航天器控制原理

第五讲 二体轨道力学和运动方程

主讲：周　军

西北工业大学 精确制导与控制研究所

第五讲 二体轨道力学和运动方程

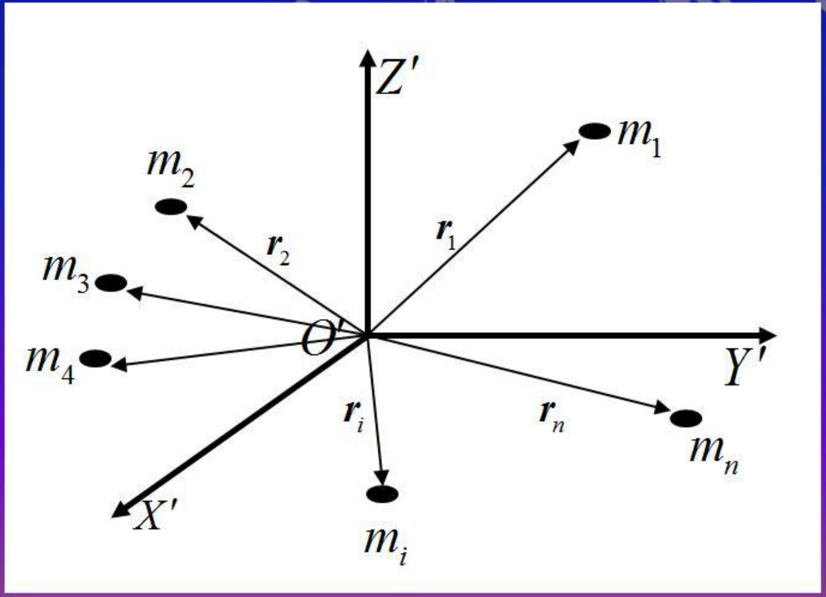
1、从N体问题到二体问题

2、二体轨道运动常数

1、从N体问题到二体问题

N 体问题

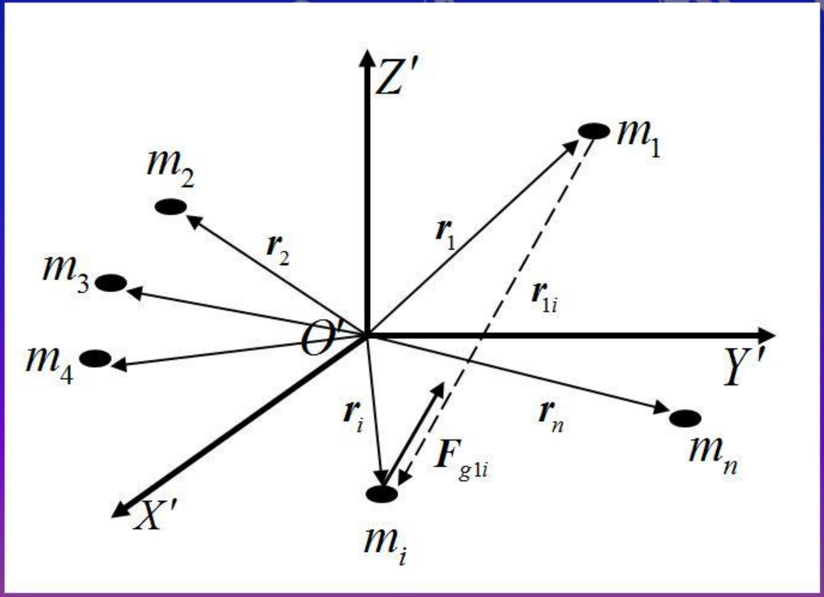
假定存在某个合适的惯性坐标系$O'X'Y'Z'$，该坐标系内，有n个质量块 $m_1, m_2, \ldots, m_n$，它们的位置分别为 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$。



