특이값 분해, SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

이상일(학번, 201460437)*

Abstract

특이값 분해(Singular Value Decompostion, SVD)는 행렬을 특정한 구조로 분해하는 방식으로, 신호처리와 통계학 등의 분야에서 자주 사용된다. 특이값 분해는 행렬의 스페트럼 이론을 임의의 직사각행렬에 대해 일반화한 것으로 불 수 있다. 스펙트럼 이론을 이용하면,직교 정사각행렬을 고유값 기저로 하여 대각행렬로 분해 할 수 있다. [2]

정의

실수나 복소수로 이루어진 체 K의 원소로 구성되는 m x n 행렬 M에 대하여, M은 다음과 같은 세 행렬의 곲으로 분해 할 수 있다.

$$M = U \Sigma V^*$$

여기서 각 행렬은 다음과 같은 성질을 가진다.

- U는 m x m 크기를 가지는 직교행렬이다.
- Σ 는 m x n 크기를 가지며, 대각선상에 있는 원소의 값은 음수가 아니며, 나머지 원소의 값이 모두 0인 대각행렬이다.
- V*는 V의 켤레전치 행렬로, n x n 유티터리 행렬이다.

행렬 M을 이와 같은 세 행렬의 곱으로 나타내는 것을 M의 특이값 분해라고 한다. 일반적으로 Σ 행렬은 더 큰 값이 먼저 나오도록, 즉 아래의 식과 같이 구성되도록 하여 이럴 경우 Σ는 M에 따라 유일하게 결정된다.

$$\left(\sum\right)_{i,i} \geq \left(\sum\right)_{i+1,i+1} \tag{1}$$

예제

다음과 같은 행렬 A가 있을 때,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이 행렬을 M = U Σ V* 로 분해하면 다음과 같다.

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{0.2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0.8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{0.8} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0.2} \end{bmatrix}$$

가 되며, 여기서 특이값 분해 결과는 유일하지 않다. 예를 들어, 위의 결과에서 V*를

$$V^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{0.2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0.8} \\ \sqrt{0.4} & 0 & 0 & \sqrt{0.5} & -\sqrt{0.1} \\ -\sqrt{0.4} & 0 & 0 & \sqrt{0.5} & \sqrt{0.1} \end{bmatrix}$$

로 교체 할 수 있다.

OTHER

특이값 분해(SVD)는 고유값 분해(eigendecomposition)처럼 행렬을 대각화하는 한 방법이다. 그런데, 특이값 분해가 유용한 이유는 행렬이 정방행렬이든 아니든 관계없이 모든 m x n 행렬에 대해 적용 가능하기 때문이다. 고유값과 고유벡터 (eigenvalue & eigenvector)에서 다루었던 고유값 분해(EVD)는 정방행렬에 대해서만 적용 가능하며 또한 정방행렬 중에서도 일부 행렬에 대해서만 적용 가능한 대각화 방법임을 상기하자. 실수공간에서 임의의 m x n 행렬에 대한 특이값분해(SVD)는 다음과 같이 정의된다

$$A = U\Sigma V^T \quad --- \ (1)$$

$$U\colon\ m \times m \ \text{직교행렬} \ (AA^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T)$$
$$V\colon\ n \times n \ \text{직교행렬} \ (A^TA = V(\Sigma^T\Sigma)V^T)$$
$$\Sigma\colon\ m \times n \ \text{직사각 대각행렬}$$

Figure 1: Singular Value Decomposition

U는 AA^T를 고유값분해(eigendecomposition)해서 얻어진 직교행렬(orthogonal matrix)로 U의 열벡터들을 A의 left singular vector라 부른다. 또한 V는$A^T A$를 고유값분해해서 얻어진 직교행렬로서 V 의 열벡터들을 A의 right singular vector라 부른다. left, right가 상당히 햇갈리는데 그냥 Σ의 왼쪽에 있는 U가 left singular 벡터, 오른쪽에 있는 V가 right 특이벡터들이라고 생각하면 된다. 마지막으로, Σ는 AA^T, $A^T A$를 고유값분해해서 나오는 고유값(eigenvalue)들의 square root를 대각원소로 하는 m x n 직사각 대각행렬로 그 대각원소들을 A의 특이값(singular value)이라 부른다.

REFERENCES

[1] 특이값 분해 (Singular Value Decomposition, SVD): `https://ko.wikipedia.org/wiki/SVD`

[2] [선형대수학 #4] 특이값 분해의 활용: `http://darkpgmr.tistory.com/106`

* silee7103@ibs.re.kr