第三章 组合导航最优综合与滤波方法

--KF （Kalman Filter）

--EKF（Extended KF）

提 纲

3.1 滤波的基本概念

3.2 滤波算法回顾

3.3 Kalman滤波算法

3.3 非线性滤波算法

3.1 滤波的基本概念

- 滤波与估计的关系
- 组合导航与滤波的关系
- 基本假设

3.1 滤波的基本概念

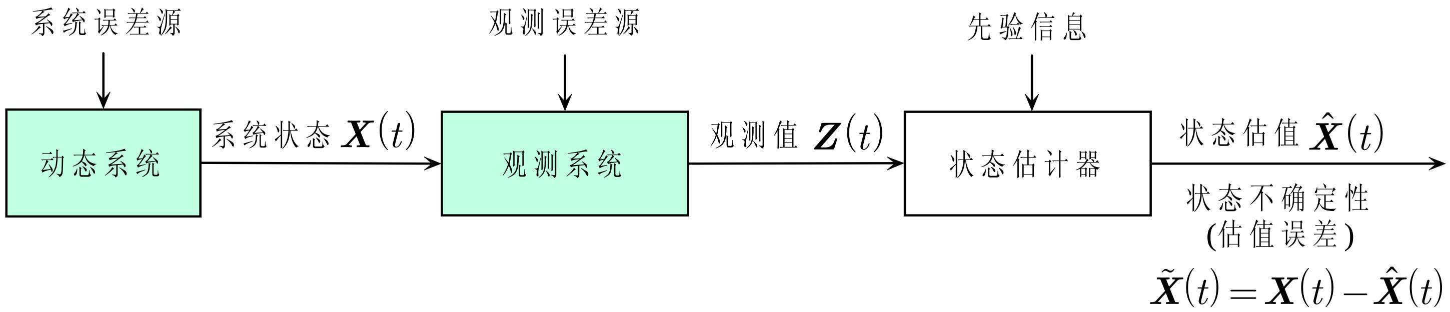
1 滤波与估计的关系

- 滤波
  - 从测量或接收到的各种带有干扰的信号中提取有用信号的方法和技术
- 估计
  - 从带有随机误差的观测数据中较精确地确定系统的某些参数或某些状态变量的真实值及其变化过程的方法和技术
- 最优估计
  - 某一确定准则条件下，得出某种统计意义上误差性能最小的估计
  - 不同估计准则和数据处理方法有不同的最优估计

3.1 滤波的基本概念

1 滤波与估计的关系

- 最优滤波器
  - 一个估计算法
  - 利用关于系统和测量动力学知识，假设系统噪声和测量误差的统计特性，以及初始条件信息，对被噪声污染的测量值进行数据处理（滤波），以实时得到关于系统状态的最小误差估计
  - 即获取对状态的无偏、误差方差最小的一致性估计



