

Teoria dei Sistemi

Capitolo 1

Analisi nel dominio del tempo

1.1 Esempio di sistema lineare.Massa-Molla-Smorzatore

Dalla fisica sappiamo che un sistema massa-molla-smorzatore è costituito da una equazione del genere che descrive la forza agente nella direzione dello spostamento:

$$M\ddot{y}(t) + ky(t) + b\dot{y}(t) = u(t)$$

Prendendo come parametro di ingresso $u(t)$, assumendo come variabili di stato la posizione e la velocità della massa e come uscita la posizione della massa, avremo che

Posizione. $x_1(t) = y(t)$

Velocità. $x_2(t) = \dot{y}(t)$

Esprimendo il tutto con una rappresentazione lineare con lo stato del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & ; x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

avremo che

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = \frac{-k}{M}x_1(t) + \frac{-b}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

in cui le matrici varranno

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{M} & \frac{-b}{M} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Dal modello implicito a quello esplicito

- Un modello del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & ; x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

è detto **Modello implicito** del problema e o anche in forma differenziale. Questo modello è utile nel caso si voglia realizzare uno schema fisico del problema.

- Tuttavia al fine dell'analisi è necessario convertirlo nel suo equivalente **Modello esplicito** che non è altro che la soluzione del modello implicito:

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) = \Psi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau \end{cases}$$

- Ora possiamo verificare che effettivamente il modello esplicito sia soluzione di quello implicito. Consideriamo prima di tutto l'equazione omogenea associata a $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t)$, ovvero la $\dot{x}(t) = Ax(t)$. La sua soluzione sarà:

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Infatti lo sviluppo dell'esponenziale e^{At} è:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + A^3 \frac{t^3}{6} + \dots$$

La cui derivata^{1.1}:

$$\frac{d e^{At}}{dt} = 0 + A + A^2 t + A^3 \frac{t^2}{2} \dots = A \left(I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \dots \right) = A e^{At}$$

Da questo risultato possiamo dire che

$$x(t) = e^{At} x_0$$

è soluzione della

$$\dot{x}(t) = Ax(t) ; x(0) = x_0$$

- Possiamo dunque porre^{1.2}:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{At} \\ H(t) &= e^{At} B \\ \Psi(t) &= C e^{At} \\ W(t) &= C e^{At} B + D \delta(t) \end{aligned}$$

- E ottenere il sistema^{1.3}:

$$\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \\ y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) \end{cases}$$

- Ora verifichiamo che effettivamente, fatte queste sostituzioni, otteniamo la soluzione del sistema implicito. Per quanto riguarda la prima equazione^{1.4}:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t A e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + B u(t) \\ &= A \left(e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right) + B u(t) \\ &= A x(t) + B u(t) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda equazione:

$$\begin{aligned} y(t) &= C \left(e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d(\tau) \right) \\ &= C x(t) + D u(t) \end{aligned}$$

- Le equazioni del nostro modello esplicito sono chiaramente composte da due parti:
 - $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ sono le **evoluzioni libere** o *matrici di transizione* (nello stato e in uscita rispettivamente). Queste sono funzione di x_0 ovvero dipendono solo dalla variabile di stato e non dall'uscita.
 - $H(t)$, $W(t)$ sono le **evoluzioni forzate** o *matrici delle risposte impulsive* (nello stato e in uscita rispettivamente). Queste sono funzione dall'ingresso $u(t)$.

1.1. Qui indichiamo con I la matrice identità.

1.2. $\delta(t)$ è il delta di Dirac che è una funzione che vale 1 in t e 0 altrove.

1.3. Abbiamo sfruttato la proprietà dell'impulso unitario δ per la quale l'integrale di una funzione moltiplicata per δ è pari alla funzione nel punto in cui è centrato l'impulso.

1.4. Per un noto teorema abbiamo che la derivata di un integrale è uguale all'integrale della derivata più il termine integrando calcolato rispetto alla variabile di derivazione, ovvero: $\frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t x(\tau) d\tau \right) = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} x(\tau) d\tau + x(t)$

- Alcune caratteristiche del sistema ottenuto:
 - Per l'evoluzione forzata è applicabile il *principio di sovrapposizione degli effetti* ovvero l'evoluzione forzata totale è uguale alla somma delle evoluzioni forzate di tutti i singoli ingressi.
 - La matrice delle risposte impulsive $W(t)$, rappresenta la risposta del sistema quando l'ingresso $u(t) = \delta(t)$, ovvero quando si ha in ingresso un impulso unitario.
- Il *Problema della realizzazione* rappresenta tutto ciò che riguarda il passaggio dalla forma esplicita alla forma implicita, ovvero da un modello utile per l'analisi ad un modello utile per la realizzazione fisica del sistema.

1.3 L'evoluzione libera nello stato

1.3.1 Il problema dell'esponenziale di matrice

L'esponenziale di Matrice.

Il calcolo delle soluzioni di un sistema passa per il calcolo di e^{At} . Questo calcolo *risulta semplice se la matrice A è diagonale o diagonale a blocchi*. Infatti in questo caso si ha che:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Il problema quindi si sposta su come rendere diagonale una matrice non diagonale.

Richiami di algebra lineare.

Indipendenza lineare. I vettori $v_1 \dots v_k$ si dicono *linearmente indipendenti* se presa un'equazione del tipo $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$ con $a_1 \dots a_k$ scalari, questa risulta verificata solo se tutti i coefficienti sono uguali a 0.

Generatori. Un insieme finito o infinito di vettori di V si dice *insieme di generatori* di V se ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare di un numero finito di essi.

Base. Una *base* di uno spazio vettoriale V è un insieme di generatori di V linearmente indipendenti fra loro.

Coordinate. Fissata una base $B_{1,n} = (v_1 \dots v_n)$ di V , e preso un vettore $w \in V$, si ha che w si può scrivere in uno e un solo modo come combinazione lineare dei vettori di B $w = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. I coefficienti $x_1 \dots x_n$ sono detti *coordinate* del vettore w rispetto alla base B . Possiamo anche scrivere $w = B_{1,n} X_{n,1}$

Complemento algebrico. Si chiama complemento algebrico dell'elemento di matrice (quadrata) a_{ij} , e si indica con A_{ij} , il determinante della matrice ottenuta sopprimendo la i -esima riga e la j -esima colonna della matrice di partenza e moltiplicandolo per $(-1)^{i+j}$.

Matrice inversa. Una matrice A è invertibile se $\det(A) \neq 0$ e la sua inversa varrà

$$A^{-1} = \text{trasposta} \left(\frac{A^{ij}}{\det A} \right)$$

Ovvero si costruisce la matrice costituita dei complementi algebrici degli elementi a_{ij} dividendo ciascuno di essi per il determinante di A , e infine si traspone.

Operatore. Un'applicazione lineare $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *operatore* di \mathbb{R}^n .

Matrici Simili. Due matrici A, A' quadrate di ordine n , si dicono *simili* se esiste una matrice invertibile P di ordine n tale che $A' = P^{-1} A P$.

Operatori in basi diverse. Un operatore di \mathbb{R}^n si rappresenta rispetto a basi diverse con matrici simili.

Matrice diagonalizzabile. Una matrice A è *diagonalizzabile* se è simile ad una matrice diagonale, ovvero se esiste una P_n tale che $P^{-1}AP$ dia come risultato una matrice diagonale. Corrispondentemente un operatore T è diagonalizzabile se esiste una base in cui è rappresentato in forma diagonale.

Autovettori e Autovalori. Dato un operatore $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, un vettore $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ è detto *autovettore* di T se esiste un numero λ tale che

$$T(v) = \lambda v \quad \text{ovvero} \quad (A - \lambda I)v = 0$$

Il numero λ si dice *autovalore* di T . Gli *autovalori* sono una delle proprietà delle matrici che non cambiano con il cambiamento di base (come ad esempio il determinante).

Polinomio caratteristico. E' il polinomio ottenuto da

$$\det(\lambda I_n - A_n) = 0$$

Dove A_n è la matrice associata ad un operatore T , e λ sono gli autovalori di T . Questa equazione permette di calcolare gli autovalori associati ad un operatore.

Moleplicità algebrica. TODO

Molteplicità geometrica. TODO

Esponenziale di Matrice con A Diagonalizzata. Il problema di fondo per diagonalizzare la matrice A è chiedersi: esiste una matrice T tale che TAT^{-1} risulti diagonale? Una volta trovata questa matrice potremmo scrivere:

$$\Lambda = TAT^{-1} \Rightarrow A = T^{-1}\Lambda T$$

$$e^{At} = e^{T^{-1}\Lambda T t}$$

E ricordando la definizione di esponenziale di matrice:

$$e^{T^{-1}\Lambda T t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (T^{-1}\Lambda T)^k$$

E sapendo che

$$(T^{-1}\Lambda T)^k = T^{-1}\Lambda^k T$$

Possiamo scrivere

$$e^{At} = T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Lambda^k \right) T = \boxed{T^{-1}(e^{\Lambda t})T}$$

Il problema successivo è *diagonalizzare A tramite un cambiamento di coordinate*.

1.3.2 Modi naturali aperiodici

Esponenziale di matrice nel caso di autovalori reali e distinti. Il primo caso che ci si presenta nella diagonalizzazione, è quando gli autovalori di A sono reali e distinti. In questo caso infatti questi concidono con gli autovalori della matrice $\Lambda = TAT^{-1}$, quindi possiamo dire che la matrice Λ sarà formata dagli autovalori di A

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ma noi sappiamo per la definizione di autovalore e autovettore che $Au_n = u_n\lambda_n$ ovvero, in forma matriciale

$$A \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & \dots & u_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & \dots & u_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$AU = U\Lambda$$

$$U^{-1}AU = \Lambda$$

In base a quanto detto precedentemente dobbiamo trovare un T tale che $\Lambda = TAT^{-1}$ sia diagonale, ebbene, questa matrice è proprio la matrice

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & \dots & \rightarrow \\ \leftarrow & v_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Dunque effettuando il calcolo di esponenziale di matrice, otteniamo

$$e^{At} = T^{-1}e^{\Lambda t}T = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & \dots & u_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & & \rightarrow \\ \leftarrow & v_n & \rightarrow \end{pmatrix} = \boxed{\sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v_i}$$

che è proprio il risultato voluto. Questo ci permette di calcolare l'evoluzione libera nello stato

$$x(t) = e^{At}x_0 = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v_i x_0 = \boxed{\sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} u_i} \quad \text{con } c = v_1 x_0$$

Questa evoluzione libera prende il nome di **modo naturale aperiodico**.

Considerazioni.

- Questa evoluzione è la somma di n termini distinti corrispondenti a evoluzioni lungo gli autovettori u_n .
- La traiettoria generale dello stato è confinata all'interno di un sottospazio generato dagli autovettori u_n . La proiezione di questa traiettoria sugli autovettori è nella forma $c_i e^{\lambda_i t}$.
- Nel caso particolare (ed esemplificativo) di $n=1$ si avrà che la traiettoria sarà confinata sulla direzione dell'autovettore u_1 e se

$\lambda > 0$. l'evoluzione sarà divergente

$\lambda = 0$. si rimane nello stato iniziale

$\lambda < 0$. si ha un moto convergente verso l'origine

La costante di tempo. Vogliamo ora trovare un parametro per caratterizzare la velocità con cui il sistema evolve. Indicheremo questo parametro con

$$\tau_i = -\frac{1}{\lambda_i}$$

che prenderà il nome di *costante di tempo*. Più è grande questo parametro più sarà lento il modo naturale associato all'autovalore i -esimo.

Esercizio 1.1. Calcolare la risposta libera nello stato per un sistema tempo continuo in cui la matrice dinamica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per prima cosa calcoliamo gli autovalori di A

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) - 4 + 2(1-\lambda) + 2(1+\lambda) \\ &= -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) - 4 + 2 - 2\lambda + 2 + 2\lambda \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1 \end{aligned}$$

Ora calcoliamo gli autovettori sinistri corrispondenti ai singoli autovalori e successivamente quelli destri

• u_1

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)u_1 &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} a+c \\ -2a-b-c \\ 2a+2b \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ -2a-b-c=0 \\ 2a+2b=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c=-a \\ -a-b=0 \\ 2a+2b=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c=-a \\ a=-b \\ b=? \end{cases} \longrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• u_2

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)u_2 &= 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} c \\ -2a-2b-c \\ 2a+2b-c \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c=0 \\ -2a-2b=0 \\ 2a+2b=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-b \\ a=-b \end{cases} \longrightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• u_3

$$\begin{aligned} (A - \lambda_3 I)u_3 &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2a+c \\ -2a-c \\ 2a+2b+c \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2a+c=0 \\ -2a-c=0 \\ 2a+2b+c=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c=-2a \\ c=-2a \\ 2b=0 \end{cases} \longrightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Mentre gli autovalori destri si calcoleranno imponendo la condizione di ortonormalità con quelli sinistri.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} &= (u_1 \ u_2 \ u_3)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque, ora sappiamo che in caso di autovalori reali e distinti si ha che la matrice di transizione nello stato sarà

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{i=1}^3 e^{\lambda_i t} u_i v_i^T \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3.3 Modi naturali pseudoperiodici

Esponenziale di matrice nel caso di autovalori complessi coniugati, distinti. Il secondo caso particolare in cui possiamo agevolmente diagonalizzare la matrice A è quando questa possiede anche autovalori complessi coniugati e distinti. Supponiamo che la matrice A possieda

- μ autovalori reali nella forma $\lambda_1 \dots \lambda_\mu$
- 2ν autovalori complessi coniugati nella forma $(\alpha_1 \pm j\omega_1) \dots (\alpha_\nu \pm j\omega_\nu)$. In questo caso, il generico autovettore sarà indicato come $u = u_a + ju_b$.

in questo caso la matrice diagonalizzata che chiameremo \tilde{A} sarà così costituita

$$\tilde{A} = T A T^{-1} = \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & \dots & \rightarrow \\ \leftarrow & v_\mu & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{1a} & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{1b} & \rightarrow \\ \leftarrow & \dots & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{\nu a} & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{\nu b} & \rightarrow \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & \dots & u_\mu & u_{1a} & u_{1b} & \dots & u_{\nu a} & u_{\nu b} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_\mu & & & & & \\ & & & \alpha_1 & \omega_1 & & & \\ & & & -\omega_1 & \alpha_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_\nu & \omega_\nu \\ & & & & & & -\omega_\nu & \alpha_\nu \end{pmatrix}$$

Per proseguire nel calcolare $e^{\tilde{A}t}$ abbiamo bisogno di saper calcolare l'esponenziale $e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}t}$. Per fare ciò partiamo col fare alcune considerazioni

- $e^{(A_1+A_2)t} = e^{A_1t}e^{A_2t}$ se e solo se le matrici commutano nel prodotto, ovvero $A_1A_2 = A_2A_1$

Nel nostro caso avremo

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} = A_1 + A_2$$

$$A_1A_2 = (\alpha I)A_2 = \alpha A_2 = A_2\alpha = A_2(\alpha I) = A_2A_1$$

quindi possiamo dire che

$$\begin{aligned} e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}t} &= e^{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}t} e^{\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}t} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} I \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato la formula di eulero $e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta$ che confrontata con il nostro generico autovalore complesso coniugato $\lambda = \alpha + j\omega = \cos\theta + j \sin\theta$ abbiamo ottenuto che $\alpha = \cos\theta, \omega = \sin\theta$.

