Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Štátnice z bioinformatiky

Vypracované témy

Študijný program: Bioinformatika
Študijný odbor: Bioinformatika

Bratislava, 2018
Prví Bioinformatici

Obsah

Kapitola 1

Algebra

1.1 Vektorové priestory, lineárne zobrazenia

1.1.1 priestor, podpriestor, lineárna závislosť, báza a dimenzia

1.1.2 Steinitzova veta

1.1.3 súčty podpriestorov

1.1.4 lineárne zobrazenia, kompozícia lineárnych zobrazení, inverzné lineárne zobrazenia, matica lineárneho zobrazenia, jadro a obraz lineárneho zobrazenia

1.2 Matice a riešenia lineárnych rovníc nad poľom F

1.2.1 matice, operácie s maticami (násobenie, sčítanie), elementárne riadkové operácie

1.2.2 trojuholníkový a redukovaný trojuholníkový tvar matice

1.2.3 systémy lineárnych rovníc nad poľom F

1.2.4 množina riešení homogénnych a nehomogénnych systémov lineárnych rovníc, existencia a tvary riešení

1.3 Determinanty

1.3.1 Determinant matice

1.3.2 Vlastnosti determinantov

1.3.3 Výpočty determinantov a ich použitie pri riešení lineárnych rovníc a hľadaní inverznej matice

Kapitola 2

Biochémia

2.1 Chémia ako logický základ biologického fenoménu DONE

Status: DONE Source: Prezentácia 1

2.1.1 Základné vlastnosti živých systémov

Zložité a organizované
Bio štruktúry majú funkčný význam
Aktívne zapojené do premien energie
Schopnosť replikácie
Chemický základ

2.1.2 Biomolekuly

HOCN – schopnosť vytvárať kovalentné väzby cez e^-páry → rôzne štruktúry

2.1.3 Vlastnosti biomolekúl

Štruktúrna polarita (napr. 5' → 3')
Informatívnosť (napr. DNA, polypeptidy)
Trojrozmerná štruktúra

2.1.4 Vlastnosti vody

Vysoká hodnota teploty topenia a varu, výparného tepla, povrchového napätia
Polarita ← Lomená štruktúra

Tvorba vodíkových väzieb
Solvatačné vlastnosti
    Polárne látky → vodíkové väzby
    Nepolárne → hydrofóbne interakcie

2.1.5 Typy a význam slabých interakcií v biologických štruktúrach

Slabé interakcie udržujú 3D štruktúru a určujú interakcie
    Napr. biomolekulárne rozpoznávanie
    Obmedzené vhodné enviromentálne podmienky
Van der Waalsove
Vodíkové
Iónové
Hydrofóbne

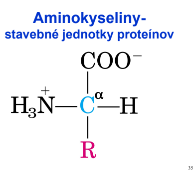
2.1.6 Hydrofóbne interakcie

Disperzia lipidov → usporiadavajú okolitú $H2O$
Lipidy sa zoskupujú → entropia systému rastie, výhodnejší stav
Micely → hydrofóbne konce idú dnu, entropia systému vyššia

2.2 Aminokyseliny a proteíny DONE

Status: DONE Source: Prezentácia 1

2.2.1 Všeobecný vzorec AK



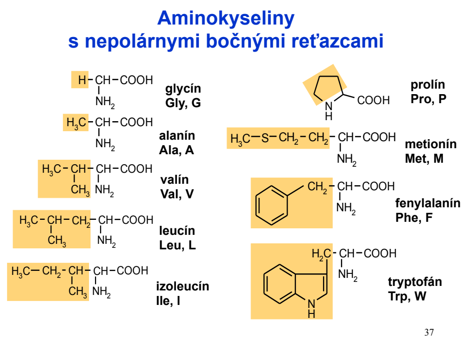
2.2.2 Klasifikácia AK

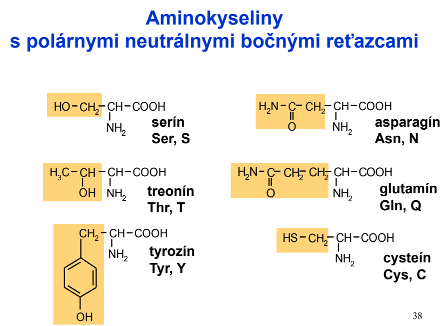
D, L izoméria
rozdelenie na základe chem vlastností side chain

náboj
schopnosť viazať H
Kyslá/zásaditá

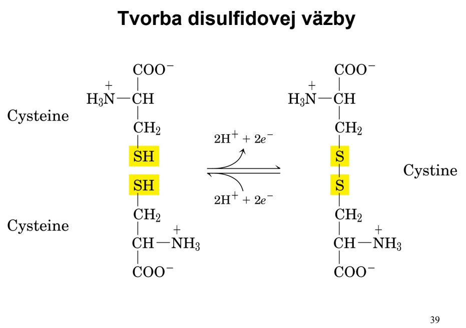
Nepolárne – hydrofóbne
Polárne – hydrofilné

2.2.3 vzorce AK



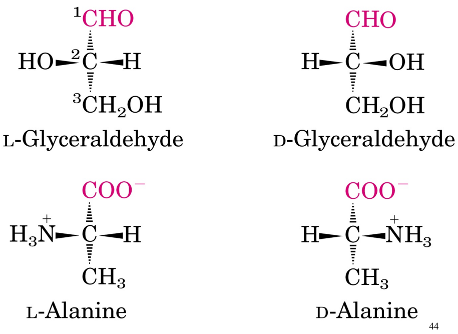


Tvorba disulfidovej väzby



2.2.4 optická aktivita

Schopnosť otáčať rovinu polarizovaného svetla – napr. Vlnenie fotónu ide zhora dole → zľava doprava
Všetky AK okrem glycínu
L a D aminokyseliny



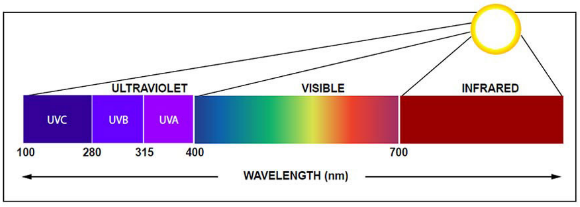
44

2.2.5 spektroskopické vlastnosti AK

Absorbujú v infrač. oblasti

Trp a tyr, menej Phe v UV

Absorbcia pri 280nm sa používa pri detekcii proteínov



2.2.6 acidobázické vlastnosti AK

Pri nízkom pH je veľa H+, AK stráca čiastočne negatívny náboj a ostane s kladným.

Pri vysokom pH je veľa OH– → bude mať záporný náboj

2.2.7 Zwitterióny, amfotérny charakter AK,

Pri neutrálnom pH má oba náboje → Zwitterión/Amfión

Vie reagovať s kys. aj zásadami

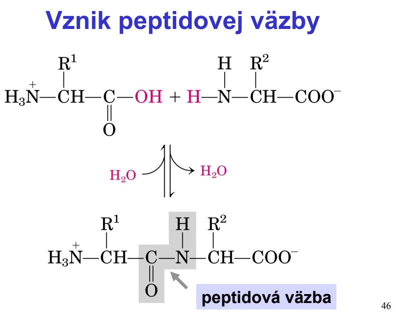
2.2.8 izoelektrický bod

izoelektrický bod: pH, keď sa AK mení z – na 0 alebo z + na 0.

pI = (pKA kyslého + pKA zásaditého)/2. Obyčajne 9 a 2

pI = average of pKAs of functional groups

2.2.9 štruktúra a vlastnosti peptidovej väzby



Odchádza/prichádza H2O

N^+, O^- medzi jednoduchou a dvojitou

trans

6 atómov v rovine – planárne usporiadanie

2.2.10 Trojrozmerná štruktúra proteínov

primárna, sekundárna (α–helix, β–skladaný list, β–otáčka), terciárna, kvartérna, väzby (interakcie) a funkčné skupiny uplatňujúce sa pri jednotlivých štruktúrach

Primárna

poradie AK, kovalentné peptidové väzby

Sekundárna

ako sa skladajú na seba, (základná štruktúra, nie zvyšky), vodíkové väzby medzi CO a NH

α–helix (pravotočivý)

Väzba o 4 zvyšky dopredu

β–skladaný list

paralelný, antiparalelný

Úplne rozvinutý reťazec

Väzby aj medzi rozdielnymi reťazcami

β–otáčka

Zmena smeru peptidového reťazcu

Väzba o 3 zvyšky ďalej

prolín, glycín

Terciárna

Priestorová štruktúra, interakcie vzdialených skupín, ako sa folds skladajú na seba, vodíkové väzby, Van der Waals, hydrofóbny obal, disulfidový mostík medzi bočnými reťazcami

Daná primárnou štruktúrou

kvartérna

medzi rôznymi polypeptidmi

podjednotky sa skladajú do mérov – diméry, tetraméry, multiméry → počty polypeptidových reťazcov

Homo/hetero multimérne – rovnaké/rôzne reťazce

Cysteín – disulfidový mostík

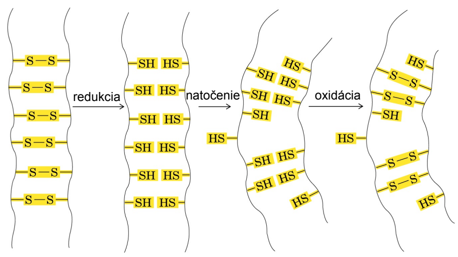
2.2.11 Rozdelenie proteínov podľa štruktúry a rozpustnosti (fibrilárne, globulárne, membránové proteíny)

Fibrilárne

pevné, reťazce väčšinou paralelné s jednou osou

nerozpustné, štruktúrna funkcia

keratíny, kolagén, fibroín



73

Globulárne

hydrofilné von, hydrofóbne dnu

Flexibilné časti, štruktúry nie sú statické (PARTAAY)

mioglobín, cytochróm c, lyzozým, ribonukleáza

Membránové

bakteriorodospín

2.2.12 Biologická funkcia proteínov, natívna konformácia, denaturácia, renaturácia

Enzýmová katalýza

Transportná, zásobná – hemoglobín(O2), sérumalbumín (MK), Ovalbumín, Kazeín

(N), Ferritín (Fe)
Koordinovaný pohyb – Aktín, myozín
mechanická podpora – kolagén, keratín
Imunita
nervové impulzy
regulácia rastu, diferenciácia

natívna konformácia – správne zložený proteín. Aktívna forma. Chyby na hociktorej úrovni vedú ku chorobám
Denaturácia
    unfolded, neaktívny
    pH, teplota, chemikálie, org. rozpúšťadlá, detergenty, močovina, enzýmy
    Neovplyvňuje primárnu štruktúru.
    vratná/nevratná
Renaturácia
    Nie vždy sa poskladá správne
Chaperone – proteín, čo skladá správne proteíny
Prirodzene neusporiadané proteíny → viac funkcií, nemávajú hydrofóbne jadro

2.3 Sacharidy

Status: In progress Source: Prezentácia 2

2.3.1 Rozdelenie sacharidov, aldózy, ketózy

aldózy – O na začiatku
ketózy – O v strede
mono, oligo, poly
lineárne, rozvetvené

2.3.2 Vzorce

lineárne – Fischerove
    cyklické – Haworthove:
    glukóza
    manóza
    galaktóza

ribóza

2.3.3 Pojmy

konfigurácia
konformácia
enantiomér
epimér
diastereomér
poloacetál poloketál
mutarotácia
α–, β–anoméry

2.3.4 Vznik glykozidovej väzby

hemiacetál → acetál
+ alkohol, – voda
vznikne glykozid
na O na anomérnom uhlíku pribudne R z alkoholu (namiesto H)
väzba medzi O a anomérnym uhlíkom
Nie len alkohol – napr. aj sacharidy dokopy
Opačne tiež – hydrolýza

2.3.5 Deriváty sacharidov

kyseliny
alkoholy
deoxysacharidy – deoxyribóza
estery sacharidov
aminosacharidy – glukozamín
acetály
ketály
glykozidy

2.3.6 Disacharidy

redukujúce
neredukujúce disacharidy
príklady – laktóza
sacharóza
trehalóza

2.3.7 Štruktúrne polysacharidy

celulóza
chitín
väzby
štruktúra

2.3.8 Zásobné polysacharidy

škrob
glykogén väzby
štruktúra

2.3.9 Heteropolysacharidy

peptidoglykán
hyaluronát
proteoglykány (základná charakteristika)

2.3.10 Sacharidy ako informačné molekuly

2.3.11 Lektíny

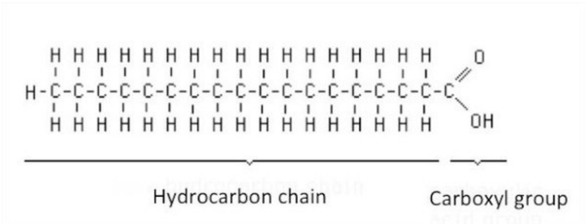
2.4 Lipidy a biologické membrány DONE

Status: DONE Source: Prezentácia 3, 4

2.4.1 Funkcie lipidov

nerozpustnosť vo vode, iba v organických rozpúšťadlách
zásoba energie, membrány, kofaktory, prenášače e-, pigmenty, emulzifikátory, hormóny, signály vnútri bunky