由牛顿万有引力定律，

m_i受到 m_1的引力为：

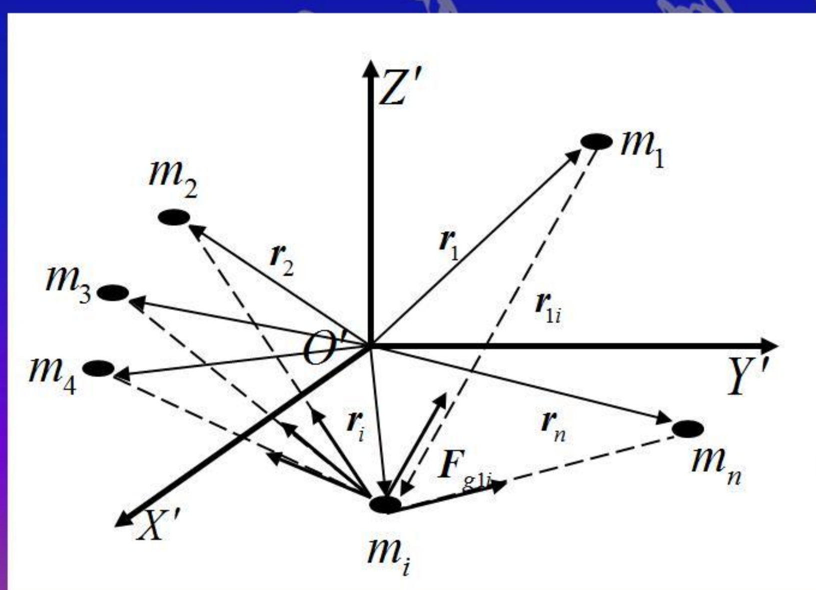
$$\vec{F}_{g1i} = -\frac{Gm_1 m_i}{r_{1i}^3}(\vec{r}_{1i}) \qquad \vec{r}_{1i} = \vec{r}_i - \vec{r}_1$$



作用在第 i 个物体上的所有引力的矢量和 $\vec{F}_{gi}$ 为：

$$\vec{F}_{gi}=\left[-\frac{Gm_1m_i}{r_{1i}^3}(\vec{r}_{1i})\right]+\ldots+\left[-\frac{Gm_nm_i}{r_{ni}^3}(\vec{r}_{ni})\right]$$

$$=-Gm_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{m_j}{r_{ji}^3}(\vec{r}_{ji})$$

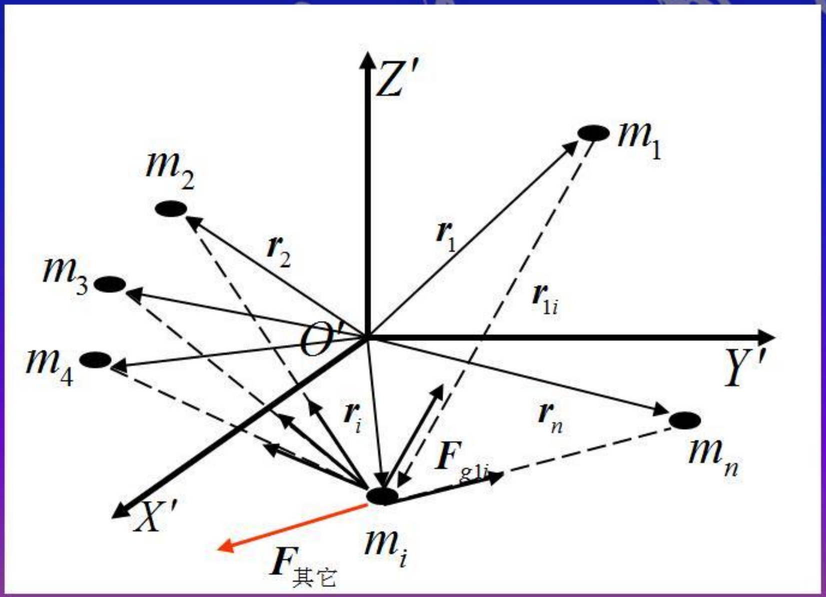


其它外力 $\vec{F}_{其它}$，包括阻力、推力、太阳辐射压力、非球形造成的摄动力等。

$$\vec{F}_{其它}=\vec{F}_{阻力}+\vec{F}_{推力}+\vec{F}_{太阳压力}+\vec{F}_{干扰}+\cdots$$

作用在第i个物体上的合力 $\vec{F}_{总}$ 为：

$$\vec{F}_{总}=\vec{F}_{gi}+\vec{F}_{其它}$$



应用牛顿第二运动定律：

$$\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i)=\vec{F}_{总}$$

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}+\vec{v}_i\frac{dm_i}{dt}=\vec{F}_{总}$$

$$\ddot{\vec{r}}_i=\frac{\vec{F}_{总}}{m_i}-\dot{\vec{r}}_i\frac{\dot{m}_i}{m_i}$$

