Fondamenti di Comunicazioni ed Internet

Lezione 2: Segnali notevoli, operazioni sui segnali, energia potenza

Tiziana Cattai
email: tiziana.cattai@uniroma1.it

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Esempi di operazioni sui segnali
Richiami lezione precedente

- $z(t) = tri(t-1)$
- $z(t) = rect(t+1/2)$
- $z(t) = rect(t-1)$

Esempi di operazioni sui segnali

- $z(t) = rect\left(\frac{t}{3}\right)$
- $z(t) = 2rect\left(\frac{t}{3}\right)$
- $z(t) = tri(2t - 3)$
- $z(t) = rect\left(t + \frac{1}{2}\right) \cdot 3tri\left(\frac{t}{2}\right)$
- $z(t) = rect\left(\frac{t}{2} - 4\right) + tri(t + 2)$

Esempi di operazioni sui segnali

- $z(t) = rect\left(\frac{t}{3}\right)$

Esempi di operazioni sui segnali

- $z(t) = 2rect\left(\frac{t}{3}\right)$

Esempi di operazioni sui segnali

- $z(t) = tri(2t - 3)$

Esempi di operazioni sui segnali

- $z(t) = rect\left(\frac{t}{10} - 4\right)$

Esempi di operazioni sui segnali

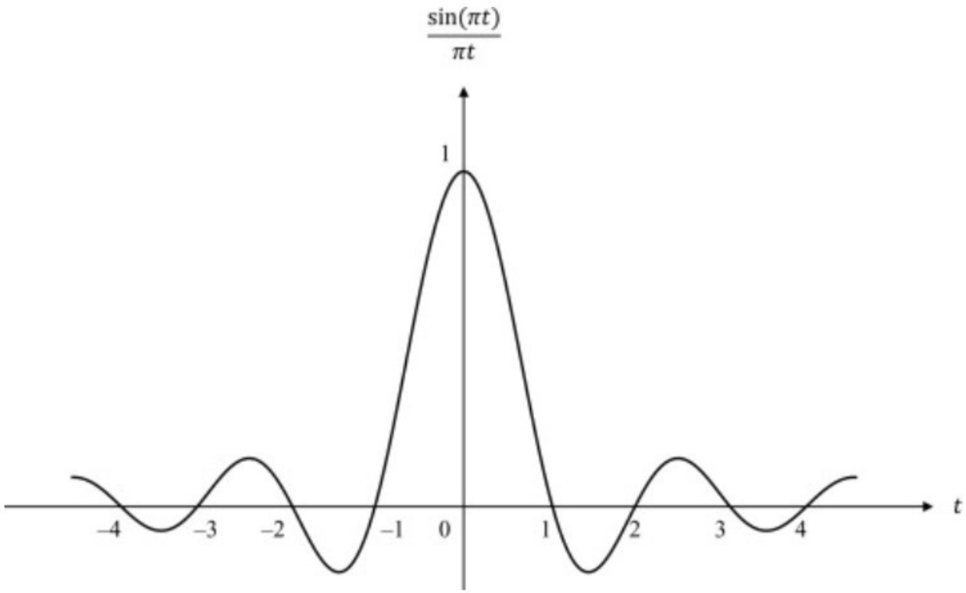
- $z(t) = rect\left(t + \frac{1}{2}\right) \cdot 3tri\left(\frac{t}{2}\right)$

