导弹运动方程组，包含20个方程，20个未知数，初始条件给定后，可求解，得到可控弹道及参数变化规律。

实际求解和计算时

方程组远远超过**20**个

不同飞行阶段受力不同，应分阶段建立

工程初步设计，考虑的情况相对简单，并不需要求解完整方程

因此，在一定的假设下，可以对方程进行简化

2.8 导弹运动方程组的简化与分解

本节要求：

理解导弹运动模型简化的意义与应用范围，掌握导弹运动模型的简化与分解方法；

了解导弹的纵向运动和侧向运动、导弹在铅垂平面内的运动、导弹在水平面内的运动模型；

理解并掌握瞬时平衡假设的内容与实质，理想弹道、理论弹道和实际弹道的概念。

导弹运动方程组简化的原则

1）保证精度和结论准确性

2）减少计算量、加快研究进度、不影响研究问题的本质

实践证明：以下简化具有一定的实用价值

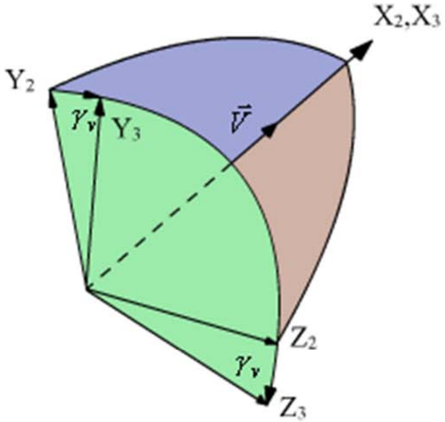
导弹运动方程组
- 纵向运动方程组
- 侧向运动方程组

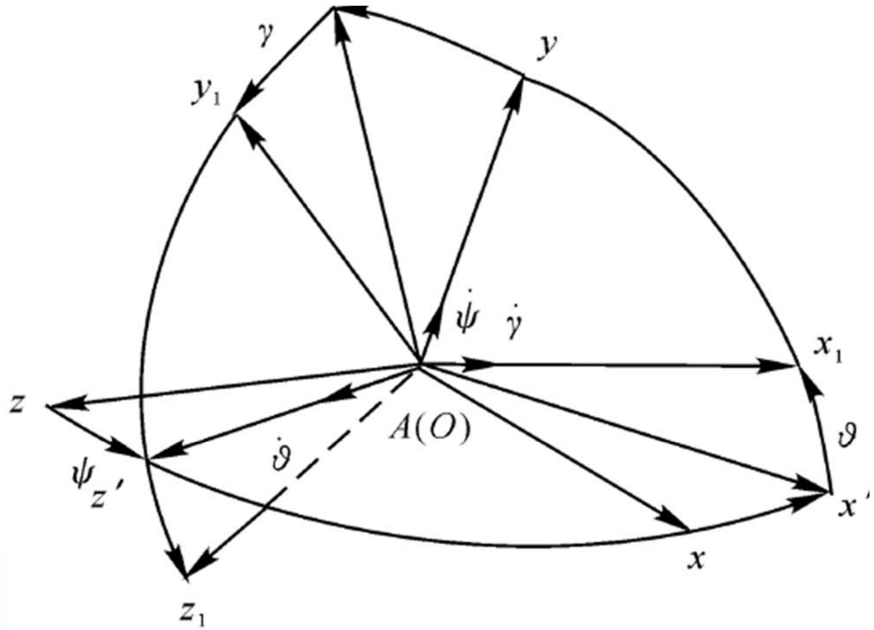
导弹运动方程组
- 铅垂平面内的运动方程组
- 水平平面内的运动方程组

2.8.