1）物体排出质量产生以推力；

2）某些与相对论有关的效应导致质量随时间变化。

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_{总}}{m_i} - \dot{\vec{r}}_i \frac{\dot{m}_i}{m_i}$$

假设：

1、第 i 个物体的质量保持不变

（即无动力飞行，$\dot{m}_i$=0）；

2、阻力和其它外力不存在。

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_{总}}{m_i} - \dot{\vec{r}}_i \frac{\dot{m}_i}{m_i} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_{总}}{m_i} = \frac{\vec{F}_{gi} + \vec{F}_{其它}}{m_i}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ji}^3}(\vec{r}_{ji}) \Leftarrow \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_{gi}}{m_i} = \frac{-G\cancel{m_i}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ji}^3}(\vec{r}_{ji})}{\cancel{m_i}}$$

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ji}^3}(\vec{r}_{ji})$$

假定：

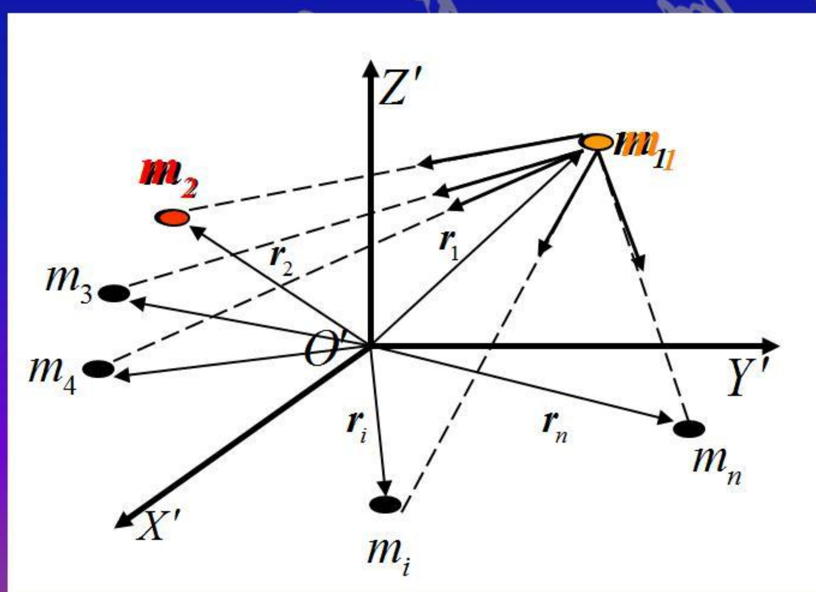
m_1为一个绕地球运行的航天器的质量，

m_2为地球质量，

$m_3\ ,m_4\ ,\cdots,m_n$是月球、太阳等的质量。

当i=1

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G\sum_{j=2}^{n} \frac{m_j}{r_{j1}^3}(\vec{r}_{j1})$$



$$\ddot{\vec{r}}_i = -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ji}^3}(\vec{r}_{ji})$$