3.1 滤波的基本概念

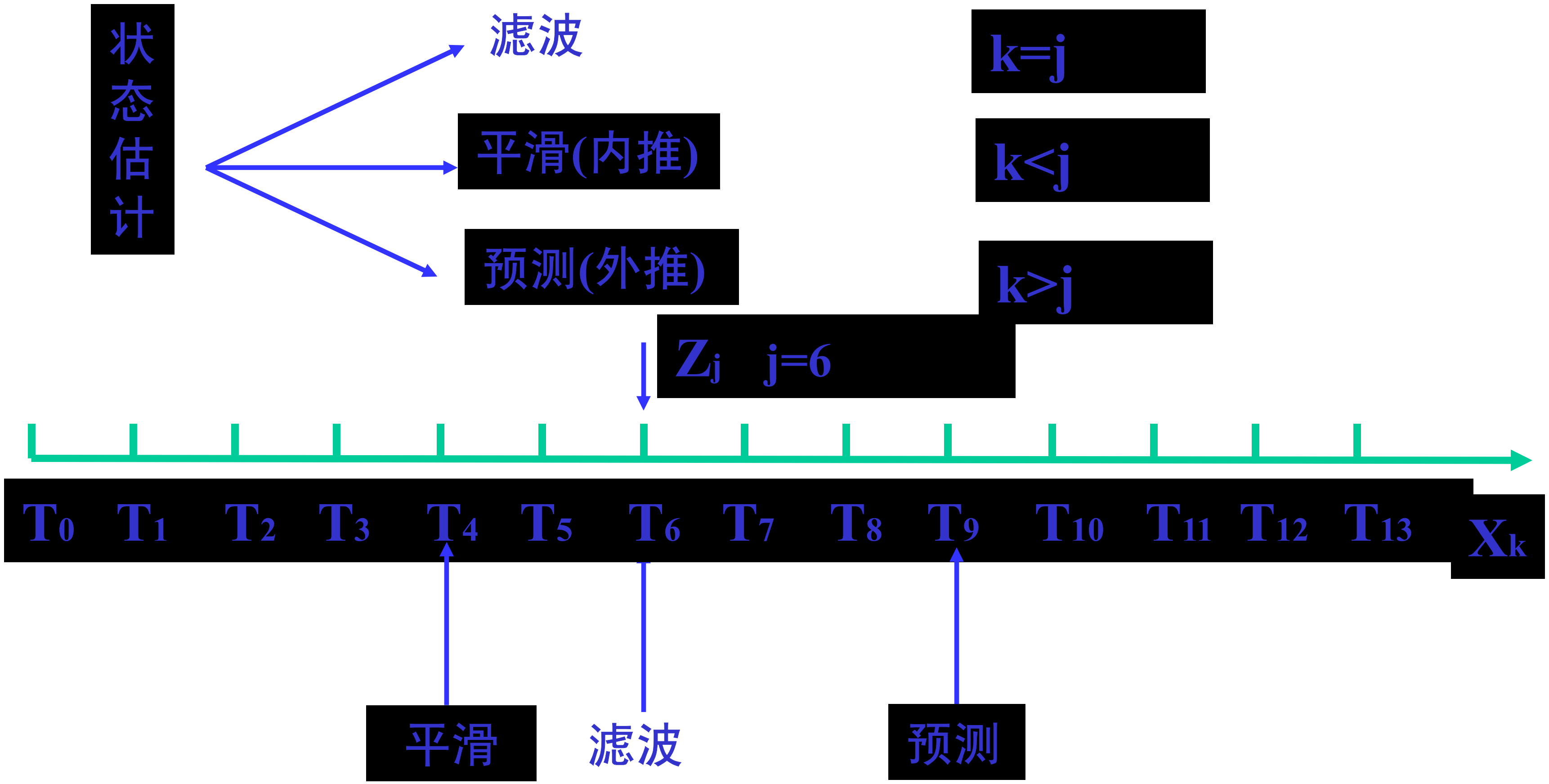
1 滤波与估计的关系

- 部分概念
  - 估计值：根据一组量测值所计算得到的所关心变量的值
  - 无偏估计：估值的期望值和被估计量的期望值相等
  - 最小方差估计：估计误差方差小于或等于其他无偏估计的方差
  - 一致性估计：随着测量数目增多，估值收敛于被估计量真值
- 应用最优估计或滤波的目的
  - 寻找无偏、最小方差、一致性估计

3.1 滤波的基本概念

1 滤波与估计的关系

- 估计的分类

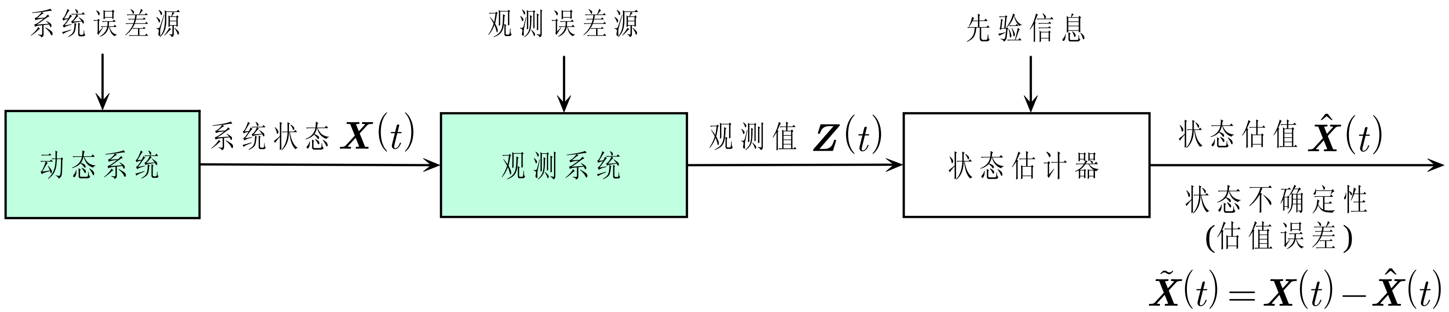


3.1 滤波的基本概念

2 组合导航与滤波的关系

- 系统描述

$$\begin{cases} x_{k+1} = f\left(x_k, u_k, w_k\right) & \text{状态方程} \\ z_{k+1} = g\left(x_{k+1}, v_{k+1}\right) & \text{观测方程} \end{cases}$$



