航天器控制原理

第六讲 航天器轨道的几何特性

主讲：周　军

西北工业大学 精确制导与控制研究所

第六讲 航天器轨道的几何特性

1、轨道的几何方程

2、轨道的几何参数

3、四种轨道的基本特点

1、轨道的几何方程

二体运动方程

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0$$

两边同时与 $\vec{h}$ 叉乘

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \times \vec{h}$$

$$-\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3}\vec{h} \times \vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3}\vec{h} \times \vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3}\vec{h} \times \vec{r}$$

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\frac{\mu}{r^3}\vec{h} \times \vec{r} = \frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}$$

矢量运算法则：

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r\dot{r}$$

$$\frac{\mu}{r^3}\vec{h} \times \vec{r} = \frac{\mu}{r}\vec{v} - \frac{\mu \dot{r}}{r^2}\vec{r}$$

$$\frac{\mu}{r^3}\vec{h} \times \vec{r} = \mu \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{h}} + \ddot{\vec{r}} \times \vec{h}$$

$\vec{h}$ 守恒

$$\dot{\vec{h}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}\times\vec{h})=\mu\frac{d}{dt}(\frac{\vec{r}}{r})$$

$\xrightarrow{\text{两侧同时积分}}$

$$\dot{\vec{r}}\times\vec{h}=\mu\frac{\vec{r}}{r}+\vec{B}$$

$\vec{B}$是积分常矢量

$\xrightarrow{\text{两侧同时点乘}\ \vec{r}}$

$$\vec{r}\cdot(\dot{\vec{r}}\times\vec{h})=\vec{r}\cdot\mu\frac{\vec{r}}{r}+\vec{r}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{r}\cdot(\dot{\vec{r}}\times\vec{h})=\vec{r}\cdot\mu\frac{\vec{r}}{r}+\vec{r}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$$

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\cdot\vec{h}=\mu\frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r}}+\vec{r}\cdot\vec{B}$$

$$h^2=\mu r+rB\cos\upsilon$$

$$r=\frac{h^2/\mu}{1+(B/\mu)\cos\upsilon}$$

$$r=\frac{h^2/\mu}{1+(B/\mu)\cos\upsilon}$$

令 $p=h^2/\mu,\quad e=B/\mu$

$$r=\frac{p}{1+e\cos\upsilon}$$

$$\boxed{r=\frac{p}{1+e\cos\upsilon}}$$

当 $\begin{cases} e=0 & \text{时为圆} \\ 0<e<1 & \text{时为椭圆} \\ e=1 & \text{时为抛物线} \\ e>1 & \text{时为双曲线} \end{cases}$

