

Fondamenti di Comunicazioni ed Internet

Teorema del campionamento

Tiziana Cattai

email: tiziana.cattai@uniroma1.it



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Campionamento

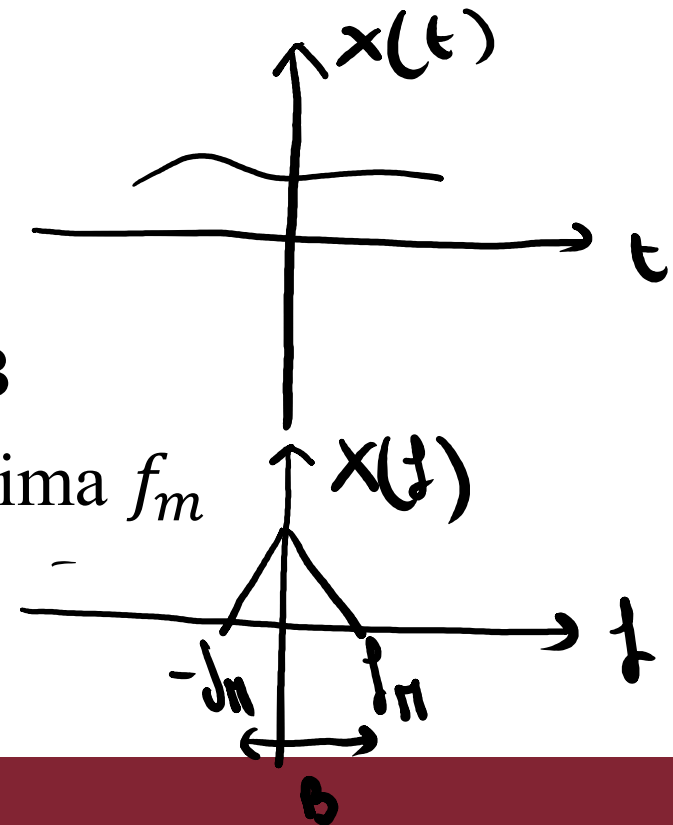
Ci occupiamo di capire come passare da un segnale continuo $x(t)$ ad uno discreto x_n senza perdita di informazioni.

Questo ci permette di ritornare dal segnale campionato x_n a quello iniziale $x(t)$.