组合导航就是一个典型的状态估计问题

3.1 滤波的基本概念

2 组合导航与滤波的关系

- 系统描述：模型
  - 微分方程模型

$$\dot{z}(t) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},t)$$

  - 传递函数模型

$$z = g(s)x$$

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{\mathbf{G\,(S)}} \longrightarrow \mathbf{z}$$

  - 状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},t) \\ z(t) = g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) \end{cases}$$

3.2 动态系统模型的建立

2 组合导航与滤波的关系

- 系统描述：模型向量

  - 动态系统模型中，最主要的向量是状态向量和量测向量
  - 状态向量是表示系统物理过程动力学状态的变量
  - 量测向量是系统物理过程中可以外部测量的变量
  - 状态向量选择原则：由设计者根据系统功能要求而确定的，但在实际处理过程中则需要满足一些要求

返回5.2目录

3.2 动态系统模型的建立

2 组合导航与滤波的关系

- 系统描述：模型向量
  - 状态向量选择原则：由设计者根据系统功能要求而确定的，但在实际处理过程中则需要满足一些要求
  - 状态向量是表示系统物理过程**动力学状态的变量**
    - 位置\速度\加速度
    - 位置\速度

返回5.2目录

3.2 动态系统模型的建立

2 组合导航与滤波的关系

- 系统描述：模型向量
  - 状态向量选择原则：由设计者根据系统功能要求而确定的，但在实际处理过程中则需要满足一些要求
  - 状态向量是表示系统物理过程**动力学状态的变量**
    - 位置\速度\姿态\加速度

返回5.2目录

3.1 滤波的基本概念

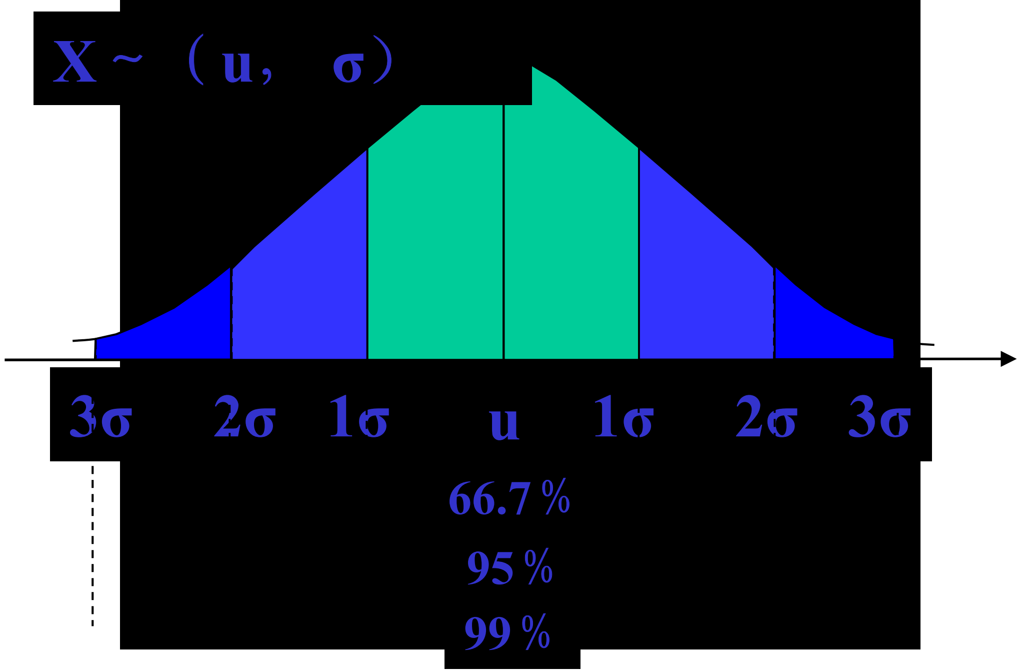
2　组合导航与滤波

- 滤波理论
  - 在系统观测量基础上，根据一定准则（比如采用某种统计最优的方法）对系统其他不能观测或不便观测的状态进行估计和预测的方法
- 组合导航
  - 核心是利用信息最优融合的动态系统状态估计理论，根据观测量估计系统的状态

