

第二章 惯性导航

2.1 惯性导航中常用的参考坐标系

惯性导航系统（Inertial Navigation System, INS）是利用惯性敏感器（陀螺仪和加速度计）测量得到的载体运动的角速率和加速度，依据惯性定律计算载体位置、速度、姿态等运动参数的装置或系统。载体的运动参数都是相对于某个参考坐标系而言的。因此，为了阐述 INS 的基本原理、建立 INS 的动力学方程和了解 INS 的导航解算过程，需要建立描述载体运动的参考坐标系。

惯性导航常用的坐标系有：

（1）地心惯性坐标系（简称 i 系）：对于研究地球表面和近地空间运载体的导航定位问题，惯性坐标系的原点 o 通常取在地心， ox 轴在地球赤道平面指向春分点， oz 轴与地球极轴重合指向北极， oy 轴在地球赤道平面内与另外两个坐标轴构成右手直角坐标系。通常用角标“ i ”表示地心惯性坐标系。

（2）地球坐标系（简称 e 系）：在地球表面附近运动的载体的位置和速度都是相对于地球而言的，因此，需要一个与地球固联的参考坐标系。通常取地球坐标系的原点 o 在地心，一个坐标轴与地球极轴重合指向北极为正，记做 oz ， ox 坐标轴和 oy 坐标轴都在地球的赤道平面内，其中 ox 轴是格林尼治子午面与赤道平面的交线， oy 轴与 ox 轴、 oz 轴构成右手正交坐标系。通常用角标“ e ”表示地球坐标系。

（3）导航坐标系（简称 n 系）：导航坐标系是惯导系统求解导航参数时所采用的坐标系。对于平台式惯性导航系统，理想的平台坐标系就是导航坐标系。对于捷联式惯性导航系统来说，导航参数不在载体坐标系内求解，必须将加速度测量量分解到某个求解导航参数较为方便的坐标系内，再进行导航计算，这个坐标系就是导航坐标系。根据使用习惯、方便程度和载体所处的位置等的不同，可以选用不同的坐标系作为导航坐标系。经常选用的导航坐标系有指北方位坐标系、自由方位坐标系和游移方位坐标系。指北方位坐标系的坐标原点 p 在载体的质心，取 px 坐标轴沿当地纬线指向东， py 坐标轴沿当地子午线指北，它们都在当地水平面内， pz 坐标轴沿当地地理垂线垂直向上，即东北天（ENU）地理坐标系。有的导航系统也采用北天东（NUE）、北西天（NWU）或北东地（NED）等地理坐标系作为导航坐标系的轴向。经常用角标“ n ”表示导航坐标系，用角标“ g ”表示地理坐标系（简称 g 系）。当导航坐标系轴向与地理坐标系轴向相同时，在不混淆的情况下也用角标“ n ”表示地理坐标系。

（4）游移方位坐标系（简称 w 系）：采用指北方位坐标系作为导航坐标系，在高纬度地区，沿垂直轴的平台跟踪指令角速度过大，物理上也难以实现，为了避免这一问题，

有的 INS 在导航定位计算中采用与地理坐标系在水平面内相差一个游动方位角 α 的当地水平坐标系作为导航坐标系。这样，游移方位坐标系的原点与地理坐标系原点重合，水平面内的两个坐标轴各偏离地理坐标系中两个坐标轴 α 角， α 角以反时针偏离东向坐标轴为正。

(5) 载体坐标系（简称 b 系）：坐标系原点在载体质心。如采用前述东北天地理坐标系作为导航坐标系，则习惯上取 y_b 轴指向载体纵轴方向， z_b 轴指向载体的竖轴方向， x_b 轴与 y_b 轴及 z_b 轴构成右手正交坐标系。定义 x_b 、 y_b 、 z_b 轴为载体的俯仰、滚动和偏航轴。载体的姿态角 θ 、 γ 、 ψ ，即俯仰角、滚转角和偏航角是体坐标系相对于导航坐标系的方位。

图 2-1 给出了惯性导航常用的坐标系的定义及坐标系之间的关系。

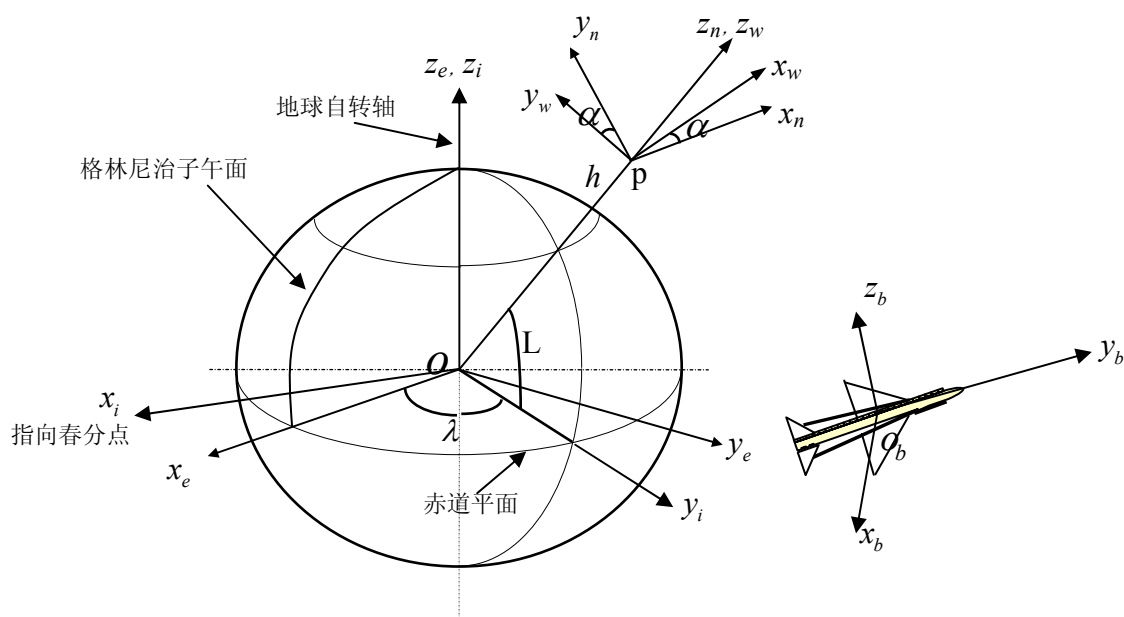


图 2-1 坐标系定义及坐标系之间的关系

根据上述坐标系的定义和图 2-1，以及载体运动参数的定义，可以看出：

(1) 载体在地球表面位置可用经度 λ 和纬度 L 表示，确定载体在地球表面的位置就是确定地理坐标系 (g) 或导航坐标系 (n) 与地球坐标系 (e) 之间的方位关系。载体的姿态是体坐标系 (b) 相对某参考坐标系 (如 n 系或 g 系) 的方位或指向。确定载体的姿态就是确定 b 系与 n 系 (或 g 系) 之间的方位关系，常用姿态角、方向余弦或四元数表示。

(2) 载体相对地球运动引起 n 系相对 e 系的转动。北向速度 v_N^n 引起 n 系相对 e 系转

动, 转动的角速度为 $\dot{L} = \frac{v_N^n}{R_M + h}$; 东向速度 v_E^n 引起 n 系绕极轴相对 e 系转动, 转动的角

速度为 $\dot{\lambda} = \frac{v_N^n}{(R_N + h) \cos L}$ 。 R_M 和 R_N 分别为地球椭球当地子午圈和当地卯酉圈的曲率半径。

$$R_M = \frac{a(1-f^2)}{[(1-f)^2 \sin^2 L + \cos^2 L]^{3/2}} \approx a(1-2f+3f \sin^2 L) \quad (2-1)$$

$$R_N = \frac{a}{[(1-f)^2 \sin^2 L + \cos^2 L]^{1/2}} \approx a(1+f \sin^2 L) \quad (2-2)$$

式中, $f = \frac{a-b}{a}$ 为椭圆度, a 、 b 分别是地球参考椭球体的长、短半轴。在 WGS-84 坐标系中, $a=6378137\text{m}$, $1/f=298.257223536$ 。

(3) n 系相对 i 系的转动包括 n 系相对 e 系的转动和 e 系相对 i 系的转动。 e 系相对 i 系的转动是由地球的自转引起的, 转动的角速度为 ω_{ie} 。 n 系相对 e 系的转动角速度 ω_{en} 和 ω_{ie} 在 n 系各轴上的投影分量分别为

$$\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos L \\ \omega_{ie} \sin L \end{bmatrix} \quad \omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{v_N^n}{R_M + h} \\ \frac{v_E^n}{R_N + h} \\ \frac{v_E^n}{R_N + h} \tan L \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

综合考虑地球自转和载体航行的速度影响, n 系相对 i 系的转动角速度 ω_{in} 在 n 系各轴上的投影分量 ω_{in}^n 与 ω_{ie}^n 、 ω_{en}^n 的关系为 $\omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n$, 即

$$\omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{v_N^n}{R_M + h} \\ \omega_{ie} \cos L + \frac{v_E^n}{R_N + h} \\ \omega_{ie} \sin L + \frac{v_E^n}{R_N + h} \tan L \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

2.2 惯性敏感器与惯性测量组合

惯性敏感器（Inertial Sensors）又称惯性器件或惯性仪表，主要是指各种陀螺仪和加速度计，用来测量载体的角运动和线运动。其中，陀螺仪测量角运动，加速度计测量线运动加速度（加速度计实际测量的是载体的非引力加速度，即比力或视加速度，因此应准确地称为视加速度计或比力敏感器）。“惯性”的含义为：陀螺仪和加速度计的基本工作原理是动量矩定理和牛顿第二定律，即惯性原理；陀螺仪和加速度计的输出是相对惯性空间的测量值。惯性导航系统的精度在很大的程度上取决于陀螺仪和加速度计的精度。因此，陀螺仪和加速度计作为惯性导航系统的核心部件，是惯性技术的重要研究内容。本节简要介绍典型惯性敏感器的分类、工作原理、测量模型和性能参数。

2.2.1 陀螺仪

陀螺仪是敏感角运动的一种测量装置。这种仪表常用来测量运载体的角位移或角速度。陀螺仪不仅是运载体航行驾驶的重要仪表，而且是运载体控制系统、惯性导航系统和惯性制导系统的核心元件。

当陀螺仪在平台式惯导系统中应用时，陀螺仪安装在平台上，用来敏感平台的角偏移。当陀螺仪在捷联式惯导系统中应用时，陀螺仪直接与运载体固联，用来敏感运载体的角速度或角位移。

最早问世的陀螺仪是由高速旋转的刚体转子支承在框架上而构成的，后来又研制出多种采用特殊支承方法的无框架的刚体转子陀螺仪。因此，传统上把陀螺仪定义为利用动量矩（由自转转子产生）敏感壳体相对惯性空间绕正交于自转轴的一个或两个轴的角运动的装置。陀螺仪的自由度数，通常是指自转轴可绕其自由旋转的正交轴的数目。由此，刚体转子陀螺仪可分为两自由度陀螺仪和单自由度陀螺仪。根据约束情况的不同，在稳态时所加的平衡力矩的性质亦不同，通常将单自由度陀螺仪分成：速率陀螺仪、速率积分陀螺仪和重积分陀螺仪三种类型。

随着科学技术的发展，还相继发现数十种物理现象并研制出可以被用来感测载体相对惯性空间的角运动的测量装置，人们亦把陀螺仪这一名称扩展到这些没有刚体转子而功能与经典陀螺仪等同的敏感器。

根据陀螺仪工作原理的不同，可将陀螺仪分为机械式陀螺仪、振动式陀螺仪、光学陀螺仪、静电陀螺仪等。常见的挠性陀螺仪、液浮陀螺仪、气浮陀螺仪等都是机械式陀螺仪；酒杯式振动陀螺、谐振陀螺、硅陀螺、振动弦陀螺、音叉陀螺等都属于振动陀螺；激光陀螺、光纤陀螺等都是光学陀螺。

2.2.1.1 陀螺仪的性能指标与等级

描述陀螺仪的主要性能指标有：量程、零偏/零偏稳定性及零偏重复性、漂移、标度因数/标度因数稳定性和非线性、分辨率、带宽。

(1) 量程

陀螺仪在正、反方向能检测到的输入角速率的最大值表示了陀螺仪的测量范围，即量程。该值越大表示陀螺仪敏感角速率的能力越强，其单位为 $^{\circ}/s$ 。

(2) 零偏、零偏稳定性及零偏重复性

当输入角速率为零时，陀螺仪的输出量为零偏。零偏通常用规定时间内测得的输出量平均值相应的等效输入角速率表示。零偏稳定性是当输入角速率为零时，陀螺仪的输出量围绕其均值的离散程度，以规定时间内输出量的标准偏差相应的等效输入角速率表示。零偏重复性是在同样条件下及规定的时间间隔内、重复测量陀螺仪零偏之间的一致程度，以各次测试所得零偏的标准偏差表示。零偏、零偏稳定性、零偏重复性的单位都是 $(^{\circ}/h)$ 。

(3) 漂移

陀螺漂移是指陀螺仪的测量值或测量误差随时间的变化率，其单位为 $(^{\circ}/h)$ 。例如，一个机械位移陀螺仪提供相对于陀螺自转轴的运载体姿态信息，由于作用在转子上的干扰力矩的影响，自转轴的方向会随时间变化，因此，敏感器测量的姿态信息包含了陀螺的漂移。在惯性导航系统中，由于系统的各种误差，位置估计值会随时间漂移。因此通常用位置漂移量的大小来衡量惯性导航系统的性能，位置漂移的单位为 $n\ mile/h$ 。

陀螺仪的漂移一般包含系统性漂移和随机漂移。系统性漂移是指与规定的工作条件有关的漂移率分量，它由与加速度有关的漂移率和与加速度无关的漂移率组成，用单位时间内的角位移表示。系统漂移率具有一定的规律性，在应用中可以设法加以补偿。随机漂移是指在运行过程中陀螺输出的随机波动，可用一定时间内陀螺角速率输出的标准偏差来定义。随机漂移不能用一般的方法补偿，是衡量陀螺仪精度的主要指标。

随机漂移通常用角随机游走系数来表示。随机游走系数是由白噪声产生的随时间积累的陀螺仪输出角随机误差系数，单位为 $(^{\circ})/\sqrt{h}$ 。角随机游走系数反映了陀螺的研制水平。

(4) 标度因数、标度因数稳定性和非线性

陀螺仪标度因数（也称刻度因子或比例因子）是指输出变化与输入角速率变化的比值，该比值是根据整个正（或负）输入角速率范围内测得的输入/输出数据，通过最小二乘法拟合求出的直线的斜率。以模拟量输出的陀螺仪的标度因数常用多少毫伏每度每秒 $(mV/(^{\circ})/s)$ 的形式来表示。

一般用标度因数稳定性和非线性来描述标度因数存在的误差特性。标度因数稳定性是指陀螺在不同输入角速率情况下能够通过标称标度因数获得精确输出的能力。非线性

是指由实际输入输出关系确定的实际标度因数与标称标度因数相比存在的非线性特征。有时还会采用线性度，即陀螺输入输出曲线与标称直线的偏离程度，来描述标度因数误差。标度因数误差通常用满量程输出的百分比或百万分比（ppm）表示。

由于捷联惯导系统工作在大角度动态范围，因此，标度因数误差对捷联系统的影响比平台系统更加严重。

（5） 阈值与分辨率

陀螺仪的阈值表示在零输入下陀螺能够敏感的最小输入角速率。分辨率表示在规定的输入角速率下能敏感的最小输入角速率增量。这两个量均表征陀螺对输入角速度的灵敏程度。

（6） 带宽

带宽是指陀螺仪能够精确测量输入角速度的频率范围，这个频段范围越大表明陀螺的动态响应能力越强。对于开环模式工作的陀螺，带宽定义为响应相位从 0 到滞后 90 度对应的频段，也可等同定义为振幅响应比为 0.5 即 3dB 点对应的频段。对于闭环模式工作的陀螺，带宽定义为控制及解调电路的带宽，一般指解调电路中使用的低通滤波器的截止频率。电路带宽实际上是反映该电路对输入信号的响应速度，带宽越宽，响应速度越快，允许通过的信号频率越高。

在上述性能指标中，量程、标度因数稳定性、随机漂移及带宽是确定陀螺性能的重要参数，依据这几个主要的性能参数可将陀螺仪划分成四类：战略级、惯导级、战术级和速率级。

一般而言，对于应用战略级仪表的导航系统，其位置累计误差应小于 0.1n mile/h（1n mile/h=1.85km/h），它要求陀螺随机漂移率应达到 0.0015°/h。应用导航级仪表的系统，位置累计误差应小于 1n mile/h，它要求陀螺随机漂移率应达到 0.015°/h。因此，通常把随机漂移率达到 0.015°/h 的陀螺仪称为惯导级陀螺仪。应用战术级仪表的系统，位置累计误差可达到 10~50n mile/h，它要求陀螺随机漂移率应达到 0.5°/h。在战术武器相对较短的飞行时间中，其装备的 INS 的位置累计误差不会太大，因此，对战术级仪表的性能要求较低。不能满足战术级性能要求的陀螺仪为速率级陀螺。表 2-1 列出了不同级别陀螺仪的主要性能要求。

表 2-1 战略级、惯导级、战术级和速率级陀螺的性能要求

性能级别 指标	战略级	惯性级	战术级	速率级
量程 (°/s)	>100	>400	>500	50~1000
标度因数的非线性 (ppm)	<1	<10	<100	<1000
随机漂移 (°/h)	<0.0015	<0.015	<0.5	>0.5
带宽 (Hz)	~100	~100	~100	>70

2.2.1.2 机械式陀螺仪

2.2.1.2.1 机械式陀螺仪的特性和工作原理

机械式陀螺仪是一种利用高速旋转的质量来敏感其自转轴在惯性空间定向变化的装置。机械式陀螺仪具有两大特性：定轴性与进动性。定轴性就是当陀螺仪不受外力矩作用时，陀螺仪自转轴相对于惯性空间保持方向不变；进动性就是当陀螺受到外力矩作用时，陀螺自转轴将沿最短路径趋向于外力矩矢量，进动角速度正比于外力矩。当输入和输出量对换时这种进动性也是成立的，即当陀螺存在一个角速度输入，则陀螺将产生一个力矩输出。

(1) 定轴性

高速旋转转子的主轴能在空间保持方位不变，因此给出了一个参考方向。陀螺仪的这个特性是由高速旋转转子所具有的动量矩决定的。旋转体的动量矩是其转动惯量和自转角速度的乘积。设转子对自转轴的转动惯量为 J_z ，自转角速度为 Ω ，则转子的动量矩可表示为

$$\mathbf{H} = J_z \Omega \quad (2-5)$$

陀螺仪的转子绕自转轴高速旋转，即具有动量矩 \mathbf{H} 时，如果不受外力矩作用，自转轴将有相对惯性空间保持方向不变的特性，称为陀螺仪的定轴性。定轴性是陀螺仪的基本特性。

陀螺仪的定轴性可用动量矩定理加以说明。动量矩定理描述了刚体动量矩的变化率与作用在刚体上的外力矩之间的关系。用矢量表示的动量矩定理为

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{M} \quad (2-6)$$

它表明，刚体对任一定点的动量矩 \mathbf{H} 对时间的导数 $\frac{d\mathbf{H}}{dt}$ （即动量矩 \mathbf{H} 的变化率，随时间在惯性空间可能有大小和方向的变化），等于绕同一点作用于刚体的外力矩 \mathbf{M} 。当陀螺仪不受外力矩作用时，有 $\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{0}$ ，由此 \mathbf{H} 为常数，这表明陀螺动量矩 \mathbf{H} 在惯性空间中既无数值大小的改变，也无方向的改变，即自转轴在惯性空间中保持原来的初始方位不变。

(2) 进动性

进动性是陀螺仪的又一基本特性。当陀螺仪进入正常工作状态时，转子的转速达到额定值，动量矩 \mathbf{H} 的大小为一常值。对于两自由度陀螺仪，绕内框轴或外框轴作用在陀螺仪上的外力矩 \mathbf{M} ，由于框架的结构特点，不会绕自转轴传递到转子上使它的速度发生改变，因而不会引起动量矩 \mathbf{H} 的大小发生变化。根据动量矩定理，既然动量矩 \mathbf{H} 的大

小保持不变，那么绕内框轴或外框轴作用在陀螺仪上的外力矩 \boldsymbol{M} ，会引起动量矩 \boldsymbol{H} 的方向必然要发生变化。若外力矩 \boldsymbol{M} 绕内框轴作用在陀螺仪上，则动量矩 \boldsymbol{H} 绕外框轴相对惯性空间转动；若外力矩 \boldsymbol{M} 绕外框轴作用在陀螺仪上，则动量矩 \boldsymbol{H} 绕内框轴相对惯性空间转动。这种在陀螺仪上施加外力矩 \boldsymbol{M} ，会引起陀螺仪动量矩 \boldsymbol{H} 相对惯性空间转动的特性，称为陀螺仪的进动性（为了与一般刚体的转动相区分，把陀螺仪绕着与外力矩矢量相垂直方向的转动叫做进动，其转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 叫做进动角速度，把进动所绕的轴叫做进动轴）。

进动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向，取决于动量矩 \boldsymbol{H} 和外力矩 \boldsymbol{M} 的方向，并符合右手定则。即从动量矩 \boldsymbol{H} 沿最短路径握向外力矩 \boldsymbol{M} 的右手旋进方向，为进动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向。进动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小，取决于动量矩 \boldsymbol{H} 和外力矩 \boldsymbol{M} 的大小。其计算公式为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}} \quad (2-7)$$

根据式(2-5)，上式也可写成

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{M}}{J_z \boldsymbol{\Omega}} \quad (2-8)$$

这表明，当动量矩为一定值时，进动角速度与外力矩成正比；当外力矩为一定值时，进动角速度与动量矩成反比；当动量矩和外力矩均为一定值时，进动角速度也保持为一定值。

上述分析表明：陀螺仪产生进动的内因是转子的高速自转即动量矩的存在，外因则是外力矩的作用，而且是外力矩改变了陀螺动量矩的方向；如果转子没有自转即动量矩为零，或者由于陀螺的外力矩为零，或者外力矩矢量与动量矩矢量共线，那么陀螺仪就不会表现出进动性。

目前，利用陀螺的进动性和定轴性设计的敏感器主要有单自由度陀螺和两自由度陀螺。图 2-2 给出了单自由度陀螺和两自由度陀螺的结构示意图。下面分别介绍它们的工作原理和结构。

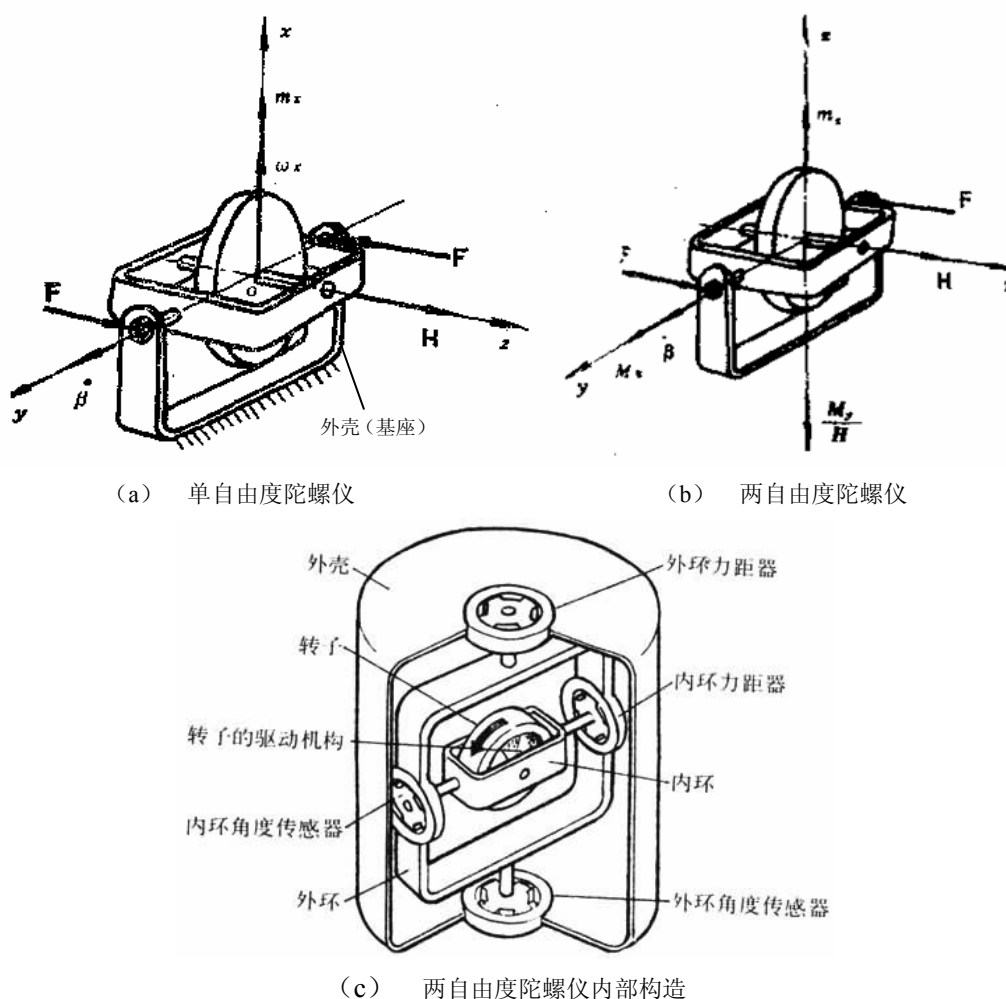


图 2-2 机械式陀螺仪的结构示意图

(1) 单自由度陀螺仪的工作原理

图 2-2 (a) 是一个单自由度陀螺的结构示意图。基于陀螺仪的进动性，若转子被迫以某个角速度绕输入轴 (x 轴) 转动，则绕输出轴 (框架旋转轴, y 轴) 就会出现一个力矩。陀螺仪在输出轴装有一个平衡弹簧，使这个力矩在输出轴转动一个角度 α ，该输出角度 α 正比于力矩，也就是正比于输入轴的角速度。

作为姿态敏感器来说，单自由度陀螺有速率陀螺和速率积分陀螺两个基本类型，它们都是根据陀螺仪的进动性原理工作的。速率积分陀螺是把速率陀螺的输出量再进行一次积分，这种功能除了可由速率积分陀螺装置完成外，也可以由星载计算机完成。速率积分陀螺用来直接测量载体的角位置。速率陀螺测量载体的角速度，通常是作为自旋速率控制或作为姿态稳定系统的一个速率反馈敏感器。

(2) 两自由度陀螺仪的工作原理

图 2-2 (a) 中单自由度陀螺仪的陀螺旋转轴只有一个框架支承。若将此框架作为内

环, 其外壳不与载体固连, 而形成另一个框架, 称为外环, 那么该陀螺的转轴就由两个框架支承, 即为两自由度陀螺, 如图 2-2 (b) 和 (c) 所示。两自由度陀螺利用定轴性工作, 用来测量姿态角, 通常也称为位置陀螺。参照如图 2-2 (c), 位置陀螺测量姿态角的原理如下:

在陀螺仪的内环和外环都安装有传感器, 传感器由定子和转子组成, 当定子和转子均在零位时输出为零, 输出信号和极性与定子和转子之间的角度成比例关系。安装在内环上的传感器其转子与内环固连, 定子与外环固连。安装在外环上的传感器转子与外环固连, 而其定子与壳体固连。当载体姿态发生变化时, 由于陀螺仪转轴具有定轴性, 因此内外环均要发生相应的转动以保持陀螺仪转轴相对于惯性空间不变。此时, 内外环上的传感器就输出内外环转动的角度, 该角度表征了载体姿态的变化。

2.2.1.2.2 挠性陀螺仪

挠性陀螺仪是一种高性能、低成本的惯性级陀螺, 它以挠性支承代替传统的悬浮技术而带来一系列的优点, 在惯性导航系统中有广泛的应用。

在刚体转子式陀螺仪的发展与繁衍过程中, 如何实现无摩擦支撑始终是人们追求的目标和问题的核心。传统的技术途径是采用各种悬浮技术, 如液浮、磁悬浮、气浮以及静电悬浮, 使活动部件与固定部件避免接触。而挠性陀螺在消除支撑干摩擦的方法上, 使用一种柔软的弹性支撑即挠性支撑来取代传统的铰链支撑。挠性支撑可以通过自身的变形来给陀螺转子提供所需的转动自由度, 因而彻底避免了干摩擦。挠性支撑本身的弹性恢复力矩在一定范围内服从胡克定律, 而且基本上没有不确定成分, 因此可以对它进行精确的补偿。按照挠性支承的具体形式和补偿弹性力矩的方法, 挠性陀螺可分为细颈式和动力调谐式两种类型。细颈式挠性陀螺开始研制的时间较早, 尚未投入批生产便出现了更为新颖的动力调谐式挠性陀螺。人们常把动力调谐式挠性陀螺称为干式陀螺, 而把液浮陀螺称为湿式陀螺。动力调谐式挠性陀螺发展迅速, 在航空、航天及航海领域都得到了广泛应用。下面对重点介绍目前常用的动力调谐式挠性陀螺仪的结构特点和工作原理。

1. 动力调谐陀螺仪的结构特点

动力调谐式挠性陀螺仪的驱动轴与转子之间是靠挠性接头连接的 (如图 2-3 (a) 所示)。挠性接头由上环、平衡环、下环、一对共轴线的内挠性杆、一对共轴线的内挠性杆五部分组成, 其结构示意图如图 2-3 (b) 所示。上环与陀螺转子固联, 下环与驱动轴固联, 平衡环与陀螺转子相连。该挠性接头的内挠性杆轴线应垂直于驱动轴轴线, 而外挠性杆轴线与内挠性杆轴线相互垂直, 并与驱动轴轴线相交于一点。

当驱动电机使驱动轴高速旋转时, 驱动轴通过内挠性杆带动平衡环, 平衡环通过外挠性杆带动陀螺转子作高速旋转, 从而产生陀螺动量矩。内、外挠性杆绕其轴线具有低

的扭转刚度，而绕与自身轴线垂直的方向具有高的抗弯刚度，这样，挠性接头允许陀螺转子绕着垂直于自转轴的两个正交轴转动，获得两个自由度。因此，动力调谐式挠性陀螺仪是一种用挠性支承将转子与驱动轴连接起来的两自由度陀螺仪。

动力调谐式挠性陀螺仪具有以下优点：

- (1) 消除了影响陀螺性能的摩擦等干扰因素；
- (2) 体积小、重量轻、结构简单、零件数少、制造成本低；
- (3) 耗能低、可靠性高、寿命长、工作稳定；
- (4) 工作准备时间短、精度较高。

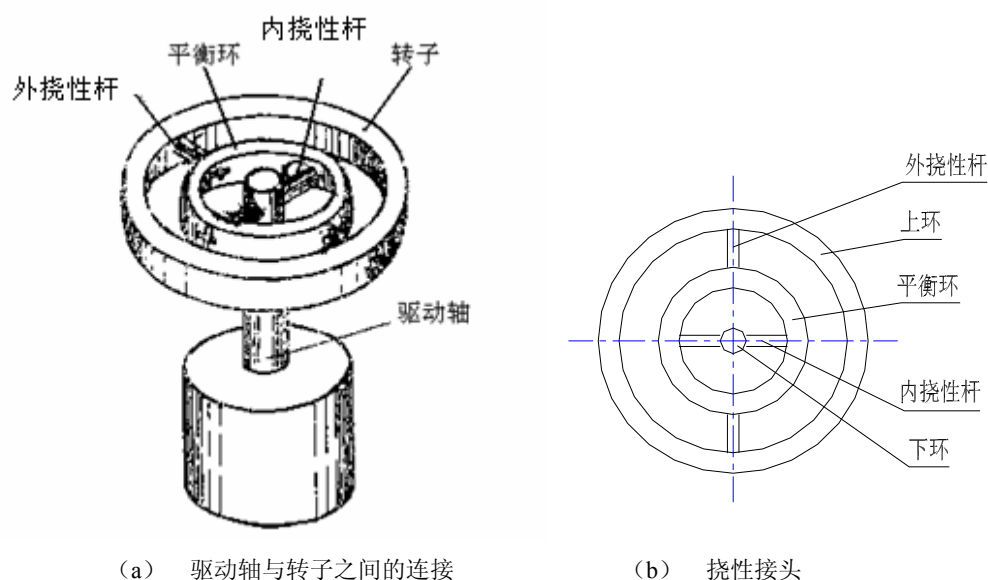


图 2-3 动力调谐式挠性陀螺工作示意图

图 2-4 给出了动力调谐式挠性陀螺仪的内部结构示意图。可以看出，动力调谐式挠性陀螺仪由陀螺电机、支承系统、角度传感器、力矩器、陀螺转子、壳体等组成。在动力调谐式挠性陀螺仪壳体上安装了两轴正交且位置中心对称的两对传感器和两对力矩器，它们是陀螺的测量基准。转子镶有径向充磁的磁钢。当力矩器线圈通入施矩电流时，在径向磁场的作用下，转子受到沿转子自转轴方向的电磁作用力，同轴上的力矩器工作在推挽状态，产生的电磁作用力对另一轴形成力偶，从而实现对陀螺施矩。同轴上的传感器输出接成差动形式，用来测量转子赤道平面相对测量基准面的偏转角。