2.4.2 Štruktúra a vlastnosti mastných kyselín



C4-C36 (38?), v lipidoch C14-C20 – vyššie MK
párny počet C lebo pri vytváraní z A-CoA sa pridáva po 2
nerozvetvené
- (nasýtené vodíkom) aj = (nenasýtené vodíkom) väzby
CX, @Y – X = počet uhlíkov, Y = ktorá väzba je dvojitá
kyselina palmitová – C16
steárová – C18
olejová – C18, @9
linolová – C18, @9, 12
linolénová – C18, @9, 12, 15
čím viac = a čím kratší reťazec, tým nižšia teplota topenia
pretože entropia ide dole s dĺžkou reťazca a hore s počtom dvojitých väzieb
vyššia entropia → nižšia teplota topenia (menej pevné látky majú vyššiu entropiu)

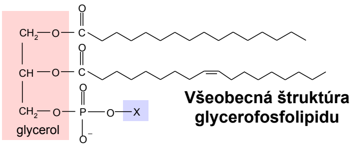
2.4.3 Triacylglyceroly

zdroj energie, 3MK + glycerol → triacylglycerol + 3(H2O)
čím viac =, tým viac liquid
tuky – prevažne živočíšne, viac nasýtených MK
oleje – rastliny + ryby, viac nenasýtených MK
zdroj energie, lebo sú najredukovanejšia forma C v prírode, neviažu vodu, efektívne ukladanie

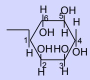
2.4.4 glycerofosfolipidy

polárna časť, nepolárna časť

glycerol + 2MK + PO4-alkohol/substituent

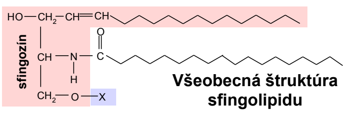


substituent -X	vzorec -X	názov fosfolipidu	celkový náboj
	$—H$	kyselina fosfatidová	-1
etanolamín	$—CH_2—CH_2—NH_3^+$	fosfatidyl-etanolamín	0
cholín	$—CH_2—CH_2—N(CH_3)_3^+$	fosfatidylcholín	0

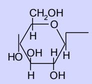
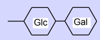
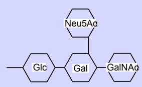
substituent -X	vzorec -X	názov fosfolipidu	celkový náboj
serín	$—CH_2—CH(COO^-)—NH_3^+$	fosfatidylserín	-1
glycerol	$—CH_2—CH(OH)—CH_2—OH$	fosfatidyl-glycerol	-1
inozitol		fosfatidylinozitol	-1
fosfatidyl-glycerol		kardiolipín	-2

fosfatidyletanolamín, fosfatidylcholín, fosfatidylserín, fosfatidylglycerol, fosfatidylinozitol, kardiolipín

2.4.5 sfingolipidy



substituent -X	vzorec -X	názov sfingolipidu
	$—H$	ceramid
fosfo-etanolamín	$—P(=O)(O^-)—O—CH_2—CH_2—NH_3^+$	sfingomyelíny
fosfocholín	$—P(=O)(O^-)—O—CH_2—CH_2—N(CH_3)_3^+$	

substituent -X	vzorec	trieda a názov sfingolipidu
glukóza		*Neutrálne glykolipidy* -glukozylcerebrozid
di-, tri- alebo tetrasacharid		-laktozylceramid (globozid)
komplexný oligosacharid		*Gangliozidy* -gangliozid GM2

sfingomyelíny, cerebrozidy, ceramidy, gangliozidy

2.4.6 vosky

estery MK + OH s dlhými reťazcami

zdroj energie, ochranná funkcia

včelí vosk – kys palmitová + triacontatol

2.4.7 cholesterol

štruktúra a funkcia

polárna hlavička, steroidné jadro, alkylový bočný reťazec

prekurzor na kortizol (metabolizmus, imunita), estradiol (pohl. Hormóny)

2.4.8 Amfipatický charakter niektorých lipidov

časť hydrofilná, časť hydrofóbna

fosfolipidy

2.4.9 agregované formy lipidov

micely – guličky

dvojvrstvy

lipozómy – dvojvrstvová gulička

2.4.10 Princíp samovoľného vzniku lipidových agregátov

hydrofóbne dnu, hydrofilné von

2.4.11 Biomembrány

Kompartmentalizácia, styk s okolím, ohraničenie bunky/organely, priestor na metabolické deje

membránové proteíny

integrálne – ide cez membránu

periférne – na povrchu

model tekutej mozaiky

zložené z veľa rôznych komponentov – fosfolipidy, glykolipidy (rozoznávanie buniek, krvné skupiny), proteíny, cholesterol

2.4.12 Úloha cholesterolu pri ovplyvňovaní fluidity membrán

pri nízkych teplotách zabráni fosfolipidom sa pritisnúť k sebe → zvyšuje fluiditu

pri vysokých teplotách im bráni sa hýbať rýchlo → znižuje fluiditu

2.4.13 Transport cez membrány

flipáza – otáča fosfolipidy
pasívny – v smere koncentračného spádu, energeticky výhodný
difúzia aktívny – treba energiu
primárny – energia z hydrolýzy ATP
sekundárny – poháňaný koncentračným spádom
Na^+/K^+ pumpa.
Na^+ von, K^+ dnu

2.5 Enzýmy DONE

Status: DONE Source: Prezentácia 4, 5

2.5.1 Význam enzýmovej katalýzy

Regulácia rýchlosti reakcií
proteíny, špecifikácia

2.5.2 Pojmy

holoenzým – kompletný aktívny enzým s naviazaným kofaktorom
apoenzým – proteínová zložka holoenzýmu (nie nutne aktívny)
kofaktor – ión kovu alebo koenzým, priamo pomáha s katalýzou
koenzým – organická molekula, carrier (napr NADH je e$^-$carrier → NAD+ + H, CoA je acyl carrier)
prostetická skupina – kofaktor pevne (kovalentne) viazaný v enzýme
apoenzým + kofaktor → holoenzým

2.5.3 Klasifikácia enzýmov

oxido-reduktázy – prenos e$^-$, protónov transferázy – prenos skupín, aminoacids to to peptide chain hydrolázy – hydrolytické reakcie, A + H2O → B + C Lyázy – odštiepenie skupín, tvorba dvojitých väzieb, A → B + C izomerázy – vznik izomérov ligázy – tvorba C-C, C-S, C-N, C-O a fosfoesterových väzieb, pri tvorbe ATP, A + B → AB, spájanie strands of DNA

2.5.4 Aktívne miesto, špecificita enzýmov

substrát sa viaže do aktívneho miesta, tvorí komplex enzým-substrát
aktívne miesto obsahuje katalytické centrum a väzobné centrum
zníženie aktivačnej energie
väzba substrátu – slabé interakcie
štruktúrna komplementarita → rozpoznávanie

Jednotka enzýmovej aktivity – katal
množstvo enzýmu, kt katalyzuje 1 mol substrátu za 1 sekundu špecifická aktivita = katal/kg bielkoviny

2.5.5 Mechanizmus účinku enzýmov

teória komplementarity – substrát do enzýmu "zapadne", špecificky, nevie do iného
teória indukovaného prispôsobenia – substrát nie úplne zapadne, enzým sa mierne prispôsobí

2.5.6 Termodynamické hľadisko priebehu enzymaticky katalyzovaných reakcií

aktivačná energia – energia potrebná na prebehnutie reakcie
prechodný stav – niekde medzi produktom a substrátom, reakcia prebieha

2.5.7 Kinetické hľadisko priebehu enzymaticky katalyzovaných reakcií

faktory ovplyvňujúce rýchlosť enzýmovej reakcie
množstvo enzýmu, koncentrácia substrátov, fyz-chem vlastnosti prostredia (t, pH), efektory (aktivátory, inhibítory)
Michaelis – Mentenovej rovnica
$V_0 = \frac{V_{max}[S]}{K_m+[S]}$
$[S]$ – koncentrácia substrátu
parametre K_m a V_{max}
K_m – Michaelis-Mentenovej konštanta – koncentrácia substrátu, keď rýchlosť $V_0 = \frac{V_{max}}{2}$
V_{max} – maximálna rýchlosť reakcie

K_m nižšia $\rightarrow$ afinita enzýmu ku substrátu vyššia

2.5.8 inhibícia enzýmov

ireverzibilná - inhibítor sa viaže pevne, až kovalentne
reverzibilná - nekovalentné, slabšie interakcie
kompetetívna – nepustí substrát dnu
nekompetetívna – pustí aj substrát

2.5.9 Regulácia enzýmov

alosterickou modifikáciou – z neaktívnej strany sa naviaže inhibítor/aktivátor, kt ovplyvní aktívnu stranu
kovalentnou modifikáciou – formovanie/ničenie kovalentných väzieb, napr. metylácia, acylácia, fosforylácia
regulačnými proteínmi – tripsinogén je aktivovaný na tripsín, nevratne
proteolytickým štiepením (zymogény) – odíde kus enzýmu a odhalí sa aktívne miesto, napr. v golgiho aparáte

2.6 Základy metabolizmu DONE

Status: DONE Source: Prezentácia 5

2.6.1 Zdroj a premeny energie v biosfére

I zákon termodynamický – konštantné množstvo energie, mení sa len forma
II zákon termodynamický – entropia spontánne vzrastá
Chemická energia – entalpia – energia chemickej väzby
voľná (Gibbsova) energia – časť energie v štruktúre molekúl, ktorá sa môže premeniť na prácu
entropia – miera chaose
Exergonické reakcie – $\Delta G < 0$ – energia sa uvoľní
Endergonické reakcie – $\Delta G > 0$ – energia sa spotrebuje
Podmienka samovoľnosti priebehu chemických dejov – $\Delta G < 0$

2.6.2 Význam prenášačov energie

dodávajú energiu z exergponických reakcií do endergonických
sú schopné energiu zachytiť a uložiť, uvoľniť a odovzdať
napr. ATP

2.6.3 vznik ATP

substrátová fosforylácia
oxidačná fosforylácia
fotofosforylácia

2.6.4 premeny ATP

Katabolické a anabolické metabolické dráhy, ich význam
živiny s vysokým obsahom energie → katabolizmus → koncové produkty s málo energie
prekurzorové molekuly → anabolizmus → makromolekuly
Energetické vzťahy medzi katabolickými a anabolickými dráhami

2.6.5 Oxidácia biomolekúl

oxidácia – strata e^-, berú ich biomolekulám

2.7 Metabolizmus sacharidov +-DONE

Status: More or less Source: Prezentácia 6

2.7.1 Glukóza ako zdroj metabolickej energie

štruktúra, zásoba, oxidácia glykolýzou → pyruvát, pentózovou dráhou → ribóza-5-fosfát

2.7.2 Glykolýza

význam – glukóza → pyruvát (ATP, NADH)

lokalizácia – cytoplazma 2 fázy glykolýzy

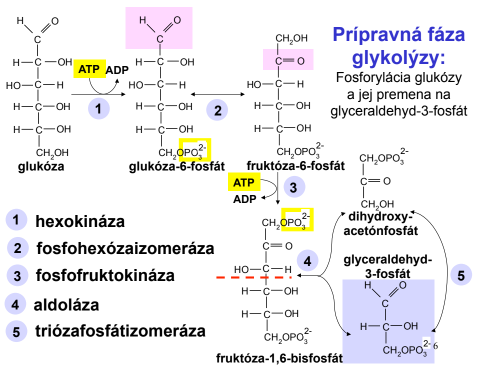
prípravná (5 reakcií), produkčná (5 reakcií) jednotlivé reakcie

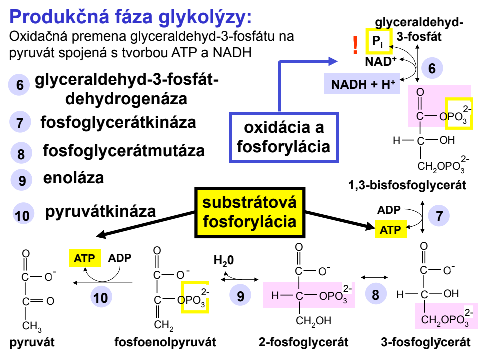
fosforylácia glukózy → glyceraldehyd-3-fosfát

glyceraldehyd-3-fosfát → pyruvát, ATP, NADH

medziprodukty a enzýmy glykolýzy

Spotreba a vznik ATP počas glykolýzy





substrátová fosforylácia

2.7.3 Osud pyruvátu a regenerácia NAD+

anaeróbne – mliečne kvasenie

alkoholové kvasenie

aeróbne – v dýchacom reťazci

2.7.4 Glukoneogenéza

význam – potreba tela vyrobiť si vlastnú glukózu

substráty

pyruvát, laktát, mnohé AK, glycerol, veci z krebsovho cyklu

nie MK, lebo idú na Acetyl-CoA oxidovaný v Krebsovom cykle

tri unikátne glukoneogenetické kroky (4 enzýmy)

lokalizácia

králik – mitochondrie, potkan – cytoplazma, človek – obe

2.7.5 Coriho cyklus

prenos laktátu zo svalu do pečene

vznik glukózy z laktátu procesom glukoneogenézy

Pentózová dráha: význam – NADPH pre biosyntézy, produkcia ribóza-5-P

východisková zlúčenina – Glc-6-P

vznik NADPH, ribóza–5–fosfátu

reakcie katalyzované dehydrogenázami, izomerázou, epimerázou, transaldolázami, transketolázami.

