DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.1997.06.019

1997年 12月 北京航空航天大学学报 December 1997
第23卷 第6期 Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics Vol. 23 No. 6

鲁棒故障诊断中特征结构配置的有关问题

金 宏 张洪钺
(北京航空航天大学 自动控制系)

摘 要 讨论了用于故障检测的特征结构配置方法,给出了特征结构设计的必要条件.此外,还讨论对加权矩阵与增益矩阵的最优鲁棒设计问题,提出了一种直接的、降秩逼近的设计方案,指出了 Patton的设计方案有可能实现不了的原因,并举例给予验证.

关键词 鲁棒性;均方逼近;故障检测;奇异值分解;特征结构
分类号 TP 273

Patton等利用特征结构的设计,将干扰量从残差响应中解耦出来[1].当解耦条件不成立时, Patton等讨论了最优鲁棒设计问题,使得干扰对残差的响应尽可能小[2].在 Patton的设计中,文章疏忽了在未知输入阵的最优鲁棒设计中必须满足一定的条件.本文的目的就是研究特征结构配置设计方法必须具备的条件,以及如何设计加权矩阵和增益矩阵.

1 问题的提出

考虑模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}(t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{f}_s(t) \tag{2}$$

其中: $\boldsymbol{x}\in R^n$ 是状态向量,$\boldsymbol{u}\in R^r$ 是输入向量,$\boldsymbol{y}\in R^m$ 是输出向量,$\boldsymbol{w}\in R^q$ 是噪声向量,矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$和 $\boldsymbol{D}$已知,$\Delta\boldsymbol{A}$,$\Delta\boldsymbol{B}$表示参数的改变和系统的不确定因素,$\boldsymbol{G}$是系统噪声分布矩阵,$\boldsymbol{f}_s(t)$是传感器故障向量.这时基于线性模型($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{D}$)设计观测器来产生故障检测与隔离(FDI)的残差响应为[2]

$$\boldsymbol{r}(s)=[\boldsymbol{W}-\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)^{-1}\boldsymbol{K}]\boldsymbol{f}_s(s)+\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{d}(s) \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{d}(t)=[\boldsymbol{x}'(t)\vdots\boldsymbol{u}'(t)\vdots\boldsymbol{w}'(t)]'$是未知输入,$\boldsymbol{E}=[\Delta\boldsymbol{A}\vdots\Delta\boldsymbol{B}\vdots\boldsymbol{G}]$是未知输入分布矩阵,$\boldsymbol{K}$是观测器的增益矩阵,$\boldsymbol{W}\in R^{p\times m}$是加权矩阵,$\boldsymbol{r}(k)$是残差向量.

由此可见,残差是由故障和干扰引起的,而要想把故障的影响与干扰的影响区分开来是很困难的,因此,干扰的作用影响了 FDI的检测性能,它也是造成误检和漏检的原因之一.为了使得残差产生器对干扰影响鲁棒,理想的解决办法是将干扰从残差中解耦出来.

2 特征结构配置及其存在的条件

记 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}\in R^{p\times n}$,为了使残差对干扰解耦,需要设计这样的矩阵 $\boldsymbol{W}$ $\boldsymbol{K}$,使得

$$\boldsymbol{H}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)^{-1}\boldsymbol{E}=0 \tag{4}$$

收稿日期: 1996-07-24 第一作者 男 34岁 博士生 100083 北京

为了使上式为零, Patton等提出通过设计 W、K 阵使得下列条件得到满足[2]

$$HE = 0 \tag{5}$$

$$HA_0 = 0 \text{ or } A_0E = 0 \tag{6}$$

具体方法叙述如下

1) 若 $WCE = HE = 0$,且矩阵 $H = WC$ 的任一行向量都是矩阵 A_0 关于某一特征值的左特征向量,则方程(4)有解.

2) 若 $WCE = HE = 0$,且矩阵 E 的任一列向量都是矩阵 A_0 关于某一特征值的右特征向量,则方程(4)有解.

若记 $H' = (h_1, \cdots, h_p)$, $W' = (w_1, \cdots, w_p)$, $S(X)$ 表示由矩阵 X 的所有列向量所张成的线性空间,由(5)可知

$$h_i \in S(C'), h_i \in S^{\perp}(E), \text{或 } h_i \perp S(E) \quad i = 1, \cdots, p \tag{7}$$

其中, $S^{\perp}(E)$ 为 $S(E)$ 的正交补空间.现在的目的是要设计出这样的 W,使得 $C'w_i \perp S(E)$, $i = 1, \cdots, p$.这里 $S(E) \subset R^n$, $S(C') \subset R^n$.则很容易得到如下充要条件.