Dunque abbiamo la matrice diagonalizzata \tilde{A} , abbiamo l'esponenziale di $e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}t}$, ora possiamo calcolare l'esponenziale di e^{At} :

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & e^{\lambda_\mu} & & & & & & \\ & & & e^{\alpha_1 t} \cos \omega_1 t & e^{\alpha_1 t} \sin \omega_1 t & & & & \\ & & & -e^{\alpha_1 t} \sin \omega_1 t & e^{\alpha_1 t} \cos \omega_1 t & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & e^{\alpha_\nu t} \cos \omega_\nu t & e^{\alpha_\nu t} \sin \omega_\nu t & \\ & & & & & & -e^{\alpha_\nu t} \sin \omega_\nu t & e^{\alpha_\nu t} \cos \omega_\nu t & \end{pmatrix}$$

Ora possiamo calcolare e^{At} :

$$e^{At} = T^{-1} e^{\tilde{A}t} T = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & \dots & u_\mu & u_{1a} & u_{1b} & \dots & u_{\nu a} & u_{\nu b} & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} e^{\tilde{A}t} \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & \dots & \rightarrow \\ \leftarrow & v_\mu & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{1a} & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{1b} & \rightarrow \\ \leftarrow & \dots & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{\nu a} & \rightarrow \\ \leftarrow & v_{\nu b} & \rightarrow \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{\mu} e^{\lambda_i t} u_i v_i + \sum_{k=1}^{\nu} e^{\alpha_k t} [\cos \omega_k t (u_{ka} v_{ka} + u_{kb} v_{kb}) + \sin \omega_k t (u_{ka} v_{kb} - u_{kb} v_{ka})]$$

L'evoluzione libera nello stato. Ora che abbiamo e^{At} possiamo calcolare l'evoluzione libera semplicemente moltiplicando per x_0

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i e^{\lambda_i t} u_i + \sum_{k=1}^{\nu} m_k e^{\alpha_k t} (\sin(\omega_k t + \varphi_k) u_{ka} + \cos(\omega_k t + \varphi_k) u_{kb})$$

$$m_k = \sqrt{c_{ka}^2 + c_{kb}^2}$$

$$c_{ka} = v_{ka} x_0 \quad c_{kb} = v_{kb} x_0$$

$$\sin \varphi_k = \frac{c_{ka}}{m_k} \quad \cos \varphi_k = \frac{c_{kb}}{m_k}$$

L'evoluzione libera risulta così costituita da μ *modi naturali aperiodici* e ν evoluzioni che avvengono nei piani generati da u_a e u_b che prendono il nome di **modi naturali pseudoperiodici**.

Considerazioni.

- L'evoluzione dei modi pseudoperiodici è sempre esponenziale ma **con componenti periodiche** seno e coseno lungo le due direzioni individuate dai corrispondenti autovettori (u_a, u_b)
- Possibili traiettorie del moto pseudoperiodico

TODO

Figura 1.1.

- Leggi temporali del modo pseudoperiodico

Pulsazione naturale. La pulsazione naturale è un parametro funzione di ω e α definito come

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

ω_n rappresenta la pulsazione che avrebbe il sistema se non ci fosse la parte reale ($\alpha = 0$).

Smorzamento. Introduciamo ora un parametro, definito come

$$\xi = \sin \theta = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

che chiameremo smorzamento. Questo parametro rappresenta l'attenuazione a cui è soggetto il processo oscillatorio del sistema. In base al valore dello smorzamento, inoltre possiamo intuire alcune caratteristiche del sistema:

$\xi = \pm 1$. autovalori reali coincidenti, nessun fenomeno oscillatorio.

$\xi = 0$. autovalori immaginari puri, moto oscillatorio puro.

$-1 < \xi < 0$. modo pseudoperiodico divergente

$0 < \xi < 1$. modo pseudoperiodico convergente

1.3.4 I modi naturali: Conclusioni

Utilità dei modi naturali. La conoscenza della collocazione degli autovalori sul piano complesso, consente di risalire all'andamento delle evoluzioni del sistema.

Schema riepilogativo.

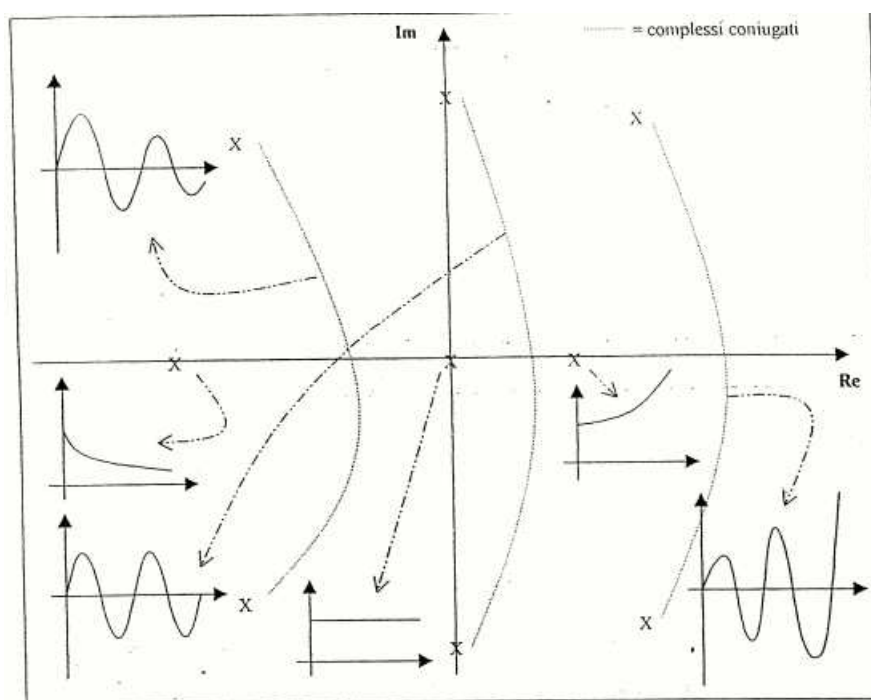


Figura 1.2. I modi naturali

1.3.5 I modi naturali nell'evoluzione libera in uscita e in quelle forzate

Modi eccitabili. Analizziamo ora il caso in cui l'equazione di stato sia costituita solamente dalla evoluzione forzata. A differenza dell'evoluzione libera, che è caratterizzata da "tutti" i modi naturali, l'evoluzione forzata dipende da un sottoinsieme dei modi naturali associati alla matrice A . Osserviamo, infatti l'evoluzione forzata nello stato, a fronte di un ingresso costituito da un impulso di Dirac

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \delta(\tau) d\tau = e^{At} B = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v_i B$$

si può notare come l' i -esimo modo può comparire nella sommatoria se e solo se

$$v_i B \neq 0$$

Chiameremo i modi che soddisfano questa condizione, **eccitabili** (con impulsi in ingresso).

Modi osservabili. Lo stesso discorso può essere fatto per l'evoluzione libera in uscita. In questo caso abbiamo che

$$Ce^{At} = \sum_{i=1}^n Ce^{\lambda_i t} u_i v_i$$

l' i -esimo modo comparirà nell'equazione d'uscita se e solo se

$$Cu_i \neq 0$$

Chiameremo questi modi **osservabili**.

La risposta forzata in uscita. Resta da domandarsi quali leggi temporali influiscano sulla risposta forzata in uscita. Dalla

$$Ce^{At}B = \sum_{i=1}^n Ce^{\lambda_i t} u_i v_i B$$

è facile notare che i modi che compaiono nell'equazione della $W(t)$ sono quelli sia eccitabili che osservabili.

Capitolo 2

Analisi nel dominio complesso

2.1 Dal dominio del tempo al dominio complesso

2.1.1 La trasformata di Laplace

La trasformata. La trasformata di Laplace associa ad una funzione $f(t)$ definita per $t \in [0, \infty)$, la funzione $F(s)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Proprietà della trasformata.

Derivata. $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$

Linearità. $\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{L}[f_1(t)] + \beta \mathcal{L}[f_2(t)]$

Traslazione nel tempo. $\mathcal{L}[f(t-a)\delta_{-1}(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)] = e^{-as}F(s)$

Trasformate di funzioni elementari.

Funzione nel tempo	Trasformata
impulso unitario $\delta(t)$	1
gradino unitario $u_0(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
e^{At}	$(sI - A)^{-1}$
$e^{\alpha t}f(t)$	$F(s - \alpha)$

2.1.2 Applicazione alla rappresentazione implicita

Trasformata della rappresentazione implicita. Applichiamo ora la trasformata di Laplace alla rappresentazione implicita di un sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s)(sI - A) = x(0) + BU(s) \\ \dots \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \end{cases}}$$

Siamo riusciti ad eliminare i termini integro-differenziali! Questa non è altro che la rappresentazione esplicita nel dominio complesso del sistema dato. Ovvero, la trasformata di Laplace del sistema esplicito nel dominio del tempo.

Le evoluzioni nel dominio complesso. Da quello visto finora possiamo fare delle comparazioni dirette con il sistema esplicito nel dominio del tempo ottenendo:

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \mathcal{L}[e^{At}] &= (sI - A)^{-1} \\ \psi(s) &= \mathcal{L}[Ce^{At}] &= C(sI - A)^{-1} \\ H(s) &= \mathcal{L}\left[\int_0^t e^{A(t-\tau)}B d\tau\right] &= (sI - A)^{-1}B \\ W(s) &= \mathcal{L}\left[\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B + D\right] &= \boxed{C(sI - A)^{-1}B + D}\end{aligned}$$

dove abbiamo supposto che^{2.1}

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$$

Da queste relazioni ricaviamo una importantissima funzione detta **funzione di trasferimento** rappresentata dal termine $W(s)$.

Il metodo alternativo. Quanto visto sino ad ora fornisce un metodo alternativo per il calcolo delle risposte ovvero per il passaggio alla rappresentazione esplicita. Basta infatti portare il sistema nel dominio complesso (trasformare gli ingressi, le evoluzioni libere e forzate), eseguire i calcoli, e antitrasformare. Quest'ultima operazione, come vedremo nell'analisi della funzione di trasferimento, è molto semplice in presenza di particolari ingressi, che permette l'espansione in fratti semplici.

2.2 La funzione di trasferimento

2.2.1 Un modello della risposta forzata

La funzione di trasferimento e la risposta forzata. Abbiamo visto come la funzione di trasferimento consenta di risalire ad una qualsiasi risposta forzata, dato un ingresso. Si ha infatti

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)]$$

E' anche vero, però, che data la risposta forzata ad un ingresso, noi siamo in grado di risalire alla funzione di trasferimento del sistema:

$$W(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}$$

Che nel caso particolare in cui l'ingresso sia dato da un impulso $\delta(t)$ abbiamo:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \longrightarrow W(s) = Y_f(s)$$

Il metodo sperimentale. Quanto visto sino ad ora ci permette di definire un metodo sperimentale per ricavare la funzione di trasferimento di un sistema. Questo metodo anche detto a "scatola nera" consiste nel fornire determinati ingressi al sistema e registrarne le risposte impulsive. In un sistema con più ingressi e più uscite si tratta di ricomporre la matrice delle funzioni di trasferimento

$$W(s) = \begin{pmatrix} W_{11} & \dots & W_{1p} \\ W_{q1} & \dots & W_{qp} \end{pmatrix}$$

analizzando il comportamento di q esperimenti ingresso-uscita del sistema. Per il generico esperimento, si ha infatti:

$$y_i = W_{i1}U_1 + \dots + W_{ip}U_p \longrightarrow W_{ij} = \frac{y_i}{U_j}$$

2.1. Teorema della convoluzione

2.2.2 La FT come funzione razionale propria: poli e zeri

La funzione di trasferimento come funzione razionale propria. Ricordando la definizione di $W(s)$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

possiamo scrivere, nel caso di 1 ingresso e 1 uscita

$$W(s) = C \frac{(sI - A)^T}{\det(sI - A)} B + D$$

Possiamo dire che questa rappresenta una *funzione razionale al massimo propria*, ovvero il grado del polinomio a numeratore può essere al massimo uguale a quello del denominatore (gradoN \leq gradoD) (questo a causa di alcune semplificazioni).

Molteplicità algebrica e geometrica. Poichè il calcolo di $W(s)$ si riduce al calcolo di $(sI - A)^{-1}$ possiamo dire che

$$(sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)^T}{|sI - A|} = \frac{E(s)}{(s - \lambda_1)^{m_1} \dots (s - \lambda_r)^{m_r}} = \frac{E(s)}{m(s)}$$

dove abbiamo indicato con $E(s)$ la matrice ottenuta dalla semplificazione con $|sI - A|$ e con $m(s)$ il polinomio minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore (polinomio minimo). Notiamo che in questo polinomio gli autovalori compaiono con molteplicità m_i minore o uguale alla molteplicità algebrica associata agli autovalori ottenuti dal polinomio caratteristico; chiameremo questa molteplicità, *molteplicità geometrica*.

Poli. Si chiamano poli di una funzione di trasferimento

- Gli zeri del polinomio a denominatore nel caso un cui $q = p = 1$
- Gli zeri del polinomio minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore nel caso generale

I poli corrispondono agli autovalori che compaiono nella funzione di trasferimento e quindi i cui modi sono contemporaneamente *eccitabili ed osservabili*, dunque $\text{Poli} \subseteq \text{Autovalori}$. Questo, come vedremo in seguito, si traduce in una “incompletezza” da parte della funzione di trasferimento nel descrivere il comportamento del sistema.

Zeri. Si dicono zeri della funzione di trasferimento

- Gli zeri del polinomio a numeratore nel caso $q = p = 1$
- Gli zeri comuni ai determinanti delle matrici polinomiali, di dimensione pari al minimo tra p e q , che si ottengono considerando tutte le combinazioni di q colonne tra le p disponibili se $q < p$, che si ottengono considerando tutte le combinazioni di p righe tra le q disponibili nel caso $p < q$.

2.2.3 Un modello “parziale” del comportamento dinamico del sistema

Rappresentatività della FT. Come abbiamo già detto, la FT è rappresentativa di tutti e soli i modi che sono simultaneamente eccitabili e osservabili

Esercizio 2.1. Supponiamo di avere un sistema caratterizzato dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; C = (1 \ 0)$$

Il polinomio caratteristico della matrice A sarà

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

che ha come autovalori

$$\lambda_1 = -1 \quad e \quad \lambda_2 = 1$$

Ora vogliamo calcolare quali modi sono rappresentativi per la funzione di trasferimento.

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \\ H(s) &= (sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{pmatrix} 0 \\ s+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ s-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ H(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \psi(s) &= C(sI - A)^{-1} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{pmatrix} s-1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s+1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \psi(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Come si nota dai risultati possiamo dire che

- Nella risposta forzata nello stato $H(t)$ abbiamo un solo modo rappresentativo $e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = 1$. Quindi il modo e^{-t} NON è eccitabile in ingresso.
- Nella risposta libera in uscita $\psi(t)$ abbiamo un solo modo rappresentativo $e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi il modo e^t NON è osservabile in uscita.
- Dalle precedenti affermazioni deduciamo che il sistema analizzato non ha poli. In particolare la funzione di trasferimento è NULLA poichè nessun modo è sia osservabile che eccitabile.

2.2.4 Le rappresentazioni della funzione di trasferimento

Rapporto di polinomi.

$$W(s) = \frac{B_0 + B_1s + \dots + B_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + s^N}$$

dove B_i sono opportune matrici di coefficienti.

Esercizio 2.2. Riscrivere la seguente funzione di trasferimento in forma di rapporto di polinomi

$$\begin{aligned} W(s) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{s(s+2)} \\ \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s(s+2)}{s(s+1)} & \frac{(s-1)(s+1)}{0} \\ \frac{s(s+1)}{s(s+2)} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{s(s+1)(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 2s} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} s^2 + 2s & s^2 - 1 \\ s^2 + s & 0 \end{pmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}s + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}s^2}{s^3 + 3s^2 + 2s} \end{aligned}$$

2.3 Analisi della risposta forzata: sviluppo in fratti semplici

2.3.1 Lo sviluppo in fratti semplici

La decomposizione in fratti semplici. Abbiamo detto che la funzione di trasferimento, e quindi, la risposta forzata ad essa associata rappresenta una funzione strettamente propria ($\text{grado}N \leq \text{grado}D$) esprimibile come:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

con $m < n$ e con p_n =poli. Questa forma ammette lo sviluppo in fratti semplici, che a noi servirà per *semplificare* (di molto) *il calcolo dell'antitrasformata*. In particolare noi analizzeremo 2 casi: quello in cui la molteplicità geometrica dei poli è uguale ad 1 e quello in cui è maggiore di 1.