Esempi di operazioni sui segnali

- $z(t) = rect\left(\frac{t}{2} - 4\right) + tri(t + 2)$

Segnale notevole

- $x(t) = sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$



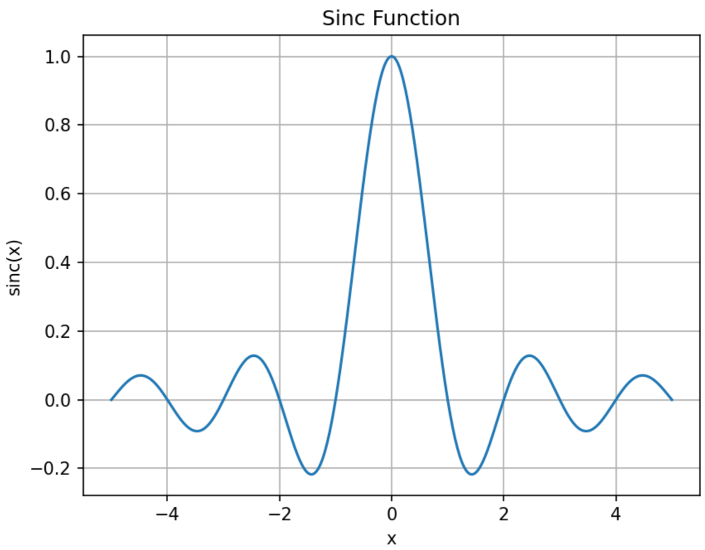
- Prodotto tra y(t) $= sin(t)$ e $z(t) = \frac{1}{\pi t}$
- $sinc(t) = o\ per\ t\ intero$
- $sinc(t) decresce\ come\ \frac{1}{t}$
- Per t=0 : limite notevole $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = 1\ (limite\ notevole)$

Python sinc

- $x(t) = sinc(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Define the range of x
x = np.linspace(-5, 5, 500)
# Compute the sinc function
y = np.sinc(x)

