2.4 模糊关系及其运算

2.4.3 模糊关系的运算

已知有限离散论域$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$和$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，设从 U 到 V 的一个模糊关系 $R(u_i,v_j)$ 可以表示成模糊矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$， r_{ij} 为该矩阵的元素，则模糊矩阵 R 确定了一个模糊关系。对于这种模糊关系来说，模糊关系的运算就是模糊矩阵的运算。模糊矩阵的运算和普通矩阵的运算有所不同，和模糊集合的运算类似。这里只介绍以后经常使用的 n 阶模糊矩阵的运算。

2.4.3.1 模糊矩阵的运算

设 A 和 B 都是 n 阶模糊矩阵， $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$，其中$i,j=1,2,\cdots,n$，则定义如下几种运算。

(1) 相等。若$a_{ij}=b_{ij}$，即两个模糊矩阵对应元素都相等，则称它们相等，记为$A=B$。
(2) 包含。若$a_{ij}\le b_{ij}$，即模糊矩阵 A 的元素总小于 B 中对应的元素，则称 B 包含 A，记为$B\supseteq A$或称 A 包含于 B，记为$A\subseteq B$。
(3) 并运算。若$c_{ij}=a_{ij}\vee b_{ij}$，即模糊矩阵 C 的元素总是等于 A 和 B 中对应元素的取大者，则称$C=(c_{ij})$为 A 和 B 的并，记为$C=A\bigcup B$。
(4) 交运算。若$c_{ij}=a_{ij}\wedge b_{ij}$，即模糊矩阵 C 的元素总是等于 A 和 B 中对应元素的取大者，则称$C=(c_{ij})$为 A 和 B 的交，记为$C=A\bigcap B$。
(5) 补运算。若$c_{ij}=1-a_{ij}$，即模糊矩阵 C 的每个元素总是等于 A 中对应元素被 1 减后的值，则称$C=(c_{ij})$为 A 的补，记为$C=A^C$。

例 2-7　设 A、B 均为模糊关系， $A=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1\\ 0.3 & 0.9\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}$。

求$A\bigcup B$、$A\bigcap B$和A^C。

解

$$A \cup B = \begin{bmatrix} 0.7 \vee 0.4 & 0.1 \vee 0.9 \\ 0.3 \vee 0.2 & 0.9 \vee 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.9 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$A \cap B = \begin{bmatrix} 0.7 \wedge 0.4 & 0.1 \wedge 0.9 \\ 0.3 \wedge 0.2 & 0.9 \wedge 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$A^C = \begin{bmatrix} 1-0.7 & 1-0.1 \\ 1-0.3 & 1-0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.9 \\ 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}$$

2.4.3.2 模糊矩阵运算的性质

模糊矩阵的并、交、补运算具有以下一些性质，利用它们可以简化运算。

设 R、S、T 都是同阶的模糊关系矩阵，则有以下关系。

(1) 幂等律

$$R \cup R = R, \qquad R \cap R = R$$

(2) 交换律

$$R \cup S = S \cup R, \qquad R \cap S = S \cap R$$

(3) 结合律

$$(R \cup S) \cup T = R \cup (S \cup T), \qquad (R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T)$$

(4) 分配律

$$(R \cup S) \cap T = (R \cap S) \cup (S \cap T), \qquad (R \cap S) \cup T = (R \cup T) \cap (S \cup T)$$

(5) 吸收律

$$(R \cup S) \cap S = S, \qquad (R \cap S) \cup S = S$$

(6) 复原律

$$\left(R^C\right)^C = R$$

(7) 对偶律

$$\left(R\bigcup S\right)^{C}=R^{C}\bigcap S^{C},\quad \left(R\bigcap S\right)^{C}=R^{C}\bigcup S^{C}$$

2.4.3.3 模糊矩阵相等和包含的性质

设O为零矩阵，E 为全矩阵（全 1 阵），R 为任一模糊关系矩阵，即：

$$O=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{11} & \cdots & r_{11}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}\end{bmatrix}$$

$r_{ij}\in[0,1],(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

则$O\subseteq R\subseteq E,\quad O\bigcup R=R,\quad E\bigcup R=E,\quad O\bigcap R=O,\quad E\bigcap R=R$

(1) $R\subseteq S$、$R\bigcup S=S$ 和 $R\bigcap S=R$ 三者等价。

(2) 若 $R_1\subseteq S_1$，$R_2\subseteq S_2$，则$\left(R_1\bigcup R_2\right)\subseteq\left(S_1\bigcup S_2\right)$，$\left(R_1\bigcap R_2\right)\subseteq\left(S_1\bigcap S_2\right)$

(3) $R\subseteq S$ 等价于 $R^{C}\supseteq S^{C}$。

上述性质可由定义直接证明。

布尔矩阵遵从的互补律，在模糊矩阵中不成立，即 $R\bigcup R^{C}\neq E$，$R\bigcap R^{C}\neq\varnothing$，$\varnothing$为空矩阵。

例 2-8　设模糊关系矩阵 R、S、T 分别为

$$R=\begin{bmatrix}0.7 & 0.5\\ 0.9 & 0.1\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\ 0.6 & 0.8\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\ 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$$

计算$R\bigcup S\bigcup T$、$R\bigcap S\bigcap T$、$R\bigcup\left(S\bigcap T\right)$和$\left(R\bigcup S\right)\bigcap\left(R\bigcup T\right)$。

