VYSOKOŠKOLSKÉ SKRIPTÁ

Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského

Tibor Neubrunn, Jozef Vencko

MATEMATICKÁ ANALÝZA II

1992

Recenzenti: prof. RNDr. Michal Greguš, DrSc.,
prof. RNDr. Juraj Mamrilla, CSc.

Za odborná a Jazykovú stránku týchto vysokoškolských skrípt zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel jazykovou úpravou v redakcii.

Schválil rektor Univerzity Komenského v Bratislave dňa 8. 11. 1990, č. VYD 8094/1990 C VIII/2
ako skriptá pre Matematicko-fyzikálnu fakultu UK.

ISBN 80 – 223 – 0050 – 0 (celý súbor)
ISBN 80 – 223 – 0051 – 9 (zv. 1)

Úvod

Tento učebný text má za cieľ slúžiť ako základná literatúra pre štúdium matematickej analýzy v druhom semestri prvého ročníka pre študentov matematických odborov. Súčasne má slúžiť aj študentom v mimoriadnych formách štúdia.

Je nepochybné, že existuje celý rad možností ako vykladať matematickú analýzu už na tomto stupni štúdia. Jednou z prvých otázok je, či brať do úvahy vedomosti z analýzy, v našom prípade najmä z integrálneho počtu, ktoré sa získali na strednej škole, alebo budovať systematicky všetko od začiatku. Priklonili sme sa k druhej možnosti. Budujeme len na základe poznatkov získaných v prvom semestri vysokoškolského štúdia (pozri napr. [10]. Táto skutočnosť, ako aj to, že skriptá sú určené študentom všetkých matematických odborov ovplyvnili spôsob výkladu. Snažíme sa o výklad dostatočne podrobný a mnohorazy pre jasnosť a zrozumiteľnosť výkladu volíme radšej špeciálnejší tvar tvrdení. Skúsenosť nás poučila o tom, že pre väčšiu časť študentov našich odborov je vhodný takýto prístup. Prirodzene, že sme pociťovali potrebu na viacerých miestach upozorniť študenta na tú skutočnosť, že náš výklad zďaleka neuzatvára danú oblasť štúdia. V takýchto prípadoch sme urobili odkaz na literatúru alebo sme sa aspoň sčasti dotkli istej problematiky v dodatku. To sa týka najmä dôležitého pojmu určitého integrálu. Poznámky takého druhu nemajú za ciel dať čitateľovi hlboký prehľad o problematike, ale upozorniť na to, že existuje vnútorná dynamika v rozvoji matematických disciplín a povzbudiť jeho zvedavosť.

Dôležitým aspektom pri výučbe takej matematickej disciplíny ako matematická analýza je otázka aplikácií. Látka druhého semestra zďaleka neumožňuje pojednávať o závažných aplikáciách. Nepochybne však dáva príležitosť upozorniť študenta na možnosti modelovania veľmi jednoduchých situácií a ich riešení matematickými metódami. Toto hľadisko sme sa snažili zvýrazniť. V súvislosti s tým, aj keď ide o celkom štandardnú učebnú pomôcku, sme sa snažili výklad zamerať tak, aby študent cítil, že tvorba matematických pojmov a rozvoj matematiky bol a je ovplyvňovaný úlohami praxe a že vo vykladanej teórii sa odrážajú objektívne zákonitosti reálnej skutočnosti. Dúfame, že tieto hľadiská študent pri dôkladnom štúdiu skutočne objaví a osvojí si ich.

Cvičenia, ktoré sme do skrípt zaradili, sú neoddeliteľnou časťou pri štúdiu. V texte na ne priamo nenadväzujeme, ale pre dobré pochopenie a osvojenie látky sú nevyhnutné. Ich počet je nedostačujúci najmä na získanie početnej zručnosti. Vhodné doplňujúce cvičenia možno nájsť v rôznych zbierkach (pozri napr. [3]).

Skriptá sú členené na kapitoly a články. Na vety resp. definície sa odvolávame podľa tohto rozdelenia. Takže veta 3.3.1 znamená, že ide o vetu 1 z článku 3 kapitoly 3 Pri odvolávke na vetu v tej istej kapitole sa odvolávame len dvoma číslami a na vetu v tom istom článku len poradovým číslom danej vety. Zo štandardných označení používame systematicky znak N pre množinu všetkých prirodzených čísel a R pre množinu všetkých reálnych čísel.

Je našou milou povinnosťou poďakovať sa recenzentom skrípt prof. RNDr. M. Gregušovi, DrSc. a prof. RNDr. J. Mamrillovi, CSc. za viaceré pripomienky, ktoré pomohli zlepšiť úroveň skrípt. Za nakreslenie obrázkov ďakujeme RNDr. J. Jarošovi. Prípadné nedostatky, ktoré sa ešte v texte nájdu, padajú na vrub autorov. Dúfame, že ich počet nebude veľký.

Autori

OBSAH

Kapitola I.

NEURČITÝ INTEGRÁL

1 PRIMITÍVNA FUNKCIA A JEJ ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI

Základným pojmom v celej kapitole bude pojem primitívnej funkcie, ktorý zavedieme v nasledujúcej definícii.

Definícia 1. Nech $y = F(x)$ je funkcia definovaná na otvorenom intervale J. Funkciu $y = f(x)$, $x \in J$ nazveme primitívnou funkciou k $y = f(x)$, $x \in J$, ak platí $F'(x) = f(x)$ pre všetky $x \in J$.

Z tejto definície priamo vyplýva, že ak $F(x)$, $x \in$ J je primitívnou funkciou k $f(x)$, $x \in$ J, potom aj $F(x) + c$, kde c je ľubovoľná konštanta, je tiež primitívnou funkciou k $f(x)$, $x \in J$.

POZNÁMKA 1. Existuje viacero zovšeobecnení primitívnej funkcie. Z týchto zovšeobecnení my budeme používať jedno, ktoré je uvedené v nasledujúcej definícii.

Definícia 1′. Nech $y = f(x)$ je funkcia definovaná na zjednotení konečného počtu otvorených intervalov $J_1, J_2, \ldots, J_n$. Funkciu $y = F(x)$ definovanú na $\bigcup_{j=1}^{k} J_j$ nazývame primitívnou k $y = f(x)$, ak platí $F'(x) = f(x)$ pre všetky $= \; x \in \bigcup_{j=1}^{k} J_j$.

POZNÁMKA 2. Je prirodzené hovoriť o primitívnej funkcii k funkcii $f(x)$ aj na uzavretom intervale J. V takomto prípade $F(x)$ je primitívnou funkciou, ak rovnosť $F'(x) = f(x)$ platí v každom vnútornom bode J a v hraničných bodoch chápeme deriváciu $F'(x)$ v tejto rovnosti ako príslušnú jednostrannú deriváciu.

POZNÁMKA 3. Často sa stáva, že hovoríme o primitívnej funkcii $F(x)$ k funkcii $f(x)$ definovanej na všeobecnejšej množine M ako je konečné zjednotenie intervalov a neudávame interval ani konečné zjednotenie intervalov, na ktorom primitívnu funkciu $f(x)$ hľadáme. V takomto prípade chápeme $F(x)$ v istom „maximálnom“ zmysle: Primitívnou funkciou na M nazývame takú funkciu, ktorá je primitívna na ľubovoľnom otvorenom intervale $J \subset M$. Zrejme je primitívnou aj na ľubovoľnom zjednotení konečného počtu otvorených intervalov, ktoré sú časťou M.

Veta 1. Ak $F(x)$ a $G(x)$ sú dve ľubovoľné primitívne funkcie k $f(x)$ pre $x \in J$, tak existuje konštanta c taká, že $F(x) = G(x) + c$ pre všetky $x \in J$.

D ô k a z vyplýva z dôsledku Lagrangeovej vety o strednej hodnote. Nakoľko $F'(x) = f(x)$, $x \in J$, $G'(x) = f(x)$, $x \in J$, potom $[F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$ pre všetky $x \in J$. Teda $F(x) - G(x) = c$ pre všetky $x \in J$.

POZNÁMKA 4. Veta 1 nemusí platiť, ak definičným oborom $f(x)$ nie je interval. Ak napríklad $f(x) = 3x^2$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, potom funkcia $F(x) = x^3$ je primitívnou funkciou na tejto množine. Ďalej funkcia

$$G(x) = \begin{cases} x^3 & \text{pre} \quad x \in (-\infty, -1) \\ x^3 - 1 & \text{pre} \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

je tiež primitívnou k tej istej funkcii, avšak

$$F(x) - G(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \in (-\infty, -1) \\ 1 & \text{pre} \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

teda nie je konštantou pre všetky $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Definícia 2. Množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii $f(x)$ na intervale J nazývame neurčitým integrálom na J a označujeme $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. (Symbol $\int$ nazývame znakom integrovania, funkciu $f(x)$ nazývame integrandom).

Ak $F(x)$ je nejaká primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale J, potom

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c \tag{1.1}$$

Posledná rovnosť je trochu nepresná. Presnejší by bol množinový zápis

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{g(x) : g(x) = F(x) + c;\, c \in \mathrm{R}\}$$

My však budenie používať zápis (1.1), pričom veríme, že čitateľom nebude vadiť, keď ten istý symbol $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ bude slúžiť na označenie tak celej množiny primitívnych funkcií, ako aj na ľubovoľný prvok tej istej množiny.

Z predchádzajúceho dostávame $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$ alebo

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + \mathrm{c} \tag{1.2}$$

Je zrejmé, že posledné rovnosti platia pre ľubovoľné $F(x)$ diferencovateľné na intervale J.

Derivovaním rovnosti (1.1) dostaneme

$$[\int f(x)\,\mathrm{d}x]' = f(x) \text{ pre } x \in J$$

alebo (1.3)

$$\mathrm{d}(\int f(x)\,\mathrm{d}x) = [\int f(x)\,\mathrm{d}x]'\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$$

V úvahách o primitívnych funkciách sa dôležitou javí otázka existencie primitívnej funkcie. Existuje ku každej funkcii primitívna? Odpoveď je záporná. Stačí napríklad zvoliť funkciu

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \in (-\infty, \infty),\, x \neq 0 \\ 1 & \text{pre} \quad x = 0 \end{cases}$$

Keby existovala funkcia $F(x)$ taká, že $F'(x) = f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, potom podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote by platilo

$F(x) = c_1$ pre $x < 0$,
$F(x) = c_2$ pre $x > 0$ (c_1, c_2 sú konštanty)

Z existencie derivácie $F'(0)$ plynie spojitosť $F(x)$ v bode $x = 0$, a teda $\lim\limits_{x \to 0_+} F(x) = \lim\limits_{x \to 0_-} F(x)$, čo implikuje rovnosti $c_1 = c_2 = F(0)$. Platilo by teda $F(x) = c_1$ pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$, čo je v spore s rovnosťou $F'(0) = 1$. Teda k vyššie zvolenej funkcii $f(x)$ primitívna funkcia neexistuje.

Platí však nasledujúca veta, dôkaz ktorej urobíme neskôr (pozri vetu 2.6.1), pretože zatiaľ k tomu nemáme vybudovaný dostatočný aparát.

Veta 2. Ak funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale J, potom na J má primitívnu funkciu (existuje k nej na J neurčitý integrál).

POZNÁMKA 5. Predpoklad spojitosti funkcie $f(x)$, $x \in J$ je postačujúcou nie však nevyhnutnou podmienkou existencie primitívnej funkcie, ako ukazuje nasledujúci príklad .

Príklad 1. Majme funkciu $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{pre} \quad x \in (-\infty, \infty),\, x \neq 0 \\ 0 \quad \text{pre} \quad x = 0 \end{cases}$

Je zrejmé, že pre funkciu

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{pre} \quad x\in(-\infty,\infty),\ x\neq 0 \\ 0 \quad \text{pre} \quad x=0 \end{cases}$$

platí $F'(x) = f(x)$ pre všetky $x \in (-\infty,\infty)$. (Presvedčte sa o tom priamo výpočtom.)

Funkcia $F(x)$ je primitívnou funkciou k $f(x)$ na intervale $(-\infty, \infty)$ napriek tomu, že $f(x)$ nie je v bode $x = 0$ spojitá, pretože ako vieme z I. semestra $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}]$ neexistuje.

2 VZORCE PRE INTEGRÁCIU NIEKTORÝCH FUNKCIÍ

V tomto paragrafe uvedieme niektoré vzorce umožňujúce nájdenie neurčitého integrálu (alebo tiež primitívnej funkcie). Operácia nachádzania neurčitého integrálu, nazývaná tiež operácia integrovania, je inverznou operáciou k operácii derivovania (premyslieť za pomoci cvičenia 1 za článkom 3). Mnohé zo vzorcov vyplývajú priamo z definície neurčitého integrálu a zo základných formúl pre derivácie, ďalšie odvodíme v nasledujúcich článkoch ako ilustratívne prípady.

1. $\int x^\alpha \,\mathrm{d}\,x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$, ak $x > 0$, $\alpha\neq -1$

Ak číslo α je také, že funkcia x^α je definovaná pre $x \in (-\infty, \infty)$, potom uvedený vzorec platí na tomto intervale.

POZNÁMKA 1. V tomto aj iných prípadoch je účelné zaujímať sa o primitívnu funkciu (neurčitý integrál) aj v prípade, keď funkcia je definovaná na všeobecnejšej množine ako je interval (pozri poznámku 1.1). Ak chceme byť presní, je potrebné postupovať opatrne. Ilustrujme to na prípade 1., pre $\alpha = -2$. Ak uvažujeme funkciu $f(x) = x^{-2}$ na celom definičnom obore, potom nemôžeme $\int x^{-2}\mathrm{d}x$ vyjadriť jedinou formulou tak, ako v 1. Platí však

$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases} -\dfrac{1}{x}+c_1 & \text{pre} \quad x>0 \\ -\dfrac{1}{x}+c_2 & \text{pre} \quad x<0 \end{cases}$$

POZNÁMKA 2. Vo vzorci 1. nevylučujeme ani prípad $\alpha = 0$, teda $\int 1\cdot \mathrm{d}x = x + c$ pre $x \in (-\infty, \infty)$

2. $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x=\ln|x|+c$ na každom intervale neobsahujúcom číslo 0.

Ak funkciu $f(x) = \dfrac{1}{x}$ berieme na celom definičnom obore, nemôžeme podobne ako v prípade funkcie x^{-2} vyjadriť jej integrál jediným vzorcom.

3. $\int a^x \,\mathrm{d}\,x=\dfrac{a^x}{\ln a}+c$, $a > 0$, $a \neq 1$ pričom špeciálne
4. $\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}\,x=\mathrm{e}^x+c$,
5. $\int \sin x \,\mathrm{d}\,x=-\cos x+c$,
6. $\int \cos x \,\mathrm{d}\,x=\sin x+c$,
7. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x=\operatorname{tg} x+c$,

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2} \mathrm{d}\,x = -\operatorname{cotg} x + c$,

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2} \mathrm{d}\,x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a}\operatorname{arcotg}\frac{x}{a} + c$,

10. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2} \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$,

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}\,x = \arcsin\frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a}\arccos\frac{x}{a} + c$, $x \in (-|x|, |x|)$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}} \mathrm{d}\,x = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm \alpha^2} \right| + c$,

13. $\displaystyle\int \sinh x \,\mathrm{d}\,x = \cosh x + c$,

14. $\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}\,x = \sinh x + c$,

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} \mathrm{d}\,x = \tanh x + c$,

16. $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} \mathrm{d}\,x = -\coth x + c$.

Je prirodzené, že ak menovateľ integrandu má v nejakom čísle nulovú hodnotu, vzorec platí len v intervaloch neobsahujúcich toto číslo (napríklad vo vzorcoch 2, 7, 8, 10, 12, 16).

Nakoniec pripíšeme ešte ďalší vzorec, ktorý možno ľahko odvodiť na vhodnom intervale priamo na základe definície primitívnej funkcie.

17. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}\,x = \ln|\, f(x)| + c$.

Príklady:

1. $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}\,x = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} \mathrm{d}\,x = \ln|\sin x| + c$,

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x \pm a} \mathrm{d}\,x = \ln|\, x \pm a| + c$,

3. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} \mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)'}{1+x^2} \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$.

3 ZÁKLADNÉ METÓDY INTEGROVANIA

Veta 1. Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú na intervale J primitívne funkcie $F(x)$ a $G(x)$. Nech k_1, k_2 sú konštanty. Potom funkcia $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ má na J primitívnu funkciu $k_1 F(x) + k_2 G(x)$ a platí

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)\,\mathrm{d}x] = k_1 \int f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int g(x)\mathrm{d}x$$

Tvrdenie vyplýva z vlastnosti derivovania lineárnej kombinácie funkcií a jeho dôkaz, ako aj možné zovšeobecnenie pre konečný počet funkcií, prenechávame čitateľovi. Veta nám umožňuje použiť prvú z metód integrovania, nazvime ju **metódou rozkladu**, spočívajúcu v rozklade integrandu na také funkcie, pre ktoré buď máme vzorec, alebo ich vieme integrovať iným spôsobom.

Príklady:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \mathrm{d}\,x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}\,x + \int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}\,x = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$

2. Použime metódu rozkladu na odvodenie vzorca 10. z predošlého článku.

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{2a}\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{(x-a)}\,\mathrm{d}\,x - \int \frac{1}{(x-a)}\,\mathrm{d}\,x\right] =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\ln|x-a| - \ln|x+a|\,\right] + c = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

Veta 2. Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na intervale J a funkcia $\varphi(t)$ na intervale I. Nech množina hodnôt funkcie $\varphi(t)$, $t \in I$ je podmnožinou intervalu J. Nech ďalej $\varphi(t)$ je diferencovateľná na I. Potom, ak $f(x)$ má na J primitívnu funkciu $F(x)$ ($\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$), potom $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ (t) má na I. primitívnu funkciu $F(\varphi(t))$, a teda

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + c \tag{3.1}$$

D ô k a z . Podľa predpokladov vety platí $F'(x) = f(x)$, pre všetky $x \in J$, $\varphi[I] \subset J$ a existuje konečná derivácia funkcie $\varphi(t)$ na I. Môžeme teda použiť vetu o derivácii zloženej funkcie pre $F(\varphi(t))$ na I. Platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}[F(\varphi(t))] = \frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,x}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\varphi(t)}{\mathrm{d}\,t} = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

t. j. funkcia $F(\varphi(t))$ je primitívnou funkciou k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na intervale I. Platí teda (3.1).

POZNÁMKA 1. Vzorec (3.1) sa v praxi často využíva na výpočet integrálov. Upravme si ho takto:

$$\int f(x)\mathrm{d}x\,|_{x = \varphi(t)} = F(x) + c\,|_{x = \varphi(t)} = F(\varphi(t)) + \mathrm{c} \tag{3.2}$$

Platí

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int f(x)\mathrm{d}x\,|_{x = \varphi(t)}$$

Z posledného vzorca vidíme, že ak vieme vypočítať $\int f(x)\mathrm{d}x$, potom vieme nájsť aj $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Príklad 3.

$\int \sin^n t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t$, n je prirodzené číslo. Položme: $\varphi(t) = \sin t$, $\varphi'(t) = \cos x$, $I = (-\infty, \infty)$, $f(x) = x^n$, $J = (-\infty, \infty)$. Nakoľko $\varphi[I] \subset J$, podľa (3.2) dostaneme

$$\int \sin^n t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int x^n\mathrm{d}x\,|_{x = \sin t} = \left.\frac{x^n}{n+1} + c\right|_{x=\sin t} = \frac{\sin^{n+1} t}{n+1} + c$$

POZNÁMKA 2. Formulu (3.2) môžeme používať aj v obrátenom zmysle, t. j. ak vieme vypočítať integrál $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t$ (alebo je v istom zmysle „jednoduchší“ ako $\int f(x)\mathrm{d}x$, potom pomocou zámeny – substitúcie premennej $x = \varphi(t)$ a použitím formuly

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t\,|_{t = \varphi^{-1}(x)} \tag{3.3}$$

vypočítame $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Použitie vzorca (3.3) však podmieňuje doplniť predpoklady vety 2 o požiadavke, aby existovala inverzná funkcia $t = \varphi^{-1}(t)$, k funkcii $x = \varphi(t)$. To je napr. splnené v prípade, že $\varphi(t)$ je na I rýdzomonotónna.

Metóda integrovania opierajúca sa o vetu 2 sa nazýva **substitučná metóda** a nakoľko vieme, že diferenciál funkcie $x = \varphi(t)$ je definovaný ako $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$, vzorec (3.3) môžeme písať v tvare

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\,\varphi'(t)|_{t = \varphi^{-1}(x)}$$

Príklad 4.

$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x$, $J = \langle -1, 1\rangle$. Položme $x = \sin t$, $\mathrm{t} \in I = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ (na intervale I je funkcie $\sin t$ rastúca).

Platí podľa (3.3)

$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\arcsin x}$. Nakoľko $\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t =$
$= \frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t + c$ (tu sme použili výsledok z cvičenia 2 b), platí

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\arcsin x} = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$$

Tretia metóda integrácie, ktorá je známa pod názvom **metóda per partes** má svoje odôvodnenie v nasledujúcej vete.

Veta 3. Nech funkcie $u(x)$, $v(x)$ majú na intervale J spojité derivácie. Potom

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

D ô k a z . Všimnime si, že z predpokladov vyplýva existencia integrálov vo vzorci (3.4). Ak použijeme vetu o derivácii súčinu dostaneme

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Integrovaním poslednej rovnosti s prihliadnutím na (1.2) a vetu 1, dostávame tvrdenie (3.4).

Príklady:

5. $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, $x\in(-\infty,\infty)$
Zvoľme $u(x) = x$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Výpočtom dostaneme $u'(x) = 1$, $v(x) = \mathrm{e}^x$. Podľa (3.4) máme

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c = \mathrm{e}^x(x-1)+c$$

6. $\int \ln x\,\mathrm{d}x$, $x\in(0,\infty)$
Voľba funkcií $u(x),\cdot v'(x)$ je v tomto príklade jednoznačná. Položíme $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$. ($u = 1$, $v' = \ln x$ by nebolo možné, nakoľko by sme nevedeli vypočítať $v = \int \ln x\,\mathrm{d}x$). Platí $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$.
Teda $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\cdot\mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + c$.

7. $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$, $x\in(-\infty,\infty)$
V tomto príklade použijeme metódu per partes dvakrát. Položíme $u = \sin x$, $v' = \mathrm{e}^x$, odkiaľ $u' = \cos x$, $v = \mathrm{e}^x$. Dostávame $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$. Znova polozme $u = \cos x$, $v' = \mathrm{e}^x$, $u' = -\sin x$, $v = \mathrm{e}^x$ teda $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - [\mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x]$. Na poslednú rovnosť pozeráme ako na rovnicu o jednej neznámej, ktorou je je $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$. Jej vyriešením dostaneme hľadaný výsledok:

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)}{2} + c$$

POZNÁMKA 3. (k problému elementárnosti primitívnych funkcií) Derivácia ľubovoľnej elementárnej funkcie je, ako je nám známe, znova elementárnou funkciou. Je to tak aj s primitívnou funkciou k elementárnej funkcii? Odpoveď je negatívna, a nie je to ani obzvlášť prekvapujúce. Na lepšie pochopenie si pripomeňme jednoduchšiu známu situáciu.

Ak uvažujeme napr. operáciu umocňovania na množine racionálnych čísel, vidíme, že druhá mocnina racionálneho čísla je znovu racionálne číslo. Inverzná operácia (odmocnina) túto vlastnosť nemá. Rovnica $x = 2$ nemá v množine racionálnych čísel riešenie. Analogická situácia je v prípade elementárnych funkcií, pod ktorými rozumieme všeobecnú mocninu, exponenciálnu funkciu, logaritmickú funkciu, goniometrické a cyklometrické funkcie ako aj funkcie, ktoré z nich vznikajú pomocou štyroch základných algebraických operácií a tvorením zložených funkcií. Operácia derivovania priradí elementárnej funkcii znova elementárnu funkciu. Primitívna funkcia k elementárnej funkcii, aj keď existuje, nemusí byť elementárnou funkciou. Tak napr. akokoľvek by sme sa snažili nájsť neurčitý integrál z funkcií

$$\mathrm{e}^{-x^2},\quad \frac{1}{\ln x},\quad \frac{\sin x}{x},\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^3}},\quad \sqrt{1+x^3},\quad \frac{1}{\sqrt{x^5+1}},\quad \sqrt[3]{1+x^3},$$

nepodarí sa nám ich nikdy „vypočítať", napriek tomu, že všetky tieto funkcie sú na svojich definičných oboroch spojité, čo podľa vety 1.2 stačí k existencii neurčitého integrálu na každom intervale J patriacom do definičného oboru. Platí teda, že existujú „nové" diferencovateľné funkcie, ktoré nie sú elementárne, označme ich

$F_1(x)$, $F_2(x)$, … také, že $F_1'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $\quad F_2'(x) = \dfrac{1}{\ln x}, \cdots$

Cvičenie

1. Nech $\mathfrak{A}$ je množina všetkých takých funkcií definovaných na otvorenom intervale J, ktoré majú primitívnu funkciu. $\mathfrak{B}$ nech je množina všetkých diferencovateľnych funkcií na J. Definujme zobrazenie φ, ktoré každej funkcii $F \in \mathfrak{A}$ priraďuje jej deriváciu $F' \in \mathfrak{B}$.

a) Existuje inverzné zobrazenie k φ?

b) Nech $\tilde{\mathfrak{A}}$ je množina všetkých neurčitých integrálov patriacich k funkciám $f \in \mathfrak{A}$. Ukážte, že ak definujeme zobrazenie $\psi: \mathfrak{A} \to \tilde{\mathfrak{A}}$ tak, že položíme $\psi(f) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, potom $\psi(f)$ je prosté zobrazenie. (Tento fakt nás oprávňuje k tomu, aby sme integrovanie chápali ako inverznú operáciu k operácii derivovania – pozri čl. 2.)

2. Pomocou substitučnej metódy dokážte:

a) Nech funkcia $f(x)$, x ∈ J je tam rôzna od nuly a nech existuje $f'(x)$, potom $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$ (t. j. dokážte vzorec 17. z článku 2).

b) Ak $F(x)$ je na J primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$, potom $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$ pre $(ax + b) \in J$, $a \neq 0$.

3. a) Ukážte, že z existencie primitívnej funkcie k $f(x) + g(x)$ na J nevyplýva existencia primitívnych funkcií k funkciám $f(x)$ a $g(x)$ na J.

b) Ak $f(x) + g(x)$ a $g(x)$ majú primitívne funkcie na J, existuje potom primitívna funkcia k $f(x)$ na J?

4. Ak označíme $J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x$ (n prirodzené číslo), pomocou (1.3) dokážte platnosť rekurentného vzorca $J_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2na^2}\dfrac{x}{(x^2+a^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2n}\dfrac{1}{a^2}J_n(x)$

5. Vypočítajte $\int \max\{1, x^2\}\,\mathrm{d}x$.

6. Pomocou metódy rozkladu nájdite:

a) $\displaystyle\int \frac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}+1)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$, $\quad$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ $\quad$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x$

7. Vypočítajte substitučnou metódou nasledujúce integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$, $\quad$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ $\quad$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

8. Metódou per partes vypočítajte:

a) $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$, $\quad$ b) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$, $\quad$ c) $J_1 = \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $J_2 = \int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$.

4 INTEGROVANIE RACIONÁLNYCH FUNKCIÍ

Integrovanie racionálnych funkcií, t. j. funkcií typu $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ sú polynómy, je dôležité aspoň z dvoch dôvodov. Prvým je, že sú to pomerne jednoduché a v aplikáciách veľmi často používané funkcie. Druhým dôvodom je to, že existuje viacero typov funkcií, ktorých integrovanie možno previesť na integrovanie racionálnych funkcií. Naučíme sa najprv integrovať dva typy veľmi jednoduchých racionálnych funkcií. Sú to tieto:

$$\text{I.}\quad \int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}\,x \qquad\qquad \text{II.}\quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}\,x$$

pričom A, B, C, a, p, q sú reálne čísla, n je prirodzené číslo a diskriminant $D = p^2 - 4q < 0$. Integrandy týchto typov integrálov nazývame parciálnymi zlomkami alebo tiež elementárnymi racionálnymi funkciami.

$$\text{I.}\quad \int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{A}{1-n}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}}+c & \text{pre}\quad n\neq 1 \\ A\ln|x-a|+c & \text{pre}\quad n=1 \end{cases}$$

Druhý parciálny zlomok uvažujeme v trochu všeobecnejšej podobe a budeme s ním mať podstatne viac práce, než s prvým, kde stačilo v podstate použiť vzorce 1. a 2. z článku 2.

II. $\displaystyle\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x$, $a \neq 0$, b, c, p, q sú reálne čísla, n prirodzené číslo a $D = b^2 - 4ac < 0$.

Uvažujme špeciálne prípady

1. $p = 0$, $n = 1$

Integrál $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x$ riešime substitúciou $t = x + \dfrac{b}{2a}$, ktorá je prirodzená, ak kvadratický trojčlen doplníme na úplný štvorec. Skutočne

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2 - \dfrac{D}{4a^2}}\,\mathrm{d}\,x$$

nakoľko diskriminant $D = b^2 - 4ac < 0$, ak použijeme vzorec 9. článku 2 dostaneme výsledok.

2. $p \neq 0$, $n = 1$

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x = \frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b-b+\dfrac{2qa}{p}}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x = \frac{p}{2a}\left[\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x + \left(\frac{2qa}{p}-b\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}\,x\right]$$

Na prvý integrál z pravej strany poslednej rovnosti použijeme vzorec 17. článku 2, druhý je špeciálny typ II. 1.

3. $p = 0$, $n > 1$

Dostaneme integrál $\displaystyle\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x$, ktorý substitúciou $t = x + \dfrac{b}{2a}$ prevedieme na integrál $\displaystyle\frac{1}{a^n}\int \frac{1}{\left(t^2 - \dfrac{D}{4a^2}\right)^n}\,\mathrm{d}\,t$, pričom predpokladáme $D = b^2 - 4ac < 0$. Tento prípad vyriešime pomocou rekurentného vzorca. Označme si $J_n(x) = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}\,x$ (zmenili sme označenie premennej a konštanty).

Platí $J_n(x) = \displaystyle\frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}\,x - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}\,x\right]$. Posledný integrál riešime metódou per partes. Položme $u = x$, $v' = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n}$. Potom $u' = 1$, $v = \dfrac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$.

Teda $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}\,x$. Po dosadení

$$J_n(x) = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}\,x + \frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}\,x\right]$$

alebo

$$J_n(x) = \frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1}(x)\right] \tag{4.1}$$

(pozri príklad 4 z cvičenia za § 3).

Rekurentný vzorec (4.1) redukuje výpočet integrálu $J_n(x)$ na výpočet $J_{n-1}(x)$. Ak použijeme tento vzorec na výpočet $J_{n-1}(x)$ (samozrejme, že v (4.1) n nahradíme číslom $n-1$), redukujeme výpočet $J_n(x)$ na výpočet J_{n-2}. Po opakovaní tohto postupu $(n-1)$-krát, dostaneme integrál

$$J_1(x) = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$$

4. $p \neq 0$, $n > 1$

Zostal nám teda všeobecný prípad integrálu II. Platí

$$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{p}{2a}\left[\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x + \left(\frac{2qa}{p} - b\right)\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x\right]$$

Prvý z integrálov na pravej strane rovnosti riešime substitúciou $ax^2+bx+c=t$, z čoho $(2ax+b)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a dostávame

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}\,t = \int \frac{1}{(1-n)t^{n-1}}\,\mathrm{d}\,t + c = \frac{1}{(1-n)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + c$$

Druhý z integrálov je špeciálny prípad II. 3.

Príklad 1. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{3}{2}\left[\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+3)^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{13}{3}\int \frac{1}{(x^2-3x+3)^2}\,\mathrm{d}\,x\right]$

Ak v prvom z integrálov položíme $x^2-3x+3=t$, dostaneme z čoho $(2x-3)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, dostaneme $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+3)^2}\,\mathrm{d}\,x = \int t^{-2}\,\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-3x+3}$. Ďalej $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-3x+3)^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}\,\mathrm{d}\,x =$

$\displaystyle = \int \frac{1}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}\,\mathrm{d}\,t$. (použili sme substitúciu $x-\frac{3}{2}=t$). Na posledný integrál použijeme vzorec (4.1). Dostaneme $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-3x+3)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{3}\left[\frac{t}{2(t^2+3/4)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\right]_{t=x-3/2} = \frac{2x-3}{3(x^2-3x+3)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}$,

a tak po dosadení a úprave dostaneme

$$\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)} + \frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + c$$

POZNÁMKA 1. Integrál typu II. môžeme postupmi opísanými v predchádzajúcej časti riešiť aj v prípade, že diskriminant $D = b^2 - 4ac \geq 0$ s menšími modifikáciami. Napríklad v prípade II.1 namiesto vzorca 9. článku 2 používame vzorce 10. resp. 1. Podobne v II. 3 môžeme odvodiť rekurentný vzorec analogický vzorcu (4.1) pre integrál $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-a^2)^n}\,\mathrm{d}\,x$.

Integrovanie prípadov elementárnych racionálnych funkcií typu I., II. sme teda vyriešili. Čo však so všeobecným prípadom racionálnej funkcie? Ukazuje sa, že k tomuto prípadu už nemajú metódy matematickej analýzy čo povedať. Všetko sa redukuje na prípady I. a II. O tom, ako sa to redukuje, nás poučí jedna veta z algebry. Prv ako ju vyslovíme, uvedomme si, že nemá zmysel zaoberať sa ľubovoľnými racionálnymi funkciami, ale len takými, kde stupeň čitateľa je menší ako stupeň menovateľa (nazývajú sa rýdze racionálne funkcie). V opačnom prípade stačí totiž polynómy vydeliť a prípad sa prevedie na integrovanie rýdzej racionálnej funkcie, ako to ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 2. Funkciu $\dfrac{x^4+1}{x+1}$ rozložte na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.

Delením polynómu dostávame:

$$\begin{array}{l}
x^4 + 1 \;:\; x + 1 = x^3 - x^2 + x - 1 \\
\underline{-x \pm x^3} \\
\quad -x^3 + 1 \\
\quad \underline{\mp x^3 \mp x^2} \\
\qquad x^2 + 1 \\
\qquad \underline{\mp x^3 \mp x} \\
\qquad\quad -x + 1 \\
\qquad\quad \underline{\mp x \mp 1} \\
\qquad\qquad 2
\end{array}$$

Platí teda $\dfrac{x^4+1}{x+1} = x^3 - x^2 + x - 1 + \dfrac{2}{x+1}$

Uveďme si teraz bez dôkazu už spomínanú vetu z algebry.

Veta. Nech $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ je rýdza racionálna funkcia s reálnymi koeficientmi. Nech

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot (x-b)^{\beta} \cdot \ldots \cdot (x-c)^{\gamma} \cdot (x^2+px+q)^{\lambda} \cdot (x^2+rx+s)^{\mu} \cdot \ldots \cdot (x^2+ux+v)^{\nu},$$ [1]

kde a, b, …, c sú navzájom rôzne reálne korene $Q(x)$; x^2+px+q, …, x^2+ux+v majú len komplexné korene, ktoré sú navzájom rôzne, α, β, …, γ, λ, μ, …, ν sú prirodzené čísla. Potom existujú reálne čísla $A_\alpha, A_{\alpha-1}, \ldots, A_1, B_\beta \ldots, B_1, \ldots, C_\gamma, \ldots, C_1, P_\lambda, P_{\lambda-1}, \ldots, P_1, Q_\lambda, \ldots, Q_1, R_\mu, \ldots, R_1, S_\mu, \ldots, S_1, \ldots, U_\nu, \ldots, U_1, V_\nu, \ldots, V_1$, také, že platí pre všetky x, pre ktoré $Q(x) \neq 0$ jednoznačný rozklad

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-b} + \cdots + \frac{C_\gamma}{(x-b)^\gamma} + \\
&+ \frac{C_{\gamma-1}}{(x-b)^{\gamma-1}} + \cdots + \frac{C_1}{x-b} + \frac{P_\lambda x + Q_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \frac{P_{\lambda-1} x + Q_{\lambda-1}}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{P_1 x + Q_1}{x^2+px+q} + \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu} + \\
&+ \frac{R_{\mu-1} x + S_{\mu-1}}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}} + \cdots + \frac{R_1 x + S_1}{x^2+rx+s} + \cdots + \frac{U_\nu x + V_\nu}{(x^2+ux+v)^\nu} + \frac{U_{\nu-1} x + V_{\nu-1}}{(x^2+ux+v)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{U_1 x + V_1}{x^2+ux+v}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

POZNÁMKA 2. Koeficienty

$$A_\alpha, A_{\alpha-1}, \ldots, A_1, B_\beta, \ldots, B_1, C_\nu, \ldots, C_1, P_\lambda, \ldots Q_\lambda, \ldots R_\mu, \ldots S_\mu, \ldots U_\nu \ldots V_1 \tag{4.3}$$

sú určené jednoznačne. Na ich výpočet sa používa niekoľko metód. Jedna z najčastejšie používaných v praxi sa nazýva **metóda neurčitých koeficientov**, ktorá spočíva v tomto: Ak spočítame zlomky na pravej strane (4.2) dostaneme v menovateli polynóm $Q(x)$ a v čitateli nejaký polynóm $T(x)$. Pretože na ľavej strane je funkcia $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, platí identita

$$P(x) = T(x) \text{ pre všetky } x \in (-\infty, \infty) \tag{4.4}$$

[1] Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že koeficient pri najvyššej mocnine polynóm $Q(x)$ je rovný 1. To sa dá vždy dosiahnuť predelením čitateľa aj menovateľa zlomku $\frac{P(x)}{Q(x)}$ tým istým číslom.

Priamo nemôžeme tvrdiť, že $P(a) = T(a)$, $P(b) = T(b)$, …, $P(c) = T(c)$, nakoľko rozklad (4.2) nie je definovaný pre množinu $X = \{a, b, \dots, c\}$. Rovnosť $P(x) = T(x)$ však platí v dostatočne malom rýdzom okolí každého bodu množiny X, a teda napr. pre bod a platí $\lim\limits_{x\to a} P(x) = \lim\limits_{x\to a} T(x)$.

Zo spojitosti polynómov dostávame $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$, $\lim\limits_{x\to a} T(x) = T(a)$, a preto $P(a) = T(a)$, podobne $P(b) = T(b)$, …, $P(c) = T(c)$, a teda (4.4) platí identicky pre všetky reálne čísla x.

Označme n stupeň polynómu $Q(x)$. Potom $n = \alpha + \beta + \dots + \gamma + 2(\lambda + \mu + \dots + \nu)$ a počet neznámych (neurčitých) koeficientov (4.3) je tiež n. Koeficienty polynómu $T(x)$ sú lineárnymi kombináciami koeficientov (4.3). Stupeň polynómu $P(x)$ nemôže prevýšiť číslo $(n - 1)$. Doplnením nulovými koeficientmi môžeme polynóm $P(x)$ doplniť tak, aby formálne sa stal polynómom práve $(n - 1)$-stupňa, resp. aby mal práve n koeficientov (vrátane absolútneho člena). Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách z rovnosti (4.4) dostávame sústavu n rovníc s n neznámymi (4.3). Táto sústava má vždy jediné riešenie, pretože rozklad (4.2) má jednoznačné vyjadrenie.

Príklady:

3. Rozložte na parciálne zlomky funkciu $\dfrac{1}{x^2 - a^2}$ (pozri príklad 3.2).

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x-a)(x+a)}$$

Preto $(A + B)x + Aa - Ba = 1$. Porovnaním koeficientov dostávame sústavu rovníc

$$A + B = 0$$
$$aA - aB = 1$$

jej riešením dostaneme $A = \dfrac{1}{2a}$, $B = -\dfrac{1}{2a}$, teda $\dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\left[\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right]$.

4. Rozložte na parciálne zlomky racionálnu funkciu $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$.

Platí $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+1)}$. Ak spočítame zlomky na pravej strane a vynásobíme rovnosť menovateľom, dostaneme $x^2 - 1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x + (Dx + E)(x^2 + 1)x$ alebo $x^2 - 1 = (A + D)x^4 + Ex^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$ porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách máme $A + D = 0$, $E = 0$, $2A + B + D = 1$, $C + E = 0$, $A = -1$ odkiaľ $A = -1$, $B = 2$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 0$ a rozklad má tvar $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} + \dfrac{x}{(x^2+1)}$

5. Rozložte funkciu $\dfrac{1}{x^4+1}$.

Polynóm $x^4 + 1$ nemá reálne korene. Preto jeho rozklad musí vyzerať takto:

$$x^4 + 1 = (x^2 + px + q)(x^2 + bx + c)$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách dostaneme $p + b = 0$, $q + c + pb = 0$, $pc + qb = 0$, $qc = 1$. Nakoľko $b = -p$ môžeme ostatné rovnice napísať v tvare $q + c = p^2$, $p(c - q) = 0$, $q \cdot c = 1$. Z poslednej rovnice vidíme, že q a c majú rovnaké znamienko a sú rôzne od nuly. Z rovnice $q + c = p^2$ je jasné, že to znamienko je kladné a že $p \neq 0$. Rovnosť $p(c - q) = 0$ implikuje $c = q$ a nakoľko $q \cdot c = q^2 = 1$ platí $c = q = 1$.

Z $q + c = p^2$ dostávame $p = \pm\sqrt{2}$ p a keďže $b = -p$ máme $b = \mp\sqrt{2}$. Zrejme stačí brať horné znamienka (ak zoberieme dolné, činitele sa len vymenia).

Dostali sme rozklad $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)$. Ďalej

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Postupom ako v predošlých prípadoch sa presvedčíme, že $A=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $D=\frac{1}{2}$. Platí teda $\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$.

Cvičenie

1. Pomocou rekurentného vzorca (4.1) vypočítať $\int\frac{1}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}\,x$.

2. Vypočítať integrály a) $\int\frac{1}{(x^2-1)(x-2)}\,\mathrm{d}\,x$; b) $\int\frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x$

c) $\int\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$; d) $\int\frac{x^{10}+2x^9+3x^7+4x^6+x^4+2x^3+7x-1}{x^9+2x^6+x^3}\,\mathrm{d}\,x$

3. Vypočítajte $\int\frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x$ dvoma spôsobmi:

a) Substitúciou (dostaneme primitívnu funkciu $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2$).

b) Rozkladom na parciálne zlomky (dostaneme primitívnu funkciu $\frac{1}{2}[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x^2-1)-\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x^2+1)]$. Preto pre $x\in(-\infty,\infty)$ musí platiť:

$$\operatorname{arctg} x^2=\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x^2-1)-\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x^2+1)+c \tag{4.5}$$

Dosadením za $x=0$ máme $c=\frac{\pi}{2}$. (Dokážte platnosť vzorca (4.5) priamo z definície $\operatorname{arctg} x$!)

5 INTEGROVANIE NIEKTORÝCH FUNKCIÍ, KTORÉ SA DÁ PREVIESŤ NA INTEGROVANIE RACIONÁLNYCH FUNKCIÍ

K formulácii úvah v tomto paragrafe budeme potrebovať pojem racionálnej funkcie dvoch premenných. Najprv pripomeňme, že pod polynómom dvoch premenných rozumieme funkciu

$$P(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{ij}x^i y^j$$

(kde $a_{ij}\in\mathsf{R}$ (reálne čísla) pre $i=0,1,\dots,n$; $j=0,1,\dots,m$) definovanú na $\mathsf{R}\times\mathsf{R}$ s hodnotami v R.