2.8 Citrátový cyklus

Glyoxylátový cyklus

Vznik acetyl–koenzýmu A z kyseliny pyrohroznovej.

Citrátový cyklus – zdroj energie a biosyntetických prekurzorov

bunková lokalizácia cyklu

Reakcie

citrátového cyklu

jednotlivé medziprodukty a enzýmy

Vznik redukovaných koenzýmov

Tvorba

GTP – substrátová fosforylácia

Amfibolický charakter citrátového cyklu

anaplerotické reakcie

(pyruvátkarboxyláza)

Glyoxylátový cyklus – význam pre rastliny a baktérie

lokalizácia (spolupráca

glyoxyzómov a mitochondrií)

enzýmy.

2.9 Oxidačná fosforylácia

Štruktúra a funkcia mitochondrií

Zloženie a funkcia dýchacieho reťazca,

prenášače elektrónov – cytochrómy

bielkoviny s nehemovo viazaným železom
ubichinón,
flavoproteíny
Zdroj elektrónov vstupujúcich do dýchacieho reťazca
Prenos elektrónov v dýchacom
reťazci (komplexy I
II
III
IV
cyt c
ubichinón)
Vznik protónového gradientu
Využitie protónového
gradientu na syntézu ATP
enzým ATP–syntáza
Chemiosmotická teória
Ďalšie možnosti využitia
protónového gradientu – termogenéza
pohyb baktérií
transport metabolitov.

2.10 Fotosyntéza

2.10.1 Fotofosforylácia ako súčasť fotosyntézy

2.10.2 Štruktúra a funkcia chloroplastov

2.10.3 Pigmenty a ich úloha v procese fotosyntézy

2.10.4 Fotochemické reakčné centrum a deje, ktoré v ňom prebiehajú

2.10.5 Prenos elektrónov fotosystémami I a II

2.10.6 Necyklická a cyklická fotofosforylácia

2.10.7 Fotolýza vody

2.10.8 Vznik NADPH a ATP

2.10.9 Spoločné a rozdielne znaky fotofosforylácie a oxidačnej fosforylácie

2.10.10 Syntézasacharidov počas fotosyntézy

2.10.11 Tri štádiá asimilácie CO2

2.10.12 Základné reakcie a funkcia Calvinovhocyklu

2.11 Metabolizmus lipidov +-DONE

Status: Better than nothing Source: Prezentácia 10

2.11.1 Mastné kyseliny ako zdroj metabolickej energie

najredukovanejšia forma uhlíka
nerozpustnosť vo vode
chemicky inertné

2.11.2 Trávenie tukov

význam žlčových kyselín

emulzifikácia tukov z potravy, tvorba miciel enzýmy lipáz degradácia triglycerolov

chylomikróny

prenos premenených tukov ku tkanivám

2.11.3 Osud mastných kyselín vo svaloch a v tukovom tkanive

Oxidácia → zdroj energia alebo reesterifikácia → zásoby energie Uvoľnenie mastných kyselín z tukového tkaniva a ich prenos do tkanív

chylomikróny funkcia sérumalbumínu

proteín, prenáša MK

2.11.4 β–oxidácia mastných kyselín

lokalizácia v bunke

prenos mastných kyselín do mitochondrií

(funkcia karnitínu)

2.11.5 Reakcie β–oxidácie

dehydrogenácia

hydratácia

dehydrogenácia

štiepenie

vznik acetyl–kaoenzýmu A

Osud acetyl–koenzýmu A

vstup do citrátového cyklu

vznik ketolátok, ich význam

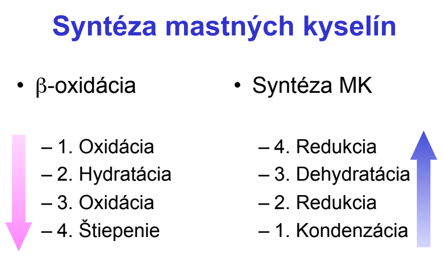
zdroj energie pre niektoré tkanivá, napr. mozog, srdce, obličky

počas hladovania

MK sa oxidáciou v pečeni premieňajú na acetón, etc.

2.11.6 Biosyntéza mastných kyselín

porovnanie s β–oxidáciou



východiskové zlúčeniny
reakcie kondenzácia
redukcia
dehydratácia

2.11.7 Zdroje NADPH

malát → pyruvát
pentózová dráha

2.11.8 Transport triacylglycerolov a cholesterolu u ľudí

zabezpečujú lipoproteíny a chylomikróny

2.12 Degradácia aminokyselín DONE

Status: hopefully DONE Source: Prezentácia 11

Močovinový cyklus
Počas bežnej degradácie a syntézy v bunkách (AK sa neukladajú do zásoby)
Ak je priveľa AK v potrave

2.12.1 Aminokyseliny ako zdroj metabolickej energie

Keď nie sú k dispozícii sacharidy ako zdroj

2.12.2 Odbúranie aminokyselín

Odstránenie aminoskupiny transamináciou a deamináciou
enzýmy transaminázy, glutamátdehydrogenáza

2.12.3 Význam glutamínu pri odbúraní AK

Glutamát + amoniak → glutamín → mitochondrie pečene/obličiek → amoniak sa uvoľní → močovinový cyklus
enzýmy glutamínsyntetáza – naviazanie amoniaku
glutamináza – uvoľnenie amoniaku

2.12.4 Formy vylučovania aminoskupiny u rôznych stavovcov

amoniak – vodné stavovce
močovina – suchozemské stavovce
kys. močová – vtáky, plazy

2.12.5 Močovinový cyklus – orgánová a bunková lokalizácia, význam

V cytoplazme pri mitochondriách
arginínosukcinát spoločný s citrátovým cyklom

2.12.6 Osud uhlíkovej kostry aminokyselín

premena na glukózu/ketolátky, podľa typu AK
glukogénne AK → pyruvát, etc. (nejakú látku citrátového cyklu) ketogénne AK → acetyl-CoA, etc.

Kapitola 3

Bunková biológia

3.0.1 Vnútorná organizácia buniek a ich pôvod v evolúcii DONE

Status: DONE
Source: Prezentácia 1

3.0.2 História a kľúčové objavy bunkovej biológie

Robert Hooke – termín bunka, organizmy sú z buniek
Antonie van Leewenhoek – mikroskop

3.0.3 Bunková teória

Schwann, Schleiden, Remak, Virchow
Pôvodné tri:

- Živé organizmy sú z jednej alebo viacerých buniek (dišputa – vírusy)
- Bunky sú základné štruktúrne a funkčné jednotky živých organizmov
- Vznikajú len delením preexistujúcich buniek (Waaaait. Prvá bunka?)

Additional:

- Podobné chemické zloženie
- Chemický systém, kde prebieha premena energií a metabolické reakcie
- DNA je genetický materiál

3.0.4 Porovnanie prokaryotických a eukaryotických buniek

0.3 mikm – 0.7 mm, 9 mikm – 800 mikm
Prokaryotické

Archaea, Bacteria
Jadro (nucleoid) voľne v cytosole
Bez membránových organel
Cirkulárna DNA (cirkulárny chromozóm)
Ribozómy
Archaea má karboxyzómy, plynové vezikuly, etc.

Eukaryotické

Eukarya
Jadro má vlastnú membránu, nucleolus
Membránové organely, napr. mitochondrie, golgiho aparát
Viac vlákien DNA (viac chromozómov)
Ribozómy

3.0.5 Komplexná organizácia eukaryotickej bunky, význam intracelulárnej kompartmentalizácie a vnútrobunkový dialóg

Bunková štruktúra – Čokoľvek v bunke (ribozóm, deliace vretienko...)
Bunkový kompartment – časť bunky oddelená membránou al. proteínom (cytosól, jadro)
Bunková organela – funkčné časti bunky obklopené membránou (mitochondria, plastidy)

jadro
mitochondrie, hydrogenozómy
plastidy (rastlinné bunky)
endoplazmatické retikulum
Golgiho aparát
lyzozómy, vakuoly
peroxizómy
cytosol

3.0.6 Vznik buniek v evolúcii

RNA(Genotyp + Fenotyp) → RNP(Genotyp + Fenotyp) → DNA(Genotyp DNA + Fenotyp(Proteínový))

Darwin

jeden spoločný predok

Woese

viacero vetiev → tree of life, archaea, bacteria, eucarya

RNA selfreplicating teória

Darwinovský prah (Darwinian Treshold) – bod, pred ktorým speciácia nebola možná, kvôli horizontálnemu transferu génov

3.0.7 Pôvod komplexnej (eukaryotickej) bunky

Lynn Margulis

Endosymbiotická teória

Evolučná mozaika

Niektoré organely (mitochondrie, plastidy) vznikli vďaka endosymbióze. Resp. eukarya vznikli ako symbióza archaea a procarya. Jadrový genóm pochádza z archaea a bacteria...

Reduktívna fáza – strata časti genómu, funkcií, transfer génov do jadra

Expanzívna fáza – vznik nových génov, horizont. gén. transfer prokaryotických génov, konverzia endosymbionta na organelu exportujúcu ATP

Mitochondrie majú vlastný genóm

Vodíková hypotéza

3.1 Bunkové jadro: štruktúra a dynamika chromozómov

Status: Not started

Source: Prezentácia 2

3.1.1 Prokaryotické, eukaryotické a organelové chromozómy

nucleus

eukaryoty

zložité jadro, nucleolus, DNA + proteíny v jadre

nucleoid

prokaryoty, mitochondrie, plastidy

DNA na kope, ribozómy voľne v cytoplazme

3.1.2 DNA a proteínové komponenty chromozómov

3.1.3 Distribúcia chromozómov pri delení buniek

3.1.4 Objav úlohy DNA

3.1.5 Replikačné stratégie DNA

3.1.6 Experimenty Meselsona a Stahla

3.1.7 Semikonzervatívny mechanizmus syntézy DNA

3.1.8 Iniciácia, elongácia a terminácia replikácie (replikačné počiatky, replikačné bubliny

3.1.9 Okazakiho fragmenty, leading a lagging vlákno). Replizóm

3.1.10 Kľúčové enzýmy v replikácii: DNA polymerázy, primázy, ligázy, helikázy, topoizomerázy, ssb proteíny

3.2 Mechanizmy opravy poškodenej DNA DONE

Status: DONE
Source: Prezentácia 3

Typy: Na svetle / v tme, počas replikácie / po replikácii, error free / error prone
3' $\rightarrow$ 5' je nevýhodné, lebo pri napájaní sa nerozpadne väzba, ktorá by poskytla energiu na polymerizáciu (odštiepenie fosforov)

3.2.1 Poškodenia chromozomálnej DNA

Poškodenia: chemické modifikácie, straty báz, pyrimidínové diméry, krížové väzby v DNA, zlomy

Depurinácia – Príde voda, odíde báza
Deaminácia – Príde voda, odíde NH3, báza sa zmení na inú (cytozín → uracil)
lézia – poškodenie → fixácia → mutácia

3.2.2 Fyzikálne, chemické a biologické mutagény

3.2.3 Príčiny vzniku spontánnych mutácií

3.2.4 Reparačné mechanizmy (fotoreaktivácia, bázová a nukleotidová excízna reparácia, rekombinačná oprava, SOS odpoveď)

Tymínové diméry – oprava na svetle (UV) fotoreaktívnym enzýmom Demetylácia / dealkylácia – oprava enzýmom

Bázová excízna oprava (deamiated C)– najprv odíde báza, potom cukor, potom DNA polymeráza doplní 1, DNA ligáza zalepí dokopy
Nukleotidová excízna oprava (napr. pyrimid. dimér) – nukleáza rozštikne, DNA helikáza oddelí, DNA polymeráza doplní väčší úsek
Starý úsek je metylovaný napr. na konkrétnej sekvencii

opravy dvojvláknových zlomov rekombináciou

Nehomologické – zožerie nukleotidy na konci zlomu Non-homologous end joining (NHEJ) a spojí

Homologické (podľa sesterskej chromatídy) – zožerie nukleotidy iba na 5’ koncoch, homologická rekombinácia, opraví podľa sesterskej chromatídy

SOS odpoveď – error prone DNA syntéza (DNA polymeráza V) umožňuje pokračovať v DNA syntéze aj za cenu chýb

