Fondamenti di Comunicazioni ed Internet

Lezione 7:CTFT, filtri

Tiziana Cattai
email: tiziana.cattai@uniroma1.it

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Trasformata di Fourier Continua

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

Trasformata di Fourier

FT : $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = FT\{x(t)\}, \quad -\infty < f < +\infty$ *ANALISI*

Antitrasformata di Fourier

FT^{-1} : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = FT^{-1}\{X(f)\}, \quad -\infty < t < +\infty$ *SINTESI*

Il segnale x(t) può essere scritto come l'integrale di infinite componenti armoniche (dall'esponenziale, che può essere scritto in funzione di seno e coseno)

https://demonstrations.wolfram.com/FourierTransformPairs/

.

Proprietà

Scalatura Data una costante $\alpha \neq 0$, e la FT del segnale x(t)=X(f), allora risulta

$$FT\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X(f/\alpha)$$

$\alpha > 0$

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)$$

$$\alpha t = t' \rightarrow t = \frac{t'}{\alpha} \rightarrow dt = \frac{dt'}{\alpha}$$

$$x(\alpha t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi \frac{f}{\alpha} t'} \frac{dt'}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi \frac{f}{\alpha} t'} dt' =$$

$$= \frac{1}{\alpha} X(f/\alpha)$$

per $\alpha < 0$ → MODULO DAVANTI

Proprietà

Traslazione nel tempo e nella frequenza Dati x(t) e X(f), una coppia FT e FT^{-1} e due valori t_0 e f_0. è possibile scrivere:

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0) \qquad (1)$$
$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_o} \qquad (2)$$

(1) $FT\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t}\, dt = X(f-f_0)$

(2) $FT\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f(t'+t_0)}\, dt' =$

$t' = t - t_0 \Rightarrow t = t' + t_0$

$dt = dt'$

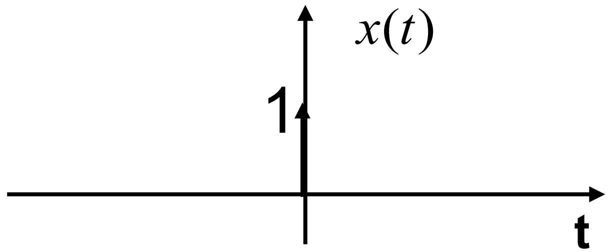
$= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f t'}\, dt' =$

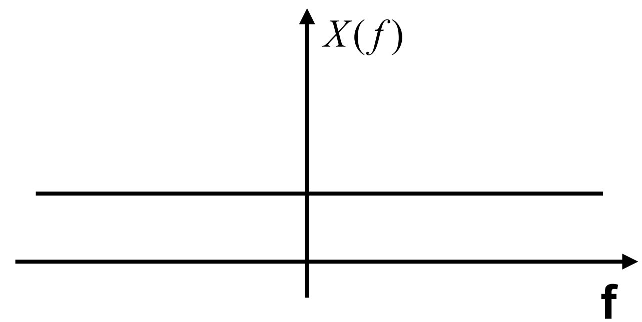
$= X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$

Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di un impulso

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow X(f) = 1$$





Dim:

$$FT\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt \underset{\uparrow}{=} e^{-j2\pi f(0)} = 1$$

PROPR. CAMPIONAMENTO DELL'IMPULSO MATEMATICO

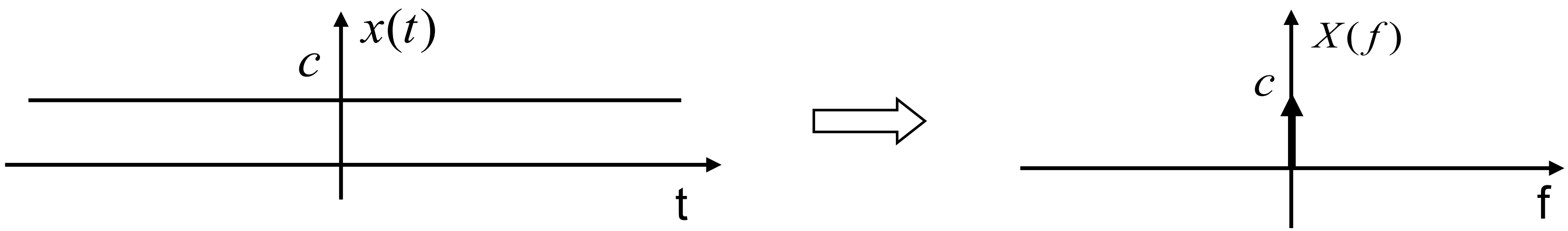
in generale

$$FT\{c\,\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = c \cdot e^{-j2\pi f(0)} = c$$

Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di una costante

$$x(t) = c \longrightarrow X(f) = c\delta(f)$$



$x(t) = c$

DIM: per la proprietà di dualità dal caso precedente

Nota: x(t) è reale e pari, la sua trasformata anche

Trasformata di un esponenziale

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi t_o f}$$

DIM.:

$t - t_0 = t' \rightarrow t = t' + t_0$

$dt = dt'$

$$FT\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')\, e^{-j2\pi f (t'+t_0)}\, dt' =$$

NON DIPENDE DA t

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')\, e^{-j2\pi f t_0}\, e^{-j2\pi f t'}\, dt =$$

$$= e^{-j2\pi f t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')\, e^{-j2\pi f t'}\, dt'}_{e^{-j2\pi f (0)} = 1} = e^{-j2\pi f t_0}$$

PROP. CAMPIONAMENTO DELL'IMPULSO

Trasformata di un esponenziale

$$e^{j2\pi f_o t} \leftrightarrow \delta(f - f_0)$$

DIM.

