Sandra Orduña Mendoza
Tarea 4

La transformada Wavelet

La transformada Wavelet de una función $f(t)$ es la descomposición de $f(t)$ en un conjunto de funciones $\psi_{s,\tau}(t)$, que forman una base y son llamadas las "Wavelets". La transformada se define como:

$$W_f(s,\tau) = \int f(t)\, \psi^{*}_{s,\tau}(t)\, dt$$

Las Wavelets son generadas a partir de la traslación y cambio de escala de una misma función wavelet $\psi(t)$, llamada la "Wavelet madre", y se define como:

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\, \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$ con $s \rightarrow$ factor de escala y $\tau \rightarrow$ factor de traslación.

Las Wavelets $\psi_{s,\tau}(t)$ generadas en la misma función wavelet madre $\psi(t)$ tienen diferente escala s y ubicación τ, pero tienen todas la misma forma. Se utilizan siempre factores de escala $s>0$. Las Wavelets son dilatadas cuando la escala $s>1$, y son contraídas cuando $s<1$. Así, cambiando el valor de s se cubren rangos diferentes de frecuencias. Valores grandes del parámetro s corresponden a frecuencias de menor rango, o una escala grande de $\psi_{s,\tau}(t)$. Valores pequeños de s corresponden a frecuencias de menor rango o escala muy pequeña de $\psi_{s,\tau}(t)$.

Transformada Wavelet en dos dimensiones

La transformada Wavelet continua puede ser extendida al caso de dos dimensiones para aplicaciones de procesamiento de imágenes; la transformada Wavelet de una imágen bidimensional $f(x,y)$ es:

$$W_f(s_x, s_y; u,v) = \frac{1}{\sqrt{s_x s_y}} \iint f(x,y)\, \psi\left(\frac{x-u}{s_x} ; \frac{y-v}{s_y}\right) dx\, dy$$

La cual es una función en cuatro dimensiones. Esta es reducida a un conjunto de funciones bidimensionales de (u,v) con diferentes escalas cuando los factores de escala son tales que $s_x = s_y = s$.

La transformada Wavelet ortogonal multiresolución en dos dimensiones se calcula por proyecciones recursivas sobre las bases de la función de escala y las bases Wavelet, como en el caso unidimensional.

Consideremos el modelo Wavelet basado en una función de escala separable

$$\phi(x,y) = \phi(x)\, \phi(y)$$

Donde $\phi(x)$ y $\phi(y)$ son funciones de escala unidimensionales. Las traslaciones discretas de $\phi(x)$ y $\phi(y)$ dilatadas generan los subespacios de aproximación multiresolución separables V_j como en el caso unidimensional. La proyección ortogonal de una imagen $f(x,y)$ sobre el conjunto de la función de escala en un nivel de resolución j es, por lo tanto, el producto interno

$$c_j(x,y) = \langle f(x,y), \phi_j(x)\, \phi_j(y) \rangle,$$

La cual es una aproximación de $f(x,y)$ en un nivel de menor resolución

Como en el caso unidimensional, se generan las wavelets $\psi(x)$ y $\psi(y)$ a partir de las funciones de escala $\phi(x)$ y $\phi(y)$, tales que el conjunto de traslaciones directas de $\psi(x)$ y de $\psi(y)$ es ortogonal al conjunto de traslaciones discretas de $\phi(x)$ y $\phi(y)$, respectivamente.

Entonces se definen tres wavelets bidimensionales como

$$\psi^1(x,y) = \phi(x)\psi(y)$$
$$\psi^2(x,y) = \psi(x)\phi(y)$$
$$\psi^3(x,y) = \psi(x)\psi(y)$$

Las diferencias de información entre las aproximaciones $C_j(x,y)$ y $C_{j+1}(x,y)$ en dos niveles adyacentes de resolución son iguales a las proyecciones ortogonales de $f(x,y)$ sobre las tres bases wavelets, resultando tres imágenes detalles

$$d_j^1(x,y) = \langle f, \psi^1 \rangle$$
$$d_j^2(x,y) = \langle f, \psi^2 \rangle$$
$$d_j^3(x,y) = \langle f, \psi^3 \rangle$$

En dos dimensiones, la descomposición Wavelet con funciones de escala y wavelet separables se puede calcular con el algoritmo de árbol usando los filtros $p(n)$ y $q(n)$, de manera similar al algoritmo unidimensional.