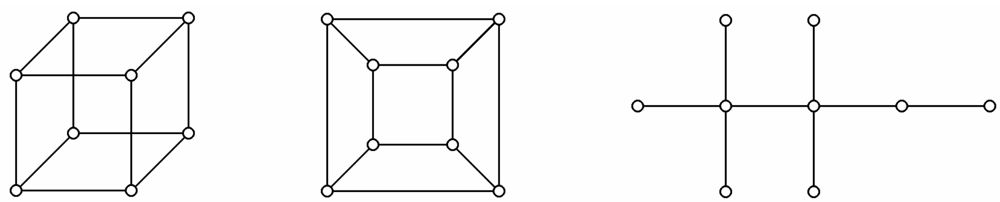
9 PRECHÁDZKY V GRAFOCH

9.1 Grafy

Definícia. Nech je E systém dvojprvkových podmnožín konečnej množiny V. Usporiadanú dvojicu $G = (V, E)$ nazývame **graf**. Prvky množiny V nazývame **vrcholy** a prvky množiny E nazývame **hrany** grafu G.

V predošlej kapitole sme sa stretli s kompletným grafom na n vrcholoch, ktorý označujeme K_n. Tento graf obsahuje všetky možné hrany, teda má $\binom{n}{2}$ hrán.

Grafy možno v rovine znázorniť tak, že vrcholy budú predstavovať krúžky, pričom dvojicu krúžkov spojíme úsečkou, respektíve oblúkom, práve vtedy, keď odpovedajúca dvojica vrcholov tvorí hranu grafu. (Samozrejme, príslušná krivka odpovedajúca hrane už neprechádza žiadnymi ďalšími vrcholmi.) Na obr. 9 uvádzame niekoľko príkladov grafov. Všimnite si, že prvé dva obrázky sú len rôzne nakreslenia rovnakého grafu.



Obr. 9

Definícia. Nech je $G = (V, E)$ graf, $v \in V$ a $e \in E$. Ak sa v hrane e vyskytuje vrchol v, tak v je **susedný** s hranou e a hrana e je **susedná** s vrcholom v. Ak je hrana e susedná s vrcholmi u a v, tak túto hranu zapisujeme $e = (u, v)$. Počet hrán grafu susedných s vrcholom v nazývame **stupeň vrchola** v. Ak majú všetky vrcholy grafu G rovnaký stupeň k, tak G je **pravidelný** graf stupňa k.

Prvé dva grafy na obr. 9 sú pravidelné grafy stupňa 3 a tretí graf má vrcholy stupňov 1, 2 a 4.

Veta 9.1. V každom grafe sa súčet stupňov všetkých vrcholov rovná dvojnásobku počtu hrán tohto grafu a párny počet vrcholov grafu má nepárny stupeň.

D ô k a z : Spočítajme počet usporiadaných dvojíc $[v, e]$, kde v je vrchol a e je hrana grafu, pričom v je susedný s e. Keďže každá hrana je susedná s dvoma vrcholmi, tak takýchto dvojíc je $2m$, kde m je počet hrán grafu. Na druhej strane, každý vrchol je susedný s toľkými hranami, aký má stupeň. Ak sú $v_1, v_2, \ldots, v_n$ všetky vrcholy grafu a ich stupne sú po rade $d_1, d_2, \ldots, d_n$, tak podľa predošlého platí

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2m$$

čím sme dokázali prvé tvrdenie vety. Keďže súčet stupňov všetkých vrcholov je párne číslo, tak počet vrcholov nepárneho stupňa musí byť párny. □

Definícia. Nech je $G = (V, E)$ graf. Postupnosť $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$ nazývame sled ak $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ a $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, k$. Sled, v ktorom sú všetky hrany navzájom rôzne nazývame ťah a sled, v ktorom sú dokonca všetky vrcholy navzájom rôzne nazývame **cesta**. **Uzavretý sled** je taký sled, v ktorom je prvý vrchol zhodný s posledným a podobne, **uzavretý ťah** je taký ťah, v ktorom je prvý vrchol zhodný s posledným. **Kružnica** je uzavretý ťah, v ktorom sú všetky dvojice vrcholov, s výnimkou prvého a posledného, navzájom rôzne. Pod dĺžkou sledu, ťahu, cesty, či kružnice budeme vždy rozumieť počet hrán (včítane opakovania) tohto sledu, ťahu, cesty, či kružnice. Sled $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$ budeme často kvôli stručnosti zapisovať v tvare $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Veta 9.2. Ak graf obsahuje uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.

