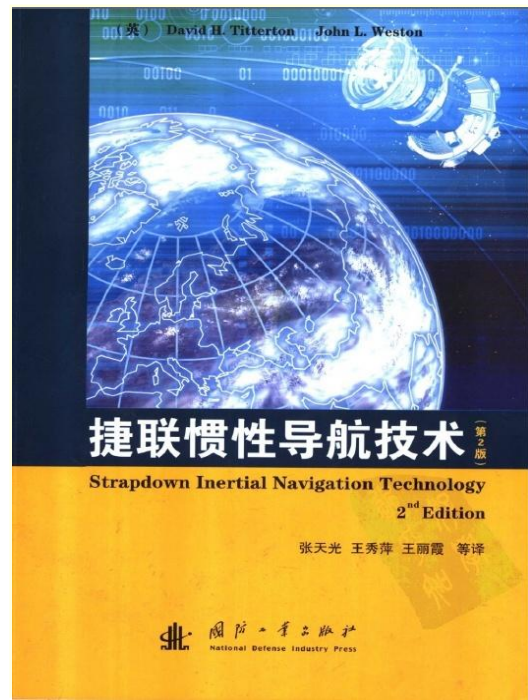


惯性导航基础

- 第一部分 惯性导航概述（相关概念）
- 第二部分 捷联惯性导航系统的基本原理
- 第三部分 捷联惯导系统计算
- 第四部分 惯导系统的对准
- 第五部分 惯导系统的误差分析
- 第六部分 惯性系统的测试与标定

第二部分



捷联式惯性导航系统的基本原理

参考书-捷联惯性导航技术

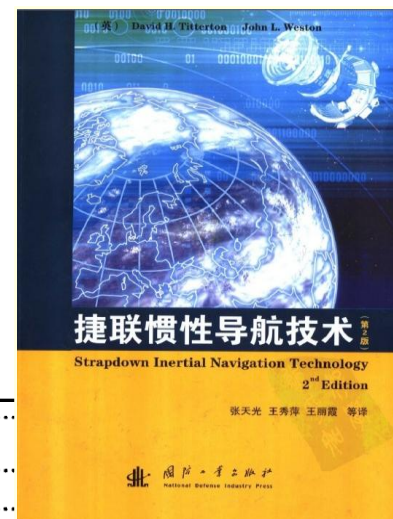
(第3章 3.3-3.7节)



主要内容

- ✦ 惯性导航常用的坐标系
- ✦ 三维SINS的基本分析（导航方程）
- ✦ SINS的机械编排
- ✦ 姿态表达式和姿态矩阵微分方程
- ✦ 详细导航方程
- ✦ SINS的工作过程

参考书-捷联惯性导航技术
(第3章 3.3-3.7节)



第3章 捷联惯性导航系统的基本原理	
3.1 概述	
3.2 简单的二维捷联导航系统	
3.3 参考坐标系	14
3.4 三维捷联导航系统的基本分析	15
3.5 捷联系统的机械编排	18
3.6 捷联姿态表达式	24
3.7 详细导航方程	33
参考文献	39



3.3 惯性导航常用坐标系

- 地心惯性坐标系 (i)
- 地球坐标系 (e)
- 地理坐标系 (t)
- 导航坐标系 (n)
- 游移方位坐标系 (w)
- 载体坐标系 (b)



惯性坐标系

惯性定律成立的空间为惯性空间。

经典力学认为，要选取一个绝对静止或作匀速直线运动的**参考坐标系**来考察加速度，牛顿第二定律才能成立。

在研究惯性敏感器件和惯性系统的力学问题时，通常将相对恒星所确定的参考系称为惯性空间，空间中静止或匀速直线运动的参考坐标系为惯性参考坐标系。



3.3 参考坐标系

参考坐标系

- 惯性测量的基础是精确定义一系列的笛卡儿参考坐标系，每一个坐标系都是正交的右手坐标系或轴系。
- 对地球上进行的导航，所定义的坐标系要将惯导系统的测量值与地球的主要方向联系起来。这样，当在近地空间导航时，该坐标系具有实际意义。因此，习惯上将原点位于地球中心、相对于恒星固定的坐标系定义为惯性参考坐标系。
- 用于陆地（地面）导航的固连于地球的参考坐标系和当地地理导航坐标系作为参考坐标系。



3.3 参考坐标系

惯性坐标系——地球坐标系

■ **惯性坐标系(i 系)**。原点位于地球中心，坐标轴相对于恒星无转动，轴向定义为 \mathbf{OX}_i 、 \mathbf{OY}_i 、 \mathbf{OZ}_i 。其中 \mathbf{OZ}_i 的方向与地球极轴的方向一致(假定极轴方向保持不变)， \mathbf{OX}_i 、 \mathbf{OY}_i 在地球赤道平面内。

■ **地球坐标系(e 系)**。原点位于地球中心，坐标轴与地球固连，轴向定义为 \mathbf{OX}_e 、 \mathbf{OY}_e 、 \mathbf{OZ}_e ，其中 \mathbf{OZ}_e 沿地球极轴方向， \mathbf{OX}_e 轴沿格林尼治子午面和地球赤道平面交线。地球坐标系相对于惯性坐标系绕 \mathbf{OZ}_i 轴以角速度 Ω 转动。



地球坐标系

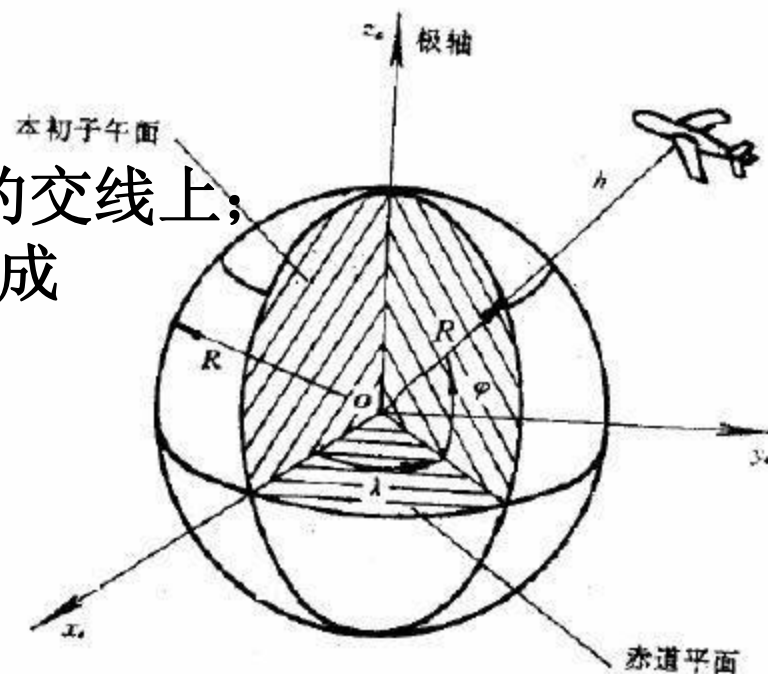
地球坐标系 $ox_e y_e z_e$

如右图所示，其原点取在地心；

z_e 轴沿极轴（地轴）方向；

x_e 轴在赤道平面与本初子午面的交线上；

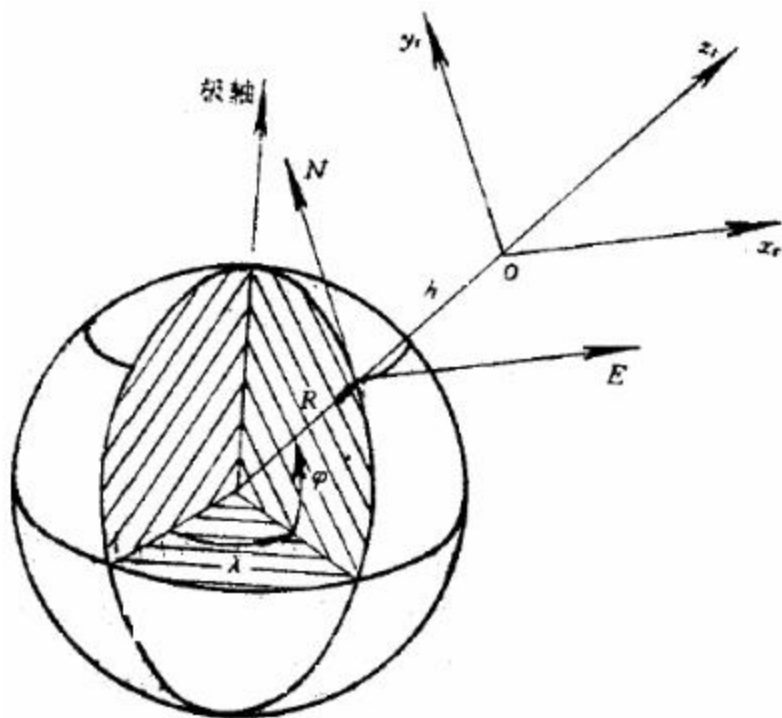
y_e 轴在赤道平面上，与 z_e x_e 构成右手直角坐标系。



地球坐标系随地球转动。载体坐标：经度、纬度、高度。
地球上任意点的地球坐标固定不变，但是地球坐标系相对惯性空间改变。



地理坐标系



地理坐标系 $ox_t y_t z_t$ 如左图所示。

其原点位于载体所在的点；

x_t 轴沿当地纬线指东；

y_t 轴沿当地子午线指北；

z_t 轴沿当地地理垂线指上，
并与 $x_t y_t$ 构成右手直角坐标系。

$ox_t y_t$ 平面为当地水平面。

$oy_t z_t$ 平面为当地子午面。

地理坐标系随载体一起**线**运动，不随载体**角**转动。

地球上任意一点的地理坐标系都不相同。

地理坐标系并不唯一，有东北天(ENU)、北东地(NED)等。



3.3 参考坐标系

导航坐标系——载体坐标系

- **导航坐标系(n 系)**。便于导航计算的坐标系。当与地地理坐标系指向相同时 (**NED**)，原点位于导航系统所处的位置 **P** 点，坐标轴指向北、东和当地垂线方向(向下)。导航坐标系相对于地球固连坐标系的旋转角速率 ω_{en} 、取决于 **P** 点相对于地球的运动，通常称为转移速率。
- **游移方位坐标系 (w系)**：是一种导航坐标系，是当地地理坐标系绕当地垂线方向以游动方位角转动。
- **载体坐标系 (b 系)**。它是一个正交坐标系，轴向分别是运载体的横滚轴、俯仰轴和偏航轴。