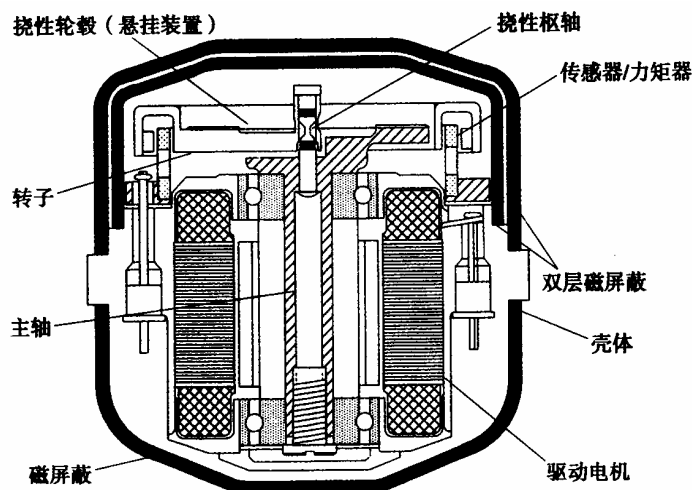


图 2-4 动力调谐式挠性陀螺仪内部结构示意图

图 2-5 为美国 Litton 公司于 1993 年研制成功的世界上最小、最轻的 G-2000 型动力调谐式挠性陀螺仪图片。其外形尺寸为 $\Phi 2.2 \times 1.9\text{cm}$ ，重 2.5g，测量范围为 300 °/s，抗冲击能力为 750g。



图 2-5 G-2000 动力调谐式挠性陀螺仪

2. 动力调谐陀螺仪的工作原理

(1) 动力调谐原理

当陀螺电机通过挠性接头带动陀螺转子高速旋转时，陀螺转子便具有动量矩，保持其自转轴相对惯性空间的方位稳定，当陀螺壳体带动驱动轴相对自转轴有一个偏角 α 、 β 时，自转轴仍然保持其原方位。挠性接头发生弯曲变形，产生弹性恢复力矩 $K \cdot \alpha$ 、 $K \cdot \beta$ 作用在转子上，但是由于挠性接头的结构特点，平衡环将产生扭摆运动。平衡环的扭摆运动将会产生与弹性约束力矩方向相反的“动力反弹性力矩” $-(a - \frac{c}{2})\dot{\theta}^2 \alpha$ 、 $-(a - \frac{c}{2})\dot{\theta}^2 \beta$ 作用到陀螺转子上，这样，绕壳体坐标轴 X 和 Y 作用于陀螺转子的力矩可

表示为:

$$T_x = K\beta + (a - \frac{c}{2})\Omega^2\beta \quad (2-9)$$

$$T_y = K\alpha + (a - \frac{c}{2})\Omega^2\alpha \quad (2-10)$$

式中: α 、 β 分别为自转轴绕壳体坐标轴 Y 和 X 轴相对驱动轴的转角。

适当选择挠性杆的刚度 K 、陀螺转子的自转角速度 Ω , 以及平衡环的赤道转动惯量 a 和极转动惯量 c , 使挠性杆的扭转刚度与动力反弹簧刚度相等, 即:

$$K = -(a - \frac{c}{2})\Omega^2 \quad (2-11)$$

这样, 平衡环的动力反弹性力矩正好补偿了挠性接头的机械弹性力矩, 使陀螺转子不受挠性接头的弹性约束, 而成为自由转子, 其自转轴相对惯性空间具有很高的方位稳定性, 这就是动力调谐。此时称陀螺所处状态为调谐状态, $\dot{\theta}$ 称为调谐转速。

(2) 力反馈原理

动力调谐式挠性陀螺仪工作时有相应的陀螺伺服电路配合, 通过力反馈形式构成闭环工作状态, 用来测量载体的转动角速度, 其原理如下:

当载体相对惯性空间有角运动时, 由于陀螺转子的定轴性, 使直接安装在载体上的陀螺壳体相对陀螺转子产生角偏移, 传感器就会敏感并输出一个与此转角成比例的电压信号, 此信号经过前置放大器、带通滤波器、解调器、校正网络和功率放大器后, 变成一个与转角成比例的直流电流信号, 输入到与陀螺底座固联的力矩器线圈中, 与安装在陀螺转子上的力矩器磁钢相互作用, 产生一个电磁力矩作用至陀螺转子上, 使转子快速进动, 紧紧跟踪载体的角运动, 通过测量力矩器线圈的电流值, 便可测得载体相对惯性空间的角速度。其输出方程为:

$$\omega = K_T I / H \quad (2-12)$$

式中: I — 陀螺仪力矩器电流, 单位为 A;

H — 陀螺仪角动量, 单位为 $\text{Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$;

K_T — 力矩器的力矩系数, 单位为 $\text{N} \cdot \text{m}/\text{A}$ 。

3. 动力调谐陀螺仪的测量模型

一般地, 常规陀螺仪提供的角速率的测量值 ($\tilde{\omega}_x$), 与输入轴施加的角速率 (ω_x) 及陀螺仪其他参数之间的关系, 即陀螺仪的测量模型可用下列表达式表示:

$$\tilde{\omega}_x = E_x \omega_x + M_y \omega_y + M_z \omega_z + B_f + B_{gx} f_x + B_{gy} f_y + B_{axz} f_x f_z + n_x \quad (2-13)$$

式中, f_x 、 f_y 和 f_z 为沿陀螺仪各轴的视加速度; B_f 为与加速度无关的零偏; B_{gx} 、 B_{gy} 为与加速度有关的零偏系数; B_{axz} 为非等弹性零偏系数; n_x 为零均值随机零偏; M_y 、 M_z

为交叉耦合系数； E_x 为标度因数。每项误差系数都具有可重复分量和不可重复部分。 E_x 、 M_y 、 M_z 、 B_f 、 B_{gx} 、 B_{gz} 、 B_{axz} 的可重复分量为可测量量，因此，对它们的误差效应可以进行补偿。试图对工作时的不可重复随机误差进行补偿是不实际的，这种效应只能由敏感器的精心设计和制造来加以控制，或通过现代估计技术进行滤波估计。

与常规陀螺仪相似，动力调谐挠性陀螺仪的测量模型可表示成如下形式：

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_x = E_x \omega_x + M_y \omega_y + M_z \omega_z + B_{fx} + B_{gx} f_x + B_{gy} f_y + B_{axz} f_x f_z + n_x \\ \tilde{\omega}_y = E_y \omega_y + M_x \omega_x + M_z \omega_z + B_{fy} + B_{gy} f_y - B_{gx} f_x + B_{ayz} f_y f_z + n_y \end{cases} \quad (2-14)$$

式中， ω_x 和 ω_y 为陀螺绕其输入轴的角速率； f_x 和 f_y 为沿输入轴的视加速度； f_z 为沿自转轴的视加速度； B_{fx} 、 B_{fy} 为对加速度不敏感的零偏系数； B_{gx} 、 B_{gy} 为对加速度敏感的零偏系数； B_{axz} 、 B_{ayz} 为非等弹性零偏系数； n_x 、 n_y 为零均值随机零偏； E_x 、 E_y 为标度因数； M_x 、 M_y 、 M_z 为交叉耦合系数。

对于以补偿为目的的应用来说，动力调谐陀螺仪的工程化测量模型可写为：

$$\begin{cases} N_x = E_{1x} (B_{0x} + B_{1x} f_x + B_{2x} f_y + B_{3x} f_z + \omega_x + E_{yx} \omega_y + E_{zx} \omega_z) \\ N_y = E_{1y} (B_{0y} + B_{1y} f_x + B_{2y} f_y + B_{3y} f_z + E_{xy} \omega_x + \omega_y + E_{zy} \omega_z) \end{cases} \quad (2-15)$$

式中， N_x 、 N_y 分别为陀螺仪两个通道单位时间内输出的脉冲数，单位为 (Λ/s)； ω_x 、 ω_y 、 ω_z 分别为载体三个轴向的转动角速度，单位为 (°/h)； B_{0x} 、 B_{0y} 分别为陀螺常值漂移项，单位为 (°/h)； B_{1x} 、 B_{1y} 、 B_{2x} 、 B_{2y} 、 B_{3x} 、 B_{3y} 为与视加速度有关的影响系数，单位为 (°/(h·g))； E_{1x} 、 E_{1y} 分别为陀螺仪两个通道输出的标度因数，单位为 (Λ/°)； E_{yx} 、 E_{zx} 、 E_{xy} 、 E_{zy} 为陀螺仪的安装误差系数，单位为 rad。

4. 典型性能参数

动力调谐挠性陀螺仪的主要误差源和性能参数的典型值如表 2-2 所示。

表 2-2 动力调谐挠性陀螺仪典型性能参数值

与加速度无关漂移 (°/h)	0.05~10
与加速度有关漂移 (°/h)	1~10
标度因数的非线性 (ppm)	10~100
带宽 (Hz)	可达 100
量程 (°/s)	可达 1000

2.2.1.3 激光陀螺仪

由于光学陀螺具有结构紧凑、动态范围大等突出的优点，近年来，越来越多的捷联

式惯导系统倾向于使用以激光陀螺为代表的光学陀螺。

光学陀螺的工作原理主要是基于 Sagnac 效应。所谓 Sagnac 效应是指在任意几何形状的闭合光路中，从某一观察点出发的一对光波沿相反方向运行一周后又回到该观察点时，这对光波的光程将由于该闭合光路相对于惯性空间的旋转而不同，光程差的大小与闭合光路的转动速率成正比。利用 Sagnac 效应，通过测量反向传输的两束光之间的物理差别，来测量角度或角速度。

2.2.1.3.1 工作原理和特点

激光陀螺是以感测谐振腔环形光路中正反两路光的光程差来获得被测角速率的敏感器。

考虑如图 2-6 所示的圆形闭合光路，其周长 $L=2\pi R$ 。由相对于光路静止的观测点 P 发出顺时针（CW）和逆时针（CCW）方向运行的两束光波。若此光路以恒定转速 Ω 相对于惯性空间绕垂直于光路平面的轴线顺时针旋转，则顺时针光波运行一周后回到 P 点时原来的 P 点已经移到 P' 处，所走的闭合路程为

$$L_{CW} \approx L(1 + R\Omega/c) \quad (2-16)$$

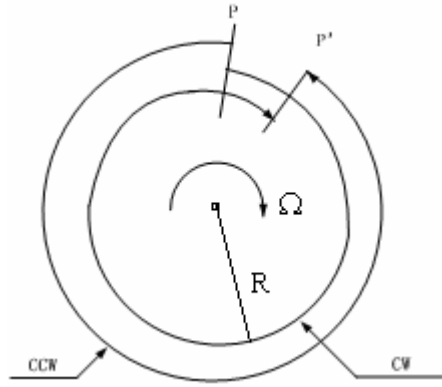


图 2-6 Sagnac 效应示意图

而逆时针方向运行的光波的闭合路程为

$$L_{CCW} \approx L(1 - R\Omega/c) \quad (2-17)$$

其中 c 为谐振腔中的光速，两者的路程差为

$$\Delta L = L_{CW} - L_{CCW} = 4\pi R^2 \Omega/c = 4A\Omega/c \quad (2-18)$$

其中 $A = \pi R^2$ 是环路所围的面积。由此引起的相位差为

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L = \frac{8\pi A}{\lambda c} \Omega \quad (2-19)$$

其中 λ 为光腔内的光波长，这就是 Sagnac 效应。

虽然只要测出光程差,就可求出闭合环形光路相对于惯性空间的转动角速度。但由于现实中光程差非常微小,只有激光和光纤出现后,利用环形激光行波谐振腔双向行波间的谐振频率差或是利用多圈光纤构成等效面积相当大的光纤陀螺,才真正使 *Sagnac* 效应获得了实用价值。

在实际的应用中,激光陀螺依靠环形激光器内的两束反方向运行的行波间的频率差来测量载体的角速度。环形激光器的谐振腔通常由三面或四面高质量的反射镜构成,根据行波谐振腔理论,腔内沿相反方向传播的两束行波的谐振频率必须满足

$$\begin{cases} \nu_{CW} = qc/L_{CW} \\ \nu_{CCW} = qc/L_{CCW} \end{cases} \quad (2-20)$$

其中 q 是整数,称为行波纵模阶次。 L_{CW} 和 L_{CCW} 分别是顺、逆时针光波对应的环形行波谐振腔的光程长度。由上式可以求得环形行波振荡器正、反向行波间的频率差为

$$\Delta\nu = \nu_{CCW} - \nu_{CW} = \frac{4A}{\lambda L} \Omega \quad (2-21)$$

其中 $\frac{4A}{\lambda L}$ 称为标度因数。

将(2-21)式对时间 t 求积分,可得时间 t 内由于正、反向行波频率差所积累的周期数为

$$N = \int_0^t \Delta\nu dt = \frac{4A}{\lambda L} \int_0^t \Omega dt = \frac{4A}{\lambda L} \theta \quad (2-22)$$

这就是作为角度传感器的激光陀螺的输出信号。

当输入角速率较小时,陀螺的频率差将消失,这被称为闭锁效应。闭锁效应对激光陀螺的应用是不利的。为消除闭锁效应人们采取了几种不同的措施。根据克服闭锁效应的措施不同,激光陀螺可分为:机械抖动偏频激光陀螺、磁镜偏频激光陀螺、恒速偏频激光陀螺、四频差动激光陀螺等几种类型。其中,机械抖动偏频激光陀螺(简称机抖陀螺)利用交变的机械抖动结构使陀螺大部分时间从闭锁区偏置出来,从而大大减小了闭锁误差。

激光陀螺仪的主要部件包括:

(1) 激光腔体:由低膨胀系数的陶瓷玻璃组成,如索罗杜或塞维特。其内部是激光介质,通常为氦和氖的双同位素构成的混合物,能够使两种激光模互不干涉地传播。

(2) 光学组件:通常由平面镜和光电检测器构成。所有平面镜都是由不同折射率的物质层交替组成的多层绝缘叠层,然后沉积在抛得很光的基片上,以减少后向散射。

(3) 非光学部件:通常的结构中有一个阴极与两个阳极,当外加高压作用于电极上时,将产生放电,它是激光作用的振源。

(4) 偏频结构：用来克服闭锁现象。偏频技术可以采用各种技术，如机械抖动、磁镜或者在激光腔体内使用光学元件。

使用较普遍的激光陀螺结构为采用三个平面镜的环形激光陀螺仪和采用四镜的激光陀螺仪。图 2-7 给出了采用三个平面镜的机械抖动式环形激光陀螺仪结构图。

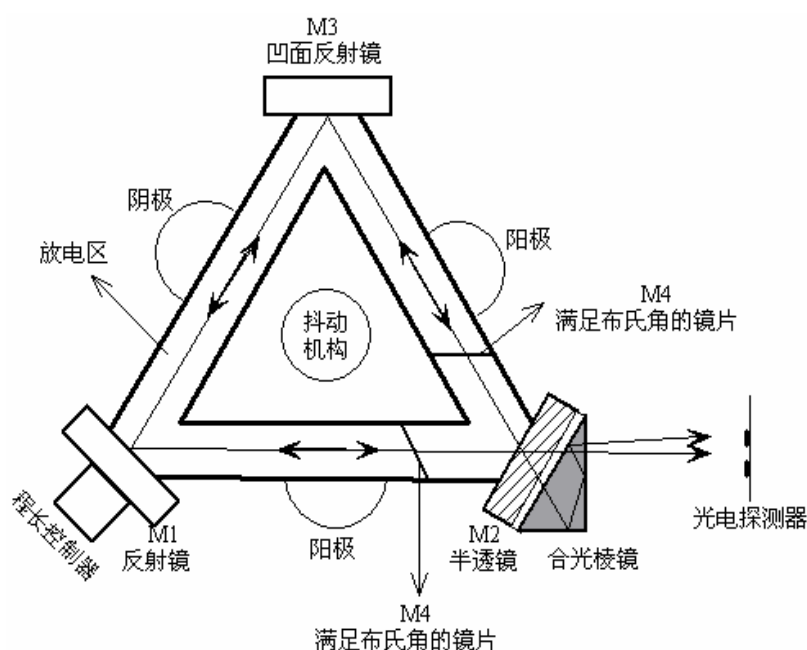


图 2-7 激光陀螺仪内腔示意图

与传统机电陀螺相比，激光陀螺具有以下优点：

- (1) 结构简单，一般只有十几个零件组成；
 - (2) 可靠性高，寿命长。激光陀螺由于没有运动部件和磨损件，为全固态仪表，因而坚固可靠，抗加速度性能好；
 - (3) 启动时间短；
 - (4) 无交叉耦合效应。激光陀螺的敏感轴垂直于环形腔平面，对其它正交轴方向的转动角速度、角加速度及线加速度不敏感，没有常规机电陀螺的交叉耦合效应误差；
 - (5) 易于和计算机接口。激光陀螺的输出信号是脉冲形式，对脉冲进行计数就得到对应转动角度的数字量，便于计算机处理，不需要高精度的 A/D 电路；
 - (6) 功耗低，体积小，重量轻；
 - (7) 角速率测量的动态范围宽，可达到 $\pm 1500^\circ/\text{s}$ ；
 - (8) 性能稳定，它的腔体由高稳定性的材料制成，保证了标度因数的极高稳定性。
- 激光陀螺仪的典型性能参数如表 2-3 所示。

表 2-3 激光陀螺仪的典型性能参数

常值漂移 ($^{\circ}/h$)	0.0001~10
标度因数非线性(ppm)	<10
带宽 (Hz)	>200
量程 ($^{\circ}/s$)	可达几千度

2.2.1.3.2 误差模型

激光陀螺的误差主要有：闭锁效应、比例因子变化和零点漂移。这些误差使得激光陀螺偏离理想的输入输出关系。图 2-8 给出了激光陀螺的理想输入输出关系以及这些误差对理想输入输出关系的影响，其中过零点的直线是理想特性曲线。

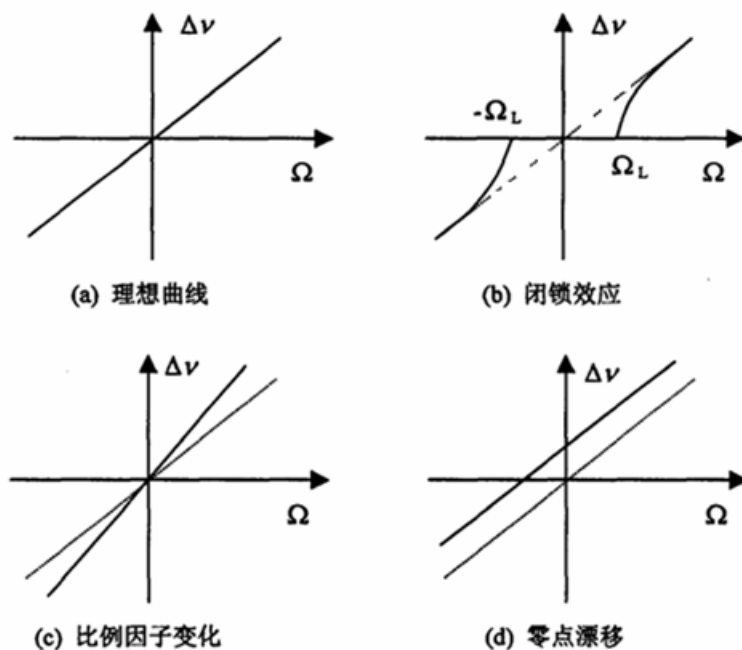


图 2-8 激光陀螺的理想曲线与误差效应

对于光学陀螺仪，如环形激光陀螺仪，加速度敏感误差可以忽略不计，角速率测量值对于很多应用可以建模如下：

$$\tilde{\omega}_x = E_x \omega_x + M_y \omega_y + M_z \omega_z + B_f + n_x \quad (2-23)$$

与机械式陀螺一样，固定零偏、交叉耦合及安装固定和标度因数误差一般可以测量到足够的精度，以进行某种有效的补偿。

激光陀螺常用的工程化测量模型可写为：

$$N_x = E_{1x} (B_{0x} + \omega_x + E_{yx} \omega_y + E_{zx} \omega_z) \quad (2-24)$$

其中， N_x 为陀螺仪单位时间内输出的脉冲数，单位为 Λ/s ； ω_x 、 ω_y 、 ω_z 分别为载

体三个轴向的转动角速度，单位为 ($^{\circ}/h$)； B_{0x} 为陀螺仪常值漂移项，单位为 ($^{\circ}/h$)； E_{1x} 为陀螺仪输出的标度因数，单位为 ($\Lambda/^{\circ}$)； E_{yx} 、 E_{zx} 、 E_{xy} 、 E_{zy} 为陀螺仪的安装误差系数，单位为 rad。

2.2.1.4 光纤陀螺仪

光纤陀螺仪采用多匝光纤线圈代替环形激光器，通过多次循环可增强 *Sagnac* 效应。20 世纪 70 年代，低损耗光纤、固态半导体光源和探测器的研发取得了巨大的成就。1976 年美国 Utah 大学用 10m 长光纤绕在直径为 300mm 的圆柱上，采用分立元件制成世界上第一台光纤陀螺，其分辨率为 $2^{\circ}/s$ 。此种陀螺属于干涉式光纤陀螺 (I-FOG)，它由低相干光源、耦合器、光纤线圈、光信号探测器和信号处理电路等部分组成。经过 20 多年的努力，光纤陀螺已形成了从 $10^{\circ}/h \sim 0.01^{\circ}/h$ 精度覆盖面较宽的系列产品。光纤陀螺以其成本低、可靠性高、体积重量小、功耗低、动态范围宽、受加速度振动冲击影响小、启动快和运行寿命长等优点，在各种军民领域、海/陆/空/天航行体上得到了重要应用。

2.2.1.4.1 分类

光纤陀螺可分为多种类型，通常按其工作原理进行分类。此外，光纤陀螺还可以按回路类型及结构特性进行分类。

按光纤陀螺的工作原理，可以将光纤陀螺分为干涉式光纤陀螺 (I-FOG)、谐振式光纤陀螺 (R-FOG) 和布里渊型光纤陀螺 (B-FOG)，如图 2-9 所示 (图中，PUMP 为泵浦激光发生器)。I-FOG 是第一代光纤陀螺，技术上已经成熟；R-FOG 是第二代光纤陀螺，目前处于实验室研究向实用化的发展阶段；B-FOG 是第三代光纤陀螺，泵浦激光发生器目前尚处于理论研究阶段。

按回路类型，光纤陀螺分为开环和闭环两类。开环式系统动态范围较窄，检测精度低；闭环式系统动态范围广，检测精度大大提高。

按陀螺仪结构，光纤陀螺分为单轴和多轴型。惯性导航一般需要三个正交轴的转动与位置信息，一般是用三个独立的光纤陀螺来完成。共用 1 套电源、1 个光源和 1 套处理电路的多轴集成光纤陀螺比由多个单轴陀螺组合的系统性能优越。

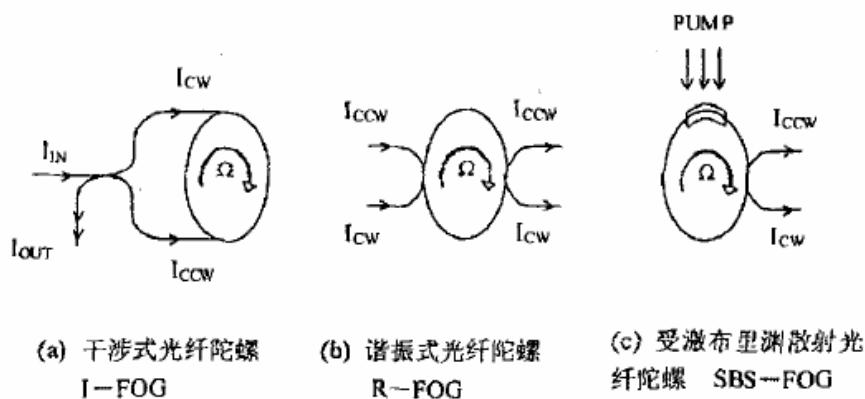


图2-9 光纤陀螺按工作原理分类示意图

2.2.1.4.2 工作原理

光纤陀螺仪属于第四代陀螺仪——光学陀螺仪的一种，因此，其基本工作原理也是基于Sagnac效应。即在同一闭合光路中从同一光源发出两束特征相同的光，沿相反的方向进行传播，汇合到同一探测点，产生干涉；若存在绕垂直于闭合光路所在平面的轴线相对惯性空间转动的角速度，则沿正、反方向传播的光束产生光程差，该值与角速度成正比；通过光程差与相应的相位差的关系，可通过检测相位差，计算角速度。光纤陀螺仪一般由光纤传感线圈、集成光学芯片、宽带光源和光电探测器组成。与激光陀螺相比，光纤陀螺不需要光学镜的高精度加工、光腔的严格密封和机械偏值技术，能够有效地克服了激光陀螺的闭锁现象，易于制造。

干涉型光纤陀螺、谐振式光纤陀螺、布里渊型光纤陀螺的基本原理相同，但是各自所采用的相位解调方式不同，即对光纤陀螺的噪声补偿方法不同而已。

对于干涉型光纤陀螺，光源发出的光经分束器分为两束，送入一定长度的光纤中，分别沿顺时针方向及逆时针方向传输，最后均回到分束器形成干涉。假定光纤缠绕在半径为 R 的环上，显然环形光路相对于惯性参照系静止时，经顺、逆时针方向传播的光回到分束器时有相同的光程，即两束光的光程差等于零，当环形回路以角速度相对于惯性参照系作旋转运动时，两束光光程差变化导致干涉光强发生变化，根据干涉光强解算出陀螺转动角速率。干涉型光纤陀螺发展最早、最为成熟、应用最广泛，其惯性级产品的研制与开发也日趋成熟。

谐振式光纤陀螺的两束同源相干光分别由耦合器的两端进入光纤环（如图2-10），各自进行谐振，输出信号中产生谐振波谷，当光纤环所在平面内没有转动时，CW光和CCW光的光程相等，相位一致，它们的谐振点保持静止，如图2-11所示。如果光纤环绕垂直于所在平面的轴产生转动，有一角速度 Ω ，设方向为逆时针，则CW光的光程减少，其谐振点向左移动距离 S ；同样CCW光的光程增加，谐振点向右移动一同样的距离 S ，且距离 S 与 Ω

成正比。可以采用调节光源频率或通过PZT改变光纤环长度的方法跟踪锁定一个方向的谐振点，则另一个谐振点的移动距离 $2S$ 就可以作为输出，以此测量角速度 Ω 的大小和方向。如图2-12所示。

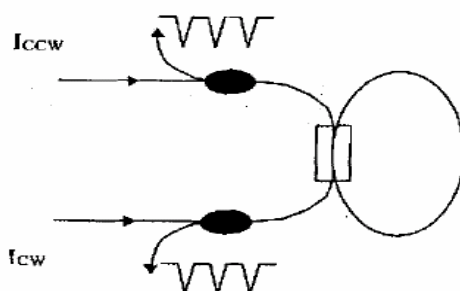


图2-10 谐振环双向输出示意图

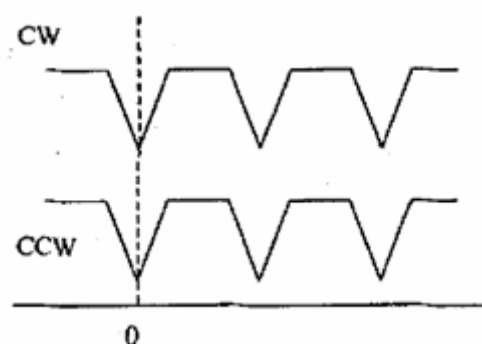


图2-11 无转动时谐振环测量输出

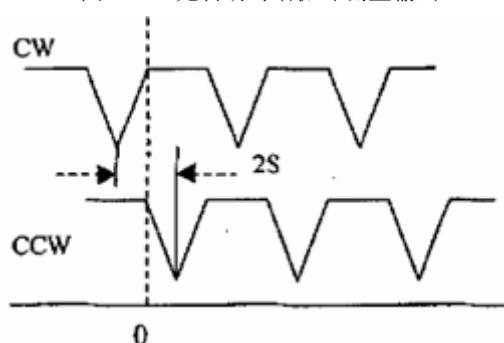


图2-12 有转动时谐振环测量输出

布里渊型光纤陀螺光纤环中有一只泵浦激光发生器，受外界泵浦光激励时产生激光，沿相反方向传输，利用Sagnac效应进行角速度的测量。这种陀螺正处于实验室探索阶段，有一些元件和结构设计上的困难，比如后向散射、双折射效应和克尔效应等。另外，它还有“死锁”现象有待研究和克服。

2.2.1.4.3 典型光纤陀螺仪性能

光纤陀螺的典型性能参数如表 2-4 所示。

表 2-4 光纤陀螺的典型性能参数

常值漂移 (°/h)	0.001~10
标度因数非线性 (ppm)	<10
带宽 (Hz)	>100
量程 (°/s)	可达几千度

2.2.1.5 振动陀螺仪

振动陀螺仪是根据调谐音叉原理制成的。这类陀螺的工作机理为：仪表中的零件做振动运动产生一个振荡的线速度。当敏感器绕与振荡线速度相正交的轴旋转时，会产生哥氏加速度；同时，哥氏加速度会改变振动元件的运动。通过检测振动元件运动的变化量，可检测输入角速度的大小。常见的振动陀螺仪有调谐音叉陀螺仪、振动弦陀螺仪等。

振动陀螺仪的尺寸很小，一般直径小于 15mm，长度约为 25mm。有些传感器更小，一般封装在长方体的管壳内。另外，振动陀螺仪很牢固，甚至能承受上万个 g 的加速度冲击。这类传感器已经应用于很多领域。特别是在稳定控制系统中，用于提供反馈或用于角度位置检测。目前，振动陀螺仪要应用到惯性导航系统中还受到一定的限制，如漂移率高、谐振器时间常数大以及对周围环境的敏感，特别是对温度变化和外界的振动干扰比较敏感。

2.2.1.6 陀螺仪技术总结

有许多种类型的敏感器可用来敏感或检测角运动，这些传感器包括从常规使用旋转质量块的机械陀螺仪到光学的非常规陀螺仪。陀螺仪的精度范围跨越许多数量级，有些敏感器的偏值能达到 0.0001°/h，而有些陀螺仪的偏值则达到 1°/h 或更差。大多敏感器运行时对环境很敏感，因此，目前的许多研究的重点放在减少陀螺仪对环境的敏感性，提高其稳定性。下面对常用的动力调谐式挠性陀螺仪（简称挠性动调陀螺）、激光陀螺、光纤陀螺的主要性能指标进行总结，给出了不同种类陀螺仪的优、缺点，以及在特殊应用中影响性能的主要因素。

(1) 挠性动调陀螺

挠性动调陀螺标度因数的线性度主要取决于锁定电路。使用通常所用的脉冲力平衡电路，标度因数的稳定性和重复性都很好。正常情况下，线性度优于 10ppm，重复性低于 100ppm。而通过使用石英控制的马达驱动电源，在线性范围内稳定度更好。挠性动调陀螺必须由某些力来再平衡。若以漂移衡量的话，陀螺精度越高，要求的功率就越大，再平衡速率就越低。对中等精度的陀螺仪（漂移为 0.3°/h）来说，其上限大约是 500°/s。在带宽和测量范围相匹配后挠性动调陀螺能提供远小于 1rad 或 0.1" 的分辨率。这是挠

性动调陀螺的一个重要特点。挠性动调陀螺的带宽受章动频率限制，此频率通常是自转频率的 1.5 倍。由于章动频率也增加交叉耦合和假圆锥误差，因此一般仅用此范围的三分之一，即提供 100Hz 的带宽，对于大多数应用场合，这个带宽已足够了。挠性动调陀螺的零偏重复性取决于马达驱动电源。偏值的重复性越好，陀螺漂移的重复性也就越好。所以，这个重复性取决于所用电路能达到的性能。挠性动调陀螺的噪声很低，主要取决于所用电路和选择的量化。用户可以根据其应用在很宽的范围内调节此噪声。在一般的使用范围内，挠性动调陀螺的噪声是白噪声。

(2) 激光陀螺

激光陀螺标度因数线性度受限于锁定装置，使用高频抖动机构后，线性度一般好于 1ppm。激光陀螺由于本身控制机构的作用，其重复性和稳定性都非常好，重复性可以好于 1ppm。激光陀螺的测量范围可达 $1000^\circ/\text{s}$ 。激光陀螺的分辨率由光路的对称性决定，对 25cm 光路长度的陀螺仪来说，典型的分辨率是 $2''$ 。激光陀螺的带宽受高频抖动频率的限制，其典型值是 400Hz，而数字滤波低到 100Hz，甚至更低。激光陀螺具有良好的零偏重复性，对 25cm 的激光陀螺来说，一般要好于 $0.01^\circ/\text{h}$ 。激光陀螺的噪声主要受高频抖动影响。高频抖动将产生一个比随机游走大得多的背景噪声。

(3) 光纤陀螺

在闭环模式工作时，光纤陀螺具有很高的线性度，通常处于挠性陀螺和激光陀螺之间，能达到 5ppm。光纤陀螺的重复性取决于光源，其光源的重复性不如激光。光纤陀螺的测量范围可达 $1000^\circ/\text{s}$ 。光纤陀螺分辨率取决于光探测器的能量，对于 100m 的光纤陀螺来说，其典型数据大约是 0.01° 。光纤陀螺受内部的数据速率限制，而这个速率是根据光纤长度来选择的，对光纤 100m 长的光纤陀螺来说，其典型的延迟时间为 0.5us 或 2MHz。如果必要的话，按初始数据速率来选择这一频率，能获得很高的带宽。光纤陀螺的重复性主要由光源和光耦合器决定。