D ô k a z : Dokážeme, že ak má uzavretý sled v grafe nepárnu dĺžku, tak časť tohto sledu tvorí kružnicu nepárnej dĺžky. Tvrdenie dokážeme indukciou vzhľadom na počet hrán (včítane opakovania) sledu.

1° Keďže neexistuje uzavretý sled dĺžky 1 (graf neobsahuje slučky), tak najkratší uzavretý sled nepárnej dĺžky môže mať dĺžku 3. Avšak v tomto prípade musia byť všetky vrcholy tohto sledu navzájom rôzne, s výnimkou prvého a posledného, teda tento sled tvorí kružnicu.

2° Nech má uzavretý sled $C = (v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0)$ nepárnu dĺžku k, pričom tvrdenie platí pre všetky sledy menšej nepárnej dĺžky. Ak sú všetky vrcholy C, s výnimkou prvého a posledného, navzájom rôzne, tak sled C tvorí kružnicu. Predpokladajme preto, že existuje vrchol, povedzme v_i, ktorý sa v slede C vyskytuje dvakrát (analogicky možno postupovať, ak sa prvý vrchol vyskytuje v slede trikrát). Teda

$$C = (v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_{k-1}, v_0)$$

Potom sú $(v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_{k-1}, v_0)$ a $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i)$ uzavreté sledy menšej dĺžky ako k. Je zrejmé, že jeden z týchto sledov má nepárnu dĺžku a podľa indukčného predpokladu časť tohto sledu tvorí kružnicu nepárnej dĺžky. □

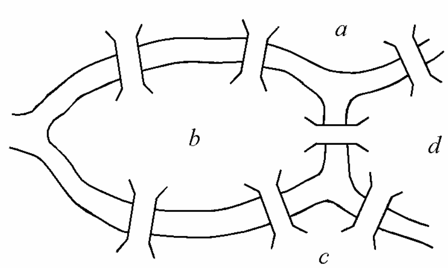
Definícia. Graf je **súvislý**, ak pre každú dvojicu jeho vrcholov u a v existuje v tomto grafe cesta začínajúca vrcholom u a končiaca vrcholom v. Ak graf nie je súvislý, tak najväčšie súvislé časti grafu nazývame **komponenty súvislosti**.

Overte, že všetky tri grafy na obr. 9 sú súvislé.

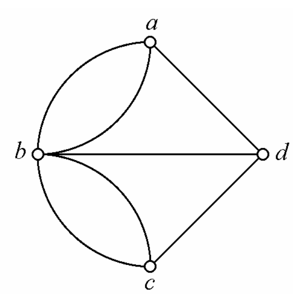
9.2 Eulerovské ťahy

Mesto Königsberg, teraz Kaliningrad, sa v osemnástom storočí rozprestieralo na brehoch a dvoch ostrovoch rieky Pregoly. Tieto časti mesta boli pospájané 7 mostmi, ako je znázornené na obr. 10. V tej dobe nebývalo bežné, aby boli časti mesta pospájané až 7 mostmi a obyvatelia Königsbergu boli na tieto svoje mosty aj patrične hrdí. V nedeľu sa Königsbergčania obyčajne prechádzali po meste a objavil sa problém, či je možné naplánovať takú prechádzku mestom, počas ktorej by prešli každým mostom práve raz.

LEONHARD EULER nahradil všetky časti súše vrcholmi a všetky mosty hranami spájajúcimi tieto vrcholy. Takto síce nedostal graf v zmysle našej definície, ale graf s násobnými hranami, pozri obr. 11. Avšak úlohu týmto spôsobom previedol na problém nájsť taký ťah v grafe, ktorý by obsahoval každú hranu práve raz.



Obr. 10



Obr. 11

Definícia. Uzavretý Eulerovský ťah je taký uzavretý ťah, ktorý obsahuje každú hranu grafu práve raz a **otvorený Eulerovský ťah** je taký ťah, ktorý obsahuje každú hranu grafu práve raz, pričom prvý vrchol tohto ťahu je rôzny od posledného.

