

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ŠTÁTNICE Z BIOINFORMATIKY  
VYPRACOVANÉ TÉMY

Študijný program: Bioinformatika  
Študijný odbor: Bioinformatika

Bratislava, 2018  
Prví Bioinformatici

# Obsah

<b>1</b>	<b>Algebra</b>	<b>1</b>
1.1	Vektorové priestory, lineárne zobrazenia . . . . .	2
1.2	Matice a riešenia lineárnych rovníc nad poľom $F$ . . . . .	2
1.3	Determinanty . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Biochémia</b>	<b>3</b>
2.1	Chémia ako logický základ biologického fenoménu DONE . . . . .	3
2.2	Aminokyseliny a proteíny DONE . . . . .	4
2.3	Sacharidy . . . . .	9
2.4	Lipidy a biologické membrány DONE . . . . .	11
2.5	Enzýmy DONE . . . . .	15
2.6	Základy metabolizmu DONE . . . . .	17
2.7	Metabolizmus sacharidov +-DONE . . . . .	18
2.8	Citrátový cyklus . . . . .	20
2.9	Oxidačná fosforylácia . . . . .	20
2.10	Fotosyntéza . . . . .	22
2.11	Metabolizmus lipidov +-DONE . . . . .	22
2.12	Degradácia aminokyselín DONE . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Bunková biológia</b>	<b>26</b>
3.1	Bunkové jadro: štruktúra a dynamika chromozómov . . . . .	28
3.2	Mechanizmy opravy poškodenej DNA DONE . . . . .	29
3.3	Transkripcia a úlohy RNA v bunke . . . . .	30
3.4	Syntéza a distribúcia proteínov v bunkách . . . . .	31
3.5	Princípy kontroly expresie génov . . . . .	33
3.6	Úloha biologických membrán v eukaryotickej bunke . . . . .	34
3.7	Mitochondrie a chloroplasty . . . . .	34
3.8	Endoplazmatické retikulum, Golgiho aparát . . . . .	35
3.9	Vakuoly, lyzozómy a peroxizómy . . . . .	35
3.10	Cytoskelet ako dynamická štruktúra +-DONE . . . . .	35
3.11	Od jednotlivých buniek k tkanivám a mnohobunkovým organizmom . .	37

<b>4</b>	<b>Diskrétna matematika</b>	<b>38</b>
4.1	Základy matematickej logiky . . . . .	38
4.2	Matematický dôkaz . . . . .	41
4.3	Intuitívny pojem množiny . . . . .	42
4.4	Karteziánsky súčin množín . . . . .	44
4.5	Relácie . . . . .	45
4.6	Usporiadania . . . . .	47
4.7	Zobrazenia . . . . .	49
4.8	Mohutnosť množiny . . . . .	50
4.9	Cantor-Bernsteinova veta a jej dôsledky . . . . .	52
4.10	Konečné a nekonečné množiny . . . . .	53
4.11	Spočítateľné a nespočítateľné množiny . . . . .	53
4.12	Potenčná množina a jej kardinalita . . . . .	54
4.13	Prirodzené čísla a matematická indukcia, Dirichletov princíp . . . . .	54
4.14	Základné pravidlá kombinatorického počítania . . . . .	55
4.15	Variácie a enumerácia zobrazení . . . . .	55
4.16	Kombinácie a enumerácia podmnožín . . . . .	55
4.17	Binomická a polynomická veta . . . . .	55
4.18	Rovnosti a nerovnosti s kombinačnými číslami . . . . .	56
4.19	Princíp zapojenia a vypojenia . . . . .	56
4.20	Hierarchia rastu funkcií, odhady čísla $n!$ O-symbolika, rádová rovnosť, asymptotická rovnosť, odhady . . . . .	56
4.21	Stromy a lesy, kostry, súvislé grafy, meranie vzdialeností v grafe . . . . .	56
4.22	Eulerovské a bipartitné grafy . . . . .	56
4.23	Meranie vrcholovej a hranovej súvislosti grafu . . . . .	56
4.24	Hamiltonovské grafy . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Genetika</b>	<b>57</b>
5.1	Molekulárne základy dedičnosti ALMOST DONE . . . . .	57
5.2	Cytologické základy dedičnosti . . . . .	62
5.3	Mendelistická dedičnosť . . . . .	62
5.4	Rozšírená mendelistická genetická analýza . . . . .	62
5.5	Dedičnosť a pohlavie . . . . .	62
5.6	Väzba génov . . . . .	62
5.7	Mimoadrová dedičnosť . . . . .	62
5.8	Genetická analýza u prokaryotov . . . . .	62
5.9	Dedičná a nededičná premenlivosť . . . . .	62
5.10	Populačná a kvantitatívna genetika . . . . .	62
5.11	Evolúcia ako biologický fenomén . . . . .	63

5.12	Mutácie a selekcia ako základné evolučné činitele. . . . .	63
5.13	Genetický drift ako evolučný činiteľ . . . . .	63
5.14	Mikroevolúcia a makroevolúcia . . . . .	63
5.15	Molekulárna evolúcia . . . . .	63
5.16	Vznik života . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Matematická analýza</b>	<b>65</b>
<b>7</b>	<b>Metódy v bioinformatike</b>	<b>66</b>
<b>8</b>	<b>Pravdepodobnosť a štatistika</b>	<b>67</b>
8.1	Definícia pravdepodobnostného modelu a základné vlastnosti pravdepodobnosti . . . . .	67
8.2	Nezávislosť udalostí, podmienená pravdepodobnosť a Bayesove vety . .	67
8.3	Diskrétné náhodné premenné . . . . .	67
8.4	Spojité náhodné premenné . . . . .	67
8.5	Zákon veľkých čísel a limitné vety . . . . .	67
8.6	Náhodné vektory . . . . .	68
8.7	Použitie štatistických testov . . . . .	68
<b>9</b>	<b>Programovanie</b>	<b>69</b>
9.1	Objektovo orientované programovanie . . . . .	70
9.2	Výnimky (exceptions) . . . . .	70
9.3	Vlákná (threads) . . . . .	70
9.4	Generics . . . . .	70
9.5	Návrhové vzory: Composite, Strategy . . . . .	70
9.6	Návrhové vzory: Decorator, Abstract Factory . . . . .	70
9.7	Návrhové vzory: Bridge, Memento . . . . .	70
9.8	Návrhové vzory: Iterator, Visitor . . . . .	70
<b>10</b>	<b>Tvorba a analýza algoritmov</b>	<b>71</b>
10.1	Analýza časovej zložitosti algoritmov . . . . .	71
10.2	Algoritmy pre triedenie . . . . .	71
10.3	Dátové štruktúry v poli . . . . .	72
10.4	Usporiadané dátové štruktúry . . . . .	72
10.5	Hešovanie . . . . .	72
10.6	Základné grafové algoritmy . . . . .	73
10.7	Najkratšie cesty v grafe . . . . .	73
10.8	Najlacnejšia kostra grafu . . . . .	73
10.9	Násobenie matíc . . . . .	74

10.10	Dynamické programovanie . . . . .	74
10.11	Ďalšie princípy tvorby efektívnych algoritmov . . . . .	75



# Kapitola 1

## Algebra

### 1.1 Vektorové priestory, lineárne zobrazenia

priestor, podpriestor, lineárna závislosť, báza a dimenzia

Steinitzova veta

súčty podpriestorov

lineárne zobrazenia, kompozícia lineárnych zobrazení, inverzné lineárne zobrazenia, matica lineárneho zobrazenia, jadro a obraz lineárneho zobrazenia

### 1.2 Matice a riešenia lineárnych rovníc nad poľom $F$

matice, operácie s maticami (násobenie, sčítanie), elementárne riadkové operácie

trojuholníkový a redukovaný trojuholníkový tvar matice

systémy lineárnych rovníc nad poľom  $F$

množina riešení homogénnych a nehomogénnych systémov lineárnych rovníc, existencia a tvary riešení

### 1.3 Determinanty

Determinant matice

Vlastnosti determinantov

Výpočty determinantov a ich použitie pri riešení lineárnych rovníc a hľadání inverznej matice

# Kapitola 2

## Biochémia

### 2.1 Chémia ako logický základ biologického fenoménu DONE

Status: DONE Source: Prezentácia 1

#### Základné vlastnosti živých systémov

Zložité a organizované

Bio štruktúry majú funkčný význam

Aktívne zapojené do premien energie

Schopnosť replikácie

Chemický základ

#### Biomolekuly

HOCN – schopnosť vytvárať kovalentné väzby cez e<sup>-</sup>páry → rôzne štruktúry

#### Vlastnosti biomolekúl

Štruktúrna polarita (napr. 5' → 3')

Informatívnosť (napr. DNA, polypeptidy)

Trojrozmerná štruktúra

#### Vlastnosti vody

Vysoká hodnota teploty topenia a varu, výparného tepla, povrchového napätia

Polarita ← Lomená štruktúra



Tvorba vodíkových väzieb

Solvatačné vlastnosti

Polárne látky → vodíkové väzby

Nepolárne → hydrofóbne interakcie

## Typy a význam slabých interakcií v biologických štruktúrach

Slabé interakcie udržujú 3D štruktúru a určujú interakcie

Napr. biomolekulárne rozpoznávanie

Obmedzené vhodné enviromentálne podmienky

Van der Waalsove

Vodíkové

Iónové

Hydrofóbne

## Hydrofóbne interakcie

Disperzia lipidov → usporiadávajú okolitú H<sub>2</sub>O

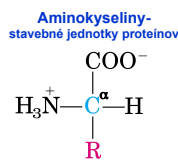
Lipidy sa zoskupujú → entropia systému rastie, výhodnejší stav

Micely → hydrofóbne konce idú dnu, entropia systému vyššia

## 2.2 Aminokyseliny a proteíny DONE

Status: DONE Source: Prezentácia 1

### Všeobecný vzorec AK



### Klasifikácia AK

D, L izoméria

rozdelenie na základe chem vlastností side chain

náboj

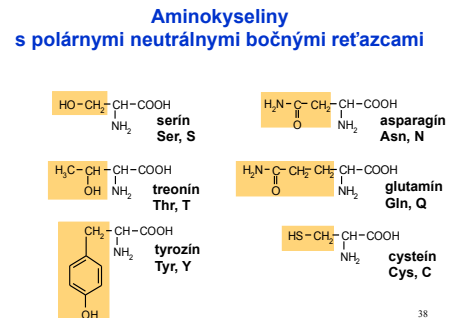
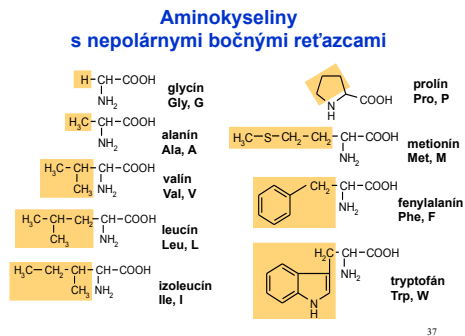
schopnosť viazať H

Kyslá/zásaditá

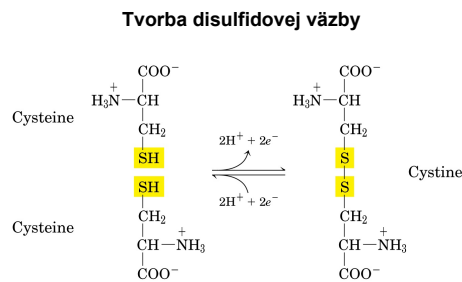
Nepolárne – hydrofóbne

Polárne – hydrofilné

vzorce AK



Tvorba disulfidovej väzby

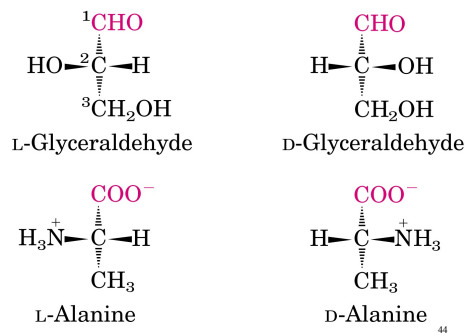


optická aktivita

Schopnosť otáčať rovinu polarizovaného svetla – napr. Vlnenie fotónu ide zhora dole  
→ zľava doprava

Všetky AK okrem glycínu

L a D aminokyseliny

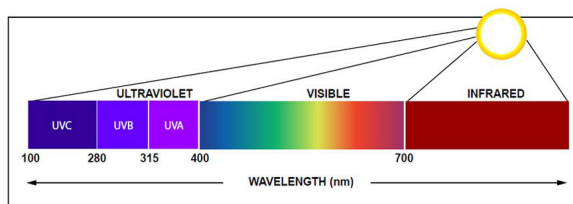


## spektroskopické vlastnosti AK

Absorbujú v infrač. oblasti

Trp a tyr, menej Phe v UV

Absorbancia pri 280nm sa používa pri detekcii proteínov



## acidobázické vlastnosti AK

Pri nízkom pH je veľa  $\text{H}^+$ , AK stráca čiastočne negatívny náboj a ostane s kladným.

