



西北工业大学  
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY



# 捷联惯导与组合导航原理

Principles of Strapdown Inertial Navigation  
and Multi-Sensor Integrated Navigation Systems

主讲：陈凯、张通

电话：15309218366

E-Mail: [chenkai@nwpu.edu.cn](mailto:chenkai@nwpu.edu.cn)

航天学院飞行控制研究所



## 第6章 捷联惯性导航原理

- 6.1 捷联惯导系统介绍
- 6.2 捷联惯导的基本知识
- 6.3 捷联惯导算法
- 6.4 捷联惯导误差分析



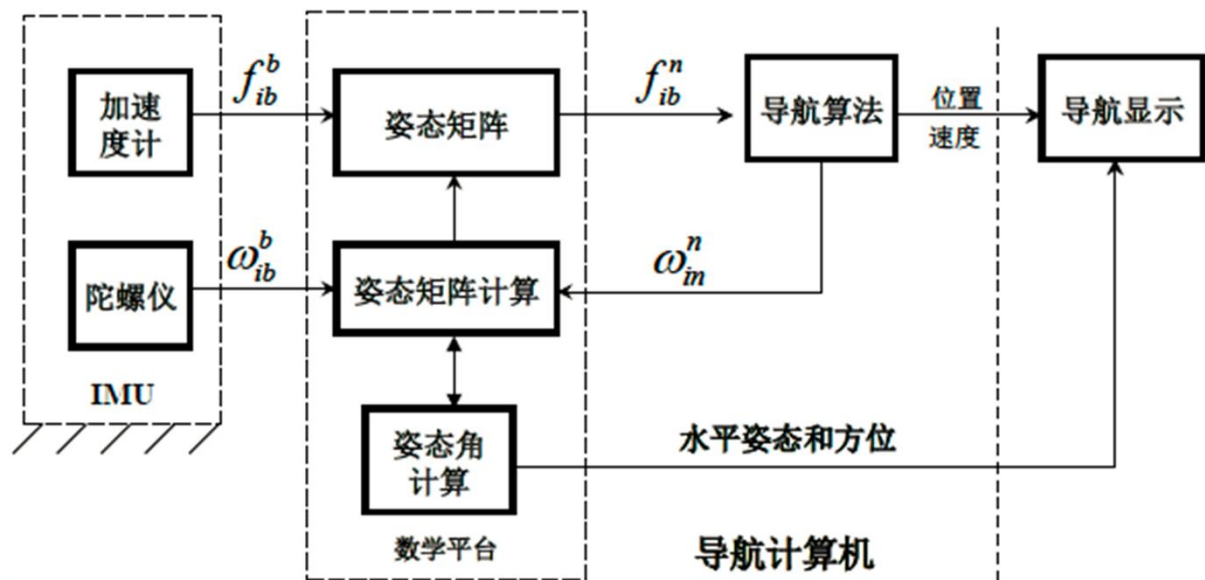
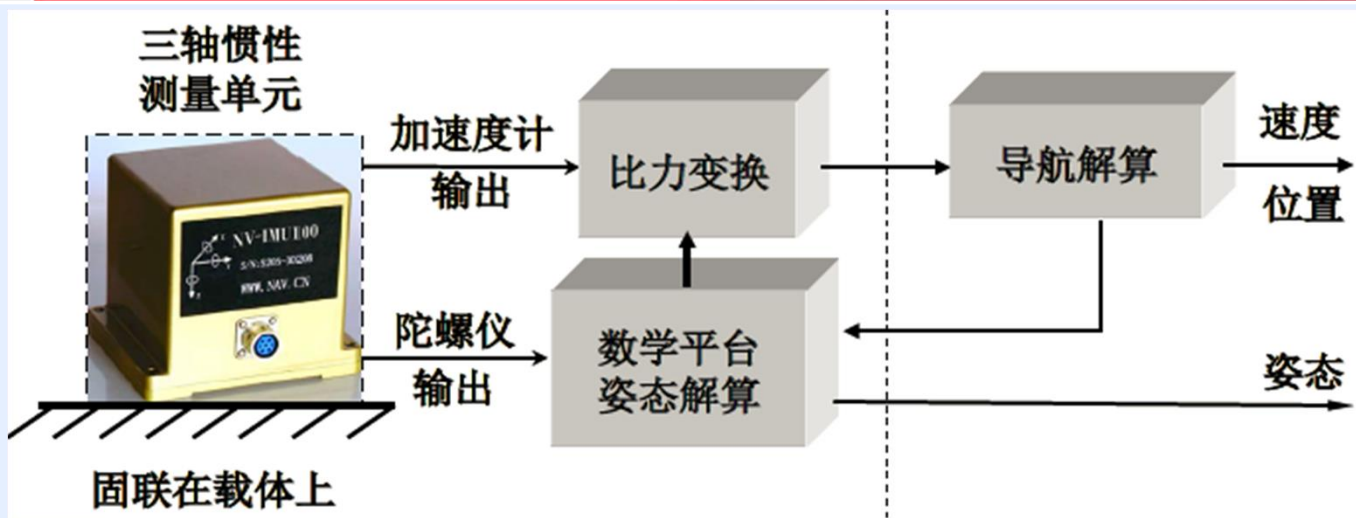
## 6.1 捷联惯导系统介绍

### 概念

除了平台式惯导系统外，还有一类惯导系统是捷联式惯导系统。在捷联式惯导系统中没有实体平台，没有机械框架，陀螺仪和加速度计直接安装在载体上，惯性元件的敏感轴安置在载体坐标系三轴方向上。

### 原理

在载体运动过程中，陀螺仪测量载体相对于惯性系的运动角速度，经导航计算得到载体坐标系相对于导航坐标系的坐标变换矩阵，即姿态矩阵，通过姿态矩阵把加速度计测量的比力加速度信息变换到导航坐标系然后进行导航计算。因此姿态矩阵起着“数学平台”的作用。



## 捷联式惯导系统原理



### 优点：

1. **无导航平台**，体积、重量和成本大大降低，易于安装维护；
2. 可以直接给出控制系统所需要的载体线加速度和角速度信息；
3. 便于实现多余度惯性仪表技术，提高性能和可靠性；
4. 捷联式惯导系统的初始对准快（**不需机械运动**）。

### 缺点：

1. 加工工艺、材料、光电元器件等各方面新技术是限制捷联惯导系统精度提高的原因；
2. 惯性仪表的工作环境恶化，从而对惯性仪表的要求更高；
3. 计算复杂性显著增加。



## 发展历史

1956年：捷联惯导系统专利(美国)；

六十年代初：美国联合飞机公司哈密尔顿标准中心研制的LM/ASA捷联式系统应用于阿波罗登月；霍尼韦尔公司的H-401型捷联式制导系统，制导了普莱姆飞行器；

1966年到1973年间：联合公司制造的捷联式系统，先后装备了登月舱、三级火箭、登陆艇；

20世纪80~90年代：动力调谐陀螺、尤其是激光陀螺和光纤式陀螺的捷联惯导系统广泛应用。(757/767、A310以及各种战斗机)

20世纪90年代后：激光和光纤陀螺惯导系统估计占到全部惯导系统的一半以上。(战斗机，波音飞机)

我国惯性导航与惯性仪表队伍已经初具规模，具备了一定的自行设计、研制和生产能力，**基本拥有了迅速发展的物质和技术基础**。但我国和国外先进技术相比，还有相当的差距。





## 第6章 捷联惯性导航原理

- 6.1 捷联惯导系统介绍
- 6.2 捷联惯导的基本知识
- 6.3 捷联惯导算法
- 6.4 捷联惯导误差分析



## 6.2 捷联惯导基本知识

- 1、相关坐标系
- 2、坐标系转换关系
- 3、地球的描述
- 4、矢量叉乘
- 5、哥氏定理





# 1、相关坐标系

- 惯性导航中所采用的坐标系可分为惯性坐标系与非惯性坐标系两类，惯性导航区别于其它类型的导航方案（如无线电导航、天文导航等）的根本不同之处就在于其导航原理是建立在牛顿力学定律——又称惯性定律——的基础上的，“惯性导航”也因此而得名。
- 而牛顿力学定律是在惯性空间内成立的，这就有必要首先引入惯性坐标系，作为讨论惯导基本原理的坐标基准。
- 对飞行器进行导航的主要目的就是要确定其导航参数，飞行器的导航参数就是通过各个坐标系之间的关系来确定的，这些坐标系区别于惯性坐标系、是并根据导航的需要来选取的。将它们统称为非惯性坐标系，如地球坐标系、地理坐标系、导航坐标系、平台坐标系及机体坐标系等。



## 相关坐标系

- 1. 地心惯性坐标系——  $Ox_i y_i z_i$

地心惯性坐标系不考虑地球绕太阳的公转运动，地心惯性坐标系的原点选在地球的中心，它不参与地球的自转。惯性坐标系是惯性敏感元件测量的基准，在导航计算时无需在这个坐标系中分解任何向量，因此惯性坐标系的坐标轴的定向无关紧要，但习惯上将z轴选在沿地轴指向北极的方向上，而x、y轴则在地球的赤道平面内，并指向空间的两颗恒星。



## 相关坐标系

- 2. 地球坐标系——  $Ox_e y_e z_e$
- 地球坐标系是固连在地球上的坐标系，它相对惯性坐标系以地球自转角速率  $\omega_e$  旋转，地球坐标系的原点在地球中心， $O_{ze}$  轴与  $O_z$  轴重合， $Ox_e y_e$  在赤道平面内，**x**轴指向格林威治经线，**y**轴指向东经**90**度方向。



## 相关坐标系

- 3. 地理坐标系—— $Ox_t y_t z_t$
- 地理坐标系是在飞行器上用来表示飞行器所在位置的东向、北向和垂线方向的坐标系。地理坐标系的原点选在飞行器重心处， $x$ 指向东， $y$ 指向北， $z$ 沿垂线方向指向天（东北天）。



## 相关坐标系

- 4. 导航坐标系——  $Ox_n y_n z_n$
- 导航坐标系是在导航时根据导航系统工作的需要而选取的作为导航基准的坐标系。  
指北方位系统：导航坐标系与地理坐标系重合；自由方位系统或游动自由方位系统： $z_n$ 轴与  $z_t$  轴重合，而  $x_n$  与  $x_t$  及  $y_t$  与  $y_n$  之间相差一个自由方位角或游动方位角  $\alpha$ 。



## 相关坐标系

- 5. 平台坐标系——  $Ox_p y_p z_p$
- 平台坐标系是用惯导系统来复现导航坐标系时所获得的坐标系，平台坐标系的坐标原点位于飞行器的重心处。
- 对于平台惯导系统，平台坐标系是通过平台台体来实现的；对于捷联惯导系统，平台坐标系是通过存储在计算机中的方向余弦矩阵来实现的，“数学平台”。



## 相关坐标系

- 6. 机体坐标系—— $Ox_b y_b z_b$
- 机体坐标系是固连在机体（弹体）上的坐标系。机体坐标系的坐标原点 $O$ 位于飞行器的重心处， $x$ 沿机体横轴指向右， $y$ 沿机体纵轴指向前， $z$ 垂直于 $Oxy$ ，并沿飞行器的竖轴指向上。
- 飞机一般用右前上，导弹一般用前上右





## 2、各坐标系之间的变换关系

### 1. 姿态矩阵

描述了**载体坐标系**与**地理坐标系**（即导航坐标系）之间的关系，用姿态角（俯仰角和滚转角）和航向角表示，定义如下：

**航向角**：载体纵轴在水平面的投影与地理子午线之间的夹角，用  $\psi$  表示，规定以地理北向为起点，偏东方向为正，定义域  $0^\circ \sim 360^\circ$ 。

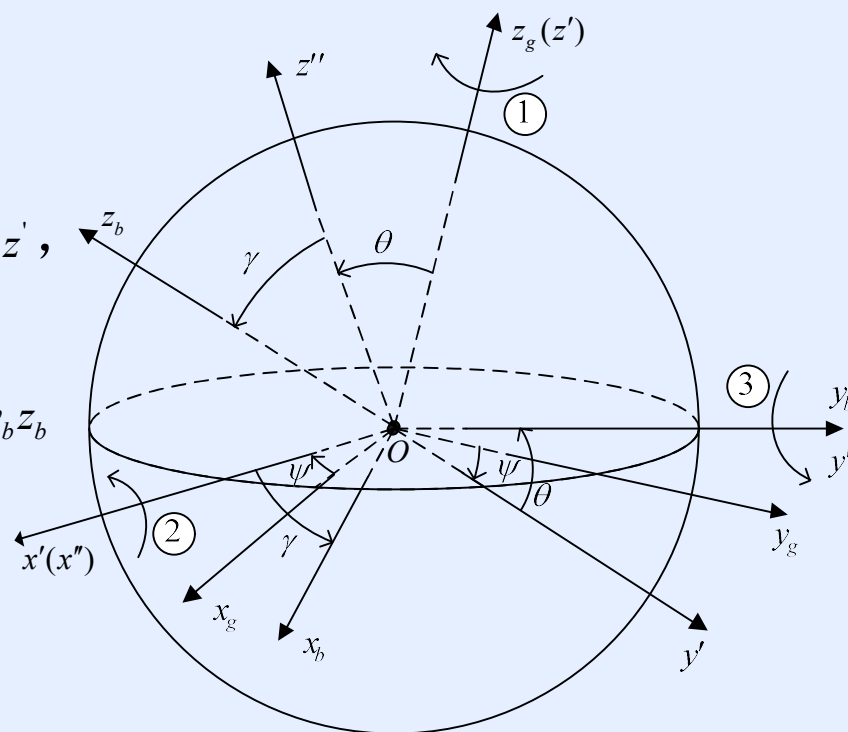
**俯仰角**：载体纵轴与纵向水平轴之间的夹角，用  $\theta$  表示，规定以纵向水平轴为起点，向上为正，向下为负，定义域  $-90^\circ \sim +90^\circ$ 。

**滚转角**：载体纵向对称面与纵向铅垂面之间的夹角，用  $\gamma$  表示，规定从铅垂面算起，右倾为正，左倾为负，定义域  $-180^\circ \sim +180^\circ$ 。



# 1. 姿态矩阵

地理坐标系  $ox_g y_g z_g$  绕  $-z_g$  轴转角  $\psi$  得  $ox'y'z'$  ,  
 $ox'y'z'$  绕  $x'$  轴转角  $\theta$  角得  $ox''y''z''$  ,  
 $ox''y''z''$  再绕  $y''$  轴转  $\gamma$  角, 则得载体坐标系  $ox_b y_b z_b$



$$C_b^n = C_b^g = (C_g^b)^T =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \sin \theta & \sin \psi \cos \theta & \sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \psi \sin \theta \\ -\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta & -\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \cos \psi \sin \theta \\ -\sin \gamma \cos \theta & \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix}$$

载体坐标系与地理坐标系之间的变换关系

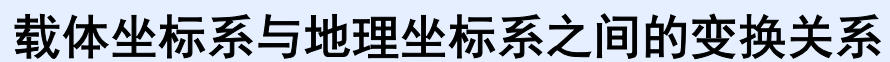


## 2. 位置矩阵

描述了地理坐标系与地球坐标系之间的关系，用经度 $\lambda$ 和纬度 $L$ 表示，定义如下：

设 $S$ 为地球表面一点， $S$ 的经纬度分别为  $\lambda$ 和 $L$ ，则 $S$ 点处的地理坐标系可由地球坐标系作三次旋转确定，即地球坐标系 $Ox_e y_e z_e$ 绕 $z_e$ 轴转角  $\lambda$ 得 $Ox' y' z'$ ，然后  $Ox' y' z'$ 绕  $y'$ 轴转角 $(90^\circ - L)$ 得 $Ox'' y'' z''$ ， $Ox'' y'' z''$ 再绕  $z''$ 轴转 $90^\circ$ ，则得载体坐标系 $Ox_g y_g z_g$

$$C_n^e = C_g^e = (C_e^g)^T = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\sin L \cos \lambda & \cos L \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin L \sin \lambda & \cos L \sin \lambda \\ 0 & \cos L & \sin L \end{bmatrix}$$



## 载体坐标系与地理坐标系之间的变换关系

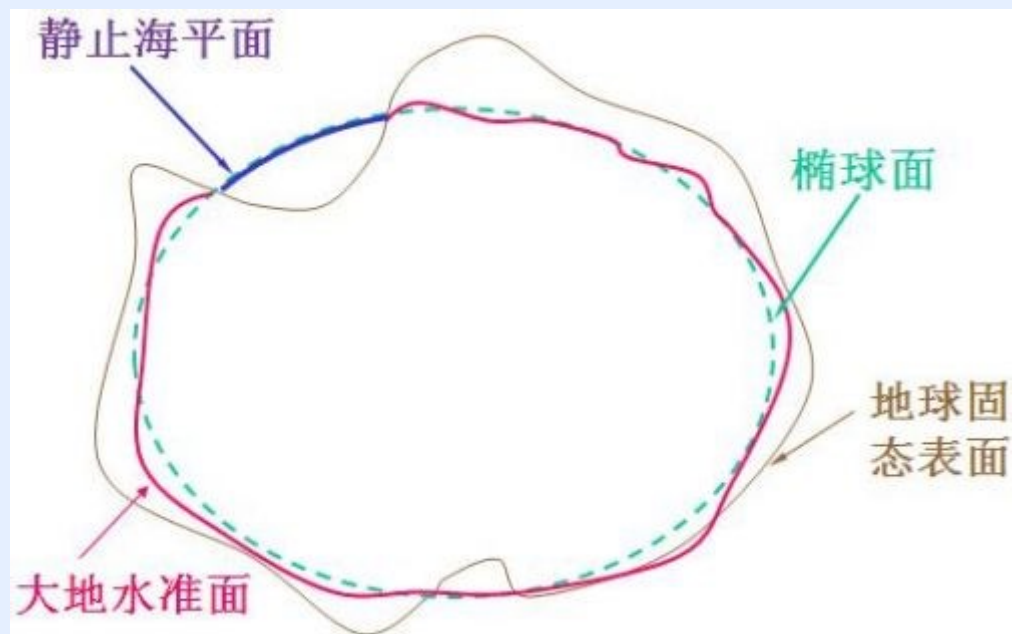


### 3、地球的描述

#### 1. 地球形状描述

地球具有不规则的形状，有三种近似的描述方式。

- (1) 大地水准面
- (2) 圆球
- (3) 参考旋转椭球体





### 3、地球的描述

#### 常用的参考旋转椭球体

名称	长半轴 (m) $R_p$	短半轴 (m) $R_e$	椭圆度 $f$
克拉索夫斯基	6378254	6356803	1/298.3
海德福	6378389	6356912	1/297.0
WGS-75	6378140	6356755	1/298.257
克拉克	6378206	6456584	1/295.0
WGS-84	6378137	6356752	1/298.257



