航天器控制原理

第十讲 航天器的姿态运动学

主讲：刘莹莹

西北工业大学 精确制导与控制研究所

第十讲 航天器的姿态运动学

1、坐标系

2、姿态描述方法

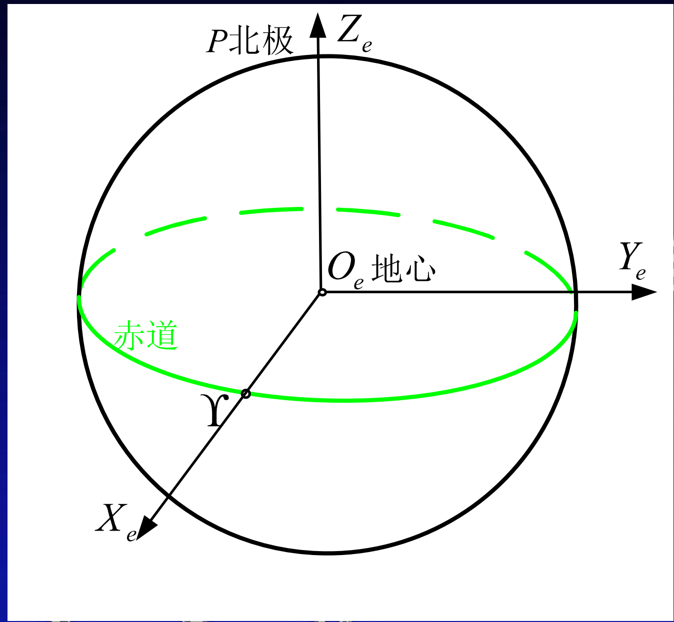
3、姿态运动学方程

1、坐标系

(1) 惯性坐标系

地心赤道坐标系

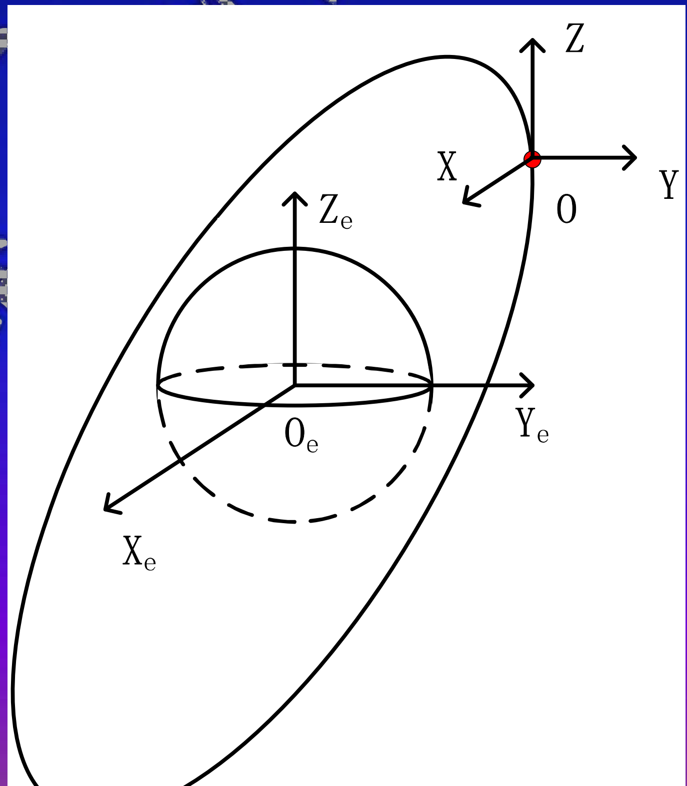
$O_eX_eY_eZ_e$



(2) 质心平动坐标系

$OXYZ$

原点位于航天器质心，三轴分别与某一惯性坐标系的坐标轴保持平行。



(3)质心轨道坐标系 $Ox_0y_0z_0$

原点位于航天器质心；