2.2.2 加速度计

加速度计用来测量载体的平移运动加速度，通过对加速度的积分，可求得载体运动的速度和位置。加速度计是依据牛顿力学定律而工作的，它通过测量检测质量所受的惯性力来间接测量载体的加速度。通常，加速度计包含一个经由弹簧约束的在仪表壳体内部的检测质量块，通过检测质量块的位移变化来测量运载体的加速度。它实际感测的是载体的非引力加速度，即比力或视加速度，因此，加速度计应准确地称为视加速度计或比力传感器。加速度计是惯性导航和惯性制导的基本测量元件之一，其性能和精度直接影响导航和制导系统的精度。

有很多不同的惯性传感器可以用于检测加速度的大小。这些传感器有不同的类型和设计形式。根据检测加速度的器件的构造形式可以分为机械式的和固态的。常用的机械

式加速度计有石英挠性摆式加速度计、两轴力反馈加速度计等。固态加速度计如硅加速度计、光纤加速度计等。目前，机械式加速度计已经非常成熟，精度和分辨率较高，检测范围也很宽（一般从几个 μg 到 50g ）。近几年，固态加速度计特别是在硅技术方面取得了非常有意义的进步。表 2-5 给出了几种典型加速度计的性能参数。

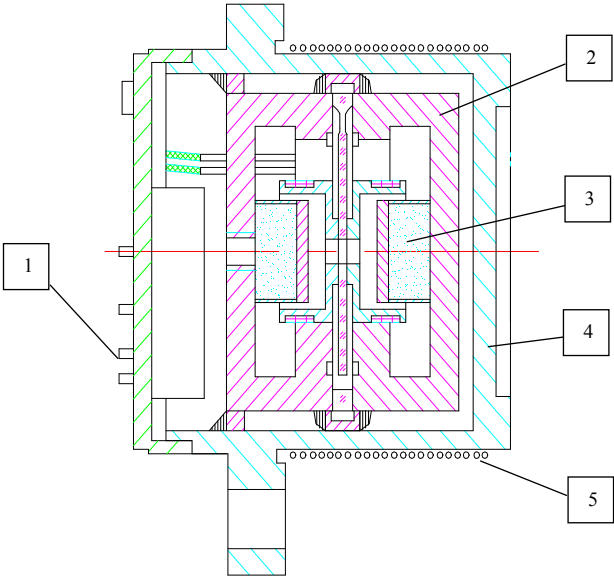
表 2-5 几种典型加速度计的性能参数

性能参数 \ 加速度类型	加速度计类型			
	石英挠性摆式加速度计	振动光纤加速度计	硅加速度计	表面声波加速度计
输入范围 (g)	± 100	± 20	± 200	± 100
标度因数稳定性 (ppm)	1~10	10	100	1000~5000
标度因数非线性 (ppm)	1~10	50	50	<1000
固定零偏 (mg)	0.1~10	1	0.1~1	<0.5
阈值 (μg)	10	1	<10	1~10
带宽 (Hz)	400	100	400	400

下面重点介绍目前常用的石英挠性摆式加速度计的结构、工作原理及测量模型等。

(1) 石英挠性摆式加速度计的结构

石英挠性摆式加速度计的主要组成有：检测质量、力矩器座组件、伺服放大器、温控元件和壳体等。如图 2-13 给出了石英挠性摆式加速度计的结构图。图 2-14 给出了石英挠性摆式加速度计的产品外观图。



(1) 伺服放大器 (2) 检测质量 (3) 力矩器座组件 (4) 壳体 (5) 温控元件

图 2-13 石英挠性摆式加速度计结构图



图 2-14 石英挠性摆式加速度计产品图

(2) 石英挠性摆式加速度计工作原理

石英挠性摆式加速度计的测量质量——摆组件，由石英玻璃经化学方法加工形成挠性支承，挠性杆结构形状保证组件在输入轴方向刚度很小，而沿输出轴方向刚度很大。在摆组件上有电容传感器的动极板和力矩器的一对动圈，当沿输入轴方向有加速度作用时，摆组件受惯性力的作用，形成对挠性支承中心的惯性力矩，产生摆角 β ，传感器检测摆偏角 β 并输出与此角度成比例的电容容量，经伺服放大器变换成与此信号成比例的直流电流，通过力矩器产生与此电流成比例的力矩 M_T ，作用在摆上与惯性力矩平衡。稳态时，通过力矩器的电流与输入加速度成比例。其原理方框图如图 2-15 所示。图中 f 为输入的加速度， mL 为摆的特性， K_t 为力矩器力矩系数， C 为敏感器输出电容， I 为加速度计输出电流， R 为采样电阻， a 为输出的加速度测量值。

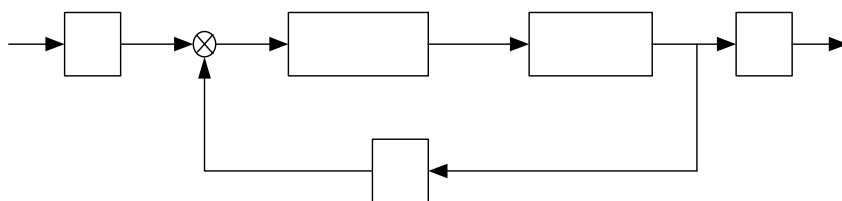


图 2-15 石英挠性摆式加速度计工作原理方框图

(3) 石英挠性摆式加速度计的测量模型

由加速度计产生的测量值 $\tilde{\alpha}_x$ ，可以根据施加的加速度和敏感器误差系数常用下列表达式表示

$$\tilde{\alpha}_x = k_x f_x + M_y f_y + M_z f_z + B_f + B_v f_x f_y + n_x \quad (2-25)$$

式中， f_x 表示施加在敏感轴方向上的加速度； f_y 、 f_z 为施加在垂直于敏感轴方向的加速

度； k_x 为标度因数； M_y 、 M_z 为交叉轴耦合因数； B_f 为测量零偏； B_v 为振摆误差系数； n_x 为随机噪声。

一般来说，固定零偏、交叉耦合及标度因数误差系数可以精确测量，因此可以采用修正方法补偿这些误差的可重复分量。在存在慢变的加速度时，由振摆效应引起的误差也可以在很大程度上进行补偿。但是，随机零偏和与振动相关的误差则无法精确补偿。

对于以补偿为目的应用来说，工程上通常采用的加速度计测量模型为：

$$N_{Ax} = K_{1x}(K_{0x} + f_x + K_{yx}f_y + K_{zx}f_z) \quad (2-26)$$

式中， N_{Ax} 为加速度计单位时间内输出的脉冲，单位为 Δ/s ； f_x 、 f_y 、 f_z 分别为三个方向的视加速度，单位为 g ； K_{0x} 为加速度计的零偏，单位为 g ； K_{1x} 为加速度计输出的标度因数，单位为 $\Delta/(s \cdot g)$ ； K_{yx} 、 K_{zx} 为加速度计的安装误差系数，单位为 rad 。

2.2.3 惯性测量组合

一般情况下，作为飞行器导航和制导系统测量装置的惯性敏感器都不是单一的陀螺仪或加速度计，而是由它们组成的惯性测量组合或惯性测量单元（IMU）。

2.2.3.1 组成和功能

一个典型的 IMU 包括惯性敏感器组件、传感器电路和转换组件以及这些组件工作所需的各种电源。惯性敏感器组件将 3 个单轴陀螺（或 2 个两轴陀螺）和 3 个加速度计安装在一个机械本体上，本体的结构保证这 6 个惯性敏感器的敏感轴沿三个正交方向，如图 2-16 所示。传感器电路和转换组件负责陀螺的采样与控制、陀螺及加速度计的 I/F 转换等。整个 IMU 通过抗振装置与载体的安装面相连。

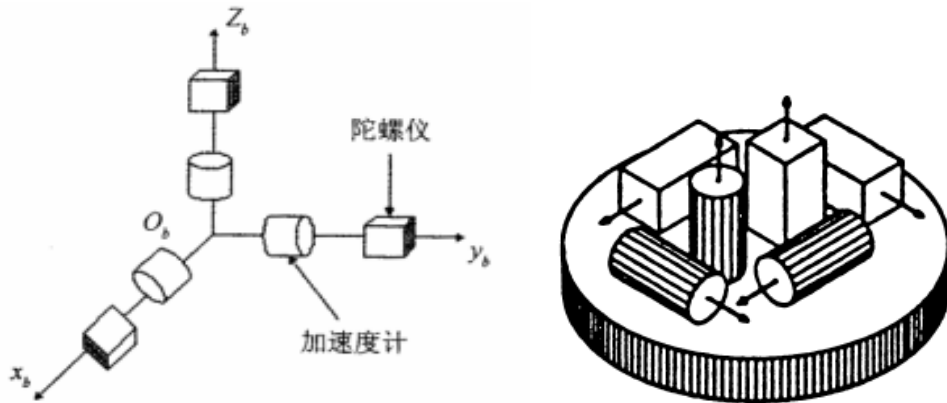


图 2-16 惯性测量组合中惯性敏感器的安装示意图

惯性测量组合用于测量载体绕载体坐标系三个轴的角增量和载体质心沿载体坐标系

三个轴的视速度增量，供导航计算机进行载体姿态计算和导航计算，并用于确定载体的初始姿态；同时，还可给出载体质心的横向和法向过载，为过载稳定回路提供反馈信息等，以实现飞行器的稳定飞行并准确地到达目的地或命中目标。

图 2-17 是美国 Litton 公司 1980 年代末期研制的 LN 200 IMU 产品图片。该 IMU 选用零偏稳定性为 $1^{\circ}/h \sim 10^{\circ}/h$ 、随机游走为 $0.04 \sim 0.1^{\circ}/h^{1/2}$ 的光纤陀螺，以及零偏稳定性为 $200\mu g \sim 1mg$ 的硅加速度计。其外形尺寸为 $\Phi 8.9 \times 8.5cm$ ，重 700g，功耗 10W。LN 200 IMU 是一种高性价比的惯性测量装置，广泛应用于战术导弹、制导炮弹和飞机的飞行控制系统。



图 2-17 LN 200 IMU 产品图片

近年来，利用微机电系统（MEMS）技术制作的惯性器件越来越受到人们的关注。MEMS 是在集成电路生产技术和专用的微机电加工方法的基础上蓬勃发展起来的高新科技。用此技术研制的微传感器具有体积小、质量轻、响应快、灵敏度高、成本低、易于集成和批量生产的优势，已在军事、汽车、航天、医疗等领域获得广泛的应用。美国德雷伯实验室 1994 年研制成功的微机电惯性测量组合，包括三个微机械陀螺仪和三个微机械加速度计，配置在立方体的三个正交平面上。其陀螺零偏稳定性为 $10^{\circ}/h$ ，加速度计零偏稳定性为 $250\mu g$ 。整个微惯性测量组合的尺寸为 $2cm \times 2cm \times 0.5cm$ ，质量约为 5g。

2.2.3.2 测量模型

由惯性敏感器所产生的误差是影响惯性导航精度的重要因素，但是提高惯性敏感器的测量精度，依靠敏感器本身的设计改进和加工工艺改进是有限的或不经济的，有时是不现实。因此，通过研究补偿方法，采用计算机进行误差补偿是提高系统精度，降低成本的行之有效的办法。本节给出了以误差补偿为目的的常用的惯性测量组合的测量模型。

惯性测量组合的测量模型包括加速度测量通道的测量模型和角速度测量通道的测量

模型。

(1) 加速度测量通道测量模型

加速度测量通道的测量模型为：

$$\begin{cases} N_{Ax} = K_{1x}(K_{0x} + f_x + K_{yx}f_y + K_{zx}f_z) \\ N_{Ay} = K_{1y}(K_{0y} + K_{xy}f_x + f_y + K_{zy}f_z) \\ N_{Az} = K_{1z}(K_{0z} + K_{xz}f_x + K_{yz}f_y + f_z) \end{cases} \quad (2-27)$$

式中， N_{Ax} 、 N_{Ay} 、 N_{Az} 分别为 3 个加速度计单位时间内输出的脉冲数； f_x 、 f_y 、 f_z 分别为 3 个轴向的视加速度； K_{0x} 、 K_{0y} 、 K_{0z} 分别为 3 个加速度计偏值； K_{1x} 、 K_{1y} 、 K_{1z} 分别为 3 个加速度计输出的标度因数； K_{yx} 、 K_{zx} ， K_{xy} 、 K_{zy} 和 K_{xz} 、 K_{yz} 为加速度计的安装误差系数。

(2) 角速度测量通道测量模型

角速度通道的测量模型为：

$$\begin{cases} N_x = E_{1x}(B_{0x} + B_{1x}f_x + B_{2x}f_y + B_{3x}f_z + \omega_x + E_{yx}\omega_y + E_{zx}\omega_z) \\ N_y = E_{1y}(B_{0y} + B_{1y}f_x + B_{2y}f_y + B_{3y}f_z + E_{xy}\omega_x + \omega_y + E_{zy}\omega_z) \\ N_z = E_{1z}(B_{0z} + B_{1z}f_x + B_{2z}f_y + B_{3z}f_z + E_{xz}\omega_x + E_{yz}\omega_y + \omega_z) \end{cases} \quad (2-28)$$

式中， N_x 、 N_y 、 N_z 分别为陀螺 3 个通道单位时间内输出的脉冲数； ω_x 、 ω_y 、 ω_z 分别为 3 个轴向的转动角速度； B_{0x} 、 B_{0y} 、 B_{0z} 分别为陀螺 3 通道常值漂移项； B_{1x} 、 B_{1y} 、 B_{1z} ， B_{2x} 、 B_{2y} 、 B_{2z} ， B_{3x} 、 B_{3y} 、 B_{3z} 为陀螺 3 个轴向视加速度的影响系数； E_{1x} 、 E_{1y} 、 E_{1z} 分别为陀螺 3 个通道输出的标度因数； E_{yx} 、 E_{zx} ， E_{xy} 、 E_{zy} ， E_{xz} 、 E_{yz} 为陀螺的安装误差系数。

2.3 惯性导航系统的导航计算和姿态计算

载体的位置可用经度 λ 、纬度 L 和高度 h 表示。确定载体在地球表面的位置就是确定导航坐标系(n)或地理坐标系(g)与地球坐标系(e)之间的方位关系。载体的姿态常用姿态角、方向余弦或四元数表示。确定载体的姿态就是确定体坐标系(b)相对于参考坐标系(如 n 系或 g 系)之间的方位关系。

下面选取导航坐标系(n)的轴向与东北天(ENU)地理坐标系的轴向相同，简要说明惯性导航系统的导航和姿态计算的原理与过程。

2.3.1 比力方程

当仅考虑载体的平移运动时,可把载体当作质量为 m 的质点来处理。设质点在 i 系中的位置矢量为 \mathbf{r} , 质点在外力 \mathbf{F} 作用下在惯性空间的运动状态可用牛顿第二定律导出, 即有

$$\mathbf{F} = m \left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = m \ddot{\mathbf{r}} \quad (2-29)$$

式中, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{非引}} + \mathbf{F}_{\text{引}}$ 。其中, $\mathbf{F}_{\text{非引}}$ 为非引力外力, 是指作用在载体上的发动机推力、空气阻力、升力、地面反作用力等; $\mathbf{F}_{\text{引}} = m\mathbf{G}$ 为引力外力。

由此得

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \frac{\mathbf{F}_{\text{非引}}}{m} + \mathbf{G} \quad (2-30)$$

定义比力 $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}_{\text{非引}}}{m}$, 于是有

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \mathbf{f} + \mathbf{G} \quad (2-31)$$

\mathbf{f} 为载体的非引力惯性加速度矢量, 也称视加速度矢量; \mathbf{G} 为中心引力加速度矢量。

载体相对地球的速度矢量用 \mathbf{v}_e 表示, 由于惯性坐标系和地球坐标系的原点重合, 因此有

$$\mathbf{v}_e = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_e \quad (2-32)$$

根据哥氏定理, 有

$$\mathbf{v}_i = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r} \quad (2-33)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_{ie}$ 是 e 系相对 i 系的旋转角速度, 即地球自转角速度。 $\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}$ 为地球自转产生的牵连速度。

利用(2-32)式, (2-33)式可写为

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i = \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r} \quad (2-34)$$

把式(2-34)两边相对 i 系取导数, 有

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i + \left. \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}) \right|_i \quad (2-35)$$

由于 ω_{ie} 为常数, $\frac{d\omega_{ie}}{dt}=0$, 上式变为

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i + \omega_{ie} \times \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i \quad (2-36)$$

在 INS 的导航计算中, \mathbf{v}_e 通常都是在导航坐标系 n 中分解的, 因此需要把 \mathbf{v}_e 相对 i 系的导数转换成相对 n 系的导数, 则有

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_n + \omega_{in} \times \mathbf{v}_e \quad (2-37)$$

式中 ω_{in} 是 n 系相对 i 系的角速度矢量, 按角速度合成定理有 $\omega_{in} = \omega_{ie} + \omega_{en}$

把(2-37)式代入(2-36)式, 并利用 (2-34), 可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i &= \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_n + (2\omega_{ie} + \omega_{en}) \times \mathbf{v}_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \mathbf{r}) \\ &= \dot{\mathbf{v}}_e + (2\omega_{ie} + \omega_{en}) \times \mathbf{v}_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2-38)$$

由于 $\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \mathbf{f} + \mathbf{G}$, 则可得

$$\mathbf{f} + \mathbf{G} = \dot{\mathbf{v}}_e + (2\omega_{ie} + \omega_{en}) \times \mathbf{v}_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \mathbf{r}) \quad (2-39)$$

即绝对加速度等于相对加速度、哥氏加速度和牵连加速度的总和。

考虑到地球的重力矢量是地球引力和地球自转产生的离心力的矢量和 (如图 2-18 所示), 即重力加速度矢量

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \mathbf{r}) \quad (2-40)$$

其方向铅垂向下, 大小近似为 9.81 m/s^2 。在 WGS-84 大地坐标系中, 重力加速度和地球自转角速度的数值为

$$g = 978.03267714 \times (1 + 0.00193185138639 \sin^2 L) / (1 - 0.00669437999013 \sin^2 L)^{1/2} \text{ cm/s}^2$$

$$\omega_{ie} = 7292115.1467 \times 10^{-11} \text{ rad/s} = 15.0408^\circ/\text{h}$$

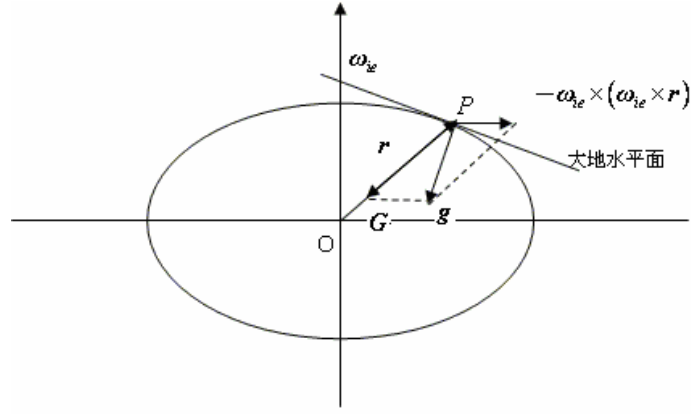


图 2-18 地球引力、重力与离心力的关系

由(2-39)和(2-40)式得到

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{v}}_e + (2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}) \times \mathbf{v}_e - \mathbf{g} \quad (2-41)$$

该方程是矢量形式的当地水平指北 INS 的动力学方程，即比力方程。它表明了加速度计所敏感的比力与载体相对地球的加速度之间的关系。其右边第一项 $\dot{\mathbf{v}}_e$ 是载体对地速度在导航坐标系中的变化率，即在测量坐标系中表示的载体相对地球的加速度；第二项是地球自转角速度和导航坐标系相对地球的转动所产生的哥氏加速度和向心加速度；第三项是地球重力加速度。

在导航计算中，我们感兴趣的量是 $\dot{\mathbf{v}}_e$ 。为了解出载体的运动速度和位置参数，必须从加速度计测量的比力 \mathbf{f} 中去掉 $(2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}) \times \mathbf{v}_e$ 这一项，并进行重力补偿，得到 $\dot{\mathbf{v}}_e$ ，然后进行积分计算，得到运载体相对地球的速度和位置。因为 $(2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}) \times \mathbf{v}_e$ 项对 $\dot{\mathbf{v}}_e$ 项来说属于干扰项，所以有时也把它称为有害加速度。

2.3.2 导航计算

2.3.2.1 速度和经纬度的计算

在导航坐标系 (n) 内分解矢量方程式(2-41)便可求得惯性导航系统动力学方程的分量形式。

首先，将式(2-41)改写为

$$\mathbf{f}^n = \dot{\mathbf{v}}_e^n + (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}_e^n - \mathbf{g}^n \quad (2-42)$$

选取 n 系的轴向与东北天 (ENU) 地理坐标系的轴向相同。把上式的各个矢量进行分解，写成列向量的形式，有

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^n &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} & \mathbf{f}^n &= \begin{bmatrix} f_x^n \\ f_y^n \\ f_z^n \end{bmatrix} & \mathbf{v}_e^n &= \begin{bmatrix} v_x^n \\ v_y^n \\ v_z^n \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\omega}_{ie}^n &= \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos L \\ \omega_{ie} \sin L \end{bmatrix} & \boldsymbol{\omega}_{en}^n &= \begin{bmatrix} -\frac{v_y^n}{R_M + h} \\ \frac{v_x^n}{R_N + h} \\ \frac{v_x^n}{R_N + h} \operatorname{tg} L \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-43}$$

其中, $f_x^n, f_y^n, f_z^n, v_x^n, v_y^n, v_z^n$ 分别表示比力矢量 \mathbf{f} 及地速矢量 \mathbf{v}_e 在 n 系的投影分量。角标 x 、 y 、 z 分别对应于东向、北向和天向。然后, 把矢量得叉积用其反对称矩阵表示, 由 (2-42) 可得到便于求解 \mathbf{v}_e 的方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -(2\omega_{iez}^n + \omega_{enz}^n) & (2\omega_{iey}^n + \omega_{eny}^n) \\ (2\omega_{iez}^n + \omega_{enz}^n) & 0 & -(2\omega_{iex}^n + \omega_{enx}^n) \\ -(2\omega_{iey}^n + \omega_{eny}^n) & (2\omega_{iex}^n + \omega_{enx}^n) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \tag{2-44}$$

把(2-44)式展开写成分量形式, 有

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x &= f_x + \left(2\omega_{ie} \sin L + \frac{v_x}{R_N + h} \operatorname{tg} L \right) v_y - \left(2\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h} \right) v_z \\ \dot{v}_y &= f_y - \left(2\omega_{ie} \sin L + \frac{v_x}{R_N + h} \operatorname{tg} L \right) v_x - \frac{v_y}{R_M + h} v_z \\ \dot{v}_z &= f_z + \left(2\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h} \right) v_x + \frac{v_y}{R_M + h} v_y - g \end{aligned} \right\} \tag{2-45}$$

如在初始时刻引进正确的初始速度和初始位置, 导航计算机就可以通过解这组方程式实时地求解出速度参数。

如果载体垂直方向的速度比较小, 即与 v_x , v_y 相比, v_z 为小量, 它们之间的耦合也较小, 则在计算程序编排中可以略去垂直通道分量, 仅计算水平运动分量。而且, 通过后面惯性导航高度通道的分析可知, 纯 INS 的高度通道是正反馈系统, 是不稳定的, 需要利用外部高度信息 (如气压高度) 进行阻尼, 并分开计算。这样, 由两个水平通道可写出

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= f_x + 2v_y \omega_{ie} \sin L + \frac{v_x v_y}{R_N + h} \tan L \\ \dot{v}_y &= f_y - 2v_x \omega_{ie} \sin L - \frac{v_x^2}{R_N + h} \tan L\end{aligned}\quad (2-46)$$

通过积分运算得

$$\begin{aligned}v_x(t) &= \int_0^t \dot{v}_x dt + v_x(0) \\ v_y(t) &= \int_0^t \dot{v}_y dt + v_y(0)\end{aligned}\quad (2-47)$$

载体在地平面内的速度为

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} \quad (2-48)$$

经度和纬度位置的变化率为

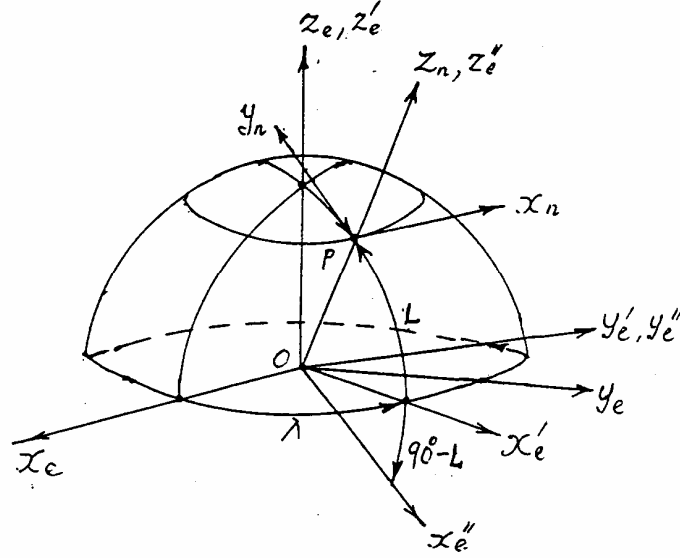
$$\begin{aligned}\dot{L} &= \frac{v_y}{R_M + h} \\ \dot{\lambda} &= \frac{v_x}{(R_N + h) \cos L}\end{aligned}\quad (2-49)$$

对上式进行积分运算得到

$$\begin{aligned}L &= \int_0^t \frac{v_y}{R_M + h} dt + L_0 \\ \lambda &= \int_0^t \frac{v_x}{(R_N + h) \cos L} dt + \lambda_0\end{aligned}\quad (2-50)$$

以上是基于求得载体沿地理坐标系的速度 v_x 、 v_y ，进行积分运算，求得载体在地球表面位置的计算过程。可以看出，这种方法的优点是简捷直观，但有一个缺点，即在高纬度地区因经度算式可能出现奇点，无法算出 λ 。为了克服这一缺点，出现了选用其他导航坐标系的惯导系统（如自由方位系统和游动方位系统），并采用方向余弦法进行导航参数的计算。下面对用方向余弦法求解载体在地球表面位置的过程进行简要介绍。

载体的瞬时地理位置，当用经纬度表示时，实际上就是导航坐标系 n 系和地球坐标系 e 系之间的方位关系（如图 2-19）。

图 2-19 导航坐标系 n 系和地球坐标系 e 系之间的方位关系

从图 2-19 可以看出, e 系先绕 z_e 轴转动 λ 角, 得 x_e', y_e', z_e' ; 再绕 y_e' 轴转动 $90^\circ - L$, 得 x_e'', y_e'', z_e'' ; 最后, 绕 z_e'' 转动 90° 即得到导航坐标系 x_n, y_n, z_n 。用 C_e^n 表示两坐标系之间的转换矩阵, 得到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin L & 0 & -\cos L \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos L & 0 & \sin L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin L \cos \lambda & -\sin L \sin \lambda & \cos L \\ \cos L \cos \lambda & \cos L \sin \lambda & \sin L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = C_e^n \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-51)$$

其中

$$C_e^n = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin L \cos \lambda & -\sin L \sin \lambda & \cos L \\ \cos L \cos \lambda & \cos L \sin \lambda & \sin L \end{bmatrix} \quad (2-52)$$

用 C_{ij} 表示 C_e^n 的元素 ($i=1,2,3; j=1,2,3$), 与导航计算有关的元素可选为 C_{31} 、 C_{32} 、 C_{23} 、 C_{33} , 且有

$$\begin{aligned} L_{\pm} &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{C_{33}}{C_{23}} \right) \\ \lambda_{\pm} &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{C_{32}}{C_{31}} \right) \end{aligned} \quad (2-53)$$

纬度 L 的定义域为 $[-90^\circ, 90^\circ]$ ，与 $\operatorname{tg}^{-1}()$ 的主值定义域相同，由此 L 的主值即真值。 λ 的定义域为 $[-180^\circ, 180^\circ]$ ，与 $\operatorname{tg}^{-1}()$ 主值定义域不同，需要进行象限判断以求得 λ 的真值。表 2-6 给出判断和计算 λ 真值的方法。

 表 2-6 λ 的真值计算

C_{31} 的符号	λ_{\pm} 的符号	λ 真值	λ 所在象限
+	+	λ_{\pm}	东经 $0, 90^\circ$
-	-	$\lambda_{\pm} + 180^\circ$	东经 $90^\circ, 180^\circ$
-	+	$\lambda_{\pm} - 180^\circ$	西经 $-180^\circ, -90^\circ$
+	-	λ_{\pm}	西经 $-90^\circ, 0$

因为由 \mathbf{C}_e^n 的元素可确定载体的位置，因此将 \mathbf{C}_e^n 叫做位置矩阵。要想实时求出载体的经纬度值，必须解位置矩阵的微分方程式

$$\dot{\mathbf{C}}_n^e = \mathbf{C}_n^e [\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times] \quad (2-54)$$

式中

$$[\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times] = \boldsymbol{\omega}_{en}^{nK} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{enz}^n & \omega_{eny}^n \\ \omega_{enz}^n & 0 & -\omega_{enx}^n \\ -\omega_{eny}^n & \omega_{enx}^n & 0 \end{bmatrix}$$

是一个由转动角速度 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n = [\omega_{enx}^n \quad \omega_{eny}^n \quad \omega_{enz}^n]^T$ 的分量构成的反对称矩阵，常用符号 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times$ 或 $\boldsymbol{\omega}_{en}^{nK}$ 表示。

利用毕—卡（Peano-Baker）逼近法求解方程式(2-54)，有^[1]

$$\mathbf{C}_n^e(t + \Delta t) = \mathbf{C}_n^e(t) \left[\mathbf{I} + \frac{\sin \Delta \theta_0}{\Delta \theta_0} \Delta \boldsymbol{\theta}_{en}^{nK} + \frac{1 - \cos \Delta \theta_0}{(\Delta \theta_0)^2} (\Delta \boldsymbol{\theta}_{en}^{nK})^2 \right]$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\theta}_{en}^{nK} &= \begin{bmatrix} 0 & -\Delta \theta_{enz}^n & \Delta \theta_{eny}^n \\ \Delta \theta_{enz}^n & 0 & -\Delta \theta_{enx}^n \\ -\Delta \theta_{eny}^n & \Delta \theta_{enx}^n & 0 \end{bmatrix} = \int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{\omega}_{en}^{nK} dt \\ \Delta \theta_0 &= \sqrt{(\Delta \theta_{enx}^n)^2 + (\Delta \theta_{eny}^n)^2 + (\Delta \theta_{enz}^n)^2} \end{aligned}$$

令 $\frac{\sin \Delta \theta_0}{\Delta \theta_0} = S, \frac{1 - \cos \Delta \theta_0}{(\Delta \theta_0)^2} = C$ 。把 S 和 C 展成级数取二阶项, 有 $S_n=1, C_n=1/2$,

可得位置矩阵的二阶算法求解公式为

$$\mathbf{C}_n^e(t + \Delta t) = \mathbf{C}_n^e(t) \left[\mathbf{I} + \Delta \boldsymbol{\theta}_{en}^{nk} + 1/2 \cdot (\Delta \boldsymbol{\theta}_{en}^{nk})^2 \right] \quad (2-55)$$

通常, 计算中可取 $\Delta t=0.1\text{s}$ 。

2.3.2.2 惯导系统高度通道的问题和高度计算

由 (2-46) 式的高度通道得到

$$\dot{v}_z = f_z + \left(2\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h} \right) v_x + \frac{v_y^2}{R_M + h} - g = f_z + a_{Bz} - g \quad (2-56)$$

重力加速度 g 随高度增加而减小。在不考虑地球自转时, 地球表面的重力加速度为

$$g_0 = G \frac{M}{R^2} = \frac{\mu}{R^2} \quad (2-57)$$

式中, G 为引力场系数, M 为地球质量, R 为地球半径, $\mu=GM=3986005 \times 10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2$ 。

在高度 h 处的重力加速度为

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} \quad (2-58)$$

当 $h \ll R$ 时

$$g = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R} \right) \quad (2-59)$$

根据 (2-56) 和 (2-59) 式, 可画出高度通道的方框图, 如图 2-20。

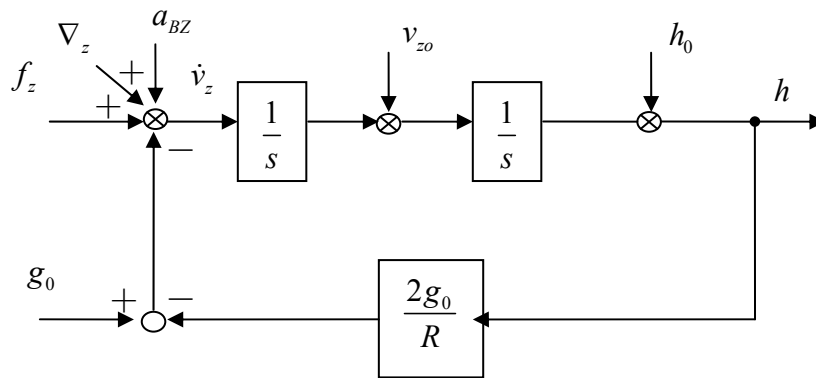


图 2-20 高度通道

系统特征方程为

$$(s^2 - \frac{2g_0}{R}) = (s + \sqrt{\frac{2g_0}{R}})(s - \sqrt{\frac{2g_0}{R}}) = 0 \quad (2-60)$$

