Метод Монте-Карло при решении систем линейных алгебраических уравнений с помощью алгоритма Зейделя

Волосенко Ксения Сергеевна, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Товстик Т.М.
Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Ермаков С.М.

Санкт-Петербург
2015г.

Цели дипломной работы

- Решение системы линейный алгебраических уравнений, вида
$$X = AX + f,$$
методом Монте-Карло, используя идеи алгоритма Зейделя;
- Изучение свойств полученного приближенного решения;
- Изучение условий сходимости метода;

- Рассмотрим систему

$$X = AX + f,$$

где $A = \{A_{ij}\}_{ij=1..n}$ — квадратная матица,
вектора $X = (X_1, ...X_n)^T$ и $f = (f_1, ...f_n)^T$ — размерности n.

- Предполагая, что k-ые приближения известны, согласно Зейделю, i-ая компонента $(k+1)$-го приближения, находится по формуле:

$$X_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} A_{ij} X_j^{(k)} + f_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

- Вводится стохастическая матрица вероятностей

$$P = \{P_{ij}\}_{ij=1..n}, \quad P_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1, \quad i \leq n, \quad (1)$$

где, например, $P_{ik} = |A_{ik}| / \sum\limits_{j=1}^{n} |A_{ij}|$.

- При каждом i согласно вероятностям (1) разыгрываем номер состояния j_i, как дискретную случайную величину, с распределением:

1	2	...	n
P_{i1}	P_{i2}	...	P_{in}

- Выбираем начальное приближение: $\zeta^{(0)} = f$.
- На m-ом шаге последовательно обновляем компоненты приближенного решения $\zeta^{(m)}$ по формуле:

$$\zeta_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{i-1} \chi(j = j_m) \frac{A_{ij_m}}{P_{ij_m}} \zeta_{j_m}^{(m)} + \sum_{j=i}^{n} \chi(j = j_m) \frac{A_{ij_m}}{P_{ij_m}} \zeta_{j_m}^{(m-1)} + f_i$$
$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \forall m \geq 1.$$

- Вектор $\zeta^{(m)}$ можно записать в виде:

  $\zeta^{(m)} = Z_n \cdot (Z_{n-1} \cdot ...(Z_2 \cdot (Z_1 \cdot \zeta^{(m-1)} + \tilde{f}_1) + \tilde{f}_2) + ... + \tilde{f}_n)$, где

$$Z_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \text{\LARGE 0} & & \\ \dots & \frac{A_{ij_i}}{P_{ij_i}} & \dots & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & \text{\LARGE 0} & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- При достаточно большом M можно оценить решение системы усреднением N реализаций случайных векторов $\zeta^{(M)}$, т.е.

$$X \approx X^{(M)} \approx \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N} \zeta_s^{(M)},$$

  где $\zeta_s^{(M)}$ — s-ая реализация вектора $\zeta^{(M)}$.

- На m-ом шаге находим математическое ожидание приближения по формуле:

$$\mathsf{E}(\zeta_i^{(m)}) = \mathsf{E}(\sum_{j=1}^{i-1} \chi(j = k) \tfrac{A_{ik}}{P_{ik}} \zeta_k^{(m)} + \sum_{j=i}^{n} \chi(j = k) \tfrac{A_{ik}}{P_{ik}} \zeta_k^{(m-1)} + f_i) =$$
$$\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} \mathsf{E}(\zeta_j^{(m)}) + \sum_{j=i}^{n} A_{ij} \mathsf{E}(\zeta_j^{(m-1)}) + f_i, \quad \forall i.$$

- Заметим, что математическое ожидание совпадает с i-ой компонентой m-го приближения классического итерационного метода Зейделя:

$$\mathsf{E}(\zeta_i^{(m)}) = X_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j^{(m)} + \sum_{j=i}^{n} A_{ij} X_j^{(m-1)} + f_i, \quad \forall 1 \le i \le n.$$

Теорема (Первое достаточное условие сходимости метода)