解

$$R\bigcup S\bigcup T=\begin{bmatrix}0.7\vee 0.4\vee 0.7 & 0.5\vee 0.3\vee 0.6\\ 0.9\vee 0.6\vee 0.2 & 0.1\vee 0.8\vee 0.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\ 0.9 & 0.8\end{bmatrix}$$

$$R\bigcap S\bigcap T=\begin{bmatrix}0.7\wedge 0.4\wedge 0.7 & 0.5\wedge 0.3\wedge 0.6\\ 0.9\wedge 0.6\wedge 0.2 & 0.1\wedge 0.8\wedge 0.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$R\cup(S\cap T)=\begin{bmatrix}0.7 & 0.5\\0.9 & 0.1\end{bmatrix}\cup\left(\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\0.6 & 0.8\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\0.2 & 0.8\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0.7 & 0.5\\0.9 & 0.1\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\0.2 & 0.8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.7 & 0.5\\0.9 & 0.8\end{bmatrix}$$

$$(R\cup S)\cap(R\cup T)=\begin{bmatrix}0.7 & 0.5\\0.9 & 0.8\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\0.9 & 0.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.5\\0.9 & 0.8\end{bmatrix}$$

也可利用分配律$(R\cup S)\cap(R\cup T)=R\cup(S\cap T)$计算。

2.4.4 模糊关系的合成

2.4.4.1 经典关系合成举例

现有九个苹果，能被两对父子（四个人）整分吗？似乎不行。但若这两对父子中有一定关系，其中一个人既是父亲又是儿子，这种情况就是可能的。这时祖父、爸爸和孙子三个人正好是两对父子，正好能整分九个苹果。这是因为祖孙是两个“父子关系”的合成，若用 a、b、c 分别表示爷爷、父亲和孙子，用R_1和R_2分别表示两个“父子关系”，则$(a,b)\in R_1$且$(b,c)\in R_2$，祖孙关系$R_3(a,c)$可以认为是$R_1(a,b)$和$R_2(b,c)$的合成，记作：$R_3=R_1\circ R_2$，符号“$\circ$”表示将两边的关系进行合成运算。下面给出合成运算的一般定义。

一般地，设论域 U 上的三个集合 X、Y、Z$\in\mathscr{P}(U)$，P 和 Q 为两个经典关系：$P\in\mathscr{P}(X\times Y),Q\in\mathscr{P}(Y\times Z)$，则由 P 和 Q 合成的关系$R\in P(X\times Z)$，可记作：

$$R=P\circ Q$$

$$R(x,z)=(P\circ Q)(x,z)=\{(x,z)\mid\exists y,(x,y)\in P,(y,z)\in Q\}$$

式中$\exists y$表示对于任意的 y。

可以看出，关系的合成运算就是通过第一个集合 X 到第二个集合 Y 间的关系 P，以及第二个集合 Y 到第三个集合 Z 间的关系 Q，得出第一个集合到第三个集合间的关系 R。这里集合 X 与 Y 存在关系 P，集合 Y 与 Z 存在关系 Q 经过合成运算得出了集合 X 到 Z 的关系 R。

若用集合的特征函数表示出合成关系，就可以导出两个关系进行合成的具

体算法：

$$R(x,z)=(P\circ Q)(x,z)=\underset{y\in Y}{\vee}\left(P(x,y)\wedge Q(y,z)\right)$$

如果论域 U 是有限离散的，则关系 P、Q、R 都可以用矩阵表示。设 p、q、r 分别为关系矩阵 P、Q、R 的元素，则它们的元素间存在下述关系：

$$r_{ij}=\underset{k}{\vee}\left(p_{ik}\wedge q_{kj}\right)$$

这种运算方法跟两个矩阵的乘积运算方法相比较，可以看出两个关系矩阵的合成运算就像做两个普通矩阵的乘积一样，只是把矩阵乘积运算中元素间的“相乘”改为“取小”、“相加”改为“取大”通常把这种合成运算称为“取大-取小合成法”，记作“$\vee-\wedge$法”。

由于这里的矩阵都是布尔矩阵，矩阵元素的取值为 1 或 0，两者之间取小和乘积的结果相同，所以有时也把“取小”改为“乘积”，成为合成运算的“取大-乘积合成法”，记作“$\vee-*$法”。

例 2-9 设元素 $a,b,c,d,e,f,g\in R$，已知它们间的“大于关系”如表 **错误!文档中没有指定样式的文字。**-1 所示。

表 **错误!文档中没有指定样式的文字。**-1　元素间的大于关系

a>c	b⊁c	c⊁f	d>g
a⊁d	b⊁d	c>g	e⊁f
a>e	b>e	d>f	e⊁g

设$U1$、$U2$、$U3\in\mathscr{P}(R)$，且$U1=\{a,b\}$，$U2=\{c,d,e\}$，$U3=\{f,g\}$。R_1、R_2 和 R_3 均表示“大于”关系，$R_{12}\in\mathscr{P}(U1\times U2)$，$R_{23}\in\mathscr{P}(U2\times U3)$。求 $R_{13}\in\mathscr{P}(U1\times U3)$。

解 分两步计算：① 先据题设求出二元关系 R_{12} 和 R_{23}。

$$R_{12}=\vec{U}1\oplus U2=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}c & d & e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R(a,c) & R(a,d) & R(a,e)\\R(b,c) & R(b,d) & R(b,e)\end{bmatrix}$$

R_{12} 的每个元素都表示满足“大于”条件的搭配，如 $R(a,c)$=1，$R(a,d)$=0，⋯

于是得出 $R_{12}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。同理可以得出：

$$R_{23}=\vec{U}2\oplus U3=\begin{bmatrix}c\\ d\\ e\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}f & g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R(c,f) & R(c,g)\\ R(d,f) & R(d,g)\\ R(e,f) & R(e,g)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

② 再用经典关系合成法求出二元关系 R_{13}。

$$R_{13}=R_{12}\circ R_{23}=\begin{bmatrix}R(a,c) & R(a,d) & R(a,e)\\ R(b,c) & R(b,d) & R(b,e)\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}R(c,f) & R(c,g)\\ R(d,f) & R(d,g)\\ R(e,f) & R(e,g)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}R(a,f) & R(a,g)\\ R(b,c) & R(b,g)\end{bmatrix}$$