# 地球的描述

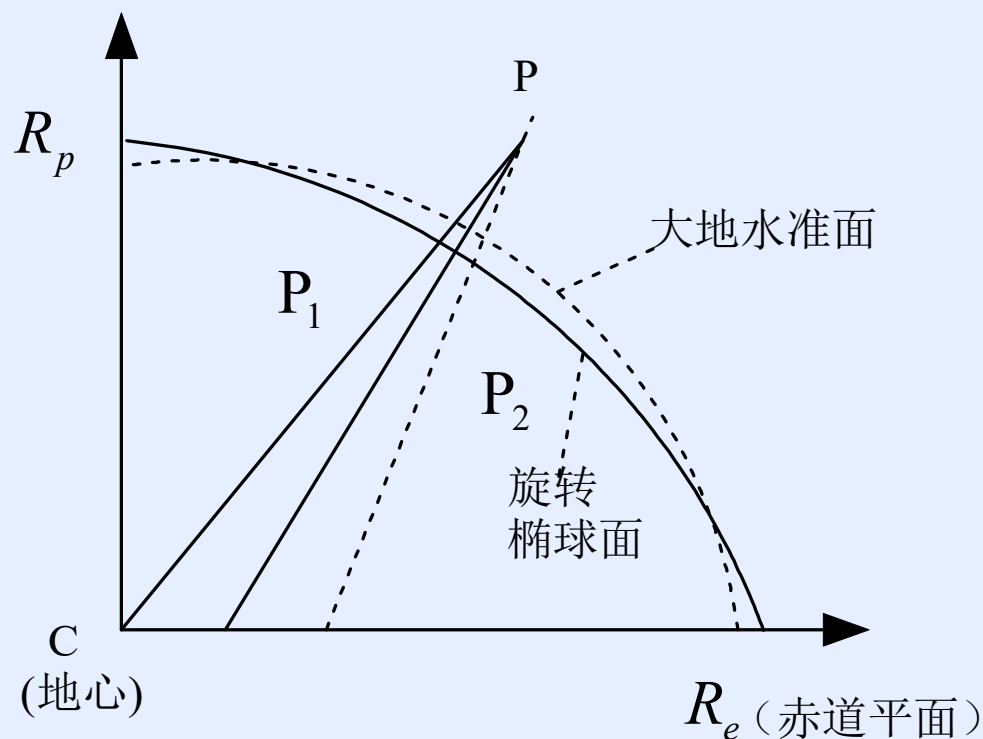
## 2. 垂线和纬度

P为地球表面一点。过P点分别向参考旋转椭球体和大地水准体作法线，分别交于P<sub>1</sub>和P<sub>2</sub>，由于该两几何面非常接近，所以P<sub>1</sub>和P<sub>2</sub>靠得很近。

天文垂线PP<sub>1</sub>和天文纬度 $L_g$

地理垂线PP<sub>2</sub>和地理纬度 $L$

地心垂线PC和地心纬度 $L_c$







# 地球的描述

## 3. 地球自转角速率

根据国际天文学会（IAU）提供的数据，地球自转角速率为

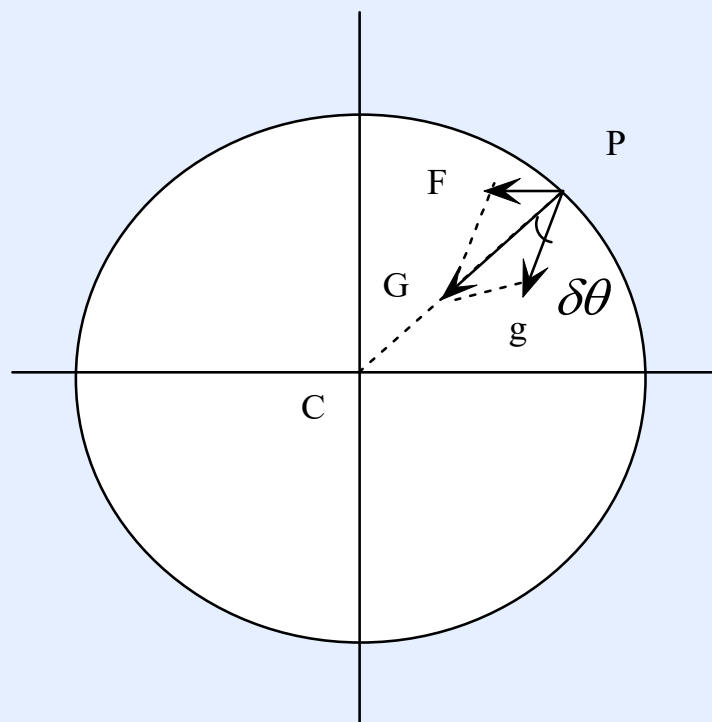
$$\omega_{ie} = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad} / \text{s} \approx 15.04108^\circ / \text{h}$$



# 地球的描述

## 4. 重力加速度

重力为万有引力的分量



重力加速度

$$g = g_0[1 + 0.00527094 \sin^2(L) + 0.0000232718 \sin^4(L)] - 0.000003086h$$

$$g_0 = 9.7803267714 m/s^2$$

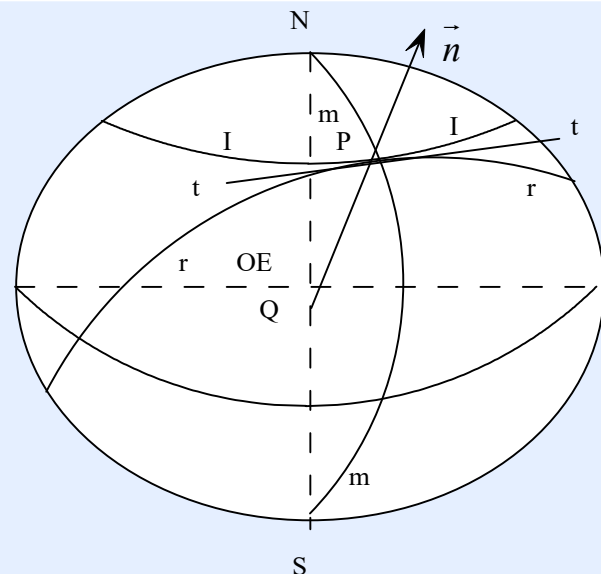


# 地球的描述

## 5. 主曲率半径

P点处沿子午圈的主曲率半径 $R_M$ :

P点处沿卯酉圈的主曲率半径 $R_N$  :



$$R_M = \frac{R_e (1-f)^2}{\left[ \cos^2 L + (1-f)^2 \sin^2 L \right]^{3/2}}$$

$$R_N = \frac{R_e}{\left[ \cos^2 L + (1-f)^2 \sin^2 L \right]^{1/2}}$$

一般计算中以上两式可简化为:

$$\begin{cases} R_M \approx R_e (1 - 2f + 3f \sin^2 L) \\ R_N \approx R_e (1 + f \sin^2 L) \end{cases}$$



## 4、矢量的叉乘

物理矢量表示：设有矢量 $r$ 和 $s$ ，则 $t=r \times s$ 的方向由右手定则确定，大小为  
 $t=|t|=|r| \cdot |s| \cdot \sin(r, s)$

设有数学矢量

$$\mathbf{r}^n = \begin{bmatrix} r_x^n & r_y^n & r_z^n \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{s}^n = \begin{bmatrix} s_x^n & s_y^n & s_z^n \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{t}^n = \mathbf{r}^n \times \mathbf{s}^n$$

则

$$\begin{bmatrix} t_x^n \\ t_y^n \\ t_z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z^n & r_y^n \\ r_z^n & 0 & -r_x^n \\ -r_y^n & r_x^n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x^n \\ s_y^n \\ s_z^n \end{bmatrix}$$

其中：

$$\mathbf{t}^n = \begin{bmatrix} t_x^n & t_y^n & t_z^n \end{bmatrix}^T$$



## 5、哥氏定理

哥氏定理用于描述绝对变化率与相对变化率间的关系。设有矢量 $r$ ， $m$ 和 $n$ 是两个作相对旋转的坐标系，则哥氏定理可描述为

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_m = \left. \frac{dr}{dt} \right|_n + \omega_{mn} \times r$$

其中， $\left. \frac{dr}{dt} \right|_m$ 和 $\left. \frac{dr}{dt} \right|_n$ 是分别在 $m$ 坐标系和 $n$ 坐标系内观察到的 $r$ 的时间变化率， $\omega_{mn}$ 是坐标系 $n$ 相对坐标系 $m$ 的旋转角速度。如果将上式两边的矢量都向 $m$ 坐标系投影，则有

$$\dot{r}^m = C_n^m \dot{r}^n + \omega_{mn}^m \times r^m$$

其中：

$$\dot{r}^m = \begin{bmatrix} \dot{r}_x^m & \dot{r}_y^m & \dot{r}_z^m \end{bmatrix}^T \quad \dot{r}^n = \begin{bmatrix} \dot{r}_x^n & \dot{r}_y^n & \dot{r}_z^n \end{bmatrix}^T$$



## 第6章 捷联惯性导航原理

- 6.1 捷联惯导系统介绍
- 6.2 捷联惯导的基本知识
- 6.3 捷联惯导算法
- 6.4 捷联惯导误差分析



## 6.3 捷联惯导算法

- 1、比力方程
- 2、速度计算
- 3、经纬度和高度计算
- 4、姿态计算
- 5、算法流程





## 比力和比力方程

载体的下列参数测量：

用尺子、激光测距仪等测量——位置

用空速管/多普勒雷达测量——速度

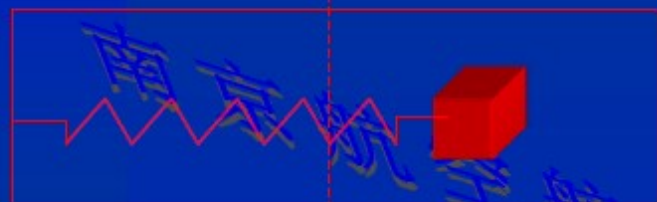
用陀螺测量——角速度

用加速度计测量——**加速度？（不确切）**

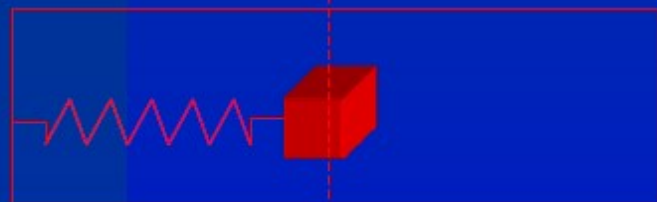


# 1、比力和比力方程

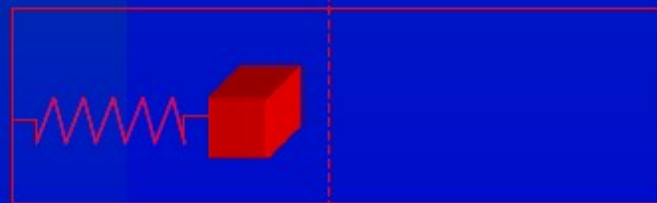
比力



$a$



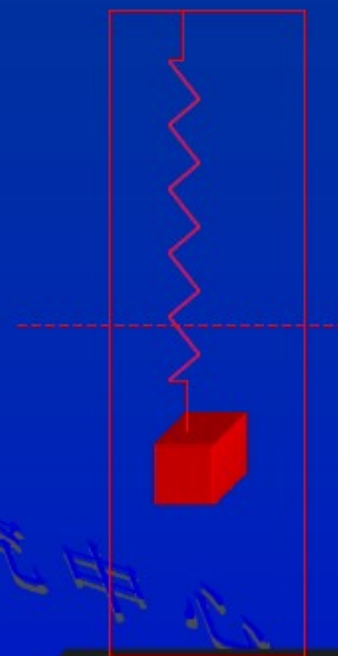
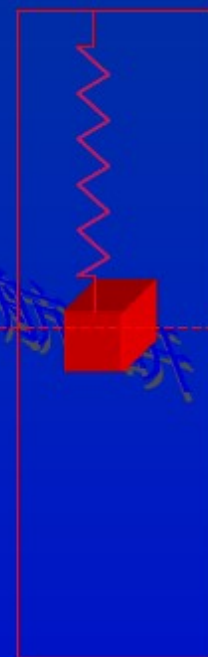
$a=0$



$a$



水平加速度




支撑桌面

自由落体

垂直加速度

设某质点P，质量为m，在**惯  
导坐标系**中的位置矢量为 $\vec{R}$ ，  
则由牛顿第二定律，有  $F = F_{\text{外}} + F_{\text{引}}$

因此，有


$$F_{\text{引}} = m\mathbf{G}$$

$$F_{\text{外}} + m\mathbf{G} = m\ddot{\mathbf{R}} \quad \text{或者} \quad \frac{F_{\text{外}}}{m} = \ddot{\mathbf{R}} - \mathbf{G}$$

确切地说：

加速度计测量的是载体相对惯性空间的绝对加速度和引力加速度之差，称为“比力”（specific force），而不是载体的运动加速度。

比力也称为“非引力加速度”，其定义是：

“作用在单位质量上的外力，而不是引力场的引力”，或“除引力外，其他作用力产生的加速度”。

比力定义式如下：

$$f = \frac{F_{\text{外}}}{m} = \ddot{R} - G$$

加速度计测量——测量的是惯性力（测量不到引力场）。

## ■ 比力方程

惯性导航中，由于加速度计不能直接测量导航坐标系下的加速度，**比力方程**是在特定导航坐标系下的比力与速度的关系方程。

设载体在地心惯性坐标系中的位置矢量为  $\vec{R}$ ，则利用矢量的**相对导数和绝对导数**的关系，载体位置矢量  $\vec{R}$  在地心**惯性坐标系**中的导数可表达为：

$$\left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{R} = \mathbf{v}_{en} + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{R}$$

其中， $\left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_e$  为载体相对地球的速度； $\boldsymbol{\omega}_{ie}$  为地球自转角速度； $\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{R}$  为地球自转产生的**牵连速度**。

$$\left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{R} = \mathbf{v}_{en} + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{R}$$

两边在惯性系中求导，

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \right|_i &= \left. \frac{d\mathbf{v}_{en}}{dt} \right|_i + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{R}) \Big|_i \\ &= \left. \frac{d\mathbf{v}_{en}}{dt} \right|_i + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \boxed{\left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_i} = \left. \frac{d\mathbf{v}_{en}}{dt} \right|_i + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\mathbf{v}_{en} + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{R}) \end{aligned}$$

由于  $\mathbf{v}_{en}$  的各分量是沿平台坐标系（导航坐标系）的，故以导航坐标系作为动坐标系，则

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_{en}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_{en}}{dt} \right|_n + \boldsymbol{\omega}_{in} \times \mathbf{v}_{en}$$

结合上式，有：

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_{en}}{dt} \right|_n + (2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}) \times \mathbf{v}_{en} + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{R})$$

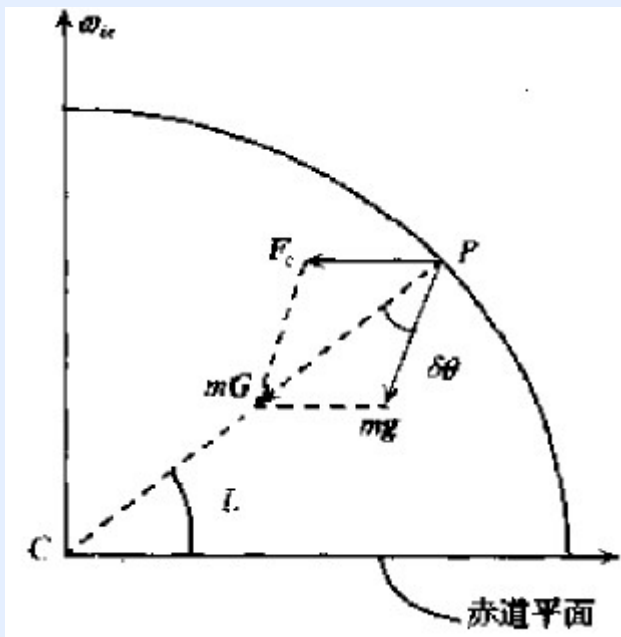
从而有：

$$\mathbf{f} + \mathbf{G} = \dot{\mathbf{v}}_{en} + (2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}) \times \mathbf{v}_{en} + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{R})$$





P为地球上某一点，该点纬度为L，P点处自由放置质量为m，则质量m受到地球的万有引力 $m\mathbf{G}$ 的作用，该力指向地心，同时维持质量m跟随地球旋转需要有外力提供向心力 $\mathbf{F}_c$ ，所以向心力实质上是万有引力的一个分量，用于维持质量m跟随地球旋转，重力 $m\mathbf{g}$ 是万有引力的另一个分量，因此有：