Pri vysokom pH je veľa  $\text{OH}^-$  → bude mať záporný náboj

## Zwitterióny, amfotérny charakter AK,

Pri neutrálnom pH má oba náboje → Zwitterión/Amfión

Vie reagovať s kys. aj zásadami

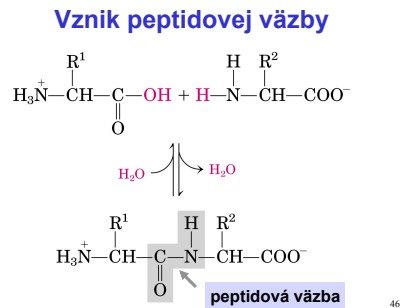
## izoelektrický bod

izoelektrický bod: pH, keď sa AK mení z  $-$  na 0 alebo z  $+$  na 0.

$\text{pI} = (\text{pK}_\text{A} \text{ kyslého} + \text{pK}_\text{A} \text{ zásaditého})/2$ . Obyčajne 9 a 2

$\text{pI} = \text{average of pK}_\text{A}\text{s of functional groups}$

## štruktúra a vlastnosti peptidovej väzby



Odchádza/prichádza H<sub>2</sub>O

N<sup>+</sup>, O<sup>-</sup> medzi jednoduchou a dvojitou

trans

6 atómov v rovine – planárne usporiadanie

## Trojrozmerná štruktúra proteínov

primárna, sekundárna ( $\alpha$ -helix,  $\beta$ -skladaný list,  $\beta$ -otáčka), terciárna, kvartérna, väzby (interakcie) a funkčné skupiny uplatňujúce sa pri jednotlivých štruktúrach

Primárna

poradie AK, kovalentné peptidové väzby

Sekundárna

ako sa skladajú na seba, (základná štruktúra, nie zvyšky), vodíkové väzby medzi CO a NH

$\alpha$ -helix (pravotočivý)

Väzba o 4 zvyšky dopredu

$\beta$ -skladaný list

paralelný, antiparalelný

Úplne rozvinutý reťazec

Väzby aj medzi rozdielnymi reťazcami

$\beta$ -otáčka

Zmena smeru peptidového reťazcu

Väzba o 3 zvyšky ďalej

prolín, glycín

Terciárna

Priestorová štruktúra, interakcie vzdialených skupín, ako sa folds skladajú na seba, vodíkové väzby, Van der Waals, hydrofóbny obal, disulfidový mostík medzi bočnými reťazcami

Daná primárnou štruktúrou  
kvartérna

medzi rôznymi polypeptidmi

podjednotky sa skladajú do mérov – diméry, tetraméry, multiméry → počty polypeptidových reťazcov

Homo/hetero multimérne – rovnaké/rôzne reťazce

Cysteín – disulfidový mostík

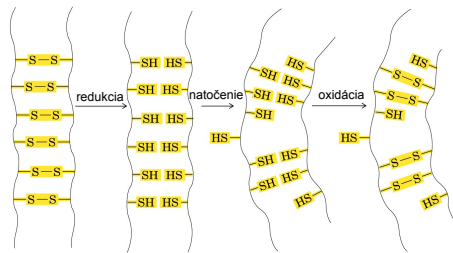
## Rozdelenie proteínov podľa štruktúry a rozpustnosti (fibrilárne, globulárne, membránové proteíny)

Fibrilárne

pevné, reťazce väčšinou paralelné s jednou osou

nerozpustné, štruktúrna funkcia

keratíny, kolagén, fibroín



73

Globulárne

hydrofilné von, hydrofóbne dnu

Flexibilné časti, štruktúry nie sú statické (PARTAAY)

mioglobín, cytochróm c, lyzozým, ribonukleáza

Membránové

bakteriorodospín

## Biologická funkcia proteínov, natívna konformácia, denaturácia, renaturácia

Enzýmová katalýza

Transportná, zásobná – hemoglobín(O<sub>2</sub>), sérumalbumín (MK), Ovalbumín, Kazeín

(N), Ferritín (Fe)

Koordinovaný pohyb – Aktín, myozín

mechanická podpora – kolagén, keratín

Imunita

nervové impulzy

regulácia rastu, diferenciácia

natívna konformácia – správne zložený proteín. Aktívna forma. Chyby na hocikto-rej úrovni vedú ku chorobám

Denaturácia

unfolded, neaktívny

pH, teplota, chemikálie, org. rozpúšťadlá, detergenty, močovina, enzýmy

Neovplyvňuje primárnu štruktúru.

vratná/nevratná

Renaturácia

Nie vždy sa poskladá správne

Chaperone – proteín, čo skladá správne proteíny

Prirodzene neusporiadané proteíny → viac funkcií, nemávajú hydrofóbne jadro

## 2.3 Sacharidy

Status: In progress Source: Prezentácia 2

### Rozdelenie sacharidov, aldózy, ketózy

aldózy – O na začiatku

ketózy – O v strede

mono, oligo, poly

lineárne, rozvetvené

### Vzorce

lineárne – Fischerove

cyklické – Haworthove:

glukóza

manóza

galaktóza

ribóza

## Pojmy

konfigurácia

konformácia

enantiomér

epimér

diastereomér

poloacetál      poloketál

mutarotácia

$\alpha$ -,  $\beta$ -anoméry

## Vznik glykozidovej väzby

hemiacetál  $\rightarrow$  acetál

+ alkohol, – voda

vznikne glykozid

na O na anomérnom uhlíku pribudne R z alkoholu (namiesto H)

väzba medzi O a anomérnym uhlíkom

Nie len alkohol – napr. aj sacharidy dokopy

Opačne tiež – hydrolýza

## Deriváty sacharidov

kyseliny

alkoholy

deoxysacharidy – deoxyribóza

estery sacharidov

aminosacharidy – glukozamín

acetály

ketály

glykozidy

## Disacharidy

- redukujúce
- neredukujúce disacharidy
- príklady – laktóza
- sacharóza
- trehalóza

## Štruktúrne polysacharidy

- celulóza
- chitín
  - väzby
  - štruktúra

## Zásobné polysacharidy

- škrob
- glykogén
  - väzby
  - štruktúra

## Heteropolysacharidy

- peptidoglykán
- hyaluronát
- proteoglykány (základná charakteristika)

## Sacharidy ako informačné molekuly

## Lektíny

## 2.4 Lipidy a biologické membrány DONE

Status: DONE Source: Prezentácia 3, 4

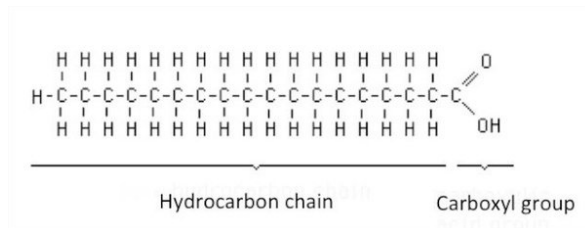


## Funkcie lipidov

nerozpustnosť vo vode, iba v organických rozpúšťadlách

zásoba energie, membrány, kofaktory, prenášače e<sup>-</sup>, pigmenty, emulzifikátory, hormóny, signály vnútri bunky

## Štruktúra a vlastnosti mastných kyselín



C4-C36 (38?), v lipidoch C14-C20 – vyššie MK

párny počet C lebo pri vytváraní z A-CoA sa pridáva po 2  
nerozvetvené

- (nasýtené vodíkom) aj = (nenasýtené vodíkom) väzby

CX, @Y – X = počet uhlíkov, Y = ktorá väzba je dvojitá

kyselina palmitová – C16

steárová – C18

olejová – C18, @9

linolová – C18, @9, 12

linolénová – C18, @9, 12, 15

čím viac = a čím kratší reťazec, tým nižšia teplota topenia

pretože entropia ide dole s dĺžkou reťazca a hore s počtom dvojitých väzieb

vyššia entropia → nižšia teplota topenia (menej pevné látky majú vyššiu entropiu)

## Triacylglyceroly

zdroj energie, 3MK + glycerol → triacylglycerol + 3(H<sub>2</sub>O)

čím viac =, tým viac liquid

tuky – prevažne živočíšne, viac nasýtených MK

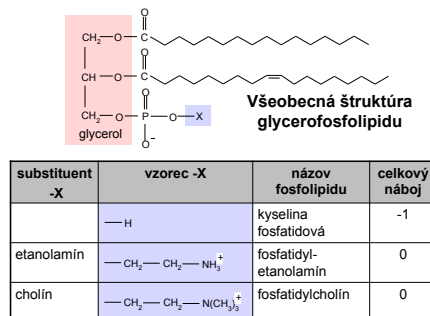
oleje – rastliny + ryby, viac nenasýtených MK

zdroj energie, lebo sú najredukovanejšia forma C v prírode, neviažu vodu, efektívne ukladanie

## glycerofosfolipidy

polárna časť, nepochárna časť

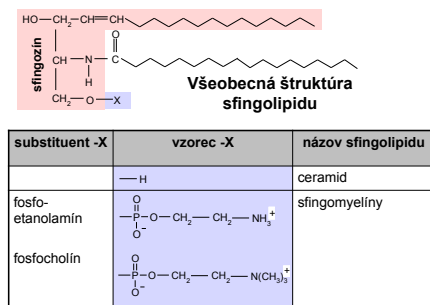
glycerol + 2MK + PO<sub>4</sub>-alkohol/substituent



substituent -X	vzorec -X	názov fosfolipidu	celkový náboj
serín	$\text{—CH}_2\text{—CH—NH}_3^+$ $\text{COO}^-$	fosfatidylserín	-1
glycerol	$\text{—CH}_2\text{—CH—CH}_2\text{—OH}$ $\text{OH}$	fosfatidyl- glycerol	-1
inozitol		fosfatidylinozitol	-1
fosfatidyl- glycerol		kardiolipín	-2

fosfatidyletanolamín, fosfatidylcholín, fosfatidylserín, fosfatidylglycerol, fosfatidylinozitol, kardiolipín

## sfginolipidy



substituent -X	vzorec	trieda a názov sfginolipidu
glukóza		Neutrálne glykolipidy -glukozylcerebrozid
di-, tri- alebo tetrasacharid		-laktosylceramid (globozid)
komplexný oligosacharid		Gangliozydy -gangliozyd GM2

sfginomyelíny, cerebrozidy, ceramidy, gangliozydy

## vosky

estery MK + OH s dlhými reťazcami

zdroj energie, ochranná funkcia

včelí vosk – kys palmitová + triacontatol

## cholesterol

štruktúra a funkcia

polárna hlavička, steroidné jadro, alkylový bočný reťazec

prekurzor na kortizol (metabolizmus, imunita), estradiol (pohl. Hormóny)

## Amfipatický charakter niektorých lipidov

časť hydrofilná, časť hydrofóbna

fosfolipidy

## agregované formy lipidov

micely – guľičky

dvojvrstvy

lipozómy – dvojvrstvová guľička

## Princíp samovoľného vzniku lipidových agregátov

hydrofóbne dnu, hydrofilné von

## Biomembrány

Kompartmentalizácia, styk s okolím, ohraničenie bunky/organely, priestor na metabolické deje

membránové proteíny

integrálne – ide cez membránu

periférne – na povrchu

model tekutej mozaiky

zložené z veľa rôznych komponentov – fosfolipidy, glykolipidy (rozoznávanie buniek, krvné skupiny), proteíny, cholesterol

## Úloha cholesterolu pri ovplyvňovaní fluidity membrán

pri nízkych teplotách zabráni fosfolipidom sa pritísnuť k sebe → zvyšuje fluiditu

pri vysokých teplotách im bráni sa hýbať rýchlo → znižuje fluiditu

## Transport cez membrány

flipáza – otáča fosfolipidy

pasívny – v smere koncentračného spádu, energeticky výhodný

difúzia aktívny – treba energiu

primárny – energia z hydrolýzy ATP

sekundárny – poháňaný koncentračným spádom

$Na^+/K^+$  pumpa.

