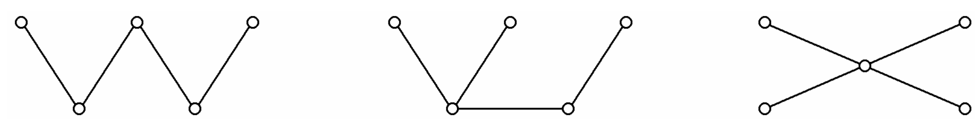
10 ROVINNOSŤ A FAREBNOSŤ GRAFOV

10.1 Stromy

Definícia. Strom je súvislý graf, ktorý nemá kružnice.
Príklad 1. Na obrázku 16 sú nakreslené všetky možné stromy na piatich vrcholoch.



Obr. 16

Veta 10.1. Strom na n vrcholoch má $n - 1$ hrán.

D ô k a z : Označme n počet vrcholov stromu. Tvrdenie dokážeme indukciou podľa n.

1° Ak $n = 1$, tak jediný graf na 1 vrchole nemá žiadnu hranu.

2° Nech je G strom na n vrcholoch a nech tvrdenie platí pre každý strom, ktorý má menej ako n vrcholov. Keďže $n > 1$ a strom G je súvislý graf, tak má hranu, povedzme (u, v). Nech je H graf, ktorý vznikne z G vynechaním hrany (u, v). Keby v H existovala cesta z u do v, tak táto cesta by spolu s hranou (u, v) tvorila kružnicu v G, čo by bol spor s predpokladom, že G je strom. Preto je H nesúvislý graf. Keďže hrana (u, v) má len dva konce, tak H má práve dva komponenty súvislosti. Označme tieto komponenty H_1 a H_2. Strom G neobsahoval kružnice, a preto sú H_1 a H_2 súvislé grafy bez kružníc, teda stromy. Nech strom H_1 má n_1 vrcholov a H_2 nech má n_2 vrcholov. Potom platí $n_1 + n_2 = n$. Keďže $n_1 < n$ aj $n_2 < n$, tak podľa indukčného predpokladu H_1 má $n_1 - 1$ hrán a H_2 má $n_2 - 1$ hrán. Čiže spolu s hranou (u, v) má strom G práve $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n - 1$ hrán. □

Dôsledok. Súvislý graf na n vrcholoch má aspoň $n - 1$ hrán, pričom ak má práve $n - 1$ hrán, tak je stromom.

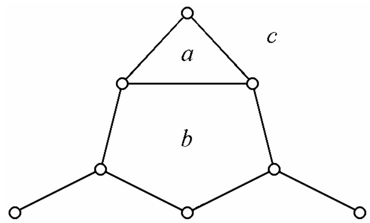
D ô k a z : Ak je graf stromom, tak tvrdenie platí podľa vety 10.1. Predpokladajme preto, že G je súvislý graf na n vrcholoch, ktorý nie je stromom. To znamená, že G má kružnicu. Je zrejmé, že vynechaním ľubovoľnej hrany z kružnice grafu G sa súvislosť tohto grafu neporuší. Označme G' graf, ktorý vznikne z grafu G vynechaním jednej hrany, povedzme e, z ľubovoľnej kružnice grafu G. Ak má aj G' kružnicu, tak opäť vynechajme jednu hranu z ľubovoľnej kružnice grafu G' a tento proces opakujme až dovtedy, kým z grafu G nezostane graf G^*, ktorý neobsahuje kružnice. Graf G^* je súvislý graf bez kružníc, čiže je stromom. Podľa vety 10.1 má G^* práve $n - 1$ hrán a Keďže graf G obsahuje okrem všetkých hrán stromu G^* aj hranu e (a možno ešte niekoľko ďalších hrán), tak G má aspoň n hrán. To znamená, že ak graf nie je stromom, tak má aspoň n hrán, čiže ak má práve $n - 1$ hrán, tak je stromom. □

10.2 Rovinné grafy

Definícia. Rovinné nakreslenie grafu je také nakreslenie tohto grafu v rovine, pri ktorom sa jeho hrany navzájom nepretínajú. Graf je **rovinný**, ak má rovinné nakreslenie.