Consideriamo un generico segnale $x(t)$

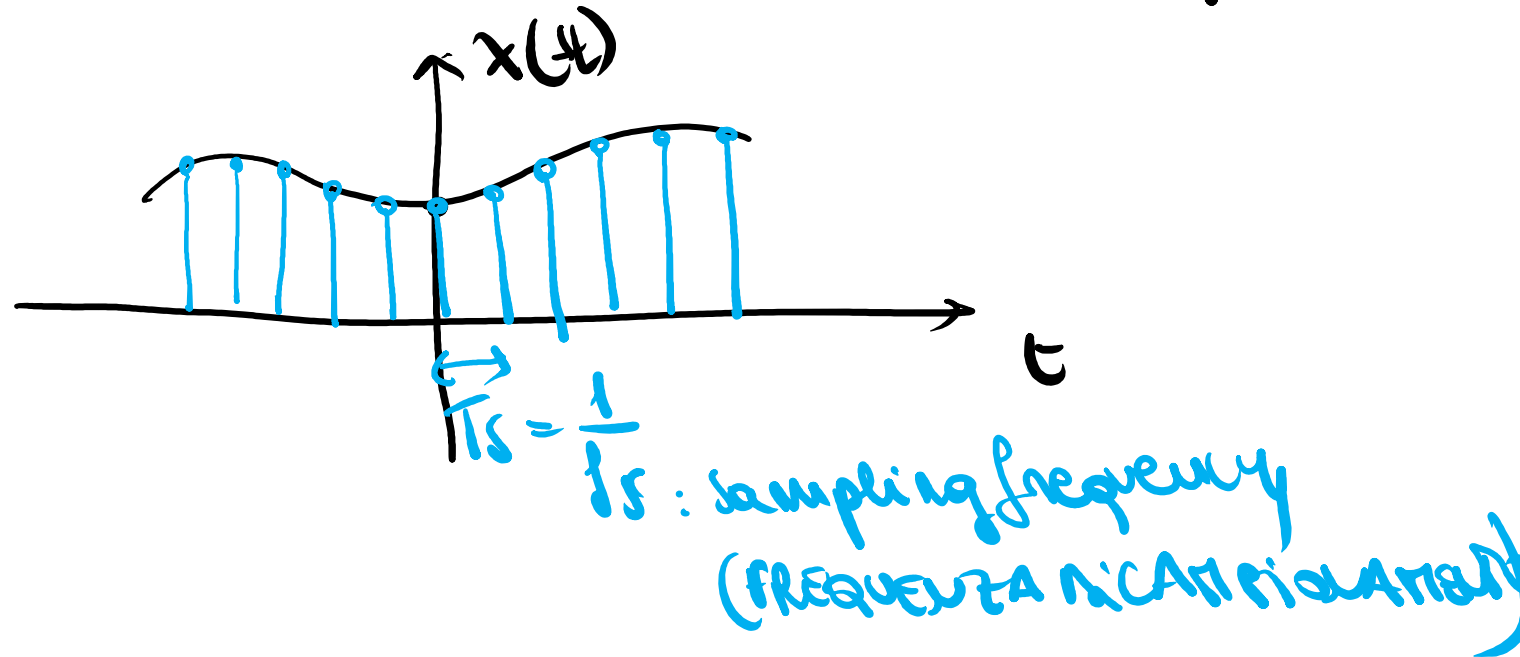
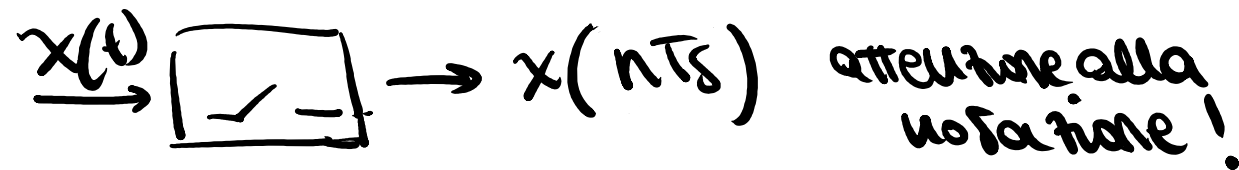
Che sia limitato in banda: banda finita B

Con una componente di frequenza massima f_m



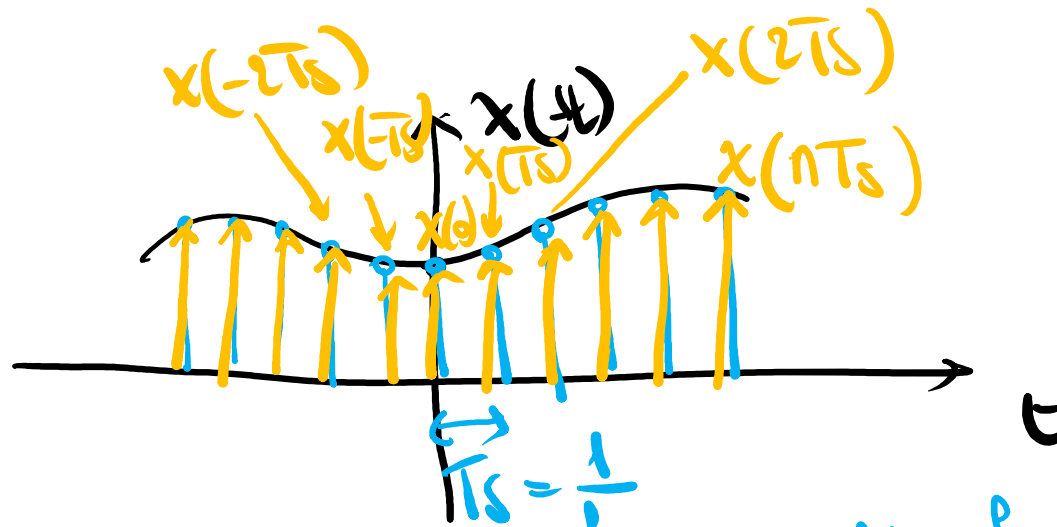
Campionamento

Questo segnale viene fatto passare in un campionatore, che è un sistema misto che prende in ingresso un segnale continuo e dà in uscita un segnale discreto