其中：

$$R(a,f)=\big(R(a,c)\wedge R(c,f)\big)\vee\big(R(a,d)\wedge R(d,f)\big)\vee\big(R(a,e)\wedge R(e,f)\big)$$
$$R(b,f)=\big(R(b,c)\wedge R(c,f)\big)\vee\big(R(b,d)\wedge R(d,f)\big)\vee\big(R(b,e)\wedge R(e,f)\big)$$
$$R(a,g)=\big(R(a,c)\wedge R(c,g)\big)\vee\big(R(a,d)\wedge R(d,g)\big)\vee\big(R(a,e)\wedge R(e,g)\big)$$
$$R(b,g)=\big(R(b,c)\wedge R(c,g)\big)\vee\big(R(b,d)\wedge R(d,g)\big)\vee\big(R(b,e)\wedge R(e,g)\big)$$

即有 $R_{13}=\begin{bmatrix}(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\\ (0\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\end{bmatrix}$

$R_{13}=\mathrm{R}_{12}\circ R_{23}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

该结果表明 $a\not> f, a>g, b\not> f, b\not> g$。

当 $a=8$、$b=5$、$c=7$、$d=9$、$e=4$、$f=8$、$g=6$ 时满足题设条件，显然也满足计算结果。由于这里“$\not>$”的意义并不清晰、不唯一，所以计算结果并不一定适合所有的数组。(a=9 时，不满足计算结果)

2.4.4.2 模糊关系合成定义

如果已知两个模糊关系，“a 的品德比 b 好”和“b 的品德比 c 好”，把它们进行合成，便可得出新的模糊关系“a 的品德比 c 好很多”，可见模糊关系也可以进

行合成。把经典关系合成推广到模糊关系中，就可以得到模糊关系合成的定义。

设 $P\in\mathscr{F}(X\times Y)$，$Q\in\mathscr{F}(Y\times Z)$，则由模糊关系 P 到模糊关系 Q 的合成，就是 X 到 Z 的 一个模糊关系，记为 $P\circ Q$。

令 $P(U,V)$ 和 $Q(V,W)$ 表示两个共用一个公共集 V 的清晰二元关系。定义 P 和 Q 的合成为 $U\times W$ 中的一个关系，记作 $P\circ Q$ ，它满足 $(x,z)\in P\circ Q$ 的充要条件是至少存在一个 $y\in V$ 使 $(x,y)\in P$ 且 $(y,z)\in Q$。通过使用关系的隶属度函数表达式，可以得到的合成的一个等价定义，以引理形式列到下面。

引理 对任意 $(x,z)\in U\times W$ ，当且仅当

$$\mu_{P\circ Q}(x,z)=\max_{y\in V} t\left[\mu_P(x,y),\mu_Q(y,z)\right] \qquad (1)$$

时，$P\circ Q$ 是 $P(U,V)$ 和 $Q(V,W)$ 的合成，其中，t 表示任一 t-范数。

定义

模糊关系 $P(U,V)$ 和 $Q(V,W)$ 的合成，记作 $P\circ Q$，是 $U\times W$ 中的一个模糊关系，其隶属度函数由式（1）给出。

由于式（1）中的 t-范数可以 有多种，所以每种 t-范数都能得到一个特定的关系合成。

对于模糊合成关系 $P\circ Q$，应该如何计算呢？通常用下述两种方法。

1）取大-取小合成法（$\vee-\wedge$法）

把经典关系合成的公式移植到模糊关系里来，定义 $P\circ Q$ 的隶属函数为：

$$(P\circ Q)(x,z)=\bigvee_{y\in Y}(P(x,y)\wedge Q(y,z))$$

若论域 U 是离散有限集时， X、Y、$Z\in\mathscr{P}(U)$，则模糊关系 P、Q 可用模糊矩阵表示，公式里的 $P(x,y)$、$Q(y,z)$ 和 $(P\circ Q)(x,z)$ 不再表示经典关系，而应该

是模糊矩阵表示的模糊关系。

若已知模糊关系矩阵 $P=(p)_{m\times k}$ 和 $Q=(q)_{k\times n}$，其合成关系 $(P\circ Q)$ 就是一个 $m\times n$ 阶模糊矩阵。令 $R(x,z)=P(x,y)\circ Q(y,z)=(P\circ Q)(x,z)$，则模糊矩阵 $R=(r)m\times n$。

按“取大-取小”定义进行合成运算，合成后模糊关系矩阵 R 的第 i 行、j 列元素为则：

$$r_{ij}=\mathop{\vee}_{k=1}^{n}(p_{ik}\wedge q_{kj}),\ \ r_{ij}、\ r_{ik}、\ r_{kj}\in[0,1]$$

这个式子表明 $R=(P\circ Q)$ 的计算跟矩阵的一般乘法一样，只是把矩阵乘法运算中的“相乘”换为“取小”、“相加”换为“取大”。例如，已知两个模糊关系矩阵：

$$P(x,y)=\begin{bmatrix}0.3 & 0.9\\ 1.0 & 0\\ 0.95 & 0.1\end{bmatrix},\quad Q(x,y)=\begin{bmatrix}0.95 & 0.1\\ 0.1 & 0.9\end{bmatrix}$$

则其合成矩阵为：

$$R(x,z)=(P\circ Q)=\begin{bmatrix}0.3 & 0.9\\ 1.0 & 0\\ 0.95 & 0.1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.95 & 0.1\\ 0.1 & 0.9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0.3\wedge 0.95)\vee(0.9\wedge 0.1) & (0.3\wedge 0.1)\vee(0.9\wedge 0.9)\\ (1.0\wedge 0.95)\vee(0\wedge 0.1) & (1.0\wedge 0.1)\vee(0\wedge 0.9)\\ (0.95\wedge 0.95)\vee(0.1\wedge 0.1) & (0.95\wedge 0.1)\vee(0.1\wedge 0.9)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.3 & 0.9\\ 0.95 & 0.1\\ 0.95 & 0.1\end{bmatrix}$$

