航天器控制原理

第二十讲 重力梯度稳定系统

主讲：刘莹莹

西北工业大学 精确制导与控制研究所

第二十讲　重力梯度稳定系统

1、重力梯度稳定原理

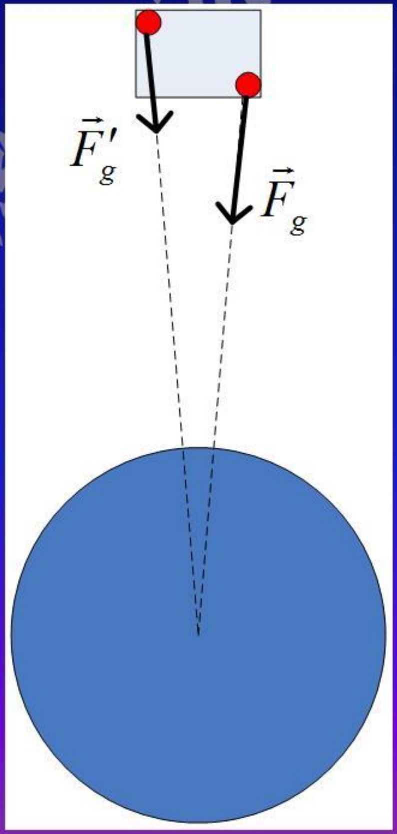
2、重力梯度力矩

3、重力梯度卫星稳定性分析

1、重力梯度稳定原理

在引力场中，由于物体内各质点所受的引力不同，对其质心产生重力梯度力矩。

利用航天器重力梯度力矩，以及在轨道运动中产生的离心力力矩，产生一个恢复力矩。使航天器的某根体坐标轴指向地球。

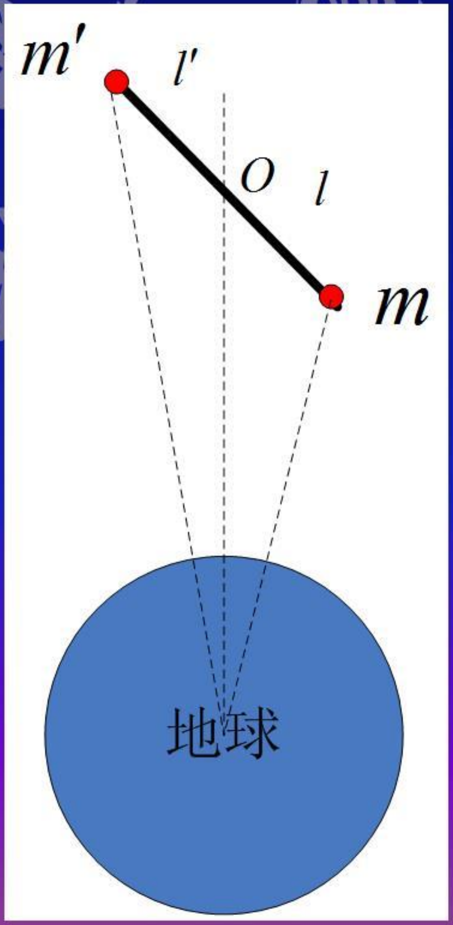


用哑铃式结构说明重力梯度稳定原理

(1)哑铃两端质量相等 $m = m'$

(2)哑铃两端距中心的臂长相等 $l = l'$

(3)哑铃臂无质量。



俯仰通道

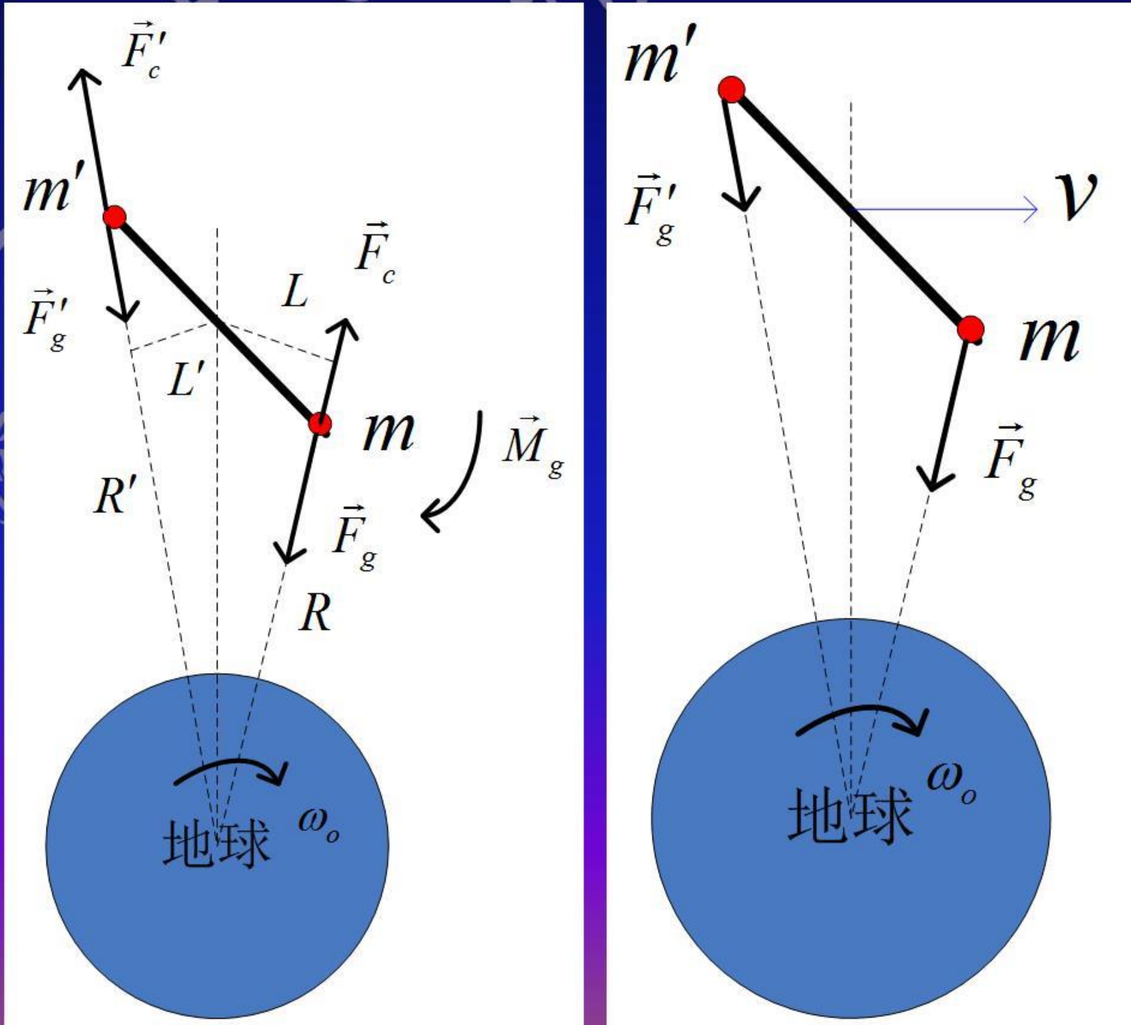
哑铃式卫星在轨道平面内，即俯仰通道，偏离当地垂线时的情况。

$$M_g = F_g L - F_g' L'$$

$$F_g > F_g' \quad L > L'$$

$$M_c = F_c' L' - F_c L$$