Racionálna funkcia dvoch premenných je funkcia tvaru $R(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde P, Q sú polynómy dvoch premenných. Je definovaná pre všetky $(x,y)\in\mathsf{R}\times\mathsf{R}$, pre ktoré $Q(x,y)\neq 0$. Podobne možno definovať racionálnu funkciu n premenných. Ďalej takú funkciu budeme označovať $R(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Pomocou racionálnej funkcie dvoch resp. viacerých premenných utvoríme niekoľko typov funkcií a ukážeme, že ich integrovanie možno previesť na integrovanie racionálnych funkcií.

I. $$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{1/n}\right)\mathrm{d}\,x$$

kde $a,b,c,f\in\mathsf{R}$ také, že $af-bc\neq 0$, $n>1$ je prirodzené číslo. Ľahko sa nahliadne, že tak prípad $n=1$, ako aj podmienka $af-bc=0$ vedie k integrálu z racionálnej funkcie. Zaveďme substitúciu

$$\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{1/n}=t$$

Z nej plynie

$$\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)=t^n,\quad x=\frac{b-f\,t^n}{ct^n-a},\quad \mathrm{d}\,x=\frac{af-cb}{(ct^n-a)^2}nt^{n-1}\,\mathrm{d}\,t \tag{5.1}$$

Platí teda $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+f}}\right)\mathrm{d}\,x=\int R\left(\frac{b-f\,t^n}{ct^n-a},t\right)\cdot n\,t^{n-1}\cdot\frac{af-cb}{(ct^n-a)^2}\mathrm{d}\,t$.

Na integrande posledného integrálu nie je dôležitý presný zápis, ale fakt, že nová premenná t je „viazaná len racionálnymi operáciami“ (je to podiel polynómov jednej premennej t), a teda ide o racionálnu funkciu $R^*(t)$, ktorú vieme integrovať.

POZNÁMKA 1. Myšlienka postupu pri integrovaní uvažovaného typu sa dá uplatniť aj na všeobecnejšom prípade. Uvažujme typ $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{r_1},\cdots,\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{r_k}\right)\mathrm{d}\,x$, kde $r_i=\frac{m_i}{n_i}$, m_i je celé číslo, n_i prirodzené číslo, pre i = 1, 2, …, k. Ak si označíme n najmenší spoločný násobok čísel n_1, n_2, …, n_k, substitúciou $\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)=t^n$ dostaneme pre x a dx tie isté vyjadrenia ako v (5.1) a vzhľadom na to, že $nr_i=n\frac{m_i}{n_i}$ je pre i = 1, 2, …, k celé číslo, uvažovaný integrál znovu prechádza v integrál z racionálnej funkcie premennej t.

Príklad 1. $\int\frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\mathrm{d}\,x$

Tu je $a=f=1$, $b=c=0$. Najmenší spoločný násobok čísel 2 a 3 je číslo n = 6. Položme $x=t^6$, d$x=6t^5$dt. Platí

$$\int\frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\mathrm{d}\,x=\int\frac{t^6-1}{(t^3+t^4)t^6}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}\,t=6\int\frac{t^6-1}{t^4(1+t)}\mathrm{d}\,t=6\int\frac{t^5-t^4+t^3-t^2+t-1}{t^4}\mathrm{d}\,t=$$
$$=6\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}\right]+c=6\left[\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-6\sqrt[6]{x}+\ln|\sqrt[6]{x}|+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right]+c$$

II. Integrály typu $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}\,x$ sa riešia tzv. Eulerovými[2] substitúciami. Predovšetkým vylúčime prípad $a=0$, pretože je to typ I. Nech teda $a\neq 0$.

1. Eulerova substitúcia sa môže použiť, ak $a>0$. Má tvar

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\pm\sqrt{a}\,x \tag{5.2}$$

pričom je možná akákoľvek kombinácia znamienok na pravej strane substitúcie (5, 2). Umocnime rovnosť (5.2) na druhú. Dostaneme $ax^2+bx+\mathrm{c}=t^2\pm 2\sqrt{a}tx+ax^2$ odkiaľ $x=\frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}t}=R_1(t)$ kde $R_1(t)$ je racionálna funkcia premennej t, ďalej d$x=R_1'(\mathrm{t})\,\mathrm{d}\,t$ ($R_1'(\mathrm{t})$ ako derivácia racionálnej funkcie je tiež racionálna funkcia).

Použitím týchto vzťahov $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\pm\sqrt{a}R_1(t)$ teda platí

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}\,x=\int R(R_1(t);\pm t\pm\sqrt{a}R_1(t))\cdot R_1'(t)\,\mathrm{d}\,t=\int R^*(t)\,\mathrm{d}\,t$$

kde $R^*(t)$ je racionálna funkcia.

[2] L. Euler (1707 – 1783), švajčiarsky matematik

2. Medzi Eulerove substitúcie sa počíta aj nasledujúca, ktorá sa dá použiť v prípade, že $D = b - 4ac > 0$. Potom kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ má reálne rôzne korene α, β a platí pre $x \neq \alpha$

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R(x, \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}) = R(x, |x-\alpha| \sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}) =$$

$$= \begin{cases} R_2(x, \sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}) & \text{pre} \quad x > \alpha \\ R_3(x, \sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}) & \text{pre} \quad x < \alpha \end{cases}$$

Integrálmi typu $\int R_i(x, \sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}})\,\mathrm{d}x$, $i = 2, 3$ sme sa zaoberali v prípade I a riešili sme ich substitúciou

$$\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha} = t^2 \tag{5.3}$$

POZNÁMKA 2. Uvedené dve substitúcie (5.2) a (5.3) (každá použiteľná za iných predpokladov) vždy dovoľujú previesť typ II k integrálu z racionálnej funkcie. Keby totiž zároveň platilo

α) $a < 0$ a $D < 0$ potom by trojčlen $ax^2 + bx + c$ mal komplexne združené korene $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$, $\beta \neq 0$ a ďalej $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha-\mathrm{i}\beta)(x-\alpha+\mathrm{i}\beta)} = \sqrt{a[(x-\alpha)^2+\beta^2]}$. Pod odmocninou by bolo záporné číslo pre všetky $x \in \mathrm{R}$, čo je v spore a tým, že uvažujeme reálnu funkciu reálnej premennej.

β) Ak $a < 0$ a $\mathrm{D} = 0$, potom trojčlen $ax^2 + bx + c$ by mal jeden dvojnásobný reálny koreň α, jeho druhá derivácia by bola $a < 0$ pre všetky x, teda z konkávnosti paraboly $ax^2 + bx + c$ by sme dostali ten istý spor: $ax^2 + bx + c < 0$ pre všetky $x \neq \alpha$ a takéto funkcie neuvažujeme.

3. Ďalšia Eulerova substitúcia je použiteľná, ak $c > 0$. Má tvar

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c} \tag{5.4}$$

pričom znovu je možná akákoľvek kombinácia znamienok na pravej strane (5.4).

Ak rovnosť umocníme na druhú, dostaneme $ax^2 + bx = \pm 2\sqrt{c}xt + x^2t^2$ a pre $x \neq 0$ platí $x = \dfrac{b \mp 2\sqrt{c}t}{t^2 - a} = R_4(t)$, $\quad \mathrm{d}x = R_4'(t)\,\mathrm{d}t$. Teda

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x = \int R(R_4(t); \pm tR_4(t) \pm \sqrt{c}) \cdot R_4'(t)\,\mathrm{d}t = \int \tilde{R}(t)\,\mathrm{d}t$$

Nakoľko $\tilde{R}(t)$ je racionálna funkcia, aj táto substitúcia nás doviedla k cieľu.

Príklad 2. Odvoďme vzorec 12 z článku 2. V tomto vzorci $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}}$.

Nakoľko $a \neq 0$, môžeme použiť substitúciu (5.2). Položme $\sqrt{x^2 \pm \alpha^2} = t - x$. Dostávame $x^2 \pm \alpha^2 = t^2 - 2tx + x^2$ a ďalej $x = \dfrac{t^2 \mp \alpha^2}{2t}$, $\quad \mathrm{d}x = \dfrac{t^2 \pm \alpha^2}{2t^2}\mathrm{d}t$, $\quad \sqrt{x^2 \pm \alpha^2} = \dfrac{t^2 \pm \alpha^2}{2t}$. Platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{t^2 \pm \alpha^2} \cdot \frac{t^2 \pm \alpha^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + c = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm \alpha^2}| + c$$

POZNÁMKA 3. Čitateľ po prepočítaní niekoľkých integrálov pri použití Eulerových substitúcií hneď zistí, že univerzálnosť použitia je zaplatená pomerne zdĺhavými výpočtami. Preto je v niektorých špeciálnych prípadoch integrálu typu II výhodnejšie použiť iné cesty. Niekedy sa dá metódami, ktoré sme ukázali v článku 4 (doplnenie na úplný štvorec a pod.) dospieť k použitiu vzorcov 1, 11, 12, 17 z článku 2. Podobne niekedy sa typ II dá previesť na niektorý z troch integrálov $\int R(t, \sqrt{1-t^2})\,\mathrm{d}t$, $\int R(t, \sqrt{t^2-1})\,\mathrm{d}t$, $\int R(t, \sqrt{t^2+1})\,\mathrm{d}t$ (R tu pochopiteľne značí inú racionálnu funkciu, než v integráli $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$)

a použiť niektorú goniometrickú substitúciu $t = \sin u$, $t = \cos u$, $t = \operatorname{tg} u$, prípadne niektorú hyperbolickú substitúciu $t = \operatorname{sh} u$, $t = \operatorname{ch} u$, $t = \operatorname{th} u$ (pozri príklad 3.4).

III. Typ $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, kde $R(u, v)$ je racionálna funkcia premenných u, v. Riešime ho substitúciou

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\,, \quad x \in (-\pi, \pi) \tag{5.5}$$

ktorá ho prevedie na integrál z racionálnej funkcie premennej t. Skutočne platí

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ďalej z (5.5) plynie $x = 2\operatorname{arctg} t$, odkiaľ $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Ak to zhrnieme, máme

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \quad \mathrm{d}x \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \tag{5.6}$$

Teda $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int R^*(t)\,\mathrm{d}t$, kde $R^*(t)$ je racionálna funkcia.

Príklad 3.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x(\sin x + \cos x - 1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1+t}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{-1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$$

POZNÁMKA 4. Integrál $\int R(\sin kx, \cos lx)\,\mathrm{d}x$, kde k, l sú celé čísla, môžeme pomocou goniometrických vzorcov previesť na typ III. Vzorce si ľahko môžeme odvodiť z Moivrovej a binomickej vety porovnaním reálnej a imaginárnej zložky komplexnej jednotky. Platí

$$\begin{aligned} \sin nx &= \binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x + \ldots + 0 \\ \cos nx &= \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x + \ldots + 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

(Prvý zo vzorcov (5.7) má na pravej strane $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ a druhý $n + 1 - \left[\frac{n+1}{2}\right]$ sčítancov; $[a]$ je celá časť čísla a.) Ak čísla k, l sú racionálne, napr. $k_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $l_2 = \frac{m_2}{n_2}$, potom označíme n najmenší spoločný násobok čísel n_1, n_2 a substitúcia $nt = x$ nám transformuje integrál na prípad, kde už možno použiť vzorce (5.7).

Príklad 4.

Vypočítať $\displaystyle\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x$

Zvolíme $6t = x$, potom $6\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Platí $\displaystyle\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x = 6\int \frac{\cos 3t}{\sin 2t}\,\mathrm{d}t$. Podľa (5.7) máme

$\cos 3t = \cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t$, $\sin 2x = 2\sin t \cos t$. Teda

$$\int \frac{\cos 3t}{\sin 2t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t}{2\sin t \cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\int \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t + 2\cos t\,,$$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|$ (ak použijeme substitúciu $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = y$). Platí teda $\displaystyle\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x = 12\cos\frac{x}{6} + 3\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{12}\right| + c$

Výpočet integrálu typu III vedie substitúciou (5.5) mnohokrát k integrácii racionálnej funkcie, ktorej menovateľ je polynóm vysokého stupňa alebo k funkcii, ktorej integrácia je veľmi prácna. Preto je niekedy výhodnejšie tejto substitúcii sa vyhnúť. Je to situácia podobná tej, o ktorej sme sa zmienili v poznámke 3. Na jednu z možností, ako sa v prípade $R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ dá použiť iná substitúcia ako (5.5), poukážeme na jednom špeciálnom prípade funkcie $R(\sin x, \cos x)$:

A) Predpokladajme, že racionálna funkcia $R(u, v)$, kde $u = \sin x$, $v = \cos x$ je nepárna v premennej v, t. j. platí $R(u, -v) = -R(u, v)$. Potom racionálna funkcia $R_1(u,v) = \dfrac{R(u,v)}{v}$ bude párnou funkciou vzhľadom k premennej v. Z toho vyplýva, že po vykrátení zlomku $R_1(u, v)$ zostanú v ňom len párne mocniny v, t. j. $R_1(u, v) = R_2(u, v^2)$. Ak uvážime, že $u = \sin x$, $v = \cos x$, $v^2 = 1 - \sin^2 x$, dostaneme $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int R_2(\sin x, 1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$. Vidíme vhodnosť substitúcie $\sin x = t$ z čoho $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, a teda $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R_2(t, 1-t^2)\,\mathrm{d}t = \int R^*(t)\,\mathrm{d}t$.

Príklad 5.

$\displaystyle\int \frac{\cos x + \cos^3 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$. V tomto príklade $R(u, v) = \dfrac{v+v^3}{1+u^2}$ a je možný už opísaný postup. Položíme $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$. Platí

$$\int \frac{\cos x + \cos^3 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(2-\sin^2 x)}{1+\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{2-t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int (-1)\,\mathrm{d}t + 3\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= -t + 3\,\mathrm{arctg}\,t + c = -\sin x + 3\,\mathrm{arctg}\sin x + c$$

Na porovnanie: Ak by sme na príklad 5 použili substitúciu (5.5) a z nej vyplývajúce vzorce (5.6), dostali by sme sa k výpočtu integrálu $\displaystyle 4\int \frac{(1-t^2)(1+t^4)}{(1+t^2)^2(1+6t^2+t^4)}\,\mathrm{d}t$

B) Ak $R(u, v)$, kde $u = \sin x$, $v = \cos x$ je nepárnou funkciou premennej u, t. j. ak $R(u, -v) = -R(u, v)$, postupujeme analogicky s použitím substitúcie $\cos x = t$.

C) Zaoberajme sa podrobnejšie prípadom, že $R(u, v)$ je párnou funkciou oboch premenných u a v, t. j. ak $R(-u, -v) = R(u, v)$. Položme $w = \dfrac{u}{v}$. Potom $R(u, v) = R(\dfrac{u}{v}\cdot v\,, v) = R(w \cdot v, v) = R_1(w, v)$.

Ďalej $R(-u, -v) = R_1(w, -v) = R(u, v) = R_1(w, v)$, čiže racionálna funkcia $R_1(w, v)$ je párna vzhľadom k premennej v. Teda (podobne ako v prípade A) ju môžeme zapísať v tvare $R_1(w, v) = R_2(w, v^2)$. Ak uvážime, že $u = \sin x$, $v = \cos x$, $w = \operatorname{tg} x$ a $v^2 = \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+w^2}$ dostávame

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}\,x = \int R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}\,x = \int R_2\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)\mathrm{d}\,x$$

Substitúciou $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$ prejde tento integrál do tvaru

$$\int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t = \int R^*(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Príklad 6.

Vypočítať $J = \displaystyle\int \frac{\cos^4 x + \sin x \cos^3 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^3 x \cos x}{4 + 8 \sin x \cos x}\,\mathrm{d}\,x$.

Pre funkciu $R(u, v) = \dfrac{v^4 + uv^3 + u^2v^2 + u^3v}{4+8uv}$ zrejme platí $R(-u, -v) = R(u, v)$. Zaveďme substitúciu $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$. Platí

$$J = \int \frac{1+\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x}{\dfrac{4}{\cos^2 x} + 8\operatorname{tg} x}\cdot\cos^2 x\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1+t+t^2+t^3}{4(1+t^2)+8t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}\,\mathrm{d}\,t$$

Posledný integrál riešime rozkladom na parciálne zlomky (to nechávame čitateľom ako domáce cvičenie). Ich integráciou dostávame výsledok, ktorý po dosadení $t = \operatorname{tg} x$ má tvar

$$J = \frac{x}{8} + \frac{1}{16}\ln\frac{(1+\operatorname{tg} x)^2}{1+\operatorname{tg}^2 x} + c = \frac{x}{8} + \frac{1}{16}\ln(1+\sin 2x) + c$$

Všimnime si ešte jeden veľmi špeciálny prípad integrálu patriacemu typu III. Integrál

$$\int \sin^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x, \quad m, n \text{ sú celé nezáporné čísla,} \tag{5.8}$$

substitúciou (5.5) vedie k pomerne komplikovanej racionálnej funkcii. Ak n je nepárne číslo, je vhodný postup z prípadu A (substitúcia $\sin x = t$), ak m je nepárne, potom postup z prípadu B (substitúciou $\cos x = t$) vždy vedú k integrovaniu polynómu. Predpokladajme, že $m = 2k$, $n = 2l$; k, l sú nepárne čísla.

Postupom z prípadu C (substitúcia $\operatorname{tg} x = t$) dostaneme

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x\,\mathrm{d}\,x = \int \operatorname{tg}^{2k} x\cdot\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^{k+l+1}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x = \int\frac{t^{2k}}{(1+t^2)^{k+l+1}}\,\mathrm{d}\,t$$

Je možný aj takýto postup:

$$\int \sin^{2k} x(1-\sin^2 x)^l\,\mathrm{d}\,x = \int P_{k+l}(\sin^2 x)\,\mathrm{d}\,x$$

kde $P_{k+l}(u)$ je polynóm $(k + l)$-ho stupňa. Integrál môžeme tiež previesť na polynóm $(k + l)$-ho stupňa premennej $\cos x$.

Položme si preto za úlohu odvodiť rekurentný vzorec pre $\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$, kde n je prirodzené číslo $n \geq 2$.

Označme $J_n(x) = \int \sin^n x\,\mathrm{d}x$. Položme $\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ v' = \sin x \end{cases}$ z toho $\begin{cases} u' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \\ v = -\cos x \end{cases}$. Platí

$$J_n(x) = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)J_{n-2}(x) - (n-1)J_n(x),$$

z čoho $J_n(x) = -\dfrac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \dfrac{n-1}{n}J_{n-2}(x)$ alebo $\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \dfrac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x$.

O ďalších typoch integrálov sa zmienime len heslovite.

IV. Typ $\int R(\mathrm{e}^{\alpha x})\mathrm{d}x$, kde $\alpha \neq 0$ je reálne číslo a $R(u)$ je racionálna funkcia, sa počíta substitúciou $\mathrm{e}^{\alpha x} = t$, z toho $x = \dfrac{1}{\alpha}\ln t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$, teda $\int R(\mathrm{e}^{\alpha x})\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha}\int \dfrac{R(t)}{t}\mathrm{d}t$, čo je integrál z racionálnej funkcie.

V. $\int R(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ sa rieši substitúciou $\ln x = t$, $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, teda sa dá previesť na $\int R(t)\mathrm{d}t$.

6 NIEKTORÉ ĎALŠIE METÓDY INTEGROVANIA

V prvej časti tohto článku si uvedieme niekoľko typov funkcií, pre ktoré nám umožní použitie metódy per partes nájsť neurčitý integrál v tvare elementárnej funkcie.

I. $\int P_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ (6.1)

kde $P_n(x)$ je polynóm n-tého stupňa (n je celé nezáporné číslo) a funkcia $\varphi(x)$ je jedna z troch funkcií e^{ax+b}, $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, kde $a(\neq 0)$, $b \in \mathrm{R}$. Ak zvolíme $\begin{cases} u = P_n(x) \\ v' = \varphi(x) \end{cases}$ a vypočítame $\begin{cases} u' = P_n'(x) \\ v = \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi_1(x) \end{cases}$ pričom $P_n'(x) = Q_{n-1}(x)$ je polynóm $(n-1)$-ho stupňa a $\varphi_1(x)$ je jedna z funkcií $\dfrac{\mathrm{e}^{ax+b}}{a}$, $-\dfrac{\cos(ax+b)}{a}$, $\dfrac{\sin(ax+b)}{a}$.

Pre integrál (6.1) dostaneme $\int P_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = P_n(x)\,\varphi_1(x) - \int Q_{n-1}(x)\,\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x$. Integrál na pravej strane poslednej rovnosti je rovnakého typu ako (6.1) s tým rozdielom, že polynóm v integrande je o jeden stupeň nižší. Ak to zopakujeme n-krát, dostaneme sa k jednému zo základných vzorcov článku 2.

POZNÁMKA 1. Všimnime si, že opísaný postup nám umožňuje odhadnúť tvar konečného výsledku n-násobne použitej metódy per partes. Ak $\varphi(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ výsledkom integrovania bude $P_n^*(x)\mathrm{e}^{ax+b}$ ($P_n^*(x)$ je polynóm n-tého stupňa). Podobne, ak $\varphi(x) = \sin(ax+b)$ alebo $\cos(ax+b)$, výsledkom integračného procesu je $P_n^*(x)\cos(ax+b) + Q_n^*(x)\sin(ax+b)$, kde $P_n^*(x)$ a $Q_n^*(x)$ sú polynómy stupňa nanajvýš n.

II. $\int P_n(x)\ln R(x)\mathrm{d}x$ (6.2)

kde $P_n(x)$ je polynóm n-tého stupňa a $R(x)$ je racionálna funkcia. Zvoľme $u = \ln R(x)$, $v' = P_n(x)$, dostávame $u' = \dfrac{R'(x)}{R(x)}$, $v = \int P_n(x)\mathrm{d}x = Q_{n+1}(x)$ ($Q_{n+1}(x)$ je polynóm $(n+1)$-ho stupňa.) Dostaneme

$$\int P_n(x)\ln R(x)\,\mathrm{d}x = Q_{n+1}(x)\ln R(x) - \int Q_{n+1}(x)\frac{R'(x)}{R(x)}\mathrm{d}x$$

Integrand na pravej strane poslednej rovnosti je racionálnou funkciou $R^*(x)$, ktorú vieme integrovať.

III. $\int P_n(x)\operatorname{arctg} R(x)\mathrm{d}x$ (6.3)

($P_n(x)$ je polynóm, $R(x)$ racionálna funkcia.) Voľbou $u = \operatorname{arctg} R(x)$, $v' = P_n(x)$ dostávame $u' = \dfrac{1}{1+R^2(x)}\cdot R'(x)$, $v = \int P_n(x)\mathrm{d}x = Q_{n+1}(x)$. Teda

$$\int P_n(x)\operatorname{arctg} R(x)\mathrm{d}x = Q_{n+1}(x)\operatorname{arctg} R(x) - \int \frac{R'(x)Q_{n+1}(x)}{1+R^2(x)}\mathrm{d}x$$

čím sme v podstate dosiahli rovnakú situáciu ako pri type (6.2).

IV. $\int P_n(x)\arcsin x\,\mathrm{d}x$ (6.4)

Ak $Q_{n+1}(x) = \int P_n(x)\,\mathrm{d}x$, platí $\int P_n(x)\arcsin x\,\mathrm{d}x = Q_{n+1}(x)\arcsin x - \int \frac{Q_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, posledný integrál je typu $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x$, ktorý Eulerovými substitúciami vždy vieme previesť na integrál z racionálnej funkcie (pozri článok 5, typ II.).

Príklad 1. $\int x^3\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$ je typu (6.2). Ak $u = \ln(x^2+1)$, $v' = x^3$, potom $u' = \frac{2x}{x^2+1}$, $v = \frac{x^4}{4}$. Teda $\int x^3\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^5}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. Po vydelení polynómu x^5 polynómom x^2+1 dostaneme $\frac{x^5}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}$, teda $\int x^3\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln(x^2+1) - \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + c$.

Pri niektorých špeciálnych prípadoch integrálov, ak vieme určiť dopredu tvar primitívnej funkcie, môžeme použiť **metódu neurčitých koeficientov**, ktorou sa integračný proces nahrádza riešením sústavy lineárnych rovníc. Uvedieme si teraz tri typy integrálov, kde to môžeme previesť.

A) Ak si zoberieme $\int P_n(x)\,\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$, kde $P_n(x)$ je polynóm n-tého stupňa, $0 \neq a \in \mathrm{R}$, potom podľa poznámky 1 dostaneme primitívnu funkciu v tvare $P_n^*(x)\mathrm{e}^{ax}$, kde $P_n^*(x)$ je polynóm n-tého stupňa. Platí teda $\int P_n(x)\,\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x = (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n)\mathrm{e}^{ax}$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú neurčité koeficienty.

Ak poslednú rovnosť zderivujeme, dostaneme

$$P_n(x)\,\mathrm{e}^{ax} = [na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1})\mathrm{e}^{ax} + (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n)a\mathrm{e}^{ax}$$

Vynásobením poslednej rovnosti funkciou e^{-ax}, dostaneme rovnosť dvoch polynómov n-tého stupňa a porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách dostaneme sústavu $(n+1)$ lineárnych rovníc, z ktorých vypočítame koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Príklad 2. $\int x^3\,\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

Platí $\int x^3\,\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)\mathrm{e}^{2x}$. Zderivovaním a potom vydelením e^{2x} dostaneme $x^3 = 3a_0x^2 + 2a_1x + a_2 + 2a_0x^3 + 2a_1x^2 + 2a_2x + 2a_3$. Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách máme $2a_0 = 1$, $2a_1 + 3a_0 = 0$, $2a_2 + 2a_1 = 0$, $2a_3 + a_2 = 0$, teda $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{3}{4}$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $a_3 = -\frac{3}{8}$, a preto $\int x^3\,\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{8}\right)\mathrm{e}^{2x} + c$.

B) Majme $\int(P_n(x)\cos ax + Q_n(x)\sin ax)\,\mathrm{d}x$, kde $P_n(x)$, $Q_n(x)$ sú polynómy n-tého stupňa. Ak polynómy P_n, Q_n nie sú rovnakého stupňa, je vždy možné formálne doplniť polynóm nižšieho stupňa nulovými koeficientmi a na použiteľnosť metódy to nemá vplyv. Podobne pripúšťame možnosť, aby niektorý z $P_n(x)$ alebo $Q_n(x)$ bol bez stupňa, t. j. môže byť identicky rovný nule. Z poznámky 1 vieme, že výsledok integrovania má tvar

$$\int(P_n(x)\cos ax + Q_n(x)\sin ax)\,\mathrm{d}x = S_n(x)\cos ax + T_n(x)\sin ax \qquad (6.5)$$

kde $S_n(x)$ a $T_n(x)$ sú polynómy n-tého stupňa s neurčitými koeficientmi. Pri určovaní týchto koeficientov postupujeme analogicky ako v prípade A. Rovnosť (6.5) zderivujeme a porovnáme koeficienty na obidvoch stranách výslednej rovnosti pri $x^i\cos ax$, $x^i\sin ax$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Dostaneme takto sústavu rovníc, riešením ktorej dostaneme koeficienty polynómov $S_n(x)$ a $T_n(x)$.

Príklad 3. $\int(x^2 + 3x + 5)\cos 2x\,\mathrm{d}x = (a_0x^2 + a_1x + a_2)\cos 2x + (b_0x^2 + b_1x + b_2)\sin 2x$.

Zderivovaním dostaneme

$$\begin{aligned}(x^2 + 3x + 5)\cos 2x = {} & (2a_0x + a_1)\cos 2x - 2(a_0x^2 + a_1x + a_2)\sin 2x + \\ & + (2b_0x + b_1)\sin 2x + 2(b_0x^2 + b_1x + b_2)\cos 2x\end{aligned}$$

odkiaľ

$$(x^2+3x+5)\cos 2x = [\ 2b_0x^2 + \ (2a_0+2b_1)x + \ a_1 + 2b_2]\cos 2x + \\ + [-2a_0x^2 + (-2a_1+2b_0)x - 2a_2 + b_1]\sin 2x$$

z čoho

$$2b_0 = 1,\ \ 2a_0 + 2b_1 = 3,\ \ a_1 + 2b_2 = 5,\ \ 2a_0 = 0,\ \ -2a_1 + 2b_0 = 0,\ \ -2a_2 + b_1 = 0$$

Riešením tejto sústavy dostávame

$$b_0 = \frac{1}{2},\ \ a_0 = 0,\ \ b_1 = \frac{3}{2},\ \ a_2 = \frac{3}{4},\ \ a_1 = \frac{1}{2},\ \ b_2 = \frac{9}{4}$$

Teda $\int (x^2+3x+5)\cos 2x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cos 2x + \left(\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{9}{4}\right)\sin 2x + c$

C) Typ $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}\,x$ (6.5)

($P_n(x)$ je polynóm, $0 \neq a, b, c \in$ R) sa tiež dá vypočítať metódou neurčitých koeficientov.

Predpokladajme, že $a > 0$. Potom substitúciou $x + \frac{b}{2a} = t$ sa integrál (6.5) prevedie na lineárnu kombináciu integrálov

$$\int \frac{t^k}{\sqrt{t^2 \pm \alpha^2}}\,\mathrm{d}\,t \text{ , kde } k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{6.6}$$

Pre integrál $J_k = \displaystyle\int \frac{t^k}{\sqrt{t^2\pm\alpha^2}}\,\mathrm{d}\,t$ odvozme rekurentný vzorec pre $k \geq 2$. Ak zvolíme $u = t^{k-1}$, $v' = \dfrac{t}{\sqrt{t^2\pm\alpha^2}}$, potom $u' = (k-1)\ t^{k-2}$, $v = \sqrt{t^2\pm\alpha^2}$ a dostaneme

$$J_k(t) = \int \frac{t^k}{\sqrt{t^2\pm\alpha^2}}\,\mathrm{d}\,t = t^{k-1}\sqrt{t^2\pm\alpha^2} - (k-1)\int t^{k-2}\sqrt{t^2\pm\alpha^2}\,\mathrm{d}\,t = t^{k-1}\sqrt{t^2\pm\alpha^2} - (k-1)\int \frac{t^k \pm \alpha^2 t^{k-2}}{\sqrt{t^2\pm\alpha^2}}\,\mathrm{d}\,t =$$

$= t^{k-1}\sqrt{t^2\pm\alpha^2} - (k-1)J_k(t) - (k-1)(\pm\alpha^2)J_{k-2}(t)$. Máme rekurentný vzorec pre (6.6).

$$J_k(t) = \frac{1}{k}t^{k-1}\sqrt{t^2\pm\alpha^2} - \frac{(k-1)}{k}(\pm\alpha^2)J_{k-2}(t) \tag{6.7}$$

Postupným použitím tohto vzorca dôjdeme nakoniec k jednému z integrálov

$$J_1(t) = \int \frac{t}{\sqrt{t^2\pm\alpha^2}}\,\mathrm{d}\,t = \sqrt{t^2\pm\alpha^2}, \qquad J_0(t) = \int \frac{1}{\sqrt{t^2\pm\alpha^2}}\,\mathrm{d}\,t = \ln|\,t + \sqrt{t^2\pm\alpha^2}\,|$$

Teda, ak počítame integrál $\displaystyle\int \frac{P_1^*(t)}{\sqrt{t^2\pm\alpha^2}}\,\mathrm{d}\,t$ a na každý člen polynómu $P_n^*(t)$ použijeme vzorec (6.7), dostaneme $\displaystyle\int \frac{P_1^*(t)}{\sqrt{t^2\pm\alpha^2}}\,\mathrm{d}\,t = Q_{n-1}^*(t)\ \sqrt{t^2\pm\alpha^2} + \lambda\int \frac{1}{\sqrt{t^2\pm\alpha^2}}\,\mathrm{d}\,t$ kde $Q_{n-1}^*(t)$ je polynóm s neurčitými koeficientmi a λ je nejaké reálne číslo.

Ak $a < 0$ postup zopakujeme tak, že namiesto $\sqrt{t^2\pm\alpha^2}$ bude vystupovať $\sqrt{\beta^2 - t^2}$.

Ak berieme všetko toto do úvahy, môžeme odhadnúť tvar integrálu (6.5), pre ktorý bude platiť

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}\,x = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}\,x$$

kde $Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ pričom neurčité koeficienty $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ a číslo λ vypočítame zo systému lineárnych rovníc, ktoré dostaneme podobne ako v prípade A alebo B (derivujeme poslednú rovnosť a po úprave porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách).

Príklad 4. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}\,x=(b_0x^2+b_1x+b_2)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}\,x$

Ak rovnosť derivujeme a potom vynásobíme $\sqrt{x^2+2x+2}$ dostaneme

$$x^3-x+1=(2b_0x+b_1)(x^2+2x+2)+(b_0x^2+b_1x+b_2)(x+1)+\lambda$$

odkiaľ dostávame systém rovníc $3b_0=1$, $5b_0+2b_1=0$, $4b_0+3b_1+b_2=-1$, $2b_1+b_2+\lambda=1$, riešením ktorého máme $b_0=\frac{1}{3}$, $b_1=-\frac{5}{6}$, $b_2=-\frac{1}{6}$, $\lambda=\frac{5}{2}$. Platí teda

$$\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln|\,x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\,|+c$$

Cvičenie

1. Odvoďte vzorce:

a) $\int\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}\,x=\sqrt{x^2\pm a^2}+c$.

b) $\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}\,x=-\sqrt{a^2-x^2}+c$.

c) Ak $a>0$, $\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|\,2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\,|+k$.

2. Nech $a<0$, $ax^2+bx+c=0$ má reálne korene α, β, pričom $\alpha<\beta$. Integráciou sa presvedčte o správnosti vzťahov

a) $\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}\,x=-\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}+k$ pre $x\in(\alpha,\beta)$

b) $\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}\,x=-\frac{2}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+k$ pre $x\in(\alpha,\beta)$

3. Na základe predchádzajúceho cvičenia, ak položíme $t=\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$ a použijeme vzorec pre α, β (predpoklady cvičenia 2 nech ďalej platia), dokážte: $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}=\arcsin t+\frac{\pi}{2}$ pre $t\in(-1,1)$

4. Dokážte rekurentné vzorce:

a) $\int\cos^n x\,\mathrm{d}\,x=\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,\mathrm{d}\,x+\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+c$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$

b) $\int\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{m+n}\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+\frac{m-1}{m+n}\int\sin^{m-2}x\cos^n x\,\mathrm{d}\,x$, m, n sú celé čísla, $n\neq-1$, $m+n\neq0$

c) $\int\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{m+n}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{m+n}\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,\mathrm{d}\,x$, m, n sú celé čísla, $m\neq-1$, $m+n\neq0$

Kapitola II.

RIEMANNOV URČITÝ INTEGRÁL

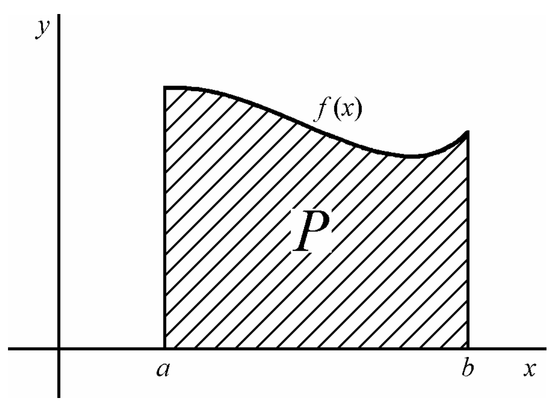
1 ÚVODNÉ POZNÁMKY A OZNAČENIA

V nasledujúcich paragrafoch sa budeme zaoberať pojmom určitého integrálu. Existuje niekoľko prístupov ako vybudovať tento pojem a tomu odpovedajúcich niekoľko druhov určitých integrálov. Spôsob, ktorým my pristupujeme k tomuto pojmu, sa spája s menom významného nemeckého matematika B. Riemanna (1826 – 1866). Potreba vybudovať tento pojem vzišla mimo iného z potreby riešiť niektoré geometrické problémy a problémy klasickej mechaniky.

V elementárnej geometrii sa definuje plošný obsah trojuholníka a ďalej plošná veľkosť alebo obsah útvarov, ktoré sa dajú rozložiť na konečný počet trojuholníkov. Vznikla otázka, akým spôsobom je vhodné definovať obsah všeobecnejších útvarov, ktoré sa nedajú rozložiť na konečný počet trojuholníkov. Zoberme si jeden takýto jednoduchý príklad:

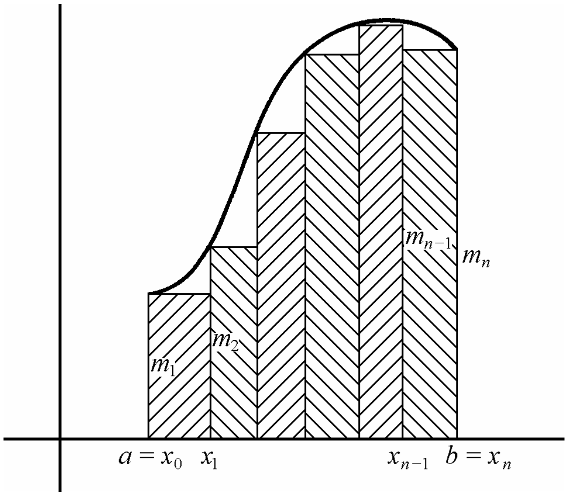
Majme funkciu $y = f(x)$ spojitú, kladnú v intervale $\langle a, b\rangle$. Geometrický útvar ohraničený zhora grafom funkcie $f(x)$, po stranách priamkami $x = a$, $x = b$ a zdola úsečkou $\langle a, b\rangle$ (obr. 1) nazveme „krivočiarym lichobežníkom" a pokúsme sa o definíciu P obsahu tohto útvaru.

Rozdelíme základňu krivočiareho lichobežníka (interval $\langle a, b\rangle$) na n intervalov d_1, d_2, …, d_n. Tými istými symbolmi si označíme aj dĺžky týchto intervalov. Ak ďalej označíme $m_i = \min f(x)$, $x \in d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, potom súčet $m_1 d_1 + m_1 d_1 + \cdots m_n d_n = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i$ geometricky predstavuje obsah stupňovitého mnohouholníka vpísaného do krivočiareho lichobežníka (obr. 2).

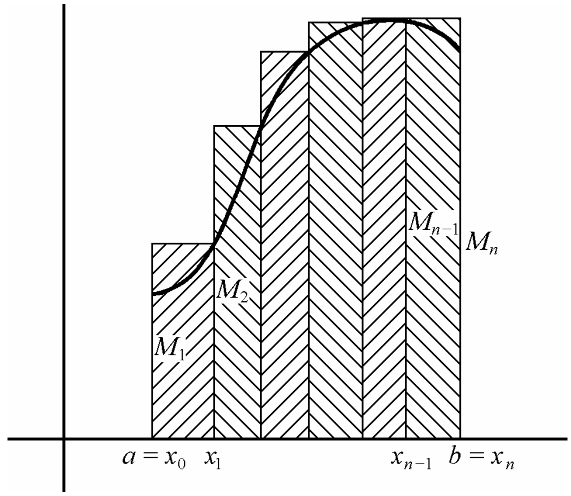


Obr. 1

Podobne, ak $M_i = \max f(x)$, $x \in d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, potom súčet $M_1 d_1 + M_1 d_1 + \cdots M_n d_n = \sum_{i=1}^{n} M_i d_i$ je obsahom stupňovitého mnohouholníka, opísaného ku krivočiaremu lichobežníku (obr. 3).



Obr. 2



Obr. 3

Ak existuje jediné číslo P, ktoré nie je menšie ako obsah ľubovoľného vpísaného mnohouholníka, a nie je väčšie ako obsah ľubovoľného opísaného mnohouholníka, potom toto číslo nazveme obsahom daného krivočiareho lichobežníka. Teda platia nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} m_i d_i \leq P \leq \sum_{i=1}^{n} M_i d_i$$

pre akékoľvek rozdelenie základne krivočiareho lichobežníka.

Riešme teraz jednoduchú úlohu z klasickej mechaniky, spočívajúcej v nájdení práce, ktorá je vykonaná pri priamočiarom pohybe, ak smer sily je ten istý ako smer dráhy. Nech $\langle a, b\rangle$ je dráha prejdená pôsobením sily $f(x)$. Ak táto sila je konštantná, potom práca je rovná súčinu sily a dráhy. V prípade nekonštantnej sily, rozdelíme dráhu $\langle a, b\rangle$ na úseky $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a ak m_i a M_i znamenajú najmenšiu a najväčšiu hodnotu sily $f(x)$ na d_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, potom súčet $\sum_{i=1}^{n} m_i d_i$ je menší nanajvýš rovný a súčet $\sum_{i=1}^{n} M_i d_i$ je väčší nanajvýš rovný ako práca vykonaná na celej dráhe. Ak existuje jediné číslo L, pre ktoré $\sum_{i=1}^{n} m_i d_i \leq L \leq \sum_{i=1}^{n} M_i d_i$ pre akékoľvek rozdelenie dráhy, potom toto číslo nazveme prácou, ktorú vykoná sila $f(x)$ po dráhe $\langle a, b\rangle$.

Z matematického hľadiska obidve úlohy sú identické a ukazuje sa potreba skúmať takéto súčty. Ide však o to, aby sme sa zbavili nepotrebných obmedzení a problém skúmali pokiaľ možno čo najvšeobecnejšie. Vidíme, že od funkcie nepotrebujeme žiadať kladnosť, ďalej vynecháme aj spojitosť. Nahradíme ju ohraničenosťou. Čísla M_i a m_i budú znamenať supremum a infimum funkcie $f(x)$ na intervale d_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, takže v tom prípade, keď $f(x)$ je spojitá funkcia, zhodujú sa s maximom a minimom.

Zaveďme si teda označenie a predpoklady platné v celej kapitole:

O funkcii $f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ budeme predpokladať, že je ohraničená na $\langle a, b\rangle$. **Delením** intervalu $\langle a, b\rangle$ nazveme každú konečnú množinu bodov $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ takú, že $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$. Ďalej označme $d_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ $i = 1, 2, \ldots, n$. [Pričom tým istým symbolom ako uzavretý interval (ak $x_{i-1} < x_i$), budeme označovať aj bod (ak $x_{i-1} = x_i$).] $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zrejme platí $\Delta x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. $M_i = \sup f(x)$ pre $x \in d_i$, $m_i = \inf f(x)$ pre $x \in d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $M = \sup f(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$, $m = \inf f(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$. Poznamenávame, že ďalšie úvahy by sa dali robiť aj tak, že by sme brali len také delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ pre ktoré $x_i < x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pri niektorých úvahách to tak robíme. **Normou delenia *D*** budeme rozumieť kladné číslo $n(D) = \max \Delta x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Budeme hovoriť, že delenie D_1 je zjemnením delenia D, ak $D \subset D_1$ Delenie D je **spoločným zjemnením** delení D_1, D_2, ak $D = D_1 \cup D_2$. **Horným integrálnym súčtom** z funkcie $f(x)$ pri delení D rozumieme číslo

$$U(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

a **dolným integrálnym súčtom** funkcie $f(x)$ pri delení D rozumieme číslo

$$L(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Znakom $\{U(f, D)\}$ resp. $\{L(f, D)\}$ budeme označovať množinu všetkých horných resp. dolných integrálnych súčtov patriacich ku všetkým možným deleniam intervalu $\langle a, b\rangle$.

2 POJEM URČITÉHO INTEGRÁLU

Skôr, ako uvedieme definíciu určitého integrálu v Riemannovom zmysle, dokážeme tri vety.

Veta 1. Množiny horných integrálnych súčtov $\{U(f, D)\}$ a dolných integrálnych súčtov $\{L(f, D)\}$ sú ohraničené.

D ô k a z . Zrejme platia pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ nerovnosti $m \le m_i \le M_i \le M$. Ak ich vynásobíme číslom $\Delta x_i \ge 0$ a spočítame pre $i = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme

$$m(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \le L(f, D) \le U(f, D) \le M(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$$

alebo

$$m(b - a) \le L(f, D) \le U(f, D) \le M(b - a)$$

pre ľubovoľné delenie D. Teda horné aj dolné integrálne súčty sú zdola ohraničené číslom $m(b - a)$, zhora čislom $M(b - a)$, ktoré nezávisia od D.