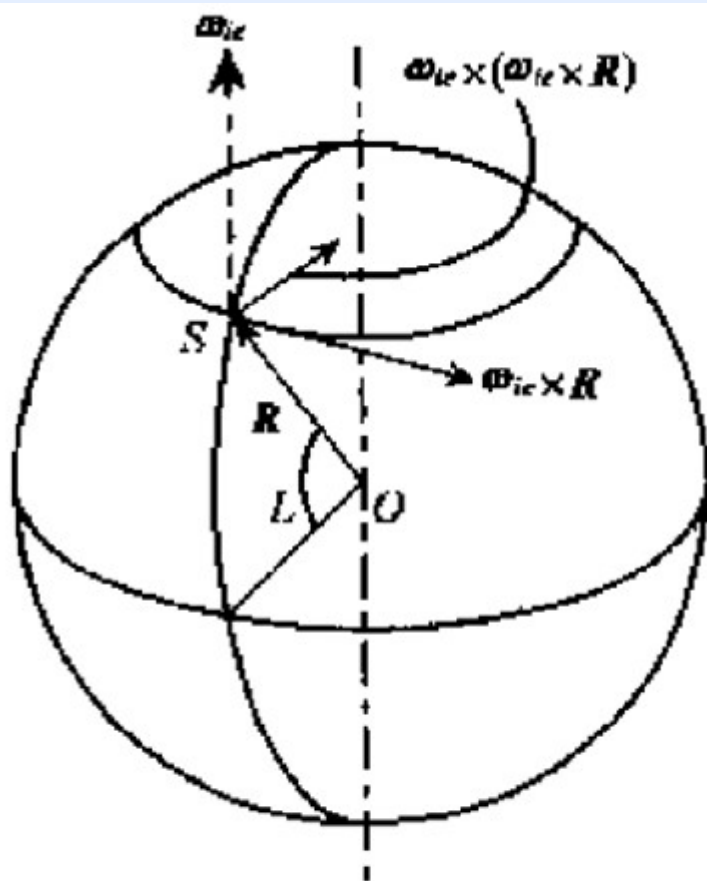
$$m\mathbf{G} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_c$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_c$$

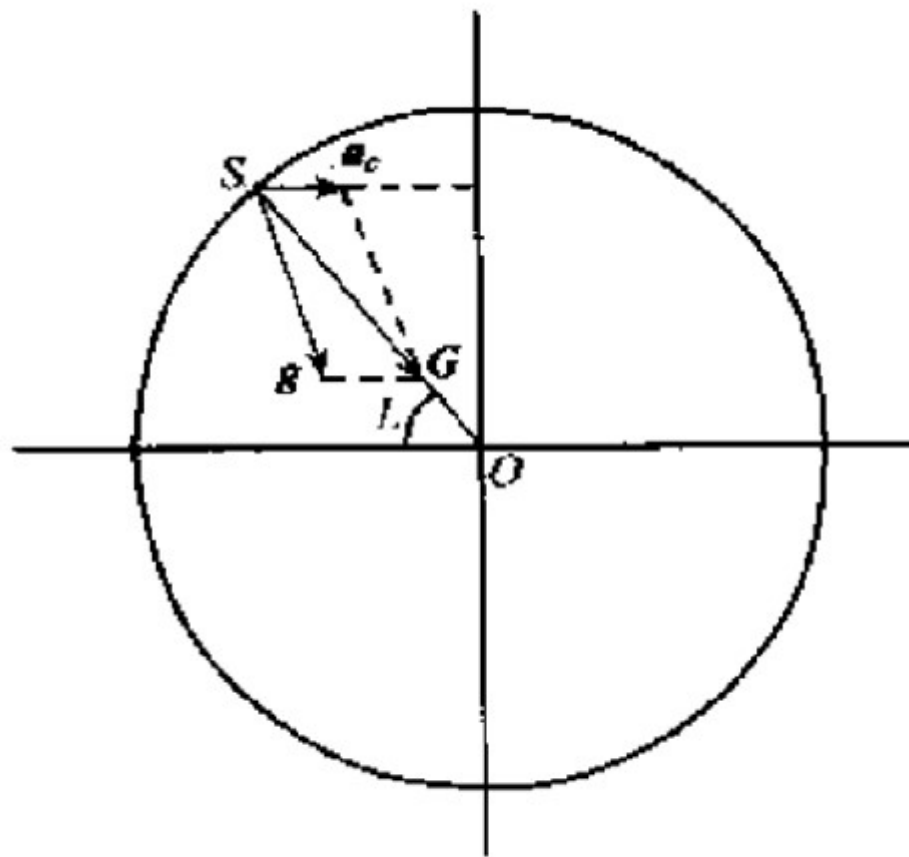
$\mathbf{a}_c = \mathbf{F}_c / m$  是P点处地球旋转引起的  
向心加速度。



# 向心加速度



(a)



(b)

$a_c = R \cos L \omega_{ie}^2$  方向指向地轴。

$$|\omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times R)| = \omega_{ie} \cdot (\omega_{ie} R \cos L) \sin 90^\circ = R \cos L \omega_{ie}^2$$

$$\text{由于 } f + G = \dot{v}_{en} + (2\omega_{ie} + \omega_{en}) \times v_{en} + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times R)$$

且：地球的重力场是地球引力和地球自转产生的离心  
作业：力的矢量和，即

$$g = G - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times R) \quad \text{或} \quad G = g + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times R)$$

从而有：

$$f = \dot{v}_{en} + (2\omega_{ie} + \omega_{en}) \times v_{en} - g$$

上式即是惯性导航中的一个基本方程——比力方程。  
比力方程说明了加速度计测量输出的比力中所包含的物理量。

## ■ 加速度信息的提取

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{v}}_{en} + (2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}) \times \mathbf{v}_{en} - \mathbf{g}$$

式中， $\mathbf{v}_{en}$  为平台（载体）相对地球坐标系的加速度；  
 $2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_{en}$  是载体的相对速度  $\mathbf{v}_{en}$  与牵连角速度  $\boldsymbol{\omega}_{ie}$  引起的哥式加速度； $\boldsymbol{\omega}_{en} \times \mathbf{v}_{en}$  为法向加速度； $\mathbf{g}$  为重力加速度。

可以将比力方程改写为所需加速度求取形式：

$$\dot{\mathbf{v}}_{en} = \mathbf{f} - \mathbf{a}_B = \mathbf{f} - [(2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}) \times \mathbf{v}_{en} - \mathbf{g}]$$

将其写在平台坐标系（导航坐标系）中的形式为：

$$\dot{\mathbf{v}}_{en}^n = \mathbf{f}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}_{en}^n + \mathbf{g}^n$$

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{f}_{sf}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n$$



## 2速度计算

由比力方程  $\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{f}_{sf}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n$  积分可得

增量形式  $\mathbf{v}_m^n = \mathbf{v}_{m-1}^n + \Delta \mathbf{v}_{sf_m}^n + \Delta \mathbf{v}_{g/corm}^n$

其中

$$\Delta \mathbf{v}_{g/corm}^n = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \mathbf{g}^n - (\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \times \mathbf{v}^n dt \quad \text{为重力/哥氏速度增量}$$

$$\Delta \mathbf{v}_{sf_m}^n = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{sf}^b dt \quad \text{为比力速度增量}$$



### 3、经纬度和高度计算

由位置更新  
微分方程

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \frac{v_N^n}{R_M + h} \\ \dot{\lambda} &= \frac{v_E^n}{R_N + h} \sec L \\ \dot{h} &= v_U^n\end{aligned}$$

积分可得：

$$\begin{aligned}L_m &= L_{m-1} + \frac{v_{Nm-1}^n}{R_{Mm-1} + h_{m-1}} \\ \lambda_m &= \lambda_{m-1} + \frac{v_{Em-1}^n}{R_{Nm-1} + h_{m-1}} \sec L_{m-1} \\ h_m &= h_{m-1} + v_{Um-1}^n\end{aligned}$$



## 4、姿态计算

对于姿态矩阵的元素和姿态角、航向角之间的关系有变换矩阵

$$\begin{aligned} C_n^b &= \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \sin \theta & -\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \sin \theta & -\sin \gamma \cos \theta \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \psi \sin \theta & -\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \cos \psi \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= (C_b^n)^T \end{aligned}$$

由姿态更新求出姿态矩阵，则航向角 $\psi$ 、俯仰角 $\theta$ 和横滚角 $\gamma$ 就可以从姿态矩阵中提取。姿态算法的关键在于获得姿态变换矩阵  $C_b^n$



## 4、姿态计算

目的：获得姿态变换矩阵  $C_b^n$

已知：陀螺的角速率输出  $\omega_{ib}^b$

方法：通过空间关系变换的微分方程





## 1、欧拉角法（三参数法） $\theta, \gamma, \psi$

直接获得3个姿态角——

## 2、四元数法（四参数法）

先获得四元数，再转换为姿态转换矩阵

## 3、方向余弦法（九参数法） $C_b^n$

直接获得姿态转换矩阵——

## 4、等效旋转矢量算法

先获得角增量的等效旋转矢量，在转换为四元数，再转换为姿态转换矩阵。



## 姿态计算前传

- 机体姿态角的定义： $\theta$ 、 $\gamma$ 、 $\psi$ （俯仰、横滚、航向角）
- 从地理系n到机体系b的一种转动方法：

$$X_n Y_n Z_n \xrightarrow[-OZ_n]{-\psi} X'_b Y'_b Z'_b \xrightarrow[-OX'_b]{\theta} X''_b Y''_b Z''_b \xrightarrow[-OY''_b]{\gamma} X_b Y_b Z_b$$

- 不同的转动方法，角度的意义和定义不同。



$ox_n y_n z_n$  为地理坐标系

$ox_b y_b z_b$

$-\psi$

$ox_a y_a z_0$

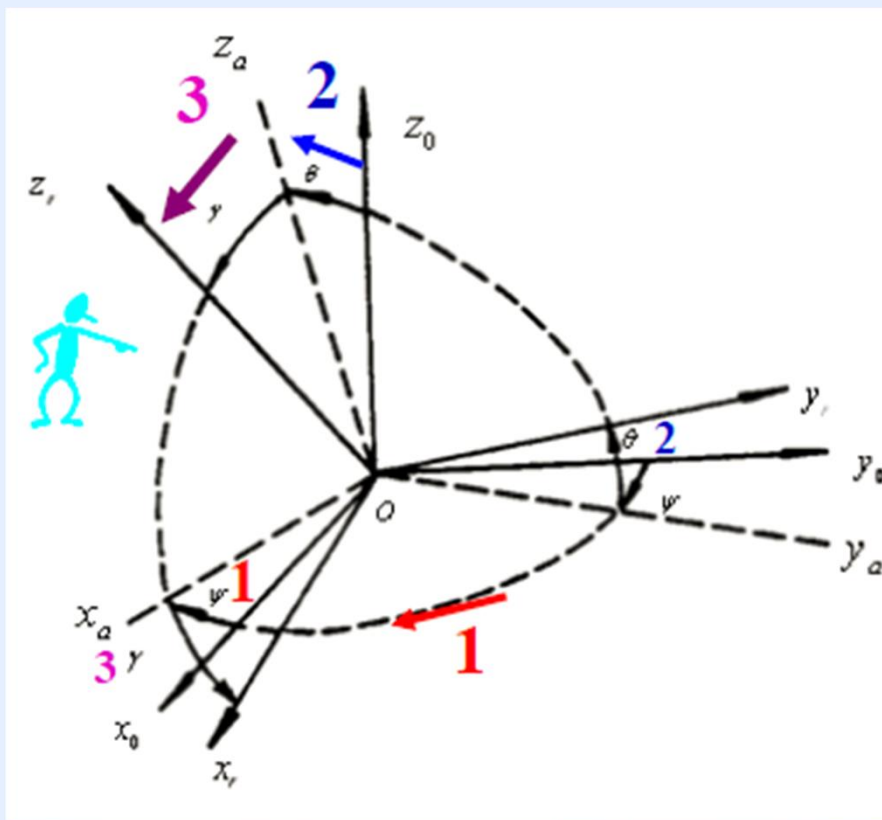
$\theta$

$ox_a y_\gamma z_a$

$\gamma$

$ox_\gamma y_\gamma z_\gamma$

载体坐标系





$$C_n^b = C_\gamma C_\theta C_\psi$$

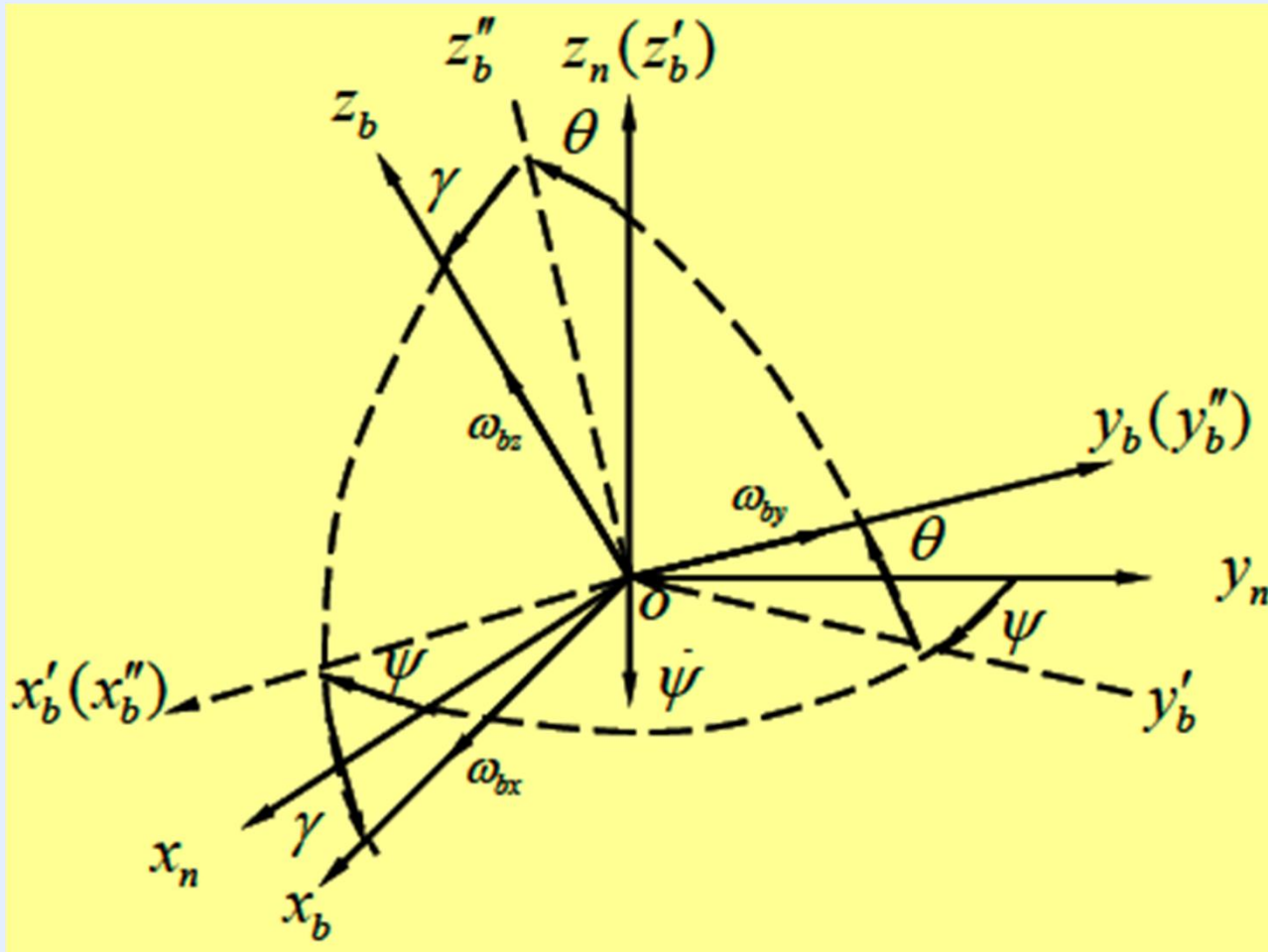
$$= \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \theta \sin \psi & -\cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \theta \sin \psi & -\sin \gamma \cos \theta \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \theta \sin \psi & -\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \sin \theta \cos \psi & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix}$$

**注意：** $C_n^b$  是正交阵，即  $C_b^n = [C_n^b]^{-1} = [C_n^b]^T$



## (1)、欧拉角法（三参数法）



$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = M_{euler} \begin{bmatrix} \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b \end{bmatrix}$$



## 欧拉角微分方程：

由机体系b和地理系n之间的关系，可以得到 $\omega_{nb}^b$  的关系：

$$\begin{aligned}\omega_{nb}^b &= \begin{bmatrix} \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b \end{bmatrix} = C_1^b \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 1 \\ -\cos \theta \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

欧拉角微分方程是与姿态角定义、旋转顺序等相关的



$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \sin \gamma & 0 & -\cos \gamma \\ \cos \gamma \cos \theta & 0 & \sin \gamma \cos \theta \\ \sin \gamma \sin \theta & 1 & -\cos \gamma \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b \end{bmatrix}$$

**问题：**在俯仰角接近90度时，退化。不能全姿态工作，因此只适应姿态变化不大的情形。



注意：这两个角速率矢量  
定义是不同的！

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b \end{bmatrix}$$

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - (\omega_{ie}^b + \omega_{en}^b)$$

机体系相对地理  
系的角速率矢量

陀螺实际输出





## (2)、四元数法（四参数法）

四元数法是一种数学间接的方法；  
用四元数的微分方程计算代替方向余弦矩阵微分方程的计算，减小计算量；  
而且达到了更好的效果。



- 1833年，英国数学家B. P哈密顿开始研究他所建立的四元数理论，为研究空间几何找到类似复数形式那样的简便方法；
- 1843年，B. P哈密顿首先在数学中引入四元数，作为四维线性代数的形式数学模式的范例，著作：《四元数讲义》，《四元数基础》
- 最近的理论书籍——1977年国防工业出版社翻译出版的由（苏）B. H. 勃拉涅茨，И. П. 什梅格列夫斯基所著的：《四元数在刚体定位问题中的应用》





