西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

航天学院

基于动力学的经典理论，如何建立导弹运动的数学模型

2.7导弹运动方程组

本节要求：

重点掌握导弹质心运动的动力学/运动学方程、导弹绕质心转动的动力学/运动学方程的建模方法；

理解导弹操纵飞行原理、操纵关系方程、理想操纵关系式，轴对称/面对称飞行器操纵的特点。

运动方程建立时坐标系的选择：
1 正确地描述导弹的运动；
2 运动方程形式简单、清晰易懂。

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

质心移动的动力学方程（矢量方程）

在弹道坐标系中投影，标量形式最为简单

动坐标系

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M}$$

绕质心转动的动力学方程（矢量方程）

在弹体坐标系中投影，标量形式最为简单

地面坐标系为惯性系

相对于惯性坐标系既有移动又有转动，在动坐标系中建立动力学方程时，需要用到绝对导数和相对导数的关系。

2.7.1 动力学方程

1). 质心移动的动力学方程

$\vec{V}$ 绝对速度：导弹质心相对于惯性坐标系的速度

$$m\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt}}=\vec{F} \qquad \frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\Omega\times\vec{V}$$

绝对导数　　　　相对导数

相对于惯性坐标系　　　　相对于动坐标系

以弹道坐标系为动坐标系建立方程时，将各矢量投影在该系的三个轴上，带入以上公式，展开：

$$m\left(\frac{dV_{x2}}{dt}+\Omega_{y2}V_{z2}-\Omega_{z2}V_{y2}\right)=F_{x2}$$

$$m\left(\frac{dV_{y2}}{dt}+\Omega_{z2}V_{x2}-\Omega_{x2}V_{z2}\right)=F_{y2}$$

$$m\left(\frac{dV_{z2}}{dt}+\Omega_{x2}V_{y2}-\Omega_{y2}V_{x2}\right)=F_{z2}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{x2}=V \\ V_{y2}=0 \\ V_{z2}=0 \end{array}\right\}$$

又设 $\vec{\Omega}$ 为 $OX_2Y_2Z_2$ 相对地面坐标系 $AXYZ$ 的旋转角速度

$$\vec{\Omega} = \vec{\dot{\psi}}_V + \vec{\dot{\theta}}$$

分别投影到 $OX_2Y_2Z_2$ 的三个坐标轴上，即得：

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{x2} &= \dot{\psi}_V \sin\theta \\ \Omega_{y2} &= \dot{\psi}_V \cos\theta \\ \Omega_{z2} &= \dot{\theta} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} G_{x2} &= -G\sin\theta \\ G_{y2} &= -G\cos\theta \\ G_{z2} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} R_{x2} &= -Q \\ R_{y2} &= Y\cos\gamma_V - Z\sin\gamma_V \\ R_{z2} &= Y\sin\gamma_V + Z\cos\gamma_V \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} P_{x2} &= P\cos\alpha\cos\beta \\ P_{y2} &= P(\sin\alpha\cos\gamma_V + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_V) \\ P_{z2} &= P(\sin\alpha\sin\gamma_V - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_V) \end{aligned}\right\}$$

弹道坐标系中建立的质心移动动力学方程

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{dV}{dt}=P\cos\alpha\cos\beta-Q-G\sin\theta\\
&mV\frac{d\theta}{dt}=P(\sin\alpha\cos\gamma_V+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_V)+Y\cos\gamma_V-Z\sin\gamma_V-G\cos\theta\\
&-mV\cos\theta\frac{d\psi_V}{dt}=P(\sin\alpha\sin\gamma_V-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_V)+Y\sin\gamma_V+Z\cos\gamma_V
\end{aligned}\right\}$$