载体坐标系

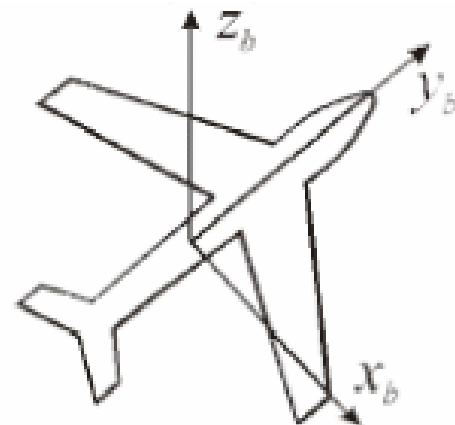
载体坐标系 $Ox_b y_b z_b$ 如右图所示。

其原点与载体质心重合。

x_b 轴沿载体横轴指向右；

y_b 轴沿载体纵轴向前；

z_b 轴沿载体竖轴，并与 x_b 、 y_b 构成右手直角坐标系（右前上）。



载体坐标系**并不唯一**，也可以定义为前、右、下。

载体坐标系随载体一起作线运动与角运动。

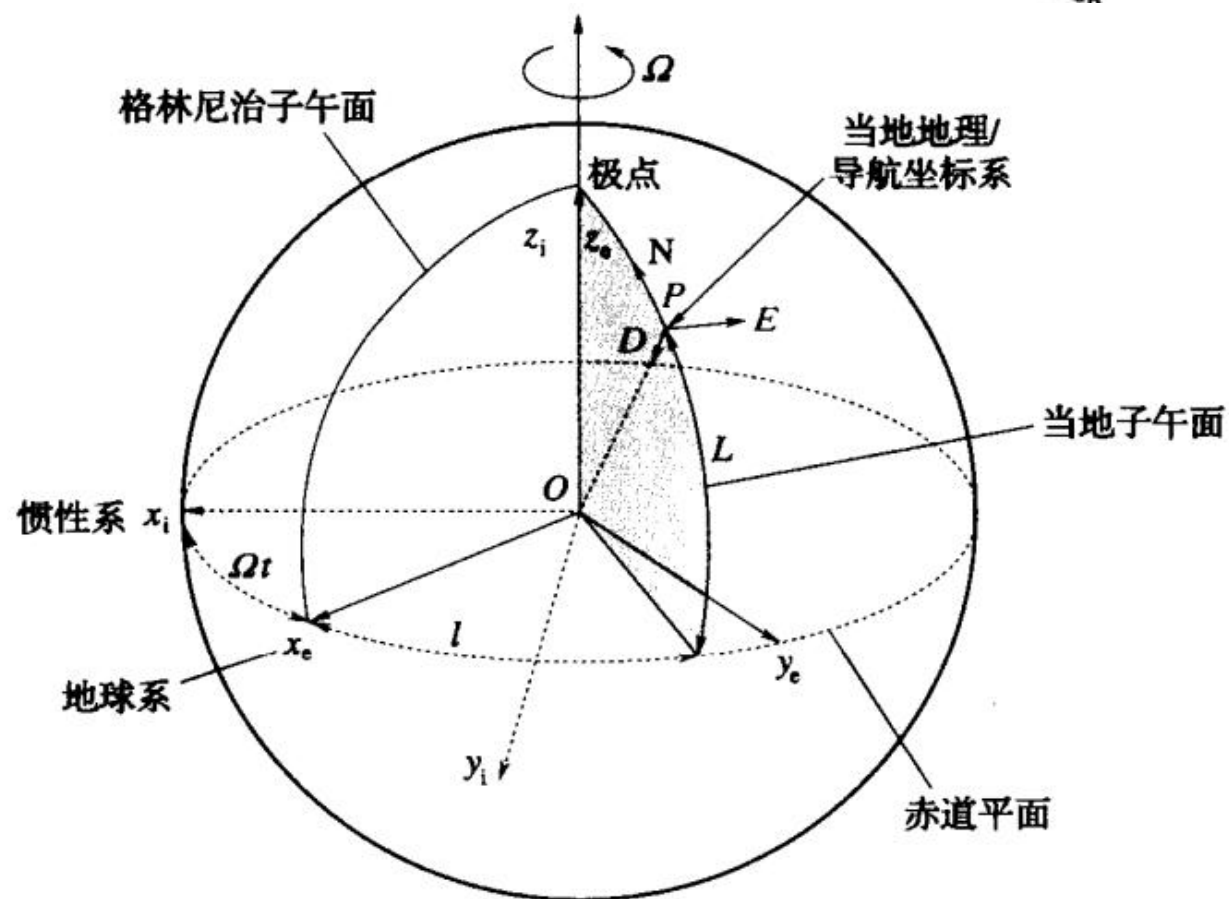


3.3 参考坐标系

参考坐标系 (i,e,n)

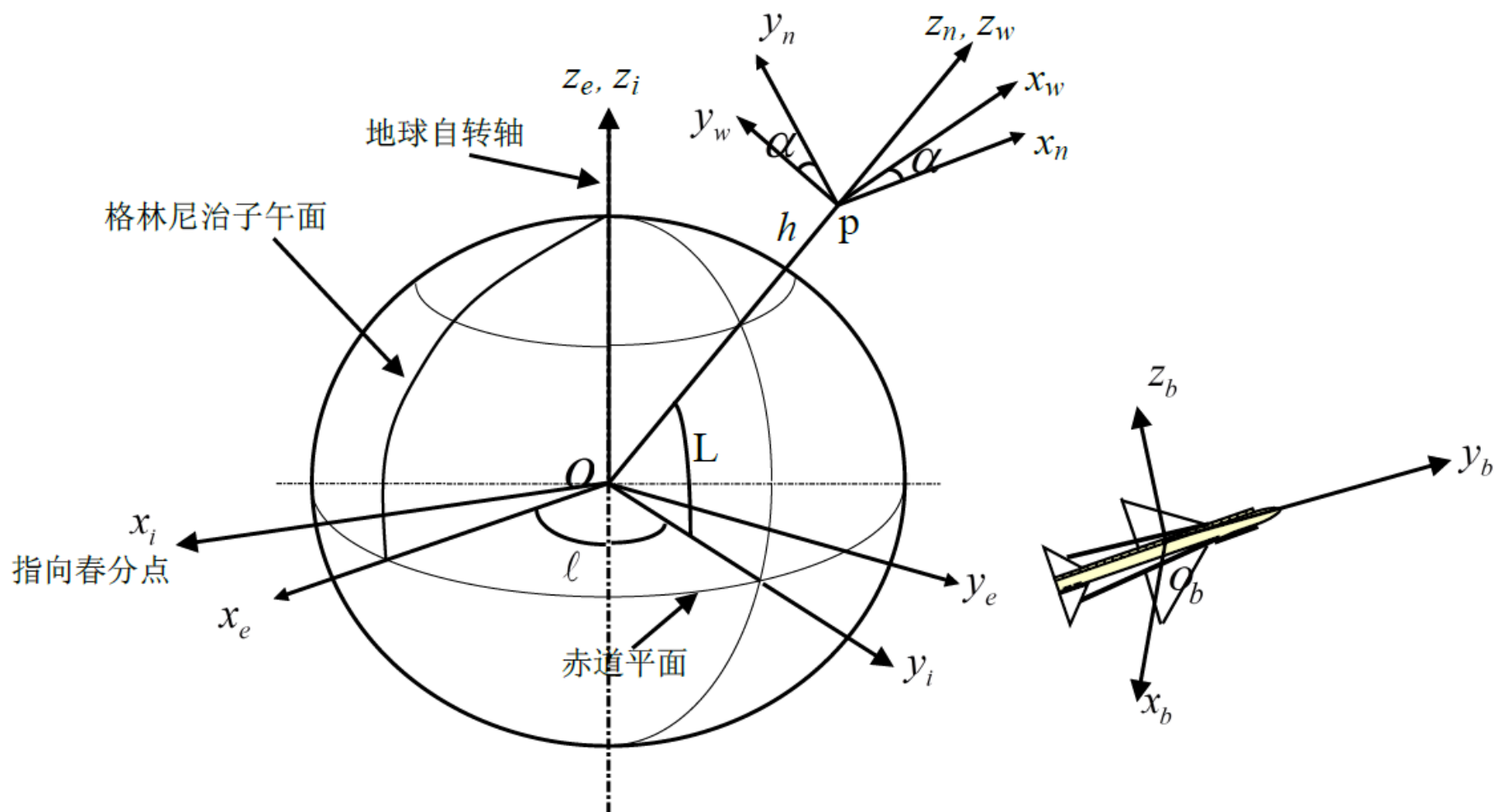


载体坐标系





3.3 参考坐标系





惯性导航常用坐标系-载体位置和姿态与坐标系之间的关系

(1) 载体在地球表面位置可用经度 l 和纬度 L 表示，确定载体在地球表面的位置就是确定地理坐标系 (g) 或导航坐标系 (n) 与地球坐标系 (e) 之间的方位关系。载体的姿态是体坐标系 (b) 相对某参考坐标系 (如 n 系或 g 系) 的方位或指向。确定载体的姿态就是确定 b 系与 n 系 (或 g 系) 之间的方位关系，常用姿态角、方向余弦或四元数表示。

(2) 载体相对地球运动引起 n 系相对 e 系的转动 (ω_{en})。北向速度 v_N^n 引起 n 系相对 e 系转动，转动的角速度为 $\dot{L} = \frac{v_N^n}{R_0 + h}$ ；东向速度 v_E^n 引起 n 系绕极轴相对 e 系转动，转动的角速度为 $\dot{l} = \frac{v_E^n}{(R_0 + h) \cos L}$ 。

$$\dot{l} = v_E / (R_0 + h) \cos L, \dot{L} = v_N / (R_0 + h)$$



惯性导航常用坐标系-载体位置和姿态与坐标系之间的关系

(3) n 系相对 i 系的转动 (ω_{in}) 包括 n 系相对 e 系的转动 (ω_{en}) 和 e 系相对 i 系的转动 (ω_{ie})。即有

$$\omega_{in} = \omega_{ie} + \omega_{en}$$

e 系相对 i 系的转动角速度 ω_{ie} 和 n 系相对 e 系的转动角速度 ω_{en} 在 n 系 (ENU) 各轴上的投影分量分别为

$$\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos L \\ \omega_{ie} \sin L \end{bmatrix} \quad \omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{v_N^n}{R_0 + h} \\ \frac{v_E^n}{R_0 + h} \\ \frac{v_E^n}{R_0 + h} \tan L \end{bmatrix}$$

$$\omega_{ie}^n = [\Omega \cos L \quad 0 \quad -\Omega \sin L]^T$$

$$\omega_{en}^n = [\dot{\varphi} \cos L \quad -L \quad -\dot{\varphi} \sin L]^T$$

$$\dot{\varphi} = v_E / (R_0 + h) \cos L, L = v_N / (R_0 + h)$$

$$\omega_{en}^n = \left[\frac{v_E}{R_0 + h} - \frac{v_N}{R_0 + h} - \frac{v_E \tan L}{R_0 + h} \right]^T$$