Пусть для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$X = AX + f,$$

выполненно условие

$$||A||_m = \max_{1\le i\le n} \sum_{k=1}^{n} |A_{ik}| < 1,$$

и пусть вектор $\zeta^{(m)}$ имеет компоненты:

$$\zeta_i^{(0)} = f_i, \quad \forall 1 \le i \le n,$$

$$\zeta_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{i-1} \chi(j = j_m) \frac{A_{ij_m}}{P_{ij_m}} \zeta_{j_m}^{(m)} + \sum_{j=i}^{n} \chi(j = j_m) \frac{A_{ij_m}}{P_{ij_m}} \zeta_{j_m}^{(m-1)} + f_i, \quad m \ge 1$$

Тогда

$$E(\zeta_i^{(m)}) = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j^{(m)} + \sum_{j=i}^{n} A_{ij} X_j^{(m-1)} + f_i = X_i^{(m)} \quad \text{и}$$

$$\lim_{m\to\infty} \mathsf{E}(\zeta_i^{(m)}) = X_i, \quad \forall 1 \le i \le n.$$

Теорема (Второе достаточное условие сходимости метода)

Пусть для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$X = AX + f,$$

выполненно условие

$$||A||_l = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} |A_{kj}| < 1,$$

и пусть вектор $\zeta^{(m)}$ *имеет компоненты:*

$$\zeta_i^{(0)} = f_i, \quad \forall 1 \le i \le n,$$

$$\zeta_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{i-1} \chi(j = j_m) \frac{A_{ij_m}}{P_{ij_m}} \zeta_{j_m}^{(m)} + \sum_{j=i}^{n} \chi(j = j_m) \frac{A_{ij_m}}{P_{ij_m}} \zeta_{j_m}^{(m-1)} + f_i, \quad m \ge 1.$$

Тогда

$$E(\zeta_i^{(m)}) = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j^{(m)} + \sum_{j=i}^{n} A_{ij} X_j^{(m-1)} + f_i = X_i^{(m)} \quad \text{и}$$

$$\lim_{m\to\infty} \mathsf{E}(\zeta_i^{(m)}) = X_i, \quad \forall 1 \le i \le n.$$

Метод Монте-Карло для алгоритма Зейделя: сходимость

Метод эквивалентен процессу простой итерации:

$$\mathsf{E}(\zeta^{(m)}) = (E - B)^{-1} C \cdot \mathsf{E}(\zeta^{(m-1)}) + (E - B)^{-1} f, \quad \forall m, \qquad (2)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема (Необходимое и достаточное условие сходимости метода)

Для сходимости процесса (2) для системы $X = AX + f$, при любом выборе начального приближения необходимо и достаточно, чтобы все корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения

$$dec|C - (E - B)\lambda| = \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21}\lambda & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ & \vdots & \vdots & \\ A_{n1}\lambda & A_{n2}\lambda & \dots & A_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

были по модулю меньше единицы.

Теорема

Рассмотрим приближенное решение $X^{(m)}$ *системы* $X = AX + f$ *и приближение* $\zeta^{(m)}$, *найденное по методу Монте-Карло для алгоритма Зейделя, такое, что:* $\mathsf{E}\zeta^{(m)} = X^{(m)}$.
Пусть векторы Y *и* g *имеют компоненты:*

$$Y_i = \mathsf{E}(\zeta_i^{(m)})^2, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$
$$g_i = 2f_i X_i^{(m)} - f_i^2, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

а элементы матрицы $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *равны:*