$$\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi(f-f_0)t} =$$

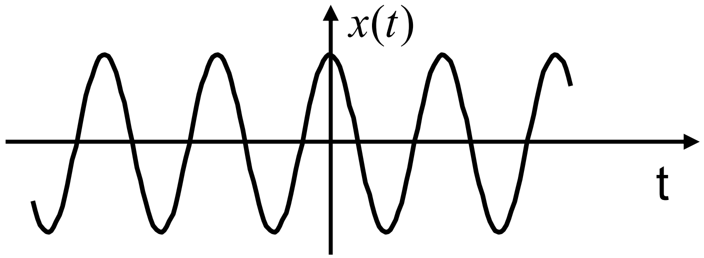
$$= \delta(f-f_0)$$

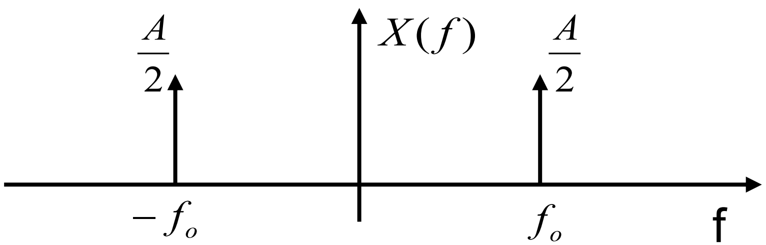
Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di un coseno

$$x(t) = A\cos\left(2\pi f_o t\right)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\cos(2\pi f_o t)e^{-j2\pi ft}dt = \frac{A}{2}\delta(f - f_o) + \frac{A}{2}\delta(f + f_o)$$





Notare la simmetria

Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di un coseno

$x(t) = A\cos(2\pi f_o t) \leftrightarrow FT\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A\cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi f t}dt =$

$\cos(t) = \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}$

$= \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)e^{-j2\pi f t}dt =$

$= \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f+f_0)t}dt + \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t}dt =$

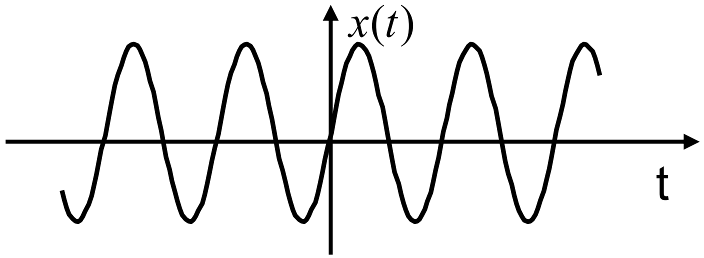
$= \frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0)$

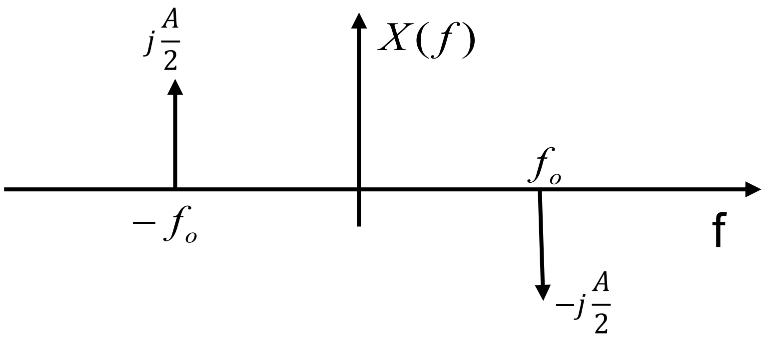
Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di un seno

$$x(t) = A sin(2\pi f_0 t)$$

$$X(f) = A sin(2\pi f_0 t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \quad -j\frac{A}{2}\delta(f - f_0) + j\frac{A}{2}\delta(f + f_0)$$





Notare la simmetria

Trasformata di Fourier Continua

Trasformata di un seno

$x(t) = A sin(2\pi f_0 t)$ $\leftrightarrow FT\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A \sin(2\pi f_0 t)\, dt =$

$\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$

* moltiplico e divido per j

$$= \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f - f_0) t}\, dt - \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f + f_0) t}\, dt$$

$$= A/2j\ \delta(f + f_0) - \frac{A}{2j} \delta(f - f_0) \overset{*}{=} -j\frac{A}{2} \delta(f + f_0) + j\frac{A}{2} \delta(f - f_0)$$