惯性导航常用坐标系-载体位置和姿态与坐标系之间的关系

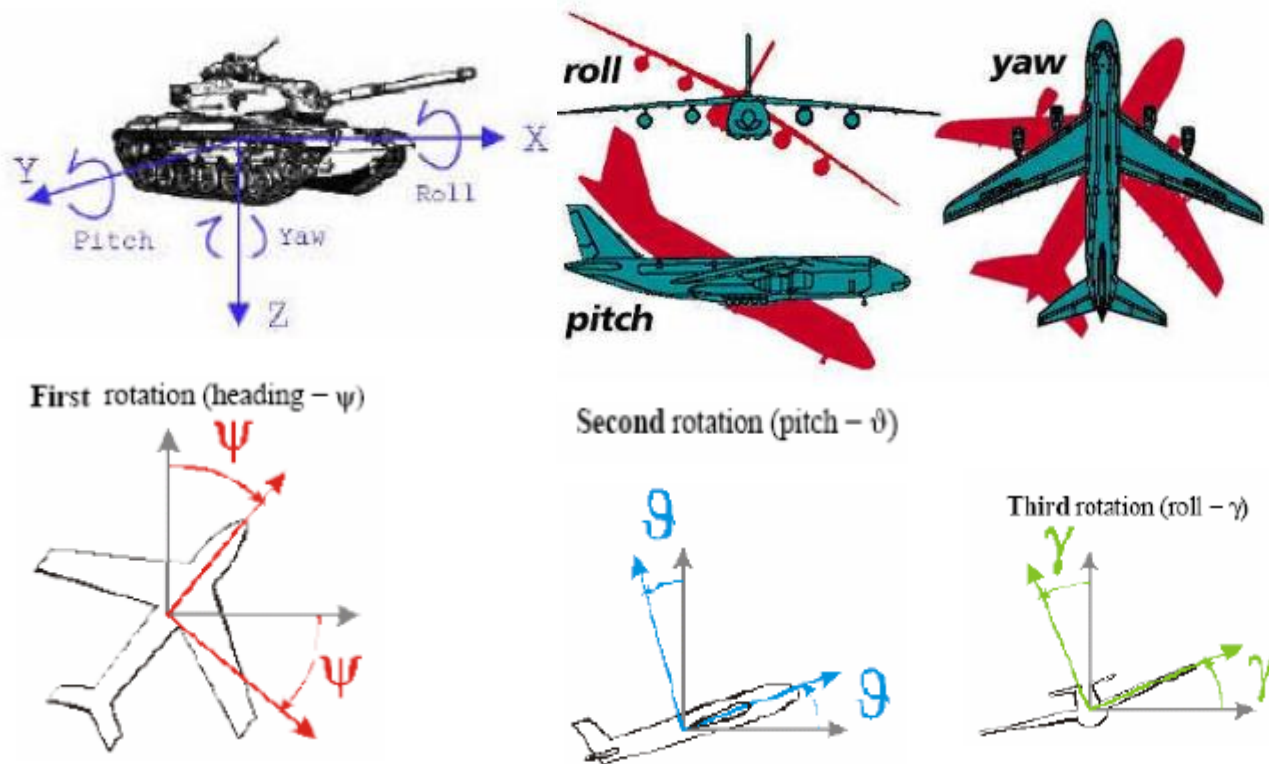
综合考虑地球自转和载体航行的速度影响, n 系相对 i 系的转动角速度 ω_{in} 在 n 系(ENU)各轴上的投影分量为

$$\omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{v_N^n}{R_0 + h} \\ \omega_{ie} \cos L + \frac{v_E^n}{R_0 + h} \\ \omega_{ie} \sin L + \frac{v_E^n}{R_0 + h} \operatorname{tg} L \end{bmatrix}$$



姿态角和姿态矩阵

载体的姿态角通常是根据**载体坐标系**与**地理坐标系**或**导航坐标系**之间的旋转关系确定的。如 C_b^n





比力和比力方程的回顾

$$\begin{aligned} f &= \frac{F_{\text{非引力外力}}}{m} \\ &= \frac{F}{m} - g \\ &= a - g = \left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_i - g \end{aligned}$$



绝对加速度和相对加速度

哥式定理

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_i = \left. \frac{dr}{dt} \right|_e + \omega_{ie} \times r \quad \text{即} \quad \boxed{v_i = v_e + \omega_{ie} \times r}$$

对上式中的向量关系，可以表示在任意坐标系下，当表示在*i*坐标系下时，得到式子如下

$$v_i|_i = v_e|_i + (\omega_{ie} \times r)|_i$$

对上式求导可得

$$\left. \frac{dv_i}{dt} \right|_i = \left. \frac{dv_e}{dt} \right|_i + \left. \frac{d(\omega_{ie} \times r)}{dt} \right|_i \quad (1)$$



绝对加速度和相对加速度

再次使用哥式定理，可得

$$\left. \frac{d(\omega_{ie} \times r)}{dt} \right|_i = \left. \frac{d(\omega_{ie} \times r)}{dt} \right|_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r) \quad (2)$$

因为 ω_{ie} 为常值，所以

$$\left. \frac{d(\omega_{ie} \times r)}{dt} \right|_e = \omega_{ie} \times \left. \frac{dr}{dt} \right|_e = \omega_{ie} \times v_e \quad (3)$$

综合式(1)、式(2)、式(3)可得如下结果

$$\left. \frac{dv_i}{dt} \right|_i = \left. \frac{dv_e}{dt} \right|_i + \omega_{ie} \times v_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r)$$



惯性坐标系下的比力方程

$$\left. \frac{dv_i}{dt} \right|_i = \left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{dv_e}{dt} \right|_i + \omega_{ie} \times v_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r)$$

$$\left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_i = f + g$$

重新整理后，表示在惯性系 (i) 得

$$f^i = C_b^i f^b = \dot{v}_e^i + \omega_{ie}^i \times v_e^i + \omega_{ie}^i \times [\omega_{ie}^i \times r^i] - g^i \quad (4)$$

运载体

在这个方程中， f 表示导航系统所感受的比力加速度， $\omega_{ie} \times v_e$ 是由于运载体在旋转地球表面的速度引起的加速度，通常称为哥氏加速度。在方程(4)中， $\omega_{ie} \times [\omega_{ie} \times r]$ 为由于地球的转动，系统感受的向心加速度。它不能从质量引力导致的引力加速度 G (g) 中分离出来。由质量引力和向心力引起的加速度的总和构成了当地重力矢量 g ，即固定于地球上方的铅锤所对准的矢量。



地球坐标系下的比力方程

$$\left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{dv_e}{dt} \right|_i + \omega_{ie} \times v_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r)$$

$$\left. \frac{dv_e}{dt} \right|_i = \left. \frac{dv_e}{dt} \right|_e + \omega_{ie} \times v_e = \left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_e + \omega_{ie} \times v_e$$

$$\left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_e + 2\omega_{ie} \times v_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r)$$

$$\left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_i = f + g$$

载体相对惯性空间的加速度，即绝对加速度

载体相对地球的加速度，即相对加速度

载体相对地球速度与地球自转的相互影响形成的附加加速度，即哥氏加速度

地球自转引起的牵连点的向心加速度，它是载体牵连加速度的又一部分



地球坐标系下的比力方程

$$f = \frac{d^2 r}{dt^2} \Big|_e + 2\omega_{ie} \times \frac{dr}{dt} \Big|_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r) - G_e$$



$$g_1 = G_e - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r)$$

$$f^e = C_b^e f^b = \dot{v}_e^e + 2\omega_{ie}^e \times v_e^e - g_1^e$$

- 由于比力方程表明了加速度计所敏感的比力与载体相对地球的加速度之间的关系，是惯性导航系统的一个基本方程。
- 导航计算中需要的是载体相对地球的加速度，而加速度计不能分辨有害加速度和载体相对加速度，因此，必须从加速度计所测得的比力 f 中补偿掉有害加速度的影响，才能得到载体相对地球的加速度，经过数学运算获得载体相对地球的速度及位置等参数。



其他坐标系 (n) 下的比力方程

$$\left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{dv_e}{dt} \right|_i + \omega_{ie} \times v_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r)$$

$$\left. \frac{dv_e}{dt} \right|_i = \left. \frac{dv_e}{dt} \right|_n + \omega_{in} \times v_e = \dot{v}_e + \omega_{in} \times v_e$$

$$\omega_{in} = \omega_{ie} + \omega_{en}$$

$$\left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_i = \dot{v}_e + (2\omega_{ie} + \omega_{en}) \times v_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r)$$

$$\left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_i = f + G$$

载体相对惯性空间的加速度，即绝对加速度

载体相对地球的加速度，即相对加速度

载体相对地球速度与地球自转的相互影响形成的附加加速度，即哥氏加速度

地球自转引起的牵连点的向心加速度，它是载体牵连加速度的又一部分



其他坐标系 (n) 下的比力方程

$$f = \dot{v}_e + 2(\omega_{ie} + \omega_{en}) \times v_e + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r) - G_e$$



$$g_1 = G_e - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r)$$

$$f^n = C_b^n f^b = \dot{v}_e^n + (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v_e^n - g_1^n$$

- 由于比力方程表明了加速度计所敏感的比力与载体相对地球的加速度之间的关系，是惯性导航系统的一个基本方程。
- 导航计算中需要的是载体相对地球的加速度，而加速度计不能分辨有害加速度和载体相对加速度，因此，必须从加速度计所测得的比力 f 中补偿掉有害加速度的影响，才能得到载体相对地球的加速度，经过数学运算获得载体相对地球的速度及位置等参数。



3.4 三维捷联导航系统的基本分析

相对于固定坐标系的导航（i系）：

- 考虑相对于一个固定的即没有加速度、没有转动的轴系（惯性系）的导航情况。
- 对测得的比力分量和重力场的估计值求和来求解相对于空间固定参考坐标系的加速度分量。得到的加速度分量通过两次积分，即可得到该坐标系中的速度和位置的估计值。



3.4 三维捷联导航系统的基本分析

相对于固定坐标系的导航（i系）：

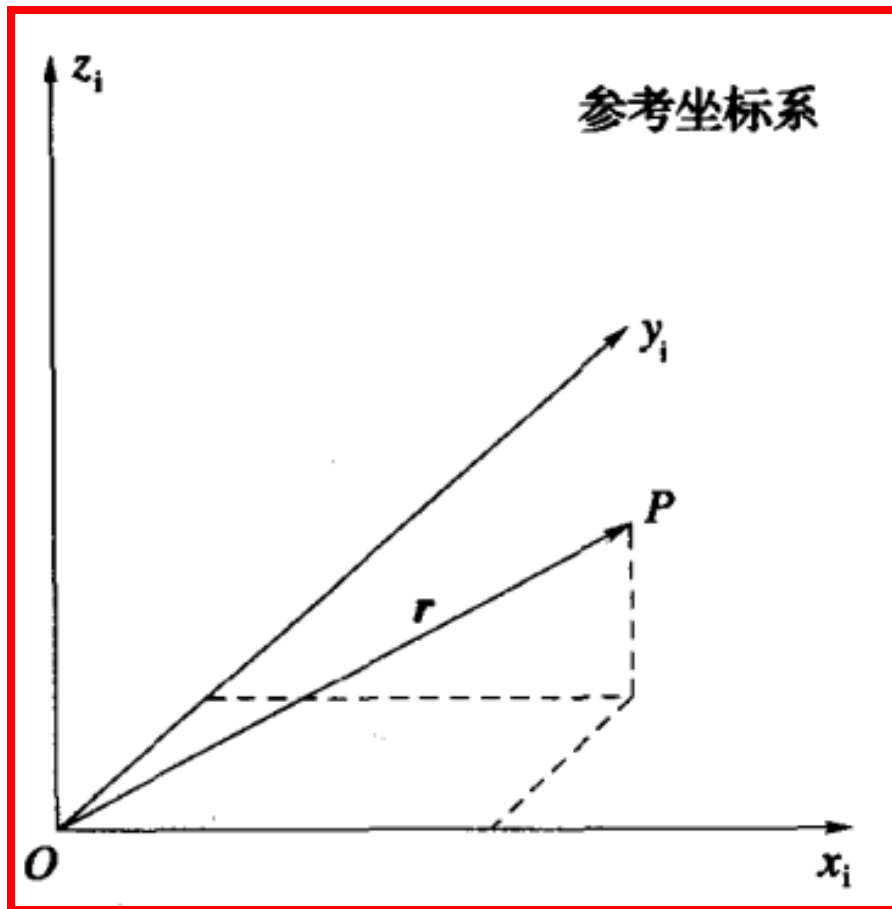


图3-8 相对于参考系的位置矢量

$$\mathbf{a}_i = \left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i$$

$$\mathbf{f} = \left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i - \mathbf{g}$$

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \mathbf{f} + \mathbf{g}$$

$$\mathbf{v}_i = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i$$



3.4 三维捷联导航系统的基本分析

相对旋转坐标系的导航（e系）：

- 实际上，在近地空间导航时，常常需要知道运载体在旋转参考坐标系（导航系）中的速度和位置的估计值。
- 在这种情况下，由于参考坐标系（导航系）的转动会产生附加的外部力，由此导致对导航方程的修改。对修改后的导航方程进行积分可直接得到运载体的地速，也可以利用哥氏定理从惯性速度 V_i 中求得：

$$\mathbf{v}_e = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_e = \mathbf{v}_i - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}$$

