导弹运动方程组 ⟺ 能够表征导弹运动特性的数学模型

求解

研究导弹运动规律

可控质点/刚体

建模基础

动力学的经典理论

牛顿第二定律 ⟺ 力与移动

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=m\vec{a}=\vec{F}$$

三大力：
- 空气动力
- 推力
- 重力

动量矩定理 ⟺ 力矩与转动

$$\frac{d\vec{H}}{dt}=\vec{M}$$

三大力矩（空气动力矩）：
- 俯仰力矩
- 偏航力矩
- 滚转力矩

假设推力过质心

导弹运动的建模基础

坐标变换（表明坐标系之间的关系）

本节要求：

了解导弹运动建模的基本定理和简化处理方法，掌握固化原理的内容和实质；

明确**8**个角度（弹道倾角、弹道偏角、速度滚转角、攻角、侧滑角、俯仰角、偏航角、滚转角）的定义；

掌握坐标系之间的变换方法、初等变换矩阵、**6**种坐标变换关系。

2.5 导弹运动的建模基础

导弹运动

建模基础

动力学的经典理论

牛顿第二定律 ⟺ 力与移动

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=m\vec{a}=\vec{F}$$

动量矩定理 ⟺ 力矩与转动

$$\frac{d\vec{H}}{dt}=\vec{M}$$

应用的条件：
1）刚体
2）在惯性系中描述运动

我们的研究对象： 导弹 ⟶ 非刚体

质量变化、流体运动
可控可操纵(结构形状变化）
存在弹性变形、气动弹性现象

} 在空间的运动非常复杂

研究方法：
- 引入“固化原理”
- 视为六自由度刚体在空间的运动

固化原理：在任意研究瞬时，将变质量的导弹视为虚拟刚体，把该瞬时导弹所包含的所有物质固化在虚拟的刚体上。同时，忽略一些影响导弹的次要因素，如：弹体结构的弹性变形、哥氏惯性力、变分力等。

“固化原理”的实质：每一瞬时，把导弹当作一个质量不变的，在气动力、推力、重力、操纵力作用下的运动刚体来处理。

建立运动方程时的假设：

1 与地球固连的坐标系为惯性坐标系，将大地当做静止的平面，不考虑地球曲率，忽略自转与公转；

2 大气相对于地球静止（不考虑风的干扰）；

3 导弹纵向平面为其对称平面；

4 导弹质量及其分布不变（每一瞬时）。

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \qquad \frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M}$$