3.2.5 Ochorenia spôsobené defektmi v oprave DNA.

Ataxia, Bloomov syndróm

3.3 Transkripcia a úlohy RNA v bunke

Status:
Source: Prezentácia 4

3.3.1 Úloha RNA v interpretácii genetickej informácie

3.3.2 Typy RNA (mRNA, rRNA, tRNA, malé RNA)

mRNA – komplementárna ku vláknu DNA, je to templát pre tvorbu proteínov
tRNA – krátka RNA, trojlístok, antikodón, Aminokys.
rRNA – ribozomálna RNA, skladajú sa z nej ribozómy
snRNA – small nuclear RNA, variety of processes, pre-mRNA splicing
snoRNA – small nucleoar RNA, chem modification of rRNA
miRNA – MicroRNA, regulácia génovej expresie blokovaním translácie špecifických mRNA
siRNA – small interfering RNA, regulácia génovej expresie

3.3.3 Katalytické vlastnosti RNA

ribozým – RNA enzým, katalytická funkcia
RNáza P – odštiepuje prekurzorovú a zvyšnú RNA z tRNA
Self-splicing intron
Spliceosome – protein complex
Promótor – starting sequence
Terminátor – stop sequence

3.3.4 Svet RNA a evolúcia živých systémov

3.3.5 Transkripcia

3.3.6 Iniciácia, elongácia a terminácia transkripcie

3.3.7 RNA polymerázy

3.3.8 Transkripčné faktory. Porovnanie transkripcie v prokaryotoch a eukaryotoch.

3.4 Syntéza a distribúcia proteínov v bunkách

Status: In progress
Source: Prezentácia

3.4.1 Objav a vlastnosti genetického kódu

tripletový

neprekrývavý

akú to má výhodu? Je viac robustný.

degenerovaný – nie je to bijekcia, aminokys. je kódovaná rôznymi sekvenciami

univerzálny – ale sú výnimky

triplety pre štart (AUG, GUG) a stop (UAA, UAG, UGA)

3.4.2 Štruktúra a vlastnosti tRNA

70-80 nucleotides, short

Nekovnenčné párovanie, napr. G-U

Neštandartné bázy – dihydrouridín, psí – pseudouridín – väzba medzi uhlíkom bázy

antikodón sa páruje so sekvenciami v mRNA

CCA na 3' konci – postranskripčne pridaná, na tom kovalentne aminokys. zvyšok

3.4.3 Štruktúra a funkcie ribozómov

TODO

3.4.4 Ribozomálne RNA a proteínové komponenty ribozómu

TODO

3.4.5 Základné etapy translácie (iniciácia, elongácia a terminácia)

iniciácia translácie

rozpoznanie 5' mRNA

Proc – na 5' nie je čiapočka – rRNA sa spáruje so sekvenciou na 5' konci mRNA (Shine-Delgamo sequence), posunie sa a narazí na AUG

Euc – malá ribosomal subunit rozozná čiapočku, začne sa kĺzať, narazí na AUG

Proc – formylMetionyl – Výnimka – prvá mRNA je v mieste P – lebo vstúpila do ribozómu predtým, ako sa zavrel. Aby sa dostali ďalšie cez A miesto

Euc – kontrola mRNA proteínmi

Euc – metionyl, tRNA, zase P miesto

Elongácia translácie

príde do A miesta, naviaže sa AK, posunie sa ribozóm

Terminácia translácie

RF – release factor. Nie Róber Fico

príde do A, odpadne červík, uvoľní sa ribozóm aj mRNA, čo tam boli

Začína sa zbaľovať hneď ako vyjde

3.4.6 Porovnanie prokaryotickej a eukaryotickej proteosyntézy

3.4.7 Inhibítory proteosyntézy

3.4.8 Vnútrobunková lokalizácia proteosyntézy

3.4.9 Distribúcia proteínov v bunke.

3.5 Princípy kontroly expresie génov

Status:

Source: Prezentácia

3.5.1 Definície génu

3.5.2 Úrovne kontroly expresie génov

3.5.3 Operónový model

3.5.4 Pokusy Jacoba a Monoda

3.5.5 Negatívna a pozitívna kontrola expresie

3.5.6 Katabolická represia.

3.5.7 Atenuácia

3.5.8 Regulácia životného cyklu fága lambda

3.5.9 Porovnanie kontroly génovej expresie v prokaryotických a eukaryotických bunkách

3.5.10 Kontrola na úrovni transkripcie a posttranskripčné úpravy RNA

3.5.11 Kontrola na úrovni translácie a posttranslačné úpravy proteínov.

3.6 Úloha biologických membrán v eukaryotickej bunke

3.6.1 Kompartmentalizácia bunky

3.6.2 Štruktúra a funkcie membrán

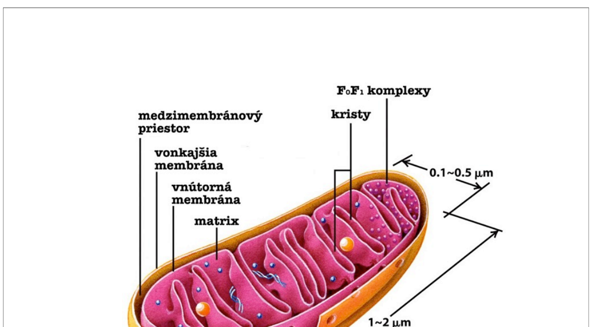
3.6.3 Transport cez membrány

3.6.4 Vektorové procesy viazané na membrány

3.6.5 Úloha membrán v prenose nervového signálu.

3.7 Mitochondrie a chloroplasty

3.7.1 Ultraštruktúra a funkcie semiautonómnych organel



3.7.2 Špecifické úlohy membrán mitochondrií a chloroplastov

Mitochondire môžu fúzovať, deliť sa podľa potreby – je na to aparát v bunke
Dýchací reťazec

3.7.3 Organelové genómy

3.7.4 Oxidatívna fosforylácia.

3.7.5 Fotosyntéza–fotofosforylácia

fluorescencia – pohltia svetlo jednej vlnovej dĺžky, vyžiaria svetlo inej

3.8 Endoplazmatické retikulum, Golgiho aparát

3.8.1 Štruktúra, funkcie, biogenéza a distribúcia

3.8.2 Hladké a drsné endoplazmatické retikulum, sarkoplazmatické retikulum

3.8.3 Vezikulárny transport

3.8.4 Úloha v distribúcii a transporte proteínov v eukaryotickej bunke.

3.9 Vakuoly, lyzozómy a peroxizómy

3.9.1 Štruktúra, funkcie, biogenéza a distribúcia

3.9.2 Metabolizmus

3.9.3 Klinický význam lyzozómov a peroxizómov.

3.10 Cytoskelet ako dynamická štruktúra +-DONE

Status: No idea
Source: Prezentácia 11

Dynamický, preusporiadava sa
Z malých rozpustných podjednotiek, kt. sa skladajú do väčších celkov

využívané napr. pri pohybe

3.10.1 Komponenty cytoskeletu

Mikrotubuly

trubičky

tubulín (Beta- a alpfa-tubulín podjednotky), rozpustné, globulárne, väzbové miesto pre GTP/GDP

hydrolýza GTP po naviazaní tubulínov $\rightarrow$ GDP

13 Protofilamentov zvislo vedľa seba $\rightarrow$ mikrotubulus

disociácia podjednotiek iba na krajoch, kde neinteraguje s mnohými ostatnými

Mechanické vlastnosti

menej pružné/ohybné do boku

orientácia - označenie $\beta+/\alpha-$

Mikrofilamenty

aktínové polyméry

aktín – globulárny proteín, viaže ATP/ADP

polarizované, – a + koniec

rastú rýchlejšie na + konci   mierna špiralizácia

vizualizácia pomocou myozínu, ktorý sa na aktín viaže hlavičkou

Intermediálne filamenty

3.10.2 Cytoskelet ako pohybový aparát: vezikulárny transport, bunková motilita a delenie buniek

Treadmilling

medzi kritickými koncentráciami pre + a – koniec

polymerizácia na jednom konci, depolymerizácia na druhom, vyrovnajú sa a vlákno ostáva rovnako dlhé

sťah svalu – pohyb aktínu a myozínu proti sebe

pohyb proteínov po mikrotubuloch

3.11 Od jednotlivých buniek k tkanivám a mnohobunkovým organizmom

3.11.1 Bunkové povrchy

3.11.2 Cytoplazmatická membrána a bunková stena

3.11.3 Extracelulárna matrix

3.11.4 Bunky v sociálnom kontexte.

3.11.5 Biofilmy

3.11.6 Bunky ako súčasť tkanív

3.11.7 Epitely a medzibunkové spojenia

3.11.8 Quorum sensing.

3.11.9 Medzibunková komunikácia a bunková smrť.

Kapitola 4

Diskrétna matematika

(Predmety Úvod do diskrétnych štruktúr, Úvod do kombinatoriky a teórie grafov)

4.1 Základy matematickej logiky

4.1.1 Logické operácie

- Negácia $\neg$ (NOT)
- Konjunkcia $\wedge$ (AND)
- Disjunkcia $\vee$ (OR)
- Alternatíva $\oplus$ (XOR)
- Implikácia $\rightarrow$
- Ekvivalencia $\leftrightarrow$
- Schafferova spojka $\uparrow$ (NAND) - vie nahradiť všetky ostatné
- Pierce – Lukasiewiçsova spojka $\downarrow$ (NOR) - vie nahradiť všetky ostatné

4.1.2 Formuly

Výrokovou formou a(x) s premennou x nazývame takú oznamovaciu vetu (formálny výraz, formulu), ktorá obsahuje premennú x, sama nie je výrokom, a stane sa výrokom vždy vtedy, keď za premennú x dosadíme konkrétny objekt z vopred danej vhodne vybratej množiny. Ku každej výrokovej forme existuje nejaká množina prvkov, ktoré má zmysel do výrokovej formy dosadzovať. (Príklad: *x je väčšie ako číslo 5*)

4.1.3 Výrokové funkcie

TODO: citeToman2009 1.2 ?

4.1.4 Kvantifikácia výrokov

- Existenčný kvantifikátor $\exists$
- Všeobecný kvantifikátor $\forall$

Negácie:
$\neg(\exists x)a(x) \leftrightarrow (\forall x)(\neg a(x))$
$\neg(\forall x)a(x) \leftrightarrow (\exists x)(\neg a(x))$

4.1.5 Tautógia

Je výrok pravdivý pre všetky možné kombinácie pravdivostných hodnôt výrokov, z ktorých je zložený.

Významné tautológie

1. Idempotentnosť
   $(p \wedge p) \leftrightarrow p$
   $(p \vee p) \leftrightarrow p$

2. Komutatívnosť
   $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
   $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
   $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

3. Asociatívnosť
   $(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$
   $(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$

4. Distributívne zákony
   $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
   $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

5. Absorbčné zákony
   $(p \wedge (q \vee p)) \leftrightarrow p$
   $(p \vee (q \wedge p)) \leftrightarrow p$

6. Zákon dvojitej negácie
   $\neg\neg p \leftrightarrow p$

7. Zákon vylúčenia tretieho
   $(p \vee \neg p) \leftrightarrow 1$

8. Zákon o vylúčení sporu
   $(p \wedge \neg p) \leftrightarrow 0$

9. De Morganove zákony
   $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
   $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

10. Kontrapozícia negácie
    $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

11. Reductio ad absurdum
    $(\neg p \to p) \to p$

12. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

13. $(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

14. $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \to \neg q)$

15. $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$

16. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$

4.1.6 Kontradikcia

Výrok, ktorého pravdivostná hodnota je rovná nule bez ohľadu na pravdivostné hodnoty výrokov, z ktorých pozostáva.

4.2 Matematický dôkaz

4.2.1 Logický dôsledok

TODO

4.2.2 Základné typy matematických dôkazov

- Priamy dôkaz tvrdenia a
  Pozostáva z konečného reťazca implikácií $a_1 \to a_2 \to ... \to a_n \to a$, ktorého prvý člen je axióma, alebo už dokázané tvrdenie, alebo pravdivé tvrdenie, výrok a každé ďalšie tvrdenie je logickým dôsledkom predchádzajúcich, pričom posledným členom reťazca (postupnosti) je dokazované tvrdenia a.

- Nepriamy dôkaz tvrdenia a sporom
  Založený je na zákone vylúčenia tretieho, podľa ktorého z dvojice výrokov $a, \neg a$ musí byť práve jeden pravdivý. Keď teda dokážeme, že výrok $\neg a$ nie je pravdivý, vyplýva z toho pravdivosť tvrdenia a.

- Priamy dôkaz implikácie $a \to b$
  Predpokladajme, že tvrdenie a platí (v prípade, že a je nepravdivé je implikácia $a \to b$ pravdivá, niet čo dokazovať), nájdeme postupnosť implikácií začínajúcu tvrdením a, končiacu tvrdením b, v ktorej každý člen je logickým dôsledkom predchádzajúcich tvrdení a axióm, resp. skôr dokázaných tvrdení. Niekoľkonásobným použitím pravidla jednoduchého sylogizmu dostávame platnosť implikácie $a \to b$.