$\boldsymbol{\omega}_{ie} = [0 \quad 0 \quad \Omega]^T$ 为地球坐标系相对于 i 系的转动角速度。 \times 表示矢量叉乘。



3.4 三维捷联导航系统的基本分析

导航坐标系的选择：

- 导航方程 $\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \mathbf{f} + \mathbf{g}$ 可以在任一选定的参考坐标系中解算。
- 例如，选择地球坐标系作为参考坐标系，导航方程的解将是地球坐标系表示的运载体相对于惯性系或地球系的速度估值，分别表示为 \mathbf{v}_i^e 和 \mathbf{v}_e^e 。
- 参考系（导航系）选的不同，导航方程的表达方式也不同。



3.4 三维捷联导航系统的基本分析

加速度计测量值的分解:

- 加速度计通常提供相对于载体系的比力测量值 f^b 。
- 为了进行导航，必须将比力分解到所选定的（导航）参考坐标系中。如果选择惯性坐标系为参考坐标系，则可以通过矢量左乘方向余弦矩阵 C_b^i 将其分解在 i 系中，即

$$f^i = C_b^i f^b$$

$$\dot{C}_b^i = C_b^i \Omega_{ib}^b$$

$$\omega_{ib}^b = [p \quad q \quad r]^T$$

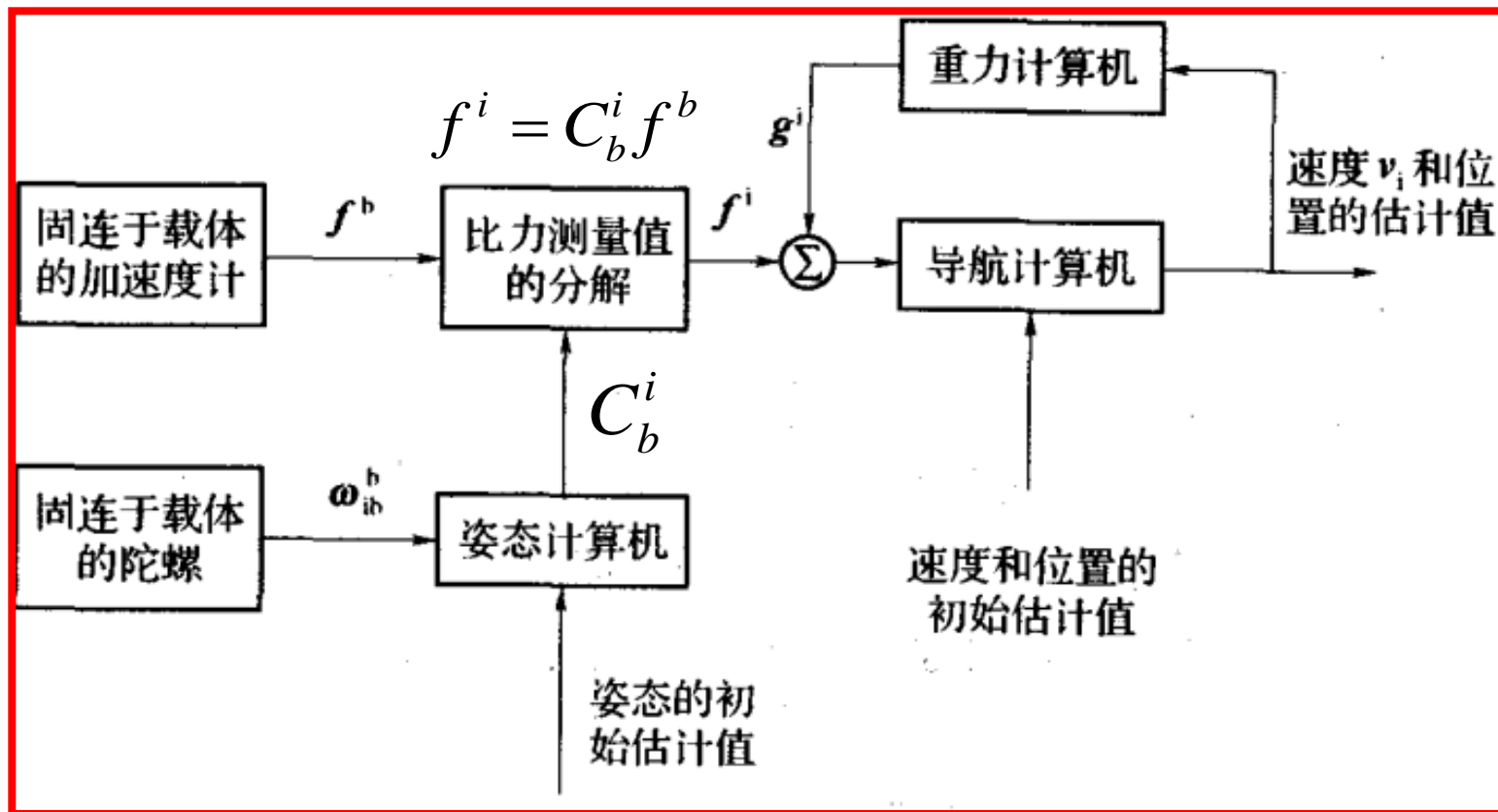
$$\Omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$



3.4 三维捷联导航系统的基本分析

惯性坐标系机械编排

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \mathbf{f}^i + \mathbf{g}^i = \mathbf{C}_b^i \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^i$$



捷联惯导系统所执行的主要功能:

- 载体姿态的角速度测量值的处理、惯性参考系中比力测量值的分解、重力的补偿以及对加速度估计值进行的积分运算(以确定载体的速度和位置)。



3.5 捷联惯导系统的机械编排

近地面导航:

- 求解载体相对于**地球固连坐标系**的速度和位置的估计值，系统产生的附加外力是参考坐标系运动的函数。
- 系统的机械编排与其应用一起叙述。注意，这里所说的机械编排不同，是指捷联计算方法的不同，而不是指敏感器的布局或系统机械设计的不同。



3.5 捷联惯导系统的机械编排

惯性坐标系机械编排

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r} \quad \longrightarrow \quad \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i + \left. \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}) \right|_i$$

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\omega}_{ie}}{dt} \right|_i = 0$$

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times [\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}]$$

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \mathbf{f}^i + \mathbf{g}^i = \mathbf{C}_b^i \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^i$$

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times [\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}] + \mathbf{g}$$

■ 这种系统中，需要在惯性系中计算运载体相对于地球的速度，即地速，用符 \mathbf{v}_e^i 号表示。



3.5 捷联惯导系统的机械编排

在这个方程中 f 表示导航系统所感受的比力加速度， $\omega_{ie} \times v_e$ 是由于运载体在旋转地球表面的速度引起的加速度，通常称为哥氏加速度。

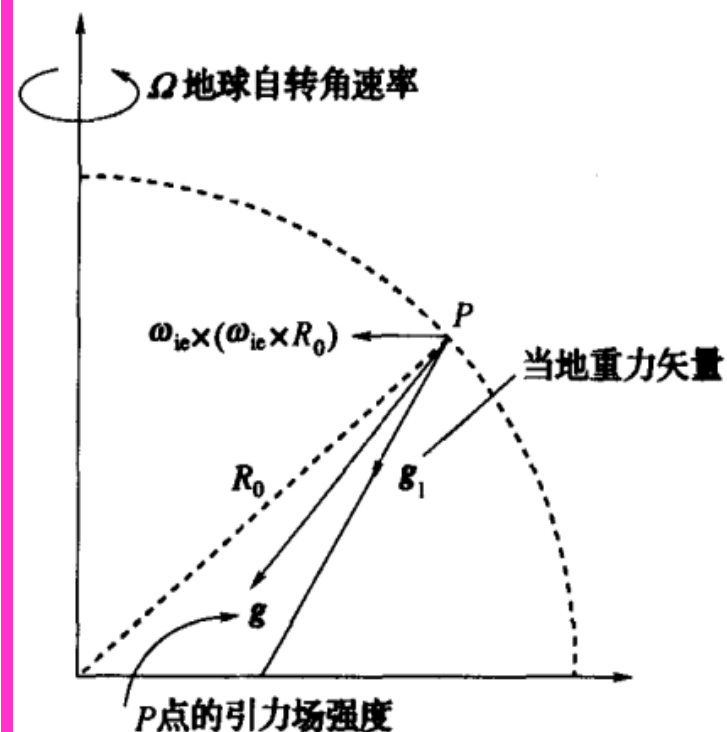
$\omega_{ie} \times [\omega \times r]$ 为由于地球的转动，系统感受的向心加速度。它不能从质量引力导致的引力加速度 g 中分离出来。由质量引力和向心力引起的加速度的总和构成了当地重力矢量。

$$\left. \frac{dv_e}{dt} \right|_i = f - \omega_{ie} \times v_e - \omega_{ie} \times [\omega_{ie} \times r] + g$$

$$g_1 = g - \omega_{ie} \times [\omega_{ie} \times r]$$

$$\left. \frac{dv_e}{dt} \right|_i = f - \omega_{ie} \times v_e + g_1$$

$$\dot{v}_e^i = f^i - \omega_{ie}^i \times v_e^i + g_1^i$$





3.5 捷联惯导系统的机械编排

惯性坐标系机械编排

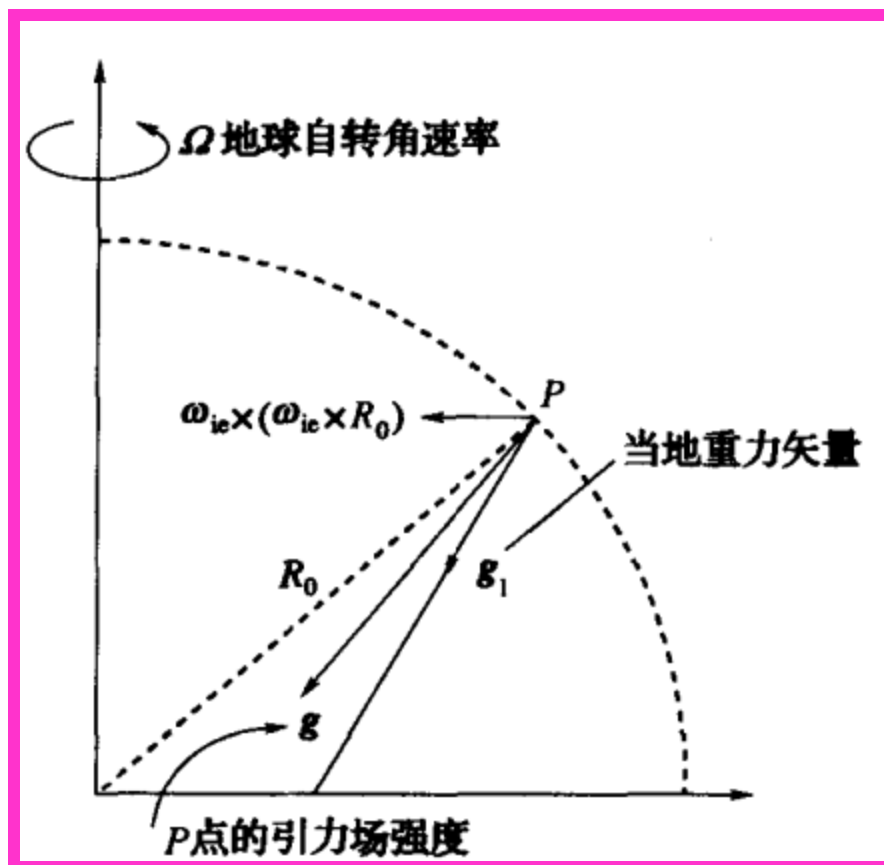
$$\dot{v}_e^i = C_b^i f^b - \omega_{ie}^i \times v_e^i + g_l^i$$