Caso poli semplici. In questo caso possiamo decomporre come:

$$F(s) = \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \dots + \frac{R_n}{s - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - p_i}$$

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} [(s - p_i)F(s)]$$

Caso poli multipli. In questo caso possiamo decomporre come:

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{k_i} \frac{R_{ik}}{(s - p_i)^k}$$

$$R_{ik} = \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ \frac{1}{(k_i - k)!} \cdot \frac{d^{k_i - k}}{ds^{k_i - k}} [(s - p_i)^{k_i} F(s)] \right\}$$

2.3.2 Calcolo della risposta forzata, dato un ingresso e la funzione di trasferimento

Esercizio 2.3. (Con poli semplici) Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 4 & s+5 \end{vmatrix} = s(s+5) - 4 = s^2 + 5s + 4$$

$$\rightarrow (\text{compl. alg. } (sI - A)^t = \begin{pmatrix} s+5 & -4 \\ 1 & s \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{pmatrix})$$

$$\rightarrow C(sI - A)^t B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

quindi

$$W(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} \cdot C(sI - A)^t B = \frac{1/3}{(s^2 + 5s + 4)}$$

Vogliamo trovare la risposta forzata al gradino unitario $\delta_{-1}(t)$

$$\rightarrow \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{1/3}{(s^2 + 5s + 4)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow (s^2 + 5s + 4)s = 0 \implies p_{12} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \implies p_1 = -4; p_2 = -1; p_3 = 0$$

Espandendo in fratti semplici otteniamo

$$\rightarrow Y_f(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+4} + \frac{R_3}{s}$$

$$\rightarrow R_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \left[(s+1) \frac{1/3}{(s+1)(s+4)s} \right] = \frac{1}{(s+4)3s} = -\frac{1}{9}$$

$$\rightarrow R_2 = \lim_{s \rightarrow -4} \left[(s+4) \frac{1/3}{(s+1)(s+4)s} \right] = \frac{1}{(s+1)3s} = \frac{1}{36}$$

$$\rightarrow R_3 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1/3}{(s+1)(s+4)s} \right] = \frac{1}{(s+1)(s+4)3} = \frac{1}{12}$$

$$\rightarrow Y_f(s) = -\frac{1}{9(s+1)} + \frac{1}{36(s+4)} + \frac{1}{12s}$$

Ora che abbiamo semplificato la nostra funzione possiamo procedere con l'antitrasformazione

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = -\frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{36}e^{-4t} + \frac{1}{12}\delta_{-1}(t) = Y_f(t)$$

Esercizio 2.4. (Poli Multipli) TODO

Capitolo 3

Studio del comportamento in frequenza

3.1 Il regime permanente

3.1.1 La risposta a regime permanente

Definizione. La risposta a regime permanente è quella funzione del tempo alla quale tende ad assestarsi la risposta in uscita ed è:

- Indipendente dallo stato iniziale x_0
- Dipendente dall'ingresso applicato

Ricalcando la definizione, saremmo tentati a porre

$$y_r(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$$

tuttavia, così facendo elimineremmo la dipendenza dal tempo, dunque l'approccio corretto è quello di porre

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} y(t)$$

ovvero:

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Condizioni per la presenza della risposta a RP. E' necessario che gli autovalori del sistema con molteplicità geometrica pari a 1 siano a parte reale minore o uguale a zero, mentre quelli con molteplicità geometrica maggiore di 1 devono essere a parte reale strettamente negativa. Questo, come si vedrà in seguito, equivale a dire che il sistema deve essere stabile semplicemente.

Il transitorio e il permanente. In definitiva potremmo scomporre la risposta in uscita in due parti, una transitoria e una permanente

$$y(t) = y_t(t) + y_r(t)$$

che è una scomposizione complementare a quella in evoluzione libera e forzata, tuttavia possiamo affermare che la risposta a regime è la parte persistente della risposta forzata, mentre la risposta libera è parte del transitorio.

3.1.2 Il regime permanente ad ingressi canonici

L'ingresso canonico. Si definisce ingresso canonico di ordine k l'ingresso:

$$u(t) = \frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)$$

la cui trasformata di Laplace vale:

$$U(s) = \frac{1}{s^{k+1}}$$

Studio della risposta a regime. Consideriamo una risposta forzata di un sistema con un ingresso di tipo canonico:

$$\begin{aligned} y_f(t) &= W(s)U(s) \\ &= W(s) \frac{1}{s^{k+1}} \\ &= \left(\frac{R_1}{(s-p_1)} + \frac{R_2}{(s-p_2)} + \dots + \frac{R_n}{(s-p_n)} \right) + \frac{A_0 + A_1 s + \dots + A_k s^k}{s^{k+1}} \end{aligned}$$

Dove i coefficienti A_i sono i coefficienti a numeratore della $W(s)$ non scomposta in fratti. Ora antitrasformando otterremo:

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{A_0 + A_1 s + \dots + A_k s^k}{s^{k+1}} \right) + \sum_{i=1}^n R_i e^{p_i t}$$

Osservando questo ultimo risultato si evince che avendo i poli p_i parte reale negativa (per ipotesi), il contributo isoltanti dalla moltiplicazione della $W(s)$ non scomposta in fratti con la $U(s)$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n R_i e^{p_i t} = 0$$

dunque

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{A_0 + A_1 s + \dots + A_k s^k}{s^{k+1}} \right) \Rightarrow y_f(s) = \frac{W(s)}{s^{k+1}} = \frac{A_0 + A_1 s + \dots + A_k s^k}{s^{k+1}} = \sum_{i=0}^k \frac{A_i s^i}{s^{k+1}}$$

da cui possiamo ricavare i coefficienti A_k che valgono (perche???):

- $A_0 = \frac{W(s)}{s^{k+1}} s^{k+1} \Big|_{s=0} = W(0) = K$ (**Guadagno** della funzione di trasferimento)
- $A_1 = \frac{d}{ds} \left(\frac{W(s)}{s^{k+1}} s^{k+1} \right) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} W(s) \Big|_{s=0}$
- \vdots
- $A_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} W(s) \Big|_{s=0}$

E, antitrasformando:

$$y_r(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{A_0 + A_1 s + \dots + A_k s^k}{s^{k+1}} \right) = \boxed{A_0 \frac{t^k}{k!} + A_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + A_k}$$

Dunque il calcolo della risposta a regime permanente si riduce al calcolo dei coefficienti A_k .

Teorema del valore finale. Viene presentato ora un teorema che può tornar utile nel calcolo della risposta a regime, esso prende il nome di Teorema del valore finale e dice che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s W(s)$$

questa relazione è valida se e solo se la $s W(s)$ è una funzione analitica, ovvero tale che ha i tutti poli con parte reale negativa.

3.1.3 La risposta indiciale

L'ingresso a gradino. La risposta forzata all'ingresso a gradino è detta risposta indiciale. Posto

$$u(t) = \delta_{-1}(t)$$

avremo che la risposta forzata in s varrà:

$$y_f(s) = W(s) \frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \dots + \frac{A_n}{s-p_n}$$

e antritrasformando

$$y_f(t) = A_0 \delta_{-1}(t) + \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} \delta_{-1}(t)$$

dove, anche in questo caso, essendo $\text{Re}(p_i) < 0$ avremo che

$$\boxed{y_r(t) = A_0 \delta_{-1}(t) = W(0) \delta_{-1}(t)}$$

ovvero, la risposta a regime permanente è un valore costante pari al guadagno.

Esercizio 3.1. (Massa-Molla-Smorzatore) Calcolare la risposta indiciale del sistema seguente

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{b}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Partiamo con l'individuare le matrici A,B,C:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & \frac{b}{M} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0)$$

Ora possiamo calcolare la funzione di trasferimento

$$\begin{aligned} W(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{M} & s + \frac{b}{M} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s\left(\frac{s+b}{M}\right) + \frac{k}{M}} (1 \ 0) \begin{pmatrix} s + \frac{b}{M} & -\frac{k}{M} \\ 1 & s \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s\left(\frac{s+b}{M}\right) + \frac{k}{M}} (1 \ 0) \begin{pmatrix} s + \frac{b}{M} & 1 \\ -\frac{k}{M} & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s\left(\frac{s+b}{M}\right) + \frac{k}{M}} \left(s + \frac{b}{M} \ 1\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s\left(\frac{s+b}{M}\right) + \frac{k}{M}} \cdot \frac{1}{M} \\ &= \frac{\frac{1}{M}}{s^2 \frac{1}{M} + s \frac{b}{M} + \frac{k}{M}} \end{aligned}$$

Da cui

$$W(0) = \frac{1}{k}$$

$$y_{rp}(t) = \frac{1}{k} \delta_{-1}(t)$$

3.1.4 La risposta ad ingressi periodici

Ingresso periodico e Risposta a regime. Prendiamo ora il caso di un ingresso periodico del tipo

$$u(t) = \sin \bar{\omega} t = \frac{e^{j\bar{\omega}t} - e^{-j\bar{\omega}t}}{2j}$$

Potremmo scomporre questo segnale in due parti

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

e utilizzando la sovrapposizione degli effetti possiamo calcolare la risposta a regime prendendo prima un sotto-segnale e poi l'altro e poi facendo la somma dei risultati

$$y_r(t) = y_{r1}(t) + y_{r2}(t)$$

Partiamo dal primo termine

$$y_{r1}(t) = \frac{1}{2j} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) e^{j\bar{\omega}\tau} d\tau$$

ponendo

$$\begin{aligned}\vartheta &= t - \tau \\ d\vartheta &= -d\tau \\ \tau &= t - \vartheta\end{aligned}$$

avremo che

$$\begin{aligned}\text{per } \tau \rightarrow -\infty & \text{ si ha } \vartheta \rightarrow \infty \\ \text{per } \tau \rightarrow t & \text{ si ha } \vartheta \rightarrow 0\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}y_{r1}(t) &= \frac{1}{2j} \left[- \int_{+\infty}^0 W(\vartheta) e^{j\bar{\omega}(t-\vartheta)} d\vartheta \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} W(\vartheta) e^{j\bar{\omega}(t-\vartheta)} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2j} e^{j\bar{\omega}t} \int_0^{+\infty} W(\vartheta) e^{j\bar{\omega}\vartheta} d\vartheta\end{aligned}$$

Confrontando tale termine con la formula della trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} W(\vartheta) e^{j\bar{\omega}\vartheta} d\vartheta$$

notiamo che è proprio la trasformata della risposta impulsiva, dunque il termine vale

$$= W(s)|_{s=j\bar{\omega}}$$

e quindi

$$y_{r1}(t) = \frac{1}{2j} e^{j\bar{\omega}t} \cdot W(j\bar{\omega})$$

Lo stesso procedimento può essere fatto per l'altro sotto-segnale, ottenendo

$$y_{r2} = -\frac{1}{2j} e^{-j\bar{\omega}t} \cdot W(-j\bar{\omega})$$

Ricordando alcune proprietà delle funzioni complesse di variabile reale avremo che

- $W(-j\omega) = W^*(j\omega)$
- $W(j\omega) = M(\omega) e^{j\phi(\omega)}$ (Modulo e fase)

e grazie a queste proprietà possiamo scrivere

$$\begin{cases} W(j\bar{\omega}) = M(\bar{\omega}) e^{j\phi(\bar{\omega})} \\ W(-j\bar{\omega}) = M(\bar{\omega}) e^{-j\phi(\bar{\omega})} \end{cases}$$

Il risultato totale della risposta a regime permanente sarà dunque:

$$\begin{aligned}y_r(t) &= y_{r1}(t) + y_{r2}(t) \\ &= \frac{1}{2j} e^{j\bar{\omega}t} \cdot M(\bar{\omega}) e^{j\phi(\bar{\omega})} - \frac{1}{2j} e^{-j\bar{\omega}t} \cdot M(\bar{\omega}) e^{-j\phi(\bar{\omega})} \\ &= \frac{M(\bar{\omega})}{2j} \left[e^{j[\bar{\omega}t + \phi(\bar{\omega})]} - e^{-j[\bar{\omega}t + \phi(\bar{\omega})]} \right] \\ &= \boxed{M(\bar{\omega}) \sin(\bar{\omega}t + \phi(\bar{\omega}))}\end{aligned}$$

Dove $\bar{\omega}$ è la pulsazione dell'onda in ingresso.

Caratteristiche della risposta a RP ad ingressi periodici.

- La risposta è dello stesso tipo dell'ingresso, ovvero periodica, con la stessa pulsazione ω di $u(t)$ ma con l'aggiunta di uno sfasamento.

a) L'ampiezza (**Modulo**) è data da $|W(j\omega)| = M(\omega) = \sqrt{(Re)^2 + (Im)^2}$

b) Lo sfasamento (**Fase**) sarà $\angle W(j\omega) = \phi(\omega) = \arctg \frac{Im}{Re}$

- $W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}$ prende il nome di **risposta armonica** del sistema, questa basta a descrivere il comportamento in frequenza di un sistema dinamico lineare stazionario e allo stesso tempo permette di dare alla funzione di trasferimento una interpretazione fisica equivalente a quella data dalla risposta impulsiva. In pratica, la conoscenza di modulo e fase a varie pulsazioni ω (magari tramite esperimenti) permette di risalire alla risposta armonica e alla corrispondente funzione di trasferimento.
- Il valore della risposta armonica ci dice di quanto il segnale di ingresso viene attenuato o sollecitato o sfasato.
- Abbiamo detto che la variabile che figura in $W(s)$ è complessa, quindi con parte reale e immaginaria. Tuttavia, nel caso di ingresso sinusoidale abbiamo posto che $s = j\omega$ ovvero facciamo in modo che s abbia solo la parte immaginaria. $W(j\omega)$, la risposta armonica, è dunque una funzione di trasferimento valutata lungo l'asse immaginario.