Problém mesta Königsberg Euler zovšeobecnil a v roku 1736 dokázal nasledujúcu vetu, ktorá sa považuje za prvú vetu teórie grafov.

Veta 9.3 (Eulerova veta). Súvislý graf má uzavretý Eulerovský ťah práve vtedy, keď má všetky vrcholy párneho stupňa.

D ô k a z : Nech má graf G uzavretý Eulerovský ťah T. Prejdime sa pozdĺž hrán ťahu T. Ak do vrcholu v prídeme k_v krát pomocou k_v rôznych hrán, tak z tohto vrchol musíme aj k_v krát odísť pomocou ďalších k_v rôznych hrán. To znamená, že vrchol v má stupeň $2k_v$ a teda stupeň každého vrchol grafu G je párny.

Teraz predpokladajme, že všetky vrcholy grafu G majú párny stupeň. Nech je v ľubovoľný vrchol grafu G a nech je T najdlhší ťah začínajúci vo vrchole v. Predpokladajme, že ťah T končí vo vrchole u, pričom $u \neq v$. Potom je vrchol u susedný s nepárnym počtom hrán ťahu T a keďže stupeň u je párny, tak aspoň jedna hrana susedná s u nepatrí ťahu T. Čiže T možno predĺžiť, čo je spor s predpokladom. To znamená, že ťah T nutne končí vo vrchole v.

Ak ťah T obsahuje všetky hrany grafu G, tak je Eulerovský. Predpokladajme preto, že T neobsahuje všetky hrany grafu G. Keďže G je súvislý, tak existuje taká hrana e grafu G, ktorá nepatrí ťahu T, ale susedí s vrcholom, povedzme v', ktorý patrí T. Vynechajme z G všetky hrany ťahu T. Takto dostaneme graf, ktorý môže byť nesúvislý. Označme G' ten komponent súvislosti tohto grafu, ktorý obsahuje vrchol v'. Keďže všetky vrcholy grafu G' majú párny stupeň, tak v G' existuje uzavretý ťah, povedzme $(v', v'_1, v'_2, \ldots, v'_{k'}, v')$, začínajúci hranou e. Potom ťah $T = (v, v_1, v_2, \ldots, v_i, v', v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots v_k, v)$ možno predĺžiť na ťah

$$(v, v_1, v_2, \ldots, v_i, v', v'_1, v'_2, \ldots, v'_{k'}, v', v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots v_k, v)$$

ktorý je dlhší ako T, lebo okrem všetkých hrán ťahu T obsahuje aj hranu e. To je však spor s predpokladom, že T je najdlhší ťah grafu G začínajúci vo vrchole v. To znamená, že najdlhší ťah začínajúci vo v obsahuje všetky hrany grafu G, a teda tento ťah je Eulerovský. □

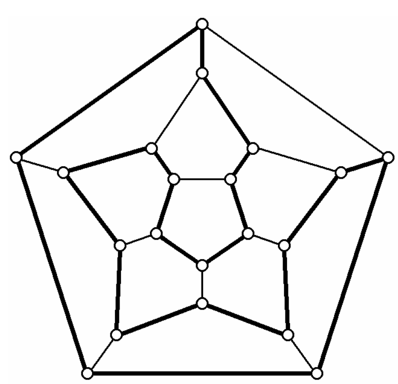
Všimnite si, že v predošlom dôkaze sme nikde nevyužili, že graf G nemá násobné hrany. Teda Eulerova veta platí aj pre také grafy, ktoré násobné hrany majú. Eulerova veta má nasledujúci dôsledok, podľa ktorého neexistuje prechádzka mestom Königsberg, obsahujúca každý most práve raz.

Dôsledok. Súvislý graf má otvorený Eulerovský ťah práve vtedy, keď má práve dva vrcholy nepárneho stupňa.