极坐标内任意圆锥曲线的一般方程

至此，可以把航天器的轨道运动总结如下：

（1）圆锥曲线族(圆、椭圆、抛物线、双曲线)为二体问题中的航天器惟一可能的运动轨道。

（2）中心引力体中心必为圆锥曲线轨道的一个焦点，验证开普勒第一定律。

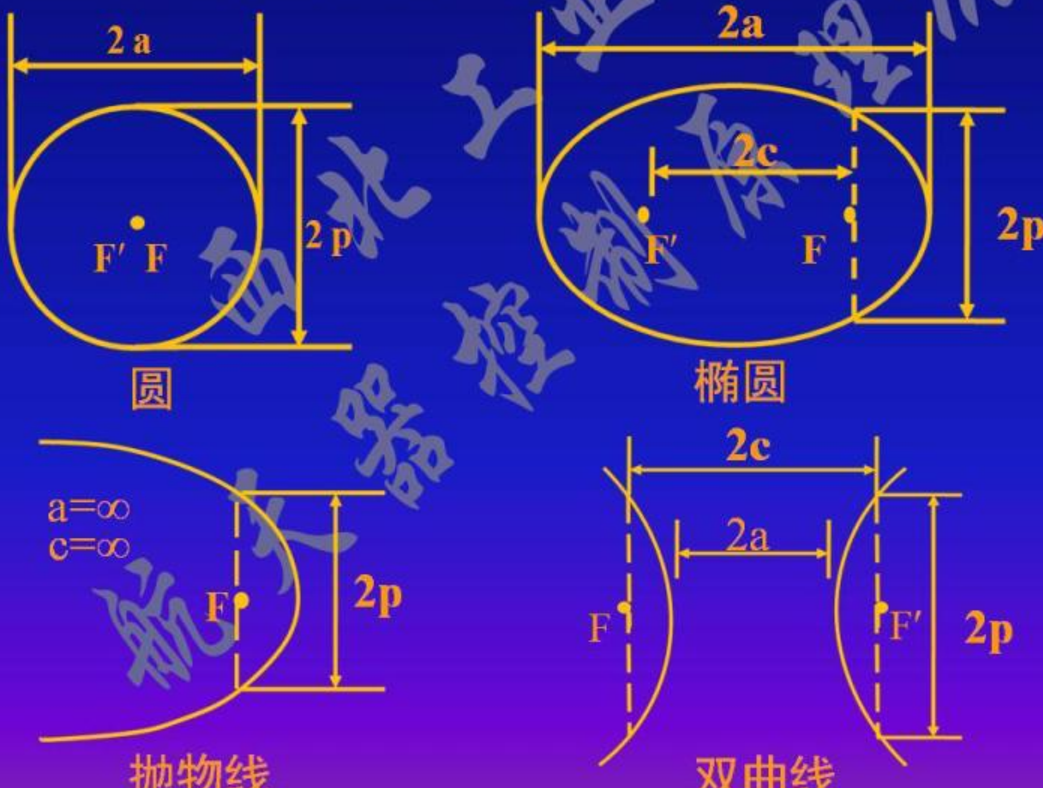
（3）当航天器沿着圆锥曲线轨道运动时，其比机械能（单位质量的动能和势能之和）保持不变。

（4）航天器绕中心引力体运动，当 $\vec{r}$ 和 $\vec{v}$ 沿轨道变化时，比角动量 $\vec{h}$ 保持不变。

（5）轨道运动总是处在一个固定于惯性空间的平面内。

2、轨道的几何参数

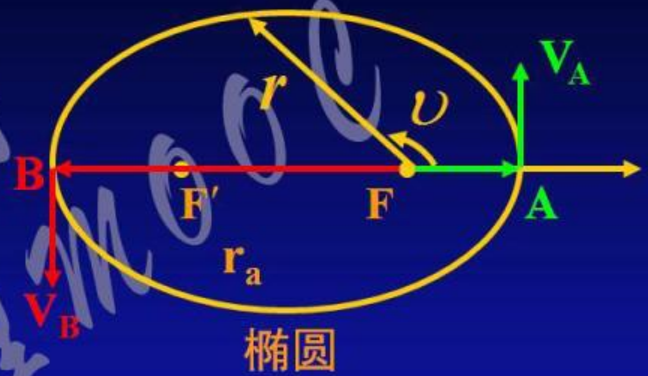
（1）圆锥曲线轨道包括圆、椭圆、抛物线和双曲线4种类型的轨道。



圆锥曲线共同的几何参数

（2）轨道的近拱点和远拱点

轨道长轴的两个端点称为拱点，离主焦点近的称为近拱点，离主焦点远的称为远拱点。图中，主焦点 F 为中心引力体。



$$r=\frac{p}{1+e\cos\upsilon}$$

$\upsilon=0^\circ$: $$r_{\min}=\frac{p}{1+e\cos 0^o}\overset{def}{=}r_p$$

$\upsilon=180^\circ$: $$r_{\max}=\frac{p}{1+e\cos 180^o}\overset{def}{=}r_a$$

称 r_p 为近拱点，r_a 为远拱点。

$$\begin{cases} r_p = \dfrac{p}{1+e} \xrightarrow{p=a\left(1-e^2\right)} r_p = a(1-e) \\ r_a = \dfrac{p}{1-e} \xrightarrow{p=a\left(1-e^2\right)} r_a = a(1+e) \end{cases}$$