$$= m'\omega_0^2 \underline{R'L'} - m\omega_0^2 \underline{RL}$$



滚动通道

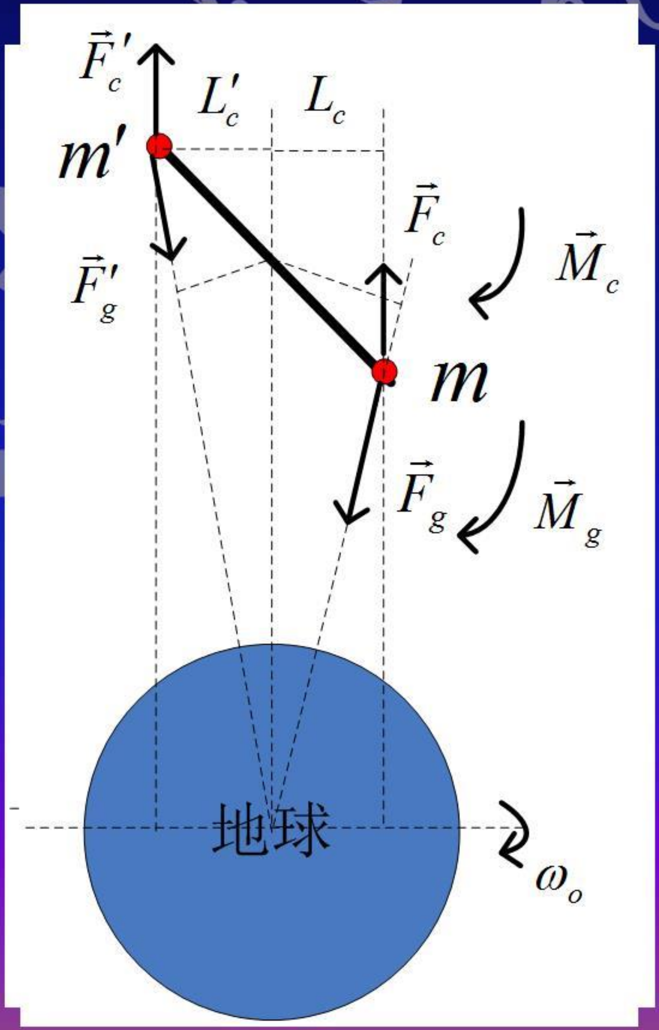
在轨道法平面(即滚动平面)内哑铃式卫星偏离铅垂线的情况。

$$M_g = F_g L - F_g' L'$$

$$F_g > F_g' \quad L > L'$$

$$M_c = F_c' L_c' - F_c L_c$$

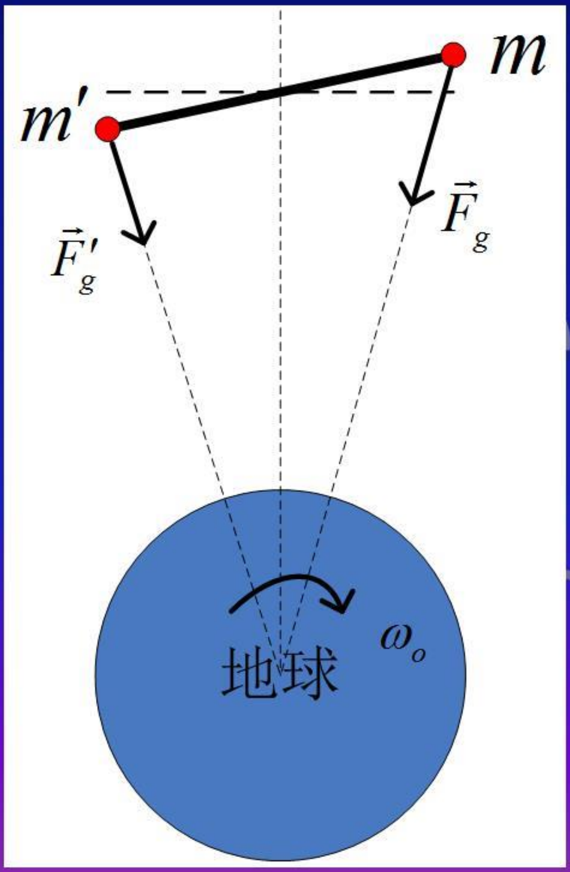
$$F_c' > F_c \quad L = L'$$

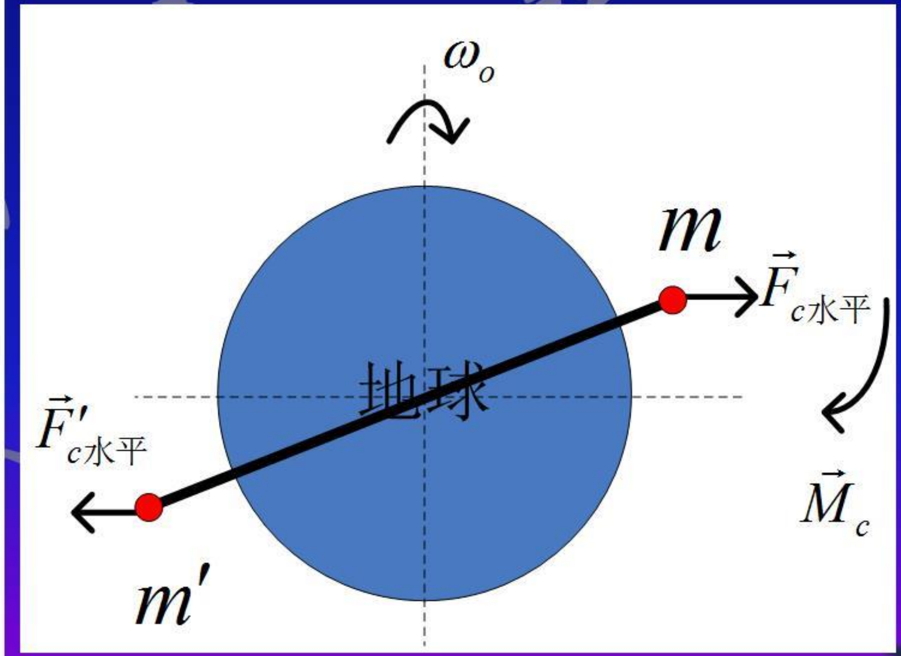


偏航通道

偏航平面内哑铃式卫星的情况。

在轨道平面内、水平平面内的投影





2、重力梯度力矩

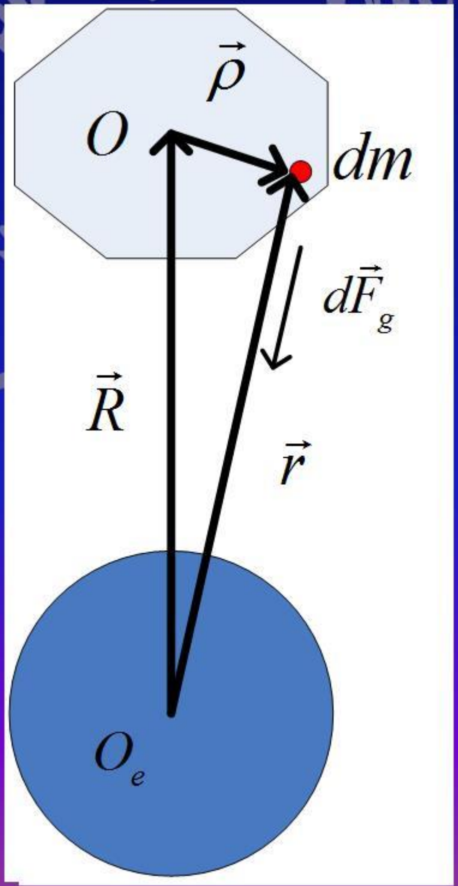
任意质量分布航天器重力梯度力矩

从地球中心到任一质量元的矢径：

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

重力：