假定：

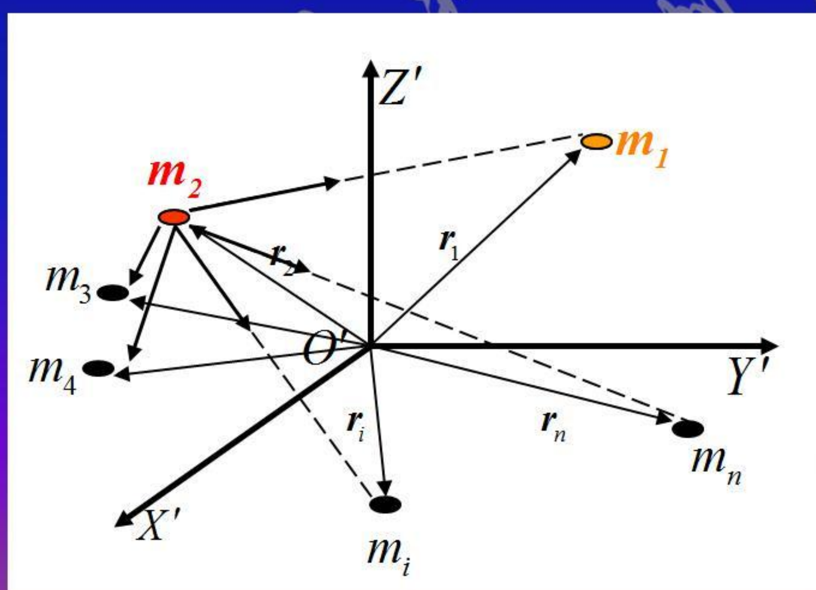
m_1为一个绕地球运行的航天器的质量，

m_2为地球质量，

$m_3, m_4, \cdots, m_n$是月球、太阳等的质量。

当i=2

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} \frac{m_j}{r_{j2}^3}(\vec{r}_{j2})$$



$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G\sum_{j=2}^{n}\frac{m_j}{r_{j1}^3}(\vec{r}_{j1}) \qquad \ddot{\vec{r}}_2 = -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n}\frac{m_j}{r_{j2}^3}(\vec{r}_{j2})$$

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = \underline{-G\sum_{j=2}^{n}\frac{m_j}{r_{j1}^3}(\vec{r}_{j1})} - \left(\underline{-G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n}\frac{m_j}{r_{j2}^3}(\vec{r}_{j2})}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = -G\frac{m_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} - G\sum_{j=3}^{n}\frac{m_j}{r_{j1}^3}(\vec{r}_{j1}) + G\frac{m_1}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} + G\sum_{j=3}^{n}\frac{m_j}{r_{j2}^3}(\vec{r}_{j2})$$

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = -G\frac{m_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} - G\sum_{j=3}^{n}\frac{m_j}{r_{j1}^3}(\vec{r}_{j1}) + G\frac{m_1}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} + G\sum_{j=3}^{n}\frac{m_j}{r_{j2}^3}(\vec{r}_{j2})$$

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21} \quad \Downarrow$$

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = \underline{-G\frac{m_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} - G\frac{m_1}{r_{12}^3}\vec{r}_{21}} + \underline{G\sum_{j=3}^{n}\frac{m_j}{r_{j2}^3}(\vec{r}_{j2}) - G\sum_{j=3}^{n}\frac{m_j}{r_{j1}^3}(\vec{r}_{j1})}$$