特性分析

思考与练习：

若要在弹体坐标系中建立质心移动的动力学方程，请推导给出其标量方程形式。

2). 绕质心旋转的动力学方程

$$\boxed{\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{H} = \vec{M}}$$

绝对导数 → 相对于惯性坐标系

相对导数 → 相对于动坐标系

以弹体坐标系为动坐标系建立方程时，将各矢量投影在该系的三个轴上，带入以上公式，展开：

$$\frac{dH_{x1}}{dt}+\omega_{y1}H_{z1}-\omega_{z1}H_{y1}=M_{x1}$$
$$\frac{dH_{y1}}{dt}+\omega_{z1}H_{x1}-\omega_{x1}H_{z1}=M_{y1}$$
$$\frac{dH_{z1}}{dt}+\omega_{x1}H_{y1}-\omega_{y1}H_{x1}=M_{z1}$$

$$\vec{H}=\int \vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})dm$$

$\vec{r}$ –刚体上某点到o的矢径

$\vec{\omega}$ –刚体绕o转动角速度

$$\vec{H}=[\int(y^2+z^2)dm\cdot\omega_x-(\int xydm)\omega_y-(\int xzdm)\omega_z]\vec{i}$$
$$+[\int(z^2+x^2)dm\cdot\omega_y-(\int yzdm)\omega_z-(\int yxdm)\omega_x]\vec{j}$$
$$+[\int(y^2+x^2)dm\cdot\omega_z-(\int zxdm)\omega_x-(\int zydm)\omega_y]\vec{k}$$
$$=H_x\vec{i}+H_y\vec{j}+H_z\vec{k}$$

令： $J_{x} = \int (y^2 + z^2) dm \qquad J_{y} = \int (x^2 + z^2) dm \qquad J_{z} = \int (y^2 + x^2) dm$

$$J_{xy} = \int xydm \qquad J_{xz} = \int xzdm \qquad J_{yz} = \int yzdm$$

$$J_{yx} = \int yxdm \qquad J_{zx} = \int zxdm \qquad J_{zy} = \int zydm$$

定义惯性张量

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{x} & -J_{xy} & -J_{zx} \\ -J_{xy} & J_{y} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{yz} & J_{z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

对轴对称导弹，则相对弹体各轴的惯性积为零，则有：

$$\left.\begin{aligned} H_{x1} &= J_{x1}\omega_{x1} \\ H_{y1} &= J_{y1}\omega_{y1} \\ H_{z1} &= J_{z1}\omega_{z1} \end{aligned}\right\}$$

带入

$$\begin{aligned} \frac{dH_{x1}}{dt} + \omega_{y1}H_{z1} - \omega_{z1}H_{y1} &= M_{x1} \\ \frac{dH_{y1}}{dt} + \omega_{z1}H_{x1} - \omega_{x1}H_{z1} &= M_{y1} \\ \frac{dH_{z1}}{dt} + \omega_{x1}H_{y1} - \omega_{y1}H_{x1} &= M_{z1} \end{aligned}$$

并省略下标**1**

$$\left.\begin{aligned}
J_{x1}\frac{d\omega_{x1}}{dt}+(J_{z1}-J_{y1})\omega_{y1}\omega_{z1}&=\sum M_{x1}\\
J_{y1}\frac{d\omega_{y1}}{dt}+(J_{x1}-J_{z1})\omega_{x1}\omega_{z1}&=\sum M_{y1}\\
J_{z1}\frac{d\omega_{z1}}{dt}+(J_{y1}-J_{x1})\omega_{x1}\omega_{y1}&=\sum M_{z1}
\end{aligned}\right\}$$