轴指向地心；

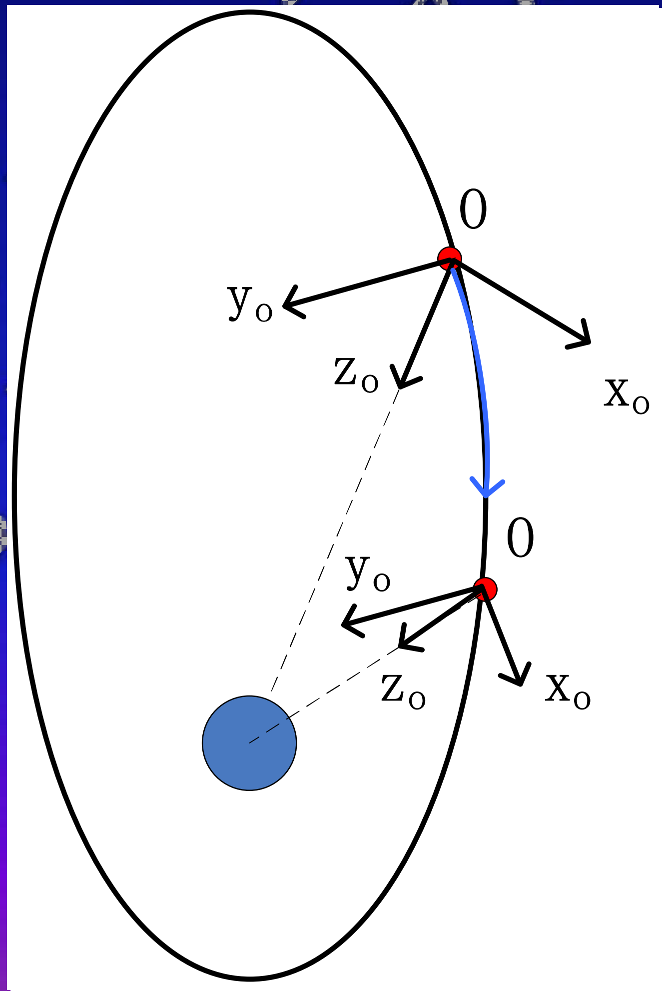
Oz_0 轴在轨道平面内

与Ox_0垂直，指向前进方向；Oz_0

轴垂直于轨道平面

面Oy_0

非惯性坐标系。



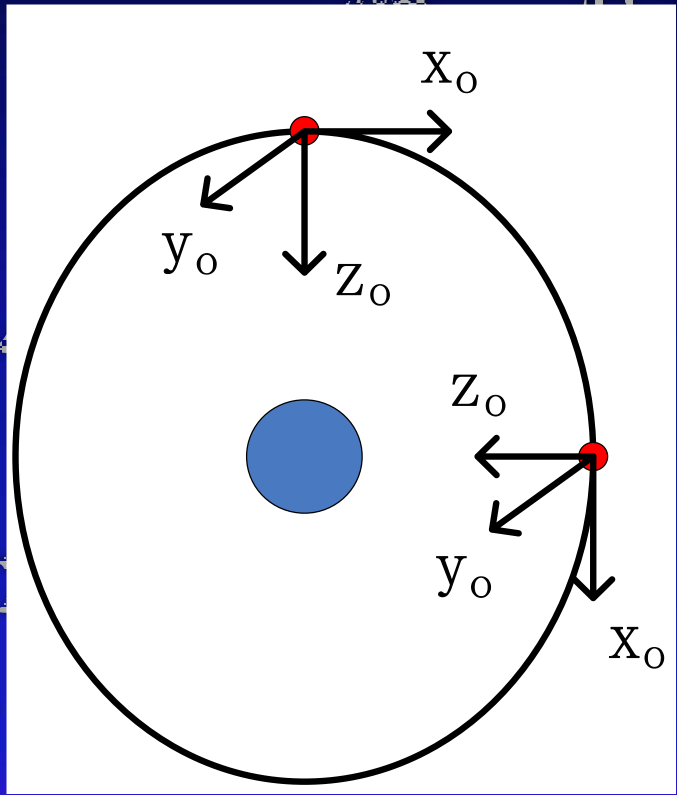
圆轨道情况

Ox_0与速度方向一致。

坐标系转动角速度：

$$\vec{\omega}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_o \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

