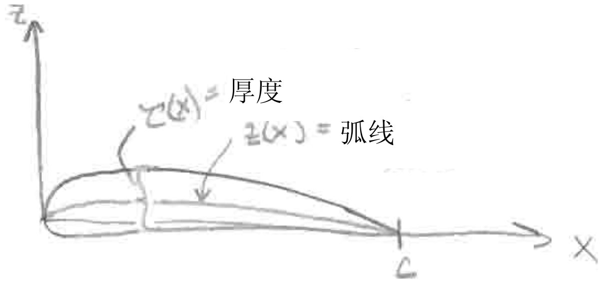
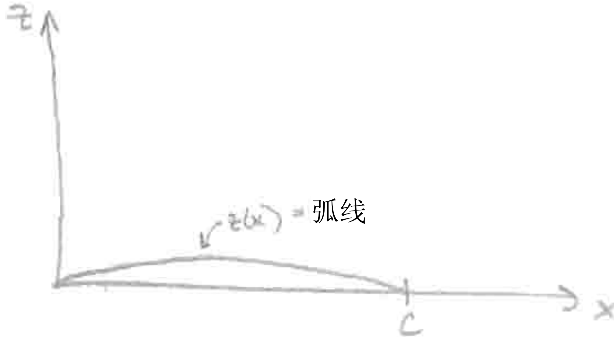
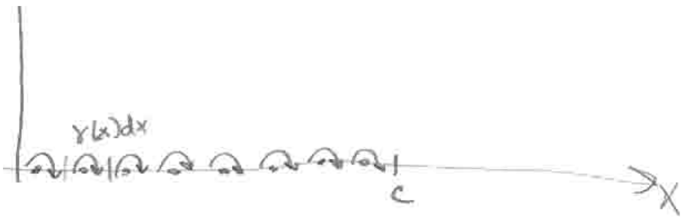
薄翼理论总结



* 由弧线代替机翼（假定τ / c很小），则有如下图：



* 由$0 \to c$的弦线上分布强度为$r(x)dx$的涡，则有



* 通过弧线上的流动相切条件，确定$r(x)$，即有

$$V_\infty\left(\alpha-\frac{dz}{dx}\right)-\int_0^c\frac{\gamma(\xi)}{2\pi(x-\xi)}d\xi=0$$

* 根据伯努利小扰动假设，压力系数可简化为

$$C_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$$

$$p+\frac{1}{2}\rho\left[(V_\infty+\tilde{u})^2+\tilde{v}^2\right]=p_\infty+\frac{1}{2}\rho V_\infty^2$$

$$\Rightarrow\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}=1-\frac{(V_\infty+\tilde{u})^2+\tilde{v}^2}{V_\infty^2}$$

$$=1-\frac{V_\infty{}^2+2V_\infty\tilde{u}+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2}{V_\infty^2}$$

$$=-2\frac{\tilde{u}}{V_\infty}-\frac{\tilde{u}^2+\tilde{v}^2}{V_\infty^2}$$

（高阶量）

$$\Rightarrow C_p=-2\frac{\tilde{u}}{V_\infty}$$

* 也可表示为：

$$r(x)=\tilde{u}_{upper}(x)-\tilde{u}_{lower}(x)$$

$$\Rightarrow \Delta C_p=C_{p_{lower}}-C_{p_{upper}}=\frac{2}{V_\infty}\left(\tilde{u}_{upper}-\tilde{u}_{lower}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta C_p(x)=2\frac{r(x)}{V_\infty}$$

对称翼型的解

对于对称翼型（即 $dz/dx=0$），涡强度为

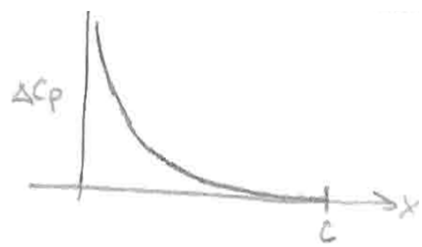
$$r(\theta)=2\alpha V_\infty\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

考虑到 $x=\frac{c}{2}(1-\cos\theta)\Rightarrow\cos\theta=1-2\frac{x}{c}$，则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(1-2\frac{x}{c}\right)^2}$，即 $\sin\theta=2\sqrt{\frac{x}{c}(1-\frac{x}{c})}$，由此

$$\Rightarrow r(x)=2\alpha V_\infty\frac{1-\frac{x}{c}}{\sqrt{\frac{x}{c}\left(1-\frac{x}{c}\right)}}$$

$$r(x)=2\alpha V_\infty\sqrt{\frac{1-x/c}{x/c}}$$

由此 $\Delta C_p=4\alpha\sqrt{\frac{1-x/c}{x/c}}$。



注：

* 对于翼型后缘有 $\Delta C_p = 0$，为满足库塔条件，则 $p_{upper} = p_{lower}$。

* 对于翼型前缘有 $\Delta C_p \to \infty$。

“吸力峰”要求流动在无限薄前缘处转向。对于真实的翼型（并非无限薄），即使 C_p 为有限值（尽管是很大的值），也会存在吸力峰。通常情况下应尽量避免吸力峰的产生，因为

（1）前缘易分离；

（2）前缘处（极）低压会沿着翼型增加至后缘处，由此导致逆压力梯度，产生分离。

弧面翼型的解

对于弧面翼型，可以采用与表征涡强度分布类似的方法——傅里叶级数来进行描述，即有

$$r(\theta) = 2V_\infty \left[A_0 \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right]$$

（平板）　　　　（弧线部分）

将上式代入弧线的流动相切条件，经过变换得

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dz}{dx} d\theta_0$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos n\theta_0 d\theta_0$$

A_n 确定后，c_l、c_{mac} 等可由下式确定，即

$$c_l = 2\pi(\alpha - \alpha_{L0})$$

$$c_{m c/4} = c_{mac} = \frac{\pi}{4}(A_2 - A_1)$$

$$\alpha_{L0} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dz}{dx}(\cos\theta_0 - 1) d\theta_0 = \alpha - A_0 - \frac{1}{2}A_1$$

注：根据薄翼理论，气动中心通常位于 1/4 弦线处，与翼型的形状和攻角无关。