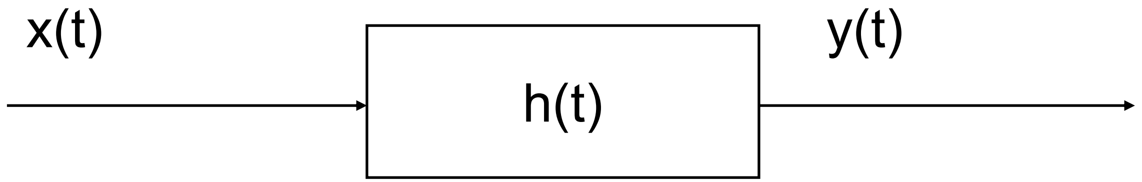
Fondamenti di Comunicazioni ed Internet

Lezione 5: convoluzione, correlazione, CTFT

Tiziana Cattai
email: tiziana.cattai@uniroma1.it

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Uscita di un Sistema LP



- Se il sistema è LP con risposta impulsiva h(t), allora l'uscita y(t) corrispondente ad un generico segnale di ingresso x(t) è pari a

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t), \quad -\infty < t < +\infty$$

- L'uscita è data dall'integrale di convoluzione tra l'ingresso x(t) e la risposta impulsiva h(t) del filtro.

Convoluzione e Correlazione (segnali di energia)

Convoluzione:

$$\varphi_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau)d\tau = x(t) * y(t)$$

Correlazione:

$$r_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t+\tau)d\tau = x(t) \circledast y(t)$$

La correlazione si può esprimere come un'opportuna convoluzione:

$$\boxed{\xi = -\tau}$$

$$r_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t+\tau)d\tau = \int_{\xi=+\infty}^{\xi=-\infty} x^*(-\xi) \cdot y(t-\xi)d(-\xi) =$$

$$= \int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} x^*(-\xi) \cdot y(t-\xi)d\,\xi = x^*(-t) * y(t)$$

Correlazione (segnali di energia)

Correlazione:

$$r_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t+\tau) d\tau = x(t) \circledast y(t)$$

Teorema: $r_{xy}(t) = r_{yx}^*(t)$ (non gode della proprietà commutativa)

Autocorrelazione:

$$r_{xx}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot x(t+\tau) d\tau$$

Proprietà di simmetria coniugata: $r_{xx}(t) = r_{xx}^*(-t)$

Se x(t) è un segnale reale: $r_{xx}(t)= r_{xx}(-t)$

Correlazione

Una proprietà importante si ottiene calcolando l'autocorrelazione di un segnale per t=0:

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 = \varepsilon_x$$

L'autocorrelazione calcolata nell'origine è pari all'energia del segnale

Disuguaglianza di Schwartz:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot y(\tau) d\tau \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y(\tau)|^2 d\tau$$

Per $x(t) = c \cdot y(t)$

Correlazione

Calcoliamo il modulo quadro della <u>crosscorrelazione</u> dei due segnali:

$\left|r_{xy}(t)\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t+\tau)\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y(\tau)|^2 d\tau =$

$= \varepsilon_x \ \varepsilon_y$ →(essendo l'energia di un segnale pari all'autocorrelazione calcolata nell'origine) $\left|r_{xy}(t)\right|^2 \leq r_{xx}(0) \cdot r_{yy}(0)$

In modo analogo, per <u>l'autocorrelazione</u> possiamo scrivere:

$$|r_{xx}(t)|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot x(t+\tau)\right|^2$$
$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = \varepsilon_x \ \varepsilon_x$$

Dato che $\varepsilon_x \geq 0$, possiamo togliere i quadrati e scrivere:

$|R_{xx}(t)| \leq |R_{xx}(0)|$

Questo significa che il modulo dell'autocorrelazione di un segnale è limitato superiormente dal valore che l'autocorrelazione assume nell'origine

Correlazione

Definiamo l'**energia incrociata** di due segnali la seguente quantità:

$$\varepsilon_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot y(\tau) d\tau = r_{xy}(0)$$

Da questa grandezza ricaviamo il coefficiente di crosscorrelazione tra due segnali x e y:

$$\rho_{xy} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y}} = \frac{r_{xy}(0)}{\sqrt{\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y}}$$

È una misura di somiglianza tra i segnali x(t) e y(t) nel tempo

ρ_{xy} è compreso tra -1 e $+1$

$\rho_{xy} = 0$ →segnali incorrelati

$\rho_{xy} = -1$ → segnali anticorrelati

Correlazione

Esempio: calcolare il coefficiente di correlazione tra i due segnali x(t) e y(t) cosi definiti:

$$x(t) = rect(t)$$
$$y(t) = -rect(t)$$

Correlazione

Esempio: calcolare il coefficiente di correlazione tra i due segnali x(t) e y(t) cosi definiti:

$$x(t) = rect(t)$$
$$y(t) = -rect(t)$$
$$\varepsilon_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(t) \cdot \big(-rect(t)\big)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -1dt = -1$$
$$\varepsilon_{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1dt = 1$$
$$\varepsilon_{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1dt = 1$$
$$\rho_{xy} = \frac{-1}{\sqrt{1 \cdot 1}} = -1$$