$$dF_g = -\frac{\mu dm}{r^3} \cdot \vec{r}$$



力矩

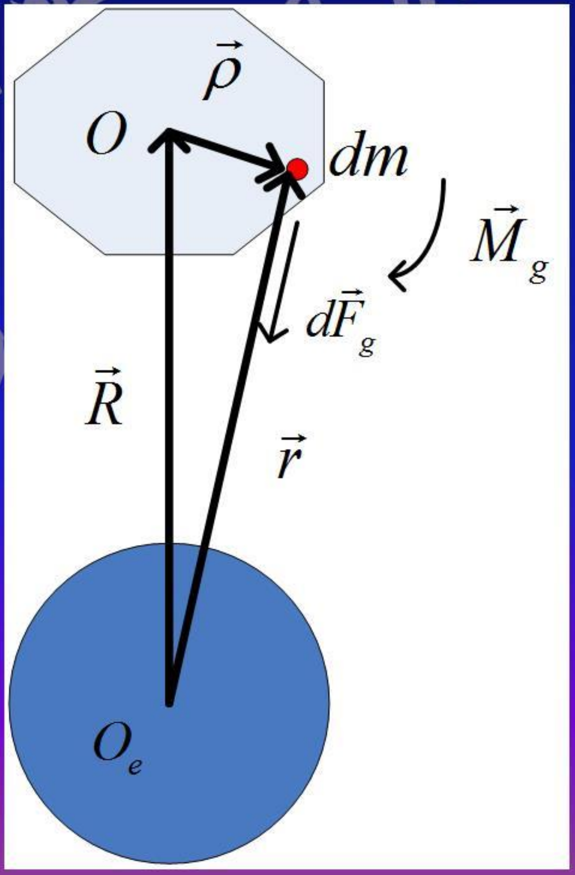
$$d\vec{M}_g = \vec{\rho} \times d\vec{F}_g$$

整个航天器受到的重力梯度力矩

$$\vec{M}_g = \int_m \vec{\rho} \times (-\frac{\mu}{r^3}\vec{r})dm$$

$$= -\int_m \frac{\mu}{r^3}\vec{\rho} \times (\vec{R} + \vec{\rho})dm$$

$$= -\int_m \frac{\mu}{r^3}\vec{\rho} \times \vec{R}dm$$



整个航天器受到的重力梯度力矩

$$\vec{M}_g = -\int_m \frac{\mu}{r^3} \vec{\rho} \times \vec{R} dm$$

$$r = \left[(\vec{R} + \vec{\rho}) \cdot (\vec{R} + \vec{\rho}) \right]^{1/2}$$

