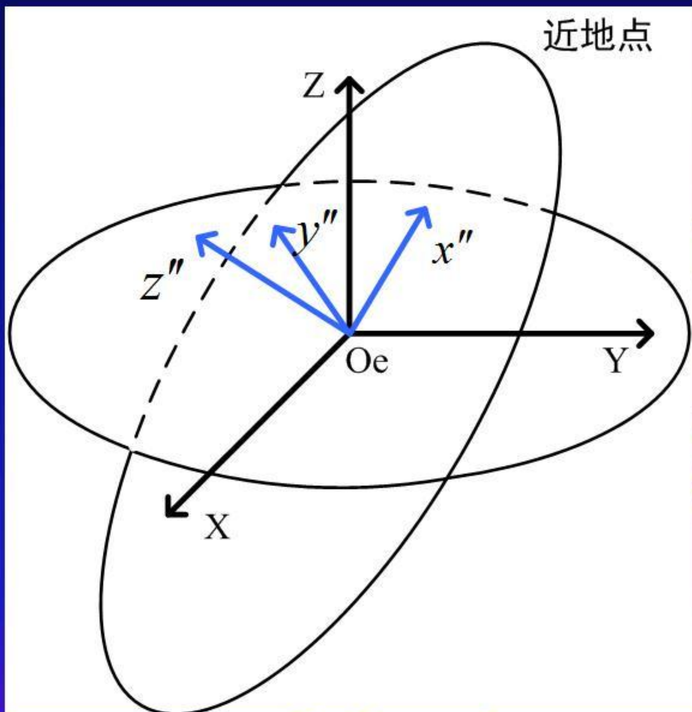
轨道要素与位置速度的关系

由轨道根数计算位置和速度矢量



辅助坐标系

$O_e x'' y'' z''$

z'' 轨道法线方向

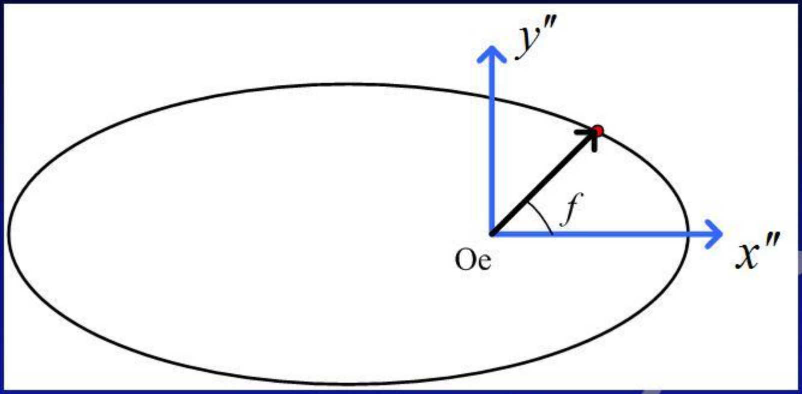
x'' 在轨道平面内

指向近地点

y'' 在轨道平面内

与 x''垂直

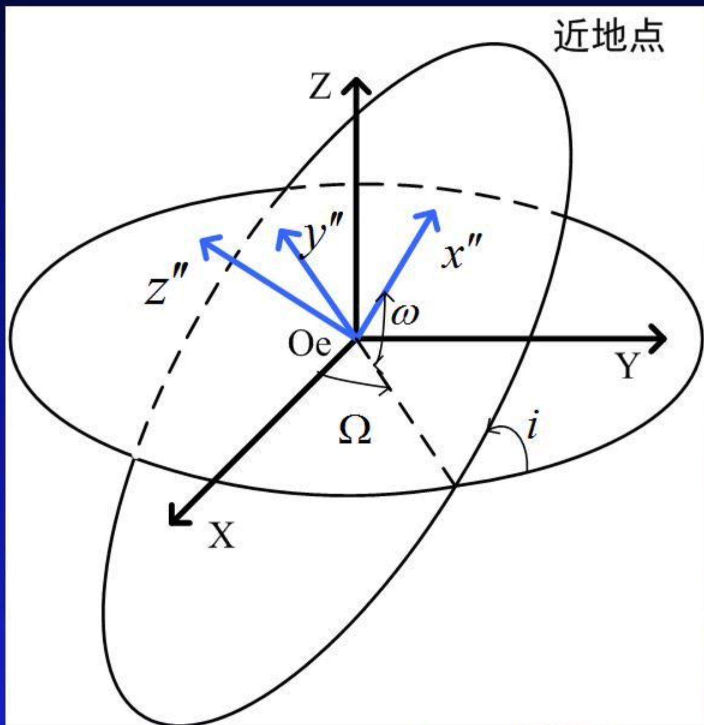
辅助坐标系中



$$\vec{r}'' = \begin{bmatrix} r\cos f \\ r\sin f \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos f} \qquad p = a(1-e^2)$$

惯性坐标系到辅助坐标系转换



$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_3(\omega)\boldsymbol{R}_1(i)\boldsymbol{R}_3(\Omega)\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

坐标系转换

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_3(\omega)\boldsymbol{R}_1(i)\boldsymbol{R}_3(\Omega)\