- Nepriamy dôkaz implikácie $a \to b$ sporom
  Podobne ako v opísanej schéme dôkazu sporom predpokladáme platnosť negácie dokazovanej implikácie, t. j. predpokladáme platnosť tvrdenia $\neg(a \to b)$, ktoré je ekvivalentné tvrdeniu $a \wedge \neg b$. Z tohto tvrdenia postupne odvodzujeme logické dôsledky tak dlho, pokým dospejeme k sporu. Môžu tu nastať tri prípady:
  - dôjdeme do sporu s tvrdením a,
  - dôjdeme do sporu s tvrdením $\neg b$
  - napokon môžeme dokázať dve navzájom odporujúce si tvrdenia $c, \neg c$

- Nepriamy dôkaz implikácie $a \to b$ pomocou obmeny.

Zakladá sa na skutočnosti, že implikácia $a \to b$ a jej obmena $\neg b \to \neg a$ sú ekvivalentné, t.j. majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu.

- Matematická indukcia
  Ak nám treba dokázať platnosť nejakého tvrdenia (vety), ktoré je typu (alebo sa dá sformulovať tak, aby bolo tohto typu) „pre každé prirodzené číslo platí ...“, budeme sa pridržiavať princípu na ktorom je založená metóda dokazovania tvrdení nazývaná matematická indukcia.
  Pozostáva z bázy matematickej indukcie a indukčného kroku.

4.3 Intuitívny pojem množiny

Dôležité množiny

- N: množina prirodzených čísel: $0, 1, 2, 3, ...$
- Z: množina celých čísel: $-\infty..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., \infty$
- Q: množina racionálnych (ratio, podiel, zlomok) čísel: $\{a/b|a, b \in Z, b \neq 0\}$
- R: množina reálnych čísel, tj. všetkých čísel, ktoré sú hodnotou na číselnej osi,
- I: množina iracionálnych čísel $R \setminus Q$, napr. $\sqrt{2}$ alebo π,
- C: množina komplexných čísel: $\{a + bi|a, b \in R\}$ (reálna + imaginárna zložka).

$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

4.3.1 Základné pojmy a označenia

Množiny - veľké latinské písmená $(A, B, C, ...)$
Prvky množín - malé písmená, prípadne s indexami $(a_1, a_2, ..., b_1, ...)$

Opísať množinu možno v podstate dvomi spôsobmi:
- vymenovaním jej prvkov
- charakterizáciou jej prvkov pomocou nejakej spoločnej vlastnosti

Russelov paradox: Kto holí holíča? Množina všetkých množín?

4.3.2 Množinové operácie

Nech sú A, B ľubovoľné množiny. Hovoríme, že

- A = B práve vtedy, ak každý prvok z množiny A je súčasne prvkom množiny B a každý prvok z množiny B je súčasne prvkom množiny A.
  $A = B \leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \leftrightarrow (x \in B))$

- $A \subseteq B$ práve vtedy, ak $\forall x \in A$ platí, že $x \in B$, množina A je podmnožinou množiny B alebo tiež, že A je v inklúzií s B.
  Ak $A \subseteq B$ a existuje prvok množiny B taký, ktorý nepatrí do množiny A (t.j. neplatí $B \subseteq A$), tak hovoríme, že A je vlastná alebo pravá podmnožina množiny B a označujeme $A \subset B$.
  $A \subseteq B \leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \rightarrow (x \in B))$

- Zjednotením množín A, B nazveme množinu všetkých prvkov, ktoré patria aspoň do jednej z množín A, B. Označenie: $A \cup B$.
  $A \cup B = \{x|(x \in A) \vee (x \in B)\}$

- Prienikom množín A, B nazveme množinu všetkých prvkov, ktoré patria súčasne do oboch množín A, B. Označenie: $A \cap B$.
  $A \cap B = \{x|(x \in A) \wedge (x \in B)\}$
  Ak A, B nemajú spoločný prvok, v tomto prípade hovoríme, že množiny sú disjunktné a ich prienikom je množina, ktorá neobsahuje žiaden prvok.

- Množina, ktorá neobsahuje žiaden prvok sa nazýva prázdna množina a označujeme ju $\emptyset$.
  - Prázdna množina je podmnožina ľubovoľnej množiny.
  - Existuje práve jedna prázdna množina.

- Doplnkom množiny A vzhľadom na množinu U nazývame množinu všetkých tých prvkov univerzálnej množiny U, ktoré nepatria do množiny A. Označenie A'.
  $A' = \{x|x \in U \wedge x \notin A\}$

- Rozdielom množín A, B nazveme množinu všetkých tých prvkov množiny A, ktoré nepatria do B. Označenie $A \setminus B$, alebo aj A - B .
  $A - B = \{x|(x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
  TODO

- Symetrickou diferenciou množín A, B nazveme množinu $A(minussbodkouhore)B = \{x|(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$.
  $A(minussbodkouhore)B = (A - B) \cup (B - A)$

- Potenčnou množinou množiny A nazveme množinu všetkých podmnožín množiny A. Označenie $P(A)$.
  $P(A) = \{X|X \subseteq A\}$

Základné vlastnosti množinových operácií

1. Komutatívnosť
   $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
2. Asociatívnosť
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Distributívnosť
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Idempotentnosť
   $A \cup A = A, A \cap A = A$
5. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$
6. de Morganove zákony
   $A \cup B = A \cap B$
   $A \cap B = A \cup B$

4.3.3 Množinové identity

Dôkazy sú v UDDŠ str. 36, 37

1. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
2. $A(minussbodkou)B = (A \cup B) - (A \cap B)$
3. $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$
4. $A \cup B \subseteq C \leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C$

4.4 Karteziánsky súčin množín

4.4.1 Definícia usporiadanej dvojice

Pod usporiadanou n-ticou si môžeme predstaviť konečnú postupnosť o n-členoch.

Nech sú a_1 , a_2 ľubovoľné prvky. Množinu $\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ nazývame usporiadanou dvojicou, označenie (a_1, a_2), pričom a_1 nazývame prvou súradnicou (zložkou), a_2 druhou súradnicou (zložkou).
Usporiadané dvojice sa rovnajú ak obe ich zložky sú si rovné.

4.4.2 Karteziánsky súčin dvoch a viacerých množín

Karteziánskym súčinom množín A, B nazveme množinu $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$
Definíciu karteziánskeho súčinu môžeme rozšíriť aj pre prípad n množín, môžeme postupovať induktívne, ako v prípade usporiadanej n-tice. Pre dvojicu konečných množín A, B je niekedy vhodná reprezentácia karteziánskeho súčinu pomocou matice AxB.

4.4.3 Množinové identity s karteziánskym súčinom

- ak aspoň jedna z množín A, B je prázdna, tak potom $A \times B = \emptyset$
- nie je komutatívny
- nie je asociatívny
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- Ak $A \subseteq B$, tak pre každú množinu C platí $A \times C \subseteq B \times C$
- $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
- Množiny A, B sú disjunktné práve vtedy, keď $A \times B \cap B \times A = \emptyset$

Ďalšie dôležité množinové identity a vzťahy uvádzame v cvičeniach str. 40, 41.

4.4.4 Použitie karteziánskeho súčinu

Použitie karteziánskeho súčinu prenechávame na skúseného a zručného čitateľa.
(TODO)

4.5 Relácie

Nech A, B sú ľubovoľné množiny. Množinu φ nazývame textbfbinárnou reláciou z množiny A do množiny B, alebo binárnou reláciou medzi prvkami množín A a B vtedy a len vtedy, keď $\varphi \subseteq A \times B$.
Slovo binárna z definície znamená, že relácia je definovaná medzi dvomi množinami. Môžeme však zaviesť aj n - árne relácie, ktoré sú podmnožinami karteziánskeho súčinu n - množín.

Binárna relácia φ z n–prvkovej množiny A do m – prvkovej množiny B sa dá reprezentovať maticou M typu $n \times m$. Tie miesta v matici, ktoré zodpovedajú usporiadaným dvojiciam množiny φ označíme symbolom 1, na ostatné miesta v matici M napíšeme symbol 0.

Ďalšou veľmi názornou reprezentáciou je grafová reprezentácia binárnej relácie. Prvky množín označíme krúžkami, ktoré nazývame vrcholmi grafu a usporiadanú dvojicu znázorníme šípkou, ktorá ide z vrcholu odpovedajúceho prvému prvku dvojice k vrcholu, ktorý odpovedá druhému prvku dvojice.

4.5.1 Vlastnosti

Nech φ je relácia na množine A. φ je:

1. Reflexívna, ak pre každé $x \in A$ platí $(x, x) \in \varphi$
2. Ireflexívna, ak pre žiadne $x \in A$ neplatí $(x, x) \in \varphi$
3. Symetrická, ak z podmienky $(x, y) \in \varphi$ vyplýva $(y, x) \in \varphi$
4. Asymetrická, ak pre každé $(x, y) \in \varphi$ platí $(y, x) \notin \varphi$
5. Tranzitívna, ak $(((x, y) \in \varphi \wedge (y, z) \in \varphi) \rightarrow (x, z) \in \varphi)$
6. Atranzitívna, ak $((x, y) \in \varphi \wedge (y, z) \in \varphi) \rightarrow (x, z) \notin \varphi$
7. Trichotomická, ak pre každé $x, y \in A$ platí:

   $x \neq y \rightarrow ((x, y) \in \varphi \vee (y, x) \in \varphi)$

   $[(x = y) \vee (x, y) \in \varphi \vee (y, x) \in \varphi]$
8. Antisymetrická, ak pre každé $x, y \in A$ platí: $((x, y) \in \varphi \wedge (y, x) \in \varphi) \rightarrow x = y$

4.5.2 Skladanie relácií

Nech φ je relácia medzi prvkami množín A, B a nech ψ je relácia medzi prvkami množín B, C. Potom

$\{(a,c) \in A \times C : (\exists b)(b \in B \wedge (a,b) \in \varphi \wedge (b,c) \in \psi)\}$

(je to relácia medzi prvkami množín A a C) sa nazýva zložená relácia (zložená z relácií φ a ψ) a označujeme ju $\psi \circ \varphi$.

4.5.3 Inverzná relácia

Nech φ je relácia medzi prvkami množín A, B. Potom

$\{(b,a) \in B \times A, (a,b) \in \varphi\}$

(je to relácia medzi prvkami množín B a A) sa nazýva inverzná relácia k relácií φ a označujeme ju symbolom φ^{-1} .

4.5.4 Relácie na množinách

Reláciou medzi prvkami množín A, B (v tomto poradí) nazývame akúkoľvek podmnožinu karteziánskeho súčinu $\varphi \subseteq A \times B$. Ak A = B , tak hovoríme o relácií na množine A (alebo medzi prvkami množiny A). Relácia medzi prvkami množín A, B je akákoľvek množina $\varphi \subseteq A \times B$, špeciálne $\varphi = \emptyset$ a $\varphi = A \times B$.

4.5.5 Relácia ekvivalencie

Relácia φ na množine A sa nazýva relácia ekvivalencie na A, ak je **reflexívna, symetrická a tranzitívna**.

4.5.6 Rozklad množiny

Nech A je neprázdna množina. Systém $S \subseteq P(A)$ sa nazýva rozklad množiny A, ak každá množina systému S je neprázdna. Pričom S je systém po dvoch disjunktných množín s vlastnosťou $\bigcup_{M \in S} M = A$

Teda rozklad množiny A je taký systém neprázdnych podmnožín množiny A, že každý prvok $x \in A$ patrí práve do jednej množiny tohto systému.

4.5.7 Tranzitívny uzáver relácie

$\varphi^+ = \varphi^1 \cup \varphi^2 \cup ... = \cup_{k \geq 1} \varphi^k$

4.5.8 Reflexívno-tranzitívny uzáver

$\varphi^{+} = I_a \cup \varphi^1 \cup \varphi^2 \cup ... = \cup_{k \geq 0} \varphi^k$

$I_a = \{(x,x)|x \in A\}, \varphi^0 = I_a, \varphi^i = \varphi^{i-1} \circ \varphi$ pre $i > 0$, t.j. $(x,y) \in \varphi^k$ pre nejaké $k > 0 \leftrightarrow$ ak existuje postupnosť prvkov $x = x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_k = y$ taká, že platí $x_0, x_1 \in \varphi, x_1, x_2 \in \varphi, ...x_{k-1}, x_k \in \varphi$

4.6 Usporiadania

4.6.1 Definícia čiastočného a úplného usporiadania množiny

Relácia na množine A sa nazýva čiastočné usporiadanie množiny A, ak je **asymetrická a tranzitívna**. Relácia na množine A sa nazýva (lineárne) usporiadanie množiny A, ak je **asymetrická, tranzitívna a trichotomická**. Teda usporiadanie množiny A je každé čiastočné usporiadanie, ktoré je **trichotomické na množine** A.