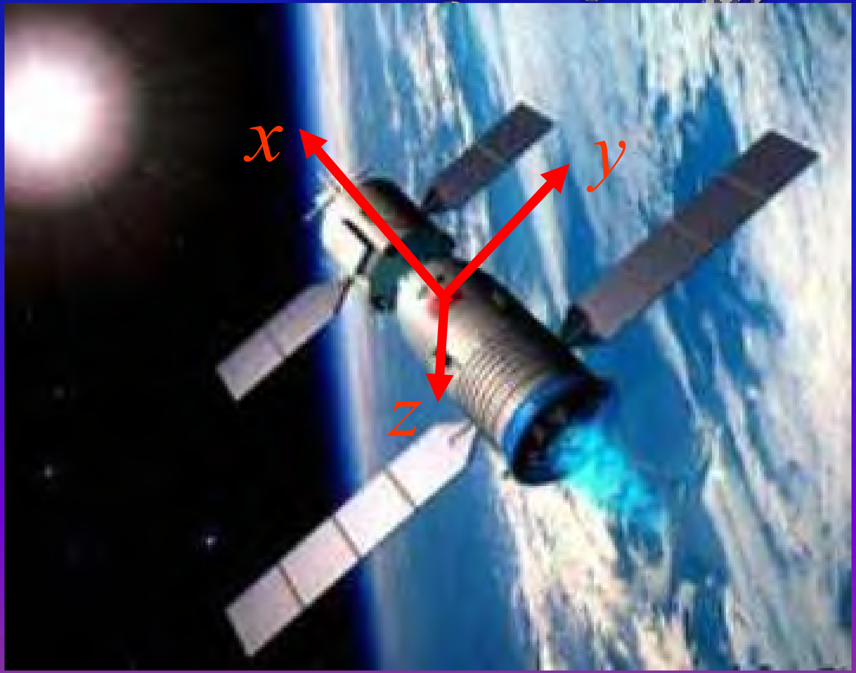


(4) 本体坐标系　$Oxyz$

原点在航天器质心；

三轴固定在航天器本体上。

若三轴为航天器的惯量主轴，则该坐标系称为主轴坐标系。



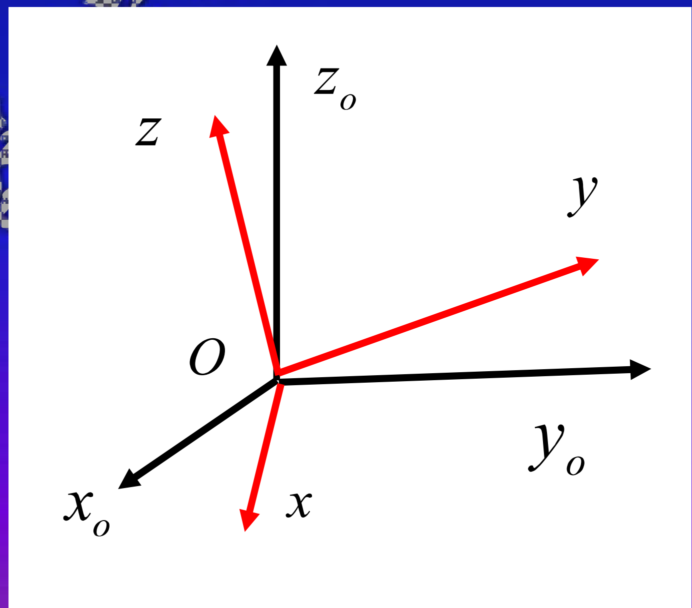
2、姿态描述方法

用卫星本体坐标系相对参考坐标系，如质心轨道坐标系，或质心平动坐标系的方向描述卫星的姿态。

两种常用的描述方法：

欧拉角

四元数



欧拉角描述

将参考坐标系转动三次得到本体坐标系。旋转顺序具有多种形式。

两类12种可能的旋转顺序如下：

一类：

1-2-3，1-3-2，2-3-1，2-1-3，3-1-2，3-2-1