Correlazione (segnali di potenza)

Finora abbiamo visto la deifnizione di crosscorrelazione e autocorrelazione per segnali di energia. Possiamo estendere al caso di segnali di potenza:

$$r_{xy}(t) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} x^*(t) \cdot y(t+\tau) d\tau = x(t) \circledast y(t)$$

Anche in questo caso possiamo definire le relazioni fondamentali viste precedentemente

Coefficiente di correlazione:

$$\rho_{xy} = \frac{r_{xy}(0)}{\sqrt{P_x \cdot P_y}}$$

Trasformata di Fourier Continua

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

Trasformata di Fourier

FT : $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = FT\{x(t)\}, \quad -\infty < f < +\infty$ *ANALISI*

Antitrasformata di Fourier

FT^{-1} : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = FT^{-1}\{X(f)\}, \quad -\infty < t < +\infty$ *SINTESI*

Il segnale x(t) può essere scritto come l'integrale di infinite componenti armoniche (dall'esponenziale, che può essere scritto in funzione di seno e coseno)

https://demonstrations.wolfram.com/FourierTransformPairs/

.

Trasformata di Fourier Continua

1) $x(t)$ Segnale reale

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)dt$$

La sua trasformata di Fourier è a simmetria Hermitiana

$$R(f) = R(-f) \qquad I(f) = -I(-f)$$

$$M(f) = M(-f) \qquad \varphi(f) = -\varphi(-f)$$

$$\Rightarrow \quad X(f) = X^*(-f)$$

2) Se x(t) è a simmetria Hermitiana (x(t)=x*(-t))

3) Se x(t) è a reale e pari (x(t)=x(-t)), la sua trasformata di Fourier X(f) è reale e pari

Trasformata di Fourier Continua

<u>Trasformazione di una rect</u>

$$x(t) = rect_T(t)$$

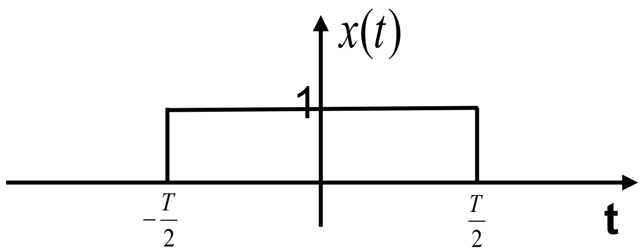
$$X(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \Big|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} - e^{+j2\pi f\frac{T}{2}}}{-j2\pi f} = T\,\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T\sin c(\pi fT)$$

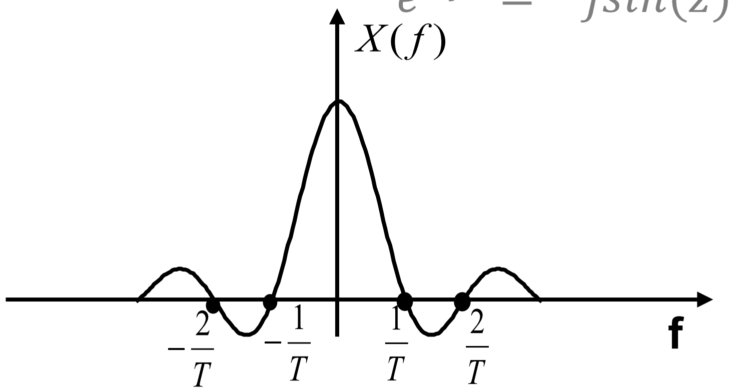
da formule di Eulero :

$$e^{jz} = \cos(z) + j\sin(z)$$

$$e^{-jz} = -j\sin(z)$$

essendo $\dfrac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = \sin(z)$





Nota: La rect(t) è reale e pari, la sua trasformata anche

Proprietà

Linearità

$$FT\big(ax(t) + by(y)\big) = aX(f) + bY(f)$$
$$FT^{-1}\big(aX(f) + bY(f)\big) = ax(t) + by(t)$$

Dualità Data una coppia trasformata antitrasformata, è possibile individuare una seconda coppia in cui il ruolo della trasformata e dell'antitrasformata risultano scambiati. In particolare, il segnale x è scritto in funzione della frequenza f e la trasformata X è scritta in funzione di t:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Leftrightarrow X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

Per x(t) reale e pari:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Leftrightarrow X(t) \leftrightarrow x(f)$$

Proprietà

Scalatura Data una costante $\alpha \neq 0$, e la FT del segnale x(t)=X(f), allora risulta

$$FT\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X(f/\alpha)$$

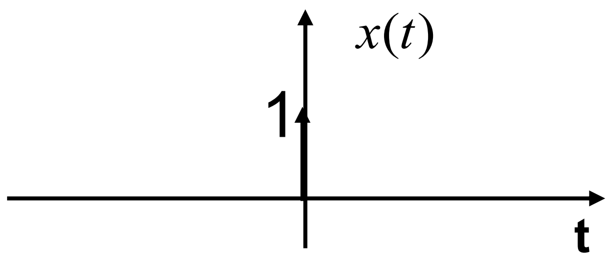
Traslazione nel tempo e nella frequenza Dati x(t) e X(f), una coppia FT e FT^{-1} e due valori t_0 e f_0. è possibile scrivere:

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0)$$
$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_o}$$

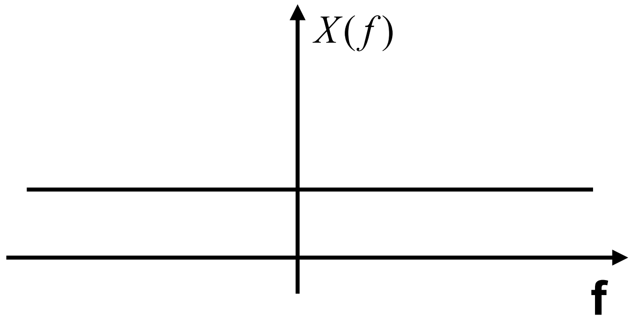
Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di un impulso

$$x(t)=\delta(t) \longrightarrow X(f)=1$$

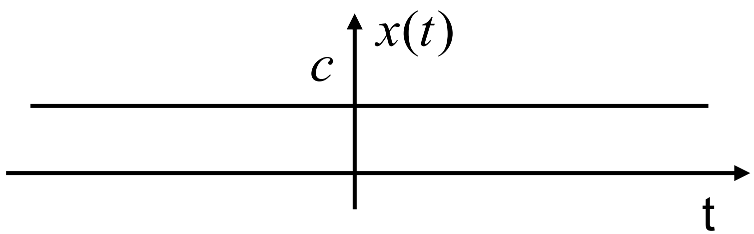


$\Rightarrow$

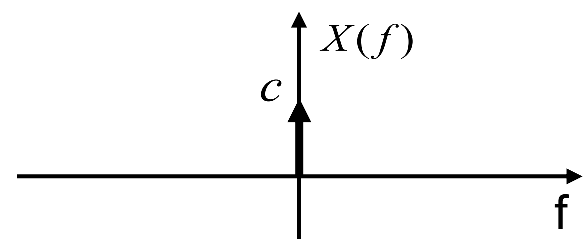


Trasformata di una costante

$$x(t)=c \longrightarrow X(f)=c\delta(f)$$



$\Rightarrow$



Nota: x(t) è reale e pari, la sua trasformata anche

Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di un esponenziale

La trasformata di Fourier di un esponenziale ad una frequenza f_0 è un impulso centrato in f_0:

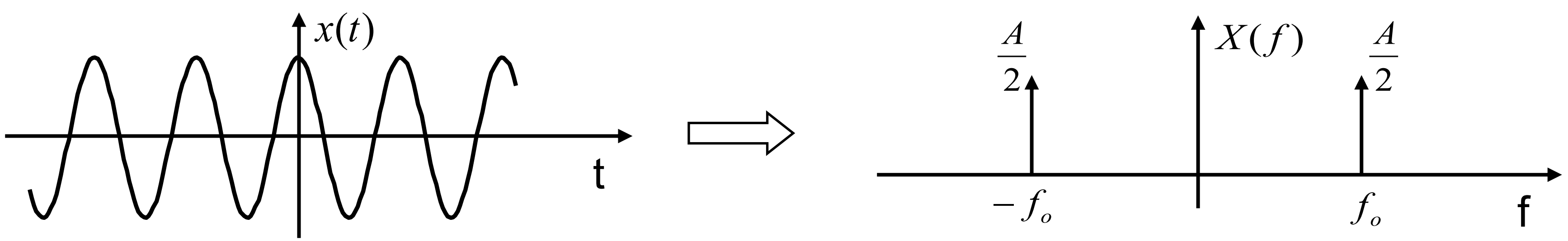
$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi t_o f}$$
$$e^{j2\pi f_o t} \leftrightarrow \delta(f - f_0)$$

Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di un coseno

$$x(t) = A\cos\left(2\pi f_o t\right)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\cos(2\pi f_o t)e^{-j2\pi ft}dt = \frac{A}{2}\delta(f - f_o) + \frac{A}{2}\delta(f + f_o)$$