D ô k a z : Ak má graf otvorený Eulerovský ťah, tak je zrejmé, že všetky jeho vrcholy, s výnimkou prvého a posledného vrcholu otvoreného Eulerovského ťahu, sú párneho stupňa. Teraz naopak predpokladajme, že súvislý graf G má len dva vrcholy, povedzme u a v, nepárneho stupňa. Označme G' graf, respektíve graf s násobnými hranami, ktorý vznikne z G pridaním hrany (u, v). Graf G' je súvislý a každý jeho vrchol má párny stupeň. Preto má podľa Eulerovej vety uzavretý Eulerovský ťah, pričom vynechaním hrany (u, v) z tohto ťahu dostaneme otvorený Eulerovský ťah grafu G. □

9.3 Hamiltonovské kružnice

V roku 1857 WILLIAM R. HAMILTON zostrojil matematický hlavolam, ktorého cieľom bolo nájsť takú uzavretú prechádzku po hranách pravidelného dvanásťstena, ktorá by obsahovala každý vrchol práve raz. Ak zabudneme na plochy dvanásťstena a nakreslíme jeho vrcholy a hrany v rovine, tak dostaneme graf nakreslený na obr. 12.



Obr. 12

Definícia. Hamiltonovská kružnica je taká kružnica, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu a **Hamiltonovská cesta** je cesta, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu.

Teda riešením Hamiltonovho hlavolamu je Hamiltonovská kružnica. Jedna takáto kružnica je na obr. 12 vyznačená tučnými hranami.

Zistiť, či má graf uzavretý Eulerovský ťah, je ľahký problém, lebo stačí zistiť súvislosť grafu a paritu stupňov všetkých jeho vrcholov. Je prekvapujúce, že analogický problém pre Hamiltonovské kružnice je ťažký. Tento problém patrí do skupiny takzvaných NP-úplných problémov. Poznáme však veľmi veľa podmienok, ktorých splnenie vynucuje v grafe existenciu Hamiltonovskej kružnice. Jednu z najznámejších postačujúcich podmienok tohto typu dokázal O. ORE v roku 1960.

Veta 9.4 (Oreho veta). Nech je G graf na $n \geq 3$ vrcholoch. Ak je súčet stupňov každých dvoch vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou, aspoň n, tak G má Hamiltonovskú kružnicu.

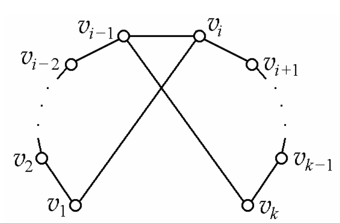
D ô k a z : Nech je G graf spĺňajúci podmienky vety. Najprv dokážeme, že graf G je súvislý. Predpokladajme, že G má aspoň dva komponenty súvislosti. Nech je v_1 vrchol z jedného komponentu súvislosti a v_2 vrchol z iného komponentu súvislosti grafu G. Vrcholy v_1 a v_2 nemôžu byť spojené hranou, a teda podľa predpokladov vety je súčet stupňov týchto vrcholov aspoň n. Teda z dvojprvkovej podmnožiny množiny vrcholov vedie do ostatných $n - 2$ vrcholov aspoň n hrán, čiže podľa Dirichletovho princípu aspoň dve hrany vedú do rovnakého vrcholu, povedzme w. Avšak potom sú (v_1, w) aj (v_2, w) hrany grafu G, čo je v spore s predpokladom, že v_1 a v_2 patria do rôznych komponentov súvislosti grafu G. Teda G je súvislý graf.

Teraz predpokladajme, že $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ je najdlhšia cesta v grafe G. Dokážeme, že existuje kružnica obsahujúca všetky vrcholy tejto cesty. Ak sú v_1 a v_k spojené hranou, tak niet čo dokazovať. Predpokladajme preto, že v_1 a v_k nie sú spojené hranou. Keďže $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ je najdlhšia cesta v grafe G, tak z v_1 aj z v_k môžu viesť hrany iba do vrcholov $v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$. Rozdeľme všetky možné hrany susedné s v_1 a v_k do $k - 1$ skupín $\{(v_1, v_2)\}$, $\{(v_1, v_3), (v_2, v_k)\}$, $\{(v_1, v_4), (v_3, v_k)\}$, … $\{(v_1, v_i), (v_{i-1}, v_k)\}$, …, …, $\{(v_1, v_{k-1}), (v_{k-2}, v_k)\}$, $\{(v_{k-1}, v_k)\}$. Všetky tieto skupiny, s výnimkou prvej a poslednej, sú dvojprvkové. Vrcholy v_1 a v_k nie sú spojené hranou, a preto je súčet ich stupňov aspoň n. Keďže skupín hrán je $k - 1 \leq n - 1 < n$, tak podľa Dirichletovho princípu sú v aspoň jednej skupine dve hrany grafu G. Nech sú týmito hranami (v_1, v_i) a (v_{i-1}, v_k) pre nejaké $i \in \{3, 4, \ldots, k - 1\}$. Potom je

$$C = (v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_2, v_1)$$

kružnica obsahujúca všetky vrcholy najdlhšej cesty $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ grafu G, pozri obr. 13.