Veta 2. Ak delenie D^* je zjemnením delenia D, potom $L(f, D) \le L(f, D^*)$, $U(f, D) \ge U(f, D^*)$.

D ô k a z . Dokážeme si prvú z nerovností. Druhá sa dokáže analogicky.

1. Nech delenie D^* vznikne z D pridaním jediného bodu x^*. Ak $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, potom existuje číslo j, $1 \le j \le n$ také, že $x_{j-1} < x^* < x_j$. Ak označíme $W_1 = \inf f(x)$ pre $x \in \langle x_{j-1}, x^*\rangle$, $W_2 = \inf f(x)$ pre $x \in \langle x^*, x_j\rangle$, potom platí $m_j \le \mathrm{W}_1$, $m_j \le \mathrm{W}_2$. To znamená, že

$$L(f, D^*) - L(f, D) = W_1(x^* - x_{j-1}) + W_2(x_j - x^*) - m_j(x_j - x_{j-1}) =$$
$$= (W_1 - m_j)(x^* - x_{j-1}) + (W_2 - m_j)(x_j - x^*) \ge 0$$

2. Ak D^* má o k bodov viac ako delenie D, potom postup z bodu 1 zopakujeme k-krát a dostaneme tvrdenie vety.

Veta 3. Nech D_1 a D_2 sú dve delenia intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom $L(f, D_1) \le U(f, D_2)$.

D ô k a z . Označme $D = D_1 \cup D_2$. D je spoločným zjemnením delení D_1 a D_2. Podľa vety 2 platí $L(f, D_1) \le L(f, D) \le U(f, D) \le U(f, D_2)$.

Definícia 1. Infimum množiny horných integrálnych súčtov $\{U(f, D)\}$ nazývame horným (Riemannovým) integrálom z funkcie $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ a označujeme ho $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Supremum množiny dolných integrálnych súčtov $\{L(f, D)\}$ nazývame dolným (Riemannovým) integrálom z $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ a označujeme ho $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Ak platí $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, hovoríme, že funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a,\ b\rangle$ integrovateľná (v Riemannovom zmysle) a spoločnú hodnotu horného a dolného integrálu nazveme určitým (Riemannovým) integrálom a označujeme ju $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

POZNÁMKA 1. Nakoľko množiny horných a dolných integrálnych súčtov sú ohraničené (veta 1.), horný a dolný integrál vždy existujú z každej ohraničenej funkcie. Integrál však existovať nemusí (pozri príklad 2).

V ďalšom budeme triedu integrácieschopných funkcií na $\langle a, b\rangle$ označovať $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Príklad 1. Majme funkciu $f(x) = \text{konšt.} = c$, $x \in \langle a,\ b\rangle$. Potom $m_i = M_i = c$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $L(c,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c(b-a)$, $U(c,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c(b-a)$. Teda $\underline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \sup_D\{c(b-a)\} = c(b-a)$, $\overline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \inf_D\{c(b-a)\} = c(b-a)$. Teda $c \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$.

Príklad 2. Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \text{ je racionálne číslo} \\ 1 & \text{ak } x \text{ je iracionálne číslo} \end{cases}$. Uvažujeme interval $\langle a,\ b\rangle$. $M_i = \sup_{x\in d_i}\chi(x) = 1$, $m_i = \inf_{x\in d_i}\chi(x) = 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Teda $L(\chi,D) = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = 0$, $U(\chi,D) = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = b-a \neq 0$ a $\underline{\int_a^b}\chi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\overline{\int_a^b}\chi(x)\,\mathrm{d}x = b-a$, $\chi(x) \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$

POZNÁMKA 2. Ak $f(x) \geq 0$ a $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ predstavuje geometricky číselnú hodnotu obsahu krivočiareho lichobežníka z motivačného príkladu v článku 1. Podobne, ak $f(x)$ predstavuje silu pôsobiacu na dráhe danej úsečkou $\langle a, b\rangle$, tak tento integrál číselne vyjadruje veľkosť práce, ktorú vykoná sila $f(x)$ na danej dráhe.

Veta 4. Platí $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D ô k a z . Nech D_1, D_2 sú ľubovoľné delenia intervalu $\langle a, b\rangle$. Podľa vety 3 máme $L(f, D_1) \leq U(f, D_2)$. Vidíme, že $\{L(f, D_1)\}$ je zhora ohraničená a pre supremum tejto množiny platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{D_1}\{L(f, D_1)\} \leq U(f, D_2)$$

pre ľubovoľné D_2. Teda $\{U(f, D_2)\}$ je zdola ohraničená číslom $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a z vlastnosti infima dostaneme $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \inf_{D_2}\{U(f, D_2)\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dôležitú úlohu v ďalších článkoch bude mať nasledujúca veta:

Veta 5. $f(x) \in \mathscr{R}\langle a,\ b\rangle$ vtedy a len vtedy, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje delenie D_0 také, že $U(f, D_0) - L(f, D_0) < \varepsilon$.

D ô k a z.

1. Nech $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Keďže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_D\{L(f,D)\}$, z vlastnosti suprema dostaneme: ku každému $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje D_1 také, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, D_1)$. Z druhej strany $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_D\{L(f,D)\}$, z podobnej vlastnosti infima máme: ku každému $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje D_2 také, že $U(f,D_2) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$. Zvoľme $D = D_1 \cup D_2$ (spoločné zjemnenie D_1, D_2). Ak k tomuto pridáme tvrdenia vety 2, dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,D_1) \le L(f,D) \le U(f,D) \le U(f,D_2) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$$

z čoho dostávame nerovnosť $U(f, D) - L(f, D) < \varepsilon$.

2. Nech k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje D_0 také, že $U(f, D_0) - L(f, D_0) < \varepsilon$. Z vety 4 a z vlastnosti suprema a infima dostaneme platnosť nerovnosti $L(f,D) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le U(f,D)$ pre všetky D, teda aj pre D_0. Teda $0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$. V posledných nerovnostiach prejdime k limite pre $\varepsilon \to 0$. Dostaneme $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, čo podľa definície znamená, že $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

3 POSTAČUJÚCE PODMIENKY INTEGROVATEĽNOSTI FUNKCIE

Veta 1. Ak $f(x)$ je na $\langle a, b\rangle$ spojitá, potom $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí: ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pre všetky D, pre ktoré je norma $n(D) < \delta$ a pre každé $t_i \in d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \tag{3.1}$$

D ô k a z. Vieme, že podmienka spojitosti na $\langle a, b\rangle$ je ekvivalentná podmienke rovnomernej spojitosti na tomto intervale. Platí teda: ku každému $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existuje $\delta > 0$, že pre všetky dvojice $t, s \in \langle a, b\rangle$ také, že $|t - s| < \delta$ máme $|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Zvoľme delenie D také, že $n(D) < \delta$. Zo spojitosti $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ ďalej platí $M_i = \max_{x_i \in d} f(x)$, $m_i = \min_{x_i \in d} f(x)$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Pre všetky D, pre ktoré $n(D) < \delta$ je $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Počítajme $U(f, D) - L(f, D) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon$, čo podľa vety 2.5 stačí na to, aby $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Zvoľme ďalej ľubovoľné $t_i \in d_i$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. Zrejme $m_i \le f(t_i) \le M_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, z čoho

$$L(f, D) \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \le U(f, D) \quad \text{pre každé } D \tag{3.2}$$

Keďže $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sup_D\{L(f, D)\} = \inf_D\{U(f, D)\}$, a teda pre všetky D platí

$$L(f, D) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \le U(f, D) \tag{3.3}$$

V prvej časti dôkazu sme nahliadli, že pre delenie D, pre ktoré $n(D) < \delta$ je $U(f, D) - L(f, D) < \varepsilon$. Ak toto zoberieme do úvahy spolu s nerovnosťami (3.2) a (3.3)j dostaneme výrok: Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pre všetky D, pre ktoré $n(D) < \delta$ a pre každé $t_i \in d_i$ platí $\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| < \varepsilon$.
Tým je veta dokázaná.

Pokúsme sa teraz zoslabiť podmienku spojitosti na to, aby sme aj pre niektoré nespojité funkcie mali zabezpečenú existenciu určitého integrálu. K tomu budeme potrebovať nasledujúcu definíciu.

Definícia 1. Hovoríme, že $M \subset \mathsf{R}$ má Jordanovu mieru nula, ak

1. ku každému $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet uzavretých intervalov $J_1, \dots, J_n$ takých, že ich súčet dĺžok je menší než ε.
2. ku každému $x \in M$ existuje J_i, $1 \le i \le n$ taký, že x ja jeho vnútorným bodom.

Ako príklad množiny s Jordanovou mierou nula môže poslúžiť každá konečná množina. Skutočne nech $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x_i \in \mathsf{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ stačí zvoliť $J_i = \langle x_i - \frac{\varepsilon}{n}, x_i + \frac{\varepsilon}{n}\rangle$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ a je evidentné, že sú splnené podmienky definície 1.

Iný príklad: Označíme $M_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n}, \cdots\right\}$. Platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, teda ku každému $\varepsilon > 0$ existuje N prirodzené také, že pre všetky $n > N$ platí $\frac{1}{n} \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Teda intervaly $J_0 = \langle 0, \frac{\varepsilon}{2}\rangle$, $J_1 = \langle 1 - \frac{\varepsilon}{4N}, 1 + \frac{\varepsilon}{4N}\rangle$, $J_2 = \langle \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4N}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4N}\rangle$, …, $J_N = \langle \frac{1}{N} - \frac{\varepsilon}{4N}, \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{4N}\rangle$, spĺňajú požiadavky definície 1. Nie každá spočítateľná množina, ako ukazuje príklad 2 v cvičení po tomto článku, je množina s Jordanovou mierou nula.

Veta 2. Ak $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ s výnimkou množiny bodov, ktorej Jordanova miera je nula, potom $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

D ô k a z . Pretože množina bodov nespojitosti má Jordanovu mieru nula, existuje pre dané $\varepsilon' > 0$ konečný počet $d'_1, d'_2, \dots, d'_p$ uzavretých intervalov takých, že každý bod nespojitosti je vnútorným bodom aspoň jedného z nich a pre súčet ich dĺžok platí $\sum_{j=1}^{p} d'_j < \varepsilon'$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že d'_j sa neprekrývajú, t. j. že nemajú spoločné vnútorné body. Môžeme teda zostrojiť také delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$, že intervaly $d'_1, d'_2, \dots, d'_p$ patria medzi čiastkové intervaly toho delenia. Zvyšné intervaly delenia D označme $d_1, d_2, \dots, d_q$. Na každom z nich je funkcia spojitá. Označme $M_i = \sup_{x\in d_i} f(x)$, $m_i = \inf_{x\in d_i} f(x)$, $i = 1, 2, \dots, q$ a podobne $M'_j = \sup_{x\in d'_j} f(x)$, $m'_j = \inf_{x\in d'_j} f(x)$, $j = 1, 2, \dots, p$.

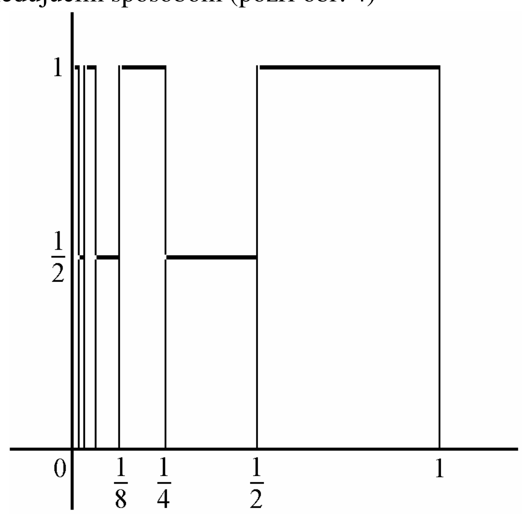
Počet q intervalov $d_1, d_2, \dots, d_q$ môžeme zväčšiť tak, aby dĺžka každého z nich bola menšia ako dané kladne číslo δ. Číslo δ však navyše volíme tak, aby pre ľubovoľné $\varepsilon'' > 0$ platilo $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon''$

pre $|x_1 - x_2| < \delta$. Možnosť takejto voľby vyplýva z rovnomernej spojitosti funkcie $f(x)$ na kompaktnej množine, ktorá je zjednotením intervalov $d_1, d_2, \ldots, d_q$. Odtiaľ však vyplýva, že $|M_i - m_i| < \varepsilon''$ pre $i = 1, 2, \ldots, q$, pretože $M_i = f(u_i)$, $m_i = f(v_i)$, kde u_i, v_i sú nejaké body z intervalu d_i. Pre delenie D počítajme $U(f, D) - L(f, D)$ tak, že príslušný súčet rozdelíme na dve časti; na tú, v ktorej sa vyskytujú intervaly d'_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ a na tú, v ktorej sa vyskytujú intervaly d_i, $i = 1, 2, \ldots, q$. Máme teda $U(f, D) - L(f, D) = \sum_{j=1}^{p}(M'_j - m'_j)d'_j + \sum_{i=1}^{q}(M_j - m_j)d_j$. Ak označíme $M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)|$, tak $M'_j - m'_j \leq$ $\leq |M'_j| + |m'_j| \leq 2M$. Teda $U(f, D) - L(f, D) \leq 2M\sum_{j=1}^{p} d'_j + \varepsilon''\sum_{i=1}^{q} d_i < 2M\varepsilon' + (b-a)\varepsilon''$. Čísla ε', ε'' boli však volené ľubovoľne a od seba nezávislé. Mohli sme ich preto voliť tak, aby $2M\varepsilon' + (b - a)\varepsilon'' < \varepsilon$ pre ľubovoľné dané $\varepsilon > 0$. Máme teda $U(f, D) - L(f, D) < \varepsilon$, odkiaľ podľa vety 2.5 dostaneme, že $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

D ô s l e d o k . Ak $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ s výnimkou konečnej množiny bodov nespojitosti, potom $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Príklad 1. Majme funkciu definovanú na $\langle 0, 1\rangle$ nasledujúcim spôsobom (pozri obr. 4)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 1/2 & \text{ak} \quad \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ak} \quad \frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4} \\ \vdots & \\ 1 & \text{ak} \quad \frac{1}{2^{2k-1}} < x \leq \frac{1}{2^{2k-2}} \\ 1/2 & \text{ak} \quad \frac{1}{2^{2k}} < x \leq \frac{1}{2^{2k-1}} \\ \vdots & \\ 1 & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}$$



Obr. 4

Nakoľko množina bodov nespojitosti $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\right\}$ je množina s Jordanovou mierou nula (je podmnožinou množiny $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\right\}$), teda $f(x) \in \mathscr{R}\langle 0, 1\rangle$.

Uveďme si ešte jednu dôležitú triedu integrovateľných funkcií.

Veta 3. Nech funkcia $f(x)$ je monotónna na $\langle a, b\rangle$, potom $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

D ô k a z . Urobíme ho pre prípad neklesajúcej $f(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$. Zvoľme delenie D tak, aby $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, kde n je vhodné prirodzené číslo, ktorého veľkosť spresníme neskôr. Pre neklesajúcu funkciu platí $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Teda $U(f, D) - L(f, D) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i =$ $= \sum_{j=1}^{p}[f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$. K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ zvoľme prirodzené číslo n tak veľké, aby $n > \dfrac{b-a}{\varepsilon}(f(b) - f(a))$. Tým máme zostrojené delenie D také, že $U(f, D) - L(f, D) < \varepsilon$, a teda $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Ak $f(x)$ je nerastúca na $\langle a, b\rangle$, dôkaz sa urobí analogicky.

Poznamenávame, že funkcie spĺňajúce predpoklady dokázaných troch viet nevyčerpávajú triedy všetkých funkcií, ktoré sú integrovateľné. Ďalšie triedy integrovateľných funkcií uvedieme v dodatku.

Cvičenie

1. Pomocou vety 2.5 a dokážte: Ak $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$, potom $f(x) \in \mathscr{R}\langle c, d\rangle$.

2. Dokážte, že množina racionálnych čísel z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nie je množinou s Jordanovou mierou nula.

3. Dokážte: Nech $M = \{x\}$, $x \in \mathscr{R}$ je neprázdna ohraničená množina. Označme $M_- = \{-x\}$ pre $c > 0$, $M_c = \{cx\}$, ak $x \in M$. Potom

a) $\beta = \sup M$ vtedy a len vtedy, ak $-\beta = \inf M_-$ alebo
$\alpha = \inf M$ vtedy a len vtedy, ak $-\alpha = \sup M_-$.

b) $c \cdot \sup M = \sup M_c$, $c \cdot \inf M = \inf M_c$ $(c > 0)$.

4. Nech $f(x)$, $g(x)$ sú ohraničené funkcie na intervale J. Dokážte:

a) $\inf\limits_{x\in J} f(x) + \inf\limits_{x\in J} g(x) \le \inf\limits_{x\in J}[f(x) + g(x)]$

b) $\sup\limits_{x\in J}[f(x) + g(x)] \le \sup\limits_{x\in J} f(x) + \sup\limits_{x\in J} g(x)$

4 ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI URČITÉHO INTEGRÁLU

Veta 1. Nech $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, c je konštanta. Potom $c \cdot f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b c\, f(x)\,\mathrm{d}\,x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{4.1}$$

D ô k a z . 1. Dokážme platnosť vety 1 pre c = −1. Nech D je ľubovoľné delenie $\langle a, b\rangle$. Vzhľadom na cvičenie 3a) za článkom 3 platí

$$U(f, D) - L(f, D) = \sum_{i=1}^{n}[\sup_{x\in d_i} f(x) - \inf_{x\in d_i} f(x)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}[-\inf_{x\in d_i}(-f(x)) + \sup_{x\in d_i}(-f(x))]\Delta x_i =$$
$$= U(-f, D) - L(-f, D)$$

Ak berieme do úvahy vetu 2.5, z faktu, že $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, vyplýva $-f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Ďalej platí $U(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} -\inf\limits_{x\in d_i}(-f(x))\Delta x_i = -L(-f, D)$

a

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \inf\limits_D U(f, D) = -\sup\limits_D L(-f, D) = -\int\limits_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}\,x$, čo je rovnosť (4.1) pre c = −1.

2. Ak $c > 0$, potom vzhľadom na cvičenie 3b platí $U(cf, D) - L(cf, D) = c[U(f, D) - L(f, D)]$, z čoho ľahko podľa vety 2.5 vidíme platnosť implikácie: Ak $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak aj $c\ f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Ďalej $\int\limits_a^b c\, f(x)\,\mathrm{d}\,x = \inf\limits_D U(cf, D) = c\inf\limits_D U(f, D) = c\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$

3. Nech $c < 0$, potom $k = -c > 0$. Pre k máme už vetu dokázanú, teda $\int_a^b k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ak to násobíme -1, dostaneme $\int_a^b c f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Veta 2. Nech $f(x),\ g(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Potom $[f(x) + g(x)] \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

D ô k a z . Zvoľme ľubovoľné delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme $M_i^1 = \sup\limits_{x\in d_i} f(x)$, $m_i^1 = \inf\limits_{x\in d_i} f(x)$, $M_i^2 = \sup\limits_{x\in d_i} g(x)$, $m_i^2 = \inf\limits_{x\in d_i} g(x)$, $M = \sup\limits_{x\in d_i}[f(x)+g(x)]$, $m = \inf\limits_{x\in d_i}[f(x)+g(x)]$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Podľa cvičenia 4 za článkom 3 máme $m_i^1 + m_i^2 \le m_i \le M_i \le M_i^1 + M_i^2$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Vynásobíme poslednú sústavu nerovnosti číslom Δx_i, po spočítaní dostaneme pre ľubovoľné delenie D a pre ľubovoľné i:

$$L(f, D) + L(g, D) \le L(f + g, D) \le U(f + g, D) \le U(f, D) + U(g, D) \tag{4.3}$$

Podľa predpokladov z vety 2 plynie:

Ku každému $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje D_1, že $U(f, D_1) - L(f, D_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ a ku každému $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje D_2 také, že $U(g, D_2) - L(g, D_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Podľa vety 2.2 posledné nerovnosti zostanú v platnosti, ak namiesto delení D_1, D_2 napíšeme ich spoločné zjemnenie $D_0 = D_1 \cup D_2$. Z nerovnosti (4.3) potom dostaneme $U(f + g, D_0) - L(f + g, D_0) < \varepsilon$, čo stačí na to, aby $[f(x) + g(x)] \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Dokážme teraz (4.2).

Pretože $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\limits_D\{U(f,D)\}$, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \inf\limits_D\{U(g,D)\}$ z vlastnosti infima dostaneme:

K ľubovoľnému $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje D_1 také, že $U(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$ a k ľubovoľnému $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje D_2 také, že $U(g, D_2) < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$. Ak nahradíme D_1 a D_2 delením $D_0 = D_1 \cup D_2$ posledné nerovnosti zostanú v platnosti. Ak pre takéto delenie D_0 použijeme (4.3) dostaneme

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \inf_D U(f+g, D) \le U(f+g, D_0) \le U(f, D_0) + U(g, D_0) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$$

Nerovnosť

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \tag{4.4}$$

zoberme v limite pre $\varepsilon \to 0$. Dostaneme nerovnosť

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.5}$$

ktorá platí pre ľubovoľné $f(x)$, $g(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Platí teda aj vtedy, ak $f(x)$ nahradíme $-f(x)$ a $g(x)$ nahradíme $-\,g(x)$. Takto z (4.5) dostaneme $-\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}\,x \le -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$ z čoho

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}\,x \ge \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{4.6}$$

Nerovnosti (4.5) a (4.6) majú platiť súčasne, čo je možné vtedy a len vtedy, ak platí znamienko rovnosti, teda (4.2).

Poznamenávame, že vety 1 a 2 sa ľahko indukciou dajú zovšeobecniť do podoby: Ak $f_i(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, c_i sú konštanty pre $i = 1, 2, \ldots, k$, potom $[c_1 f_1(x) + \ldots + c_k f_k(x)] \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + \cdots + c_k f_k(x)]\,\mathrm{d}\,x = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}\,x + \cdots + c_k \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Veta 3. Nech $f(x)$, $g(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a nech pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \le g(x)$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{4.7}$$

D ô k a z . Označme $F(x) = g(x) - f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Platí $F(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, $F(x) \ge 0$ pre $x \in \langle a, b\rangle$ a $\sup\limits_{x \in d_i} F(x) \ge 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Preto aj $U(f, D) \ge 0$ pre každé delenie D. Z toho máme $\inf\limits_D \{U(F, D)\} = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}\,x \ge 0$. Teda $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}\,x \ge 0$, čo je vlastne (4.7).

Veta 4. Nech $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a nech $M > 0$ je reálne číslo také, že pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ je $|f(x)| \le M$. Potom

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \le M(b-a) \tag{4.8}$$

D ô k a z . Z príkladu 2.1 vieme, že $\int_a^b (\pm M)\,\mathrm{d}\,x = \pm M(b - a)$. Ak na nerovnosti $-M \le f(x) \le M$ použijeme vetu 3, dostaneme $-M(b - a) \le \int_a^b (\pm f(x))\,\mathrm{d}\,x \le M(b - a)$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou (4.8).

Veta 5. Nech $a < c < b$ sú reálne čísla. Funkcia $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ vtedy a len vtedy, ak $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, c\rangle$ a $f(x) \in \mathscr{R}\langle c, b\rangle$. Navyše platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{4.9}$$

D ô k a z . $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ z cvičenia 1 po článku 3 plynie, že $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, c\rangle$ a $f(x) \in \mathscr{R}\langle c, b\rangle$. Naopak, ak $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, c\rangle$, $f(x) \in \mathscr{R}\langle c, b\rangle$, potom existuje také delenie týchto intervalov $D_{\langle a, c\rangle}$, $D_{\langle c, b\rangle}$, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí $U(f, D_{\langle a, c\rangle}) - L(f, D_{\langle a, c\rangle}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ a $U(f, D_{\langle c, b\rangle}) - L(f, D_{\langle c, b\rangle}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $D = D_{\langle a, c\rangle} \cup D_{\langle c, b\rangle}$ je delením intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $U(f, D) - L(f, D) = U(f, D_{\langle a, c\rangle}) + U(f, D_{\langle c, b\rangle}) - [L(f, D_{\langle a, c\rangle}) + L(f, D_{\langle a, c\rangle})] < \varepsilon$, a teda $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

V ďalšej časti dôkazu môžeme bez ujmy na všeobecnosti používať len také delenie $\langle a, b\rangle$, ktoré obsahuje bod c. Potom $U(f, D_{\langle a,b\rangle}) = U(f, D_{\langle a,c\rangle}) + U(f, D_{\langle c,b\rangle}) \geq \inf\limits_{D_{\langle a,c\rangle}} \{U(f, D_{\langle a,c\rangle})\} + \inf\limits_{D_{\langle c,b\rangle}} \{U(f, D_{\langle c,b\rangle})\} =$ $= \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$, to znamená, že $\{U(f, D_{\langle a,b\rangle})\}$ je zdola ohraničená číslom $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Z vlastnosti infima máme $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Ďalej postupujeme ako v závere dôkazu vety 2.: Nahradíme v poslednej nerovnosti $f(x)$ funkciou $-f(x)$ dostaneme opačnú nerovnosť a z toho tvrdenie (4.9).

Veta 6. Nech $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, $m \leq f(x) \leq M$ pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ a nech $\varphi(t)$ je spojitá na $\langle m, M\rangle$. Potom $h(x) = \varphi(f(x)) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

D ô k a z . Funkcia $\varphi(t)$ je na $\langle m, M\rangle$ rovnomerne spojitá, teda ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $0 < \delta < \varepsilon$ také, že pre všetky $t, s \in \langle m, M\rangle$, pre ktoré $|t - s| < \delta$ platí $|\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon$. Nakoľko $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, k číslu δ^2 existuje delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$ také, že

$$U(f, D) - L(f, D) < \delta^2 \tag{4.10}$$

Nech M_i, m_i sú symboly zavedené v článku 1 pre funkciu $f(x)$ a M_i^*, m_i^* sú analogické veličiny pre funkciu $h(x)$. Indexy deliacich bodov delenia D rozdeľme na dve disjunktné množiny A, B; $i \in A$, ak $M_i - m_i < \delta$ a $i \in B$, ak $M_i - m_i \geq \delta$.

Ak $i \in A$, vzhľadom na výber δ platí $M_i^* - m_i^* \leq \varepsilon$. Ak $i \in B$, potom ak označíme $K = \sup\limits_{t\in\langle m,M\rangle} |\varphi(t)|$, platí $M_i^* - m_i^* < 2K$. Ak zoberieme do úvahy (4.10), máme $\delta \sum\limits_{i\in B} \Delta x_i \leq \sum\limits_{i\in B} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq U(f, D) -$ $- L(f, D) < \delta^2$, z čoho $\sum\limits_{i\in B} \Delta x_i < \delta$. Ďalej platí $U(h, D) - L(h, D) = \sum\limits_{i\in A} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i + \sum\limits_{i\in B} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i <$ $< \varepsilon(b - a) + 2K\delta < \varepsilon(b - a + 2K)$.

Z vety 2.5 plynie, že $h(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, pretože $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľné číslo a takúto vlastnosť má, ak $\varepsilon' = \varepsilon(b - a + 2K)$.

Veta 7. Nech $f(x)$, $g(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Potom

a) $f(x) \cdot g(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$,

b) ak navyše $g(x) > 0$ alebo $g(x) < 0$, pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ a $\inf\limits_{\langle a,b\rangle} g(x) \neq 0$, $\sup\limits_{\langle a,b\rangle} g(x) \neq 0$, potom $\dfrac{f(x)}{g(x)} \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

c) $|f(x)| \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí $\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$ (4.11)

D ô k a z .

a) Dokážeme najprv, že ak $f \in \mathscr{R}$, potom $f^2(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Zvoľme $\varphi(t) = t^2$, je to spojitá funkcia pre všetky $t \in$ R. Preto podľa vety 6 $f^2(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Ďalej platí $f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4}[(f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2]$. Podľa vety 1. a vety 2. dostaneme $f(x) \cdot g(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

b) Nech $g(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$. Označme $m = \inf g(x)$, $M = \sup g(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$, pričom $m > 0$. Ak zvolíme $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$, pre $t \in \langle m, M\rangle$ je to spojitá funkcia, a preto podľa vety 6 $\dfrac{1}{g(x)} \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Ďalej podiel $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ podľa časti a) je $\dfrac{f(x)}{g(x)} \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

c) Ak zvolíme $\varphi(t) = |t|$ dostaneme, že $|f(x)| \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Ďalej platí $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$. Keď použijeme vetu 3. máme $-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$ a pretože $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| = \max\left\{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x; -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right\}$ z poslednej sústavy nerovnosti dostávame 4.11.

5 INTEGRÁL AKO LIMITA INTEGRÁLNYCH SÚČTOV

V článku 1 sme zaviedli pojem určitého integrálu pomocou suprema a infima dolných a horných integrálnych súčtov. Existuje aj iná možnosť ako tento pojem zaviesť, a to pomocou limity integrálnych súčtov.

Definícia 1. Integrálnym súčtom funkcie $f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ pri delení D rozumieme číslo

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \tag{5.1}$$

kde $t_i \in d_i$ je ľubovoľný bod ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Hovoríme, že množina integrálnych súčtov $\{S(f, D)\}$ má limitu rovnú číslu A pre normu delenia $n(D)$ idúcu k nule, označenie $\lim\limits_{n(D)\to 0} S(f, D) = A$, ak platí: ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre všetky D, ktorých norma $n(D) < \delta$, pre každé $t_i \in d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$|S(f, D) - A| < \varepsilon \tag{5.2}$$

Pojem „limita integrálnych súčtov“, ktorý sme tu zaviedli, pripomína pojem konečnej limity b reálnej funkcie v reálnom čísle a, teda známy fakt, ktorý sme označovali $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Treba si však uvedomiť, že limita integrálnych súčtov do toho priamo nezapadá. Keby sme ju pod tento pojem chceli včleniť, museli by sme povedať, čo je v našom prípade premenná x, čo je funkcia $f(x)$ a o aký bod ide. Mali by sme s tým isté ťažkosti. Preto, ak budeme chcieť pre náš pojem limity používať vety o limitách, musíme si také vety, ak sa dajú, dokázať. Niektoré z nich dokážeme v rámci cvičenia (pozri cvičenie za týmto článkom). Pre informáciu treba však uviesť, že v matematike existuje tak vybudovaný pojem limity, ktorý súčasne zahrňuje pojem limity funkcie, ktorý sme zaviedli skôr, aj pojem limity integrálnych súčtov. Je to tzv. Moor-Smithova limita. Týmto pojmom sa však v týchto učebných textoch nebudeme zaoberať. Čitateľ, ktorého to zaujíma, to nájde spracované napr. v [5] v dodatku.

Vo vete 3.1 vidíme, že vzťah (3.1) nebol vlastne nič iné, než (5.2), teda ak $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$, potom platí $\lim\limits_{n(D)\to 0} S(f, D) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Platí to aj všeobecnejšie:

Veta 1. Ak existuje $\lim\limits_{n(D)\to 0} S(f, D)$, potom $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$\lim_{n(D)\to 0} S(f, D) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{5.3}$$

a naopak, ak $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\lim\limits_{n(D)\to 0} S(f, D)$ a platí rovnosť (5.3).

D ô k a z .

1. Nech existuje $\lim\limits_{n(D)\to 0} S(f, D) = A$. Dokážme, že pre ľubovoľné $\varepsilon/2 > 0$ existuje delenie D tak, že $U(f, D) \le A + \varepsilon/2$. Z predpokladu vety máme: Ku každému $\varepsilon/2 > 0$ existuje $\delta > 0$, že pre každé D, pre ktoré $n(D) < \delta$ a pre každé $t_i \in d_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ dostaneme $|U(f, D) - A| < \varepsilon/2$, z čoho $f(t_1)\Delta x_1 < A + \varepsilon/2 - \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$, pre každé $t_1 \in d_1$. Z vlastnosti suprema dostaneme ($M_1 = \sup f(t_1)$, $t_1 \in d_1$) $M_1\Delta x_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} f(t_i)\Delta x_i \le A + \varepsilon/2$. Podobne platí $f(t_2)\Delta x_2 \le A + \varepsilon/2 - M_1\Delta x_1 - \sum\limits_{i=3}^{n} f(t_i)\Delta x_i$, pre ľubovoľné $t_2 \in d_2$. Preto $M_1\Delta x_1 + M_1\Delta x_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} f(t_i)\Delta x_i \le A + \varepsilon/2$. Ak zopakujeme túto úvahu pre $t_3, \dots, t_n$ dostaneme $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = U(f, D) \le A + \varepsilon/2$ pre každé delenie D, pre ktoré $n(D) < \delta$.

Analogickým postupom z nerovnosti $A - \varepsilon/2 < S(f, D)$ dostaneme $A - \varepsilon/2 \le L(f, D)$ pre všetky D také, že $n(D) < \delta$. Dostali sme tvrdenie: Ku každému $\varepsilon/2 > 0$ existuje $\delta > 0$, že pre všetky D také, že $n(D) < \delta$ platí $A - \varepsilon/2 \le L(f, D) \le U(f, D) \le A + \varepsilon/2$, z čoho $U(f, D) - L(f, D) \le \varepsilon$, z čoho máme $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Navyše $A - \varepsilon/2 \le L(f, D) \le \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le U(f, D) \le A + \varepsilon/2$ teda $0 \le \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - A\right| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$, čo vzhľadom na ľubovoľnosť $\varepsilon > 0$ implikuje rovnosť $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$.

2. Ak $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\limits_D\{(L(f, D)\} = \inf\limits_D\{(U(f, D)\}$.

a) Z vlastnosti infima platí, k ľubovoľnému $\varepsilon/2 > 0$ existuje delenia D_0 také, že

$$U(f, D_0) < \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.4}$$

Nech $D_0 = \{z_0 = a, z_1, \dots, z_p = b\}$ a označme $K = \sup|f(x)|$, $x \in \langle a, b\rangle$. Ďalej zvoľme $\delta_1 \le \dfrac{\varepsilon}{4Kp}$ a delenie

$$D = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\} \tag{5.5}$$

také, že norma $n(D) < \delta_1$. Spoločné zjemnenie delení D a D_0 označme D^* ($D^* = D \cup D_0$). Množinu indexov čiastkových intervalov D, t. j. množinu $N_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ rozdeľme na dve disjunktné množiny A, B takto:

$A = \{i \in N_0 :$ aspoň jeden bod z_j delenia D_0 je vnútorným bodom intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$ (takých intervalov môže byť najviac $p - 1$),

$B = \{i \in N_0 : i \notin A\}$.

Uvažujme o rozdiele
$$U(f, D) - U(f, D^*) \tag{5.6}$$

Intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ pre $i \in B$ sa nachádzajú tak v delení D, ako aj v D^* (nakreslite si obrázok). Príspevky patriace k týmto intervalom sú v súčtoch $U(f, D)$ a $U(f, D^*)$ rovnaké, preto ich rozdiel v (5.6) sa rovná nule. Stačí preto uvažovať intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ pre $i \in A$. Preskúmajme prípad, že v intervale $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ pre jediný bod z_j, $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ platí $x_{i-1} < z_j < x_i$. Platí

$$\sup_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)(x_i - x_{i-1}) - [\sup_{x\in\langle x_{i-1}, z_j\rangle} f(x)(z_j - x_{i-1}) + \sup_{x\in\langle z_j, x_i\rangle} f(x)(x_i - z_j)] \le$$
$$\le K(x_i - x_{i-1}) + K[(z_j - x_{i-1}) + (x_i - z_j)] \le K2\delta_1$$

Prípad, že v $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ sa nachádza viac bodov z_j ako vnútorných bodov toho intervalu, vedie k tomu istému výsledku. Preto vzhľadom na (5.5) platí

$$U(f, D) - U(f, D^*) \le (p-1)\cdot 2K\delta_1 \le \frac{\varepsilon}{2} \text{ alebo } U(f, D) \le U(f, D^*) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.7}$$

Nakoľko D^* je zjemnenie D_0 ($U(f, D^*) < U(f, D_0)$), dostanem pomocou (5.4) a (5.7) tvrdenie: K ľubovoľnému $\varepsilon/2 > 0$ existuje $\delta_1 > 0$ také, že pre všetky delenia D, ktorých norma $n(D) < \delta_1$ pre všetky $t_i \in d_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ je

$$U(f, D) \le U(f, D^*) + \frac{\varepsilon}{2} \le U(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.8}$$

b) Z faktu $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_D\{L(f, D)\}$ si podobným spôsobom ako v prípade a) čitateľ môže dokázať tvrdenie: K ľubovoľnému $\varepsilon/2 > 0$ existuje $\delta_2 > 0$ také, že pre všetky delenia D, ktorých norma $n(D) < \delta_2$ pre všetky $t_i \in d_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$L(f, D) > \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.9}$$

Zvoľme $\delta = \min\{\delta_2, \delta_2\}$. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ máme $\delta > 0$ také, že pre všetky delenia D, ktorých norma $n(D) < \delta$ z (5.8) a (5.9) dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, D) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le U(f, D) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$$

Tým je veta dokázaná.

Poznámka 1. Často sa medzi integrálne súčty počítajú aj $U(f, D)$ a $L(f, D)$, čo je prirodzené, pretože hodnota $f(t_i)$ sa dá voliť „ľubovoľne blízko“ hodnotám M_i, m_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Preto je namieste pojem $\lim\limits_{n(D)\to 0} U(f, D)$, $\lim\limits_{n(D)\to 0} L(f, D)$, , ktoré sa zavádzajú analogicky ako v definícii 1. Tak napr.: Hovoríme, že $\lim\limits_{n(D)\to 0} U(f, D) = A$, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pre všetky D také, že $n(D) < \delta$ platí $|U(f, D) - A| < \varepsilon$.

Ľahko sa dokáže tvrdenie: Ak $f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ je tam ohraničená, potom existuje

$$\lim_{n(D)\to 0} U(f, D) = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ a existuje } \lim_{n(D)\to 0} L(f, D) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Z tohto triviálne vyplýva: $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ vtedy a len vtedy, ak $\lim\limits_{n(D)\to 0} U(f, D) = \lim\limits_{n(D)\to 0} L(f, D)$.

Aj keď sme povedali, že integrál nie je obyčajnou limitou, predsa len existuje významný súvis medzi integrálom a limitou postupnosti. Hovorí o tom táto veta:

Veta 2. Ak $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} S(f, D)$, kde $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť delení na intervale $\langle a, b\rangle$ taká, že postupnosť noriem $\{n(D_k)\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k nule.

D ô k a z . Keďže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, podľa vety 1 $\lim\limits_{n(D)\to 0} S(f, D) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. To znamená, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre všetky delenia D, pre ktoré $n(D) < \delta$ platí

$$\left| S(f, D) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \tag{5.10}$$

Nech teraz $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je taká postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$, pre ktoré $\lim\limits_{k\to\infty} n(D_k) = 0$. To znamená, že existuje k_0 prirodzené tak, že pre všetky $k > k_0$ je $n(D_k) < \delta$. Podľa (5.10) teda platí

$$\left| S(f, D_k) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \right| < \varepsilon$$

Posledné tvrdenie však znamená, že $\lim\limits_{k\to\infty} S(f, D) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Poznamenávame, že význam uvedenej vety je v tom, že ak integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ existuje, môžeme ho „vypočítať" ako limitu (zvyčajnú) číselnej postupnosti.

Veta 3. Nech ohraničené funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sú si rovné na $\langle a, b\rangle$ až na množinu M, ktorá má Jordanovu mieru nula. Potom sú buď, obe funkcie integrovateľné na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{5.11}$$

alebo ani jedna nie je integrovateľná.

D ô k a z . Pre všetky $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ platí $|f(x)| \le N_1$, $|g(x)| \le N_2$. Označme $N = \max\{N_1, N_1\}$. Množinu M pokryjeme uzavretými intervalmi $d_1, \ldots, d_k$ tak, aby každý bod $x \in M$ bol vnútorným bodom niektorého d_i, $1 \le i \le k$ a tak, aby súčet dĺžok d_i bol menší než $\dfrac{\varepsilon}{2N}$, kde $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo. Zvoľme delenie D tak, že intervaly d_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ sú čiastkovými intervalmi tohto delenia. Zvyšné čiastočné intervaly označme d_j^*, $i = 1, 2, \ldots, n$. Na týchto d_j^* platí $f(x) = g(x)$. Pre takéto delenie D platí:

$$|U(f, D) - U(g, D)| \le 2N\sum_{i=1}^{k} d_i < 2N\frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon \tag{5.12}$$

a podobne $|L(f, D) - L(g, D)| < \varepsilon$.

Pretože existujú limity horných a dolných integrálnych súčtov z (5.12) vyplýva

$$\lim_{n(D)\to 0} U(f,D) = \lim_{n(D)\to 0} U(g,D), \quad \lim_{n(D)\to 0} L(f,D) = \lim_{n(D)\to 0} L(g,D)$$

Ak jedna z funkcií napr. $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom $\lim\limits_{n(D)\to 0} U(f,D) = \lim\limits_{n(D)\to 0} L(f,D)$, a preto aj $\lim\limits_{n(D)\to 0} U(g,D) = \lim\limits_{n(D)\to 0} L(g,D)$ a platí (5.11). Ak $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, $\lim\limits_{n(D)\to 0} U(f,D) \ne \lim\limits_{n(D)\to 0} L(f,D)$, potom aj $\lim\limits_{n(D)\to 0} U(g,D) \ne \lim\limits_{n(D)\to 0} L(g,D)$ a $g(x) \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

POZNÁMKA 2. Každú $f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ môžeme nahradiť inou funkciou na $\langle a, b\rangle$, ktorá je na $\langle a, b\rangle$ rovná $f(x)$ s výnimkou množiny s mierou nula (podľa Jordana) bez toho, aby bola narušená integrovateľnosť aj hodnota integrálu. Tieto úvahy vedú k tomu, aby sme zaviedli integrál aj z niektorých takých funkcií, ktoré nie sú definované v každom bode intervalu $\langle a, b\rangle$. Ak je $f(x)$ taká ohraničená funkcia, že k nej existuje funkcia $g(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, pre ktoré $f(x) = g(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$ s výnimkou množiny s Jordanovou mierou nula, definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Príklad 1. Nech $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \ne \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{pre} \quad x = \dfrac{1}{n} \end{cases}$ pre $x \in \langle 0, 1\rangle$, n je prirodzené. Množina $M = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ má Jordanovú mieru nula. Pre $x \in \langle 0, 1\rangle$, $x \notin M$ je $f(x)$ rovná nulovej konštante, preto $f(x) \in \mathscr{R}\langle 0, 1\rangle$ a $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$.

Príklad 2. 1 Nech $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Táto funkcia nie je definovaná v bode 0. Položme $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pre} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pre} \quad x = 0 \end{cases}$. Pretože $g(x)$ je spojitá všade okrem bodu 0, ohraničená aj na intervale $\langle 0, 1\rangle$, je $g(x) \in \mathscr{R}\langle 0, 1\rangle$. Pretože platí $f(x) = g(x)$ pre $x \neq 0$, máme $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}\,x$

POZNÁMKA 3. Ďalšie rozšírenie pojmu Riemannovho integrálu vychádza z tejto úvahy: V definícii a vlastnostiach integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ doteraz vždy bolo $a < b$, ako to vyplývalo z podstaty intervalu $\langle a, b\rangle$. Rozšírme tento pojem na ďalšie prípady.

Definícia 2. Ak $f(x)$ je definovaná pre $x = a$ definujme

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0 \tag{5.13}$$

Definícia 3. Ak $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom definujme

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x, \qquad a < b \tag{5.14}$$

Tieto definície sú korektné a prirodzené. V prvom prípade, t. j. ak $a = b$, uvážme, že čiastočné intervaly delenia $\langle a, b\rangle$ sú body (navzájom rovné) a ich dĺžky $\Delta x_i = 0$. Preto $U(f, D) = L(f, D) = S(f, D) = 0$, a preto je namieste rovnosť (5.13).