Predošlá definícia je trošku nepresná, pretože sme nedefinovali, čo je to nakreslenie grafu v rovine a ani čo to znamená, že sa hrany navzájom nepretínajú. Avšak intuitívne je zrejmé, aký graf môže byť rovinný.

Príklad 2. Na obr. 17 je znázornené rovinné nakreslenie rovinného grafu. Toto nakreslenie ohraničuje v rovine tri oblasti označené a, b a c, pričom dĺžky týchto oblastí sú zaradom 3, 5 a 10.



Obr. 17

Poznamenajme, že prvý graf nakreslený na obr. 9 síce je rovinný, ale až druhý obrázok predstavuje jeho rovinné nakreslenie.

Veta 10.2 (Eulerova formula). Nech je G súvislý rovinný graf, ktorého hrany v rovinnom nakreslení ohraničujú r oblastí. Ak má graf G n vrcholov a m hrán, tak platí

$$n + r - m = 2$$

D ô k a z : Nech je n pevne zvolené prirodzené číslo. Vetu dokážeme indukciou podľa počtu hrán súvislého rovinného grafu na n vrcholoch.

1° Podľa dôsledku vety 10.1 má každý súvislý graf na n vrcholoch aspoň $n - 1$ hrán, pričom $n - 1$ hrán má len strom. Teda prvý krok indukcie urobíme pre stromy. Keďže strom nemá kružnice, tak je rovinným grafom, pričom rovinné nakreslenie stromu ohraničuje v rovine jedinú (vonkajšiu) oblasť. Podľa vety 10.1 má strom $n - 1$ hrán, a preto $n + 1 - (n - 1) = 2$, čiže pre stromy Eulerova formula platí.

2° Nech je G súvislý rovinný graf, ktorý má $m > n - 1$ hrán, pričom tvrdenie platí pre rovinné grafy, ktoré majú $m - 1$ hrán. Nech má rovinné nakreslenie grafu G r oblastí. Podľa vety 10.1 G nie je stromom, a preto má kružnicu. Nech je (u, v) ľubovoľná hrana tejto kružnice. Táto hrana leží na hranici dvoch oblastí. Jedna oblasť je vnútri a druhá zvonka uvažovanej kružnice. Označme H graf, ktorý vznikne z grafu G vynechaním hrany (u, v). Graf H je súvislý a rovinný. V tom rovinnom nakreslení grafu H, ktoré vzniklo z rovinného nakreslenia grafu G, ohraničujú hrany H presne $r - 1$ oblastí, lebo vynechaním hrany (u, v) vznikla z dvoch oblastí jedna. Keďže podľa indukčného predpokladu pre graf H platí Eulerova formula, tak platí $n + (r - 1) - (m - 1) = 2$, čiže $n + r - m = 2$. □

Nasledujúca veta je dôsledkom Eulerovej formuly.

Veta 10.3. Každý rovinný graf obsahuje vrchol, ktorého stupeň je nanajvýš 5.

D ô k a z : Nech je G rovinný graf na n vrcholoch s m hranami. Graf G má podľa Eulerovej formuly v každom rovinnom nakreslení $m + 2 - n$ oblastí. Každá hrana sa vyskytuje na hranici oblasti dvakrát. Ak leží v kružnici, tak sa vyskytuje na hraniciach dvoch rôznych oblastí a ak neleží v žiadnej kružnici, tak sa vyskytuje dvakrát na hranici jednej oblasti. Preto sa súčet dĺžok všetkých oblastí rovinného nakreslenia grafu rovná $2m$. Keďže každá oblasť je ohraničená aspoň tromi hranami, tak oblastí je nanajvýš $\frac{2m}{3}$. Teda $m + 2 - n \le \frac{2}{3}m$, čiže

$$m < 3n - 6 \tag{*}$$

Podľa vety 9.1 ak sú $d_1, d_2, \ldots, d_n$ stupne vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_n$ grafu G, tak platí