$$= \left[R^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{\rho} + \rho^2 \right]^{1/2} = R \left[1 + \frac{2\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2} + \cancel{\frac{\rho^2}{R^2}} \right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} \left[1 + \frac{2\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2} \right]^{-3/2} \approx \frac{1}{R^3} \left(1 - \frac{3\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2}\right)$$

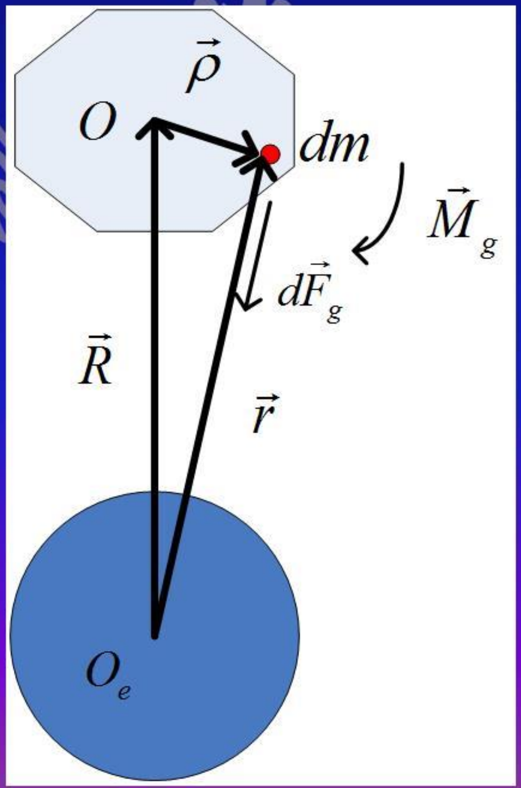
$$\vec{M}_g = -\frac{\mu}{R^3} \int_m \left(1 - \frac{3\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2}\right) \vec{\rho} \times \vec{R} dm$$

$$\vec{M}_g = -\frac{\mu}{R^3}\int_m \left(1-\frac{3\vec{R}\cdot\vec{\rho}}{R^2}\right)\vec{\rho}\times\vec{R}dm$$

$$= -\frac{\mu}{R^3}\int_m \underline{\vec{\rho}\times\vec{R}dm} + \frac{\mu}{R^3}\int_m \frac{3\vec{R}\cdot\vec{\rho}}{R^2}\vec{\rho}\times\vec{R}dm$$

$$= \frac{3\mu}{R^5}\int_m (\vec{R}\cdot\vec{\rho})(\vec{\rho}\times\vec{R})dm$$

$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \vec{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix}$$

