飞行动力学：研究飞行器的运动与所受力的关系。

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M}$$

如何衡量飞行器的运动特性，特别是机动性呢？

§ 2.10 过载

- 掌握过载的概念与意义；
- 理解过载投影与机动性、导弹运动的关系；
- 理解转弯速率、需用过载、可用过载和极限过载概念，以及过载和结构设计的关系。

2.10.1 机动性与过载的概念

机动性：指导弹在单位时间内改变其飞行速度大小和方向的能力。是评定导弹飞行性能的重要指标之一。

表征：切向加速度

法向加速度

过载矢量

过载：作用在导弹上除重力之外的所有外力的合力（即控制力）与导弹**重量**G的比值。

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{G}$$

过载的特性：

✓是矢量，方向与控制力方向一致

✓大小表明控制力是重量的几倍

过载的用途

✓评定导弹机动性的重要指标

$$a_n = \frac{|N_n - G_n|}{m} = \frac{G}{m}\left|\frac{N_n}{G} - \frac{G_n}{G}\right| = g\left|n_n - \frac{G_n}{G}\right|$$

$$a_\tau = g\left|n_\tau - \frac{G_\tau}{G}\right|$$

过载越大，机动性越好。

✓是弹体强度设计和控制系统设计的重要数据

过载矢量决定了弹上各个部件或仪表所承受的作用力

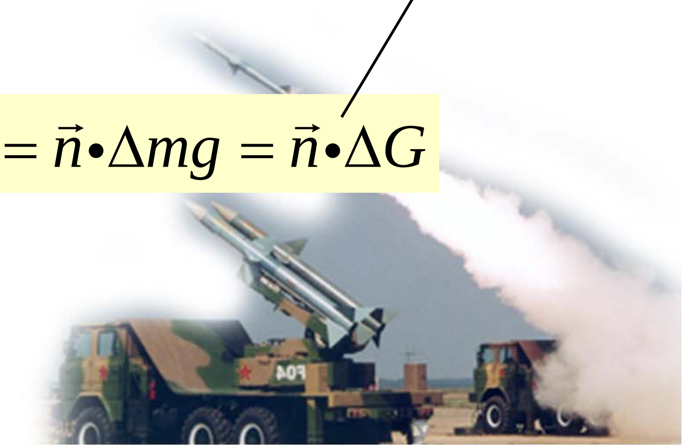
假设导弹以加速度**a**平移，与弹体固定的某部件质量为**Δm**，则其所受的力为：

惯性力：$-\Delta m\times\vec{a}$　　重力：$\Delta m\times\vec{g}$　　连接力：$\vec{F}$

该部件在此三力作用下处于相对平衡状态

过载与部件重量的积

$$\left.\begin{aligned}&-\Delta m\times\vec{a}+\Delta m\times\vec{g}+\vec{F}=0\\&\vec{a}=\frac{\vec{N}+\vec{G}}{m}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{F}=\vec{n}\bullet\Delta mg=\underbrace{\vec{n}\bullet\Delta G}_{\text{过载与部件重量的积}}$$



✓可明显地表明运动弹道特性和飞行特性

$n_n = G_n / G$ 直线飞行 $$a_n = \frac{\left|N_n - G_n\right|}{m} = \frac{G}{m}\left|\frac{N_n}{G} - \frac{G_n}{G}\right| = g\left|n_n - \frac{G_n}{G}\right|$$

$n_n > G_n / G$ 弹道向上弯曲的曲线飞行，即向上飞行（铅垂面内

$n_n < G_n / G$ 弹道向下弯曲的曲线飞行，即下降飞行（铅垂面内

$n_\tau = G_\tau / G$ 等速飞行

$n_\tau > G_\tau / G$ 加速飞行 $$a_\tau = g\left|n_\tau - \frac{G_\tau}{G}\right|$$

$n_\tau < G_\tau / G$ 减速飞行

2.10.2 过载矢量的投影

1 在弹道坐标系上的投影

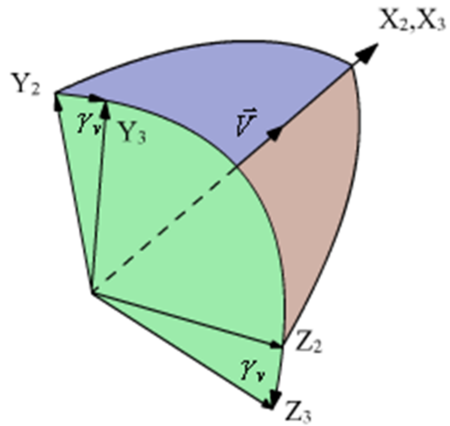
利用气动力和推力在弹道坐标系三轴上的投影，很容易能得到过载矢量在弹道系$OX_2Y_2Z_2$三轴上的投影如下：

$$n_{X_2}=\frac{N_{X_2}}{G}=\frac{1}{G}(P\cos\alpha\cos\beta-X)$$

$$n_{Y_2}=\frac{N_{Y_2}}{G}=\frac{1}{G}[P(\sin\alpha\cos\gamma_V+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_V)+Y\cos\gamma_V-Z\sin\gamma_V]$$

$$n_{Z_2}=\frac{N_{Z_2}}{G}=\frac{1}{G}[P(\sin\alpha\sin\gamma_V-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_V)+Y\sin\gamma_V+Z\cos\gamma_V]$$