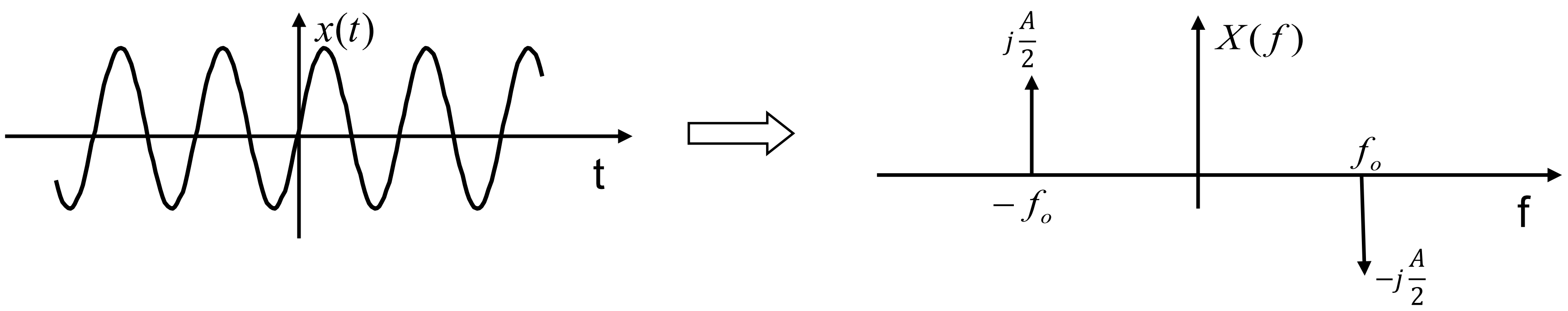
Notare la simmetria

Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di un seno

$$x(t) = Asin(2\pi f_0 t)$$

$$\text{X}(f) = Asin(2\pi f_0 t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Asin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \quad -j\frac{A}{2}\delta(f - f_0) + j\frac{A}{2}\delta(f + f_0)$$



Notare la simmetria

Proprietà della convoluzione e prodotto

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)Y(f)$$

$$x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

Altre trasformate di Fourier

Abbiamo già visto che $rect(t) * rect(t) = tri(t)$

$$FT\{tri(t)\} = FT\{rect(t) * rect(t)\}$$
$$= FT\{rect(t)\} \cdot FT\{rect(t)\} = sinc^2(f)$$

→ $tri(t) \leftrightarrow sinc^2(f)$

E (per dualità): $sinc^2(t) \leftrightarrow tri(f)$

Esercizi

1) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = rect\left(\frac{t}{2}\right)$
2) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \delta(t - 1000)$
3) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = sinc(t + 1)$e
4) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = sinc(2t)$
5) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \sin(2\pi 5t)$
6) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \cos(2\pi 3t)$

Banda

La **banda** di un segnale x(t) è definita come l'insieme delle frequenze per cui X(f) è diverso da zero.

La **larghezza di banda** (bandwidth) W è la misura della banda

Esempio:

x(t) = sinc(t)

x(t) = rect(t)

x(t) = $\delta(t)$

x(t)=1

Altri esempi:

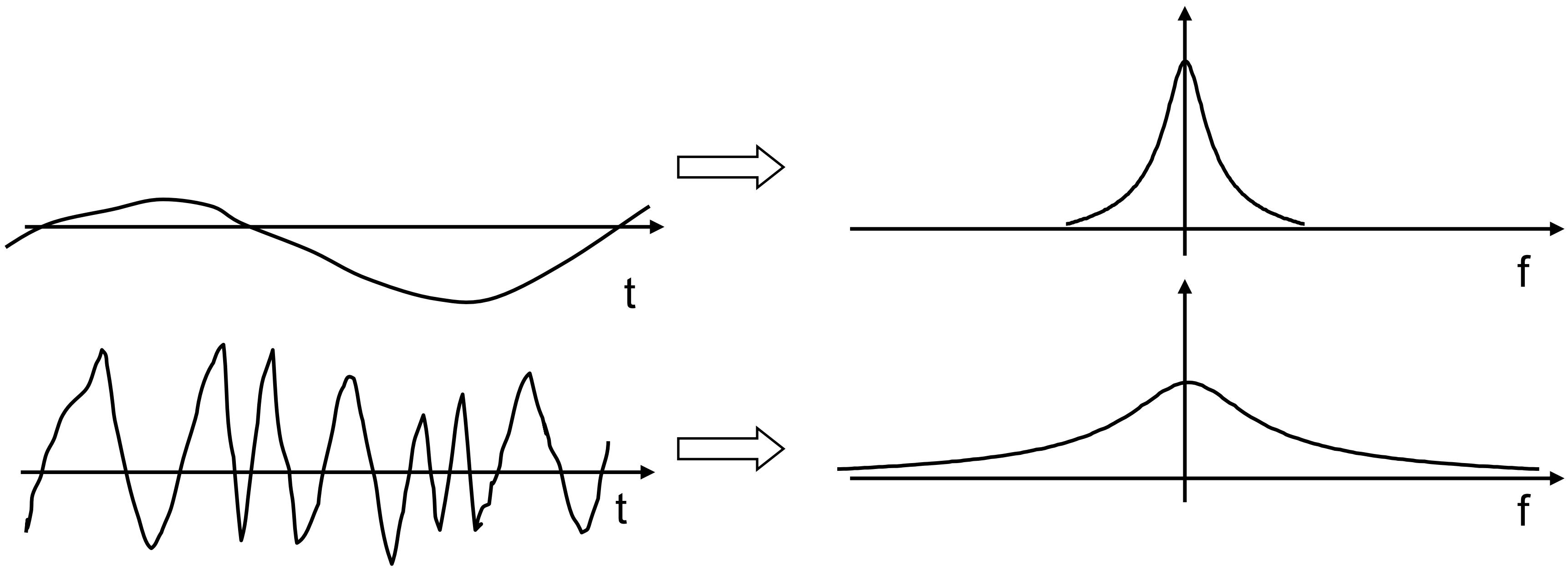
larghezza di banda di un segnale ECG $\sim 100Hz$