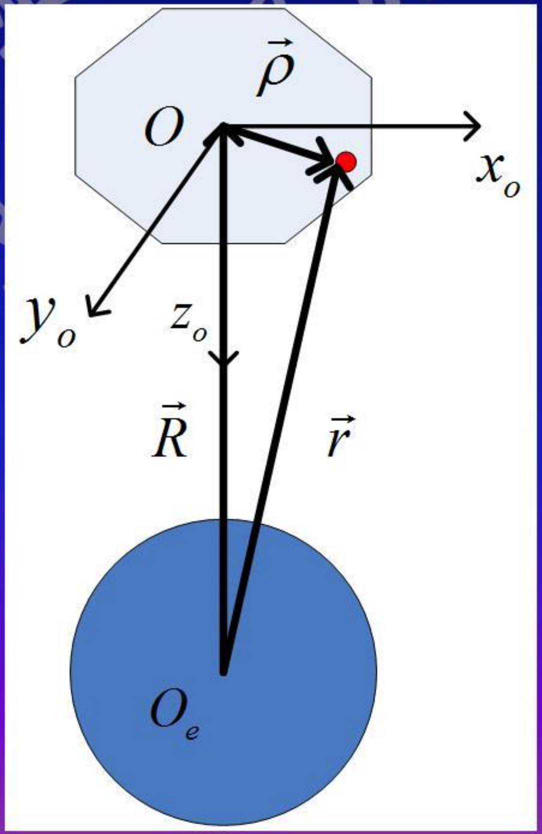


$$\vec{M}_g = \frac{3\mu}{R^5}\int_m (\vec{R}\cdot\vec{\rho})(\vec{\rho}\times\vec{R})dm$$

$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \vec{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{R} = A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix}$$

$$= R\begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi \\ -\cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix}$$



$$\vec{M}_g = \frac{3\mu}{R^5}\int_m (\vec{R}\cdot\vec{\rho})(\vec{\rho}\times\vec{R})\,dm$$

$$= \frac{3\mu}{R^5}\begin{bmatrix} (I_z - I_y)R_yR_z + I_{xy}R_xR_z - I_{xz}R_xR_y + I_{yz}(R_z^{\ 2} - R_y^{\ 2}) \\ (I_x - I_z)R_xR_z - I_{xy}R_yR_z + I_{xz}(R_x^{\ 2} - R_z^{\ 2}) + I_{yz}R_xR_y \\ (I_y - I_x)R_xR_y + I_{xy}(R_y^{\ 2} - R_x^{\ 2}) + I_{xz}R_yR_z - I_{yz}R_xR_z \end{bmatrix}$$

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$$

$$\vec{M}_g = \frac{3\mu}{2R^3}\begin{bmatrix} (I_z - I_y)\sin 2\varphi\cos\theta \\ (I_z - I_x)\cos^2\varphi\sin 2\theta \\ (I_x - I_y)\sin\theta\sin 2\varphi \end{bmatrix} \qquad \omega_0^{\ 2} = \frac{\mu}{R^3}$$

$$\vec{M}_g = \frac{3}{2}\omega_o^2 \begin{bmatrix} (I_z - I_y)\sin 2\varphi \cos\theta \\ (I_z - I_x)\cos^2\varphi \sin 2\theta \\ (I_x - I_y)\sin\theta \sin 2\varphi \end{bmatrix}$$

小角度情况下

$$\vec{M}_g = 3\omega_o^2 \begin{bmatrix} (I_z - I_y)\varphi \\ (I_z - I_x)\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