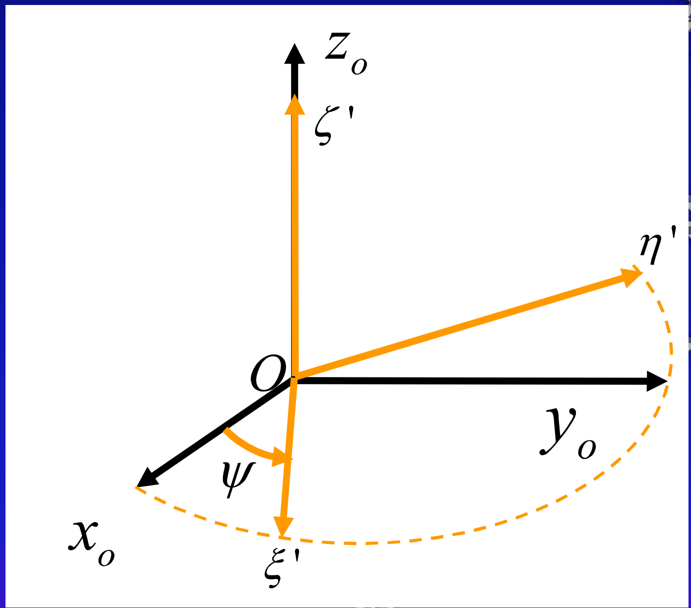
二类：

3-1-3，2-1-2，1-2-1，3-2-3，2-3-2，1-3-1

“3-1-2”旋转。

(1) $Ox_oy_oz_o$绕Oz_o (“3”)轴转 ψ 角

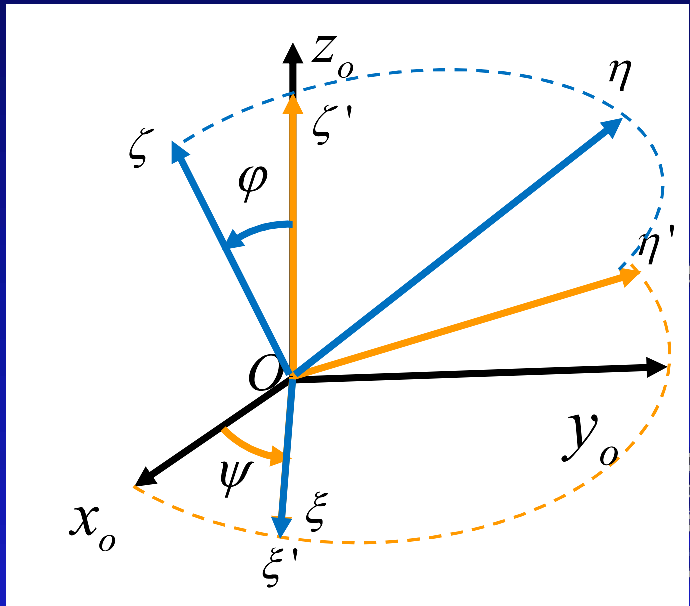
$\rightarrow O\xi'\eta'\zeta'$



$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_z(\psi) \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix}$$