V druhom prípade sa integrálny súčet pre integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ líši od integrálneho súčtu pre $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}\,x$ len opačným znamienkom, a preto aj limity týchto integrálnych súčtov sa líšia len opačnými znamienkami. Preto je rozumná definícia (5.14).

Platnosť celého radu viet odvodených v predchádzajúcich článkoch sa dá bezprostredne vidieť (napr. vety 4.1, 4.2), bez obmedzenia $a < b$. Iné platia pre $a > b$ v menšej modifikácii, ktorú si čitateľ v prípade potreby môže ľahko urobiť. Upozorňujeme ešte na zovšeobecnenie vety 4.5 v cvičení 3 po tomto článku.

Cvičenie

1. Dokážte Cauchyho-Schwarzovu[3] nerovnosť: Ak $f(x)$, $g(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x \cdot \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

Návod: Integrujte funkciu $[f(x) - \lambda g(x)]^2$, (kde λ je reálne číslo) na $\langle a, b\rangle$.

2. Dokážte tvrdenie z poznámky 5.1.

3. Dokážte nasledujúce zovšeobecnenie aditívnej vlastnosti integrálu: Nech a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla. Nech existujú integrály $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x$, $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}\,x$, potom existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ a platí $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}\,x$ (preskúmajte platnosť tejto rovnosti pre všetky možné usporiadania čísel a, b, c).

4. Sformulujte a dokážte vetu 4.4 a vetu 4.7c pre prípad $a > b$.

---

[3] H. A. Schwarz (1843 – 1921) – nemecký matematik
A. L. Cauchy (1795 – 1857) – francúzsky matematik

5. Dokážte nasledujúce vety o limitách integrálnych súčtov:

a) Ak existuje $\lim\limits_{n(D)\to 0} S(f, D)$, potom existuje jediná.

b) Ak pre každé delenie D platí $S(f, D) \le S(g, D)$, potom $\lim\limits_{n(D)\to 0} S(f, D) \le \lim\limits_{n(D)\to 0} S(g, D)$, ak tieto limity existujú.

c) Platnosť nerovnosti $S(f, D) \le S(g, D)$, pre každé D možno zoslabiť. Urobte to!

6 VLASTNOSTI INTEGRÁLU AKO FUNKCIE HORNEJ HRANICE. NEWTONOV INTEGRÁL

Veta 1. Nech $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ položme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.1}$$

Potom

a) $F(x)$ je na $\langle a, b\rangle$ spojitá (pričom v koncových bodoch $\langle a, b\rangle$ ide o jednostrannú spojitosť).

b) Ak navyše $f(x)$ je v bode $x_0 \in \langle a, b\rangle$ spojitá, potom $F(x)$ je v bode x_0 diferencovateľná a platí $F'(x_0) = f(x_0)$ (pričom znova v koncových bodoch $\langle a, b\rangle$ ide o jednostrannú spojitosť v predpoklade a jednostrannú diferencovateľnosť v tvrdení).

D ô k a z .

a) Z toho, že $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ vyplýva existencia čísla $M > 0$ takého, že pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ je $|f(x)| \le$ M. Zvoľme ľubovoľné $x, y \in \langle a, b\rangle$. Ak použijeme vety 4.4, 4.5, 4.7c, resp. výsledky cvičení 3., 4. po predchádzajúcom článku, dostaneme

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le M\,|x - y|$$

Z tejto nerovnosti vidíme, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ stačí zvoliť $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{M}$, aby z nerovnosti $|x - y| < \delta$ vyplynulo $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$, čím je spojitosť $F(x)$ na $\langle a, b\rangle$ dokázaná.

b) Ak $f(x)$ je v $x_0 \in \langle a, b\rangle$ spojitá, potom ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pre všetky $t \in \langle a, b\rangle$: : $|t - x_0| < \delta$ platí $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ (pre zjednodušenie robíme dôkaz pre prípad, že x_0 je vnútorný bod $\langle a, b\rangle$). Potom postupom podobným ako v časti a) dostaneme pre $|x - x_0| < \delta$.

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t\right)\right| \le \frac{1}{|x - x_0|}\cdot\varepsilon\cdot|x - x_0| = \varepsilon$$

teda $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ alebo $F'(x_0) = f(x_0)$. Prípady $x_0 = a$, resp. $x_0 = b$ sa urobia analogicky.

Poznamenávame, že z vety 1b triviálne vyplýva veta 1.1.2, pre dôkaz ktorej sme v kapitole I nemali technické prostriedky. Je teda zrejmé, že $F(x)$ definovaná pomocou (6.1) je pre spojitú funkciu $f(x)$ primitívnou funkciou na $\langle a, b\rangle$.

Veta 2. (**Leibnitzov-Newtonov[4] vzorec**) Nech $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a nech na $\langle a, b\rangle$ existuje diferencovateľná funkcia taká, že $F'(x) = f(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$ ($F(x)$ je primitívnou funkciou k $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$), potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \tag{6.2}$$

[4] G. W. Leibniz (1664 – 1716) nemecký matematika a filozof
I. Newton (1643 – 1727) anglický fyzik, matematik, mechanik a astronóm

D ô k a z . $F(x)$ je diferencovateľná na $\langle a, b\rangle$, môžeme teda použiť Lagrangeovu[5] vetu o strednej hodnote na každom intervale d_i, ktorý je čiastočným intervalom delenia D intervalu $\langle a, b\rangle$. Platí

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i = f(c_i)\Delta x_i \tag{6.3}$$

kde $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, ak $x_{i-1} < x_i$, (v prípade, že $x_{j-1} = x_j$ pre nejaké j, potom rovnosť (6.3) platí triviálne). Ak (6.3) spočítame pre i = 1, 2, …, n, dostaneme $\sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ alebo

$$F(b) - F(a) = S(f, D) \quad \text{pre každé } D \tag{6.4}$$

Podľa vety 5.1 existuje $\lim\limits_{n(D)\to 0} S(f, D) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a z (6.4) a z jednoznačnosti limity (pozri cvičenie 5a) za článkom 5) platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

Rovnosť (6.2) nám udáva vzťah medzi určitým a neurčitým integrálom a umožňuje nám pohodlnú cestu k výpočtu určitých integrálov, ak poznáme primitívnu funkciu.

Ďalej si uvedomme, že ak $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $x \in \langle a, b\rangle$, že v x existuje derivácia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}\,x\right) = f(x) \tag{6.5}$$

POZNÁMKA 1. V tejto fáze by bola škoda, ak by sa čitateľ nezoznámil s ďalším druhom určitého integrálu, aj keď to tematicky celkom presne nezapadá do tejto kapitoly.

Definícia 1. Funkcia $f(x)$ definovaná na $\langle a, b\rangle$ je integrovateľná v Newtonovom zmysle, ak existuje taká funkcia $F(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, že v každom bode $x \in \langle a, b\rangle$ platí $F'(x) = f(x)$. Rozdiel $F(b) - F(a)$ nazveme Newtonov integrál, pričom použijeme znak

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a)$$

V tejto definícii je $a < b$. Pre $a \geq b$ definujeme Newtonov integrál opäť ako v definíciách 5.2 a 5.3.

Definícia 1 vyzerá na prvý pohľad ako niečo podstatne iné než definícia 2.1 (Riemannova). Z vety 2 však vyplýva, že ak f je integrovateľná v Riemannovom aj Newtonovom zmysle, tak tieto integrály sa rovnajú. Táto situácia nastane napríklad vtedy, ak $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ (pozri vetu 3.2 a vetu 1b). Tieto definície však nie sú ekvivalentné – líšia sa rozsahom svojich existenčných oborov. Funkcia $f(x) = 0$ pre $x \neq 0$ a $f(0) = 1$ nemá, ako sme ukázali v 1.1 primitívnu funkciu, a teda neexistuje $(\mathscr{N})\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$, pričom Riemannov integrál $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$. Nasledujúci príklad ukazuje, že existujú funkcie, ktoré majú Newtonov a nemajú Riemannov integrál.

Príklad 1. Majme $f(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\dfrac{\pi}{x^3} - \dfrac{3\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x^3} & \text{ak} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}$. Ľahko sa presvedčíme že $F(x) = \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{\pi}{x^3} & \text{ak} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}$ je primitívnou funkciou k $f(x)$ na intervale $\langle -1, 1\rangle$. Teda $(\mathscr{N})\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(1) - F(-1) = 0$, ale $f(x) \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, pretože na tomto intervale nie je $f(x)$ ohraničená.

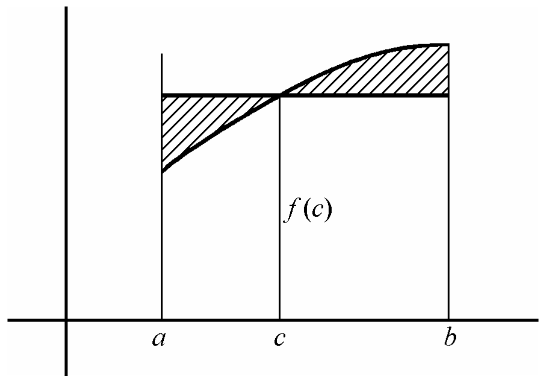
$$\left(\left|f\left(\pm\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right| = 3\pi\sqrt[3]{n}\right)$$

[5] J. L. Lagrange (1736 – 1813) francúzsky matematik a mechanik

7 VETY O STREDNEJ HODNOTE A METÓDY SUBSTITÚCIE A PER PARTES PRE URČITÝ INTEGRÁL

Z geometrickej interpretácie určitého integrálu vieme, že plošný obsah útvaru ohraničeného grafom spojitej nezápornej funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a priamkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$, je daný číslom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Je teda dosť pochopiteľné, že očakávame, že bude existovať obdĺžnik so základňou $\langle a, b\rangle$ a výškou, ktorá sa rovná hodnote funkcie v nejakom bode $c \in \langle a, b\rangle$ tak, že bude platiť (pozri obr. 5).

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a) \tag{7.1}$$



Obr. 5

Táto názorná skutočnosť sa dá sformulovať presne a omnoho všeobecnejšie. Tým sa stane dôsledkom všeobecnejšieho tvrdenia, ktoré je vyslovené v nasledujúcej vete a ktorému hovoríme prvá veta o strednej hodnote.

Veta 1. Nech $f(x)$, $g(x)$ patria do $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a nech $g(x) \geq 0$ pre $x \in \langle a, b\rangle$. Potom existuje také číslo λ, $m \leq \lambda \leq M$, kde $m = \inf\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, že platí $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Predtým, ako by sme dokázali vetu 1, všimnime si niektoré jej dôsledky.

1. Ak $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $g(x) = 1$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b \mathrm{d}x = \lambda(b-a) \tag{7.2}$$

kde $m \leq \lambda \leq M$.

2. Ak $g(x) = 1$ a $f(x)$ je spojitá funkcia, tak f nadobúda všetky hodnoty ležiace medzi m a M, teda aj hodnotu λ. To znamená, že existuje $c \in \langle a, b\rangle$ tak, že $\lambda = f(c)$. Preto zo (7.2) dostávame

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a) \tag{7.3}$$

Toto je vlastne ešte vždy všeobecnejší výsledok ako bol vzťah (7.1), ku ktorému nás viedol názor, pretože tu nepredpokladáme, že $f(x)$ je nezáporné.

Teraz pristúpime k d ô k a z u vety 1. Z nerovnosti $m \leq \lambda \leq M$ platnej pre $x \in \langle a, b\rangle$ dostávame $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.4}$$

Ak je $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, potom $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$, pretože $g(x) \geq 0$. Teda zo (7.4) máme

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M$$

Stačí označiť $\lambda = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$ a veta je dokázaná.

Ostáva však prípad $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Vtedy zo (7.4) máme $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, a teda vzťah $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ platí pri ľubovoľnej voľbe čísla λ, teda aj pre ľubovoľné λ také, že $m \leq \lambda \leq M$.

Prvá veta o strednej hodnote dáva v svojom špeciálnom tvare (7.3) istý typ strednej hodnoty funkcie $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$.

Príklad 1. Vypočítať strednú hodnotu funkcie $f(x) = x\sin x$ na intervale $\langle 0, \pi\rangle$. Zo (7.3) vyplýva, že taká hodnota je daná číslom

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$$

Ľahko vypočítame, že $f(c) = 1$. Túto hodnotu iste nadobúda funkcia $f(x) = x\sin x$ v nejakom čísle $c \in (0, \pi)$. Pravdaže takých čísel môže byť aj viac, ak si uvedomíme, že v čísle $x = \frac{\pi}{2}$ je $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 1$ a $f(0) = f(\pi) = 0$ vidíme, že také čísla existujú aspoň dve.

Niekedy je výhodné vyjadriť súčin $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$ aj v takých prípadoch, a keď nepredpokladáme nezápornosť funkcie $g(x)$. Často aplikovateľné tvrdenie dostaneme, ak namiesto toho predpokladáme monotónnosť funkcie $f(x)$. O tom hovorí druhá veta o strednej hodnote.

Veta 2. Nech $f(x)$ je monotónna funkcia na $\langle a, b\rangle$ a nech $g(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Potom existuje také číslo c, $a \leq c \leq b$, že platí

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int\limits_a^c g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int\limits_c^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

D ô k a z . Urobíme dôkaz pre ten prípad, keď je funkcia $f(x)$ nerastúca. Najprv ukážeme, že keď $f(x)$ je nerastúca a nezáporná, tak platí

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int\limits_a^c g(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.5}$$

pre nejaké $c \in \langle a, b\rangle$.

Zvoľme $\varepsilon > 0$. Uvažujme (zatiaľ ľubovoľné) delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$ dané bodmi $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$. Z aditívnosti integrálu malými úpravami dostaneme

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x) - f(x_{i-1})]g(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.6}$$

Dôkaz platnosti (7.5) bude spočívať v tom, že na základe (7.6) dokážeme, že

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - f(a)\int\limits_a^c g(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \tag{7.7}$$

pre vhodné $c \in \langle a, b\rangle$.

Pre druhý výraz na pravej strane (7.6) platí $\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_{i-1})]g(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq$

$\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|[f(x)-f(x_{i-1})]g(x)\right|\mathrm{d}\,x \leq L\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(M_i-m_i)\,\mathrm{d}\,x = L\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})$ kde

$L=\sup_{x\in\langle a,b\rangle}|g(x)|,\ M_i=\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle}f(x),\ m_i=\inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle}f(x).$

Delenie D bolo zvolené ľubovoľne. Funkcia $f(x)\in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, a teda podľa vety 2.5 delenie D môžeme tak zvoliť, že $U(f,D)-L(f,D)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{L}$, kde ε je ľubovoľné kladné číslo. Teda

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_{i-1})]g(x)\,\mathrm{d}\,x\right|<\varepsilon \tag{7.8}$$

Všimnime si teraz prvý výraz na pravej strane (7.6). Označme ho s. Delenie D, pri ktorom ho tvoríme, môže byť ľubovoľné. Ďalej označme $G(x) = \int_a^x g(x)\,\mathrm{d}x$. Vieme, že $G(x)$ je spojitá funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$ (veta 6.1 a)). Jej maximum nech je M a minimum m. Pri tomto označení

$$s=\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\,\mathrm{d}\,x=\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})[G(x_i)-G(x_{i-1})]=$$

$$= [f(x_0)G(x_1) - f(x_0)G(x_0)] + [f(x_1)G(x_2) - f(x_1)G(x_1)] + \ldots + [f(x_{n-1})G(x_n) - f(x_{n-1})G(x_{n-1})] =$$

$$= G(x_1)[f(x_0) - f(x_1)] + G(x_2)[f(x_1) - f(x_2)] + \ldots + G(x_{n-1})[f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})] + G(b)f(x_{n-1}) =$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}G(x_i)[f(x_{i-1})-f(x_i)]+G(b)f(x_{n-1}) \tag{7.9}$$

Zo (7.9) teda vyplýva, že pre s platí $m f(a)\leq s\leq M f(a)$ teda

$$m\leq\frac{s}{f(a)}\leq M \tag{7.10}$$

($f(a)\neq 0$, pretože ak $f(a) = 0$ z predpokladov v úvode dôkazu vyplýva, že $f(x)\equiv 0$ pre všetky $x\in\langle a, b\rangle$ a rovnosť (7.5) triviálne platí).

Vzhľadom na to, že spojitá funkcia $G(x)$ nadobúda akúkoľvek hodnotu medzi m a M a vzhľadom na (7.10) existuje $c\in\langle a, b\rangle$ tak, že $G(c)=\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{s}{f(a)}$ teda

$$s=f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{7.11}$$

Zo (7.6), (7.8) máme $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x-s\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_{i-1})]g(x)\,\mathrm{d}\,x\right|<\varepsilon$, teda podľa (7.11)

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x-f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}\,x\right|<\varepsilon \tag{7.12}$$

Postup nášho dôkazu bol pravdaže taký, že c v (7.12) záviselo od voľby ε. V každom prípade však sme dokázali, že funkcia $H(t) = |\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - f(a)\int_a^t g(x)\mathrm{d}x|$ má na ⟨a, b⟩ infimum rovné nule. $H(t)$ je však spojitá funkcia, teda to infimum v nejakom čísle c skutočne nadobúda a odtiaľ už dostávame (7.5).

Na základe (7.5) dôkaz vety už bude jednoduchý.

Ak $f(x)$ je ľubovoľná nerastúca funkcia, položme $h(x) = f(x) - f(b)$. Funkcia $h(x)$ je na $\langle a, b\rangle$ nerastúca a nezáporná. Podľa (7.5) existuje teda $c \in \langle a, b\rangle$ tak, že $\int_a^b h(x)g(x)\,\mathrm{d}x = h(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x$ alebo $\int_a^b (f(x) - f(b))g(x)\,\mathrm{d}x = (f(a) - f(b))\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x$. Odtiaľ už jednoduchou úpravou dostaneme

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.13}$$

Ak $f(x)$ je neklesajúca, potom pre dôkaz vety stačí použiť formulu (7.13) pre funkciu $-f(x)$, ktorá je zrejme nerastúca.

Druhá veta o strednej hodnote sa často používa pri odhade integrálu typu $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x)$ je monotónna a $g(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Príklad 2. Treba odhadnúť veľkosť integrálu $\left|\int_1^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|$, kde $A > 1$ je ľubovoľné reálne číslo.

Funkcia $\frac{1}{x}$ je klesajúca na $\langle -1, \infty)$, funkcia $\sin x$ je integrovateľná na ľubovoľnom intervale $\langle 1, A\rangle$, teda na $\langle 1, A\rangle$ môžeme použiť druhú vetu o strednej hodnote.

$$\int_1^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^c \sin x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{A}\int_c^A \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_1^c - \left[\frac{1}{A}\cos x\right]_c^A = -\cos c + \cos 1 - \frac{1}{A}\cos A + \frac{1}{A}\cos c$$

Teda

$$\left|\int_1^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le |\cos 1 - \cos c| + \left|\frac{1}{A}(\cos A - \cos c)\right| \le 2 + \frac{2}{A}$$

Výpočet určitých integrálov alebo ich odhad môžeme mnohokrát urobiť metódou per partes alebo substitučnou metódou, známou pre neurčité integrály. Ak použijeme dosť silné predpoklady na príslušné funkcie, formulácia príslušných viet ihneď vyjde z tých, ktoré sú známe pre neurčité integrály. Obmedzíme sa tu na takéto silné predpoklady. Pre integrácie per partes platí takáto veta.

Veta 3. Nech $f(x)$, $g(x)$ sú spojité na $\langle a, b\rangle$ a nech majú na $\langle a, b\rangle$ spojité derivácie $f'(x)$, $g'(x)$, potom platí $\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$.

D ô k a z . Zo vzorca pre derivovanie súčinu dostávame

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{7.14}$$

Z predpokladov vety vyplýva, že funkcie $[f(x)g(x)]'$, $f'(x)g(x)$, $f(x)g'(x)$ sú integrovateľné na $\langle a, b\rangle$ a navyše funkcia $[f(x)g(x)]'$ má primitívnu $f(x)g(x)$, teda môžeme pre ňu použiť Leibnitzov-Newtonov vzorec. Zo (7.14) teda dostaneme

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Odtiaľto už dostávame tvrdenie vety.

Vetu o integrácii substitúciou pre určité integrály môžeme za pomerne špeciálnych predpokladov formulovať takto:

Veta 4. Nech $f(x)$ je spojitá funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$. Nech $\varphi(t)$ je definovaná na intervale $\langle \alpha, \beta\rangle$ a nech má na ňom spojitú deriváciu $\varphi'(t)$. Navyše nech $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ a $a \le \varphi(t) \le b$ pre každé $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{7.15}$$

D ô k a z . Z predpokladov vety vyplýva, že integrály na ľavej i pravej strane (7.15) existujú. Vyplýva z nich i to, že existuje primitívna funkcia $F(x)$ k funkcii $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ a primitívna funkcia $\Phi(t)$ k funkcii $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na $\langle \alpha, \beta\rangle$. Preto platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

POZNÁMKA 1. Dá sa očakávať, že tak pre integráciu per partes, ako aj pre integráciu substitúciou pre určité integrály budú existovať aj všeobecnejšie tvrdenia, pretože príslušné integrály môžu existovať bez toho, aby existovali zodpovedajúce primitívne funkcie. S jednou takou všeobecnou formuláciou sa čitateľ môže oboznámiť napríklad v [4], [7] alebo [8].

Cvičenie

1. Dokážte: Ak $f(x)$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$ a nech $c \in \langle a, b\rangle$. Potom pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ existuje derivácia $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_x^c f(x)\,\mathrm{d}x\right) = -f(x)$

2. Nech $f(x)$ je spojitá a $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sú diferencovateľné všade v R. Dokážte nasledujúce formuly:

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) - f(\psi(x))\cdot\psi'(x)$

3. Nech $f(x)$, $g(x)$ majú na intervale $\langle a, b\rangle$ spojité derivácie $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$, kde $n \geq 1$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x)^{(n)}\,\mathrm{d}x = [f(x)g^{(n-1)}(x) - f'(x)g^{(n-2)}(x) + \ldots + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)g(x)]|_a^b + (-1)^n\int_a^b f(x)^{(n)}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dokážte!

4. Metódou per partes pre určité integrály ukážte pre $n = 0, 1, 2,\ldots$ platnosť vzorcov

$$J_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{pre } n \text{ párne} \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{pre } n \text{ nepárne} \end{cases}$$

5. Dokážte vzorce v literatúre známe ako Wallisova[6] formula, t. j.

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

(Návod: Pre $x \in \langle 0, \dfrac{\pi}{2}\rangle$, platí $\int_a^{\pi/2}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x \geq \int_a^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,\mathrm{d}x \geq \int_a^{\pi/2}\sin^{2n+2}x\,\mathrm{d}x$ a na tieto integrály použite výsledok cvičenia 4.)

[6] J. Wallis (1616 – 1703) anglický matematik

Kapitola III.

APLIKÁCIE URČITÉHO INTEGRÁLU

1 ADITÍVNA FUNKCIA INTERVALU A INTEGRÁL

Existuje celý rad aplikácií určitého integrálu. K najznámejším patria geometrické a fyzikálne. Niektoré z nich uvedieme. V podstate pôjde o to, aby sme geometrickú alebo fyzikálnu veličinu dobre definovali o potom ukázali, že sa dá počítať pomocou integrálu. Prístupy k tejto úlohe sú rôzne. V tomto článku uvedieme jadro jednej takej metódy, ktorá sa opiera o aditívne funkcie intervalu. Nie je najbežnejšia, ale je pomerne jednoduchá a dostatočne názorná. Neskôr pripomenieme aj iný prístup.

Definícia 1. Nech $\langle a, b\rangle$ je interval. Reálnu funkciu φ definovanú, na množine všetkých podintervalov intervalu $\langle a, b\rangle$ a takú, že pre každé $u < v < w$, kde u, v, w sú z $\langle a, b\rangle$ platí

$$\varphi(\langle u, w\rangle) = \varphi(\langle u, v\rangle) + \varphi(\langle v, w\rangle)$$

nazývame aditívnou funkciou intervalu.

POZNÁMKA 1. Stručne (aj keď nie celkom presne) hovoríme, že φ je aditívna funkcia intervalu na $\langle a, b\rangle$.

Príklad 1. Ak $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a pre $\langle u, v\rangle \subset \langle a, b\rangle$ položíme $\varphi(\langle u, v\rangle) = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x$, tak φ je aditívna funkcia intervalu. Vyplýva to ľahko z vety 2.4.5.

Príklad 2. Nech g je ľubovoľná reálna funkcia definovaná na $\langle a, b\rangle$. Položme pre $\langle u, v\rangle \subset \langle a, b\rangle$ $\varphi(\langle u, v\rangle) = g(v) - g(u)$. Potom φ je zrejme aditívna funkcia intervalu, pretože pre $u < v < w$ máme $\varphi(\langle v, w\rangle) = g(w) - g(u) = [g(w) - g(v)] + [g(v) - g(u)] = \varphi(\langle u, v\rangle) + \varphi(\langle v, w\rangle)$

Teraz uveďme príklad aditívnej funkcie nie striktne matematický, ale taký, kde nás k aditivite bezprostredne vedie prax.

Príklad 3. Uvažujme kus rovného drôtu dĺžky $b - a$ umiestneného tak, že jeho jeden koniec je v bode a a druhý v bode b. Každému intervalu $\langle u, v\rangle \subset \langle a, b\rangle$ priradíme hmotnosť tej časti drôtu, ktorá leží v tom intervale $\langle u, v\rangle$. Označme tú hmotnosť $h(\langle u, v\rangle)$. Skúsenosť a prax nás priamo núti predpokladať, že h je aditívnou funkciou intervalu.

Nepochybne dôležitým typom aditívnej funkcie intervalu je funkcia z príkladu 1 – teda určitý integrál. Vzniká teda otázka, či nemožno každú aditívnu funkciu intervalu vyjadriť pomocou integrálu. Pre isté typy aditívnych funkcií to je možné. Najprv tie funkcie zavedieme.

Definícia 2. Budeme hovoriť, že aditívna funkcia φ na intervale $\langle a, b\rangle$ má vlastnosť (m) vzhľadom na reálnu funkciu f definovanú na $\langle a, b\rangle$, ak funkcia f je taká, že pre každé $\langle u, v\rangle \subset \langle a, b\rangle$ platí $m(v - u) \le \varphi(\langle u, v\rangle) \le M(v - u)$, kde $m = \inf\limits_{x\in\langle u, v\rangle} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in\langle u, v\rangle} f(x)$.

POZNÁMKA 2. Niektorí autori nazývajú aditívnu funkciu s vlastnosťou (m) mediálnou vzhľadom na funkciu f.

Príklad 4. Určitý integrál uvažovaný ako funkcia intervalu $\langle u, v\rangle \subset \langle a, b\rangle$ (pozri príklad 1) je mediálna funkcia vzhľadom na funkciu f, ktorú integrujeme.

Skutočne, z nerovnosti $m \le f(x) \le M$ pre $x \in \langle u, v\rangle$ ako vieme platí $m(v - u) \le \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x \le M(v - u)$. Ďalšie príklady mediálnych funkcií uvedieme neskôr.

Veta 1. Nech φ je aditívna funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$, s vlastnosťou (m) vzhľadom na funkciu $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Potom pre každý interval $\langle u, v\rangle \subset \langle a, b\rangle$ platí

$$\varphi(\langle u, v\rangle) = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

D ô k a z . Nech $\langle u, v\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Uvažujme ľubovoľné delenie D toho intervalu $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Pretože $u = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = v$ máme z aditivity funkcie

$$\varphi(\langle u, v\rangle) = \varphi(\langle x_0, x_1\rangle) + \varphi(\langle x_1, x_2\rangle) + \ldots + \varphi(\langle x_{n-1}, x_n\rangle) \tag{1.1}$$

Podľa predpokladu (vlastnosť (m)) je

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \le \varphi(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) \le M_i(x_i - x_{i-1}) \tag{1.2}$$

pre $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $m_i = \inf\limits_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)$. Sčítaním nerovností (1.2) a využitím (1.1) dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \varphi(\langle u, v\rangle) \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \tag{1.3}$$

Na ľavej strane (1.3) je však ľubovoľný dolný súčet a na pravej strane ľubovoľný horný súčet, pretože delenie D bolo ľubovoľne zvolené. Odtiaľ teda dostávame $\underline{\int_u^v} f(x)\,\mathrm{d}\,x \le \varphi(\langle u, v\rangle) \le \overline{\int_u^v} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ a pretože f je na $\langle u, v\rangle$ integrovateľná, platí $\underline{\int_u^v} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \overline{\int_u^v} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}\,x$, teda $\varphi(\langle u, v\rangle) = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Podstata použitia metódy aditívnych funkcií na fyzikálne a geometrické aplikácie bude teda jednoduchá. Hneď ako sa o nejakej veličine presvedčíme, že je aditívnou funkciou intervalu a nájdeme takú reálnu funkciu, vzhľadom na ktorú má vlastnosť (m), použijeme na jej výpočet vetu 1. To, či je daná funkcia aditívna a vzhľadom na akú funkciu má vlastnosť (m), odpozorujeme z praxe. Urobíme teda akýsi postup, ktorý sa pri aplikáciách matematiky často používa, že situáciu „modelujeme“. V našom prípade bude model zvyčajne veľmi jednoduchý.

2 PLOŠNÝ OBSAH ROVINNÉHO ÚTVARU A OBJEM ROTAČNÉHO TELESA

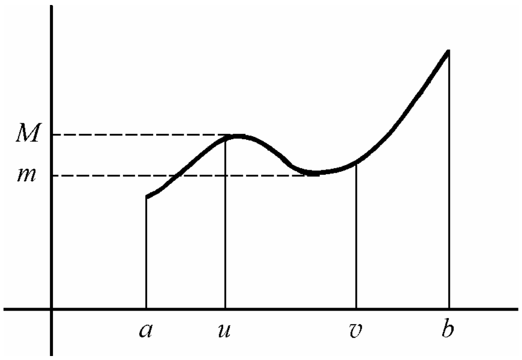
Pozrime sa teraz z trochu iného hľadiska na známu úlohu o výpočte plošného obsahu (pozri motivačný príklad na začiatku kapitoly 2.).

Je teda daná nezáporná spojitá funkcia f na intervale $\langle a, b\rangle$. Treba vypočítať plošný obsah útvaru ohraničeného grafom funkcie f priamkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (obr. 7). Predstavme si najprv, že taký obsah vieme počítať. Potom ho vieme počítať nad každým intervalom $\langle u, v\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Označme ho nad intervalom $\langle u, v\rangle$ znakom $P\langle u, v\rangle$. Skúsenosť nás poúča, že by malo platiť $P\langle u, v\rangle + P\langle v, w\rangle = P\langle u, w\rangle$ pre $u < v < w$, $u, v, w \in \langle a, b\rangle$. Tým máme vlastne definovanú aditívnu funkciu P intervalu na $\langle a, b\rangle$. Píšeme $P\langle u, v\rangle$ namiesto $P(\langle u, v\rangle)$.

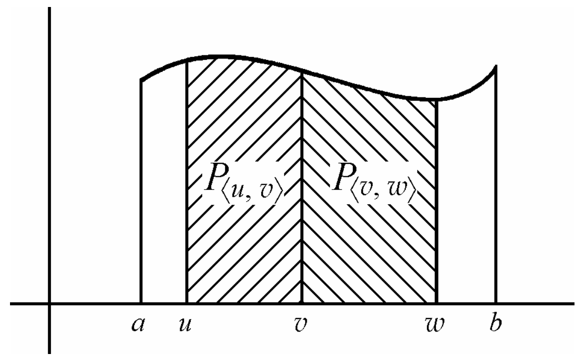
Prax nás však poúča ešte o jednej vlastnosti, ktorú by tá funkcia mala mať. Ak označíme $m = \inf\limits_{x\in\langle u, v\rangle} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in\langle u, v\rangle} f(x)$, je prirodzené žiadať (pozri obr. 6), aby

$$m(v - u) \le P\langle u, v\rangle \le M(v - u) \tag{2.1}$$

To je vlastne len akási prirodzená požiadavka, ktorú očakávame, že plošný obsah vpísaného obdĺžnika do istého útvaru by nemal byť väčší ako plošný obsah toho útvaru. Podobne je to s opísaným obdĺžnikom.



Obr. 6



Obr. 7

Nerovnosť (2.1) však hovorí len to, že funkcia P má vlastnosť (m) vzhľadom na funkciu f.

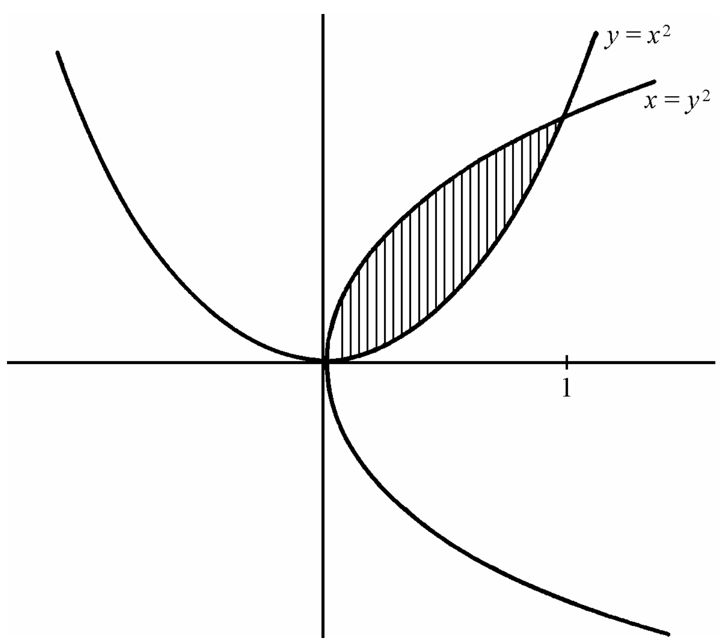
Situáciu sme teda akýmsi spôsobom „modelovali" a teraz by mala prísť na rad presná matematika. Úvahy nás oprávňujú zaviesť takúto definíciu.

Definícia 1. Plošným obsahom útvaru ohraničeného grafom funkcie f, priamkou $x = a$, $x = b$, $y = 0$ nazývame hodnotu $P\langle a, b\rangle$ aditívnej funkcie intervalu na $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom na f.

Veta 1. Nech f je nezáporná spojitá funkcia definovaná na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom plošný obsah $P\langle a, b\rangle$ útvaru určeného jej grafom a priamkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ existuje a platí $P\langle a, b\rangle = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D ô k a z . To, že aditívna funkcia P na $\langle a, b\rangle$ mediálna vzhľadom na f existuje, je zrejmé, lebo takou funkciou je integrál ako funkcia intervalu na $\langle a, b\rangle$. To, že to nemôže byť iná funkcia, vyplýva z vety 1.1.

POZNÁMKA 1. Využitím aditivity plošného obsahu možno prirodzeným spôsobom dôjsť tiež k výpočtu plošného obsahu útvaru ohraničeného grafom dvoch spojitých funkcií f, g na $\langle a, b\rangle$, pre ktoré $f(x) \leq g(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$. Pre taký prípad by príslušný plošný obsah bol daný číslom $\int_a^b (g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$.



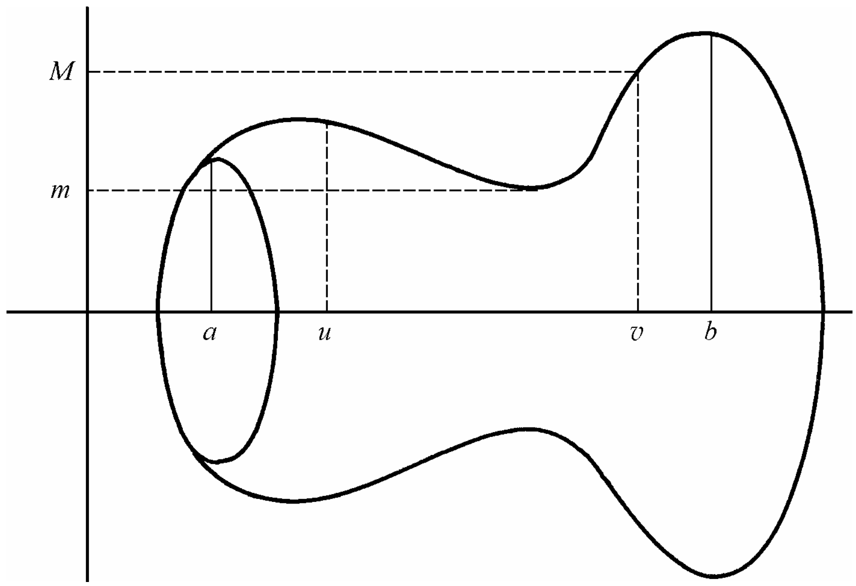
Obr. 8

Príklad 1. Vypočítajte plošný obsah útvaru ohraničeného krivkami $y = x^2$ a $x = y^2$. Máme teda množinu bodov ohraničenú grafmi funkcií $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$ na $\langle 0,\, 1\rangle$ (pozri obr. 8). Ak označíme ten plošný obsah c, máme

$$c = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Postup, ktorým sme riešili otázku plošného obsahu nám umožní riešiť aj iné úlohy geometrického rázu. Uvedieme ďalšiu, ale budeme už stručnejší.

Budeme definovať a vypočítame objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou krivky danej grafom funkcie f na intervale $\langle a,\, b\rangle$ (obr. 9). Poučení predošlou úlohou pristúpme hneď k definícii.



Obr. 9

Definícia 2. Objemom rotačného telesa vytvoreného rotáciou plochy ohraničenej grafom funkcie f na $\langle a,\, b\rangle$ nazývame hodnotu $V\langle a,\, b\rangle$ aditívnej funkcie V na intervale $\langle a,\, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom k funkcii πf^2.

Aditivita V je v povahe veci. Zasluhuje si, pravdaže, poznámku to, odkiaľ sme prišli práve k funkcii πf^2. To je však jednoduché. Pri rotácii plochy určenej grafom f na $\langle a,\, b\rangle$ nechajme rotovať aj obdĺžnik so základňou $m = \inf\limits_{x \in \langle u,\, v\rangle} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in \langle u,\, v\rangle} f(x)$, $\langle u,\, v\rangle \subset \langle a,\, b\rangle$. Dostaneme valec vpísaný do časti rotačného telesa nad intervalom $\langle u,\, v\rangle$ objemu $\pi m^2(v - u)$ resp. valec opísaný v tej časti s objemom $\pi M^2(v - u)$.

Ak označíme $V\langle u,\, v\rangle$ objem časti rotačného telesa nad ľubovoľným intervalom $\langle u,\, v\rangle$ je prirodzené žiadať

$$\pi m^2(v - u) = V\langle u,\, v\rangle = \pi M^2(v - u) \tag{2.2}$$

Nerovnosti (2.2) však znamenajú, že aditívna funkcia V má vlastnosť (m) vzhľadom na funkciu $\pi f^2(x)$.

Veta 2. Nech f je nezáporná spojitá funkcia definovaná na intervale $\langle a,\, b\rangle$. Potom objem $V\langle a,\, b\rangle$ rotačného telesa vytvoreného rotáciou plochy, ktorú ohraničuje f na $\langle a,\, b\rangle$ existuje a platí

$$V\langle a,\, b\rangle = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Dôkaz je znovu zrejmý tak ako vo vete 1.

POZNÁMKA 2. Prípad, keď rotačné teleso vznikne rotáciou plochy ohraničenej dvoma spojitými nezápornými funkciami f, g definovanými na $\langle a, b\rangle$ a takými, že $f(x) \le g(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$ sa rieši obdobne a je daný číslom $\pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))\,\mathrm{d}x$.

Príklad 2. Vypočítať objem $V\langle a, b\rangle$ telesa, ktoré vznikne pri rotácii kriviek $y = x^2$ a $x = y^2$ okolo osi x.

Ak zvážime, že ide o funkciu $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$ na $\langle 0, 1\rangle$ (pozri obr. 8) máme

$$V\langle a, b\rangle = \pi \int_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{d}\,x = \frac{3\pi}{10}$$

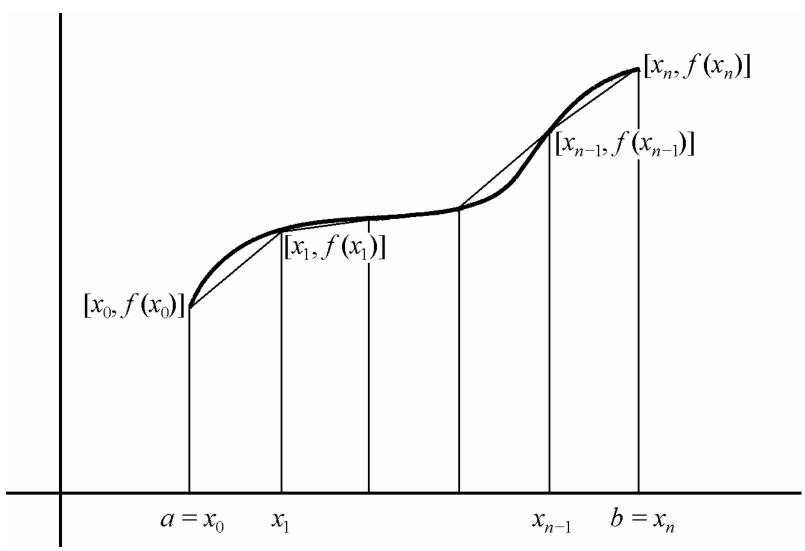
3 DĹŽKA ROVINNEJ KRIVKY. PLOŠNÝ OBSAH ROTAČNÉHO TELESA

Riešme teraz otázku výpočtu dĺžky rovinnej krivky (rektifikáciu rovinnej krivky). Použitie vety 1.1 pre tento výpočet nie je už také bezprostredné ako pri predchádzajúcich aplikáciách. Z tohto dôvodu, ale najmä preto, aby sme uviedli aj inú metódu, zvolíme teraz iný známy prístup.

Predpokladajme, že je daná rovinná krivka grafom funkcie f definovanej na intervale $\langle a, b\rangle$. Nech f má spojitú deriváciu na $\langle a, b\rangle$. Ak $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$, možno vytvoriť lomenú čiaru (pozri obr. 10) spájajúcu body $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Jej dĺžka

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

aproximuje to, čo si intuitívne predstavujeme pod dĺžkou krivky danej grafom funkcie f na $\langle a, b\rangle$. Je preto prirodzená táto definícia.



Obr. 10

Definícia 1. Nech f a f' sú spojité na $\langle a, b\rangle$. Nech je daná ľubovoľná postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle a, b\rangle$ taká, že príslušná postupnosť noriem konverguje k nule. Nech δ_k je dĺžka lomenej čiary utvorenej pomocou delenia D_k a funkcie f. Potom číslo $d = \lim\limits_{k\to\infty} \delta_k$ nazývame dĺžkou krivky danej grafom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Veta 1. Nech f a f' sú na $\langle a, b\rangle$ spojité. Potom dĺžka d krivky danej grafom funkcie f na $\langle a, b\rangle$ existuje a platí $d = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}\,x$

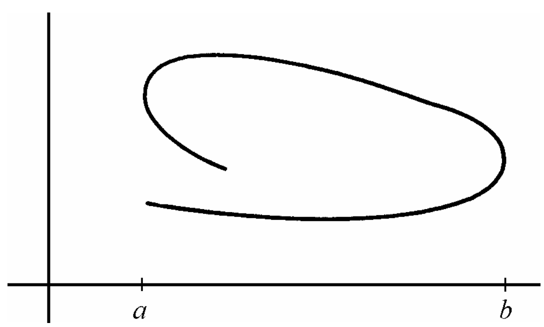
D ô k a z . Pre dané k zvoľme delenie D_k. Toto delenie má $n + 1$ ($n = n(k)$) deliacich bodov. Dĺžka δ_k príslušnej lomenej čiary je $\delta_k = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$. Použitím Lagrangeovej vety na funkciu f na intervaloch $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a ďalšou úpravou dostávame

$$\delta_k = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

kde $x_{i-1} < c_i < x_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.