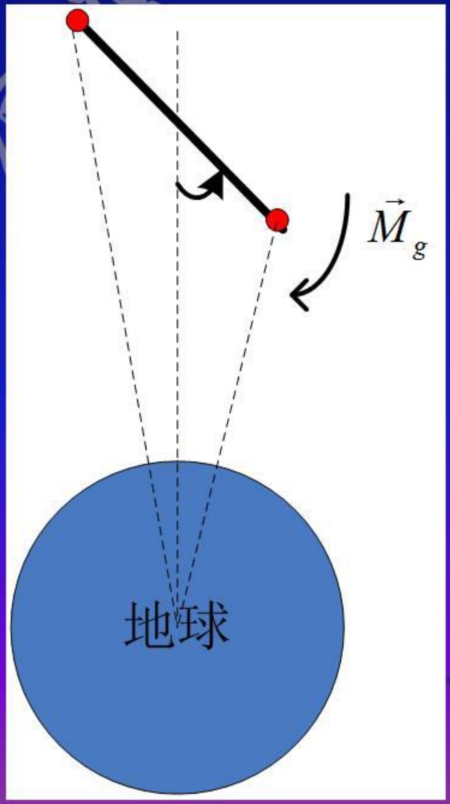
$$\vec{M}_g = \frac{3}{2}\underline{\omega_o^2}\begin{bmatrix} (I_z - I_y)\sin 2\varphi\cos\theta \\ (I_z - I_x)\cos^2\varphi\sin 2\theta \\ \underline{(I_x - I_y)}\,\underline{\sin\theta\sin 2\varphi} \end{bmatrix}$$

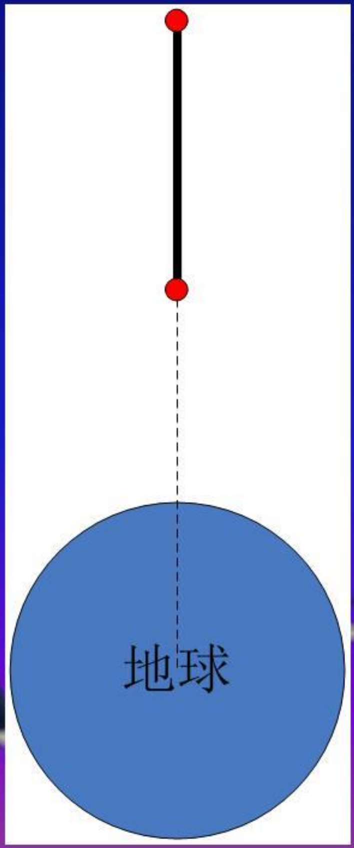
重力梯度力矩具有如下性质：

(1) 随高度的增加而减小。

(2) 与航天器的质量分布有关。

(3) 与航天器的角位置有关。





3、稳定性分析

线性化航天器的姿态运动方程:

$$\begin{cases} I_x\ddot{\varphi}+\left(I_y-I_z-I_x\right)\omega_0\dot{\psi}+\left(I_y-I_z\right)\omega_0{}^2\varphi=M_x \\ I_y\ddot{\theta}=M_y \\ I_z\ddot{\psi}-\left(I_y-I_z-I_x\right)\omega_0\dot{\varphi}+\left(I_y-I_x\right)\omega_0{}^2\psi=M_z \end{cases}$$

将重力梯度力矩代入

$$\vec{M}_g=3\omega_o^2\begin{bmatrix}(I_z-I_y)\varphi \\ (I_z-I_x)\theta \\ 0\end{bmatrix}$$