Larghezza di banda di un segnale EEG $\sim 10\ Hz$

Voce $\sim 4kHz$

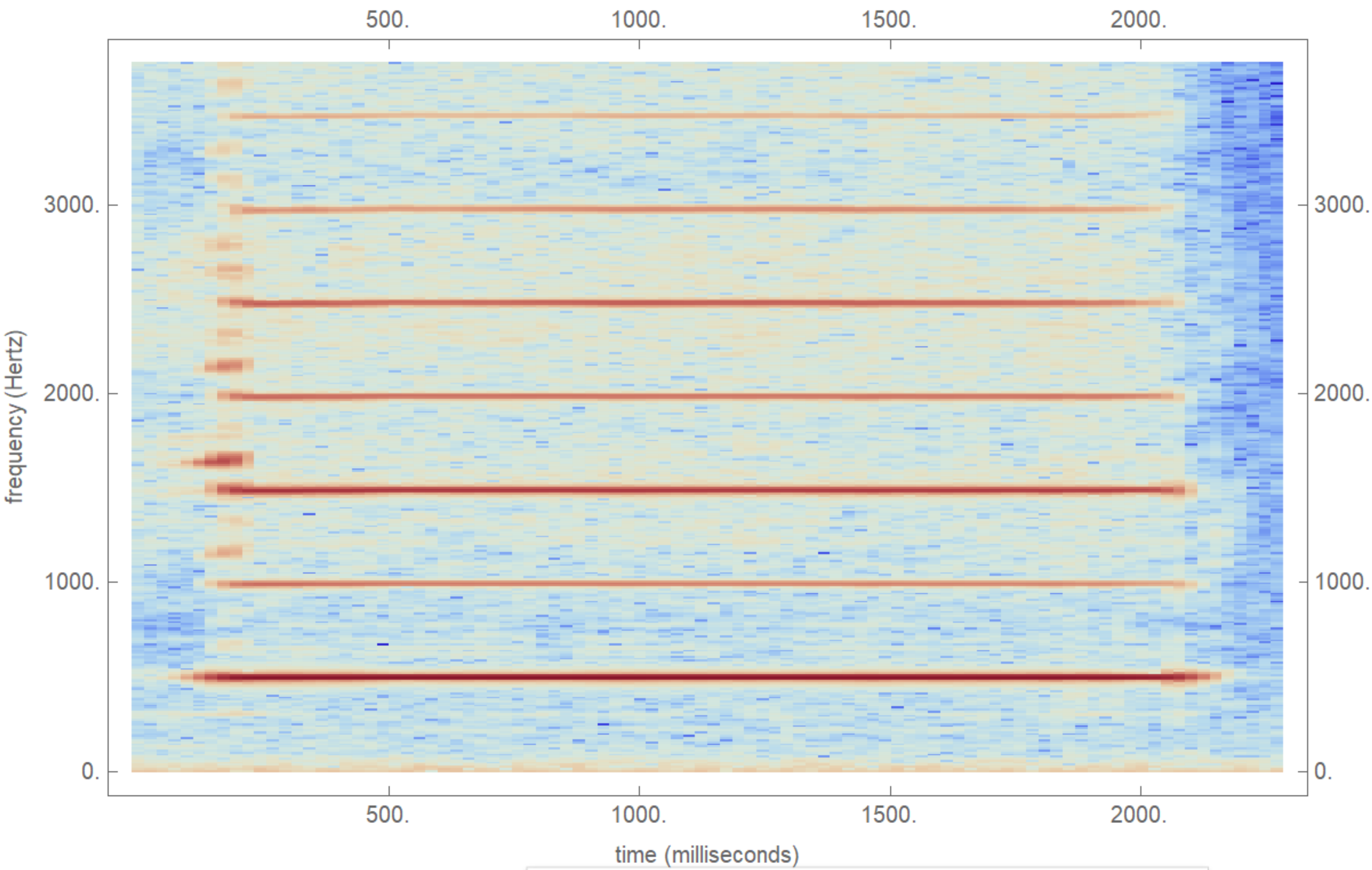
Trasformata di Fourier Continua: Relazione Tempo-Frequenza

- ✓ Segnali brevi (in t) ⟶ banda larga (in f)
- ✓ Segnali lunghi (e lenti) ⟶ banda stretta (in f)
- ✓ Segnali rapidamente varianti in t ⟶ banda larga (in f)



Segnali tempo-variabili

- Finestratura
- Trasformata su intervalli
- Reppresentazione dell’ampiezza vs tempo e frequenza of amplitude
- Spettrogramma
  - Asse x: tempo
  - Asse y: frequenza
  - Colore : energia



500.
1000.
1500.
2000.
3000.
2000.
1000.
0.
frequency (Hertz)
time (milliseconds)