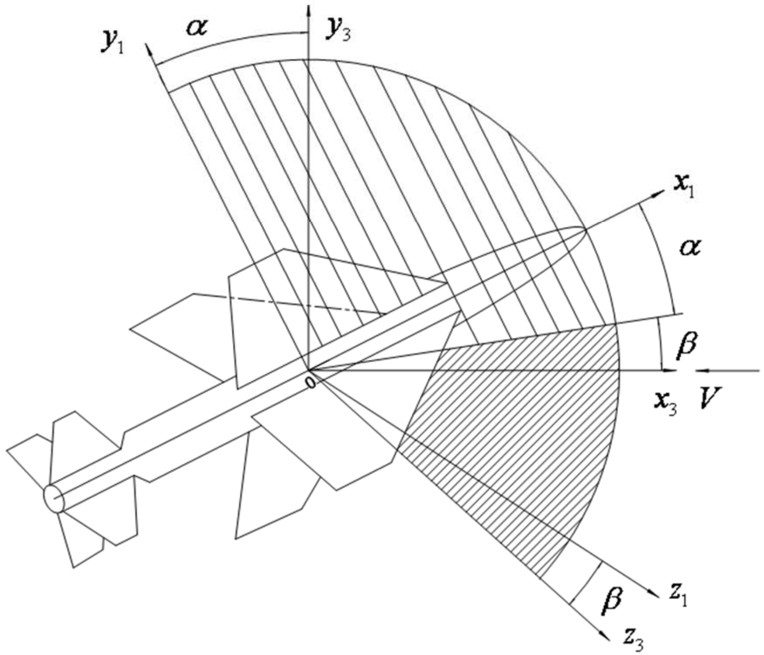
1

定



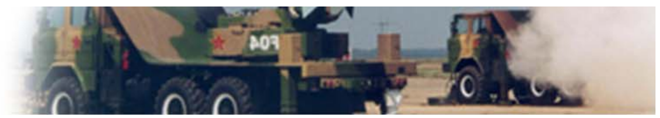


$\beta, \gamma, \gamma_V, \psi, \psi_V, \omega_x, \omega_y, z$



A 纵向运动独立存在的条件：

- 导弹在某一铅垂平面内运动
- 控制系统具有理想的倾斜稳定系统
- 不破坏运动的对称性（无偏航、滚转操纵、无干扰）
- 地面系**AX**轴选在飞行平面内



B 纵向运动的特点： 三面合一

- 铅垂平面
- 纵向对称平面
- 飞行平面

C 纵向运动的组成与分解：

质心在对称面（飞行平面）内的平移运动+绕OZ_1轴的旋转运动

D 纵向运动方程

去掉描述侧向参数的运动方程，且令侧向运动参数恒等于零。

$$m\frac{dV}{dt} = P\cos\alpha\cos\beta - Q - mg\sin\theta$$

$$mV\frac{d\theta}{dt} = P\sin\alpha + Y - mg\cos\theta$$

$$\frac{dm}{dt} = -m_s$$

$$\varepsilon_1 = 0$$

$$J_z\frac{d\omega_z}{dt} = \sum M_z$$

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dt} = V\sin\theta$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_z$$

$$\varepsilon_4 = 0$$

$$\theta = \vartheta - \alpha$$

十个方程

十个未知数：$V,\theta,\alpha,\vartheta,\omega_z,x,y,m,\delta_z,\delta_p$

方程组封闭，可独立求解

E 纵向运动参数：$V,\theta,\alpha,\vartheta,\omega_z,x,y$

2 侧向运动

A 定义：侧向运动参数随时间变化的运动。

B 侧向运动=质心沿OZ_1轴的平移运动+绕OX_1、OY_1轴的旋转运动

C 侧向运动参数：在纵向运动中等于零的参数。

$$\beta,\gamma,\gamma_V,\psi,\psi_V,\omega_x,\omega_y,z$$

D 侧向运动方程

$$-mV\cos\theta\frac{d\psi_V}{dt}=(P\sin\alpha+Y)\sin\gamma_V-(P\cos\alpha\sin\beta-Z)\cos\gamma_V$$

$$J_x\frac{d\omega_x}{dt}=\sum M_x-(J_z-J_y)\omega_y\omega_z$$

$$J_y\frac{d\omega_y}{dt}=\sum M_y-(J_x-J_z)\omega_x\omega_z$$

$$\frac{dz}{dt}=-V\cos\theta\sin\psi_V$$

$$\dot{\psi}=\frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y\cos\gamma-\omega_z\sin\gamma)$$