思考与练习：

对于面对称导弹，请推导其转动动力学方程的标量形式。

2.7.2 运动学方程

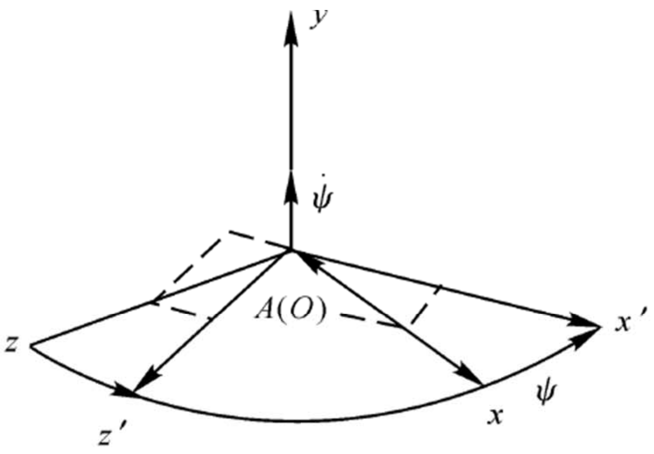
1). 质心移动的运动学方程（位移与速度之间的关系）

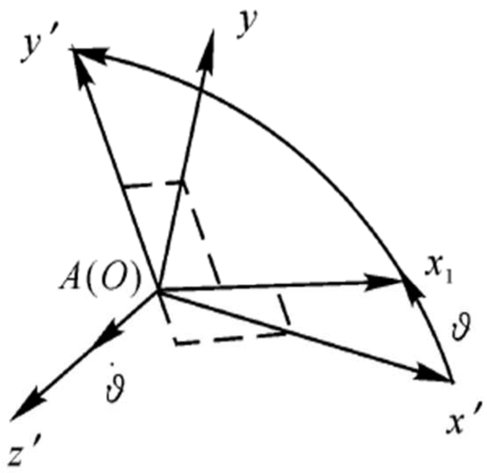
$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= V\cos\theta\cos\psi_V \\
\frac{dy}{dt} &= V\sin\theta \\
\frac{dz}{dt} &= -V\cos\theta\sin\psi_V
\end{aligned}\right\}
$$

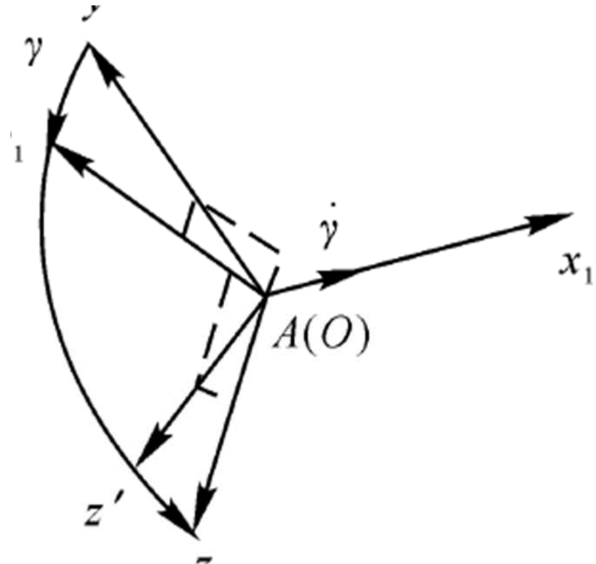
2). 绕质心转动的运动学方程
(姿态角和角速度之间的关系）

设 $OX_1Y_1Z_1$ 相对 $AXYZ$ 的角速度为 $\vec{\omega}$，则其角速度可看作是 $OX_1Y_1Z_1$ 绕不同的轴三次旋转而得

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\vartheta}} + \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\gamma}}$$





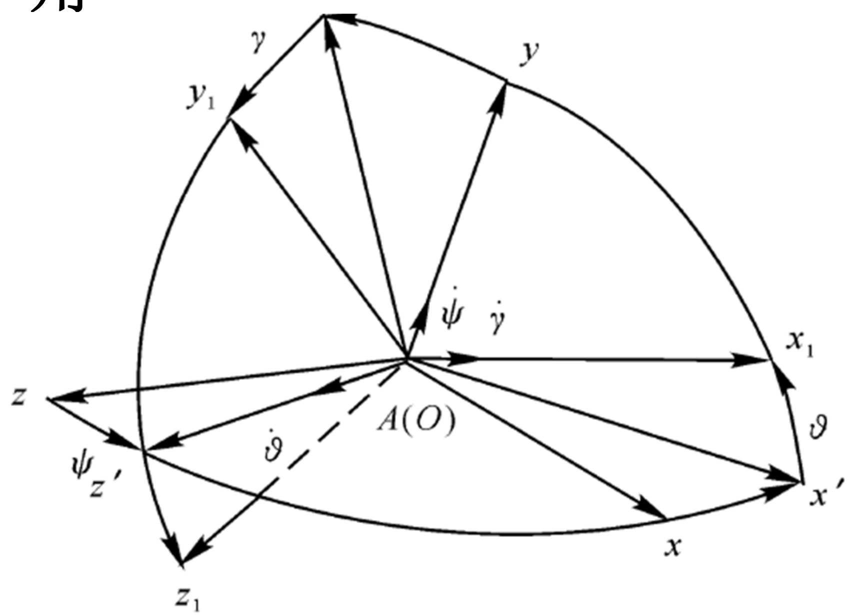


(d)