$Na^+$  von,  $K^+$  dnu

## 2.5 Enzýmy DONE

Status: DONE Source: Prezentácia 4, 5

### Význam enzýmovej katalýzy

Regulácia rýchlosti reakcií

proteíny, špecifikácia

### Pojmy

holoenzým – kompletný aktívny enzým s naviazaným kofaktorom

apoenzým – proteínová zložka holoenzýmu (nie nutne aktívny)

kofaktor – ión kovu alebo koenzým, priamo pomáha s katalýzou

koenzým – organická molekula, carrier (napr NADH je  $e^-$  carrier  $\rightarrow NAD^+ + H$ , CoA je acyl carrier)

prostetická skupina – kofaktor pevne (kovalentne) viazaný v enzýme

apoenzým + kofaktor  $\rightarrow$  holoenzým

### Klasifikácia enzýmov

oxido-reduktázy – prenos  $e^-$ , protónov transferázy – prenos skupín, aminoacids to to  
 peptide chain hydrolázy – hydrolytické reakcie,  $A + H_2O \rightarrow B + C$  Lyázy – odštiepenie  
 skupín, tvorba dvojitých väzieb,  $A \rightarrow B + C$  izomerázy – vznik izomérov ligázy – tvorba  
 C-C, C-S, C-N, C-O a fosfoesterových väzieb, pri tvorbe ATP,  $A + B \rightarrow AB$ , spájanie  
 strands of DNA

## Aktívne miesto, špecificita enzýmov

substrát sa viaže do aktívneho miesta, tvorí komplex enzým-substrát

aktívne miesto obsahuje katalytické centrum a väzobné centrum

zníženie aktivačnej energie

väzba substrátu – slabé interakcie

štruktúrna komplementarita → rozpoznávanie

Jednotka enzýmovej aktivity – katal

množstvo enzýmu, kt katalyzuje 1 mol substrátu za 1 sekundu

špecifická

aktivita = katal/kg bielkoviny

## Mechanizmus účinku enzýmov

teória komplementarity – substrát do enzýmu “zapadne”, špecificky, nevie do iného

teória indukovaného prispôsobenia – substrát nie úplne zapadne, enzým sa mierne prispôsobí

## Termodynamické hľadisko priebehu enzymaticky katalyzovaných reakcií

aktivačná energia – energia potrebná na prebehnutie reakcie

prechodný stav – niekde medzi produktom a substrátom, reakcia prebieha

## Kinetické hľadisko priebehu enzymaticky katalyzovaných reakcií

faktory ovplyvňujúce rýchlosť enzýmovej reakcie

množstvo enzýmu, koncentrácia substrátov, fyz-chem vlastnosti prostredia (t, pH), efektory (aktivátory, inhibítory)

Michaelis – Mentenovej rovnica

$$V_0 = \frac{V_{max}[S]}{K_m + [S]}$$

$[S]$  – koncentrácia substrátu

parametre  $K_m$  a  $V_{max}$

$K_m$  – Michaelis-Mentenovej konštanta – koncentrácia substrátu, keď rýchlosť  $V_0 = \frac{V_{max}}{2}$

$V_{max}$  – maximálna rýchlosť reakcie

$K_m$  nižšia → afinita enzýmu ku substrátu vyššia

## inhibícia enzýmov

ireverzibilná - inhibítor sa viaže pevne, až kovalentne

reverzibilná - nekovalentné, slabšie interakcie

kompetetívna – nepustí substrát dnu

nekompetetívna – pustí aj substrát

## Regulácia enzýmov

alosterickou modifikáciou – z neaktívnej strany sa naviaže inhibítor/aktivátor, kt ovplyvní aktívnu stranu

kovalentnou modifikáciou – formovanie/ničenie kovalentných väzieb, napr. metylácia, acylácia, fosforylácia

regulačnými proteínmi – tripsinogén je aktivovaný na tripsín, nevratne

proteolytickým štiepením (zymogény) – odíde kus enzýmu a odhalí sa aktívne miesto, napr. v golgiho aparáte

## 2.6 Základy metabolizmu DONE

Status: DONE Source: Prezentácia 5

### Zdroj a premeny energie v biosfére

I zákon termodynamický – konštantné množstvo energie, mení sa len forma

II zákon termodynamický – entropia spontánne vzrastá

Chemická energia – entalpia – energia chemickej väzby

voľná (Gibbsova) energia – časť energie v štruktúre molekúl, ktorá sa môže premeniť na prácu

entropia – miera chaose

Exergonické reakcie –  $\Delta G < 0$  – energia sa uvoľní

Endergonické reakcie –  $\Delta G > 0$  – energia sa spotrebuje

Podmienka samovoľnosti priebehu chemických dejov –  $\Delta G < 0$

## Význam prenášačov energie

dodávajú energiu z exergonických reakcií do endergonických  
sú schopné energiu zachytiť a uložiť, uvoľniť a odovzdať  
napr. ATP

## vznik ATP

substrátová fosforylácia

oxidačná fosforylácia

fotofosforylácia

## premeny ATP

Katabolické a anabolické metabolické dráhy, ich význam

živiny s vysokým obsahom energie → katabolizmus → koncové produkty s málo energie

prekursorové molekuly → anabolizmus → makromolekuly

Energetické vzťahy medzi katabolickými a anabolickými dráhami

## Oxidácia biomolekúl

oxidácia – strata  $e^-$ , berú ich biomolekulám

## 2.7 Metabolizmus sacharidov +-DONE

Status: More or less Source: Prezentácia 6

### Glukóza ako zdroj metabolickej energie

štruktúra, zásoba, oxidácia glykolýzou → pyruvát, pentózovou dráhou → ribóza-5-fosfát

## Glykolýza

význam – glukóza → pyruvát (ATP, NADH)

lokalizácia – cytoplazma 2 fázy glykolýzy

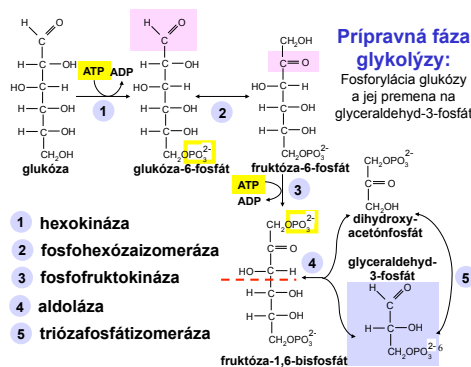
prípravná (5 reakcií), produkčná (5 reakcií) jednotlivé reakcie

fosforylácia glukózy → glyceraldehyd-3-fosfát

glyceraldehyd-3-fosfát → pyruvát, ATP, NADH

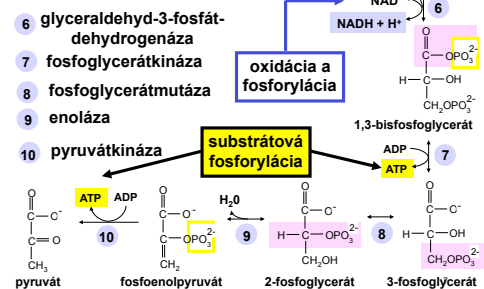
medziprodukty a enzýmy glykolýzy

Spotreba a vznik ATP počas glykolýzy



### Produkčná fáza glykolýzy:

Oxidačná premena glyceraldehyd-3-fosfátu na pyruvát spojená s tvorbou ATP a NADH



substrátová fosforylácia

## Osud pyruvátu a regenerácia NAD<sup>+</sup>

anaeróbne – mliečne kvasenie

alkoholové kvasenie

aeróbne – v dýchacom reťazci

## Glukoneogenéza

význam – potreba tela vyrobiť si vlastnú glukózu

substráty

pyruvát, laktát, mnohé AK, glycerol, veci z krebsovho cyklu

nie MK, lebo idú na Acetyl-CoA oxidovaný v Krebsovom cykle

tri unikátne glukoneogenetické kroky (4 enzýmy)

lokalizácia

králik – mitochondrie, potkan – cytoplazma, človek – obe



## Coriho cyklus

prenos laktátu zo svalu do pečene

vznik glukózy z laktátu procesom glukoneogenézy

Pentózová dráha: význam – NADPH pre biosyntézy, produkcia ribóza-5-P

východisková zlúčenina – Glc-6-P

vznik NADPH, ribóza-5-fosfátu

reakcie katalyzované dehydrogenázami, izomerázou, epimerázou, transaldolázami, transketolázami.

## 2.8 Citrátový cyklus

Glyoxylátový cyklus

Vznik acetyl–koenzýmu A z kyseliny pyrohroznovej.

Citrátový cyklus – zdroj energie a biosyntetických prekursorov

bunková lokalizácia cyklu

Reakcie

citrátového cyklu

jednotlivé medziprodukty a enzýmy

Vznik redukovaných koenzýmov

Tvorba

GTP – substrátová fosforylácia

Amfibolický charakter citrátového cyklu

anaplerotické reakcie

(pyruvátkarboxyláza)

Glyoxylátový cyklus – význam pre rastliny a baktérie

lokalizácia (spolupráca

glyoxyzómov a mitochondrií)

enzýmy.

## 2.9 Oxidačná fosforylácia

Štruktúra a funkcia mitochondrií

Zloženie a funkcia dýchacieho reťazca,

prenášače elektrónov – cytochrómy

bielkoviny s nehemovo viazaným železom  
ubichinón,

flavoproteíny

Zdroj elektrónov vstupujúcich do dýchacieho reťazca

Prenos elektrónov v dýchacom

reťazci (komplexy I

II

III

IV

cyt c

ubichinón)

Vznik protónového gradientu

Využitie protónového

gradientu na syntézu ATP

enzým ATP-syntáza

Chemiosmotická teória

Ďalšie možnosti využitia

protónového gradientu – termogenéza

pohyb baktérií

transport metabolitov.

## 2.10 Fotosyntéza

Fotofosforylácia ako súčasť fotosyntézy

Štruktúra a funkcia chloroplastov

Pigmenty a ich úloha v procese fotosyntézy

Fotochemické reakčné centrum a deje, ktoré v ňom prebiehajú

Prenos elektrónov fotosystémami I a II

Necyklická a cyklická fotofosforylácia

Fotolýza vody

Vznik NADPH a ATP

Spoločné a rozdielne znaky fotofosforylácie a oxidačnej fosforylácie

Syntézasacharidov počas fotosyntézy

Tri štádiá asimilácie CO<sub>2</sub>

Základné reakcie a funkcia Calvinovho cyklu

## 2.11 Metabolizmus lipidov +-DONE

Status: Better than nothing Source: Prezentácia 10

**Mastné kyseliny ako zdroj metabolickej energie**

najredukovanejšia forma uhlíka

nerozpustnosť vo vode

chemicky inertné

**Trávenie tukov**

význam žlčových kyselín

emulzifikácia tukov z potravy, tvorba micel enzýmy lipáz

degradácia triglycerolov

chylomikróny

prenos premenených tukov ku tkanivám

## Osud mastných kyselín vo svaloch a v tukovom tkanive

Oxidácia → zdroj energia alebo reesterifikácia → zásoby energie Uvoľnenie mastných kyselín z tukového tkaniva a ich prenos do tkanív

chylomikróny funkcia sérumalbumínu

proteín, prenáša MK

## $\beta$ -oxidácia mastných kyselín

lokalizácia v bunke

prenos mastných kyselín do mitochondrií

(funkcia karnitínu)

## Reakcie $\beta$ -oxidácie

dehydrogenácia

hydratácia

dehydrogenácia

štiepenie

vznik acetyl-kaoenzýmu A

Osud acetyl-koenzýmu A

vstup do citrátového cyklu

vznik ketolátok, ich význam

zdroj energie pre niektoré tkanivá, napr. mozog, srdce, obličky


počas hladovania

MK sa oxidáciou v pečeni premieňajú na acetón, etc.


## Biosyntéza mastných kyselín

porovnanie s  $\beta$ -oxidáciou

**Syntéza mastných kyselín**•  $\beta$ -oxidácia

- 
- 1. Oxidácia
  - 2. Hydratácia
  - 3. Oxidácia
  - 4. Štiepenie

## • Syntéza MK

- 
- 4. Redukcia
  - 3. Dehydratácia
  - 2. Redukcia
  - 1. Kondenzácia

východiskové zlúčeniny  
reakcie kondenzácia  
redukcia  
dehydratácia

**Zdroje NADPH**

malát → pyruvát  
pentózová dráha

**Transport triacylglycerolov a cholesterolu u ľudí**

zabezpečujú lipoproteíny a chylomikróny

**2.12 Degradácia aminokyselín DONE**

Status: hopefully DONE Source: Prezentácia 11

Močovinový cyklus

Počas bežnej degradácie a syntézy v bunkách (AK sa neukladajú do zásoby)

Ak je priveľa AK v potrave

**Aminokyseliny ako zdroj metabolickej energie**

Keď nie sú k dispozícii sacharidy ako zdroj

## Odbúranie aminokyselín

Odstránenie aminoskupiny transamináciou a deamináciou  
enzýmy transaminázy, glutamátdehydrogenáza

## Význam glutamínu pri odbúraní AK

Glutamát + amoniak  $\rightarrow$  glutamín  $\rightarrow$  mitochondrie pečene/obličiek  $\rightarrow$  amoniak sa uvoľní  $\rightarrow$  močovinový cyklus

enzýmy glutamínsyntetáza – naviazanie amoniaku

glutamináza – uvoľnenie amoniaku

## Formy vylučovania aminoskupiny u rôznych stavovcov

amoniak – vodné stavovce

močovina – suchozemské stavovce

kys. močová – vtáky, plazy

## Močovinový cyklus – orgánová a bunková lokalizácia, význam

V cytoplazme pri mitochondriách

arginínosukcinát spoločný s citrátovým cyklom

## Osud uhlíkovej kostry aminokyselín

premena na glukózu/ketolátky, podľa typu AK

glukogénne AK  $\rightarrow$  pyruvát, etc. (nejakú látku citrátového cyklu) ketogénne AK  $\rightarrow$  acetyl-CoA, etc.