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2m.$$

Ak by boli všetky tieto stupne aspoň 6, tak by platilo $6n < 2m$, čiže $3n < m$, čo je v spore s (*). Preto v grafe G existuje vrchol, ktorého stupeň je nanajvýš 5. □

10.3 Farebnosť grafov

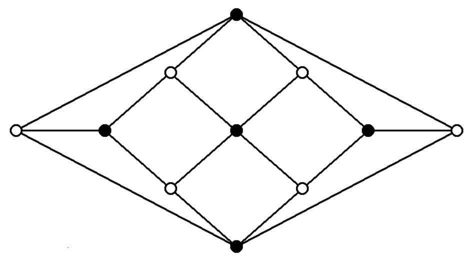
V tejto časti budeme farbiť vrcholy grafu.

Definícia. Zafarbenie vrcholov je **dobré**, ak majú každé dva vrcholy, ktoré sú spojené hranou, rôznu farbu. Ak je možné dobre zafarbiť vrcholy grafu pri použití nanajvýš k farieb, tak graf je ***k*-farbiteľný**.

Je zrejmé, že ak je graf k-farbiteľný, tak je aj $(k + 1)$-farbiteľný. Ak graf obsahuje aspoň jednu hranu, tak na jeho dobré zafarbenie potrebujeme aspoň dve farby.

Definícia. Graf je **párny** (= **bipartitný**), ak je 2-farbiteľný.

Príklad 3. Graf nakreslený na obr. 18 je párny, pretože jeho vrcholy možno dobre zafarbiť 2 farbami (bielou a čiernou) tak, ako je znázornené na obr. 18.



Obr. 18

Veta 10.4. Graf je párny práve vtedy, keď nemá kružnicu nepárnej dĺžky.

D ô k a z : Predpokladajme, že graf obsahuje kružnicu C nepárnej dĺžky a zafarbime vrcholy tohto grafu dvoma farbami. Keďže kružnica C má nepárnu dĺžku, tak jednou z farieb je zafarbených viac vrcholov tejto kružnice, ako druhou farbou. Avšak potom sú touto farbou zafarbené aj niektoré dva susedné vrcholy C, čiže farbenie nie je dobré. Preto žiaden graf obsahujúci kružnicu nepárnej dĺžky nemôže byť párny. (V predošlej úvahe sme využili Dirichletov princíp, zrekonštruujte si jeho využitie podrobne.)

Teraz naopak, predpokladajme, že graf $G = (V, E)$ neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky. Ukážeme, že vrcholy grafu G možno dobre zafarbiť dvoma farbami. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že G je súvislý graf, pretože v opačnom prípade zafarbíme každý komponent súvislosti samostatne. Nech je v vrchol grafu G. Označme X množinu tých vrcholov $x \in V$, pre ktoré existuje $v - x$ cesta nepárnej dĺžky v G a Y označme množinu tých vrcholov $y \in V$, pre ktoré existuje $v - y$ cesta párnej dĺžky v G. Keďže graf G je súvislý, tak $X \cup Y = V$. Ak existuje vrchol $u \in X \cap Y$, tak existuje nejaká $v - u$ cesta nepárnej dĺžky a iná $v - u$ cesta párnej dĺžky. Tieto cesty spolu tvoria uzavretý sled nepárnej dĺžky, čiže graf G musí podľa vety 9.2 obsahovať kružnicu nepárnej dĺžky, čo je spor s predpokladom. To znamená, že systém $\{X, Y\}$ tvorí rozklad V. Ak existujú dva vrcholy $u_1, u_2 \in X$, $u_1 \neq u_2$, ktoré sú spojené hranou (u_1, u_2), tak existujú $v - u_1$ a $v - u_2$ cesty nepárnej dĺžky a tieto cesty spolu s hranou (u_1, u_2) tvoria uzavretý sled nepárnej dĺžky, čo je podľa vety 9.2 opäť spor s predpokladom. Analogicky, ak existujú dva vrcholy $u_1, u_2 \in Y$, $u_1 \neq u_2$, ktoré sú spojené hranou (u_1, u_2), tak existujú $v - u_1$ a $v - u_2$ cesty párnej dĺžky a tieto cesty spolu s hranou (u_1, u_2) tvoria uzavretý sled nepárnej dĺžky, čo je podľa vety 9.2 spor s predpokladom. To znamená, že ak zafarbíme všetky vrcholy množiny X prvou farbou a všetky vrcholy množiny Y druhou farbou, tak dobre zafarbíme všetky vrcholy grafu G. □