特征方程式有一个正根，系统是一个正反馈系统，说明系统是不稳定的。在高度通道的误差传播中具有与 $e^{\sqrt{\frac{2g_0}{R}}t}$ 成比例的随时间按指数规律增长的分量。显然，如果初始高度有误差，随时间增长的高度通道是发散的。在很短的时间内，高度误差即增长到不能接受的程度。因此，不能直接采用这种纯惯性的高度通道，而必须引入外部高度信息（如气压高度信息、无线电高度信息或大气数据高度信息）进行组合，得到动态品质较好而误差又不随时间发散的组合高度系统。

典型的高度通道的二阶阻尼回路如图 2-21 所示。图中引入外部高度信息 h_b 与惯性高度 h 相减，利用信息 $(h-h_b)$ 分别对系统中的 $\dot{v}_z(\ddot{h})$ 和 $v_z(\dot{h})$ 进行负反馈，得到需要的阻尼效果。图中 h_0 、 v_{z0} 为初始高度和初始垂直速度， k_1 、 k_2 为反馈回路传递系数。

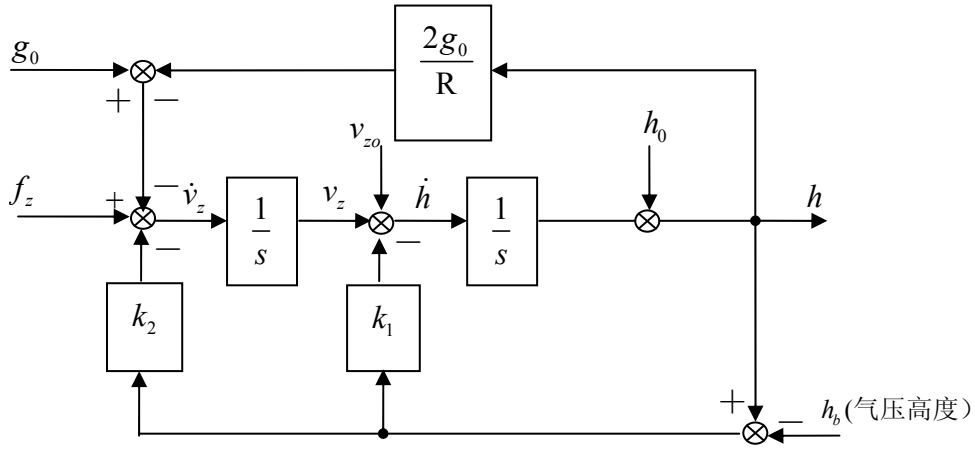


图 2-21 高度通道二阶阻尼回路

按图 2-21 可列出系统方程为

$$\begin{aligned} s v_z &= -k_2 h + 2 \frac{g_0}{R} h + f_z - g_0 + k_2 h_b \\ s h &= v_z - k_1 h + k_1 h_b \end{aligned} \quad (2-61)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} s & k_2 - 2 \frac{g_0}{R} \\ -1 & s + k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_z \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_z - g_0 + k_2 h_b \\ k_1 h_b \end{bmatrix} \quad (2-62)$$

系统特征方程为

$$s^2 + k_1 s + (k_2 - 2 \frac{g_0}{R}) = 0 \quad (2-63)$$

解 (2-62) 式得

$$h = \frac{f_z - g_0}{s^2 + k_1 s + k_2 - 2 \frac{g_0}{R}} + \frac{s k_1 + k_2}{s^2 + k_1 s + k_2 - 2 \frac{g_0}{R}} h_b \quad (2-64)$$

可以看出, h_b 中的高频误差分量经二阶滤波可基本滤除, 而惯性高度 h 中增长的低频误差成分也可得衰减, 系统所给出的是一个稳定的、精度较高的高度信息。通过适当选择 k_1 和 k_2 , 作为典型的二阶系统可以得到期望的动态特性。实用中可选取:

$$k_1 = 0.06666 \text{ sec}^{-1}, k_2 = 0.00111 \text{ sec}^{-2}.$$

如果在二阶阻尼回路的基础上再增加一些速率反馈和积分环节, 可以组成三阶阻尼回路, 使选择参数的余地更大。

2.3.2.3 平台指令角速度的计算

在平台式 INS 中, 用加速度计测量比力 f , 用陀螺仪建立载体 (动基座) 上的参考坐标系 n , 即用陀螺稳定平台准确地模拟导航坐标系。由于陀螺稳定平台是相对惯性空间保持定向的, 因此, 要想使陀螺稳定平台跟踪导航坐标系, 就要给陀螺稳定平台上的积分陀螺仪力矩传感器施加跟踪指令角速度信号, 通过伺服机构使平台也随地球自转和载体迁移转动一起相对惯性空间转动。显然, 加给陀螺仪力矩器的指令角速度信号应该等于导航坐标系相对惯性空间的旋转角速度, 即平台指令角速度应该是

$$\begin{aligned} \omega_{iPx}^P &= \omega_{inx}^n = -\frac{v_y}{R_M + h} \\ \omega_{iPy}^P &= \omega_{iny}^n = \omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h} \\ \omega_{iPz}^P &= \omega_{inz}^n = \omega_{ie} \sin L + \frac{v_x}{R_N + h} \tan L \end{aligned} \quad (2-65)$$

它们分别施加在东向陀螺、北向陀螺和方位陀螺的力矩传感器上, 实现平台系对导航坐标系的跟踪。

2.3.3 姿态角提取与姿态计算

在平台式惯性导航系统中, 有一个能准确模拟导航坐标系的物理平台。3 个加速度计和 3 个单自由陀螺仪安装在这个平台上。3 个加速度计分别测量沿地理坐标系 3 个轴的比力 f_x, f_y, f_z 。在载体运动过程中, 物理平台始终跟踪导航坐标系在惯性空间的旋转角速

度, 即 $\omega_{ip} = \omega_m = \omega_{ie} + \omega_{en}$, 使平台坐标系模拟导航坐标系。因此, 对于平台式惯性导航系统, 可直接从平台框架轴上的角度传感器直接提取载体的航向角、俯仰角和横滚(倾斜)角信号。

在捷联式惯导系统(SINS)中, 惯性器件(陀螺仪和加速度计)直接安装在载体上, 用数学变换和计算机建立“数学平台”来完成物理平台(陀螺稳定平台)的功能, 然后像平台式惯导系统那样进行导航计算。数学平台的主要任务是用捷联陀螺仪测量的载体角速度计算出载体坐标系 b 到导航坐标系 n 的姿态变换矩阵 C_b^n ; 从姿态矩阵的元素中提取载体的姿态和航向角信息; 用姿态矩阵把捷联系统加速度计的输出从载体坐标系变换到导航坐标系 ($f^n = C_b^n f^b$)。姿态矩阵计算、比力变换、姿态航向角信息计算等效于平台惯导的实体平台功能, 但是靠数学变换和计算机实现的, 通常把这三项计算称作“数学平台”。

SINS 的主要优点是: 取消了实体平台, 降低了系统的体积、重量和成本, 且系统维护方便, 故障率低; 容易实现惯性器件的多余度配置, 工作的可靠性得到提高, 但由于动态环境恶劣, 对惯性器件的要求比平台系统高; 测量的信息多, 数据率高, 自主性好且有较高的精度。因此, 组合导航系统经常都是以 SINS 为基础设计的。

把载体坐标系 $ox_b y_b z_b$ 作为动坐标系, 把导航坐标系 $ox_n y_n z_n$ 作为参考坐标系, 在姿态计算时, 用 n 系依次绕三个不同轴转动的航向角 ψ 、俯仰角 θ 和横滚角 γ 来描述两个坐标系轴的取向, 其定位关系见图 2-22 所示。

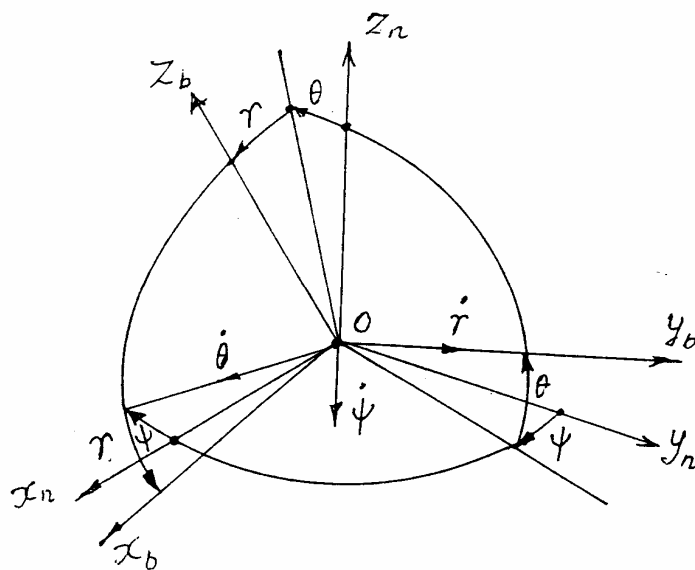


图 2-22 导航坐标系与体坐标系之间的关系

b 系和 n 系之间的方向余弦变换矩阵为

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_n^b &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \theta \sin \gamma & -\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \theta \sin \gamma & -\cos \theta \sin \gamma \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \gamma - \sin \psi \sin \theta \cos \gamma & -\sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \theta \cos \gamma & \cos \theta \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2-66)
\end{aligned}$$

载体的姿态角可由 \mathbf{C}_n^b 的相应元素求出, 即

$$\begin{aligned}
\theta &= \sin^{-1}(C_{23}) \\
\gamma_{\text{主}} &= \text{tg}^{-1}\left(-\frac{C_{13}}{C_{33}}\right) \\
\psi_{\text{主}} &= \text{tg}^{-1}\left(\frac{C_{21}}{C_{22}}\right)
\end{aligned} \quad (2-67)$$

俯仰角 θ 定义在 $[-90^\circ, +90^\circ]$ 区间, 和反正弦函数主值 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 一致, θ 的主值即真值, 不存在多值问题。横滚角 γ 定义在 $[+180^\circ, -180^\circ]$ 区间, 航向角 ψ 定义在 $[0^\circ, 360^\circ]$ 区间, 和反正切函数主值 $\left(-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}\right)$ 不一致, 都存在多值问题。需要进行象限判断, 以求得真值。表 2-7 及表 2-8 给出了计算 γ 角和 ψ 角的真值的方法。

表 2-7 航向角 ψ 的计算

C_{22} 的符号	$\psi_{\text{主}}$ 的符号	ψ 真值	ψ 所在象限
+	+	$\psi_{\text{主}}$	$0, 90^\circ$
-	-	$\psi_{\text{主}}+180^\circ$	$90^\circ, 180^\circ$
-	+	$\psi_{\text{主}}+180^\circ$	$180^\circ, 270^\circ$
+	-	$\psi_{\text{主}}+360^\circ$	$270^\circ, 360^\circ$

表 28 横滚角 γ 的计算

C_{33} 的符号	$\gamma_{\text{主}}$ 的符号	γ 真值	γ 所在象限
+	+	$\gamma_{\text{主}}$	$0, 90^\circ$
-	-	$\gamma_{\text{主}}+180^\circ$	$90^\circ, 180^\circ$
-	+	$\gamma_{\text{主}}-180^\circ$	$-180^\circ, -90^\circ$
+	-	$\gamma_{\text{主}}$	$-90^\circ, 0$

因为由 \mathbf{C}_n^b 的元素可确定载体的姿态角，因此将 \mathbf{C}_n^b 或 \mathbf{C}_b^n 称作姿态矩阵。要想实时计算载体姿态角，必须求解方向余弦矩阵微分方程。下面推导方向余弦矩阵的微分方程式。

考虑两个作相对运动的右手正交坐标系 i 系及 b 系， b 系为动坐标系， i 系为参考坐标系。在 t 时刻两坐标系间方向余弦矩阵为 $\mathbf{C}_b^i(t)$ ，经过一段时间增量 Δt 的方向余弦矩阵为 $\mathbf{C}_b^i(t + \Delta t)$ 。显然， $\mathbf{C}_b^i(t + \Delta t)$ 是在 $\mathbf{C}_b^i(t)$ 的基础上，由 b 坐标系转动后才得到的。

方向余弦矩阵的导数定义为

$$\dot{\mathbf{C}}_b^i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C}_b^i(t + \Delta t) - \mathbf{C}_b^i(t)}{\Delta t} \quad (2-68)$$

由于在时间 Δt 内， b 系只转动了一个小角度 $\Delta \theta$ ，转动后的 b 系可用 b' 表示，此时

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{b'}^b &= (\mathbf{I} + \Delta \theta \times) \\ \Delta \theta \times &= \begin{bmatrix} 0 & -\Delta \theta_z & \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z & 0 & -\Delta \theta_x \\ -\Delta \theta_y & \Delta \theta_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-69)$$

于是

$$\mathbf{C}_b^i(t + \Delta t) = \mathbf{C}_{b'}^i = \mathbf{C}_b^i \cdot \mathbf{C}_{b'}^b = \mathbf{C}_b^i(t) (\mathbf{I} + \Delta \theta \times) \quad (2-70)$$

将此关系式代入上述方向余弦矩阵的导数公式 (2-68)，得

$$\dot{\mathbf{C}}_b^i = \mathbf{C}_b^i(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad (2-71)$$

$$\text{而 } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ibz}^b & \omega_{iby}^b \\ \omega_{ibz}^b & 0 & -\omega_{ibx}^b \\ -\omega_{iby}^b & \omega_{ibx}^b & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \text{。由此得到}$$

$$\dot{\mathbf{C}}_b^i = \mathbf{C}_b^i \left[\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \right] \quad (2-72)$$

式中 $\left[\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \right]$ 是一个由角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 的分量构成的反对称矩阵。

参照 (2-72) 式，姿态矩阵 \mathbf{C}_b^n 的微分方程式可写为

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \left[\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times \right] \quad (2-73)$$

类似地，位置矩阵微分方程式也是这样导出的。

利用毕卡 (Peano-Baker) 逼近法求解姿态矩阵微分方程 (2-73)，可得^[1]

$$\mathbf{C}_b^n(t + \Delta t) = \mathbf{C}_b^n(t) \left[\mathbf{I} + \frac{\sin \Delta \theta_0}{\Delta \theta_0} \Delta \boldsymbol{\theta}_{nb}^{bk} + \frac{1 - \cos \Delta \theta_0}{(\Delta \theta_0)^2} \cdot (\Delta \boldsymbol{\theta}_{nb}^{bk})^2 \right] \quad (2-74)$$

式中

$$\Delta\theta_{nb}^{bK} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_{nbz}^b & \Delta\theta_{nby}^b \\ \Delta\theta_{nbz}^b & 0 & -\Delta\theta_{nbx}^b \\ -\Delta\theta_{nby}^b & \Delta\theta_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix} = \int_t^{t+\Delta t} \omega_{nb}^{bK} dt$$

$$(\Delta\theta_0)^2 = (\Delta\theta_{nbx}^b)^2 + (\Delta\theta_{nby}^b)^2 + (\Delta\theta_{nbz}^b)^2$$

令 $\frac{\sin\Delta\theta_0}{\Delta\theta_0} = S$, $\frac{1-\cos\Delta\theta_0}{(\Delta\theta_0)^2} = C$, 把 S 和 C 展成级数并取四阶项, 有

$$S_n = 1 - \frac{(\Delta\theta_0)^2}{6}, C_n = \frac{1}{2} - \frac{(\Delta\theta_0)^2}{24}$$

则姿态矩阵的四阶求解公式为

$$C_b^n(t + \Delta t) = C_b^n(t) \left[I + \left(1 - \frac{(\Delta\theta_0)^2}{6}\right) \cdot \Delta\theta_{nb}^{bK} + \left(\frac{1}{2} - \frac{(\Delta\theta_0)^2}{24}\right) \cdot (\Delta\theta_{nb}^{bK})^2 \right] \quad (2-75)$$

通常计算中取 $\Delta t = 0.02 \text{ s}$ 。

由角速度合成定理有 $\omega_{ib}^b = \omega_{in}^b + \omega_{nb}^b$, 于是

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_n^b \omega_{in}^n = \omega_{ib}^b - C_n^b (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \quad (2-76)$$

这表明, 在 SINS 姿态计算中, 按角速度陀螺仪的测量值得到 ω_{ib}^b , 按导航计算值求出 ω_{in}^n 后, 即可求得 ω_{nb}^b , 用上述四阶算法或四阶龙格-库塔法, 联立求解 9 个一阶微分方程式, 即可实时算出姿态矩阵的元素, 从而解出载体的姿态角 ψ, θ, γ , 并建立数学平台。

根据图 2-22 载体坐标系和导航坐标系之间的旋转关系, ω_{nb}^b 和 $\dot{\theta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\psi}$ 的关系如下:

$$\begin{bmatrix} \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} + C_\gamma \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_r C_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

展开合并可得

$$\begin{bmatrix} \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \cos \theta \\ 0 & 1 & -\sin \theta \\ \sin \gamma & 0 & -\cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2-78)$$

整理得

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \theta & 0 & \sin \gamma \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \theta & \cos \theta & -\cos \gamma \sin \theta \\ \sin \gamma & 0 & -\cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b \end{bmatrix} \quad (2-79)$$

式(2-79)即为欧拉角微分方程，求解这个微分方程就可以得到三个欧拉角，也就是航向和姿态角，利用航向角、姿态角和姿态矩阵元素之间的关系也可以得到姿态矩阵 \mathbf{C}_n^b 。

综上所述，SINS 的姿态计算和导航计算的流程可用图 2-23 的方框图表示。主要过程有：

(1) 系统初始化。系统初始化的任务包括：给定载体的初始位置、初始速度和导航平台的初始对准。捷联式惯导的初始对准就是确定姿态矩阵的初始值，在物理概念上即是把“数学平台”的平台坐标系和 n 系或 g 系的轴向对准。

(2) 姿态矩阵 \mathbf{C}_b^n 的计算：利用陀螺仪测得的 b 系相对于 i 系的角速度 ω_{ib}^b 和通过计算得到的 n 系相对于 i 系的角速度 ω_{in}^b 求得 b 系相对于 n 系的角速度 ω_{nb}^b ，再求解微分方程计算机 b 系到 n 系的姿态变换矩阵 \mathbf{C}_b^n 。然后从姿态矩阵 \mathbf{C}_b^n 中提取载体的姿态角。

(3) 导航计算：导航计算就是利用 b 系到 n 系的姿态变换矩阵 \mathbf{C}_b^n 把加速度计输出的信息变换到 n 系，消除有害加速度（即载体相对于地球运动造成的向心加速度、地球自转产生的哥氏加速度和重力加速度），然后经积分计算载体的速度、位置等导航信息。载体的经、纬度也可通过求解 n 系到 e 的变换矩阵（即位置矩阵） \mathbf{C}_n^e 来完成。

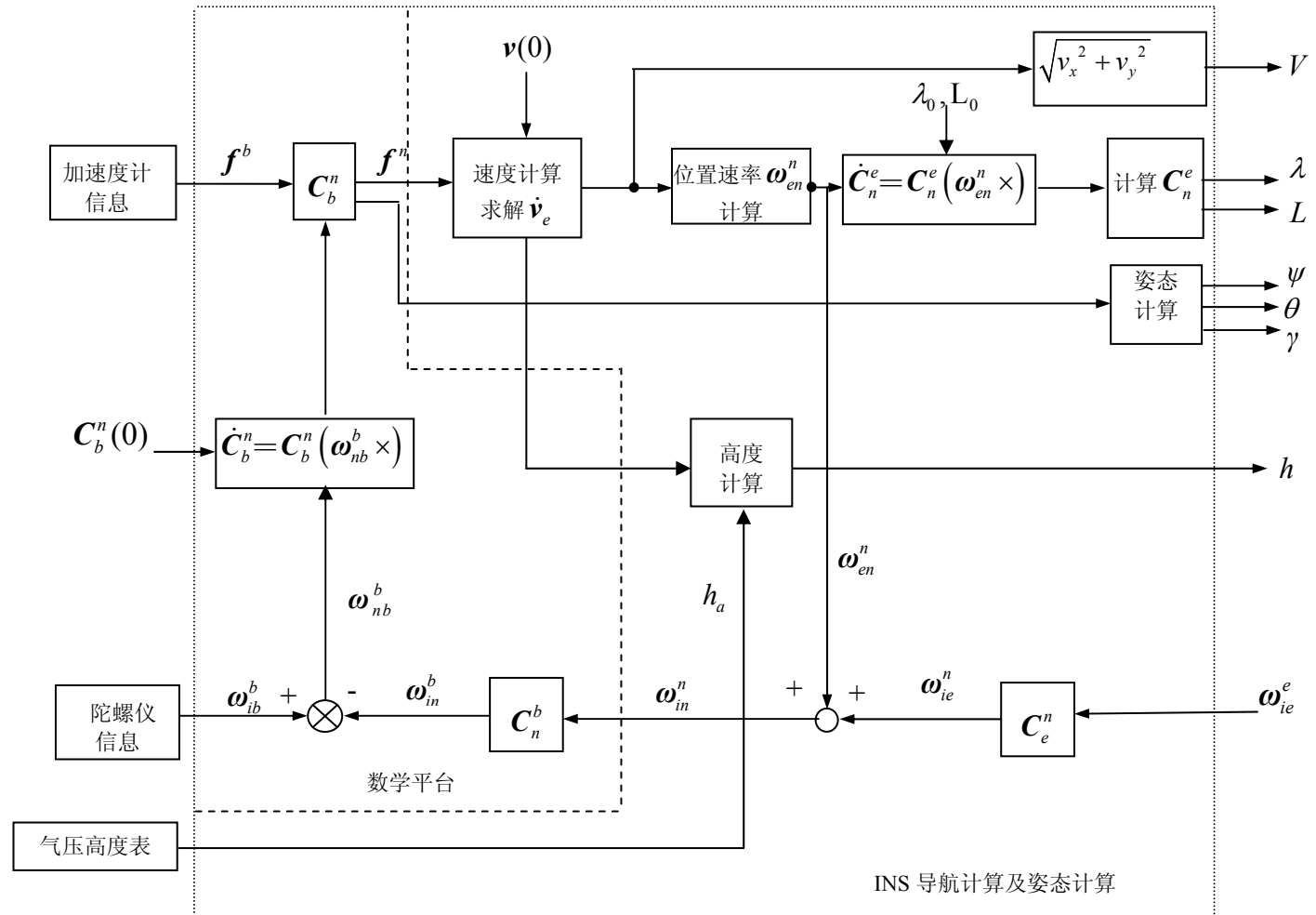


图 2-23 捷联式惯导算法的程序编排框图

2.4 惯性导航系统的误差分析

惯导系统的误差源主要包括惯性仪表（陀螺仪和加速度计）误差（包括陀螺的漂移和标度因数误差、加速度计的零偏和标度因数误差、模数转换误差、测量噪声等）、惯性仪表安装误差、系统的初始条件误差（如平台对准误差，位置、速度初始值的装订误差）、系统计算误差以及各种干扰引起的误差。

误差分析的目的是定量地估算惯导系统测算结果的准确程度。误差分析首先要建立反映各个误差量之间有机联系的误差方程。误差方程可依据系统中各力学量之间联系的方程通过微分处理来求取。一般地，所有误差源均可看成是对理想特性的小扰动，因而各个误差量都是对系统的一阶小偏差输入量。通常，在推导各误差量之间的关系时，可通过系统方程的微分处理并取一阶近似而忽略二阶以上的小量，得到系统的线性化误差方程。

惯性导航系统的误差方程有许多用途。在 INS 测试中，基于该方程，应用最优估计理论可以处理被测 INS 的测试数据，获取对 INS 误差源的最好估计；在惯性组合导航中，组合导航滤波器应用 INS 误差模型进行测量量之间状态误差的递推，误差模型也可用于组合导航滤波器的设计，以及确定哪些误差源重要并作为滤波器的状态，哪些误差可以被忽略。

本节首先分析了惯性导航的误差传递关系；然后根据建立系统误差的方法和步骤，建立了惯导系统的误差方程，最后简要分析了惯性导航系统的基本误差特性。

2.4.1 误差量的定义与误差传递关系

定义惯性导航的地理位置误差、速度误差以及平台系相对地理系（ENU 坐标系）误差角的分量分别为 $\delta L, \delta \lambda, \delta v_x(\delta v_E), \delta v_y(\delta v_N), \delta v_z(\delta v_U), \phi_x, \phi_y, \phi_z$ ，与之对应的初始给定误差为 $\delta L_0, \delta \lambda_0, \delta v_{x0}(\delta v_{E0}), \delta v_{y0}(\delta v_{N0}), \delta v_{z0}(\delta v_{U0}), \phi_{x0}, \phi_{y0}, \phi_{z0}$ ，各误差量的一阶导数为 $\delta \dot{L}, \delta \dot{\lambda}, \delta \dot{v}_x(\delta \dot{v}_E), \delta \dot{v}_y(\delta \dot{v}_N), \delta \dot{v}_z(\delta \dot{v}_U), \dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z$ 。用 $\nabla_x(\nabla_E), \nabla_y(\nabla_N), \nabla_z(\nabla_U)$ 表示东向、北向和天向加速度计的零位偏差，用 $\varepsilon_x(\varepsilon_E), \varepsilon_y(\varepsilon_N), \varepsilon_z(\varepsilon_U)$ 分别表示三个陀螺的漂移。

根据惯性导航系统的原理和导航参数与姿态角的计算过程，图 2-24 给出了惯性导航误差传递的关系与方向的示意图。如图 2-24 所示，系统误差的传递可以分成三段：第一段由平台误差角速率 $\dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z$ 通过一次积分并加上初始偏差，形成平台误差角 ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z ，从而引起加速度测量误差的交叉耦合误差，再加上加速度计的零偏误差，最后形成加速度误差 $\delta \dot{v}_x(\delta \dot{v}_E), \delta \dot{v}_y(\delta \dot{v}_N), \delta \dot{v}_z(\delta \dot{v}_U)$ ；第二段由加速度误差

$\delta \dot{v}_x(\delta \dot{v}_E), \delta \dot{v}_y(\delta \dot{v}_N), \delta \dot{v}_z(\delta \dot{v}_U)$ 通过一次积分并加上初始给定误差, 形成速度误差 $\delta v_x(\delta v_E), \delta v_y(\delta v_N), \delta v_z(\delta v_U)$, 而后除以地球曲率半径, 再通过一次积分并加上初始给定误差, 最后形成导航位置误差 $\delta L, \delta \lambda$; 第三段由 $\frac{\delta v_x}{R+h}, \frac{\delta v_y}{R+h}$ 引起地理系相对地球坐标系的转动角速率误差 (该角速度构成对陀螺仪的指令角速率误差), 再加上陀螺本身的角速度漂移, 以及地球自转角速度误差, 最终形成平台系相对地理系的误差角速率 $\dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z$, 构成了一次误差闭环传递。

根据误差方程建立的一般方法和上述三段误差传递过程, 结合惯导系统速度方程、位置变化率方程和平台误差角的定义, 可以建立速度误差方程、位置误差方程和平台姿态角误差方程, 三个误差方程的总和就是系统的误差方程。

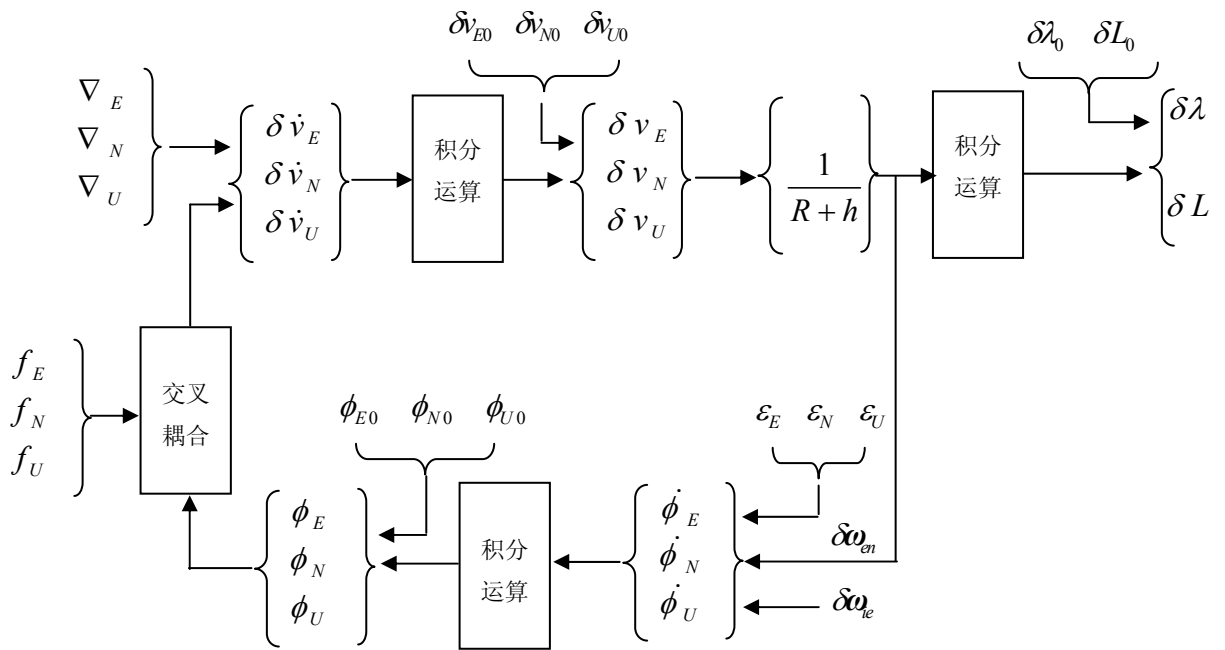


图 2-24 惯性导航系统误差传递示意图

2.4.2 平台姿态角误差方程

平台姿态角误差是指陀螺稳定平台 (或数学平台) 建立的导航坐标系 P 与理想导航坐标系 n 之间的误差角 (见图 2-25)。通常它是一个小角度, 故有

$$C_n^P = \begin{bmatrix} 1 & \phi_z & -\phi_y \\ -\phi_z & 1 & \phi_x \\ \phi_y & -\phi_x & 1 \end{bmatrix} = I - [\bar{\phi} \times] \quad (2-80)$$

式中 $[\bar{\phi} \times]$ 为由误差角 $\bar{\phi} = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ 的分量构成的反对称阵。

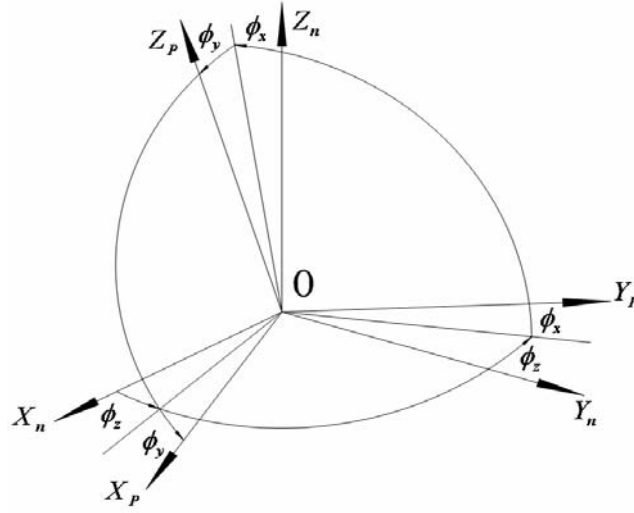


图 2-25 导航坐标系 n 与平台坐标系 P 之间的关系

理想情况下, P 系与 n 系重合, 平台坐标系 P 相对惯性空间的转动角速度 ω_{iP}^P 与导航坐标系 n 相对惯性空间的转动角速度 ω_{in}^n 之差为

$$\dot{\bar{\phi}} = \omega_{iP}^P - \omega_{in}^P = \omega_{iP}^P - C_n^P \omega_{in}^n = \omega_{iP}^P - [I - \bar{\phi} \times] \omega_{in}^n \quad (2-81)$$

或 $\dot{\bar{\phi}} = \omega_{iP}^P - \omega_{in}^n + \bar{\phi} \times \omega_{in}^n$, 计及 $\omega_{iP}^P = \omega_{iC}^P + \varepsilon^P$, 式中 ω_{iC}^P 为计算的施矩角速度信号, $\varepsilon^P \approx \varepsilon^n$ 为陀螺漂移率, 由此得到平台姿态角误差方程式

$$\dot{\bar{\phi}} = \omega_{iC}^P - \omega_{in}^n + \bar{\phi} \times \omega_{in}^n + \varepsilon^n \quad (2-82)$$

式中 $\omega_{iC}^P = \omega_{in}^n + \delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n$, 这表明, 造成 ω_{iC}^P 与 ω_{in}^n 不相等的原因是, 计算 ω_{ie}^n 和 ω_{en}^n 时有误差。由此

$$\dot{\bar{\phi}} = \delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n - (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \bar{\phi} + \varepsilon^n \quad (2-83)$$

引入列向量符号

$$\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos L \\ \omega_{ie} \sin L \end{bmatrix}, \quad \delta\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{ie} \sin L \delta L \\ \omega_{ie} \cos L \delta L \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{v_y}{R_M+h} \\ \frac{v_x}{R_N+h} \\ \frac{v_x}{R_N+h} \operatorname{tg} L \end{bmatrix}, \quad \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{\delta v_y}{R_M+h} \\ \frac{\delta v_x}{R_N+h} \\ \frac{\delta v_x}{R_N+h} \operatorname{tg} L + \frac{v_x}{R_N+h} \sec^2 L \delta L \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^n = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