第一次旋转：绕**AY**轴，转过 ψ 角

第二次旋转：绕过渡系的**AZ'**轴，转过 ϑ 角

第三次旋转：绕**AX₁** 轴，转过**γ**角



$$\left.\begin{aligned}\dot{\psi}_{x1} &= \dot{\psi}\cdot\sin\vartheta\\ \dot{\psi}_{y1} &= \dot{\psi}\cdot\cos\vartheta\cos\gamma\\ \dot{\psi}_{z1} &= -\dot{\psi}\cdot\cos\vartheta\sin\gamma\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\gamma}_{x1} &= \dot{\gamma}\\ \dot{\gamma}_{y1} &= 0\\ \dot{\gamma}_{z1} &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vartheta}_{x1} &= 0 \quad (OZ_1' \perp OX_1)\\ \dot{\vartheta}_{y1} &= \dot{\vartheta}\sin\gamma\\ \dot{\vartheta}_{z1} &= \dot{\vartheta}\cos\gamma\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\omega_{x1} &= \dot{\gamma} + \dot{\psi}\sin\vartheta \\
\omega_{y1} &= \dot{\psi}\cos\vartheta\cos\gamma + \dot{\vartheta}\sin\gamma \\
\omega_{z1} &= \dot{\vartheta}\cos\gamma - \dot{\psi}\cos\vartheta\sin\gamma
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\vartheta} &= \omega_{y1}\sin\gamma + \omega_{z1}\cos\gamma \\
\dot{\psi} &= \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_{y1}\cos\gamma - \omega_{z1}\sin\gamma) \\
\dot{\gamma} &= \omega_{x1} - tg\vartheta(\omega_{y1}\cos\gamma - \omega_{z1}\sin\gamma)
\end{aligned}\right\}
$$

