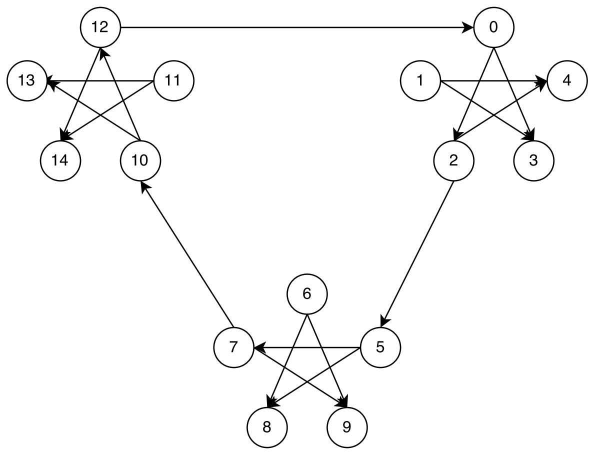
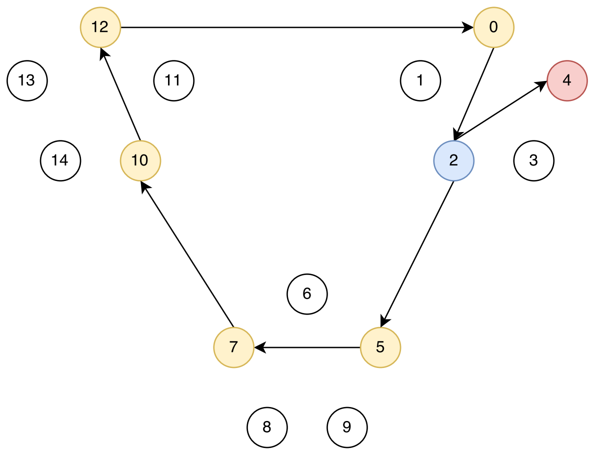
離散構造

問 1

(1-a) グラフ G は以下の通り．冬の大三角である．



(1-b) 頂点の数は 15, 辺の数は 18 である．
(1-c)



最長の単純道は

$$\langle 2, 5, 7, 10, 12, 0, 2, 4\rangle$$

であり, その長さは 7 である.

(1-d) 2 項関係 S∘S を辺として持つグラフを G' とする.

- 有向グラフ G' の任意 x について $\forall x(xRx)$ でないため, 反射的でない.
- $\forall xy(xRy \Rightarrow yRx$ でないため, 対称的でない.
- $\forall xyz(xRy \land yRz \Rightarrow xRz)$ でないため, 推移的でない.

よって, 同値関係でない.

(2-a)

- Base Case: $\langle\rangle \in S$
- Base Case: 任意の $x \in D$ について, $\langle x\rangle \in S$
- Induction Step: $L \in S \land x \in D \land xmod3 = 0 \lor xmod5 = 0 \Rightarrow cons(x, L) \in S$

(2-b)

$$\begin{aligned} length(\langle 1, 0, 1, 1\rangle) &= 1 + length(\langle 0, 1, 1\rangle) \\ &= 1 + (1 + length(\langle 1, 1\rangle)) \\ &= 1 + (1 + (1 + length(\langle 1\rangle)) \\ &= 1 + (1 + (1 + (1 + \langle\langle\rangle\rangle)) \\ &= 1 + (1 + (1 + (1 + 0))) \\ &= 4 \end{aligned} \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
calc(\langle 1,0,1,1\rangle, length(\langle 1,0,1,1\rangle)) &= calc(\langle 1,0,1,1\rangle, 4) \\
&= calc(\langle 0,1,1\rangle, 3) + 1 \cdot 2^3 \\
&= (calc(\langle 1,1\rangle, 2) + 0 \cdot 2^2) + 1 \cdot 2^3 \\
&= ((calc(\langle 1\rangle, 1) + 1 \cdot 2^1) + 0 \cdot 2^2) + 1 \cdot 2^3 \\
&= (((calc(\langle\rangle, 0) + 1 \cdot 2^0) + 1 \cdot 2^1) + 0 \cdot 2^2) + 1 \cdot 2^3 \\
&= (((0 + 1 \cdot 2^0) + 1 \cdot 2^1) + 0 \cdot 2^2) + 1 \cdot 2^3 \\
&= 11
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(2-c)