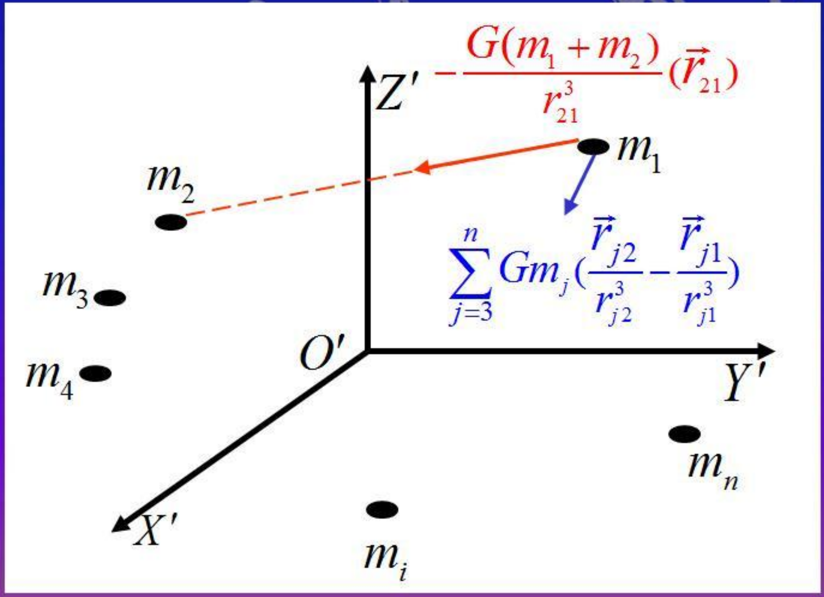
$$\Downarrow$$

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r_{21}^3}(\vec{r}_{21}) + \sum_{j=3}^{n} Gm_j\left(\frac{\vec{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \frac{\vec{r}_{j1}}{r_{j1}^3}\right)$$

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r_{21}^3}(\vec{r}_{21}) + \sum_{j=3}^{n} Gm_j\left(\frac{\vec{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \frac{\vec{r}_{j1}}{r_{j1}^3}\right)$$

地球引力

摄动影响



轨道高度370km，各种天体对航天器的相对加速度（以g为单位），以及地球的非球形（扁率）造成的影响。

地球	8.9×10^{-1}
太阳	6.0×10^{-4}
水星	2.6×10^{-10}
金星	1.9×10^{-8}
火星	7.1×10^{-10}
木星	3.2×10^{-8}
土星	2.3×10^{-9}
天王星	8.0×10^{-11}
海王星	3.6×10^{-11}
冥王星	1.0×10^{-12}
月球	3.3×10^{-6}
地球扁率	1.0×10^{-3}

二体问题

因为：地球的引力 $\gg$ 其他摄动力

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r_{21}^3}(\vec{r}_{21}) + \underline{\sum_{j=3}^{n} Gm_j\left(\frac{\vec{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \frac{\vec{r}_{j1}}{r_{j1}^3}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r_{21}^3}\vec{r}_{21}$$

$$\Downarrow$$

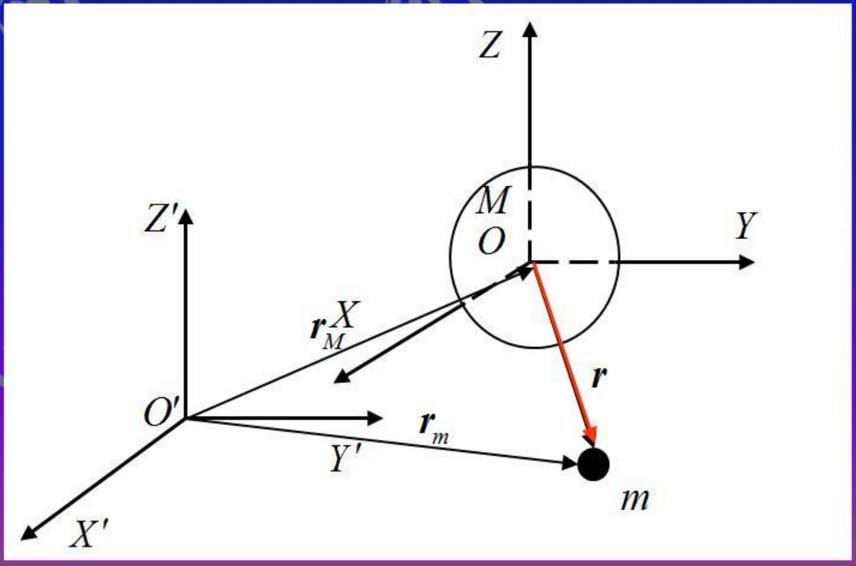
$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m+M)}{r^3}\vec{r}$$

N体问题 $\Rightarrow$ 二体问题

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m+M)}{r^3}\vec{r}$$

方程中只有两天体间的相对矢径，没有天体到绝对惯性系的绝对矢径。

选择一个不转动的非惯性坐标系，例如原点在地球质心 O ，三轴与惯性系平行的坐标系 $OXYZ$ 描述相对位置、速度和加速度。



考虑到实际情况

$$G(M+m) \approx GM$$ 中心引力体质量

引力参数 $\mu \equiv GM$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\vec{r} \approx -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0$$ ——二体运动方程