Trasformata di Fourier Continua

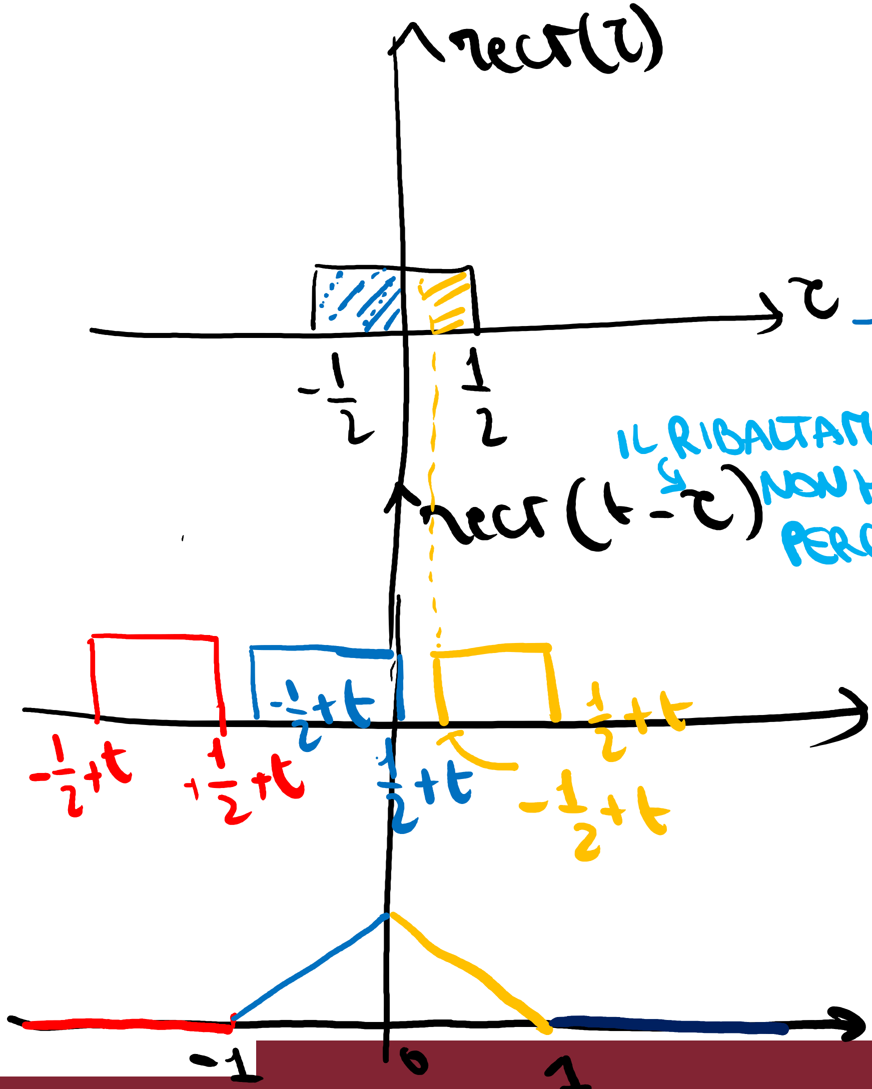
Proprietà della convoluzione e prodotto

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)Y(f)$$

$$x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

Calcolare la convoluzione

$$rect(t) * rect(t) = ?$$



IL RIBALTAMENTO NON HA EFFETTO PERCHÉ È SIMMETRICA RISPETTO ALL'ASSE Y

$\frac{1}{2}+t<-\frac{1}{2} \to t<-1 \Rightarrow \varphi_{xy}(t)=0$

$-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}+t < \frac{1}{2} \to -1<t<0$

$\to \varphi_{xy}(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+t} 1\, d\tau = \tau \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+t} = 1+t$

$0<t<1 \to \varphi_{xy}(t) = \int_{-\frac{1}{2}+t}^{\frac{1}{2}} 1\, d\tau = 1-t$

$-\frac{1}{2}+t>\frac{1}{2} \to t>1 \to \varphi_{xy}(t)=0$

Altre trasformate di Fourier

Abbiamo già visto che $rect(t) * rect(t) = tri(t)$

$$FT\{tri(t)\} = FT\{rect(t) * rect(t)\}$$
$$= FT\{rect(t)\} \cdot FT\{rect(t)\} = sinc^2(f)$$

$\rightarrow\ tri(t) \leftrightarrow sinc^2(f)$

E (per dualità): $sinc^2(t) \leftrightarrow tri(f)$

Trasformata di Fourier di un segnale periodico

Dato un segnale periodico x(t) con periodo T (e F=1/T). Indichiamo con $f_n = nF$ le frequenze multiple della frequenza F: armoniche.

È possibile scrivere il segnale x(t) nella seguente forma:

$$x(t) = \sum_n X_n e^{j2\pi f_n t}$$

SERIE DI FOURIER

x(t) si può scrivere come somma pesata (combinazione lineare) di infiniti contributi esponenziali alle frequenze corrispondenti alle armoniche. Gli esponenziali sono scalati per X_n, i coefficienti della serie di Fourier:

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi f_n t}dt$$

Trasformata di Fourier di un segnale periodico

Calcoliamo la trasformata di Fourier del segnale periodico x(t):

$$FT\{x(t)\} = FT\left\{\sum_n X_n e^{j2\pi f_n t}\right\}$$

$$= \sum_n X_n FT\{e^{j2\pi f_n t}\} = \sum_n X_n \delta(f - f_n) = \sum_n X_n \delta(f - nF) =$$

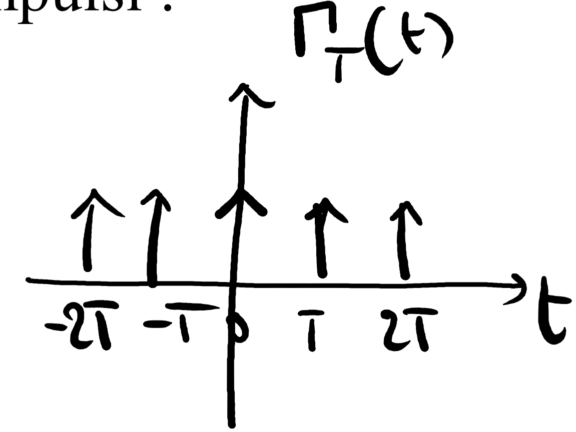
→ X(f)= $\sum_n X_n \delta(f - nF)$

TRASF DI FOURIER DI UN SEGNALE
TEMPO CONTINUO PERIODICO

Trasformata di Fourier di un segnale periodico

Consideriamo il segnale periodico x(t) treno di impulsi :

$$x(t) = \Gamma_T(t) = \sum_k \delta(t - kT)$$



Bisogna calcolare i coefficienti X_n per calcolare successivamente la FT.

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \Gamma_T(t) e^{-j2\pi f_n t} dt =$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_k \delta(t - kT)\, e^{-j2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T} = F$$

L'integrale è calcolato nel periodo principale, quindi ho solo un impulso matematico, centrato in zero

Trasformata di Fourier di un segnale periodico

$$FT\{\Gamma_T(t)\} = FT\left\{\sum_k \delta(t-kT)\right\}$$

USO LA FORMULA GENERICA PER IL CALCOLO DELLA TRASF. DI FOURIER DI UN SEGNALE PERIODICO

$$= \sum_n X_n \delta(f - nF) = F \sum_n \delta(f-nF) = F \cdot \Gamma_F(f)$$

X_n (slide precedente)

$\rightarrow \Gamma_T(t) \leftrightarrow F\Gamma_F(f)$

Un'altra possibilità è ricavare direttamente il calcolo della trasformata di Fourier del treno di impulsi:

$$FT\{\Gamma_T(t)\} = FT\left\{\sum_k \delta(t-kT)\right\} = \sum_k e^{-j2\pi k f T}$$

Trasformata di Fourier Continua

Dall'uguaglianza delle due espressioni per la trasformata di Fourier del treno di impulsi troviamo **la formula di Poisson**

$$\rightarrow FT\{\Gamma_T(t)\} = \boxed{F \sum_n \delta(f - nF) = \sum_n e^{-j2\pi n f T}}$$

Banda

La **banda** di un segnale x(t) è definita come l'insieme delle frequenze per cui X(f) è diverso da zero.