另外，在任何圆锥曲线轨道的近拱点或远拱点(若存在)处，总有$\vec{r} \perp \vec{v}$ 所以：

$$h = rv\cos\phi \xrightarrow{\phi=0^\circ} h = r_p v_p = r_a v_a$$

式中 v_p, v_a ,分别为两个拱点的速度大小。

（3）轨道形状与比机械能

对近拱点写出航天器的能量方程式：

$$\varepsilon = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{h^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p}$$

$$\begin{cases} p = a(1-e^2) \\ p = h^2/\mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow h^2 = \mu a(1-e^2)$$

由此得：$\varepsilon = \dfrac{\mu a\left(1-e^2\right)}{2a^2\left(1-e\right)^2} - \dfrac{\mu}{a\left(1-e\right)} \Rightarrow \varepsilon = -\dfrac{\mu}{2a}$

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

对所有圆锥曲线轨道均成立的这个简单的关系式表明，轨道的长半轴 a 仅与航天器的比机械能 ε 有关。

圆和椭圆轨道：$a>0$，航天器的比机械能 $\varepsilon<0$；

抛物线轨道：$a=\infty$，航天器的比机械能 $\varepsilon=0$；

双曲线轨道：$a<0$，航天器的比机械能 $\varepsilon>0$。

因此，ε 仅由航天器比机械能的符号就可以确定航天器处在哪种类型的圆锥曲线轨道内。

由于 $p = h^2 / \mu$ 以及 $p = a(1 - e^2)$，$\varepsilon = -\dfrac{\mu}{2a}$ 因此对任何圆锥曲线轨道均有

