

航天飞行动力学大作业

——轨道仿真及转移质量计算

一、问题描述

- 1、在已知条件下考虑 J2 项摄动和大气阻力摄动，计算仿真航天器轨道在一年之内的变化特性，并绘制其图像。
- 2、在轨运行一年后，采用 Hohmann 机动使轨道回到标称轨道，计算所要消耗的推进剂的质量。

二、模型建立

在仅考虑 J2 项摄动和大气阻力摄动的假设下，可得到下列公式进行求解。

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= 2\sqrt{\frac{p}{\mu}}ra_u \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}}[a_r \sin f + a_u(1 + \frac{r}{p})\cos f + a_u \frac{er}{p}] \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin(\omega + f)}{\sqrt{\mu p} \sin i} a_h \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos(\omega + f)}{\sqrt{\mu p}} a_h \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} [-a_r \cos f + a_u(1 + \frac{r}{p})\sin f - a_h \frac{er}{p} \sin(\omega + f) \cot i] \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{\cos f}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} a_r - \frac{\sin f}{e} (1 + \frac{r}{p}) \sqrt{\frac{p}{\mu}} a_u \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} [a_r e \sin f + a_u(1 + e \cos f)] \\ \frac{dM}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} (\cos f - 2e \frac{r}{p}) \sqrt{\frac{p}{\mu}} a_r - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} (1 + \frac{r}{p}) \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin a_u\end{aligned}$$

其中 a_r a_u a_h 为摄动加速度在径向、横向、副法向方向上的加速度分量，可以用下列公式得到。

$$\Delta a = \Delta g + a_D$$

$$\Delta g_r = -\frac{\mu}{r^2} \frac{3}{2} J_2 \frac{R_e^2}{r^2} [1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + f)]$$

$$\Delta g_u = -\frac{\mu}{r^2} \frac{3}{2} J_2 \frac{R_e^2}{r^2} \sin^2 i \sin[2(\omega + f)]$$

$$\Delta g_h = -\frac{\mu}{r^2} \frac{3}{2} J_2 \frac{R_e^2}{r^2} \sin^2 i \sin(\omega + f)$$