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}^2}{P_{ij}}.$$

Тогда вектор Y *удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений:*

$$Y = BY + g,$$

дисперсии компонент вектора $\zeta^{(m)}$ *находятся по формулам:*

$$\mathsf{D}(\zeta_i^{(m)}) = Y_i - (X_i^{(m)})^2 = Y_i - (\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j^{(m)} + \sum_{j=i}^{n} A_{ij} X_j^{(m-1)} + f_i)^2, \quad \forall i.$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(\zeta_i^{(m)}\zeta_k^{(m)}) &\xrightarrow{m\to\infty} R_{ik}, \\
\mathsf{E}(\zeta_i^{(m-1)}\zeta_k^{(m-1)}) &\xrightarrow{m\to\infty} R_{ik}, \\
\mathsf{E}(\zeta_i^{(m)}\zeta_k^{(m-1)}) &\xrightarrow{m\to\infty} R_{ik}^{\eta\xi}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Теорема

Рассмотрим приближенное решение $X^{(m)}$ системы $X = AX + f$ и приближение $\zeta^{(m)}$, найденное по методу Монте-Карло для алгоритма Зейделя, такое, что: $\mathsf{E}\zeta^{(m)} = X^{(m)}$.
Тогда при $m \to \infty$ предельные корреляции (3) удовлетворяют системе $\dfrac{3n^2+n}{2}$ уравнений:

$$
\begin{cases}
R_{ii} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{A_{ij}^2}{P_{ij}} R_{jj} + 2 f_i X_i - f_i^2, & \forall\, 1 \le i \le n, \\
R_{ik}^{\eta\xi} = \sum\limits_{j=1}^{i-1} A_{ij} R_{jk}^{\eta\xi} + \sum\limits_{j=i}^{n} A_{ij} R_{jk} + f_i X_k, & \forall\, 1 \le i, k \le n, \\
R_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{i-1} A_{ij} R_{jk} + \sum\limits_{j=i}^{n} A_{ij} R_{jk}^{\eta\xi} + f_i X_k, & \forall\, k < i,
\end{cases}
$$

где $R_{ik} = R_{ki}, \quad \forall\, k > i.$

Рассмотрим систему вида

$$X = AX + f,$$

в качестве матрицы A и вектора f рассмотрим:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & -0.1 \\ 0.2 & 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

$$\rho(M,N) = \max|X_i - X_i^{(M)}|, \quad 1 \le i \le n.$$

Таблица: Пример 1

	M	N	M	N	M	N
	40	10^3	50	10^4	50	10^5
$\rho(M,N)$	0.0202		0.0061		0.0017	

Приведем точное решение X и приближенное решение X_{seidel}, полученное методом Монте-Карло для алгоритма Зейделя при $M = 50, N = 10^4$:

$$X = \begin{pmatrix} 1{,}1666 \\ 0{,}7380 \\ 0{,}6428 \end{pmatrix}, \; X_{seidel} = \begin{pmatrix} 1{,}1637 \\ 0{,}7358 \\ 0{,}6416 \end{pmatrix}.$$

Выборочная и теоретическая матрицы ковариаций имеют вид:

$$\hat{K}_{seidel} = \begin{pmatrix} 0{,}5902 & 0{,}2581 & -0{,}1039 \\ 0{,}2581 & 0{,}5471 & -0{,}0315 \\ -0{,}1039 & -0{,}0315 & 0{,}6225 \end{pmatrix},$$

$$K_{seidel} = \begin{pmatrix} 0{,}5941 & 0{,}2178 & -0{,}0739 \\ 0{,}2178 & 0{,}5402 & -0{,}0541 \\ -0{,}0739 & -0{,}0541 & 0{,}6231 \end{pmatrix},$$

где $K_{seidel} = \{K_{ij}\}_{i,j=1..3}, \quad K_{ij} = R_{ij} - X_i X_j, \quad \forall 1 \le i, j \le 3.$

Полученные результаты:

- Разработан и реализован метод Монте-Карло для алгоритма Зейделя;
- Исследованны свойства полученного приближенного решения:
    - Найдены математические ожидания компонент решения;
    - Вычислены дисперсии компонент приближения решения, полученного на m-ой итерации;
    - Получена система линейных уравнений для вычисления предельных корреляций;
- Рассмотрены необходимое и достаточные условия сходимости.