Formálnejšie, relácia φ na množine A je čiastočné usporiadanie množiny A, ak pre každé $x, y, z \in A$ platí:

1. $(x,y) \in \varphi \rightarrow (y,x) \notin \varphi$
2. $(x,y) \in \varphi \wedge (y,z) \in \rightarrow (x,z) \in \varphi$

   Ak navyše pre každé $x, y \in A$ platí:

3. $(x = y) \vee (x,y) \int \varphi \vee (y,x) \in \varphi$
   , čo je ekvivalentné s
   $x \neq y \rightarrow ((x,y) \in \varphi \vee (y,x) \in \varphi)$,

tak φ je usporiadanie množiny A.

Ak A je množina a φ je jej usporiadanie (resp. čiastočné usporiadanie), tak hovoríme, že množina A je usporiadaná (resp. čiastočne usporiadaná) reláciou φ a zapisujeme to v tvare (A, φ) , alebo $(A, <)$, ak namiesto $(x,y) \in \varphi$ píšeme $x < y$. Uvedený zápis je motivovaný tým, že pre tú istú množinu možno vo všeobecnosti definovať viacero čiastočných usporiadaní.

4.6.2 Ostré a neostré usporiadanie

- Ostré, ak $x < y$
- Neostré, ak $x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y$

4.6.3 Minimálny, maximálny, prvý a posledný prvok množiny

Prvok a čiastočne usporiadanej množiny $(A, <)$ sa nazýva

- minimálny prvok, ak pre žiadne $x \in A$ neplatí $x < a$
- maximálny prvok, ak pre žiadne $x \in A$ neplatí $a < x$

Prvok b čiastočne usporiadanej množiny $(A, <)$ sa nazýva

- **prvý** alebo **najmenší prvok** množiny A, ak pre každý prvok $x \in A, x \neq b$ platí $b < x$
- **najväčší** alebo **posledný prvok** množiny A, ak pre každé $x \in A, x \neq b$ platí $x < b$

Posledný je vždy maximálnym, ale nie vždy aj naopak. Prvý je vždy minimálnym, ale nie vždy aj naopak.

4.6.4 Lexikografické usporiadanie karteziánskeho súčinu

Nech $(A, \leq)$ je usporiadaná množina a n je prirodzené číslo. Usporiadanie na množine $A^n = A \times A \times ... \times A : (a_1, a_2, ..., a_n) \leq (b_1, b_2, ..., b_n)$ sa nazýva **lexikografické usporiadanie množiny** A^n práve vtedy, keď existuje taký index $i = 1, 2, ..., n$, že $a_i < b_i$ a pre $j < i$ platí $a_j = b_j$

Príklad: $A = \{a, b, c\}$ je množina s usporiadaním $a < b < c$, tak lexikografické usporiadanie množiny $A \times A$ vyzerá takto: $(a, a) \leq (a, b) \leq (a, c) \leq (b, a) \leq (b, b) \leq (b, c) \leq (c, a) \leq (c, b) \leq (c, c)$

4.7 Zobrazenia

4.7.1 Definícia pomocou relácií

Zobrazením f z množiny X do množiny Y nazývame reláciu $f \subseteq X \times Y$ ak ku každému $x \in X$ existuje práve jedno také $yinY$, že dvojica $(x, y) \in f$.

Podrobnejšie: relácia f z množiny X do množiny Y (alebo medzi prvkami množín X a Y v uvedenom poradí) sa nazýva **zobrazenie (funkcia)** množiny X do Y, ak platí:

1. $\forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} (x, y) \in f$

2. $\forall_{x\in X}\forall_{y\in Y}\forall_{y'\in Y}((x,y)\in f \wedge (x,y')\in f)\rightarrow y=y'$

Ak f je zobrazenie množiny X do množiny Y zapisujeme $f : X \rightarrow Y$. Namiesto $(x,y)\in f$ píšeme $f(x)=y$. Prvok $y\in Y$ sa nazýva hodnota zobrazenia f v prvku x.

Ak $A\subseteq X$, tak znakom $f(A)$ označujeme množinu všetkých tých $y\in Y$, ku ktorým existuje $x\in A$, že $y=f(x)$ Teda: $f(A)=\{y\in T : \exists_x x\in A\wedge y=f(x)\}$

- Množina $f(A)$ sa nazýva obraz množiny A v zobrazení f
- Množina X sa nazýva obor definície zobrazenia $f : X\rightarrow Y$
- Y sa nazýva obor hodnôt zobrazenia f.

4.7.2 Injektívne, surjektívne a bijektívne zobrazenia

Pripúšťame aj možnosť $Y\neq f(X)$ (t.j. platí $f(X)\subseteq Y$).

- **Surjektívne zobrazenie (X na Y)** ak $f(X)=Y$
- **Injektívne zobrazenie (prosté)** ak $x,y\in X$ a $x\neq y$, tak $f(x)\neq f(y)$
- **Bijektívne zobrazenie** ak je injektívne a surjektívne zároveň.

Zúženie funkcie Ak $f : X\rightarrow Y$ je funkcia a $A\subseteq X$, tak znakom $f|A$ označujeme funkciu $g : A\rightarrow Y$ definovanú takto; pre $x\in A$ platí $f(x)=g(x)$, t.j. $f|A=f\cap(A\times Y)$. Funkcia $g=f|A$ sa nazýva parciálna funkcia k funkcií f , alebo zúženie funkcie f (na množine A).

4.7.3 Skladanie zobrazení

Ak f je injektívne zobrazenie množiny X do Y, tak f^{-1} je bijektívne zobrazenie množiny $f(X)$ do X.

Ak je f bijekcia množiny X na Y, tak f^{-1} je bijekcia množiny Y do X.Poznamenávame, že $f^{-1}=\{(y,x)\in Y\times X(x,y)\in f\}$.

Nech $f : X\rightarrow Y$ a $g : Y\rightarrow Z$. Potom zložená relácia $g\circ f$je zobrazenie množiny X do Z. Poznamenávame, že $g\circ f=\{(x,z)\in(X,Z)|\exists y, y\in Y,(x,y)\in f\wedge(y,z)\in g\}$.

$g\circ f(x)=g(f(x))$

Zobrazenie $g\circ f$ sa nazýva **zložené zobrazenie** alebo **kompozícia zobrazení**

1. f, g sú injektívne zobrazenia, tak aj $g \circ f$ je injektívne zobrazenie

2. f, g sú surjektívne zobrazenia, tak aj $g \circ f$ je surjektívne zobrazenie

3. f, g sú bijektívne zobrazenia, tak aj $g \circ f$ je bijektívne zobrazenie

4.8 Mohutnosť množiny

4.8.1 Základné vlastnosti mohutnosti a nerovnosti

Nech A, B sú dve množiny. Budeme hovoriť, že množiny A, B majú rovnakú mohutnosť alebo rovnaký počet prvkov, píšeme $|A| = |B|$, ak existuje prosté zobrazenie množiny A na množinu B, teda bijekcia.

Vzťah „mať rovnakú mohutnosť" je reflexívny, symetrický a tranzitívny. Vyjadruje ho nasledujúca veta:

1. Pre každú množinu A platí $|A| = |A|$

2. Ak $|A| = |B|$, potom $|B| = |A|$

3. Ak $|A| = |B|$, $|B| = |C|$, tak $|A| = |C|$

Nech A, B sú množiny.

- A má mohutnosť menšiu alebo rovnú ako množina B a písať $|A| \leq |B|$, ak existuje injektívne zobrazenie $f : A \to B$

- A má mohutnosť menšiu ako množina B, píšeme $|A| < |B|$, ak $|A| \leq |B|$ a nie je $|A| = |B|$

Nech A, B, C sú množiny potom platí:

- Ak $|A| = |B|$, tak $|A| \leq |B|$

- Ak $|A| \leq |B|$ a $|B| \leq |C|$, tak $|A| \leq |C|$

- Ak $|A| = |B|$ a $|B| < |C|$, tak $|A| < |C|$

Vzťah „ $|A| \leq |B|$ " je antisymetrický, t.j. ak $|A| \leq |B|$ a súčasne $|B| \leq |A|$, tak $|A| = |B|$. Príklad: $|(0, 1)| \leq | < 0, 1 > |$ a $| < 0, 1 > | \leq |(0, 1)|$ - nekonečné požičiavanie; zobrazenie z $(0, 1)$ nemôže byť spojité.

Nech f, g sú zobrazenia $f : A \to B$ a $g : B \to A$ a f je prosté. Potom existujú množiny A_1, A_2, B_1, B_2 také, že platí:

- $A_1 \cap A_2 = \emptyset, B_1 \cap B_2 = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 = A, B_1 \cup B_2 = B$
- $f(A_1) = B_1, g(B_2) = A_2$

4.8.2 Počítanie s mohutnosťami

Súčet Nech A, B, C sú množiny. Budeme hovoriť, že mohutnosť množiny C je súčet mohutností množín A a B, písať $|C| = |A| + |B|$, ak existujú množiny A_1, B_1také že:

- $A_1 \cup B_1 = C$
- $A_1 \cap B_1 = \emptyset$
- $|A| = |A_1|, |B| = |B_1|$

Je potrebné overiť, či rovnosť platí aj pre iné množiny ako A, B, ktoré majú rovnakú mohutnosť. (vytvoríme prosté zobrazenia f, g z A a B do X a Y, vytvoríme zobrazenie $h(x) = f(x)|x \in A; h(x) = g(x)|x \in B$, všetko je prosté, všetci sú šťastní, na strane 62 je obrázok.)

Umocňovanie Mohutnosť množiny C je mohutnosť množiny A umocnená na mohutnosť množiny B, $|C| = |A|^{|B|}$, ak $|C| = |A^B|$. Pričom A^B označujeme množinu všetkých zobrazení množiny B do množiny A.

Súčin Mohutnosť množiny C je súčin mohutností množín A a B, $|C| = |A \cdot B|$, ak platí $|C| = |A \times B|$

Vlastnosti Všetky tieto operácie sú monotónne, t.j. ak $|A| \leq |X|$, $|B| \leq |Y|$, potom

- $|A| + |B| \leq |X| + |Y|$
- $|A| \cdot |B| \leq |X| \cdot |Y|$
- $A^B \leq X^Y$

Pre sčítanie a násobenie mohutností platia zákony aritmetiky, napr.:

- Komutativita
  $|A| + |B| = |B| + |A|$
  $|A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$
- Asociatívnosť
  $|A| + (|B| + |C|) = (|A| + |B|) + |C|$
  $|A| \cdot (|B| \cdot |C|) = (|A| \cdot |B|) \cdot |C|$

- Distributívny zákon
  $|A| \cdot (|B| + |C|) = (|A| \cdot |B|) + (|A| \cdot |C|)$

Pre umocňovanie platia tiež zákony aritmetiky

- $A^{B+C} = A^B \cdot A^C$
- $(|A| \cdot |B|)^{|C|} = |A|^{|C|} \cdot |B|^{|C|}$
- $(|A|^{|B|})^{|C|} = A^{|B| \cdot |C|}$

Odčítanie a delenie mohutnosti sa definovať nedá.

4.9 Cantor-Bernsteinova veta a jej dôsledky

4.9.1 formulácia vety

Nech A, B sú množiny. Ak platí $|A| \leq |B|$ a súčasne $|B| \leq |A|$, tak $|A| = |B|$

4.9.2 idea dôkazu

TODO, nechce sa mi

4.9.3 usporiadanie kardinálnych čísel

4.10 Konečné a nekonečné množiny

4.10.1 Definícia konečnej množiny, definícia nekonečnej množiny

Množina A sa nazýva konečná, ak $A < \aleph_0$,t.j. ak $A < N$. Množina sa nazýva nekonečná, ak nie je konečná.

4.10.2 existencia nekonečných množín

Množina A má n prvkov, $|A| = n$, kde $n \in N$, ak $|A| = |N_n|$.
$\forall n \in N$ platí $|N_n| < |N_{n+1}| \rightarrow$ Ak má množina n prvkov, $n \in N$, tak je konečná. (Dôkaz indukciou)

Pre $n, m \in N$ je $|N_n| = |N_m| \leftrightarrow n = m$. (Dôkaz sporom)
Ak $A \subseteq N_n$, tak existuje k také, že $|A| = k$. (Dôkaz indukciou)
Ak množina $A \subseteq N$ je zhora neohraničená, tak $|A| = |N|$
Ak množina A je konečná $\leftrightarrow$ tak existuje také $n \in N$, že $|A| = n$.

4.10.3 vlastnosti konečných a nekonečných množín

4.11 Spočítateľné a nespočítateľné množiny

Množina A sa nazýva spočítateľná, ak platí $A \leq \aleph_0$,t.j. ak existuje prosté zobrazenie množiny A do množiny N – prirodzených čísel. Množina sa nazýva nespočítateľná, ak nie je spočítateľná.

Zrejme každá konečná množina je spočítateľná. Podmnožina spočítateľnej množiny je spočítateľná. Množina N je nekonečná spočítateľná. Podľa Cantorovej vety množina $P(N)$ je nespočítateľná.