2）取大-乘积合成法（V-*法）

由于模糊矩阵的元素都小于 1，合成时两个元素“取小”和“相乘”的结果相差不大，而乘积的计算更为方便，因此常用“相乘”代替“取小”，得出“取大-相乘”合成法公式：

$$(P\circ Q)(x,z)=\mathop{\vee}_{y\in Y}(P(x,y)\times Q(y,z))$$

模糊关系 P、Q 若在有限离散论域 U 上，它们包含的元素有限，都可用模糊矩阵表示。设已知模糊关系矩阵 $P=(p)_{m\times k}$ 和 $Q=(q)_{k\times n}$，其合成 $(P\circ Q)$ 就是一

个 $m\times n$ 阶模糊矩阵。设 $R=(P\circ Q)$，则 $R=(r)m\times n$，按“取大-相乘合成法”运算，矩阵元素 r 与 p 、q 的关系为：

$$r_{ij}=\underset{k=1}{\overset{n}{\vee}}(p_{ik}\times q_{kj})$$

这跟矩阵的一般乘法类似，只是把矩阵乘法运算中的“相加”换为“取大”如对于前面的算例，有：

$$R(x,z)=(P\circ Q)=\begin{bmatrix}0.3 & 0.9\\ 1.0 & 0\\ 0.95 & 0.1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.95 & 0.1\\ 0.1 & 0.9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0.3\times0.95)\vee(0.9\times0.1) & (0.3\times0.1)\vee(0.9\times0.9)\\ (1.0\times0.95)\vee(0\times0.1) & (1.0\times0.1)\vee(0\times0.9)\\ (0.95\times0.95)\vee(0.1\times0.1) & (0.95\times0.1)\vee(0.1\times0.9)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.285 & 0.81\\ 0.95 & 0.1\\ 0.9025 & 0.095\end{bmatrix}$$

这跟用“取大-取小”合成法的计算结果相差不大。

此外，实用中还有“加法-相乘”合成运算法，是上面算法的变形，跟普通矩阵乘法完全一样，只是相加的结果取小于 1 的数，即用有限和代替加法结果。应用中还可以根据实际需求自行定义合成法则，以符合客观实际为准。

模糊矩阵的合成运算和普通矩阵运算一样，不遵从交换律，这是关系具有“方向性”的反映，如甲比乙“高得多”，则乙比甲就不能是“高得多”，应是“矮得多”。

例 2-11 已知模糊关系矩阵 $A(x,y)=\begin{bmatrix}0.5 & 0.9 & 0.4\\ 0.2 & 0.7 & 0.8\end{bmatrix}$，$B(y,z)=\begin{bmatrix}0.9 & 0.5\\ 0.4 & 1.0\\ 0.6 & 0.1\end{bmatrix}$，求 $(A\circ B)(x,y)$。

解 根据“取大-取小合成法”，设 $C(x,z)=(A\circ B)(x,z)=(c_{ij})$，则：

$$\begin{aligned}c_{11}&=(0.5\wedge0.9)\vee(0.9\wedge0.4)\vee(0.4\wedge0.6)=0.5\\ c_{12}&=(0.5\wedge0.5)\vee(0.9\wedge1.0)\vee(0.4\wedge0.1)=0.9\\ c_{21}&=(0.2\wedge0.9)\vee(0.7\wedge0.4)\vee(0.8\wedge0.6)=0.6\\ c_{22}&=(0.2\wedge0.5)\vee(0.7\wedge1.0)\vee(0.8\wedge0.1)=0.7\end{aligned}$$

于是得出：

$$(A\circ B)(x,y)=\begin{bmatrix}0.5 & 0.9\\ 0.6 & 0.7\end{bmatrix}$$

例 2-11 某个大家庭中第三代有孙子a和孙女b，第二代有父亲c和母亲d，这两代间的外貌“相像”关系为 R1；第二代的父母与第一代祖父e和祖母f、外祖父g和外祖母h间的“相像”关系为 R2。已知模糊关系 R1 和 R2 分别为：

$$R1=\begin{bmatrix}R1(a,c) & R1(a,d)\\ R1(b,c) & R1(b,d)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.1 & 0.7\end{bmatrix}$$

$$R2=\begin{bmatrix}R2(c,e) & R2(c,f) & R2(c,g) & R2(c,h)\\ R2(d,e) & R2(d,f) & R2(d,g) & R2(d,h)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.7 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$$

试问第三代孙子、孙女与祖父母、外祖父母的“相像”程度如何？

解 若用模糊矩阵表示，$R1=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.1 & 0.7\end{bmatrix}$，$R2=\begin{bmatrix}0.5 & 0.7 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$。那么，子女与祖父母、外祖父母的“相像”关系就是$R=R1\circ R2$，即：

$$R=R1\circ R2=\begin{bmatrix}R1(a,c) & R1(a,d)\\ R1(b,c) & R1(b,d)\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}R2(c,e) & R2(c,f) & R2(c,g) & R2(c,h)\\ R2(d,e) & R2(d,f) & R2(d,g) & R2(d,h)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}R1(a,c)\wedge R2(c,e)\vee R1(a,d)\wedge R2(d,e)\cdots\\ R1(b,c)\wedge R2(c,e)\vee R1(b,d)\wedge R2(d,e)\cdots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}R2(a,e) & R2(a,f) & R2(a,g) & R2(a,h)\\ R2(b,e) & R2(b,f) & R2(b,g) & R2(b,h)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.5 & 0.7 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$$