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_3(-\Omega)\boldsymbol{R}_1(-i)\boldsymbol{R}_3(-\omega)\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

惯性系中的位置

$$\vec{r} = \boldsymbol{R}_3(-\Omega)\boldsymbol{R}_1(-i)\boldsymbol{R}_3(-\omega)\begin{bmatrix} r\cos f \\ r\sin f \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\cos f \cdot \vec{P} + r\sin f \cdot \vec{Q}$$

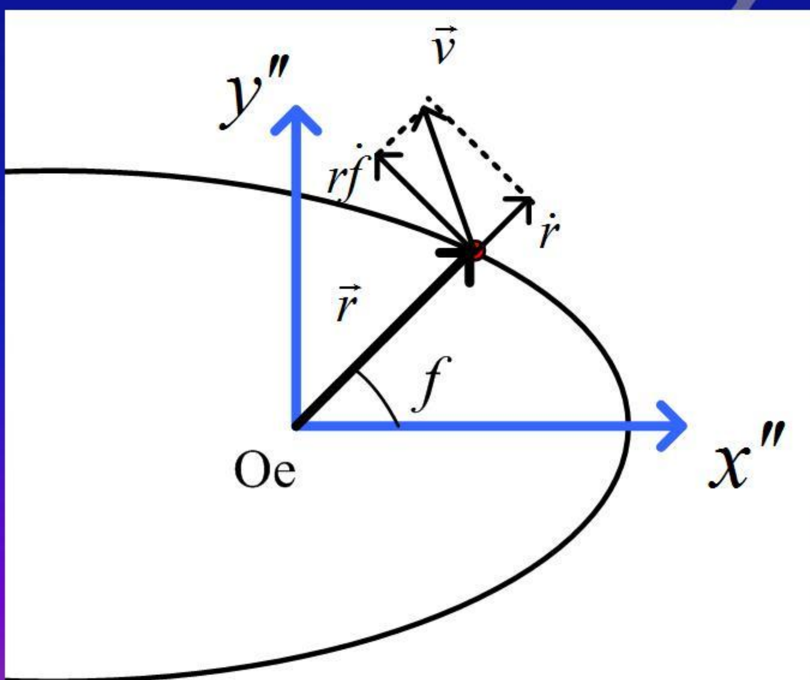
$$\vec{P} = \boldsymbol{R}_3(-\Omega)\boldsymbol{R}_1(-i)\boldsymbol{R}_3(-\omega)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{Q} = \boldsymbol{R}_3(-\Omega)\boldsymbol{R}_1(-i)\boldsymbol{R}_3(-\omega)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