$$a_{Dr} = -\sigma \rho v^2 \sin \gamma$$

$$a_{Du} = -\sigma \rho v^2 \cos \gamma$$

通过 matlab 对上式进行数值迭代求解就可以得到轨道六要素在一年之内的变化特性。

三、求解六要素

通过上式的迭代求解可以得到六要素在一年中变化如下：

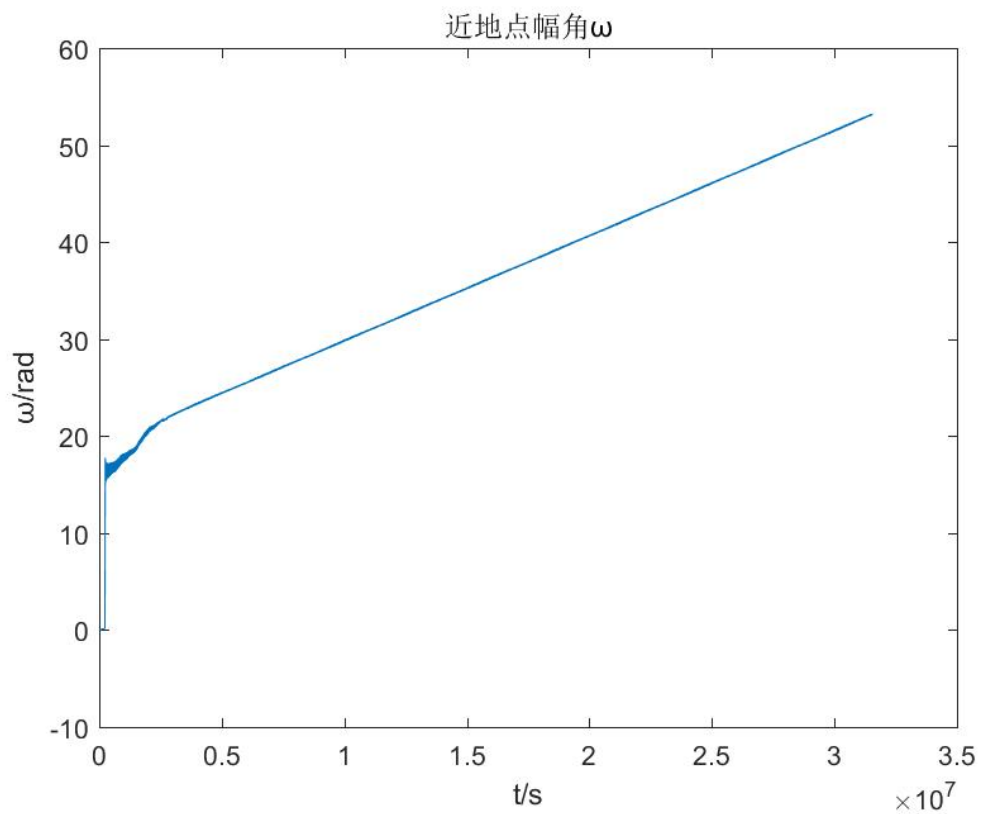
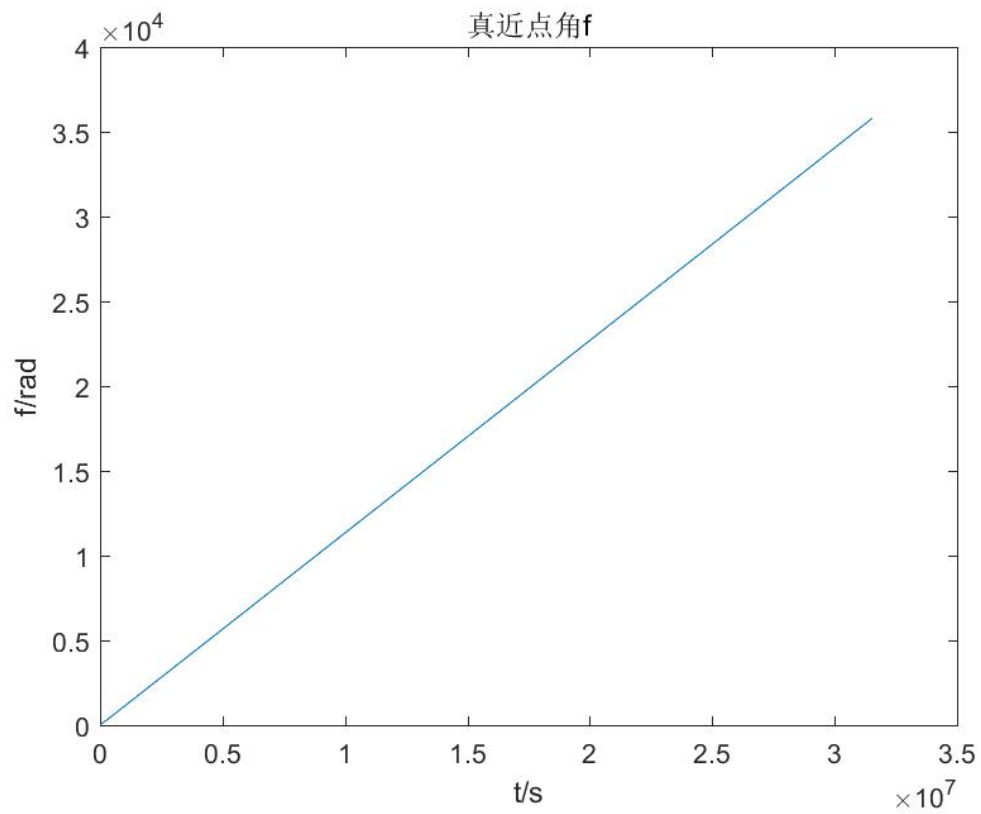
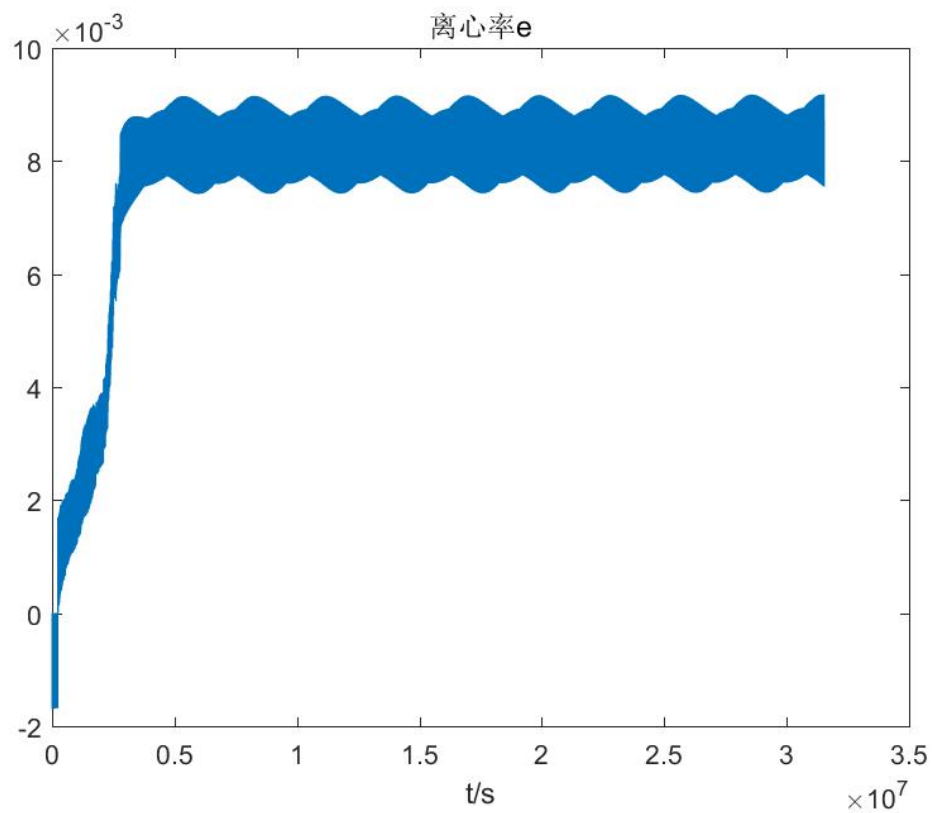