运动方程建立时，需要选定相应的坐标系。

坐标系的选取原则：

1 正确地描述导弹的运动；

2 运动方程形式简单、清晰易懂。

四大坐标系：

- 地面坐标系 ⟶ 惯性坐标系
- 弹道坐标系
- 速度坐标系
- 弹体坐标系

2.6 常用坐标系及其变换

2.6.2 坐标变换

目的：确定一组直角坐标系相对于另一组直角坐标系的关系（通过坐标变换矩阵来描述）。

飞行力学中常用的方法：旋转转换法/矩阵法。

已知：两坐标系各对应轴的相互方位（可以通过特定的角度来描述）。

坐标系间相对方位的描述

八个角度

速度坐标系和弹体坐标系之间的角度关系

迎角 α ：速度向量在导弹纵向对称平面上的投影与导弹纵轴之间的夹角。纵轴在速度投影的上方时为正，反之为负。

侧滑角 β ：速度向量与导弹纵向对称平面之间的夹角。右侧滑为正。

弹道坐标系和速度坐标系之间的角度关系

速度滚转角 γ_V ： OY_2 与 OY_3 轴之间的夹角，从弹的尾部看，OY_3 在 OY_2 轴的右侧为正，即右倾斜为正。

弹道坐标系和地面坐标系之间的角度关系

弹道倾角 θ ：速度向量与水平面的夹角。速度向量在水平面之上时为正，反之为负。

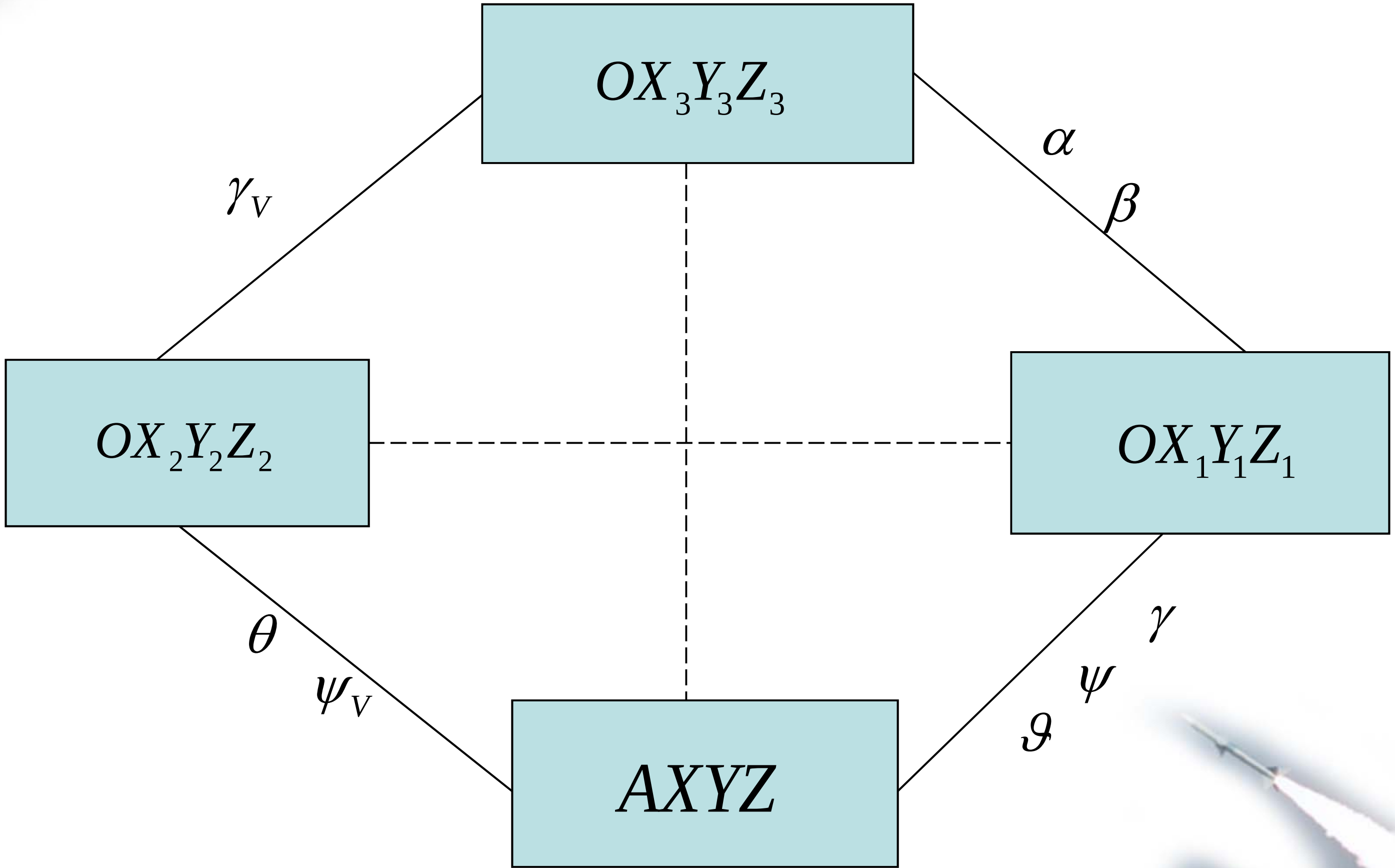
弹道偏角 ψ_V ：速度向量在水平面内的投影与地面坐标系 AX 轴间的夹角。以 AX 轴逆时针转向 OX' 时为正，反之为负。

弹体坐标系和地面坐标系之间的角度关系

俯仰角ϑ：OX_1轴与地面坐标系AXY平面之间的夹角，OX_1轴指向上方时为正。

偏航角ψ：弹体坐标系OX_1轴在地面坐标系AXY平面上的投影OX_1'与AX轴之间的夹角，以AX量起，逆时针转至OX_1'时为正，反之为负。

滚转角γ：弹体坐标系OY_1轴与包含OX_1轴的铅垂平面之间的夹角。从尾部向前看，向右转为正。


$OX_3Y_3Z_3$
$OX_2Y_2Z_2$
$OX_1Y_1Z_1$
$AXYZ$
γ_V
α
β
θ
ψ_V
γ
ψ
ϑ

速度坐标系和地面坐标系之间的角度关系

$$\left.\begin{aligned}&\text{速度系——弹道系：}\gamma_V\\&\text{弹道系——地面系：}\theta,\ \psi_V\end{aligned}\right\}\Rightarrow\text{速度系——地面系：}\theta,\ \psi_V,\ \gamma_V$$