# Kapitola 3

## Bunková biológia

**Vnútrotná organizácia buniek a ich pôvod v evolúcii DONE**

Status: DONE

Source: Prezentácia 1

### **História a kľúčové objavy bunkovej biológie**

Robert Hooke – termín bunka, organizmy sú z buniek

Antonie van Leewenhoek – mikroskop

### **Bunková teória**

Schwann, Schleiden, Remak, Virchow

Pôvodné tri:

Živé organizmy sú z jednej alebo viacerých buniek (dišputa – vírusy)

Bunky sú základné štruktúrne a funkčné jednotky živých organizmov

Vznikajú len delením preexistujúcich buniek (Waaaait. Prvá bunka?)

Additional:

Podobné chemické zloženie

Chemický systém, kde prebieha premena energií a metabolické reakcie

DNA je genetický materiál

## Porovnanie prokaryotických a eukaryotických buniek

0.3 mikm – 0.7 mm, 9 mikm – 800 mikm

Prokaryotické

Archaea, Bacteria

Jadro (nucleoid) voľne v cytosole

Bez membránových organel

Cirkulárna DNA (cirkulárny chromozóm)

Ribozómy

Archaea má karboxyzómy, plynové vezikuly, etc.

Eukaryotické

Eukarya

Jadro má vlastnú membránu, nucleolus

Membránové organely, napr. mitochondrie, golgiho aparát

Viac vlákien DNA (viac chromozómov)

Ribozómy

## Komplexná organizácia eukaryotickej bunky, význam intracelulárnej kompartmentalizácie a vnútrobunkový dialóg

Bunková štruktúra – Čokoľvek v bunke (ribozóm, deliace vretienko...)

Bunkový kompartment – časť bunky oddelená membránou al. proteínom (cytosól, jadro)

Bunková organela – funkčné časti bunky obklopené membránou (mitochondria, plastidy)

jadro

mitochondrie, hydrogenozómy

plastidy (rastlinné bunky)

endoplazmatické retikulum

Golgiho aparát

lyzozómy, vakuoly

peroxizómy

cytosol



**Vznik buniek v evolúcii**

RNA(Genotyp + Fenotyp) → RNP(Genotyp + Fenotyp) → DNA(Genotyp + DNA + Fenotyp(Proteínový))

Darwin

jeden spoločný predok

Woese

viacero vetiev → tree of life, archaea, bacteria, eucarya

RNA selfreplicating teória

Darwinovský prah (Darwinian Threshold) – bod, pred ktorým speciácia nebola možná, kvôli horizontálnemu transferu génov

**Pôvod komplexnej (eukaryotickej) bunky**

Lynn Margulis

Endosymbiotická teória

Evolučná mozaika

Niektoré organely (mitochondrie, plastidy) vznikli vďaka endosymbióze. Resp. eukarya vznikli ako symbióza archaea a procarya. Jadrový genóm pochádza z archaea a bacteria...

Reduktívna fáza – strata časti genómu, funkcií, transfer génov do jadra

Expanzívna fáza – vznik nových génov, horizont. gén. transfer prokaryotických génov, konverzia endosymbionta na organelu exportujúcu ATP

Mitochondrie majú vlastný genóm

Vodíková hypotéza

**3.1 Bunkové jadro: štruktúra a dynamika chromozómov**

Status: Not started

Source: Prezentácia 2

**Prokaryotické, eukaryotické a organelové chromozómy**

nucleus

eukaryoty

zložité jadro, nucleolus, DNA + proteíny v jadre  
nucleoid  
prokaryoty, mitochondrie, plastidy  
DNA na kope, ribozómy voľne v cytoplazme

**DNA a proteínové komponenty chromozómov**

**Distribúcia chromozómov pri delení buniek**

**Objav úlohy DNA**

**Replikačné stratégie DNA**

**Experimenty Meselsona a Stahla**

**Semikonzervatívny mechanizmus syntézy DNA**

**Iniciácia, elongácia a terminácia replikácie (replikačné počiatky, replikačné bubliny**

**Okazakiho fragmenty, leading a lagging vlákno). Replizóm**

**Kľúčové enzýmy v replikácii: DNA polymerázy, primázy, ligázy, helikázy, topoizomerázy, ssb proteíny**

## **3.2 Mechanizmy opravy poškodenej DNA DONE**

Status: DONE

Source: Prezentácia 3

Typy: Na svetle / v tme, počas replikácie / po replikácii, error free / error prone  
3' → 5' je nevýhodné, lebo pri napájaní sa nerozpadne väzba, ktorá by poskytla energiu na polymerizáciu (odštiepenie fosforov)

### **Poškodenia chromozomálnej DNA**

Poškodenia: chemické modifikácie, straty báz, pyrimidínové diméry, krížové väzby v DNA, zlomy

Depurinácia – Príde voda, odíde báza

Deaminácia – Príde voda, odíde  $\text{NH}_3$ , báza sa zmení na inú (cytozín  $\rightarrow$  uracil)

lézia – poškodenie  $\rightarrow$  fixácia  $\rightarrow$  mutácia

## Fyzikálne, chemické a biologické mutagény

### Príčiny vzniku spontánnych mutácií

### Reparačné mechanizmy (fotoreaktivácia, bazová a nukleotidová excízna reparácia, rekombinačná oprava, SOS odpoveď)

Tymínové diméry – oprava na svetle (UV) fotoreaktívnym enzýmom Demetylácia / dealkylácia – oprava enzýmom

Bázová excízna oprava (deaminated C)– najprv odíde báza, potom cukor, potom DNA polymeráza doplní 1, DNA ligáza zalepí dokopy

Nukleotidová excízna oprava (napr. pyrimid. dimér) – nukleáza rozštíkne, DNA helikáza oddelí, DNA polymeráza doplní väčší úsek

Starý úsek je metylovaný napr. na konkrétnej sekvencii

opravy dvojvláknových zlomov rekombináciou

Nehomologické – zožerie nukleotidy na konci zlomu Non-homologous end joining (NHEJ) a spojí

Homologické (podľa sesterskej chromatídy) – zožerie nukleotidy iba na 5' koncoch, homologická rekombinácia, opraví podľa sesterskej chromatídy

SOS odpoveď – error prone DNA syntéza (DNA polymeráza V) umožňuje pokračovať v DNA syntéze aj za cenu chýb

## Ochorenia spôsobené defektmi v oprave DNA.

Ataxia, Bloomov syndróm

## 3.3 Transkripcia a úlohy RNA v bunke

Status:

Source: Prezentácia 4

## Úloha RNA v interpretácii genetickej informácie

### Typy RNA (mRNA, rRNA, tRNA, malé RNA)

mRNA – komplementárna ku vláknu DNA, je to templát pre tvorbu proteínov

tRNA – krátka RNA, trojlístok, antikodón, Aminokys.

rRNA – ribozomálna RNA, skladajú sa z nej ribozómy

snRNA – small nuclear RNA, variety of processes, pre-mRNA splicing

snoRNA – small nucleolar RNA, chem modification of rRNA

miRNA – MicroRNA, regulácia génovej expresie blokováním translácie špecifických mRNA

siRNA – small interfering RNA, regulácia génovej expresie

### Katalytické vlastnosti RNA

ribozým – RNA enzým, katalytická funkcia

RNáza P – odštiepuje prekursorovú a zvyšnú RNA z tRNA

Self-splicing intron

Spliceosome – protein complex

Promótor – starting sequence

Terminátor – stop sequence

## Svet RNA a evolúcia živých systémov

### Transkripcia

### Iniciácia, elongácia a terminácia transkripcie

### RNA polymerázy

Transkripčné faktory. Porovnanie transkripcie v prokaryotoch a eukaryotoch.

## 3.4 Syntéza a distribúcia proteínov v bunkách

Status: In progress

Source: Prezentácia

## Objav a vlastnosti genetického kódu

tripletový

neprekrývavý

akú to má výhodu? Je viac robustný.

degenerovaný – nie je to bijekcia, aminokys. je kódovaná rôznymi sekvenciami

univerzálny – ale sú výnimky

triplety pre štart (AUG, GUG) a stop (UAA, UAG, UGA)

## Štruktúra a vlastnosti tRNA

70-80 nucleotides, short

Nekovnenčné párovanie, napr. G-U

Neštandardné bázy – dihydrouridín, psí – pseudouridín – väzba medzi uhlíkom bázy

antikodón sa páruje so sekvenciami v mRNA

CCA na 3' konci – postranskripčne pridaná, na tom kovalentne aminokys. zvyšok

## Štruktúra a funkcie ribozómov

TODO

## Ribozomálne RNA a proteínové komponenty ribozómu

TODO

## Základné etapy translácie (iniciácia, elongácia a terminácia)

iniciácia translácie

rozpoznanie 5' mRNA

Proc – na 5' nie je čiapočka – rRNA sa spáruje so sekvenciou na 5' konci mRNA (Shine-Delgamo sequence), posunie sa a narazí na AUG

Euc – malá ribosomal subunit rozozná čiapočku, začne sa kĺzať, narazí na AUG

Proc – formylMetionyl – Výnimka – prvá mRNA je v mieste P – lebo vstúpila do ribozómu predtým, ako sa zavrel. Aby sa dostali ďalšie cez A miesto

Euc – kontrola mRNA proteínmi

Euc – metionyl, tRNA, zase P miesto

Elongácia translácie

príde do A miesta, naviaže sa AK, posunie sa ribozóm

Terminácia translácie

RF – release factor. Nie Róber Fico

príde do A, odpadne červík, uvoľní sa ribozóm aj mRNA, čo tam boli

Začína sa zbaľovať hneď ako vyjde

**Porovnanie prokaryotickej a eukaryotickej proteosyntézy**

**Inhibítory proteosyntézy**

**Vnútrobunková lokalizácia proteosyntézy**

**Distribúcia proteínov v bunke.**

### **3.5 Princípy kontroly expresie génov**

Status:

Source: Prezentácia

Definície génu

Úrovnne kontroly expresie génov

Operónový model

Pokusy Jacoba a Monoda

Negatívna a pozitívna kontrola expresie

Katabolická represia.

Atenuácia

Regulácia životného cyklu fága lambda

Porovnanie kontroly génovej expresie v prokaryotických a eukaryotických bunkách

Kontrola na úrovni transkripcie a posttranskripčné úpravy RNA

Kontrola na úrovni translácie a posttranslačné úpravy proteínov.

### 3.6 Úloha biologických membrán v eukaryotickej bunke

Kompartmentalizácia bunky

Štruktúra a funkcie membrán

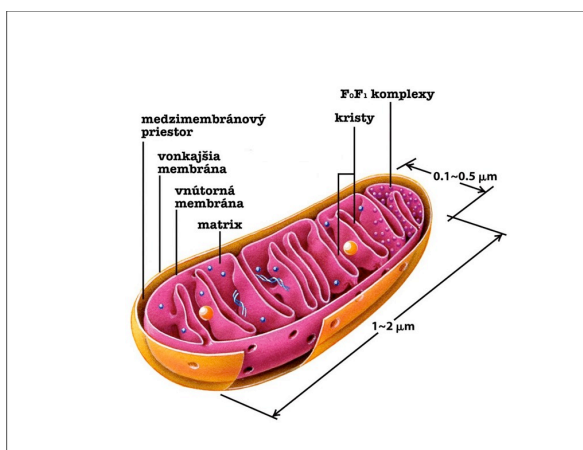
Transport cez membrány

Vektorové procesy viazané na membrány

Úloha membrán v prenose nervového signálu.

### 3.7 Mitochondrie a chloroplasty

Ultraštruktúra a funkcie semiautonómnych organel



## Špecifické úlohy membrán mitochondrií a chloroplastov

Mitochondrie môžu fúzovať, deliť sa podľa potreby – je na to aparát v bunke  
Dýchací reťazec

## Organelové genómy

## Oxidatívna fosforylácia.

## Fotosyntéza–fotofosforylácia

fluorescencia – pohltia svetlo jednej vlnovej dĺžky, vyžiaria svetlo inej

## 3.8 Endoplazmatické retikulum, Golgiho aparát

### Štruktúra, funkcie, biogenéza a distribúcia

Hladké a drsné endoplazmatické retikulum, sarkoplazmatické retikulum

### Vezikulárny transport

Úloha v distribúcii a transporte proteínov v eukaryotickej bunke.

## 3.9 Vakuoly, lyzozómy a peroxizómy

### Štruktúra, funkcie, biogenéza a distribúcia

### Metabolizmus

Klinický význam lyzozómov a peroxizómov.

## 3.10 Cytoskelet ako dynamická štruktúra +-DONE

Status: No idea

Source: Prezentácia 11

Dynamický, preusporiadava sa  
Z malých rozpustných podjednotiek, kt. sa skladajú do väčších celkov



využívané napr. pri pohybe

## Komponenty cytoskeletu

### Mikrotubuly

trubičky

tubulín (Beta- a alfa-tubulín podjednotky), rozpustné, globulárne, väzbové miesto pre GTP/GDP

hydrolyza GTP po naviazaní tubulínov  $\rightarrow$  GDP

13 Protofilamentov zvislo vedľa seba  $\rightarrow$  mikrotubulus

disociácia podjednotiek iba na krajoch, kde neinteraguje s mnohými ostatnými

### Mechanické vlastnosti

menej pružné/ohybné do boku

orientácia - označenie  $\beta+$ / $\alpha-$

### Mikrofilamenty

aktínové polyméry

aktín – globulárny proteín, viaže ATP/ADP

polarizované, – a + koniec

rastú rýchlejšie na + konci      mierna špiralizácia

vizualizácia pomocou myozínu, ktorý sa na aktín viaže hlavičkou

### Intermediálne filamenty

## Cytoskelet ako pohybový aparát: vezikulárny transport, bunková motilita a delenie buniek

### Treadmilling

medzi kritickými koncentráciami pre + a – koniec

polymerizácia na jednom konci, depolymerizácia na druhom, vyrovnajú sa a vlákno ostáva rovnako dlhé

sťah svalu – pohyb aktínu a myozínu proti sebe

pohyb proteínov po mikrotubuloch

### 3.11 Od jednotlivých buniek k tkanivám a mnoho- bunkovým organizmom

Bunkové povrchy

Cytoplazmatická membrána a bunková stena

Extracelulárna matrix

Bunky v sociálnom kontexte.