Esempi su Wolfram

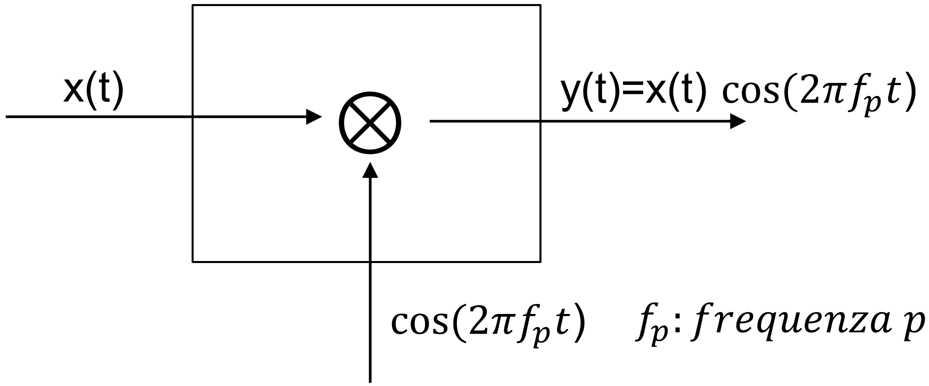
https://demonstrations.wolfram.com/FourierTransformPairs/

https://demonstrations.wolfram.com/FourierSeriesOfSimpleFunctions/

https://demonstrations.wolfram.com/AudioSpectrogram/

Modulatore

Un modulatore è un sistema (lineare e non tempo invariante) che dà in uscita il segnale in ingresso moltiplicato per un coseno ad una frequenza f_p



f_p: *frequenza portante*

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_p t) = \frac{1}{2} x(t) e^{j2\pi f_p t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j2\pi f_p t}$$

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_p t) \leftrightarrow Y(f) = X(f)\delta\left(f - f_p\right) + X(f)\delta\left(f + f_p\right)$$

L'effetto del modulatore è spostare la trasformata di Fourier del segnale in ingresso su un'altra frequenza, quella della portante: sposta la X(f) su $\pm f_p$

Esempio X(f)=rect(f); con $f_p = 3$

Proprietà fondamentale della convoluzione

- ✓ La trasformata di Fourier della convoluzione

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- ✓ è pari al prodotto delle trasformate

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

- ✓ dove

$$Y(f) = FT\{y(t)\}$$
$$X(f) = FT\{x(t)\}$$
$$H(f) = FT\{h(t)\}$$

Risposta in frequenza di un sistema LP (filtro)

✓ Convoluzione (nel tempo):

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$h(t)$: risposta impulsiva del filtro

✓ Prodotto (in frequenza):

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$$X(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(f)$$

$H(f)$: risposta in frequenza del filtro o funzione di trasferimento del filtro

$$y(t) = \int_f Y(f)e^{j2\pi ft}df = \int_f H(f) \cdot X(f)e^{j2\pi ft}df$$

Esempio

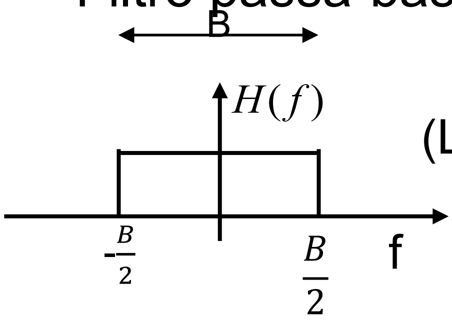
$$x(t) = sinc^2(t)[1 - e^{j2\pi 5t}]$$

$$h(t) = 2sinc(3t)$$

$$y(t) =?$$

Filtraggio analogico

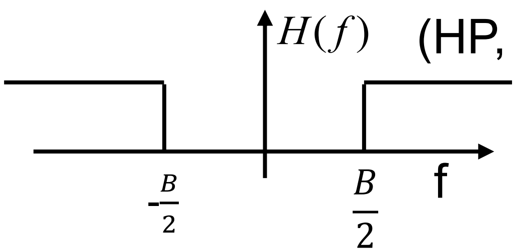
✓ Filtro passa-basso:



(LP, low-pass)

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right) \leftrightarrow h(t) = Bsinc(Bt)$$

✓ Filtro passa-alto

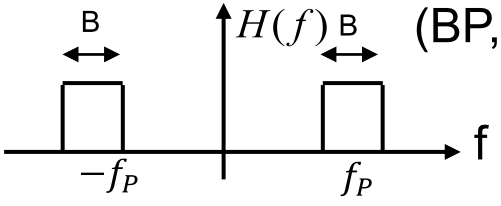


(HP, high-pass)

$$H(f) = 1 - rect\left(\frac{f}{B}\right) \leftrightarrow h(t)$$

$$= \delta(t) - Bsinc(Bt)$$

✓ Filtro passa-banda



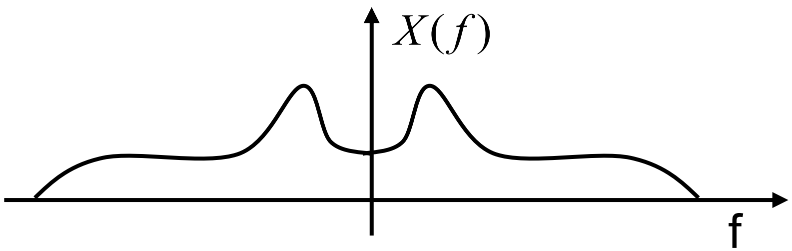
(BP, band-pass)

$$H(f) = rect\left(\frac{f - f_p}{B}\right) + rect\left(\frac{f + f_p}{B}\right)$$