定理 1　方程(5)有非零解的充分必要条件是: 1). $\dim(S(E)) < n$; 2). $S(C') \not\subset S(E)$, $S(C') \cap S^{\perp}(E) \neq \{0\}$.且最多可设计出 $p = n - \dim(S(E))$ 个不相关的 $w_i (i = 1, \cdots, p)$.

Patton和 Chen只指出了第一个条件[2],而第二个条件同样是不可缺少的.

例 1　若 $E' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,此时, $\text{rank}(E) = 2 < n = 3$,但 $S(C') = S(E)$ 不满足第二个条件.若 $p = 1$,这时可得到一维的 H 为: $H = k(1 \quad -1 \quad 1)$,其中 k 为任意非零常数.记 $w_1' = (k_1, k_2)$,其中 k_1, k_2 为常数,则 $w_1'C = (k_1, k_1 + k_2, k_2)$,显然 $w_1'C = H$ 无非零解,也即此时的加权向量 W 不存在.

推论　如果 C 是非奇异方阵,则定理 1中的两条件等价.

记 $\bar{E} = CE$, (5)可写成

$$W\bar{E} = 0 \tag{8}$$

定理 2　加权阵 W 存在的充分必要条件是 $\bar{E}$ 是行不满秩的.

定理 3　$S(\bar{E}) \subseteq S(C)$,当矩阵 E 行满秩时,加权阵 W 由 $S(C)$ 的正交补空间确定.

同样由(6),条件 $A_0E = 0$ 可以表示成

$$K\bar{E} = AE \tag{9}$$

定理 4　方程(9)有解 K 的充分必要条件是 $S(\bar{E}') = S(\bar{E}' \vdots E'A')$.

定理 5　当 $\bar{E}$ 是列满秩矩阵时,增益阵 K 的一般通解为[2]

$$\hat{K} = AE(\bar{E}'\bar{E})^{-1}\bar{E}' + M(I - \bar{E}(\bar{E}'\bar{E})^{-1}\bar{E}') \tag{10}$$

其中, M 是任一相应维的矩阵.通过 M 的选择使得对 K 的设计满足观测器稳定的要求.

此外条件 $HA_0 = 0$ 可表示成 $WC(A - KC) = 0$,此时,只要设计 K 使得 $S(CA_0) \subseteq S(\bar{E}) \subseteq S(C)$.值得注意的是,由前面介绍的鲁棒设计方法及定理 1可知,特征结构配置方法能够实现的前提条件是未知输入矩阵 E 是已知的.

3　输入分布阵的降秩逼近

不妨假设一般的全阶非线性系统模型是已知的,可通过模型线性化得到未知输入分布阵 E.在一般情况下,方程(5)无解,从而不能利用方法一或方法二进行特征结构配置.为此,根据

Lou等的结果[3]提出利用降秩逼近的方法来确定这样的矩阵 $\boldsymbol{E}^*$ 和 $\boldsymbol{H}$[2],使得

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{E}^* = 0 \tag{11}$$

并且使得指标 $\|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^*\|_F^2$ 为最小,也即求如下指标

$$J = \min_{\boldsymbol{H}\boldsymbol{E}^*=0} \|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^*\|_F^2 \tag{12}$$

这里 $\|\ \|_F^2$ 表示 Frobenius模.由 $\boldsymbol{E}$ 的奇异值分解 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{V}[\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_n) \vdots 0]\boldsymbol{T}'$,其中,$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{T}$ 为正交阵,$\sigma_1\leqslant\sigma_2\leqslant\cdots\leqslant\sigma_n$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的奇异值.于是可取 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_p)'$ 和 $\boldsymbol{E}^*=\boldsymbol{V}[\mathrm{diag}(0,\cdots,0,\sigma_{p+1},\cdots,\sigma_n)\vdots 0]\boldsymbol{T}'$,其中,$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_p$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的前 p 列向量.由此得到的 $\boldsymbol{E}^*$,$\boldsymbol{H}$ 当然满足(11),但有一点文献[2]没有提到,矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的每一行必须满足(7),这样才能设计出 $\boldsymbol{W}$,也即必须要满足 $\boldsymbol{v}_i\in S(\boldsymbol{C}')$,$i=1,\cdots,p$,而 Patton等的设计方案未必能保证这点.

例 2 若 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & 9\\ 2 & -8 & -1 & 9\\ -1 & 1 & 11 & 9\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}$ 阵同例 1.这时 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})=3$,且关于 $\boldsymbol{E}$ 的奇异值分解是 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}'$,其中

$$\boldsymbol{V}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

容易验证,$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\notin S(\boldsymbol{C}')$,这时若按 Patton的降秩逼近取法则不能设计出加权阵 $\boldsymbol{W}$.