Biofilmy

Bunky ako súčasť tkanív

Epitely a medzibunkové spojenia

Quorum sensing.

Medzibunková komunikácia a bunková smrť.

# Kapitola 4

## Diskrétna matematika

(Predmety Úvod do diskretných štruktúr, Úvod do kombinatoriky a teórie grafov)

### 4.1 Základy matematickej logiky

#### Logické operácie

- Negácia  $\neg$  (NOT)
- Konjunkcia  $\wedge$  (AND)
- Disjunkcia  $\vee$  (OR)
- Alternatíva  $\oplus$  (XOR)
- Implikácia  $\rightarrow$
- Ekvivalencia  $\leftrightarrow$
- Schafferova spojka  $\uparrow$  (NAND) - vie nahradiť všetky ostatné
- Pierce – Lukasiewiçsova spojka  $\downarrow$  (NOR) - vie nahradiť všetky ostatné

#### Formuly

Výrokovou formou  $a(x)$  s premennou  $x$  nazývame takú oznamovaciu vetu (formálny výraz, formulu), ktorá obsahuje premennú  $x$ , sama nie je výrokom, a stane sa výrokom vždy vtedy, keď za premennú  $x$  dosadíme konkrétny objekt z vopred danej vhodne vybratej množiny. Ku každej výrokovej forme existuje nejaká množina prvkov, ktoré má zmysel do výrokovej formy dosadzovať. (Príklad:  $x$  je väčšie ako číslo 5)

## Výrokové funkcie

TODO: citeToman2009 1.2 ?

## Kvantifikácia výrokov

- Existenčný kvantifikátor  $\exists$
- Všeobecný kvantifikátor  $\forall$

Negácie:

$$\neg(\exists x)a(x) \leftrightarrow (\forall x)(\neg a(x))$$

$$\neg(\forall x)a(x) \leftrightarrow (\exists x)(\neg a(x))$$

## Tautógia

Je výrok pravdivý pre všetky možné kombinácie pravdivostných hodnôt výrokov, z ktorých je zložený.

## Významné tautológie

### 1. Idempotentnosť

$$(p \wedge p) \leftrightarrow p$$

$$(p \vee p) \leftrightarrow p$$

### 2. Komutatívnosť

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$$

### 3. Asociatívnosť

$$(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$$

$$(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$$

### 4. Distributívne zákony

$$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

$$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

## 5. Absorbčné zákony

$$(p \wedge (q \vee p)) \leftrightarrow p$$

$$(p \vee (q \wedge p)) \leftrightarrow p$$

## 6. Zákon dvojitej negácie

$$\neg\neg p \leftrightarrow p$$

## 7. Zákon vylúčenia tretieho

$$(p \vee \neg p) \leftrightarrow 1$$

## 8. Zákon o vylúčení sporu

$$(p \wedge \neg p) \leftrightarrow 0$$

## 9. De Morganove zákony

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

## 10. Kontrapozícia negácie

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

## 11. Reductio ad absurdum

$$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$$

$$12. (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

$$13. (p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

$$14. (p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$15. (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$$

$$16. (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

## Kontradikcia

Výrok, ktorého pravdivostná hodnota je rovná nule bez ohľadu na pravdivostné hodnoty výrokov, z ktorých pozostáva.

## 4.2 Matematický dôkaz

### Logický dôsledok

TODO

### Základné typy matematických dôkazov

- Priamy dôkaz tvrdenia  $a$

Pozostáva z konečného reťazca implikácií  $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n \rightarrow a$ , ktorého prvý člen je axióma, alebo už dokázané tvrdenie, alebo pravdivé tvrdenie, výrok  $a$  každé ďalšie tvrdenie je logickým dôsledkom predchádzajúcich, pričom posledným členom reťazca (postupnosti) je dokazované tvrdenie  $a$ .

- Nepriamy dôkaz tvrdenia  $a$  sporom

Založený je na zákone vylúčenia tretieho, podľa ktorého z dvojice výrokov  $a, \neg a$  musí byť práve jeden pravdivý. Keď teda dokážeme, že výrok  $\neg a$  nie je pravdivý, vyplýva z toho pravdivosť tvrdenia  $a$ .

- Priamy dôkaz implikácie  $a \rightarrow b$

Predpokladajme, že tvrdenie  $a$  platí (v prípade, že  $a$  je nepravdivé je implikácia  $a \rightarrow b$  pravdivá, niet čo dokazovať), nájdeme postupnosť implikácií začínajúcu tvrdením  $a$ , končiacu tvrdením  $b$ , v ktorej každý člen je logickým dôsledkom predchádzajúcich tvrdení a axióm, resp. skôr dokázaných tvrdení. Niekoľkonásobným použitím pravidla jednoduchého sylogizmu dostávame platnosť implikácie  $a \rightarrow b$ .

- Nepriamy dôkaz implikácie  $a \rightarrow b$  sporom

Podobne ako v opísanej schéme dôkazu sporom predpokladáme platnosť negácie dokazovanej implikácie, t. j. predpokladáme platnosť tvrdenia  $\neg(a \rightarrow b)$ , ktoré je ekvivalentné tvrdeniu  $a \wedge \neg b$ . Z tohto tvrdenia postupne odvodzujeme logické dôsledky tak dlho, pokým dospejeme k sporu. Môžu tu nastať tri prípady:

- dôjdeme do sporu s tvrdením  $a$ ,
- dôjdeme do sporu s tvrdením  $\neg b$
- napokon môžeme dokázať dve navzájom odporujúce si tvrdenia  $c, \neg c$

- Nepriamy dôkaz implikácie  $a \rightarrow b$  pomocou obmeny.

Zakladá sa na skutočnosti, že implikácia  $a \rightarrow b$  a jej obmena  $\neg b \rightarrow \neg a$  sú ekvivalentné, t.j. majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu.

- Matematická indukcia

Ak nám treba dokázať platnosť nejakého tvrdenia (vety), ktoré je typu (alebo sa dá sformulovať tak, aby bolo tohto typu) „pre každé prirodzené číslo platí ...“, budeme sa pridŕžiavať princípu na ktorom je založená metóda dokazovania tvrdení nazývaná matematická indukcia.

Pozostáva z bázy matematickej indukcie a indukčného kroku.

### 4.3 Intuitívny pojem množiny

#### Základné pojmy a označenia

Množiny - veľké latinské písmená ( $A, B, C, \dots$ )

Prvky množín - malé písmená, prípadne s indexami ( $a_1, a_2, \dots, b_1, \dots$ )

Opísať množinu možno v podstate dvomi spôsobmi:

- vymenovaním jej prvkov
- charakterizáciou jej prvkov pomocou nejakej spoločnej vlastnosti

Russelov paradox: Kto holí holiča? Množina všetkých množín?

#### Množinové operácie

Nech sú  $A, B$  ľubovoľné množiny. Hovoríme, že

- $A = B$  práve vtedy, ak každý prvok z množiny  $A$  je súčasne prvkom množiny  $B$  a každý prvok z množiny  $B$  je súčasne prvkom množiny  $A$ .

$$A = B \leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \leftrightarrow (x \in B))$$

- $A \subseteq B$  práve vtedy, ak  $\forall x \in A$  platí, že  $x \in B$ , množina  $A$  je podmnožinou množiny  $B$  alebo tiež, že  $A$  je v inklúzií s  $B$ .

Ak  $A \subseteq B$  a existuje prvok množiny  $B$  taký, ktorý nepatrí do množiny  $A$  (t.j. neplatí  $B \subseteq A$ ), tak hovoríme, že  $A$  je vlastná alebo pravá podmnožina množiny  $B$  a označujeme  $A \subset B$ .

$$A \subseteq B \leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \rightarrow (x \in B))$$

- Zjednotením množín  $A, B$  nazveme množinu všetkých prvkov, ktoré patria aspoň do jednej z množín  $A, B$ . Označenie:  $A \cup B$ .

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

- Prienikom množín  $A, B$  nazveme množinu všetkých prvkov, ktoré patria súčasne do oboch množín  $A, B$ . Označenie:  $A \cap B$ .

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Ak  $A, B$  nemajú spoločný prvok, v tomto prípade hovoríme, že množiny sú disjunktné a ich prienikom je množina, ktorá neobsahuje žiaden prvok.

- Množina, ktorá neobsahuje žiaden prvok sa nazýva prázdna množina a označujeme ju  $\emptyset$ .
  - Prázdna množina je podmnožina ľubovoľnej množiny.
  - Existuje práve jedna prázdna množina.

- Doplnkom množiny  $A$  vzhľadom na množinu  $U$  nazývame množinu všetkých tých prvkov univerzálnej množiny  $U$ , ktoré nepatria do množiny  $A$ . Označenie  $A'$ .

$$A' = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}$$

- Rozdielom množín  $A, B$  nazveme množinu všetkých tých prvkov množiny  $A$ , ktoré nepatria do  $B$ . Označenie  $A \setminus B$ , alebo aj  $A - B$ .

$$A - B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

TODO

- Symetrickou diferenciou množín  $A, B$  nazveme množinu  $A(\text{minussbodkouhore})B = \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$ .

$$A(\text{minussbodkouhore})B = (A - B) \cup (B - A)$$

- Potenčnou množinou množiny  $A$  nazveme množinu všetkých podmnožín množiny  $A$ . Označenie  $P(A)$ .

$$P(A) = \{X | X \subseteq A\}$$

### Základné vlastnosti množinových operácií

1. Komutatívnosť

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

2. Asociatívnosť

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$



## 3. Distributívnosť

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

## 4. Idempotentnosť

$$A \cup A = A, A \cap A = A$$

5.  $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$ 

## 6. de Morganove zákony

$$A \cup B = A \cap B$$

$$A \cap B = A \cup B$$

**Množinové identity**

Dôkazy sú v UDDŠ str. 36, 37

$$1. (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$$

$$2. A(\text{minussbodkou})B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$3. A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$$

$$4. A \cup B \subseteq C \leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C$$

**4.4 Karteziánsky súčin množín****Definícia usporiadanej dvojice**

Pod usporiadanou n-ticou si môžeme predstaviť konečnú postupnosť o n-členoch.

Nech sú  $a_1, a_2$  ľubovoľné prvky. Množinu  $\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$  nazývame usporiadanou dvojicou, označenie  $(a_1, a_2)$ , pričom  $a_1$  nazývame prvou súradnicou (zložkou),  $a_2$  druhou súradnicou (zložkou).

Usporiadané dvojice sa rovnajú ak obe ich zložky sú si rovné.

**Karteziánsky súčin dvoch a viacerých množín**

Karteziánskym súčinom množín  $A, B$  nazveme množinu  $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$

Definíciu karteziánskeho súčinu môžeme rozšíriť aj pre prípad n množín, môžeme postupovať induktívne, ako v prípade usporiadanej n-tice. Pre dvojicu konečných množín  $A, B$  je niekedy vhodná reprezentácia karteziánskeho súčinu pomocou matice  $A \times B$ .

## Množinové identity s karteziánskym súčinom

- ak aspoň jedna z množín  $A, B$  je prázdna, tak potom  $A \times B = \emptyset$
- nie je komutatívny
- nie je asociatívny
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- Ak  $A \subseteq B$ , tak pre každú množinu  $C$  platí  $A \times C \subseteq B \times C$
- $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
- Množiny  $A, B$  sú disjunktné práve vtedy, keď  $A \times B \cap B \times A = \emptyset$

Ďalšie dôležité množinové identity a vzťahy uvádzame v cvičeniach str. 40, 41.

## Použitie karteziánskeho súčinu

Použitie karteziánskeho súčinu prenechávame na skúseného a zručného čitateľa.  
(TODO)

## 4.5 Relácie

Nech  $A, B$  sú ľubovoľné množiny. Množinu  $\varphi$  nazývame textbfbinárnou reláciou z množiny  $A$  do množiny  $B$ , alebo binárnou reláciou medzi prvkami množín  $A$  a  $B$  vtedy a len vtedy, keď  $\varphi \subseteq A \times B$ .

Slovo binárna z definície znamená, že relácia je definovaná medzi dvomi množinami. Môžeme však zaviesť aj  $n$ -árne relácie, ktoré sú podmnožinami karteziánskeho súčinu  $n$ -množín.