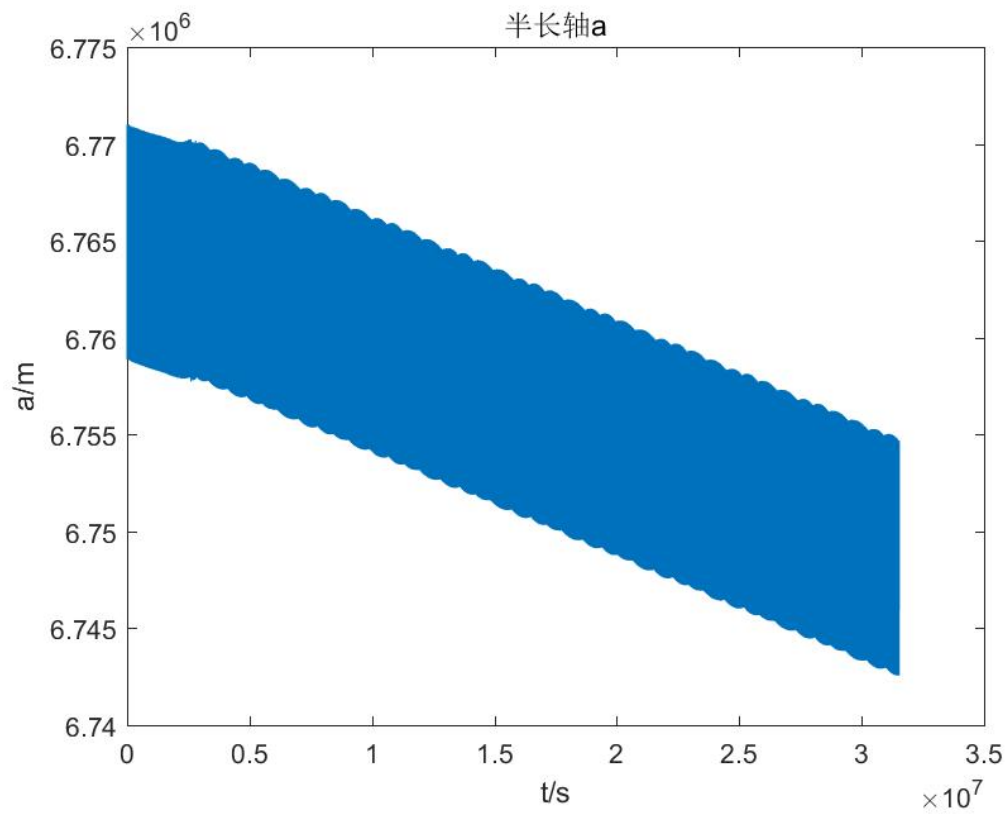
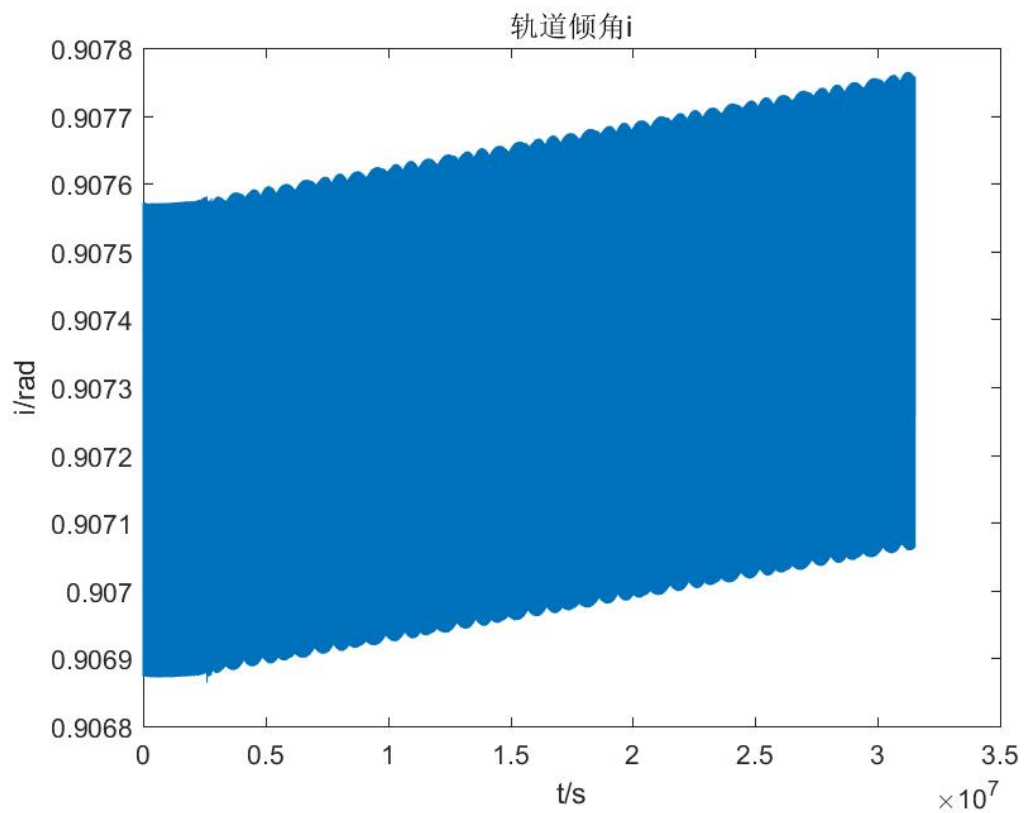
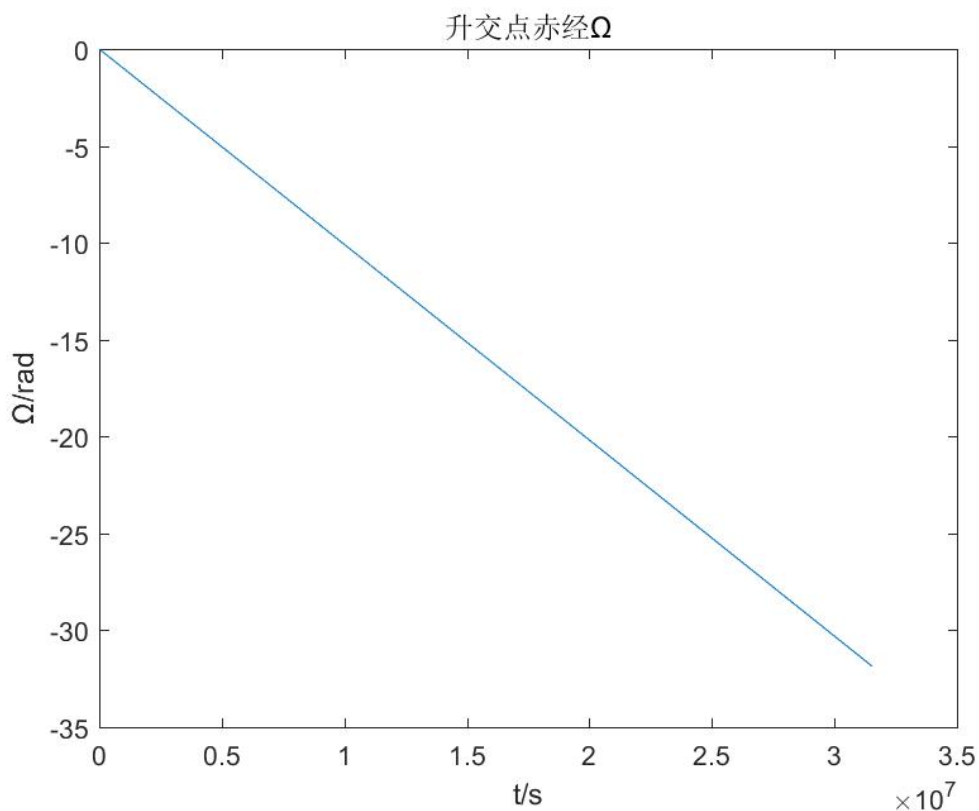