$$\dot{\gamma}=\omega_x-tg\vartheta(\omega_y\cos\gamma-\omega_z\sin\gamma$$

$$\sin\beta=\cos\theta[\cos\gamma\sin(\psi-\psi_V)+\sin\vartheta\sin\gamma\cos(\psi-\psi_V)]-\sin\theta\cos\vartheta\sin\gamma$$

$$\cos\gamma_V=[\cos\gamma\cos(\psi-\psi_V)-\sin\vartheta\sin\gamma\sin(\psi-\psi_V)]/\cos\beta$$

$$\varepsilon_2=0$$

$$\varepsilon_3=0$$

注意：侧向运动不能独立求解。

它包含了一些纵向运动参数，因此，求解时，必须先解纵向运动方程，得到纵向运动参数，然后代入侧向运动方程进行求解

3 将导弹的一般运动分解为纵向运动和侧向运动

分解条件

1） 侧向运动参数 $\beta,\gamma,\gamma_V,\psi,\psi_V,\omega_x,\omega_y,z$ 及舵偏角 δ_x,δ_y 都比较小，

可以令 $\cos\beta\approx\cos\gamma\approx\cos\gamma_V\approx 1$ 且略去小量的乘积

$\sin\beta\sin\gamma_V,\quad \omega_y\sin\gamma_V,\quad z\sin\gamma_V,\quad \omega_x\omega_y,\quad \cdots$ 以及参数 $\beta,\quad \delta_x,\quad \delta_y$

对阻力的影响。

2） 导弹基本上在某个铅垂平面内飞行（飞行弹道与铅垂平面内弹道差别不大。

3）俯仰操纵机构的偏转仅取决于纵向运动参数，偏航、滚转操纵机构的偏转仅取决于侧向运动参数。

2.8.2 导弹的平面运动

（一 ）为什么要研究平面运动

1 平面运动作为一段弹道是经常出现的

2 有些导弹在运动过程中，几乎都可以近似地认为在同一个平面内运动

导弹平面运动
- 垂直平面运动
- 水平平面运动
- 倾斜平面运动

（二） 垂直平面运动

1 定义：

导弹的运动轨迹保持在某一个铅垂平面内。

2 特点：

速度方向始终处于铅垂平面内，此时弹道偏角为常量。 等于0？？

3 运动参数：

$\gamma, \gamma_V, \omega_x, \omega_y$都为零

若AX选在运动平面内，则z＝0， $\psi_V = 0$

$\beta = 0$ 纵向运动与铅垂平面运动等同。

4 运动方程组

同纵向运动方程组

思考：对于我们所研究的导弹，垂直平面运动，侧滑角是否一定为零？

（三）水平平面运动

1 运动分析

A 速度向量始终处于水平面内，只在水平面内运动。$\theta = 0$

B 导弹纵轴不在水平面内。$\alpha \neq 0$ 产生法向力与重力平衡。为什么？

$$mV\frac{d\theta}{dt} = P(\sin\alpha\cos\gamma_V + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_V) + Y\cos\gamma_V - Z\sin\gamma_V - G\cos\theta$$

C 水平面内转弯 ⇨ 弹道偏角 ψ_V 变化 ⇨ 侧向力

有以下几种产生侧向力的方法：

轴对称导弹，无倾斜的侧滑产生

面对称导弹，无侧滑的倾斜产生

再加上发动机推力产生一定的分量

2 运动参数及运动方程组

利用侧滑产生侧向力时（轴对称导弹）

$\gamma=\gamma_V=0,\theta=\dot{\theta}=0,\quad \omega_x=0,\quad \omega_{z1}$很小,

只有绕OY_1轴的旋转和沿AX、AZ的移动

无倾斜，只有方向舵的操纵

参数: $V,m,\psi,\psi_V,\alpha,\vartheta,\beta,\omega_y,\omega_z,\ x,z,\delta_z,\ \delta_y,\delta_p$

方程

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{dV}{dt}&=P\cos\alpha\cos\beta-X\\
mg&=P\sin\alpha+Y\\
-mV\frac{d\psi_V}{dt}&=-P\cos\alpha\sin\beta+Z
\end{aligned}\right\}$$

$$J_y \frac{d\omega_y}{dt} = \sum M_y$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = \sum M_z$$

$$\frac{dm}{dt} = -m_s$$

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\psi_V$$
$$\frac{dz}{dt} = -V\sin\psi_V$$