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{\mu^2}}$$

$$e=\sqrt{1+\frac{2\varepsilon h^2}{\mu^2}}$$

(1) 当h≠0时，

若ε<0，则 e<1，为椭圆和圆轨道；

若ε=0，则 e=1，为抛物线轨道；

若ε>0，则 e>1，为双曲线轨道。

(2) 当h=0时，无论ε取值如何，e=1。此时，航天器的轨道是一条通过中心引力体质心和航天器当前位置的直线，也是一种退化的圆锥曲线。

3、四种轨道的基本特点

（1）椭圆轨道

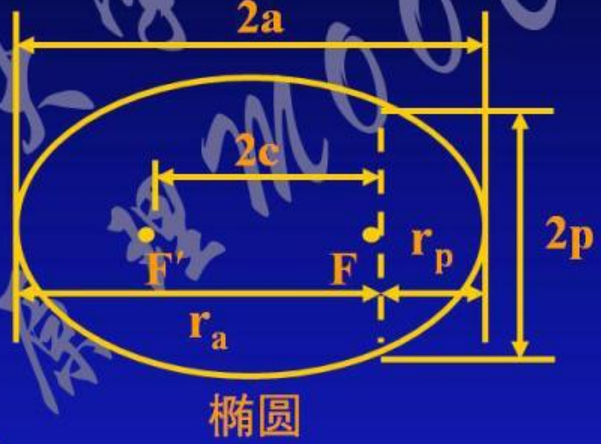
太阳系所有行星的轨道和所有围绕天体运动航天器的轨道都是封闭曲线—椭圆。

椭圆可用两根大头针和一个棉线圈画出的方法，以及椭圆轨道参数之间的关系。

做椭圆的简单方法

椭圆上任何一点到两个焦点的距离之和恒满足 $r + r' = 2a$

并且椭圆轨道近拱点半径 r_p 和远拱点半径 r_a 与椭圆的几何参数之间有如下关系：



$$\begin{cases} r_a + r_p = 2a \\ r_a - r_p = 2c \end{cases}$$

可得
$$e = \frac{c}{a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

若将椭圆的短半轴记作b，则有 $a^2 = b^2 + c^2$

椭圆轨道周期

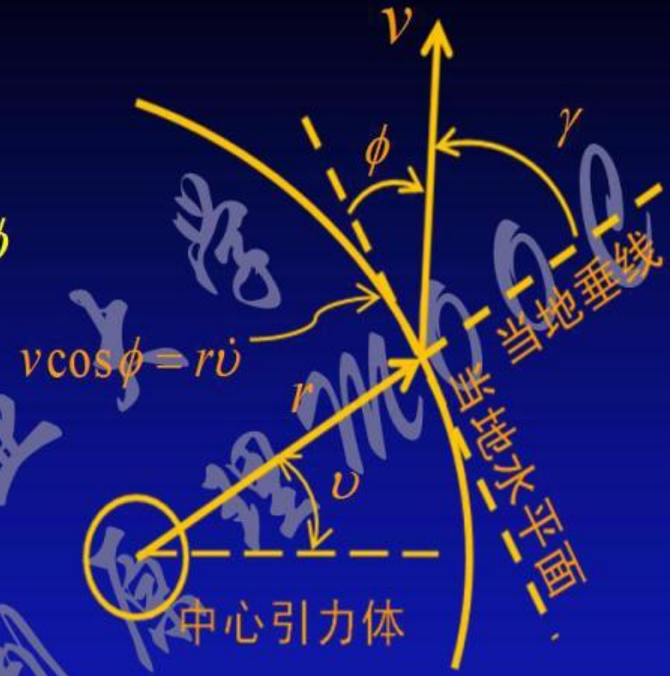
$$\begin{cases} h = rv\sin\gamma = rv\cos\phi \\ v\cos\phi = r\dot{\upsilon} \end{cases}$$

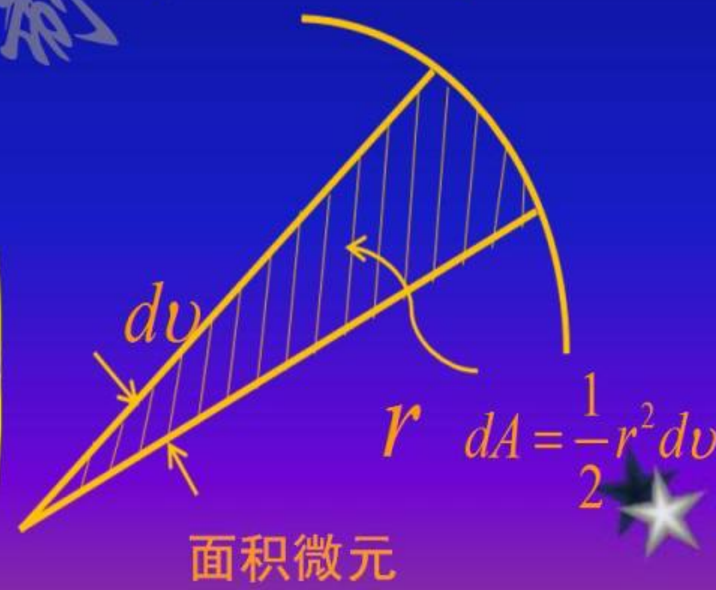
$$h = rv\cos\phi = r^2\frac{d\upsilon}{dt}$$

$$dt = \frac{r^2}{h}d\upsilon$$

矢径转过一角度$d\upsilon$扫过面积微元：$dA = \frac{1}{2}r^2 d\upsilon$

$$dt = \frac{2}{h}dA$$





$$dt = \frac{2}{h} dA$$

对于任何给定的轨道，h 为一常数，所以上式证明了开普勒第二定律：“相等的时间间隔内矢径扫过的面积相等”。

$$dA/dt = \text{常量}$$

在一个轨道周期内，矢径扫过整个椭圆。

$dt = \frac{2}{h} dA$ 在一个周期内进行积分：

$$dt = \frac{2}{h} dA \xrightarrow{\text{积分}} T = \frac{2\pi ab}{h}$$

πab 为整个椭圆的面积，T 为周期。

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ e = \dfrac{c}{a} \quad \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2(1-e^2)} = \sqrt{ap} \\ p = a\left(1-e^2\right) \end{cases}$$