弹体坐标系和弹道坐标系之间的角度关系

弹体坐标系和速度坐标系　α　β

速度坐标系和弹道固连系　γ_V

弹体坐标系和弹道坐标系　α　β　γ_V

坐标变换方法

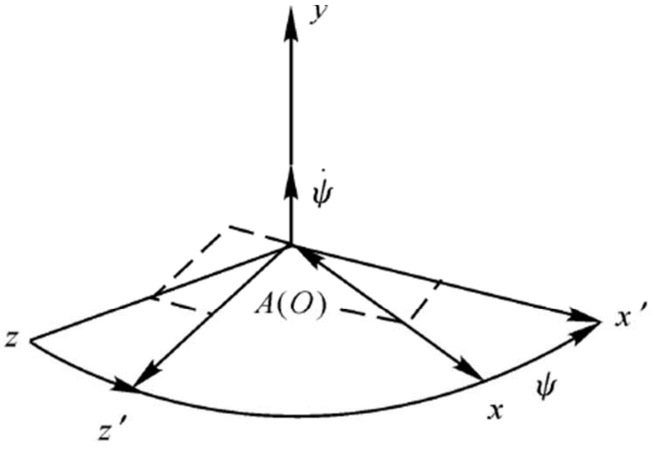
研究表明：

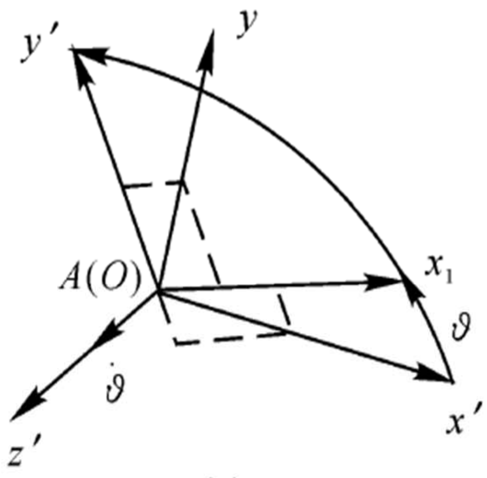
我们总可以通过绕空间不同轴的一系列旋转，将一个坐标系转到另一个坐标系。

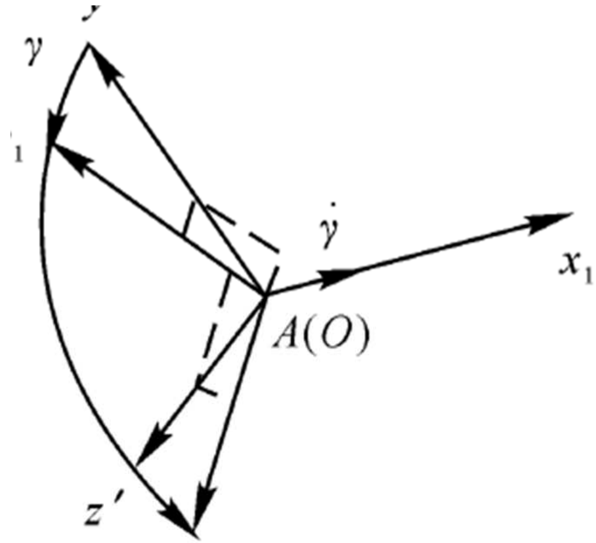
旋转次数：　等于两系间的角度个数

对于对应轴既不重合也不在同平面（或同一性质的平面）内的两个坐标系，至少需要三次旋转，才能重合。

下面以地面坐标系和弹体坐标系之间的变换为例进行介绍。