Campionamento

Il segnale in uscita dal campionatore, entra in un formatore di impulsi. Un sistema misto che prende in ingresso un segnale discreto e dà in uscita un segnale continuo, in cui in ogni campione discreto c'è un impulso matematico con area pari al valore che la sequenza x assume in quel punto



$$\tilde{x} = \sum_n x_n \delta(t - nT_s)$$

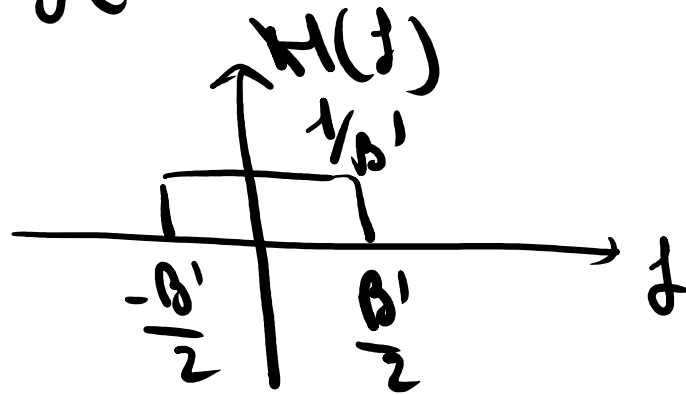
$\frac{1}{T_s} = f_s$: sampling frequency
(FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO)

Campionamento

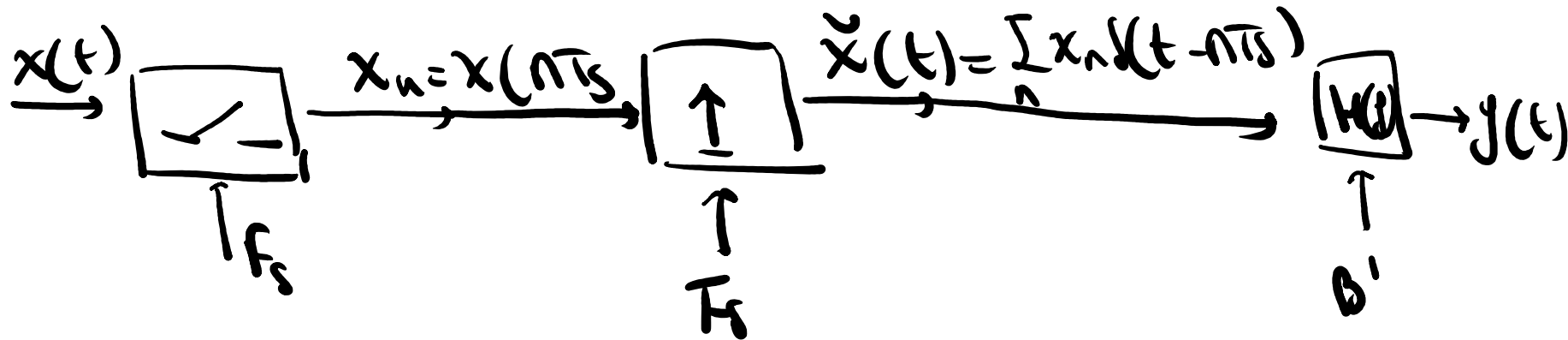
Il segnale $\tilde{x}(t)$ passa infine in un filtro passa basso con banda B' , ed esce il segnale $y(t)$. Sotto le ipotesi del teorema del Campionamento il segnale $y(t)=x(t)$

$$\tilde{x}(t) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow y(t)$$

$$H(f) = \frac{1}{B'} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B'}\right)$$

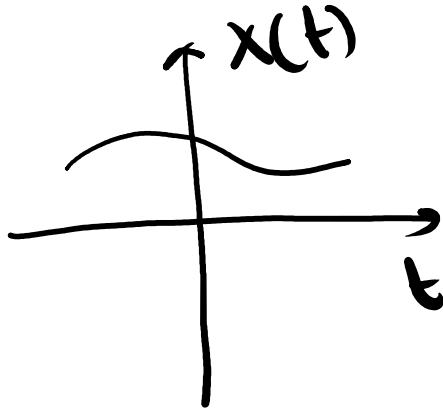


Teorema del Campionamento



Teorema del campionamento. Se il segnale tempo continuo di ingresso $x(t)$ è limitato in banda con frequenza massima f_m e se la frequenza di campionamento F_s è $F_s \geq 2f_m$, allora $y(t)=x(t)$