把(2-83)式展开得到

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_x &= -\frac{\delta v_y}{R_M+h} + (\omega_{ie} \sin L + \frac{v_x}{R_N+h} \operatorname{tg} L) \phi_y - (\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N+h}) \phi_z + \varepsilon_x \\ \dot{\phi}_y &= \frac{\delta v_x}{R_N+h} - \delta L \omega_{ie} \sin L - (\omega_{ie} \sin L + \frac{v_x}{R_N+h} \operatorname{tg} L) \phi_x - \frac{v_y}{R_M+h} \phi_z + \varepsilon_y \\ \dot{\phi}_z &= \frac{\delta v_x}{R_N+h} \operatorname{tg} L + (\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N+h} \sec^2 L) \delta L + (\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N+h}) \phi_x + \frac{v_y}{R_M+h} \phi_y + \varepsilon_z \end{aligned} \quad (2-84)$$

2.4.3 速度误差方程

由速度方程

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{f}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n \quad (2-85)$$

可得

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = \delta \mathbf{f}^n - (2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \delta \mathbf{v}^n + \delta \mathbf{g}^n \quad (2-86)$$

式中, $\delta \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^P - \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^n \times \bar{\boldsymbol{\phi}}^n + \bar{\nabla}^P$, $\mathbf{f}^P = \mathbf{C}_n^P \mathbf{f}^n + \bar{\nabla}^P = [\mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{\phi}}^n \times] \mathbf{f}^n + \bar{\nabla}^P$

$$\delta \mathbf{g}^n = [0 \quad 0 \quad -\delta g_z]^T, \quad \delta g_z = -2\omega_s^2 \delta h, \quad \omega_s^2 = \frac{g}{R_M}$$

把(2-86)式展开, 写成分量形式, 得到

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_x &= f_y \phi_z - f_z \phi_y + \left(\frac{v_y}{R_N+h} \operatorname{tg} L - \frac{v_z}{R_N+h} \right) \delta v_x + \left(2\omega_{ie} \sin L + \frac{v_x}{R_N+h} \operatorname{tg} L \right) \delta v_y \\ &\quad - \left(2\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N+h} \right) \delta v_z + \left(2\omega_{ie} \cos L v_y + \frac{v_x v_y}{R_N+h} \sec^2 L + 2\omega_{ie} \sin L v_z \right) \delta L + \nabla_x \\ \delta \dot{v}_y &= f_z \phi_x - f_x \phi_z - 2\left(\omega_{ie} \sin L + \frac{v_x}{R_N+h} \operatorname{tg} L \right) \delta v_x - \frac{v_z}{R_M+h} \delta v_y - \frac{v_y}{R_M+h} \delta v_z \\ &\quad - \left(2\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N+h} \sec^2 L \right) v_x \delta L + \nabla_y \\ \delta \dot{v}_z &= f_x \phi_y - f_y \phi_x + 2\left(\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N+h} \right) \delta v_x + 2\frac{v_y}{R_M+h} \delta v_y - 2\omega_{ie} \sin L v_x \delta L + 2\omega_s^2 \delta h + \nabla_z \end{aligned} \quad (2-87)$$

2.4.4 位置误差方程

由 $\dot{L} = \frac{v_y}{R_M + h}$ 和 $\dot{\lambda} = \frac{v_x}{R_N + h} \sec L$ 分别得

$$\begin{aligned}\delta \dot{L} &= \frac{\delta v_y}{R_M + h} \\ \delta \dot{\lambda} &= \frac{\delta v_x}{R_N + h} \sec L + \frac{v_x}{R_N + h} \sec L \tan L \delta L\end{aligned}\quad (2-88)$$

并且 $\delta \dot{h} = \delta v_z$ ，公式(2-84)、(2-87)和(2-88)合在一起，即为惯导系统的基本误差方程。

2.4.5 惯导系统的基本误差特性

INS 的误差源有两类，一类是确定性的，另一类是随机性的。两类误差源所引起的系统误差传播特性不同。下面我们重点说明确定性误差源引起的系统误差特性。为了简单起见，我们考虑静基座情况，即 $v_x = v_y = v_z = \dot{v}_x = \dot{v}_y = \dot{v}_z = 0$ 。由于纯惯导系统的高度通道是不稳定的，经过外部高度信息阻尼后，我们已能得到一个稳定的精度较高的高度信息。下面分析中，我们把高度通道与两个水平通道解耦。另外，从系统误差方程式可以看出，经度误差 $\delta \lambda$ 在系统的回路之外（即 $\delta \lambda$ 并不影响 ϕ_x ， ϕ_y ， ϕ_z ， δv_x ， δv_y ， δL 的动态特性）；同时，只要 δv_x 的特性清楚，经过一次积分就可得到 $\delta \lambda$ （ $\delta \dot{\lambda} = \frac{\delta v_x}{R_N + h} \sec L$ ）误差特性。因此可以把它分离出来。这样，静基座上系统的误差方程就简化为

$$\begin{aligned}\delta \dot{v}_x &= 2\delta v_y \omega_{ie} \sin L - \phi_y g + \nabla_x \\ \delta \dot{v}_y &= -2\delta v_x \omega_{ie} \sin L + \phi_x g + \nabla_y \\ \delta \dot{L} &= \frac{\delta v_y}{R_M + h} \\ \dot{\phi}_x &= -\frac{\delta v_y}{R_M + h} + \phi_y \omega_{ie} \sin L - \phi_z \omega_{ie} \cos L + \varepsilon_x \\ \dot{\phi}_y &= \frac{\delta v_x}{R_N + h} - \delta L \omega_{ie} \sin L - \phi_x \omega_{ie} \sin L + \varepsilon_y \\ \dot{\phi}_z &= \frac{\delta v_x}{R_N + h} \tan L + \delta L \omega_{ie} \cos L + \phi_x \omega_{ie} \cos L + \varepsilon_z\end{aligned}\quad (2-89)$$

把上式写成矩阵形式得

$$\begin{bmatrix} \delta \ddot{v}_x \\ \delta \ddot{v}_y \\ \delta \dot{L} \\ \dot{\phi}_x \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{\phi}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\omega_{ie} \sin L & 0 & 0 & -g & 0 \\ -2\omega_{ie} \sin L & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_M + h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_M + h} & 0 & 0 & \omega_{ie} \sin L & -\omega_{ie} \cos L \\ \frac{1}{R_N + h} & 0 & -\omega_{ie} \sin L & -\omega_{ie} \sin L & 0 & 0 \\ \frac{tgL}{R_N + h} & 0 & \omega_{ie} \cos L & \omega_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta L \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ 0 \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2-90)$$

写成简化形式为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{W}(t) \quad (2-91)$$

下面根据系统误差方程，先分析系统误差的振荡特性，再分析系统的误差传播特性。

对系统误差方程(2-91)取拉氏变换得

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) &= \mathbf{F}\mathbf{X}(s) + \mathbf{W}(s) \\ \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} [\mathbf{X}(0) + \mathbf{W}(s)] \end{aligned} \quad (2-92)$$

系统的特征方程式为

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= |s\mathbf{I} - \mathbf{F}| \\ &= (s^2 + \omega_{ie}^2) [(s^2 + \omega_s^2)^2 + 4s^2 \omega_{ie}^2 \sin^2 L] = 0 \end{aligned} \quad (2-93)$$

由 $s^2 + \omega_{ie}^2 = 0$ 得系统的一组特征根为

$$s_{1,2} = \pm j\omega_{ie} \quad (2-94)$$

由 $(s^2 + \omega_s^2)^2 + 4s^2 \omega_{ie}^2 \sin^2 L = 0$ ，计入 $\omega_s^2 \gg \omega_{ie}^2$ ，解得系统的另外二组特征根

$$\begin{aligned} s_{3,4} &= \pm j(\omega_s + \omega_{ie} \sin L) \\ s_{5,6} &= \pm j(\omega_s - \omega_{ie} \sin L) \end{aligned} \quad (2-95)$$

式中 $\omega_s = \sqrt{g_0/R} \approx 1.24 \times 10^{-3} \text{ rad/sec}$ ， $\omega_{ie} \approx 0.729 \times 10^{-4} \text{ rad/sec}$ 。

因为系统的特征根都是虚根，即系统的极点都在虚轴上，所以系统误差方程(2-90)的解都是由正余弦函数的线性组合组成的。这说明系统误差是周期振荡的，其固有振荡频率有三个，即 ω_{ie} ， $\omega_s + \omega_{ie} \sin L$ 和 $\omega_s - \omega_{ie} \sin L$ 。 $\omega_{ie} \sin L = \omega_f$ 称为付科角频率。对应

于地球角速率 ω_{ie} 的固有振荡周期是 $T_e = \frac{2\pi}{\omega_{ie}} = 24$ 小时，对应于舒勒角频率 ω_s 和付科角

频率 ω_f 的振荡周期分别是 $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = 84.4$ 分钟， $T_f = \frac{2\pi}{\omega_{ie} \sin L} = 34$ 小时（取 $L=45^\circ$ ）。

分析结果表明, 付科振荡对舒勒振荡起调制作用, 例如一些误差分量的解析表达式具有下列形式

$$x(t) = A \cos(\omega_{ie} \sin L) t \cdot \sin \omega_s t \quad (2-96)$$

系统误差具有舒勒振荡周期, 说明 INS 具有舒勒摆特性, 这是 INS 最本质的特征, 实际上惯性稳定平台就是一个物理上能实现的舒勒摆。载体的机动不会引起导航误差, 或者说机动对系统是无干扰的。

系统的误差传播特性可按公式(2-90)由各误差源与导航误差之间的传递函数关系求解。因为 INS 的主要误差源是陀螺漂移和加速度计误差, 下面我们把主要分析结果列写出来(见表 2-9 和表 2-10), 并进行简要分析。

从表 2-9 中可以看出, 陀螺漂移引起的系统误差大多数都是振荡的, 但对某些导航参数和平台误差角将产生常值误差。而最为严重的是北向陀螺的 ε_y 及方位陀螺的 ε_z 对于经度误差 $\delta\lambda(t)$ 将引起随时间积累的位置偏差。但这并不意味着可以放松对东向陀螺的要求, 实际上东向陀螺漂移 ε_x 直接影响方位对准精度。因此, 3 个陀螺漂移的大小都是决定系统精度的关键因素。从表 2-10 中可以看出, 加速度计零偏误差将产生振荡误差及常值误差。如两个水平加速度计的零偏 ∇_x 及 ∇_y 将引起经、纬度及平台姿态角的常值误差。总之, 陀螺仪和加速度计的精度是影响惯导系统精度的决定性因素, 其中陀螺仪的精度尤为突出。

值得指出的是, 有些误差虽然从性质讲是振荡型的, 但因振荡周期很长(如周期为 24 小时、84.4 分, 或 34 小时), 可能远远大于系统的一次工作时间。此时, 在系统工作期间, 误差应视为是随时间增长的。如 $\phi_z = \frac{\varepsilon_z}{\omega_{ie}} \sin \omega_{ie} t$, 其振荡周期是 24 小时, 显然, 在系统工作的几小时内, 平台姿态误差 ϕ_z 是随时间增长的。典型的系统误差传播曲线如图 2-26 所示。

表 2-9 陀螺漂移误差引起的系统误差

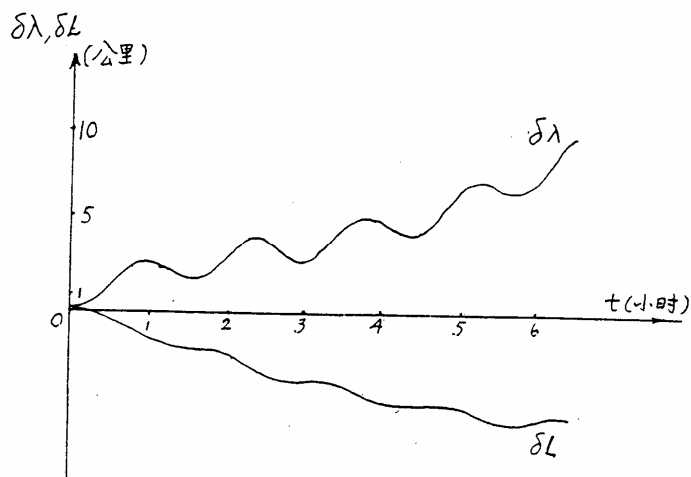
	\mathcal{E}_x	\mathcal{E}_y	\mathcal{E}_z
$\delta V_x(t)$	$\frac{g \sin L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\sin \omega_{ie} t - \frac{\omega_{ie}}{\omega_s} \sin \omega_s t) \mathcal{E}_x$	$(\frac{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2 \cos^2 L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos \omega_s t - \frac{\omega_s^2 - \sin^2 L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos \omega_{ie} t - \cos^2 L) \mathcal{E}_y$	$R \sin L \cos L (\frac{\omega_s^2 \cos \omega_{ie} t - \omega_{ie}^2 \cos \omega_s t}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} - 1) \mathcal{E}_z$
$\delta V_y(t)$	$\frac{g \sin L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_{ie} t - \cos \omega_s t) \mathcal{E}_x$	$\frac{g \sin L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\sin \omega_{ie} t - \frac{\omega_{ie}}{\omega_s} \sin \omega_s t) \mathcal{E}_y$	$\frac{g \cos L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\sin \omega_{ie} t - \frac{\omega_{ie}}{\omega_s} \sin \omega_s t) \mathcal{E}_z$
$\delta \lambda(t)$	$[\frac{tgL}{\omega_{ie}} (1 - \cos \omega_{ie} t) - \frac{\omega_{ie} tgL}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_{ie} t - \cos \omega_s t)] \mathcal{E}_x$	$[\frac{\sec L (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2 \cos^2 L)}{\omega_s (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_s t - \frac{\omega_s^2 tg \sin L}{\omega_{ie} (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_{ie} t - t \cos L] \mathcal{E}_y$	$[\frac{\omega_s^2 \sin L}{\omega_{ie} (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_{ie} t - \frac{\omega_{ie}^2 \sin L}{\omega_s (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_s t - t \sin L] \mathcal{E}_z$
$\delta L(t)$	$\frac{\omega_s^2}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\frac{1}{\omega_{ie}} \sin \omega_{ie} t - \frac{1}{\omega_s} \sin \omega_s t) \mathcal{E}_x$	$[\frac{\omega_s^2 \omega_{ie} \sin L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\frac{1}{\omega_s^2} \cos \omega_s t - \frac{1}{\omega_{ie}} \cos \omega_{ie} t) + \frac{\sin L}{\omega_{ie}} \mathcal{E}_y$	$[\frac{\omega_s^2 \cos L}{\omega_{ie} (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \cos \omega_{ie} t - \frac{\omega_{ie}^2 \cos L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos \omega_s t - \frac{\cos L}{\omega_{ie}}] \mathcal{E}_z$
$\phi_x(t)$	$\frac{1}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_s \sin \omega_s t - \omega_{ie} \sin \omega_{ie} t) \mathcal{E}_x$	$\frac{\omega_{ie} \sin L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_{ie} t - \cos \omega_s t) \mathcal{E}_y$	$(\cos \omega_s t - \cos \omega_{ie} t) \mathcal{E}_z$

表 2-9 (续)

	\mathcal{E}_x	\mathcal{E}_y	\mathcal{E}_z
$\phi_y(t)$	$\frac{\omega_{ie} \sin L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_s t - \cos \omega_{ie} t) \mathcal{E}_x$	$[\frac{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2 \cos^2 L}{\omega_s (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_s t - \frac{\omega_{ie} \sin^2 L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \sin \omega_{ie} t] \mathcal{E}_y$	$\frac{\omega_{ie} \sin L \cos L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\sin \omega_{ie} t - \frac{\omega_{ie}}{\omega_s} \sin \omega_s t) \mathcal{E}_z$
$\phi_z(t)$	$[\frac{\sec L}{\omega_{ie}} (1 - \cos \omega_{ie} t) + \frac{\omega_{ie} \sin L \tan L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_s t - \cos \omega_{ie} t)] \mathcal{E}_x$	$\frac{\omega_{ie} \sin L \cos L - \omega_s^2 \tan L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\frac{\sin \omega_{ie} t}{\omega_{ie}} - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s t}) \mathcal{E}_y$	$[\frac{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2 \cos^2 L}{\omega_{ie} (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_{ie} t - \frac{\omega_{ie} \sin^2 L}{\omega_s (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_s t] \mathcal{E}_z$

表 2-10 加速度计零偏误差引起的系统误差

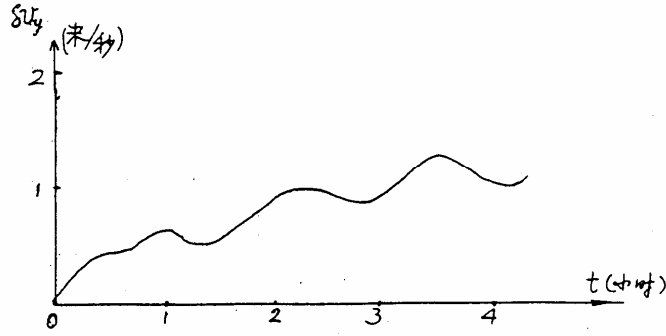
	∇_x	∇_y
$\delta V_x(t)$	$\frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \nabla_x$	
$\delta V_y(t)$	$\frac{g \sin L}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_{ie} t - \cos \omega_s t) \varepsilon_x$	$\frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \nabla_y$
$\delta \lambda(t)$	$\frac{\sec L}{g} (1 - \cos \omega_s t) \nabla_x$	
$\delta L(t)$		$\frac{1}{g} (1 - \cos \omega_s t) \nabla_y$
$\phi_x(t)$		$-\frac{1}{g} (1 - \cos \omega_s t) \nabla_y$
$\phi_y(t)$	$\frac{1}{g} (1 - \cos \omega_s t) \nabla_x$	
$\phi_z(t)$	$\frac{tgL}{g} (1 - \cos \omega_s t) \nabla_x$	



误差源: $\varepsilon_E = \varepsilon_N = 0.007^\circ/h$, $\varepsilon_z = 0.01^\circ/h$, $\nabla_x = \nabla_y = 1 \times 10^{-4} g$

$\phi_x(0) = \phi_y(0) = 5''$, $\phi_z(0) = 2'$

(a) 位置误差曲线



误差源: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.02^\circ/h$, $\varepsilon_z = 0.05^\circ/h$, $\phi_x(0) = \phi_y(0) = 10''(1\sigma)$, $\phi_z(0) = 30''$

(b) 北向速度误差曲线

图 2-26 惯导系统的误差曲线

上述确定性误差的影响可以通过补偿措施加以减小, 这时随机干扰就成为影响系统精度的主要误差源。设东向加速度计零位误差 ∇_x 是一个均值为零, 自相关函数为 $\mu\sigma^2\delta(\tau)$ 的白噪声过程, 其中 μ 代表时间因子, σ^2 为过程方差, $\delta(\tau)$ 为脉冲函数。 ∇_x 与速度误差 δv_x 的传递函数关系为

$$\delta v_x(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_s^2} \nabla_x(s) \quad (2-97)$$

它所造成的东向速度误差的方差为

$$\sigma_{\delta v_x}^2 = \mu\sigma^2 \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{2\omega_s} \sin 2\omega_s t \right] \quad (2-98)$$

可见, 这项误差方差是发散的, 发散的速度与 \sqrt{t} 成正比。类似的分析与论证适用于所有随机误差源和导航误差之间的关系。可以说, 由随机误差源造成的导航误差都是随时间振荡增长和发散的, 发散速度与 \sqrt{t} 成正比。

2.5 惯性导航系统的对准

2.5.1 对准的要求和分类

惯性导航系统是根据测得的载体加速度, 经过积分求得速度和位置的, 在进行导航解算之前必须知道载体的初始速度和初始位置, 即需要进行位置和速度的初始化。另外在惯导系统中, 无论是物理平台还是数学平台都是加速度计测量的基准, 平台必须准确对准和跟踪导航坐标系, 以避免由于平台指向误差引起的加速度测量误差。然而, 在惯导系统加电启动后, 平台的三轴指向是任意的, 没有确定的方位。因此, 在系统进入导

航工作状态之前, 必须将平台的指向准确估计出来, 这一确定平台坐标系相对于参考坐标系的方位的过程称为惯导系统的对准。

通常, 需要对准的惯导系统中安装有测量三个方向角速率信息的陀螺仪和测量三个方向比力信息的加速度计。按照敏感器的常规布局 and 安装要求, 这些陀螺仪和加速度计相互正交安装, 它们的敏感轴相互对准。对准过程就是确定由加速度计输入轴所定义的正交轴系相对于所选参考坐标系之间的方位。

对于平台式惯导系统, 对准就是使平台坐标系向导航坐标系对准, 对准过程是一个物理过程。捷联式惯导系统以数学平台代替物理平台, 惯性仪表直接固联在载体上, 在捷联惯性导航系统进入导航解算状态时, 要求在计算机中建立一个能够准确地描述载体坐标系 b 与导航坐标系 n 之间的坐标变换阵 C_b^n , 以便导航参数在精确的基础上计算。捷联惯导系统对准的目的正是力图在计算机中建立这样一个坐标变换矩阵 C_b^n 。因此, 捷联惯性导航系统的初始对准就是确定初始时刻从载体坐标系到导航坐标系的变换矩阵 $C_b^n(0)$ 。

对准与惯导系统的导航精度和使用的准备时间有着直接的关系, 随着现代战争对武器系统反应能力要求的不断提高, 惯导系统对准的精度和快速性已经成为其应用过程中必须解决的关键问题。尤其是在许多军事应用场合, 常常把反应时间短作为一项主要技术要求。

惯导系统无论用于对载体的导航还是武器系统的制导, 均要求对准的精度高、对准时间短, 从而保证必须的初始信息的准确性和快速性。为了达到在对准精度和对准时间上的要求, 陀螺仪和加速度计必须具备足够高的精度和稳定性, 同时, 系统的鲁棒性要好, 对外界的干扰不敏感。用于舰船和飞机的惯导系统对准时间可以稍长一些, 例如, 装备在民用飞机的惯导系统的对准时间容许在 15~20 分钟。通常, 平台惯导系统的水平对准精度要求达到 $10''$ 以内, 方位对准精度要求在 $2' \sim 5'$ 之内。而用于一般武器系统的捷联惯导系统由于具有快速反应的要求, 静基座对准时间一般要求在 10 分钟以内, 动基座的对准时间在 20 分钟以内。空中发射武器的对准时间要求在几分钟甚至几秒钟内完成。

根据对准阶段、基座运动状态和对准中使用信息和控制方法的不同, 可把对准分为以下几种情况:

(1) 按对准的阶段分: 一般可分为两个阶段——粗对准 (Coarse Alignment) 和精对准 (Fine Alignment)。在粗对准阶段, 对平台进行水平和方位的粗调, 要求快速地将平台对准在一定的精度范围内, 为进一步的精对准提供基础。所以, 这一阶段要求速度快, 精度可以低一些。精对准在粗对准的基础上进行, 要求在保证对准精度的前提下尽可能快。

(2) 按对准的轴系分: 取地理坐标系为导航坐标系的情况下, 对准可分为水平对准

和方位对准。对于捷联式惯导系统，一般情况下水平对准和方位对准是同时进行的。

(3) 按基座的运动状态分：按照惯导系统所在载体的运动状态可将对准分为静基座对准和动基座对准。动基座对准是在载体运动情况下进行的，通常是子系统相对主基准的传递对准。

(4) 按对准时对外部信息的需求分：可将对准分为自主式对准和非自主式对准。惯导系统只依靠对重力矢量和地球速率矢量的测量量，通过解析方法实现的对准称为自主式对准。这种方法不需要外部信息，自主性强，但精度相对较低。非自主对准通过机电或光学方法将外部参考引入系统，使平台对准至导航坐标系。在捷联式惯导系统的粗对准阶段，可引入主惯导系统的航向姿态信息，迅速将数学平台对准导航坐标系，减小初始失准角；精对准阶段，可采用受控对准方法，利用其他导航设备（GPS、里程仪、磁罗盘等）提供的信息（如位置、速度和方位）作为观测信息，通过最优滤波实现精确对准。

(5) 按实施对准所采用的控制方法分：有基于经典控制理论的对准方法，也称为频域法或经典法；基于现代控制理论的状态空间法，也称最优估计法。

无论论采用哪种方法，都会存在各种系统误差和随机误差，限制惯导系统的对准精度。这些误差包括惯性敏感器误差、由传输延迟引起的数据延迟误差、信号的量化误差、振动效应误差以及其他不希望的或无法量化的运动造成的误差等。人们已研究出多种方法和技术来减小随机误差和系统误差的影响，采用哪种方法对准精度更高取决于实际的应用场合。

2.5.2 自对准的原理和方法

理想情况下，人们希望导航系统在开机后具有自动对准的能力，而不需任何外部测量信息。下面将重点讨论仅利用惯性系统的比力测量信息和角速率测量信息来完成安装在刚性载体上的惯导系统的自对准过程和原理。

2.5.2.1 基本原理

考虑将惯导系统与由当地真北方向和当地水平面所定义的地理坐标系进行对准的情况，对准是确定一组敏感器轴系相对于当地地理坐标系的方位。为分析方便起见，假设导航系统相对地球静止不动。此时，加速度计测量三个互相正交的比力分量。而陀螺仪测量不同方向上的地球自转角速率分量。

在平台式惯导系统中，稳定平台可以转动以实现安装在其上的惯性测量组件与当地地理坐标系的对准。在这种情况下，通常把敏感轴分别与坐标系的北向、东向和垂直轴对准的三个加速度计，分别称为北向、东向和垂直向加速度计。同样地，北向陀螺、东向陀螺和垂直向陀螺也可定义出来。在平台式惯导的机械编排中，通过调整平台的方向

直至加速度计和陀螺所测量的比力和地球自转角速率分量与理论期望值相等来完成对准。作用在北向和东向的重力水平分量理论上为零。调节平台的倾斜角使惯性测量组件中的北向和东向加速度计的输出为零，便实现了平台的调平和水平对准。由于地球自转角速率的东向分量也为零，因此，绕垂直轴旋转平台直至东向陀螺的输出为零，就完成了方位对准。这种对准过程称为陀螺罗经法。显然，平台式惯导系统的自主式水平对准精度主要取决于两个水平加速度计的精度，方位对准精度主要取决于东向陀螺漂移。因此，为了提高惯导系统的初始对准精度，必须采用高精度的惯性仪表并对惯性仪表的误差进行补偿。一种等价的对准过程有时称为陀螺罗经解析法，可用于捷联惯性导航系统的对准中。

在捷联惯导系统中，姿态信息可用一组方向余弦矩阵参数或者一组四元数参数表示。对准的目的是计算出方向余弦矩阵参数或四元数参数，这些参数定义了惯性敏感器轴系与当地地理坐标系之间的相互关系。利用体坐标系相对于当地地理坐标系的当前最佳估计值，可以将惯性传感器在体坐标系中提供的测量值转换到当地地理坐标系中。将这些被转换后的传感器测量值与期望的角速率和加速度相比较，可以正确地计算出方向余弦或者四元素参数，从而实现捷联惯导系统的对准。

安装在运载体上的传感器测量出的比力分量和地球自转角速率分量，分别表示为矢量 \mathbf{g}^b 和 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b$ ，这些矢量与选定的导航坐标系中的重力矢量 \mathbf{g}^n 和地球角速率矢量 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ ，服从如下关系

$$\mathbf{g}^b = \mathbf{C}_n^b \mathbf{g}^n \quad (2-99)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^b = \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \quad (2-100)$$

若取东北天（ENU）地理坐标系为导航坐标系，则有： $\mathbf{g}^n = [0 \ 0 \ -g]^T$ ， $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [0 \ \omega_{ie} \cos L \ \omega_{ie} \sin L]^T$ 。这样，由测量值 $\mathbf{g}^b = [g_x \ g_y \ g_z]^T$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ ，可以计算出方向余弦阵 \mathbf{C}_n^b 各元素的值，且有

$$\begin{aligned} C_{13} &= -\frac{g_x}{g} & C_{12} &= \frac{\omega_x}{\omega_{ie} \cos L} + \frac{g_x \tan L}{g} \\ C_{23} &= -\frac{g_y}{g} & C_{22} &= \frac{\omega_y}{\omega_{ie} \cos L} + \frac{g_y \tan L}{g} \\ C_{33} &= -\frac{g_z}{g} & C_{32} &= \frac{\omega_z}{\omega_{ie} \cos L} + \frac{g_z \tan L}{g} \end{aligned} \quad (2-101)$$

\mathbf{C}_n^b 的剩余元素可利用方向余弦矩阵的正交特性来确定，即有

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32} \\ C_{21} &= C_{13}C_{32} - C_{12}C_{33} \\ C_{31} &= C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22} \end{aligned} \quad (2-102)$$

由上式可见，只要纬度 L 不等于 $\pm 90^\circ$ ，方向余弦矩阵的各个元素可以唯一确定。也即系统不能在地球的南极和北极进行对准。否则，将导致方程奇异，使方向余弦矩阵的某些元素变得无法确定。然而在地球表面的大部分地方，一组惯性测量数据就能提供计算方向余弦矩阵所需的所有信息，从而完成捷联惯导系统的对准。

这种对准方法所能达到的精度很大程度上取决于敏感器的测量精度和仪器输出的分辨率。由于惯性仪表的零偏和偏置误差，以上过程计算出的是含有误差的方向余弦矩阵 $\mathbf{C}_b^{n'}$ ，用 $\mathbf{C}_n^{n'}$ 表示地理坐标系和计算地理坐标系之间的失准误差，则有 $\mathbf{C}_b^{n'} = \mathbf{C}_n^{n'} \mathbf{C}_b^n$ 。对于小的姿态失准角， $\mathbf{C}_n^{n'}$ 可用下式表示

$$\mathbf{C}_n^{n'} = \mathbf{I} - [\bar{\boldsymbol{\phi}} \times] \quad (2-103)$$

$[\bar{\boldsymbol{\phi}} \times]$ 是由地理坐标系和计算地理坐标系之间的姿态误差角 $\bar{\boldsymbol{\phi}} = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ 的分量构成的反对称矩阵。误差角 ϕ_x ， ϕ_y 和 ϕ_z 分别表示地理坐标系东向、北向和垂直向失准误差角，相当于平台导航系统中仪表组合体稳定平台的物理失准角。“倾斜”误差角 (ϕ_x, ϕ_y) 主要由加速度计零偏决定。而方位误差或者航向误差角 (ϕ_z) 是陀螺仪误差的函数。

对准过程就是调节方向余弦矩阵 $\mathbf{C}_b^{n'}$ ，直到残留的加速度计偏值的北向分量与重力加速度 \mathbf{g} 在这些方向上的分量相抵消为止，实际上就是使加速度的估计值在这两方向上的分量为零。最终的姿态误差与对准后的稳定平台系统的“倾斜”误差相对应。在方位对准中，平台绕垂直轴旋转到的位置，使地球自转角速率的水平分量 $(\omega_{ie} \cos L)$ 在东向轴上与陀螺的东向偏置相抵消。在捷联系统中，适当地调节方向余弦矩阵进行对准，与上面的过程等效。

当体坐标系与地理坐标系对准重合，即 $\mathbf{C}_n^b = \mathbf{I}$ 时，姿态和航向对准的稳态误差为：

$$\begin{aligned}
\phi_x &= \frac{\nabla_N}{g} \\
\phi_y &= -\frac{\nabla_E}{g} \\
\phi_z &= \frac{\varepsilon_E}{\omega_{ie} \cos L} + \frac{\nabla_E}{g} \tan L
\end{aligned} \tag{2-104}$$

由上述方程可知，惯导系统的自主式水平对准精度主要取决于两个水平加速度计的精度，方位对准精度主要取决于东向陀螺漂移。加速度计零偏 1mg 将产生 1mrad 的水平对准误差，而陀螺漂移误差 0.01°/h 时在 45° 纬度时将产生 1mrad 的方位对准误差。显然，要得到高精度的方位对准，需要高质量的陀螺仪。因此，惯导系统在某些应用场合，是对准要求而不是导航中传感器误差传播方式决定了惯性敏感器的指标。

值得指出的是，利用单组传感器测量数据只能实现粗对准。为了得到更精确的方向余弦矩阵的估计值，应利用一段时间的连续测量值进行自对准。在这种情况下，需对这些测量数据进行统计处理和滤波估计。

除了上述对准误差以外，陀螺仪的随机噪声和加速度计的零偏不稳定性，同样会引起方位误差。在使用带机械抖动的环形激光陀螺仪的系统中，特别令人关注的是陀螺仪的输出噪声（角随机游走 n ），它所引起的方位对准误差的均方根值（RMS）与对准时间（ t_a ）的平方根成反比，即 $\phi_z = n / \omega_{ie} \cos L \sqrt{t_a}$ 。如果某陀螺的随机游走误差为 $0.005^\circ / \sqrt{h}$ ，在纬度 45° 时，15min 后可达到 1mrad 的对准精度。该噪声的影响随着对准时间的延长而减小，也即该噪声随着时间的增加能被滤除。随时间变化的加速度计偏置的北向分量的变化量也会引起方位对准误差，该误差可表示为 $\phi_z = \frac{\nabla_N}{g \omega_{ie} \cos L}$ ， $1\mu g/s$ 的加速度计偏置在纬度 45° 时将产生 20mrad 的对准误差。因此，在这种影响显著的应用场合，最大限度地减小偏置随温度的漂移和缩短启动的过渡过程是非常重要的。

