



西北工业大学  
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY



# 捷联惯导与组合导航原理

## Principles of Strapdown Inertial Navigation and Multi-Sensor Integrated Navigation Systems

主讲：陈凯、张通

电话：15309218366

E-Mail: [chenkai@nwpu.edu.cn](mailto:chenkai@nwpu.edu.cn)

飞行控制研究所



## 第二章 惯性导航数学基础

- 2.1 惯性空间的概念
- 2.2 哥式定理
- 2.3 矢量的运算
- 2.4 坐标系定义
- 2.5 坐标系转换
- 2.6 地球的描述



## 2.1 惯性空间的概念

任何物体的运动和变化都是在空间和时间中进行的。物体的运动或静止及其在空间中的位置，均指它相对另一物体而言，因此在描述物体运动时，必须选定一个或几个物体作为参照物，当物体相对参照物的位置有变化时，就说明物体有了运动。

牛顿定律揭示了在惯性空间中物体的运动和受力之间的基本关系：

(1)若物体不受力或受力的合力为零，则物体保持静止或匀速直线运动；

(2)若物体受到的合力为 $F$ ，则该物体将以加速度 $a$ 相对惯性空间运动：这里 $m$ 为物体的质量。

$$a = \frac{F}{m}$$



牛顿定律描述的运动或静止均是相对于一个特殊的参照系——惯性空间。惯性空间是牛顿定律的空间



惯性空间可理解为宇宙空间，由于宇宙是无限的，要描述相对惯性空间的运动，需要有具体的参照物才有意义。即要在宇宙空间找到不受力或受力的合力为零的物体，它们在惯性空间绝对保持静止或匀速直线运动，以它们为参照物构成的参照系就是惯性参照系。然而在宇宙中不受力的物体是不存在的，绝对准确的惯性参照系也就找不到。另一方面，在实际的工程问题中，也没有必要寻找绝对准确的惯性参照系。

在惯性导航系统中，用加速度计敏感载体相对惯性空间的加速度信息，用陀螺仪敏感载体的转动运动，加速度计和陀螺仪总会有误差，只要选择的惯性参照系的精度远高于加速度计和陀螺仪的量测精度，满足惯性导航的需求即可。



宇宙中，运动加速度较小的星体是质量巨大的恒星，由于恒星之间的距离非常遥远，万有引力对恒星运动的影响也就较小。太阳是我们比较熟悉的恒星，以太阳中心为坐标原点，以指向其他遥远恒星的直线为坐标轴，组成一坐标系，就可以构成一太阳中心惯性参照系。在牛顿时代，人们把太阳中心参照系就看作为惯性坐标系，根据当时的测量水平，牛顿定律是完全成立的。后来才认识到，太阳系还在绕银河系中心运动，只不过运动的角速度极小。银河系本身也处于不断的运动之中，因为银河系之外，还有许多像银河系这样的星系(统称为河外星系)，银河系和河外星系之间也有相互作用力。太阳中心惯性坐标系是一近似的惯性参照系，近似在于忽略了太阳本身的运动加速度。为衡量太阳中心惯性坐标系的精度，给出太阳系绕银河系中心的运动参数如下：





太阳至银河系中心的距离： **$2.2 \times 10^{17} \text{ km}$** ;

太阳绕银河系中心的旋转周期： **$190 \times 10^6$  年**;

太阳的运动速度： **$233 \text{ km/s}$** ;

太阳绕银河系中心运动的旋转角速度： **$0.001'' / \text{年}$** ;

太阳绕银河系中心运动的向心加速度： **$2.4 \times 10^{-11} \text{ g}$** ( **$\text{g}$** 为地球上的重力加速度)。

由此可见，太阳绕银河系中心运动的旋转角速度和向心加速度是非常小的，远在目前惯性导航系统中使用的惯性元件——陀螺仪和加速度计所能测量的最小角速度和加速度的范围之外。因此，分析惯性导航系统时，使用太阳中心惯性坐标系具有足够的精度。