为此,可将优化指标(12)改为

$$J^* = \min_{\boldsymbol{H}\boldsymbol{E}^*=0,\ S(\boldsymbol{H}')\subset S(\boldsymbol{C}')} \|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^*\|_F^2 \tag{13}$$

记 $r_C=\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})$.假设 $\boldsymbol{W}$ 的行数为 p,且满足另一上限 $p\leqslant\min\{r_C,n-1\}$.则 1).当 $r_C=n$ 时,$S(\boldsymbol{V})=S(\boldsymbol{C}')$,这时指标(13)等价于指标(12); 2).当 $r_C<n$ 时,正交矩阵 $\boldsymbol{V}$ 中最多有 r_C 列向量属于 $S(\boldsymbol{C}')$,也有可能会 $\boldsymbol{V}$ 中的各列向量都不属于 $S(\boldsymbol{C}')$(见例 2).此时,利用 Lou 等的结论来确定 $\boldsymbol{H}$ 是不合适的.为此,我们需要寻找满足(7)的 $\boldsymbol{v}_i$ 来构造 $\boldsymbol{H}$,由于篇幅有限,这里不作详细讨论.由此可见,Patton的降秩逼近只是一种间接的设计方法,其目的是构造 $\boldsymbol{H}$ 阵.但实际问题是需要构造 $\boldsymbol{W}$,而不是 $\boldsymbol{H}$.下节我们将讨论直接构造 $\boldsymbol{W}$ 阵的可行的设计方法.

4 加权矩阵 W、增益阵 K 的设计

由定理 2可知,只要 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 是行不满秩时,$\boldsymbol{W}$ 存在,即使是 $\boldsymbol{E}$ 阵行满秩时,由定理 3可知,$\boldsymbol{W}$ 阵也由 $S(\boldsymbol{C})$ 的正交补空间来确定.首先来看一个例子.

例 3 若 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 阵同例 2,则 $\bar{\boldsymbol{E}}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 10 & -10 & -2 & 18\\ 1 & -7 & 10 & 18\\ 11 & -17 & 8 & 36\end{pmatrix}$.

容易验证 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=\mathrm{rank}(\bar{\boldsymbol{E}})=2$,因此 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 是行不满秩的,并且容易得到正交于空间 $S(\bar{\boldsymbol{E}})$ 的向量: $\boldsymbol{w}_1'=k(1\ \ 1\ \ -1)$,其中 k 为任意非零常数,以此可作为加权向量,此外容易验证 $\boldsymbol{w}_1\perp S(\boldsymbol{C})$.若不考虑加权向量的模的大小,我们也可以从奇异值分解得到同样的结果.

由例3可见,即使 $\boldsymbol{E}$ 阵行满秩,只要 $\boldsymbol{C}$ 阵行不满秩, $\boldsymbol{W}$ 也可以设计出来,此时不需要通过降秩逼近来设计.此外,由定理2可知,当 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 阵是行满秩时,我们只有通过对 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 阵进行降秩逼近来设计 $\boldsymbol{W}$.下面我们将讨论 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 阵的降秩逼近,并以此来构造加权阵 $\boldsymbol{W}$ 和增益阵 $\boldsymbol{K}$.

4.1 加权阵 $\boldsymbol{W}$ 的设计

关于对 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 阵的降秩逼近,可用类似 Patton等对 $\boldsymbol{E}$ 进行降秩逼近但更为一般的办法来确定.为此,寻找一个近似的 $\bar{\boldsymbol{E}}^*$ 以及加权阵 $\boldsymbol{W}$,满足

$$\boldsymbol{W}\bar{\boldsymbol{E}}^* = 0 \tag{14}$$

并使得指标 $\|\bar{\boldsymbol{E}} - \bar{\boldsymbol{E}}^*\|_F$ 为最小.具体设计 $\boldsymbol{W}$ 的方法如下

由 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 的奇异值分解 $\bar{\boldsymbol{E}} = \bar{\boldsymbol{V}}[\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_n) \vdots 0]\bar{\boldsymbol{T}}'$,其中 $\bar{\boldsymbol{V}},\bar{\boldsymbol{T}}$ 为相应维数的正交阵, $\sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \cdots \leqslant \sigma_n$ 是 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 是的奇异值.于是可取 $\bar{\boldsymbol{E}}^* = \bar{\boldsymbol{V}}[\mathrm{diag}(0,\cdots,0,\sigma_{p+1},\cdots,\sigma_n) \vdots 0]\bar{\boldsymbol{T}}'$.这时 $\forall \beta_{p\times 1} \neq 0$,向量 $\alpha = (\bar{\boldsymbol{v}}_1,\cdots,\bar{\boldsymbol{v}}_p)\beta$ 可作为 $\boldsymbol{W}$ 的行向量,对不同的 $\beta_1,\cdots,\beta_p$,则

$$\boldsymbol{W}' = (\alpha_1,\cdots,\alpha_p) = (\bar{\boldsymbol{v}}_1,\cdots,\bar{\boldsymbol{v}}_p)(\beta_1,\cdots,\beta_p) \tag{15}$$

其中, $\bar{\boldsymbol{v}}_1,\cdots,\bar{\boldsymbol{v}}_p$ 为 $\bar{\boldsymbol{V}}$ 的前 p 列向量.当 $\beta_1,\cdots,\beta_p$ 不相关时, $\boldsymbol{W}$ 是行满秩的.