Nech je $G = (V, E)$ párny graf. Z voľme jedno dobré zafarbenie grafu G dvomi farbami a pri tomto zafarbení označme X množinu vrcholov jednej a Y množinu vrcholov druhej farby. Potom $\{X, Y\}$ tvorí rozklad množiny vrcholov grafu G, pričom žiadna dvojica vrcholov z jednej triedy rozkladu nie je spojená hranou. Ak je G súvislý graf, tak tento rozklad je určený jednoznačne (pozri dôkaz vety 10.4), a preto budeme párny graf často zapisovať v tvare $G = (X, Y; E)$.

Definícia. Kompletný bipartitný graf $K_{m,n}$ je párny graf $K_{m,n} = (X, Y; E)$, kde $|X| = m$, $|Y| = n$ a každý vrchol z množiny X je spojený hranou s každým vrcholom z množiny Y.

Všimnite si, že kompletný bipartitný graf $K_{m,n}$ má $2n$ vrcholov a n^2 hrán. Stupeň každého vrcholu je n, avšak tento graf je 2-farbiteľný (porovnajte s cvičením 10.8).

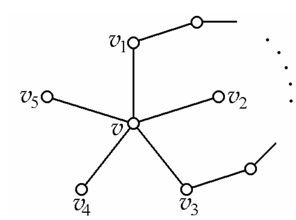
Definícia. Nech je $G = (V, E)$ graf a nech je S podmnožina množiny vrcholov grafu G. **Podgraf grafu G indukovaný** množinou S je taký graf $H = (S, F)$, ktorého množina vrcholov je S, pričom dva vrcholy sú spojené hranou v H práve vtedy, ak sú tieto vrcholy spojené hranou v grafe G.

V ďalšom sa budeme zaoberať rovinnými grafmi. Majme v rovine nakreslenú mapu štátov, ktoré sú všetky „súvislé“. Teda žiaden štát nemá na inom území enklávy ako je napríklad Gibraltár. Politická mapa je také zafarbenie štátov farbami, pri ktorom dostanú štáty, ktoré susedia hranicou nenulovej dĺžky, rôzne farby. Zaujímavé je zistiť, aký najmenší počet farieb potrebujeme na korektné zafarbenie politickej mapy. Ak nahradíme všetky štáty vrcholmi, ktoré spojíme hranou práve vtedy, keď tieto štáty susedia hranicou nenulovej dĺžky, tak dostaneme rovinný graf. Čiže úlohu sme previedli na problém, koľko farieb stačí na dobré zafarbenie rovinného grafu. Nasledujúcu vetu dokázal P. J. HEAWOOD v roku 1890.

Veta 10.5. Každý rovinný graf je 5-farbiteľný.