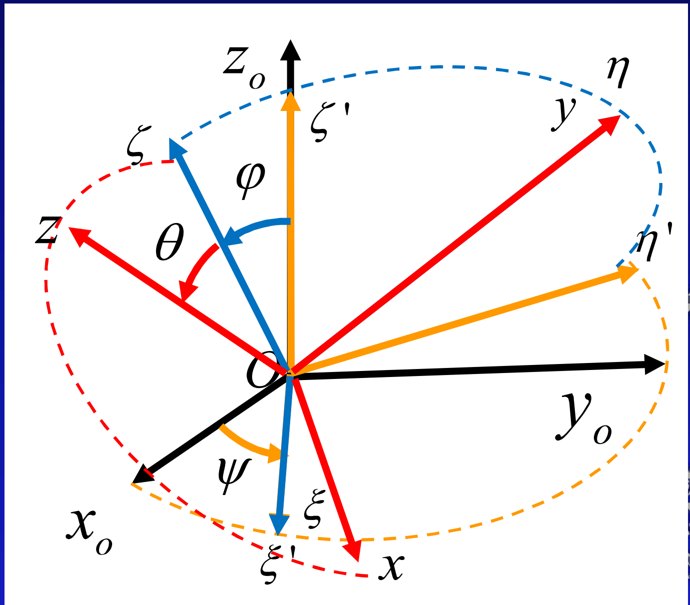
(2) $O\xi'\eta'\zeta'$绕 $O\xi'$ (“1”)轴转 φ 角

$\rightarrow O\xi\eta\zeta$



$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_x(\varphi) \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix}$$

(3) $O\xi\eta\zeta$ 绕 $O\eta$ (“2”)轴转 θ 角达到航天器的本体坐标系。



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_2(\theta) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_2(\theta)\boldsymbol{R}_1(\varphi)\boldsymbol{R}_3(\psi)\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}_2(\theta)\boldsymbol{R}_1(\varphi)\boldsymbol{R}_3(\psi)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi - \sin\varphi\sin\theta\sin\psi & \cos\theta\sin\psi + \sin\varphi\sin\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ -\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi \\ \sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix}$$

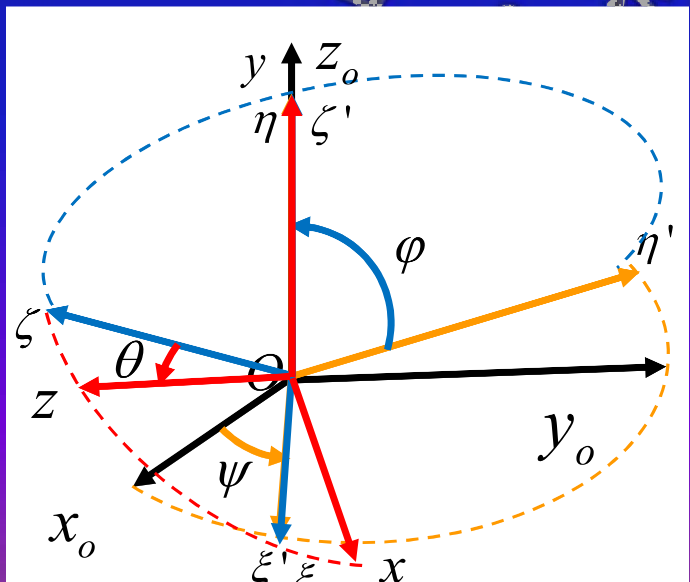
旋转矩阵的讨论

(1) $\varphi = 90°$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\psi) & \sin(\theta+\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin(\theta+\psi) & -\cos(\theta+\psi) & 0 \end{bmatrix}$$