例4　仍以例2为例, $\bar{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} 10 & -10 & -2 & 18 \\ 1 & -7 & 10 & 18 \end{bmatrix}$.容易验证 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 为行满秩阵, $\bar{\boldsymbol{E}}$ 的奇异值分解为 $\bar{\boldsymbol{E}} = \bar{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{T}}$,其中

$$\bar{\boldsymbol{V}} = \begin{bmatrix} -0.6809 & 0.7315 \\ 0.7315 & 0.6819 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1.7955 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.9608 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

若 $p = 1$,于是加权向量可取 $\boldsymbol{w}_1' = (-0.6819 \quad 0.7315)$.

4.2 增益阵 $\boldsymbol{K}$ 的设计

由(6)可知,关于 $\boldsymbol{K}$ 的确定有两种途径.定理4定理5讨论了通过设计矩阵 $\boldsymbol{A}_0$ 的右特征向量来设计 $\boldsymbol{K}$,并给出了当 $\boldsymbol{E}$ 列满秩时,有关 $\boldsymbol{K}$ 的一般通解.至于通过设计 $\boldsymbol{A}_0$ 的左特征向量来讨论 $\boldsymbol{K}$ 的设计有如下结论.由(6)及(15)得

$$(\beta_1,\cdots,\beta_p)'(\bar{\boldsymbol{v}}_1,\cdots,\bar{\boldsymbol{v}}_p)'\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{KC}) = 0 \tag{16}$$

记 $\bar{\boldsymbol{A}} = (\bar{\boldsymbol{v}}_1,\cdots,\bar{\boldsymbol{v}}_p)'\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{KC}) \in R^{p\times n}$ $(p \leqslant n)$,因此有

定理6　记 $r_\beta = \mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_p)$,如果 $r_\beta = p$,则必须设计 $\boldsymbol{K}$ 使得 $\bar{\boldsymbol{A}} = 0$;如果 $r_\beta < p$,则必须设计 $\boldsymbol{K}$ 使得 $\mathrm{rank}(\bar{\boldsymbol{A}}) = p - r_\beta$.此外 $\boldsymbol{K}$ 的设计还需确保观测器稳定的要求.

5 结　论

本文讨论了用于故障检测的特征结构配置设计方法,给出了特征结构设计方案可行的必要条件.当未知输入分布阵不满足解耦条件时,如何对未知输入分布阵进行最优鲁棒设计展开了讨论,指出了 Patton等的设计方案[1]的不足及其有可能实现不了的原因,并举例给予验证.本文对加权矩阵给出了直接的设计方案及其存在的充要条件,当方程(8)无解时,提出了对矩阵 $\bar{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{CE}$ 进行降秩逼近而不是对矩阵 $\boldsymbol{E}$ 进行降秩逼近,所给的设计方法及其实现的各种条件简单可行、易于理解.此外,关于增益矩阵的设计比较复杂,分别讨论了设计 $\boldsymbol{A}_0$ 的左右特征向量的两种方法,并给出了一些可设计条件.

参 考 文 献

1 Patton R J, Chen J. Robust fault detection using eigenstructure assignment: a tutorial consideration and some new results. Proc. of the 30th IEEE conf. on Decision and Control, Brighton, U. K., 1991. 2242~ 2247

2 Patton R J, Chen J. Optimal unknown input distribution matrix selection in robust fault diagnosis. Automatica, 1993, 29(4): 837~ 841

3 Lou X C, Willsky A S, Verghese G C. Optimally robust redundancy relations for failure detection in uncertain systems. Automatica, 1986, 22(3): 333~ 344

SOME PROBLEMS OF FAULT DETECTION OF EIGENSTRUCTURE ASSIGNMENT

Jin Hong Zhang Hongyue

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Dept. of Automatic Control)

ABSTRACT

The eigenstructure assignment approach used for FDI has been discussed and its some feasible necessary conditions are given. Moreover, the optimal robust design problems of weighting matrix and gain matrix are discussed also, a direct rank-reducing approximation method is proposed and some examples are given to show that Patton's assignment method couldn't be achievable under some conditions.

Key words robustness; least square appoximation; fault detection; singular value decomposition; eigenstructure assignment