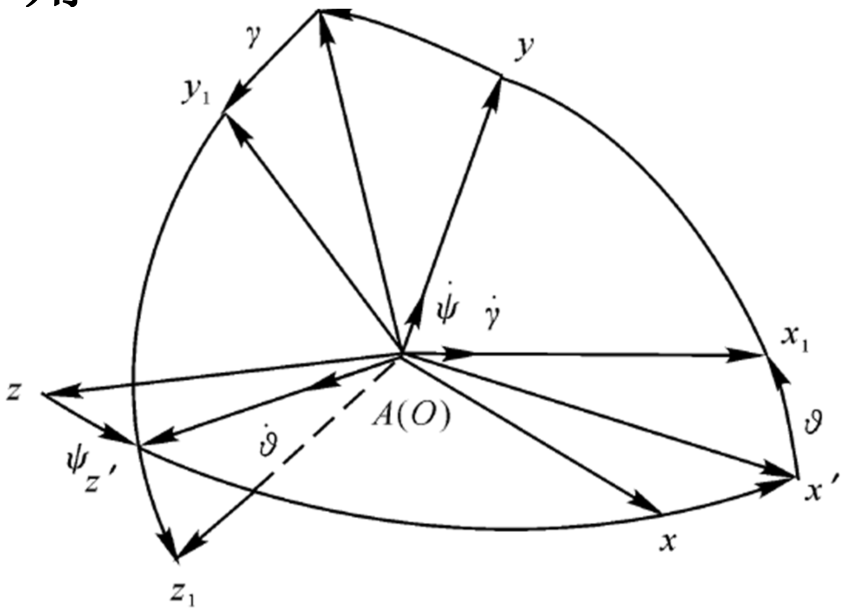


(d)

第一次旋转：绕**AY**轴，转过 ψ 角

第二次旋转：绕过渡系的**AZ'**轴，转过 ϑ 角

第三次旋转：绕**AX**$_1$ 轴，转过**γ**角

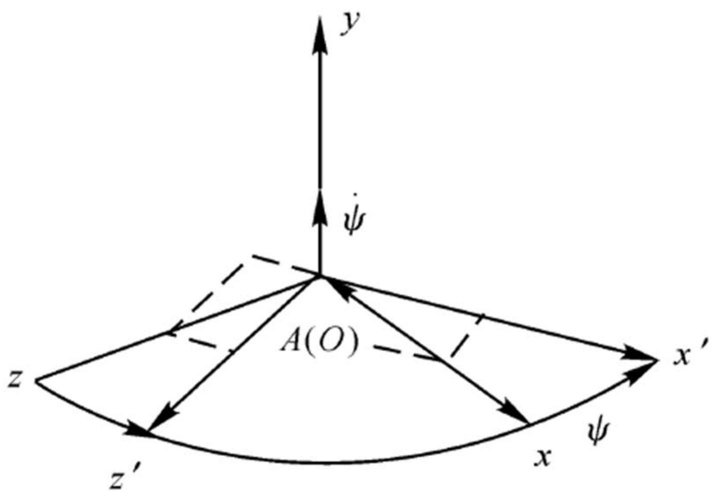


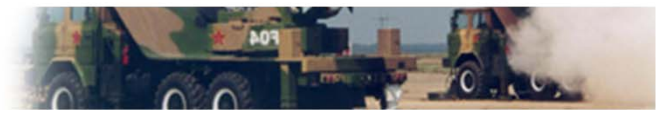
第一次旋转：绕**AY**轴

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = L_y(\psi) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