    # Plot the function
plt.plot(x, y)
plt.grid(True)
plt.title('Sinc Function')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('sinc(x)')
plt.tight_layout()
plt.show(block=True)
```



Durata e supporto

Supporto di un segnale x(t): insieme dei valori di t per cui $|x(t)| > 0$

Durata di un segnale x(t): misura del supporto

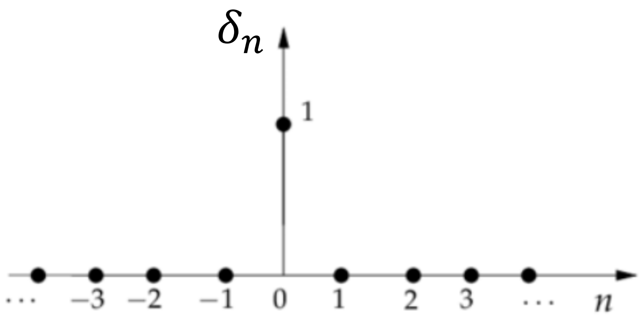
Stessa definizione per le sequenze

Esempi:

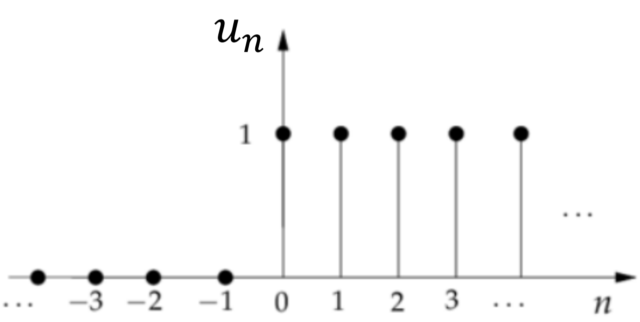
- Rect ?
- Tri ?
- Seno ?

Segnali discreti

- $x_n = \delta_n = \begin{cases} 1 \; per \; n = 0 \\ 0 \; altrimenti \end{cases}$



- $x_n = u_n = \begin{cases} 1 \; per \; n > 0 \\ 0 \; per \; n < 0 \end{cases}$



Segnali discreti

- Sequenza rettangolare $x_n = \begin{cases} 1 \; per \; n = 0,1..N-1 \\ 0 \; altrimenti \end{cases}$

  sequenza di durata N

- Sequenza triangolare $x_n = \begin{cases} N - |n| \; per - N < n < N \\ 0 \; altrimenti \end{cases}$

  sequenza di durata 2N-1

Segnali discreti

- Le operazioni sui segnali discreti sono analoghe a quelle si possono definire sui segnali continui

Per esempio la traslazione:

$$y_n = x_{n-M} \begin{cases} \rightarrow traslato\ verso\ destra\ se\ M > 0 \\ \rightarrow traslato\ verso\ sinistra\ se\ M < 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$y_n = \delta_{n-2}$$

Esempi di operazioni su sequenze

- $z_n = \sum_{k=1}^{3} \delta_{n+k}$
- $z_n = \sum_{k=1}^{3} k\delta_{n+2k}$

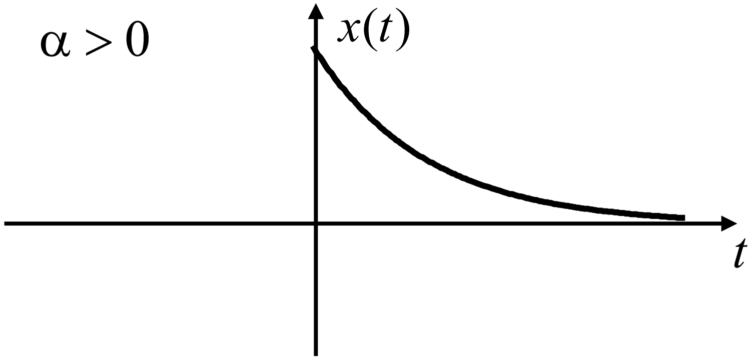
Energia di un segnale

- Definizione: $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \geq 0$
- Definizione: **Segnale di energia** $0 < \mathcal{E}_x < +\infty$
- Definizione: **Segnale impulsivo** $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$

Esempio: calcolo dell'energia di un segnale

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}u_{-1}(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

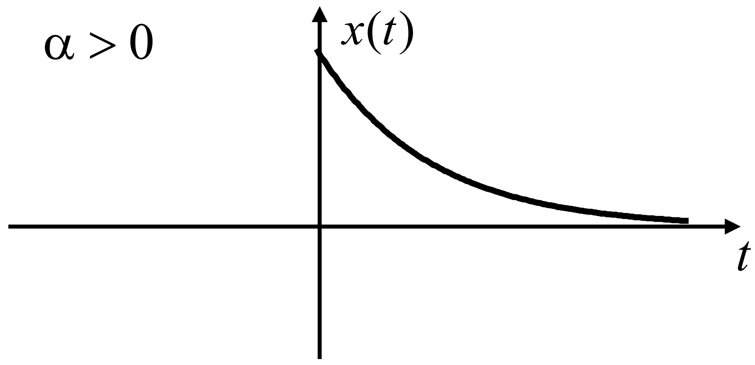
$\alpha > 0$



- Verificare se questo segnale è impulsivo e/o di energia

Esempio: calcolo dell'energia di un segnale