Ak $k = n$, tak tvrdenie vety je dokázané. Predpokladajme preto, že $k < n$. Keďže G je súvislý graf, tak existuje vrchol u grafu G, $u \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, ktorý je spojený hranou s nejakým vrcholom kružnice C. Potom však existuje cesta na vrcholoch $v_1, v_2, \ldots, v_k, u$ (samozrejme nie nutne v tomto poradí), čo je spor s predpokladom, že $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ je najdlhšia cesta v grafe G. □



Obr. 13

Dôsledkom Oreho vety je tvrdenie, ktoré dokázal G. DIRAC v roku 1952.

Dôsledok. Nech je G graf na $n \geq 3$ vrcholoch. Ak má každý vrchol grafu G stupeň aspoň $\frac{n}{2}$, tak G má Hamiltonovskú kružnicu.

CVIČENIA

Cvičenie 9.1. Dokážte, že ak sú dva vrcholy grafu spojené sledom, tak sú spojené aj cestou.

Cvičenie 9.2. Ukážte, že ak graf obsahuje uzavretý sled párnej dĺžky, tak ešte nemusí obsahovať kružnicu.

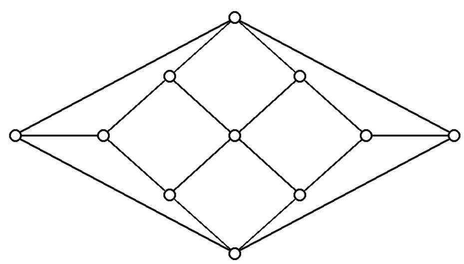
Cvičenie 9.3. Dokážte, že ak sú stupne všetkých vrcholov grafu aspoň 2, tak graf obsahuje kružnicu.

Cvičenie 9.4. Dokážte, že graf na n vrcholoch, ktorý má viac, ako $\binom{n-1}{2}$ hrán, je súvislý. Ukážte, že $\binom{n-1}{2}$ hrán nestačí.

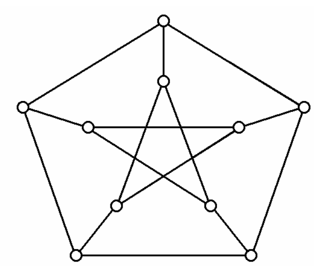
Cvičenie 9.5. Pre aké n má kompletný graf na n vrcholoch K_n Eulerovský ťah?

Cvičenie 9.6. Nech je G graf, ktorý má všetky vrcholy párneho stupňa, s výnimkou vrcholov u a v, ktorých stupne sú nepárne. Dokážte, že graf G je súvislý práve vtedy, keď je súvislý graf (respektíve graf s násobnými hranami) G', ktorý vznikne z grafu G pridaním hrany (u, v).

Cvičenie 9.7. Dokážte, že graf na obr. 14 nemá Hamiltonovskú kružnicu.



Obr. 14



Obr. 15

Cvičenie 9.8. Dokážte, že Petersenov graf, ktorý je nakreslený na obr. 15, nemá Hamiltonovskú kružnicu.

Cvičenie 9.9. Dokážte, že ak má graf n vrcholov a viac ako $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, tak má Hamiltonovskú kružnicu. Ukážte, že $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán nestačí.

Cvičenie 9.10. Koľko rôznych Hamiltonovských kružníc má kompletný graf na n vrcholoch K_n?

Cvičenie 9.11. Nech je W_n graf, ktorý vznikne z pravidelného $(n-1)$-bokého ihlanu, ak zabudneme na plochy tohto ihlanu. Koľko rôznych Hamiltonovských kružníc má W_n?

Cvičenie 9.12. Nech je H_n graf, ktorý vznikne z pravidelného $\frac{n}{2}$-bokého hranola, ak zabudneme na plochy tohto hranola. Koľko rôznych Hamiltonovských kružníc má H_n?