2.5.2.2 捷联惯导系统的闭环对准

在捷联惯导系统中，直接安装在载体上的相互正交的加速度计，在其自身的零位偏置 ∇ 基础上，可以感受到重力加速度 \mathbf{g} 和干扰加速度 \mathbf{a}_d 的分量，输出体坐标系相对惯性坐标系的比力 \mathbf{f}_{ib}^b ，利用体坐标系相对导航坐标系的变换矩阵 \mathbf{C}_b^n ，就可以得到导航坐标系中的比力 \mathbf{f}_{ib}^n ，该信号经过适当的滤波处理，可进一步转换为对系统进行修正的控制指

令角速度 ω_{en}^n 。

同时，与机体固联的相互正交的陀螺除了自身的漂移 ε 外，还感测地球的自转角速率 ω_{ie}^b 和干扰角速度 ω_d ，输出体坐标系相对惯性坐标系的角速率信号 ω_{ib}^b ，经过 C_b^n 的转换就可以得到相对导航坐标系的角速率 ω_{ib}^n 。

闭环对准过程中要解决的关键问题是从体坐标系相对惯性坐标系的角速率 ω_{ib}^n 中减去地球自转角速率 ω_{ie}^n 与控制角速度 ω_{en}^n 相加所得的导航坐标系相对惯性坐标系的角速率 ω_{in}^n ，即可得到残留角速率

$$\delta\omega_{nb}^n = \omega_{ib}^n - \omega_{ie}^n - \omega_{en}^n \quad (2-105)$$

进一步，利用该残留角速率更新变换矩阵 C_b^n ，使 ω_{in}^n 和 ω_{ib}^n 相平衡，直到 $\delta\omega_{nb}^n \rightarrow 0$ ，从而使 C_b^n 固定不变，然后计算出稳态时的姿态误差角作为惯导解算的初始条件。

显然，捷联惯导的闭环初始对准过程与平台惯导相似，主要问题在于如何减少干扰运动对系统精度的影响。当使用闭环罗经法对准时，方位对准的时间就不是随意可以缩短的，其过渡时间一般为 14min 左右。为了解决捷联式惯导系统初始对准的快速性问题，可以采用开环对准法。

2.5.2.3 捷联惯导系统的开环对准^[2]

捷联式惯导系统开环初始对准过程可分为粗对准和精对准两个阶段：首先进行粗对准，粗对准一般直接利用加速度计和陀螺仪的输出信息在较短的时间内粗略地计算出初始姿态矩阵，特点是对准速度快，对准精度低，仅为进一步精对准提供一个满足要求的初始变换矩阵；在精对准阶段，通过处理惯性仪表的输出信息及外部观测信息，精确地确定计算参考坐标系（数学平台）与地理坐标系之间的失准角，从而建立起准确的初始姿态变换阵 C_b^n 。显然，与闭环对准方法相比，开环对准方法不需要考虑信息的反馈平衡问题，直接根据加速度计和陀螺的输出把体坐标系和地理坐标系之间的方向余弦计算出来，进而求得载体的姿态和方位信息，对准的快速性好（一般为 3~5min）。但是开环对准必须考虑如何减弱和消除外部干扰对对准精度的影响，也就是必须利用有效的数据处理和计算方法，以达到预期的对准要求。

（1）粗对准

在载体当地纬度已知的前提下，地球自转角速率的水平分量和垂直分量也是已知的，而且这两个分量正好与当地地理坐标系的北向轴和垂直轴平行。取东北天（ENU）地理坐标系为导航坐标系（ n ），则有

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{ie} \cos L & \omega_{ie} \sin L \end{bmatrix}^T \quad (2-106)$$

另外, 重力加速度矢量总是垂直向下, 即

$$\mathbf{g}_{en}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix}^T \quad (2-107)$$

进一步, 可得与上述两个矢量正交的另一矢量:

$$\mathbf{m}^n = \mathbf{g}_{en}^n \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} g\omega_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2-108)$$

得到了上述各个矢量在导航坐标系中的分量, 那么, 加速度计和陀螺的输出就是重力加速度和地球自转角速率以及矢量 \mathbf{m}^n 在体坐标系各轴上的投影。根据体坐标系与导航坐标系间的关系, 加速度计在体坐标系中的输出就是

$$\mathbf{g}_{eb}^b = \begin{bmatrix} a_{xb} & a_{yb} & a_{zb} \end{bmatrix}^T = \mathbf{C}_n^b \mathbf{g}_{en}^n \quad (2-109)$$

陀螺仪在体坐标系中的输出为

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \begin{bmatrix} \omega_{xb} & \omega_{yb} & \omega_{zb} \end{bmatrix}^T = \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \quad (2-110)$$

同样, 对 \mathbf{m}^n 也有

$$\mathbf{m}^b = \begin{bmatrix} m_{xb} & m_{yb} & m_{zb} \end{bmatrix}^T = \mathbf{C}_n^b \mathbf{m}^n \quad (2-111)$$

实际上, 初始对准时, 需要得到的是体坐标系到导航坐标系的方向余弦矩阵 \mathbf{C}_b^n , 所以, 将(2-109)、(2-110)和(2-111)进行转置并分别代入(2-106)、(2-107)和(2-108), 就得到

$$\begin{bmatrix} a_{xb} & a_{yb} & a_{zb} \\ \omega_{xb} & \omega_{yb} & \omega_{zb} \\ m_{xb} & m_{yb} & m_{zb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \\ 0 & \omega_{ie} \cos L & \omega_{ie} \sin L \\ g\omega_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C}_b^n \quad (2-112)$$

则有

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{g\omega_{ie} \cos L} \\ \frac{\sin L}{g \cos L} & \frac{1}{\omega_{ie} \cos L} & 0 \\ -\frac{1}{g} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{xb} & a_{yb} & a_{zb} \\ \omega_{xb} & \omega_{yb} & \omega_{zb} \\ m_{xb} & m_{yb} & m_{zb} \end{bmatrix} \quad (2-113)$$

上式中的 \mathbf{m}^b 可以根据陀螺仪和加速度计的输出按以下公式计算, 即

$$\mathbf{m}^b = \mathbf{g}_{eb}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \begin{bmatrix} a_{yb}\omega_{zb} - a_{zb}\omega_{yb} & a_{zb}\omega_{xb} - a_{xb}\omega_{zb} & a_{xb}\omega_{yb} - a_{yb}\omega_{xb} \end{bmatrix}^T \quad (2-114)$$

求出方向余弦矩阵 \mathbf{C}_b^n 后, 便可确定出载体的初始姿态角。

按上述关系以实测数据直接计算得到的是 $C_b^{n'}$ ，并对其进行正交化是粗对准过程；而根据测量信息和误差模型进行数据处理和修正，则是精对准阶段。

(2) 方向余弦矩阵的正交化

惯导系统在实际工作时必然受到基座振动等外部干扰，同时，陀螺仪和加速度计也存在测量误差，因此，用陀螺仪和加速度计的输出值直接代入计算所得的方向余弦矩阵 $C_b^{n'}$ 不能保证正交性。这样，就无法得到近似的平均姿态矩阵。

下面利用改进的克莱姆—施密特法对方向余弦矩阵 $C_b^{n'}$ 进行正交化。

假设 $C_b^{n'}$ 由 C_1 、 C_2 、 C_3 三个列向量构成，另外有三个列向量 b_1 、 b_2 、 b_3 ，并令 $b_1 = C_1$ ，用 C_2 、 C_3 和 b_1 的线性组合表示 b_2' 、 b_3' ，即

$$b_2' = C_2 - \beta_2 b_1, b_3' = C_3 - \beta_3 b_1 \quad (2-115)$$

然后，通过确定 β_2 、 β_3 使 b_2' 、 b_3' 和 b_1 (C_1) 正交，使它们的内积为零，即

$$\begin{aligned} (b_1, b_2') &= (b_1, C_2 - \beta_2 b_1) = 0 \\ (b_1, b_3') &= (b_1, C_3 - \beta_3 b_1) = 0 \end{aligned} \quad (2-116)$$

可以求得

$$\beta_2 = \frac{(C_2, b_1)}{|b_1|^2}, \beta_3 = \frac{(C_3, b_1)}{|b_1|^2} \quad (2-117)$$

将(2-117)代入(2-115)，可得

$$\begin{aligned} b_2' &= C_2 - \frac{(C_2, b_1)}{|b_1|^2} b_1 \\ b_3' &= C_3 - \frac{(C_3, b_1)}{|b_1|^2} b_1 \end{aligned} \quad (2-118)$$

这样，就可以将 C_1 、 C_2 、 C_3 三个列向量转化为 b_1 、 b_2' 、 b_3' ，而 b_1 与 b_2' 和 b_3' 正交。

进一步，令 $b_2 = b_2'$ ，并用 b_3' 和 b_2 的线性组合表示 b_3'' ，即

$$b_3'' = b_3' - \beta_3' b_2 \quad (2-119)$$

然后，通过确定 β_3' 使 b_3'' 和 b_2 正交，即， $(b_2, b_3'') = (b_2, b_3' - \beta_3' b_2) = 0$ 。从而可求得

$$\beta_3' = \frac{(b_3', b_2)}{|b_2|^2}, \text{ 代入(2-117), 得}$$

$$\mathbf{b}_3'' = \mathbf{b}_3' - \frac{(\mathbf{b}_3', \mathbf{b}_2)}{|\mathbf{b}_2|^2} \mathbf{b}_2 \quad (2-120)$$

最后, 令 $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_3''$, 就得到了相互正交的 \mathbf{b}_1 、 \mathbf{b}_2 、 \mathbf{b}_3 。如果在计算时分别用 \mathbf{b}_1 、 \mathbf{b}_2 、 \mathbf{b}_3 代替 \mathbf{C}_1 、 \mathbf{C}_2 、 \mathbf{C}_3 就得到了一个正交的体坐标系到导航坐标系之间的方向余弦矩阵 $\mathbf{C}_b^{n'}$, 这样也就完成了开环粗对准过程。

(3) 精对准

如前所述, 由于基座干扰和惯性仪表的误差, 粗对准计算所求得的 $\mathbf{C}_b^{n'}$ 不够精确。所以, 进一步精对准的目的是利用系统的输出信息, 利用适当的处理手段估计出 $\mathbf{C}_b^{n'}$ 中存在的误差, 进而对 $\mathbf{C}_b^{n'}$ 进行修正, 最后得到精度较高的方向余弦矩阵或姿态和方位角信息。

假设前面粗对准所得到的 $\mathbf{C}_b^{n'}$ 矩阵代表的计算导航坐标系和导航坐标系之间只存在较小的姿态误差角和方位误差角, 则有

$$\mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_{n'}^n \mathbf{C}_b^{n'} \quad (2-121)$$

式中, $\mathbf{C}_{n'}^n = \mathbf{I} + [\bar{\phi} \times]$ 是从计算导航坐标系到导航坐标系之间的变换矩阵, $[\bar{\phi} \times]$ 是由计算导航坐标系到导航坐标系之间的姿态误差角 ϕ_x , ϕ_y 和 ϕ_z 构成的反对称矩阵。即有

$$\mathbf{C}_{n'}^n = \mathbf{I} + [\bar{\phi} \times] = \begin{bmatrix} 1 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 1 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 1 \end{bmatrix} \quad (2-122)$$

显然, 只要求出 $[\bar{\phi} \times]$, 并用其对 $\mathbf{C}_b^{n'}$ 进行修正, 就得到了精确的方向余弦矩阵 \mathbf{C}_b^n , 从而完成了整个初始对准过程。图 2-27 给出了捷联惯导系统开环初始对准的原理框图。图中 $\Delta \mathbf{v}$ 和 $\Delta \theta$ 分别表示一个采样周期 τ 内所得的速度增量和角度增量。

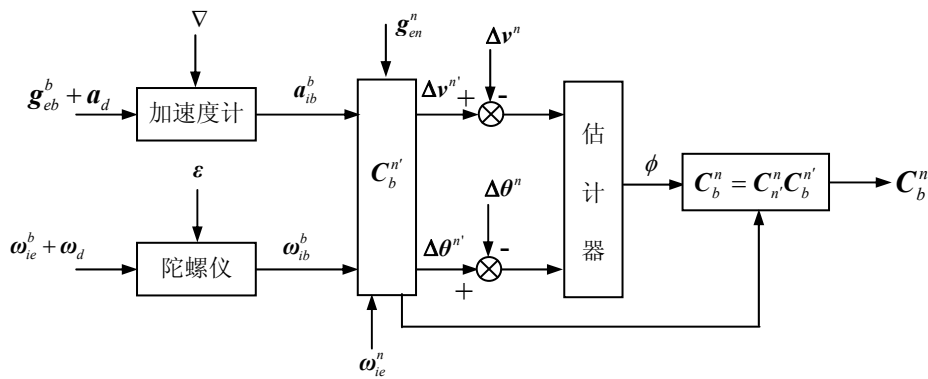


图 2-27 捷联惯导系统开环初始对准的原理框图

在导航坐标系, g 、 $\omega_{ie} \cos L$ 和 $\omega_{ie} \sin L$ 是已知量, 在一个采样周期, 有

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}^n &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g\tau \end{bmatrix}^T \\ \Delta \boldsymbol{\theta}^n &= \begin{bmatrix} 0 & \tau\omega_{ie} \cos L & \tau\omega_{ie} \sin L \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (2-123)$$

而对加速度计和陀螺仪的输出, 有

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}^b &= \mathbf{C}_n^b \Delta \mathbf{v}^n + \Delta \mathbf{v}_d^b + \tau \nabla \\ \Delta \boldsymbol{\theta}^b &= \mathbf{C}_n^b \Delta \boldsymbol{\theta}^n + \Delta \boldsymbol{\theta}_d^b + \tau \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\quad (2-124)$$

式中, $\Delta \mathbf{v}_d^b, \Delta \boldsymbol{\theta}_d^b$ 分别为敏感器感测的随机干扰速度和角振动。

这样, 可以得到速度增量误差和角度增量误差

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{v}^n &= \mathbf{C}_b^{n'} \Delta \mathbf{v}^b - \Delta \mathbf{v}^n \\ \delta \boldsymbol{\theta}^n &= \mathbf{C}_b^{n'} \Delta \boldsymbol{\theta}^b - \Delta \boldsymbol{\theta}^n\end{aligned}\quad (2-125)$$

将(2-124)代入上式, 得到

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{v}^n &= \mathbf{C}_n^{n'} \Delta \mathbf{v}^n + \mathbf{C}_b^{n'} \Delta \mathbf{v}_d^b + \mathbf{C}_b^{n'} \tau \nabla - \Delta \mathbf{v}^n \\ \delta \boldsymbol{\theta}^n &= \mathbf{C}_n^{n'} \Delta \boldsymbol{\theta}^n + \mathbf{C}_b^{n'} \Delta \boldsymbol{\theta}_d^b + \mathbf{C}_b^{n'} \tau \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\theta}^n\end{aligned}\quad (2-126)$$

由于 $\mathbf{C}_n^{n'} = (\mathbf{C}_n^n)^T = \mathbf{I} - [\bar{\boldsymbol{\phi}} \times]$, 可得

$$\delta \mathbf{v}^n = \begin{bmatrix} \phi_y g \tau \\ -\phi_x g \tau \\ 0 \end{bmatrix} + \Delta \mathbf{v}_d^n + \tau \nabla^n \quad (2-127)$$

式中, $\Delta \mathbf{v}_d^n = \mathbf{C}_b^{n'} \Delta \mathbf{v}_d^b$, $\nabla^n = \mathbf{C}_b^{n'} \nabla$ 。

$$\delta \boldsymbol{\theta}^n = \begin{bmatrix} \tau \phi_z \omega_{ie} \cos L - \tau \phi_y \omega_{ie} \sin L \\ \tau \phi_x \omega_{ie} \sin L \\ -\tau \phi_x \omega_{ie} \cos L \end{bmatrix} + \Delta \boldsymbol{\theta}_d^n + \tau \boldsymbol{\varepsilon}^n \quad (2-128)$$

式中, $\Delta \boldsymbol{\theta}_d^n = \mathbf{C}_b^{n'} \Delta \boldsymbol{\theta}_d^b$, $\boldsymbol{\varepsilon}^n = \mathbf{C}_b^{n'} \boldsymbol{\varepsilon}$ 。

如果忽略加速度计的零位偏置, 根据(2-127)可得

$$\begin{aligned}\phi_x &= -\frac{\delta v_y^n}{g\tau} + \delta \phi_{rx} \\ \phi_y &= \frac{\delta v_x^n}{g\tau} + \delta \phi_{ry}\end{aligned}\quad (2-129)$$

式中, $\delta \phi_{rx}$, $\delta \phi_{ry}$ 为随机量。

如果把(2-127)式作为测量量, 同时认为误差中含有随时间增长的量, 就可以建立具

有如下形式的数学模型

$$\begin{aligned}\phi_x &= a_x t + b_x + \delta\phi_{rx} \\ \phi_y &= a_y t + b_y + \delta\phi_{ry}\end{aligned}\quad (2-130)$$

用这种模型就可以估计姿态角的平均值。

另外，对(2-128)进行积分，就可得到

$$\theta^n = \omega t + \theta_0^n + \theta_d^n \quad (2-131)$$

式中， θ_0^n 为积分常数；

$$\omega = \begin{bmatrix} \phi_z \omega_{ie} \cos L - \phi_y \omega_{ie} \sin L \\ \phi_x \omega_{ie} \sin L \\ -\phi_x \omega_{ie} \cos L \end{bmatrix} \quad (2-132)$$

式(2-131)表明，根据陀螺仪的输出，经过积分求得 θ^n 就可以知道 θ_d^n

可以看出，(2-130)和(2-131)具有相同的形式。有了测量值，利用最小二乘法或其他数据处理方法就可以依据(2-129)和(2-130)的关系估计出估值 \hat{a}_x ， \hat{a}_y ， \hat{b}_x ， \hat{b}_y ，于是就可得到姿态误差的估值为

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_x &= \hat{a}_x t + \hat{b}_x \\ \hat{\phi}_y &= \hat{a}_y t + \hat{b}_y\end{aligned}\quad (2-133)$$

另外，根据(2-131)得到 $\hat{\omega}$ ， $\hat{\theta}_0^n$ ，这样，就可以得到失准角的瞬时估值

$$\hat{\theta}_d^n = \theta^n - (\hat{\omega} t + \hat{\theta}_0^n) \quad (2-134)$$

于是，根据(2-132)可以得到

$$\hat{\phi}_z = \frac{\phi_y \omega_{ie} \sin L + \hat{\omega}_x}{\omega_{ie} \cos L} \quad (2-135)$$

最后，把(2-133)和(2-135)的值代入(2-122)，然后根据(2-121)式就可以获得精对准后的方向余弦矩阵，从而可以确定出载体的初始姿态和方位角。

2.5.2.4 采用卡尔曼滤波的初始对准

采用卡尔曼滤波进行初始对准，主要任务是将平台误差角估计出来，计算姿态矩阵，或根据需要对系统校正，使平台坐标系和导航坐标系对准。另外，也希望能同时把惯性仪表的误差（陀螺漂移和加速度零偏）估计出来。由于对准时间不长，陀螺漂移和加速度零偏可以建模为用白噪声驱动形成的典型有色噪声（如随机常数）。下面仅考虑采用卡尔曼滤波对平台误差角及惯性仪表误差进行估计的问题，说明闭环自对准滤波和开环自对准滤波的状态选择和量测量的选取。

在闭环自对准滤波过程中，考虑对陀螺漂移和加速度零偏的估计，并将其扩充到滤波状态中，取状态为 $\mathbf{X} = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z \ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \nabla_x \ \nabla_y \ \delta v_x \ \delta v_y]^T$ ，则参照 2.4.5 节静基座惯导系统的误差方程，并考虑到对准时地理位置精确已知，纬度误差 δL 略去不计，可得闭环自对准的滤波状态方程。取 δv_x 和 δv_y 为观测量，则观测方程为

$$\begin{bmatrix} \delta v_x \\ \delta v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix} \quad (2-136)$$

然后借助卡尔曼滤波技术进行平台误差角和惯性仪表误差的估计，并进行校正，使平台坐标系和导航坐标系对准。

在开环情况下，平台误差角方程为

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_x &= \phi_y \omega_{ie} \sin L - \phi_z \omega_{ie} \cos L + \varepsilon_x \\ \dot{\phi}_y &= -\phi_x \omega_{ie} \sin L + \varepsilon_y \\ \dot{\phi}_z &= \phi_x \omega_{ie} \cos L + \varepsilon_z \end{aligned} \quad (2-137)$$

把陀螺漂移和加速度零偏扩充到滤波状态中，取状态为

$$\mathbf{X} = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z \ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \nabla_x \ \nabla_y]^T \quad (2-138)$$

建立开环对准滤波状态方程。取加速度计的输出作为观测量，则观测方程为

$$\begin{bmatrix} \delta v_x \\ \delta v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \end{bmatrix} \quad (2-139)$$

显然，采用开环情况下的误差方程时，状态方程阶次较低，故滤波计算量小，在实际应用中较多。

2.5.3 传递对准的原理和方法

2.5.3.1 传递对准的概念

机载空投、空射武器（如空空导弹）发射前须对弹载惯导系统进行对准和器件标定，即动基座弹载惯导系统导航坐标系的建立和系统初值确定，这是动基座弹载惯导系统的使用带来的一个新的特殊问题。通常，将动基座弹载惯导系统的初始对准称为传递对准。这是因为，动基座使用的弹载惯导系统的初始对准需要借助另外的参考系统向弹载惯导系统传递信息。为保持误差特性的一致，目前参考系统多选择载机的惯导系统，称其为“主惯导”或“主系统”。主惯导的导航坐标系在载机起飞前已借助前面介绍的初始对准方法或另外的方法准确地建立起来。需要进行初始对准的动基座弹载惯导系统称为“子惯导”、“子系统”或“从系统”。子惯导的对准通常是在载机飞行过程中或武器发射前进行。为保证在主、子惯导存在相对运动的动态条件下，子惯导在对准结束后建立起与主

惯导保持一致的导航坐标系，在实施对准的整个过程中，主惯导要定时向子惯导实时传输对准所需要的参数和数据，并进行参数和数据的匹配处理。因此，传递对准是主惯导向子惯导实时传输子惯导对准所需要的导航参数和数据，子惯导通过动态匹配它与主惯导的数据，估计它所建立的坐标系与主惯导所建立坐标系之间的差别并进行修正，以建立与主惯导相一致的导航坐标系，从而实现子惯导对准的过程。因此，传递对准的主要任务是以主惯导为基准，利用一定的信息或参数匹配手段，使子惯导建立的导航坐标系良好地重合于主惯导所对应的导航坐标系。

显然，传递对准是一个复杂的数据匹配和处理过程。由于子惯导和基座之间存在随机相对运动，不仅难于获得高的对准精度，而且对准误差往往是不可直接观测的，因此，传递对准多采用状态估计方法，卡尔曼滤波是目前应用最为成熟的一种估计技术。

根据用于传递对准的主、子惯导参数差值的不同，可以有不同的传递对准匹配方法。例如，可以利用主、子惯导速度分量的差值进行对准，这种方法称为速度匹配。类此地，还有加速度匹配、位置匹配、姿态匹配和角速度匹配。这些方法可以单独使用，也可以相互配合使用。

传递对准要求对准精度高，对准时间短。影响传递对准精度的因素很多，主要包括：匹配方法、对准时间、对准算法、惯性器件的精度以及对弹载惯导所在位置相对主惯导所在位置的载体的挠曲变形、振动了解的程度等。由于一些误差参数（对准误差）以与载机加速度或角速度相乘的形式进入误差模型，需要载机在足够长的时间里以足够的加速度进行机动，以使这些项可以被分离。因此，载机的机动方式也是影响传递对准精度和时间的主要因素。通常，载机的机动会加速对准的过程，也可提高对准精度。

传递对准也可通过粗对准和精对准两个阶段来完成。粗对准是将主惯导的位置、速度等导航信息直接传递给子惯导，没有参数的动态匹配过程；精对准则要选择主、子惯导的匹配参数，递推计算它们之间的差值，并将此差值作为量测值送入最优滤波器进行实时滤波，估计出引起这些差值的误差源（失准角和惯性传感器误差），进而做进一步的修正和校准，保证子惯导的初始条件尽可能与主惯导保持一致。

2.5.3.2 传递对准的方法

在传递对准中，可以简单地直接将载机导航系统的数据复制到子惯导系统中，这种方法称为一次性传递对准。也可以采用更精确的方法。如后面将要介绍的惯性测量匹配的方法。此外，利用卫星导航接收机或者机载雷达提供的位置信息也可实现子惯导的飞行中对准。

值得注意的是，有时不希望也不可能早早地使弹载惯导系统运行起来并对准完毕，等待发射命令，而是要求弹载惯导系统在发射前非常快速地完成对准。

由于在载机上不同的安装位置所引起的物理失准角，使得从一个安装位置传递到另

一个安装位置的惯性数据的准确度受到限制。这些误差可分静态和动态误差。静态误差包括制造公差，以及由于载机上各种设备的不同安装位置所引起的安装误差；动态误差是由于载机机身不完全刚性所引起的，如由作用在机翼和导弹发射架上的气动力负载所造成的弯曲变形所引起。这些影响在载机机动时会更加显著。另外，振动也会引起较大的动态误差。

下面简要介绍一次性传递对准和惯性测量匹配对准方法^[3]。它们是装在载机机身或者载机机翼外挂架上的空中发射导弹惯导系统常用的对准方法。

（1）一次性传递对准

一次性对准方法是直接将位置、速度和姿态数据从载机主导航系统复制到导弹的子惯导系统的一种最简单的对准技术，如图 2-28 所示。显然，传输数据瞬间载机和导弹之间任何相对角位移将作为对准误差引入导弹的导航系统中。因此，这种方法的成功与否取决于两个系统在物理位置上的对准精度，或取决于在对准时刻对两个系统相对方位的了解程度。在一次性对准中，通常将载机主导航系统的数据精确地解算到导弹坐标系，然后再传给导弹的子导航系统。

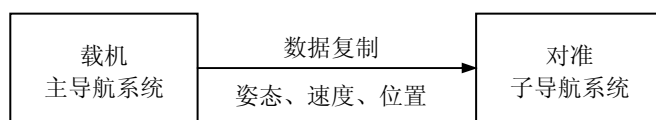


图 2-28 一次性传递对准

一般地，由于存在各种静态误差和动态误差，不可能知道一个系统相对于另一个系统的精确方位。而且，载机导航系统与导弹对准系统在安装位置上有一定的距离，载机在拐弯或机动时两者之间存在相对运动，即所谓的杆臂运动。在这种情况下，传递给导弹系统的速度信息是有误差的。因此，一次性传递对准所能达到的精度将大大受到限制，通常必须寻找更精确的方法。

（2）惯性测量匹配方法

惯性测量匹配方法通过比较来自主导航系统和子导航系统的运动测量值或计算值来计算两个系统参考轴系的相对方位。是近几年研究较多和应用广泛的传递对准方法。图 2-29 给出了这种对准方法的框图。在进行惯性测量匹配之前，通常由一次性传递进行粗对准。

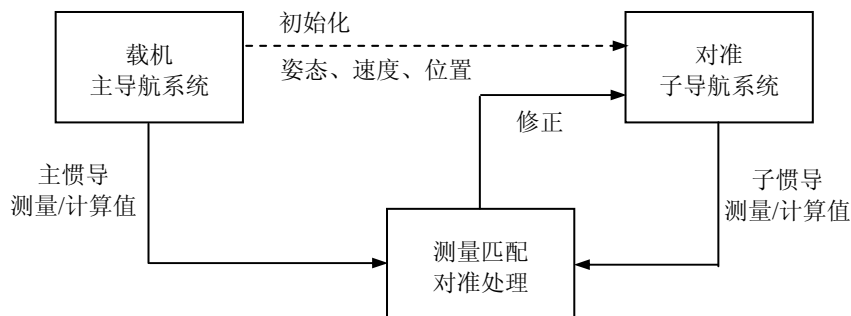


图 2-29 惯性测量匹配对准

在惯性测量匹配对准中，不同的对准数据匹配算法对于惯导输出信息的选择是不同的。传递对准中可利用的测量和计算参数有：加速度、角速度、位置、速度、姿态角等。根据使用要求，合理地选择其中的一种或者几种的组合即可以构成一种对准模式。另外，传递对准中匹配参数的选择与主、子惯导系统的类型有很大关系。由于成本、重量和体积的限制，子惯导一般都采用捷联惯导。而主惯导可能是平台惯导（称为平台—捷联式），也有可能是捷联惯导（称为捷联—捷联式）。如果主惯导是平台式的，由于平台式惯导不能给出载体姿态角速度信息，所以平台—捷联式不能采用角速度匹配方案。主要采用位置匹配、速度匹配和速度+姿态角匹配。如果主惯导是捷联惯导，则速度、姿态、角速度、加速度等匹配方案及它们的组合都可能采用。

理论上，通过比较由载机主导航系统和导弹子导航系统所提供的分解到同一坐标系上的比力加速度和角速度的基本测量值，即可快速实现同一载机上两个惯导系统之间的传递对准。如果没有测量误差，假设两个系统并排安装在完全刚性的平台上，那么两套系统的测量值的差异只由对准误差引起。在此情况下，有可能精确地辨识两个系统之间的失准角。实际上，这种方法常常由于很多原因而不实用。参考系统可能使用稳定平台技术，这种系统中线加速度和转动角速率数据并非标准输出。另外，对于飞行中传递对准，同样由于许多技术方面的原因，不能将线加速度匹配和角速度匹配作为切实可行的选择。特别在主导航系统和子导航系统离得太远存在明显的挠曲运动时，更不能采用这种匹配方法。这是因为，存在挠曲运动时，两个系统所敏感的线加速度和角速度是不同的，这些差异会被系统错误地作为姿态数据误差而进行处理，从而降低了所能达到的对准精度。另外，加速度匹配和角速度匹配对挠曲的影响特别敏感。尽管从理论上说有可能对挠曲运动建立模型，以便分离出由挠曲引起的测量值的差异带来的对准误差，但在

实际应用中要建立这种挠曲运动的模型是非常困难的。况且，当载机回转时引起杆臂运动，还会产生主系统和对准系统所敏感的平移运动的差别。载机机动时杆臂运动引起的测量值的差异，同样会被系统误认为是对准误差，而妨碍了对准过程的完成。这些附加的测量误差是飞机转动角速率、角加速度以及两个系统在空间上的距离的函数。从理论上讲，对一组测量值与另一组测量值进行比较之前可对它进行修正，但这样的修正依赖于能否对这些量进行足够精确的估计。虽然可以假设两个系统之间的距离能够足够精确的知道，转动角速率可由捷联系统直接提供，但是通常不可能得到角加速度测量值，或者说不使用角加速度计很难得到精确的估计。

基于上述理由，机载惯导系统的对准通常不推荐使用角速度和加速度匹配方法，甚至当主从系统均是捷联配置时也不采用这两种方法。由于来自敏感器的原始测量数据和惯导系统内部的速度估计值之间存在积分过程的平滑作用，在对准过程中挠曲和传感器噪声的影响程度要比加速度匹配小得多。而且，速度匹配具有容易实现杆臂误差修正的优点。另外，在惯导系统中，惯性仪表的缺陷和对准误差会引起速度误差的传播，因此通过比较由主惯导和子惯导提供的速度估计值，不仅能够获得对准误差的估计值，在某些情况下还可得到传感器偏值的估计值，从而在对准的过程中得到了传感器标定的测量值。因此，速度匹配是一种可选方法。目前，在惯性测量匹配对准中采用较多的是速度匹配和速度+姿态角匹配。

2.5.3.3 典型传递对准的模型

(1) 速度匹配对准^[3]

匹配对准问题实质上是如何建立合适的统计滤波模型，进行对准误差的估计，以及对一系列相关的及与时间有关的受噪声污染的测量值误差源进行辨识。下面给出速度匹配卡尔曼滤波器所需的系统方程和测量方程。

a. 系统方程

假设子导航系统和主导航系统坐标系分别用上标 b 和下标 n 来表示。反映对准系统敏感器轴与参考坐标系之间关系的方向余弦矩阵（ C_b^n ）满足如下微分方程

$$\dot{C}_b^n = C_b^n [\omega_{nb}^b \times] \quad (2-140)$$

式中， $[\omega_{nb}^b \times]$ 是由子导航系统相对于主导航系统的转动角速率所构成的反对称矩阵。该转动角速率是由子导航系统敏感的角速率（ ω_{ib}^b ）与主导航系统参考系的转动角速率（ ω_{in}^n ）

的差所构成。方向余弦矩阵的估计值 $\hat{\mathbf{C}}_b^n$), 根据某些初始值利用下式进行迭代更新:

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n = \hat{\mathbf{C}}_b^n [\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^b \times] \quad (2-141)$$

对于小的对准姿态误差角, 方向余弦矩阵的真值与估计值之间具有如下关系

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n = [\mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{\phi}} \times] \mathbf{C}_b^n \quad (2-142)$$

式中 $\bar{\boldsymbol{\phi}} \times$ 是由对准系统的姿态误差 $\bar{\boldsymbol{\phi}} = [\phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z]^T$ 的分量构成的反对称阵。

姿态误差的传播服从:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\phi}}}^n = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \bar{\boldsymbol{\phi}}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n + \mathbf{C}_b^n \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \quad (2-143)$$

$\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 表示主子系统加速度计测量误差。在卡尔曼滤波器的建模中, 陀螺误差可作为附加的高斯白噪声来建模, 主导航系统参考系的转动角速率误差假设为零。