组合精度
- 软　组合算法
  - 滤波算法
  - 导航算法　对于定姿算法的特性分析
- 硬　组合设备

3 基本假设

- 状态变量：高斯\非高斯
- [redacted]



线性
$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k \\ z_{k+1} = C_{k+1} x_{k+1} + D_{k+1} v_{k+1} \end{cases}$$

非线性
$$\begin{cases} x_{k+1} = f\left(x_k, u_k, w_k\right) \\ z_{k+1} = g\left(x_{k+1}, v_{k+1}\right) \end{cases}$$

3.1 滤波的基本概念

- 线性系统
  - 连续系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Hx + v \end{cases}$$

  - 离散系统 易于计算机处理

离散化处理

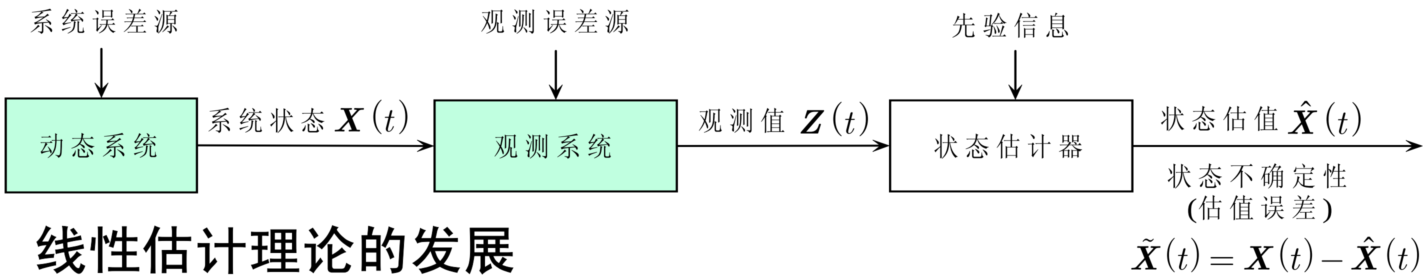
$$\begin{cases} x_{k+1} = \Phi_k x_k + \Gamma_k w_k \\ z_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1} \end{cases}$$

3.2 滤波算法回顾

1 组合滤波算法简单回顾

- 滤波算法的发展

  - 滤波和估计问题的描述



  - 线性估计理论的发展

    最小二乘估计（**1809**/高斯/天体运动）→**Wiener**滤波（**1940**/维纳/火力控制）→**Kalman**滤波（**1960**/卡尔曼/空间技术）

  - 非线性估计理论的发展

非线性模型

近似 → 次优 ↓ 数学变换

线性模型

- 线性变换
  - Taylor多项式展开 → EKF
  - 插值多项式展开 → 插值滤波(2000年)
- 非线性变换
  - U变换 → Unscented滤波(1995年)
  - 序贯Monte-Carlo(抽样)法 → 粒子滤波(1993年)

3.3 卡尔曼滤波技术

1 估计问题与卡尔曼滤波

- 卡尔曼滤波问题的描述
  - 动态模型为 $$X(k)=\Phi(k,k-1)X(k-1)+\Gamma(k,k-1)W(k-1)$$ $$Z(k)=H(k)X(k)+V(k)$$
  - 假设：
    - 系统干扰 $\{W(k);k\geq 0\}$ 和量测噪声 $\{V(k);k\geq 0\}$ 是零均值白噪声或高斯白噪声序列。彼此互不相关。
    - 系统的初始状态 $X(0)$ 是具有已知统计特性的随机向量，其均值和方差为已知。系统干扰和量测噪声均与初始状态无关

  - 由量测方程提供的量测数据 $Z(1),Z(2),\cdots,Z(k)$，则可以用卡尔曼滤波方程组，求解状态向量 X 在k时刻最佳估计 $\hat{X}(k|k)$ 。以上就是卡尔曼滤波问题的完整描述。