姿态矩阵与姿态角不是一一对应。

三次旋转中的两次均为绕z_o旋转



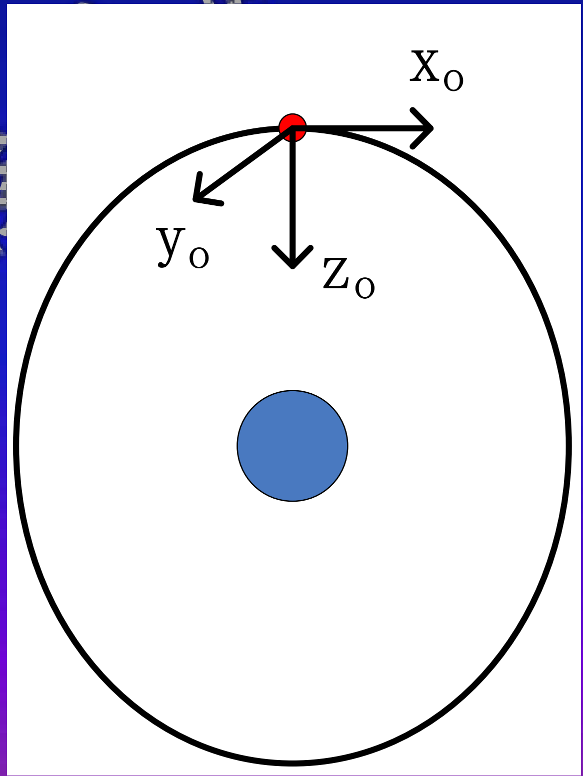
(2) 在小角度的情况下，姿态转换矩阵可以简化：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{bmatrix}$$

φ 滚转角　　x_o 滚动轴

θ 俯仰角　　y_o 俯仰轴

ψ 偏航角　　z_o 偏航轴



若坐标系 $Oxyz$ 中的分量已知，需要确定坐标系 $Ox_oy_oz_o$ 中的分量：

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

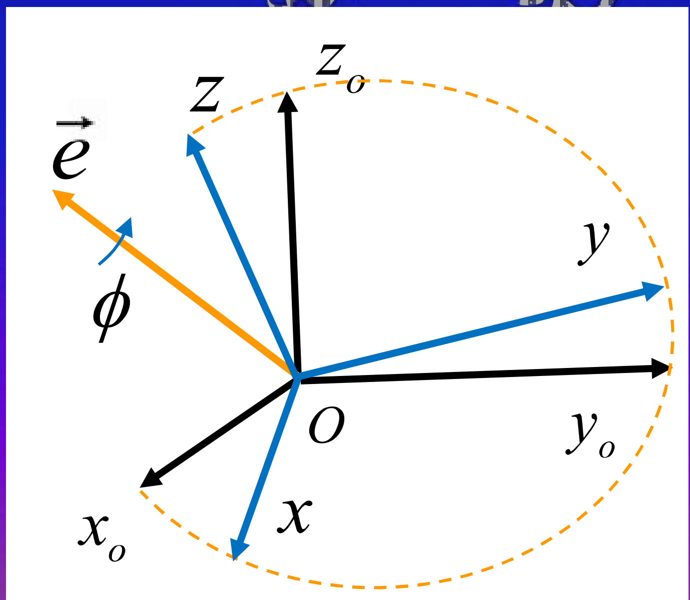
四元数描述

欧拉定理：刚体绕固定点的任一位移，可由绕通过该点的某一轴转过一个角度得到。

正交矩阵的性质：

$$\vec{e} = A\vec{e}$$

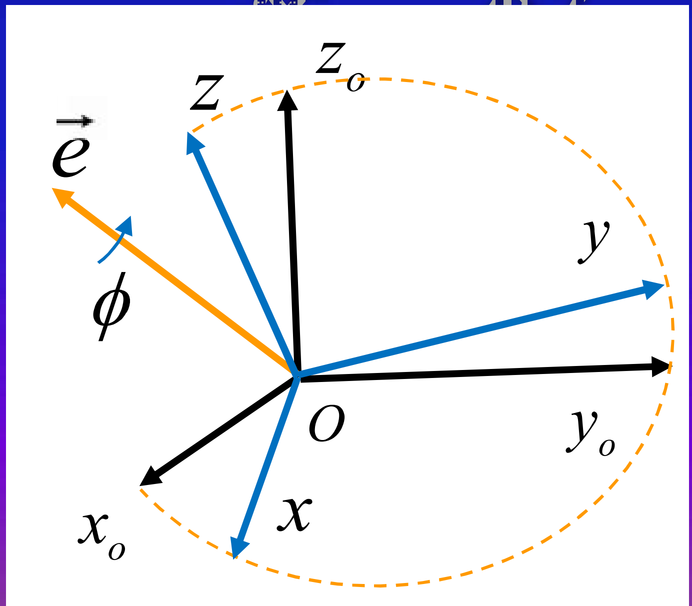
单位矢量方向 $\vec{e}$ 和转角 ϕ 描述坐标转换



定义如下四个元素

$$\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\phi/2) \\ e_1\sin(\phi/2) \\ e_2\sin(\phi/2) \\ e_3\sin(\phi/2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{bmatrix}$$

