теорема о представлении двумерного нормального вектора.

17. Распределения связанные с нормальным: хи-квадрат, Стьюдента, Фишера. Где каждое из них применяется.

18. Распределение выборочного среднего в нормальной модели. Независимость выборочных средних и дисперсии.

19. Требования к статистическим оценкам. Состоятельность, несмещенность, асимптотическая нормальность, асимптотическая эффективность.

20. Несмещенные оценки с равномерно минимальной дисперсией. Неравенство Рао - Крамера. Информационное количество Фишера. Эффективность выборочного среднего в нормальной модели.

21. Асимптотическая нормальность. Стандартная ошибка. Нижняя граница в асимптотически эффективном оценивании.

22. Достаточные статистики. Характеризация достаточности Примеры

23. Теорема Рао Блекуэла Колмогорова Ее содержательный смысл

24. Метод моментов. Обобщенный метод моментов. Метод наименьших квадратов. Асимптотическая нормальность оценок.

25. Байесовский подход к теории оценивания. Априорная и апостериорная плотности распределения. Апостериорный байесовский риск.

26. Критерии выбора байесовской модели. Примеры байесовских оценок.

27. Минимаксный подход к задачам статистического оценивания. Связь минимаксного и байесовского рисков. Минимаксность выборочного среднего в нормальной модели.

28. Оценки максимума апостериорной вероятности. Оценки максимума правдоподобия (ОМП) Их интерпретация.

29. Асимптотическая нормальность и эффективность ОМП. Метод накопления Фишера.

30. Понятие М-оценок. Их асимптотическая нормальность и функция влияния, ее содержательный смысл.

31. Функция влияния- общее определение. Зачем она нужна? Как ее вычислять? Примеры.

32. Проверка статистических гипотез. Простые и сложные гипотезы. Статистический критерий. Область принятия гипотезы. Критическая область. Тестовая статистика. Вероятности ошибок первого и второго рода. Статистические аспекты выбора гипотезы и альтернативы. Мощность критерия. Р-значение.

33. Лемма Неймана-Пирсона. Наиболее мощные критерии. Критерий отношения правдоподобия. Замечание к лемме Неймана Пирсона.

34. Равномерно наиболее мощные (РНМ) и равномерно наиболее мощные несмещенные (РНМН) критерии в нормальной модели. Примеры. Содержательный смысл понятия несмещенности.

35. Связь доверительного оценивания и проверки гипотез.

36. Локально наиболее мощные критерии.

37. Асимптотически эффективные критерии.

38. Байесовские критерии проверки сложных гипотез. Критерий максимума отношения правдоподобия для проверки сложных гипотез.

39. Корреляционный и регрессионный анализ. Выборочная ковариация и корреляция. Уметь считать.

40. Функция регрессии. Многомерная линейная регрессия. Метод наименьших квадратов. Матричная запись метода наименьших квадратов. Геометрическая интерпретация метода наименьших квадратов.

41. Метод наименьших квадратов для больших размерностей. Метод регуляризации, штрафная функция.
42. Решение интегрального уравнения методом регуляризации.
43. Многомерные гауссовские наблюдения и модель линейной регрессии.
44. Простая линейная регрессия. Свойства оценок МНК простой линейной регрессии.
45. Коэффициент детерминации, его содержательный смысл и связь с выборочным коэффициентом корреляции. Основное тождество  $SST = SSE + SSR$ , его содержательный смысл
46. Нелинейная регрессия. МНК. Асимптотическая нормальность оценок МНК.
47. Непараметрическое оценивание. Критерий существования непараметрической оценки.
48. Проекционные оценки. Их примеры. Адаптивные оценки. Метод Акайке.
49. Ядерные оценки плотности. Их скорость сходимости. Ядерные оценки функции регрессии.
50. Непараметрическая проверка гипотез. Метод расстояний. Преобразование Смирнова.
51. Критерии Колмогорова и омега-квадрат. Критерии проверки непараметрических гипотез симметрии и однородности.
52. Критерий хи-квадрат. Его предельное распределение.
53. Ранговый критерий Уилкоксона. Математическая постановка задачи. Понятие порядковой или ординарной шкалы.
54. Критерий знаков. Знаковая ранговая статистика Уилкоксона.
55. Ранговый критерий корреляции Спирмена.