3.3 卡尔曼滤波技术

2 递推滤波器与离散卡尔曼滤波器

- 递推滤波器
  - 是一种不需要存贮过去的测量值就可以计算现时估计值的滤波器
  - 举例：估值是由对测量值取平均得到，即

$$\hat{x}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i \qquad \hat{x}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} z_i$$

➢ 当得到一个附加测量值时，新估计用先前的估值来表示

$$\hat{x}_{k+1} = \frac{k}{k+1}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i\right) + \frac{1}{k+1} z_{k+1} = \frac{k}{k+1}\hat{x}_k + \frac{1}{k+1} z_{k+1}$$

➢ 也可以写为另一种递推形式：

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \frac{1}{k+1}(z_{k+1} - \hat{x}_k)$$

2 递推滤波器与离散卡尔曼滤波器

- 递推滤波器
  - 计算当前估值不需要贮存过去测量值
  - 所有以前信息都包含在先前估值中
  - 新估值由前一估值加上一个适当权值的差值求得
  - 这个差值是新测量值与前一估值给出的期望测量值之差（残差）

$$\hat{x}_k(+) = K_k'\hat{x}_k(-) + K_k z_k = (K_k' + K_k)\hat{x}_k(-) + K_k[z_k - \hat{x}_k(-)]$$

先前估值　　残差

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \frac{1}{k+1}(z_{k+1} - \hat{x}_k)$$

3.3 卡尔曼滤波技术

2 递推滤波器与离散卡尔曼滤波器

- 递推滤波器
  - 推广：将标量递推估计的概念推广到向量
    - 假定一离散系统，可表示为

      $$x_k = \Phi_{k-1} x_{k-1} + \omega_{k-1} \qquad \hat{x}_k(-) = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1}(+)$$

    - 量测方程可写为

      $$z_k = H_k x_k + v_k$$

    - 则我们可以用线性、递推形式来求得估值

      $$\hat{x}_k(+) = K_k' \hat{x}_k(-) + K_k z_k$$

2 递推滤波器与离散卡尔曼滤波器

- 离散卡尔曼滤波器：最优化线性估计器
  - 误差状态估计值

$$\hat{x}_k(+) = x_k + \tilde{x}_k(+)$$
$$\hat{x}_k(-) = x_k + \tilde{x}_k(-)$$

$$\hat{x}_k(+) = K_k'\hat{x}_k(-) + K_k z_k$$
$$z_k = H_k x_k + v_k$$

$$\hat{x}_k(+) = K_k'\hat{x}_k(-) + K_k z_k$$
$$\Leftrightarrow x_k + \tilde{x}_k(+) = K_k'[x_k + \tilde{x}_k(-)] + K_k(H_k x_k + v_k)$$

$\Leftrightarrow \tilde{x}_k(+) =$ [redacted] $_k + K_k'\tilde{x}_k(-) + K_k v_k$

  - 状态估计值修正

状态估计无偏

$$K_k' = I - K_k H_k$$

$$\tilde{x}_k(+) = (I - K_k H_k)\tilde{x}_k(-) + K_k v_k$$

3.3 卡尔曼滤波技术

2 递推滤波器与离散卡尔曼滤波器

- 离散卡尔曼滤波器：最优化线性估计器
  - 误差协方差

[redacted]

$$P_k(+) = (I - K_k H_k) P_k(-) (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T$$

[redacted]

$$\tilde{x}_k(+) = \Phi_{k-1} \tilde{x}_k(-) + \omega_{k-1}$$

$$P_k(-) = \Phi_{k-1} P_{k-1}(+) \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

[redacted]

3.3 卡尔曼滤波技术

2 递推滤波器与离散卡尔曼滤波器

- 离散卡尔曼滤波器
  - 时间更新

K_k的最优选择：

判据：使误差协方差阵$P_k(+)$对角元素的加权和最小。

选择性能指标：$J_k = E[\tilde{x}_k(+)^T S\tilde{x}_k(+)]$，选$S = I$，则

$J_k = trace[P_k(+)]$，即求使J_k最小的K_k值，

方法是取J_k对K_k的偏导，并使它等于0。

又由$P_k(+) = (I - K_k H_k)P_k(-)(I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T$