Budeme hovoriť, že množina A sa dá zoradiť do postupnosti, ak existuje zobrazenie množiny N na množinu A, t.j. ak existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ taká, že $A = a_n, n \in N$

Neprázdna množina je spočítateľná vtedy a len vtedy, keď sa dá zoradiť do postupnosti.

Ak existuje prosté zobrazenie f množiny A na množinu B a množina A je spočítateľná, potom aj množina B je spočítateľná.

4.11.1 Zjednotenie a karteziánsky súčin spočítateľných množín

Zjednotenie a karteziánsky súčin dvoch spočítateľných množín sú spočítateľné množiny.

Zjednotenie spočítateľne mnoho spočítateľných množín je spočítateľná množina.

Množina všetkých reálnych čísel je nespočítateľná.

4.11.2 Existencia nespočítateľných množín

4.11.3 Cantorova diagonálna metóda

4.12 Potenčná množina a jej kardinalita

Pre ľubovoľnú množinu X platí $|P(X)| = 2^{|X|}$

4.12.1 formulácia Cantorovej vety o potenčnej množine

Pre každú množinu X platí $|X| < |P(X)|$.

idea dôkazu:

Pre každú množinu X platí $|X| < 2^{|X|}$. Neexistuje množina všetkých množín.

dôsledky pre nekonečné množiny:

4.13 Prirodzené čísla a matematická indukcia, Dirichletov princíp

4.13.1 Definícia prirodzených čísiel

Nech M, N je podmnožina spĺňajúca dve podmienky: $0 \in M$ ak $x \in M$, tak potom aj $(x+1) \in M$. Potom $M = N$.

4.13.2 Dôkaz matematickou indukciou

Nech $(V(n))_{n \in N}$ je postupnosť výrokov.

Báza indukcie: Predpokladajme, že platí výrok $V(0)$ Indukčný krok: pre každé prirodzené číslo n, ak platí $V(n)$, tak potom platí $V(n+1)$, potom výrok $V(n)$ platí pre každé prirodzené číslo.

Predpokladajme, že z platnosti výroku $V(k)$ pre každé $k < n$ vyplýva aj platnosť výroku $V(n)$. Ak platí výrok $V(0)$, tak výrok $V(n)$ platí pre každé prirodzené číslo n.

4.13.3 Dirichletov princíp

Nech A a B sú konečné množiny, pričom $|A| = n$, $|B| = m$ a $n > m$ Potom neexistuje žiadne injektívne zobrazenie $f : A \to B$.

Silnejšie tvrdenie: Ak $f : A \to B$ je zobrazenie konečných mnžoín také, že $|A| = n$, $|B| = m$ a $n/m > r - 1$ pre nejaké prirodzené číslo r, tak existuje prvok množiny B, na ktorý sa zobrazí aspoň r prvkov množiny A.

4.13.4 Vlastnosť dobrého usporiadania

4.14 Základné pravidlá kombinatorického počítania

4.14.1 Počítanie prvkov množiny dvoma spôsobmi

1. Určiť počet **neusporiadaných** kongurácií, pričom opakovanie objektov v konguráciách je alebo nie je povolené.

2. Určiť počet **usporiadaných** kongurácií, pričom opakovanie objektov v konguráciách je alebo nie je povolené.

4.14.2 Pravidlo súčtu

Nech $X_1, X_2, ..., X_n$, $n \geq 2$ sú navzájom disjunktné podmnožiny konečnej množiny X, pričom $X = X_1 \cup X_2 \cup, ..., \cup X_n$:
Potom $|X| = |X_1| + |X_2| + ... + |X_n|$.

4.14.3 Pravidlo súčinu

Nech $X_1, X_2, ..., X_n$, $n \geq 2$ sú ľubovoľné konečné množiny.
Potom $|X_1 \times X_2 \times ... \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot ... \cdot |X_n|$.

4.14.4 Pravidlo mocnenia

4.15 Variácie a enumerácia zobrazení

Ak A a B sú kontečné množiny, pričom $|A| = n$ a $|B| = m$, tak $|B^{|A|}| = |B|^{|A|} = m^n$

Nech A je konečná množina, $|A| = n$. Potom počet všetkých podmnožín množiny A je $|P(A)| = 2^n$.

Variácie spolu s kombináciami patria medzi najjednoduchšie a najbežnejšie kombinatorické konfigurácie.Zatiaľ čo variácie sú usporiadané štruktúry, kombinácie sú neusporiadané.

Nech A a B sú konečné množiny, pričom $|A| = n$ a $|B| = m$. Potom počet všetkých injektívnych zobrazení z A do B je
$m \cdot (m-1)...(m-n+1) = \Pi_{i=0}^{n-1}(m-i)$

Existuje vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi permutáciami ľubovolnej množiny B a lineárnymi usporiadaniami množiny B. Preto počet lineárnych usporiadaní n-prvkovej množiny je n!

Zovšeobecnené pravidlo súčinu: Nech X je konečná množina. Nech $A \subseteq X^k$, $k \geq 2$, je podmnožina karteziánskeho súčinu X^k, ktorej prvky označíme $(x_1, x_2, ..., x_k)$ a ktorá spĺňa podmienky:

1. prvok x_1 je možné z množiny X vybrať n_1 spôsobmi
2. pre každé $i \in \{1, ..., k-1\}$, po akomkoľvek výbere usporiadanej i-tice $(x_1, x_2, ..., x_k)$ je možné prvok x_{i+1} vybrať vždy n_{i+1} spôsobmi.

Potom $|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.
[variácie s opakovaním a bez opakovania, permutácie, určenie ich počtu]

4.16 Kombinácie a enumerácia podmnožín

4.16.1 Kombinácie bez opakovania

Kombinácie bez opakovania sú neusporiadané súbory neopakujúcich sa prvkov - inými slovami podmnožiny nejakej základnej množiny. Presnejšie, kombinácie (bez opakovania) k-tej triedy z n prvkov množiny A sú k-prvkové podmnožiny množiny A s mohutnosťou $|A| = n$.

Množina všetkých k-prvkových podmnožín množiny A sa označuje $P_k(A)$ alebo $\binom{A}{k}$ a ich počet $\binom{n}{k}$. Symbol $\binom{n}{k}$ sa nazýva **kombinačným číslom** alebo **binomickým koeficientom**.

Vlastnosti $\binom{n}{k}$:

- Pre každé $n \geq 0$ platí $\binom{n}{0} = 1$, lebo každá množina má práve jednu $\emptyset$.
- Pre každé $n \geq 0$ platí $\binom{n}{n} = 1$, lebo každá n-prvková množina má práve n rôznych n-prvkových množín
- Pre každé $n \geq 0$ platí $\binom{n}{1} = n$,lebo každá n-prvková množina má práve n 1-prvkových podmnožín.
- Pre každé $k \leq n$ platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Počet k-prvkových podmnožín ľubovoľnej n-prvkovej množiny A je ten istý, ako počet $(n-k)$-prvkových podmnožín množiny A, lebo zobrazenie $\binom{A}{k} \to \binom{A}{n-k}$, $x \to A - x$ je bijekcia.
- Pre každé $k > n$ platí $\binom{n}{k} = 0$, lebo n-prvková množina nemá podmnožiny s viac ako n prvkami.

4.16.2 Kombinácie s opakovaním

a určenie ich počtu, príklady kombinácií s opakovaniami]

4.17 Binomická a polynomická veta

[znenie a dôkaz, dôsledky]

4.18 Rovnosti a nerovnosti s kombinačnými číslami

[identity zahŕňajúce kombinačné čísla, metódy dokazovania identít]

4.19 Princíp zapojenia a vypojenia

[formulácia, dôkaz a aplikácie: enumerácia surjektívnych zobrazení, počet permutácií bez pevných bodov]

4.20 Hierarchia rastu funkcií, odhady čísla n! O-symbolika, rádová rovnosť, asymptotická rovnosť, odhady

4.21 Stromy a lesy, kostry, súvislé grafy, meranie vzdialeností v grafe

[definície, vlastnosti, rozličné charakterizácie stromov]

4.22 Eulerovské a bipartitné grafy

[charakterizácie eulerovských a bipartitných grafov, algoritmus na nájdenie eulerovského ťahu]

4.23 Meranie vrcholovej a hranovej súvislosti grafu

[definície, vzájomný vzťah, artikulácie, mosty, charakterizácia 2-súvislých grafov]

4.24 Hamiltonovské grafy

[definícia, postačujúce podmienky, zložitosť problému]

Kapitola 5

Genetika

Genetika

5.1 Molekulárne základy dedičnosti ALMOST DONE

Status: almost DONE Source: Prednášky 9, 10, (11?), 12, 13, 14

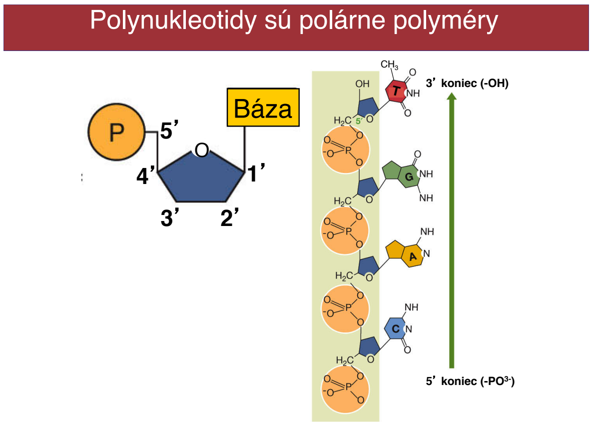
štruktúra a replikácia DNA, transkripcia, translácia, regulácia génovej expresie na transkripčnej a post-transkripčnej úrovni.

5.1.1 Štruktúra DNA

DNA

báza (C, T, U - pyrimidín, A, G - purín)
Deoxyribóza
Fosfát
Dvojvláknová, helikálna, antiparalelná
-PO_3^- koniec – 5‘ fosfátový

-OH koniec – 3‘ ribózový/deoxyribózový
Vodíkové väzby



RNA

U + ribóza, 1 vlákno

5.1.2 Replikácia

Semikonzervatívna – jedno templátové vlákno z pôvodnej + 1 nové

Rozdelenie DNA –helikáza, energia z hyrdolýzy ATP

SSB single strand binding proteíny zabraňujú spojeniu

Nové vlákno vzniká 5‘ → 3‘

DNA polymerázy replikujú

Potrebujú na začatie RNA primer, ktorý pridá DNA primáza

Replikačná vidlica – Replikácia ide od “stredu” (origin) – oboma smermi naraz

Leading a Lagging strand

Keďže syntéza ide 5‘→ 3‘, lagging strand sa syntetizuje po úsekoch – okazakiho fragmenty

Lagging strand – DNA polymeráza 3 syntetizuje, DNA polymeráza 1 odstraňuje RNA primery a nahrádza ich DNA a DNA ligáza opravuje medzery, kde sa nadpájajú fragmenty

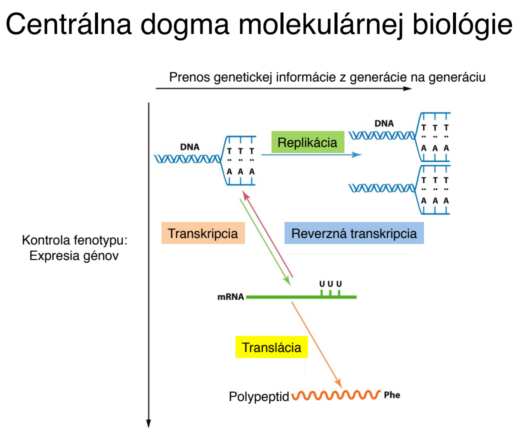
Lagging strand zle replikuje teloméry – enzým telomeráza ich predlžuje (obsahuje RNA a proteínovú časť, podľa tej RNA sa dosyntetizuje telomér)

5.1.3 Oprava DNA

Transpozón – úsek DNA, schopný meniť miesto v genóme

5.1.4 Transkripcia, translácia, syntéza bielkovín

Centrálna dogma – smer toku informácií



DNA → Transkripcia → mRNA → translácia → proteín

Kódujúce vlákno + Templátové vlákno (komplementárne ku kódujúcemu) → mRNA vlákno (rovnaké ako kódujúce, ale T → U)

Iniciácia – RNA polymeráza + sigma faktor dosadnú

Elongácia – predlžovanie RNA vlákna

Terminácia – ρ proteín → nascentné vlákno RNA, alebo bez neho → zloženie RNA do 2D štruktúry

U eukaryotov

Intrón + Exón → transkripcia → pre-mRNA → splicing, processing → mRNA → transport, čiapočka, poly(A) chvost → translácia → proteín

Obrázok prezent 12 slide 34

3 RNA polymerázy miesto 1

rRNA

pre-mRNA

tRNA, 5S rRNA, malé jadrové RNA

mRNA, rRNA – zložka ribozómov, tRNA – prenáša AK

Malé RNA – miRNA, shRNA, siRNA – sa podieľajú na génovej expresii

Začiatok transkripcie RNA polymerázou 2 potrebuje bazálny iniciačný komplex (TATA box + stuff)