结果中$R(a,f)=0.7$和$R(b,h)=0.8$的取值较大，表明儿子较像祖母，女儿更像外祖母。

当模糊关系属于连续论域时，计算方法略显复杂。下面举一个连续论域内模糊关系合成计算的一个例子。

例 2-12 已知 R 为“x远大于y”的模糊关系，其隶属函数为：

$$R(x,y)=\begin{cases}0 & x\le y\\ \left[1+\dfrac{100}{(x-y)^2}\right]^{-1} & x>y\end{cases}$$

合成关系 $R\circ R$ 应为“x 远远大于 y”，求（$R\circ R$）(x,y) 并作图。

解 按合成关系（$R\circ R$）$(x,y)=\underset{z}{\vee}(R(x,z)\wedge R(z,y))$，即“$x$ 远大于 z”和“z 远大于 y”的合成结果就是“x 远远大于 y”。其中：

$$R(x,z)=\begin{cases}0 & x\le z\\ \left[1+\dfrac{100}{(x-z)^2}\right]^{-1} & x>z\end{cases}$$

$$R(z,y)=\begin{cases}0 & z\le y\\ \left[1+\dfrac{100}{(z-y)^2}\right]^{-1} & z>y\end{cases}$$

当 $R(x,z)\le R(z,y)$，即 x 比 y 更接近 z 时，$\underset{z}{\vee}(R(x,z)\wedge R(z,y))=\underset{z}{\vee}R(x,z)=R(z_0,y)$；

当 $R(x,z)\ge R(z,y)$，即 y 比 x 更接近 z 时，$\underset{z}{\vee}(R(x,z)\wedge R(z,y))=\underset{z}{\vee}R(z,y)=R(x,z_0)$；

可见，合成运算就是求满足 $R(x,z)=R(z,y)$ 的 z_0，即从下面的方程中解出 z，

即为 z_0：

$$\left[1+\frac{100}{(x-z)^2}\right]^{-1}=\left[1+\frac{100}{(z-y)^2}\right]^{-1}$$

于是得出 $z_0=(x+y)/2$，将 $z=z_0=(x+y)/2$ 代入 $R(x,z)$或$R(z,y)$ 中，均可得出：

$$（R\circ R)(x,y)=\begin{cases}0 & x\le y\\ \left[1+\dfrac{100}{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2}\right]^{-1} & x>y\end{cases}$$

根据上述函数可以用 MATLAB 软件画出“x 远大于 y”和“x 远远大于 y”的隶属函数 R 和（$R\circ R$）。为此，在指令窗中键人：

```
x1=-20:0.2:0;
x2=0.001:0.2:100;
plot(x1,x1-x1,x2,(1+100./x2.^2).^-1)
```

```
hold on
plot(x1,x1-x1,x2,(1+100./(0.5*x2).^2).^-1)
grid on
```

回车得出“ x 远大于 y ”的隶属函数 R 和“ x 远远大于 y “的隶属函数（$R\circ R$），如图 2-16 所示。

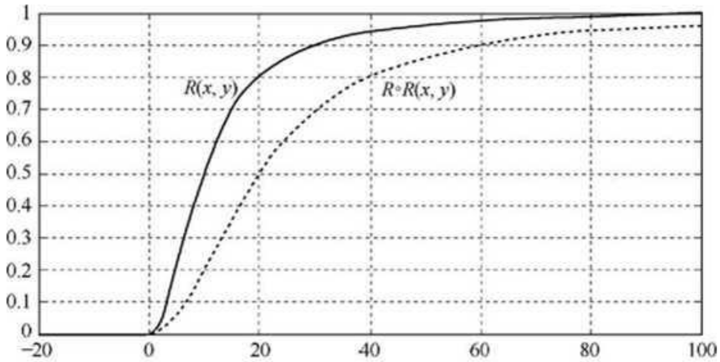

图 2-16 “ x 远大于 y ” 和 “ x 远远大于 y “的隶属函数图

从下述的几个具体数据中，可以看出上述“ x 远大于 y ” 和 “ x 远远大于 y “的隶属函数，是符合人们自然语言的含义的。

①当 $x\le y$ 时， $R(x,y)=0$，（$R\circ R$）$(x,y)=0$

②当 $x-y=1$时，$R(x,y)=\dfrac{1}{1+100}\approx 0.01$，（$R\circ R$）$(x,y)=\left(1+\dfrac{100}{0.25}\right)^{-1}\approx 0.0025$

③当 $x-y=10$ 时， $R(x,y)=\dfrac{1}{1+1}=0.5$，（$R\circ R$）$(x,y)=\left(1+\dfrac{100}{25}\right)^{-1}=0.2$

③当 $x-y=100$ 时， $R(x,y)=\left(1+\dfrac{1}{1+100}\right)^{-1}\approx 0.99$，

（$R\circ R$）$(x,y)=\left(1+\dfrac{100}{2500}\right)^{-1}=0.96$

2.5 模糊向清晰的转换

用自然语言表述和传达的信息及决策，多数是模糊的，如“迅速降温”、“快点左转” 等，无论是人或是机器，仅根据这些模糊指令都很难实施具体的操作策

略。实际上在进行具体操作时，都需要给出清晰确切的指令，比如把“迅速降温”转换成“马上降温 50°”、把“快点左转”转换成“立刻左转 45°”就可以进行操作了，这表明最终采取行动时都需要把模糊指令转换成清晰的指令。

这种从模糊到清晰的转换，就是要把模糊集合转换（映射）成经典集合或清晰量，即进行所谓“清晰化”、“非模糊化”或“反模糊化”处理。下面介绍几种常用的清晰化方法。

2.5.1 模糊集合的截集

模糊集合和经典集合是相互联系、密切相关的，它们之间可以相互转化。转换中的一个 重要概念，就是模糊集合的截集合，简称模糊集合的截集。

1、模糊集合与经典集合间的转换

在对大量考试成绩进行统计时，大量的分数可以构成高斯曲线。若按照考生的考试成 绩，把他们分成“优”、“良”、“中’’和“差”四个等级，每个等级都是一种集合。但是这四个等级之间的界限是不清晰的、模糊的，因此这四个等级可以算是模糊集合。这种由大量的清晰数据转化成模糊集合的过程，称为“模糊化”。