$$p = \frac{h^2}{\mu} \Rightarrow h = \sqrt{\mu p}$$

代入

所以：$T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} \Leftarrow T = \dfrac{2\pi ab}{h}$

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2}$$

由此可见，椭圆轨道的周期仅与长半轴的大小有关。也证明了开普勒第三定律：“周期的平方与椭圆轨道长半轴的立方成正比”。

$$\frac{a^3}{T^2}=K$$

当航天器在椭圆轨道上距中心引力体距离为r 时，其速度大小v ：

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

可得

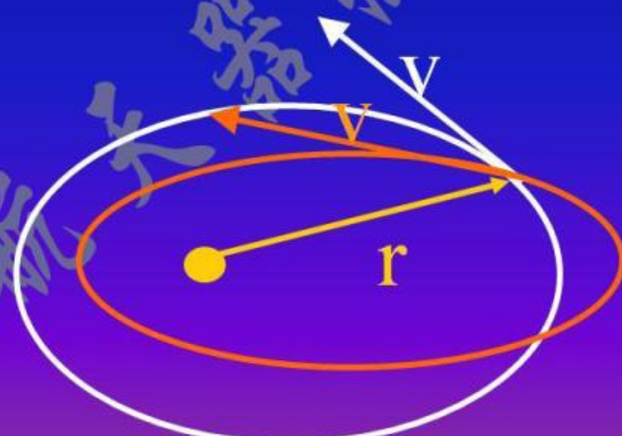
$$v = \sqrt{2\mu(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a})}$$

速度方向沿椭圆该点切线方向，并与航天器运动方向一致。

$$v=\sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right)}$$

航天器在轨道内任意一点的速度，由航天器的轨道位置唯一确定。

在空间某一点，不同的速度对应不同的轨道。



（2）圆轨道

圆是椭圆的特殊情况，所以用于椭圆轨道的全部公式，包括周期和速度的公式都能用于圆轨道。

圆轨道的长半轴a 就是半径，即 $r_{cs}=a$

$$T_{cs}=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}r_{cs}^{3/2} \qquad v_{cs}=\sqrt{\frac{\mu}{r_{cs}}}$$

3、四种轨道的基本特点

（3）抛物线轨道

虽然某些彗星的轨道近似于抛物线，但在自然界中抛物线轨道是较为罕见的。

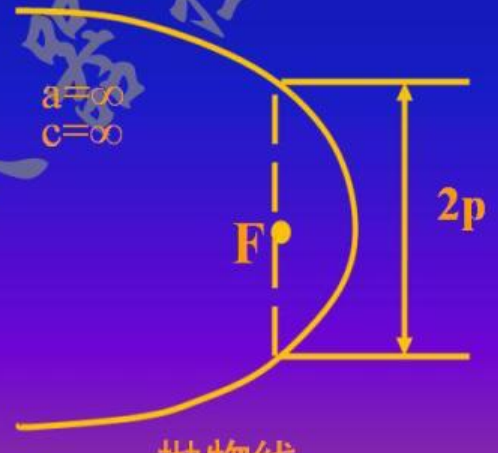
抛物线轨道引起人们的兴趣，是因为它处在闭合轨道与非闭合轨道的分界状态。

物体以抛物线轨道运行，那么它将一去不复返地飞向无穷远处。

当抛物线逐渐延伸时，其上下两支将越来越趋于平行，而且$e=1$，近拱点距离为：

$$r_p = \frac{p}{2}$$

抛物线轨道不存在远拱点，它可以看作是一个“无限长的椭圆”。



使物体飞向无穷远而不再回来。能实现这一目的的最小速度称为逃逸速度。

从理论上讲，当它与中心引力体间的距离接近无穷大时，它的速度将接近于零。

$$\varepsilon=\frac{v_{esc}^{2}}{2}-\frac{\mu}{r}=\frac{v_{\infty}^{2}}{2}-\frac{\mu}{r_{\infty}}=0 \Rightarrow v_{esc}=\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