图 3-1 近地点幅角ω

图 3-2 真近点角 f 图 3-3 离心率 e

图 3-4 半长轴 a 图 3-5 轨道倾角 i

图 3-6 升交点赤经 Ω

四、六要素的理论分析

对于 0.25×10^7 s 时候 e 产生的突变,是因为在迭代数值求解过程中,使用了两组公式分别对应于 e 很小(近似为圆轨道)以及 e 不可忽略(按椭圆轨道)的时候,当到 0.5×10^7 s 附近时, e 不可忽略,按椭圆轨道计算,会产生一个突增。

因此以下分析着重考虑 0.25×10^7 s 突增之后的情况。

对于半长轴 a ,地球扁率会对其造成短期摄动,但不对其造成长期摄动,但大气阻力摄动会对其产生长期摄动影响,使半长轴 a 越来越小,因此半长轴 a 应呈现周期振荡,总体趋势减小的图像,理论分析与图 3-4 仿真结果。

对于偏心率 e ，地球扁率同样仅会对其造成短期摄动，但不会对其造成长期摄动，同时大气阻力对圆轨道偏心率不产生影响，因此，偏心率 e 应呈现出周期振荡，但总体趋势不变的图像，理论分析与图 3-3 总体上相符。

对于真近点角 f ，地球扁率与大气阻力对其均不产生影响，因此， f 仅与时间与角速度有关，成随时间递增的趋势，理论分析与图 3-2 相符。。

对于升交点赤经 Ω ，地球扁率会对此产生长期摄动，大气阻力对此不产生影响，因此会随时间呈现线性递增或递减的图像，理论分析与图 3-6 相符。

对于近地点幅角 ω ，因为轨道倾角不是 63.4° 或 113.6° ，因此近地点幅角会随时间变化受到地球扁率长期摄动的影响，最终的图像趋势与升交点赤经类似，理论分析与图 3-1 相符。

对于轨道倾角 i ，由于仅受到地球扁率的短期摄动，长期摄动为 0，且大气阻力对此不产生影响，因此 i 会呈现周期振荡，但总体趋势不变的图像，理论分析与图 3-5 基本相符，整体趋势变化不大。

五、求变轨消耗推进剂质量

一年飞行之后，在轨道末段，能够得到以下数据：

$$e = 0.00835$$

$$a = 6.75 \times 10^6 m$$

因此可以计算得出此时的近地点到焦点的距离和远地点到焦点的距离：

$$r_p = a(1 - e) = 6.694 \times 10^6 m$$

$$r_a = a(1 + e) = 6.806 \times 10^6 m$$

该椭圆轨道下远近焦点速度为：

$$v_a = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{r_p}{r_a}} = 7.621 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{r_a}{r_p}} = 7.749 \times 10^3 \text{ m/s}$$

在近地点处进行第一次轨道机动：

此时速度增量与推进剂质量消耗如下：

$$v_p' = \sqrt{\frac{\mu}{a'} \frac{r_a'}{r_p'}} = 7.739 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$m_1 = m_0 / e^{\frac{\Delta v}{v_e}} = 9966.72 \text{ kg}$$

然后计算第二次轨道机动后质量消耗：

$$v_a' = \sqrt{\frac{\mu}{a'} \frac{r_p'}{r_a'}} = 7.651 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$v_a'' = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = 7.673 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$m_2 = m_1 / e^{\frac{\Delta v}{v_e}} = 9893.90 \text{ kg}$$