La **larghezza di banda** (bandwidth) W è la misura della banda

Esempio:

x(t) = sinc(t)

x(t) = rect(t)

x(t) = $\delta(t)$

x(t)=1

Altri esempi:

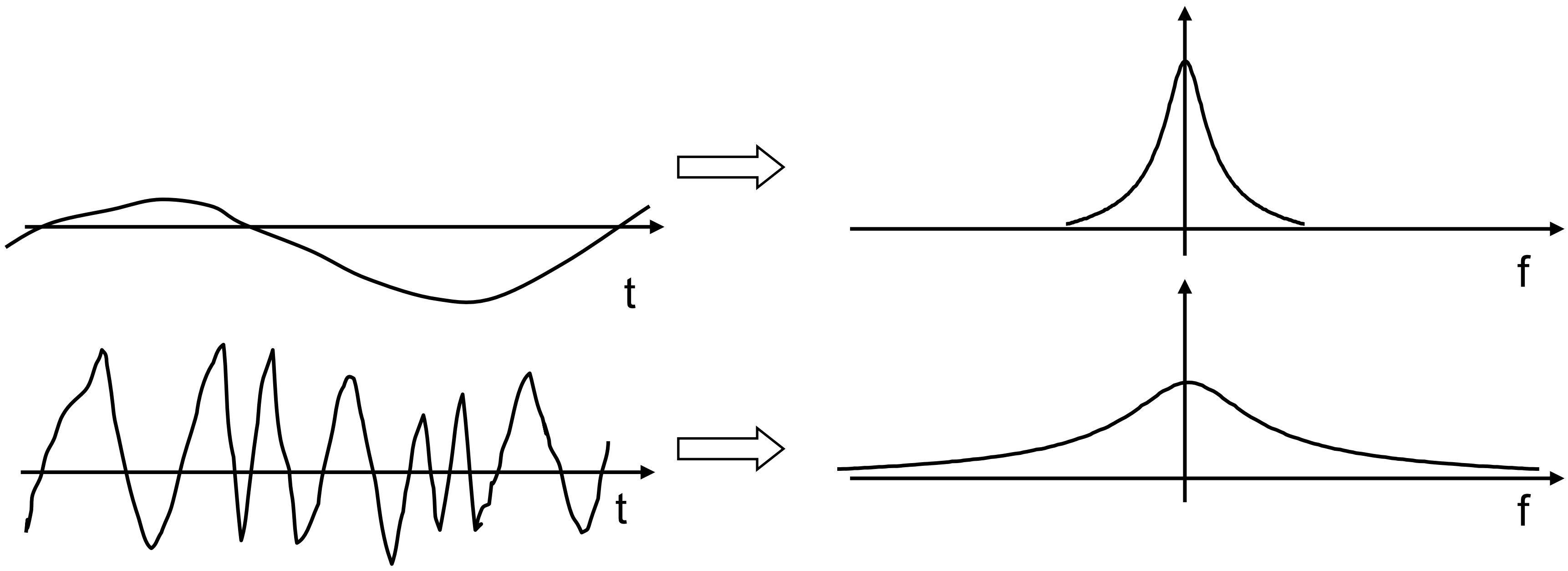
larghezza di banda di un segnale ECG $\sim 100 Hz$

Larghezza di banda di un segnale EEG $\sim 40\ Hz$

Voce $\sim 4kHz$

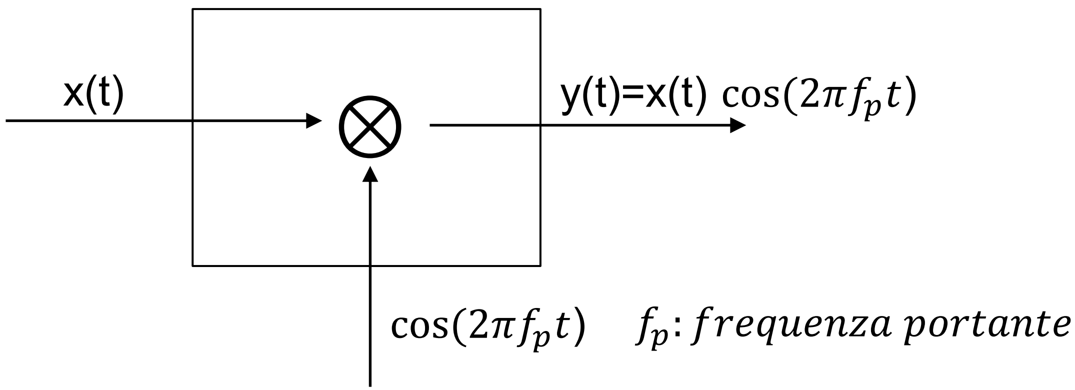
Trasformata di Fourier Continua: Relazione Tempo-Frequenza

- ✓ Segnali brevi (in t) → banda larga (in f)
- ✓ Segnali lunghi (e lenti) → banda stretta (in f)
- ✓ Segnali rapidamente varianti in t → banda larga (in f)



Modulatore

Un modulatore è un sistema (lineare e non tempo invariante) che dà in uscita il segnale in ingresso moltiplicato per un coseno ad una frequenza f_p



$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_p t) = \frac{1}{2} x(t) e^{j2\pi f_p t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j2\pi f_p t}$$

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_p t) \leftrightarrow Y(f) = \frac{1}{2} X(f - f_p) + \frac{1}{2} X(f + f_p)$$

$$Y(f) = X(f) * \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_p) + \frac{1}{2}\delta(f+f_p)\right] = \frac{1}{2} X(f) * \delta(f-f_p) + \frac{1}{2} X(f) * \delta(f+f_p) =$$

$$= \frac{1}{2} X(f-f_p) + \frac{1}{2} X(f+f_p)$$

L'effetto del modulatore è spostare la trasformata di Fourier del segnale in ingresso su un'altra frequenza, quella della portante: sposta la X(f) su $\pm f_p$