对不同的中心引力体，μ 的值不同：

对于地球，$\mu = 3.986 \times 10^5 \, km^3/s^2$；

对于太阳，$\mu = 1.327\,154 \times 10^{11} \, km^3/s^2$。

2、轨道运动常数

机械能守恒

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \left(\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} \right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

$$\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}=0$$

$$\vec{a}\cdot\dot{\vec{a}}=a\dot{a}$$

$$v\cdot\dot{v}+\frac{\mu}{r^3}r\cdot\dot{r}=0$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{v^2}{2})=v\dot{v}\qquad\frac{d}{dt}(-\frac{\mu}{r})=\frac{\mu}{r^2}\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r})=0$$

$$\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}=-c$$

$$\varepsilon=\frac{v^2}{2}+(c-\frac{\mu}{r})$$ ——比机械能

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} + (c - \frac{\mu}{r})$$

比动能：
单位质量的动能

比势能：
单位质量的势能

当航天器沿着轨道运行时，航天器的比机械能ε既不增加，也不减少，而是保持常值。

c 的选取依赖于零势能面的选取，若以无穷远($r = \infty$)为零势能面，

$$c - \frac{\mu}{r} = 0 \xrightarrow{r=\infty} c = 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

角动量守恒

$$\ddot{\vec{r}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}=0$$

$$\vec{r}\times\left(\ddot{\vec{r}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\right)=0$$

$$\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}+\underline{\vec{r}\times\frac{\mu}{r^3}\vec{r}}=0$$

$$\vec{a}\times\vec{a}=0$$

$$\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}=0$$

$$\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})=\underline{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}+\underline{\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}}=0+0=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})=\boldsymbol{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v})=\boldsymbol{0}$$

$$\Downarrow$$

$\vec{h}=\vec{r}\times\vec{v}=$ 常数 ——比角动量

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = 常数$$

比角动量沿着其轨道为一常矢量。

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

⬇

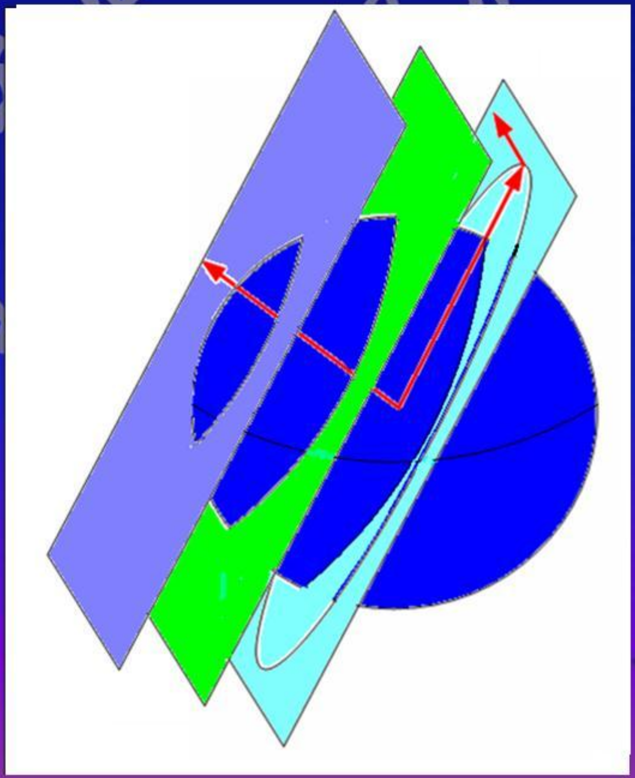
$\vec{h} \perp \vec{v}$、$\vec{r}$ 所在平面

$\vec{h}$ =常数

⬇

$\vec{r}$ 和 $\vec{v}$ 所处平面不变

轨道平面具有定向性。



$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = 常数$$

比角动量沿着其轨道为一常矢量。

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

⬇

$\vec{h} \perp \vec{v}$、$\vec{r}$ 所在平面

$\vec{h}$ =常数

⬇

$\vec{r}$ 和 $\vec{v}$ 所处平面不变

轨道平面具有定向性。