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_y}{\cos\vartheta}$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_z$$

$$\vartheta = \alpha$$
$$\psi = \psi_V + \beta$$
$$\varepsilon_2 = 0$$
$$\varepsilon_4 = 0$$

思考与练习：

试列写面对称导弹水平面内有倾斜无侧滑飞行的运动方程组。

2.9 导弹的质心运动

1 瞬时平衡假设

内容：

A 导弹绕弹体轴的转动无惯性。 $J_x = J_y = J_z = 0$

B 导弹控制系统理想工作，无误差无时间延迟。

C 不考虑各种干扰因素对导弹的影响。

A B假设的实质：就是认为在整个飞行期间，导弹在任何瞬时都处于平衡状态，即导弹操纵机构偏转时，作用在导弹上的力矩在每一瞬时都处平衡状态。这就是所谓“瞬时平衡”假设 。

$$\left.\begin{aligned}J_{x1}\frac{d\omega_{x1}}{dt}+(J_{z1}-J_{y1})\omega_{y1}\omega_{z1}=\sum M_{x1}\\J_{y1}\frac{d\omega_{y1}}{dt}+(J_{x1}-J_{z1})\omega_{x1}\omega_{z1}=\sum M_{y1}\\J_{z1}\frac{d\omega_{z1}}{dt}+(J_{y1}-J_{x1})\omega_{x1}\omega_{y1}=\sum M_{z1}\end{aligned}\right\}$$

A 导弹绕弹体轴的转动无惯性。

$$J_x=J_y=J_z=0\Rightarrow\sum M=0$$

俯仰方向： $M_z=M_z(V,H,\alpha,\delta_z)=0$

偏航方向： $M_y=M_y(V,H,\beta,\delta_y)=0$

轴对称导弹力矩平衡关系式：

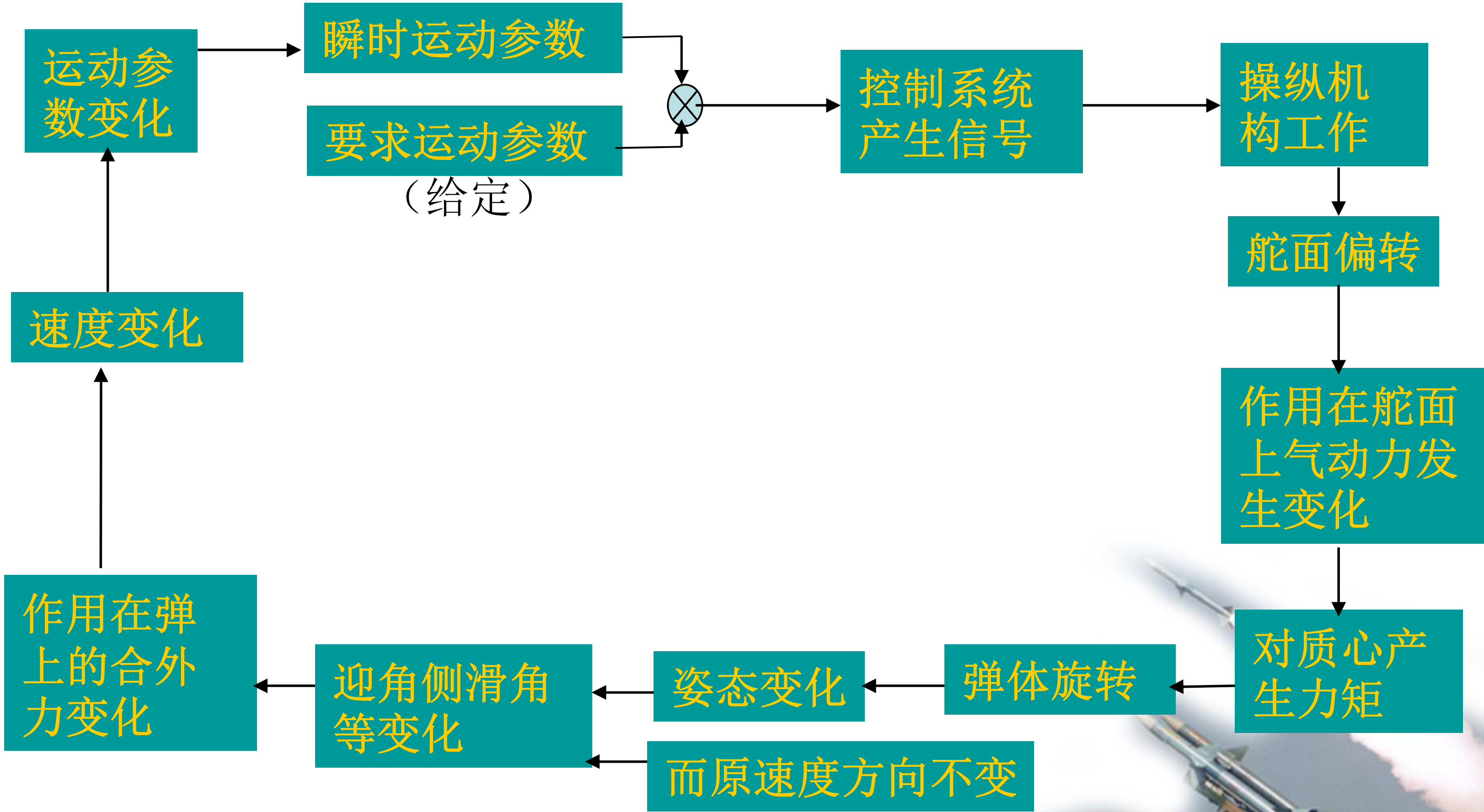
$$m_z=m_z^{\alpha}\alpha_b+m_z^{\delta_z}\delta_{zb}=0\quad\Rightarrow\quad\delta_{zb}=-\frac{m_z^{\alpha}}{m_z^{\delta_z}}\alpha_b\Rightarrow\quad\alpha_b=-\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^{\alpha}}\delta_{zb}$$