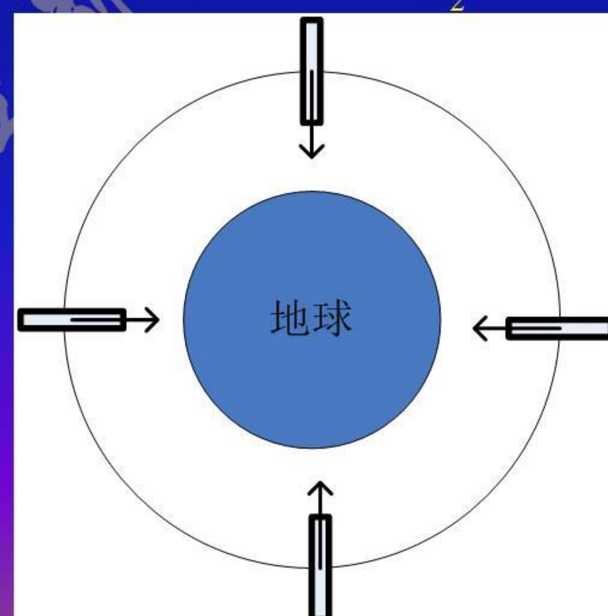
$$
\begin{cases}
I_x\ddot{\varphi}+\left(I_y-\cancel{I_z}-I_x\right)\omega_0\dot{\psi}+4\left(I_y-I_z\right)\omega_0^{\ 2}\varphi=0\\
I_y\ddot{\theta}+3\left(I_x-I_z\right)\omega_0^{\ 2}\theta=0\\
I_z\ddot{\psi}-\left(I_y-\cancel{I_z}-I_x\right)\omega_0\dot{\varphi}+\left(I_y-I_x\right)\omega_0^{\ 2}\psi=0
\end{cases}
$$

忽略偏航和滚动通道间的耦合

$$
\begin{cases}
I_x\ddot{\varphi}+4\left(I_y-I_z\right)\omega_0^{\ 2}\varphi=0\\
I_y\ddot{\theta}+3\left(I_x-I_z\right)\omega_0^{\ 2}\theta=0\\
I_z\ddot{\psi}+\left(I_y-I_x\right)\omega_0^{\ 2}\psi=0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\ddot{\varphi}+\dfrac{4\left(I_y-I_z\right)\omega_0{}^2}{I_x}\varphi=0 \\
\ddot{\theta}+\dfrac{3\left(I_x-I_z\right)\omega_0{}^2}{I_y}\theta=0 \\
\ddot{\psi}+\dfrac{\left(I_y-I_x\right)\omega_0{}^2}{I_z}\psi=0
\end{cases}
\xrightarrow{\text{稳定}}
\begin{aligned}
\Omega_x^2 &\overset{\Delta}{=} \frac{4\left(I_y-I_z\right)\omega_0{}^2}{I_x}>0 \\
\Omega_y^2 &\overset{\Delta}{=} \frac{3\left(I_x-I_z\right)\omega_0{}^2}{I_y}>0 \\
\Omega_z^2 &\overset{\Delta}{=} \frac{\left(I_y-I_x\right)\omega_0{}^2}{I_z}>0
\end{aligned}
$$

$$I_y>I_x>I_z$$



$$
\begin{cases}
\ddot{\varphi}+\Omega_x^2\varphi=0\\
\ddot{\theta}+\Omega_y^2\theta=0\\
\ddot{\psi}+\Omega_z^2\psi=0
\end{cases}
\longrightarrow
\begin{cases}
\varphi=\dfrac{\dot{\varphi}_0}{\Omega_x}\sin\Omega_x t+\varphi_0\cos\Omega_x t\\
\theta=\dfrac{\dot{\theta}_0}{\Omega_y}\sin\Omega_y t+\theta_0\cos\Omega_y t\\
\psi=\dfrac{\dot{\psi}_0}{\Omega_z}\sin\Omega_z t+\psi_0\cos\Omega_z t
\end{cases}
$$

$$
\Omega_x=2\omega_0\sqrt{\frac{\left(I_y-I_z\right)}{I_x}}\quad
\Omega_y=\omega_0\sqrt{\frac{3\left(I_x-I_z\right)}{I_y}}\quad
\Omega_z=\omega_0\sqrt{\frac{I_y-I_x}{I_z}}
$$

姿态运动是在平衡姿态周围无阻尼振荡，称为天平动。

设计重力梯度稳定航天器应解决三个问题：

(1) 增大起稳定作用的恢复力矩和限制扰动力矩。

(2) 捕获重力场。

(3) 天平动阻尼。