Teorema del campionamento

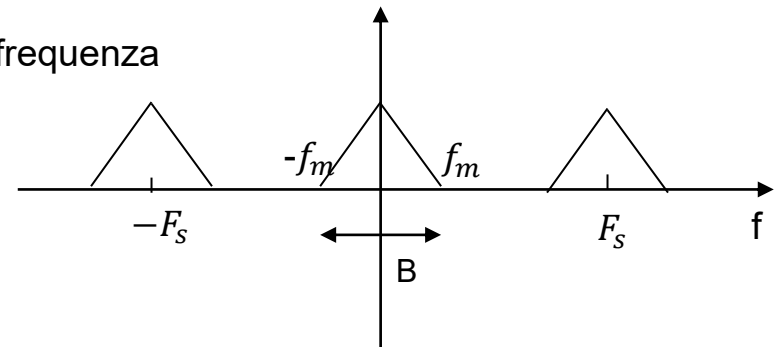
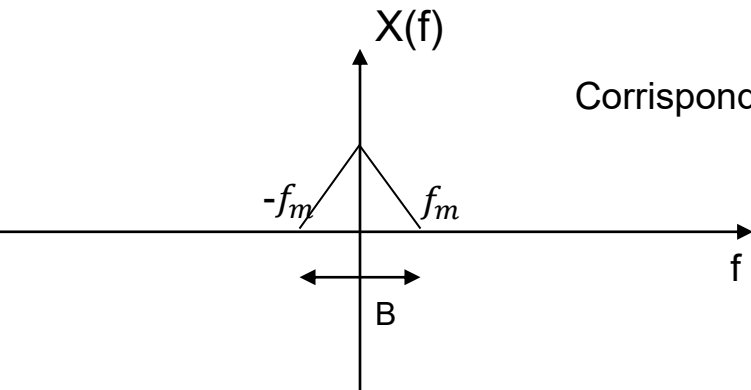


$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \sum_n x_n \cdot \delta(t - nTs) = \\ &= \sum_n x(nTs) \cdot \delta(t - nTs)\end{aligned}$$

La moltiplicazione nel tempo del segnale per un treno di impulsi



Corrisponde a convoluzione in frequenza



Teorema del campionamento

Vediamo con le formule

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \sum_n x_n \cdot \delta(t - nTs) = \sum_n x(nT_s) \cdot \delta(t - nTs) = \sum_n x(t) \cdot \delta(t - nTs) \\ &= x(t) \sum_n \delta(t - nTs) = x(t) \cdot \Gamma_{T_s}(t)\end{aligned}$$

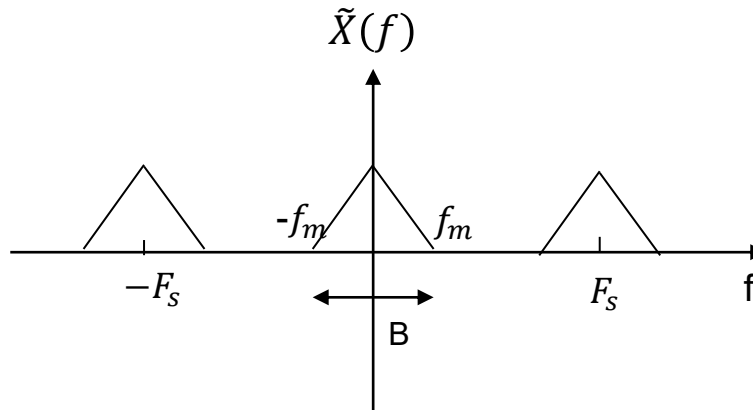
Ora facciamone la trasformata di Fourier CTFT:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(f) &= FT\{\tilde{x}(t)\} = FT\{x(t) \cdot \Gamma_{T_s}(t)\} = FT\{x(t)\} * FT\{\Gamma_{T_s}(t)\} = X(f) * F_s \Gamma_{F_s}(f) \\ &= X(f) * F_s \sum_n \delta(f - nF_s) = F_s \sum_n X(f) * \delta(f - nF_s) = F_s \sum_n X(f - nF_s)\end{aligned}$$