## 四元数的定义

$$\boldsymbol{Q} = q_0 + q_1 \boldsymbol{i} + q_2 \boldsymbol{j} + q_3 \boldsymbol{k}$$

## 四元数的常用表示方法

$$\boldsymbol{Q} = q_0 + \boldsymbol{q}$$

矢量式

$$\boldsymbol{Q} = \cos \frac{\theta}{2} + \boldsymbol{u} \sin \frac{\theta}{2}$$

三角式

$$\boldsymbol{Q} = q_0 + q_1 \boldsymbol{i} + q_2 \boldsymbol{j} + q_3 \boldsymbol{k} \quad \text{复数式} \quad \boldsymbol{Q}^* = q_0 - q_1 \boldsymbol{i} - q_2 \boldsymbol{j} - q_3 \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{Q} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad \text{矩阵式}$$

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} &= -1, & \boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{j} &= -1, & \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{k} &= -1 \\ \boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{j} &= \boldsymbol{k}, & \boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{i} &= \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{i} &= -\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{j} &= -\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{k} &= -\boldsymbol{j} \end{aligned} \right\}$$



➤ 1. 四元数的常用表示方法

**规范化四元数：**  $\|Q\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$

对非规范化四元数进行**规范化（归一化）**：

$$q_i|_{new} = q_i / \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$



➤ 2. 四元数的加法、乘法

设:  $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_{1i} + \lambda_{2j} + \lambda_{3k}$

$$P = p_0 + p_{1i} + p_{2j} + p_{3k}$$

则乘积为:

$$Q = \Lambda \otimes P = q_0 + q_{1i} + q_{2j} + q_{3k}$$



$$Q = \Lambda \otimes P = q_0 + q_{1i} + q_{2j} + q_{3k}$$

以矩阵形式表示：

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

即：

$$Q(Q) = M(\Lambda)Q(P)$$

也等效为： $Q(Q) = M^*(P)Q(\Lambda)$

$M^*(P)$  与  $M(\Lambda)$  比较，除元素不同外，其核互相转置。

不满足交换律，满足分配律和结合律。

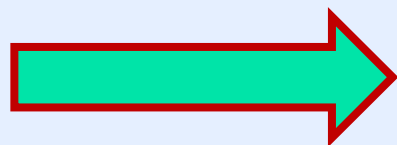


➤ 3. 四元数除法

$$\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{R} = 1$$

$$\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{P}^* = \|\boldsymbol{P}\|$$

即:  $\boldsymbol{P} \otimes \frac{\boldsymbol{P}^*}{\|\boldsymbol{P}\|} = 1$



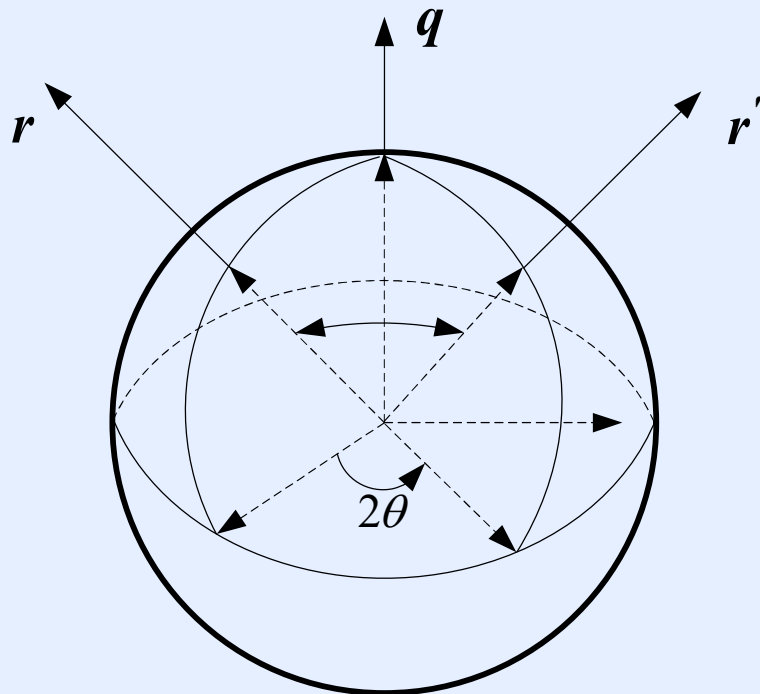
$$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{\boldsymbol{P}^*}{\|\boldsymbol{P}\|}$$



➤ 4. 四元数与转动

$$\mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{q} = \sqrt{\|\mathbf{Q}\|}(\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta)$$

$$\mathbf{R} = r_0 + \mathbf{r} = \sqrt{\|\mathbf{R}\|}(\cos \Phi + \mathbf{e} \sin \Phi)$$



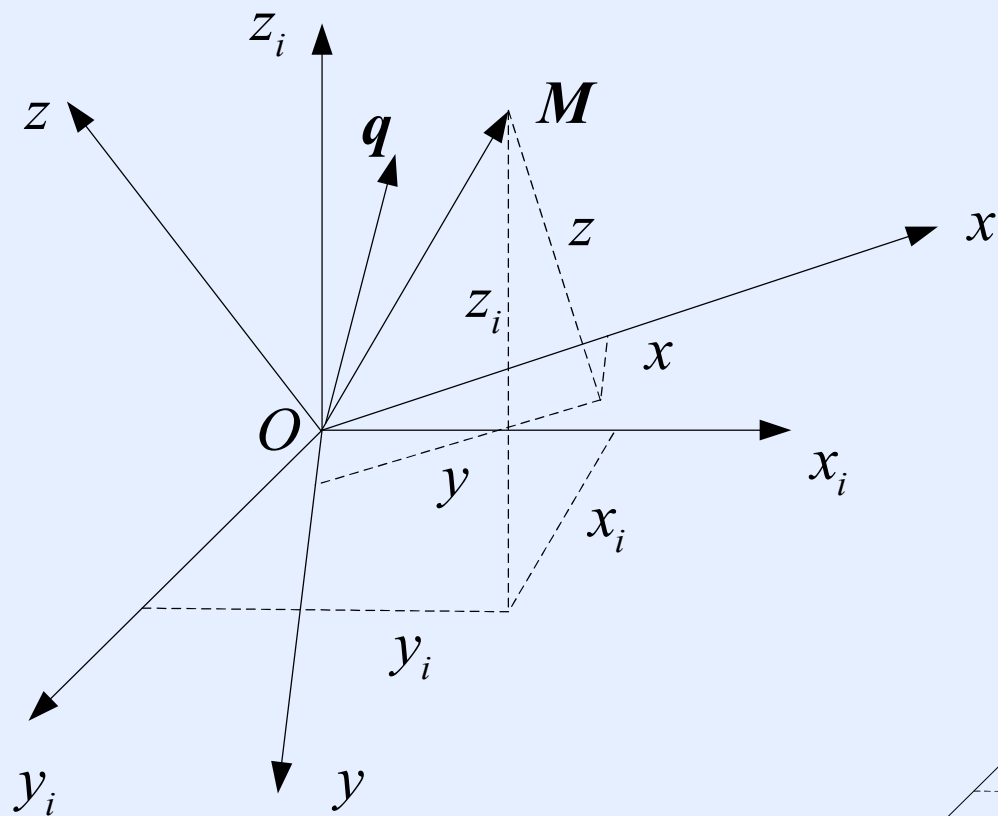
$$\mathbf{R}' = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{R} \otimes \mathbf{Q}^{-1} = r_0' + \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\theta}{2} + \boldsymbol{\xi} \sin \frac{\theta}{2}$$





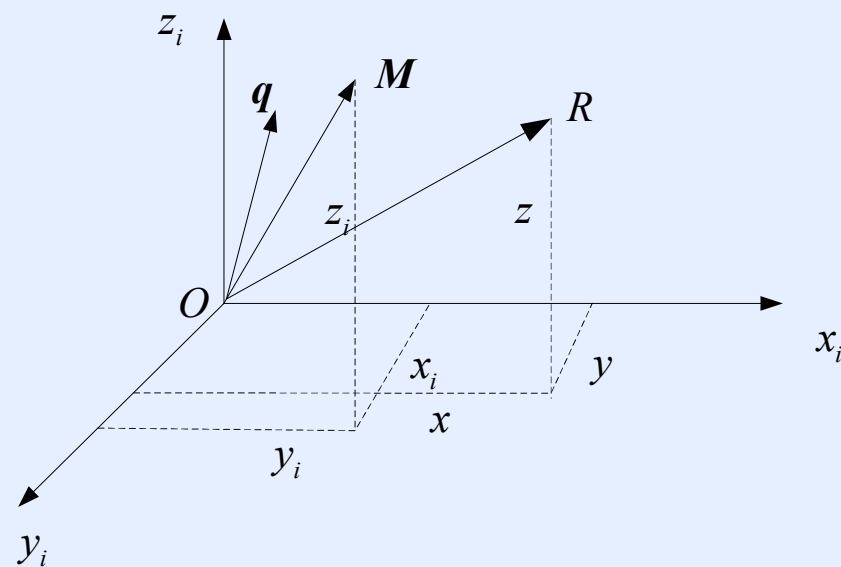
## ➤ 5. 四元数与方向余弦矩阵的关系



$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3; \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$$

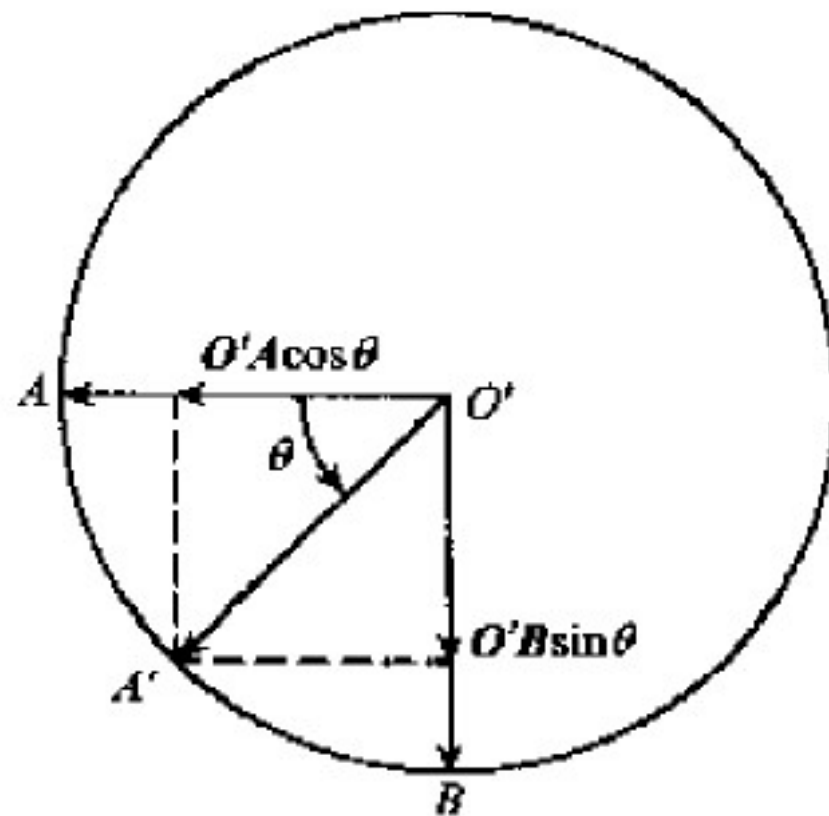
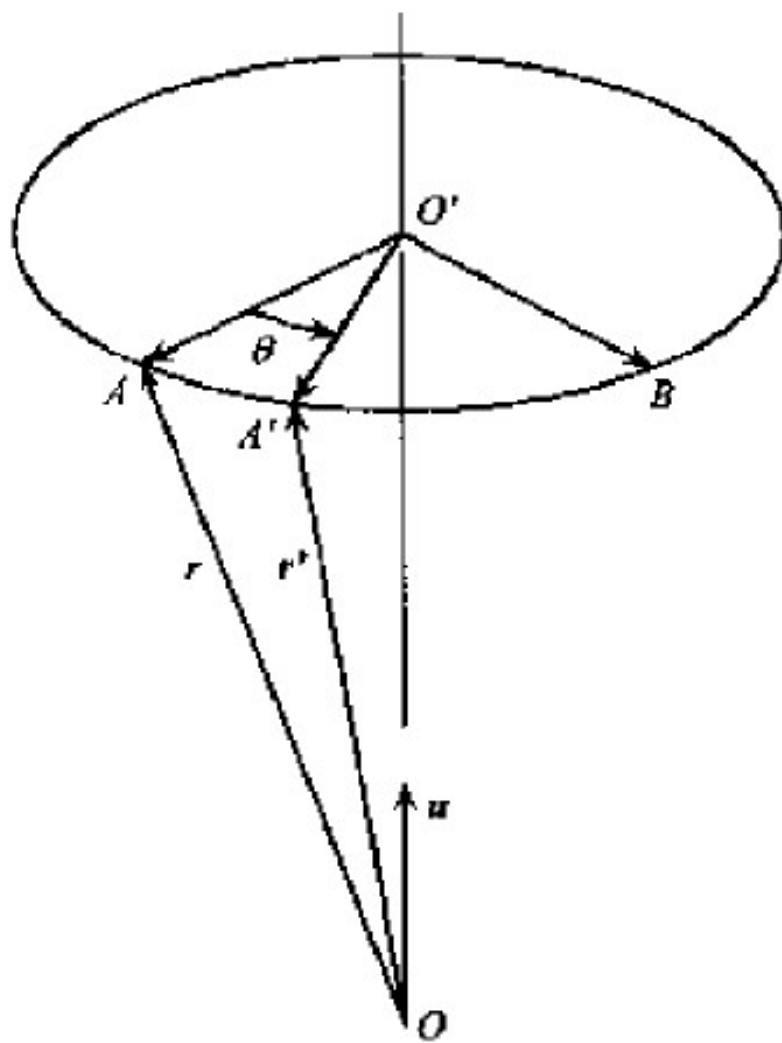
$$\mathbf{OM} = x_i \mathbf{i}_1 + y_i \mathbf{i}_2 + z_i \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{OM} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3$$





## ➤ 四元数与转动





## ➤ 四元数与转动

$$\begin{aligned} C_b^R = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 0 & -n\sin \frac{\theta}{2} & m\sin \frac{\theta}{2} \\ n\sin \frac{\theta}{2} & 0 & -l\sin \frac{\theta}{2} \\ -m\sin \frac{\theta}{2} & l\sin \frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ & + 2 \begin{bmatrix} -(m^2 + n^2)\sin^2 \frac{\theta}{2} & l\sin^2 \frac{\theta}{2} & l\sin^2 \frac{\theta}{2} \\ l\sin^2 \frac{\theta}{2} & -(l^2 + n^2)\sin^2 \frac{\theta}{2} & m\sin^2 \frac{\theta}{2} \\ l\sin^2 \frac{\theta}{2} & m\sin^2 \frac{\theta}{2} & -(m^2 + l^2)\sin^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$\mathbf{R} = 0 + x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{R}_i = 0 + x_i\mathbf{i}_1 + y_i\mathbf{i}_2 + z_i\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{R} \otimes \mathbf{Q}^{-1}$$

$$\mathbf{Q} = q_0 + q_1\mathbf{i}_1 + q_2\mathbf{i}_2 + q_3\mathbf{i}_3 \quad , \quad \mathbf{Q}^{-1} = q_0 - q_1\mathbf{i}_1 - q_2\mathbf{i}_2 - q_3\mathbf{i}_3$$

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



从  $\mathbf{R}^n = [0 \quad X_n \quad Y_n \quad Z_n]^T$

$$\mathbf{R}^b = [0 \quad X_b \quad Y_b \quad Z_b]^T$$

则  $\mathbf{R}^n = \Lambda \otimes \mathbf{R}^b \otimes \Lambda^{-1}$

$$\mathbf{R}^b = \Lambda^{-1} \otimes \mathbf{R}^n \otimes \Lambda$$

其中：  $\Lambda^{-1} = \Lambda^* = \cos(\sigma / 2) - n \sin(\sigma / 2)$

是  $\Lambda$  的共轭四元数。

刚体的定点转动 —— 无中间过程的一次等效转动



$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

三者关系的意义：

$$Q(\Lambda) \Leftrightarrow \mathbf{C}_n^b(\psi, \theta, \gamma) \Leftrightarrow \psi, \theta, \gamma$$

如果  $\psi, \theta, \gamma$  角已知，则可以直接得到  $Q(\Lambda)$ ，即：



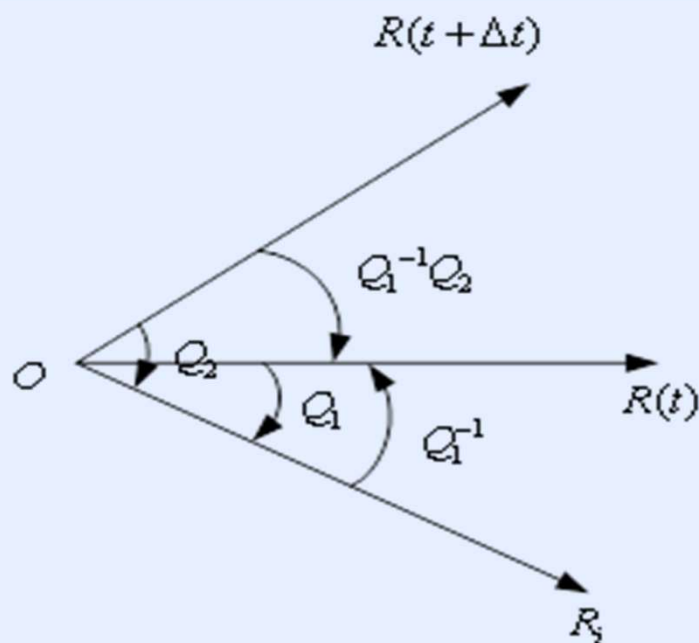
$Q(\Lambda)$  即

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \lambda_1 &= \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \lambda_2 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \lambda_3 &= \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore \psi, \theta, \gamma \Rightarrow Q(\Lambda)$$