2 在速度坐标系上的投影



利用速度坐标系和弹道系的空间关系，速度坐标系各轴上的投影为：

$$n_{X_2} = n_{X_3}$$

$$n_{Y_2} = n_{Y_3}\cos\gamma_V - n_{Z_3}\sin\gamma_V$$

$$n_{Z_2} = n_{Y_3}\sin\gamma_V + n_{Z_3}\cos\gamma_V$$

反之有：

$$n_{X_3} = n_{X_2}$$

$$n_{Y_3} = n_{Y_2}\cos\gamma_V + n_{Z_2}\sin\gamma_V$$

$$n_{Z_3} = -n_{Y_2}\sin\gamma_V + n_{Z_2}\cos\gamma_V$$

注意：当导弹作无倾斜飞行时，$\gamma_V = 0$，相应的投影彼此相等。

直接利用气动力和推力在速度坐标系三轴上的投影，则过载矢量在速度系$OX_3Y_3Z_3$三轴上的投影如下：

$$n_{X_3} = \frac{1}{G}(P\cos\alpha\cos\beta - Q)$$

$$n_{Y_3} = \frac{1}{G}(P\sin\alpha + Y)$$

$$n_{Z_3} = \frac{1}{G}(-P\cos\alpha\sin\beta + Z)$$

3 在弹体坐标系上的投影

过载在弹体坐标系上的投影可以用于计算飞行器的强度。利用弹体坐标系和速度坐标系之间的方向余弦或弹体坐标系和弹道系之间的方向余弦，就可以得到过载在弹体坐标系各轴上的投影：

$$n_{X_1} = n_{X_3}\cos\alpha\cos\beta + n_{Y_3}\sin\alpha - n_{Z_3}\cos\alpha\sin\beta$$

$$n_{Y_1} = -n_{X_3}\sin\alpha\cos\beta + n_{Y_3}\cos\alpha + n_{Z_3}\sin\alpha\sin\beta$$

$$n_{Z_1} = n_{X_3}\sin\beta + n_{Z_3}\cos\beta$$

2.10.3 过载与运动

导弹质心移动的动力学方程

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{dV}{dt} &= \boxed{P\cos\alpha\cos\beta - X} - G\sin\theta \\
mV\frac{d\theta}{dt} &= \boxed{P(\sin\alpha\cos\gamma_V + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_V) + Y\cos\gamma_V - Z\sin\gamma_V} - G\cos\theta \\
-mV\cos\theta\frac{d\psi_V}{dt} &= \boxed{P(\sin\alpha\sin\gamma_V - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_V) + Y\sin\gamma_V + Z\cos\gamma_V}
\end{aligned}\right\}$$

$$n_{X_2} = \frac{N_{X_2}}{G} = \frac{1}{G}(P\cos\alpha\cos\beta - Q)$$

$$n_{Y_2} = \frac{N_{Y_2}}{G} = \frac{1}{G}[P(\sin\alpha\cos\gamma_V + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_V) + Y\cos\gamma_V - Z\sin\gamma_V]$$

$$n_{Z_2} = \frac{N_{Z_2}}{G} = \frac{1}{G}[P(\sin\alpha\sin\gamma_V - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_V) + Y\sin\gamma_V + Z\cos\gamma_V]$$

由在弹道坐标系上的过载投影表示的质心移动方程为：

$$\left\{\begin{aligned} &\boxed{\frac{1}{g}\frac{dV}{dt}} = n_{X_2} - \sin\theta \\ &\boxed{\frac{V}{g}\frac{d\theta}{dt}} = n_{Y_2} - \cos\theta \\ &\boxed{-\frac{V}{g}\cos\theta\frac{d\psi_V}{dt}} = n_{Z_2} \end{aligned}\right.$$

无量纲加速度在弹道系三轴上的分量

显然，该方程也给出了加速度与过载之间的关系。

另外，还可以得到以下方程：

$$\begin{cases} n_{X_2} = \dfrac{1}{g}\dfrac{dV}{dt} + \sin\theta \\[2em] n_{Y_2} = \dfrac{V}{g}\dfrac{d\theta}{dt} + \cos\theta \\[2em] n_{Z_2} = -\dfrac{V}{g}\cos\theta\dfrac{d\psi_V}{dt} \end{cases}$$