$$f^i = C_b^i f^b$$

$$\dot{C}_b^i = C_b^i \Omega_{ib}^b$$

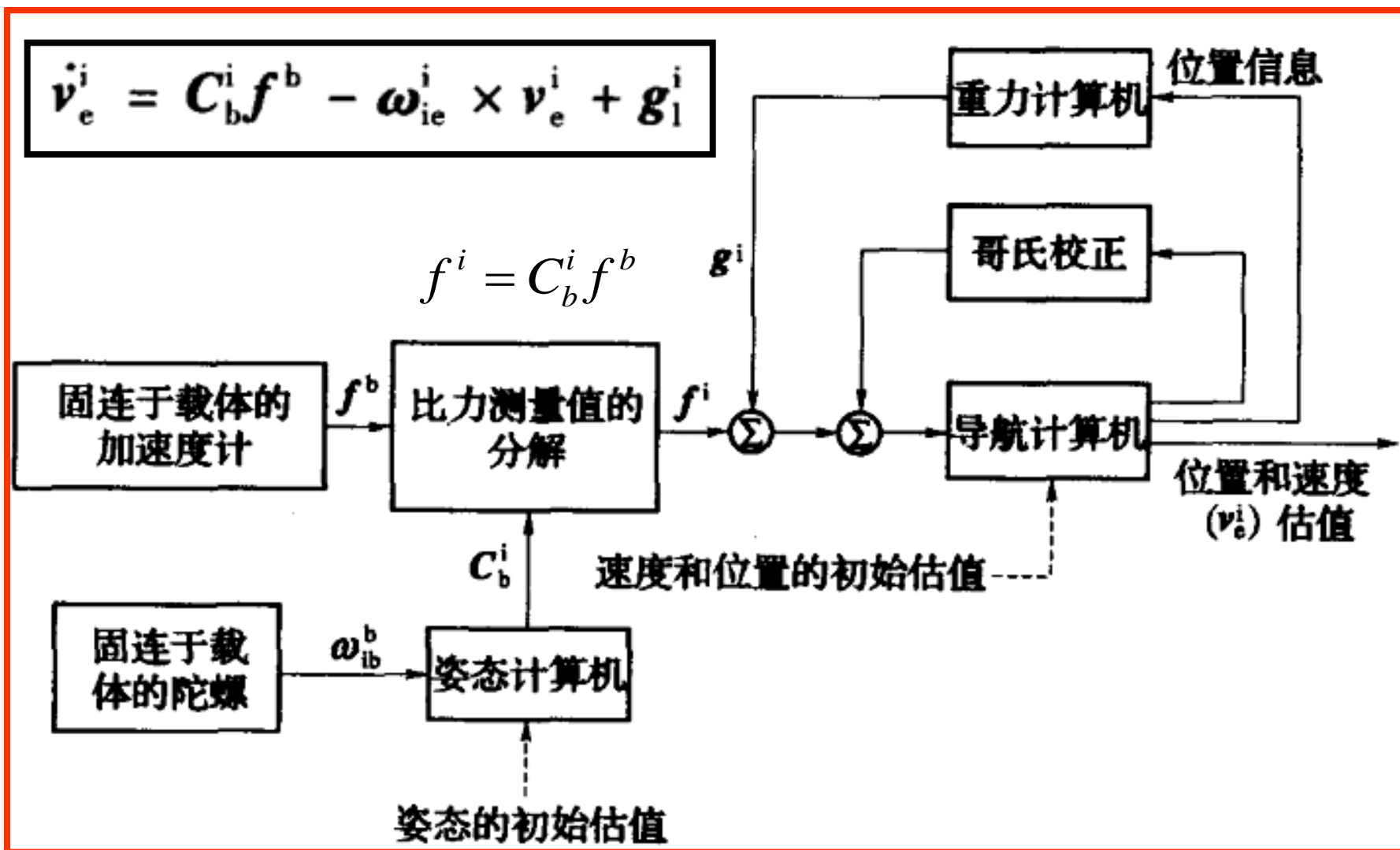
$$\Omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{ib}^b = [p \quad q \quad r]^T$$





3.5 捷联惯导系统的机械编排



捷联惯性导航系统-惯性坐标系机械编排



3.5 捷联惯导系统的机械编排

地球坐标系机械编排

- 在这类系统中，地速是在与地球固连的坐标系中表示的，即表示为 \mathbf{v}_e^e 。根据哥氏方程，速度相对于地球坐标系的变化率可用惯性系下速度的变化率来表示：

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_e = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e \quad \rightarrow \quad \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_e = \mathbf{f} - 2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l$$

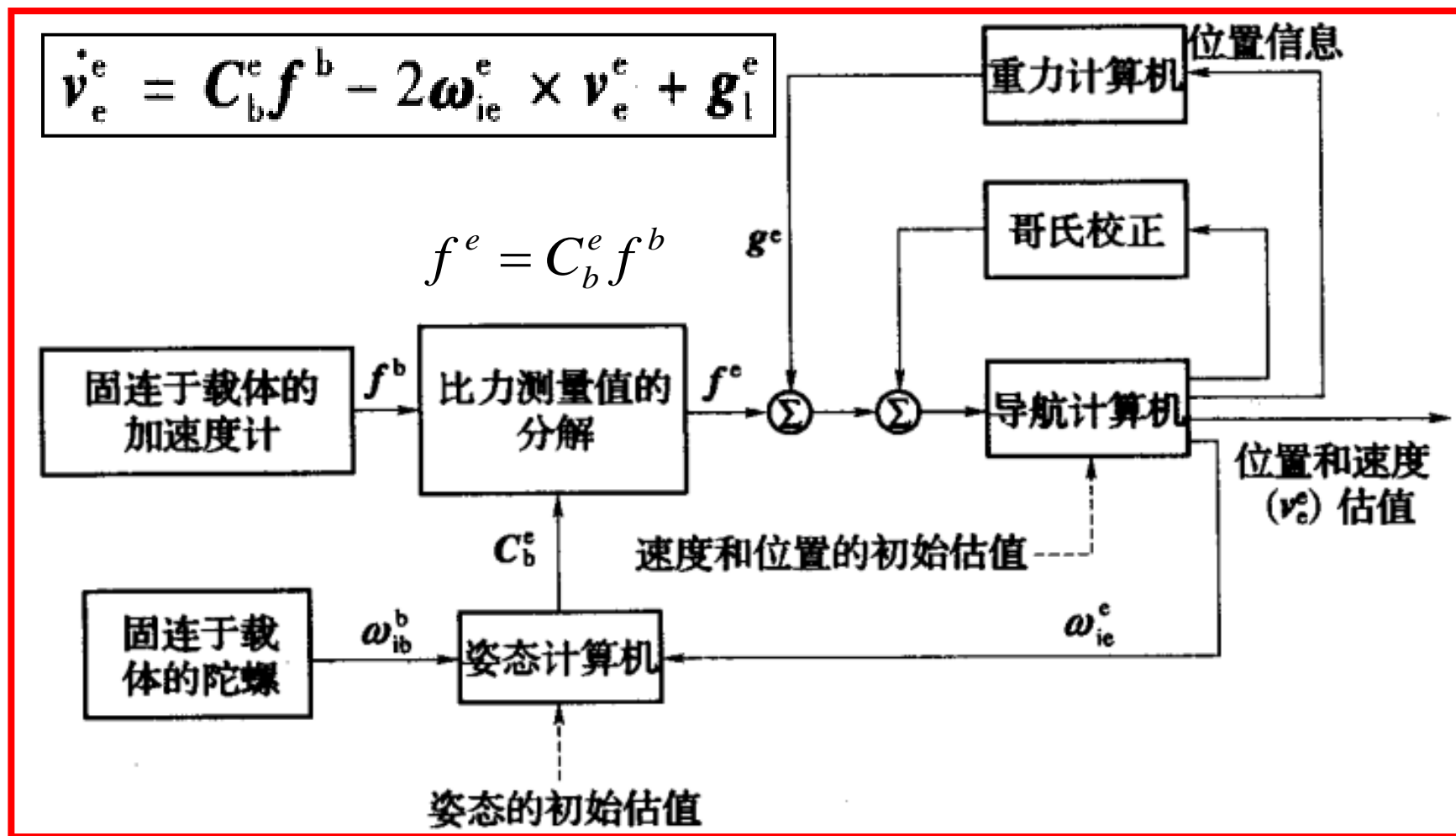
$$\dot{\mathbf{v}}_e^e = \mathbf{C}_b^e \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_e^e + \mathbf{g}_l^e$$

$$\dot{\mathbf{C}}_b^e = \mathbf{C}_b^e \boldsymbol{\Omega}_{eb}^b$$

$$\boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_e^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^e$$



3.5 捷联惯导系统的机械编排



捷联惯性导航系统-地球坐标系机械编排



3.5 捷联惯导系统的机械编排

推广——相对地球上某一固定点距离较短的导航：

- 相对地球系导航的变化形式，可用于相对于地球上某一固定点的短距离导航。这种机械编排常应用于战术导弹相对于地面跟踪站进行的导航。
- 在这种系统中，地面站提供的目标跟踪信息可与导弹上的惯性导航系统的信息进行组合，用来给导弹提供弹道中段的制导指令。为了使导弹制导与当地垂线轴和切向平顶轴地面系统协调一致，所有提供的信息都必须在同一参考坐标系中。
- 在这种情况下，可以定义地球固连参考坐标系。该坐标系原点位于跟踪站，坐标轴分别指向当地垂线和地球表面的切平面。



3.5 捷联惯导系统的机械编排

注意——相对地球上某一固定点距离较短的导航：

■对于时间非常短的导航，如一些战术导弹的应用，可以对这种系统的机械编排作进一步的简化。例如，对于导航周期短（一般为10min或更短）的情况，地球自转对姿态计算过程的影响有时可以忽略；在速度方程中，不进行哥氏校正也能获得足够的导航精度。在这种情况下，姿态角可以仅根据陀螺测得的转动速率进行计算。

$$\dot{\mathbf{v}}_e^e = \mathbf{C}_b^e \mathbf{f}^b + \mathbf{g}_l^e$$

■需要强调的是，仅当忽略地球自转和哥氏项所引起的误差处于导航系统允许的误差范围内时，才能进行这样的简化。当允许的陀螺误差超过地球的转动速率，且加速度计的允许零偏大于因忽略哥氏力而产生的加速度误差时，才能使用简化方程。



3.5 捷联惯导系统的机械编排

(当地地理) 导航坐标系机械编排

- **为了进行绕地球的长距离导航**，最需要的是前面所述的当地地理坐标系或导航坐标系中的导航信息。地球上的位置通过纬度(基准点向北或向南的度数)和经度(基准点向东或向西的度数)来表示。
- 导航数据用北向速度分量和东向速度分量、纬度、经度和距地球表面的高度来表示。
- 在这种机械编排中，导航坐标系中表示的地速为 \mathbf{v}_e^n ，它相对于导航坐标系的变化率可通过其在惯性坐标系下的变化率表示。