注意：在某些情况下，上述方程会发生奇异。

2.7.3 质量方程

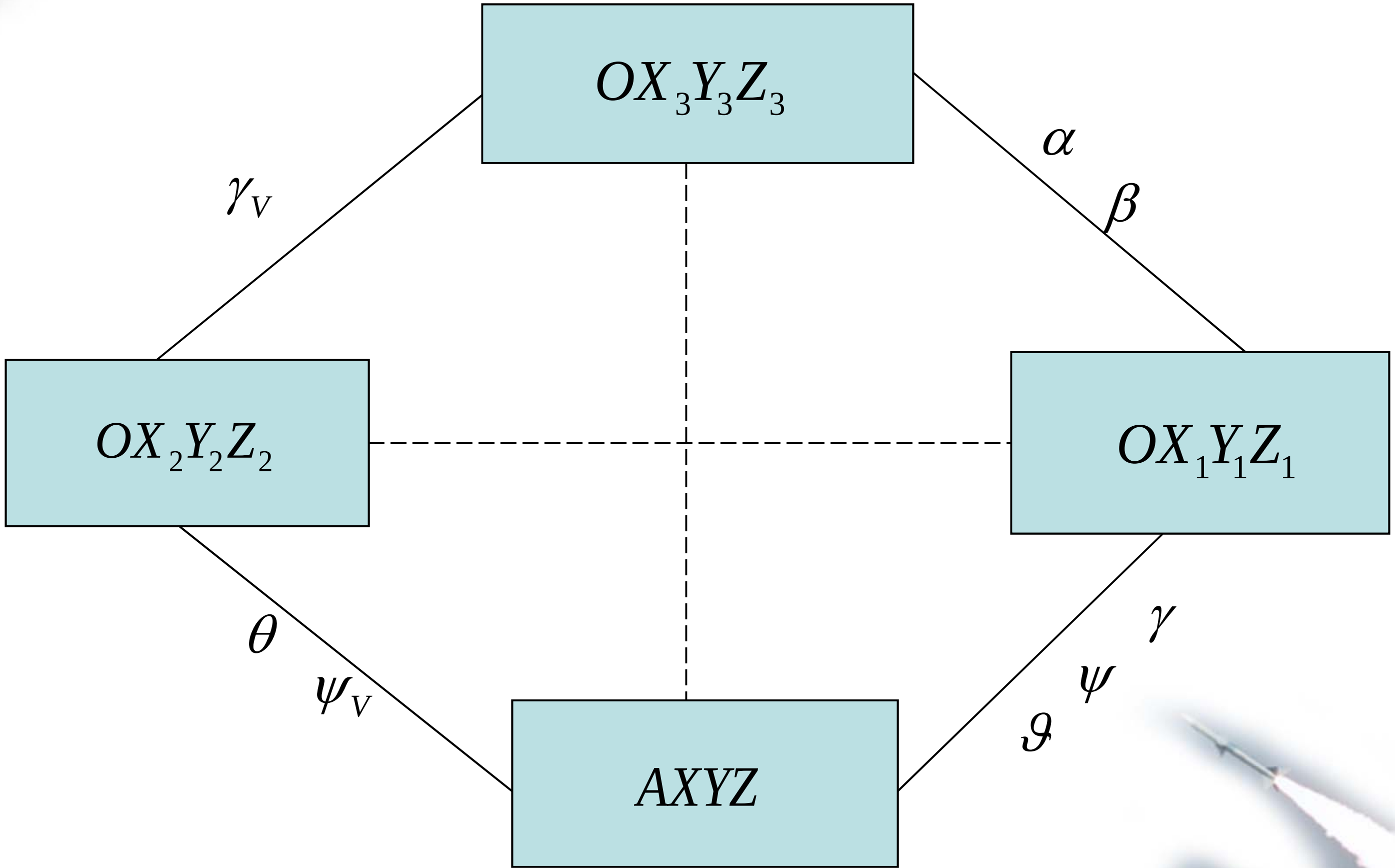
$$\frac{dm}{dt} = -m_s(t)$$

$$m(t) = m_0 - \int_{t_0}^{t_f} m_s(t)dt$$

$m_s(t)$ 为燃料的质量秒消耗量。

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY 航天学院

2.7.4 几何关系



独立变量：5个

非独立变量：3个，可以用以上5个独立变量来表示

所以，存在三个几何关系式。

求解几何关系式的方法：

假设 $\theta, \psi_V, \vartheta, \psi, \gamma$ 为独立变量，用它们来表达 α, β, γ_V

利用
- 数学公式
- 坐标系间的方向余弦关系
  - 弹体系——地面系
  - 弹体系——速度系
  - 弹道系——地面系
  - 速度系——地面系
  - 弹道系——速度系
  - 弹道系——弹体系

数学公式

任何两条空间直线的夹角的余弦，等于它们分别与参考系各轴夹角余弦的乘积之和。

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

若用$\langle L_1 \bullet L_2 \rangle$表示过原点的两条直线之间夹角的余弦，同时选地面坐标系 $AXYZ$ 作为参考系，则上式可以表示成：

$$\langle L_1 \cdot L_2 \rangle = \langle L_1 \cdot AX \rangle \langle L_2 \cdot AX \rangle + \langle L_1 \cdot AY \rangle \langle L_2 \cdot AY \rangle + \langle L_1 \cdot AZ \rangle \langle L_2 \cdot AZ \rangle$$

用 $\theta, \psi_V, \vartheta, \psi, \gamma$ 来表达 α, β, γ_V

OX_2, OZ_1 视作 L_1, L_2

$$\sin\beta = \cos\theta\left[\cos\gamma\sin(\psi-\psi_V)+\sin\vartheta\sin\gamma\cos(\psi-\psi_V)\right]-\sin\theta\cos\vartheta\sin\gamma$$