## 6、四元数运动学微分方程



$$R_i(t) = Q_1 \otimes R(t) \otimes Q_1^{-1}$$

$$R_i(t + \Delta t) = Q_2 \otimes R(t + \Delta t) \otimes Q_2^{-1}$$

$$\Delta\theta = |\omega| \Delta t$$

$$\xi = \frac{\omega}{|\omega|}$$

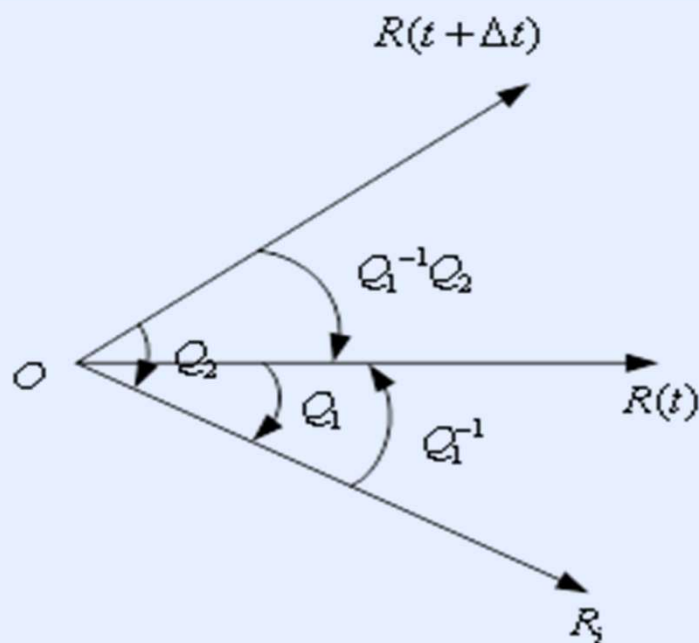
$$Q_1^{-1} \otimes Q_2 = \cos \frac{|\omega| \Delta t}{2} + \xi \sin \frac{|\omega| \Delta t}{2}$$

$$Q_2 = Q_1 \left( \cos \frac{|\omega| \Delta t}{2} + \xi \sin \frac{|\omega| \Delta t}{2} \right)$$

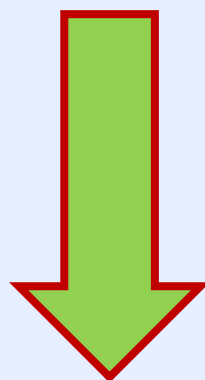




## 四元数运动学微分方程



$$\begin{aligned}\dot{Q}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q_2 - Q_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q_1}{\Delta t} \left( \cos \frac{|\omega| \Delta t}{2} + \xi \sin \frac{|\omega| \Delta t}{2} - 1 \right) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q_1}{\Delta t} \left[ 1 - \left( \frac{|\omega| \Delta t}{2} \right)^2 + \dots - 1 + \xi \left( \frac{|\omega| \Delta t}{2} \right) - \dots \right]\end{aligned}$$



$$\dot{Q} = \frac{1}{2} Q \otimes \omega_{Rb}^R$$



## 四元数运动学微分方程

$$\Lambda' = \frac{1}{2} \Lambda \otimes \omega_{nb}^b$$

其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \lambda'_0 \\ \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \lambda'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nbx}^b & -\omega_{nby}^b & -\omega_{nbz}^b \\ \omega_{nby}^b & 0 & \omega_{nbz}^b & -\omega_{nbx}^b \\ \omega_{nbx}^b & -\omega_{nbz}^b & 0 & \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nbz}^b & \omega_{nby}^b & -\omega_{nby}^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \omega_{nb}^b &= \omega_{ib}^b - \omega_{ie}^b - \omega_{en}^b \\ &= \omega_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \end{aligned}$$



其等效的矩阵矢量形式为：

$$\begin{aligned} Q(\Lambda') &= \frac{1}{2} M(\Lambda) Q(\omega_{nb}^b) \\ &= \frac{1}{2} M^*(\omega_{nb}^b) Q(\Lambda) \end{aligned}$$



## 关于四元数微分方程的解 一阶迭代法

$$\because Q(\Lambda') \Rightarrow \{Q(\Lambda_{k+1}) - Q(\Lambda_k)\} / T$$

$$\because Q(\Lambda_{k+1}) = Q(\Lambda_k) + \frac{1}{2} TM^*(\omega_{nb}^b) Q(\Lambda_k)$$

$$= \{I + \frac{1}{2} TM^*(\omega_{nb}^b)\} Q(\Lambda_k)$$

龙格库塔法



## ■ 毕卡解法

定时采样增量法 (激光陀螺输出)

$$\Delta\Theta = \int_{t_k}^{t_{k+1}} M'(\omega_{pb}^b) dt$$

$$Q(t_{k+1}) = e^{\frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} M'(\omega_{pb}^b) dt} \cdot Q(t_k)$$



$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} dt$$

$$Q(t_{k+1}) = e^{\frac{1}{2} \Delta\Theta} \cdot Q(t_k)$$



泰勒展开

$$= \left[ I + \frac{1}{2} \Delta\Theta + \frac{(\frac{1}{2} \Delta\Theta)^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{2} \Delta\Theta)^3}{3!} + \dots \right] \cdot Q(t_k)$$



$$= \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\Delta\theta_z \\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ \Delta\theta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(t_{k+1}) = \left\{ I + \frac{\Delta\Theta}{2} - \frac{(\frac{\Delta\Theta}{2})^2}{2!} I - \frac{(\frac{\Delta\Theta}{2})^2 \Delta\Theta}{3!} + \frac{(\frac{\Delta\Theta}{2})^4}{4!} I + \frac{(\frac{\Delta\Theta}{2})^4 \Delta\Theta}{5!} - \frac{(\frac{\Delta\Theta}{2})^6}{6!} I \dots \right\} \cdot Q(t_k)$$

$$= \left\{ I \left[ 1 - \frac{(\frac{\Delta\Theta}{2})^2}{2!} + \frac{(\frac{\Delta\Theta}{2})^4}{4!} - \frac{(\frac{\Delta\Theta}{2})^6}{6!} + \dots \right] + \right.$$

$$\left. \frac{\Delta\Theta}{2} \left[ \frac{\Delta\Theta}{1!} - \frac{(\frac{\Delta\Theta}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{\Delta\Theta}{2})^5}{5!} - \dots \right] \frac{1}{\frac{\Delta\Theta}{2}} \right\} \cdot Q(t_k)$$

$$= \left\{ I \cos \frac{\Delta\Theta}{2} + \Delta\Theta \frac{\sin \frac{\Delta\Theta}{2}}{\Delta\Theta} \right\} \cdot Q(t_k)$$



## ■ 毕卡解法

定量采样增量法——达到固定值再更新。

$$Q(t_{k+1}) = \left\{ I \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} + \Delta\theta_x \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} \right\} \cdot Q(t_k)$$

$$Q(t_{k+2}) = \left\{ I \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} + \Delta\theta_y \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} \right\} \cdot Q(t_{k+1})$$

$$Q(t_{k+3}) = \left\{ I \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} + \Delta\theta_z \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} \right\} \cdot Q(t_{k+2})$$

$$Q(t_{k+1}) = \boxed{U_j} Q(t_k) \rightarrow \text{预先存储}$$

$$\Delta\theta_x = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_0 & 0 & 0 \\ \Delta\theta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta\theta_0 \\ 0 & 0 & -\Delta\theta_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta\theta_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Delta\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta\theta_0 \\ \Delta\theta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\theta_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta\theta_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\Delta\theta_0 \\ 0 & 0 & \Delta\theta_0 & 0 \\ 0 & -\Delta\theta_0 & 0 & 0 \\ \Delta\theta_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## ■ 四元数初值，规范化

$$C_b^n = [T_{ij}]$$

$$\begin{cases} |q_1| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + T_{11} - T_{22} - T_{33}} \\ |q_2| = \frac{1}{2} \sqrt{1 - T_{11} + T_{22} - T_{33}} \\ |q_3| = \frac{1}{2} \sqrt{1 - T_{11} - T_{22} + T_{33}} \\ |q_0| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + T_{11} + T_{22} + T_{33}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4q_1q_0 = T_{32} - T_{23} \\ 4q_2q_0 = T_{13} - T_{31} \\ 4q_3q_0 = T_{21} - T_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{sign}(q_1) = \text{sign}(q_0)[\text{sign}(T_{32} - T_{23})] \\ \text{sign}(q_2) = \text{sign}(q_0)[\text{sign}(T_{13} - T_{31})] \\ \text{sign}(q_3) = \text{sign}(q_0)[\text{sign}(T_{21} - T_{12})] \end{cases}$$

$$q_i = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}}, i = 0, 1, 2, 3$$



### (3)、方向余弦法（九参数法）

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \boldsymbol{\omega}_{nb}^{bk} \mathbf{C}_b^n$$

方向余弦矩阵微分方程的**建立**

设一个与机体系固连的任意的矢量 $\mathbf{r}$ ，在地理系和机体系上的投影为：

$$\mathbf{r}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{r}_b$$

当机体系b相对地理系n有一个转动角速度  $\boldsymbol{\omega}_{nb}$  存在，如果认为n系不动，b系动（或反之也可）。

则：

$$\mathbf{r}_b' = \mathbf{0} \quad \mathbf{r}_n' \neq \mathbf{0}$$





## 方向余弦矩阵微分方程的建立

$$\mathbf{r}_b' = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}_n' \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{r}_b$$

$$\therefore \mathbf{r}_n' = \mathbf{C}_b^{n'} \mathbf{r}_b + \mathbf{C}_b^n \mathbf{r}_b' = \mathbf{C}_b^{n'} \mathbf{r}_b \quad (1)$$

又，由哥式求导定理，得：

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_n = \left. \frac{dr}{dt} \right|_b + \boldsymbol{\omega}_{nb} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}_{nb} \times \mathbf{r}$$

将叉乘矩阵化



$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_n = \left. \frac{dr}{dt} \right|_b + \boldsymbol{\omega}_{nb} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}_{nb} \times \mathbf{r}$$

方向余弦矩阵微分方程的建立

将上式在地理系上投影，有：

$$\mathbf{r}'_n = \mathbf{C}_b^{n'} \mathbf{r}_b + \mathbf{C}_b^n \mathbf{r}'_b = \mathbf{C}_b^{n'} \mathbf{r}_b$$

3×3矩阵

$$\mathbf{r}'_n = \boldsymbol{\omega}_{nb} \times \mathbf{r}_n = \boldsymbol{\omega}_{nb} \times \mathbf{C}_b^n \mathbf{r}_b \quad (2)$$

将（1）式代入（2）式，可得：

$$\mathbf{C}_b^{n'} \mathbf{r}_b = \boldsymbol{\omega}_{nb} \times \mathbf{C}_b^n \mathbf{r}_b$$



$$\mathbf{C}_b^{n'} = \boldsymbol{\omega}_{nb} \times \mathbf{C}_b^n$$



则解如下方程：

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \boldsymbol{\omega}_{nb}^{nk} \mathbf{C}_b^n \longrightarrow \dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\omega}_{nb}^{nk} \quad \boldsymbol{\omega}_{nb}^{nk} = \boldsymbol{\omega}_{nb}^n \times$$

这是一个变系数的齐次微分方程组，可用毕卡逼近法求之，其一般解析形式为：

$$\mathbf{C}_b^n(t) = \mathbf{C}_b^n(0) e^{\left\{ \int_0^t \boldsymbol{\omega}_{nb}^{nk}(t) dt \right\}}$$

特点：

1. 可以全姿态工作，不受限制；
2. 微分方程组的维数太高，达到了九维；
3. 运算过程中会有非正交化误差产生，必须每次进行正交化处理。



## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——旋转矢量与姿态四元数的关系

毕卡算法求解四元数微分方程时使用了陀螺的角增量输出，角增量虽然微小，而刚体做有限转动时，刚体的空间角位置与旋转次序有关，即存在旋转的不可交换性误差，等效旋转矢量法在利用角增量计算等效旋转矢量时，对这种不可交换性误差做了适当的补偿，在姿态更新周期内角增量量子样数越多，补偿就越精确。

等效旋转矢量法分两步来完成：（1）旋转矢量的计算。旋转矢量描述了飞行器姿态的变化。（2）四元数的更新。四元数描述了飞行器相对参考坐标系的实时方位。



## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——旋转矢量与姿态四元数的关系

$$\begin{array}{ccccc} t_k & b(k) & \xleftarrow{q(h)} & n(k) & \xleftarrow{p(h)} \\ & & & & h = t_{k+1} - t_k \\ t_{k+1} & b(k+1) & \xleftarrow{q(h)} & n(k+1) & \end{array}$$

$$\mathbf{r}^{n(k+1)} = \mathbf{C}_{b(k+1)}^{n(k+1)} \mathbf{r}^{b(k+1)}$$

$$\mathbf{r}^{n(k+1)} = \mathbf{Q}(t_{k+1}) \mathbf{r}^{b(k+1)} \mathbf{Q}^*(t_{k+1})$$

$$\mathbf{r}^{n(k+1)} = \mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)} \mathbf{C}_{b(k)}^{n(k)} \mathbf{C}_{b(k+1)}^{b(k)} \mathbf{r}^{b(k+1)}$$

$$\mathbf{Q}(t_{k+1}) = \mathbf{p}^*(h) \otimes \mathbf{Q}(t_k) \otimes \mathbf{q}(h)$$



## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——旋转矢量与姿态四元数的关系

$$\mathbf{Q}(t_{k+1}) = \mathbf{p}^*(h) \otimes \mathbf{Q}(t_k) \otimes \mathbf{q}(h)$$

$$h = t_{k+1} - t_k$$

$$\mathbf{p}(h) \approx 1 + 0$$

$$\begin{matrix} n(k) \\ n(k+1) \end{matrix} \leftarrow \mathbf{p}(h)$$

$$b(k) \quad b(k+1) \quad \text{等效旋转矢量}$$

$$\Phi = |\Phi|$$

$$\mathbf{Q}(t_{k+1}) = \mathbf{Q}(t_k) \otimes \mathbf{q}(h) \quad \mathbf{q}(h) = \cos \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi}{\Phi} \sin \frac{\Phi}{2}$$

姿态四元数

姿态变化四元数



## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——旋转矢量微分方程

$$Q(t) = Q(t_k) \otimes q(t - t_k) \quad \leftarrow \quad Q(t_{k+1}) = Q(t_k) \otimes q(h)$$

刚体旋转四元数

$$\frac{dQ(t)}{dt} = Q(t_k) \otimes \frac{dq(t - t_k)}{dt} \quad \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{1}{2} Q \otimes \omega_{nb}^b = \frac{1}{2} Q(t_k) \otimes q(t - t_k) \otimes \omega_{nb}^b$$

$$Q(t_k) \otimes \frac{dq(t - t_k)}{dt} = \frac{1}{2} Q(t_k) \otimes q(t - t_k) \otimes \omega_{nb}^b$$

左乘  $Q^*(t_k)$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} q \otimes \omega_{nb}^b$$

姿态变化四元数

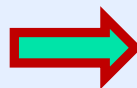


## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——旋转矢量微分方程

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_{nb}^b$$

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$$



$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = 2\mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}$$

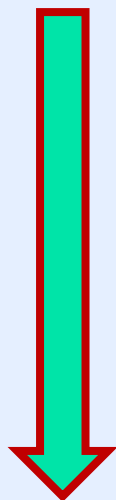
$$q_0 = \cos \frac{\Phi}{2}$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{u} \sin \frac{\Phi}{2}$$



$$\dot{q}_0 = -\frac{\dot{\Phi}}{2} \sin \frac{\Phi}{2}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\mathbf{u}} \sin \frac{\Phi}{2} + \frac{\dot{\Phi}}{2} \mathbf{u} \cos \frac{\Phi}{2}$$



$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = -\frac{\dot{\Phi}}{2} \sin \frac{\Phi}{2} + \dot{\mathbf{u}} \sin \Phi + \dot{\Phi} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u} (1 - \cos \Phi) + \frac{\dot{\Phi}}{2} \sin \Phi$$

$$= \dot{\mathbf{u}} \sin \Phi + \dot{\Phi} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u} (1 - \cos \Phi) \quad \text{构造旋转矢量} \quad \boldsymbol{\Phi} = \dot{\Phi} \mathbf{u}$$





## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——旋转矢量微分方程——Bortz方程

$$\dot{\Phi} = \omega_{nb}^b + \frac{(1 - \cos \Phi)}{\Phi^2} \left[ \frac{\Phi \sin \Phi}{2(1 - \cos \Phi)} \Phi \times \omega_{nb}^b + \frac{1}{2} \Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b) \right] \\ - \frac{1}{\Phi^2} \left( 1 - \frac{\sin \Phi}{\Phi} \right) \left[ -\frac{\Phi^2}{2} \Phi \times \omega_{nb}^b + \frac{\Phi \sin \Phi}{2(1 - \cos \Phi)} \frac{1}{2} \Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b) \right]$$

$$= \omega_{nb}^b \quad \dot{\Phi} = \omega_{nb}^b + \frac{1}{2} \Phi \times \omega_{nb}^b + \frac{1}{12} \Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b)$$

$$+ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sin \Phi}{\Phi} \right) \Phi \times \omega_{nb}^b - \frac{\left( 1 - \frac{\sin \Phi}{\Phi} \right) \sin \Phi}{2\Phi(1 - \cos \Phi)} \Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b)$$

$$= \omega_{nb}^b + \frac{1}{2} \Phi \times \omega_{nb}^b + \frac{1 - 2\cos \Phi - \Phi \sin \Phi}{2\Phi^2(1 - \cos \Phi)} \Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b)$$

$$= \omega_{nb}^b + \frac{1}{2} \Phi \times \omega_{nb}^b + \frac{1}{\Phi^2} \left[ 1 - \frac{\Phi \sin \Phi}{2(1 - \cos \Phi)} \right] \Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b)$$



## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——旋转矢量微分方程求解

$$\dot{\Phi} = \omega_{nb}^b + \frac{1}{2} \Phi \times \omega_{nb}^b + \frac{1}{12} \Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b)$$

$$\Phi(h) \quad [t_k, t_{k+1}]$$

运载体的角速度用抛物线拟合

$$\omega_{nb}^b(t_k + \tau) = a + 2b\tau + 3c\tau^2$$

$$\Phi(h) = \Phi(0) + h\dot{\Phi}(0) + \frac{h^2}{2!} \ddot{\Phi}(0) + \dots$$

$$\Phi(0) = \mathbf{0}$$

角增量

$$\Delta\theta(\tau) = \int_0^\tau \omega_{nb}^b(t_k + \tau) d\tau$$



## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——旋转矢量微分方程求解

$$\dot{\Phi} = \omega_{nb}^b + \frac{1}{2} \Phi \times \omega_{nb}^b + \frac{1}{12} \Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b)$$

$$\omega_{nb}^b(t_k + \tau) = a + 2b\tau + 3c\tau^2$$

$$\Phi(h) = \Phi(0) + h\dot{\Phi}(0) + \frac{h^2}{2!} \ddot{\Phi}(0) + \dots$$

$$\Delta\theta(\tau) = \int_0^\tau \omega_{nb}^b(t_k + \tau) d\tau$$

$$\omega_{nb}^b(t_k) = \omega_{nb}^b(t_k + \tau) \Big|_{\tau=0} = a$$

$$\dot{\omega}_{nb}^b(t_k) = \dot{\omega}_{nb}^b(t_k + \tau) \Big|_{\tau=0} = 2b$$

$$\ddot{\omega}_{nb}^b(t_k) = \ddot{\omega}_{nb}^b(t_k + \tau) \Big|_{\tau=0} = 6c$$

$$\omega_{nb}^{b(i)}(t_k) = \omega_{nb}^{b(i)}(t_k + \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, i = 3, 4, 5, \dots$$



## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——旋转矢量微分方程求解

$$\dot{\Phi} = \omega_{nb}^b + \frac{1}{2} \Phi \times \omega_{nb}^b + \frac{1}{12} \Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b)$$

$$\omega_{nb}^b(t_k + \tau) = a + 2b\tau + 3c\tau^2$$

$$\Phi(h) = \Phi(0) + h\dot{\Phi}(0) + \frac{h^2}{2!} \ddot{\Phi}(0) + \dots$$

$$\Delta\theta(\tau) = \int_0^\tau \omega_{nb}^b(t_k + \tau) d\tau$$

$$\Delta\theta(0) = \Delta\theta(\tau)\big|_{\tau=0} = \mathbf{0}$$

$$\Delta\dot{\theta}(0) = \Delta\dot{\theta}(\tau)\big|_{\tau=0} = \omega_{nb}^b(t_k + \tau)\big|_{\tau=0} = \mathbf{a}$$

$$\Delta\ddot{\theta}(0) = \Delta\ddot{\theta}(\tau)\big|_{\tau=0} = \dot{\omega}_{nb}^b(t_k + \tau)\big|_{\tau=0} = 2\mathbf{b}$$

$$\Delta\ddot{\ddot{\theta}}(0) = \Delta\ddot{\ddot{\theta}}(\tau)\big|_{\tau=0} = \ddot{\omega}_{nb}^b(t_k + \tau)\big|_{\tau=0} = 6\mathbf{c}$$

$$\Delta\theta^{(i)}(0) = \Delta\theta^{(i)}(\tau)\big|_{\tau=0} = \omega_{nb}^{b(i-1)}(t_k + \tau)\big|_{\tau=0} = \mathbf{0}, i = 4, 5, 6, \dots$$



## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——旋转矢量微分方程求解

$$\dot{\Phi} = \omega_{nb}^b + \frac{1}{2} \Phi \times \omega_{nb}^b + \frac{1}{12} \Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b)$$

$$\omega_{nb}^b(t_k + \tau) = a + 2b\tau + 3c\tau^2$$

$$\Phi(h) = \Phi(0) + h\dot{\Phi}(0) + \frac{h^2}{2!} \ddot{\Phi}(0) \Phi \dots$$

$$\Delta\theta(\tau) = \int_0^\tau \omega_{nb}^b(t_k + \tau) d\tau$$

$$\Phi(\tau) \approx \Delta\theta(\tau)$$

$$\dot{\Phi}(\tau) = \omega_{nb}^b(t_k + \tau) + \frac{1}{2} \Delta\theta(\tau) \times \omega_{nb}^b(t_k + \tau), 0 \leq \tau \leq h$$

$$\begin{aligned} \Phi(h) &= \Phi(0) + \dot{\Phi}(0)h + \frac{1}{2} \ddot{\Phi}(0)h^2 + \frac{1}{6} \ddot{\Phi}(0)h^3 + \frac{1}{24} \Phi^{(4)}(0)h^4 + \frac{1}{120} \Phi^{(5)}(0)h^5 \\ &= ah + bh^2 + ch^3 + \frac{1}{6} a \times bh^3 + \frac{1}{4} a \times ch^4 + \frac{1}{10} b \times ch^5 \end{aligned}$$



## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——旋转矢量微分方程求解

$$\dot{\Phi} = \omega_{nb}^b + \frac{1}{2} \Phi \times \omega_{nb}^b + \frac{1}{12} \Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b)$$

$$\omega_{nb}^b(t_k + \tau) = a + 2b\tau + 3c\tau^2$$

$$\Phi(h) = \Phi(0) + h\dot{\Phi}(0) + \frac{h^2}{2!} \ddot{\Phi}(0) + \dots$$



$$\Delta\theta(\tau) = \int_0^\tau \omega_{nb}^b(t_k + \tau) d\tau$$

$$\Phi(h) = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \frac{33}{80} \Delta\theta_1 \times \Delta\theta_3 + \frac{57}{80} \Delta\theta_2 \times (\Delta\theta_3 - \Delta\theta_1)$$

对运载体角速度做不同的拟合假设，决定了旋转矢量计算中所采用的子样数。  
常数拟合——单子样算法；直线拟合——双子样算法  
抛物线拟合——三字样算法；三次抛物线拟合——四子样算法。



## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——四元数毕卡算法和旋转矢量单子样算法

$$\mathbf{Q}(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} q_0(t_{k+1}) \\ q_1(t_{k+1}) \\ q_2(t_{k+1}) \\ q_3(t_{k+1}) \end{bmatrix}, \mathbf{Q}(t_k) = \begin{bmatrix} q_0(t_k) \\ q_1(t_k) \\ q_2(t_k) \\ q_3(t_k) \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{毕卡解法}} \mathbf{Q}(t_{k+1}) = \left( \mathbf{I} \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \Delta\boldsymbol{\theta} \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} \right) \mathbf{Q}(t_k)$$

$$\begin{bmatrix} q_0(t_{k+1}) \\ q_1(t_{k+1}) \\ q_2(t_{k+1}) \\ q_3(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Delta\theta}{2} & -\frac{\Delta\theta_x}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} & -\frac{\Delta\theta_y}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} & -\frac{\Delta\theta_z}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \\ \frac{\Delta\theta_x}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} & \cos \frac{\Delta\theta}{2} & \frac{\Delta\theta_z}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} & -\frac{\Delta\theta_y}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \\ \frac{\Delta\theta_y}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} & -\frac{\Delta\theta_z}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} & \cos \frac{\Delta\theta}{2} & \frac{\Delta\theta_x}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \\ \frac{\Delta\theta_z}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} & \frac{\Delta\theta_y}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} & -\frac{\Delta\theta_x}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} & \cos \frac{\Delta\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0(t_k) \\ q_1(t_k) \\ q_2(t_k) \\ q_3(t_k) \end{bmatrix}$$



## (4)、等效旋转矢量算法

- 四元数毕卡算法和旋转矢量单子样算法

$$\Phi(h) = \Delta\theta \quad \longrightarrow \quad \Phi(h) = \Delta\theta = \begin{bmatrix} \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z \end{bmatrix}$$

$$q(h) = \cos \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi(h)}{\Phi} \sin \frac{\Phi}{2} \quad \longrightarrow \quad q(h) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Delta\theta}{2} \\ \frac{\Delta\theta_x}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \\ \frac{\Delta\theta_y}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \\ \frac{\Delta\theta_z}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$Q(t_{k+1}) = Q(t_k) \otimes q(h) = M'[q(h)]Q(t_k)$$





## (4)、等效旋转矢量算法

### ■ ——四元数毕卡算法和旋转矢量单子样算法

$$\begin{bmatrix} q_0(t_{k+1}) \\ q_1(t_{k+1}) \\ q_2(t_{k+1}) \\ q_3(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Delta \theta}{2} & -\frac{\Delta \theta_x}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2} & -\frac{\Delta \theta_y}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2} & -\frac{\Delta \theta_z}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2} \\ \frac{\Delta \theta_x}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2} & \cos \frac{\Delta \theta}{2} & \frac{\Delta \theta_z}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2} & -\frac{\Delta \theta_y}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2} \\ \frac{\Delta \theta_y}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2} & -\frac{\Delta \theta_z}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2} & \cos \frac{\Delta \theta}{2} & \frac{\Delta \theta_x}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2} \\ \frac{\Delta \theta_z}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2} & \frac{\Delta \theta_y}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2} & -\frac{\Delta \theta_x}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2} & \cos \frac{\Delta \theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0(t_k) \\ q_1(t_k) \\ q_2(t_k) \\ q_3(t_k) \end{bmatrix}$$



## (5) 速度计算

由比力方程  $\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{f}_{sf}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n$  积分可得

增量形式  $\mathbf{v}_m^n = \mathbf{v}_{m-1}^n + \Delta \mathbf{v}_{sf_m}^n + \Delta \mathbf{v}_{g/corm}^n$

其中

$$\Delta \mathbf{v}_{g/corm}^n = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \mathbf{g}^n - (\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \times \mathbf{v}^n dt \quad \text{为重力/哥氏速度增量}$$

$$\Delta \mathbf{v}_{sf_m}^n = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{sf}^b dt \quad \text{为比力速度增量}$$



## (5) 速度计算

由比力方程  $\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{f}_{sf}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n$  积分可得

$$\Delta \mathbf{v}_{g/corm}^n = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \mathbf{g}^n - (\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \times \mathbf{v}^n dt$$



$$\Delta \mathbf{v}_{g/corm}^n = \mathbf{g}_{m-1}^n T_m - (\boldsymbol{\omega}_{enm-1}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{iem-1}^n) \times \mathbf{v}_{m-1}^n T_m$$

$$\Delta \mathbf{v}_{sfm}^n = \Delta \mathbf{v}_m + \Delta \mathbf{v}_{rotm} + \Delta \mathbf{v}_{sculm}$$

$$\Delta \mathbf{v}_m = \int_{m-1}^m \mathbf{f}^b(t) dt$$

$$\Delta \mathbf{v}_{rotm} = \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_m \times \Delta \mathbf{v}_m$$

$$\Delta \mathbf{v}_{sculm} = \frac{2}{3} [\Delta \mathbf{v}_1 \times \Delta \boldsymbol{\theta}_2 + \Delta \mathbf{v}_2 \times \Delta \boldsymbol{\theta}_1]$$



## (5) 位置计算

$$L_m = L_{m-1} + \frac{v_{Nm-1}^n}{R_{Mm-1} + h_{m-1}}$$

$$\lambda_m = \lambda_{m-1} + \frac{v_{Em-1}^n}{R_{Nm-1} + h_{m-1}} \sec L_{m-1}$$

$$h_m = h_{m-1} + v_{Um-1}^n$$

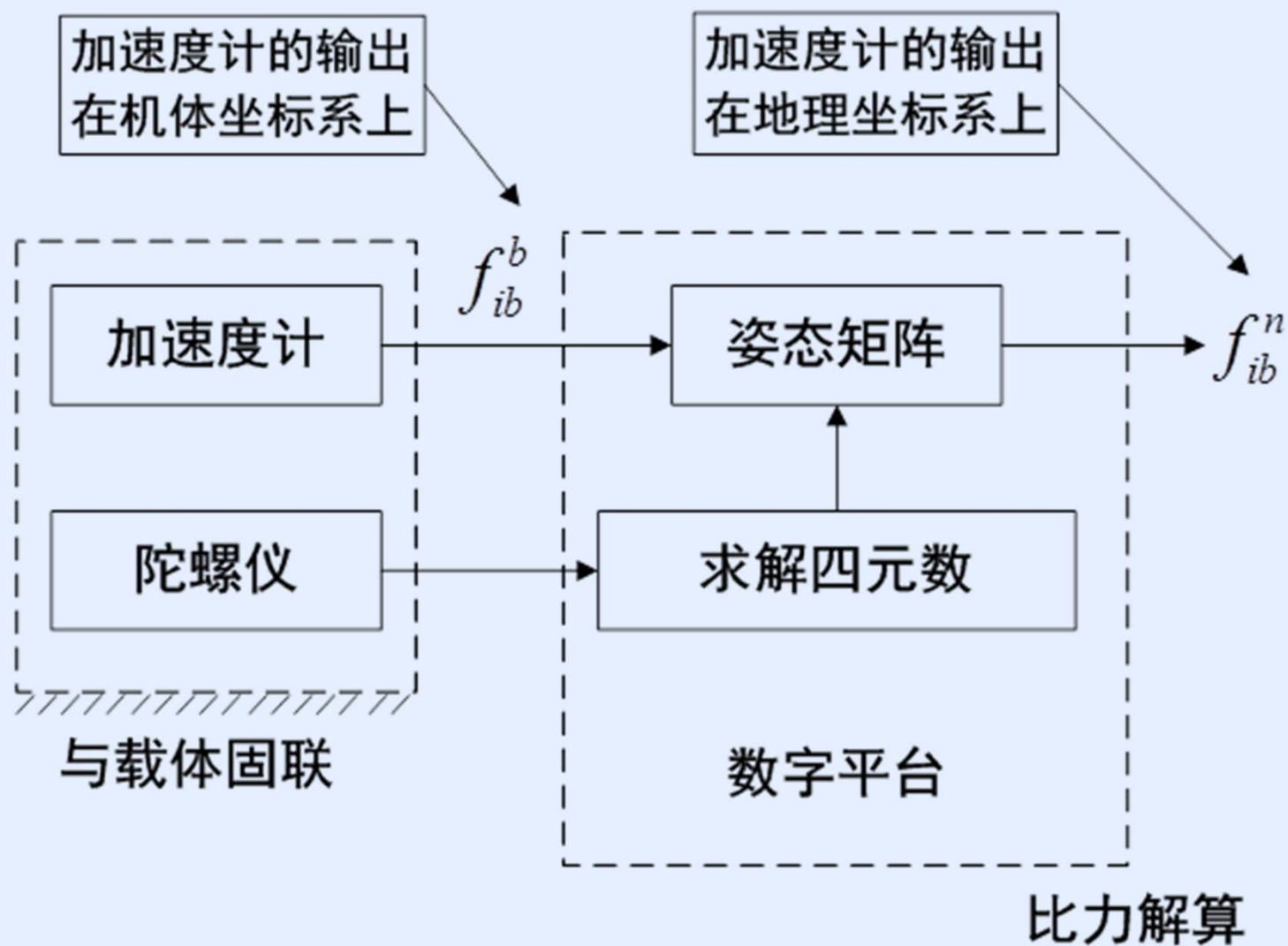
$$L_m = L_{m-1} + \frac{v_{Nm-1}^n + v_{Nm}^n}{2(R_{Mm-1} + h_{m-1})}$$

$$\lambda_m = \lambda_{m-1} + \frac{v_{Em-1}^n + v_{Em}^n}{2(R_{Nm-1} + h_{m-1})} \sec L_{m-1}$$

$$h_m = h_{m-1} + \frac{1}{2}(v_{Um-1}^n + v_{Um}^n)$$



## 5、捷联惯导系统算法的流程





## 比力解算——坐标转换

$$f_{ib}^n = C_b^n f_{ib}^b$$

加速度计的输出  
在地理坐标系上

弹体系到导航系

加速度计的输出  
在机体坐标系上

已知：姿态矩阵性质

$$C_b^n = [C_n^b]^T = (C_n^b)^{-1}$$



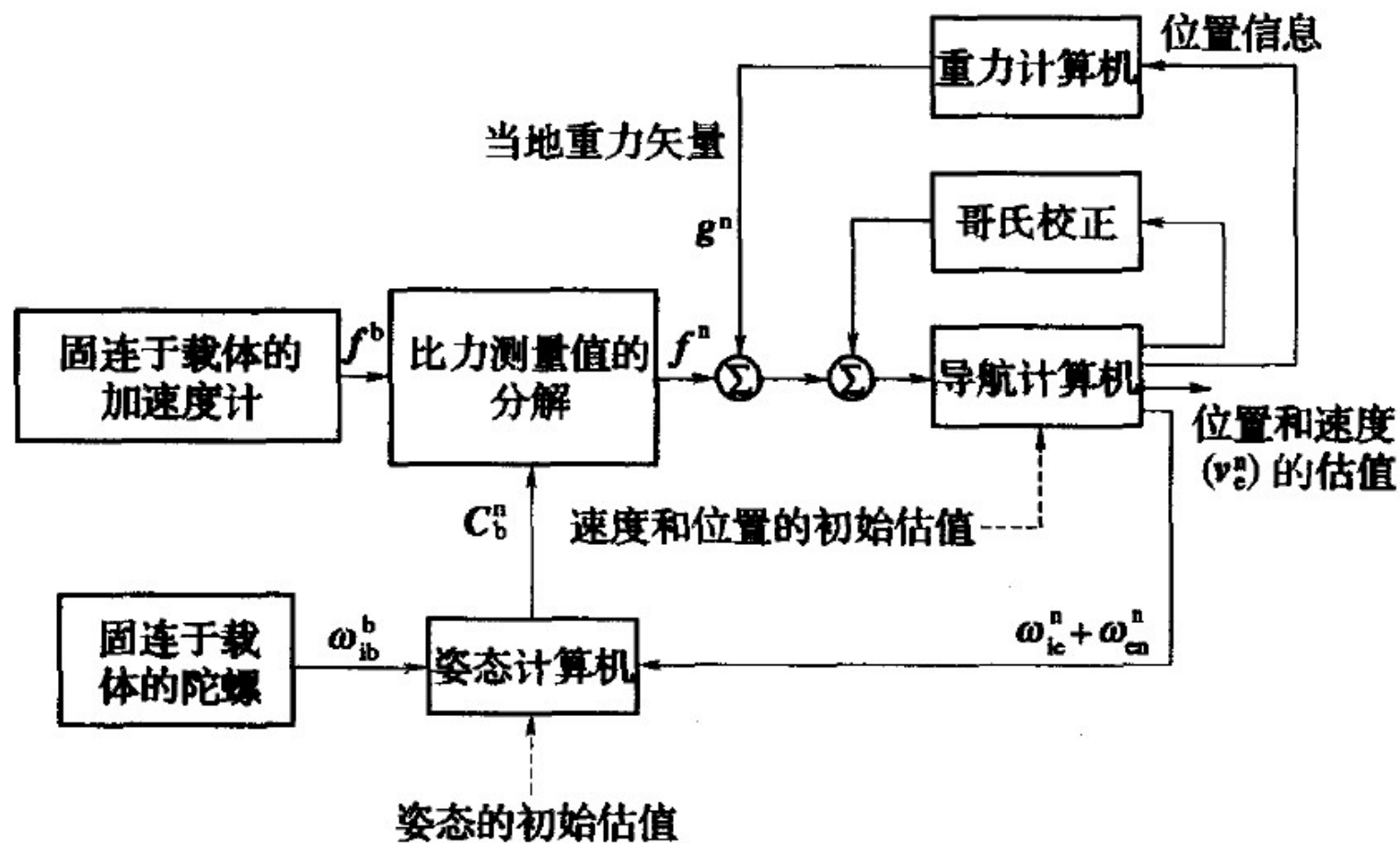
1. 由  $C_b^n$  的元素与姿态角的三角函数关系，得出姿态角的主值；
2. 由相限的关系，得到姿态角的实际值