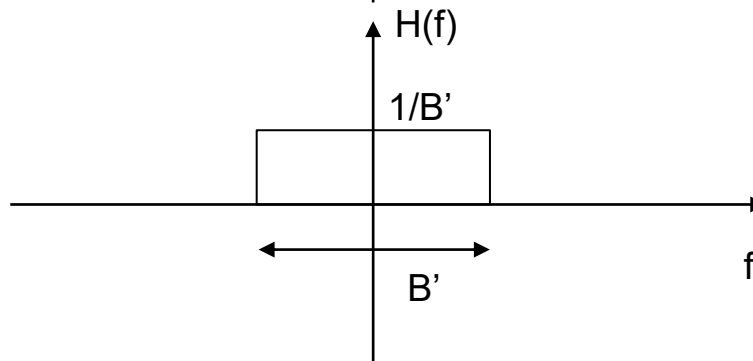
Questo significa che ho infinite repliche della trasformata di Fourier del segnale in ingresso centrate nei multipli della frequenza di campionamento F_s

Teorema del campionamento

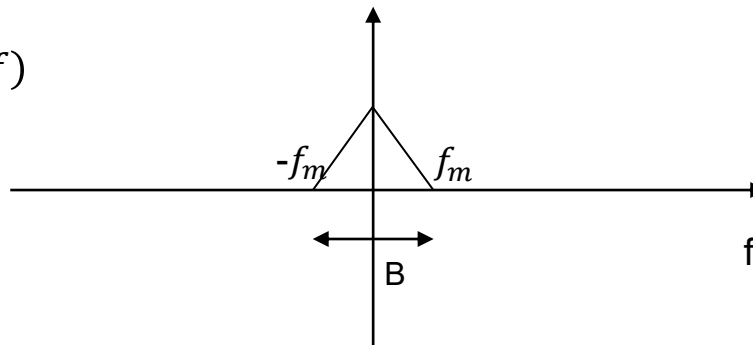
$$\tilde{X}(f) = F_s \sum_n X(f - nF_s)$$



$$H(f) = \frac{1}{B'} \text{rect}\left(\frac{f}{B'}\right)$$



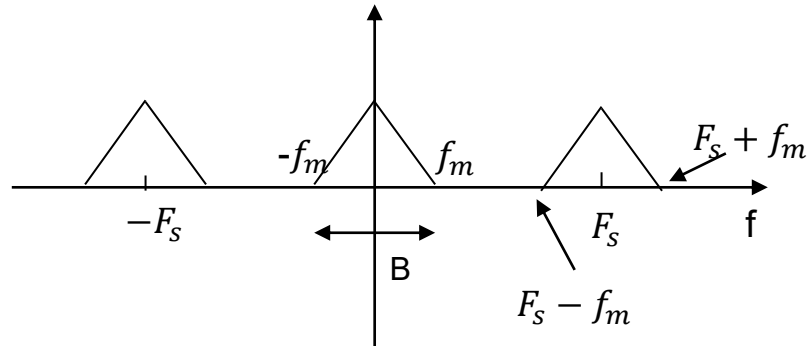
$$Y(f) = \tilde{X}(f) \cdot H(f) = X(f)$$



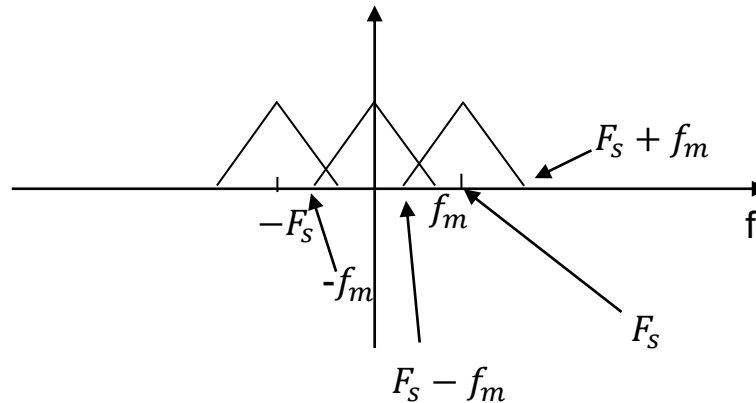
Teorema del campionamento

ipotesi del teorema del campionamento

$$\tilde{X}(f) = F_s \sum_n X(f - nF_s)$$



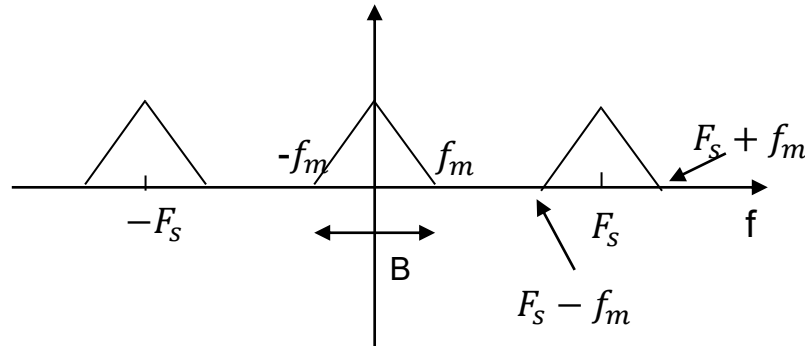
Se $F_s - f_m \geq f_m \rightarrow F_s \geq 2f_m = B$ allora riesco a ricostruire correttamente. Altrimenti no.
Vediamo caso $F_s < 2f_m$



