[3.2] 복소지수함수의 LTI 시스템의 응답

$e^{st} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow H(s)e^{st}$ → Eigenfunction (고유함수)

$z^n \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow H(z)z^n$

$H(s)$ → Eigenvalue (고유값)

복소지수함수

⇒ 출력은 크기만 변화함

확인

$y(t) = h(t) * x(t)$

$$= e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{\text{상수 } H(s)}$$

→ 라플라스 변환

상수 $H(s)$ → 시간과 무관

$y[n] = h[n] * x[n]$

$$= z^n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}}_{\text{상수 } H(z)}$$

→ z 변환

* 선형성을 가지기 때문에, Linear combination 가능.

정리

$x(t) = e^{st}$	$x[n] = z^n$
$y(t) = H(s)e^{st}$	$y[n] = H(z)z^n$
$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$	$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$

$s, z \in \mathbb{C}$

$x(t) = \sum a_k e^{s_k t} \rightarrow y(t) = \sum a_k H(s_k) e^{s_k t}$

$x[n] = \sum a_k z_k^n \rightarrow y[n] = \sum a_k H(z_k) z_k^n$

* Fourier Series

$s_k = j\omega$, $z = e^{j\omega}$ 일때

→ 크기가 1인 순허수 (복소수) 사용

[3.3] CT 주기신호의 푸리에 급수 표현

① 고조파들의 선형조합으로 표현

→ $\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

Fourier series (1)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

1) $x(t)$의 주기 : T

2) $k=0$: DC성분만 남음

$k=\pm1$: Fundamental frequency

$k=\pm N$: N번째 하모닉

* $x(t) \in \mathbb{R}$ → 대부분의 신호는 실수신호

$$x(t) = x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \boxed{a_k} e^{jk\omega_0 t}$$

↓ $k \Rightarrow -k$

$$\sum_{k=\infty}^{-\infty} \boxed{a_{-k}^*} e^{jk\omega_0 t}$$

→ $a_k = a_{-k}^*$, $a_k^* = a_{-k}$

$$x(t) = a_0 + \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}\right]$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}\right)}_{z + z^* = 2Re\{z\}}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\{a_k e^{jk\omega t}\}$$

✓ $a_k \in \mathbb{C}$ 이므로, 극좌표 형식으로 표현가능

$a_k = A_k e^{j\theta_k}$ ($x(t)$는 실수지만 a_k는 복소수 가능)

↳ $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\}$

⇓

Fourier series (2)

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

✓ 또한, 직교좌표 형식으로 표현가능 $a_k = B_k + jC_k$

$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\{(B_k + jC_k)(\cos k\omega_0 t + j\sin k\omega_0 t)\}$

Fourier series (3)

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t)$$

(1), (2), (3) → Fourier series

(3): Original form

② 푸리에 급수 표현의 결정

⇒ a_k 결정

↳ 푸리에 급수 계수

↳ 주파수 계수

↓ 과정생략

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt \end{aligned}}$$

암기!

↳ $k=0$ 일때,

$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, dt$

↳ a_0는 $x(t)$의 주기평균 (전체평균)

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(b_k \cos k\omega_0 t + c_k \sin k\omega_0 t) \\ a_0 &= \frac{1}{T}\int_T x(t)\, dt \\ b_k &= 2Re\{a_k\} = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos k\omega_0 t\, dt \\ c_k &= -2Im\{a_k\} = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin k\omega_0 t\, dt \end{aligned}}$$

〰 ⇒ a_k 알고있을때

〰 ⇒ 이렇게 구해줌