$$m_y=m_y^{\beta}\beta_b+m_y^{\delta_y}\delta_{yb}=0\quad\Rightarrow\quad\delta_{yb}=-\frac{m_y^{\beta}}{m_y^{\delta_y}}\beta_b\Rightarrow\quad\beta_b=-\frac{m_y^{\delta_y}}{m_y^{\beta}}\delta_{yb}$$

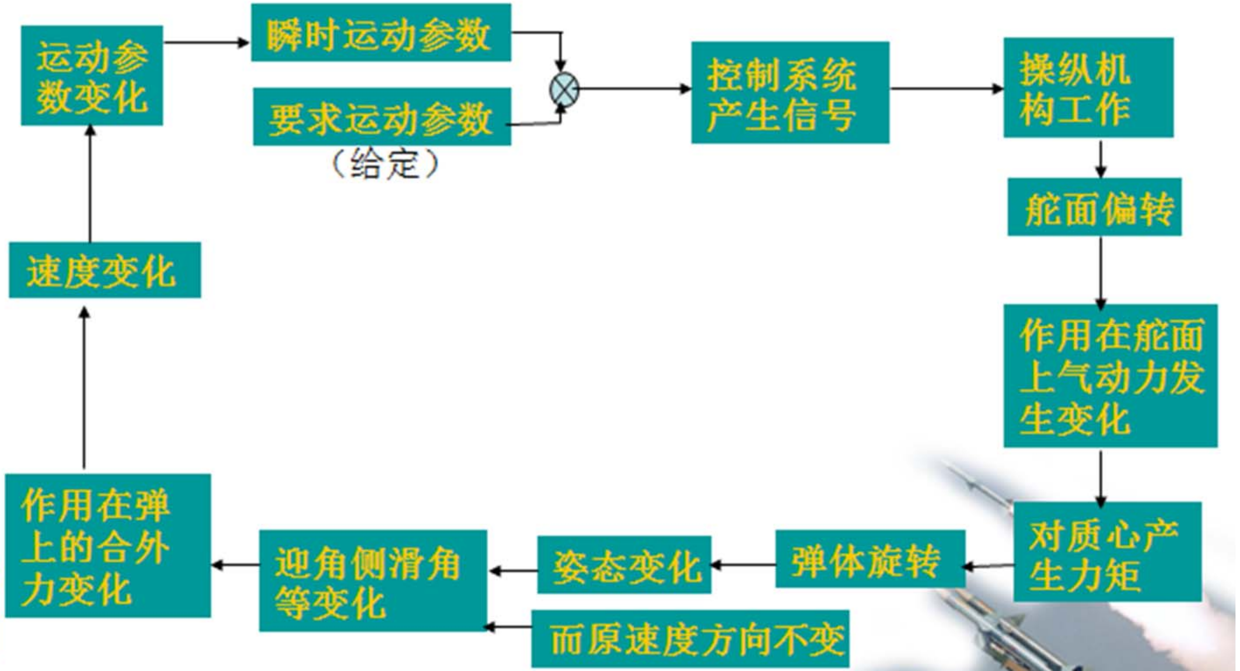
假设的实质： 操纵机构偏转时，参数 α,β 瞬时达到平衡值。

2.7.5 操纵关系方程

1、操纵飞行的过程



B 导弹控制系统理想



操纵关系方程：

$\varepsilon_1 = 0 \qquad \varepsilon_2 = 0$

假设的实质：

忽略了运动参数改变的过渡过程和稳态误差；

忽略了控制系统工作的过渡过程和稳态误差；

忽略了操纵机构偏转的过渡过程和稳态误差；

操纵机构运行时（控制系统）过渡过程时间为零且无稳态误差。

2 导弹质心运动方程组

基于上述假设，便可以将导弹的质心运动和绕质心的转动分开来研究，于是可以得到将导弹作为**可控质点**的运动方程组。

$$
\left.\begin{aligned}
&m\frac{dV}{dt}=P\cos\alpha\cos\beta-X-G\sin\theta\\
&mV\frac{d\theta}{dt}=P(\sin\alpha\cos\gamma_V+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_V)+Y\cos\gamma_V-Z\sin\gamma_V-G\cos\theta\\
&-mV\cos\theta\frac{d\psi_V}{dt}=P(\sin\alpha\sin\gamma_V-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_V)+Y\sin\gamma_V+Z\cos\gamma_V
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}=V\cos\theta\cos\psi_V\\