$$q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$$



$$
A(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} 2(q_0^2+q_1^2)-1 & 2(q_1q_2+q_0q_3) & 2(q_1q_3-q_0q_2) \\ 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_0^2+q_2^2)-1 & 2(q_2q_3+q_0q_1) \\ 2(q_1q_3+q_0q_2) & 2(q_2q_3-q_0q_1) & 2(q_0^2+q_3^2)-1 \end{bmatrix}
$$

四元数的非唯一性。

$$
-\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix} -\cos(\phi/2) \\ -e_1\sin(\phi/2) \\ -e_2\sin(\phi/2) \\ -e_3\sin(\phi/2) \end{bmatrix}
$$

与 $\boldsymbol{q}$ 对应姿态矩阵相同。

四元数与欧拉角的关系

欧拉角按轨道坐标系3-1-2旋转到本体坐标系，每次旋转对应的四元数分别为：

$$\boldsymbol{q}_3(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\psi}{2} & 0 & 0 & \sin\frac{\psi}{2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{q}_1(\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{q}_2(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & 0 & \sin\frac{\theta}{2} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_3 * \boldsymbol{q}_1 * \boldsymbol{q}_2$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} * \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

四元数与欧拉角的关系

四元数计算欧拉角：

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \varphi = \sin^{-1}\left[2\left(q_3 q_2 + q_1 q_0\right)\right] \\ \theta = -tg^{-1}\left[\dfrac{2(q_1 q_3 - q_2 q_0)}{2\left(q_0^2 + q_3^2\right) - 1}\right] \\ \psi = -tg^{-1}\left[\dfrac{2(q_1 q_2 - q_3 q_0)}{2\left(q_0^2 + q_2^2\right) - 1}\right] \end{cases}$$