Esempio x(t)=sinc(t); con $f_p = 3$

Proprietà fondamentale della convoluzione

- ✓ La trasformata di Fourier della convoluzione

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- ✓ è pari al prodotto delle trasformate

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

- ✓ dove

$$Y(f) = FT\{y(t)\}$$
$$X(f) = FT\{x(t)\}$$
$$H(f) = FT\{h(t)\}$$

Risposta in frequenza di un sistema LP (filtro)

- ✓ Convoluzione (nel tempo):

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$h(t)$: risposta impulsiva del filtro

- ✓ Prodotto (in frequenza):

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$$X(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(f)$$

$H(f)$: risposta in frequenza del filtro o funzione di trasferimento del filtro

$$y(t) = \int_f Y(f)e^{j2\pi ft}df = \int_f H(f)\cdot X(f)e^{j2\pi ft}df$$

Esempio

$$x(t) = sinc^2(t)[1 - e^{j2\pi 5t}]$$

$$h(t) = 2sinc(3t)$$

$$y(t) =?$$

Esempio

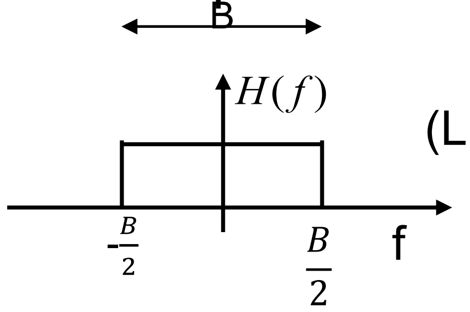
$$x(t) = sinc^2(t)[1 - e^{j2\pi 5t}]$$

$$h(t) = 2sinc(3t)$$

$$y(t) = ?$$

Filtraggio analogico

✓ Filtro passa-basso:



(LP, low-pass)

DEF

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right) \leftrightarrow h(t) = Bsinc(Bt)$$ *

* DIM utilizzando proprietà di scalatura

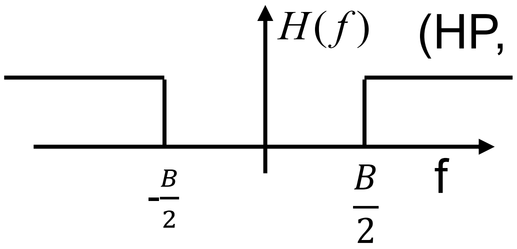
$\alpha > 0$

$$FT\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} X(f/\alpha)$$

$$\alpha = \frac{1}{B} \Rightarrow h(t) = FT^{-1}\{rect(f/B)\} = B\,sinc(Bt)$$

Filtraggio analogico

✓ Filtro passa-alto



(HP, high-pass)

Def

$$H(f) = 1 - rect\left(\frac{f}{B}\right) \leftrightarrow h(t)$$

$$= \delta(t) - Bsinc(Bt)$$

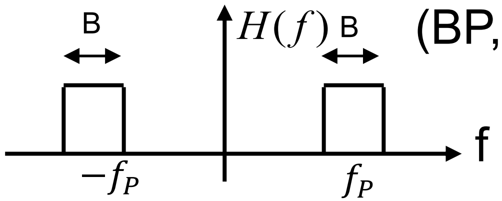
prop. linearità

Dim: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - rect\left(\frac{f}{B}\right)\right) e^{j2\pi ft}\, df =$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} 1\, e^{j2\pi ft}\, df}_{\delta(t)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{f}{B}\right) e^{j2\pi ft}\, df}_{= Bsinc(Bt)}$$

Filtraggio analogico

- ✓ Filtro passa-banda



(BP, band-pass)

$$H(f) = rect\left(\frac{f-f_p}{B}\right) + rect\left(\frac{f+f_p}{B}\right)$$

$$\leftrightarrow h(t) = 2\text{Bsinc}(\text{Bt})\cos(2\pi f_p t)$$

<u>Dim</u> $rect\left(\frac{f-f_p}{B}\right) + rect\left(\frac{f+f_p}{B}\right) =$

$$= rect\left(\frac{f}{B}\right) * \delta(f-f_p) + rect\left(\frac{f}{B}\right) * \delta(f+f_p)$$

$$FT^{-1}\{\ \} = B\,sinc(Bt)\cdot e^{+j2\pi f_p t} + B\,sinc(Bt)\,e^{-j2\pi f_p t}$$

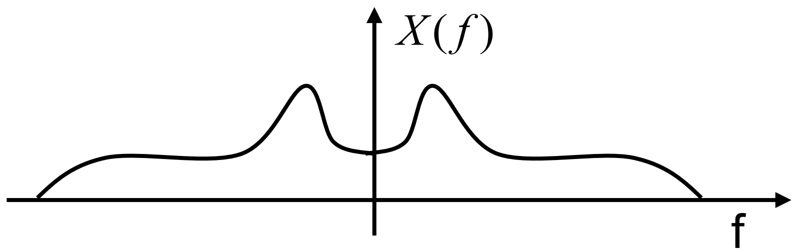
$$= B\,sinc(Bt)\cdot\left(\frac{e^{j2\pi f_p t} + e^{-j2\pi f_p t}}{2}\right)\cdot 2$$