可用上述方法求得卡尔曼增益阵K_k：

$$K_k = P_k(-)H_k^T[H_k P_k(-)H_k^T + R_k]^{-1}$$

3 标准离散卡尔曼滤波方程及解算

- 标准的离散卡尔曼滤波方程的两种形式
  - 标准型一
    - 滤波方程：$\hat{X}(k\mid k)=\hat{X}(k\mid k-1)+K(k)[Z(k)-H(k)\Phi(k,k-1)\hat{X}(k-1\mid k-1)]$
    - 预测方程：$\hat{X}(k\mid k-1)=\Phi(k,k-1)\hat{X}(k-1\mid k-1)]$
    - 预测误差方差阵方程：

$$P(k\mid k-1)=\Phi(k,k-1)P(k-1\mid k-1)\Phi^{T}(k,k-1)+\Gamma(k,k-1)Q(k\mid k-1)\Gamma^{T}(k,k-1)$$

    - 增益方程：$K(k)=P(k\mid k-1)H^{T}(k)[H(k)P(k\mid k-1)H^{T}(k)+R(k)]^{-1}$
    - 估计误差方差阵方程：

$$P(k\mid k)=[I-K(k)H(k)]P(k\mid k-1)[I-K(k)H(k)]^{T}+K(k)R(k)K^{-1}(k)$$

3.3 卡尔曼滤波技术

3 标准离散卡尔曼滤波方程及解算

- 标准的离散卡尔曼滤波方程的两种形式
  - 标准型二
    - 滤波方程： $\hat{X}(k|k)=\hat{X}(k|k-1)+K(k)[Z(k)-H(k)\Phi(k,k-1)\hat{X}(k-1|k-1)]$
    - 预测方程： $\hat{X}(k|k-1)=\Phi(k,k-1)\hat{X}(k-1|k-1)]$
    - 预测误差方差阵方程：

$$P(k|k-1)=\Phi(k,k-1)P(k-1|k-1)\Phi^{T}(k,k-1)+\Gamma(k,k-1)Q(k|k-1)\Gamma^{T}(k,k-1)$$

    - 增益方程： $K(k)=P(k|k-1)H^{T}(k)[H(k)P(k|k-1)H^{T}(k)+R(k)]^{-1}$
    - 估计误差方差阵方程：

$$P(k|k)=[P^{-1}(k|k-1)+H^{T}(k)R^{-1}(k)H(k)]^{-1}$$

3.3 卡尔曼滤波技术

3 标准离散卡尔曼滤波方程及解算

- 标准的离散卡尔曼滤波方程的两种形式的比较
  - 形式一适合滤波运算，但当完全不了解状态的初始统计特性时，只能认为滤波误差为无穷大
  - 形式二适合理论分析。两种形式，前三个方程相同，仅是滤波增益方程和滤波误差方差矩阵方程形式不同
  - 两种形式$K(k)$与$P(k|k)$可以互相推出，是等效的

返回5.3目录

[redacted] [redacted]