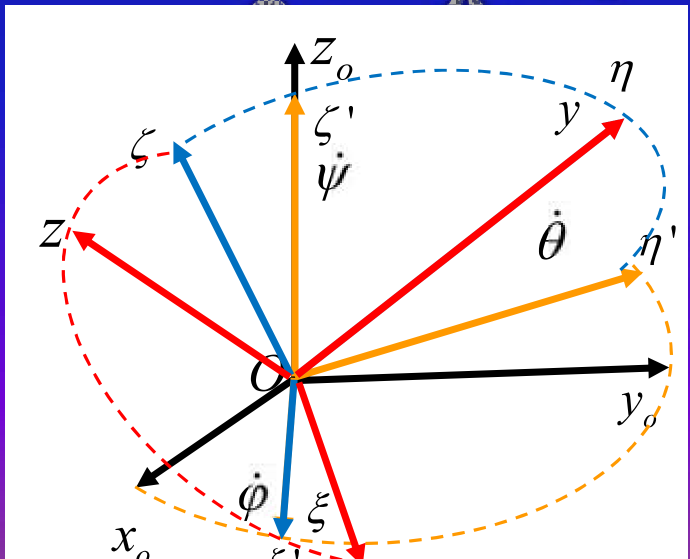
3、姿态运动学

欧拉角表示的姿态运动学方程

本体相对参考坐标系角速度 $\vec{\omega}_r$

将3-1-2顺序转动的欧拉角速度投影到本体坐标系

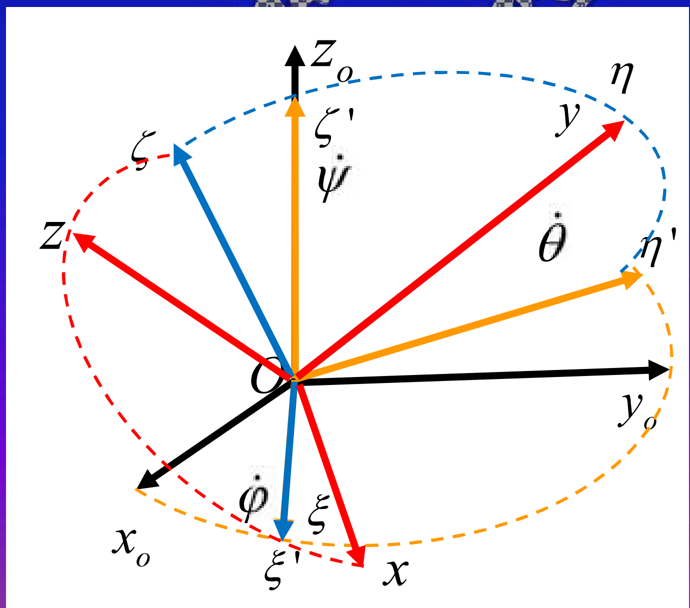
$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}\\ 0\end{bmatrix}+\boldsymbol{R}_2(\theta)\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\boldsymbol{R}_2(\theta)\boldsymbol{R}_1(\varphi)\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}$$



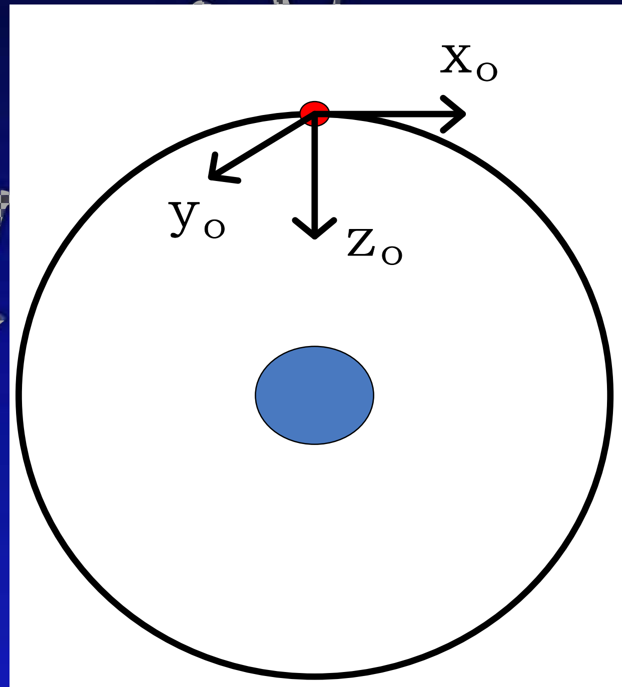
姿态运动学方程

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi+\dot{\varphi}\cos\theta\\ \dot{\psi}\sin\varphi+\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi+\dot{\varphi}\sin\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_x\cos\theta+\omega_z\sin\theta\\ \omega_y+(\omega_x\sin\theta-\omega_z\cos\theta)\tan\varphi\\ (-\omega_x\sin\theta+\omega_z\cos\theta)/\cos\varphi\end{bmatrix}$$



参考坐标系不是惯性坐标系，如质心轨道坐标系



$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$$

$$= \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\varphi + \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta \end{bmatrix} + A\begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_o \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x\cos\theta + \omega_z\sin\theta + \omega_o\sin\psi \\ \omega_y + (\omega_x\sin\theta - \omega_z\cos\theta)\tan\varphi + \omega_o\cos\psi/\cos\varphi \\ (-\omega_x\sin\theta + \omega_z\cos\theta)/\cos\varphi - \omega_o\tan\varphi\cos\psi \end{bmatrix}$$

四元数表示的姿态运动学方程

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

与欧拉角表示的运动学方程相比，四元数方法计算更简单。