Binárna relácia  $\varphi$  z  $n$ -prvkovej množiny  $A$  do  $m$ -prvkovej množiny  $B$  sa dá reprezentovať maticou  $M$  typu  $n \times m$ . Tie miesta v matici, ktoré zodpovedajú usporiadaným dvojiciam množiny  $\varphi$  označíme symbolom 1, na ostatné miesta v matici  $M$  napíšeme symbol 0.

Ďalšou veľmi názornou reprezentáciou je grafová reprezentácia binárnej relácie. Prvky množín označíme krúžkami, ktoré nazývame vrcholmi grafu a usporiadanú dvojicu znázorníme šípkou, ktorá ide z vrcholu odpovedajúceho prvému prvku dvojice k vrcholu, ktorý odpovedá druhému prvku dvojice.

## Vlastnosti

Nech  $\varphi$  je relácia na množine  $A$ .  $\varphi$  je:

1. Reflexívna, ak pre každé  $x \in A$  platí  $(x, x) \in \varphi$
2. Ireflexívna, ak pre žiadne  $x \in A$  neplatí  $(x, x) \in \varphi$
3. Symetrická, ak z podmienky  $(x, y) \in \varphi$  vyplýva  $(y, x) \in \varphi$
4. Asymetrická, ak pre každé  $(x, y) \in \varphi$  platí  $(y, x) \notin \varphi$
5. Tranzitívna, ak  $((x, y) \in \varphi \wedge (y, z) \in \varphi) \rightarrow (x, z) \in \varphi$
6. Atranzitívna, ak  $((x, y) \in \varphi \wedge (y, z) \in \varphi) \rightarrow (x, z) \notin \varphi$
7. Trichotomická, ak pre každé  $x, y \in A$  platí:

$$x \neq y \rightarrow ((x, y) \in \varphi \vee (y, x) \in \varphi)$$

$$[(x = y) \vee (x, y) \in \varphi \vee (y, x) \in \varphi]$$

8. Antisymetrická, ak pre každé  $x, y \in A$  platí:  $((x, y) \in \varphi \wedge (y, x) \in \varphi) \rightarrow x = y$

## Skladanie relácií

Nech  $\varphi$  je relácia medzi prvkami množín  $A, B$  a nech  $\psi$  je relácia medzi prvkami množín  $B, C$ . Potom

$$\{(a, c) \in A \times C : (\exists b)(b \in B \wedge (a, b) \in \varphi \wedge (b, c) \in \psi)\}$$

(je to relácia medzi prvkami množín  $A$  a  $C$ ) sa nazýva zložená relácia (zložená z relácií  $\varphi$  a  $\psi$ ) a označujeme ju  $\psi \circ \varphi$ .

## Inverzná relácia

Nech  $\varphi$  je relácia medzi prvkami množín  $A, B$ . Potom

$$\{(b, a) \in B \times A, (a, b) \in \varphi\}$$

(je to relácia medzi prvkami množín  $B$  a  $A$ ) sa nazýva inverzná relácia k relácii  $\varphi$  a označujeme ju symbolom  $\varphi^{-1}$ .

## Relácie na množinách

Reláciou medzi prvkami množín  $A, B$  (v tomto poradí) nazývame akúkoľvek podmnožinu karteziánskeho súčinu  $\varphi \subseteq A \times B$ . Ak  $A = B$ , tak hovoríme o relácii na množine  $A$  (alebo medzi prvkami množiny  $A$ ). Relácia medzi prvkami množín  $A, B$  je akákoľvek množina  $\varphi \subseteq A \times B$ , špeciálne  $\varphi = \emptyset$  a  $\varphi = A \times B$ .

## Relácia ekvivalencie

Relácia  $\varphi$  na množine  $A$  sa nazýva relácia ekvivalencie na  $A$ , ak je **reflexívna, symetrická a tranzitívna**.

## Rozklad množiny

Nech  $A$  je neprázdna množina. Systém  $S \subseteq P(A)$  sa nazýva rozklad množiny  $A$ , ak každá množina systému  $S$  je neprázdna. Pričom  $S$  je systém po dvoch disjunktných množín s vlastnosťou  $\bigcup_{M \in S} M = A$

Teda rozklad množiny  $A$  je taký systém neprázdnych podmnožín množiny  $A$ , že každý prvok  $x \in A$  patrí práve do jednej množiny tohto systému.

## Tranzitívny uzáver relácie

$$\varphi^+ = \varphi^1 \cup \varphi^2 \cup \dots = \bigcup_{k \geq 1} \varphi^k$$

## Reflexívno-tranzitívny uzáver

$$\varphi^+ = I_a \cup \varphi^1 \cup \varphi^2 \cup \dots = \bigcup_{k \geq 0} \varphi^k$$

$I_a = \{(x, x) | x \in A\}$ ,  $\varphi^0 = I_a$ ,  $\varphi^i = \varphi^{i-1} \circ \varphi$  pre  $i > 0$ , t.j.  $(x, y) \in \varphi^k$  pre nejaké  $k > 0 \leftrightarrow$  ak existuje postupnosť prvkov  $x = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = y$  taká, že platí  $x_0, x_1 \in \varphi, x_1, x_2 \in \varphi, \dots, x_{k-1}, x_k \in \varphi$

## 4.6 Usporiadania

### Definícia čiastočného a úplného usporiadania množiny

Relácia na množine  $A$  sa nazýva čiastočné usporiadanie množiny  $A$ , ak je **asymetrická a tranzitívna**. Relácia na množine  $A$  sa nazýva (lineárne) usporiadanie množiny  $A$ , ak je **asymetrická, tranzitívna a trichotomická**. Teda usporiadanie množiny  $A$  je každé čiastočné usporiadanie, ktoré je **trichotomické na množine  $A$** .

Formálnejšie, relácia  $\varphi$  na množine  $A$  je čiastočné usporiadanie množiny  $A$ , ak pre každé  $x, y, z \in A$  platí:

1.  $(x, y) \in \varphi \rightarrow (y, x) \notin \varphi$
2.  $(x, y) \in \varphi \wedge (y, z) \in \varphi \rightarrow (x, z) \in \varphi$

Ak navyše pre každé  $x, y \in A$  platí:

3.  $(x = y) \vee (x, y) \in \varphi \vee (y, x) \in \varphi$   
 , čo je ekvivalentné s  
 $x \neq y \rightarrow ((x, y) \in \varphi \vee (y, x) \in \varphi),$

tak  $\varphi$  je usporiadanie množiny  $A$ .

Ak  $A$  je množina a  $\varphi$  je jej usporiadanie (resp. čiastočné usporiadanie), tak hovoríme, že množina  $A$  je usporiadaná (resp. čiastočne usporiadaná) reláciou  $\varphi$  a zapisujeme to v tvare  $(A, \varphi)$  , alebo  $(A, <)$  , ak namiesto  $(x, y) \in \varphi$  píšeme  $x < y$  . Uvedený zápis je motivovaný tým, že pre tú istú množinu možno vo všeobecnosti definovať viacero čiastočných usporiadaní.

### Ostré a neostré usporiadanie

- Ostré, ak  $x < y$
- Neostré, ak  $x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y$

### Minimálny, maximálny, prvý a posledný prvok množiny

Prvok  $a$  čiastočne usporiadanej množiny  $(A, <)$  sa nazýva

- minimálny prvok, ak pre žiadne  $x \in A$  neplatí  $x < a$
- maximálny prvok, ak pre žiadne  $x \in A$  neplatí  $a < x$

Prvok  $b$  čiastočne usporiadanej množiny  $(A, <)$  sa nazýva

- **prvý** alebo **najmenší prvok** množiny  $A$ , ak pre každý prvok  $x \in A, x \neq b$  platí  $b < x$
- **najväčší** alebo **posledný prvok** množiny  $A$ , ak pre každé  $x \in A, x \neq b$  platí  $x < b$

Posledný je vždy maximálnym, ale nie vždy aj naopak. Prvý je vždy minimálnym, ale nie vždy aj naopak.

### Lexikografické usporiadanie karteziánskeho súčinu

Nech  $(A, \leq)$  je usporiadaná množina a  $n$  je prirodzené číslo. Usporiadanie na množine  $A^n = A \times A \times \dots \times A : (a_1, a_2, \dots, a_n) \leq (b_1, b_2, \dots, b_n)$  sa nazýva **lexikografické usporiadanie množiny  $A^n$**  práve vtedy, keď existuje taký index  $i = 1, 2, \dots, n$ , že  $a_i < b_i$  a pre  $j < i$  platí  $a_j = b_j$

**Príklad:**  $A = \{a, b, c\}$  je množina s usporiadaním  $a < b < c$ , tak lexikografické usporiadanie množiny  $A \times A$  vyzerá takto:  $(a, a) \leq (a, b) \leq (a, c) \leq (b, a) \leq (b, b) \leq (b, c) \leq (c, a) \leq (c, b) \leq (c, c)$

## 4.7 Zobrazenia

### Definícia pomocou relácií

Zobrazením  $f$  z množiny  $X$  do množiny  $Y$  nazývame reláciu  $f \subseteq X \times Y$  ak ku každému  $x \in X$  existuje práve jedno také  $y \in Y$ , že dvojica  $(x, y) \in f$ .

Podrobnejšie: relácia  $f$  z množiny  $X$  do množiny  $Y$  (alebo medzi prvkami množín  $X$  a  $Y$  v uvedenom poradí) sa nazýva **zobrazenie (funkcia)** množiny  $X$  do  $Y$ , ak platí:

1.  $\forall x \in X \exists y \in Y (x, y) \in f$
2.  $\forall x \in X \forall y \in Y \forall y' \in Y ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f) \rightarrow y = y'$

Ak  $f$  je zobrazenie množiny  $X$  do množiny  $Y$  zapisujeme  $f : X \rightarrow Y$ . Namiesto  $(x, y) \in f$  píšeme  $f(x) = y$ . Prvok  $y \in Y$  sa nazýva hodnota zobrazenia  $f$  v prvku  $x$ .

Ak  $A \subseteq X$ , tak znakom  $f(A)$  označujeme množinu všetkých tých  $y \in Y$ , ku ktorým existuje  $x \in A$ , že  $y = f(x)$ . Teda:  $f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A \wedge y = f(x)\}$

- Množina  $f(A)$  sa nazýva obraz množiny  $A$  v zobrazení  $f$
- Množina  $X$  sa nazýva obor definície zobrazenia  $f : X \rightarrow Y$
- $Y$  sa nazýva obor hodnôt zobrazenia  $f$ .

### Injektívne, surjektívne a bijektívne zobrazenia

Pripúšťame aj možnosť  $Y \neq f(X)$  (t.j. platí  $f(X) \subseteq Y$ ).

- **Surjektívne zobrazenie (X na Y)** ak  $f(X) = Y$
- **Injektívne zobrazenie (prosté)** ak  $x, y \in X$  a  $x \neq y$ , tak  $f(x) \neq f(y)$
- **Bijektívne zobrazenie** ak je injektívne a surjektívne zároveň.

**Zúženie funkcie** Ak  $f : X \rightarrow Y$  je funkcia a  $A \subseteq X$ , tak znakom  $f|A$  označujeme funkciu  $g : A \rightarrow Y$  definovanú takto; pre  $x \in A$  platí  $f(x) = g(x)$ , t.j.  $f|A = f \cap (A \times Y)$ . Funkcia  $g = f|A$  sa nazýva parciálna funkcia k funkcii  $f$ , alebo zúženie funkcie  $f$  (na množine  $A$ ).

## Skladanie zobrazení

Ak  $f$  je injektívne zobrazenie množiny  $X$  do  $Y$ , tak  $f^{-1}$  je bijektívne zobrazenie množiny  $f(X)$  do  $X$ .

Ak je  $f$  bijekcia množiny  $X$  na  $Y$ , tak  $f^{-1}$  je bijekcia množiny  $Y$  do  $X$ . Poznamenávame, že  $f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in f\}$ .

Nech  $f : X \rightarrow Y$  a  $g : Y \rightarrow Z$ . Potom zložená relácia  $g \circ f$  je zobrazenie množiny  $X$  do  $Z$ . Poznamenávame, že  $g \circ f = \{(x, z) \in (X, Z) \mid \exists y, y \in Y, (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g\}$ .

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Zobrazenie  $g \circ f$  sa nazýva **zložené zobrazenie** alebo **kompozícia zobrazení**

1.  $f, g$  sú injektívne zobrazenia, tak aj  $g \circ f$  je injektívne zobrazenie
2.  $f, g$  sú surjektívne zobrazenia, tak aj  $g \circ f$  je surjektívne zobrazenie
3.  $f, g$  sú bijektívne zobrazenia, tak aj  $g \circ f$  je bijektívne zobrazenie

## 4.8 Mohutnosť množiny

### Základné vlastnosti mohutnosti a nerovnosti

Nech  $A, B$  sú dve množiny. Budeme hovoriť, že množiny  $A, B$  majú rovnakú mohutnosť alebo rovnaký počet prvkov, píšeme  $|A| = |B|$ , ak existuje prosté zobrazenie množiny  $A$  na množinu  $B$ , teda bijekcia.