## 2.2 哥式定理



### 转动引起的牵连速度

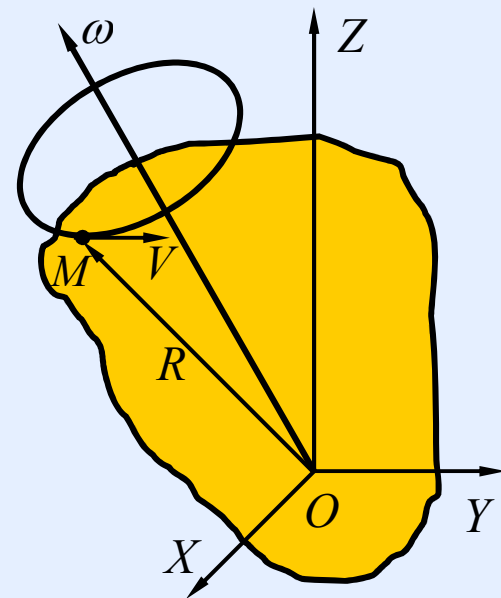
假设某刚体绕着固定点  $O$  以角速度  $\omega$  转动， $M$  是刚体内的一点（相对刚体固定）

$M$  的牵连(transport) 速度为:

$$V = \omega \times R = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (\text{布桑公式})$$

$$= (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k}$$

坐标系可以任意选取



如果点  $M$  相对刚体移动呢?





## 速度合成定理

假设一个动坐标系和刚体固联

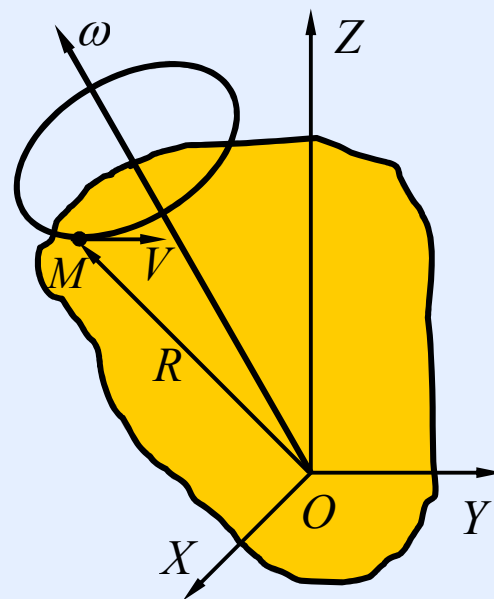
当动坐标系绕着固定点转动, 并且一个质点  $M$  相对动坐标系作相对运动, 则  $M$  点的绝对速度

$$V = \frac{dR}{dt} = \frac{\tilde{d}R}{dt} + \omega \times R$$

绝对  
速度

相对  
速度

牵连  
速度





## \*推广：哥氏定律

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\tilde{d}R}{dt} + \omega \times R$$

哥氏定律 (**Coriolis Theorem**): 对任何和运动有关的矢量  $B$  :

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\tilde{d}B}{dt} + \omega \times B$$

绝对变化  
率

相对变化  
率

牵连变化  
率



## 哥氏定律的分量表示

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\tilde{d}B}{dt} + \omega \times B$$

如果  $B$  和  $\omega$  都是分解在动坐标系  $oxyz$  中

$$B = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\omega = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

则

$$\frac{\tilde{d}B}{dt} = \frac{dB_x}{dt} \vec{i} + \frac{dB_y}{dt} \vec{j} + \frac{dB_z}{dt} \vec{k} \quad \omega \times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



## 加速度合成定理

速度:

$$V = \frac{\tilde{d}R}{dt} + \omega \times R$$

加速度:

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{\tilde{d}V}{dt} + \omega \times V = \frac{\tilde{d}}{dt} \left( \frac{\tilde{d}R}{dt} + \omega \times R \right) + \omega \times \left( \frac{\tilde{d}R}{dt} + \omega \times R \right)$$

$$= \frac{\tilde{d}^2 R}{dt^2} + \frac{\tilde{d}\omega}{dt} \times R + 2\omega \times \frac{\tilde{d}R}{dt} + \omega \times (\omega \times R)$$