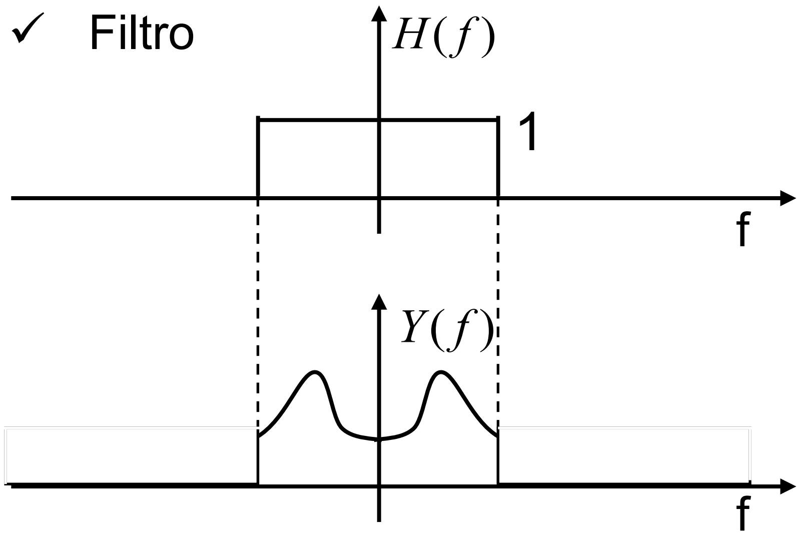
$$\leftrightarrow h(t) = 2\mathrm{Bsinc}(\mathrm{Bt})\cos(2\pi f_p t)$$

Filtraggio analogico

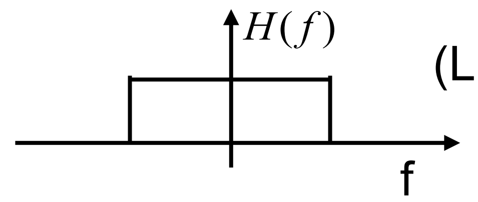
✓ Meccanismo di filtraggio:



✓ Filtro

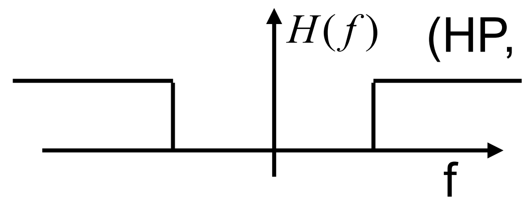


✓ Filtro passa-basso:



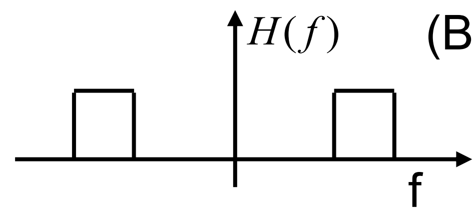
(LP, low-pass)

✓ Filtro passa-alto



(HP, high-pass)

✓ Filtro passa-banda

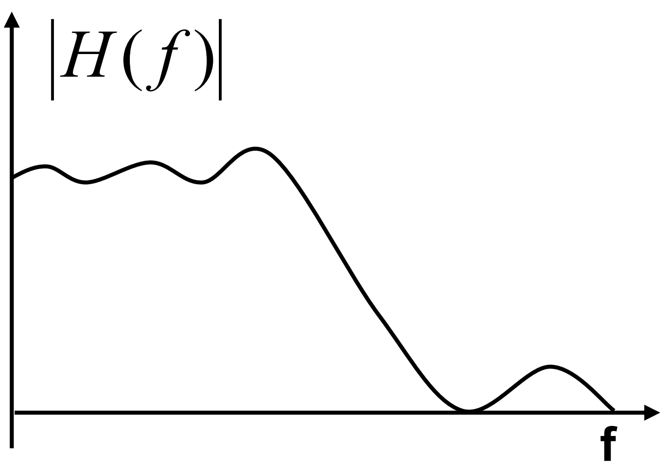


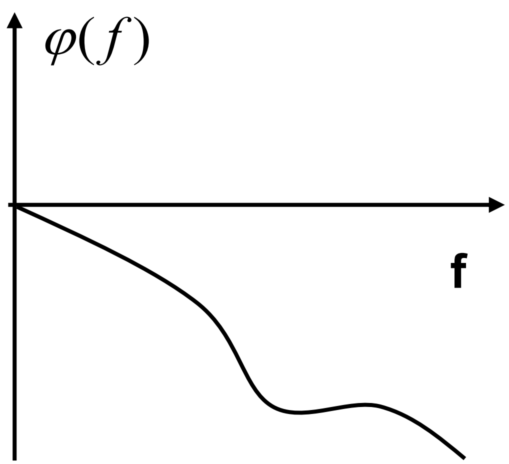
(BP, band-pass)