但是，若对考生的成绩提出一个明确的“及格”分数线，比如说凡是分数大于等于 60 分的为“及格”，而分数小于 60 分的为“不及格”。于是，按照成绩考生被分成“及格”和“不及格”两个集合，这两个集合都是边界清晰的经典集合。

考试成绩的不同划分表明，经典集合与模糊集合之间是可以相互转换的。

经典集合和模糊集合间的相互转化，可以从集合论的角度加以论述。实际上，大量差别很小的经典集合进行“并”的运算，就可以构成模糊集合。

例如，论域 U 上，A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 $\in \mathscr{P}(U)$，都属经典集合，设 $A(x) \in \mathscr{F}(U)$，它们的关系可以画在图 2-17 中。由图 2-17 可知，这五个经典集合的并和模糊集合 $A(x)$ 关系为：

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \bigcup_{j=1}^{5} A_j \approx A(x)$$

即经典集合的并 $\bigcup_{j=1}^{5} A_j$ 和模糊集合 $A(x)$ 相差不多。若使彼此相差不多的经典集合无限增加，可以推得 $\lim_{n\to\infty}\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A(x)$ 。可见，大量相差很小的经典集合求并，会成为模糊集合；反之，模糊集合的截集合可以使模糊集合转化为经典集合，下

面介绍模糊集合截集的定义。

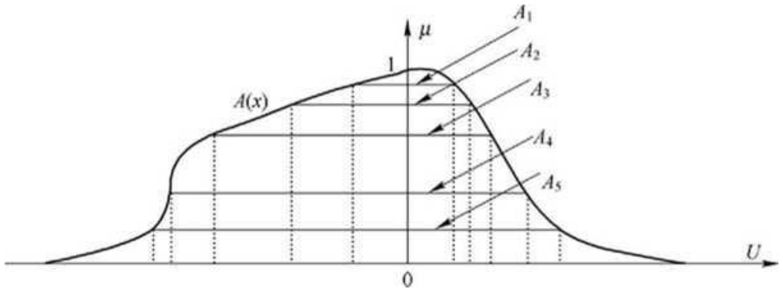

图 2-17　经典集合和模糊集合关系的直观图示

2、模糊集合的截集

设在论域U中，$A\in\mathscr{F}(U)$，$\lambda\in[0,\ 1]$，定义一个新的集合：

$$A_\lambda=\{x\,|\,x\in U, A(x)\geq\lambda\}$$

称A_λ为 A 的一个$\lambda-$截集，称λ为阈值或置信水平。

由定义可知，模糊集合 A 的$\lambda-$截集是由 A 中所有隶属度大于、等于λ的元素组成的集合。

称集合$A_\lambda=\{x\,|\,x\in U, A(x)>\lambda\}$为模糊集 A 的一个$\lambda-$强截集。模糊集合 A 的$\lambda-$强截集是由 A 中所有隶属度大于$\lambda$的元素组成的集合。

模糊集合 A 的$\lambda-$截集和$\lambda-$强截集，都属于经典集合。截集的定义使模糊集合可以转换成经典集合，是模糊向清晰转换的一种方法。

利用“数积”的概念，任何一个模糊集合 A 可以看成是无限多截集A_λ的并，即：

$$A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}(\lambda A_\lambda)$$

其中$A\in\mathscr{F}(U)$，而$A_\lambda\in\mathscr{P}(U)$。

这就是模糊集合的分解定理。该定理反映了模糊集合与经典集合的相互转化关系。

例 2-13　模糊 集合$A=\dfrac{0.8}{a1}+\dfrac{0.3}{a2}+\dfrac{0.5}{a3}+\dfrac{0.9}{a4}+\dfrac{0.2}{a5}$,求$\lambda=0$　、0.2 和 0.5 时，A 的截集A_λ。

解　根据定义可得

$$A_{0.6}=\{a1,\ a4\}$$

$$A_{0.2}=\{a1,\ \mathrm{a2},\ \mathrm{a3},\ a4,\ a5\}$$

$$A_{0.5}=\{a1,\ \mathrm{a3},\ a4\}$$

$A_{0.6}$、$A_{0.2}$ 和 $A_{0.5}$ 都是经典集合。

例 2-14 设论域 $U=\{a,b\}$，模糊集合 $A=\dfrac{0.5}{a}+\dfrac{0.8}{b}$，若 $\lambda=0.6$，求出 $(A_\lambda)^C$ 和 $(A^C)_\lambda$。

解 由定义知 $A_{0.6}=\{b\}$，所以 $(A_{0.6})^C=\{a\}$。

又因为 $A^C=\dfrac{0.5}{a}+\dfrac{0.2}{b}$，因此 $(A^C)_{0.6}=\varnothing$。可见 $(A_{0.6})^C\neq(A^C)_{0.6}$。

2.5.2 模糊关系矩阵的截矩阵

模糊矩阵是模糊关系的一种数学表示，也是一种模糊集合。把模糊集合的 $\lambda-$截集概念推广到模糊矩阵上，可以得出 $\lambda-$截矩阵。下面先给出模糊矩阵的 $\lambda-$截矩阵定义。

设模糊矩阵 $R=(r_{ij}(\lambda))_{m\times n}$， $\forall\lambda\in[0,1]$，记 R 的 $\lambda-$截矩阵为

$$R_\lambda=(r_{ij}(\lambda))_{m\times n}$$

其中 $r_{ij}(\lambda)$ 是 λ 的函数，它的取值由下式决定：

$$r_{ij}(\lambda)=\begin{cases}1 & r_{ij}\geq\lambda\\ 0 & r_{ij}<\lambda\end{cases}$$