Esercizio 3.2. Determinare la risposta a regime permanente dall'ingresso $u(t) = \sin 3t$ per un sistema avente $W(s) = \frac{4}{s+3}$

Prima di tutto notiamo che gli autovalori di $W(s)$ sono a parte reale negativa, dunque la risposta a regime permanente ha un senso. Possiamo dunque passare al calcolo della risposta tramite la

$$y_r(t) = M(\bar{\omega}) \sin(\bar{\omega}t + \phi(\bar{\omega}))$$

Per prima cosa cerchiamo di dividere la $W(j\omega)$ in parte reale e immaginaria

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{4}{3+j\omega} \\ &= \frac{4(3-j\omega)}{(3+j\omega)(3-j\omega)} \\ &= \frac{12-3j\omega}{9+\omega^2} \\ &= \frac{12}{9+\omega^2} - j \frac{3\omega}{9+\omega^2} \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} |W(j\omega)| &= \sqrt{\left(\frac{12}{9+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{3\omega}{9+\omega^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{144+9\omega^2}{(9+\omega^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{144+9 \cdot 9}{(9+9)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{225}{18^2}} \\ &= \frac{25}{18} \\ \angle W(j\omega) &= \arctg\left(\frac{3\omega}{12}\right) \\ &= \arctg\left(\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Infine possiamo scrivere

$$y_r(t) = \frac{25}{18} \sin(3t - \arctg(3/4))$$

3.2 I Diagrammi di Bode

3.2.1 Rappresentazione della FT in forma canonica di Bode

Nuovamente sulla FT come funzione razionale. Abbiamo detto che la FT è una funzione razionale che può essere espressa come rapporto tra un nominatore e un denominatore. Le soluzioni del nominatore vengono detti *zeri* quelle del denominatore sono detti *poli*. Tali soluzioni possono essere di due tipi:

- *Reali:* $s=0$ oppure $\alpha_i \neq 0$
- *Complesse coniugate:* $\beta_i \pm j\omega_i$

Facendo questa distinzione possiamo riscrivere la FT come

$$W(s) = K \frac{\prod \text{zeri reali} \prod \text{zeri complessi coniugati}}{\prod \text{poli reali} \prod \text{poli complessi coniugati}}$$

$$= K \frac{\prod (s - \alpha_i) \prod (s - \alpha_k - j\beta_k)(s + \alpha_k + j\beta_k)}{\prod (s - \alpha_l) \prod (s - \alpha_m - j\beta_m)(s + \alpha_m + j\beta_m)}$$

Caso di soluzioni (poli o zeri) reali diverse da zero. In questo caso il contributo dato da queste soluzioni sarà sviluppabile come segue

$$\begin{aligned} (s + \alpha_i) &= \alpha_i \left(1 + \frac{s}{\alpha_i} \right) \\ &= \alpha_i (1 + \tau_i s) \\ &= \alpha_i (1 + j\omega \tau_i) \Big|_{s=j\omega} \end{aligned}$$

dove

$$1 + j\omega \tau_i$$

è detto **fattore binomio** e

$$\tau_i = -\frac{1}{\alpha_i}$$

è detto **pulsazione di rottura**.

Caso di soluzioni (poli o zeri) complesse coniugate diverse da zero. In questo caso il contributo dato dalle soluzioni sarà sviluppabile come

$$\begin{aligned} (s - \alpha_i - j\beta_i)(s + \alpha_i + j\beta_i) &= [(s - \alpha_i)^2 + \beta_i^2] \\ &= s^2 - 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2 \\ &= (\alpha_i^2 + \beta_i^2) \left(1 - \frac{2\alpha_i s}{(\alpha_i^2 + \beta_i^2)} + \frac{s^2}{(\alpha_i^2 + \beta_i^2)} \right) \end{aligned}$$

Ricordiamo che un numero complesso coniugato può essere espresso in modulo e fase

$$\omega_n^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2$$

$$\xi = \frac{-\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}$$

Con ω_n pulsazione naturale e ξ smorzamento, così possiamo porre

$$(\alpha_i^2 + \beta_i^2) \left(1 - \frac{2\alpha_i s}{(\alpha_i^2 + \beta_i^2)} + \frac{s^2}{(\alpha_i^2 + \beta_i^2)} \right) = \omega_n^2 \left(1 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right) = \omega_n^2 \left(1 + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n} + \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \Big|_{s=j\omega}$$

dove la quantità

$$\left[1 + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]$$

prende il nome di **fattore trinomio**.

Caso di soluzioni (poli o zeri) identicamente nulle. In questo caso il contributo dato dalla soluzione sarà del tipo

$$s - \alpha_i = s - 0 = \boxed{j\omega|_{s=j\omega}}$$

che prende il nome di **fattore monomio**.

Sul calcolo del guadagno. Per calcolare il guadagno possono presentarsi due casi

a) *Non esistono poli in $s=0$:*

$$k = W(s)|_{s=0}$$

b) *Esistono poli in $s=0$:*

$$k = [s^n W(s)]|_{s=0}$$

Rappresentazione in forma di Bode. Fatta questa distinzione possiamo rappresentare la funzione di trasferimento come

$$W(s) = K \frac{\prod_l (1 + \tau_l s) \prod_k \left(1 + \frac{2\xi_k s}{\omega_{nk}} + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2}\right)}{s^n \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_j \left(1 + \frac{2\xi_j s}{\omega_{nj}} + \frac{s^2}{\omega_{nj}^2}\right)}$$

e quindi la risposta armonica come

$$W(j\omega) = K \frac{(\text{fattori binomi})(\text{fattori trinomi})}{(\text{fattori monomi})(\text{fattori binomi})(\text{fattori trinomi})}$$

dove al numeratore non compaiono fattori monomi poichè al denominatore gli s compaiono sempre in numero maggiore. Questa forma mette in evidenza il guadagno K del sistema.

Esercizio 3.3. Rappresentare in forma di Bode la seguente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{2s + 1}{(s + 1)(s + 3)}$$

Prima di tutto mettiamo in evidenza il guadagno k

$$k = W(0) = \frac{1}{3}$$

per quanto riguarda lo sviluppo della FT avremo che

$$W(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1 + 2s)}{(1 + s)(1 + \frac{s}{3})}$$

3.2.2 Proprietà di modulo e fase.

Proprietà della fase. Enunciamo due proprietà utili per il calcolo della fase della risposta armonica

1. Per $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\angle \alpha = -\angle \frac{1}{\alpha}$$

2. Per $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\angle(\alpha \cdot \beta) = \angle \alpha + \angle \beta$$

Proprietà del modulo. Per quanto riguarda il modulo possiamo semplificare calcoli come $|a \cdot b|$ ponendo i termini sotto forma di notazione logaritmica. Così facendo il modulo viene espresso in decibel [dB]:

$$|a|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10} |a|$$

A questo punto possiamo ricavare proprietà simili a quelle per la fase

1. $|a \cdot b|_{\text{dB}} = |a|_{\text{dB}} + |b|_{\text{dB}}$

$$2. \left| \frac{1}{a} \right|_{\text{dB}} = -|a|_{\text{dB}}$$

3.2.3 Diagrammi di Bode: Tracciamento dei vari fattori

Definizione di diagramma di Bode. Un diagramma di Bode è la rappresentazione grafica della risposta armonica $W(j\omega)$. Il grafico è composto da un piano suddiviso in due parti, con l'asse delle ascisse in scala logaritmica (nota: per $\omega = 0$ corrisponde un valore di $a = -\infty$). Nel semipiano superiore viene rappresentato il modulo di W in quello inferiore la sua fase.

Procedimento per scrivere i diagrammi di Bode.

1. Scrivere $W(s)$ in forma canonica di Bode
2. Tracciare il grafico dei singoli fattori
3. Eseguire la somma dei vari grafici ottenuti

Tracciamento del termine costante K.

- *Modulo:*

$$k > 0 \rightarrow |k|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} k$$

$$k < 0 \rightarrow |k|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} k$$

- *Fase:*

$$k > 0 \rightarrow \angle k = 0$$

$$k < 0 \rightarrow \angle k = -\pi$$

Il diagramma di Bode relativo al termine costante risulta essere:

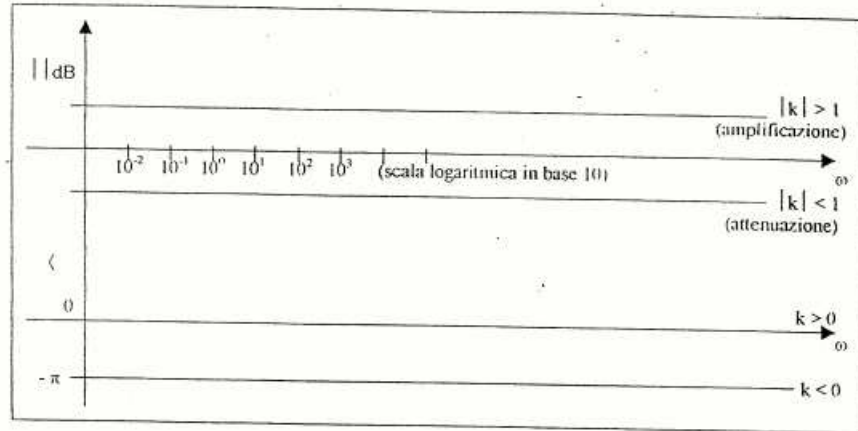


Figura 3.1.

Tracciamento del termine monomio.

- *Modulo:*

$$|j\omega|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \omega$$

ad esempio per alcuni valori di ω varrà

$$\omega = 1 \rightarrow |j\omega|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega = 10 \rightarrow |j\omega|_{\text{dB}} = 20 \text{ dB}$$

$$\omega = 100 \rightarrow |j\omega|_{\text{dB}} = 40 \text{ dB}$$

Ovvero il modulo è una retta con pendenza di 20dB/decade. Graficando il termine monomio a numeratore (per il denominatore la retta ha pendenza inversa, verso il basso):

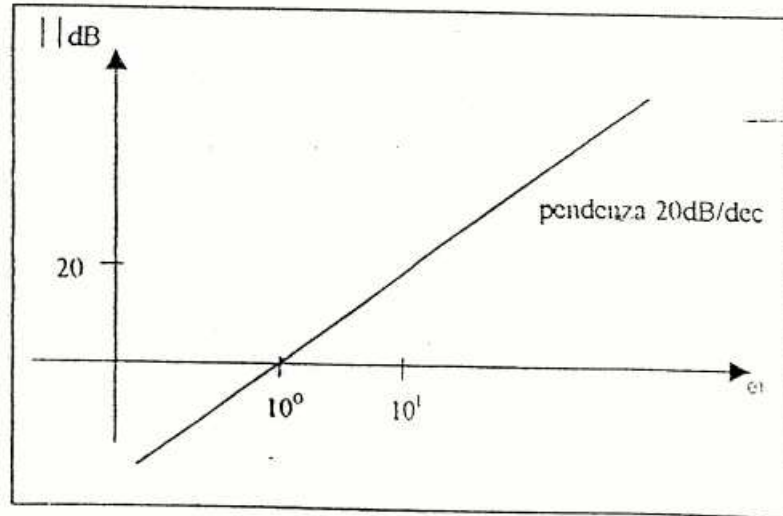


Figura 3.2. Modulo del fattore monomio a numeratore

- *Fase:* Per il calcolo della fase basta notare che $j\omega$ è un immaginario puro, rappresentato sul piano complesso come un vettore giacente sull'asse delle ordinate. La fase dunque (l'angolo con le ascisse) sarà di

$$\angle j\omega = \frac{\pi}{2}$$

se avessimo quindi un termine monomio a denominatore

$$\angle \frac{1}{j\omega} = -\angle j\omega = -\frac{\pi}{2}$$

Ovvero, graficando:

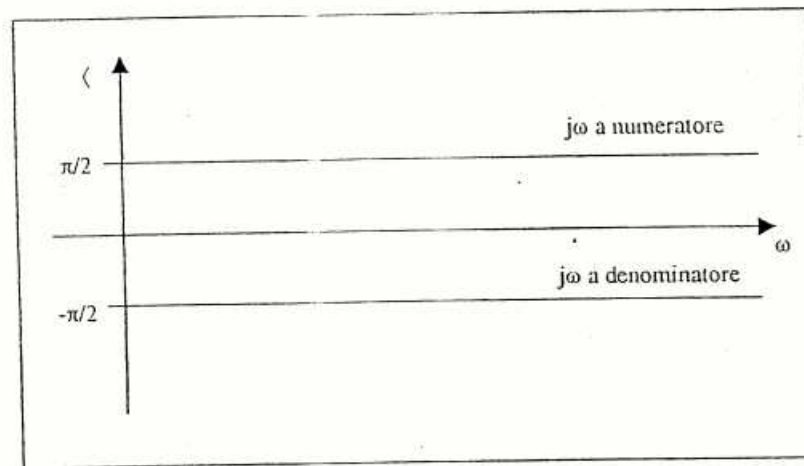


Figura 3.3. Fase del fattore monomio

Tracciamento del termine binomio.

- *Modulo:*

$$|1 + j\omega\tau|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} = 20 \log_{10} (1 + \omega^2 \tau^2)^{1/2} = 10 \log_{10} (1 + \omega^2 \tau^2)$$

Consideriamo, ora, alcuni casi estremi per il calcolo del modulo

$$\omega \ll \frac{1}{|\tau|} \rightarrow |1 + j\omega\tau|_{\text{dB}} \simeq 10 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg \frac{1}{|\tau|} \rightarrow |1 + j\omega\tau|_{\text{dB}} \simeq 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \tau$$

$$\omega = \frac{1}{|\tau|} \rightarrow |1 + j\omega\tau|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} 2 = 3 \text{ dB}$$

In pratica, per $\omega \ll \frac{1}{|\tau|}$ la funzione è una retta coincidente con l'asse delle ascisse, per $\omega \gg \frac{1}{|\tau|}$ diventa una retta con pendenza di 20 dB/decade del tipo $20x + c$. Il grafico corrispondente sarà:

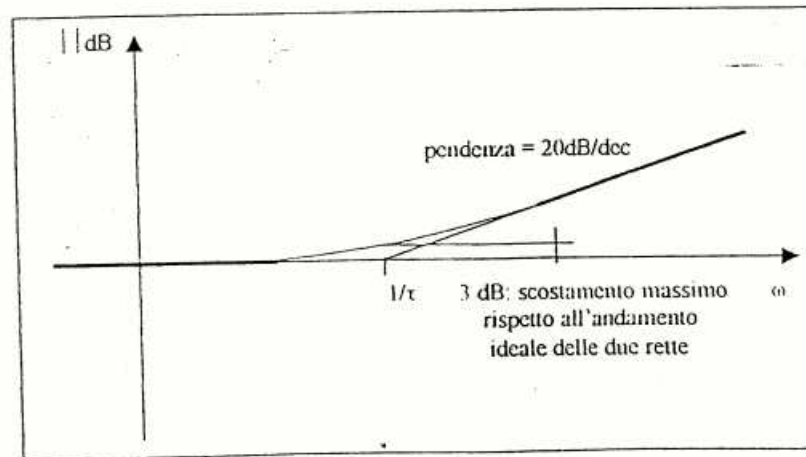


Figura 3.4. Modulo del fattore binomio a numeratore

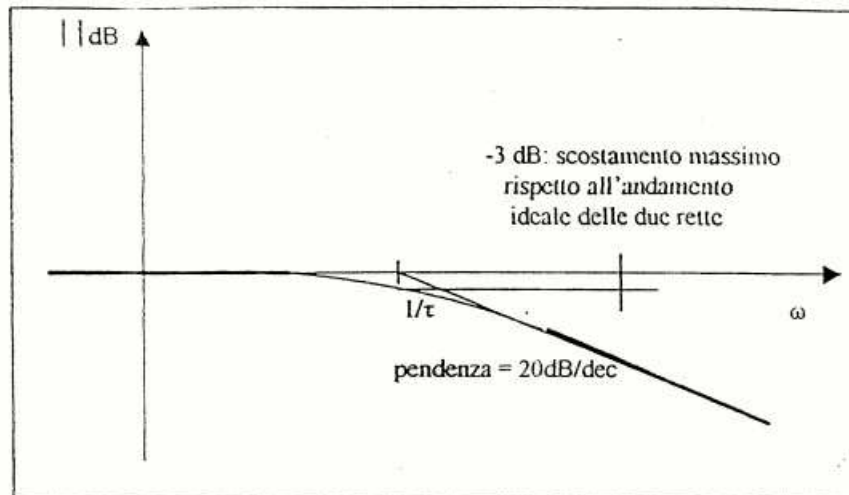


Figura 3.5. Modulo del fattore binomio a denominatore

- *Fase:*

$$\omega = 0 \rightarrow \angle(1 + j\omega\tau) = 0$$

$$\omega \gg \frac{1}{|\tau|} \rightarrow \angle(1 + j\omega\tau) = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \ll \frac{1}{|\tau|} \rightarrow \angle(1 + j\omega\tau) = \frac{\pi}{4}$$

Logicamente per $\tau < 0$ i segni si invertono. Graficando:

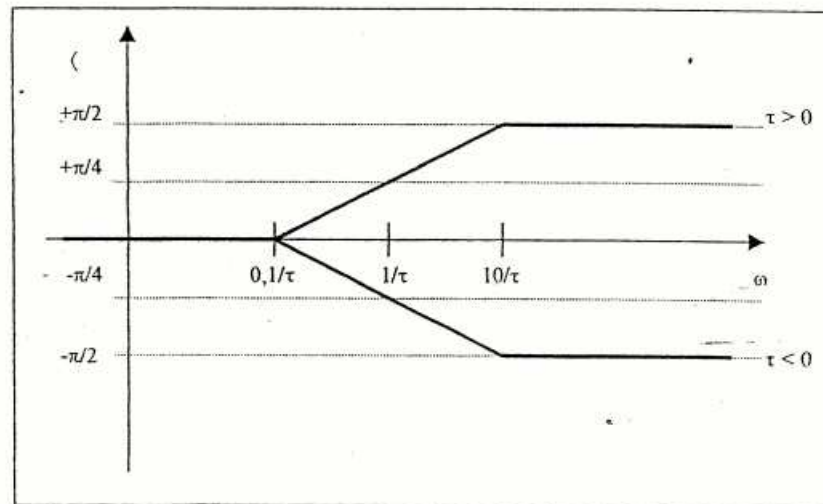


Figura 3.6. Fase del fattore binomio a numeratore

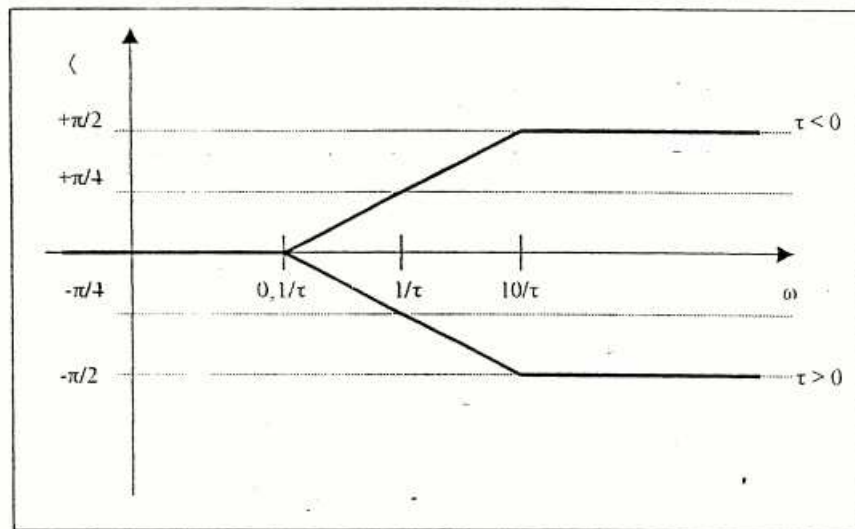


Figura 3.7. Modulo del fattore binomio a denominatore

Tracciamento del termine trinomio.

- *Modulo*: il modulo del fattore trinomio sarà dato da

$$\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{1/2}$$

e considerando alcuni estremi

$$\begin{aligned} \omega \ll \omega_n &\longrightarrow |\text{trinomio}|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \\ \omega \gg \omega_n &\longrightarrow |\text{trinomio}|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \omega^2 - 20 \log_{10} \omega_n^2 = 40 \log_{10} \omega - \text{const} \\ \omega = \omega_n &\longrightarrow |\text{trinomio}|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} 4\xi^2 = 20 \log_{10} 2\xi \\ \xi = 0 &\longrightarrow |\text{trinomio}|_{\text{dB}} = -\infty \text{ dB} \\ \xi = \frac{1}{2} &\longrightarrow |\text{trinomio}|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB} \\ \xi = 1 &\longrightarrow |\text{trinomio}|_{\text{dB}} = 6 \text{ dB} \end{aligned}$$

Graficando i risultati otteniamo:

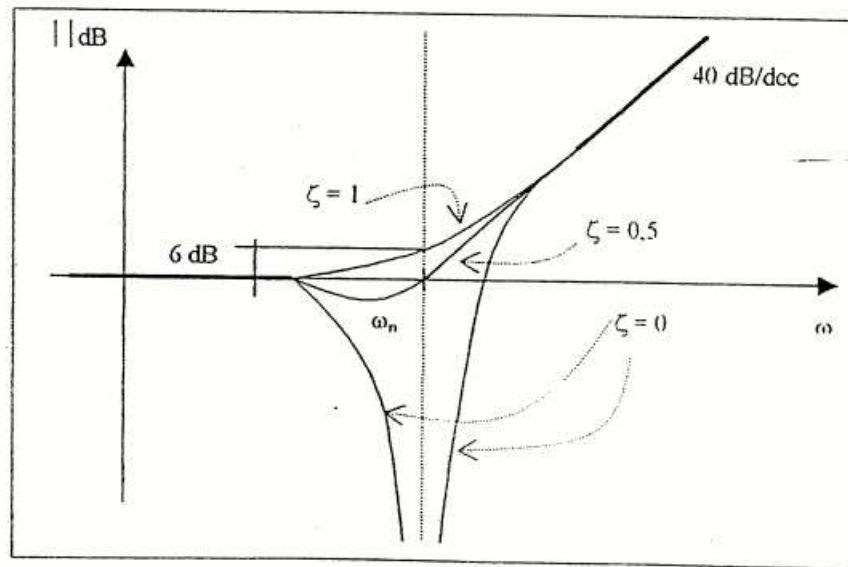


Figura 3.8. Modulo del fattore trinomio a numeratore

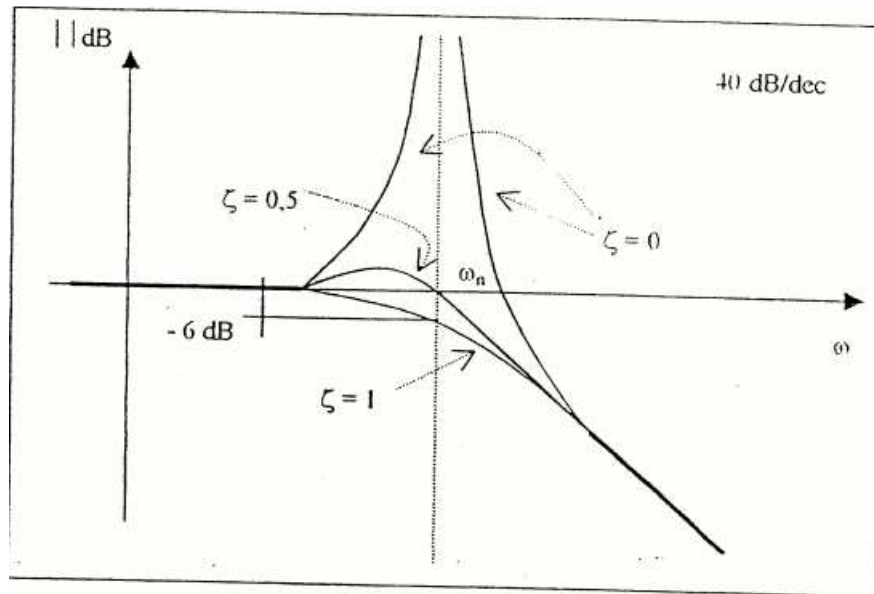


Figura 3.9. Modulo del fattore trinomio a denominatore

- *Fase*: Mettendo in evidenza parte reale e immaginaria

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j \frac{2\xi\omega}{\omega_n}$$

la fase sarà pari a

$$\angle \text{trinomio} = \arctg \frac{Im}{Re} = \arctg \frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

a) Caso $\xi > 0$

$$\omega \ll \omega_n \rightarrow \angle \simeq 0$$

$$\omega = \omega_n \rightarrow \angle = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \gg \omega_n \rightarrow \angle = \pi$$

b) Caso $\xi < 0$

$$\begin{aligned}\omega \ll \omega_n &\rightarrow \angle \simeq 0 \\ \omega = \omega_n &\rightarrow \angle = -\frac{\pi}{2} \\ \omega \gg \omega_n &\rightarrow \angle = -\pi\end{aligned}$$

graficando i risultati per la fase, otteniamo:

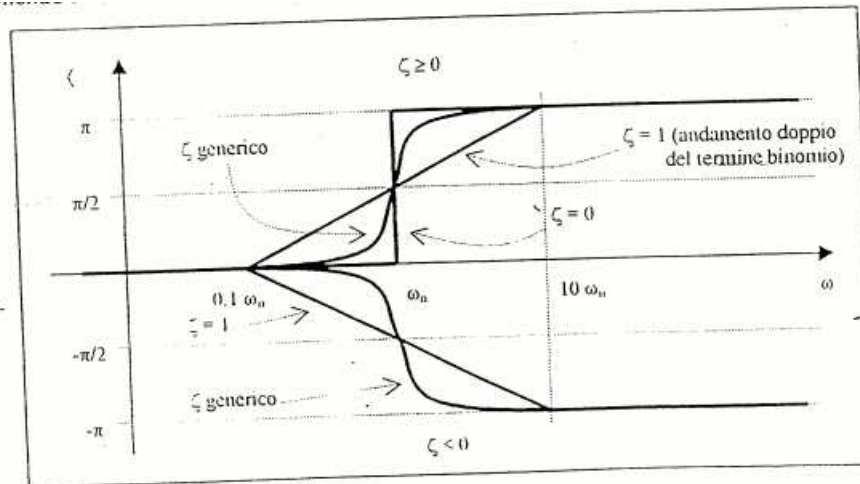


Figura 3.10. Fase del fattore trinomio a numeratore

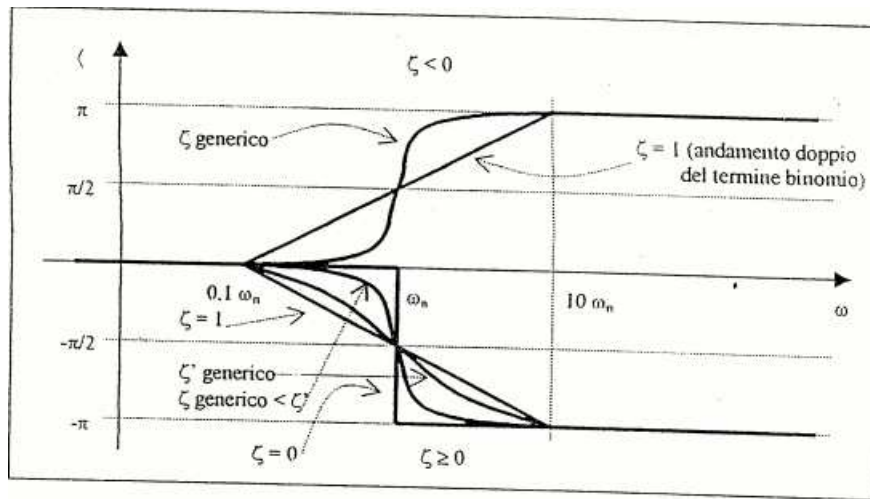


Figura 3.11. Fase del fattore trinomio a denominatore

Esercizio 3.4. Data la funzione di trasferimento $W(s) = \frac{10(s-1)}{(s+10)(s+100)}$ tracciare i diagrammi di Bode.

Prima di tutto mettiamo la $W(s)$ in forma canonica di Bode. Mettiamo in evidenza il guadagno k e scriviamo

$$W(s) = -\frac{1}{100} \cdot \frac{(1-s)}{\left(1+\frac{1}{10}s\right)\left(1+\frac{1}{100}s\right)} = -\frac{1}{100} \cdot \frac{(1-j\omega)}{\left(1+\frac{1}{10}j\omega\right)\left(1+\frac{1}{100}j\omega\right)} \Big|_{s=j\omega}$$

- **Fattore costante:** $K = -\frac{1}{100}$
 - Modulo: $M_{dB} = 20 \log |K| = 20 \log \frac{1}{100} = 20 \cdot (-2) = -40 \text{ dB}$
 - Fase: $K < 0 \Rightarrow \angle = -\pi$

- *Fattore binomio:* $(1 + j\omega)$ a numeratore

- Modulo:

$$\omega \ll 1 \rightarrow M_{dB} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg 1 \rightarrow M_{dB} = \text{retta: } 20x + c$$

$$\omega = 1 \rightarrow M_{dB} = 3 \text{ dB}$$

- Fase:

$$\omega = 0 \rightarrow \angle = 0$$

$$\omega \gg 1 \rightarrow \angle = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \ll 1 \rightarrow \angle = -\frac{\pi}{4}$$

- *Fattore binomio:* $\left(1 + \frac{1}{10}j\omega\right)$ a denominatore

- Modulo:

$$\omega \ll \frac{1}{10} \rightarrow M_{dB} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg \frac{1}{10} \rightarrow M_{dB} = \text{retta: } -20x + c$$

$$\omega = \frac{1}{10} \rightarrow M_{dB} = 3 \text{ dB}$$

- Fase:

$$\omega = \frac{1}{10} \rightarrow -\angle = 0$$

$$\omega \gg \frac{1}{10} \rightarrow -\angle = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \ll \frac{1}{10} \rightarrow -\angle = -\frac{\pi}{4}$$

- *Fattore binomio:* $\left(1 + \frac{1}{100}j\omega\right)$ a denominatore

- Modulo:

$$\omega \ll \frac{1}{100} \rightarrow M_{dB} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg \frac{1}{100} \rightarrow M_{dB} = \text{retta: } -20x + c$$

$$\omega = \frac{1}{100} \rightarrow M_{dB} = 3 \text{ dB}$$

- Fase:

$$\omega = \frac{1}{100} \rightarrow -\angle = 0$$

$$\omega \gg \frac{1}{100} \rightarrow -\angle = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \ll \frac{1}{100} \rightarrow -\angle = -\frac{\pi}{4}$$

In definitiva, graficando i risultati otterremo:

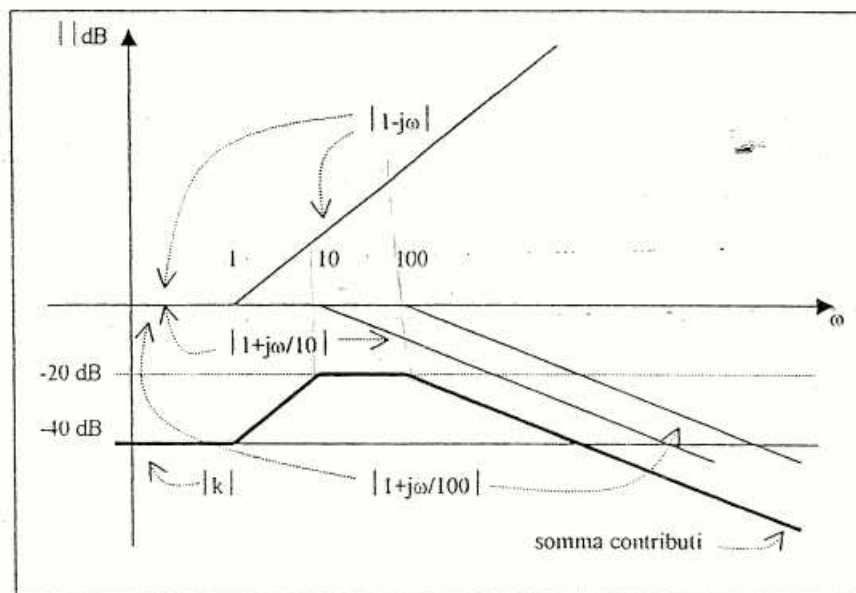


Figura 3.12. Modulo

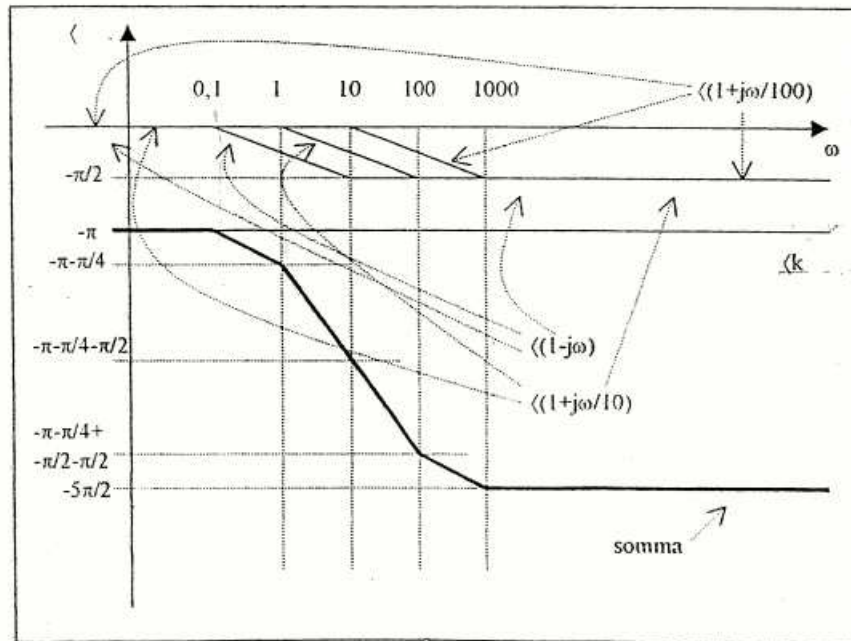


Figura 3.13. Fase

3.3 Diagramma polare

I diagrammi polari sono la rappresentazione di Modulo e Fase della risposta armonica sul piano complesso. Sulle ascisse viene riportata la parte reale sulle ordinate la parte immaginaria. TODO

Esercizio 3.5. Tracciare il diagramma polare della risposta armonica $W(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)}$
 Come prima cosa calcoliamo modulo e fase

3.4 Caratterizzazione dei sistemi lineari

3.4.1 Caratterizzazione nel dominio del tempo

Sovraelongazione \hat{s} . indica la distanza massima dell'uscita rispetto al valore di regime.

$$\hat{s} = \frac{y_{max} - y_{rp}}{y_{rp}}$$

Tempo di salita t_s .