惯性系中的速度

$$\vec{r} = r\cos f \cdot \vec{P} + r\sin f \cdot \vec{Q}$$

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{r}\cos f - r\dot{f}\sin f)\cdot\vec{P} + (\dot{r}\sin f + r\dot{f}\cos f)\cdot\vec{Q}$$



$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$h = r \cdot r\dot{f} = r^2 \dot{f}$$

$$\dot{f} = \frac{h}{r^2}$$

$$h = \sqrt{\mu p}$$

惯性系中的速度

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{r}\cos f - r\dot{f}\sin f)\cdot\vec{P} + (\dot{r}\sin f + r\dot{f}\cos f)\cdot\vec{Q}$$

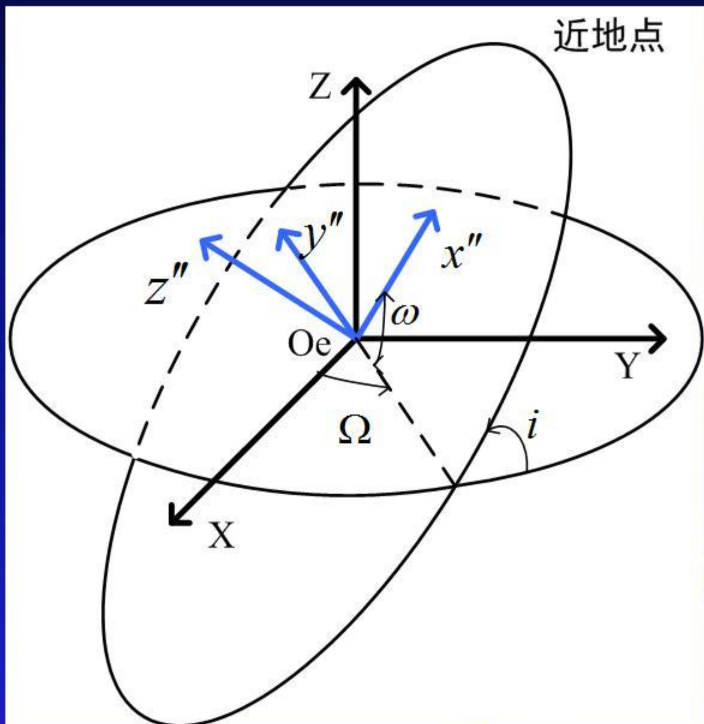
$$\dot{f} = \frac{h}{r^2}$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos f} \Rightarrow \dot{r} = \frac{pe\sin f}{(1+e\cos f)^2}\dot{f} = \frac{h}{p}e\sin f$$

$$\dot{\vec{r}} = -\frac{h}{p}\sin f\cdot\vec{P} + \frac{h}{p}(e+\cos f)\cdot\vec{Q}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}[-\sin f\cdot\vec{P} + (e+\cos f)\cdot\vec{Q}]$$

由位置和速度矢量计算轨道根数



$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\sin\Omega\sin i \\ -h\cos\Omega\sin i \\ h\cos i \end{bmatrix}$$

$$h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}$$

$$\cos i = \frac{h_z}{h}$$

$$\tan\Omega = \frac{h_x}{-h_y}$$

由位置和速度矢量计算轨道根数

$$\dot{\vec{r}}\times\vec{h}=\mu\frac{\vec{r}}{r}+\vec{B}\qquad \vec{e}=\vec{B}/\mu$$

$$\vec{e}=\frac{1}{\mu}(\dot{\vec{r}}\times\vec{h})-\frac{\vec{r}}{r}=\begin{bmatrix}e_x\\ e_y\\ e_z\end{bmatrix}\qquad e=\sqrt{e_x^2+e_y^2+e_z^2}$$

$$\tan\omega=\frac{e_z}{(e_y\sin\Omega+e_x\cos\Omega)\sin i}$$

$$\tan u=\frac{r_z}{(r_y\sin\Omega+r_x\cos\Omega)\sin i}\qquad f=u-\omega$$

$$a=\frac{h^2}{\mu(1-e^2)}$$