3.3 卡尔曼滤波技术

3 标准离散卡尔曼滤波方程及解算

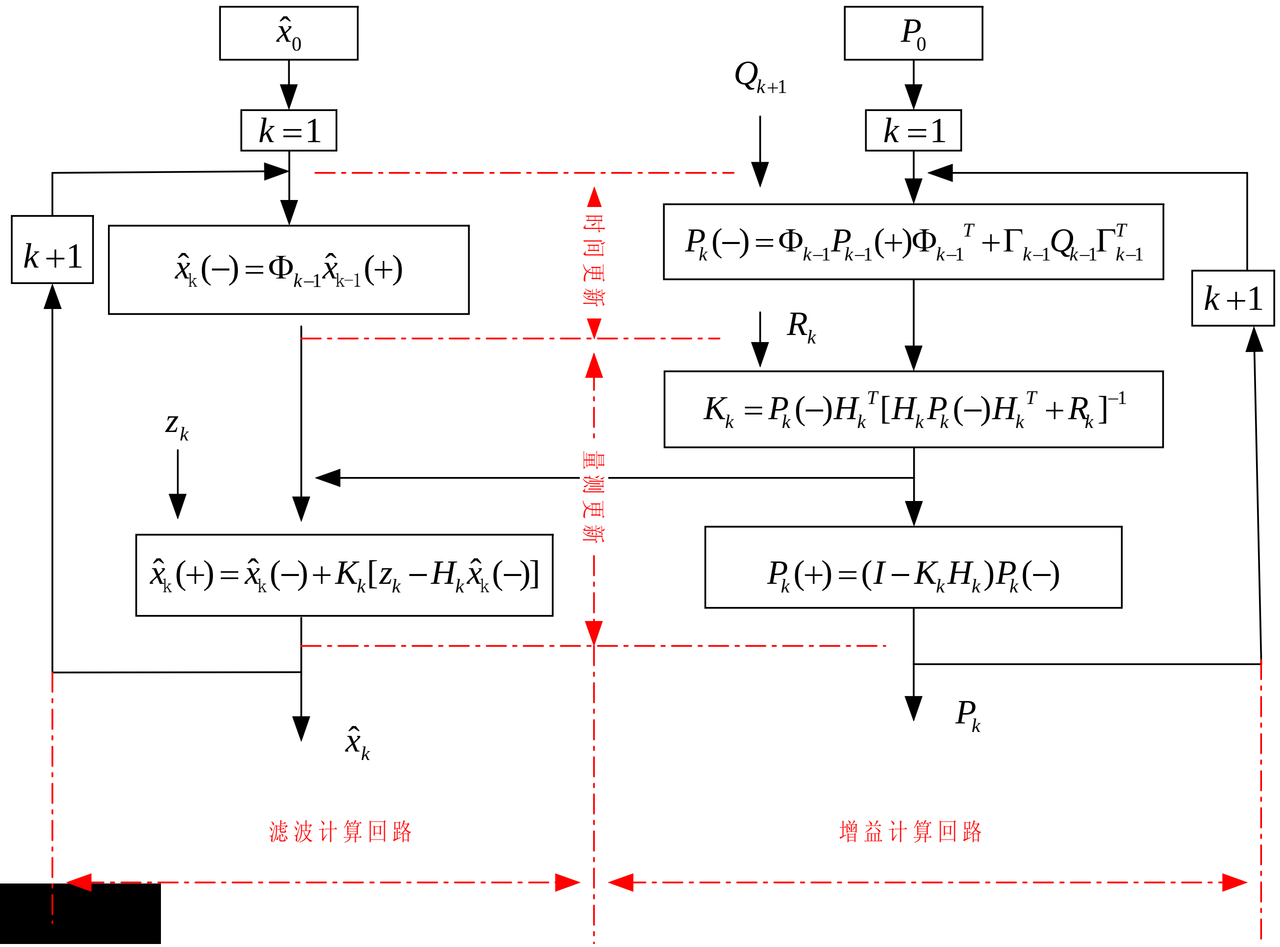
- 标准的离散卡尔曼滤波方程组的解算步骤
  - 滤波方程的解算
    - 计算当前状态预测向量 $\hat{X}(k|k-1)$
    - 求“新息” $\varepsilon(k)$
    - 求当前滤波向量 $\hat{X}(k|k)$ ，存入计算机，在得到量测向量 $z(k+1)$ 后，重复上步骤时，用 $\hat{X}(k|k)$作为状态向量初始向量
  - 增益矩阵的计算
    - 求解预测误差方差阵 $P(k|k)$
    - 求解增益矩阵 $K(k)$
    - 求解估计误差方差阵 $P(k|k-1)$
  - 在k+1时刻重复以上步骤步

[redacted] [redacted]

3.3 卡尔曼滤波技术

3 标准离散卡尔曼滤波方程及解算

- 计算流程 Q_{k+1} => Q_{k-1} 错误



[redacted] [redacted]

3.3 卡尔曼滤波技术

4 卡尔曼滤波的最优性与应用举例

- 卡尔曼滤波的思想和实质：预测+修正
  - 以k-1时刻的最优估计 $\hat{X}(k-1|k-1)$ 为准，依据系统的状态方程，预测k时刻的状态向量 $\hat{X}(k|k-1)$ ，同时又对状态进行观测，得到量测向量 $Z(k)$ ，再在预测与量测之间进行巧妙的折衷，或者说是根据量测对预测进行修正，从而得到最优状态估计 $\hat{X}(k|k)$
- 卡尔曼滤波的最优性
  - 由卡尔曼滤波算法得到的线性无偏最小方差估计值，是所有线性估计最好（方差最小）的估计值
  - 假如噪声和初始状态是高斯分布（初始状态可以是常值向量），则系统噪声也是高斯分布，而上述最优线性估计是一切线性和非线性估计中最好的