$$= \cos(2\pi f_p t)$$

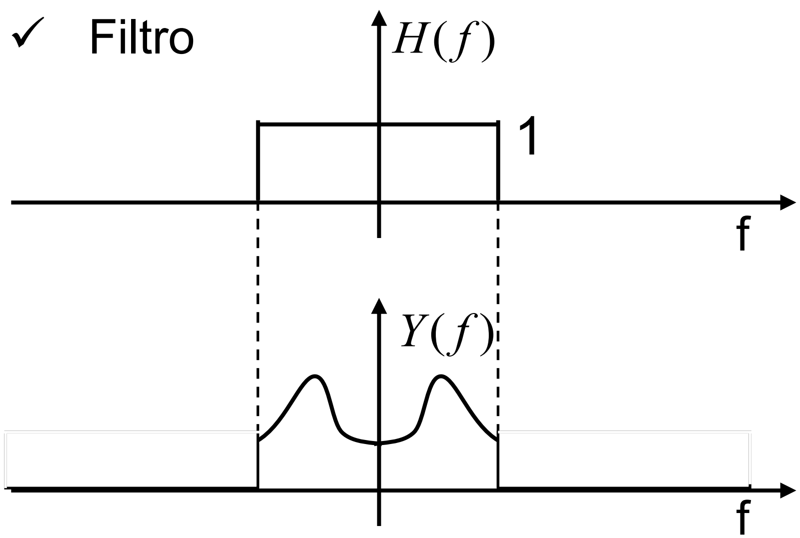
$$= 2B\,sinc(Bt)\cos(2\pi f_p t)$$

Filtraggio analogico

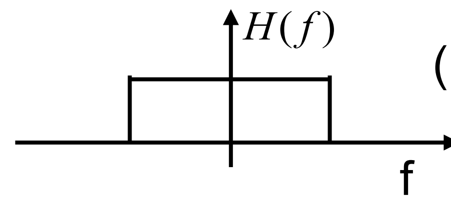
✓ Meccanismo di filtraggio: $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$



✓ Filtro

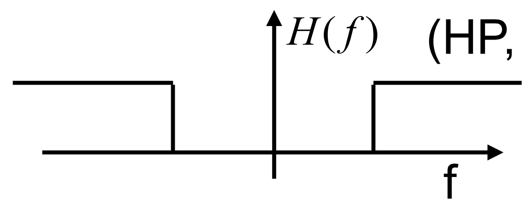


✓ Filtro passa-basso:



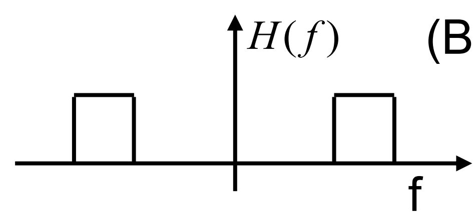
(LP, low-pass)

✓ Filtro passa-alto



(HP, high-pass)

✓ Filtro passa-banda

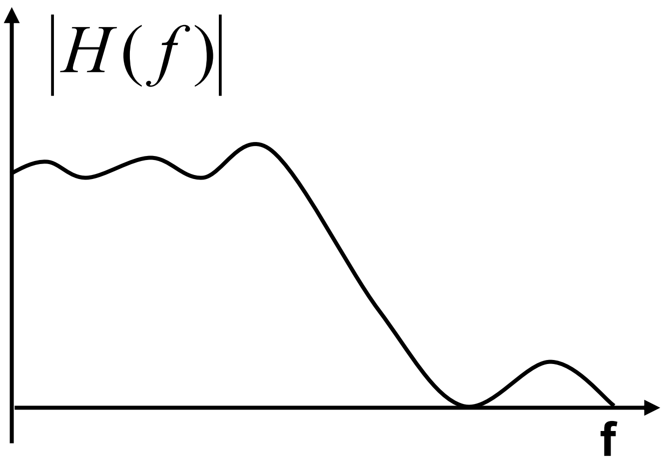


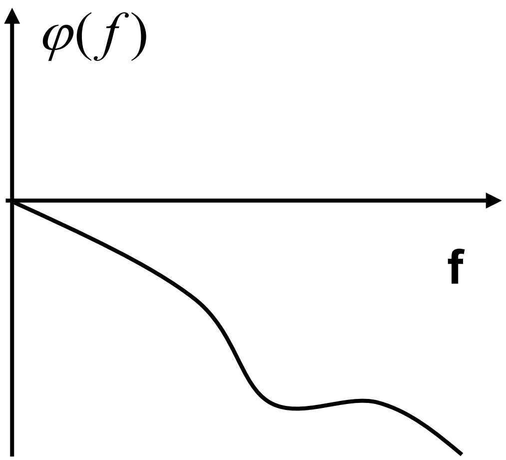
(BP, band-pass)

Filtraggio analogico

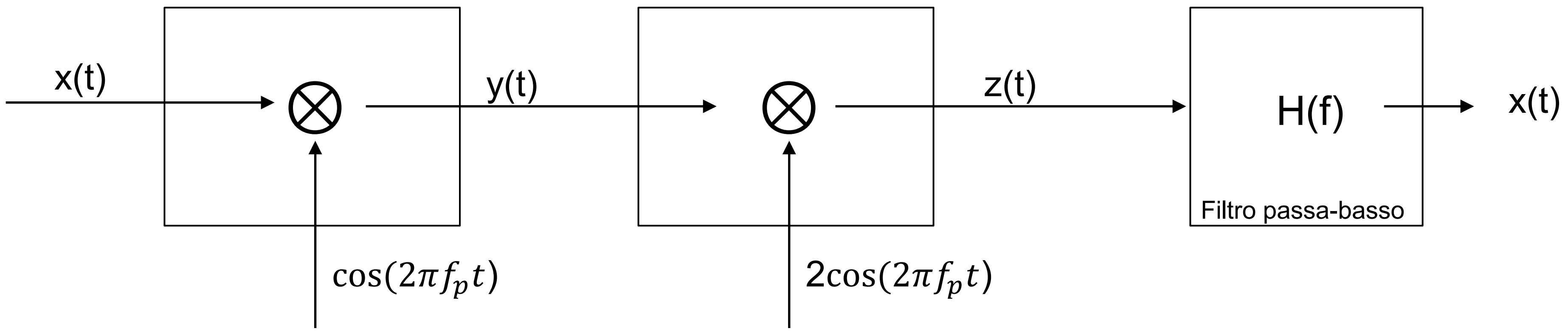
- ✓ $h(t)$ reale $\Longrightarrow$ $H(f) = H^*(-f)$ (simmetria coniugata)

- ✓ E' sufficiente conoscere $H(f)$ solo per le frequenze positive, perché le f negative si deducono dalla simmetria coniugata