当$r\to\infty$时，$v_{esc}\to 0$。地球表面的逃逸速度为11200m/s，而地面上空6400km处的逃逸速度仅需7900m/s。

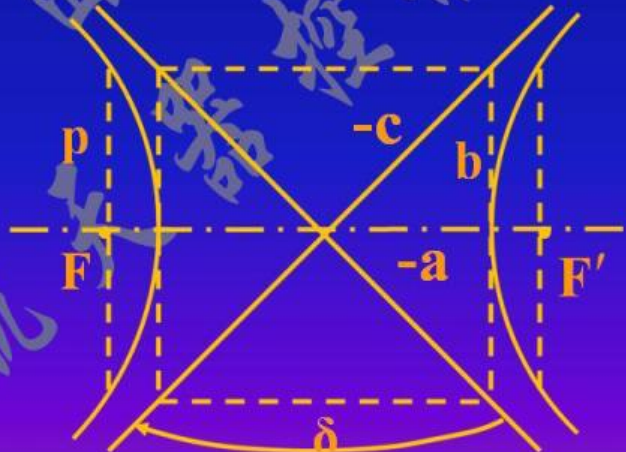
（4）双曲线轨道

撞击地球的流星和从地球上发射的星际探测器，它们相对于地球，都是按双曲线轨道飞行的。

如果要航天器在脱离了地球引力场后，还剩余一些速度，则它们必须按双曲线轨道飞行。

若把左边的焦点F看作主焦点(中心引力体质心位于此点)，那么只有左边的一支才是可能的轨道。

反之，若航天器和位于F的天体间有排斥力(例如带有同种电荷的两个粒子间的力)，则右边的一支代表了运行轨道。



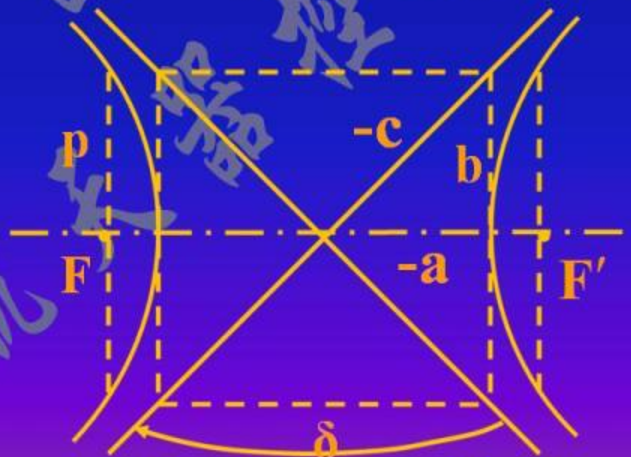
双曲线的几何特性

若两渐近线间的夹角为 δ，则它表示了航天器与行星相遇时，其轨道应拐过的角度。

拐角 δ 与双曲线的几何参数的关系为

$$\sin\frac{\delta}{2}=\frac{a}{c}=\frac{1}{e}$$

显然，双曲线的偏心率越大，拐角 δ 越小。



双曲线的几何特性

比机械能沿轨道保持不变，双曲线轨道上某一点 r_{bo} 处的速度为 v_{bo}，和无穷远处的比机械能相等，即

$$\varepsilon = \frac{{v_{bo}}^2}{2} - \frac{\mu}{r_{bo}} = \frac{{v_\infty}^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty}$$