- Nel caso di presenza di oscillazioni, indica la prima volta che l'uscita si avvicina al tempo di regime
- Nel caso di assenza di oscillazioni, indica il tempo necessario per passare da il 10% del valore di regime al 90% del valore di regime.

Tempo di assestamento t_a . tempo a partire dal quale la risposta è compresa tra $1 + \varepsilon$ e $1 - \varepsilon$.

3.4.2 Caratterizzazione della risposta armonica

Banda passante B_3 . E' la pulsazione oltre la quale si ha un'attenuazione di almeno 0.707 (\simeq 3dB) rispetto al valore di $\omega = 0$. Questo valore ci dice oltre quale ω ho una grande attenuazione.

Modulo della risonanza M_r . E' il massimo valore del modulo della risposta armonica normalizzato a $\omega = 0$:

$$M_r = \frac{\max |W(j\omega)|}{|W(j0)|}$$

Questo valore ci dice quanto ,per una certa ω , il sistema ha un comportamento risonante.

Comportamento in frequenza e nel tempo. Tra i parametri che caratterizzano il comportamento nel tempo e quelli che caratterizzano il comportamento in frequenza esistono le seguenti relazioni

$$B_3 \cdot t_s \simeq \text{const} = 3$$

$$\frac{1 + \hat{s}}{M_r} = \text{const} = 0.85$$

Inoltre ci dicono che

$$\text{Se } B_3 \nearrow \text{ allora } t_s \searrow$$

$$\text{Se } M_r \nearrow \text{ allora } \hat{s} \nearrow$$

Capitolo 4

Funzione di trasferimento e problemi di realizzazione

4.1 Il problema della realizzazione

Dalla funzione di trasferimento alla rappresentazione con lo stato. Il problema della realizzazione consiste nel costruire una rappresentazione con lo stato a partire da una funzione di trasferimento.

$$W(s) \Rightarrow A, B, C, D$$

Per ipotesi una funzione di trasferimento sarà realizzabile se essa rappresenta una funzione strettamente propria

$$W(s) = \frac{B_0 + B_1s + \dots + B_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

Realizzazione in forma canonica raggiungibile. In questa realizzazione si hanno due dimensioni fondamentali:

- p , ovvero il numero di colonne di $W(s)$
- q , numero di righe di $W(s)$
- n , il grado del minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore (numero di poli nel caso di dimensione unitaria).

$$\begin{aligned} A_r(np \times np) &= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & I \\ -a_0I & -a_1I & -a_2I & \dots & -a_{n-1}I \end{pmatrix} \\ B_r(np \times p) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C_r(q \times np) &= (B_0 \ B_1 \ \dots \ B_{n-1}) \end{aligned}$$

La matrice A_r ha sull'ultima riga i coefficienti del polinomio a denominatore di $W(s)$ cambiati di segno e la diagonale sopra quella principale è costituita da elementi tutti pari alla matrice identità di dimensione $(p \times p)$, tutti gli altri elementi sono nulli. Questa realizzazione è chiamata così poichè lo spazio di stato ottenuto è tutto raggiungibile.

Realizzazione in forma canonica osservabile. E' sufficiente porre

$$\begin{aligned} A_o &= A_r^T \\ B_o &= C_r^T \\ C_o &= B_r^T \end{aligned}$$

Realizzazioni minime. Una realizzazione con lo stato si dice minima se

- $q = 1$ nel caso di rappresentazione in forma canonica osservabile
- $p = 1$ nel caso di rappresentazione in forma canonica raggiungibile

In generale, se i polinomi a numeratore e denominatore non hanno fattori in comune le realizzazioni così calcolate (con $q = p = 1$) saranno minime.

Metodo di Gilbert per il calcolo di realizzazioni minime. Ecco il procedimento per il calcolo di una rappresentazione minima

1. Si espande $W(s)$ in frazioni parziali del tipo

$$W(s) = \sum_{i=1}^r \frac{W_i}{s - p_i}$$

con W_i di dimensione $(q \times p)$.

2. Si definiscono gli

$$\rho_i = \text{rango } W_i$$

3. Si calcolano le matrici B_i, C_i ottenute dalla fattorizzazione minima di W_i

$$W_i = C_i B_i$$

e tali che

$$C_i = (q \times \rho_i), B_i = (\rho_i \times q)$$

4. La dimensione della realizzazione minima sarà pari a

$$N = \sum_{i=1}^r \rho_i$$

5. La realizzazione minima sarà pari a

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_r \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} \leftarrow B_1 \rightarrow \\ \dots & \dots & \dots \\ \leftarrow B_r \rightarrow \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} \uparrow & \dots & \uparrow \\ C_1 & \dots & C_r \\ \downarrow & \dots & \downarrow \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In cui la matrice A è diagonale con gli elementi dati dai poli dell'espansione in frazioni parziali ciascuno con molteplicità pari al rango del residuo relativo.

Esercizio 4.1. Esprimere la seguente funzione di trasferimento in forma canonica raggiungibile.

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

Prima di tutto esprimiamo la funzione di trasferimento in forma di rapporto di polinomi.

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} s \\ s+1 \end{pmatrix}}{s(s+1)} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s}{s^2 + s}$$

Ora possiamo estrarre la nostra realizzazione

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ B_r &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C_r &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 4.2. Calcolare una realizzazione minima per la funzione di trasferimento

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{2}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

1. Espansione in fratti

$$\begin{aligned} W(s) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{2}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s(s+2)}{2(s+1)} & 0 \\ \frac{s(s+1)}{2(s+1)} & \frac{s(s+1)}{s(s+1)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{W_1}{s} + \frac{W_2}{s+1} + \frac{W_3}{s+2} \\ W_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\begin{pmatrix} \frac{s(s+2)}{2(s+1)} & 0 \\ \frac{s(s+1)}{2(s+1)} & \frac{s(s+1)}{s(s+1)} \end{pmatrix}}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\begin{pmatrix} \frac{s(s+2)}{2(s+1)} & 0 \\ \frac{s(s+1)}{2(s+1)} & \frac{s(s+1)}{s(s+1)} \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ W_2 &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{\begin{pmatrix} \frac{s(s+2)}{2(s+1)} & 0 \\ \frac{s(s+1)}{2(s+1)} & \frac{s(s+1)}{s(s+1)} \end{pmatrix}}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{\begin{pmatrix} \frac{s(s+2)}{2(s+1)} & 0 \\ \frac{s(s+1)}{2(s+1)} & \frac{s(s+1)}{s(s+1)} \end{pmatrix}}{s(s+2)} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ W_3 &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{\begin{pmatrix} \frac{s(s+2)}{2(s+1)} & 0 \\ \frac{s(s+1)}{2(s+1)} & \frac{s(s+1)}{s(s+1)} \end{pmatrix}}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{\begin{pmatrix} \frac{s(s+2)}{2(s+1)} & 0 \\ \frac{s(s+1)}{2(s+1)} & \frac{s(s+1)}{s(s+1)} \end{pmatrix}}{s(s+1)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ W(s) &= \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{s} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{s+1} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{s+2} \end{aligned}$$

2. Definiamo gli ρ_i

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$$

3. Calcoliamo le matrici B_i, C_i

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ W_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ W_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. La realizzazione minima sarà

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.2 Sistemi interconnessi

Interconnessione di sistemi. E' possibile che si trovino vari sistemi interfacciati fra loro. Partiamo dunque da due sistemi tipo e andiamo ad analizzare i vari tipi di interconnessione

$$S_1 = \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$$

$$S_2 = \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases} \quad x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$$

4.2.1 Interconnessione in serie

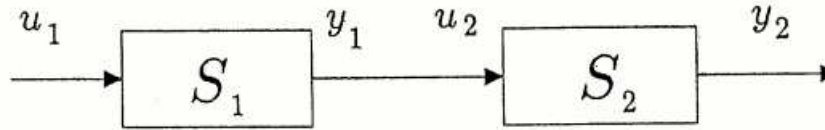


Figura 4.1. Sistema interconnesso in serie

Relazioni di interconnessione. Dire che due sistemi si interfacciano in serie equivale a dire che

- $u = u_1$
- $u_2 = y_1 = C_1 x_1$
- $y = y_2$

Inoltre sappiamo che lo stato di un sistema interconnesso è uguale alla sovrapposizione dei singoli stati che lo compongono

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2)}$$

Sistema equivalente. A questo punto il problema sta nel trovare le matrici A , B , C del sistema risultante dall'aggregazione.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ A_2 x_2 + B_2 u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u \\ A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= C_2 x_2 \\ &= (0 \quad C_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In definitiva otteniamo le matrici

- $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $C = (0 \quad C_2)$

Funzione di trasferimento. Ora possiamo individuare la funzione di trasferimento di un sistema connesso in serie

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\
 &= \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} \\
 &= \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} \cdot \frac{Y_1(s)}{Y_1(s)} \\
 &= \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} \cdot \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} \\
 &= \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} \cdot \frac{U_2(s)}{U_2(s)} \\
 &= \boxed{F_1(s) \cdot F_2(s)}
 \end{aligned}$$

4.2.2 Interconnessione in parallelo

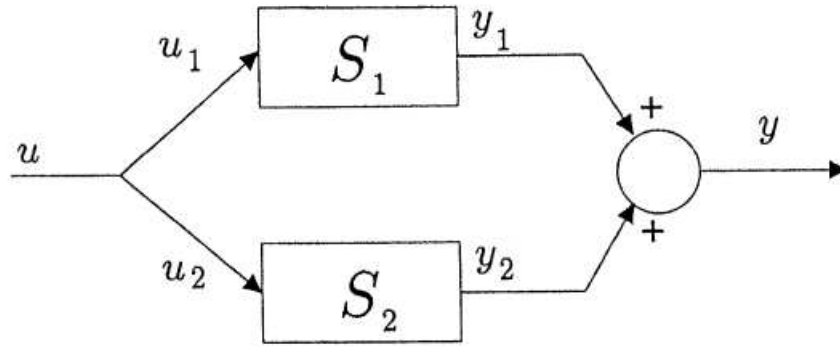


Figura 4.2. Sistema interconnesso in parallelo

Relazioni di interconnessione.

- $u_1 = u_2 = u$
- $y = y_1 + y_2$

Inoltre, come nel caso precedente, possiamo scrivere

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Sistema equivalente.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ A_2 x_2 + B_2 u_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u \\ A_2 x_2 + B_2 u \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \\
 y &= y_1 + y_2 \\
 &= C_1 x_1 + C_2 x_2 \\
 &= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

In definitiva otteniamo le matrici

- $\boxed{A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}}$

- $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$
- $C = (C_1 \ C_2)$

Funzione di trasferimento.

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\
 &= \frac{Y_1(s) + Y_2(s)}{U(s)} \\
 &= \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} + \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} \\
 &= \boxed{F_1(s) + F_2(s)}
 \end{aligned}$$

4.2.3 Interconnessione a controreazione (feedback)

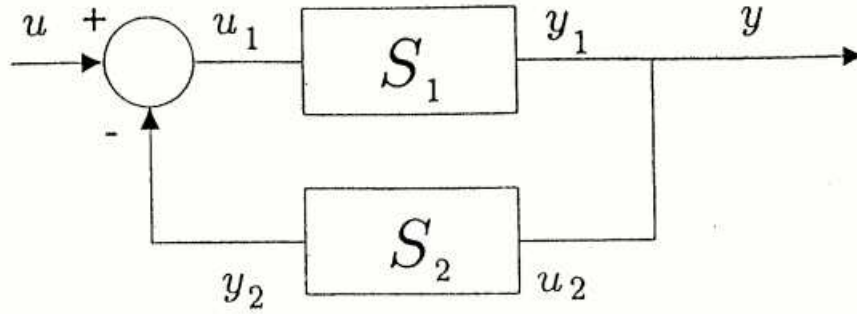


Figura 4.3. Sistema con interconnessione a controreazione

Relazioni di interconnessione.

- $u_1 = u - y_2 = C_2 x_2$
- $u_2 = y_1 = y = C_1 x_1$

E inoltre

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Sistema equivalente.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ A_2 x_2 + B_2 u_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 (u - y_2) \\ A_2 x_2 + B_2 y_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 u - B_1 C_2 x_2 \\ A_2 x_2 + B_2 B_1 x_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 B_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\
 y &= C_1 x_1 \\
 &= (C_1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

In definitiva otteniamo le matrici

- $A = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 B_1 & A_2 \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $C = (C_1 \ 0)$

Funzione di trasferimento.

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\
 &= \frac{Y_1(s)}{U(s)} \\
 &= \frac{F_1(s)U_1(s)}{U(s)} \\
 &= \frac{F_1(s)}{U(s)}[U(s) - Y_2(s)] \\
 &= \frac{F_1(s)}{U(s)}[U(s) - F_2(s)U_2(s)] \\
 &= \frac{F_1(s)}{U(s)}[U(s) - F_2(s)Y(s)] \\
 &= F_1(s) - F(s)F_1(s)F_2(s) \\
 F_1(s) &= F(s)[1 + F_1(s)F_2(s)] \\
 F(s) &= \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}
 \end{aligned}$$

4.2.4 Interconnessione con controreazione unitaria

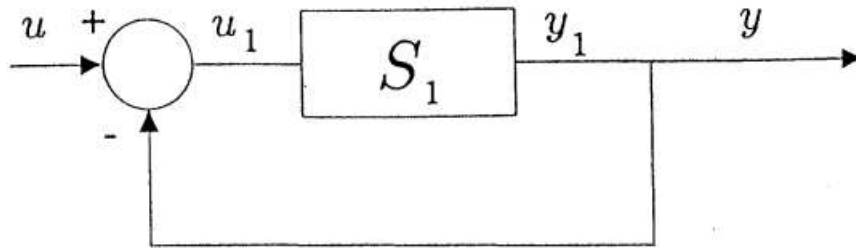


Figura 4.4. Sistema con interconnessione a controreazione unitaria

Relazioni di interconnessione.