Dôkaz: Dôkaz urobíme indukciou vzhľadom na počet n vrcholov grafu. Zjavne veta platí pre rovinné grafy, ktoré majú nanajvýš 5 vrcholov. Predpokladajme preto, že G je rovinný graf na n vrcholoch, $n > 5$, pričom veta platí pre všetky rovinné grafy na $n - 1$ vrcholoch. Podľa vety 10.3 má graf G vrchol v stupňa nanajvýš 5. Nech je H graf, ktorý vznikne z grafu G vynechaním vrcholu v a všetkých hrán, ktoré sú susedné s v. (Teda H je podgraf grafu $G = (V, E)$ indukovaný množinou $V - \{v\}$.) Keďže G je rovinný graf, tak je rovinný aj graf H. V ďalšom uvažujme rovinné nakreslenie grafu H, ktoré vznikne z rovinného nakreslenia grafu G vynechaním vrcholu v. Podľa indukčného predpokladu je graf H dobre zafarbiteľný 5 farbami. Ak má vrchol v v grafe G stupeň nanajvýš 4, tak existuje farba, ktorú nemá žiaden sused vrcholu v pri dobrom zafarbení vrcholov grafu H piatimi farbami. Touto farbou môžeme zafarbiť vrchol v, pričom takto získané zafarbenie grafu G je dobré.

Predpokladajme teda, že stupeň vrchola v v grafe G je 5. Nech sú $v_1, v_2, \ldots, v_5$ vrcholy susedné s v, pričom hrany vedúce z vrchola v k $v_1, v_2, \ldots, v_5$ sa v rovinnom nakreslení grafu G objavia práve v tomto poradí, ak sa prejdeme v rovine po malej kružnici okolo vrcholu u, pozri obr. 19. Ak majú dva z vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_5$ rovnakú farbu pri dobrom zafarbení grafu H piatimi farbami, tak opäť existuje farba, ktorou nie je zafarbený žiaden sused vrcholu v a touto farbou môžeme vrchol v zafarbiť. Predpokladajme preto, že všetky vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_5$ majú v dobrom zafarbení grafu H piatimi farbami navzájom rôzne farby. Navyše, označme 1 farbu, ktorou je zafarbený vrchol v_1, 2 farbu, ktorou je zafarbený vrchol v_2, až 5 farbu, ktorou je zafarbený vrchol v_5. Prefarbením niektorých vrcholov grafu H ukážeme, že existuje také dobré zafarbenie grafu H piatimi farbami, v ktorom majú dva z vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_5$ rovnakú farbu, čím ukážeme, že G je 5-farbiteľný.



Obr. 19

Nech je $H_{1,3}$ podgraf grafu H indukovaný vrcholmi, ktoré majú farbu 1 alebo 3. Predpokladajme, že v_1 a v_3 patria do rôznych komponentov súvislosti grafu $H_{1,3}$. Zameňme farby vrcholov v tom komponente súvislosti grafu $H_{1,3}$, v ktorom je v_1. Teda tým vrcholom, ktoré mali farbu 1 dáme farbu 3 a tým, ktoré mali farbu 3 dáme farbu 1. Ukážeme, že takto získané zafarbenie grafu H je dobré. Predpokladajme, že toto zafarbenie nie je dobré. Potom existuje hrana (u_1, u_2) grafu H, ktorej obidva vrcholy sú pri novom zafarbení zafarbené rovnakou farbou. Pri novom zafarbení sme však iba navzájom zamenili farby 1 a 3 v niektorých vrcholoch. Preto obidva vrcholy u_1 a u_2 majú pri novom zafarbení farbu 1, prípadne obidva majú farbu 3. To znamená, že u_1 a u_2 museli patriť do rôznych komponentov súvislosti grafu $H_{1,3}$, čiže nemôžu byť spojené hranou v H, čo je spor s predpokladom. Teda existuje dobré zafarbenie grafu H, v ktorom majú vrcholy v_1 a v_3 rovnakú farbu, čiže G je 5-farbiteľný.