取某个模糊矩阵的 $\lambda-$截矩阵，实际上就是以小于 1 的正实数 λ 为界，把模糊矩阵中凡是 $r_{ij}>\lambda$ 元素变为 1，否则取为 0，于是使模糊矩阵（模糊关系）变成经典矩阵(经典关系)。由于模糊矩阵 R 的 $\lambda-$截矩阵 R_λ 中元素只能取 0 或 1，显然它是布尔矩阵。

模糊矩阵的截矩阵，可以使模糊关系转化成经典关系。

例 2-15 设模糊矩阵 $R=\begin{bmatrix}0.8 & 0.6 & 0.9\\0.3 & 0.7 & 0\\1 & 0.2 & 0.5\end{bmatrix}$，求 $R_{0.3}$ 和 $R_{0.8}$。

解 $R_{0.3}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$R_{0.8}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

2.5.3 模糊集合转化为数值的常用方法

把模糊集合转化成单个数值，即选定一个清晰数值去代表某个表述模糊事物或概念的模糊集合，这是用途最多的一种模糊到清晰的转化方法，它在模糊控制中几乎是不可或缺的。

一个模糊集合映射成单个数值时，这个数值应该是模糊集合中的点，在某种意义上能代 表这个模糊集合。这种转换称为模糊集合的"清晰化"或"反模糊化"（defuzzification)。

清晰化方法有许多种，无论何种方法都应该是"言之有理、计算方便"，并具有连续性和代表性，下面介绍几种常用的清晰化方法。

1、面积中心（重心）法（centroid）

面积中心法就是求出模糊集合隶属函数曲线和横坐标包围区域面积的中心，选这个中心对应的横坐标值，作为这个模糊集合的代表值。相当于把该面积视为等厚平板时的重心，称这种方法为面积中心法或重心法。

设论域 U 上模糊集合 A 的隶属函数为 $A(u)$，$u\in U$。假设面积中心对应的横坐标为 u_{cen}，则按照面积中心法的定义，可由下式算出：

$$u_{cen}=\frac{\int_U A(u)u\,du}{\int_U A(u)\,du}$$

这个计算过程就像在计算一个均匀平板的重心。如果论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 是离散的，u_j 处的隶属度为 $A(u_j)$，则 u_{cen} 可由下式算出：

$$u_{cen}=\frac{\sum_{j=1}^{n}u_j A(u_j)}{\sum_{j=1}^{n}A(u_j)}$$

这个计算公式就像计算一个多质点平面系统的重心。面积中心法直观合理、言之有据，但计算略显繁杂。

2、面积平分法（bisector)

面积平分法是先求出模糊集合隶属函数曲线和横坐标包围区域的面积，再找出将该面积等分成两份的平分线对应的横坐标值，用该值代表该模糊集合，故称面积平分法。

设论域 U 上模糊集合 A 的隶属函数为$A(u)$，$u\in U$。假设隶属函数曲线和横坐标包围区域的面积平分线对应的横坐标为u_{bis}，设$u\in[a,b]$，则u_{bis}的取值可由下式算出：

$$\int_{a}^{u_{bis}}A(u)du=\int_{u_{bis}}^{b}A(u)du=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}A(u)du$$

如果论域$U=\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n\}$是离散的，隶属函数下的面积多数为三角形、梯形或矩形，这时只要求出总面积一半所对应元素的位置即可。

面积平分法由于直观合理、计算简便，在模糊控制器中使用较多。

3、最大隶属度法（maximum）

通常的模糊集合并非都是正规的和凸的，隶属函数也并非都是一条连续曲线。因此，用隶属度最大点对应的元素值，代表这个模糊集合是一种最简单的方法，称为最大隶属度法。

但是这种方法往往有以偏代全之嫌，没能把隶属函数的全部信息包含进去。况且，有的模糊集合是由多个模糊子集的并形成的，它的隶属函数曲线中有多处的隶属度都取最大值，这就要对这些取最大值的元素进行合理的组合，构建出一个点来代表这个模糊集合。构建该模糊集合代表点的常用方法有下述三种，它们都是在最大隶属度的基础上进行的。

1）（最大隶属度）平均值法（mom）

如果在模糊集合的论域上，有多个点都取最大隶属度值，则取这些点的平

均值u_{mom}的横坐标作为模糊集合的代表点，这个方法称为最大隶属度平均值法。

设$A(u_j)=\max(A(u))$，$j=1,2,\ \cdots,n$，有n个点的隶属度都取最大值，则取：

$$u_{mom}=\frac{\sum_{j=1}^{n}u_j}{n}$$

2）（最大隶属度）最大值法（lom）

如果在模糊集合的论域上，有多个点u的隶属度都取最大值，可取这些点中坐标绝对值最大的点u_{lom}作为模糊集合的代表点，这个方法称为最大隶属度最大值法。

设有n个点的隶属度都取最大值，即$A(u_j)=\max(A(u))$，$j=1,2,\ \cdots,n$，则取绝对值最大的点$\max(|u_j|)=|u_k|$作为模糊集合的代表点，即：

$$u_{lom}=u_k$$

3）（最大隶属度）最小值法（som）

如果在模糊集合上有多个点u_j的隶属度都取最大值，可取这些点中坐标绝对值最小的点u_{som}作为模糊集合的代表点，这个方法称为最大隶属度最小值法。

设有n个点的隶属度都取最大值，即$A(u_j)=\max(A(u))$，$j=1,2,\ \cdots,n$，则取绝对值最小的点$\min(|u_j|)=|u_k|$作为模糊集合的代表点，即：

$$u_{som}=u_k$$

例 2-16　现有一个模糊集合 A，它的隶属函数为：

$$A(u)=\begin{cases}0.45u+4.5 & -10\le \mathrm{u}\le -8\\ 0.9 & -8\le \mathrm{u}\le -2\\ 0.5-0.2u & -2\le \mathrm{u}\le 0\\ 0.5 & 0\le \mathrm{u}\le 2\\ 1-0.25u & 2\le \mathrm{u}\le 3.6\\ 0.1 & 3.6\le \mathrm{u}\le 8\\ 0.9-0.1u & 8\le \mathrm{u}\le 9\\ 0 & 9\le \mathrm{u}\le 10\end{cases}$$