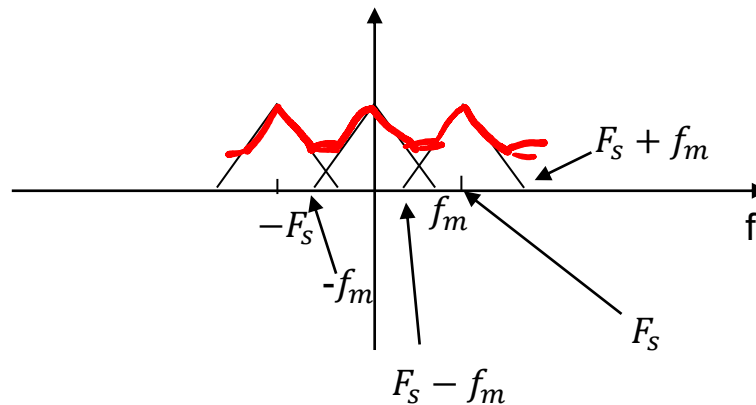
Teorema del campionamento

ipotesi del teorema del campionamento

$$\tilde{X}(f) = F_s \sum_n X(f - nF_s)$$

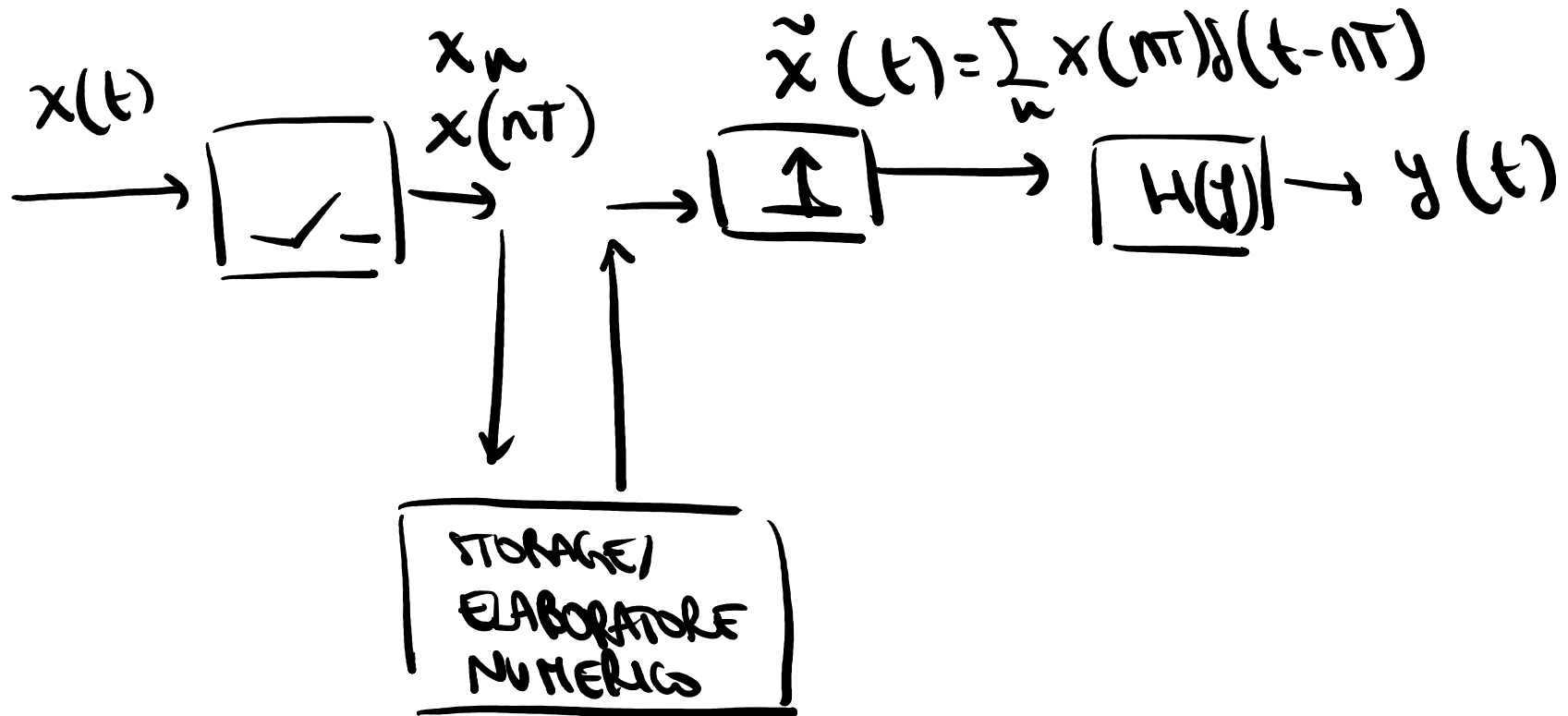


Se $F_s - f_m \geq f_m \rightarrow F_s \geq 2f_m = B$ allora riesco a ricostruire correttamente. Altrimenti no.