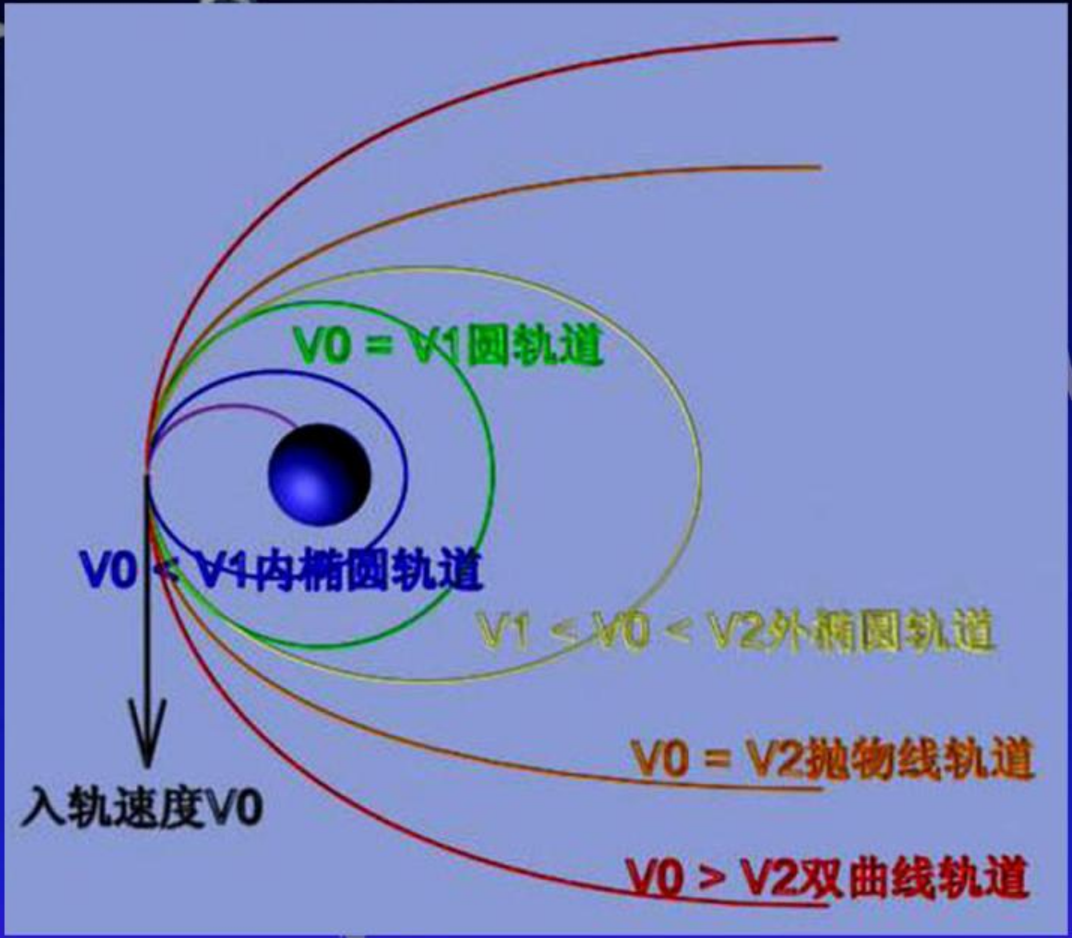
$$r_\infty = \infty$$

就可以得出

$$v_\infty^2 = {v_{bo}}^2 - \frac{2\mu}{r_{bo}} = {v_{bo}}^2 - {v_{esc}}^2$$

我们称航天器在双曲线轨道无限远处的速度为剩余速度 v_∞。

$${v_{bo}}^2 = v_\infty^2 + {v_{esc}}^2 \qquad \frac{1}{2}m{v_{bo}}^2 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 + \frac{1}{2}m{v_{esc}}^2$$



不同类型的轨道

V1第一宇宙速度　　V2第二宇宙速度