Teda δ_k nie je nič iné ako integrálny súčet patriaci k deleniu D_k a k funkcii $\sqrt{1+(f'(x))^2}$. Táto funkcia je však integrovateľná, teda podľa vety 2.5.2 $\lim_{k\to\infty} \delta_k = d$ existuje a $d = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}\,x$.

POZNÁMKA 1. Prístup, ktorý sme tu použili na výpočet dĺžky rovinnej krivky možno zovšeobecniť v rôznych smeroch. Jedno zovšeobecnenie súvisí so samotným pojmom krivky. My sme krivku uvažovali vo veľmi špeciálnom tvare, pretože sme ju považovali za graf funkcie (spĺňajúcej isté vlastnosti) na intervale $\langle a, b\rangle$. prístup je veľmi špeciálny, pretože už veľmi jednoduché krivky nie sú takého tvaru (pozri napr. obr. 11). Nebudeme sa tu však podrobnou diskusiou takých prípadov zaoberať. Uvedieme len ako fakt jednu všeobecnejšiu situáciu. Prístup k odvodeniu vzorca, ktorý tu uvedieme by bol podobný ako v prípade krivky danej grafom funkcie.



Obr. 11

Definícia 2. Budeme hovoriť, že nejaká množina bodov (x, y) je parametricky danou rovinnou krivkou, ak je to množina takých dvojíc (x, y), pre ktoré platí $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde φ a ψ sú spojité funkcie definované na intervale $\langle \alpha, \beta\rangle$ majúce spojité derivácia φ' a ψ' na $\langle \alpha, \beta\rangle$.

Bez toho, aby sme definovali pojem dĺžky takto zavedenej krivky (urobilo by sa to podobne ako predtým), vyslovíme bez dôkazu vetu:

Veta 2. Nech je daná parametrický rovinná krivka pomocou funkcií φ, ψ, ktoré sú definované na intervale $\langle \alpha, \beta\rangle$ a majú tam spojitú deriváciu. Potom pre jej dĺžku d platí $d = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}\,t$.

Príklad 2. Vypočítať dĺžku krivky (cykloidy) danej parametrický na intervale $\langle 0, 2\pi\rangle$ funkciami $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = 2a\sin\frac{t}{2}\text{, teda } d = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\,t = \left[-4a\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a\,.$$

Položme si teraz úlohu vypočítať povrch rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou krivky danej grafom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$. Pod povrchom takého rotačného telesa rozumieme iba jeho „plášť“, teda časť povrchu bez kruhových podstáv. Predpokladáme, že f je nezáporná spojitá a má spojitú deriváciu. Pretože mienime na túto úlohu použiť takú metódu ako na výpočet dĺžky rovinnej čiary, nebudeme sa zaoberať podrobnosťami. Pripomenieme len, že tak ako v prípade dĺžky rovinnej čiary (pozri obr. 10), by sme utvorili lomenú čiaru patriacu k deleniu $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Podobne, ako sme definovali dĺžku krivky „limitným prechodom cez dĺžky lomených čiar“, definovali by sme veľkosti povrchu daného rotačného telesa limitným prechodom cez povrch rotačných telies vytvorených tými lomenými čiarami. Výsledok je takýto:

Veta 3. Plošný obsah S rotačného telesa vytvoreného rotáciou krivky danej grafom nezápornej funkcie $y = f(x)$ so spojitou deriváciou $f'(x)$ na intervale $f(x)$ je daný vzorcom

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}\,x$$

POZNÁMKA 3. Podobne ako v prípade dĺžky rovinnej krivky je možná všeobecnejší variant vety 3, ak je krivka daná parametrickými rovnicami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde φ, ψ majú spojité derivácie na intervale $\langle \alpha, \beta\rangle$. Vtedy pre plošný obsah S platí $2\pi\int_a^b |\psi(t)|\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}\,t$.

Príklad 3. Vypočítať plošný obsah S rotačnej plochy vytvorenej rotáciou krivky danej parametricky funkciami $x = \mathrm{e}^t \sin t$, $y = \mathrm{e}^t \cos t$ na intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

$$S = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \cos t\sqrt{(\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t)^2+(\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t)^2}\,\mathrm{d}\,t = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\cos t\sqrt{2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}\,t = 2\pi\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2t}\cos t\,\mathrm{d}\,t$$

Po použití metódy integrovanie per partes dostaneme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2t}\cos t\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{\mathrm{e}^{2t}(\sin t+2\cos t)}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}-2}{5}$,

teda $S = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(\mathrm{e}^{\pi}-2)$.

4 UKÁŽKY FYZIKÁLNYCH APLIKÁCIÍ

Uvedieme na ilustráciu dve fyzikálne aplikácie. V prvej ukážeme, že k nim tiež možno pristupovať metódou založenou na použití vety 1.1, v ďalšej uvedieme iný prístup. Pôjde skutočne len o ukážku. Množstvo ďalších použití si však možno precvičiť na cvičeniach uvedených za týmto článkom a v rozličných zbierkach úloh.

Ako prvú zo spomínaných aplikácií doriešme úlohu naznačenú v príklade 1.3, kde ide o výpočet hmotnosti drôtu umiestneného na intervale $\langle a, b\rangle$. Predpokladajme, že hustota je daná spojitou funkciou $\rho(x)$. Ak hmotnosť časti umiestnenej na $\langle u, v\rangle \subset \langle a, b\rangle$ označíme $h(\langle u, v\rangle)$ (krátko $h\langle u, v\rangle$), tak máme definovanú funkciu intervalu h na $\langle a, b\rangle$, o ktorej je prirodzené predpokladať, že je aditívna. Podľa fyzikálnych skúseností by malo platiť

$$m(v-u) \le h\langle u, v\rangle \le M(v-u) \tag{4.1}$$

kde $m = \inf\limits_{x\in\langle u, v\rangle} \rho(x) = \min\limits_{x\in\langle u, v\rangle} \rho(x)$, $M = \sup\limits_{x\in\langle u, v\rangle} \rho(x) = \max\limits_{x\in\langle u, v\rangle} \rho(x)$

Podmienka (4.1) je skutočne prirodzená, pretože žiada vlastne iba to, aby hmotnosť časti drôtu na intervale $\langle u, v\rangle$ nebola menšia ako hmotnosť takej istej veľkej časti s konštantnou hustotou rovnou najmenšej hodnote hustoty $\rho(x)$, kde $x \in \langle u, v\rangle$. Vychádzame totiž z prirodzenej požiadavky, že hmotnosť lineárneho útvaru a konštantnou hustotou je rovná súčinu dĺžky a príslušnej konštantnej hustoty. Ďalej podmienka (4.1) žiada, aby hľadaná hmotnosť nebola väčšia ako hmotnosť tak isto veľkej časti, ale s konštantnou hustotou, ktorá sa rovná maximálnej hodnote $\rho(x)$ na $\langle u, v\rangle$.

Záver týchto úvah je teda taký, že modelom hľadanej hmotnosti by mala byť aditívna funkcia na $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálnou (pozri (4.1) vzhľadom na hustotu $\rho(x)$. Ostáva už len vysloviť definíciu.

Definícia 1. Hmotnosťou $h\langle a, b\rangle$ rovného drôtu s koncovými bodmi $\langle a, b\rangle$ s hustotou $\rho(x)$, kde ρ je spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$ nazývame hodnotu $h\langle a, b\rangle$ takej aditívnej funkcie intervalu na $\langle a, b\rangle$, ktorá spĺňa (m) vzhľadom na funkciu $\rho(x)$.

Veta 1. Hmotnosť $h\langle a, b\rangle$ rovného drôtu s koncovými bodmi $\langle a, b\rangle$, ($a < b$) a hustotou danou spojitou funkciou $\rho(x)$ je daná vzťahom $h\langle a, b\rangle = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x$

D ô k a z . Je bezprostredným dôsledkom vety 1.1.

POZNÁMKA 1. Čitateľovi sa iste zdá znásilňovaním tak striktne definovať fyzikálne veličiny, ako je napríklad hmotnosť lineárneho útvaru a pod. Skutočne sa to pri troche skúseností ani nerobí a od takej definície sa upúšťa. Pri aplikáciách je podstatné, aby sme si uvedomili, že daná veličina je aditívna a našli funkciu, vzhľadom na ktorú je mediálna a urobili výpočet. My sme tu uvedený podrobný postup robili len preto, aby sme rozanalyzovali postup, ktorým spejeme k matematickému modelovaniu fyzikálnej skutočnosti. Ďalej preto nepôjdeme do takýchto podrobností a budeme postupovať voľnejšie.

Rozriešme teraz úlohu výpočtu hmotnosti rovinného útvaru ohraničeného grafom nezápornej spojitej funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ ak hustota závisí len od súradnice x a je daná spojitou funkciou $\rho(x)$. Ak označíme tú hmotnosť H a použijeme analogický postup ako v predošlom príklade dostaneme

$$H = \int_a^b f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Ako ilustráciu na ďalšiu aplikáciu uveďme výpočet momentu (statického momentu) a súradníc ťažiska rovinného útvaru. Je tu znova možnosť použiť prístup cez vetu 1.1. Uvedieme však prístup zdanlivo trochu iného typu, ktorý sa bežne vo fyzikálnych aplikáciách používa. Obmedzíme sa na podstatu postupu, vynecháme definície a formálne formulácie výsledkov.

Uvažujme pravouhlý súradnicový systém. Moment (statický moment) hmotného bodu s hmotnosťou m umiestneného v bode (x, y) vzhľadom na os y sa zavádza ako súčin mx, teda súčin hmotnosti m a vzdialenosti od osi y. Podobne sa zavádza moment vzhľadom na os x. Moment sústavy hmotných bodov $m_1, m_2, \ldots, m_n$ umiestnených po rade v bodoch $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ vzhľadom na os y sa zavádza ako $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ a vzhľadom na os x $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$. Vychádza sa pritom z faktu, že statický moment je veličina aditívna. Súradnice bodu (x_T, y_T), ktorý by mal byť ťažiskom takej sústavy, sa zavádzajú tak, že to má byť bod, v ktorom sústredená celková hmotnosť $m_1 + m_2, + \ldots + m_n$ má ten istý moment ako daná sústava. Teda $(m_1 + m_2, + \ldots + m_n)x_T = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, $(m_1 + m_2, + \ldots + m_n)y_T = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$. Odtiaľ

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Tieto úvahy sa využijú na výpočet momentov a súradníc ťažiska rovinných útvarov. Aj keď budeme využívať aditivitu, budeme tu postupovať metódou postupností delení.

Uvažujme teda rovinný útvar ohraničený grafom nezápornej spojitej funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a priamkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Pre jednotnosť nech hustota ρ je konštantná. Počítajme moment na os y.

Zvoľme postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, aby postupnosť noriem konvergovala k nule. Pre dané k nech delenie D_k má $n + 1$ deliacich bodov $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$ (n závisí od k). Moment časti útvaru, ktorý leží nad intervalom $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ môžeme aproximovať momentom obdĺžnikového útvaru so základňou $(x_i - x_{i-1})$ a výškou $f(c_i)$, kde $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Pritom hmotnosť tej časti je $\rho f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ a celú časť umiestnime do vzdialenosti c_i od osi y. Teda príslušná aproximácia bude daná číslom $\rho c_i f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ a celková aproximácia momentu S_y vzhľadom na os y bude daná číslom (využívame aditivitu!) $\sum_{i=1}^{n} \rho c_i f(c_i)(x_i - x_{i-1})$. To je však integrálny súčet patriaci k funkcii $\rho x f(x)$ a deleniu D_k. Pretože funkcia $\rho x f(x)$ je spojitá, a teda integrovateľná, existuje (veta 2.5.2) limita tejto postupnosti a je rovná $\int_a^b \rho x f(x)\,\mathrm{d}x$.

Túto limitu je prirodzené považovať za statický moment S_y daného útvaru vzhľadom na os y. Platí teda $S_y = \int_a^b \rho x f(x)\,\mathrm{d}x$.

Podobné úvahy vedú ku vzorcu pre statický moment S_x toho útvaru vzhľadom na os x. Ten je daný vzorcom $S_x = \dfrac{1}{2}\int_a^b \rho f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Odtiaľ už súradnice ťažiska, podľa toho čo bolo povedané na začiatku našich úvah sú

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{S_y}{m}, \quad y_{\mathrm{T}} = \frac{S_x}{m}$$

kde $m = \int_a^b \rho f(x)\,\mathrm{d}x$ hmotnosť uvažovaného útvaru.

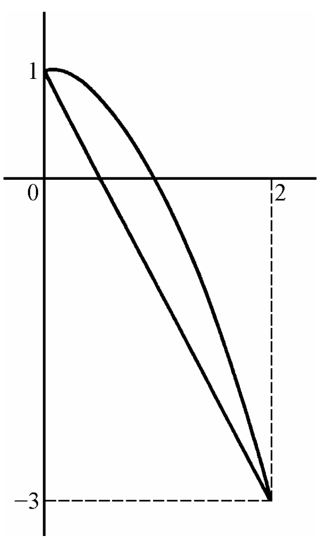
POZNÁMKA 2. Využitím aditivity môžeme počítať aj momenty resp. iné aditívne veličiny pre útvary ohraničené nielen grafom funkcie f, ale napr. grafmi dvoch funkcií f, g na $\langle a, b\rangle$ pričom $f(x) \le g(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$.

Pre taký prípad pre momenty dostávame

$$S_y = \int_a^b \rho x[g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x, \quad S_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho[g^2(x) - f^2(x)]\,\mathrm{d}x$$

Súradnice ťažiska dostaneme potom obvyklou metódou.

Príklad 1. Vypočítať statické momenty a súradnice ťažiska rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcie $g(x) = 1 - x^2$ a $f(x) = 1 - 2x$ (obr. 12).



Obr. 12

Keďže ide o útvar ohraničený grafmi uvedených funkcií na intervale $\langle 0, 2\rangle$ pričom $f(x) \le g(x)$ pre $x \in \langle 0, 2\rangle$. Máme

$$S_x = \frac{1}{2}\rho\int_0^2 [(1-x^2)^2 - (1-2x)^2]\,\mathrm{d}x = \frac{\rho}{2}\int_0^2 [(x^4 - 6x^2 + 4x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\rho}{2}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{6x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{-4\rho}{5}$$

$$S_y = \rho\int_0^2 x[(1-x^2) - (1-2x)]\,\mathrm{d}x = \rho\int_0^2 x(2x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{4\rho}{3}$$

Hmotnosť m je daná vzorcom

$$m = \rho\int_0^2 x[(1-x^2) - (1-2x)]\,\mathrm{d}x = \frac{4\rho}{3}$$

teda $x_{\mathrm{T}} = \dfrac{S_y}{m} = 1$, $\quad y_{\mathrm{T}} = \dfrac{S_x}{m} = -\dfrac{3}{5}$

Cvičenia

1. Ukážte, že ku každej aditívnej funkcii φ intervalu na $\langle a, b\rangle$ existuje taká funkcia f definovaná na intervale $\langle a, b\rangle$, že pre každé $\langle u, v\rangle \subset \langle a, b\rangle$ je $\varphi(\langle u, v\rangle) = f(v) - f(u)$.

2. Je funkcia f z cvičenia 1 jednoznačne určená?

3. Dokážte, že keď f má na $\langle a, b\rangle$ ohraničenú deriváciu, tak aditívna funkcia φ určená pomocou f tak, že $\varphi(\langle u, v\rangle) = f(u) - f(v)$ pre $\langle u, v\rangle \subset \langle a, b\rangle$ má vlastnosť (m) vzhľadom na f'.

4. Odvoďte vzorec pre výpočet plošného obsahu elipsy.

5. Odvoďte vzorec pre výpočet objemu guľového odseku.

6. Udajte vhodný prístup na to, ako zaviesť a vypočítať súradnice ťažiska útvaru určeného grafom spojitej funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Kapitola IV.

FUNKCIE S OHRANIČENOU VARIÁCIOU. RIEMANNOV STIELTJESOV INTEGRÁL

1 POJEM FUNKCIE S OHRANIČENOU VARIÁCIOU A ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI

Napriek tomu, že celý rad úloh možno riešiť pomocou Riemannovho integrálu, ukazuje sa, že pri riešení viacerých problémov vedúcich na použitie integrálu je prirodzené jedno pomerne jednoduché zovšeobecnenie. Toto vedie na teóriu Riemannovho Stieltjesovho integrálu. Nebudeme tu systematicky vykladať teóriu Riemannovho Stieltjesovho Integrálu. Naznačíme v čom spočíva a dokážeme niektoré tvrdenia. Uvedieme pritom ako sa pri jeho definícii uplatňujú funkcie s ohraničenou variáciou. Pretože tieto funkcie sú dôležitou množinou funkcií, dokážeme viaceré ich vlastnosti a preskúmame ich vzťah k niektorým iným dôležitým typom funkcií.

Definícia 1. Nech f je funkcia definovaná na intervale $\langle a, b\rangle$. Pre ľubovoľné delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, kde $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$ utvorme súčet $\sum\limits_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1})|$. Ak existuje konštanta K tak, že pre každé delenie D je $\sum\limits_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1})| \le K$ hovoríme, že f má ohraničenú variáciu. Pritom kladieme $V(f, a, b) = \sup\limits_{D} \sum\limits_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1})|$ a číslo $V(f, a, b)$ nazývame variáciou (niekedy tiež totálnou variáciou) funkcie f na $\langle a, b\rangle$.

Veta l. Postačujúca podmienka na to, aby funkcia f mala ohraničenú variáciu na $\langle a, b\rangle$ je, aby bola monotónna. Potom je $V(f, a, b) = |f(b) - f(a)|$.

D ô k a z . Ak f je neklesajúca, máme pre ľubovoľné delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$

$$\sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1})| = (f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \ldots + (f(x_n) - f(x_{n-1})) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|$$

ak je nerastúca je

$$\sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1})| = (f(x_0) - f(x_1)) + (f(x_1) - f(x_2)) + \ldots + (f(x_{n-1}) - f(x_n)) = f(a) - f(b) = |f(b) - f(a)|$$

Teda $V(f, a, b) = \sup\limits_{D} \sum\limits_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f(b) - f(a)|$. Podmienka, aby f bola monotónna je len postačujúcou pre ohraničenosť variácie.

Príklad 1. Nech f je definovaná na $\langle 0, 1\rangle$ takto: $f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \langle 0, 1) \\ 0 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$. Funkcia f nie je monotónna. Pre ľubovoľné delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je

$$\sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1})| = (x_1 - 0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + |0 - x_{n-1}| = 2x_{n-1} \le 2$$

Teda $\sup\limits_{D} \sum\limits_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1})| \le 2$, to znamená, že f je funkcia s ohraničenou variáciou $V(f, 0, 1) = 2$, (pozri cvičenie 1.).

Nevyhnutnou podmienkou k ohraničenosti variácie je ohraničenosť funkcie.

Veta 2. Ak funkcia f má na $\langle a, b\rangle$ ohraničenú variáciu, tak je ohraničená.

D ô k a z . Nech f má na $\langle a, b\rangle$ ohraničenú variáciu. Nech $x \in \langle a, b\rangle$ je ľubovoľne zvolené. Zoberme také delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$, že x je medzi deliacimi bodmi $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Nech napríklad $x = x_k$. Potom $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_k) - f(x_0)| \le \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le V(f, a, b)$. Teda

$$V(f, a, b) - f(x_0) \le f(x) \le V(f, a, b) + f(x_0) \tag{1.1}$$

pre každé $x \in \langle a, b\rangle$. Vzťah (1.1) teda ukazuje, že f je na $\langle a, b\rangle$ ohraničená.

Ohraničenosť funkcie f nie je však postačujúcou podmienkou k tomu, aby f mala na $\langle a, b\rangle$ ohraničenú variáciu.

Príklad 2. Nech f je Dirichletova funkcia na $\langle 0, 1\rangle$ teda $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \text{ racionálne} \\ 0 & \text{pre } x \text{ iracionálne} \end{cases}$. Je vidieť, že f je ohraničená na $\langle 0, 1\rangle$.

Vždy môžeme zvoliť delenie D intervalu $\langle 0, 1\rangle$ tak, že $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ pričom $0 = x_0$, x_1 je iracionálne, x_2 racionálne, x_3 iracionálne atď. Potom však

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} 1 = n \tag{1.2}$$

Teda k ľubovoľnému prirodzenému číslu n možno utvoriť delenie D tak, že platí (1.2). Odtiaľ vyplýva, že neexistuje K tak, aby platilo $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le K$ pri ľubovoľnom delení D. Teda f nemá ohraničenú variáciu. Na rozdiel od monotónnych funkcií je množina funkcií s ohraničenou variáciou uzavretá vzhľadom na tvorenie lineárnych kombinácií. Upresňuje a zahrnuje to táto veta:

Veta 3. Nech f, g sú funkcie s ohraničenou variáciou na $\langle a, b\rangle$. Potom aj $f \pm g$ a fg má ohraničenú variáciu.

D ô k a z . Nech $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} |(f \pm g)(x_i) - (f \pm g)(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |[f(x_i) - f(x_{i-1})] \pm [g(x_i) - g(x_{i-1})]| \le \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \le V(f, a, b) + V(g, a, b) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Pretože delenie D bolo volené ľubovoľne, prechodom k supremu v (1.3) dostaneme

$$V(f + g, a, b) = V(f, a, b) + V(g, a, b)$$

teda $f + g$ má ohraničenú variáciu.

Pristúpme teraz k súčinu fg. Z vety 2 vyplýva, že f aj g sú ohraničené na $\langle a, b\rangle$, teda $|f(x)| \le K$, $|f(x)| \le L$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$. Ak uvážime, že $f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1}) = f(x_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + g(x_{i-1})[f(x_i) - f(x_{i-1})]$ máme

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \le K \sum_{i=1}^{n} |[g(x_i) - g(x_{i-1})]| + L \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le \\ &\le K\, V(g, a, b) + L\, V(f, a, b) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Prechodom k supremu cez všetky možné delenia intervalu $\langle a, b\rangle$ dostaneme zo vzťahu (1.4), že fg má ohraničená variáciu.

Ak f je pevne daná na $\langle a, b\rangle$ a má ohraničenú variáciu $V(f, a, b)$, tak priamo z definície je zrejmé, že má ohraničenú variáciu na ľubovoľnom podintervale intervalu $\langle a, b\rangle$. Navyše pri pevnom f je variácia aditívnou funkciou intervalu.

Veta 4. Nech f má na $\langle a, b\rangle$ ohraničenú variáciu. Nech $x, y \in \langle a, b\rangle$, pričom $a \leq x < y \leq b$. Potom $V(f, a, y) = V(f, a, x) + V(f, x, y)$.

D ô k a z . Nech $\varepsilon > 0$. Zvolíme také delenie D intervalu $\langle a, y\rangle$, že

$$V(f, a, y) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | \leq V(f, a, y) \tag{1.5}$$

To je možné z vlastnosti suprema. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že x je jeden z deliacich bodov toho delenia, pretože ak nie je, môžeme ho pridať a (1.5) ostane v platnosti. Potom však súčet v (1.5) možno rozdeliť na dve časti

$$\sum_{i=1}^{k} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | + \sum_{i=k+1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) |$$

kde k je ten index, pre ktorý $x = x_k$. Pritom $D_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ je delenie intervalu $\langle a, x\rangle$ a $D_2 = \{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_k\}$ je delenie intervalu $\langle x, y\rangle$. Teda (1.5) možno upraviť takto

$$V(f, a, y) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{k} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | + \sum_{i=k+1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | \leq V(f, a, y) \tag{1.6}$$

Ak v (1.6) prejdeme k supremu, dostaneme

$$V(f, a, y) - \varepsilon \leq V(f, a, x) + V(f, x, y) \leq V(f, a, y) \tag{1.7}$$

Pretože ε v (1.7) je ľubovoľné, dostaneme prechodom k limite pre ε k nule

$$V(f, a, y) = V(f, a, x) + V(f, x, y)$$

POZNÁMKA 1. Ak má funkcia f ohraničenú variáciu $V(f, a, b)$, tak funkcia $v_f(x) = V(f, a, x)$ je zrejme neklesajúca funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$. To bezprostredne vyplýva z vety 4 a z toho, že $V(f, c, d)$ je nezáporná na ľubovoľnom intervale $\langle c, d\rangle$. (Pritom kladieme $V(f, c, c) = 0$ pre ľubovoľné $c \in \langle a, b\rangle$.)

2 SÚVIS FUNKCIÍ S OHRANIČENOU VARIÁCIOU A MONOTÓNNYMI FUNKCIAMI

Videli sme že monotónnosť nie je nevyhnutnou podmienkou pre ohraničenosť variácie (pozri príklad 1.1). Jednako však existuje dôležitá charakterizácia funkcií s ohraničenou variáciou pomocou monotónnych funkcií.

Veta 1. Funkcia f definovaná na $\langle a, b\rangle$ má ohraničenú variáciu na $\langle a, b\rangle$ vtedy a len vtedy ak existujú neklesajúce funkcie g, h definované na intervale $\langle a, b\rangle$ tak, že $f(x) = g(x) - h(x)$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$.

D ô k a z . Postačujúca podmienka je zrejmá z vety 1.1 a 1.3.
Obrátene, nech f je s ohraničenou variáciou na $\langle a, b\rangle$. Definujme

$$h(x) = V(f, a, x) - f(x) \tag{2.1}$$

Funkcia h je neklesajúca, pretože pre $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ platí

$$h(x_2) - h(x_1) = V(f, a, x_2) - f(x_2) - V(f, a, x_1) + f(x_1) = V(f, x_1, x_2) - [f(x_2) - f(x_1)] \tag{2.2}$$

Keďže z definície variácie je bezprostredne vidieť, že $f(x_2) - f(x_1) \leq V(f, x_1, x_2)$ dostávame z (2.2) $h(x_2) - h(x_1) \geq 0$, teda $h(x_2) \leq h(x_1)$.
Z (2.1) však dostávame $f(x) = V(f, a, x) - h(x)$. Stačí teda za funkciu g zobrať $g(x) = V(f, a, x)$. O nej už vieme, že je neklesajúca.

Veta 2. Ak f je spojitá funkcia a ohraničenou variáciou na $\langle a, b\rangle$, tak existujú neklesajúce spojité funkcie g, h také, že $f(x) = g(x) - h(x)$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$.

D ô k a z . Z toho, ako boli zavedené funkcia g, h vo vete 1 vidieť, že nám stačí dokázať, že za predpokladu, že f je spojitá, je spojitá aj funkcia $V(f, a, x)$. Označme $F(x) = V(f, a, x)$, Nech $x_0 \in \langle a, b\rangle$, $a \le x_0 < b$. Budeme dokazovať spojitosť $F(x)$ sprava v bode x_0. Zvoľme $y > x_0$. Utvorme delenie intervalu $\langle x_0, y\rangle$ pomocou deliacich bodov $x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = y$ tak, aby

$$\sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1})| > V(f, x_0, y) - \frac{\varepsilon}{2} \ge V(f, x_0, x_1) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3}$$

To je možné urobiť, ak uvážime, ako je definované $V(f, x_0, x_1)$. Platí však

$$|f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_3) - f(x_2)| + \ldots + |f(y) - f(x_{n-1})| \le V(f, x_1, y) \tag{2.4}$$

Ak odčítame (2.4) od (2.3) dostaneme

$$|f(x_1) - f(x_0)| > V(f, x_0, y) - V(f, x_1, y) - \frac{\varepsilon}{2} = V(f, x_0, x_1) - \frac{\varepsilon}{2} = F(x_1) - F(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Dostávame teda

$$F(x_1) - F(x_0) < |f(x_1) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.5}$$

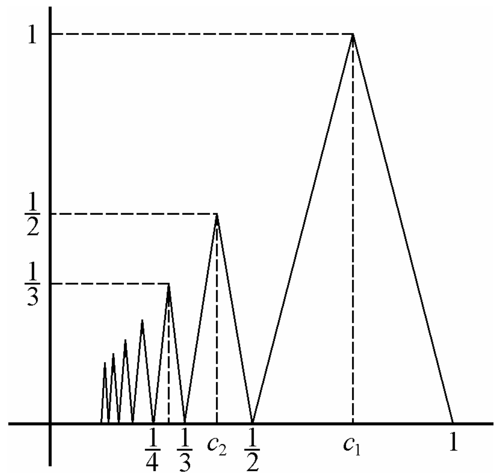
Vzhľadom na to, že f je spojitá sprava v bode x_0, možno voliť $x_1 > x_0$ tak, že $|f(x_1) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Z (2.5) teda dostaneme, že existuje $x_1 > x_0$ tak, že $F(x_1) - F(x_0) < \varepsilon$. Ak uvážime, že f je neklesajúca funkcia (porovnaj s vetou 4) vyplýva z toho už ľahko spojitosť sprava v bode x_0. Spojitosť zľava sa dokáže ľahšie. Ponecháme to na čitateľa.

POZNÁMKA 1. Iste nie je nezaujímavé preskúmať vzťah funkcií s ohraničenou variáciou k funkciám spojitým. Z jednej strany je zrejmé, že funkcia s ohraničenou variáciou nemusí byť spojitá. Ako príklad stačí zobrať napr. funkciu z príkladu 1. Možno však ukázať aj to, že funkcia spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ nemusí mať na tom intervale ohraničenú variáciu.

Príklad 1. Na intervale $\langle 0, 1\rangle$ uvažujme podintervaly $\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \rangle$ ($n = 1, 2,\ldots$). Definujme funkciu f na intervale $\langle 0, 1\rangle$ takto: v bode 0 položme $f(0) = 0$. Na každom intervale $\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \rangle$ (pozri obr. 13) definujeme f tak, že v koncových bodoch položíme $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. V strede intervalu, t. j. v bode $c_n = \dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$ definujeme $f(c_n) = \dfrac{1}{n}$.

V ostatných bodoch intervalu $\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \rangle$ ju definujeme tak, aby bola lineárna aj na intervale $\langle \frac{1}{n+1}, c_n \rangle$ aj na $\langle c_n, \frac{1}{n} \rangle$. Z definície je bezprostredne zrejmé, že f je spojitá v každom bode $x \in (0, 1\rangle$, pretože každý taký bod sa dostane do $\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \rangle$. Stačí ešte uvážiť, že je spojitá v bode 0 sprava. To sa však dá tiež ľahko overiť. Ak totiž zoberieme ľubovoľnú postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \ge 0$ takú, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, stačí ukázať, že $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = 0$. Zvoľme $\varepsilon > 0$ ak nemu n_0 tak, že $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pretože $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ máme $x_k < \dfrac{1}{n_0}$

pre $k \geq k_0$. Na takých bodoch x_k, pre ktoré $x_k < \dfrac{1}{n_0}$ podľa definície f nadobúda táto hodnoty $f(x_k)$ nepresahujúce $\dfrac{1}{n_0}$, teda $0 < f(x_k) < \dfrac{1}{n}$ pre $k \geq k_0$. Teda $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = 0 = f(0)$. Spojitosť v bode 0 je dokázaná.



Obr. 13

Funkcia f nemá ohraničenú variáciu na $\langle 0,\ 1\rangle$. Ak totiž zoberieme ľubovoľný interval $\langle \frac{1}{n},\ 1\rangle$, tak jednoduchý výpočet ukazuje (uvážme aditivitu variácie a to, že variáciu monotónnej funkcie vieme počítať), že

$$V\left(f, \frac{1}{n}, 1\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1 + 1 = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \tag{2.6}$$

Na pravej strane (2.6) máme čiastočný súčet divergentného radu (uvidíme to v príklade 5.1.2), teda pre ľubovoľné K možno voliť n tak, že ten súčet je väčší ako K. Teda $V\left(f, \frac{1}{n}, 1\right) > K$ pri dostatočne veľkom n. Odtiaľ vyplýva, že f nemôže mať na $\langle 0,\ 1\rangle$ konečnú variáciu $V(f, 0, 1)$, pretože by muselo platiť $V(f, 0, 1) > V\left(f, \frac{1}{n}, 1\right) > K$ pre ľubovoľné K, a to je spor.

3 RIEMANNOV STIELTJESOV INTEGRÁL

Na istú motiváciu zavedenia Riemannovho Stieltjesovho integrálu uvedieme veľmi jednoduchý príklad. Bude podobný príkladu 3.1.3, ktorým sme sa už zaoberali aj v odseku 3.4.

Príklad 1. Je daný rovný drôt umiestnený na intervale $\langle a,\ b\rangle$. Hustota však nebude tento raz daná spojitou funkciou $\rho(x)$. Budeme predpokladať, že na drôte sú akési „uzly“ resp. hmotné body význačnej hmotnosti. Pre jednoduchosť predpokladajme, že je len jeden taký „uzol“, napr. v strede intervalu a že má hmotnosť $c > 0$. (Pri inej fyzikálnej úvahe by to nemusel byť hmotný bod, ale napríklad nejaký elektrický náboj.) Úloha je vypočítať celkovú hmotnosť H toho drôtu.

Pripomeňme si postup ktorým sme táto úlohu riešili v 3.4 v tom prípade, keď tam „uzly“ neboli. Postup bol tento:

1. Konštatovali sme, že hmotnosť je aditívna funkcia intervalu $\mathrm{H}(\langle u, v\rangle)$.

2. Našli sme k nej mediálnu funkciu f.

3. Použili sme vetu 3.1.1 tvrdiacu, že za predpokladov 1. a 2. je hmotnosť $H(= H(\langle a, b\rangle))$ číselne daná Riemannovým integrálom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

V našom prípade tiež nemáme dôvod pochybovať o tom, že platí 1. Vyplýva to z fyzikálnej podstaty problému.

Platí však 2? Ak áno, tak pre ľubovoľný interval $\langle u, v\rangle \subset \langle a, b\rangle$ je

$$m(v-u) \le \mathrm{H}(\langle u, v\rangle) \le M(v-u) \tag{3.1}$$

kde $m = \inf_{x\in\langle u,\, v\rangle} f(x)$, $M = \sup_{x\in\langle u,\, v\rangle} f(x)$. Vzťah (3.1) teda platí aj pre každý taký interval $\langle u, v\rangle$, ktorý obsahuje bod $\dfrac{a+b}{2}$, v ktorom sa nachádza spomínaný bod s hmotnosťou $c > 0$. V tomto intervale však nevyhnutne musí byť $H(\langle u, v\rangle) \ge c$. To je však spor s (3.1), pretože stačí voliť $\langle u, v\rangle$ tak, aby bolo $M(v-u) < c$ a (3.1) už nemôže platiť. Podmienka 2. teda nie je splnená. Odtiaľ už ľahko vyplýva, že úlohu nemôžeme riešiť Riemannovým integrálom.

Problém spočíva v tom, že v našom prípade intervaly, ktorá vzniknú pri delení $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ by nemali k integrálnemu súčtu prispievať vždy „takým dielom“, aký zodpovedá ich dĺžke. Interval, v ktorom sa nachádza spomínaný hmotný bod, by sa mal podieľať „väčšou“ hodnotou. Tieto nepresné úvahy majú v sebe niečo dobrého, a to je, že si žiadajú spresnenie. Zdá sa, že by sme mali definovať namiesto súčtu $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ súčet $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$, kde g by bola vhodná funkcia, ktorá by charakterizovala „prínos“ intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Pri $g(x) = x$ by sme dostali známy súčet. Ak chceme ísť cestou horných a dolných súčtov, tak ako sme zavádzali Riemannov integrál, bolo by dobre, keby platilo $g(x_i) - g(x_{i-1}) \ge 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). To bude spĺňať každá neklesajúca funkcia. Teraz už robme presne.

Definícia 1. Ak g je neklesajúca funkcia na $\langle a, b\rangle$ a f ľubovoľná ohraničená funkcia na $\langle a, b\rangle$ položíme pri delení $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$$U(D, f, g) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta g_i\,, \qquad L(D, f, g) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta g_i$$

kde $\Delta g = g(x_i) - g(x_{i-1})$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, $M_i = \sup_{x\in\langle x_{i-1},\, x_i\rangle} f(x)$, $m_i = \inf_{x\in\langle x_{i-1},\, x_i\rangle} f(x)$. Ďalej označíme $\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g = \inf_D U(D, f, g)$, $\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g = \sup_D L(D, f, g)$. Ak platí $\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g = \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g$, označujeme túto hodnotu ako $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g$ alebo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)$ a nazývame Riemannovým Stieltjesovým integrálom funkcie vzhľadom na g na intervale $\langle a, b\rangle$.

POZNÁMKA 1. Množina všetkých funkcií f, pre ktoré pri danom g existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g$ označujeme $\mathscr{R}(g, \langle a, b\rangle)$. Ak $f \in \mathscr{R}(g, \langle a, b\rangle)$ hovoríme, že f je integrovateľná v Riemannovom Stieltjesovom zmysle. Ak $g(x) = x$ dostávame Riemannov integrál.

Tak ako vo vete 2.2.1 sa ľahko vidí, že množiny $U(D, f, g)$, $L(D, f, g)$ sú ohraničené množiny, teda že čísla $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ existujú. Rovnako ľahko vidieť, že pre $U(D, f, g)$, $L(D, f, g)$ platí analogické tvrdenie, ako vo vete 2.2.2. Potom však tiež tak isto, ako v dôkaze vety 2.2.5, možno postupovať v dôkaze nasledujúcej vety.

Veta 1. $f \in \mathscr{R}(g, \langle a, b\rangle)$ vtedy a len vtedy, ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje také delenie D, že $U(D, f, g) - L(D, f, g) < \varepsilon$

Ako dôsledok dostávame nasledujúce dve podmienky pre Riemannovskú Stieltjesovskú integrovateľnosť.

Veta 2. Ak f je monotónna na $\langle a, b\rangle$ a g neklesajúca a spojitá, tak $f \in \mathscr{R}(g, \langle a, b\rangle)$.

D ô k a z . Nech f je neklesajúca (prípad, že f je nerastúca, sa dokáže obdobne). Môžeme predpokladať, že $f(b) > f(a)$, pretože prípad $f(a) = f(b)$ je triviálny. Zvoľme také $\delta > 0$, že pre každé delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ také, že $n(D) < \delta$ je $|g(x_i) - g(x_{i-1})| < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. To je možné vzhľadom na rovnomerná spojitosť funkcie g. Potom

$$U(D, f, g) - L(D, f, g) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta g_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(b) - f(a)] = \varepsilon$$

Na dôkaz už stačí len použiť vetu 1.

Veta 3. Ak f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a g je neklesajúca, tak $f \in \mathscr{R}(g, \langle a, b\rangle)$.

D ô k a z . Nech $\varepsilon > 0$. Zvoľme $\eta > 0$ tak, že $\eta[g(b) - g(a)] < \varepsilon$. Pretože f je na $\langle a, b\rangle$ rovnomerne spojitá, existuje také $\delta > 0$, že ak j $|x - y| < \delta$, $x, y \in \langle a, b\rangle$, tak $|f(x) - f(y)| < \eta$. Ak teda $n(D) < \delta$, máme

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta g_i = \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - f(d_i)]\Delta g_i < \eta[g(b) - g(a)] < \varepsilon, \qquad c_i, d_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle, i = 1, 2, \ldots, n$$

Stačí už len použiť vetu 1,

Pre súčet a násobok funkcií patriacich do $\mathscr{R}(g, \langle a, b\rangle)$ platia analogické tvrdenia ako pre Riemannovsky integrovateľné funkcie. Analogické pravidlá platia aj vzhľadom na súčet a násobok funkcie, podľa ktorej sa integruje. Uvádzame ich v cvičení 9 a dôkaz nechávame na čitateľovi.

4 VYJADRENIE RIEMANNOVHO STIELTJESOVHO INTEGRÁLU POMOCOU RIEMANNOVHO INTEGRÁLU

V tomto článku ukážeme, že za istých predpokladov možno previesť Riemannov Stieltjesov integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ na Riemannov integrál. Formálny prepis bude vyzerať tak, že $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$, teda vlastne tak, akoby $\mathrm{d}g$ bol diferenciál funkcie g. Čitateľ si iste uvedomuje, že to vždy tak nemôže byť, pretože $\mathrm{d}g$ v Riemannovom Sieltjesovom integráli má len symbolický význam, keďže g nemusí mať vo všeobecnosti deriváciu. V istých prípadoch, ako ukážeme, ten význam prestane byť len symbolický.

Najprv ukážeme, se aj u Riemannovho Stieltjesovho integrálu možno ukázať istý súvis medzi limitami integrálnych súčtov a integrálom.

Definícia 1. Nech f je ohraničená funkcia a nech g je neklesajúca funkcia na $\langle a, b\rangle$. Integrálnym súčtom patriaci k deleniu $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ a funkcii f vzhľadom na funkciu g nazývame číslo $S(D, f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta g_i$. kde $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Píšeme $\lim_{n(D)\to 0} S(D, f, g) = A$, ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$ že pre všetky delenia D intervalu $\langle a, b\rangle$, pre ktoré $n(D) < \delta$ je $|S(D, f, g) - A| < \varepsilon$ pri ľubovoľnej voľbe bodov $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Hovoríme, že A je limitou integrálnych súčtov pre $n(D)$ konvergujúcu k nule.

Veta 1. Ak $\lim\limits_{n(D)\to 0} S(D, f, g)$ existuje, potom $f \in \mathscr{R}(g)$ a platí $\lim\limits_{n(D)\to 0} S(D, f, g) = \int_a^b f \mathrm{d}g$.

D ô k a z . Nech $\varepsilon > 0$. Ak $\lim\limits_{n(D)\to 0} S(D, f, g) = A$, potom existuje také $\delta > 0$, že $A - \frac{\varepsilon}{2} < S(D, f, g) < A + \frac{\varepsilon}{2}$ pre každé delenie D, pre ktoré $n(D) < \delta$. Pri pevnom takomto D, pre ktoré $n(D) < \delta$ platí teda

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < S(D, f, g) < A + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1}$$

pri ľubovoľnej voľbe deliacich bodov $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Ak teda urobíme supremum vzhľadom na všetky možné voľby deliacich bodov, dostaneme z (4.1)

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \le \sup_D S(D, f, g) \le A + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.2}$$

Podobne je to, ak urobíme namiesto suprema infimum, teda

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \le \inf_D S(D, f, g) \le A + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.3}$$

Pretože $\sup\limits_D S(D, f, g) = U(D, f, g), \inf\limits_D S(D, f, g) = L(D, f, g)$ (porovnaj so situáciou v dôkaze vety 2.5.1), dostávame pomocou (4.2) a (4.3)

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \le L(D, f, g) \le U(D, f, g) \le A + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4}$$

Z (4.4) a z vety 3.1 vyplýva, že $f \in \mathscr{R}(g)$ a vzhľadom na to, že $L(D, f, g) \le \int_a^b f \mathrm{d}g \le U(D, f, g)$ dostávame z (4.4) aj rovnosť $A = \int_a^b f \mathrm{d}g$.

Teraz už môžeme prejsť k sľúbenému vyjadreniu $\int_a^b f \mathrm{d}g$ pomocou Riemannovho integrálu.

Veta 2. Ak $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a ak neklesajúca funkcia g je diferencovateľná a $g'(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak $f \in \mathscr{R}(g, \langle a, b\rangle)$ a platí $\int_a^b f \mathrm{d}g = \int_a^b f(x) g'(x) \mathrm{d}x$.