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}u_{-1}(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{E}_x = \int_0^{+\infty} \left(Ae^{-\alpha t}\right)^2 dt = A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{A^2}{-2\alpha} e^{-2\alpha t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{A^2}{2\alpha} \rightarrow$$ Segnale di energia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \int_0^{+\infty} Ae^{-\alpha t} dt = \frac{A}{-\alpha} e^{-\alpha t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{A}{\alpha} \rightarrow$$ Segnale impulsivo

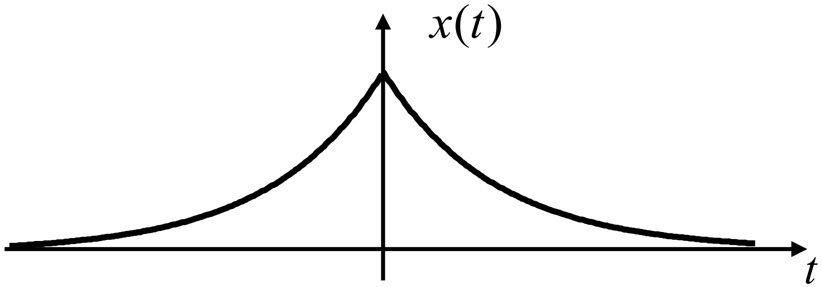
Esempio: calcolo dell'energia di un segnale

- Verificare se questo segnale è impulsivo e/o di energia

$$x(t) = Ae^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0$$

Esempio: calcolo dell'energia di un segnale

$$x(t) = Ae^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0$$



$$\mathcal{E}_x = \frac{A^2}{\alpha}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \frac{2A}{\alpha} \quad \rightarrow$$ Segnale impulsivo e di energia

Calcolare energia di una rect e una tri

Potenza di un segnale

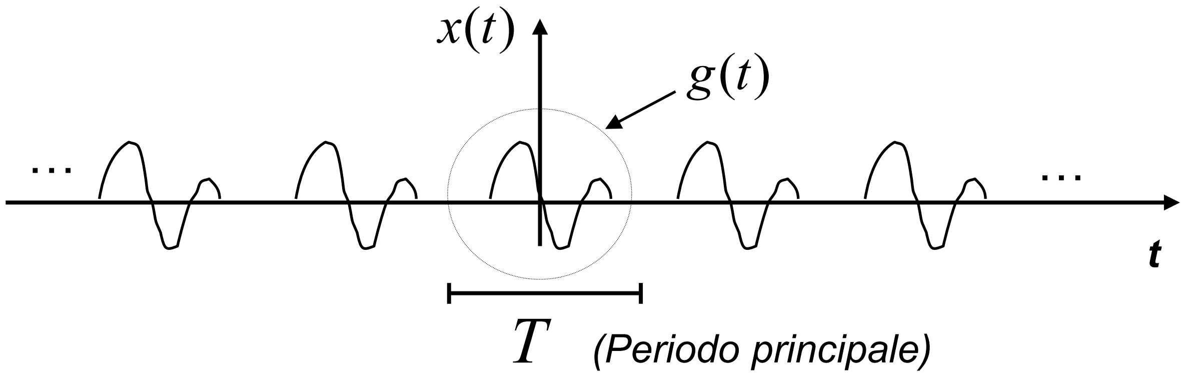
- ✓ Def: $$P_x = \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |x(t)|^2 \, dt \geq 0$$
- ✓ Def: Segnale di potenza $0 < P_x < +\infty$

<u>***Segnale constante:***</u> $x(t) = c$

$$P_x = \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |c|^2 \, dt = |c|^2 \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \Delta t = |c|^2$$

Segnale periodico

$$x(t) = x(t+nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t-nT) \qquad T \equiv periodo$$



✓ Potenza di un segnale periodico

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

✓ Un segnale periodico è un segnale di potenza

Esempio di calcolo della Potenza di un segnale

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi), \qquad T = 1/f_0$$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi)dt = \frac{A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}[1+\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)]dt =$$

$$= \frac{A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}dt + \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)dt =$$

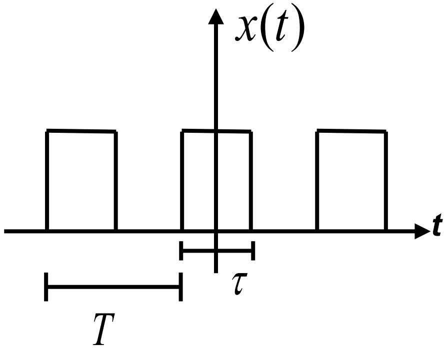
$$= \frac{A^2}{2T}\left(\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right) + 0 \quad \text{(il coseno ha area nulla)} \;= \frac{A^2}{2}$$

Segnali periodici

Treno di impulsi rettangolari:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} rect_{\tau}(t - nT)$$