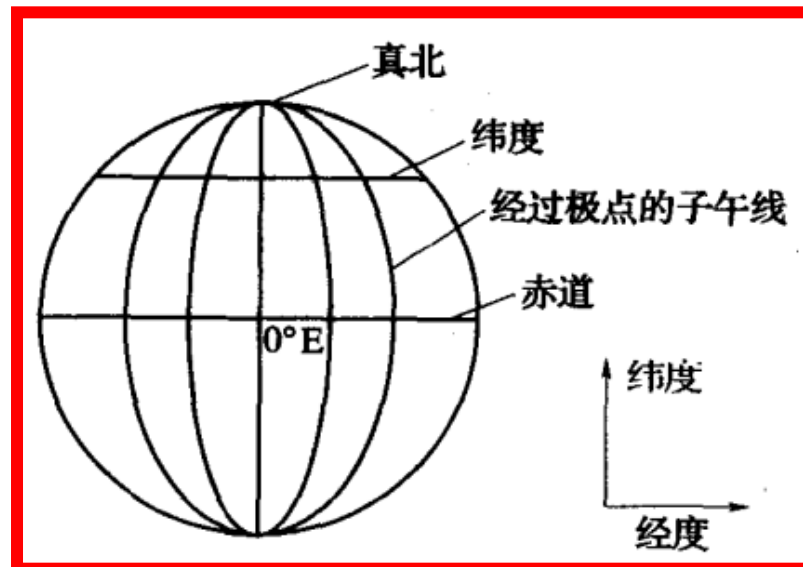
3.5 捷联惯导系统的机械编排

(当地地理) 导航坐标系机械编排

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l$$

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_n = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i - [\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}] \times \mathbf{v}_e$$

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_n = \mathbf{f} - [2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}] \times \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l$$



$$\dot{\mathbf{v}}_e^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - [2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n] \times \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n$$

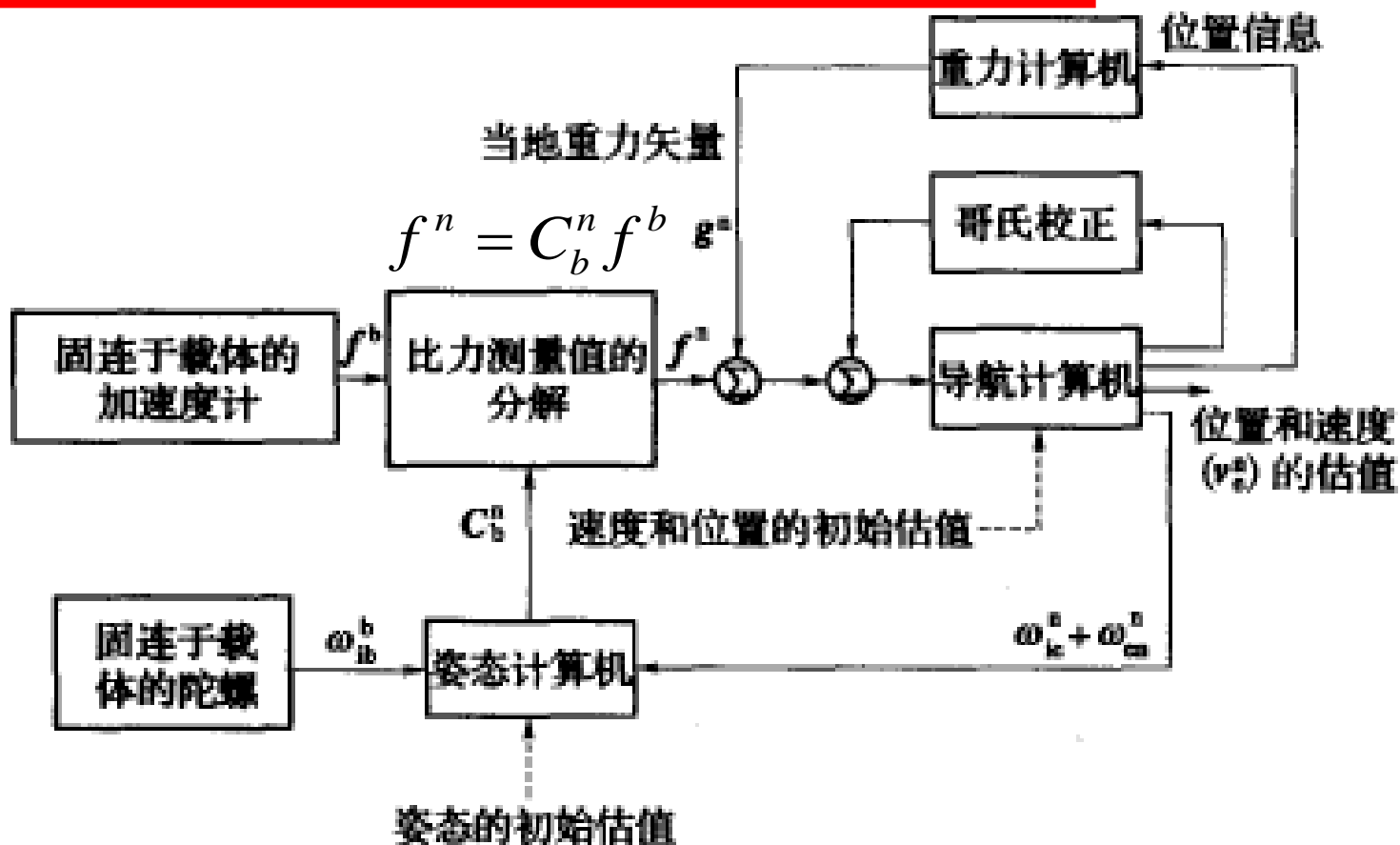
$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b$$

$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b [\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n]$$



3.5 捷联惯导系统的机械编排

$$\dot{\mathbf{v}}_e^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - [2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n] \times \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n$$



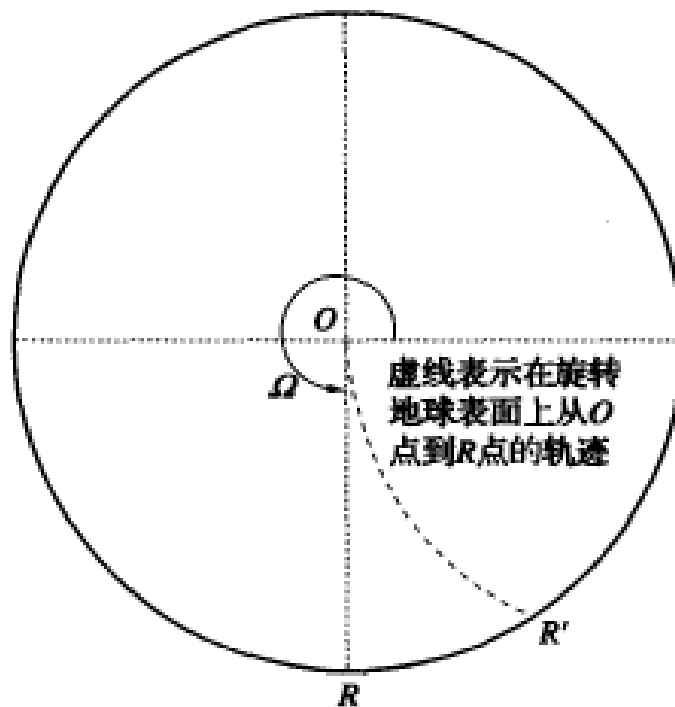
捷联惯性导航系统---（当地地理）导航坐标系机械编排



3.5 捷联惯导系统的机械编排

相对于地球表面的加速度变化率由下列各项构成：

- (1) 作用于载体的比力，分别由载体上的一组加速度计测量得到。
- (2) 由旋转地球表面的载体速度引起的加速度的校正，通常称为哥氏加速度。
- (3) 运载体在地球表面运动导致向心加速度的校正。例如，在地球表面朝着东向运动的载体，相对于惯性系描绘出的是圆形轨迹。
- (4) 作用于载体的外部重力的补偿。它包括由质量引力引起的万有引力和由地球转动引起的载体的向心加速度。由于载体在空间中的运行轨迹是圆形的，因此即使运载体相对于地球是静止的，后一项也会存在。



哥氏加速度效应说明



3.5 捷联惯导系统的机械编排

举例说明——哥氏效应的重要性

■考虑一个运载体从北极发射，飞向纽约的情况。假定运载体以 3600mi le/h 的平均速度飞行。在大约 1h 的飞行过程中，地球将转过大约 15 度角，这在纽约所处的纬度上大约为 9000mi le 。因此，若在飞行过程中不对其所安装的惯性制导系统进行哥氏校正，运载体将会到达芝加哥地区而不是最初的目的地纽约。



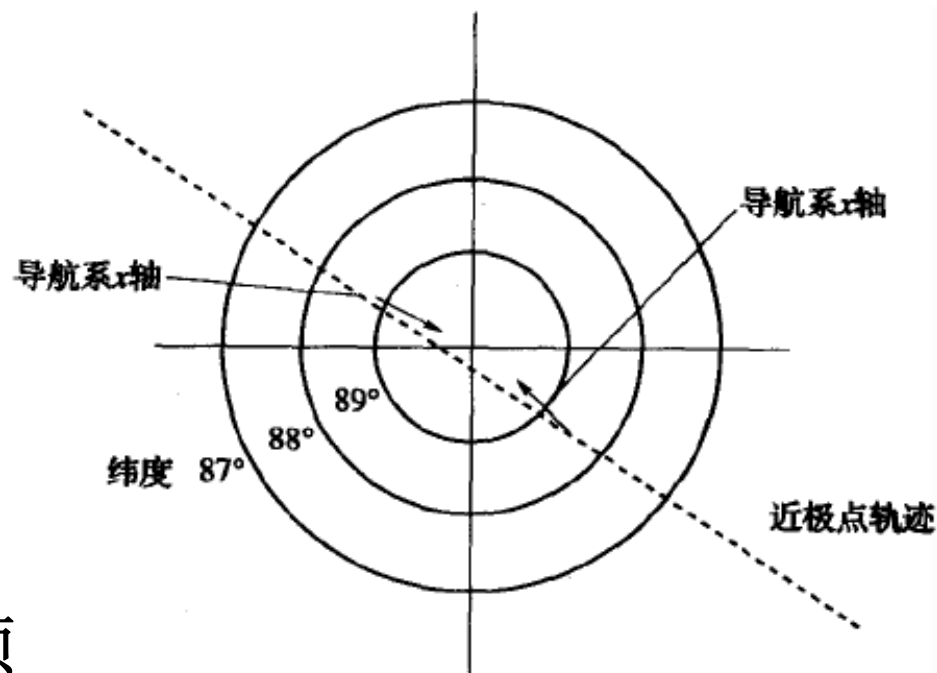
3.5 捷联惯导系统的机械编排

游动方位导航坐标系机械编排

导航坐标系的旋转速率(即转移速率)，可表示成分量形式：

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{R_0 + h} & \frac{-v_N}{R_0 + h} & \frac{-v_E \tan L}{R_0 + h} \end{bmatrix}^T$$

在地理极点，转移速率的第三项变得不确定。





3.5 捷联惯导系统的机械编排

游动方位导航坐标系机械编排

■由于导航系统在地球表面运动， n 系必须不停地转动，以保持它的 z 轴与真北方向平行。为了在全球范围内满足这个条件，当导航系统在地球极区表面运动时， n 系必须以比低纬度更高的旋转速率绕 z 轴旋转。图 3. 17 所示的近极点导航示意图，对这种情况进行了说明。

■在地球极点附近为了保持 Z 轴指向极点，当地地理导航坐标系绕 z 轴转动的速率将会变得很大。通过极点附近时，航向很快变化 180° 。在极限情况下——直接穿越极点时，转动速率将会变得无穷大。