Filtraggio analogico

- ✓ $h(t)$ reale $\Longrightarrow$ $H(f) = H^*(-f)$ (simmetria coniugata)

- ✓ E' sufficiente conoscere $H(f)$ solo per le frequenze positive, perché le f negative si deducono dalla simmetria coniugata



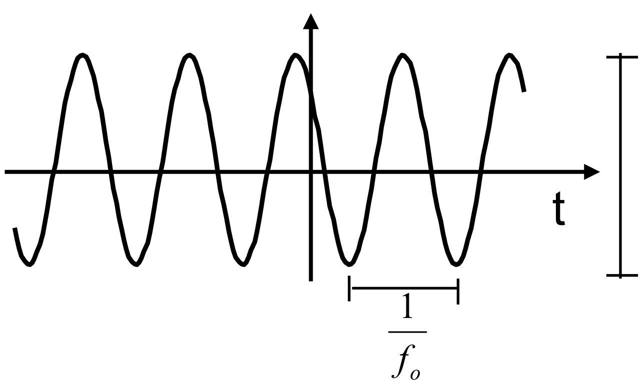


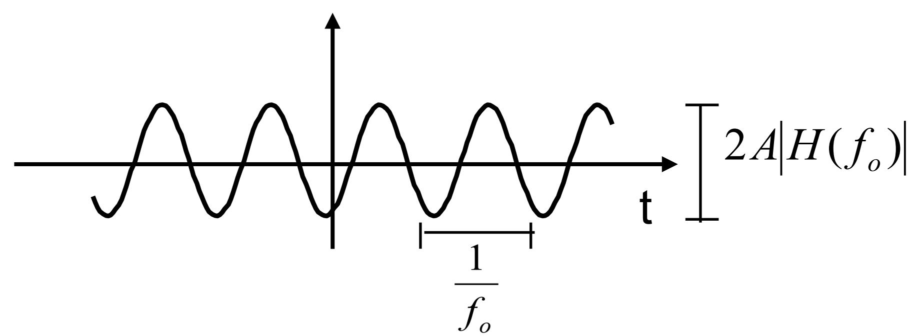
Filtraggio analogico

- ✓ Le sinusoidi sono largamente impiegate nelle trasmissioni (esempi: fax, tastiera telefono, GSM, …)

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = A\cos(2\pi f_o t + \theta) \qquad y(t) = A\left|H(f_o)\right|\cos(2\pi f_o t + \theta + \varphi(f_o))$$





Trasformata di Fourier di un segnale periodico

Dato un segnale periodico x(t) con periodo T (e F=1/T). Indichiamo con $f_n = nF$ le frequenze multiple della frequenza F: armoniche.

È possibile scrivere il segnale x(t) nella seguente forma:

$$x(t) = \sum_n X_n e^{j2\pi f_n t}$$

SERIE DI FOURIER

x(t) si può scrivere come somma pesata (combinazione lineare) di infiniti contributi esponenziali alle frequenze corrispondenti alle armoniche. Gli esponenziali sono scalati per X_n, i coefficienti della serie di Fourier:

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Trasformata di Fourier di un segnale periodico

Calcoliamo la trasformata di Fourier del segnale periodico x(t):

$$FT\{x(t)\} = FT\left\{\sum_n X_n e^{j2\pi f_n t}\right\}$$

$$= \sum_n X_n FT\{e^{j2\pi f_n t}\} = \sum_n X_n \delta(f - f_n) = \sum_n X_n \delta(f - nF) =$$

→ X(f)= $\sum_n X_n \delta(f - nF)$

Trasformata di Fourier di un segnale periodico

Consideriamo il segnale periodico x(t) treno di impulsi :

$$x(t) = \Gamma_T(t) = \sum_k \delta(t - kT)$$

Bisogna calcolare i coefficienti X_n per calcolare successivamente la FT.

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \Gamma_T(t) e^{-j2\pi f_n t} dt =$$
$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_k \delta(t - kT)\, e^{-j2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T} = F$$

Trasformata di Fourier di un segnale periodico

$$FT\{\Gamma_T(t)\} = FT\left\{\sum_k \delta(t-kT)\right\}$$

$$= \sum_n X_n \delta(f-nF) = F\sum_n \delta(f-nF) = F\cdot\Gamma_F(f)$$

$\rightarrow \Gamma_T(t) \leftrightarrow F\Gamma_F(f)$

Un'altra possibilità è ricavare direttamente il calcolo della trasformata di Fourier del treno di impulsi:

$$FT\{\Gamma_T(t)\} = FT\left\{\sum_k \delta(t-kT)\right\} = \sum_k e^{-j2\pi nFt}$$

Trasformata di Fourier Continua

Dall'uguaglianza delle due espressioni per la trasformata di Fourier del treno di impulsi troviamo **la formula di Poisson**

$$\rightarrow FT\{\Gamma_T(t)\} = F\sum_n \delta(f - nF) = \sum_k e^{-j2\pi nFt}$$

Proprietà della convoluzione e prodotto

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)Y(f)$$
$$x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$$