Demodulatore



$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_p t)$$
$$z(t) = 2x(t) \cdot \cos^2(2\pi f_p t) = x(t)(1 + \cos(2\pi 2 f_p t)) = x(t) + \mathrm{x(t)}\cos(2\pi 2 f_p t)$$

Calcolo la trasformata di Fourier

$$Z(f) \leftrightarrow X(f) + \frac{X(f - 2f_p)}{2} + \frac{X(f + 2f_p)}{2}$$

Con un filtro passa basso è possibile eliminare le frequenze alte

Trasformata di Fourier Tempo Discreto (DTFT)

Richiamo: Trasformata CTFT di un segnale x(t) continuo

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = FT\{x(t)\}, \quad -\infty < f < +\infty$$

Trasformata di Fourier di una sequenza x_n

$FT\{x_n\} = X(e^{j\omega}) = \sum_n x_n \, e^{-j\omega n}$ *ANALISI*

$FT^{-1} = x_n = \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ *SINTESI*

Osservazioni:

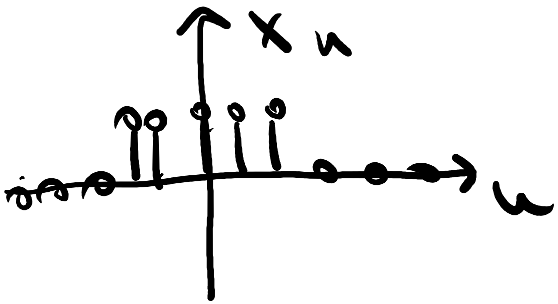
1) La trasformata di Fourier di un segnale discreto è continua
2) La trasformata di Fourier di un segnale discreto è periodica in ω di periodo 2π
3) Notare che in questa scrittura x_n non è periodico
4) x_n ha infiniti campioni

Trasformata di Fourier Tempo Discreto (DTFT)

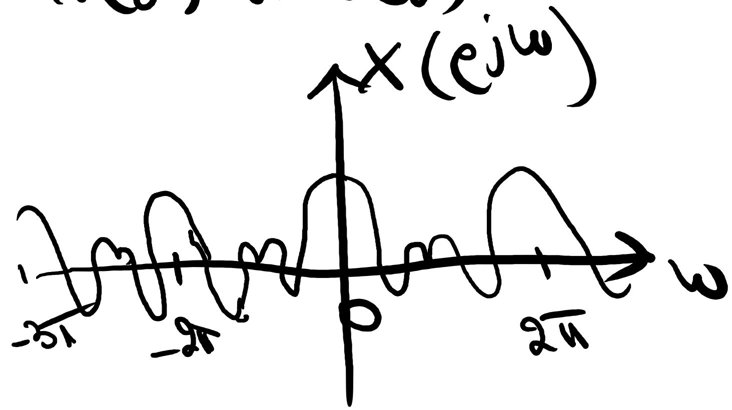
ESEMPIO 1

$x(t)=\mathrm{rect}(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)=\mathrm{sinc}(f)$

