Санкт-Петербургский Государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Репешко Виталий Игоревич

Стандартизированные E-оптимальные планы для полиномиальной модели

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор **В. Б. Мелас**

Рецензент
к. ф.-м. н., доцент **А. Н. Пепелышев**

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор **С. М. Ермаков**

Введение

Стандартизированный E-критерий оптимальности:

- E-критерий
  - минимизирует длину главной оси эллипсоида рассеяния
  - хорошо изучен (Мелас, 1997)
  - не эффективен при оценке старших производных в полиномиальной модели
- процедура стандартизации (Детте, 1997)
  - позволяет нормировать критерии оптимальности
  - применима к различным критериям

Постановка задачи

Полиномиальная модель регрессии на отрезке $\mathcal{X} = [a, b]$

$$\mathbf{E}y(x) = \theta_0 + \theta_1 x^1 + \dots + \theta_n x^n, \tag{1}$$

- $\mathcal{X}$ — *множество планирования*;
- $\mathbf{f}(x) = (1, x^1, \dots, x^n)^T$ — *вектор базисных функций*;
- $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_n)^T$ — *вектор неизвестных параметров*.

Определение 1. *Приближенным планом эксперимента* называется дискретная вероятностная мера на измеримом пространстве $\mathcal{X}$. Такую меру можно записать в виде матрицы

$$\xi = \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_m \\ \omega_0 & \dots & \omega_m \end{pmatrix}.$$

Пусть $K^T\theta$ — *оцениваемая система параметров*, где $K = (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_s) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times s}$. Для каждого плана ξ определим матрицу $M(\xi) = \int_{\mathcal{X}} \mathbf{f}(x)\mathbf{f}^T(x)d\xi(x)$.

Определение 2. План ξ называется *допустимым* для оценки системы параметров $K^T\theta$, если $\mathrm{range}(K) \subset \mathrm{range}(M(\xi))$.

Постановка задачи (продолжение)

Определение 3. Для допустимого плана ξ *информационной матрицей* для оценки системы параметров $K^T\theta$ называется матрица

$$C_K(\xi) = C_K(M(\xi)) = (K^T M^-(\xi) K)^{-1}. \quad (2)$$

Стандартизация:

- ξ_j^* — оптимальный план для оценки линейной комбинации $\mathbf{k}_j^T\theta$;
- Δ — $s \times s$ диагональная матрица с компонентами $(\mathbf{k}_j^T M^-(\xi_j^*)\mathbf{k}_j)^{-1/2}$.

Определение 4. *Стандартизированной информационной матрицей* плана ξ для оценки системы параметров $K^T\theta$ называется матрица

$$\hat{C}_K(\xi) = \hat{C}_K(M(\xi)) = (\Delta K^T M^-(\xi) K \Delta)^{-1}. \quad (3)$$

Определение 5. План ξ^* называется *стандартизированным E-оптимальным планом* для оценки системы параметров $K^T\theta$, если на нем достигается максимум величины $\lambda_{\min}(\hat{C}_K(\xi))$ по всем допустимым планам ξ.

Полученные результаты

- Свойства стандартизированных E-оптимальных планов:
  - инвариантность относительно изменения масштаба;
  - симметричность.
- Теорема единственности в общем случае.
- Явный вид оптимальных планов для линейной модели в случае $0 \in [a, b]$.
- Явный вид оптимальных планов в случае $0 \notin (a, b)$.
- Сравнение с E-оптимальными планами.

Свойства стандартизированных E-оптимальных планов

Изменение масштаба $\mathsf{X} \longrightarrow \gamma\mathsf{X} = \{\gamma x \mid x \in \mathsf{X}\}$, $\gamma > 0$

$$\xi = \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_m \\ \omega_0 & \dots & \omega_m \end{pmatrix} \longmapsto \xi_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma x_0 & \dots & \gamma x_m \\ \omega_0 & \dots & \omega_m \end{pmatrix}.$$

Отражение $\mathsf{X} \longrightarrow \hat{\mathsf{X}} = \{-x \mid x \in \mathsf{X}\}$

$$\xi = \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_m \\ \omega_0 & \dots & \omega_m \end{pmatrix} \longmapsto \hat{\xi} = \begin{pmatrix} -x_0 & \dots & -x_m \\ \omega_0 & \dots & \omega_m \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Пусть ξ^* есть стандартизированный E-оптимальный план для оценки параметров $\theta_0, \dots, \theta_n$ на множестве планирования X, тогда

- план ξ^*_γ есть стандартизированный E-оптимальный план на множестве планирования $\gamma\mathsf{X}$;
- план $\widehat{\xi^*}$ есть стандартизированный E-оптимальный план на множестве планирования $\hat{\mathsf{X}}$.

Теорема единственности в общем случае

Теорема 2. Для полиномиальной регрессии на произвольном отрезке при $n \geqslant 2$ стандартизированный E-оптимальный план для оценки системы параметров $\theta_0, \ldots, \theta_n$ единственен. Носитель оптимального плана включает концы отрезка.