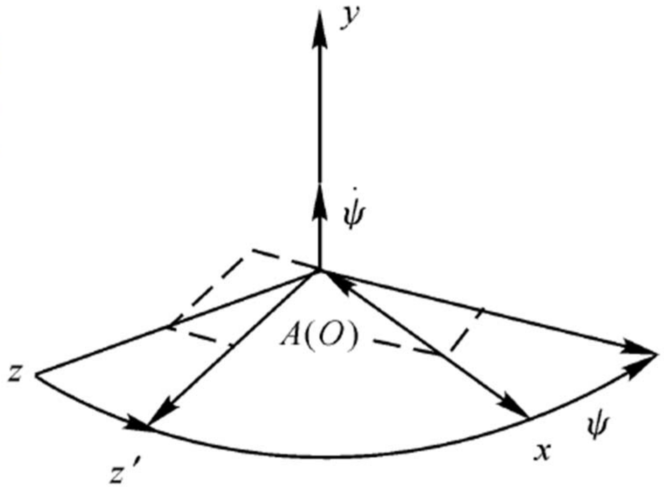
基元变换矩阵

$$L_y(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}$$



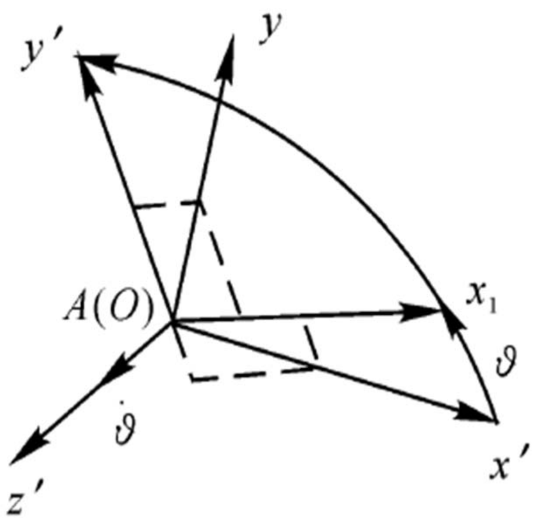


第二次旋转：绕过渡系的AZ'轴

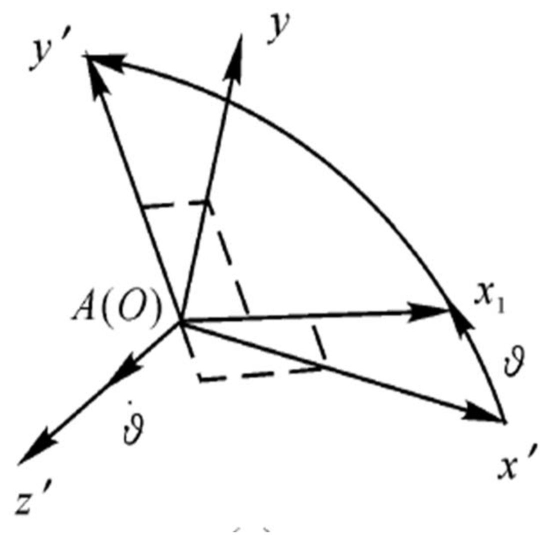


$$
\begin{bmatrix} X_1 \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y \\ Z' \end{bmatrix} = L_z(\vartheta) \begin{bmatrix} X' \\ Y \\ Z' \end{bmatrix}
$$

$$
L_z(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

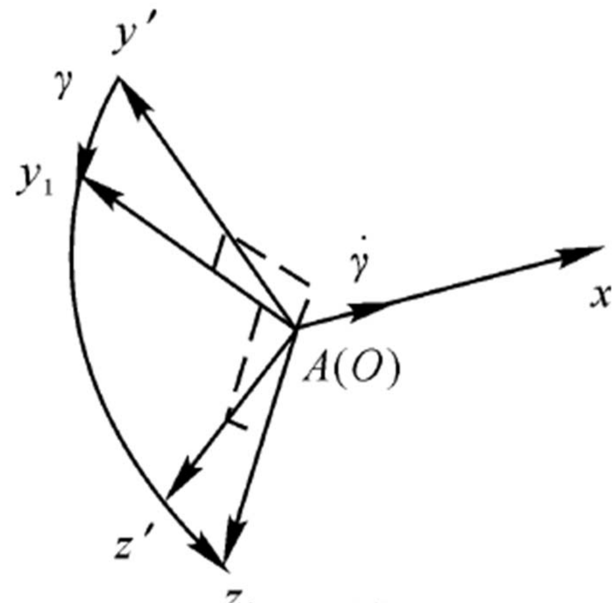


第三次旋转：绕AX₁ 轴



$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = L_x(\gamma) \begin{bmatrix} X_1 \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

$$L_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$



(d)

第一次旋转：绕**AY**轴，转过 ψ 角

第二次旋转：绕过渡系的**AZ'**轴，转过 ϑ 角

第三次旋转：绕**AX₁** 轴，转过**γ**角

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = L_x(\gamma)L_z(\vartheta)L_y(\psi)\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = L_x(\psi,\vartheta,\gamma)\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}(\psi,\vartheta,\gamma) = \begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\psi & \sin\vartheta & -\cos\vartheta\sin\psi \\ -\sin\vartheta\cos\psi\cos\gamma + \sin\psi\sin\gamma & \cos\vartheta\cos\gamma & \sin\vartheta\sin\psi\cos\gamma + \cos\psi\sin\gamma \\ \sin\vartheta\cos\psi\sin\gamma + \sin\psi\cos\gamma & -\cos\vartheta\sin\gamma & -\sin\vartheta\sin\psi\sin\gamma + \cos\psi\cos\gamma \end{vmatrix} \quad (2-30)$$