速度误差的传播方程为

$$\dot{\delta \mathbf{v}}^n = \mathbf{f}^n \times \bar{\boldsymbol{\phi}}^n + \mathbf{C}_b^n \delta \mathbf{f}^b \quad (2-144)$$

式中 \mathbf{f}^n 是由子系统测量的比力投影到主系统上的值, $\delta \mathbf{f}^b$ 表示子系统加速度计测量误差。在卡尔曼滤波器的建模中该误差作为附加的高斯白噪声。

(2-143) 和 (2-144) 两式组合起来, 可以建立速度匹配对准滤波器的系统方程。

以状态空间形式表示为:

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{F} \delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{w} \quad (2-145)$$

式中 $\delta \mathbf{x}$ 是误差状态矢量, \mathbf{F} 是系统误差矩阵, \mathbf{D} 是噪声输入矩阵, \mathbf{w} 表示包括仪器噪声和所有未建模偏置在内的系统噪声。选取东北天 (ENU) 地理坐标系作为导航坐标系, 取速度匹配对准误差状态变量元素为

$$\delta \mathbf{x} = [\phi_E \quad \phi_N \quad \phi_U \quad \delta v_E \quad \delta v_N]^T \quad (2-146)$$

式中, ϕ_E 、 ϕ_N 、 ϕ_U 是对准姿态误差 $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ 的分量; δv_E 和 δv_N 分别为东向和北向速度误差。

误差方程可以被完整地表示如下:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\phi}_E \\ \dot{\phi}_N \\ \dot{\phi}_U \\ \dot{\delta v}_E \\ \dot{\delta v}_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_{ie} \sin L + \frac{v_E}{R_N + h} \operatorname{tg} L & -\omega_{ie} \cos L - \frac{v_E}{R_N + h} & 0 & 0 \\ -\omega_{ie} \sin L - \frac{v_E}{R_N + h} \operatorname{tg} L & 0 & -\frac{v_N}{R_M + h} & 0 & 0 \\ \omega_{ie} \cos L + \frac{v_E}{R_N + h} & \frac{v_N}{R_M + h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_U & f_N & 0 & 0 \\ f_U & 0 & -f_E & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_E \\ \phi_N \\ \phi_U \\ \delta v_E \\ \delta v_N \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{gE} \\ w_{gN} \\ w_{gU} \\ w_{aE} \\ w_{aN} \\ w_{aU} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2-147}$$

式中

f_E, f_N, f_U —载机加速度在东向、北向和垂直方向上的分量

c_{11}, c_{12}, \dots —方向余弦矩阵 \mathbf{C}_b^n 中的元素

$\omega_{gE}, \omega_{gN}, \omega_{gU}$ —东向、北向和垂直方向陀螺仪的噪声分量

$\omega_{aE}, \omega_{aN}, \omega_{aU}$ —东向、北向和垂直方向加速度计的噪声分量

b. 测量方程

导航系统的东向和北向速度测量值构成了卡尔曼滤波器的测量值 ($\tilde{\mathbf{z}}$):

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_E \\ \tilde{v}_N \end{bmatrix} \tag{2-148}$$

由对准系统得到的这些测量值的估值为:

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{v}_E \\ \hat{v}_N \end{bmatrix} \tag{2-149}$$

在每次观测更新时进行速度测量值的比较, 以产生滤波测量差值或称更新值, 记为

$\delta \mathbf{z}$:

$$\delta \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_E - \hat{v}_E \\ \tilde{v}_N - \hat{v}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta v_E \\ -\delta v_N \end{pmatrix} \tag{2-150}$$

在 t_k 时刻的测量误差 ($\delta \mathbf{z}_k$) 可以以误差状态 ($\delta \mathbf{x}_k$) 的形式表示:

$$\delta \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \delta \mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k \quad (2-151)$$

式中: \mathbf{H}_k 是卡尔曼滤波器测量矩阵, 其形式如下:

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2-152)$$

\mathbf{V}_k 是测量噪声矢量, 代表参考系统的测量噪声和由于飞机挠曲变形和杆臂运动产生的模型失配。

有了方程(2-147)和(2-151), 就可构造卡尔曼滤波器所必需的系统方程和观测方程。滤波器可提供姿态误差角、北向和东向速度误差的估计值。这些估计值在每次观测更新后用于校正从系统的姿态角估计值和速度估计值。敏感器偏差状态包括在误差模型中, 偏差估计值在对准过程中可校正敏感器输出。图 2-31 给出了速度匹配对准的框图。

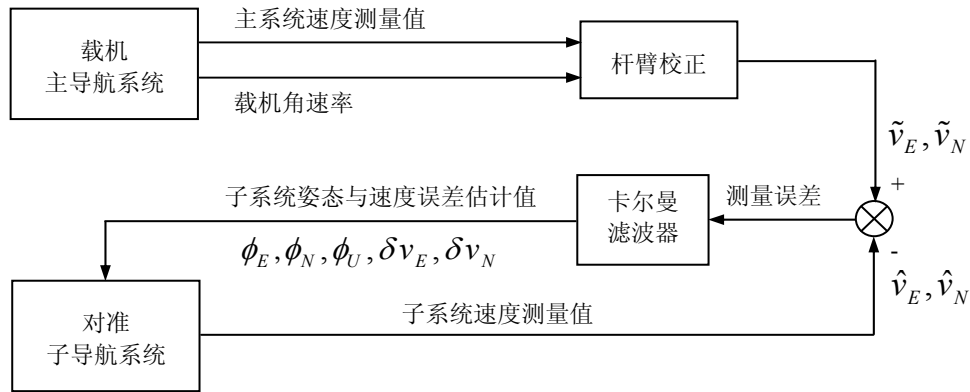


图 2-31 速度匹配对准框图

(2) 位置匹配对准

正如前面所述, 不准确的对准可引起惯导系统位置误差的传播。通过比较主导航系统或外部的的位置信息与子导航系统所计算产生的位置估计值, 可以获得位置误差的估计值。根据子导航系统的误差模型, 利用位置差值可推导出对准误差。这种方法的框图如图 2-30 所示。

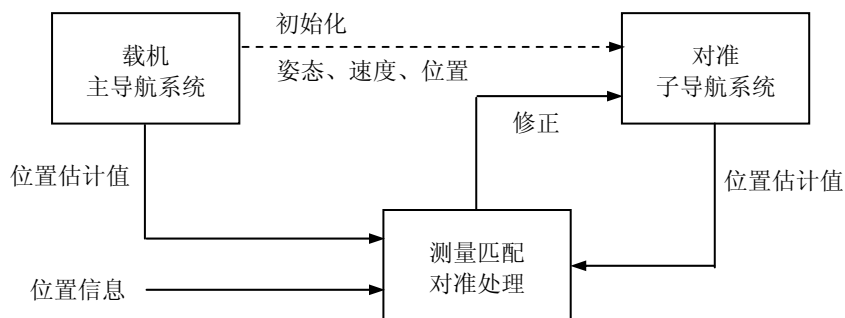


图 2-30 位置匹配对准框图

利用外部位置信息的对准方法是一种利用组合导航技术的惯性辅助方法。在组合导航系统或者有外部信息辅助的惯性导航系统中，假设导航系统在导航的全过程或大部分过程中外部测量信息是可以得到的。在飞行前对准中，指的是仅仅利用外部测量数据执行导航前的初始对准。

位置匹配对准以主、子惯导计算的位置差值作为卡尔曼滤波器的观测量，它与单独的速度匹配一样，都是应用较早、技术较成熟的对准方法。针对不同的发射武器类型，位置匹配与速度类匹配（包括速度匹配、速度+姿态匹配等）有一个明显差别，即速度类匹配通常用于战术武器的发射，而位置匹配通常用于战略武器的发射，例如从 B-52 (B-1) 战略轰炸机发射巡航导弹及 SRAM 导弹就采用了位置匹配。

位置匹配对准滤波器可采用 10 状态的卡尔曼滤波器，滤波状态包括：水平面内的位置误差和速度误差、三个失准角以及三个陀螺漂移。状态方程的具体表达式可参考 2.5 节有关惯导系统误差分析的内容得到。

位置匹配与其他匹配方法比较，是最容易实现的。它避免了杆臂效应补偿和预滤波处理的复杂计算，但它也不能回避传递对准系统设计中必须考虑的几个重要内容，例如，系统可观测性分析、状态变量灵敏度分析、卡尔曼滤波器设计及前置信息处理器设计等。另外，位置匹配对准需要的时间较长。

(3) 速度+方位角匹配对准

从速度匹配的误差方程中可以看出，要使方位对准误差角作为速度误差传播，需要载机在北向或东向有加速度。即采用速度匹配时，需要载机在水平面内进行机动飞行，产生东向、北向加速度，这样才能对方位失准角 ϕ_z 进行观测，从而完成方位对准。而在速度变化（或机动运动）较小时无法利用速度测量值观测 ϕ_z ，因此造成了单纯速度匹配时东向、北向对准精度高，但航向对准精度较差（即 ϕ_z 误差较大）的结果。考虑到由于安装误差等因素，机载武器与载机纵轴之间存在相对位移，从而产生方位角测量偏差

(AMB —Relative Azimuth Measurement Bias), 这样, 可以在速度匹配的基础上, 采用速度+方位角匹配。

采用速度+方位角匹配方案的基本思路是, 先通过载机机动飞行估计出当时的 ϕ_z , 求出 AMB , 然后在非机动飞行期间用 AMB 角不断校正方位失准角 ϕ_z , 这样就克服了单纯速度匹配时航向对准精度差的缺陷, 且能防止在非机动飞行期间子惯导的方位角发散。而方位角对准精度的高低是影响传递对准精度和机载武器最终落点精度的主要因素。

与速度匹配相比, 速度+方位角匹配方案在状态方程中增加了相对方位角偏差, 量测方程中也增加了方位角测量差值, 即除“速度”匹配外还利用了“方位角”匹配。其优点是对安装误差、安装刚度、弹体特性没有特别要求, 对计算机处理能力要求不高。

在速度+方位角匹配对准误差建模中, 惯性器件误差 (包括陀螺漂移 $\bar{\varepsilon}^b$, 陀螺标度因数误差 $\delta\bar{K}_g$, 加速度计零偏 $\bar{\nabla}$ 及加速度计标度因数误差 $\delta\bar{K}_a$) 和方位角偏差 AMB 的数学模型可取为随机常数。在考虑由于挠性运动引起的挠性加速度 \mathbf{a}_{fb}^b 及挠性角速度 $\boldsymbol{\omega}_{fb}^b$ 的前提下, 根据惯性导航的速度误差和姿态误差传递关系, 可得

速度误差方程

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{v}}^n = & \mathbf{f}^n \times \bar{\boldsymbol{\phi}}^n - (\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \times \mathbf{v}^n \\ & - (\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \times \delta\mathbf{v}^n + \mathbf{C}_b^n (\mathbf{a}_{fb}^b + \bar{\nabla}^b) + \delta\mathbf{g}^n \end{aligned} \quad (2-153)$$

姿态误差方程

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\phi}}}^n = \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \bar{\boldsymbol{\phi}}^n + \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{fb}^b + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^b) \quad (2-154)$$

式中, \mathbf{f}^n 为导航系下主惯导的比力; \mathbf{v}^n 为导航系下主惯导的速度。

定义速度+方位角匹配对准的滤波器状态矢量为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v}^n & \bar{\boldsymbol{\phi}}^n & \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^b & \delta\bar{\mathbf{K}}_g^b & \bar{\nabla}^b & \delta\bar{\mathbf{K}}_a^b & AMB \end{bmatrix}_{19 \times 1}^T \quad (2-155)$$

则滤波器状态方程为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{W}(t) \quad (2-156)$$

式中

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} (\mathbf{F}_{SINS})_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & (\mathbf{C}_b^n)_{3 \times 3} & (\mathbf{F}_{cf})_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ & (\mathbf{C}_b^n)_{3 \times 3} & (\mathbf{F}_{cw})_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hline & & \mathbf{0}_{13 \times 19} & & & \end{bmatrix}_{19 \times 19} \quad (2-157)$$

其中:

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_b^n & \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{(3 \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \mathbf{C}_b^n & \mathbf{0}_{(3 \times 1)} \\ & \mathbf{0}_{(12 \times 7)} & \\ & \mathbf{0}_{(1 \times 6)} & 1 \end{bmatrix}_{(19 \times 7)}, \quad \mathbf{C}_b^n = [\mathbf{C}_n^b]^T$$

$$\mathbf{F}_{cf} = \mathbf{C}_b^n \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{cw} = \mathbf{C}_b^n \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

f_x 、 f_y 、 f_z 分别为比力在体系 x, y, z 轴的分量, ω_x 、 ω_y 、 ω_z 分别为角速度在体系 x, y, z 轴的分量。

$$\mathbf{F}_{SINS} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \quad (2-158)$$

其中,

$$\mathbf{F}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{v_y \tan L - v_z}{R_N + h} & 2\omega_{ie} \sin L + \frac{v_y}{R_N + h} \tan L & -(2\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h}) \\ -2(\omega_{ie} \sin L + \frac{v_x}{R_N + h} \tan L) & -\frac{v_z}{R_M + h} & -\frac{v_y}{R_M + h} \\ 2(\omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h}) & \frac{2v_y}{R_M + h} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -f_z & f_y \\ f_z & 0 & -f_x \\ -f_y & f_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_M + h} & 0 \\ \frac{1}{R_N + h} & 0 & 0 \\ \frac{\tan L}{R_N + h} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{ie} \sin L + \frac{v_x}{R_N + h} \tan L & -\omega_{ie} \cos L - \frac{v_x}{R_N + h} \\ -\omega_{ie} \sin L - \frac{v_x}{R_N + h} \tan L & 0 & -\frac{v_y}{R_M + h} \\ \omega_{ie} \cos L + \frac{v_x}{R_N + h} & \frac{v_y}{R_M + h} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} w_{\nabla_x} & w_{\nabla_y} & w_{\nabla_z} & w_{G_x} & w_{G_y} & w_{G_z} & w_{AMB} \end{bmatrix}^T \quad (2-159)$$

$\mathbf{W}(t)$ 各个元素表示了加速度计、陀螺仪以及 AMB 的误差统计特性，一般为均值为零，方差一定的白噪声。

速度+方位角匹配对准的量测量是主惯导和子惯导之间的速度之差 $\delta \mathbf{v}^n$ 和方位角测量量之差 $(A_s - A_m)$ ，量测方程为

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{V} \quad (2-160)$$

式中

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 12} & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 19}$$

值得一提的是，为了满足传递对准的快速性要求，可以在上述对准模型的基础上，做进一步的模型简化，适当地降低系统滤波器的维数，在保证最终精度的情况下，减少计算量，降低对计算机的要求和工程实现的难度。快速对准有多种选择方案，按照选取的状态向量的维数多少来分，有 13 阶和 7 阶模型可供选择，在实际运用中应该根据应用环境和所要达到的目标进行综合分析，选择合适的方案。

(4) 速度+姿态角匹配对准

速度+姿态角匹配既适用于捷联—捷联式，又适用于平台—捷联式，是目前战术武器上采用较多的传递对准方案。它和上面介绍的速度+方位角匹配方案一样都是为了克服纯速度匹配中方位失准角 ϕ_z 估计精度差的缺陷而提出的。

速度+姿态角匹配对准滤波器的状态变量通常包括：主/子惯导间三个失准角、三个速度误差、一个纬度误差、三个陀螺漂移误差、三个加速度计误差，三个安装误差角，共 16 维状态变量。即有

$$\mathbf{X} = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z \ \delta v_x \ \delta v_y \ \delta v_z \ \delta L \ \varepsilon_{bx} \ \varepsilon_{by} \ \varepsilon_{bz} \ \nabla_x \ \nabla_y \ \nabla_z \ \lambda_x \ \lambda_y \ \lambda_z]^T$$

参照前面几种传递对准方法滤波器状态模型建立的过程和方法，可建立速度+姿态角匹配传递模型中的状态方程。下面讨论速度+姿态角匹配传递模型中量测方程的建立。

取东北天 (ENU) 地理坐标系为导航坐标系。理想导航坐标系用角标 n_l 表示；主惯导平台坐标系用角标 n 表示；子惯导计算坐标系用角标 n_2 表示；载机体坐标系用角标 a 表示；机载武器的体坐标系用角标 b 表示。记主惯导的方向余弦阵为 \mathbf{T}_a ，子惯导的方向余弦阵为 \mathbf{T}_b 。理论上，传递对准的结果希望得到 $\mathbf{C}_a^{n_1} = \mathbf{C}_b^{n_2} = \mathbf{T}_b$ ； $\mathbf{C}_a^n = \mathbf{T}_a$ 。则有

$$\mathbf{T}_b = \mathbf{C}_b^{n_2} = \mathbf{C}_a^n = \mathbf{C}_{n_2}^{n_1} \mathbf{C}_n^{n_2} \mathbf{C}_a^n = \mathbf{C}_{n_2}^{n_1} \mathbf{C}_n^{n_2} \mathbf{T}_a \quad (2-161)$$

主、子惯导两导航系 n 与 n_2 之间的关系可以通过以下矩阵确定

$$\mathbf{C}_{n_2}^n = \begin{bmatrix} 1 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 1 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} + [\bar{\phi} \times] \quad (2-162)$$

$[\bar{\phi} \times]$ 为由子惯导相对主惯导的失准角 $\bar{\phi} = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z]$ 的分量构成的反对称阵。同理，弹体系与机体系的关系，可由如下矩阵确定

$$\mathbf{C}_b^a = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_z & \lambda_y \\ \lambda_z & 1 & -\lambda_x \\ -\lambda_y & \lambda_x & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} + [\bar{\lambda} \times] \quad (2-163)$$

由 $\mathbf{C}_{n_2}^{n_1} = \mathbf{C}_a^{n_1} \mathbf{C}_b^a \mathbf{C}_{n_2}^b$ ，并利用角速度反对称矩阵的相似变换公式，可得

$$\mathbf{C}_{n_2}^{n_1} = \mathbf{T}_b (\mathbf{I} + \bar{\lambda} \times) \mathbf{T}_b^{-1} = \mathbf{I} + (\mathbf{T}_b \bar{\lambda}) \times \quad (2-164)$$

把 (2-164) 和 (2-162) 式代入 (2-161) 式，可得

$$\mathbf{T}_b = (\mathbf{I} + (\mathbf{T}_b \bar{\lambda}) \times) (\mathbf{I} - \bar{\phi} \times) \mathbf{T}_a = (\mathbf{I} + (\mathbf{T}_b \bar{\lambda}) \times (-\bar{\phi} \times) - (\mathbf{T}_b \bar{\lambda}) \times (\bar{\phi} \times)) \mathbf{T}_a \quad (2-165)$$

忽略微小量的乘积，取其近似，得

$$\mathbf{T}_b = (\mathbf{I} + (\mathbf{T}_b \bar{\lambda}) \times - \bar{\phi} \times) \mathbf{T}_a \quad (2-166)$$

为便于表示，设 $\mathbf{T}_b \bar{\lambda} - \bar{\phi} = \Delta \bar{\phi}$ ，则上式又可改写为

$$\mathbf{T}_b = (\mathbf{I} + (\mathbf{T}_b \bar{\lambda}) \times - \bar{\phi} \times) \mathbf{T}_a = \mathbf{T}_a + (\Delta \bar{\phi} \times) \mathbf{T}_a \quad (2-167)$$

假设载机的航向角、俯仰角及横滚角分别为 ψ, θ, γ ，由子惯导的姿态矩阵计算得到机载武器的航向角、俯仰角及横滚角分别为 $\psi_s, \theta_s, \gamma_s$ ，记

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} T_i^{(11)} & T_i^{(12)} & T_i^{(13)} \\ T_i^{(21)} & T_i^{(22)} & T_i^{(23)} \\ T_i^{(31)} & T_i^{(32)} & T_i^{(33)} \end{bmatrix} \quad (i = a, b) \quad (2-168)$$

则由姿态角和姿态转换矩阵中元素的关系，以及 (2-166) 式可得

$$\begin{aligned} \tan \psi_s &= \frac{T_b^{(12)}}{T_b^{(22)}} = \frac{T_a^{(12)} - T_a^{(22)} \Delta \phi_z + T_a^{(32)} \Delta \phi_y}{T_a^{(22)} - T_a^{(32)} \Delta \phi_x + T_a^{(12)} \Delta \phi_z} \\ \sin \theta_s &= T_b^{(32)} = T_a^{(32)} - T_a^{(12)} \Delta \phi_y + T_a^{(22)} \Delta \phi_x \\ \tan \gamma_s &= -\frac{T_b^{(31)}}{T_b^{(33)}} = -\frac{T_a^{(31)} - T_a^{(11)} \Delta \phi_y + T_a^{(21)} \Delta \phi_x}{T_a^{(33)} - T_a^{(13)} \Delta \phi_y + T_a^{(23)} \Delta \phi_x} \end{aligned} \quad (2-169)$$

把 (2-168) 式中的 $\tan \psi_s$ 和 $(T_a^{(22)} - T_a^{(32)} \Delta \phi_x + T_a^{(12)} \Delta \phi_z)^{-1}$ 按泰勒级数展开并取一

阶近似, 有

$$\begin{aligned} \text{tg}\psi_s &= \text{tg}\psi + (1 + \text{tg}^2\psi)(\psi_s - \psi) \\ &= \frac{T_a^{(12)}}{T_a^{(22)}} + \frac{T_a^{(12)}T_a^{(32)}}{(T_a^{(22)})^2} \Delta\phi_x + \frac{T_a^{(32)}}{T_a^{(22)}} \Delta\phi_y - \left(1 + \left(\frac{T_a^{(12)}}{T_a^{(22)}}\right)^2\right) \Delta\phi_z \end{aligned} \quad (2-170)$$

$$\text{考虑到 } \text{tg}\psi = \frac{T_a^{(12)}}{T_a^{(22)}}, \quad 1 + \text{tg}^2\psi = \frac{(T_a^{(12)})^2 + (T_a^{(22)})^2}{(T_a^{(22)})^2}$$

则有

$$\psi_s - \psi = \frac{T_a^{(12)}T_a^{(32)}}{(T_a^{(22)})^2 + (T_a^{(12)})^2} \Delta\phi_x + \frac{T_a^{(22)}T_a^{(32)}}{(T_a^{(22)})^2 + (T_a^{(12)})^2} \Delta\phi_y - \Delta\phi_z + v_1 \quad (2-171)$$

同理可得,

$$\theta_s - \theta = \frac{T_a^{(22)}}{\sqrt{1 - (T_a^{(32)})^2}} \Delta\phi_x - \frac{T_a^{(12)}}{\sqrt{1 - (T_a^{(32)})^2}} \Delta\phi_y + v_2 \quad (2-172)$$

$$\gamma_s - \gamma = \frac{T_a^{(23)}T_a^{(31)} - T_a^{(21)}T_a^{(33)}}{(T_a^{(31)})^2 + (T_a^{(33)})^2} \Delta\phi_x + \frac{T_a^{(11)}T_a^{(33)} - T_a^{(13)}T_a^{(31)}}{(T_a^{(31)})^2 + (T_a^{(33)})^2} \Delta\phi_y + v_3 \quad (2-173)$$

其中 v 为测量误差。这样(2-171)、(2-172)和(2-173)式构成了速度+姿态角匹配对准的三个姿态角量测量的表达式。

速度+姿态匹配对准的量测量为主、子惯导的速度和姿态角解算值之差, 共 6 维。设子惯导计算的速度为 $\begin{bmatrix} v_s^E & v_s^N & v_s^U \end{bmatrix}^T$, 主惯导计算的速度为 $\begin{bmatrix} v^E & v^N & v^U \end{bmatrix}^T$, 则速度+姿态角匹配的量测方程为

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \psi_s - \psi \\ \theta_s - \theta \\ \gamma_s - \gamma \\ v_s^E - v^E \\ v_s^N - v^N \\ v_s^U - v^U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 10} & \mathbf{H}_1 \times \mathbf{T}_b \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 10} \end{bmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{V} \quad (2-174)$$

式中

$$H_1 = \begin{bmatrix} -\frac{T_a^{(12)}T_a^{(32)}}{(T_a^{(22)})^2 + (T_a^{(12)})^2} & -\frac{T_a^{(22)}T_a^{(32)}}{(T_a^{(22)})^2 + (T_a^{(12)})^2} & 1 \\ -\frac{T_a^{(22)}}{\sqrt{1 - (T_a^{(32)})^2}} & \frac{T_a^{(12)}}{\sqrt{1 - (T_a^{(32)})^2}} & 0 \\ \frac{T_a^{(23)}T_a^{(31)} - T_a^{(21)}T_a^{(33)}}{(T_a^{(31)})^2 + (T_a^{(33)})^2} & \frac{T_a^{(11)}T_a^{(33)} - T_a^{(13)}T_a^{(31)}}{(T_a^{(31)})^2 + (T_a^{(33)})^2} & 0 \end{bmatrix}$$

2.5.3.4 传递对准的技术现状和发展趋势

本节分别对主惯导为平台惯导或者捷联惯导，子惯导为捷联惯导的不同传递对准方案的特点和研究现状进行简要说明，作为惯性导航对准技术的小结。

(1) 平台—捷联式传递对准

随着捷联惯性导航技术的发展和运用，在战斗机惯性导航系统中将广泛采用捷联技术。但是，目前许多军用飞机仍采用平台式惯导。我国的“轰-6”飞机及国外大型飞机的惯导系统大多采用平台式惯导系统。当载机采用平台式惯性导航系统（PINS）或 PINS/GPS 组合导航系统时，常用的传递对准方案有速度匹配、速度+姿态角匹配、速度+方位角匹配、位置匹配等。

速度匹配是最常用的方案之一，对于载机采用平台式惯导和捷联式惯导都适用。它以主、子惯导计算的速度差值作为观测量。采用速度匹配时，水平姿态对准通过重力加速度在水平方向的耦合来完成，而航向对准则要通过陀螺罗经化把航向误差变换成速度误差来完成。因此传递对准过程中需要载机做具有水平加速度输出的机动飞行（如 S 型转弯或盘旋飞行），一般是小于 30° 或 45° 的航向角变化率机动，机动时间可能需要持续几分钟至十几分钟。对准时间一般在 10~15 分钟，对准精度较高，通常可达到 1mrad。由惯性仪表误差而导致的速度误差累积需要经过一定时间才能表现出来，所以必须有较长的对准时间（几十分钟）才能对惯性仪表误差有较好的估计效果。但 10~15 分钟以后，大多数的仪表误差都有下降趋势，某些误差项已经达到稳态。

单纯的速度匹配方案有一定的缺点：一是航向对准时间较长，不适应快速传递对准的要求；二是它要求载机做航向机动（如 S 形机动）以完成航向对准，而航向机动很容易丢失目标。所以，现代战术空射武器快速对准时一般不单独使用速度匹配。

单独姿态角匹配方案的特点是：能快速准确地估计出航向、北向失准角，但东向失准角估计慢，且精度较低。显然，姿态角匹配正好弥补了速度匹配中天向失准角估计慢且精度较低的弱点。如果能够把这两种方案很好地结合起来就能获得令人满意的结果。

目前, 在空射武器快速传递对准中常采用速度+姿态角匹配。

速度+姿态角匹配对准方法于 1989 年提出, 之后许多学者和研究机构都对该方案做了一定研究, 提出过用于先进导弹的快速鲁棒速度+姿态匹配对准方案等。速度+姿态角匹配对准方案通常只是做机翼摇摆机动, 且对准时间只有几秒钟, 属快速传递对准。不少国外文献报道, 对准开始 8 秒之后北向、航向失准角精度可达到 $1.0'$ 之内, 20 秒时东向失准角精度达到 $1.0'$; 加入姿态测量信息以后, 航向对准在 10 秒之内即可完成, 且精度大幅提高。航向对准精度主要取决于主惯导系统的姿态输出精度 (假设为 $80''$), 例如载机做 20° 横滚机动时, 则航向对准精度为 $3.8'$ 。

速度+方位角匹配方案在 F-16 战机发射 Penguin 反舰导弹中得到应用。如果仅有速度匹配, 则对子惯导方位陀螺的精度要求较高, 否则方位角发散很严重, 直接导致脱靶量 (CEP 值) 成倍增加。采用速度+方位角匹配方案估计出子惯导相对主惯导的相对方位角测量偏差 (Relative Azimuth Measurement Bias—AMB), 这样在非机动飞行期间, 可以不断地用 AMB 去修正方位失准角 ϕ_z , 达到理想的方位对准效果。

在位置匹配中, 平台误差须经一定时间后才能反映到位置误差上, 即由相对失准角产生一定量值位置误差的过程较长, 所以位置匹配对准时间长 (一般在 30 分钟以上), 不适合于快速传递对准的场合 (例如, 歼击机发射空空导弹)。但它也有其独特的优点, 如不需要进行杆臂效应补偿, 武器挂架挠性变形和振动对其影响也较小。因此, 在对准时间要求不严的情况下, 仍是一个很好的对准方案。1980 年代的多篇文献报道, 美国 B-52 (B-1) 战略轰炸机发射巡航导弹及 SRAM (Short Range Attack Missile—近程攻击导弹) 导弹时, 使用的就是位置匹配对准方案。1990 年代后, 关于位置匹配对准的文献很少。

(2) 捷联—捷联式传递对准

军用飞机惯性导航系统的发展趋势是以捷联式惯导 (特别是激光和光纤捷联惯导) 取代平台式惯导。捷联—捷联式不受平台—捷联式的限制, 基本上所有参数匹配对准方案都可采用。常用的参数匹配方案是速度匹配、速度+姿态匹配, 另外还有速度+角速率匹配等。

目前在捷联—捷联式系统中, 速度+姿态匹配方案用得较多, 最典型的应用实例是美国的 F-16 战机。在 Block 25 F-16 战机中主惯导是霍尼韦尔公司的飞机级 H-423 RLG 捷联惯导 (精度: 0.8 nmi/hr), 子惯导是霍尼韦尔公司战术级 HG-1700 IMU (精度: $1.0^\circ/\text{hr}$, 即 60 nmi/hr)。采用速度+姿态匹配方案, 对准时间 5 秒, 对准精度小于 1mrad 。采用 wing-rock 机动, 避免了耗时的盘旋机动及 S 机动。具体对准过程是: 前两秒飞机水平直线飞行, 第 3 秒做一个 $+30^\circ$ 的横滚, 第 4 秒飞机恢复水平姿态, 第 5 秒保持水平直线飞行。AH-64A 阿帕奇 (Apache) 武装直升机也是用速度+姿态匹配对机载武器进行传递对准, 只需做一个 wing-rock 机动, 对准时间 5 秒, 对准精度达 1mrad 。

为了克服姿态匹配（包括速度+姿态匹配）中因对准时间太短，不能对惯性仪器误差做有效标定的缺陷，提出了速度+角速率匹配方案。该方案采用水平面内的航向机动，东向、北向失准角对准精度小于 1mrad ，航向失准角精度小于 1.5mrad ，对准时间小于 10 秒，且能对惯性仪器误差进行标定。

（3）利用机载无线电仪表和卫星定位接收机辅助实现初始对准

利用机（弹）载无线电仪表、导引装置和卫星定位接收机与惯导组合辅助实现初始对准，也是一种常用的方法。显然这种方法是组合导航技术的应用。下面以 GPS/INS 组合导航为例，简要说明利用 GPS 接收机辅助实现对准的情况。

GPS/INS 组合技术是实现惯导系统快速对准的有效方法。根据 GPS/INS 组合程度的不同，可分为浅组合和深组合。研究表明：组合系统不仅可获得较高的导航精度和可靠性，而且使方位对准时间缩短，较好地解决了对准时间和对准精度的矛盾。近年来，GPS 定姿技术取得了重要进展，并获得了一定的应用。有文献报道采用双天线 GPS 与惯导深组合的方法，用双 GPS 天线载波相位双差原始测量信息（可获得载体的俯仰和偏航姿态信息）与惯导深组合，使方位对准时间小于 2min，对准精度达 $15''$ 。双天线 GPS/INS 深组合不仅适用于静基座，而且适用于动基座对准和飞行中对准。

以上介绍的不同传递对准方案，有的已在部分武器装备中得到实用，有的尚处在理论研究阶段。表 2-11 对几种典型对准方案的技术成熟度进行了对比。

表 2-11 典型对准方案比较

比较项目 方案名称	对准时间	对准精度	机动方式	对安装误差、安装 刚度、载体特性及 处理能力的要求	可实现性	适用场合
位置匹配	30min	十几角分	航向机动	较低	技术难度低，可实现性好	适合发射战略武器
速度+方位角 匹配	8~12min	约为十几角分	航向机动	一般	技术难度适中，可实现性好	平台与捷联惯导均适用
速度+姿态角 匹配	根据载机 机动情况 为几秒~ 几十秒	小于几角分	摇摆机动	较高	相对难度较大，但可以实现	平台与捷联惯导均适用
GPS/INS 组合 空中对准	约为几百秒	小于 10 角分	航向机动	一般	相对难度不大，可以实现	载机须采用 GPS/INS 组合导航作为初始对准的辅助手段

总体来说,国外武器系统已基本解决了高精度快速动基座传递对准的问题,但还在不断的发展和完善之中。目前,传递对准研究主要集中在高精度惯导系统传递对准误差模型的建立、传递对准的匹配算法、状态估计方法、可观测度分析和新型传递对准方法的研究与实现等,目的在于寻求解决高动态复杂运行环境的快速高精度对准方法和技术。