Утверждение 1. Для линейной модели ($n = 1$) при условии $0 \in [a, b]$ стандартизированный E-оптимальный план единственен и задается соотношением

$$\xi^* = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - \omega^* & \omega^* \end{pmatrix},$$

где

$$\omega^* = \frac{3a^2 + b^2}{4(a^2 + b^2)}.$$

Следствие 1. В случае, когда интервал планирования X симметричен, стандартизированный E-оптимальный план также симметричен, т. е. если точка x входит в носитель плана с весом ω, то точка $-x$ также входит в носитель с тем же весом ω.

Теорема 3. Пусть ноль не является внутренней точкой интервала $X = [a, b]$. Определим $s_k = \cos(k\pi/n)$ и $s'_k = b + (a - b)(1 - s_k)/2$, $k = 0, \dots, n$. Пусть числа h_{kj} и c_j определены соотношениями

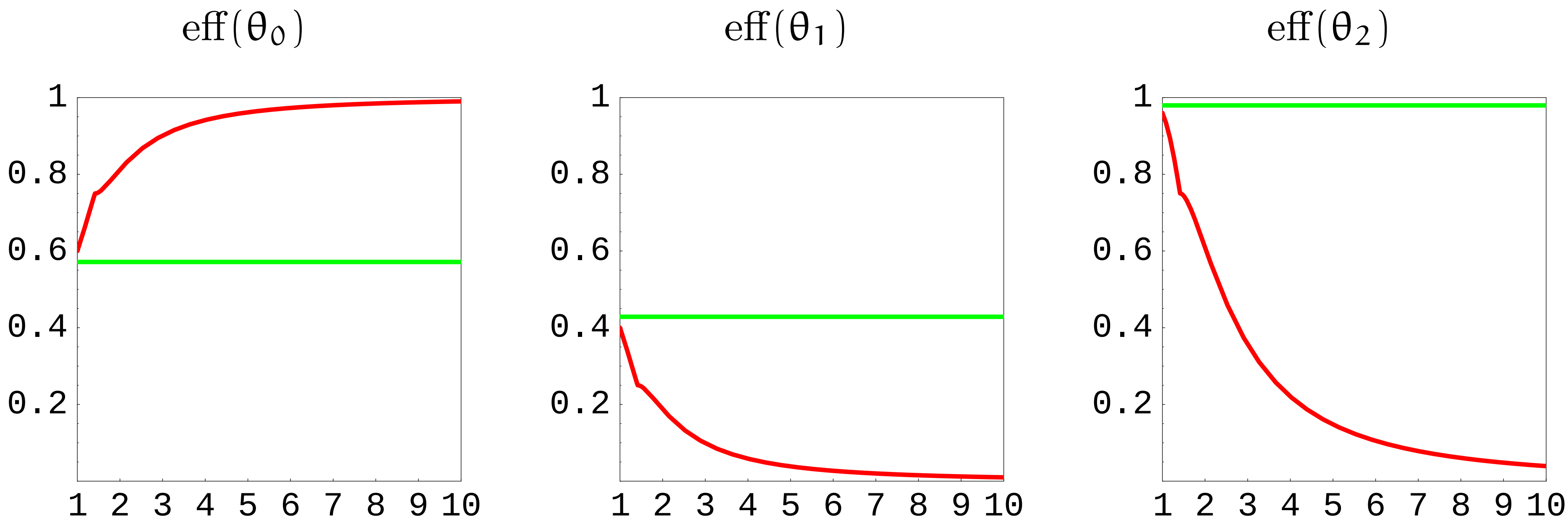
$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - s'_j}{s'_k - s'_j} = \sum_{j=0}^{n} h_{kj} x^j, \quad T_n\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j,$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ — многочлен Чебышева первого рода. Тогда для оценки каждой подсистемы параметров $(\theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_s})^T$ существует единственный стандартизированный E-оптимальный план ξ^*. Носитель σ плана ξ^* задается соотношением $\sigma_k = s'_k$, $k = 0, \dots, n$. Вектор весов w плана ξ^* задается соотношением

$$w_k = \frac{(-1)^k}{s} \sum_{\mu=1}^{s} \frac{h_{kj_\mu}}{c_{j_\mu}}, \ k = 0, \dots, n.$$

Сравнение эффективности. Квадратичная модель

$$\mathbf{E}y(x) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2, \quad x \in [-r, r].$$



- эффективность E-оптимальных планов
- эффективность стандартизированных E-оптимальных планов

Выводы

Стандартизированные E-оптимальные планы

- инвариантны к масштабным изменениям множества планирования;
- эффективнее E-оптимальных планов при оценке старших производных;
- в случае $0 \notin (a, b)$ построены в явном виде;
- в случае $0 \in (a, b)$ могут быть получены численно (целевая функция унимодальна).