过载在弹道系各轴上的投影表征着改变飞行速度大小和方向的能力。

几种特殊飞行情况下对应的过载：

铅垂平面运动：$n_{Z_2} = 0$

水平平面运动：$n_{Y_2} = 1$

空间直线飞行：$n_{Y_2} = \cos\theta = const, \quad n_{Z_2} = 0$

水平直线飞行：$n_{Y_2} = 1 \quad n_{Z_2} = 0$

等速直线飞行：$n_{Y_2} = \cos\theta = const, \quad n_{Z_2} = 0 \quad n_{X_2} = \sin\theta = const$

水平等速直线飞行：$n_{Y_2} = 1 \quad n_{Z_2} = 0 \quad n_{X_2} = 0$

$\boxed{\text{弹道特性}}$和过载投影间的关系

（速度的大小和方向）

首先来看以下方程:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{g}\dfrac{dV}{dt} = n_{X_2} - \sin\theta \\[2ex]
\dfrac{V}{g}\dfrac{d\theta}{dt} = n_{Y_2} - \cos\theta \\[2ex]
-\dfrac{V}{g}\cos\theta\dfrac{d\psi_V}{dt} = n_{Z_2}
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
\dfrac{dV}{dt} = g(n_{X_2} - \sin\theta) \\[2ex]
\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{g}{V}(n_{Y_2} - \cos\theta) \\[2ex]
\dfrac{d\psi_V}{dt} = -\dfrac{g}{V\cos\theta}n_{Z_2}
\end{cases}
$$

由以上方程可以看出：

1 导弹的速度特性

$$\frac{dV}{dt} = g(n_{X_2} - \sin\theta)$$

$n_{X_2} = \sin\theta$ 导弹作等速飞行；

$n_{X_2} < \sin\theta$ 导弹作减速飞行；

$n_{X_2} > \sin\theta$ 导弹作加速飞行。

2 若导弹作铅垂平面运动

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{g}{V}(n_{Y_2}-\cos\theta)$$

$n_{Y_2}=\cos\theta$　　弹道在该点处曲率为零

$n_{Y_2}>\cos\theta$　　弹道是向上弯曲的曲线

$n_{Y_2}<\cos\theta$　　弹道是向下弯曲的曲线

3 导弹作水平平面运动

$$\frac{d\psi_V}{dt} = -\frac{g}{V\cos\theta} n_{Z_2}$$

$n_{Z_2} = 0$ 弹道在该点的曲率为零

$n_{Z_2} < 0, \quad \frac{d\psi_V}{dt} > 0$ 弹道是向左弯曲的曲线

$n_{Z_2} > 0, \quad \frac{d\psi_V}{dt} < 0$ 弹道是向右弯曲的曲线

2.10.4 法向过载与弹道曲率半径的关系

铅垂平面内：

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_{y2}=\frac{ds}{d\theta}=\frac{ds}{dt}\frac{dt}{d\theta}=V\frac{dt}{d\theta}=\frac{V}{d\theta/dt}\\
&\frac{d\theta}{dt}=\frac{g}{V}(n_{Y_2}-\cos\theta)
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{y2}=\frac{V^2}{g(n_{Y_2}-\cos\theta)}$$

水平平面内：

$$\left.\begin{aligned}
\rho_{z2} &= -\frac{ds}{d\psi_V} = -\frac{V}{d\psi_V / dt} \\
\frac{d\psi_V}{dt} &= -\frac{g}{V\cos\theta} n_{Z_2}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{z2} = \frac{V^2\cos\theta}{g n_{Z_2}}$$

2.10.5 几种过载的定义

1 需用过载

定义：导弹沿给定弹道飞行时所需用的法向过载，称之为需用过载。

特性：

1) 需用过载表示为使导弹命中目标，弹道应弯曲的程度。

2) 需用过载的值可以由弹道参数来确定。

$$n_{YR}=\frac{V}{g}\frac{d\theta}{dt}+\cos\theta \qquad n_{ZR}=-\frac{V}{g}\cos\theta\frac{d\psi_V}{dt}$$

3) 设计制造角度讲，满足战技指标前提下，需用过载越小越好。（防止结构破坏）

2 可用过载

定义：当舵面的偏转角为最大时，导弹所能产生的法向过载。

特性：1 表征导弹所能产生的法向控制力的最大值。

2 导弹可用过载是衡量导弹机动性的指标。

3 若飞行条件和导弹速度已知，导弹可用过载确定了向目标导引导弹时所能实现的弹道最小曲率半径。

4 考虑结构和设备，并非越大越好。

设计时注意：

导弹沿着给定弹道正常飞行的必要条件：在该弹道任意一点上，可用过载大于或者等于需用过载与过载裕量之和。

过载裕量：克服随机干扰所需要的那一部分过载。若干扰已知，过载裕量根据控制系统的分析结果确定。

3 极限过载

定义：对应于临界攻角/侧滑角的法向过载称为极限过载。

注意：极限过载使用较少，仅表示一个界限，飞行中不可能超过这个界限。
设计时，使导弹可用过载小于弹道极限过载值。

几种过载之间的关系：

极限过载>可用过载>需用过载