D ô k a z . Nech $\varepsilon > 0$. Keďže $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $g'(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ dostávame z vety 2.4.7 že $fg' \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Z vety 2.5.1 teda dostávame, že existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pre ľubovoľné delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $n(D) < \delta_1$ platí pri $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle >$ ($i = 1, 2, \ldots, n$)

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i) g'(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x) g'(x) \, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon \tag{4.5}$$

Z tej istej vety a z integrovateľnosti g' dostaneme, že ak $n(D) < \delta_2$ pre $d_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ platí

$$\left| \sum_{i=1}^{n} g'(d_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g'(x) \, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon \tag{4.6}$$

Z (4.6) vyplýva, že pri voľbe $x_{i-1} \le c_i \le x_i$, $x_{i-1} \le d_i \le x_i$ je

$$\sum_{i=1}^{n} \left| g'(c_i) - g'(d_i) \right| (x_i - x_{i-1}) < 2\varepsilon \tag{4.7}$$

Z Lagrangeovej vety o strednej hodnote vyplýva, že v intervaloch $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ existujú body u_i tak, že $\Delta g_i = g'(u_i)(x_i - x_{i-1})$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Teda pre $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ a delenie D, pre ktoré $n(D) < \delta$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta g_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) g'(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} f(c_i)[g'(u_i) - g'(c_i)](x_i - x_{i-1}) \tag{4.8}$$

Z (4.5), (4.6) a (4.8) dostaneme, že

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta g_i - \int_a^b fg' \, \mathrm{d}x \right| < (2K+1)\varepsilon \tag{4.9}$$

kde $K = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x)|$. To znamená, že $\lim_{n(D)\to 0} S(D, f, g) = \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$, čo podľa vety 1 znamená, že $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$.

To, že sme vybudovali teóriu Riemannovho Stieltjesovho integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, kde g je neklesajúca funkcia, nám umožňuje použitím vety 2.1 tento integrál zovšeobecniť.

Definícia 2. Nech f je ohraničená funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$. Nech g je funkcia definovaná na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech má ohraničenú variáciu. Ak g_1, g_2 sú také neklesajúce funkcie na intervale $\langle a, b \rangle$, že $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ a ak $\int_a^b f\,\mathrm{d}g_1$ a $\int_a^b f\,\mathrm{d}g_2$ existujú, definujeme

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f\,\mathrm{d}g_1 - \int_a^b f\,\mathrm{d}g_2$$

Je ešte potrebné ukázať, že definícia 2 je korektná, teda že nezávisí od toho, akým spôsobom vyjadríme funkciu g pomocou monotónnych funkcií. To zaručí jednoduchá veta.

Veta 3. Nech f je ohraničená funkcia. Nech g je funkcia s ohraničenou variáciou na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech platí $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ pre $x \in \langle a, b \rangle$ pričom g_1, g_2 sú neklesajúce funkcie. Nech súčasne platí $g(x) = h_1(x) - h_2(x)$, kde h_1, h_2 sú neklesajúce funkcie. Potom $\int_a^b f\,\mathrm{d}g_1 - \int_a^b f\,\mathrm{d}g_2 = \int_a^b f\,\mathrm{d}h_1 - \int_a^b f\,\mathrm{d}h_2$. (Pravdaže predpokladáme, že $f \in \mathscr{R}(g_1), f \in \mathscr{R}(g_2), f \in \mathscr{R}(h_1), f \in \mathscr{R}(h_2)$.)

D ô k a z . Vyplýva z rovnosti $g_1 + h_2 = g_2 + h_1$ a z vety o integrovaní súčtu funkcií (cvičenie 9).

POZNÁMKA 1. Z toho, čo sme dokázali pre Riemannove Stieltjesove integrály $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, kde g je neklesajúca sa mnohé prenesie na prípad, keď g je s ohraničenou variáciou. Tak napr. je zrejmé, že $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje, ak f je spojitá a g s ohraničenou variáciou a tiež to, že $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje, ak f je monotónna a g spojitá s ohraničenou variáciou. (Porovnaj a vetami 3.2 a 3.3.)

Cvičenia

1. Dokážte, že funkcia f v príklade 1.1 má variáciu rovnú 2.

2. Dokážte, že ak f má ohraničenú variáciu na $\langle a, b \rangle$ a $|f(x)| \geq \delta > 0$ pre každé $x \in \langle a, b \rangle$, tak aj funkcia $1/f$ má na $\langle a, b \rangle$ ohraničenú variáciu.

3. Vypočítajte $V(f, 0, 3)$ ak $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

4. Ukážte, že ak funkcia f spĺňa na intervale $\langle a, b \rangle$ Lipschitzovu podmienku, t. j. ak existuje K tak, že $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$ pre každé $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, tak má ohraničenú variáciu na $\langle a, b \rangle$.

5. Dokážte, že ak f je spojitá funkcia s ohraničenou variáciou, je aj funkcia $V(f, a, x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$. Návod: Spojitosť sprava sme dokázali. Dokážte spojitosť zľava.

6. Dokážte, že funkcia $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ ak $x \neq 0$, $f(0) = 0$ je spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$ ale nemá ohraničenú variáciu na $\langle 0, 1 \rangle$. Návod: Urobte podobnú úvahu ako sme urobili v príklade 2.1.

7. Ak f má ohraničenú variáciu a g je monotónna, tak ukážte, že zložená funkcia $f[g(x)]$ má ohraničenú variáciu.

8. Dokážte, že $U(D, f, g)$ pri zjemňovaní delenia D nerastie a $L(D, f, g)$ neklesá.

9. Dokážte:

a) Ak $f_1 \in \mathscr{R}(g, \langle a, b \rangle), f_2 \in \mathscr{R}(g, \langle a, b \rangle)$, tak $f_1 + f_2 \in \mathscr{R}(g, \langle a, b \rangle)$ a platí $\int_a^b f\mathrm{d}g = \int_a^b f_1 \mathrm{d}g + \int_a^b f_2 \mathrm{d}g$.

b) Ak $f \in \mathscr{R}(g, \langle a, b \rangle)$ a c reálne číslo, tak $cf \in \mathscr{R}(g, \langle a, b \rangle)$ a platí $\int_a^b cf\mathrm{d}g = c\int_a^b f\mathrm{d}g$.

c) Ak $f \in \mathscr{R}(g_1, \langle a, b \rangle), f \in \mathscr{R}(g_2, \langle a, b \rangle)$, tak $f \in \mathscr{R}(g_2 + g_2, \langle a, b \rangle)$a platí $\int_a^b f\mathrm{d}(g_1 + g_2) = \int_a^b f\mathrm{d}g_1 + \int_a^b f\mathrm{d}g_2$.

d) Ak $f \in \mathscr{R}(g, \langle a, b \rangle)$ a c je reálne, tak $f \in \mathscr{R}(cg, \langle a, b \rangle)$ a platí $\int_a^b f\mathrm{d}(gc) = c\int_a^b f\mathrm{d}g$.

10. Dokážte, že ak $f \in \mathcal{R}(g, \langle a, b\rangle)$ a $a < c < b$, tak $f \in \mathcal{R}(g, \langle a, c\rangle)$ a platí $\int_a^c f\,\mathrm{d}g + \int_c^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f\,\mathrm{d}g$.

11. Vypočítajte $\int_a^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}g$ ak $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + x + 1$.

12. Nech $f(x) = x^2$, na $\langle -1, 1\rangle$ a nech $g(x) = 0$ ak $-1 \le x \le 0$, $g(x) = 1$ ak $0 < x \le 1$. Vypočítajte $\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}g$.

13. Nech g je taká ako v predchádzajúcom prípade. Nech $f(x) = 0$ ak $-1 \le x \le 0$ a $f(x) = 1$ ak $0 < x \le 1$. Existuje $\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}g$?

Kapitola V.

NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ RADY

1 KONVERGENTNÉ A DIVERGENTNÉ RADY. SÚČET RADU

V celej tejto kapitole budeme používať základné poznatky z viet o limitách postupností. Sú to tie základné vety, ktoré sme získali pri štúdiu limít funkcií. V prípade postupností treba pravdaže uvážiť, že ich chápeme ako funkcie definované na množine prirodzených čísel a že limity uvažujeme v jedinom hromadnom bode definičného oboru, teda v bode $+\infty$.

Majme postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ K tejto postupnosti priradíme postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ takto:

$s_1 = a_1,$

$s_1 = a_1 + a_2,$

$\vdots$

$s_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$

Symbol $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ alebo kratšie zapísané

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

nazývame nekonečným číselným radom alebo kratšie radom. Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme postupnosťou čiastočných súčtov, prislúchajúcou k radu (1.1).

Rad (1.1) formálne vyzerá ako súčet nekonečne veľa sčítancov. Uvedomme si však, že operácia súčtu je definovaná len pre konečný počet sčítancov. Čo teda máme považovať za súčet radu (1.1)? Odpoveď na túto otázku nám dáva nasledujúca definícia.

Definícia 1. Konečná limita postupnosti čiastočných súčtov s (ak existuje) sa nazýva súčtom nekonečného radu a zapisujeme ju ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Čitateľ si musí uvedomiť, že číslo s sme dostali ako limitu postupnosti čiastočných súčtov a nie púhym sčítaním.

Definícia 2. Rad (1.1) sa nazýva konvergentným, ak konverguje postupnosť čiastočných súčtov. Rad (1.1) je divergentný, ak spomínaná postupnosť diverguje.

Z uvedených definícií vyplýva, že o súčte radu môžeme hovoriť len pri konvergentných radoch. Ak máme divergentný rad, rozoznávame tri druhy divergencie:

a) Rad (1.1) „diverguje do $+\infty$“, ak $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

b) Rad (1.1) „diverguje do $-\infty$“, ak $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$.

c) Rad (1.1) „osciluje“, ak neexistuje $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Poznámka 1. Často namiesto radu (1.1) používame rad tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, resp. $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, kde k je prirodzené číslo.

POZNÁMKA 2. Veľké písmená gréckej abecedy „sigma“) sme už používali aj na označenie konečných súčtov, t. j. $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$, $p < q$ sú prirodzené čísla.

Príklad 1. Vyšetriť konvergenciu (prípadne nájsť súčet radu z $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$.

n-tý člen postupnosti čiastočných súčtov

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, teda rad konverguje a navyše $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=1$

Príklad 2. Vyšetrujeme tzv. harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$! Dokážme, že diverguje do $+\infty$.

Uvažujme postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukážme, že je rastúca a zhora neohraničená!

$s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, $s_n=s_{n+1}+\frac{1}{n+1}$, teda $s_n<s_{n+1}$, $n = 1, 2, 3,\dots$ čím sme nahliadli, že postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ rastie, ďalej zrejme platí

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2} \tag{1.2}$$

Z postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvorme vybratú postupnosť $\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$. Na jej k-tý člen použijeme asociatívny zákon a síce budeme sčítavať po skupinách nasledujúcim spôsobom: prvá skupina bude obsahovať prvé 2 členy, druhá nasledujúce 2 členy, tretia nasledujúce 4 členy, štvrtá ďalších 8 členov atď. až posledná skupina bude obsahovať posledných 2^{k-1} členov, t. j. budeme písať

$$s_{2k}=\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)}_{2\text{ členy}}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2\text{ členy}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{4\text{ členy}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{2^3\text{ členov}}+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}\text{ členov}}$$

Ak použijeme na všetky zátvorky s výnimkou prvej nerovnosť (1.2), dostaneme

$$s_{2k}\geq 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{2^{k-1}\text{ sčítancov}}=1+\frac{k}{2}$$

posledná nerovnosť dokazuje neohraničenosť vybranej postupnosti $\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$. Pretože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a z nej vybraná postupnosť neohraničená potom aj postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená, čo však na základe vety o limite monotónnych postupností znamená, že $\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$, t. j, rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje.

Príklad 3. Čitateľ sa na strednej škole stretol s geometrickou postupnosťou $\{aq^n\}_{n=0}^{\infty}$. Ak jej n-tý člen zoberieme ako n-tý člen nekonečného radu, dostaneme geometrický rad

$$a + aq^2 + \dots + aq^n + \dots=\sum_{n=0}^{\infty}aq^n\,,\quad a\neq 0 \tag{1.3}$$

Pre n-tý člen postupnosti čiastočných súčtov radu (1.3) platí $S_n=\sum_{n=0}^{\infty}aq^k=a\frac{q^n-1}{q-1}$ pre $q\neq 1$. Tento rad konverguje pre j $|q|<1$ a diverguje, ak $|q|\geq 1$. Vyplýva to z nasledujúcich úvah:

1. Ak $|q|<1$ je $\lim_{n\to\infty}|q|^n=0$, a teda $\lim_{n\to\infty}q^n=0$. Preto $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-q}$.

2. Ak $|q|>1$, potom v prípade, že $q>1$ je $\lim_{n\to\infty}q^n=+\infty$, a teda $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ alebo $\lim_{n\to\infty}S_n=-\infty$ podľa toho, či $a>0$ alebo $a<0$.

Ak $q\leq -1$ vybraná postupnosť s párnymi indexmi má tú vlastnosť, že jej limita je $+\infty$ alebo $-\infty$, a teda aj vybraná postupnosť s nepárnymi indexmi z postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tú istú vlastnosť. Odtiaľ už vyplýva, že rad diverguje.

3. Ak $q = 1$ má rad (1.3) tvar $a + a + \dots + a +\dots$ Teda $S_n = (n + 1)a$ a z toho vyplýva divergencia radu (1.3).

2 CAUCHY-BOLZANOV PRINCÍP KONVERGENCIE

Položme si otázku, aké vlastnosti musí mať rad (1.1), aby konvergoval, t. j. aby existovala konečná limita postupnosti čiastočných súčtov. Na túto otázku odpovedá znamenitá veta, dávajúca všeobecné podmienky konvergencie radu a nesúca meno českého matematika B. Bolzana[7] a francúzskeho matematika A. L. Caucyho. Čitateľ sa pri ďalšom štúdiu matematických disciplín s Cauchy-Bolzanovou vetou v rôznych modifikáciách ešte iste stretne.

Veta 1. (**C-B princíp konvergencie pre nekonečné rady**) Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje vtedy a len vtedy, ak platí: K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také prirodzené číslo N, že pre všetky prirodzené $n > N$ a pre ľubovoľné prirodzené p platí $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

POZNÁMKA 1. Je veľmi úzky súvis medzi nekonečnými radmi a postupnosťami. Nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je vlastne daný postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov. Obrátene, ak je daná ľubovoľná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ existuje nekonečný rad, ktorého n-tý čiastočný súčet sa zhoduje s n-tým členom a_n danej postupnosti. Je to rad $s_1 + (s_2 - s_1) + \ldots + (s_n - s_{n-1}) + \ldots$ Vety o konvergencii radov možno teda previesť na vety o konvergencii postupností a obrátene. Je bezprostredne zrejmé, že C-B princíp môžeme dokazovať tak, že dokážeme toto tvrdenie:

Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje vtedy a len vtedy, ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také prirodzené číslo N, že pre všetky prirodzené čísla n, $m > N$ platí $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

Nevyhnutná podmienka: Nech existuje konečná $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, t. zn. k ľubovoľnému $\varepsilon/2 > 0$ existuje N prirodzené tak, že pre $n > N$, $m > N$ platí $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|s_m - s| < \frac{\varepsilon}{2}$. Teda

$$|s_m - s_n| = |s_n - s + s - s_n| \le |s_m - s| + |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Postačujúca podmienka: Predpokladajme, že k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ máme prirodzené číslo N také, že pre všetky m, $n > N$ je $|s_m - s_n| < \varepsilon$. Označme písmenom M množinu všetkých reálnych čísel, ktoré majú nasledujúcu vlastnosť: $x \in M$ vtedy a len vtedy, ak len konečný počet členov postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (alebo žiadny člen) je menší ako x. Ukážme, že M je neprázdna zhora ohraničená množina. Zvoľme $\varepsilon = 1$. K nemu existuje n_0 prirodzené tak, že pre všetky n, $m > n_0$ je $|s_m - s_n| < 1$, a teda pre všetky $n > n_0$ platí $s_{n_0+1} - 1 < s_n < s_{n_0+1} + 1$ (zvolili sme $n_0 + 1 = m$). Číslo $s_{n_0+1} - 1 \in M$, nakoľko menších členov postupnosti môže byť nanajvýš konečne veľa. Číslo $s_{n_0+1} + 1$ je zase horným ohraničením množiny M (toto číslo ani nijaké väčšie nepatrí do M, nakoľko nekonečne veľa členov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je menších ako $s_{n_0+1} + 1$). Existuje teda $\sup M = s$. Ukážme, že $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Využijeme ešte raz predpoklad postačujúcej podmienky. K ľubovoľnému $\varepsilon/2 > 0$ máme prirodzené číslo N také, že pre všetky n, $m > N$ je $|s_m - s_n| < \varepsilon/2$. Z vlastnosti suprema vieme, že v $\varepsilon/2$-ovom okolí bodu s sa nachádza nekonečne veľa členov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z nich aspoň jeden člen, označme ho s_p bude mať index $p > N$ (v opačnom prípade by ich bolo len konečne veľa). Teda $|s_p - s| < \frac{\varepsilon}{2}$. Odtiaľ

$$|s_n - s| = |s_n - s_p + s_p - s| \le |s_m - s_p| + |s_p - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pre všetky $n > N$. Tým je veta dokázaná.

Ako triviálny dôsledok tejto vety (p = 1) platí: Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také n_0, že pre všetky $n > n_0$ platí $|s_{n+1}| < \varepsilon$. Inými slovami platí:

---

[7] B. Bolzano (1737 – 1816) český matematik

Veta 2. (nevyhnutná podmienka konvergencie) Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Je zrejmé, že táto podmienka nie je postačujúcou pre konvergenciu radu. Ako príklad na to môže poslúžiť harmonický rad.

Príklad 1. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ sa nazýva **Riemannov rad**. Dokážeme, že Riemannov rad konverguje pre $p > 1$.

Nech $p > 1$, $f(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$ $x \in \langle n, n+1 \rangle$. Ak použijeme Lagrangeovu vetu o strednej hodnote na intervale $\langle n, n+1 \rangle$ pre funkciu f (x) dostaneme $\frac{1}{p-1} \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)^{p-1}} + \frac{1}{n^{p-1}} \right) > \frac{1}{(n+1)^p}$, a teda

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \frac{1}{p-1} \cdot \left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+m)^{p-1}} \right) < \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{n^{p-1}}$$

Vidíme, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ stačí zvoliť n prirodzené tak, aby bolo $n > \left[\frac{1}{(p-1)\varepsilon} \right]^{\frac{1}{p-1}}$, potom pre ľubovoľné prirodzené m platí $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon$ a tvrdenie v príklade je dokázané.

Cvičenie

1. Dokážte konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

(Návod: Pri použití C-B princípu použite nerovnosti $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$.

2. Z prvého semestra vieme, že $\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{e}$, ak $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Dokážte, že $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$. (Návod: Dokážte najprv nerovnosť $x_n \le y_n \le \mathrm{e}$, kde $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$).

3. Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ diverguje do $+\infty$. Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je jeho postupnosť čiastočných súčtov. Dokážte:

a) Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ diverguje.

b) Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ konverguje.

Poznamenávame, že z príkladu 3a) špeciálne pre $a_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ vyplýva, že harmonický rad diverguje.

3 ZÁKLADNÉ VETY O RADOCH

Definícia 1. Hovoríme, že rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ majú rovnaký charakter, ak oba súčasne buď konvergujú alebo súčasne rovnakým spôsobom divergujú.

Veta 1. Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Ak v rade

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{3.1}$$

vynecháme prvých k členov rad

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+n} + \ldots \tag{3.2}$$

a rad. (3.1) majú rovnaký charakter.

D ô k a z . Označme s_n, s_n^* n-té členy postupnosti čiastočných súčtov radov (3.1) a (3.2). Zrejme platí $s_n^* = s_{k+n} - s_k$. Keďže k je pevne zvolené, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^*$ a $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+k}$ buď súčasne existujú a sú konečné, buď sú súčasne $+\infty$ alebo $-\infty$ alebo súčasne neexistujú.

D ô s l e d o k . Ak sa rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ od seba líšia len v konečnom počte členov, potom majú rovnaký charakter.

Dôkaz dôsledku, ako aj dôkaz nasledujúcej vety je ľahký a čitateľ si ho môže urobiť sám.

Veta 2. Nech k je reálne číslo rôzne od nuly. Fotom rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ka_n$ buď súčasne konvergujú, alebo súčasne divergujú. Ak $k > 0$ potom tieto rady majú rovnaký charakter.

Zoberme si rastúcu postupnosť prirodzených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ a z členov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ utvorme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ nasledujúcim spôsobom:

$$b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_1},\ b_2 = a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \ldots + a_{k_2},\ \ldots,\ b_n = a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \ldots + a_{k_n}$$

potom o týchto radoch platí

Veta 3. Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (alebo diverguje do $\pm\infty$), potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (alebo diverguje do $\pm\infty$).

D ô k a z . K dôkazu tejto vety si stačí uvedomiť, že postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je vybranou postupnosťou z postupnosti čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

POZNÁMKA 1. Opačná veta neplatí. Zoberme si napr. rad $1 - 1 + 1 - 1 \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$, ktorý osciluje, postupnosť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n\}_{n=1}^{\infty}$ potom $b_n = 0$ pre $n = 1, 2, \ldots$, teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný.

POZNÁMKA 2. Vieme, že pre sčítavanie konečného počtu čísel platí komutatívny, asociatívny a distributívny zákon. Vety 2 a 3 umožňujú vysloviť zákony podobné asociatívnemu a distributívnemu pre konvergentné nekonečné rady. Obdobu komutatívneho zákona pre špeciálne nekonečné rady vyslovíme neskôr. Platí: Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom

a) $k(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots) = ka_1 + ka_2 + \ldots + ka_n + \ldots$ pre $k \neq 0$

b) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \ldots + a_{k_2}) + \ldots + (a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \ldots$ $\ldots + a_{k_n}) + \ldots$

Veta 4. Nech rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergujú a majú súčty A, B. Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ konverguje a má súčet $A \pm B$.

D ô k a z . $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{s_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ nech sú postupnosti čiastočných súčtov radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, t. j.

$\lim_{n\to\infty} s_n = A$, $\lim_{n\to\infty} s_n^* = B$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ má čiastočný súčet rovný $s'_k = s_n \pm s_n^*$, a teda platí $\lim_{n\to\infty} s'_n = A \pm B$. Veta je dokázaná.

4 RADY S NEZÁPORNÝMI ČLENMI. KRITÉRIÁ PRE KONVERGENCIU A DIVERGENCIU TÝCHTO RADOV

V tomto článku sa zaoberajme radmi, ktoré s výnimkou konečného počtu členov majú rovnaké znamienko. Skúmame otázky konvergencie a divergencie týchto radov. Bez ujmy na všeobecnosti možno predpokladať, že všetky členy skúmaných radov sú nezáporné. Vyplýva to z definície súčtu radu a z toho, že existencia limity postupnosti nezávisí od toho, či zmeníme konečný počet jej členov.

Majme teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$. $n = 1, 2, \ldots$; postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ je neklesajúca. Z vlastností neklesajúcich postupností plynie nasledujúca veta

Veta 1. Rad s nezápornými členmi konverguje vtedy a len vtedy, ak postupnosť čiastočných súčtov je ohraničená.

Je zrejmé, že rad s nezápornými členmi nemôže oscilovať. Vždy buď konverguje alebo diverguje do $+\infty$.

Cauchy-Bolzanov princíp konvergencie, významný svojou univerzálnosťou, spôsobuje isté ťažkosti pri praktickom použití na skúmanie konvergencie resp. divergencie daného radu. Preto v teórii nekonečných radov existuje veľa kritérií konvergencie (divergencie). Na rozdiel od C-B vety, sú to iba postačujúce podmienky. Sú však jednoduché a možno vždy použiť tú, ktorá je výhodná pri skúmaní konkrétneho radu.

Veta 2. (**porovnávacie kritérium**). Nech sú dané dva rady s nezápornými členmi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a nech pre skoro všetky n (t. j. s výnimkou konečného počtu členov) platí $a_n \leq b_n$. Potom z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alebo (čo je to isté) z divergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vyplýva divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

D ô k a z . Z vety 3.1 vieme, že vynechaním konečného počtu členov radu sa nemení jeho charakter. Preto bez porušenia všeobecnosti môžeme predpokladať platnosť nerovnosti $0 \leq a_n \leq b_n$ pre $n = 1, 2, \ldots$ Ak označíme s'_n, s''_n n-té členy postupnosti čiastočných súčtov radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dostaneme $s'_n \leq s''_n$.

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, t. j. $\lim_{n\to\infty} s''_n$ je konečná, potom vieme, že postupnosť $\{s''_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, Potom ale aj postupnosť $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, čo podľa vety 1 znamená konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Veta 3. Nech pre skoro všetky n platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, pričom $a_n > 0$, $b_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, potom z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alebo (čo je to isté), z divergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a vyplýva divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

D ô k a z . Podobne ako v predchádzajúcom dôkaze nenarušíme všeobecnosť, ak predpokladáme platnosť nerovností vo vete nie pre skoro všetky n, ale pre všetky n. Z týchto nerovností dostaneme $\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_2}{b_2} \geq \cdots \geq \frac{a_n}{b_n} \geq \cdots$, t. j. $a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n$ pre $n = 1, 2, \ldots$ Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$ a z vety 2 plynie konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Veta je dokázaná.

Veta 4. (Cauchyho kritérium) Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Položme $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Potom

a) ak $\alpha < 1$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

b) ak $\alpha > 1$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,

c) existujú konvergentné aj divergentné rady, pre ktoré je $\alpha = 1$.

D ô k a z . a) Nech $\alpha < 1$. Zvoľme číslo β tak, že $\alpha < \beta < 1$. Z vlastnosti limes superior vieme, že existuje celé číslo N také, že pre všetky $n > N$ je $\sqrt[n]{a_n} < \beta$, čiže $a_n < \beta^n$. Nakoľko $0 < \beta < 1$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ konverguje, čo podľa vety 2 stačí ku konvergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Nech $\alpha > 1$. V I. semestri sme dokázali, že α je hromadnou hodnotou postupnosti $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$. To ale znamenená že nerovnosť $a_n > 1$ je splnená pre nekonečne veľa členov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, čím nie je splnená nevyhnutná podmienka konvergencie $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

c) Rady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ majú $\alpha = 1$. Prvý z nich, harmonický, diverguje. Druhý je Riemannov, pričom p = 2, teda konverguje.

Veta 5. (D'Alembeartovo[8] kritérium) Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n > 0$.

a) Ak $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, rad konverguje.

b) Ak existuje prirodzené číslo N tak, že pre všetky $n > N$ je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, potom rad diverguje.

c) Existujú konvergentné rady aj rady, ktoré divergujú, pre ktoré platí $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

D ô k a z . a) Ak je splnený predpoklad a), potom existuje také $\beta\,(0 < \beta < 1)$, že nerovnosť $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta$ je splnená pre všetky $n > N$ (N je pevné číslo). To znamená, že platí nerovnosť $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$ pre $n \geq N$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ konverguje, čo podľa vety 3 implikuje konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Nech existuje prirodzené číslo N tak, že pre všetky $n \geq N$ je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, t. j. $a_{n+1} \geq a_n$. Neklesajúca (s výnimkou konečného počtu členov) postupnosť kladných čísel nemôže mať limitu rovná nule, t. zn., že nie je splnená nevyhnutná podmienka konvergencie radu. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ teda diverguje.

[8] J. D'Alembert (1717 – 1783) francúzsky matematik a filozof

c) Rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konverguje, rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje. Pre oba rady $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$. Teda $\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=$ $=\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$. Veta je dokázaná.

Príklad 1. Majme rad $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$ $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{2}}=+\infty$,

$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=0$, $\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Podľa Cauchyho kritéria rad konverguje. D'Alembertovo kritérium nedovoľuje urobiť o rade nijaký uzáver.

POZNÁMKA 1. D'Alembertovo kritérium sa ľahšie uplatňuje pri počítaní príkladov než Cauchyho kritérium. Ľahšie sa totiž vypočíta podiel, ako n-tá odmocnina. Na druhej strane však Cauchyho kritérium je silnejšie v tom zmysle, že ak d'Alembertovo kritérium klasifikuje rad za konvergentný, potom určite aj Cauchyho kritérium ukazuje na konvergentnosť tohto radu. Ak sa podľa Cauchyho nedá určiť charakter radu, nebude sa to dať ani podľa d'Alembertovho kritéria. Dokazuje to nasledujúca veta a „silu" Cauchyho kritéria dopĺňa aj predchádzajúci príklad.

Veta 6. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť kladných čísel. Potom platí $\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

D ô k a z . Urobíme ho pre druhú nerovnosť. Dôkaz prvej sa môže urobiť analogicky a prenechávame ho čitateľovi. Položme $\alpha=\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Ak $\alpha=+\infty$, veta je dokázaná.

Ak α je reálne číslo, potom k ľubovoľnému $\beta>\alpha$ existuje také celé číslo N, že pre všetky $n\ge N$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\beta$ teda $a_{N+1}\le\beta a_N$, $a_{N+2}\le\beta a_{N+1}$, …, $a_{N+p}\le\beta a_{N+p-1}$. Z týchto nerovností dostaneme $a_{N+p}\le\beta^p a_N$, kde p je ľubovoľné číslo. Položme $n=N+p$. Dostaneme $a_n\le a_N\beta^{-N}\beta^n$ pre $n\ge N$ alebo $\sqrt[n]{a_n}\le\sqrt[n]{a_N\beta^{-N}}\,\beta$. Potom $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_N\beta^{-N}}\,\beta$, nakoľko ale $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_N\beta^{-N}}=$ $=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_N\beta^{-N}}=1$, dostávame $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\beta=\alpha+\varepsilon$.

β bolo ľubovoľné číslo väčšie ako α, teda ε je ľubovoľné kladné číslo. Z poslednej nerovnosti a z ľubovoľnosti ε vyplýva tvrdenie, t. j. $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\alpha$

Kritériá konvergencie vo vetách 4 a 5 sme získali porovnaním radu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ s geometrickým radom. Porovnaním s inými radmi môžeme dostať rôzne iné kritériá. Z množstva týchto kritérií vyberieme ešte jedno, ktoré sa pri počítaní často používa.

Veta 7. (Raabeho[9] kritérium) Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ s kladnými členmi.

a) Ak existuje $r>1$ a prirodzené číslo N tak, že pre všetky $n\ge N$ platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\ge r$ potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje.

[9] J. L. Raabe (1801 – 1859) – švajčiarsky matematik

b) Ak platí $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

D ô k a z . a) Nech $f(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\alpha}$, $x \in \langle 0,\ 1\rangle$, $\alpha > 1$, n prirodzené číslo. Podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote a po malej úprave máme $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{n}\left(1+\frac{\Theta}{n}\right)^{\alpha-1}<1+\frac{\alpha}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}$, kde $0<\Theta<1$. Nech teraz platia podmienky uvedené v a) časti vety. Zvoľme $1<\alpha<r$ a položme $b_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ bude teda konvergovať. Počítajme $\frac{b_n}{b_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}<1+\frac{\alpha}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}$. Nakoľko $\lim_{n\to\infty}\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}=\alpha<r$, existuje také prirodzené M, že pre všetky $n\geq M$ je $\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}<r$. Označme $n_0=\max\{N, M\}$. Pre $n\geq n_0$ je $\frac{b_n}{b_{n+1}}<1+\frac{r}{n}$ a podľa predpokladu vety je $1+\frac{r}{n}\leq\frac{a_n}{a_{n+1}}$. Teda $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}<\frac{a_n}{b_n}$, z čoho podľa vety 3 plynie konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Nech $\lambda=\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$. Potom z vlastnosti limes superior existuje také prirodzené číslo N, že pre všetky $n\geq N$ platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1$ alebo $\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq 1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}=\frac{b_n}{b_{n+1}}$, kde $b_n=\frac{1}{n}$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje, $\frac{b_{n+1}}{b_n}\leq\frac{a_{n+1}}{a_n}$ podľa vety 3 teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Veta je dokázaná.

POZNÁMKA 2. Raabeho kritérium je účinnejšie ako d'Alembertovo. Ak sa dá zistiť konvergencia d'Alembertovým kritériom, dá sa zistiť tiež Raabeho kritériom.

Ak totiž $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}<1$, potom pre $0<\beta<1$ existuje prirodzené N tak, že pre všetky $n\geq N$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\beta$, a teda $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>n\frac{1-\beta}{\beta}$.

Pravá strana nerovnosti, má pre $n\to\infty$ limitu rovnú $+\infty$, t. zn. existuje také prirodzené číslo p, že pre všetky $n\geq p$ je napr. $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq\frac{3}{2}$. Na druhej strane existujú príklady, pri ktorých konvergenciu môžeme zistiť Raabeho kritériom ale d'Alembertovým nie.

POZNÁMKA 2. Vety 5b) a 7a) by sme mohli sformulovať pomocou pojmu limes inferior. Dostali by sme však kritériá o niečo slabšie.

Príklad 2. Zistiť konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ ($a>0$ je reálne číslo)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{a+n+1},\quad \liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

Teda d'Alembertovým kritériom sa to vyšetriť nedá. Použijeme Raabeho kritérium:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\frac{a}{n+1}$$

Nakoľko $\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot a}{n+1}=a$, potom pre $0<a<1$ vyšetrovaný rad diverguje. Pre $a>1$ existuje také $1<r<a$,

že nerovnosť $\frac{n \cdot a}{n+1} > r$ platí pre skoro všetky n. Uvažovaný rad pre $a > 1$ konverguje. Pre $a = 1$ dostávame divergentný harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Veta 8. (Integrálne kritérium) Nech $y = f(x)$ je spojitá, nezáporná, nerastúca funkcia na intervale $\langle 1, \infty)$. Označme $a_n = f(n)$ pre $n = 1, 2,\dots$ a $F(x)$ nech je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale $\langle 1, a\rangle$, kde $a > 1$ je ľubovoľné reálne číslo. Potom

1. Ak $\lim_{n\to\infty} F(x)$ je konečná, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje
2. Ak $\lim_{n\to\infty} F(x) = +\infty$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

D ô k a z . Uvedomme si, že primitívna funkcia $F(x)$ k $f(x)$ pre $x \in \langle 1, a\rangle$ existuje (pozri vetu 1.1.2). Pretože $F'(x) = f(x) \geq 0$ funkcia $F(x)$ je neklesajúca na $\langle 1, \infty)$ a podľa vety o limite monotónnych funkcií existuje $\lim_{n\to\infty} F(x)$ ktorá je buď konečná alebo rovná $+\infty$ podľa ohraničenosti, resp. neohraničenosti $F(x)$. Uvažujme rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} [F(n+1) - F(n)] \tag{4.1}$$

Pre n-tý člen postupnosti čiastočných súčtov radu (4.1) platí

$$S_n = [F(n + 1) - F(n)] + [F(n) - F(n - 1)] + \dots + [F(2) - F(1)] = F(n + 1) - F(1)$$

Teda ak $\lim_{n\to\infty} F(x)$ je konečná (nevlastná), potom rad (4.1) konverguje (diverguje).

Z druhej strany, podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote máme $F(n + 1) - F(n) = F'(c_n) = f(c_n)$, kde $c_n \in (n, n + 1)$ pre $n = 1, 2,\dots$ Nakoľko $f(x)$ je nerastúca funkcia, dostávame $f(n + 1) \leq f(c_n) \leq f(n)$ alebo

$$a_{n+1} \leq F(n + 1) - F(n) \leq a_n \qquad \text{pre } n = 1, 2,\dots \tag{4.2}$$

Z nerovnosti (4.2) a z vety 2 dostaneme tvrdenie integrálneho kritéria.

Príklad 3. Zistiť konvergenciu radu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$, kde $p > 0$.

Zvolíme funkciu $f(x) = \frac{1}{n \ln^p n}$ $x \in \langle 2, \infty)$. Výpočtom ľahko zistíme, že k nej jedna primitívna funkcia je $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-p)\ln^{p-1} x}, & \text{ak } p \neq 1 \\ \ln|\ln x|, & \text{ak } p = 1 \end{cases}$. Nakoľko $\lim_{x\to\infty} F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } p > 1 \\ +\infty, & \text{ak } 0 < p \leq 1 \end{cases}$, skúmaný rad konverguje pre $p > 1$ a diverguje pre $p \in (0, 1\rangle$.

Cvičenie

1. Za pomoci vety 2 dokážte, že Riemannov rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverguje pre $0 < p \leq 1$.

2. Dokážte nasledujúce kritérium konvergencie: Majme rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \geq 0$. Nech $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, $0 \leq k < \infty$. Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a keď navyše $k > 0$, potom z divergencie radu vyplýva $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Návod: Použite vetu 3.2 a vetu 4.2

3. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{a}{n}$, $a \in (0, \pi)$.

4. Vetu 8 využite na overenie vlastnosti Riemannovho radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$.

5 ABSOLÚTNE A RELATÍVNE KONVERGENTNÉ RADY RADY SO STRIEDAVÝMI ZNAMIENKAMI.

Definícia 1. Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Veta 1. Ak rad absolútne konverguje, potom konverguje.

D ô k a z . Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, z Cauchy-Bolzanovho princípu plynie: K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také prirodzené číslo N, že pre všetky $n > N$ a pre ľubovoľné prirodzené p platí $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$. Z nerovnosti $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|$ a znova z C-B princípu konvergencie vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definícia 2. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$, keď buď $a_n > 0$ pre $n = 1, 2, \ldots$ alebo $a_n < 0$ pre $n = 1, 2, \ldots$ nazývame radom so striedavými znamienkami.

Veta 2. (Leibnizovo kritérium) Nech pre rad so striedavými znamienkami platí:
a) $a_n > a_{n+1}$ pre $n = 1, 2, \ldots$
b) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje.

D ô k a z . Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu so striedavými znamienkami. Platí $s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$. Nakoľko čísla v zátvorkách sú podľa predpokladu a) kladné, postupnosť $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca. Ukážeme, že je tiež zhora ohraničená.

$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$. Čísla v zátvorkách sú kladné, $a_{2n} > 0$, teda $s_{2n} < a_1$. Rast a ohraničenosť zhora zaručujú existenciu vlastnej limity postupnosti $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$. Označme si ju písmenom s, t. j. $\lim_{n \to \infty} s_{2n} = s$. Navyše $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, a teda $\lim_{n \to \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} (s_{2n} + a_{2n+1}) = s$

Postupnosti $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ teda konvergujú k tomu istému číslu. Čitateľ iste ľahko nahliadne, že potom aj postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu s. Tým je veta dokázaná.

Príklad. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$ absolútne konverguje pre $p > 1$ (pretože rad absolútnych hodnôt je Riemannov rad pre $p > 1$).

Ak $0 < p \le 1$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverguje. Nakoľko ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$ spĺňa predpoklady Leibnizovho kritéria, konverguje.

POZNÁMKA 1. Veta 1 sa nedá obrátiť. Predchádzajúci príklad nám dáva ukážku konvergentného radu, ktorý absolútne nekonverguje. Má preto zmysel nasledujúca definícia.

Definícia 2. Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ relatívne (alebo neabsolútne) konverguje, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Ďalej uvidíme, že s absolútne konvergentnými radmi môžeme narábať v istom zmysle ako s konečnými sumami. Môžeme ich navzájom násobiť, prerovnať (o tom bude reč v nasledujúcom článku) a pod. Pre relatívne konvergentné rady to nemusí byť pravda.

POZNÁMKA 2. Kritériá konvergencie pre rady s nezápornými členmi (Cauchyho, d'Alembertovo, Raabeho) sú zároveň kritériá pre absolútnu konvergenciu.

Definícia 3. Majme rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Položme $c = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (n = 0, 1, 2,…). Rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nazveme Cauchyho súčinom dvoch radov.

Veta 3. Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, rad $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$. Potom Cauchyho súčin týchto radov konverguje a platí $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A \cdot B$.

D ô k a z . Označme $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, $\beta_n = B_n - B$. $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$, sú postupnosti čiastočných súčtov. Máme $C_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_n = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} +$ $+ \ldots + a_nb_0) = a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0 = a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B + \beta_0) = A_nB + a_0\beta_n +$ $+ a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0$.

Chceme dokázať, že $\lim_{n\to\infty} C_n = A \cdot B$. Nakoľko ale $\lim_{n\to\infty} A_nB = A \cdot B$ stačí dokázať, že $\lim_{n\to\infty} \gamma_n =$ $= \lim_{n\to\infty} (a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0) = 0$. Označme $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Keďže $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = 0$, to znamená, že k ľubovoľnému $\frac{\varepsilon}{2\alpha} > 0$, existuje také prirodzené číslo N, že pre všetky $n \geq N$ je $|\beta_n| \leq \frac{\varepsilon}{2\alpha}$. Platí $|\gamma_n| \leq |\beta_0||a_n| + \ldots + |\beta_N||a_{n-N}| + |\beta_N a_{n-N-1} + \ldots + \beta_n a_0| \leq |\beta_0||a_n| + \ldots + |\beta_N||a_{n-N}| + \frac{\varepsilon}{2\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$.

Označme $b = \max_{i=1,\ldots,N}\{|\beta_i|\}$, potom $|\gamma_n| \leq b \cdot (|a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_{n-N}|) + \frac{\varepsilon}{2\alpha} \cdot \alpha$. Podľa C-B princípu $\forall \frac{\varepsilon}{2b} > 0\ \exists M\ \ \forall m > M\ \forall p \in$ N: $|a_m| + |a_{m+1}| + \ldots + |a_{m+p}| < \frac{\varepsilon}{2b}$. Špeciálne pre $m = n - N$, $m + p = n$ (a teda pre $p = N$) odtiaľ vyplýva $\forall n > M + N$: $|a_{n-N}| + \ldots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2b}$. Preto $|\gamma_n| \leq b.\ \frac{\varepsilon}{2b} + \frac{\varepsilon}{2\alpha} \cdot \alpha = \varepsilon$, teda $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. Veta je dokázaná.

Veta 4. Nech $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje. Potom aj rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n}$ absolútne konverguje.

D ô k a z . Nakoľko $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, znamená to, že k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také N, že pre všetky $n > N$ a pre p prirodzené platí $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$. Tým skôr však pre

$k_m > N$ platí $|a_{k_{m+1}}| + |a_{k_{m+2}}| + \ldots + |a_{k_{m+p}}| < \varepsilon$ čo znovu podľa C-B princípu konvergencie stačí k absolútnej konvergencii radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n}$.

POZNÁMKA 3. Veta nemusí platiť pre neabsolútne konvergentné rady. Napr. rad $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+ + \frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$ je neabsolútne konvergentný. Z členov tohto radu vybraná postupnosť $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ vytvára divergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

6 PREMIESTNENIE ČLENOV V NEKONEČNOM RADE

Definícia 1. Nech $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť, v ktorej sa každé prirodzené číslo raz a len raz vyskytne. Položme $a_n' = a_{k_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Budeme hovoriť, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ vznikol premiestnením členov v nekonečnom rade $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Postupnosť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ v definícii 1. je vzájomným jedno-jednoznačným zobrazením množiny prirodzených čísel na seba. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ kvôli krátkosti vyjadrovania budeme nazývať tiež názvom „prerovnaný" rad k radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

V poznámke 3.2 sme čitateľovi sľúbili vyriešiť otázku platnosti komutatívneho zákona. Zo strednej školy vieme, že tento platí pre konečný počet sčítancov. Čo sa stane, ak v konvergentnom rade premiestnime členy tohto radu? Zoberme si na ilustráciu príklad.

Príklad 1. Majme konvergentný rad $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$ Jeho súčet označme s, postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Premiestnime jeho členy tak, že po jednom kladnom člene budú nasledovať dva záporné, t. j. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{4m-2}-\frac{1}{4m}+\cdots$, kde m udáva poradie trojice.