$$\tau / T \equiv \text{"duty cycle"} \leq 1$$



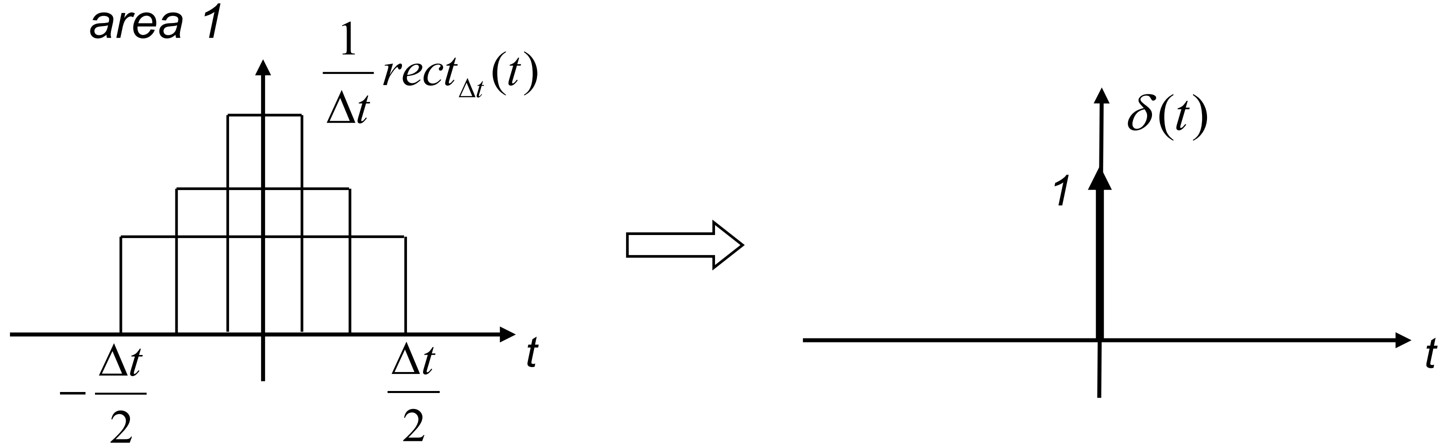
$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [rect_{\tau}(t - nT)]^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1^2 dt = \frac{1}{T}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{T}$$

Impulso matematico

- ✓ E’ un segnale di durata brevissima (al limite, zero) e di ampiezza elevatissima (al limite, infinita) con integrale unitario in un intervallo comprendente l’origine unitario

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{1}{\Delta t} rect_{\Delta t}(t)}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



Proprietà dell'impulso matematico

- ✓ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$ (l'impulso matematico ha area unitaria)
- ✓ $$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)dt = 1,$$ per ogni $\varepsilon > 0$
- ✓ $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$ (proprietà di campionamento)

Impulso matematico: esempio

- Calcolare $\int rect(t)\delta(t-1)\mathrm{dt}$

- Calcolare $\int 2rect(t)\delta\left(t-\frac{1}{4}\right)dt$

- Calcolare $\int tri(t)\delta(t)dt$

- Calcolare $\int tri(t)\delta\left(t+\frac{1}{4}\right)dt$

Valore medio di un segnale e di una sequenza

Segnale a durata finita

Il valore medio di un segnale continuo x(t) è calcolato come l'integrale del segnale diviso per la sua durata totale T=b-a:

- $\mu_x^I = \frac{1}{T}\int_a^b x(t)dt$

Definizione analoga per una sequenza:

- $\mu_x^I = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n$

Segnale a durata infinita

- $\mu_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$

- Definizione analoga per una sequenza
- $\mu_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\sum_{-N}^{N} x_n$

Valore medio di un segnale: esempi

- $x(t) = c$
- $x(t) = A sin(2\pi f t)$

Valore medio di un segnale: esempi

- $x(t) = c$
- $x(t) = Asin(2\pi f t)$
- $x_n = \begin{cases} 1\ per\ 0 \leq n \leq 3 \\ o\ altrimenti \end{cases}$

- $x(t) = rect(\frac{t}{2})$ nell'intervallo I=$[-1,1]$
- $x(t) = rect(t)$ nell'intervallo I=$[-1,1]$

Qual è il valore medio?

a) 0
b) 1
c) ½
Nessuno dei precedenti

Esempio di operazione su segnali e simmetria

$x(t) = \mathrm{tri}[(t+3) / 2] - \mathrm{tri} [(t-3) / 2]$