2.6 惯性系统的测试与标定

2.6.1 概述

惯性敏感器和惯导系统被设计、制造出来后将应用于广泛的领域,如舰船、潜艇、飞机、航天器上高精度的导航设备,或用于短程导弹飞行控制的测量与制导。各式各样的应用使得敏感器或系统的性能要求跨度达到八至九个数量级。另外,惯性敏感器及其系统的使用环境的变化也很大,可能从平静的海上应用到冲击力变化很大的超音速或高超音速飞行的地对空或空对空导弹飞行的极高动态应用。为了检验和确定惯性敏感器和惯导系统对给定应用的适用性,即保证它们的特性和性能能满足应用需求,需要对惯性敏感器、惯性测量组合或惯导系统进行评估测试和试验。

通过一系列专门的试验方法来标定或估计惯性系统的性能参数,是研究、设计、制造和使用惯性系统过程中非常重要的任务。惯性系统测试的目的在于确定它们在系统使用时的性能,判定它们能否在规定的期限内可靠地工作。可以通过各种试验来估计各项技术指标的数值,检查它们与设计指标是否相符,由此可以发现仪器存在的缺陷,同时也作为误差补偿或改进设计的依据。

敏感器及其系统的测试方式分为静态测试和动态测试两种。在静态测试中,被测装置保持固定,实验者采用多位置测试观察由于某些自然作用或自然现象引起的反应。例如由地球重力而产生的比力可用加速度计在不同的方位观测。当进行动态测试时,被测装置处于运动状态,实验者监测该装置对给定激励的反应,并将其与给定激励或其对应的期望输出作比较。

所谓标定就是通过比较陀螺仪、加速度计的输出值与已知的输入运动或基准信息,确定误差模型或测量模型的误差系数,使输出在其取值范围内符合使用要求的过程。惯性系统标定的主要目的是分离惯性敏感器的误差模型系数,以使用测量模型对其输出进行补偿,提高惯性导航的精度。因此,误差系数的标定精度直接影响误差补偿的效果和惯性导航的精度。

完成测试及标定后,通常还要对惯性敏感器或系统进行温度、离心、振动等试验,目的是在符合实际使用所期望的动态条件范围内对系统性能进行检验。这要求敏感器和系统不仅能在运载体所产生的振动、冲击和加速度环境中可靠地工作,并且在试验与标

定过程中具有足够的耐久性和承受能力。相应地，要求测试和标定的方法和过程不仅要反映出应用的类型，更重要的是要反映出敏感器和系统所处的实际工作环境和状况。

对敏感器的测试试验通常可分为三类：鉴定试验、验收试验和例行试验。鉴定试验是对敏感器进行最大范围和最严格的试验。目的是检验某种设计能在满足用户要求的前提下，在生产时留有一定裕度。验收试验是在敏感器生产、调试完成后，在敏感器出厂前进行的筛选性试验，目的是对敏感器在制造过程中的各种应力进行释放，并对敏感器的环境适应能力进行筛选考核。敏感器 100% 地需要经过验收试验。例行试验则是从一批成品中随机抽取一些敏感器，并让它们在标准工作条件下试运行来得到平均无故障间隔时间。可以对每个敏感器都检测或根据统计原理在生产过程中从一批成品中选取一定数量进行检测。

本节从系统和使用的角度出发，重点介绍惯性组合和惯导系统的测试和标定。

2.6.2 惯性系统的测试

2.6.2.1 性能测试

根据被测的敏感器或系统以及所需的评价方式，可以采用静态或动态测试方法。在静态测试情况下，敏感器保持固定并观测其输出对一定的自然效应或现象的响应。

所有测试工作中，陀螺漂移测试是很重要的测试内容。陀螺漂移大致分为 3 类：第一类为逐次起动的随机漂移，有时也称为“逐日漂移”，即各次起动运转的漂移量值之间的变化，这种漂移反映陀螺性能的稳定程度。第二类称作短期漂移，是指一次通电起动运转工作过程中的漂移。一般来说，这种漂移的数量级小于第一类漂移。第三类称综合漂移，包含有系统漂移和随机漂移。陀螺漂移的测试常用多位置翻滚试验来进行测试。除对陀螺仪进行多位置的稳定性测试外，还要对其进行速率测试。速率测试的目的确定陀螺仪的量程、标度因数及其误差参数。

加速度计性能的测试通常采用一系列的静态测试和动态测试。如多位置测试和离心测试等。

下面给出了一个常用的惯性系统测试方案，能够对惯性敏感器或整个惯导系统进行详细检查。该测试方案包括：静态加速度计多位置测试、静态陀螺多位置测试、角速率测试和惯性敏感器或导航系统的多位置测试。

(1) 静态加速度计多位置测试：将惯性敏感器或导航系统安装到水平平板上，使其每个敏感轴分别指向上和下，该测试有可能得到相对于一组基准安装面的加速度计零偏、标度因数误差和敏感轴安装误差的估计。这些估计值可以通过对各种组合的加速度计测量值求和及求差计算得到。详细的计算过程将在 2.6.3 节中介绍。

(2) 静态陀螺多位置测试：通过检测系统在预先设定的时间周期内，以及敏感器多个不同的安装方向所给出的角速率测量值，从中得出陀螺仪固定零偏和与 g 相关的零偏。

与静态加速度测试一样,采用求和及求差的方法可以分离和计算各种误差分量。详细的计算过程在 2.6.3 节中介绍。

(3) 角速率测试:该测试采用一台精密多位置测试转台,使惯性测量装置转动非常精确的已知角度。如果转台顺时针和逆时针方向旋转过相同的角度,陀螺仪对于壳体安装误差的估值连同陀螺仪零偏和标度因数误差就可以求出。

(4) 惯性系统动态测试:测试时惯性敏感器处于运动状态,如旋转或具有加速度的线性运动。这种形式的测试需要专门的测试设备,如速率转台、摇摆台或振动台等设备。

上面描述的测试可以按照递归的方式实现,利用一次测试得到的误差估值来更新或修正下次测试使用的误差模型。通常使用最小二乘法 and 卡尔曼滤波技术求取系统误差的估值。

值得指出的是,随着计算机及其应用技术的发展,目前广泛采用的另一种系统级评估测试形式称为半实物仿真测试。这种形式的测试通常用于项目的研发阶段,目的是对飞行器的导航、制导和飞行控制性能进行准确地估计。通常将完整的惯性导航系统安装到测试设备上。该测试设备可以精确地再现系统在工作寿命期内可能经受的角运动,如导弹的飞行姿态变化。一般说来,测试设备仅限于作角运动,而线运动通过特殊的模拟方法产生。被测器件的信号输出通过合适的接口连接到仿真运载体的运动和性能分析的计算机上;计算机上的数学模型产生输出信号以控制测试设备,从而形成一种采用实际的硬件并实时运行的仿真系统;对复杂系统在各种飞行状态下的真实性能进行评估。

2.6.2.2 环境试验

完成上述相关测试后,惯性系统通常还要进行温度、速率、离心、摇摆、冲击及振动等环境和力学试验。目的是在符合实际使用所期望的动态条件范围内对系统性能进行评估。试验过程中,被测装置可保持静止状态也可处于运动状态。常见的环境和力学试验项目有:

(1) 温度试验:确定产品在要求的温度及湿度条件下的适应性。

(2) 摇摆试验:测定陀螺仪的频率响应特性和与之相关联的电子控制电路对角振荡加在传感器输入轴上时的频率响应特性。

(3) 离心试验:考核被测设备承受预计的使用加速度环境的能力,以确保在此环境下的设备结构和性能不发生破坏和失灵。

(4) 冲击试验:测量敏感器对外加冲击的响应,并且保证敏感器在承受此瞬间加速度之后(时间一般仅以毫秒计),有足够的弹性恢复力。

(5) 振动试验:确定所设计、制造的设备、构件,在运输、使用、工作过程中能承受外来振动而不致破坏,并发挥其性能,达到预定寿命的可靠性。

2.6.2.3 测试及试验设备

随着惯性传感器及其系统的发展,许多不同的试验方法和规程都得到了完善。有些测试和试验方法需要特制、精密且造价昂贵的设备,它们通常安装在为此目的特建的实验室中。通常需要用特制的地基,使试验设备隔离当地环境中产生冲击振动及其它扰动。

测试不仅要符合应用所需的规程和方法,而且要保证测试设备与期望的测试精度相适应。这样才能给惯性器件或系统施加给定和已知的激励并对其响应加以观测。一般来说,测试设备的测量精度应明显超出被测试敏感器的测量精度,典型的量级为5倍~10倍。类似地,数据采集系统及处理这些数据的算法也必须与传感器或其应用所期望的精度相适应。另外,测试设备应定期进行必要的校准和检查。

常见的测试和标定设备有:各种惯性仪表及系统的综合测试台、可调平的平板、多面体的工装倾斜台、晃动台、摇摆台、伺服转台、角振动台、单轴速率转台、精密三轴转台、计时测频仪以及各种自动化测试设备等。常用的环境试验设备有温度试验箱、老化设备、离心机、冲击台、振动台等。

2.6.3 惯性系统的标定和误差补偿

惯性系统的标定是进行误差补偿的关键,误差系数的标定精度直接影响误差补偿的效果。通常通过对惯性系统的标定,分离出其误差系数,并用测量模型对惯性系统的输出进行补偿,提高惯性导航的精度。

惯性系统的标定根据标定的场所可以将标定分为内场标定和外场标定。内场标定是指在实验室内利用惯性测试设备标定测量装置或系统的参数,此时标定出的参数是IMU的诸参数。外场标定则是将系统安装在载体上后进行的标定。按照标定的层次,可以分为元件标定和系统标定。元件标定一般是在惯性传感器生产工厂进行的,其目的主要是分析器件的性能和精度估计。由于惯性仪表的精度最终是要反映在惯性系统的精度水平上,而惯性系统的误差还与系统的结构参数有关,因此需要通过系统的标定对整个惯性系统进行测试,以得到仪表的实际使用性能参数和系统的结构参数。

系统标定根据观测量的不同又可以分为分立标定法和系统级标定法。分立标定法直接利用陀螺仪和加速度计的输出作为观测量。系统级标定则利用陀螺仪和加速度计的输出进行导航解算,以导航误差(位置误差、速度误差及姿态误差)作为观测量来确定系统的误差参数。分立标定法常采用最小二乘法对测量数据进行处理,其优点是计算简单;系统级标定法一般采用卡尔曼滤波等最优估计法进行数据处理,计算量比较大。分立标定是目前工程上广泛采用的标定方法,一般包括速率标定和位置标定。

在标定时通常采用标定点的当地地理坐标系(如东北天坐标系)作为基准坐标系,这时比力的基准信息为重力加速度 \mathbf{g} ,在天向的分量为 $-\mathbf{g}$,在东向和北向为0。角速率的

基准信息为地球自转角速度 ω_{ie} ，东向的地球自转角速度分量为 0，北向为 $\omega_{ie} \cos L$ ，天向为 $\omega_{ie} \sin L$ 。只要准确地测得标定点的重力加速度 \mathbf{g} 和纬度 L ，就可以准确地确定陀螺、加速度计的基准信息。

对于陀螺的标度因数和安装误差系数用地球自转角速度标定时有两个明显的缺点：

(1) 地球自转角速度大小仅为 $15.041^\circ/\text{h}$ ；(2) 在高纬度地区地球自转角速度的水平分量很小。因此，通常将陀螺仪放置在高精度速率转台上，将陀螺仪的输出信号与精确已知的转动角速率比较，进行速率标定，确定陀螺的标度因数和安装误差系数。对于加速度计标定，也可以采用精密度头使加速度计的输入轴相对于重力矢量进行旋转，精确地改变作用在加速度计输入轴的重力分量，实现加速度计的多位置测试和标定。

下面以常用的挠性惯测组合为例，结合本章 2.2.3 节给出的惯性测量组合的误差测量模型，详细介绍惯性系统的速率标定及位置标定。

2.6.3.1 速率标定

为了标定出惯性系统中陀螺的标度因数和安装误差系数，需要给惯性敏感器输入一定的角速率，并测量出陀螺相应轴输出的脉冲数。角速率可以通过速率转台产生。标定时转台以给定的角速率分别正转及反转，利用陀螺在正转及反转过程中的输出数据，即可分离出陀螺的标度因数及安装误差系数。为了提高标定的精度，一般使转台旋转 360° ，采集惯性敏感器在此过程中的脉冲数，这时地球自转角速率在转台水平方向的分量在台体旋转一周时被平均掉。标定时可以根据惯性系统的使用环境来选择转台的速率测试点。也可以选择多个速率测试点进行测试。

速率标定的过程以及分离陀螺的安装误差系数和标度因数的过程和计算公式如下：

(1) 绕轴 ω_x 旋转（正反各转一圈）

$$E_{1x} = \frac{N_{Tx}^+ - N_{Tx}^-}{2 \times 1296000} \quad (2-175)$$

$$E_{yx} = \frac{N_{Ty}^+ - N_{Ty}^-}{2 \times 1296000} \quad (2-176)$$

$$E_{zx} = \frac{N_{Tz}^+ - N_{Tz}^-}{2 \times 1296000} \quad (2-177)$$

(2) 绕 ω_y 轴旋转（正反各转一圈）

$$E_{1y} = \frac{N_{Ty}^+ - N_{Ty}^-}{2 \times 1296000} \quad (2-178)$$

$$E_{xy} = \frac{N_{Tx}^+ - N_{Tx}^-}{2 \times 1296000} \quad (2-179)$$

$$E_{zy} = \frac{N_{Tz}^+ - N_{Tz}^-}{2 \times 1296000} \quad (2-180)$$

(3) 绕 ω_z 轴旋转 (正反各转一圈)

$$E_{1z} = \frac{N_{Tz}^+ - N_{Tz}^-}{2 \times 1296000} \quad (2-181)$$

$$E_{yz} = \frac{N_{Ty}^+ - N_{Ty}^-}{2 \times 1296000} \quad (2-182)$$

$$E_{xz} = \frac{N_{Tx}^+ - N_{Tx}^-}{2 \times 1296000} \quad (2-183)$$

其中, N_{Tx}^+ 、 N_{Ty}^+ 、 N_{Tz}^+ 为 x、y、z 轴正转一周输出的总脉冲数; N_{Tx}^- 、 N_{Ty}^- 、 N_{Tz}^- 为 x、y、z 轴反转一周输出的总脉冲数; 1296000 为旋转一周的总角秒(")数。

可以看出, 通过速率标定分离出了陀螺仪的 E_{1x} 、 E_{1y} 、 E_{1z} , E_{yx} 、 E_{zx} 、 E_{xy} , E_{zy} 、 E_{xz} 、 E_{yz} 共 9 个误差系数。

2.6.3.2 位置标定

位置标定分为角速度通道误差系数的标定和加速度通道误差系数的标定。

(1) 角速度通道误差系数的标定

利用多位置试验可以分离出惯性系统中陀螺 X、Y、Z 轴的常值漂移和视加速度影响系数。位置标定可以在双轴速率转台或标准平板上进行。根据标定的精度要求及试验条件可以选择不同的位置数。

由于陀螺的标度因数和安装误差系数已通过速率标定得到, 因此在进行 n 个位置标定的情况下, 根据 2.2.3 节惯性系统角速度通道的误差模型, 可以得到如下用于角速度通道误差系数标定的方程

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} N_{x1}/E_{1x} & N_{y1}/E_{1y} & N_{z1}/E_{1z} \\ N_{x2}/E_{1x} & N_{y2}/E_{1y} & N_{z2}/E_{1z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{xn}/E_{1x} & N_{yn}/E_{1y} & N_{zn}/E_{1z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_{x1} & \omega_{y1} & \omega_{z1} \\ \omega_{x2} & \omega_{y2} & \omega_{z2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{xn} & \omega_{yn} & \omega_{zn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & 1 & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & 1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & f_{x1} & f_{y1} & f_{z1} \\ 1 & f_{x2} & f_{y2} & f_{z2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & f_{xn} & f_{yn} & f_{zn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0x} & B_{0y} & B_{0z} \\ B_{1x} & B_{1y} & B_{1z} \\ B_{2x} & B_{2y} & B_{2z} \\ B_{3x} & B_{3y} & B_{3z} \end{bmatrix} \quad (2-184) \end{aligned}$$

式中

$N_{x1}, N_{x2}, \dots, N_{xn}$ 分别为 X 轴向陀螺通道在每个位置单位时间内输出的脉冲数;

$N_{y1}, N_{y2}, \dots, N_{yn}$ 分别为 Y 轴向陀螺通道在每个位置单位时间内输出的脉冲数;

$N_{z1}, N_{z2}, \dots, N_{zn}$ 分别为 Z 轴向陀螺通道在每个位置单位时间内输出的脉冲数;

$f_{x1}, f_{x2}, \dots, f_{xn}$ 分别为重力加速度在每个位置 X 轴向的分量;

$f_{y1}, f_{y2}, \dots, f_{yn}$ 分别为重力加速度在每个位置 Y 轴向的分量;

$f_{z1}, f_{z2}, \dots, f_{zn}$ 分别为重力加速度在每个位置 Z 轴向的分量;

$\omega_{x1}, \omega_{x2}, \dots, \omega_{xn}$ 分别为地球自转角速度在每个位置 X 轴向的分量;

$\omega_{y1}, \omega_{y2}, \dots, \omega_{yn}$ 分别为地球自转角速度在每个位置 Y 轴向的分量;

$\omega_{z1}, \omega_{z2}, \dots, \omega_{zn}$ 分别为地球自转角速度在每个位置 Z 轴向的分量。

将方程(2-184)写为矩阵形式, 有

$$Y = XB \quad (2-185)$$

其中

$$Y = N - WE, \quad N = \begin{bmatrix} N_{x1}/E_{1x} & N_{y1}/E_{1y} & N_{z1}/E_{1z} \\ N_{x2}/E_{1x} & N_{y2}/E_{1y} & N_{z2}/E_{1z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{xn}/E_{1x} & N_{yn}/E_{1y} & N_{zn}/E_{1z} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \omega_{x1} & \omega_{y1} & \omega_{z1} \\ \omega_{x2} & \omega_{y2} & \omega_{z2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{xn} & \omega_{yn} & \omega_{zn} \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & 1 & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & f_{x1} & f_{y1} & f_{z1} \\ 1 & f_{x2} & f_{y2} & f_{z2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & f_{xn} & f_{yn} & f_{zn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{0x} & B_{0y} & B_{0z} \\ B_{1x} & B_{1y} & B_{1z} \\ B_{2x} & B_{2y} & B_{2z} \\ B_{3x} & B_{3y} & B_{3z} \end{bmatrix}$$

如果矩阵 $X^T X$ 满秩, 则根据最小二乘法可得陀螺漂移矩阵 B 的最小二乘估计 \hat{B} 为:

$$\hat{B} = [X^T X]^{-1} X^T Y \quad (2-186)$$

表 2-12 给出了一种 8 位置标定方案。在该方案中,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & g & 0 \\ 1 & 0 & g & 0 \\ 1 & g & 0 & 0 \\ 1 & -g & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & -g \\ 1 & 0 & -g & 0 \\ 1 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -\omega_{ie} \cos L & \omega_{ie} \sin L & 0 \\ \omega_{ie} \cos L & \omega_{ie} \sin L & 0 \\ \omega_{ie} \sin L & 0 & -\omega_{ie} \cos L \\ -\omega_{ie} \sin L & 0 & \omega_{ie} \cos L \\ \omega_{ie} \cos L & 0 & \omega_{ie} \sin L \\ -\omega_{ie} \cos L & 0 & -\omega_{ie} \sin L \\ \omega_{ie} \cos L & -\omega_{ie} \sin L & 0 \\ -\omega_{ie} \cos L & -\omega_{ie} \sin L & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} N_{x1}/E_{1x} & N_{y1}/E_{1y} & N_{z1}/E_{1z} \\ N_{x2}/E_{1x} & N_{y2}/E_{1y} & N_{z2}/E_{1z} \\ N_{x3}/E_{1x} & N_{y3}/E_{1y} & N_{z3}/E_{1z} \\ N_{x4}/E_{1x} & N_{y4}/E_{1y} & N_{z4}/E_{1z} \\ N_{x5}/E_{1x} & N_{y5}/E_{1y} & N_{z5}/E_{1z} \\ N_{x6}/E_{1x} & N_{y6}/E_{1y} & N_{z6}/E_{1z} \\ N_{x7}/E_{1x} & N_{y7}/E_{1y} & N_{z7}/E_{1z} \\ N_{x8}/E_{1x} & N_{y8}/E_{1y} & N_{z8}/E_{1z} \end{bmatrix}$$

这样，采用式(2-186)可计算出 $B_{0x}, B_{0y}, B_{0z}, B_{1x}, B_{1y}, B_{1z}, B_{2x}, B_{2y}, B_{2z}, B_{3x}, B_{3y}, B_{3z}$ 共 12 个误差系数。

表 2-12 一种 8 位置标定方案

位置	惯性系统方向			重力加速度在各轴向上的分量			地球自转角速度在各轴向上的分量		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	S	U	W	0	g	0	$-\omega_{ie} \cos L$	$\omega_{ie} \sin L$	0
2	N	U	E	0	g	0	$\omega_{ie} \cos L$	$\omega_{ie} \sin L$	0
3	U	W	S	g	0	0	$\omega_{ie} \sin L$	0	$-\omega_{ie} \cos L$
4	D	W	N	-g	0	0	$-\omega_{ie} \sin L$	0	$\omega_{ie} \cos L$
5	N	W	U	0	0	g	$\omega_{ie} \cos L$	0	$\omega_{ie} \sin L$
6	S	W	D	0	0	-g	$-\omega_{ie} \cos L$	0	$-\omega_{ie} \sin L$
7	N	D	W	0	-g	0	$\omega_{ie} \cos L$	$-\omega_{ie} \sin L$	0
8	S	D	E	0	-g	0	$-\omega_{ie} \cos L$	$-\omega_{ie} \sin L$	0

(2) 加速度通道误差参数标定

加速度计误差参数的标定采用在重力场静态条件下的多位置标定方法。假定选择了 n 个位置进行标定，根据 2.2.3 节的加速度通道测量模型，可以得到下式

$$\begin{bmatrix} N_{Ax1}/K_{1x} & N_{Ay1}/K_{1y} & N_{Az1}/K_{1z} \\ N_{Ax2}/K_{1x} & N_{Ay2}/K_{1y} & N_{Az2}/K_{1z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{Axn}/K_{1x} & N_{Ayn}/K_{1y} & N_{Azn}/K_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f_{x1} & f_{y1} & f_{z1} \\ 1 & f_{x2} & f_{y2} & f_{z2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & f_{xn} & f_{yn} & f_{zn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{0x} & K_{0y} & K_{0z} \\ 1 & K_{xy} & k_{xz} \\ K_{yx} & 1 & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & 1 \end{bmatrix} \quad (2-187)$$

式中

$N_{Ax1}, N_{Ax2}, \dots, N_{Axn}$ 分别为 X 轴向加速度计在各个位置单位时间内输出的脉冲数;
 $N_{Ay1}, N_{Ay2}, \dots, N_{Ayn}$ 分别为 Y 轴向加速度计在各个位置单位时间内输出的脉冲数;
 $N_{Az1}, N_{Az2}, \dots, N_{Azn}$ 分别为 Z 轴向加速度计在各个位置单位时间内输出的脉冲数;
 将(2-187)式写成矩阵形式, 有

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{X} \quad (2-188)$$

式中

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} N_{Ax1}/K_{1x} & N_{Ay1}/K_{1y} & N_{Az1}/K_{1z} \\ N_{Ax2}/K_{1x} & N_{Ay2}/K_{1y} & N_{Az2}/K_{1z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{Axn}/K_{1x} & N_{Ayn}/K_{1y} & N_{Azn}/K_{1z} \end{bmatrix}, \text{表示量测量, 它是由每个标定位置三个加}$$

速度计的输出组成的。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & f_{x1} & f_{y1} & f_{z1} \\ 1 & f_{x2} & f_{y2} & f_{z2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & f_{xn} & f_{yn} & f_{zn} \end{bmatrix}, \text{表示量测矩阵, 它是每个位置的基准信息。}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} K_{0x} & K_{0y} & K_{0z} \\ 1 & K_{xy} & k_{xz} \\ K_{yx} & 1 & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & 1 \end{bmatrix}, \text{表示状态变量矩阵, 它是由加速度计的所有误差参数组成}$$

的, 也就是需要标定的加速度计误差参数。

采用最小二乘法可得加速度计误差参数矩阵的解为:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Z} \quad (2-189)$$

这样, 就可以得到加速度测量通道的 $K_{0x}, K_{0y}, K_{0z}, K_{1x}, K_{1y}, K_{1z}, K_{yx}, K_{zx}, K_{xy}, K_{zy}, K_{xz}, K_{yz}$ 共 12 个误差系数的估计值。

值得指出的是, 惯性系统的位置标定方法有许多排列, 常用的有 8 位置、12 位置、16 位置、20 位置及 24 位置等。如何选择标定位置是相当复杂的。总的来说, 所选择的标定位置是为了使敏感器的所有误差参数得到充分激励, 并且使最小二乘解中的伪逆矩

阵存在。角速度通道和加速度通道可以根据具体情况选择不同的方位进行误差系数的分离和标定,应用时可以根据具体情况进行方位编排。例如,从加速度计误差参数标定公式(2-189)式可以看出,需要标定的误差参数一共有12个,只需要四个位置就可以分离出全部误差参数。为了使误差参数充分得到激励,保证标定精度,可以选择更多的位置进行标定。

经过位置标定和速率标定,分离和标定出了惯性系统的误差模型中的全部误差系数。这些误差系数是基于惯性系统在工程应用中的测量模型进行分离的。随着科技的发展,惯性系统测试手段越来越先进,其测量模型也越来越复杂,这也使得动态误差系数的分离及其补偿成为可能。有关动态误差系数的标定可以参考有关书籍。

2.6.3.3 误差补偿

误差补偿的基本思想是修正可预测的一种或多种系统误差对敏感器和系统精度的影响。误差补偿的基本要求是误差可以量测,它们对系统性能的影响可以预测。这要求误差过程可以用数学模型来表示并建立相应模型,并且可以得到对应于干扰作用(如温度或加速度)的信号,而且可以按照需要的精度进行测量。因此,误差补偿是通过测量确定适当的误差系数,并利用这误差系数通过误差模型对测量值加以修正,以除去惯性敏感器或系统中可预测的误差项。除了对敏感器误差补偿外,通常对各种系统误差也要进行补偿,如敏感器安装误差等。误差补偿通常在系统软件中实现。

与惯性系统的标定一样,误差补偿也有几种不同的级别可以采用。可预测的误差分量可以从测试观测值中进行估计,并以相反的意义用于对敏感器或系统性能缺陷的修正或补偿。这种补偿方法经常取决于误差表达式中使用的常数系数。对于要求更高的应用或复杂的误差特性,通常采用多项式表示。因此,可能的误差补偿范围可以从采用一个常数对整批仪表进行单一误差参数的修正,到采用复杂的时变多项式进行单个仪表的补偿。前种类型的补偿采用从例如“生产线”评估得到的平均数据,并且它主要对特定的一类或设计的敏感器呈现的系统性趋势误差进行补偿。另一种极端情况需要通过一系列实验室测试,确定每个敏感器的特性,然后根据测试结果对每个敏感器的性能进行修正。在这种情况下,对每个敏感器观测误差的误差系数进行定量评估,从而对观测的测量值进行已知的系统性误差加以修正。近年来,利用计算机和数据存储技术,多参数补偿方法已变得更为可行,并且已经用于多种低成本敏感器技术(如MEMS技术)来获得高性能的器件。每个敏感器都会有其自身的一套误差系数,这些误差系数可以以电子形式存储到每个敏感器内的“芯片”中。这种方法确实为每个敏感器性能的显著改善提供了较大的余地,从而也给它们所组成的系统带来明显的改善。总的来说,补偿方法的选择通常是各种因素间的折中,但主要是在实现的难易程度与敏感器精度改善所获得的好处之间的平衡。另一个要考虑的是确定详细特性需要的额外成本与使用更为精确仪表所付的代

价之间的折中。

通过对惯性系统的标定分离出误差系数后,就可用测量模型对惯性系统的输出进行修正,提高惯性系统的精度。下面以上述惯性系统的标定为例,简要说明通过位置标定及速率标定,分离出了系统的误差系数之后,将这些标定出的误差系数装订入计算机中,用于误差补偿的过程和公式。

设 τ 为采样周期, $\Delta N_{Ax}, \Delta N_{Ay}, \Delta N_{Az}$ 为三个加速度计在采样时间 τ 内输出的脉冲数; $\Delta N_x, \Delta N_y, \Delta N_z$ 为三个陀螺在采样时间 τ 内输出的脉冲数; $\Delta W_{x0}, \Delta W_{y0}, \Delta W_{z0}$ 为惯性系统输出的在采样时间 τ 内载体三个方向的视速度增量; $\Delta \theta_{x0}, \Delta \theta_{y0}, \Delta \theta_{z0}$ 为惯性系统输出的在采样时间 τ 内载体绕三个轴的角度增量。由式(2-27)、式(2-28)中变量的定义,有 $\Delta N_x = \tau N_x, \Delta N_y = \tau N_y, \Delta N_z = \tau N_z$ 和 $\Delta N_x = \tau N_x, \Delta N_y = \tau N_y, \Delta N_z = \tau N_z$ 。根据式(2-27)和式(2-28),可以得到加速度和角速度误差补偿的公式为(2-190)和(2-191)。使用标定分离出的惯性系统误差系数,按照式(2-190)和(2-191)解算出 f_x, f_y, f_z 和 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$,即实现了惯性系统的误差补偿。

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} 1 & K_{yx} & K_{zx} \\ K_{xy} & 1 & K_{zy} \\ K_{xz} & K_{yz} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta W_{x0} - K_{0x}\tau \\ \Delta W_{y0} - K_{0y}\tau \\ \Delta W_{z0} - K_{0z}\tau \end{bmatrix} \quad (2-190)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} 1 & E_{yx} & E_{zx} \\ E_{xy} & 1 & E_{zy} \\ E_{xz} & E_{yz} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \theta_{x0} - B_{0x}\tau_c - B_{1x}f_x - B_{2x}f_y - B_{3x}f_z \\ \Delta \theta_{y0} - B_{0y}\tau_c - B_{1y}f_x - B_{2y}f_y - B_{3y}f_z \\ \Delta \theta_{z0} - B_{0z}\tau_c - B_{1z}f_x - B_{2z}f_y - B_{3z}f_z \end{bmatrix} \quad (2-191)$$

式中

$$\begin{bmatrix} \Delta W_{x0} \\ \Delta W_{y0} \\ \Delta W_{z0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta N_{Ax} / K_{1x} \\ \Delta N_{Ay} / K_{1y} \\ \Delta N_{Az} / K_{1z} \end{bmatrix} \quad (2-192)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta_{x0} \\ \Delta \theta_{y0} \\ \Delta \theta_{z0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta N_x / E_{1x} \\ \Delta N_y / E_{1y} \\ \Delta N_z / E_{1z} \end{bmatrix} \quad (2-193)$$

值得指出的是,惯性系统的误差系数随时间、温度、振动、施加的运动以及逐次工作而变化,而正是这些变化最终决定了系统的性能。当不可能对所有的误差加以补偿时,温度补偿常常是获得期望性能必须考虑的关键。

热效应对零偏和标度因数误差的影响可能会非常明显且经常难以精确建模。这是由于在某些传感器中,特别是机械陀螺仪,传感器内部的温度梯度会改变其许多元器件性

能。这样，通常对于非常精确的惯性系统，要极为严格地控制其敏感器的温度。因此，这种系统可能会具有较长的预热时间，通过预热缓解了对复杂且困难的热补偿要求。

应用补偿方法所能得到的精度取决于“误差”方程中的系数能代表实际敏感器误差的精确程度。这个表达式通常作为时间、敏感器的使用环境及使用频度的函数而变化。对于更为苛刻的应用，需要定期对敏感器进行重新标定，以保证补偿程序对特定应用需求的有效性。

参考文献

- [1] 袁信, 俞济祥, 陈哲. 导航系统. 北京: 航空工业出版社, 1993
- [2] 任思聪. 实用惯导系统原理. 北京: 宇航出版社, 1988
- [3] 张天光, 王秀萍, 王丽霞等译. 捷联惯性导航技术(第2版). 北京: 国防工业出版社, 2007
- [4] 于波, 陈云相, 郭秀中. 惯性技术. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994
- [5] 高伯龙, 李树棠. 激光陀螺. 长沙: 国防科技大学出版社, 1984
- [6] 万德均, 房建成. 惯性导航初始对准. 南京: 东南大学出版社, 1998
- [7] 卢松华. 制导炸弹传递对准的算法与仿真. 西北工业大学硕士学位论文, 2005
- [8] 梅硕基. 惯性仪器测试与数据分析. 西安: 西北工业大学出版社, 1991
- [9] 林玉荣, 邓正隆. 激光陀螺捷联惯导系统中惯性器件的系统级标定. 哈尔滨工业大学学报, Vol 33, No 1, 2001: 112-116
- [10] 肖龙旭等. 惯测组合快速高精度标定方法研究. 宇航学报, 2008, 29(1): 172-177
- [11] I. Y. Bar-Itzhack, E. F. Mallove. Accurate INS Transfer Alignment Using a Monitor Gyro and External Navigation Measurements. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, Vol AES-16, No 1, 1980: 53-65
- [12] Maurizio Guide, Maurizio Longo, Marco Lops. Multiposition Alignment of Strapdown Inertial Navigation System. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, Vol 29, No 4, 1993: 1323-1328