Dokážme, že súčet tohto prerovnaného radu je $\frac{s}{2}$. Označme postupnosť čiastočných súčtov prerovnaného radu $\{s_n'\}_{n=1}^{\infty}$. Platí

$$s_{3n}' = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}s_{2n}$$

teda $\lim_{n\to\infty} s_{3n}' = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \frac{s}{2}$. Nakoľko ale $s_{3n-1}' = s_{3n}' + \frac{1}{4n}$, $s_{3n-2}' = s_{3n-1}' + \frac{1}{4n-2}$, $n \ge 1$ dostávame $\lim_{n\to\infty} s_{3n-1}' = \frac{s}{2}$, $\lim_{n\to\infty} s_{3n-2}' = \frac{s}{2}$. Z týchto limít ľahko nahliadneme, že $\lim_{n\to\infty} s_n' = \frac{s}{2}$, čiže prerovnaný rad konverguje a má súčet $\frac{s}{2}$.

Z príkladu vidíme, že prerovnaný rad z neabsolútne konvergentného radu nemusí mať ten istý súčet. Prerovnaním konvergentného radu môžeme dostať aj divergentný rad, ako to ukazuje nasledujúca veta.

Veta 1. (Riemannova veta) Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolútne konvergentný rad a nech $\alpha \leq \beta$ sú dve dané čísla rozšírenej množiny reálnych čísel (pripúšťame aj možnosť $\pm\infty$). Potom existuje prerovnaný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ s postupnosťou čiastočných súčtov $\{s_n'\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že

$$\liminf_{n\to\infty} s_n' = \alpha, \quad \limsup_{n\to\infty} s_n' = \beta \tag{*}$$

D ô k a z . Nech $b_n = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$, $c_n = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$. Potom $b_n - c_n = a_n$, $b_n + c_n = |a_n|$, $b_n \geq 0$, $c_n \geq 0$. Rady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergujú. Keby oba konvergovali, potom by konvergoval aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$, čo nie je možné (rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje). Keby jeden z nich konvergoval a druhý divergoval, z rovnosti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ by sme dostali, že postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nevlastnú limitu, čo je tiež v spore s predpokladom vety.

Označme $p_1, p_2, p_3, \ldots$ postupnosť nezáporných členov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ v tom poriadku, v akom v rade idú a $q_1, q_2, q_3, \ldots$ postupnosť absolútnych hodnôt záporných členov tohto radu tiež v prirodzenom poriadku. Rady $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ sa líšia od radov $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ len nulovými členmi, preto tiež divergujú.

Pomocou konštrukcie indukciou zostrojíme postupnosti prirodzených čísel $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby rad

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{k_1} + p_{m_1+1} + p_{m_1+2} + \ldots + p_{m_2} - q_{k_1+1} - q_{k_1+2} - \ldots - q_{k_2} + \ldots \tag{**}$$

ktorý je zrejme prerovnaným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, vyhovoval podmienke (*).

Zvoľme dve postupnosti reálnych čísel $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ také, že $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$, $\alpha_n < \beta_n$ pre $n = 1, 2, \ldots$ (také postupnosti zrejme existujú). Zostrojme postupnosti $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ nasledovne:

m_1 je najmenšie prirodzené číslo také, že $p_1 + p_2 + \ldots + p_{m_1} > \beta_1$,

k_1 je najmenšie prirodzené číslo také, že $p_1 + p_2 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{k_1} < \alpha_1$

To môžeme vždy urobiť, pretože rady $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ divergujú. Predpokladajme, že máme skonštruované $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$. Zostrojme m_n ako najmenšie prirodzené číslo také, že platí

$$p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{k_1} + \ldots + p_{m_{n-2}+1} + \ldots + p_{m_{n-1}} - q_{k_{n-2}+1} - \ldots - q_{k_{n-1}} + p_{m_{n-1}+1} + \ldots + p_{m_n} > \beta_n$$

a k_n také najmenšie prirodzené číslo, že je splnená nerovnosť

$$p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{k_1} + \ldots + p_{m_{n-2}+1} + \ldots + p_{m_{n-1}} - q_{k_{n-2}+1} - \ldots - q_{k_{n-1}} + p_{m_{n-1}+1} + \ldots + p_{m_n} - q_{k_{n-1}+1} - \ldots - q_{k_n} < \alpha$$

Označme x_n a y_n čiastočné súčty radu (**) a poslednými členmi p_{m_n} a $-q_{k_n}$ t. j.

$$x_n = p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{k_1} + \ldots + p_{m_{n-1}+1} + \ldots + p_{m_n},$$

$$y_n = x_n - q_{k_{n-1}+1} \ldots - q_{k_n}$$

Postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú vybranými postupnosťami z postupnosti čiastočných súčtov radu (**). Z konštrukcie $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zrejmé, že $x_n - p_{m_n} \leq \beta_n$. Podobne z konštrukcie postupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ vidno platnosť nerovnosti $y_n + q_{k_n} \geq \alpha_n$.

Triviálne platí $x_n > \beta_n$, $y_n < \alpha_n$. Dostávame teda sústavu nerovností

$$\beta_n < x_n \le \beta_n + p_{m_n}$$

$$\alpha_n - q_{k_n} \le y_n < \alpha_n$$

Nakoľko $\lim\limits_{n\to\infty} q_{k_n} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{m_n} = 0$ (pretože rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta$, dostávame $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha$. Z konštrukcie radu (**) je tiež jasné, že žiadne číslo menšie ako α, alebo väčšie ako β nemôže byť limitou vybranej postupnosti čiastočných súčtov radu (**). Veta je dokázaná.

Veta 2. Každý prerovnaný rad z radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje k tomu istému súčtu vtedy a len vtedy, ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný rad.

D ô k a z . I. Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný rad, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je jeho ľubovoľné prerovnanie. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti čiastočných súčtov týchto radov. Ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, máme dokázať, že $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = s$, t. j. že $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n - s'_n) = 0$. K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$, existuje také prirodzené číslo N, že pre všetky $n > N$ a pre ľubovoľné prirodzené p platí

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon \qquad \text{(i)}$$

Keďže postupnosť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje všetky prirodzené čísla, zvolíme prirodzené číslo M tak veľké, aby čísla 1, 2, …, N boli obsiahnuté v množine $k_1, k_2, \ldots, k_M$. Pre všetky $n > M$ sa zrušia v rozdiele $s_n - s'_n$ všetky členy $a_1, a_2, \ldots, a_N$, takže tento rozdiel (ak sa nezrušia vôbec všetky členy) má tvar $s_n - s'_n = \pm a_{m_1} \pm a_{m_2} \pm a_{m_3} \pm \ldots \pm a_{m_p}$, kde $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sú čísla navzájom rôzne a väčšie ako N. Zrejme platí $M \ge N$. K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ sme našli prirodzené N také, že pre všetky $n > N$ je $|s_n - s'_n| \le$ $\le |a_{m_1}| + \ldots + |a_{m_1}|$ čo je podľa (i) menšie ako ε, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = s$.

II. Ak každé prerovnanie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje k tomu istému súčtu (teda pôvodný rad tiež konverguje), máme dokázať, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje. Keby to nebola pravda a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ by neabsolútne konvergoval, podľa vety 1 by existovalo prerovnanie tak, že prerovnaný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ by divergoval. Tento spor a predpokladom dokazuje druhú časť dôkazu vety.

Veta 3. Ak všetky prerovnania radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergujú, potom konvergujú k tomu istému číslu.

D ô k a z . Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje buď a) absolútne alebo b) relatívne. Prípad b) nemôže nastať, pretože podľa vety 1. by existovalo divergentné prerovnanie radu, čo predpoklad vety nedovoľuje. Platí teda prípad a) a podľa vety 2 musí každé prerovnanie konvergovať k tomu istému číslu.

Cvičenie

1. Dokážte, že Cauchyho súčin dvoch absolútne konvergentných radov absolútne konverguje.

2. Z členov neabsolútne konvergentného radu dá sa vybrať postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ diverguje. Dokážte!

3. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ je prerovnaním tohto radu, a to takým, že platí $|k_n - n| \leq N$, pre $n = 1, 2, \ldots$ (N je pevne zvolené prirodzené číslo). Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ konverguje a jeho súčet sa rovná súčtu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$! [Návod: Ak si označíme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti čiastočných súčtov radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, ukážte, že pre $n > N$ platí $|s_n - s'_n| \leq \sum_{i=-N}^{N} | a_{n+i} |$.]

Kapitola VI.

POSTUPNOSTI A RADY FUNKCIÍ

1 ROVNOMERNÁ KONVERGENCIA

Majme danú postupnosť funkcií

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{1.1}$$

ktoré sú definované na neprázdnej množine $M \subset \mathrm{R}$. Ak dosadíme za x nejaké číslo z M, prejde postupnosť (1.1) do postupnosti reálnych čísel (pre rôzne hodnoty $x \in M$ dostávame vo všeobecnosti rôzne číselné postupnosti). Ak pre každé $x \in M$ je postupnosť (1.1) konvergentná, to znamená, existuje konečná

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{1.2}$$

hovoríme, že postupnosť funkcií (1.1) konverguje (alebo tiež bodovo konverguje) na M. Limita (1.2) je prvkom $x \in M$ určená jednoznačne, čo znamená, že touto limitou je na množine M definovaná funkcia $f(x)$, čiže $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, pre $x \in M$.

Teda môžeme vysloviť definíciu

Definícia 1. Nech $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ je postupnosť funkcií definovaných na $M \subset \mathrm{R}$. Hovoríme, že $\{f(x)_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (bodovo) k $f(x)$ na M, ak ku každému $x \in M \subset \mathrm{R}$ a ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathrm{N}$ také, že pre všetky $n > n_0$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Označíme to $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Zavedenie nekonečných číselných radov v kapitole V. nám poskytuje návod na skúmanie nekonečných radov funkcií.

Definícia 2. Majme postupnosť $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ pričom $u_n(x)$ pre $n \in \mathrm{N}$ sú definované na $M \subset \mathrm{R}$. Položme $S_n(x) = = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$, $x \in M \subset \mathrm{R}$ pre $n \in \mathrm{N}$. Ak postupnosť $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (bodovo) na M hovoríme, že rad funkcií

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{1.3}$$

konverguje (bodovo) na M. Postupnosť $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame postupnosťou čiastočných súčtov patriacou radu (1.3) a jej limitu $S(x)$ nazývame súčtom tohto radu a zapisujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$$

Vidieť úzku súvislosť medzi konvergenciou postupnosti a konvergenciou radu. Ďalej z definície 2 vyplýva, že pri štúdiu konvergencie radov funkcií môžeme používať všetky kritériá konvergencie číselných radov. Venujme sa však teraz otázke, do akej miery sú niektoré vlastnosti funkcií $f_n(x)$, resp. $u_n(x)$ prenášajú na funkciu $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ resp. $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Prenesenie niektorých vlastností sa dá ihneď overiť. Tak napríklad ak $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nerastúcich funkcií na intervale J a $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, potom z vlastnosti limity vyplýva, že aj $f(x)$ je nerastúca na J. Nasledujúce príklady však ukazujú, že spojitosť nie je takou vlastnosťou.

Príklad 1. Nech $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$. Ak položíme $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, dostaneme $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ pre $x > 0$, $f(x) = -1$ pre $x < 0$. Teda $f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre $x \in (-\infty, \infty)$. Táto funkcia nie je spojitá na $(-\infty, \infty)$, hoci $f_n(x)$ sú spojité funkcie v každom bode $x \in (-\infty, \infty)$.

Príklad 2. $u_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sú spojité funkcie na $(-\infty, \infty)$. Rad $x^2 + \dfrac{x^2}{1+x^2} + \cdots + \cdots + \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ konverguje na intervale $(-\infty, \infty)$. Pre $x \neq 0$ je to geometrický rad s kvocientom $q = \dfrac{1}{1+x^2} < 1$. Ak $x = 0$, všetky členy radu sú nuly. Preto súčet radu je funkcia

$S(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{pre } x \neq 0 \\ 0 & \text{pre } x = 0 \end{cases}$. Je to nespojitá funkcia na $(-\infty, \infty)$, pretože je nespojitá v bode 0.

Ukazuje sa, že v probléme prenosu vlastností funkcií $f_n(x)$, resp. $u_n(x)$ na limitné funkcie $f(x)$, resp. $S(x)$ má dôležitú úlohu ostrejší pojem konvergencie akou je bodová konvergencia. Tou je tzv. rovnomerná konvergencia.

Definícia 3. Nech $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na M. Hovoríme, že $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne konverguje na množine M k funkcii $f(x)$, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathrm{N}$ také, že pre všetky $n > n_0$ a pre všetky $x \in M$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $x \in M$ rovnomerne konverguje na množine M, ak postupnosť čiastočných súčtov $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ rovnomerne konverguje na M.

Treba zdôrazniť podstatný rozdiel medzi rovnomernou a bodovou konvergenciou postupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, resp. radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, ktorý spočíva v tomto. Pri bodovej konvergencii postupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ k funkcii $f(x)$, žiadame, aby pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ a ľubovoľné x z definičného oboru existovalo n_0 tak, že pre $n > n_0$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Pritom n_0 závisí nielen od voľby ε, ale vo všeobecnosti aj od voľby x. Pri rovnomernej konvergencii žiadame, aby pre $\varepsilon > 0$ existovalo n_0 (nezávisle od voľby x z definičného oboru) tak, aby platilo $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pre všetky $n > n_0$ a všetky $x \in M$. Podobne je to pri rade, lebo tam sú oba spomínané typy konvergencie definované pomocou postupností.

POZNÁMKA 1. Rovnomernú konvergencia postupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ k funkcii $f(x)$ resp. $S(x)$ na množine M budeme označovať $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ na M. Konvergenciu (bodovú) k týmto funkciám na M budeme značiť $f_n(x) \to f(x)$ na M resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \to S(x)$ na M.

POZNÁMKA 2. Všimnime si, že je nepodstatné, že v definícii rovnomernej konvergencie požadujeme, aby nerovnosť, ktorá tam vystupuje, bola ostrá. Je zrejmé, že rovnomerná konvergencia postupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ k funkcii $f(x)$ je to isté ako splnenie podmienky, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 (nezávislé od x) tak, že pre všetky $n > n_0$ a všetky $x \in M$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. To však sa stane vtedy a len vtedy, ak pre $n > n_0$ je supremum $M_n = \sup\limits_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Tým sme však dokázali nasledujúce kritérium pre rovnomernú konvergenciu.

Veta 1. Nech $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a $f(x)$ sú funkcie definované na M. Položme $M_n = \sup\limits_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|$. Potom $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M vtedy a len vtedy, ak $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

POZNÁMKA 3. Ak porovnávame definície 1, 2, 3, prídeme k uzáveru, že z rovnomernej konvergencie postupnosti (radu) na množine M vyplýva konvergencia postupnosti (radu) na tej istej množine M. Ako ukazujú nasledujúce príklady, opačná implikácia nie je pravdivá.

Príklad 3. Nech $f_n(x) = x^n$, $x \in \langle 0, 1)$ pre $n \in \mathsf{N}$. Platí $f_n(x) \to 0$ na $\langle 0, 1)$. Ďalej $M_n = \sup\limits_{x\in\langle 0,1)} |x^n - 0| = \sup\limits_{x\in\langle 0,1)} x^n = 1$ pre $n \in \mathsf{N}$, preto $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 1$ a podľa vety 1 táto konvergencia nie je rovnomerná.

Príklad 4. Majme $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ pre $x \in \langle 0, \infty)$, $n \in \mathsf{N}$. Pre každé x je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ak zvolíme n pevné, potom funkcia $f_n(x)$ rastie na $\langle 0, \dfrac{1}{n}\rangle$ a klesá na intervale $\langle \dfrac{1}{n}, \infty)$; maximum teda nadobúda v čísle $x = \dfrac{1}{n}$ a rovná sa $\dfrac{1}{2}$. ($\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = 0$), $M_n = \sup\limits_{x\in\langle 0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = f_n(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{2}$, $n \in \mathsf{N}$. Teda konvergencia postupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ k funkcii $f(x) = 0$ nie je na $\langle 0, \infty)$ rovnomerná.

Zvoľme však ľubovoľné $a > 0$. Ak zvolíme n tak, aby $\dfrac{1}{n} < a$ potom pre všetky $n > \dfrac{1}{a}$ je maximum funkcie $f_n(x)$ na intervale $\langle a, \infty)$ dosahované v bode a, t. j. $M_n = \sup\limits_{x\in\langle a,\infty)} |f_n(x) - 0| = \dfrac{na}{1+n^2a^2}$, pre $n > \dfrac{1}{a}$. Platí $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$, a teda $f_n(x) \rightrightarrows 0$ na $\langle a, \infty)$. Ďalej platí, že táto konvergencia nie je rovnomerná na $\langle 0, a)$, pretože pre $n > \dfrac{1}{a}$ bod $\dfrac{1}{n}$ leží v $\langle 0, a)$, a teda $M_n = \sup\limits_{x\in\langle 0,\infty)} |f_n(x) - 0| = \dfrac{1}{2}$.

2 PODMIENKY PRE ROVNOMERNÚ KONVERGENCIU

V tomto článku uvedieme niekoľko podmienok pre rovnomernú konvergenciu postupnosti a radov funkcií. Význam prvých dvoch podmienok budú viac teoretického charakteru, na rozdiel od ďalších podmienok, ktoré sa spolu s vetou 1.1 častejšie využívajú aj v početnej praxi. Prvá z nich je analógiou Cauchy-Bolzanovho princípu konvergencie, ako sme to spoznali v 5.2.

Veta 1. (C-B princíp rovnomernej konvergencie) Postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in M$ rovnomerne konverguje na M vtedy a len vtedy, ak platí: Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathsf{N}$, že pre všetky $x \in M$, pre všetky prirodzené p, $q > n_0$ platí

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \tag{2.1}$$

D ô k a z . Nevyhnutnosť podmienky sa dokáže rovnakou technikou ako nevyhnutná podmienke vo vete 5.2.1. Dokážeme postačujúcu podmienku. Nech je splnená podmienka vety 1. Potom pre každé $x \in M$ je pre číselnú postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ splnená Cauchy-Bolzanova podmienka vo vete 5.2.1. Teda $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v každom bode $x \in M$ k nejakej funkcii, ktorú označíme f. Ak vykonáme v nerovnosti limitný prechod pre $q \to \infty$, dostávame toto: Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathsf{N}$, že pre všetky $x \in M$ a pre všetky prirodzené $p > n_0$ platí $|f_p(x) - f(x)| \le \varepsilon$, čo znamená, že $f_p(x) \rightrightarrows f(x)$ na M. (Neostré znamienko v poslednej nerovnosti nám iste neprekáža.)

POZNÁMKA 1. Pre rovnomernú konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ na M má C-B podmienka tento tvar: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konverguje rovnomerne na M vtedy a len vtedy, ak platí: Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathsf{N}$, že pre všetky $x \in M$ a pre každé $n > n_0$ a pre ľubovoľné $m \in \mathsf{N}$ platí

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Veta 2. (Dini[10]) Nech $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií na kompaktnej množine M. Nech pre každé $x \in M$ je číselná postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca alebo neklesajúca a nech $f_n(x) \to f(x)$ na M, kde $f(x)$ je spojitá funkcia na M. Potom $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M.

D ô k a z . Urobíme ho pre prípad nerastúcej postupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ označme $F_n = f_n - f$. Funkcia F_n sú spojité, kladné, pre každé $x \in M$ číselná postupnosť $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a platí $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 0$. Z toho vyplýva, že pre každé $x \in M$ a pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n = n(x) \in \mathbb{N}$ také, že $F_n(x) < \varepsilon$. Nakoľko $F_n(x)$ je spojitá, existuje okolie bodu x, $O_n(x)$ také, že pre všetky $t \in O_n(x) \cap M$ je $F_n(t) < \varepsilon$. Systém otvorených intervalov $\{O_n(x)\}_{x \in M}$ pokrýva kompaktnú množinu M, a preto sa z neho dá vybrať konečný počet týchto okolí $O_{n_1}(x_1)$, $O_{n_2}(x_2)$, …, $O_{n_k}(x_k)$, ktoré tiež pokryjú M. Označme teraz $n_0 = \max\ \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Pre ľubovoľné $x \in M$ existuje také j $(1 \le j \le k)$, že $x \in O_{n_j}(x_j)$, a teda $F_{n_j}(x) < \varepsilon$. Položme $n_j = n_0$. Nakoľko ale $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca, je aj $F_n(x) < \varepsilon$ pre všetky $n > n_0$. Dostali sme tento výsledok: Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky $n > n_0$ a pre každé $x \in M$ platí $F_n(x) < \varepsilon$, teda $F_n(x) \rightrightarrows 0$ na M, z čoho máme $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M. Prípad neklesajúcej postupnosti pre každé $x \in M$ sa dokáže analogicky.

D ô s l e d o k   v e t y   2 . Nech členy radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ sú spojité nezáporné funkcie na kompaktnej množine M. Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ bodovo konverguje k $S(x)$ na M, kde $S(x)$ je spojitá funkcia na M. Potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konverguje rovnomerne na M.

K dôkazu tohto dôsledku si stačí uvedomiť, že funkcie $\varphi_n(x) = S(x) - S_n(x)$, pre $n \in \mathbb{N}$ $(S_n = u_1 + \ldots + u_n)$ sú spojité na M, $\varphi_n(x) \to 0$ na M a vzhľadom na nezápornosť $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ je postupnosť $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ pre každé $x \in M$ nerastúca. Podľa vety $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ na M, teda $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ na M a dôsledok je dokázaný.

POZNÁMKA 2. Rovnomernú konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ zistíme často tak, že ho porovnáme s iným radom. Ak pre každé $x \in M$ platí $|u_n(x)| \le v_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ je majorantným radom k $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ na množine M. Z množstva postačujúcich podmienok, ktoré z vlastnosti majorantného radu usudzujú o rovnomernej konvergencii vyšetrovaného radu vyberáme tieto:

Veta 3. (Weierstrassovo[11] kritérium) Majme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, kde $u_n(x)$ sú definované na M pre $n \in \mathbb{N}$. Ak pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ (a výnimkou konečného počtu) platí $|u_n(x)| \le a_n$, $x \in M$ a číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ rovnomerne konverguje na M.

D ô k a z . Nakoľko majorantný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, podľa vety 5.2.1 platí: Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky $n > n_0$ a pre ľubovoľné $m \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} + \ldots + a_{n+m} < \varepsilon$. Pre každé $x \in M$ však platí $|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| < a_{n+1} + \ldots + a_{n+m} < \varepsilon$. Teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ rovnomerne konverguje na M.

[10] U. Dini (1845 – 1918) – taliansky matematik
[11] C. Weierstrass (1815 – 1897) – nemecký matematik

POZNÁMKA 3. Jeden z majorantných radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ možno dostať voľbou $a_n = \sup_{x \in M} |u_n(x)|$ pre n = 1, 2… Môže sa stať, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Z toho však nevyplýva, že by rad $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ nemohol rovnomerne konvergovať (pozri príklad 3).

Príklad 1. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ rovnomerne konverguje na $(-\infty,\infty)$ pretože $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Príklad 2. Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{n^5x^2}}$. Pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$ platí $|e^{-n^5x^2} \sin nx| \le n|x|e^{-n^5x^2}$. Pri pevnom n nájdeme maximum funkcie $v_n(x) = n|x|e^{-n^5x^2}$. Funkcia $v_n(x)$ je párna, preto sa stačí obmedziť na interval $\langle 0, \infty)$. Derivácia $v'_n(x) = n(1 - 2n^5x^2)e^{-n^5x^2}$ sa rovná nule v bode $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}n^{5/2}}$. Z toho, že $v_n(x) \ge 0$ pre všetky x a $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ vyplýva, že $v_n(x)$ má v bode x_0 maximum. Preto $|e^{-n^5x^2} \sin nx| \le$ $\le v_n(x) \le v_n(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}n^{3/2}} e^{-1/2}$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje, a preto skúmaný rad rovnomerne koverguje na $(-\infty, \infty)$.

POZNÁMKA 3. Veta 3. je jednoduchá, ale jej použitie je v istom zmysle úzke. Je totiž hneď zrejmé, že sa dá použiť len pre prípady, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ konverguje, teda len na prípad, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je absolútne konvergentný. Preto uvedieme ďalšie dve jemnejšie kritériá rovnomernej konvergencie radov funkcií. Najprv dokážeme jednu pomocnú vetu.

Lema (Abelova[12]) Nech $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_n$, sú reálne čísla, nech $a_i \ge a_{i+1}$, alebo $a_i \le a_{i+1}$ pre $i = 1, 2,\dots, n - 1$ a nech existuje číslo $B > 0$ také, že $|b_1 + \dots + b_i| \le B$ pre $i = 1, 2,\dots, n$. Potom $|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \le B(|a_1| + 2|a_n|)$

D ô k a z . Označme $B_i = b_1 + \dots + b_i$, pre $i = 1, 2,\dots, n$. Platí $\sum_{n=1}^{n} a_ib_i = a_1b_1 + \dots + a_nb_n = a_1B_1 +$ $+ a_2(B_2 - B_1) + \dots + a_n(B_n - B_{n-1}) = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_nB_n$. Rozdiely $(a_i - a_{n+1})$ pre $i = 1, 2,\dots, n - 1$ sú rovnakého znamienka. Preto platí

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i-1}||B_i| + |a_n||B_n| \le B[|a_1 - a_n| + |a_n|] \le B[|a_1| + 2|a_n|]$$

Veta 4. (Kritérium Dirichle[13]) Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ (2.3)

kde $a_n(x)$, $b_n(x)$ pre všetky $x \in \mathrm{N}$ sú definované na M a také, že

1. postupnosť $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ Pre každé $x \in M$ je nerastúca (neklesajuca) a $a_n(x) \rightrightarrows 0$ na M,

2. existuje konštanta $B > 0$, že pre všetky $x \in \mathrm{N}$ a pre všetky $x \in M$ platí $|B_n(x)| \le B$, kde $B_n(x) =$ $= b_1(x) + \dots + b_n(x)$. Potom rad (2.3) rovnomerne konverguje na M.

D ô k a z . Z predpokladu 2. vety 4. dostávame

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)\right| = \sum_{i=1}^{n} |B_{n+p}(x) - B_n(x)| \le |B_{n+p}(x)| + |B_n(x)| \le 2B$$

---

[12] H. Ábel (1802 – 1829) – nórsky matematik
[13] P. G. Lejeune Dirichle (1805 – 1859) – nemecký matematik

pre všetky $x \in M$, všetky $n \in \mathbb{N}$ a všetky $p \in \mathbb{N}$. Z predpokladu 1 tejto vety vyplýva, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky $n > n_0$ a pre všetky $x \in M$ platí $0 \le |a_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{6B}$. Preto, ak použijeme Ábelovu lemu dostaneme $|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| \le 2B[|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|] < \varepsilon$, pre každé $\varepsilon > 0$, každé $x \in M$ pre ľubovoľné $n > n_0$ a ľubovoľné $p \in \mathbb{N}$, čo podľa C-B princípu stačí k rovnomernej konvergencii radu (2.3).

Veta 5. (Abelovo kritérium)

1. Nech, existuje konštanta $A > 0$, že pre všetky $x \in M$ platí $|a_n(x)| \le A$ pre $n = 1, 2, \ldots$, pričom pre každé $x \in M$ je postupnosť $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca (neklesajúca).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) \rightrightarrows$ na M.

Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows$ na M.

D ô k a z . Z predpokladu 2. vety 5. máme: Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$, že pre všetky $n > n_0$, pre všetky $p \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in M$ platí $|b_{n+1}(x) + \ldots + b_{n+p}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3A}$. Podľa Ábelovej lemy platí $|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3A}[|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|] \le \varepsilon$ čo podobne ako vo vete 4 značí rovnomernú konvergenciu skúmaného radu.

Príklad 3. Uvažujme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ na takom intervale $\langle a, b\rangle$, ktorý neobsahuje body tvaru $2\pi m$, kde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ napr. na intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Položme $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Číselná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (a teda rovnomerne konverguje k nule).

$$|B_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin kx \cdot \sin\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|} \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right| =$$

$$= \frac{1}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|} \cdot \left|\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right| \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \max_{x \in \langle a, b\rangle} \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} = B < +\infty$$

Teda podľa vety 4. skúmaný rad rovnomerne konverguje na každom $\langle a, b\rangle$, ktorý neobsahuje body tvaru $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Poznamenávame, že na takomto intervale rovnomerná konvergencia sa nedá dokázať podľa vety 2. Skutočne, napr. na intervale $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$ máme $\max\limits_{\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle} \left|\dfrac{\sin nx}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$, a preto neexistuje konvergentný číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, aby $\left|\dfrac{\sin nx}{n}\right| \le a_n$ na $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$, pretože pre každý taký rad je $a_n \ge \dfrac{1}{n}$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverguje (pozri poznámku 3).

3 ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI ROVNOMERNE KONVERGENTNÝCH POSTUPNOSTÍ A RADOV

Dôležitosť pojmu rovnomernej konvergencie spočíva predovšetkým v tom, že sa dôležité vlastnosti, ako napríklad spojitosť, diferencovateľnosť, integrovateľnosť prenášajú pri vhodných predpokladoch z jednotlivých členov postupnosti alebo radu na ich limitnú funkciu alebo súčet. Ako to presnejšie myslíme, ukazujú nasledujúce vety a ich dôsledky.

Veta 1. Nech $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M, nech a je hromadným bodom množiny M a nech existuje konečná

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = A_n\,,\; n = 1, 2,\ldots \tag{3.1}$$

Potom postupnosť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n \tag{3.2}$$

alebo čo je to isté, platí zámena limit:

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) \tag{3.3}$$

D ô k a z . Ak na postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá rovnomerne konverguje na M, použijeme vetu 2.1, dostaneme výrok: Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathrm{N}$ také, že pre všetky p, $q \in \mathrm{N}$, p, $q > n_0$ a pre všetky $x \in M$ platí $|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$. Ak túto nerovnosť zoberieme v limite pre $x \to a$ máme $|A_p - A_q| \le \varepsilon$, z čoho podľa vety 5.2.1 dostávame, že číselná postupnosť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Symbolom A označme jej limitu. Ďalej platí pre každé $x \in M$ a ľubovoľné $n \in \mathrm{N}$

$$|f(x) - A| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| \tag{3.4}$$

Z faktov $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M a $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ vyplýva existencia $m \in \mathrm{N}$ takého, že pre ľubovoľné $\varepsilon/3 > 0$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pre všetky } x \in M \tag{3.5}$$

$$|A_m - A| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.6}$$

Ak využijeme predpoklad (3.1) pre $n = m$ dostaneme: Ku každému $\varepsilon/3 > 0$ existuje okolie $\mathrm{O}(a)$ také, že pre všetky

$$x \in \mathrm{O(a)} \cap M,\; x \ne a \;\text{ platí } |f_m(x) - A_m| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.7}$$

Dosadením nerovností (3.5), (3.6), (3.7) do (3.4) dostaneme $|f(x) - A| < \varepsilon$, čo je ekvivalentné tvrdeniu (3.2).

POZNÁMKA 1. Z metódy dôkazu je zrejmé, že veta 1 platí aj vtedy, ak na ľavých stranách rovnosti (3.1) a (3.2) sú rovnaké jednostranné limity. Veľmi dôležitým dôsledkom tejto vety je toto tvrdenie bezprostredne vyplývajúce z vety 1.

Veta 2. Ak $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií na intervale J taká, že $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na J, tak $f(x)$ je spojitá funkcia na J.

Rovnako ľahko sa čitateľ môže presvedčiť o platnosti nasledujúceho tvrdenia.

D ô s l e d o k vety 2. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ rovnomerne konverguje k $S(x)$ na intervale J a nech $u_n(x)$ sú na J spojité funkcie pre $n = 1, 2,\ldots$ Potom $S(x)$ je na J spojitá funkcia.

Veta 3. Nech $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$, nech $f_n(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ pre $n = 1, 2, \ldots$ Potom $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.8}$$

D ô k a z . Z rovnomernej konvergencie postupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ na $\langle a, b\rangle$ každému $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \tag{3.9}$$

Nakoľko $f_m(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, podľa vety 2.2.5 máme: K ľubovoľnému $\varepsilon/3 > 0$ existuje také delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$, že

$$U(f_m, D) - L(f_m, D) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.10}$$

Uvažujme nerovnosť $f(x) < f_m(x) + \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$, ktoré vyplýva z (3.9). Z nej dostaneme $\sup\limits_{x\in d_i} f(x) \le \sup\limits_{x\in d_i} f_m(x) + \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Vynásobením tejto nerovnosti $\Delta x_i \ge 0$ a spočítaním pre $i = 1, 2, \ldots, n$ dostaneme

$$U(f, D) \le U(f_m, D) + \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.11}$$

Podobným spôsobom ak uvažujeme nerovnosť $f_m(x) - \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)} < f(x)$ pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ dostaneme

$$L(f_m, D) - \frac{\varepsilon}{3} \le L(f, D) \tag{3.12}$$

Ak skombinujeme nerovnosti (3.10), (3.11), (3.12), dostaneme $U(f, D) - L(f, D) < \varepsilon$, odkiaľ podľa vety 2.2.5 vyplýva, že $f(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Potrebujeme dokázať ešte (3.8).

Nakoľko $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na $\langle a, b\rangle$, preto ku každému $\varepsilon/(b - a) > 0$ existuje také $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky prirodzené $n > n_0$ a pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b - a)$. Počítajme

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon$$

(použili sme vety článku 2.4). Teda platí (3.8).

Čitateľ si iste rád premyslí platnosť nasledujúceho tvrdenia.

D ô s l e d o k vety 3. Nech funkcie $u_n(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ pre $n = 1, 2, \ldots$ a nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ rovnomerne konverguje k $S(x)$ na $\langle a, b\rangle$. Potom $S(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

POZNÁMKA 2. Nasledujúci príklad nás presvedčí o tom, že zámena limity a integrálu vo vzťahu (3.8) nemusí platiť, ak ide o bodovú konvergenciu integrovateľných funkcií k limitnej funkcii, ktorá je tiež integrovateľná.

Príklad 1. Majme postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ kde $f_n(x) = nx \cdot \mathrm{e}^{-nx^2}$, $n = 1, 2,\dots$ $x \in \langle 0, 1\rangle$. Platí $f_n(0) = 0$ pre $n = 1, 2,\dots$ a pre každé $x \neq 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (presvedčte sa o tom). Teda $f_n(x) \to f(x)$ na $\langle 0, 1\rangle$ a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Predsa však $\int\limits_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = n\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-n})$, odkiaľ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

teda (3.8) neplatí.

Prejdime teraz k problému diferencovateľnosti limitnej funkcie postupnosti resp. k diferencovateľnosti súčtu funkčného radu.

Veta 4. Nech postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ definovaná na $\langle a, b\rangle$ má tieto vlastnosti:

1. $f_n(x)$ sú diferencovateľné na intervale $\langle a, b\rangle$ pre $n = 1, 2,\dots$
2. existuje bod $x_0 \in \langle a, b\rangle$ taký, že číselná postupnosť $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje,
3. $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne konverguje na $\langle a, b\rangle$.

Potom $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na $\langle a, b\rangle$, funkcia $f(x)$ je diferencovateľná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$f'(x) = [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \text{pre všetky } x \in \langle a, b\rangle \tag{3.13}$$

D ô k a z . Z predpokladov 2 a 3 vyplýva, že ku každému $\varepsilon > 0$ existuje také $n_0 \in \mathsf{N}$, že pre všetky prirodzené čísla n, $m > n_0$ platí

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.14}$$

a

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \text{pre všetky } x \in \langle a, b\rangle \tag{3.15}$$

Na funkciu $f_n - f_m$ použijeme Lagrangeovu vetu o strednej hodnote (x, $t \in \langle a, b\rangle$). Dostaneme pri použití (3.15)

$$|f_n(x) - f_m(x) - [f_n(t) - f_m(t)]| = |f_n'(c) - f_m'(c)| \cdot |x - t| \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{|x-t|}{b-a} \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (c \in (a, b)) \tag{3.16}$$

Z nerovnosti $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)]| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$ dostaneme vzhľadom na (3.14) a (3.16) platnosť výroku: ku každému $\varepsilon > 0$ existuje také $n_0 \in \mathsf{N}$, že pre všetky n, $m > n_0$ a pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, čo znamená, že $f_n(x)$ rovnomerne konverguje na $\langle a, b\rangle$. Položme $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Ukážme, že $f(x)$ je na $\langle a, b\rangle$ diferencovateľná a že platí $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Za týmto cieľom zvoľme pevne $x \in \langle a, b\rangle$ a pre $t \in \langle a, b\rangle$, $t \neq x$ označme pomocné funkcie

$$\varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x}, \quad n = 1, 2,\dots, \quad \varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \tag{3.17}$$

Podľa predpokladu 1 je zrejmé, že

$$\lim_{t\to x}\varphi_n(t) = f_n'(x), \quad n = 1, 2,\dots \tag{3.18}$$

Ak použijeme druhú nerovnicu v (3.16), máme

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| = \left|\frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x} - \frac{f_m(t) - f_m(x)}{t-x}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

platnú pre všetky $t \in \langle a, b\rangle$, $t \neq x$ a všetky n, $m > n_0$. Dostali sme teda, že $\varphi_n(t) \rightrightarrows$ na $\langle a, b\rangle$, $t \neq x$. Keďže ale $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ z definície (3.17), vidíme, že

$$\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) \quad \text{pre všetky } t \in \langle a, b\rangle,\ t \neq x \tag{3.19}$$

Zoberieme teraz na pomoc vetu 1 (vzťah (3.3)), vzťahy (3.19), (3.18) a vidíme, že $f'(x) = \lim\limits_{t\to x}\varphi(t) =$ $= \lim\limits_{t\to x}\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{t\to x}\varphi_n(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$, čím je veta 4 dokázaná.

Pre nekonečné rady má veta 4 tvar:

D ô s l e d o k vety 4. Nech funkcie $u_n(x)$, $n = 1, 2,\ldots$ sú diferencovateľné na $\langle a, b\rangle$, nech existuje bod $x_0 \in \langle a, b\rangle$ taký, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ konverguje a nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \rightrightarrows$ na $\langle a, b\rangle$. Potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ na $\langle a, b\rangle$, funkcia $S(x)$ je na $\langle a, b\rangle$ diferencovateľná a platí

$$S'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \text{ pre všetky } x \in \langle a, b\rangle \tag{3.20}$$

Príklad 2. Dokážeme, že tzv. dzeta funkcia

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} + \cdots \tag{3.21}$$

je diferencovateľná na intervale $(1, \infty)$ a platí n

$$\zeta'(x) = -\frac{\ln 2}{2^x} - \frac{\ln 3}{3^x} - \cdots - \frac{\ln n}{n^x} - \cdots \tag{3.22}$$

Skutočne rad (3.21) konverguje v každom $x \in (1, \infty)$. (Pozri príklad 5.2.1). Rad (3.22) vznikol z radu (3.21) derivovaním jednotlivých členov. Presvedčme sa, že na $(1, \infty)$ je to rovnomerne konvergentný rad. Nech $x > 1$ je ľubovoľné číslo. Zvoľme čílalo α tak, aby $1 < \alpha < x$. Členy radu (3.22) sú v absolútnej hodnote menšie než členy číselného radu $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}$. Ak použijeme integrálne kritérium (veta 5.4.8), vidíme, že $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}$ je majorantným, konvergentným radom k (3.22).

4 MOCNINOVÉ RADY

Významné postavenie medzi funkcionálnymi radmi majú mocninové alebo potenčné rady, a to pre svoju relatívnu jednoduchosť a použiteľnosť v mnohých aplikáciách.

Definícia 1. Mocninovým radom so stredom v bode $a \in \mathrm{R}$ nazývame rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \tag{4.1}$$

pričom reálne čísla a_n, $n = 0, 1, 2,\ldots$ nazývame koeficientmi tohto radu. Substitúciou $\xi = x - a$ dostaneme mocninový rad so stredom v nule

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\xi^n \tag{4.2}$$

Vyšetrovanie vlastností radu (4.1) je zrejme ekvivalentné s vyšetrovaním radu (4.2), preto sa v budúcnosti budeme skoro výlučne zaoberať radmi tvaru (4.2), pravda nezávislú premennú budeme označovať x namiesto ξ.

Veta 1. Ak rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4.3}$$

konverguje v čísle $x_0 \neq 0$, potom absolútne konverguje (a teda konverguje) pre všetky $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

D ô k a z . Nakoľko rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konverguje, platí $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, a preto postupnosť $\{a_n x_0^n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená. Existuje teda číslo $M > 0$ také, že pre všetky $n = 0, 1, \ldots$ platí $|a_n x_0^n| \leq M$. Ďalej platí $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$. Ak $|x| < |x_0|$ rad konverguje a z vety 5.4.2 vyplýva absolútna konvergencia radu (4.3) na intervale $(-|x_0|, |x_0|)$.

D ô s l e d o k v e t y 1 . Ak rad (4.3) v bode x_0 diverguje alebo relatívne konverguje, potom diverguje pre každé x, pre ktoré $|x| > |x_0|$. Dôkaz tohto dôsledku (najlepšie nepriamo) prenechávame čitateľovi.

POZNÁMKA 1. Je zrejmé, že každý rad (4.3) konverguje v svojom strede $x = 0$. Existujú rady, ktoré okrem tohto bodu nekonvergujú nikde. Takým je napr. rad $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$. Protipólom týchto radov sú rady konvergujúce pre každé reálne číslo, napr. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. O pravdivosti týchto tvrdení nás presvedčí napr. d'Alembertovo kritérium (veta 5.4.5). Ak však uvažujeme rad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ z príkladu 5.1.3 vieme, že tento rad konverguje pre $|x| < 1$ a diverguje pre ostatné reálne čísla.

Veta 2. Pre každý mocninový rad (4.3), ktorý konverguje aspoň v jednom čísle $x_0 \neq 0$, existuje taký interval $(-R, R)$, $0 < R \leq +\infty$, že rad (4.3) absolútne konverguje pre všetky $x \in (-R, R)$ a diverguje pre všetky x, pre ktoré $|x| > R$ (ak $R < \infty$).

D ô k a z . Označme M množinu absolútnych hodnôt tých čísel, v ktorých rad (4.3) konverguje. Nakoľko $x_0 \in M$, je M neprázdna. M je buď zhora ohraničená, alebo zhora neohraničená. V druhom prípade pre ľubovoľné $x \in (-\infty, \infty)$ existuje $x_1 \in M$ také, že $|x| < |x_1|$ a podľa vety 1 rad (4.3) absolútne konverguje. Keďže x bolo ľubovoľné, $R = +\infty$.

Ak M je zhora ohraničená, potom označme $R = \sup M$. Ak $|x| > R$, z vlastnosti suprema dostávame, že (4.3) diverguje. Ak máme ľubovoľné x také, že $|x| < R$ znovu z vlastnosti suprema máme zaručenú existenciu x_2 takého, že $|x| < |x_2| \leq R$, pričom veta 1. nám zaručuje, že v takomto x rad (4.3) absolútne konverguje.

Definícia 2. Interval $(-R, R)$, $0 < R \leq +\infty$, o ktorom hovorí veta 2. sa nazýva intervalom konvergencie radu (4.3), číslo R sa nazýva polomerom konvergencie tohto radu.

POZNÁMKA 2. Pre rady (4.3), ktoré okrem bodu $x_0 = 0$ nikde inde nekonvergujú (nazývame ich tiež všade divergentné rady), kladieme $R = 0$.

POZNÁMKA 3. Na zisťovanie polomeru konvergencie radu (4.3) sa využívajú kritériá konvergencie pre rady s nezápornými členmi (najčastejšie vety 5.4.4, 5.4.5, 5.4.7). Ako jedna z ukážok poslúži nasledujúca veta.

Veta 3. (Cauchy-Hadamard[14]) Nech R je polomer konvergencie radu (4.3). Označme $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$.

1. Ak $\lambda = 0$, tak $R = +\infty$.
2. Ak $\lambda = +\infty$, tak $R = 0$.
3. Ak $0 < \lambda < \infty$, tak $R = \frac{1}{\lambda}$.