&\frac{dy}{dt}=V\sin\theta\\
&\frac{dz}{dt}=-V\cos\theta\sin\psi_V
\end{aligned}\right\}
$$

$$\frac{dm}{dt} = -m_c$$

$$\alpha_b = -\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^{\alpha}}\delta_{zb}$$

$$\beta_b = -\frac{m_y^{\delta_y}}{m_y^{\beta}}\delta_{yb}$$

$\varepsilon_1 = 0 \longrightarrow$ 升降舵 $\rbrace$ 速度方向

$\varepsilon_2 = 0 \longrightarrow$ 方向舵

$\varepsilon_3 = 0 \longrightarrow$ 副翼 $\longrightarrow$ 倾斜稳定

$\varepsilon_4 = 0 \longrightarrow$ 发动机节气阀偏角 $\longrightarrow$ 速度大小

13个未知数，13个方程，方程组封闭，可解。

几种弹道的定义

理想弹道：将导弹视为一个可操纵质点，认为控制系统理想工作，且不考虑弹体绕质心的转动以及外界的各种干扰，求解质心运动方程组得到的飞行弹道。

求解时：

- 视导弹为可操纵质点
- 控制系统理想工作
- 不考虑弹体绕质心的转动及外界干扰
- 由质心运动方程得到

理论弹道：将导弹视为某一力学模型（可操纵质点、可控刚体、弹性体），作为控制系统的的一个环节（控制对象），将动力学方程、运动学方程、控制系统方程以及其它方程综合在一起，通过数值积分求得的弹道。

求解方程组时：

- 弹体结构参数、外形几何参数、发动机特性参数均为理论设计值
- 大气参数为标准大气值
- 飞行控制系统参数额定
- 初始条件完全符合给定的理论条件

理想弹道是理论弹道的一种简化情况。

实际弹道：又称“真实弹道”。导弹在真实情况下的飞行弹道。

实际飞行过程中受到各种随机干扰和误差的影响。