Vzťah „mať rovnakú mohutnosť“ je reflexívny, symetrický a tranzitívny. Vyjadruje ho nasledujúca veta:

1. Pre každú množinu  $A$  platí  $|A| = |A|$
2. Ak  $|A| = |B|$ , potom  $|B| = |A|$
3. Ak  $|A| = |B|$ ,  $|B| = |C|$ , tak  $|A| = |C|$

Nech  $A, B$  sú množiny.

- $A$  má mohutnosť menšiu alebo rovnú ako množina  $B$  a písať  $|A| \leq |B|$ , ak existuje injektívne zobrazenie  $f : A \rightarrow B$

- $A$  má mohutnosť menšiu ako množina  $B$ , píšeme  $|A| < |B|$ , ak  $|A| \leq |B|$  a nie je  $|A| = |B|$

Nech  $A, B, C$  sú množiny potom platí:

- Ak  $|A| = |B|$ , tak  $|A| \leq |B|$
- Ak  $|A| \leq |B|$  a  $|B| \leq |C|$ , tak  $|A| \leq |C|$
- Ak  $|A| = |B|$  a  $|B| < |C|$ , tak  $|A| < |C|$

Vzťah „ $|A| \leq |B|$ “ je antisymetrický, t.j. ak  $|A| \leq |B|$  a súčasne  $|B| \leq |A|$ , tak  $|A| = |B|$ . Príklad:  $|(0, 1)| \leq |< 0, 1>|$  a  $|< 0, 1>| \leq |(0, 1)|$  - nekonečné požičiavanie; zobrazenie z  $(0, 1)$  nemôže byť spojitý.

Nech  $f, g$  sú zobrazenia  $f : A \rightarrow B$  a  $g : B \rightarrow A$  a  $f$  je prosté. Potom existujú množiny  $A_1, A_2, B_1, B_2$  také, že platí:

- $A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 = A, B_1 \cup B_2 = B$
- $f(A_1) = B_1, g(B_2) = A_2$

## Počítanie s mohutnosťami

**Súčet** Nech  $A, B, C$  sú množiny. Budeme hovoriť, že mohutnosť množiny  $C$  je súčet mohutností množín  $A$  a  $B$ , písať  $|C| = |A| + |B|$ , ak existujú množiny  $A_1, B_1$  také že:

- $A_1 \cup B_1 = C$
- $A_1 \cap B_1 = \emptyset$
- $|A| = |A_1|, |B| = |B_1|$

Je potrebné overiť, či rovnosť platí aj pre iné množiny ako  $A, B$ , ktoré majú rovnakú mohutnosť. (vytvoríme prosté zobrazenia  $f, g$  z  $A$  a  $B$  do  $X$  a  $Y$ , vytvoríme zobrazenie  $h(x) = f(x)|x \in A; h(x) = g(x)|x \in B$ , všetko je prosté, všetci sú šťastní, na strane 62 je obrázok.)

**Umocňovanie** Mohutnosť množiny  $C$  je mohutnosť množiny  $A$  umocnená na mohutnosť množiny  $B$ ,  $|C| = |A|^{|B|}$ , ak  $|C| = |A^B|$ . Pričom  $A^B$  označujeme množinu všetkých zobrazení množiny  $B$  do množiny  $A$ .

**Súčin** Mohutnosť množiny  $C$  je súčin mohutností množín  $A$  a  $B$ ,  $|C| = |A \cdot B|$ , ak platí  $|C| = |A \times B|$



**Vlastnosti** Všetky tieto operácie sú monotónne, t.j. ak  $|A| \leq |X|$ ,  $|B| \leq |Y|$ , potom

- $|A| + |B| \leq |X| + |Y|$
- $|A| \cdot |B| \leq |X| \cdot |Y|$
- $A^B \leq X^Y$

Pre sčítanie a násobenie mohutností platia zákony aritmetiky, napr.:

- Komutativita
 
$$|A| + |B| = |B| + |A|$$

$$|A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$$
- Asociatívnosť
 
$$|A| + (|B| + |C|) = (|A| + |B|) + |C|$$

$$|A| \cdot (|B| \cdot |C|) = (|A| \cdot |B|) \cdot |C|$$
- Distributívny zákon
 
$$|A| \cdot (|B| + |C|) = (|A| \cdot |B|) + (|A| \cdot |C|)$$

Pre umocňovanie platia tiež zákony aritmetiky

- $A^{B+C} = A^B \cdot A^C$
- $(|A| \cdot |B|)^{|C|} = |A|^{|C|} \cdot |B|^{|C|}$
- $(|A|^{|B|})^{|C|} = A^{|B| \cdot |C|}$

Odčítanie a delenie mohutností sa definovať nedá.

## 4.9 Cantor-Bernsteinova veta a jej dôsledky

### formulácia vety

Nech  $A, B$  sú množiny. Ak platí  $|A| \leq |B|$  a súčasne  $|B| \leq |A|$ , tak  $|A| = |B|$

### idea dôkazu

TODO, nechce sa mi

## usporiadanie kardinálnych čísel

## 4.10 Konečné a nekonečné množiny

## Definícia konečnej množiny, definícia nekonečnej množiny

Množina  $A$  sa nazýva konečná, ak  $A < \aleph_0$ , t.j. ak  $A < N$ . Množina sa nazýva nekonečná, ak nie je konečná.

## existencia nekonečných množín

Množina  $A$  má  $n$  prvkov,  $|A| = n$ , kde  $n \in N$ , ak  $|A| = |N_n|$ .

$\forall n \in N$  platí  $|N_n| < |N_{n+1}| \rightarrow$  Ak má množina  $n$  prvkov,  $n \in N$ , tak je konečná.

(Dôkaz indukciou)

Pre  $n, m \in N$  je  $|N_n| = |N_m| \leftrightarrow n = m$ . (Dôkaz sporom)

Ak  $A \subseteq N_n$ , tak existuje  $k$  také, že  $|A| = k$ . (Dôkaz indukciou)

Ak množina  $A \subseteq N$  je zhora neohraničená, tak  $|A| = |N|$

Ak množina  $A$  je konečná  $\leftrightarrow$  tak existuje také  $n \in N$ , že  $|A| = n$ .

## vlastnosti konečných a nekonečných množín

## 4.11 Spočítateľné a nespočítateľné množiny

Množina  $A$  sa nazýva spočítateľná, ak platí  $A \leq \aleph_0$ , t.j. ak existuje prosté zobrazenie množiny  $A$  do množiny  $N$  – prirodzených čísel. Množina sa nazýva nespočítateľná, ak nie je spočítateľná.

Zrejme každá konečná množina je spočítateľná. Podmnožina spočítateľnej množiny je spočítateľná. Množina  $N$  je nekonečná spočítateľná. Podľa Cantorovej vety množina  $P(N)$  je nespočítateľná.

Budeme hovoriť, že množina  $A$  sa dá zoradiť do postupnosti, ak existuje zobrazenie množiny  $N$  na množinu  $A$ , t.j. ak existuje postupnosť  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  taká, že  $A = \{a_n, n \in N\}$

Neprázdna množina je spočítateľná vtedy a len vtedy, keď sa dá zoradiť do postupnosti.

Ak existuje prosté zobrazenie  $f$  množiny  $A$  na množinu  $B$  a množina  $A$  je spočítateľná, potom aj množina  $B$  je spočítateľná.

## Zjednotenie a karteziánsky súčin spočítateľných množín

Zjednotenie a karteziánsky súčin dvoch spočítateľných množín sú spočítateľné množiny.

Zjednotenie spočítateľne mnoho spočítateľných množín je spočítateľná množina.

Množina všetkých reálnych čísel je nespočítateľná.

**Existencia nespočítateľných množín****Cantorova diagonálna metóda****4.12 Potenčná množina a jej kardinalita**

Pre ľubovoľnú množinu  $X$  platí  $|P(X)| = 2^{|X|}$

**formulácia Cantorovej vety o potenčnej množine**

Pre každú množinu  $X$  platí  $|X| < |P(X)|$ .

idea dôkazu:

Pre každú množinu  $X$  platí  $|X| < 2^{|X|}$ . Neexistuje množina všetkých množín.

dôsledky pre nekonečné množiny:

**4.13 Prirodzené čísla a matematická indukcia, Dirichletov princíp****Definícia prirodzených čísiel**

Nech  $M, N$  je podmnožina spĺňajúca dve podmienky:  $0 \in M$  ak  $x \in M$ , tak potom aj  $(x + 1) \in M$ . Potom  $M = N$ .

**Dôkaz matematickou indukciou**

Nech  $(V(n))_{n \in \mathbb{N}}$  je postupnosť výrokov.

Báza indukcie: Predpokladajme, že platí výrok  $V(0)$  Indukčný krok: pre každé prirodzené číslo  $n$ , ak platí  $V(n)$ , tak potom platí  $V(n + 1)$ , potom výrok  $V(n)$  platí pre každé prirodzené číslo.

Predpokladajme, že z platnosti výroku  $V(k)$  pre každé  $k < n$  vyplýva aj platnosť výroku  $V(n)$ . Ak platí výrok  $V(0)$ , tak výrok  $V(n)$  platí pre každé prirodzené číslo  $n$ .

**Dirichletov princíp**

Nech  $A$  a  $B$  sú konečné množiny, pričom  $|A| = n$ ,  $|B| = m$  a  $n > m$  Potom neexistuje žiadne injektívne zobrazenie  $f : A \rightarrow B$ .

**Silnejšie tvrdenie:** Ak  $f : A \rightarrow B$  je zobrazenie konečných množín také, že  $|A| = n$ ,  $|B| = m$  a  $n/m > r - 1$  pre nejaké prirodzené číslo  $r$ , tak existuje prvok množiny  $B$ , na ktorý sa zobrazí aspoň  $r$  prvkov množiny  $A$ .

## Vlastnosť dobrého usporiadania

### 4.14 Základné pravidlá kombinatorického počítania

#### Počítanie prvkov množiny dvoma spôsobmi

1. Určiť počet **neusporiadaných** kongurácií, pričom opakovanie objektov v konguráciách je alebo nie je povolené.
2. Určiť počet **usporiadaných** kongurácií, pričom opakovanie objektov v konguráciách je alebo nie je povolené.

#### Pravidlo súčtu

Nech  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n \geq 2$  sú navzájom disjunktné podmnožiny konečnej množiny  $X$ , pričom  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ :

Potom  $|X| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n|$ .

#### Pravidlo súčinu

Nech  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n \geq 2$  sú ľubovoľné konečné množiny.

Potom  $|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \dots \cdot |X_n|$ .

#### Pravidlo mocnenia

Ak  $A$  a  $B$  sú končné množiny, pričom  $|A| = n$  a  $|B| = m$ , tak  $|B^{|A|}| = |B|^{|A|} = m^n$

### 4.15 Variácie a enumerácia zobrazení

Nech  $A$  je konečná množina,  $|A| = n$ . Potom počet všetkých podmnožín množiny  $A$  je  $|P(A)| = 2^n$ .

[variácie s opakovaním a bez opakovania, permutácie, určenie ich počtu]

### 4.16 Kombinácie a enumerácia podmnožín

[kombinácie bez opakovania a s opakovaním a určenie ich počtu, príklady kombinácií s opakovaniami]

### 4.17 Binomická a polynomická veta

[znenie a dôkaz, dôsledky]

## 4.18 Rovnosti a nerovnosti s kombinačnými číslami

[identity zahŕňajúce kombinačné čísla, metódy dokazovania identít]

## 4.19 Princíp zapojenia a vypojenia

[formulácia, dôkaz a aplikácie: enumerácia surjektívnych zobrazení, počet permutácií bez pevných bodov]

## 4.20 Hierarchia rastu funkcií, odhady čísla $n!$ O-symbolika, rádová rovnosť, asymptotická rovnosť, odhady

## 4.21 Stromy a lesy, kostry, súvislé grafy, meranie vzdialeností v grafe

[definície, vlastnosti, rozličné charakterizácie stromov]

## 4.22 Eulerovské a bipartitné grafy

[charakterizácie eulerovských a bipartitných grafov, algoritmus na nájdenie eulerovského ťahu]

## 4.23 Meranie vrcholovej a hranovej súvislosti grafu

[definície, vzájomný vzťah, artikulácie, mosty, charakterizácia 2-súvislých grafov]

## 4.24 Hamiltonovské grafy

[definícia, postačujúce podmienky, zložitosť problému]

# Kapitola 5

## Genetika

Genetika

### 5.1 Molekulárne základy dedičnosti ALMOST DONE

Status: almost DONE Source: Prednášky 9, 10, (11?), 12, 13, 14

štruktúra a replikácia DNA, transkripcia, translácia, regulácia génovej expresie na transkripčnej a post-transkripčnej úrovni.