---

[14] J. Hadamard (1965 – 1963) – francúzsky matematik

D ô k a z . Zvoľme ľubovoľné $x \in \mathrm{R}$, $x \neq 0$. Označme

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = \lambda \cdot |x| \tag{4.4}$$

1. Ak $\lambda = 0$, tak $\alpha = 0$ pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$ a podľa vety 5.4.4 rad (4.3) absolútne konverguje všade, a teda $R = \infty$.

2. Ak $\lambda = \infty$, z (4.4) vyplýva, že $\alpha > 1$ pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$, rad (4.3) konverguje jedine v bode $x = 0$, a teda $R = 0$.

3. Nech $0 < \lambda < \infty$. Zvoľme x tak, že $|x| < \dfrac{1}{\lambda}$, potom $\alpha < 1$, Ak $|x| > \dfrac{1}{\lambda}$, potom $\alpha > 1$, ako to vidieť z (4.4). Z vety 5.4.4 nám potom vychádza aj posledné tvrdenie vety 3.

Príklad 1. Polomer konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ je rovný $r = 1$. Skutočne $\lambda = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = 1$. Teda rad konverguje pre $x \in (-1, 1)$, diverguje pre $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. V bode $x = 1$ rad diverguje a v bode $x = -1$ konverguje.

Veta 4. Nech $0 < R \leq +\infty$ je polomer konvergencie radu (4.3). Označme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad x \in (-R, R) \tag{4.5}$$

Potom:

a) rad (4.3) rovnomerne konverguje na každom uzavretom intervale $\langle a, b\rangle \subset (-R, R)$,

b) $f(x)$ je spojitá funkcia na intervale $(-R, R)$,

c) $f(x)$ je na $(-R, R)$ diferencovateľná a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{4.6}$$

d) pre každé $x \in (-R, R)$ platí

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \tag{4.7}$$

D ô k a z .

a) Nech $\langle a, b\rangle \subset (-R, R)$. Zvoľme $r > 0$ tak, aby platilo $-R < -r < a < b < r < R$. Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ konverguje a nakoľko pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ a všetky $n \in \mathrm{N}$ je $|a_n x^n| < |a_n| r^n$ podľa vety 2.3 rad (4.3) rovnomerne konverguje na $\langle a, b\rangle$.

b) Nech x je ľubovoľný bod z intervalu konvergencie. Zvoľme $r > 0$ tak, aby $-R < -r < x < r < R$. Nakoľko rad (4.3) na intervale $\langle -r, r\rangle$ rovnomerne konverguje, podľa dôsledku vety 3.2 je $f(x)$ spojitou funkciou v bode x.

c) Nekonečný mocninový rad na pravej strane (4.6) má polomer konvergencie ktorý sa rovná R, pretože z rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ vyplýva $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}$. Intervaly konvergencie pre rady (4.3) a (4.6) sa teda rovnaké. Zvoľme ľubovoľné $x \in (-R, R)$. Tento bod leží v nejakom intervale $\langle a, b\rangle$ takom, že $-R < a < x < b < R$. Rad v (4.6) rovnomerne konverguje na $\langle a, b\rangle$ a ak použijeme dôsledok vety 3.4, dostaneme tvrdenie c).

d) Toto tvrdenie vyplýva z predchádzajúcich úvah a z dôsledku vety 3.3.

POZNÁMKA 3. Konvergencia radu (4.3) nemusí byť rovnomerná na celom intervale konvergencie $(-R, R)$. Napríklad rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konverguje na $(-1, 1)$. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}[1 + x + \cdots + x^n] = \dfrac{1}{1-x}$ pre $x \in (-1, 1)$. Ak použijeme vetu 1.1, dostaneme: $M_n = \sup\limits_{x\in(-1,1)} \left| S_n(x) - \dfrac{1}{1-x} \right| = \sup\limits_{x\in(-1,1)} \left| \dfrac{x^{n+1}}{x-1} \right|$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n \neq 0$, a teda rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ nekonverguje na $(-1, 1)$ rovnomerne. Platí však takáto veta.

Veta 5. Nech rad (4.3) má polomer konvergencie $0 < R < \infty$ a nech rad (4.3) konverguje v čísle R $(-R)$. Potom rad (4.3) rovnomerne konverguje na $\langle 0, R\rangle$ $(\langle -R, 0\rangle)$.

D ô k a z . Dôkaz urobíme pre interval $\langle 0, R\rangle$ a vyplýva priamo z Abelovho kritéria (veta 2.5). Ak použijeme tam uvedené označenia, platí pre $x \in \langle 0, R\rangle$ $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) \cdot a_n(x)$, kde $b_n(x) = \tilde{a}_n R^n$, $a_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n$, $n = 0, 1, \ldots$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)$ je číselný konvergentný rad, a pre postupnosť $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ platí $1 \geq \frac{x}{R} \geq \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geq \cdots \geq \left(\frac{x}{R}\right)^n \geq \cdots \geq 0$ pre všetky $x \in \langle 0, R\rangle$, čo podľa vety 2.5 stačí k rovnomernej konvergencii radu (4.3) na intervale $\langle 0, R\rangle$.

Príklad 2. Majme rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(0! = 1)$. Ľahko sa presvedčíme, že polomer konvergencie $R = +\infty$, teda rad konverguje na $(-\infty, \infty)$ k funkcii $f(x)$. Ukážme, že $f(x) = \mathrm{e}^x$. Podľa vety 4c) je $f(x)$ diferencovateľná funkcia, pre ktorú platí $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = f(x)$ pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$. Rovnica $f'(x) = f(x)$ je splnená pre funkciu $f(x) = c \cdot \mathrm{e}^x$, kde c je konštanta. Nakoľko $f(0) = 1 = c$, máme $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Príklad 3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ má polomer konvergencie $R = 1$ a má súčet $\frac{1}{1+x}$. Pre každé $x \in (-1, 1)$ podľa vety 4d) platí $\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots$ Posledný rad však konverguje aj pre $R = 1$, podľa vety 5 je teda integrácia možná aj pre $x = 1$. Z toho dostávame $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$.

POZNÁMKA 3. Uvažujme dva mocninové rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, ktorých polomery konvergencie sú $R_a > 0$, $R_b > 0$. Ak označíme $R = \min\{R_a, R_b\}$ potom v intervale $(-R, R)$ oba rady absolútne konvergujú. Označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Tieto rady môžeme na intervale $(-R, R)$ spočítavať, odpočítavať, násobiť (Cauchyho súčin) pričom $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = f(x) \pm g(x)$ pre všetky $x \in (-R, R)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) x^n = f(x) \cdot g(x)$ pre všetky $x \in (-R, R)$.

Príklad 4. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x}$ pre $x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

Teda $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$ pre $x \in (-1, 1)$.

Ďalej $\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + (1+2)x + \cdots + [1+2+3+\cdots+(n+1)]x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$ pre $x \in (-1, 1)$.

5 TAYLOROV RAD

Ak je funkcia $f(x)$ definovaná v okolí bodu $a \in \mathrm{R}$ a v bode a má konečnú deriváciu ľubovoľného rádu, tak hovoríme, že $f(x)$ je nekonečne diferencovateľná v bode a.

Definícia 1. Taylorovým[15] radom nekonečne diferencovateľnej funkcie $f(x)$ v bode a nazývame mocninový rad

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{5.1}$$

V diferenciálnom počte sa definuje Taylorov mnohočlen n-tého stupňa (pozri nap. [10]). Z definície 1 je zrejmé, že tieto Taylorove mnohočleny sú postupnosti čiastočných súčtov radu (5.1). Ak rad (5.1) má nenulový polomer konvergencie, potom na intervale konvergencie absolútne konverguje k funkcii $T(x)$, ktorá môže, ale nemusí sa rovnať funkcii $f(x)$. Ako príklad druhej možnosti poslúži funkcia

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ak } x\neq 0 \\ 0, & \text{ak } x=0 \end{cases}$$

Dá sa ukázať (pokúste sa to dokázať, ak to nepôjde, nájdete to napr. v [8]), že $f^{(n)}(0) = 0$ pre $n = 0, 1, 2,\ldots$ Tým sú všetky členy radu (5.1) pre našu funkciu v bode $a = 0$ nulové, preto $T(x) = 0$ pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$ a $T(x) \neq f(x)$.

Vzniká otázka, kedy Taylorov rad (5.1) funkcie $f(x)$ konverguje na nejakom intervale k funkcii $f(x)$? Po odpoveď si pôjdeme do literatúry, napr. [10] a napíšeme si Taylorov vzorec

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(f,x,a) \tag{5.2}$$

ktorý platí pre $n = 0, 1, 2,\ldots$ Ak označíme $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ (je to n-tý člen postupnosti čiastočných súčtov radu (5.1)) a $r_n(x) = R_n(f, x, a)$, vzorec (5.2) môžeme prepísať do tvaru

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) \tag{5.2′}$$

Z (5.2′) vidieť platnosť tejto vety:

Veta 1. Taylorov rad (5.1) nekonečne diferencovateľnej funkcie $f(x)$ v bode a konverguje na nejakom intervale k funkcii $f(x)$ vtedy a len vtedy, ak na tomto intervale postupnosť zvyškov Taylorovho vzorca konverguje k nule ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$ pre $x \in J$ vtedy a len vtedy, ak $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ pre $x \in J$).

POZNÁMKA 1. Ak v (5.1) zoberieme $a = 0$, dostaneme rad nazývaný Maclaurinov[16]. Ten má tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f(0)}{1!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n+\cdots \tag{5.3}$$

POZNÁMKA 2. Veta 1. je sama o sebe vlastne dosť bezcenná. Je to vlastne definícia súčtu nekonečného radu aplikovaná na rad (5.1). Zmysel dostáva jedine spolu s Taylorovou vetou o zvyšku (veta 7.7.1 z [10]). Pri rozhodovaní o tom, či $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ nám často môže pomôcť toto jednoduché tvrdenie vyplývajúce z vety 5.4.5 a vety 5.2.2:

Ak číselná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n = 1, 2,\ldots$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

---

[15] B. Taylor (1685 – 1731) – anglický matematik
[16] C. Maclaurin (1698 – 1746) – škótsky matematik

Príklad 1. Z diferenciálneho počtu (pozri napr. príklad 7.7.1 v [10]) vieme, že $e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^{\Theta x}}{(n+1)!}$, kde $0 < \Theta < 1$, $|r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}e^{\Theta x}}{(n+1)!} < e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, $r_n(0) = 0$ a podľa poznámky 2. pre $x \neq 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, teda pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ a platí $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (porovnaj a príkladom 4.2)!

Veta 2. Nech mocninový rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{5.4}$$

konverguje na intervale $(a - R, a + R)$, $R > 0$ alebo na $(-\infty, \infty)$ k funkcii $f(x)$. Potom rad (5.4) je Taylorovým radom funkcie $f(x)$ v bode a na príslušnom intervale.

D ô k a z . Platí $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ pre $x \in (a - R, a + R)$ alebo pre $x \in (-\infty, \infty)$. Potom

$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \ldots$
$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - a) + \ldots$
$\vdots$
$f^{(k)}(x) = k!\,a_k + (k + 1) \ldots 2a_{k+1}(x - a) + \ldots$

Teda pre $x = a$ dostaneme $f(a) = a_0, f'(a) = a_1, \ldots, f^{(k)}(x) = k!\,a_k, \ldots$

odtiaľ $a_0 = f(a)$, $a_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \cdots,\ a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \cdots$ takže rad (5.4) je ten istý ako rad (5.1).

D ô s l e d o k v e t y 2 . **(Veta o jednoznačnosti rozkladu)** Ak existuje rozklad funkcie $f(x)$ v okolí bodu a do mocninového radu $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, potom taký rozklad existuje jediný.

D ô k a z . Predpokladajme, že existuje okolie bodu a, $O(a)$, že pre všetky $x \in O(a)$ platí $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$. Potom podľa vety 2 je $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, z čoho $a_n = b_n$ pre $n = 0, 1, 2, \ldots$

POZNÁMKA 3. Z vety o jednoznačnosti vyplýva, že ak akýmkoľvek spôsobom rozložíme funkciu $f(x)$ do mocninového radu $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, vždy dostaneme ten istý Taylorov rad (5.1). Existujú teda rôzne techniky rozvíjania funkcií do Taylorovho radu (derivovanie, integrovanie po členoch, Taylorova veta a pod.).

Príklad 2. Rozložte do Maclaurinovho radu funkciu $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$! Platí $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$.

Ďalej $\frac{1}{x-2} = \frac{-1}{2\left(1 - \frac{x}{2}\right)} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$ pre $x \in (-2, 2)$

$\frac{1}{x-1} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ pre $x \in (-1, 1)$

Odčítaním dostaneme $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4x} + \cdots + \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n + \cdots$ pre $x \in (-1, 1)$

Príklad 3. Neelementámu funkciu $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$ rozviňte do Maclaurinovho radu. (funkciu $\frac{\sin t}{t}$ spojito rozšírime do bodu nula hodnotou 1).

Platí $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ pre $x \in (-\infty, \infty)$ (pozri cvičenie 7). Potom

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \text{ pre } x \in (-\infty, \infty)$$

Ak to integrujeme dostaneme $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t = x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}+\cdots,\ x \in (-\infty, \infty).$

6 SPOJITÁ FUNKCIA NEMAJÚCA V ŽIADNOM BODE DERIVÁCIU

Využijeme vetu 2.3 na to, aby sme si doplnili poznatky týkajúce sa vzťahu derivácie a spojitosti. Je dobre známe, že z existencie konečnej derivácie funkcie v bode vyplýva jej spojitosť v tom bode. Jednoduché príklady ukazujú, že zo spojitosti funkcie v nejakom bode ešte nemusí vyplývať existencia derivácie. Dobre známym je príklad funkcie $f(x) = |x|$, ktorá je spojitá v každom bode $x \in (-\infty, \infty)$, ale v bode 0 nemá deriváciu. Ľahko sa dá zostrojiť príklad podobného typu, ktorý ukazuje, že ak si predpíšeme ľubovoľné prirodzené číslo n, existuje spojitá funkcia, ktorá je spojitá a nemá deriváciu práve v n bodoch. Odporúčame čitateľovi, aby si taký jednoduchý príklad premyslel. My sa budeme zaoberať otázkou o niečo zložitejšou. Ukážeme, že existuje funkcia f definovaná na intervale spojitá na ňom a nemajúca deriváciu v nijakom bode toho intervalu. Prvý príklad takéhoto druhu zostrojil Weierstrass. Príklad bol publikovaný v práci Du Bois Reymonda[17] [2]. Elementárnejši príklad dal Van der Waerden[18] [12]. Príklad, ktorý tu uvedieme bude takého typu.

Príklad. (Obmedzíme sa tu na interval $\langle 0, 1)$. Ľahko však bude vidieť, že toto obmedzenie je nepodstatné.) Označme pre $x \in \langle 0, 1)$ znakom $\{x\}$ vzdialenosť čísla x od najbližšieho celého čísla. Teda ak h je celé také, že $h \le x \le h + 1$ položíme $\{x\} = \min(x - h, h + 1 - x)$. Ak číslo $x \in \langle 0, 1)$ má desatinný zápis v tvare $x = 0{,}a_1a_2\ldots$, kde a_i je niektoré z čísel 0, 1, …, 9, potom je $\{x\} = x$ alebo $\{x\} = 1 - 0{,}a_1a_2\ldots$ podľa toho, či $x \le \frac{1}{2}$ alebo $x \ge \frac{1}{2}$. z toho ľahko vyplýva, že ak n je ľubovoľné nezáporné celé číslo, je $\{10^n x\} = 0{,}a_{n+1}a_{n+2}\ldots$ alebo $\{10^n x\} = 1 - 0{,}a_{n+1}a_{n+2}\ldots$ podľa toho, či $0{,}a_{n+1}a_{n+2}\ldots$ je menšie alebo rovné, alebo väčšie alebo rovné ako $\frac{1}{2}$.

Pre $x \in \langle 0, 1)$ položme

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n} \tag{6.1}$$

O tejto funkcii ukážeme, že je spojitá a nemá v žiadnom bode deriváciu. Obmedzíme sa pri dôkaze na body $x \in (0, 1)$. Spojitosť funkcie f vyplýva z toho, že $\frac{\{10^n x\}}{10^n}$ sú spojité pre n = 0, 1, 2,… a z toho (pozri vetu 2.3), že $\frac{\{10^n x\}}{10^n} \le \frac{1}{10^n}$.

[17] Du Bois Reymond (1831 – 1889) – nemecký matematik
[18] B. L. Van der Waerden – žijúci holandský matematik

Ostáva teda len dokázať, že f nemá deriváciu. Existencia derivácie v bode $x \in (0, 1)$ to je vlastne existencia limity $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Na to, aby sme dokázali, že tá limita neexistuje, stačí dokázať, že existuje aspoň jedna taká postupnosť $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$, že $\lim\limits_{m\to\infty} h_m = 0$ a pritom neexistuje $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$.

Za postupnosť $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ zvolíme postupnosť $h_m = \pm 10^{-m}$. Zrejme tá postupnosť bude konvergovať k nule bez ohľadu na to, ktoré zo znamienok + alebo − zvolíme pre dané m. Dohodneme sa teda takto. Ak v čísle $x = 0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots$ je cifra $a_m = 4$ alebo $a_m = 9$ položíme $h_m = -10^{-m}$, inak položíme $h_m = 10^{-m}$.

Skúmajme teraz výraz $\{10^n(x + h_m)\} - \{10^n x\}$. Je okamžite vidieť, že ak $n \geq m$, máme

$$\{10^n(x + h_m)\} - \{10^n x\} = \{10^n x \pm 10^{n-m}\} - \{10^n x\} = \{10^n x\} - \{10^n x\} = 0 \tag{6.2}$$

Iná je situácia, ak $n < m$. Vtedy je $\{10^n(x + h_m)\} - \{10^n x\} = \{10^n x \pm 10^{n-m}\} - \{10^n x\}$. Vďaka tomu, ako sme sa dohodli voliť $\pm h_n$ pri $a_m = 4$ a $a_m = 9$ (rozmyslite si to!), je

$$\{10^n x \pm 10^{n-m}\} - \{10^n x\} = \pm 10^{n-m} \tag{6.3}$$

Ak teda uvážime (6.2) a (6.3), dostávame pre dané m

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m} = 10^m\sum_{n=0}^{\infty}\pm\frac{\{10^n(x\pm 10^{-m})\}-\{10^n x\}}{10^n} = 10^m\sum_{n=0}^{m-1}\pm\frac{\{10^n(x\pm 10^{-m})\}-\{10^n x\}}{10^n} \tag{6.4}$$

Vidíme teda (uvážte ešte raz, že platí (6.3)), že výraz (6.4) je celé číslo. Ďalej vidieť, že postupnosť celých čísel $\left\{\dfrac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ definovaná pomocou (6.4) nie je konštantná od žiadneho pevného indexu. Pretože je to postupnosť celých čísel, nemôže konvergovať. To znamená, že $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$ neexistuje.

Cvičenie

1. Nech $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M, $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$ na M a nech c_1, c_2 sú konštanty. Potom $c_1 f_n(x) + c_2 g_n(x) \rightrightarrows$ $\rightrightarrows c_1 f(x) + c_2 g(x)$ na M. Dokážte!

2. Ak $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M a nech funkcia $g(x)$ je na M ohraničená. Potom $g(x)\cdot f_n(x) \rightrightarrows g(x)\cdot f(x)$ na M. Dokážte!

3. Na základe cvičení 1. a 2. sformulujte a dokážte analogické vety pre nekonečné rady funkcií.

4. Dokážte túto nevyhnutná podmienku rovnomernej konvergencie radu: Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ na M potom $u_n(x) \rightrightarrows 0$ na M.

5. Integrovaním radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ vyjadrite funkciu $\operatorname{arctg} x$ pre $x \in (-1, 1)$ v tvare potenčného radu a nájdite súčet radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$.

6. Vyjadrite $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ v tvare nekonečného radu.

7. Dokážte správnosť týchto rozvojov do Maclaurinovho radu

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{pre } x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pre } x \in (-\infty, \infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n}}{n} \quad \text{pre } x \in (-1, 1)$$

(pozri príklad 4.3).

Kapitola VII.

DODATOK

1 MNOŽINY BODOV NESPOJITOSTI RIEMANNOVSKY INTEGROVATEĽNÝCH FUNKCIÍ

Vo vete 2.3.1 sme dokázali, že každá spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$ je integrovateľná. Súčasne však príklad 2.3.1 ukazuje, že spojitosť nie je nevyhnutnou podmienkou integrovateľnosti. Ukazuje súčasne, že integrovateľná funkcia môže mať aj nekonečne mnoho bodov nespojitosti. Nasledujúci príklad ukazuje, že existuje taká funkcia na intervale $\langle 0, 1\rangle$, ktorá má nekonečnú množinu bodov nespojitosti, pričom tá množina je hustá v $\langle 0, 1\rangle$, to znamená, že v každom podintervale intervalu $\langle 0, 1\rangle$ existuje aspoň jeden bod z tej množiny, ale funkcia je na tomto intervale integrovateľná.

Príklad 1. (Riemannova funkcia) Pre $x \in \langle 0, 1\rangle$ položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \text{ iracionálne} \\ \dfrac{1}{q} & \text{pre } x \text{ racionálne tvaru } \dfrac{p}{q} \text{ kde } p, q \text{ sú nesúdeliteľné} \end{cases}$$

V každom racionálnom čísle je f nespojitá. Skutočne, ak x_0 je racionálne, existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde x_n sú iracionálne a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Keďže $f(x_0) = \dfrac{1}{q} > 0$, $f(x_n) = 0$ pre $n = 1, 2,\ldots$ máme $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, teda $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$.

V každom iracionálnom čísle je f spojitá. Ak je x_0 iracionálne, je $f(x_n) = 0$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Existuje prirodzené N tak, že $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Racionálnych čísel tvaru $\dfrac{p}{q}$ (p, q nesúdeliteľné), kde $q > N$ je len konečne mnoho. Existuje teda $\delta > 0$ tak, že interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ neobsahuje žiadne také číslo. Teda pre $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ máme buď $f(x) = 0$, ak x je iracionálne, alebo $f(x) = \dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{N}$, ak x je racionálne. Teda $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$ pre každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Tým je spojitosť f v bode x_0 dokázaná.

Ukážeme, že f je integrovateľná. Nech $\varepsilon > 0$. Zvoľme N tak, aby $\dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Nech k je počet tých racionálnych čísel tvaru $\dfrac{p}{q}$, kde $q \leq N$. Zvoľme delenie D intervalu $\langle 0, 1\rangle$ tak, aby jeho norma bola menšia ako $\dfrac{\varepsilon}{2k}$. Potom platí $S(f, D) = \sum\limits_i' f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum\limits_i'' f(t_i)(x_i - x_{i-1})$, kde v prvej sume Σ' sčítavame cez tie i, pre ktoré t_i sú racionálne tvaru $\dfrac{p}{q}$ a takého tvaru, že $q \leq N$ a v druhej cez všetky ostatné i. Z toho, že prvých bodov je najviac k a norma delenia je menšia ako $\dfrac{\varepsilon}{2k}$ dostaneme $\Sigma' f(t_i)(x_i - x_{i-1}) < k\dfrac{\varepsilon}{2k} = \dfrac{\varepsilon}{2}$. V druhej sume je $f(t_i) < \dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, teda platí $\Sigma'' f(t_i)(x_i - x_{i-1}) < \dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. V oboch sumách sú nezáporné sčítance. Teda máme $|S(f, D) - 0| = \Sigma' f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \Sigma'' f(t_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$. To dokazuje (veta 2.5.1), že f je integrovateľná.

Vieme už teda, že množina bodov nespojitosti Riemannovsky integrovateľnej funkcie môže byť i nekonečná a hustá v danom intervale $\langle a, b\rangle$. Doteraz v našich príkladoch tá množina bola vždy spočítateľná. Možno ísť a nespojitosťou aj ďalej? Ako je charakterizovaná množina bodov nespojitosti Riemannovsky integrovateľnej funkcie? To je prirodzená otázka, ktorá tu vzniká. Odpoveď na ňu dáva nasledujúca veta, ktorá charakterizuje tá množinu pomocou Lebesguovej miery. Našťastie k tomu nepotrebujeme žiadnu teóriu Lebesguovej miery. Stačí nám vedieť, kedy množina má Lebesguovu mieru nula.

Definícia 1. Hovoríme, že množina M má Lebesguovu mieru nula, ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje taká postupnosť $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ intervalov, že platí $M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \le \varepsilon$.

Veta 1. Ohraničená funkcia f definovaná na $\langle a, b\rangle$ je Riemannovsky integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ vtedy a len vtedy, ak množina jej bodov nespojitosti má Lebesguovu mieru nula.

Dôkaz tejto vety nebudeme robiť. Čitateľ, ktorého to zaujíma, nájde ho napríklad v [1].

Zaujímavé sú pre nás dôsledky tejto vety.

Dôsledok 1. (Postačujúca podmienka pre integrovateľnosť.) Ak ohraničená funkcia f má spočítateľnú množinu bodov nespojitosti na $\langle a, b\rangle$, tak je integrovateľná.

Dôkaz. Stačí dokázať, že každá spočítateľná množina má Lebesguovu mieru rovnú nule. Ak však M je spočítateľná, tak existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $M = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Utvorme intervaly $\left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$ máme $M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$ a navyše $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, teda M má Lebesguovu mieru nula.

Z vety 1 vyplývajú ako ďalšie dôsledky i niektoré postačujúce podmienky pre integrovateľnosť, ktoré sme už predtým dokázali.

Dôsledok 2. Každá spojitá funkcia je integrovateľná.

Dôkaz. Vyplýva to zo zrejmého faktu, že množina bodov nespojitosti funkcie f je prázdna, a teda má Lebesguovu mieru rovnú nule.

Dôsledok 3. Každá monotónna funkcia na $\langle a, b\rangle$ je na $\langle a, b\rangle$ Riemannovsky integrovateľná.

Dôkaz. Vyplýva z toho, že množina bodov nespojitosti monotónnej funkcie je spočítateľná. Ako je to však s otázkou, či môžu existovať aj funkcie, ktoré majú nespočítateľnú množinu bodov nespojitosti a predsa sú Riemannovsky integrovateľné. To súvisí s tým, či existuje množina M, ktorej Lebesguova miera je rovná nule a pritom M je nespočítateľná a ďalej s tým, či existuje taká funkcia, ktorej množina bodov nespojitosti je taká množina. Je zaujímavé, že aj také funkcie existujú. Teda existuje Riemannovsky integrovateľná funkcia s nespočítateľnou množinou bodov nespojitosti. Dôkaz takéhoto faktu si môže usilovný čitateľ skonštruovať pomocou niektorých cvičení za týmto článkom.

Cvičenie

1. Ak E je množina, ktorá má Lebesguovu mieru nula, tak každá podmnožina $F \subset E$ má Lebesguovu mieru nula.

2. V definícii množiny Lebesguovej miery nula možno nahradiť otvorené intervaly uzavretými alebo polouzavretými.

3. V definícii množiny Lebesguovej miery nula možno nahradiť nerovnosť $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \le \varepsilon$ nerovnosťou $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon$.

4. Ak $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť množín, ktorej členy majú Lebesguovu mieru nula, tak aj $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ má Lebesguovu mieru nula.

5. Nech C Je množina všetkých takých čísel x v intervale $\langle 0,\ 1\rangle$, ktoré sa dajú napísať v tvare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}$, kde $\alpha_n = 0$ alebo $\alpha_n = 2$. Ukážte, že množina C je nespočítateľná. (Množinu C nazývame Cantorovou množinou.)

Návod: Množina postupností $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\alpha_n = 0$ alebo $\alpha_n = 2$ je nespočítateľná.

6. Nech C je množina z cvičenia 5. Ukážte, že žiadne číslo $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ nepatrí do C.

Návod: Uvážte, kde sa dostane x, ak $\alpha_1 = 0$ a kde sa dostane, ak $\alpha_1 = 2$.

7. Metódou podobnou ako v cvičení 6 dokážte, že ani čísla, ktoré sú z intervalov $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ nepatria do C. (Nakreslite!)

8. Zovšeobecnite cvičenia 4 a 5.

9. Na základe cvičenia 7 ukážte, že Cantorova množina má Lebesguovu mieru nula.

Návod: Z cvičenia 7 vyplynie, že Cantorova množina je časťou zjednotenia konečného počtu uzavretých intervalov, pre ktoré súčet dĺžok je menší ako dopredu dané číslo $\varepsilon > 0$.

10. Definujme na intervale $\langle 0,\ 1\rangle$ funkciu f takto $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad x \in C \\ 0 & \text{ak} \quad x \notin C \end{cases}$. Ukážte, že

a) Množina bodov nespojitosti funkcie f je práve množina C,

b) f je integrovateľná.

2 POZNÁMKA K PRIESTORU RIEMANNOVSKY INTEGROVATEĽNÝCH FUNKCIÍ

Doteraz sme sa prevažne zaoberali Riemannovsky integrovateľnými funkciami jednotlivo, menej sme si ich všímali ako množiny. Aj keď treba povedať, že bola tu už akási výnimka. Vo vetách 2.4.1 a 2.4.2 sme ukázali, že keď $f(x) \in \mathscr{R}\langle a,\ b\rangle$ a c je reálne číslo, tak $f + g \in \mathscr{R}\langle a,\ b\rangle$ a $cf(x) \in \mathscr{R}\langle a,\ b\rangle$. Z toho ihneď vyplýva, že $\mathscr{R}\langle a,\ b\rangle$ je vektorový priestor nad poľom reálnych čísel (pozri napr. [9]), takže sme vlastne ukázali, že tie funkcie ako množina pri zvyčajných operáciách súčtu a násobku tvoria známu algebrickú štruktúru. Dôležitý je však aj iný pohľad na $\mathscr{R}\langle a,\ b\rangle$. Prv ako by sme k nemu pristúpili, pripomeňme si známu situáciu z číselnej osi. Na množinu $\mathsf{R} = (-\infty,\ \infty)$ sa tiež môžeme pozerať ako na vektorový priestor pri zvyčajných operáciách súčtu a násobku reálnym číslom. Možno sa však na ňu pozerať, a vieme, že je to veľmi výhodné, aj tak, že na nej zavedieme „vzdialenosť“ medzi reálnymi číslami x, y tak, že položíme $d(x,\ y) = |x - y|$. Táto vzdialenosť nám robí neoceniteľné služby napríklad pri zavádzaní pojmu okolia bodu. Je známe, že spĺňa tieto vlastnosti pre každé x, y, $z \in \mathsf{R}$:

1. $d(x,\ y) \geq 0$, $d(x,\ y) = 0$ vtedy a len vtedy, ak $x = y$,
2. $d(x,\ y) = d(y,\ x)$,
3. $d(x,\ y) \leq d(x,\ y) + d(y,\ z)$.

Zoberme si teraz namiesto R ľubovoľnú množinu X a pripustíme, že je možné zaviesť funkciu d tak, že pre každé x, y, $z \in X$ sú splnené vlastnosti 1., 2., 3. V takom prípade hovoríme, že funkcia d je metrika na X a hovoríme ďalej, že X je pri tejto metrike metrický priestor alebo že usporiadaná dvojica $(X,\ \rho)$ je metrický priestor.

Naša poznámka, ktorá je obsahom tohto článku sa týka takejto otázky. Je možné zaviesť na množine $\mathscr{R}\langle a,\ b\rangle$ všetkých Riemannovsky integrovateľných funkcií na $\langle a,\ b\rangle$ nejakú metriku ρ (píšeme ρ namiesto d) tak, aby nám tá metrika robila dobré služby? Najprv dokážeme túto vetu.

Veta 1. Pre $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ položme $\rho^*(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$. Potom platí:

1. $\rho^*(f, g) \geq 0$, $\rho^*(f, f) = 0$,
2. $\rho^*(f, g) = \rho^*(g, f)$,
3. $\rho^*(f, h) \leq \rho^*(f, g) + \rho^*(g, h)$.

D ô k a z . Platnosť 1. vyplýva bezprostredne z tvrdenia 2.4.3. Platnosť 2. je zrejmá a 3. vyplýva z nerovnosti $|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$ pre $x \in \langle a, b\rangle$ a z viet 2.4.2 a 2.4.3.

Funkcia ρ^* má podobné vlastnosti ako metrika. Metrika to nie je len z toho dôvodu, že môže byť $\rho^*(f, g) = 0$ a pritom nemusí byť $f = g$ (stačí zobrať f, g tak, aby sa líšili v jednom bode). Ak by sme však „nerozlišovali" dve funkcie f, g, pre ktoré $\rho^*(f, g) = 0$, dostali by sme pomocou $\rho^*(f, g)$ metriku. Vysvetlime to „nerozlišovanie" presnejšie.

Definícia 1. Budeme hovoriť, že $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ sú ekvivalentné a písať $f \sim g$, ak $\rho^*(f, g) = 0$.

Veta 1. Pre $f, g, h \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ platí
1*. $f \sim g$
2*. $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$
3*. $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$

D ô k a z . Vyplýva z platnosti 1., 2., 3. vo vete 1.

Relácia ~ je teda reflexívne symetrická a tranzitívna relácia (to znamená, že je to ekvivalencia ako sa to v algebre zavádza (pozri [9]). Existuje teda rozklad, t. j. systém navzájom disjunktných množín, ktorých zjednotenie je $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Pritom ak dve funkcie f, g sa dostanú do toho istého prvku rozkladu (tzv. bloku), tak sú ekvivalentné a obrátene (pozri [9]).

Budeme ďalej označovať znakom $\tilde{\mathscr{R}}\langle a, b\rangle$ systém tých prvkov rozkladu (blokov). Uvedomme si, že každá funkcia $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ patrí práve do jedného z blokov, ten blok označíme $\tilde{f}$. Môže sa pravdaže stať, že pre $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ je $\tilde{f} = \tilde{g}$. To je však práve vtedy, ak $f \sim g$. Pre $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ definujme $\rho(\tilde{f}, \tilde{g}) =$ $= \rho^*(f, g)$. Treba si uvedomiť, že nezáleží na tom, pomocou ktorej funkcie sme blok $\tilde{f}$, resp. $\tilde{g}$ určili, pretože platí toto tvrdenie:

Veta 2. Ak $f, f_1, g, g_1 \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ sú také, že $\tilde{f} = \tilde{f}_1$, $\tilde{g} = \tilde{g}_1$ tak $\rho^*(f, g) = \rho^*(f_1, g_1)$.

D ô k a z . Z toho, že $\rho^*(f, f_1) = \rho^*(g, g_1) = 0$ a z trojuholníkovej nerovnosti máme

$$\rho^*(f, g) \leq \rho^*(f, f_1) + \rho^*(f_1, g_1) + \rho^*(g_1, g) = \rho^*(f_1, g_1)$$

teda $\rho^*(f, g) \leq \rho^*(f_1, g_1)$.

Analogickým spôsobom sa dokáže obrátená nerovnosť, teda $\rho^*(f, g) = \rho^*(f_1, g_1)$.

Veta 3. Funkcia ρ je na $\tilde{\mathscr{R}}\langle a, b\rangle$ metrikou. Teda $(\tilde{\mathscr{R}}\langle a, b\rangle, \rho)$ je metrický priestor.

D ô k a z . Symetria a trojuholníková nerovnosť vyplýva z definície 1 a zo symetrie a trojuholníkovej nerovnosti platnej pre ρ^*. Nezápornosť ρ je tiež zrejmá, tak isto ako aj vlastnosť $\rho(\tilde{f}, \tilde{f}) = 0$. Stačí teda dokázať len to, že ak $\rho(\tilde{f}, \tilde{g}) = 0$, tak $\tilde{f} = \tilde{g}$. Z platnosti $\rho(\tilde{f}, \tilde{g}) = 0$ však máme $\rho^*(f, g) = 0$, teda $f \sim g$, a teda $\tilde{f} = \tilde{g}$.

Priestor $\tilde{\mathscr{R}}\langle a, b\rangle$ je aj vektorovým priestorom nad poľom reálnych čísel, ak zavedieme prirodzeným spôsobom sčítanie blokov a násobenie bloku reálnym číslom. Robí sa to takto:

Definícia 2. Pre $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{\mathscr{R}}\langle a, b\rangle$ a pre c reálne definujeme $\tilde{f} + \tilde{g} = \widetilde{f + g}$, $c\tilde{f} = \widetilde{cf}$.

Je nevyhnutné poznamenať, že k oprávnenosti tejto definície by bolo treba dokázať dve veci. Najprv to, že ak blok $\tilde{f}$ je určený nejakou inou funkciou, napr. f_1, teda ak $\tilde{f} = \tilde{f}_1$ a blok $\tilde{g}$ nejakou g_1, pre ktorú $\tilde{g}_1 = \tilde{g}$. potom platí $(f_1 + g_1) \sim (f + g)$, teda že $\widetilde{f_1 + g_1} = \widetilde{f + g}$. Podobnú úvahu by bolo treba urobiť pre násobok. Sú to však jednoduché veci a ponechávame ich preto na dôkaz čitateľovi. (Cvičenie 1.).

To, čo sme doteraz ukázali, možno zhrnúť prehľadne aj keď trochu nepresne takto: Na množinu $\mathcal{R}\langle a, b\rangle$ všetkých Riemannovsky integrovateľných funkcií sa možno pozerať ako na metrický priestor, ak za vzdialenosť dvoch funkcií f, $g \in \mathcal{R}\langle a, b\rangle$ zoberieme číslo $\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$ a pritom nerozlišujeme funkcie f, g, ak $\int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x = 0$.

Skončíme tento odsek úvahami, ktoré tu neuzavrieme, ale považujeme za dôležité, aby čitateľ bol s nimi oboznámený.

V metrickom priestore $\tilde{\mathcal{R}}\langle a, b\rangle$ (ako konečne v každom metrickom priestore) možno zaviesť pojem Cauchyho (resp. cauchyovskej) postupnosti.

Definícia 3. Postupnosť $\tilde{f}_n \in \tilde{\mathcal{R}}\langle a, b\rangle$ nazývame Cauchyho (alebo tiež fundamentálnou), ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pre $m, n \geq n_0$ je $\rho(\tilde{f}_m, \tilde{f}_n) < \varepsilon$.

Z teórie postupností reálnych čísel je známe, že postupnosť reálnych čísel je Cauchyho (cauchyovská) vtedy a len vtedy, ak je konvergentná. Cauchy-Bolzanovo kritérium nám to zaručovalo.

Je teda prirodzená táto otázka: Ak je postupnosť $\{\tilde{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\tilde{\mathcal{R}}\langle a, b\rangle$ Cauchyovská, existuje potom $\tilde{f}$ tak, že $\{\tilde{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $\tilde{f}$, teda tak, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\tilde{f}_n, \tilde{f}) = 0$?

Také metrické priestory, kde každá cauchyovská postupnosť konverguje, sa nazývajú úplné. Teda naša otázka znie: Je $\tilde{\mathcal{R}}\langle a, b\rangle$ úplný priestor? Jeden z najsmutnejších faktov vcelku veľmi peknej a nepochybne užitočnej teórie Riemannovho integrálu je negatívna odpoveď na túto otázku. Priestor $\tilde{\mathcal{R}}\langle a, b\rangle$ nie je úplný. Táto skutočnosť je jedným z podnetov, ktorý vedie k štúdiu všeobecnejších integrálov ako je integrál Riemannov, najmä k štúdiu Lebesguovho integrálu. O tom sa dozvieme neskôr.

Cvičenie

1. Dokážte

a) Ak $f \sim f_1$, $g \sim g_1$, tak $f + g \sim f_1 + g_1$,

b) Ak $f \sim f_1$ a c je reálne, tak $cf \sim cf_1$.

2. Zaveďte priestor $\tilde{\mathcal{R}}^{(2)}\langle a, b\rangle$ analogickým spôsobom ako sme zaviedli $\mathcal{R}\langle a, b\rangle$, len s tým rozdielom, že zavedieme $\rho_2^*(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f-g)^2 \,\mathrm{d}x}$. Ukážte, že ρ_2^* má vlastnosti 1., 2., 3. z vety 1. Zaveďte metriku ρ_2 na $\tilde{\mathcal{R}}^{(2)}\langle a, b\rangle$ pomocou ρ_2^*.

Návod; Pri dôkaze trojuholníkovej nerovnosti pre ρ_2^* využite Cauohyho-Buňakovského nerovnosť.

3. Zaveďte v $\tilde{\mathcal{R}}^{(2)}\langle a, b\rangle$ takúto operáciu $(\cdot)$. Pre $\tilde{f}$, $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{R}}^{(2)}\langle a, b\rangle$ položte $\tilde{f} \cdot \tilde{g} = \int_a^b f(x) g(x) \,\mathrm{d}x$. Ukážte, že táto operácia nezávisí od toho, pomocou akej f resp. g sme bloky $\tilde{f}$, resp. $\tilde{g}$ dostali.

4. Ukážte, že operácia $(\cdot)$ zavedená v cvičení 4 je skalárnym súčinom (pozri [9]), t. j. pre $f, g, h \in \tilde{\mathcal{R}}\langle a, b\rangle$ platí:

a) $(\tilde{f} \cdot \tilde{f}) \geq 0$, $(\tilde{f} \cdot \tilde{f}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} = 0$ (Posledná nula je nulový prvok vektorového priestoru $\tilde{\mathcal{R}}^{(2)}\langle a, b\rangle$.),

b) $(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = (\tilde{g} \cdot \tilde{f})$,

c) $(c\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = c(\tilde{f} \cdot \tilde{g})$ pre každé c reálne,

d) $(\tilde{f} \cdot (\tilde{g} + \tilde{h})) = (\tilde{f} \cdot \tilde{g}) + (\tilde{f} \cdot \tilde{h})$.

5. Zaveďme funkciu $\|\tilde{f}\|_2 = \sqrt{(\tilde{f} \cdot \tilde{f})}$ pre $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{R}}^2\langle a, b\rangle$ a dokážte, že platí pre $\tilde{f}$, $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{R}}^{(2)}\langle a, b\rangle$ a každé c reálne

a) $\|\tilde{f}\|_2 \geq 0$

b) $\|c\tilde{f}\|_2 = c\|\tilde{f}\|_2$

c) $\|\tilde{f} + \tilde{g}\|_2 \leq \|\tilde{f}\|_2 + \|\tilde{g}\|_2$

LITERATÚRA

[1] BANACH, S.: *Wstęp do teorii funkcji rzecziwistych*. Waršava, 1951.
[2] DU BOIS-REYMOND, R.: Versuch einer Classification der willkürlichen Function reeler argumente. In: *Jour. für Math*. 79, 1875, 21-37.
[3] DEMIDOVIČ, B. P.: *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu*. Moskva : Nauka, 1977.
[4] FICHTENGOĽC, G. M.: *Kurs differencialnogo i integraľnogo isčislenia* II. Moskva : GITTL, 1966.
[5] FICHTENGOĽC, G. M.: *Kurs differencialnogo i integraľnogo isčislenia* III. Moskva : GITTL, 1963.
[6] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet* II. Praha : Academia, 1977.
[7] JARNÍK, V.: *Integrálni počet* I., Praha : Nakladatelství ČSAV, 1963.
[8] KUDRAVCEV, L. D.: *Kurs matematičeskogo analiza* I. Vysšaja škola, 1981.
[9] MAC LANE, S. – BIRKHOPF, G.: *Algebra*, Bratislava : Alfa, 1974.
[10] NEUBRUNN, T. – VENCKO, J.: *Matematická analýza I.* (skriptá). Bratislava : RUK, 1992.
[11] RUDIN, W.: *Principles of matematical analysis*. New York, 1964. Ruský preklad, Moskva, 1976.
[12] VAN DER WAERDEN, B. L.: Ein einfaches Beispiel einer nicht differenzierbaren stetigen Funktion. In: *Math. Zeitschr*., 32, 1930, 474-475.