以上我们讲了旋转转换法，在进行转换时，应该注意以下问题：

1 上述的旋转矩阵全部都是正交矩阵，即满足：

$$A^{-1} = A^T$$

若$X = AY$

则$Y = A^{-1}X = A^T X$

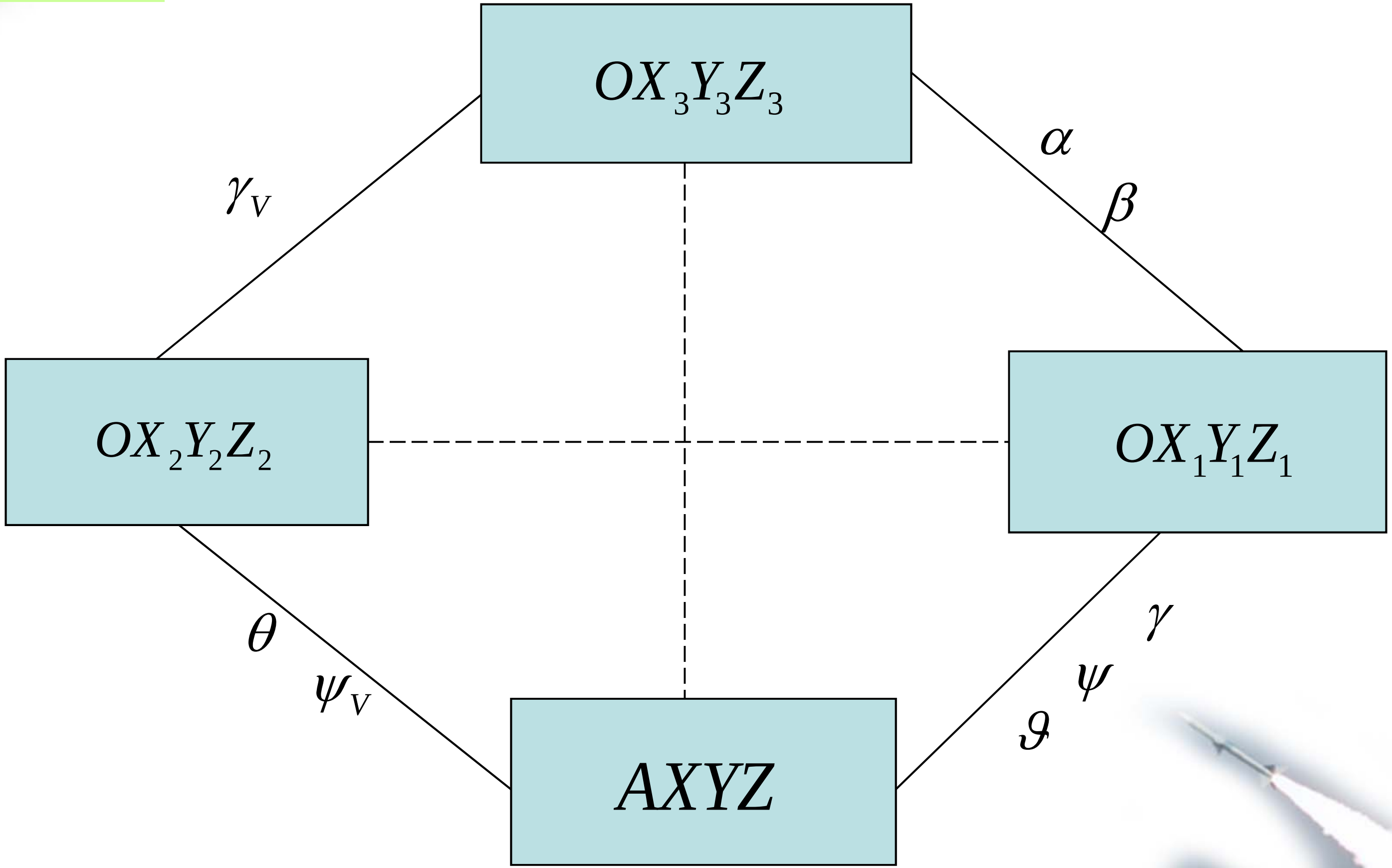
这个式子同样适用于上述坐标变换。

2 旋转的顺序和基元矩阵相乘的顺序相反。

3 转过的角度必须和定义的角度一致。

4 旋转顺序并不唯一。一般较常用**231**（即**YZX**轴）旋转顺序。

总结



练习：详细推导六个坐标变换矩阵