用  $T_{ij}$  表示  $C_b^n$  的元素 ( $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$ ) 则：

$$\left. \begin{aligned} \theta_{main} &= \sin^{-1}(T_{32}) \\ \gamma_{main} &= -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{T_{31}}{T_{33}}\right) \\ \psi_{main} &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{T_{21}}{T_{22}} \end{aligned} \right\} \quad \text{姿态角度解算}$$



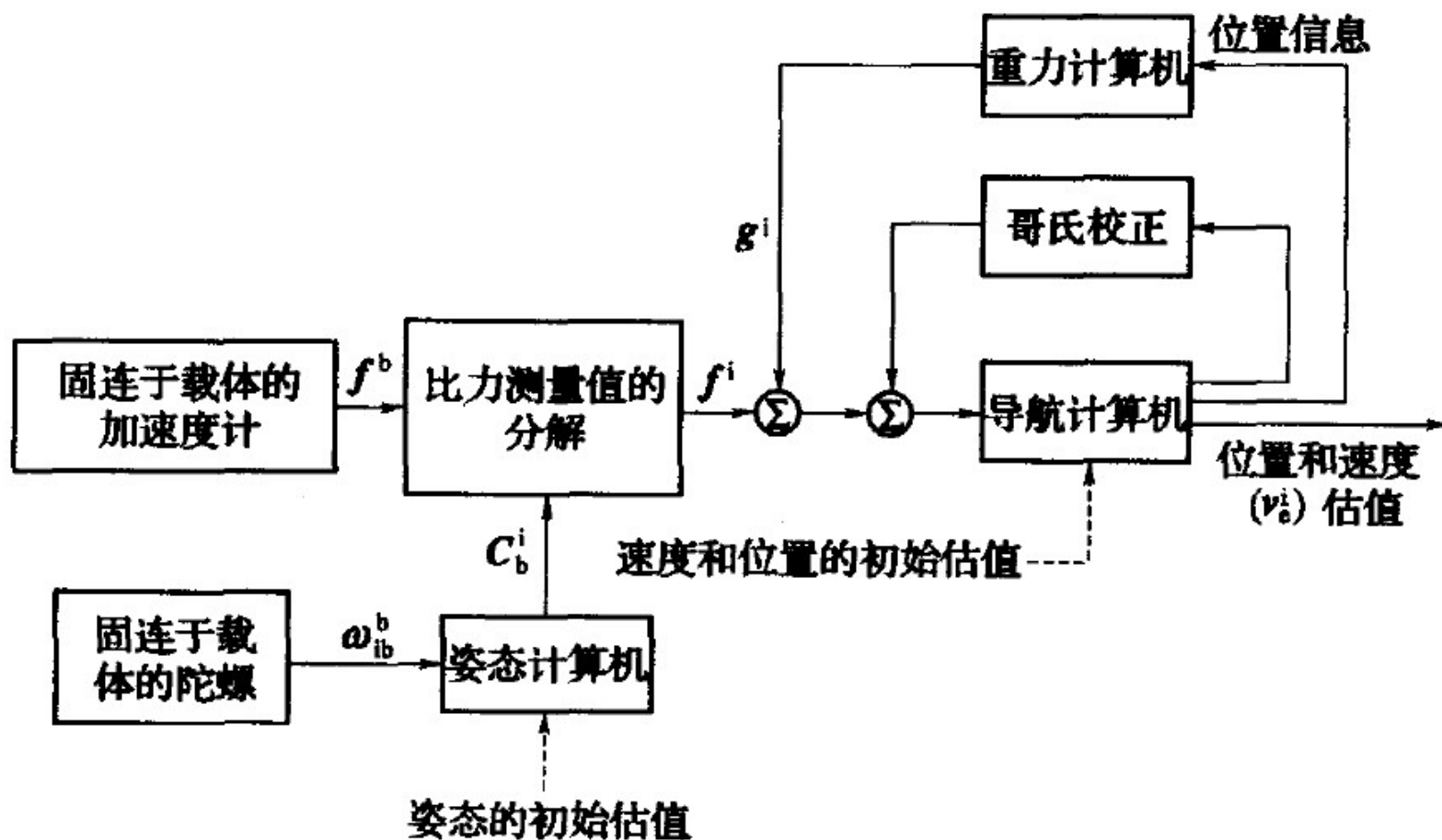
## 捷联惯导算法力学编排——地理系作为导航系





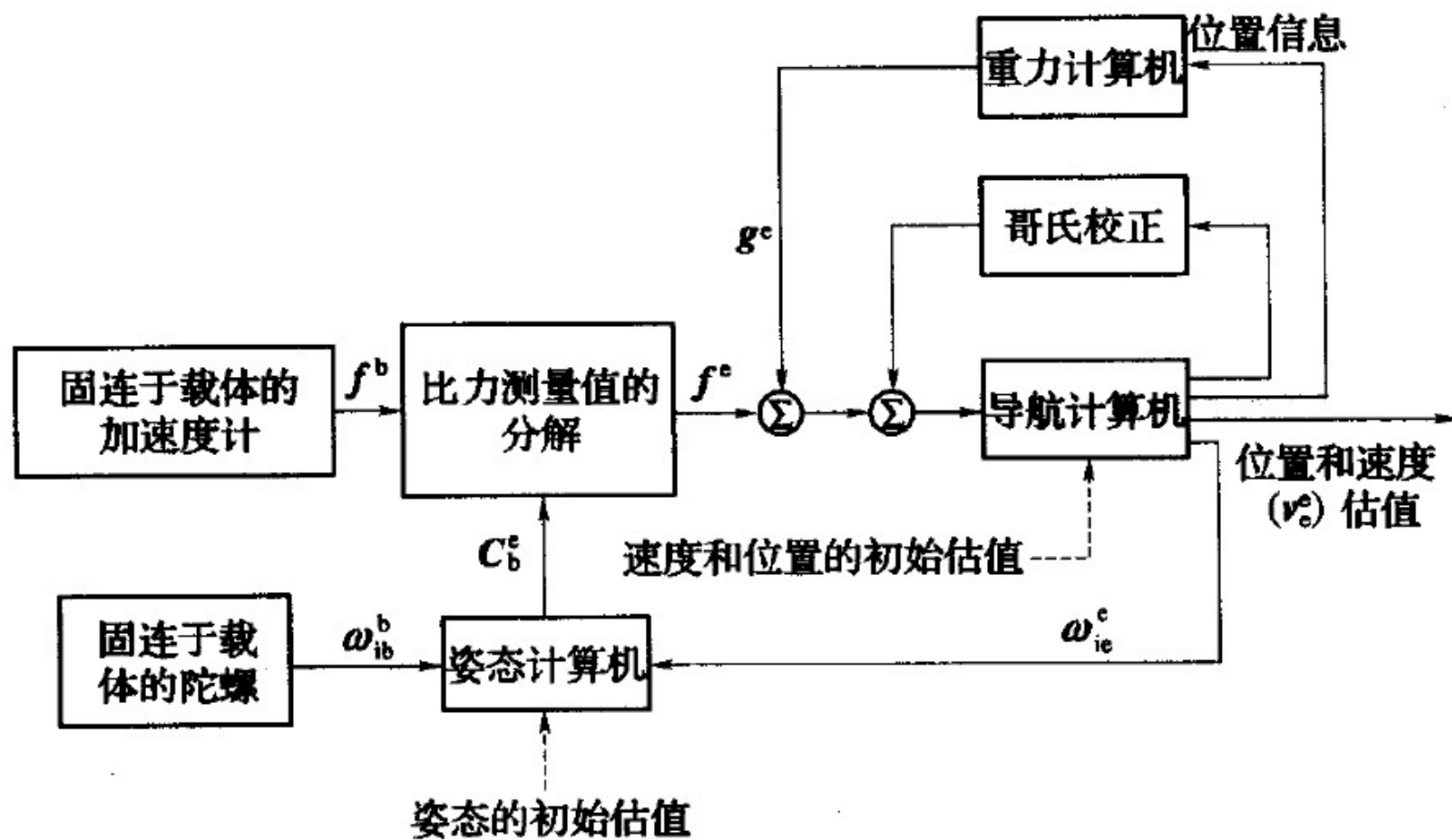


## 捷联惯导算法力学编排——惯性系作为导航系



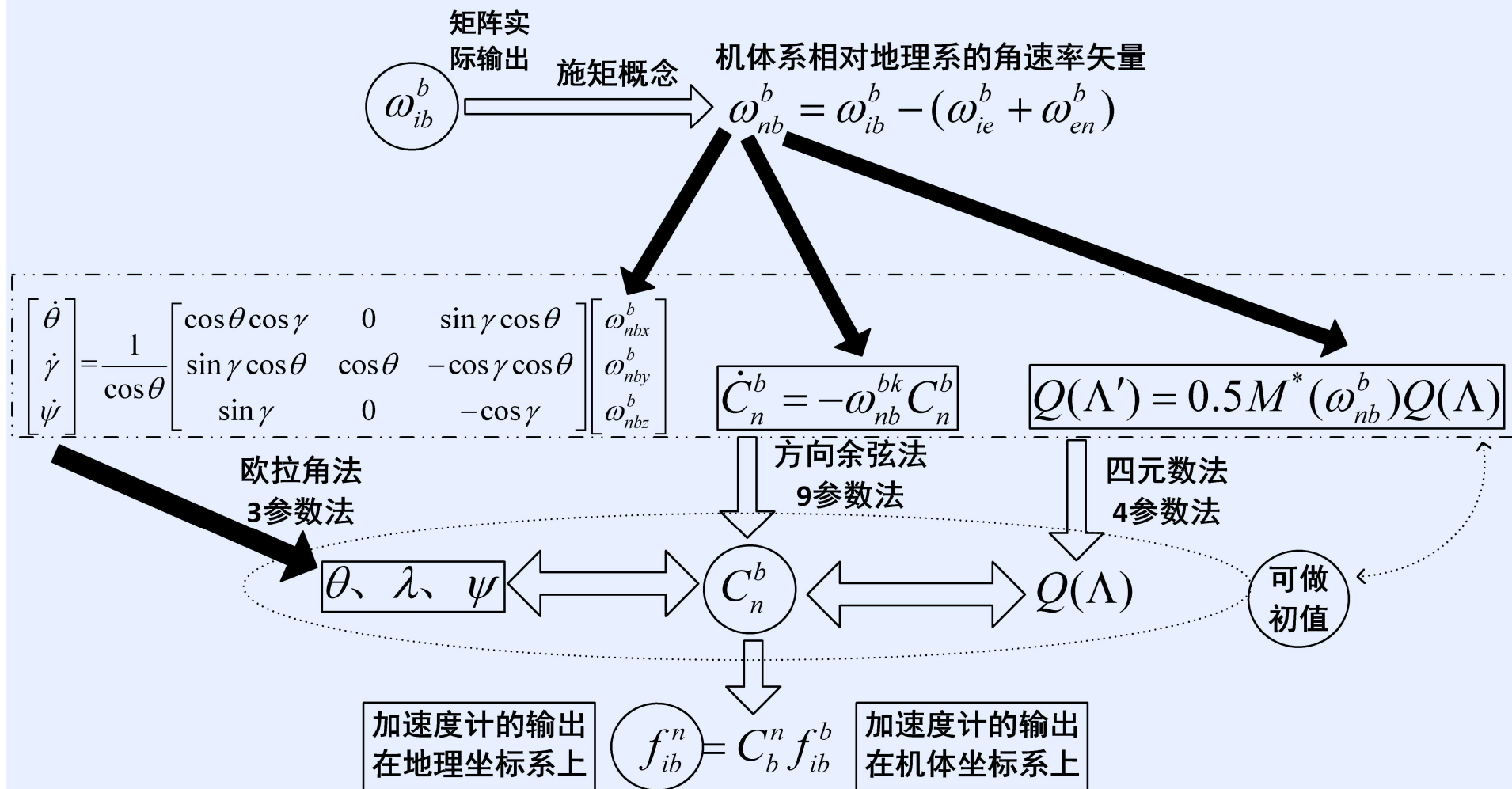


## 捷联惯导算法力学编排——地固系系作为导航系





## 捷联惯性导航系统的相关算法小结





## 第6章 捷联惯性导航原理

- 6.1 捷联惯导系统介绍
- 6.2 捷联惯导的基本知识
- 6.3 捷联惯导算法
- 6.4 捷联惯导误差分析



## 6.4 捷联惯导误差分析

6.4.1、捷联惯导系统的误差源

6.4.2、捷联惯导系统误差方程的建立

6.4.3、捷联惯导系统误差分析



### 6.4.1、捷联惯导系统的误差源

#### 1) 仪表误差

主要有**漂移**、**标度因数误差**和**安装误差**。

#### 2) 计算误差

姿态航向系统计算误差，即数学平台的计算误差。

#### 3) 初始条件误差

静基座或动基座对准造成的误差，包括位置初始误差、速度初始误差和姿态航向的初始误差。

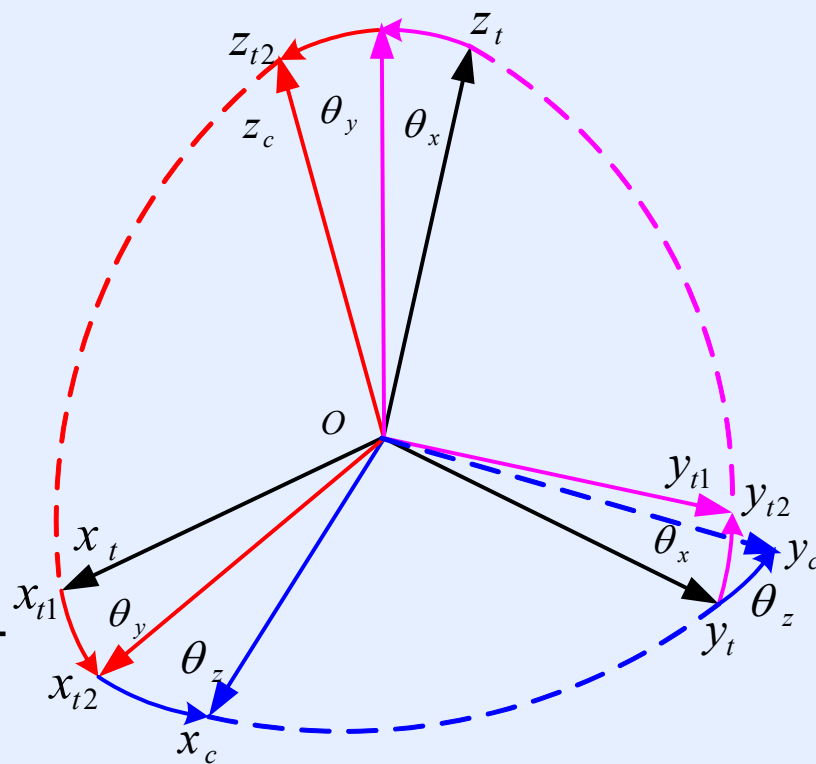
#### 4) 模型误差

如地球曲率半径的描述误差、有害加速度补偿忽略二阶小量造成的误差等等。



## 小误差角矩阵

如图所示，设t系与c系一开始是重合的；然后c系先绕 $ox_t$ 轴转 $\theta_x$ ，得 $ox_{t1}y_{t1}z_{t1}$ 系；再绕 $oy_{t1}$ 轴转 $\theta_y$ 得 $ox_{t2}y_{t2}z_{t2}$ 系，最后绕 $oz_{t2}$ 轴转 $\theta_z$ ，便得到计算机系 $ox_cy_cz_c$ 。即有



$$C_t^c = C_{t2}^c C_{t1}^{t2} C_t^{t1}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} C_t^c &= \begin{bmatrix} 1 & \theta_z & -\theta_y \\ -\theta_z & 1 & \theta_x \\ \theta_y & -\theta_x & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \\ &= I_{3 \times 3} - \boldsymbol{\theta} \times \end{aligned}$$