Zostáva nám rozobrať prípad, keď v_1 a v_3 patria do jedného komponentu súvislosti grafu $H_{1,3}$. V tomto prípade existuje v grafe H taká cesta z vrcholu v_1 do v_3, ktorá využíva len vrcholy farieb 1 a 3 (táto cesta je naznačená na obr. 19). Keďže H je rovinný graf, tak nemôže existovať cesta z vrcholu v_2 do vrcholu v_4, využívajúca len vrcholy farieb 2 a 4. To znamená, že ak označíme $H_{2,4}$ podgraf grafu H indukovaný vrcholmi, ktoré majú farbu 2 alebo 4, tak v_2 a v_4 patria do rôznych komponentov súvislosti grafu $H_{2,4}$. Teda keď zameníme farby tých vrcholov grafu $H_{2,4}$, ktoré ležia v komponente súvislosti obsahujúcom v_2, tak dostaneme dobré zafarbenie grafu H piatimi farbami, v ktorom majú vrcholy v_2 a v_4 rovnakú farbu. Čiže aj v tomto poslednom prípade je graf G 5-farbiteľný. □

Ako sme mohli nahliadnuť, dôkaz tvrdenia, že každý rovinný graf je 5-farbiteľný, je ľahký. Platí však silnejšie tvrdenie, známe ako 4CT (four colour theorem), ktoré tvrdí, že každý rovinný graf je 4-farbiteľný! Hypotéza, že každý rovinný graf je 4-farbiteľný, bola snáď najznámejším otvoreným problémom v teórii grafov. V roku 1976 K. APPEL a W. HAKEN oznámili, že pomocou počítača dokázali 4CT. Ich dôkaz bol pomerne neprehľadný a dosť podstatným sa ukázal problém nezávislej verifikácie ich počítačových programov. V roku 1997 bol publikovaný odlišný dôkaz, ktorého autormi sú N. ROBERTSON, D. SANDERS, P. SEYMOUR A R. THOMAS. Tento dôkaz tiež využíva počítač, je však oveľa prehľadnejší a akceptovateľnejší.

CVIČENIA

Cvičenie 10.1. Pomocou Eulerovej formuly dokážte, že kompletný graf na 5 vrcholoch K_5 nie je rovinný.

Cvičenie 10.2. Pomocou Eulerovej formuly dokážte, že kompletný bipartitný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný.

Cvičenie 10.3. Pomocou Eulerovej formuly dokážte, že Petersenov graf nie je rovinný (pozri obr. 15).

Cvičenie 10.4. Určte najmenšie počty farieb nutných na dobré zafarbenie grafov Platónovských telies: pravidelného štvorstena, kocky, osemstena, dvanásťstena a dvadsaťstena.

Cvičenie 10.5. Dokážte, že strom je párny graf.

Cvičenie 10.6. Dokážte, že ak má graf jedinú kružnicu nepárnej dĺžky, tak je 3-farbiteľný.

Cvičenie 10.7. Môže mať párny graf na nepárnom počte vrcholov Hamiltonovskú kružnicu? Pomocou tohto pozorovania opätovne nahliadnite, že graf znázornený na obrázku 14, respektíve 18, nemôže mať Hamiltonovskú kružnicu.

Cvičenie 10.8 (Brooksova veta). Dokážte, že ak je Δ maximálny stupeň vrchola v grafe G, tak G je $(\Delta + 1)$-farbiteľný.

Cvičenie 10.9. Nájdite najmenšie k, pre ktoré je Petersenov graf k-farbiteľný.

Cvičenie 10.10. Nech je W_n graf, ktorý vznikne z pravidelného $(n - 1)$-bokého ihlanu, ak zabudneme na plochy tohto ihlanu. Určte najmenšie k, pre ktoré je graf W_n k-farbiteľný.

Cvičenie 10.11. Nech je H_n graf, ktorý vznikne z pravidelného $\frac{n}{2}$-bokého hranola, ak zabudneme na plochy tohto hranola. Určte najmenšie k, pre ktoré je graf H_n k-farbiteľný.