Post-transkripčné úpravy

CAP, poly(A) chvost

Možná deaminácia

Alternatívny splicing intrónov → rôzne proteíny (12, 52)

Trans-splicing – kombinácia exónov z rôznych génov

5.1.5 Translácia

Skladanie ribozómov: proteíny → rRNAs → ribozóm. Syntéza rRNA v jadierku

tRNA: antikodón tRNA kodón mRNA

AK sú pripojené na 3‘ koniec tRNA

Aj modifikované nukleotidy

Iniciácia proteosyntézy, Elongácia polypeptidu, terminácia translácie

3 binding sites v ribozóme (E-exit, P-peptidyl, A-aminoacyl)

5‘ → 3‘

Wobble pozícia – Inozín – môže tvoriť pár s viac bázami

5.1.6 Regulácia génovej expresie

Prezentácia 14 TODO

5.2 Cytologické základy dedičnosti

5.2.1 štruktúra chromozómov na mikroskopickej a molekulovej úrovni

5.2.2 funkcia chromozómov

5.2.3 distribúcia genetických štruktúr pri delení buniek eukaryotov (mitóza a meióza)

5.2.4 Spôsoby rozmnožovania organizmov a ich úloha v udržiavaní genetickej variability

5.3 Mendelistická dedičnosť

5.3.1 monohybridné, dihybridné a polyhybridné kríženie s úplnou dominanciou

5.3.2 princípy a možnosti genetickej analýzy u človeka

5.4 Rozšírená mendelistická genetická analýza

5.4.1 neúplná dominancia a kodominancia

5.4.2 mnohonásobný alelizmus

5.4.3 letálne gény

5.4.4 interakcie génov

5.4.5 penetrancia a expresivita

5.5 Dedičnosť a pohlavie

5.5.1 genetická determinácia pohlavia u mikroorganizmov, rastlín, živočíchov a človeka

5.5.2 štruktúra a funkcia pohlavných chromozómov

5.5.3 dedičnosť znakov, ktorých gény sú uložené na pohlavných chromozómoch (dedičnosť znakov viazaných na pohlavie)

5.5.4 dedičnosť znakov pohlavím ovládaných a ovplyvnených

5.6 Väzba génov

5.10.4 charakteristika kvantitatívnyvh znakov

5.10.5 polygénná dedičnosť

5.10.6 zložky fenotypovej variability

5.10.7 dedivost (heritabilita)

5.11 Evolúcia ako biologický fenomén

5.11.1 predstavy o evolúcii pred Darwinom, základné prvky a postuláty Darwinovej evolučnej teórie

5.12 Mutácie a selekcia ako základné evolučné činitele.

5.12.1 r-selekcia a K-selekcia

5.12.2 základné populačno-genetické selekčné modely, hypotéza „červenej kráľovnej“

5.13 Genetický drift ako evolučný činiteľ

5.13.1 náhodné zmeny génových frekvencií v malých populáciách

5.13.2 Kimurova teória neutrálnej evolúcie

5.14 Mikroevolúcia a makroevolúcia

5.14.1 vznik nových druhov (speciácia)

5.14.2 reprodukčné bariéry

5.14.3 analýza fylogenézy a konštrukcia dendrogramov

5.14.4 fylogenetika, fenetika, kladistika

5.15 Molekulárna evolúcia

5.15.1 gény ako historické dokumenty

5.15.2 molekulové hodiny

5.15.3 univerzálny fylogenetický strom

5.16.3 svet RNA

5.16.4 extrémofilné organizmy

5.16.5 mitochondrie a plastidy

5.16.6 endosymbiotická teória

Kapitola 6

Matematická analýza

Kapitola 7

Metódy v bioinformatike

Kapitola 8

Pravdepodobnosť a štatistika

(Predmety Pravdepodobnosť a štatistika, Integrácia dátových zdrojov, Metódy v bioinformatike)

8.1 Definícia pravdepodobnostného modelu a základné vlastnosti pravdepodobnosti

(sigma algebra, pravdepodobnostná miera, princíp inklúzie-exklúzie)

8.2 Nezávislosť udalostí, podmienená pravdepodobnosť a Bayesove vety

8.3 Diskrétne náhodné premenné

(distribučná funkcia, stredná hodnota, disperzia, binomické, Poissonovo a geometrické rozdelenie)

8.4 Spojité náhodné premenné

(distribučná funkcia, hustota, stredná hodnota, disperzia, rovnomerné, exponenciálne a normálne rozdelenie)

8.5 Zákon veľkých čísel a limitné vety

(Markovova a Čebyševova nerovnosť, slabý zákon veľkých čísel, centrálna limitná veta)

8.6 Náhodné vektory

(distribučná funkcia, nezávislosť náhodných premenných, kovariancia, korelačný koeficient, stredná hodnota, multinomické a viacrozmerné normálne rozdelenie)

8.7 Použitie štatistických testov

(Fisherov exaktný test, chí-kvadrát test, Welchov t-test, Mann-Whitneyho U-test, Bonferroniho korekcia viacnásobného testovania)

Kapitola 9

Programovanie

9.1 Objektovo orientované programovanie

9.1.1 zapúzdrenie

9.1.2 dedičnosť

9.1.3 polymorfizmus

9.1.4 trieda

9.1.5 modifikátory prístupu

9.1.6 konštruktory

9.1.7 abstraktné triedy a rozhrania)

9.1.8 vnorené triedy(nested classes)

9.1.9 garbage collection

9.2 Výnimky (exceptions)

9.2.1 vyhodenie výnimky

9.2.2 zachytenie a spracovanie výnimiek (try, catch)

9.2.3 finally)

9.2.4 vlastné triedy výnimiek

9.2.5 checked a unchecked výnimky

9.3 Vlákna (threads)

9.3.1 stav vlákna (new, runnable, blocked, waiting, timed_waiting,

Kapitola 10

Tvorba a analýza algoritmov

10.1 Analýza časovej zložitosti algoritmov

10.1.1 Definícia časovej zložitosti

TODO

10.1.2 O-notácia

TODO

10.1.3 Odhad časovej zložitosti rekurzívnych algoritmov používajúcich metódu rozdeľuj a panuj

TODO

10.2 Algoritmy pre triedenie

10.2.1 Efektívne algoritmy triedenia porovnávaním

TODO

10.2.2 Triedenie v lineárnom čase

TODO

10.2.3 Dolný odhad časovej zložitosti každého triedenia porovnávaním

TODO

10.3 Dátové štruktúry v poli

10.3.1 Pole s dynamickou veľkosťou – vektor

TODO

10.3.2 Zásobník

TODO

10.3.3 Fronta

TODO

10.3.4 Binárna halda a implementácia prioritnej fronty pomocou nej

TODO

10.4 Usporiadané dátové štruktúry

10.4.1 Binárne vyhľadávacie stromy

TODO

10.4.2 Usporiadaná množina

TODO

10.4.3 Usporiadané asociatívne pole – slovník

TODO

10.4.4 Vyvažovanie binárnych stromov

TODO

10.5 Hešovanie

10.5.1 Kolízie a rôzne spôsoby ich riešenia

TODO

10.5.2 Narodeninový paradox

TODO

10.5.3 Množina

TODO

10.5.4 Asociatívne pole

TODO

10.6 Základné grafové algoritmy

10.6.1 Reprezentácie grafu v pamäti

Matica susednosti - dvojrozmerné pole $n \times n$, v ktorom môžeme reprezentovať graf pomocou boolov pre neohodnotený, integerov pre ohodnotený graf.
Výhody:

- Vieme priamo zistiť, či x susedí s y
- Prehľadná a jednoduchá na prácu
- Priama reprezentácia ohodnotených hrán

Nevýhody:

- Pri riedkych grafoch zaberá zbytočne veľa miesta
- Pomalé hľadanie susedov vrcholu (potrebujeme prejsť všetkých n pozícií)
- Nejde priamočiaro reprezentovať multigrafy (pre každé políčko si ale môžme pamätať zoznam hrán)

Zoznam susedov - pre každý vrchol si pamätáme zoznam jeho susedov, napr v poli dĺžky n spájaných zoznamov alebo vo vektore vektorov. Vrcholy môžeme označovať integermi.

- Rýchly prístup ku všetkým hranám idúcim z vrcholu
- Zaberá menej miesta ako matica susedov pri riedkych grafoch
- Priamočiara reprezentácia multigrafu

Nevýhody:

- K hranám vieme pristupovať len sekvenčne
- V ohodnotených grafoch si musíme pamätať páry čísel

Objektová reprezentácia V objekte reprezentujúcom vrchol si pamätáme referencie na jeho susedov. V princípe rovnaké ako zoznam susedov, ale s čitateľnejším kódom.

10.6.2 Prehľadávanie do hĺbky a do šírky

DFS Rekurzívne prehľadáva graf, pamätáme si už navštívené vrcholy. Využitie:

- Hľadanie mostov v grafoch.
- Hľadanie artikulácií v grafoch.
- Hľadanie silno súvislých komponentov v orientovaných grafoch
- Testovanie planarity grafov.

BFS

10.6.3 Topologické triedenie

TODO

10.7 Najkratšie cesty v grafe

Vedia pracovať len na ohodnotených grafoch s nezápornými cenami hrán. Neexistujúce cesty medzi

10.7.1 Dijkstrov algoritmus

TODO Vypočíta najlacnejšiu cestu v grafe začínajúcu v konkrétnom vrchole v_0. Výstupom je pole cien ciest z v_0 do každého $v \in G$. Worst-case: $O(|V|^2)$

10.7.2 Floydov-Warshallov algoritmus

TODO Vypočíta najlacnejšiu cestu z každého vrcholu do každého vrcholu. Výstupom je matica najnižších cien ciest z $v \in G$ do každého $v \in G$. Worst-case: $O(|V|^3)$

10.8 Najlacnejšia kostra grafu

10.8.1 Algoritmus Union-FindSet

TODO

10.8.2 Kruskalov algoritmus

TODO

10.9 Násobenie matíc

10.9.1 Naivný algoritmus

TODO

10.9.2 Strassenov algoritmus

TODO

10.9.3 Efektívne umocňovanie matice

TODO

10.9.4 Tranzitívny uzáver grafu pomocou umocňovania matíc

TODO

10.10 Dynamické programovanie

Bottom-up riešenie

10.10.1 Konkrétne príklady použitia

0-1 knapsack TODO

Floyd-Warshall TODO

Problém násobenia reťazca matíc TODO

10.10.2 Charakterizácia problémov riešiteľných dynamickým programovaním

TODO

10.10.3 Porovnanie iteratívneho prístupu a rekurzie s memoizáciou

TODO

10.11 Ďalšie princípy tvorby efektívnych algoritmov

10.11.1 Rozdeľuj a panuj

TODO

10.11.2 Pažravé algoritmy

Používajú sa na riešenie optimalizačných problémov. Globálne optimálne riešenie je vytvorené pomocou postupných lokálne optimálnych riešení. Obvykle sú to iteratívne algoritmy, v ktorých problémy redukujeme na podproblémy menšieho rozsahu, v dôsledku čoho sú rýchle.

Dijkstrov algoritmus

Kruskalov algoritmus

Racionálny knapsack

10.11.3 Princíp vyváženosti

Stretávame sa s delením väčšieho problému na menšie, prípadne štruktúr na menšie podštruktúry, často vieme zvýšiť efektívnosť algoritmu ich vyváženosťou.

Príklad: Ak quicksort vyberá náhodný pivot, v priemernom prípade dosahuje zložitosť $O(nlogn)$, pri zlom výbere pivotu to však môže byť až $O(n^2)$ Chceme teda pivotom deliť na rovnaké - vyvážené časti (vyberieme medián).

Príklad: BST má v priemere výšku $logn$, vyhľadávanie zložitosť $O(logn)$, ak však vetvy nie sú vyvážené, môže dosiahnuť zložitosť $O(n)$.

10.11.4 Voľba vhodnej dátovej štruktúry

Abstraktný dátový typ - abstrakcia nad dátovými štruktúrami popisujúca operácie, ktoré sa budú vykonávať. Podľa najčastejších operácií zvolíme implementáciu s ktorou budú najefektívnejšie.

Tabuľka 10.1: **Slovník**

Implementácia	**Member**	**Insert**	**Delete**
Pole	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$
Utriedené pole	$O(logn)$	$O(n)$	$O(n)$
2-3 stromy	$O(logn)$	$O(logn)$	$O(logn)$
Heš	$O(1)/O(n)$	$O(1)/O(n)$	$O(1)/O(n)$

Tabuľka 10.2: **Prioritná fronta**

Implementácia	**Insert**	**Min/top**	**Delete min/pop**
Pole	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
Utriedené pole	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
Halda	$O(logn)$	$O(1)$	$O(logn)$
2-3 stromy	$O(logn)$	$O(logn)$	$O(logn)$