## 姿态误差方程

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \quad \boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{in}^b$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{in}^b)$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^b$$

$$\dot{\hat{\mathbf{Q}}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{Q}} \otimes (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^b)$$

$$\delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^*$$



$$\delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^*$$



$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{Q}} &= \dot{\mathbf{Q}} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* + \mathbf{Q} \otimes \dot{\hat{\mathbf{Q}}}^* = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes (\omega_{ib}^b - \omega_{in}^b) \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes (-\tilde{\omega}_{ib}^b + \hat{\omega}_{in}^b) \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* \\&= -\frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes (\tilde{\omega}_{ib}^b - \omega_{ib}^b) \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* - \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes \omega_{in}^b \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes \hat{\omega}_{in}^b \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* \\&= -\frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes \delta \tilde{\omega}_{ib}^b \otimes \boxed{\mathbf{Q}^* \otimes \mathbf{Q}} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* - \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes \omega_{in}^b \otimes \boxed{\mathbf{Q}^* \otimes \mathbf{Q}} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* \\&\quad + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes \boxed{\hat{\mathbf{Q}}^* \otimes \hat{\mathbf{Q}}} \otimes \hat{\omega}_{in}^b \otimes \hat{\mathbf{Q}}^*\end{aligned}$$

$$\delta \tilde{\omega}_{ib}^b = \tilde{\omega}_{ib}^b - \omega_{ib}^b$$

$$\delta \tilde{\omega}_{ib}^n = \mathbf{Q} \otimes \delta \tilde{\omega}_{ib}^b \otimes \mathbf{Q}^*, \omega_{in}^n = \mathbf{Q} \otimes \omega_{in}^b \otimes \mathbf{Q}^*, \hat{\omega}_{in}^n = \hat{\mathbf{Q}} \otimes \hat{\omega}_{in}^b \otimes \hat{\mathbf{Q}}^*$$

$$\delta \dot{\mathbf{Q}} = -\frac{1}{2} \delta \tilde{\omega}_{ib}^n \otimes \mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* - \frac{1}{2} \omega_{in}^n \otimes \mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* \otimes \hat{\omega}_{in}^n$$



$$\delta \dot{\mathbf{Q}} = -\frac{1}{2} \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^n \otimes \mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{in}^n \otimes \mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^* \otimes \hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^n$$

$$\delta \mathbf{Q} = \cos \frac{\phi}{2} + \frac{\boldsymbol{\varphi}}{\phi} \sin \frac{\phi}{2}$$

$$\delta \mathbf{Q} = 1 + \frac{\boldsymbol{\varphi}}{2}$$

$$\delta \dot{\mathbf{Q}} = \frac{\dot{\boldsymbol{\phi}}}{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^n \otimes \left(1 + \frac{\boldsymbol{\varphi}}{2}\right) - \boldsymbol{\omega}_{in}^n \otimes \left(1 + \frac{\boldsymbol{\varphi}}{2}\right) + \left(1 + \frac{\boldsymbol{\varphi}}{2}\right) \otimes (\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n)$$

$$= -\delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^n - \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^n \otimes \frac{\boldsymbol{\varphi}}{2} - \boldsymbol{\omega}_{in}^n + \boldsymbol{\omega}_{in}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n + \boldsymbol{\varphi} \otimes \boldsymbol{\omega}_{in}^n$$

$$= -\delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^n - \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^n \otimes \frac{\boldsymbol{\varphi}}{2} + \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n + \boldsymbol{\varphi} \otimes \boldsymbol{\omega}_{in}^n$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n + \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_{in}^n$$



$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}_{in}^n$$

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^n = \mathbf{C}_b^n \left( [\delta K_G] + [\delta G] \right) \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \boldsymbol{\varepsilon}^n$$

$$[\delta K_G] = \text{diag} \left[ \delta K_{Gx} \quad \delta K_{Gy} \quad \delta K_{Gz} \right]$$

$$[\delta G] = \begin{bmatrix} 0 & \delta G_z & -\delta G_y \\ -\delta G_z & 0 & \delta G_x \\ \delta G_y & -\delta G_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}_{in}^n - \mathbf{C}_b^n \left( [\delta K_G] + [\delta G] \right) \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\varepsilon}^n$$



## 速度误差方程

$$\dot{V}^n = C_b^n f^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n + g^n$$

$$\dot{V}^c = \tilde{C}_b^n \tilde{f}^b - (2\omega_{ie}^c + \omega_{en}^c) \times V^c + g^c$$

$$V^c = V^n + \delta V^n, \omega_{ie}^c = \omega_{ie}^n + \delta \omega_{ie}^n, \omega_{en}^c = \omega_{en}^n + \delta \omega_{en}^n, g^c = g^n + \delta g^n$$

$$\tilde{C}_b^n = C_n^{n'} C_b^n = (I - \varphi^n \times) C_b^n, \tilde{f}^b = (I + [\delta K_A])(I + [\delta A]) f^b + \nabla^b$$

$$\varphi^n \times = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_U & \phi_N \\ \phi_U & 0 & -\phi_E \\ -\phi_N & \phi_E & 0 \end{bmatrix}, [\delta K_A] = \text{diag} \begin{bmatrix} \delta K_{Ax} & \delta K_{Ay} & \delta K_{Az} \end{bmatrix}$$



## 速度误差方程

$$\dot{V}^n = C_b^n f^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n + g^n$$

$$\begin{aligned} \dot{V}^c &= \tilde{C}_b^n \tilde{f}^b - (2\omega_{ie}^c + \omega_{en}^c) \times V^c + g^c \\ \dot{V}^c &= \tilde{C}_b^n \tilde{f}^b - (2\omega_{ie}^c + \omega_{en}^c) \times V^c + g^c \quad [\delta A] = \begin{bmatrix} 0 & \delta A_z & -\delta A_y \\ -\delta A_z & 0 & \delta A_x \\ \delta A_y & -\delta A_x & 0 \end{bmatrix} \\ &= (I - \phi^n \times) C_b^n \left[ (I + [\delta K_A])(I + [\delta A]) f^b + \nabla^b \right] \\ &\quad - \left[ 2(\omega_{ie}^n + \delta\omega_{ie}^n) + (\omega_{en}^n + \delta\omega_{en}^n) \right] \times (V^n + \delta V^n) + (g^n + \delta g^n) \\ &= C_b^n f^b + C_b^n [\delta K_A] f^b + C_b^n [\delta A] f^b + C_b^n [\delta K_A] [\delta A] f^b + \nabla^n \\ &\quad - \phi^n \times C_b^n f^b - \phi^n \times C_b^n [\delta K_A] f^b - \phi^n \times C_b^n [\delta A] f^b - \phi^n \times C_b^n [\delta K_A] [\delta A] f^b \\ &\quad - \phi^n \times C_b^n \nabla^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta V^n - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times V^n \\ &\quad - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times \delta V^n + g^n + \delta g^n \end{aligned}$$



## 速度误差方程

$$\dot{V}^n = C_b^n f^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n + g^n$$

$$\dot{V}^c = \tilde{C}_b^n \tilde{f}^b - (2\omega_{ie}^c + \omega_{en}^c) \times V^c + g^c$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{V}^n = & -\varphi^n \times f^n + C_b^n [\delta K_A + \delta A] f^b - \varphi^n \times C_b^n [\delta K_A] f^b - \varphi^n \times C_b^n [\delta A] f^b \\ & - \varphi^n \times C_b^n \nabla^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta V^n - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times V^n + \nabla^n + \delta g \\ & - \varphi^n \times C_b^n [\delta K_A] [\delta A] f^b + C_b^n [\delta K_A] [\delta A] f^b - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times \delta V^n \end{aligned}$$

略去二阶小量

$$\begin{aligned} \delta \dot{V}^n = & -\varphi^n \times f^n + C_b^n [\delta K_A + \delta A] f^b + \delta V^n \times (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \\ & + V^n \times (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) + \nabla^n \end{aligned}$$



## 位置误差方程

$$\dot{L} = \frac{v_N^n}{R_M + h}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v_E^n}{R_N + h} \sec L$$

$$\dot{h} = v_U^n$$

$$\delta \dot{L} = \frac{\delta V_N}{R_M + h} - \delta h \frac{V_N}{(R_M + h)^2}$$

$$\delta \dot{\lambda} = \frac{\delta V_E}{R_N + h} \sec L + \delta L \frac{V_E}{R_N + h} \tan L \sec L - \delta h \frac{V_E \sec L}{(R_N + h)^2}$$

$$\delta \dot{h} = \delta V_U$$





$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{ie} \sin L \delta L \\ \omega_{ie} \cos L \delta L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{ie} \sin L & 0 & 0 \\ \omega_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta \lambda \\ \delta h \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \delta \mathbf{p}$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_M + h} \delta v_N^n + \frac{v_N^n}{(R_M + h)^2} \delta h \\ \frac{1}{R_N + h} \delta v_E^n - \frac{v_E^n}{(R_N + h)^2} \delta h \\ \frac{\tan L}{R_N + h} \delta v_E^n - \frac{v_E^n \tan L}{(R_N + h)^2} \delta h + \frac{v_E^n \sec^2 L}{R_N + h} \delta L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^n \times \mathbf{M}_2 - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times = \mathbf{M}_4$$

$$\delta \mathbf{v}^n + \mathbf{v}^n \times (2\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3) = \mathbf{M}_5$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_M + h} & 0 \\ \frac{1}{R_N + h} & 0 & 0 \\ \frac{\tan L}{R_N + h} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_E^n \\ \delta v_N^n \\ \delta v_U^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{v_N^n}{(R_M + h)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_E^n}{(R_N + h)^2} \\ \frac{v_E^n \sec^2 L}{R_N + h} & 0 & -\frac{v_E^n \tan L}{(R_N + h)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta \lambda \\ \delta h \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{M}_2 \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{M}_3 \delta \mathbf{p}$$



$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n + \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}_{in}^n - \mathbf{C}_b^n \left( [\delta K_G] + [\delta G] \right) \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\varepsilon}^n$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{V}}^n = & -\boldsymbol{\phi}^n \times \mathbf{f}^n + \mathbf{C}_b^n [\delta K_A + \delta A] \mathbf{f}^b + \delta \mathbf{V}^n \times \left( 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n \right) \\ & + \mathbf{V}^n \times \left( 2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n \right) + \nabla^n \end{aligned}$$

$$\delta \dot{L} = \frac{\delta V_N}{R_M + h} - \delta h \frac{V_N}{(R_M + h)^2}$$

$$\delta \dot{\lambda} = \frac{\delta V_E}{R_N + h} \sec L + \delta L \frac{V_E}{R_N + h} \tan L \sec L - \delta h \frac{V_E \sec L}{(R_N + h)^2}$$

$$\delta \dot{h} = \delta V_U$$



$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi} + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n - \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^n$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^n = \mathbf{C}_b^n \{([\delta\mathbf{K}_G] + \delta\mathbf{G})\boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \boldsymbol{\varepsilon}^b\} \quad \delta\mathbf{G} = \mathbf{0}_{3 \times 3}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^n = \mathbf{C}_b^n ([\delta\mathbf{K}_G]\boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \boldsymbol{\varepsilon}^b) = \mathbf{C}_b^n [\boldsymbol{\omega}_{ib}^b] \delta\mathbf{K}_G + \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\varepsilon}^b$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos L \\ \omega_{ie} \sin L \end{bmatrix}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{ie} \sin L \delta L \\ \omega_{ie} \cos L \delta L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{ie} \sin L & 0 & 0 \\ \omega_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta \lambda \\ \delta h \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \delta \mathbf{p}$$



$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi} + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n - \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^n$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{en}^n &= \begin{bmatrix} -\frac{v_N^n}{R_M + h} \\ \frac{v_E^n}{R_N + h} \\ \frac{v_E^n}{R_N + h} \tan L \end{bmatrix} \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_M + h} \delta v_N^n + \frac{v_N^n}{(R_M + h)^2} \delta h \\ \frac{1}{R_N + h} \delta v_E^n - \frac{v_E^n}{(R_N + h)^2} \delta h \\ \frac{\tan L}{R_N + h} \delta v_E^n - \frac{v_E^n \tan L}{(R_N + h)^2} \delta h + \frac{v_E^n \sec^2 L}{R_N + h} \delta L \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_M + h} & 0 \\ \frac{1}{R_N + h} & 0 & 0 \\ \frac{\tan L}{R_N + h} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_E^n \\ \delta v_N^n \\ \delta v_U^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{v_N^n}{(R_M + h)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_E^n}{(R_N + h)^2} \\ \frac{v_E^n \sec^2 L}{R_N + h} & 0 & -\frac{v_E^n \tan L}{(R_N + h)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta \lambda \\ \delta h \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{M}_2 \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{M}_3 \delta \mathbf{p} \end{aligned}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \mathbf{M}_1 \delta \mathbf{p} + (\mathbf{M}_2 \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{M}_3 \delta \mathbf{p}) = \mathbf{M}_2 \delta \mathbf{v}^n + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3) \delta \mathbf{p}$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi} + \mathbf{M}_2 \delta \mathbf{v}^n + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3) \delta \mathbf{p} - \mathbf{C}_b^n [\boldsymbol{\omega}_{ib}^b] \delta \mathbf{K}_G - \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\varepsilon}^b$$



$$\delta \dot{\mathbf{V}}^n = \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\varphi} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{v}^n \times (2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n) + \delta \mathbf{f}^n$$

$$\delta \mathbf{f}^n = \mathbf{C}_b^n \{ ([\delta \mathbf{K}_A] + \delta \mathbf{A}) \mathbf{f}^b + \nabla^b \} \quad \delta \mathbf{A} = \mathbf{0}_{3 \times 3}$$

$$\delta \mathbf{f}^n = \mathbf{C}_b^n ([\delta \mathbf{K}_A] \mathbf{f}^b + \nabla^b) = \mathbf{C}_b^n [\mathbf{f}^b] \delta \mathbf{K}_A + \mathbf{C}_b^n \nabla^b$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{V}}^n &= \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\varphi} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{v}^n \times (2\mathbf{M}_1 \delta \mathbf{p} + (\mathbf{M}_2 \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{M}_3 \delta \mathbf{p})) + \mathbf{C}_b^n [\mathbf{f}^b] \delta \mathbf{K}_A + \mathbf{C}_b^n \nabla^b \\ &= \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\varphi} + \{ \mathbf{v}^n \times \mathbf{M}_2 - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \} \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{v}^n \times (2\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3) \delta \mathbf{p} + \mathbf{C}_b^n [\mathbf{f}^b] \delta \mathbf{K}_A + \mathbf{C}_b^n \nabla^b \\ &= \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{M}_4 \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{M}_5 \delta \mathbf{p} + \mathbf{C}_b^n [\mathbf{f}^b] \delta \mathbf{K}_A + \mathbf{C}_b^n \nabla^b \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{L} \\ \delta \dot{\lambda} \\ \delta \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_M + h} & 0 \\ \frac{\sec L}{R_N + h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_E^n \\ \delta v_N^n \\ \delta v_U^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_N^n}{(R_M + h)^2} \\ \frac{v_E^n \sec L \tan L}{R_N + h} & 0 & \frac{v_E^n \sec L}{(R_N + h)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta \lambda \\ \delta h \end{bmatrix}$$

$$\delta \mathbf{p} = \mathbf{M}_6 \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{M}_7 \delta \mathbf{p}$$



$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi} + \mathbf{M}_2 \delta \mathbf{v}^n + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3) \delta \mathbf{p} - \mathbf{C}_b^n [\boldsymbol{\omega}_{ib}^b] \delta \mathbf{K}_G - \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\varepsilon}^b$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{V}}^n &= \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\phi} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{v}^n \times (2\mathbf{M}_1 \delta \mathbf{p} + (\mathbf{M}_2 \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{M}_3 \delta \mathbf{p})) + \mathbf{C}_b^n [\mathbf{f}^b] \delta \mathbf{K}_A + \mathbf{C}_b^n \nabla^b \\ &= \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\phi} + \{\mathbf{v}^n \times \mathbf{M}_2 - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times\} \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{v}^n \times (2\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3) \delta \mathbf{p} + \mathbf{C}_b^n [\mathbf{f}^b] \delta \mathbf{K}_A + \mathbf{C}_b^n \nabla^b \\ &= \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\phi} + \mathbf{M}_4 \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{M}_5 \delta \mathbf{p} + \mathbf{C}_b^n [\mathbf{f}^b] \delta \mathbf{K}_A + \mathbf{C}_b^n \nabla^b \end{aligned}$$

$$\delta \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{M}_6 \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{M}_7 \delta \mathbf{p} \quad \mathbf{x} = [\boldsymbol{\phi} \quad \delta \mathbf{v}^n \quad \delta \mathbf{p} \quad \delta \mathbf{K}_G \quad \boldsymbol{\varepsilon}^b \quad \delta \mathbf{K}_A \quad \nabla^b]^T$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3 & -\mathbf{C}_b^n [\boldsymbol{\omega}_{ib}^b] & -\mathbf{C}_b^n & 0 & 0 \\ \mathbf{f}^n \times & \mathbf{M}_4 & \mathbf{M}_5 & 0 & 0 & \mathbf{C}_b^n [\mathbf{f}^b] & \mathbf{C}_b^n \\ 0 & \mathbf{M}_6 & \mathbf{M}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\alpha}_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$