Vediamo caso $F_s < 2f_m$



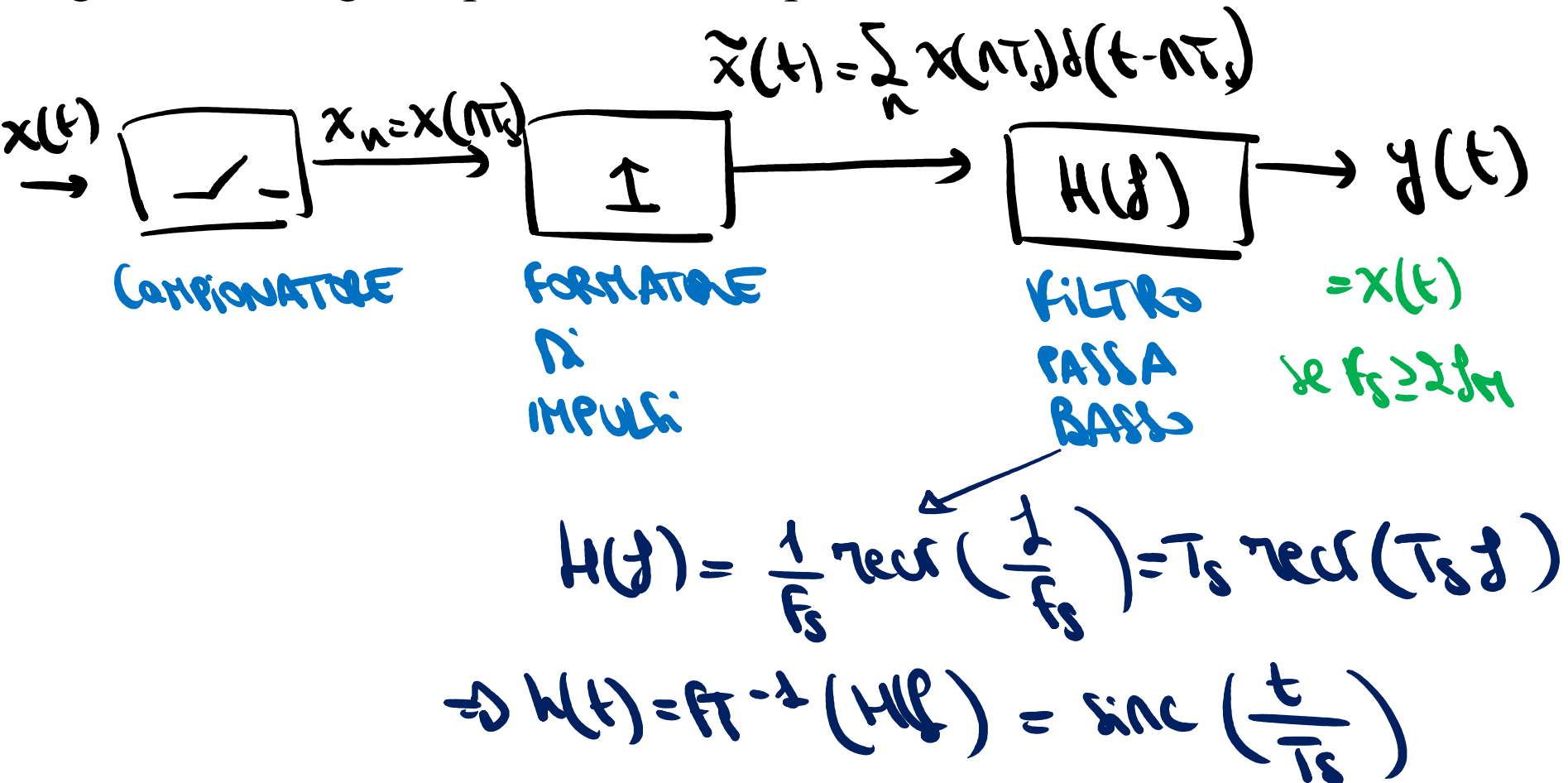
In questo caso non è possibile ricostruire il segnale di partenza perché le repliche sono sovrapposte → quando si fa passare il segnale in un filtro passa basso non si recupera una replica