OX_1, OX_2 视作 L_1, L_2

$$\cos\alpha = \left[\cos\vartheta\cos\theta\cos(\psi-\psi_V)+\sin\vartheta\sin\theta\right]/\cos\beta$$

OZ_1, OZ_2 视作 L_1, L_2

$$\cos\gamma_V = \left[\cos\gamma\cos(\psi-\psi_V)-\sin\vartheta\sin\gamma\sin(\psi-\psi_V)\right]/\cos\beta$$

几种特殊情况下的几何关系式：

无侧滑无滚转飞行

$$\theta = \vartheta - \alpha$$

无侧滑零迎角飞行

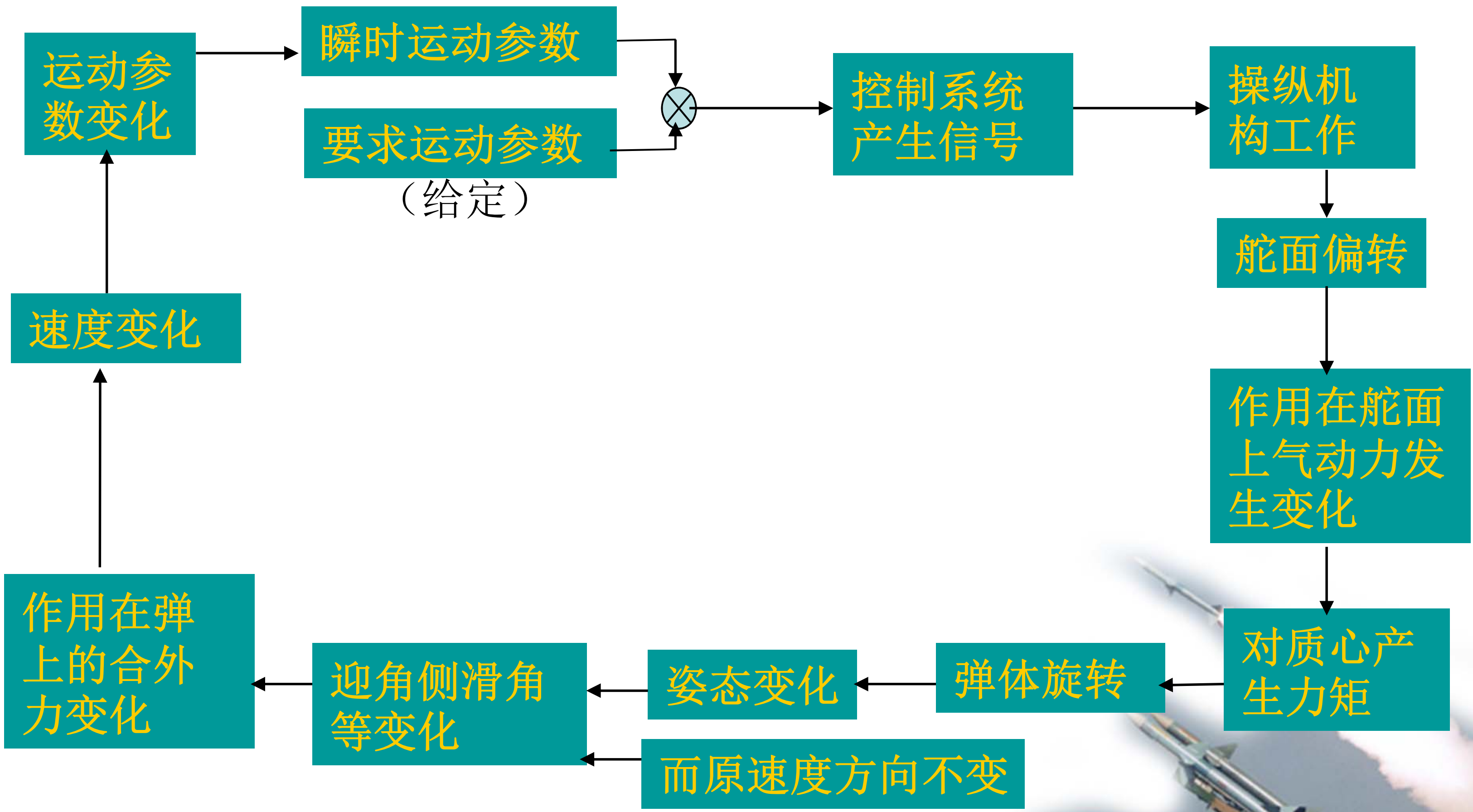
$$\gamma_V = \gamma$$

水平面内无滚动小迎角机动飞行

$$\psi_V = \psi - \beta$$

2.7.5 操纵关系方程

1、操纵飞行的过程



2、轴对称导弹操纵原理

俯仰运动：改变升降舵偏转角，改变迎角，改变升力的大小和方向，改变推力的法向分量

偏航运动：改变方向舵偏角，改变侧滑角，改变侧向力大小和方向，推力的法向分量改变

δ_z、$\delta_y \rightarrow \alpha$、$\beta \rightarrow Y$、$Z \rightarrow F$(任意方向的控制力)

$$
\left.
\begin{aligned}
& m\frac{dV}{dt} = P\cos\alpha\cos\beta - Q - G\sin\theta \\
& mV\frac{d\theta}{dt} = P(\sin\alpha\cos\gamma_V + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_V) + Y\cos\gamma_V - Z\sin\gamma_V - G\cos\theta \\
& -mV\cos\theta\frac{d\psi_V}{dt} = P(\sin\alpha\sin\gamma_V - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_V) + Y\sin\gamma_V + Z\cos\gamma_V
\end{aligned}
\right\}
$$

3、面对称导弹的操纵原理

俯仰运动：改变升降舵偏转角，改变迎角，改变升力的大小和方向，改变推力的法向分量

$$\delta_z \to \Delta Y \to \text{俯仰操纵力矩} \to \text{姿态变化} \to \text{迎角变化} \to \text{升力/俯仰力矩变化} \to \text{俯仰运动改变}$$