#### Štruktúra DNA

DNA

báza (C, T, U - pyrimidín, A, G - purín)

Deoxyribóza

Fosfát

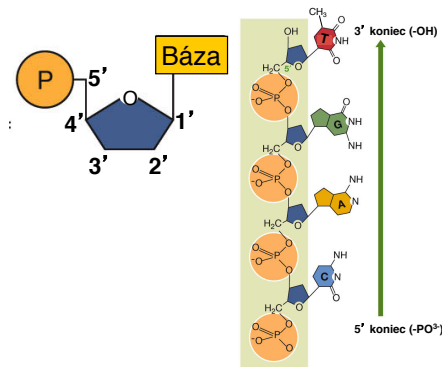
Dvojvláknová, helikálna, antiparalelná

$-PO_3^-$  koniec – 5' fosfátový

-OH koniec – 3' ribózový/deoxyribózový

Vodíkové väzby

### Polynukleotidy sú polárne polyméry



### RNA

U + ribóza, 1 vlákno

## Replikácia

Semikonzervatívna – jedno templátové vlákno z pôvodnej + 1 nové

Rozdelenie DNA – helikáza, energia z hydrolýzy ATP

SSB single strand binding proteíny zabraňujú spojeniu

Nové vlákno vzniká  $5' \rightarrow 3'$

DNA polymerázy replikujú

Potrebnú na začatie RNA primer, ktorý pridá DNA primáza

Replikačná vidlica – Replikácia ide od “stredu” (origin) – oboma smermi naraz

Leading a Lagging strand

Keďže syntéza ide  $5' \rightarrow 3'$ , lagging strand sa syntetizuje po úsekoch – okazakiho fragmenty

Lagging strand – DNA polymeráza 3 syntetizuje, DNA polymeráza 1 odstraňuje RNA primery a nahrádza ich DNA a DNA ligáza opravuje medzery, kde sa nadväzujú fragmenty

Lagging strand zle replikuje teloméry – enzým telomeráza ich predlžuje (obsahuje RNA a proteínovú časť, podľa tej RNA sa dosyntetizuje telomér)

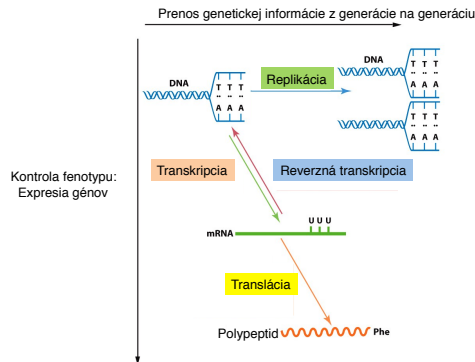
## Oprava DNA

Transpozón – úsek DNA, schopný meniť miesto v genóme

## Transkripcia, translácia, syntéza bielkovín

Centrálne dogma – smer toku informácií

### Centrálne dogma molekulárnej biológie



DNA → Transkripcia → mRNA → translácia → proteín

Kódujúce vlákno + Templátové vlákno (komplementárne ku kódujúcemu) → mRNA vlákno (rovnaké ako kódujúce, ale T → U)

Iniciácia – RNA polymeráza + sigma faktor dosadnú

Elongácia – predlžovanie RNA vlákna

Terminácia –  $\rho$  proteín → nascentné vlákno RNA, alebo bez neho → zloženie RNA do 2D štruktúry

U eukaryotov

Intrón + Exón → transkripcia → pre-mRNA → splicing, processing → mRNA → transport, čiapočka, poly(A) chvost → translácia → proteín

Obrázok prezent 12 slide 34

3 RNA polymerázy miesto 1

rRNA

pre-mRNA

tRNA, 5S rRNA, malé jadrové RNA

mRNA, rRNA – zložka ribozómov, tRNA – prenáša AK

Malé RNA – miRNA, shRNA, siRNA – sa podieľajú na génovej expresii

Začiatok transkripcie RNA polymerázou 2 potrebuje bazálny iniciačný komplex (TATA box + stuff)

Post-transkripčné úpravy

CAP, poly(A) chvost

Možná deaminácia

Alternatívny splicing intrónov → rôzne proteíny (12, 52)

Trans-splicing – kombinácia exónov z rôznych génov



## Translácia

Skladanie ribozómov: proteíny  $\rightarrow$  rRNAs  $\rightarrow$  ribozóm. Syntéza rRNA v jadierku

tRNA: antikodón tRNA kodón mRNA

AK sú pripojené na 3' koniec tRNA

Aj modifikované nukleotidy

Iniciácia proteosyntézy, Elongácia polypeptidu, terminácia translácie

3 binding sites v ribozóme (E-exit, P-peptidyl, A-aminoacyl)

5'  $\rightarrow$  3'

Wobble pozícia – Inozín – môže tvoriť pár s viac bázami

## Regulácia génovej expresie

Prezentácia 14 TODO



## 5.2 Cytologické základy dedičnosti

štruktúra chromozómov na mikroskopickej a molekulovej úrovni

funkcia chromozómov

distribúcia genetických štruktúr pri delení buniek eukaryotov (mitóza a meióza)

Spôsoby rozmnožovania organizmov a ich úloha v udržiavaní genetickej variability

## 5.3 Mendelistická dedičnosť

monohybridné, dihybridné a polyhybridné kríženie s úplnou dominanciou

princípy a možnosti genetickej analýzy u človeka

## 5.4 Rozšírená mendelistická genetická analýza

neúplná dominancia a kodominancia

mnohonásobný alelismus

letálne gény

interakcie génov

penetrancia a expresivita

## 5.5 Dedičnosť a pohlavie

genetická determinácia pohlavia u mikroorganizmov, rastlín, živočíchov a človeka

štruktúra a funkcia pohlavných chromozómov

dedičnosť znakov, ktorých gény sú uložené na pohlavných chromozómoch (dedičnosť znakov viazaných na pohlavie)

dedičnosť znakov pohlavím ovládaných a ovplyvnených

## 5.6 Väzba génov

väzbové skupiny

charakteristika kvantitatívnych znakov

polygenná dedičnosť

zložky fenotypovej variability

dedivosť (heritabilita)

### 5.11 Evolúcia ako biologický fenomén

predstavy o evolúcii pred Darwinom, základné prvky a postuláty Darwinovej evolučnej teórie

### 5.12 Mutácie a selekcia ako základné evolučné činitele.

r-selekcia a K-selekcia

základné populačno-genetické selekčné modely, hypotéza „červenej kráľovnej“

### 5.13 Genetický drift ako evolučný činiteľ

náhodné zmeny génových frekvencií v malých populáciách

Kimurova teória neutrálnej evolúcie

### 5.14 Mikroevolúcia a makroevolúcia

vznik nových druhov (speciácia)

reprodukčné bariéry

analýza fylogénézy a konštrukcia dendrogramov

fylogenetika, fenetika, kladistika

### 5.15 Molekulárna evolúcia

gény ako historické dokumenty

molekulové hodiny

univerzálny fylogenetický strom

### 5.16 Vznik života

svet RNA

extrémofilné organizmy

mitochondrie a plastidy

endosymbiotická teória

## Kapitola 6

### Matematická analýza

## Kapitola 7

### Metódy v bioinformatike

# Kapitola 8

## Pravdepodobnosť a štatistika

(Predmety Pravdepodobnosť a štatistika, Integrácia dátových zdrojov, Metódy v bio-informatike)

### 8.1 Definícia pravdepodobnostného modelu a základné vlastnosti pravdepodobnosti

(sigma algebra, pravdepodobnostná miera, princíp inklúzie-exklúzie)

### 8.2 Nezávislosť udalostí, podmienená pravdepodobnosť a Bayesove vety

### 8.3 Diskrétne náhodné premenné

(distribučná funkcia, stredná hodnota, disperzia, binomické, Poissonovo a geometrické rozdelenie)

### 8.4 Spojité náhodné premenné

(distribučná funkcia, hustota, stredná hodnota, disperzia, rovnomerné, exponenciálne a normálne rozdelenie)

### 8.5 Zákon veľkých čísel a limitné vety

(Markovova a Čebyševova nerovnosť, slabý zákon veľkých čísel, centrálna limitná veta)



## 8.6 Náhodné vektory

(distribučná funkcia, nezávislosť náhodných premenných, kovariancia, korelačný koeficient, stredná hodnota, multinomické a viacrozmerné normálne rozdelenie)

## 8.7 Použitie štatistických testov

(Fisherov exaktný test, chí-kvadrát test, Welchov t-test, Mann-Whitneyho U-test, Bonferroniho korekcia viacnásobného testovania)



# Kapitola 9

## Programovanie

### 9.1 Objektovo orientované programovanie

zapúzdrenie

dedičnosť

polymorfizmus

trieda

modifikátory prístupu

konštruktory

abstraktné triedy a rozhrania)

vnorené triedy(nested classes)

garbage collection

### 9.2 Výnimky (exceptions)

vyhodenie výnimky

zachytenie a spracovanie výnimiek (try, catch)  
finally)

vlastné triedy výnimiek

checked a unchecked výnimky

### 9.3 Vlákna (threads)

stav vlákna (new, runnable, blocked, waiting, timed\_waiting,

# Kapitola 10

## Tvorba a analýza algoritmov

### 10.1 Analýza časovej zložitosti algoritmov

Definícia časovej zložitosti

TODO

**O-notácia**

TODO

Odhad časovej zložitosti rekurzívnych algoritmov používajúcich metódu rozdeľuj a panuj

TODO

### 10.2 Algoritmy pre triedenie

Efektívne algoritmy triedenia porovnávaním

TODO

Triedenie v lineárnom čase

TODO

Dolný odhad časovej zložitosti každého triedenia porovnávaním

TODO

### 10.3 Dátové štruktúry v poli

Pole s dynamickou veľkosťou – vektor

TODO

Zásobník

TODO

Fronta

TODO

Binárna halda a implementácia prioritnej fronty pomocou nej

TODO

### 10.4 Usporiadané dátové štruktúry

Binárne vyhľadávacie stromy

TODO

Usporiadaná množina

TODO

Usporiadané asociatívne pole – slovník

TODO

Vyvažovanie binárnych stromov

TODO

### 10.5 Hešovanie

Kolízie a rôzne spôsoby ich riešenia

TODO

## Narodeninový paradox

TODO

## Množina

TODO

## Asociatívne pole

TODO

## 10.6 Základné grafové algoritmy

### Reprezentácie grafu v pamäti

TODO

### Prehľadávanie do hĺbky a do šírky

TODO

### Topologické triedenie

TODO

## 10.7 Najkratšie cesty v grafe

### Dijkstrov algoritmus

TODO

### Floydov-Warshallov algoritmus

TODO

## 10.8 Najlacnejšia kostra grafu

### Algoritmus Union-FindSet

TODO

## Kruskalov algoritmus

TODO

## 10.9 Násobenie matíc

### Naivný algoritmus

TODO

### Strassenov algoritmus

TODO

### Efektívne umocňovanie matice

TODO

### Tranzitívny uzáver grafu pomocou umocňovania matíc

TODO

## 10.10 Dynamické programovanie

Bottom-up riešenie

### Konkrétne príklady použitia

0-1 knapsack    TODO

Floyd-Warshall    TODO

Problém násobenia reťazca matíc    TODO

### Charakterizácia problémov riešiteľných dynamickým programovaním

TODO

### Porovnanie iteratívneho prístupu a rekurzcie s memoizáciou

TODO

## 10.11 Ďalšie princípy tvorby efektívnych algoritmov

### Rozdeľuj a panuj

TODO

### Pažravé algoritmy

Používajú sa na riešenie optimalizačných problémov. Globálne optimálne riešenie je vytvorené pomocou postupných lokálne optimálnych riešení. Obvykle sú to iteratívne algoritmy, v ktorých problémy redukuje na podproblémy menšieho rozsahu, v dôsledku čoho sú rýchle.

#### Dijkstrov algoritmus

#### Kruskalov algoritmus

#### Racionálny knapsack

### Princíp vyváženosti

Stretávame sa s delením väčšieho problému na menšie, prípadne štruktúr na menšie podštruktúry, často vieme zvýšiť efektívnosť algoritmu ich vyváženosťou.

**Príklad:** Ak quicksort vyberá náhodný pivot, v priemernom prípade dosahuje zložitosť  $O(n \log n)$ , pri zlom výbere pivotu to však môže byť až  $O(n^2)$ . Chceme teda pivotom deliť na rovnaké - vyvážené časti (vyberieme medián).

**Príklad:** BST má v priemere výšku  $\log n$ , vyhľadávanie zložitosť  $O(\log n)$ , ak však vetvy nie sú vyvážené, môže dosiahnuť zložitosť  $O(n)$ .

### Voľba vhodnej dátovej štruktúry

**Abstraktný dátový typ** - abstrakcia nad dátovými štruktúrami popisujúca operácie, ktoré sa budú vykonávať. Podľa najčastejších operácií zvolíme implementáciu s ktorou budú najefektívnejšie.



Tabuľka 10.1: **Slovník**

<b>Implementácia</b>	<b>Member</b>	<b>Insert</b>	<b>Delete</b>
Pole	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$
Utriedené pole	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$
2-3 stromy	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Heš	$O(1)/O(n)$	$O(1)/O(n)$	$O(1)/O(n)$

Tabuľka 10.2: **Prioritná fronta**

<b>Implementácia</b>	<b>Insert</b>	<b>Min/top</b>	<b>Delete min/pop</b>
Pole	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
Utriedené pole	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
Halda	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(\log n)$
2-3 stromy	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$