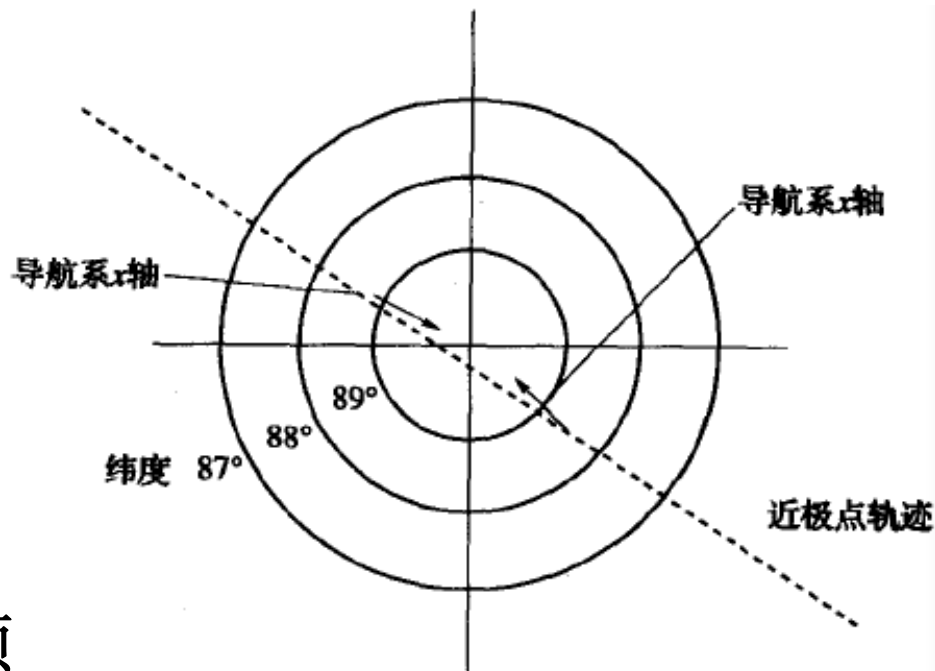
3.5 捷联惯导系统的机械编排

游动方位导航坐标系机械编排

导航坐标系的旋转速率(即转移速率)，可表示成分量形式：

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{R_0 + h} & \frac{-v_N}{R_0 + h} & \frac{-v_E \tan L}{R_0 + h} \end{bmatrix}^T$$

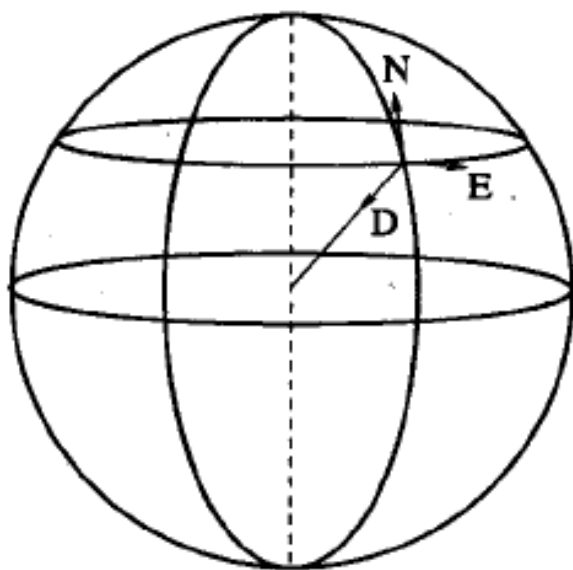
在地理极点，转移速率的第三项变得不确定。



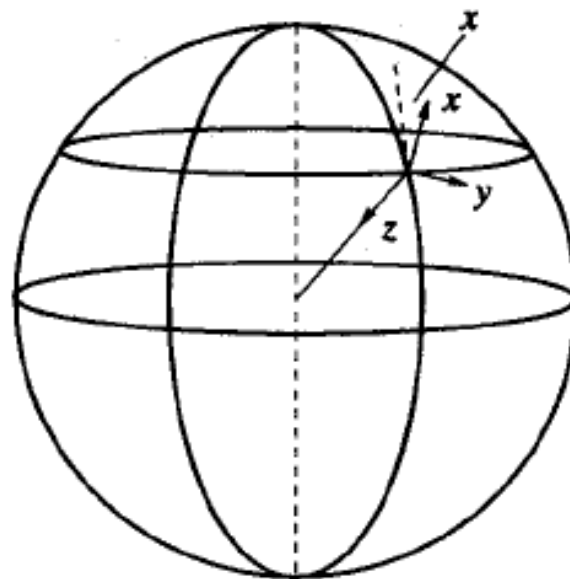


3.5 捷联惯导系统的机械编排

避免产生奇异的方法之一是采用一种游动方位机械编排，使得 ω_{en} 的 z 向分量为零，从而得到具有全球导航能力的导航系统。如下图所示，游动坐标系是一种随运载体在地球表面运动的当地水平坐标系。



当地地理坐标系



游动方位坐标系

游动方位坐标系说明



3.5 捷联惯导系统的机械编排

真北方向和游动坐标系 z 轴之间的方位角随运载体在地球上的位置而变化。选择这种机械编排的原因，是为了避免当运载体穿越北极或南极时，游动坐标系相对地球方位的不连续性。

$$\dot{\mathbf{v}}_e^w = \mathbf{C}_e^w \mathbf{f}^b - [2\mathbf{C}_e^w \boldsymbol{\omega}_e^e + \boldsymbol{\omega}_{ew}^w] \times \mathbf{v}_e^w + \mathbf{g}_l^w$$

游动方位系统的导航方程，在形式上与地理坐标系的导航方程相似，其构成如下：对这个方程积分得到运载体在游动方位坐标系中地速的估计值 \mathbf{v}_e^w 。然后利用它得到游动方位坐标系相对于地球的旋转速度 $\boldsymbol{\omega}_{ew}^w$ 。游动方位坐标系和地球坐标系之间的方向余弦矩阵 \mathbf{C}_e^w 可利用下式进行更新：

$$\dot{\mathbf{C}}_e^w = \mathbf{C}_e^w \boldsymbol{\Omega}_{ew}^w$$



3.5 捷联惯导系统的机械编排

小结-对几种可能用到的捷联惯性导航系统机械编排进行小结

- 机械编排的选择取决于系统的应用。虽然所描述的任何一种方式均可用于近地空间的导航。
- 地球表面附近远距离导航普遍选用当地地理导航坐标系机械编排。
- 游动方位坐标系提供了全球的导航能力。
- 这些机械编排提供的导航数据是北向速度、东向速度、纬度和经度，而且可以使用相对简单的重力模型。
- 对于近距导航，可以采用与地球固连参考坐标系。



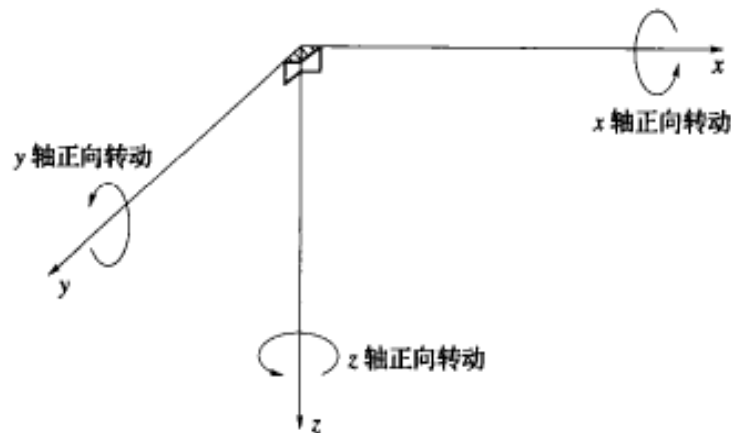
3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

概述:

■现在考虑用一套捷联陀螺敏感器在运载体内建立参考坐标系的方法，载体可绕任意方向自由转动。载体相对于指定参考坐标系的姿态，以一组数字形式储存在运载体的计算机中。利用陀螺提供的转动速率的测量值，储存的姿态信息可以随着载体的转动而更新。

■坐标系是指右手直角坐标系，在这种坐标系中，从原点看，沿每一根轴的顺时针方向定义为这根轴的正向转动，负向转动相反，为逆时针方向。

■必须记住的是，当绕不同的轴系作一系列转动时，载体姿态的变化不仅是绕每根轴转动角度的函数，而且还是转动顺序的函数，转动的顺序尤为重要。



轴系转动的定义



3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

3 种姿态表达式:

■ **(1) 欧拉角。** 从一个坐标系到另一个坐标系的变换可通过依次绕不同坐标轴的3次连续转动来定义。从物理角度看，欧拉角表示法可能是最简单的方法之一。这3个角与稳定平台上一套机械框架测量的角度相一致。稳定平台的轴系代表参考坐标系，平台外框通过轴承与运载体相连。

■ **(2) 四元数。** 四元数姿态表示法，通过绕参考坐标系中一个矢量的单次转动来实现一个坐标系到另一个坐标系的转换。四元数是一个具有四个元素的矢量表达式，各个元素为矢量方向和转动大小的函数。

■ **(3) 方向余弦。** 方向余弦矩阵是一个 3×3 阶的矩阵，矩阵的列表示载体坐标系中的单位矢量在参考坐标系中的投影。



3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

欧拉角：

■ 一个坐标系到另一个坐标系的变换，可以通过绕不同坐标轴的 3 次连续转动来实现。例如，从参考坐标系到一个新坐标系的变换可以表示如下：

- 绕参考坐标系的 z 轴转动 ψ 角
- 绕新坐标系的 y 轴转动 θ 角
- 绕新坐标系的 Z 轴转动 ϕ 角
- ψ 、 θ 和 ϕ 称为欧拉转动角

$$C_1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$



3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

欧拉角：

$$\mathbf{C}_n^b = \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1$$

$$\mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_n^{b^T} = \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_3^T$$

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$



3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

欧拉角小角度近似

$$\sin\phi \rightarrow \phi, \sin\theta \rightarrow \theta, \sin\psi \rightarrow \psi,$$

角度的余弦值接近1，忽略小角度的乘积，则通过欧拉转动所表示的方向余弦矩阵近似简化为斜对称阵形式：

$$\mathbf{C}_b^m \approx \begin{bmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix}$$

表示在载体姿态实时计算中，连续更新之间姿态发生的微小变化。



3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

欧拉角随时间的传递（或更新）：

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\phi} = (\omega_y \sin\theta + \omega_z \cos\theta) \tan\theta + \omega_x$$

$$\dot{\theta} = \omega_y \cos\theta - \omega_z \sin\theta$$

$$\dot{\psi} = (\omega_y \sin\theta + \omega_z \cos\theta) \sec\theta$$

这种形式的等式可在捷联系统中进行解算，用来更新载体相对于所选参考坐标系的欧拉转动。然而，在 $\theta = \pm 90^\circ$ 度时，由于 ψ 和 ϕ 方程的解变得不确定，因而上式使用受到限制。



3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

四元数:

■ 四元数姿态表达式是一个四参数的表达式。它基于的思路是：一个坐标系到另一个坐标系的变换可以通过绕一个定义在参考坐标系中的矢量 μ 的单次转动来实现。四元数用符号 q 表示，它是一个具有4个元素的矢量，这些元素是该矢量方向和转动大小的函数。

$$q = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mu/2) \\ (\mu_x/\mu) \sin(\mu/2) \\ (\mu_y/\mu) \sin(\mu/2) \\ (\mu_z/\mu) \sin(\mu/2) \end{bmatrix}$$