正负的规定：右下左上为正，副以正偏产生副滚转力矩。

偏航运动：差动副翼，产生滚转力矩，弹体倾斜，升力在**Z2**方向上的分量改变，航向改变。

$$\delta_x \to \text{弹体滚转} \to \gamma \to \gamma_v \to (Y + P\sin\alpha)\sin\gamma_v \to \text{偏航运动}$$

4、 操纵关系方程：

取决于控制系统的类型和结构

- 与目标的运动特性有关；
- 一旦确定，加在导弹运动上的约束也即确定，则弹道取决于初始条件和目标的运动。

一般形式

$$\delta_x = f(\varepsilon_1)$$

$$\delta_y = f(\varepsilon_2)$$

$$\delta_z = f(\varepsilon_3)$$

$$\delta_p = f(\varepsilon_4)$$

误差=实际值-要求的理想值

$$\varepsilon_i = x_i - x_{i_*}$$

误差参数包括：
姿态、速度、高度、位置等参数

理想情况下，系统无误差工作，即

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0\end{array}\right\}\text{主要（基本）操纵关系式}\\ \left.\begin{array}{l}\varepsilon_3=0\\ \varepsilon_4=0\end{array}\right\}\text{辅助操纵关系式}\end{array}\right.$$

上式为理想操纵关系方程。

导弹保持等速直线飞行时，理想操纵关系方程为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \theta_* - \theta = 0 \\
\varepsilon_2 &= \psi_{V*} - \psi_V = 0 \\
\varepsilon_3 &= \gamma = 0 \\
\varepsilon_4 &= V_* - V = 0
\end{aligned}\right\}$$

面对称导弹在水平面内进行等速倾斜转弯（盘旋）时,理想操纵关系方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1=\theta=0 \quad \text{或} \quad \varepsilon_1=y=\text{常数}\\
&\varepsilon_2=\gamma_*-\gamma=0\\
&\varepsilon_3=\beta=0\\
&\varepsilon_4=V_*-V=0
\end{aligned}\right\}$$

导弹运动方程组，包含20个方程，20个未知数，初始条件给定后，可求解，得到可控弹道及参数变化规律。