- $u_1 = u - y_1$
- $y = y_1 = C_1 x_1$

E inoltre

$$x = x_1$$

Sistema equivalente.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \dot{x}_1 \\
 &= A_1 x_1 + B_1 u_1 \\
 &= A_1 x_1 + B_1 (u - C_1 x_1) \\
 &= A_1 x_1 + B_1 u - B_1 C_1 x_1 \\
 &= (A_1 - B_1 C_1) x_1 + B_1 u \\
 y &= C_1 x_1
 \end{aligned}$$

In definitiva otteniamo le matrici

- $A = A_1 - B_1 C_1$
- $B = B_1$
- $C = C_1$

Funzione di trasferimento.

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)}$$

Capitolo 5

Stabilità dei sistemi

5.1 Generalità sulla stabilità dei sistemi

5.1.1 Una definizione informale di stabilità

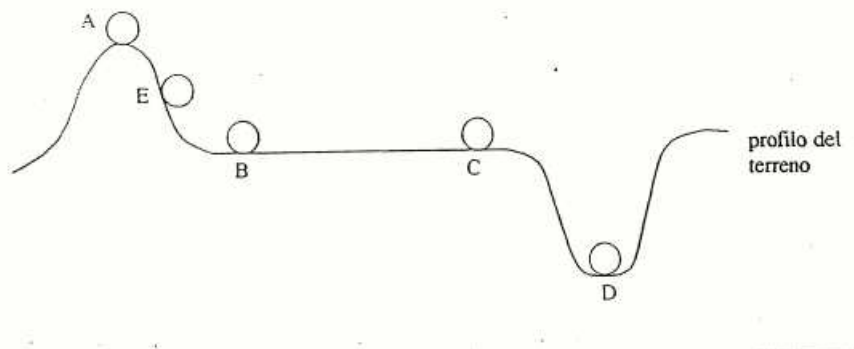


Figura 5.1.

Equilibrio. Consideriamo cinque diverse posizioni di una sfera posta sul profilo di un terreno non perfettamente piano, come in figura. Nelle posizioni A,B,C,D se non viene applicata alcuna forza, la palla rimane ferma. Questo è detto uno stato di *equilibrio*. Per quanto riguarda il punto E è ovvio considerarlo un punto di non equilibrio. Il concetto che a noi ora interessa è quello della *stabilità dell'equilibrio*. Ovvero, la capacità di reazione del sistema a seguito di piccole variazioni delle condizioni operative, chiamate *perturbazioni*, come ad esempio la posizione della palla.

Stabilità di equilibrio.

- *Equilibrio instabile:* Se modifichiamo di poco la posizione della palla dal punto A, il sistema si allontanerà dall'equilibrio. Ovvero piccole perturbazioni provocano divergenza.
- *Equilibrio semplicemente stabile:* Se modifichiamo di poco la posizione della palla nei punti B o C il sistema non diverge né converge. Ovvero piccole perturbazioni provocano comunque limitatezza nel comportamento del sistema.
- *Equilibrio stabile asintoticamente:* Se modifichiamo di poco la posizione della palla nel punto D, il sistema tenderà comunque verso lo stato di equilibrio in modo asintotico. Ovvero una piccola perturbazione conduce comunque a convergenza.

5.1.2 Una definizione formale di stabilità

Stato di equilibrio. Uno stato x_e è detto **stato di equilibrio** se trovandosi il sistema in quello stato vi permane con ingresso nullo. In altri termini:

$$\dot{x} = f(x, 0) \implies 0 = f(x_e, 0)$$

Dunque quello dell'equilibrio è un concetto legato a sistemi in evoluzione libera, ovvero con ingresso nullo $u(t) = 0$. Nel caso di sistemi lineari in cui

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

dovrà essere verificata la condizione

$$\boxed{0 = Ax_e(t)}$$

Questo ci dice anche che l'origine $x_e = 0$ è sempre uno stato di equilibrio anche se non è detto che sia l'unico.

Perturbazione. Si definisce **perturbazione** una variazione delle condizioni operative, in un primo tempo considereremo perturbazione una variazione dello stato iniziale da x_e .

Stabilità semplice. Uno stato di equilibrio x_e è detto **stabile semplicemente** se (TODO norma):

$$\forall \varepsilon, \forall t > t_0 \exists \delta_\varepsilon: \|x(t_0) - x_e\| < \delta_\varepsilon \implies \|x(t) - x_e\| < \varepsilon$$

In sostanza questa è una condizione di limitatezza dell'effetto delle perturbazioni.

Stabilità asintotica. Uno stato di equilibrio x_e è detto **stabile asintoticamente** se

- x_e è stabile semplicemente
- $\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0}$ (condizione di attrattività)

In pratica si deve avere anche una convergenza verso x_e dell'evoluzione provocata dalla perturbazione.

Stabilità locale e globale. Fino ad ora si è parlato di **stabilità locale** ovvero di una proprietà (la stabilità) che è valida solo per piccole perturbazioni, ovvero che rimangano confinate in un intorno di x_e . Possiamo tuttavia parlare anche di **stabilità globale** che è una proprietà molto più forte. Essa infatti impone che la stabilità debba valere non solo in un intorno di x_e ma anche per ogni valore che può assumere lo stato iniziale $x(t_0)$. Un particolare molto interessante è che *nei sistemi lineari la stabilità locale implica quella globale*.

Proprietà della stabilità dei sistemi.

- a) In un sistema con stabilità asintotica x_e è unico.
- b) L'origine è uno stato di equilibrio, sempre. Questo implica che in caso di stabilità asintotica l'unico stato di equilibrio deve essere l'origine.
- c) La stabilità semplice di uno stato implica, ed è implicata, da quella di un qualsiasi altro stato di equilibrio del sistema. Quest'ultima proprietà ci dà la possibilità di parlare di **stabilità di un sistema** e non solo di uno stato di equilibrio.

5.1.3 Condizioni di stabilità

Condizioni di stabilità semplice. Un sistema è stabile semplicemente se e solo se, preso un valore k finito si ha che

$$\|e^{At}\| \leq k$$

Ovvero, la norma della matrice di transizione deve essere limitata. Questa condizione richiede che *tutti gli autovalori abbiano parte reale minore di zero oppure uguali a zero solo se semplici (molteplicità unitaria)*.

Condizioni di stabilità asintotica. Un sistema è stabile asintoticamente se e solo se

- E' stabile semplicemente
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}\| = 0$

In questo caso, la seconda condizione impone che *gli autovalori siano strettamente minori di zero*.

5.2 Il criterio di Routh

5.2.1 Principio e applicazione del criterio di Routh

Analizzare la stabilità senza calcolare gli autovalori. Come abbiamo detto nella sezione precedente, è possibile analizzare la stabilità di un sistema semplicemente osservando il segno della parte reale degli autovalori. Il criterio di Routh permette proprio di conoscere questo, senza bisogno di calcolare esplicitamente gli autovalori.

La tabella di Routh. Il criterio di Routh si basa sulla costruzione di una tabella. Facendo riferimento ad un generico polinomio di grado n

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

La tabella di Routh avrà la forma

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$n-2$	b_1	b_2	b_3	\dots
$n-3$	c_1	c_2	c_3	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}, b_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}, \dots$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, c_3 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}, \dots$$

Osservando le variazioni di segno dei termini sulla prima colonna possiamo conoscere il segno degli autovalori

- Ogni variazione di segno corrisponde ad un autovalore a parte reale positiva.
- Ogni permanenza di segno corrisponde ad un autovalore a parte reale negativa.

Tuttavia, durante il completamento della tabella è probabile che si presentino dei casi particolari in cui bisogna intervenire con opportune tecniche.

5.2.2 Casi particolari nello sviluppo della tabella di Routh

Primo elemento di una colonna pari a zero. Per affrontare questo caso sono possibili tre approcci diversi:

- Si sostituisce al termine nullo il simbolo ε a rappresentare un numero positivo e piccolo. Successivamente si continua come di consueto a completare la tabella.
- Si moltiplica il polinomio originario per un binomio con uno zero negativo

$$p'(\lambda) = p(\lambda)(\lambda + 1)$$

Così facendo, costruendo la tabella del nuovo polinomio non riottornerò lo zero sulla prima colonna.

- Se la riga p -esima ha i primi h elementi pari a zero, allora sostituirò alla riga p -esima, una riga ottenuta sommando alla p -esima riga la stessa p -esima riga traslata a sinistra di h posizioni con i posti rimasti vuoti sostituiti da zeri e cambiata di segno se h è dispari. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Una intera colonna pari a zero. Se si presenta questo caso allora il nostro polinomio sarà scomponibile in due polinomi

$$p(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$$

Il primo possiede informazioni che riguardano le righe precedenti quella nulla, il secondo invece, si può costruire dai coefficienti della riga successiva a quella nulla e possiede potenze tutte pari. A questo punto se $p_2(\lambda)$ è di forma semplice si procede normalmente costruendo la tabella altrimenti si procede derivando il polinomio rispetto a λ

$$\frac{d}{d\lambda}[p_2(\lambda)]$$

Esempio 5.1. Calcolare la stabilità di una funzione di un sistema avente polinomio caratteristico

$$\lambda^4 + \lambda^3 + 11\lambda^2 + 9\lambda + 18$$

Cominciamo col costruire la tabella di Routh

4	1	11	18
3	1	9	
2	1	9	
1	0		
0			

Ci ritroviamo nel caso poco fa descritto in cui il polinomio $p_2(\lambda) = \lambda^2 + 9$, ovviamente dovremo derivarlo per poter proseguire, ottenendo $D(p_2(\lambda)) = 2\lambda$, la tabella ora risulterà essere

4	1	11	18
3	1	9	
2	1	9	
1	2		
0	9		

Nessuna variazione di segno, sistema stabile asintoticamente.

Esercizio 5.1. Assegnato il polinomio $p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 15$ studiarne gli zeri.

La tabella di Routh del polinomio è la seguente

5	1	2	3
4	1	2	15
3	0	-12	
2			
1			
0			

Utilizzando il metodo (c) per eliminare lo zero, otteniamo

5	1	2	3
4	1	2	15
3	12	-12	
2	3	15	
1	-72		
0	15		

Osservando la tabella ottenuta possiamo dedurre che il polinomio ha due zeri a parte reale positiva e tre a parte reale negativa.

5.3 La stabilità esterna

Stabilità ingresso-uscita. La stabilità esterna è anche detta stabilità ingresso-uscita. Essa è una proprietà che ci dice come un sistema risponde a fronte di ingressi limitati. In generale se la risposta sarà limitata ad un ingresso limitato allora si potrà parlare di stabilità esterna. Ci sono due tipi di stabilità esterna:

a) *Stabilità esterna nello stato zero* (x_0)

b) *Stabilità esterna* (per ogni stato)

Condizioni di stabilità esterna.

- **Stabilità esterna nello stato zero:** Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stabile esternamente nello stato zero è che

$$\int_0^t \|W(\tau)\| d\tau < k \quad \forall t$$

Ovvero la norma della funzione di trasferimento deve essere sommabile nell'intervallo considerato. Considerando il punto di vista degli autovalori la condizione può esprimersi come: *gli autovalori che sono simultaneamente eccitabili ed osservabili devono essere a parte reale negativa.*

- **Stabilità esterna:** Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stabile esternamente è che
 - i. Sia stabile esternamente nello stato zero.
 - ii. E' verificata la condizione

$$\|\psi(t)\| < k \quad \forall t$$

In termini di autovalori è equivalente dire che: *gli autovalori osservabili in uscita siano a parte reale strettamente negativa se con molteplicità geometrica maggiore di uno, a parte reale negativa o nulla per gli altri.*

Relazioni tra stabilità esterna e interna.

1. stabilità interna \implies stabilità esterna.
2. stabilità esterna \implies stabilità esterna nello stato zero.
3. stabilità esterna nello stato zero \implies stabilità interna asintotica, se tutti i modi sono eccitabili ed osservabili.
4. stabilità esterna nello stato zero \implies stabilità esterna, se tutti i modi sono eccitabili.
5. stabilità esterna \implies stabilità interna asintotica, se tutti i modi sono eccitabili ed osservabili.
6. stabilità esterna \implies stabilità interna semplice, se tutti i modi sono osservabili.

Capitolo 6

Sistemi a tempo discreto

6.1 Analisi nel dominio del tempo

Modello implicito.

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Modello esplicito.

$$\begin{cases} x(k) = \Phi(k-k_0)x_0 + \sum_{\tau=k_0}^{k-1} H(k-\tau)u(\tau) \\ y(k) = \Psi(k-k_0)x_0 + \sum_{\tau=k_0}^{k-1} W(k-\tau)u(\tau) \end{cases}$$

Con

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= A^k \\ \Psi(k) &= CA^k \\ H(k) &= A^{k-1}B \\ W(k) &= \begin{cases} D & \text{se } k=0 \\ CA^{k-1}B & \text{se } k>0 \end{cases} \end{aligned}$$

Potenza di una matrice. Anche nel caso tempo discreto per calcolare la potenza di matrice, facciamo ricorso alle trasformazioni di coordinate per ottenere una matrice diagonale a blocchi D

$$A = T^{-1}DT \implies A^t = (T^{-1}DT)^t = \dots = T^{-1}D^tT$$

La potenza della matrice A , dunque si riduce a calcolare la potenza dei singoli blocchi diagonali che compongono D . Per quanto riguarda il caso di autovalori reali la soluzione è banale, per quelli complessi coniugati invece avremo

$$\lambda = \alpha + j\omega = \sigma e^{j\theta} = \sigma(\cos\theta + j\sin\theta)$$

e dunque

$$\alpha = \sigma \cos\theta, \quad \omega = \sigma \sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

e di conseguenza

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \cos\theta t & \sin\theta t \\ -\sin\theta t & \cos\theta t \end{pmatrix}$$

e in conclusione, la potenza di matrice risulterà avere la generica forma

$$D^t = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n^t & & & \\ & & & \sigma_1^t \cos\theta_1 t & \sigma_1^t \sin\theta_1 t & \\ & & & -\sigma_1^t \sin\theta_1 t & \sigma_1^t \cos\theta_1 t & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma_m^t \cos\theta_m t & \sigma_m^t \sin\theta_m t \\ & & & & & -\sigma_m^t \sin\theta_m t & \sigma_m^t \cos\theta_m t \end{pmatrix}$$

I modi naturali. Dalle considerazioni fatte precedentemente si può ricavare direttamente la risposta libera nello stato, che sarà data da

$$x_l(k) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i \lambda_i^k u_i + \sum_{j=1}^{\nu} \sigma_j^k m_j \left[\sin(\vartheta_j k + \varphi_j) u_{j_a} + \cos(\vartheta_j k + \varphi_j) u_{j_b} \right]$$

in cui $c_i, c_{j_a}, c_{j_b}, m_j, \varphi_j$ sono calcolabili come nel caso a tempo continuo. Anche per i sistemi tempo discreto possiamo distinguere diversi tipi di modi naturali a seconda del tipo di autovalore associato

- *modi aperiodici*: autovalori reali positivi.
- *modi alternanti*: autovalori reali negativi.
- *modi pseudoperiodici*: autovalori complessi coniugati.