式中： μ_x, μ_y, μ_z 是角矢量 μ 的分量， μ 是其大小。

定义 μ 的大小和方向是使参考坐标系绕 μ 转动一个角度 μ ，就能与载体坐标系重合。



3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

四元数:

$$\mathbf{q} = a + ib + jc + kd$$

$$i \cdot i = -1 \quad i \cdot j = k \quad j \cdot i = -k \quad \dots$$

两个4元数 $\mathbf{q} = a + ib + jc + kd$ 和 $\mathbf{p} = e + if + jg + kh$ 的乘积,按照复数运算法则计算,有

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = & (a + ib + jc + kd)(e + if + jg + kh) = \\ & ea - bf - cg - dh + (af + be + ch - dg)i + \\ & (ag + ce - bh + df)j + (ah + de + bg - cf)k \end{aligned}$$

矩阵形式:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$



3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

方向余弦矩阵:

■ **方向余弦**。方向余弦矩阵是一个 3×3 阶的矩阵，矩阵的列表示载体坐标系中的单位矢量在参考坐标系中的投影。

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_b^n(t + \delta t) = \mathbf{C}_b^n(t) \mathbf{A}(t)$$

$$\mathbf{A}(t) = [\mathbf{I} + \delta\boldsymbol{\psi}]$$

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\boldsymbol{\psi}}{\delta t}$$

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\boldsymbol{\psi}}{\delta t} = \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b$$

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{C}_b^n}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C}_b^n(t + \delta t) - \mathbf{C}_b^n(t)}{\delta t}$$

$$\delta\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\psi & \delta\theta \\ \delta\psi & 0 & -\delta\phi \\ -\delta\theta & \delta\phi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$



3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

方向余弦矩阵:

■ 方向余弦微分方程。可以利用陀螺仪实时测量值对其进行更新。

$$\begin{aligned}\dot{c}_{11} &= c_{12}\omega_z - c_{13}\omega_y & \dot{c}_{12} &= c_{13}\omega_x - c_{11}\omega_z & \dot{c}_{13} &= c_{11}\omega_y - c_{12}\omega_x \\ \dot{c}_{21} &= c_{22}\omega_z - c_{23}\omega_y & \dot{c}_{22} &= c_{23}\omega_x - c_{21}\omega_z & \dot{c}_{23} &= c_{21}\omega_y - c_{22}\omega_x \\ \dot{c}_{31} &= c_{32}\omega_z - c_{33}\omega_y & \dot{c}_{32} &= c_{33}\omega_x - c_{31}\omega_z & \dot{c}_{33} &= c_{31}\omega_y - c_{32}\omega_x\end{aligned}$$



3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

方向余弦、欧拉角和四元数的关系：

$$C_{b}^n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \end{bmatrix}$$

通过比较上述等式的各个元素，四元数可以直接用欧拉角或方向余弦表示。同样地，欧拉角也可以用方向余弦或四元数表示



3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

用方向余弦表示四元数：

对于小角度位移，四元数参数可以用下面的关系式推导：

$$a = \frac{1}{2}(1 + c_{11} + c_{22} + c_{33})^{1/2}$$

$$b = \frac{1}{4a}(c_{32} - c_{23})$$

$$c = \frac{1}{4a}(c_{13} - c_{31})$$

$$d = \frac{1}{4a}(c_{21} - c_{12})$$

用方向余弦表示四元数

$$a = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2}$$

$$b = \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2}$$

$$c = \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2}$$

$$d = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2}$$

用欧拉角表示四元数



3.6 捷联姿态表达式——姿态矩阵更新方法

用方向余弦表示欧拉角：

当 $\theta \neq 90^\circ$ 时

$$\phi = \arctan\left[\frac{c_{32}}{c_{33}}\right]$$

$$\theta = \arcsin[-c_{31}]$$

$$\psi = \arctan\left[\frac{c_{21}}{c_{11}}\right]$$



3.7 详细导航方程

用分量形式表示的导航方程：

■ 对于地球上工作在当地地理坐标系中的导航系统，导航方程可表示成如下形式：

$$\dot{\mathbf{v}}_e^n = \mathbf{f}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n$$

$$\mathbf{v}_e^n = [v_N \quad v_E \quad v_D]^T$$

$$\mathbf{f}^n = [f_N \quad f_E \quad f_D]^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [\Omega \cos L \quad 0 \quad -\Omega \sin L]^T$$

$$\dot{L} = v_E / (R_0 + h) \cos L, L = v_N / (R_0 + h)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = [\dot{L} \cos L \quad -L \quad -\dot{L} \sin L]^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \left[\frac{v_E}{R_0 + h} - \frac{v_N}{R_0 + h} - \frac{v_E \tan L}{R_0 + h} \right]^T$$

$$\mathbf{g}_l^n = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{R} = \mathbf{g} - \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{2} \begin{pmatrix} \sin 2L \\ 0 \\ 1 + \cos 2L \end{pmatrix}$$



3.7 详细导航方程

用分量形式表示的导航方程:

$$\begin{aligned}\dot{v}_N &= f_N - v_E(2\Omega + \dot{L})\sin L + v_D\dot{L} + \xi g = \\ &f_N - 2\Omega v_E\sin L + \frac{v_N v_D - v_E^2 \tan L}{R_0 + h} + \xi g\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_E &= f_E + v_N(2\Omega + \dot{L})\sin L + v_D(2\Omega + \dot{L})\cos L - \eta g = \\ &f_E + 2\Omega(v_N\sin L + v_D\cos L) + \frac{v_E}{R_0 + h}(v_D + v_N\tan L) - \eta g\end{aligned}$$

$$\dot{v}_D = f_D - v_E(2\Omega + \dot{L})\cos L - v_N\dot{L} + g = f_D - 2\Omega v_E\cos L - \frac{v_E^2 + v_N^2}{R_0 + h} + g$$

$$L = \frac{v_N}{R_0 + h}$$

$$\dot{L} = \frac{v_E \sec L}{R_0 + h}$$

$$\dot{h} = -v_D$$



SINS的工作过程和计算流程

SINS的工作过程：↵

- (1) 系统初始化：给定飞行器的初始位置、初始速度和导航平台的初始对准。
捷联式惯导的初始对准就是确定姿态矩阵的初始值，在物理概念上即是把“数学平台”的平台坐标系和地理坐标系的轴向对准。↵
- (2) 姿态矩阵 C_b^n 的计算：利用陀螺仪测得的机体坐标系相对于惯性空间的角速度 ω_{ib}^b 和通过计算得到的地理坐标系相对于惯性空间的角速度 ω_{in}^b 求得机体坐标系相对于地理坐标系的角速度 ω_{nb}^b ，求解微分方程计算机体坐标系到地理坐标系的姿态变换矩阵 C_b^n 。然后从姿态矩阵中提取飞行器的姿态角。↵
- (3) 导航计算：导航计算就是利用机体坐标系到地理坐标系的姿态变换矩阵把加速度计输出的信息变换到地理坐标系，消除有害加速度（即载体相对于地球运动造成的向心加速度、地球自转产生的哥氏加速度和重力加速度），然后经积分计算飞行器的地速等导航信息；载体的方位即经、纬度是通过求解地理坐标系到地球坐标系的变换矩阵（称为位置矩阵） C_n^e 来完成的。↵



SINS的计算流程

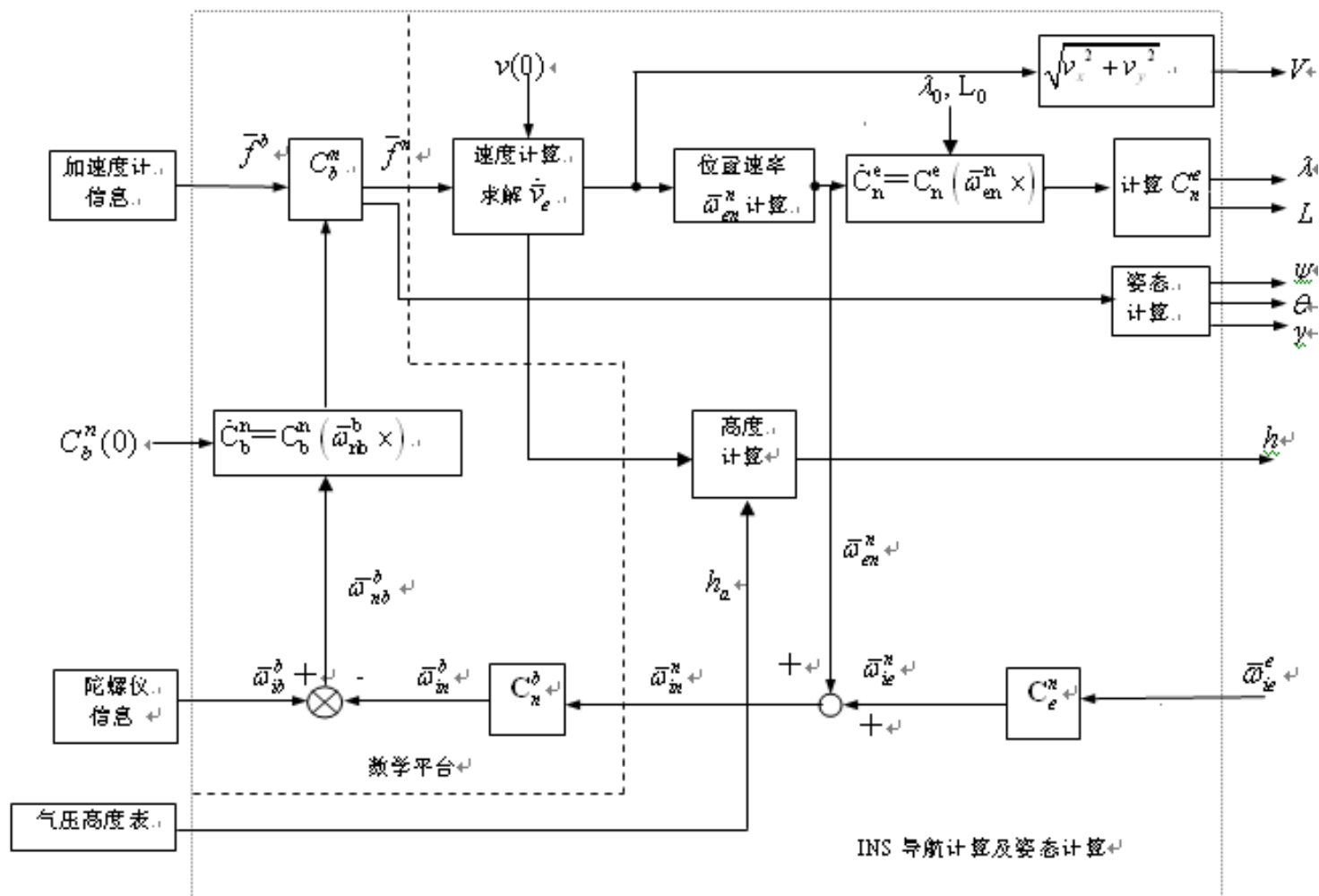


图 4-18 捷联式惯导算法的程序编排框图。

返回



作 业

- ✓ 1、阐述惯性导航系统的基本工作原理。
- ✓ 2、推导不同导航参考坐标下的导航方程。
- ✓ 3、画出不同导航参考坐标下的机械编排，并说明导航和姿态计算过程。
- ✓ 4、论述几种常用的姿态矩阵更新方法及其优缺点。
- ✓ 5、推导方向余弦（姿态）矩阵微分方程的表达式。