分别应用五种清晰化方法，求出映射成的单个数值，即清晰化的结果。

解　按照题设，把 $A(u)$ 画在图 2-18 中。

按照讲过的模糊集合清晰化方法，计算如下。

（1）用面积中心法

题中 $A(u)$ 不是连续函数，而是分段函数，所以用 S_j 表示第 j 个分段函数曲线与横轴包围的梯形面积，u_j 表示 S_j 的面积中心，即把 S_j 看成等厚平板时重心的横坐标值。于是，

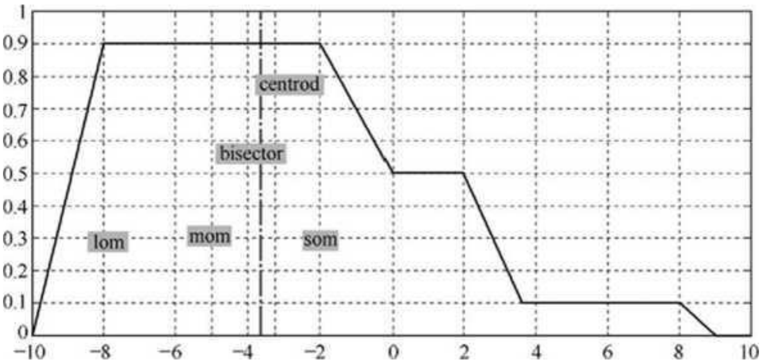

图 2 - 18 模糊集合转化为单个数值的五种方法示意图

可算出图中最左边三角形的面积 $S_1 = 0.5\times(0.9+0)\times(-8+10)=0.9$，该三角形重心的横坐标 $u_1=-9$；依次由左向右，可算出：

$$S_2=5.4,\ \ u_2=-5;\quad S_3=1.4,\quad u_3=-1;\quad S_4=1,\quad u_4=1.0;\quad S_5=0.48,$$
$$u_5=2.8;\ \ S_6=0.44,\quad u_6=5.8;\quad S_7=0.05,\quad u_7=8.5;\quad S_8=0,\quad u_8=9.5$$

设 u_{cen} 为图 2-13 上隶属函数和横轴形成总面积中心对应的横坐标值，则据公式：

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} u_j A(u_j)}{\sum_{j=1}^{n} A(u_j)}$$

可得

$$u_{cen}=\frac{S_1\times u_1+S_2\times u_2+S_3\times u_3+S_4\times u_4+S_5\times u_5+S_6\times u_6+S_7\times u_7+S_8\times u_8}{S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8}$$
$$=\frac{0.9\times(-9)+5.4\times(-5)+1.4\times(-1)+1.0\times(1.0)+0.48\times2.8+0.44\times5.8+0.05\times8.5+0\times9.5}{0.9+5.4+1.4+1.0+0.48+0.44+0.05+0}$$
$$=(-8.1-27-1.4+1+1.344+2.552+0.425+0)/9.67$$
$$=-31.179/9.67$$

于是得出：

$$u_{cen}=-3.2243$$

（2）用面积平均法

据上面的计算，面积总值为 9.67，其一半为 9.67/2=4.835，该值对应的横坐标计算如下：

$4.835-S_1=4.835-0.9=3.935$，因为 $S_2=5.4$ 大于 3.935，所以设总面积的平分点为 u_{bis}，则 $u_{bis}\in[-8,-2]$。S_2 呈矩形，于是由 $(u_{bis}-(-8))\times0.9=3.935$，可以求出：

$$u_{bis}=-3.628$$

（3）用最大隶属度法

整个模糊集合上能取得最大隶属度 $\max A(u)=0.9$ 的不是一个点，而是一个区间 $[-8,-2]$。在 $[-8,-2]$ 中选择代表该模糊集合点的方法有三种。

①用（最大隶属度）平均值法（mom)：

$$u_{mom}=-8+\frac{-2-(-8)}{2}=-5$$

②用（最大隶属度）最大值法（lom)：

由 $u=\max\left(\left|u_j\right|\right)=8,\ \ u_j=-8,$ 得出 $u_{lom}=-8$

％=—8，得出 i4〇m =—8

③用（最大隶属度）最小值法（som)：

由 $u=\min\left(\left|u_j\right|\right)=2,\ \ u_j=-2,$ 得出 $u_{som}=-2$

以上计算的不同结果都画在图 2-18 上。

由例题计算结果可知，对于同一个模糊集合 A，用不同的清晰化方法得出的

最终结果却大不相同：$u_{cen}=-3.2243$、$u_{bis}=-3.628$、$u_{mom}=-5$、$u_{lom}=-8$和$u_{som}=-2$。其中最大的$u_{som}=-2$和最小的$u_{lom}=-8$之间相差达 6 之多。究竟用哪个数值作为模糊集合 A 的代表点， 完全依赖于应用时的具体情况，根据实际需要确定，在模糊控制中则由控制效果决定取舍。

模糊数是模糊集合的特例，所以上面讲过的清晰化方法完全适用于它。对于单个模糊数，经常用其核作为它的清晰化结果，每个模糊数最大隶属度对应的元素值，就是它的核；对于多个模糊数之并构成的模糊集合，可以照上述一般模糊集合的清晰化方法进行计算，根据实际需求决定取舍。