因此总的质量消耗为：

$$\Delta m = m_0 - m_2 = 106.10 \text{ kg}$$

六、源代码

调用迭代方程并绘图代码：

```
%p e k w i w f a M

[t,x]=ode45(@Dt,[0,31536000],[6771000,0,0,52/180*pi,0,0,6771000,10000]);

plot(t,x(:,7))

title('半长轴 a')

xlabel('t/s')
```

```
ylabel('a/m')  
  
saveas(gcf,'a','jpg')  
  
figure  
  
plot(t,x(:,2))  
  
title('离心率 e')  
  
xlabel('t/s')  
  
saveas(gcf,'e','jpg')  
  
figure  
  
plot(t,x(:,6))  
  
title('真近点角 f')  
  
xlabel('t/s')  
  
ylabel('f/rad')  
  
saveas(gcf,'f','jpg')  
  
figure  
  
plot(t,x(:,4))  
  
title('轨道倾角 i')  
  
xlabel('t/s')  
  
ylabel('i/rad')  
  
saveas(gcf,'i','jpg')  
  
figure  
  
plot(t,x(:,3))  
  
title('升交点赤经  $\Omega$ ')
```



```
xlabel('t/s')
```

```
ylabel('Ω/rad')
```

```
saveas(gcf,'kw','jpg')
```

```
figure
```

```
plot(t,x(:,5))
```

```
title('近地点幅角 ω')
```

```
xlabel('t/s')
```

```
ylabel('ω/rad')
```

```
saveas(gcf,'w','jpg')
```

微分方程组代码：

```
function dy=Dt(t,y)
```

```
S=27;
```

```
miu=3.986005E14;
```

```
r=y(1)/(1+y(2)*cos(y(6)));
```

```
v=(miu*(2/r-1/y(7)))^0.5;
```

```
gm=asin(y(2)*sin(y(6))/sqrt(1+y(2)^2+2*y(2)*cos(y(6))));
```

```
ar=(-3/2)*r^(-2)*miu*1.2E-2*r^(-2)*6371000^2*(1+(-3)*...
```

```
sin(y(4))^2*sin(y(6)+y(5))^2-1.1*1.534E-12*v^2*S*sin(gm)/10000;
```

```
au=(-3/2)*r^(-4)*sin(y(4))^2*miu*sin(2*(y(6)+y(5)))*...
```

```
1.2E-2*6378000^2-1.1*1.534E-12*v^2*S*cos(gm)/10000;
```

```
ah=(-3/2)*r^(-4)*sin(y(4)*2)*miu*sin(y(6)+y(5))*1.2E-2*6371000^2;
```

```
dy(1)=2*r*(y(1)*miu^(-1))^ (1/2)*au;
```

```

dy(2)=(y(1)/miu)^0.5*(ar*sin(y(6))+au*(1+r/y(1))*cos(y(6))+au*y(2)*r/y(1));

dy(3)=r*sin(y(4))^(-1)*(y(1)*miu)^(-1/2)*sin(y(6)+y(5))*ah;

dy(4)=r*(y(1)*miu)^(-1/2)*cos(y(6)+y(5))*ah;

if(y(2)>=1E-3)

dy(5)=y(2)^(-1)*(y(1)*miu^(-1))^(1/2)*((-1)*cot(y(4))*y(2)*y(1)^(-1)...

    *r*sin(y(6)+y(5))*ah+(-1)*cos(y(6))*ar+sin(y(6))*au*(1+y(1)^(-1)*r));

dy(6)=r^(-2)*(y(1)*miu)^(1/2)+cos(y(6))*y(2)^(-1)*(y(1)*miu^(-1))^(1/2)...

    *ar+(-1)*y(2)^(-1)*(1+y(1)^(-1)*r)*sin(y(6))*(y(1)*miu^(-1))^(1/2)*au;

dy(8)=(y(7)^(-3)*miu)^(1/2)+y(2)^(-1)*(1+(-1)*y(2)^2)^(1/2)*(cos(y(6))+(-2)...

    *y(2)*y(1)^(-1)*r*(y(1)*miu^(-1))^(1/2)*ar+(-1)*y(2)^(-1)*...

    (1+(-1)*y(2)^2)^(1/2)*(1+y(1)^(-1)*r)*sin(au)*(y(1)*miu^(-1))^(1/2);

else

dy(6)=(miu/r^3)^0.5;

dy(5)=(miu*y(1))^0.5/r^2-dy(3)*cos(y(4))-dy(6);

dy(8)=0;

end

dy(7)=2*y(7)^2*(y(1)*miu)^(-1/2)*(y(2)*sin(y(6))*ar+au*(1+cos(y(6))*y(2)));

dy=dy';

end

```