Utilizzo del campionamento



Teorema del campionamento: ricostruzione del segnale $x(t)$

Seguendo tutti gli step che abbiamo presentato



Teorema del campionamento: ricostruzione del segnale $x(t)$

Ingresso: $x(t)$

Campionatore a passo T_s : $x_n = x(nT_s)$

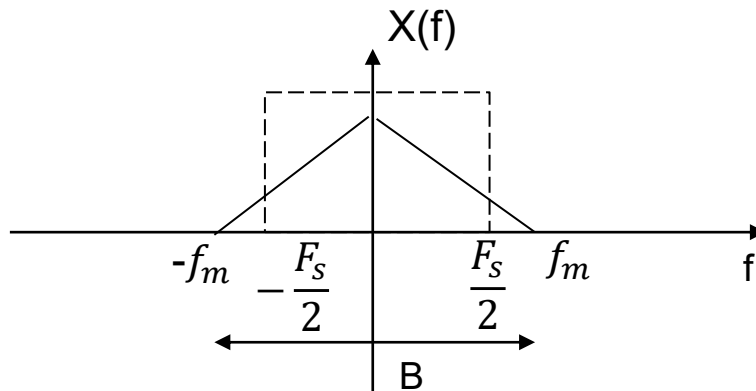
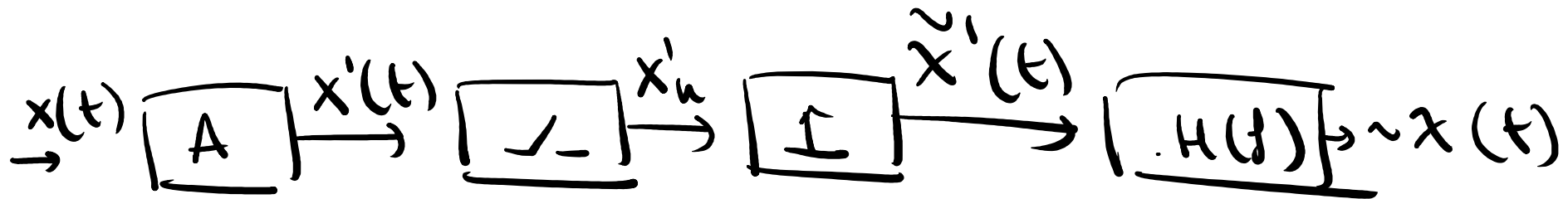
Formatore di impulsi: $\tilde{x}(t) = \sum_n x_n \cdot \delta(t - nT_s)$

Uscita del filtro: $x(t) = \tilde{x}(t) * h(t) =$

$$\sum_n x_n \cdot \delta(t - nT_s) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) = \sum_n x_n \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

Filtro anti-aliasing

Si tratta di un filtro passa basso $[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}]$ che taglia la banda del segnale $x(t)$ in ingresso. Viene applicato nella maggior parte dei sistemi reali direttamente al segnale $x(t)$



Esercizi

Un segnale $x(t)$ ha una frequenza massima di 20kHz.

Determinare il massimo intervallo di campionamento per avere una perfetta ricostruzione del segnale.

Esercizi

Dato il segnale $x(t)=3\cos(2\pi 4t)-\sin(2\pi 3t)$ qual è il numero minimo di campioni che devono essere presi su un intervallo di 5 s per soddisfare il teorema del campionamento?