$$
\begin{aligned}
comp(\langle 0,1,0,0\rangle, \langle 0,1,1,0\rangle) &= F comp(\langle 1,0,0\rangle, \langle 1,1,0\rangle) \\
&= F(T comp(\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle)) \\
&= F(T(F comp(\langle 0\rangle, \langle 0\rangle))) \\
&= F(T(F(F comp(\langle\rangle, \langle\rangle)))) \\
&= FTFF
\end{aligned}
\tag{3}
$$

(2-d)

- Base Case ($L_1 = nil \wedge L_2 = nil$ のとき):
左辺において, $length$ の定義より, $l = length(\langle\rangle) = 0$. また, $calc$ の定義より $calc(\langle\rangle, 0) = 0$.
右辺において, $comp$ と $serialize$ の定義より $calc(serialize(comp(\langle\rangle, \langle\rangle)), 0) = calc(serialize(\Lambda)) = calc(\langle\rangle) = 0$ となり, (左辺) = (右辺) より, 成立.

- Induction Step ($n = 0 \wedge L_1 = cons(n, L_1') \wedge L_2 = cons(n, L_2') \wedge l > 0$ のとき): 左辺において, $calc$ の定義より,
$calc(cons(n, L_1'), l) = calc(L', l-1) + n \cdot 2^{l-1}$
$calc(cons(n, L_1'), l) = calc(L', l-1) + 0 \cdot 2^{l-1}$. 右辺において, $comp$ と $serialize$ の定義より
$calc(serialize(comp(cons(n_1, L_1'), cons(n_2, L_2'))), l)$
$= calc(serialize(F comp(L_1', L_2')), l)$
$= calc(cons(0, serialize(comp(L_1', L_2'))), l)$
$= cons(n, calc(serialize(comp(L_1', L_2')), l))$
$= calc(serialize(comp(L_1', L_2')), l-1) + n \cdot 2^{l-1}$
$= calc(serialize(comp(L_1', L_2')), l-1) + 0 \cdot 2^{l-1}$. ここで, 帰納法の仮定よ

り, $calc(L'_1, l) = calc(serialize(comp(L'_1, L'_2)), l)$ であるから, $calc(L_1, l) = calc(serialize(comp(L_1, L_2)), l)$ が成立.

- Induction Step ($n = 1 \wedge L_1 = cons(n, L'_1) \wedge L_2 = cons(n, L'_2) \wedge l > 0$ のとき): 左辺において, $calc$ の定義より,
  $calc(cons(n, L'_1), l) = calc(L', l-1) + n \cdot 2^{l-1}$
  $calc(cons(n, L'_1), l) = calc(L', l-1) + 1 \cdot 2^{l-1}$. 右辺において, $comp$ と $serialize$ の定義より
  $calc(serialize(comp(cons(n_1, L'_1), cons(n_2, L'_2))), l)$
  $= calc(serialize(Tcomp(L'_1, L'_2)), l)$
  $= calc(cons(1, serialize(comp(L'_1, L'_2))), l)$
  $= cons(n, calc(serialize(comp(L'_1, L'_2)), l))$
  $= calc(serialize(comp(L'_1, L'_2)), l-1) + n \cdot 2^{l-1}$
  $= calc(serialize(comp(L'_1, L'_2)), l-1) + 1 \cdot 2^{l-1}$. ここで, 帰納法の仮定より, $calc(L'_1, l) = calc(serialize(comp(L'_1, L'_2)), l)$ であるから, $calc(L_1, l) = calc(serialize(comp(L_1, L_2)), l)$ が成立.
  よって, $List_D$ の任意の要素 L_1, L_2 について, L_1 と L_2 の各要素が全て同じとき, $calc(L_1, l) = calc(serialize(comp(L_1, L_2)), l)$ が示される.