6.2 Analisi nel dominio complesso

La trasformata **Z**.

$$\mathcal{Z}[f(k)] = F(z) = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots + \frac{f(n)}{z^n}$$

Funzione	Trasformata Z
$\delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{\alpha k} = \lambda^k$	$\frac{z}{z-e^{\alpha}} = \frac{z}{z-\lambda}$
$\sin \omega k$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\cos \omega k$	$\frac{-z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\delta(k)$	1
$\frac{k^{(n)}}{n!}$	$\frac{z}{(z-1)^{n+1}}$
$\frac{k^{(n)}}{n!} e^{\alpha(k-n)} = \frac{k^{(n)}}{n!} \lambda^{(k-n)}$	$\frac{z}{(z-\lambda)^{n+1}}$
$k^n f(k)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^n F(z)$

Teoremi.

Traslazione a destra.

$$\mathcal{Z}[f(k-1)] = \frac{1}{z} F(z)$$

Traslazione a sinistra.

$$\mathcal{Z}[f(k+1)] = zF(z) - zf(0)$$

Convoluzione.

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{\kappa=0}^k f(\kappa)g(k-\kappa)\right] = F(z) \cdot G(z)$$

Valore iniziale.

$$f(0) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z)$$

Valore finale.

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

La rappresentazione con lo stato nel dominio complesso.

$$\begin{cases} x(z) = (zI - A)^{-1}zx_0 + (zI - A)^{-1}Bu(z) \\ y(z) = C(zI - A)^{-1}zx_0 + [C(zI - A)^{-1}B + D]u(z) \end{cases}$$

$$\Phi(z) = (zI - A)^{-1}z$$

$$H(z) = (zI - A)^{-1}B$$

$$\Psi(z) = C(zI - A)^{-1}z$$

$$W(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

Espansione in fratti semplici.

- *Poli semplici:*

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^n \frac{z}{z - \lambda_i} R_i$$

$$R_i = \lim_{z \rightarrow \lambda_i} \frac{z - \lambda_i}{z} \Phi(z)$$

- *Poli multipli:*

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{z}{(z - \lambda_i)^k} R_{ik}$$

dove m_i è la molteplicità dell'autovalore i -esimo ed r è il numero di autovalori distinti.

$$R_{ik} = \lim_{z \rightarrow \lambda_i} \frac{1}{(m_i - k)!} \frac{d^{m_i - k}}{dz^{m_i - k}} \left[\frac{(z - \lambda_i)^{m_i}}{z} \Phi(z) \right]$$

Discretizzazione. Per rendere discreto un sistema tempo continuo caratterizzato da una certa $W(s)$ si applica la

$$\boxed{W(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{W(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right]}$$

dove T è il passo di campionamento. Per arrivare a questo risultato si è partito dalla definizione di funzione di trasferimento come rapporto tra l'uscita forzata e il corrispondente ingresso. Possiamo notare inoltre che la risposta a gradino a tempo discreto corrisponde al campionamento della risposta al gradino unitario del sistema a tempo continuo, ovvero

$$L^{-1} \left(\frac{W(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT}$$

e successivamente facendone la trasformata \mathcal{Z} , otterremo

$$\mathcal{Z} \left[L^{-1} \left(\frac{W(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right]$$

ora dividiamo per la \mathcal{Z} trasformata del gradino a tempo discreto (prima abbiamo moltiplicato per il gradino a tempo continuo) per ottenere la funzione di trasferimento cercata.

6.3 Risposta a regime permanente

Risposta a regime ad ingressi periodici. Valgono considerazioni del tutto analoghe al caso tempo continuo eccetto nel passo del confronto con la trasformata in cui in questo caso otterremo

$$\sum_{\vartheta=0}^{\infty} W(\vartheta) (e^{j\omega})^{-\vartheta} = W(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Risposta a regime ad ingressi canonici.

Risposta indiciale. Consideriamo l'ingresso

$$u(k) = \delta_{-1}(k) \quad U(z) = \frac{z}{z-1}$$

e calcoliamo la risposta forzata

$$\begin{aligned} y_f(z) &= W(z)U(z) \\ &= W(z) \frac{z}{z-1} \\ \frac{y_f(z)}{z} &= \frac{W(z)}{z-1} \\ &= \frac{K}{z-1} + \frac{R_1}{z-p_1} + \dots + \frac{R_n}{z-p_n} \\ y_f(k) &= K\delta_{-1}(k) + \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{z-p_i} \\ &= K\delta_{-1}(k) \end{aligned}$$

Analogamente al caso tempo continuo la risposta indiciale tende ad un valore costante pari al guadagno che in questo caso varrà

$$K = W(1)$$

6.4 Stabilità

Condizioni.

- *Stabilità semplice:*

$$\|\phi(k)\| < \text{const (limitatezza)}$$

che in termini di autovalori equivale ad imporre che

$$\begin{cases} |\lambda_i^1| \leq 1 \\ |\lambda_i^{>1}| < 1 \end{cases}$$

- *Stabilità asintotica:* E' necessaria la stabilità semplice e in più

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi(k)\| = 0$$

che in termini di autovalori equivale ad imporre che

$$|\lambda_i| < 1$$

Criterio di Routh. Anche nel caso tempo discreto è utilizzabile il criterio di Routh effettuando però una sostituzione di variabile, considerando un generico polinomio

$$d(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

$$\text{con } z = \frac{s+1}{s-1}$$

Criterio di Jury. Come per il criterio di Routh si tratta di costruire una tabella, partendo dal polinomio caratteristico

$$d(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

a_0	a_1	a_n
a_n	a_{n-1}	a_0
b_0	b_1	...	b_{n-1}	
b_{n-1}	b_0	
c_0	...	c_{n-2}		
c_{n-2}	...	c_0		
\vdots	\vdots	\vdots		
t_0	t_1	t_2		
t_2	t_1	t_0		

$$\begin{aligned} b_0 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix} \\ b_{n-1} &= \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix} \\ b_k &= \begin{vmatrix} a_0 & a_{k+1} \\ a_n & a_{n-k-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Si avrà stabilità asintotica se saranno verificate le condizioni

- $d(1) > 0$
- $(-1)^n d(-1) > 0$
- $|a_n| > |a_0|, |b_0| > |b_{n-1}|, \dots, |t_0| > |t_2|$

Capitolo 7

Esercizi

Esercizio 7.1. (Esame di "Teoria dei sistemi" 13.12.2004 esercizio 2 compito A)

Tracciare il diagramma di Bode relativo alla funzione di trasferimento

$$W(s) = k \frac{1-s}{s^2(1+s)}$$

- *Fattore binomio:* $(1-j\omega)$ a numeratore

- Modulo:

$$\omega \ll 1 \rightarrow M_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg 1 \rightarrow M_{\text{dB}} = \text{retta: } 20x - c$$

$$\omega = 1 \rightarrow M_{\text{dB}} = 3 \text{ dB}$$

- Fase:

$$\omega \ll 1 \rightarrow \angle = 0$$

$$\omega \gg 1 \rightarrow \angle = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega = 1 \rightarrow \angle = -\frac{\pi}{4}$$

- *Fattore binomio:* $(1+j\omega)$ a denominatore

- Modulo:

$$\omega \ll 1 \rightarrow M_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg 1 \rightarrow M_{\text{dB}} = \text{retta: } -20x - c$$

$$\omega = 1 \rightarrow M_{\text{dB}} = 3 \text{ dB}$$

- Fase:

$$\omega \ll 1 \rightarrow \angle = 0$$

$$\omega \gg 1 \rightarrow \angle = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega = 1 \rightarrow \angle = -\frac{\pi}{4}$$

- *Fattore monomio:* $(j\omega)$ a denominatore

- Modulo:

$$\omega = 1 \rightarrow M_{\text{dB}} = 0$$

$$\omega = 10 \rightarrow M_{\text{dB}} = 20$$

$$\omega = 100 \rightarrow M_{\text{dB}} = 40$$

- Fase:

$$\angle = -\frac{\pi}{2}$$

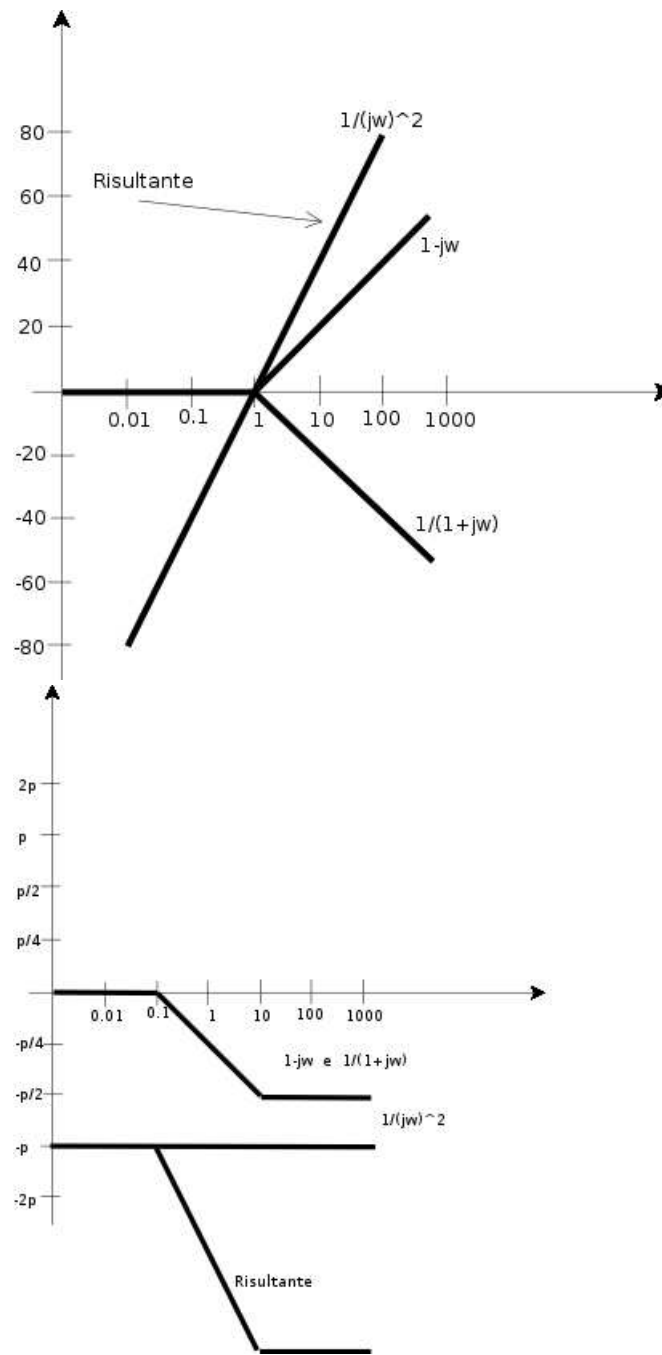


Figura 7.1.

Esercizio 7.2. (Esame di "Teoria dei sistemi" 13.12.2004 esercizio 1 compito A)

Assegnato il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

a) Calcolare $\Phi(t)$ e $W(t)$

Calcoliamo per prima cosa gli autovalori

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$$

Essendo gli autovalori tutti reali, allora possiamo calcolare l'evoluzione libera nello stato tramite la

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^3 e^{\lambda_i t} u_i v_i^T$$

per fare ciò dobbiamo calcolare prima di tutto gli autovettori sinistri associati agli autovalori

$\rightarrow u_1$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)u_1 &= 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} c \\ a - b + c \\ -2c \end{pmatrix} &= 0 \\ u_1 &= \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\rightarrow u_2$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)u_2 &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} a + c \\ a + c \\ -c \end{pmatrix} &= 0 \\ u_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\rightarrow u_3$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_3 I)u_3 &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2a + c \\ a + b + c \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ u_3 &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} \\ u_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ora possiamo calcolare gli autovettori destri

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} &= (u_1 \ u_2 \ u_3)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \text{trasposta} \left(\frac{\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{-2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{trasposta} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \sum_{i=1}^3 e^{\lambda_i t} u_i v_i^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1-e^{-2t}}{2} \\ -1 & e^{-t} & -\frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Di conseguenza possiamo calcolare anche

$$\begin{aligned}
W(t) &= C\Phi(t)B \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1-e^{-2t}}{2} \\ -1 & e^{-t} & -\frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-2t} \\ 2 & -e^{-t} & 1 - e^{-t} - 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 3 - 2e^{-t} - 2e^{-2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) *Studiare eccitabilità e osservabilità*

c) *(non nel compito) Calcolare la funzione di trasferimento tramite l'uso del metodo complesso*

Per calcolare la funzione di trasferimento, come prima cosa dobbiamo trovare la

$$\begin{aligned}
(sI - A)^{-1} &= \begin{pmatrix} s & 0 & 1 \\ 1 & 1+s & 1 \\ 0 & 0 & 2+s \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} (1+s)(2+s) & 2+s & 0 \\ 0 & s(2+s) & 0 \\ 1+s & s+1 & s(1+s) \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{1}{s(1+s)(2+s)} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+2)} & \frac{1}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{s(s+2)} \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \\
C(sI - A)^{-1}B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \frac{1}{s(s+2)} \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s} - \frac{1}{s(s+1)} & -\frac{1}{s+1} & \frac{-2}{s+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{s} - \frac{1}{s(s+1)} & -\frac{1}{s+1} & -\frac{2}{s+2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d) Calcolare la risposta all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t-1) - \delta_{-1}(t-2)$

La trasformata di laplace della matrice delle evoluzioni forzate in ingresso, sarà

$$\begin{aligned} W(s) &= \mathcal{L}[W(t)] \\ &= \mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 3 - 2e^{-t} - 2e^{-2t} \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} \\ 3\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per semplificare i calcoli possiamo ricorrere ad alcune proprietà della trasformata, come quella della sovrapposizione degli effetti e quella della traslazione nel tempo, dunque per ora consideriamo l'ingresso $u(s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s}$ e poi trasleremo nel tempo il risultato.

E dunque la risposta forzata all'ingresso dato, sarà

$$\begin{aligned} W(s)u(s) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} \\ 3\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \end{pmatrix} \frac{1}{s} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s(s+2)} \\ 3\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s(s+1)} - \frac{2}{s(s+2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque per antitrasformare dovremmo prima scomporre alcune frazioni

→

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s+2)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} \\ \frac{1}{s(s+2)} &= \frac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)} \\ 1 &= As + 2A + Bs \\ \begin{cases} 2A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} & \\ \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -A \end{cases} &\implies \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)} \end{aligned}$$

Analogamente si procede con gli altri casi, ottenendo

$$\begin{aligned} W(s)u(s) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)} \\ 3\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} \end{pmatrix} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[W(s)u(s)]\Big|_{t-1} \cdot \delta_{-1}(t-1) - \mathcal{L}^{-1}[W(s)u(s)]\Big|_{t-2} \cdot \delta_{-1}(t-2) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} \\ 3(t-1) - 2 + 2e^{-(t-1)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} \end{pmatrix} \delta_{-1}(t-1) + \\ &\quad + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} \\ 3(t-2) - 2 + 2e^{-(t-2)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} \end{pmatrix} \delta_{-1}(t-2) \end{aligned}$$

e) Calcolare la risposta a regime permanente, se esiste, all'ingresso $u(t) = 2\sin(2t)$

Esercizio 7.3. (Esame "Teoria dei Sistemi" 29.11.2003 esercizio 5) Studiare la stabilità del sistema a tempo continuo avente il seguente polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = 3\lambda^6 + 9\lambda^4 + 6\lambda^2 + 1$$

Cominciamo col costruire la tabella di Routh del polinomio

	3	9	6	0
6	0	0	0	1
5				
4				
3				
2				
1				
0				

Applicando il metodo della somma per eliminare gli zeri otterremo

6	3	9	6	0
5	-1	0	0	1
4	9	6	3	
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{21}{2}$		
1				
0				

Possiamo anche evitare di continuare visto che abbiamo già trovato una variazione di segno, il che significa che non tutti gli autovalori sono a parte reale negativa, dunque il sistema rappresentato dal polinomio non è stabile internamente nè asintoticamente nè semplicemente.