$x_n = ?$



$\xleftrightarrow{FT}$

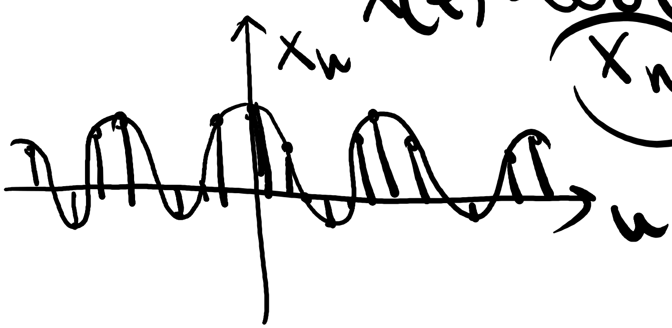


$X(e^{j\omega})$ è continua

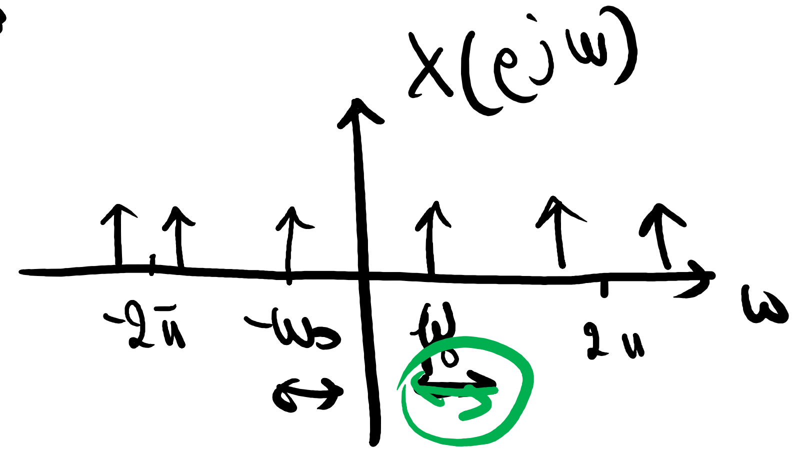
ESEMPIO 2

$x(t)=\cos(2\pi \overset{\omega_0}{f} t)$

x_n



$\longleftrightarrow$

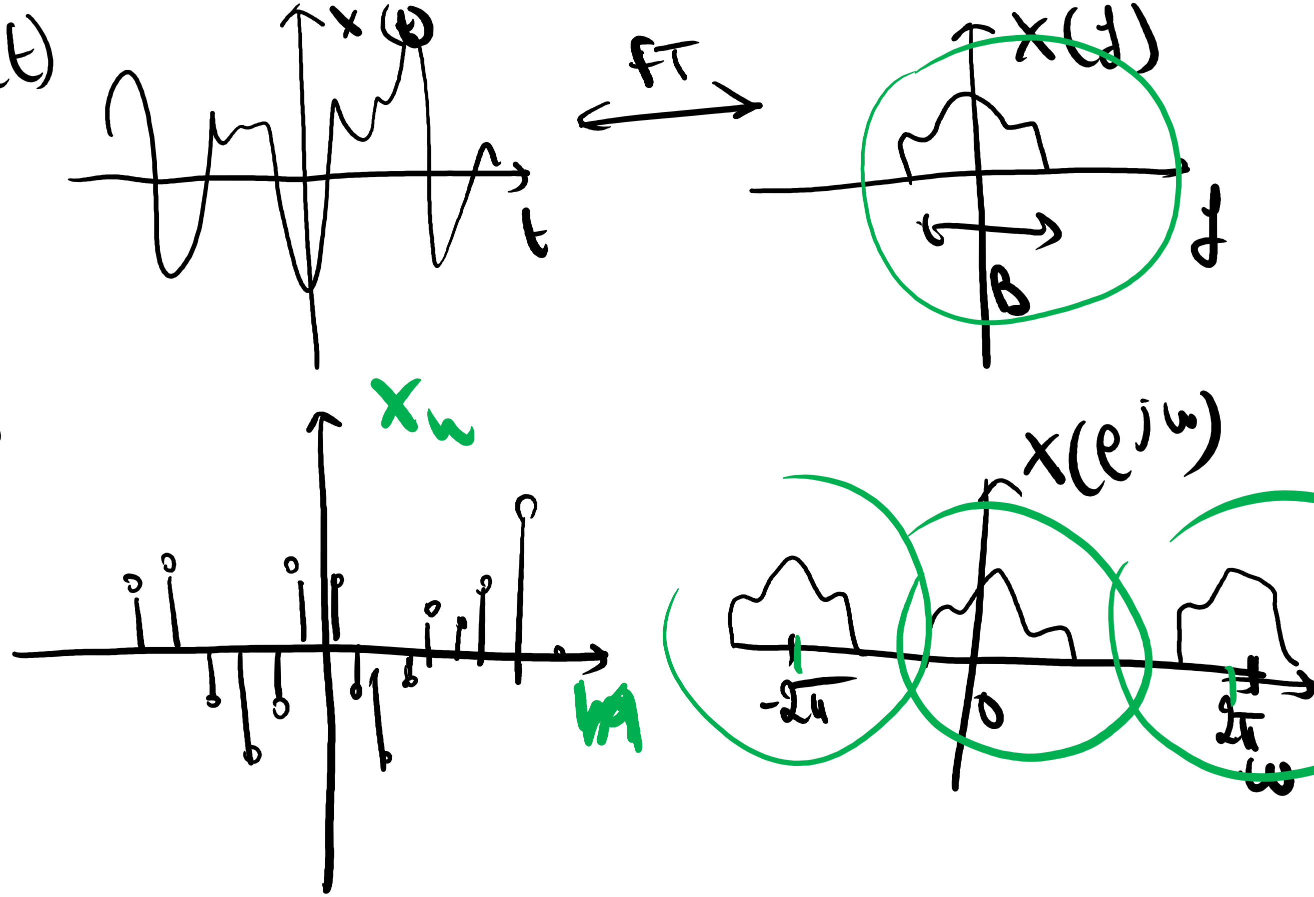


Trasformata di Fourier Tempo Discreto (DTFT)

segnale generico $x(t)$

versione discreta

x_n



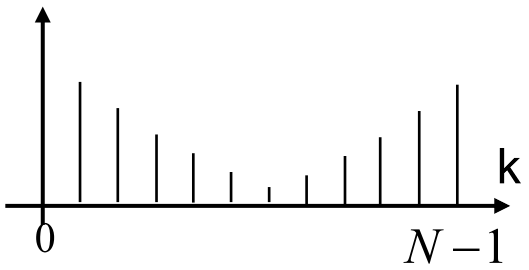
Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

Consideriamo il caso in cui x_n un segnale costituito da un numero N di campioni

DFT: Discrete Fourier Transform

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{n}{N}k} \longrightarrow \left\{X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}\right\}$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1$$



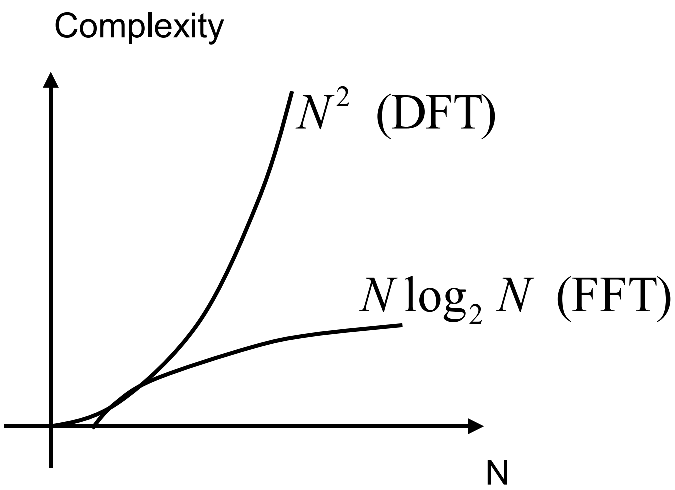
DFT $\{X_k, k=0,\ldots,N-1\}$ rappresenta $\{x_n\}$ in *k discrete frequencies*

$$\text{DFT}^{-1} \longrightarrow \quad x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{+j2\pi \frac{k}{N}n} \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

Fast Fourier Transform (FFT)

- ✓ Calcolo della DFT con minore complessità computazionale $N \log_2 N$

- ✓ Symmetry of $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$



Esercizi

1) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = rect\left(\frac{t}{2}\right)$ e graficarla
2) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \delta(t - 1000)$ e graficarla
3) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = sinc(t + 1)$e graficarla
4) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = sinc(2t)$ e graficarla
5) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \sin(2\pi 5t)$e graficarla
6) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = \cos(2\pi 3t)$ e graficarla
7) Calcolare la DTFT di $x_n = \delta(n - 1) + \delta(n + 1)$
8) Calcolare la DTFT di $x_n = \delta(n - 1) - \delta(n + 1)$
9) Calcolare la DTFT di $x_n = \delta(n - 2) + \delta(n + 2)$