$A_r$

相对

$A_{te}$

牵连切向

$A_k$

苛氏

$A_{ne}$

牵连法向



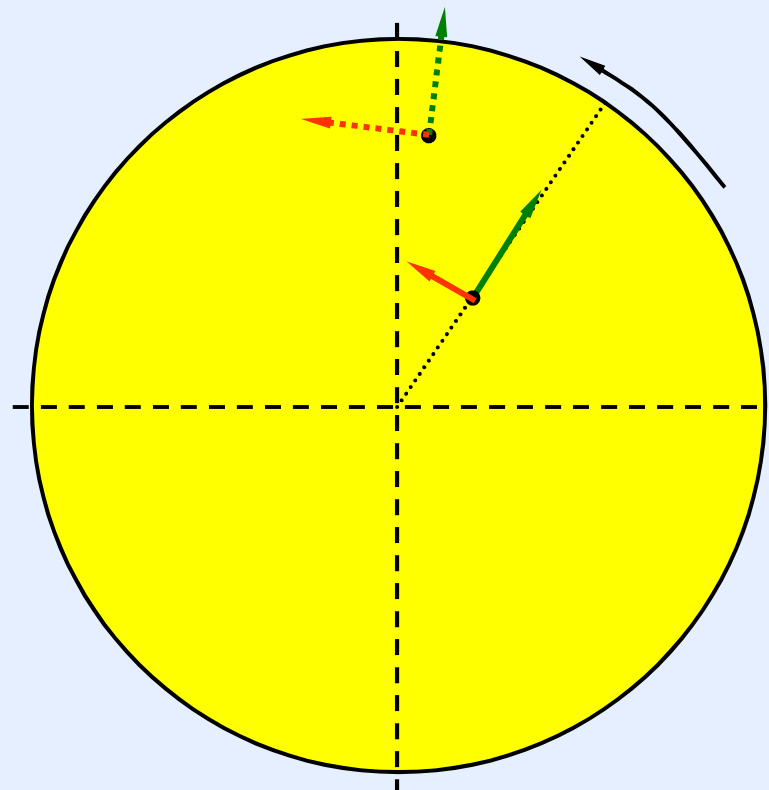
## \*哥氏加速度: 示例

$$A_k = 2\omega \times \frac{\tilde{d}R}{dt}$$

- ☐ 相对运动 -- 沿径向向外
- ☐ 牵连运动 -- 圆盘的转动
- ☐ 上述两种运动的相互影响

又可写为

$$A_k = 2\omega \times V_r$$



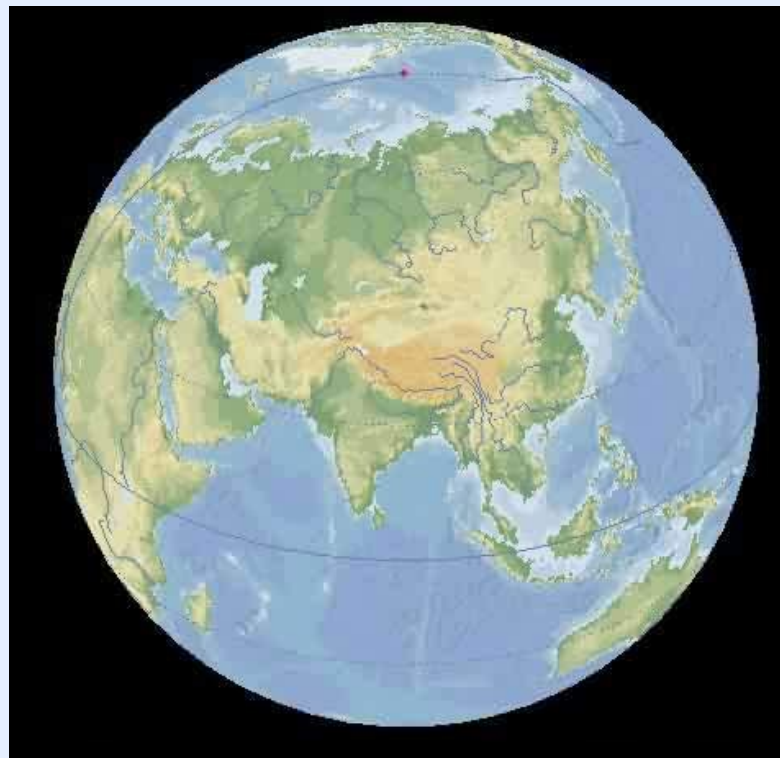


## 用哥氏加速度解释: 河岸冲刷

现象: 南北方向的河流两岸冲刷的程度不一样.

对北半球向北的河流, 东岸被冲刷得更厉害.

该现象可以通过哥氏 (Coriolis) 加速度得到解释.







## 用哥氏加速度解释: 河岸冲刷

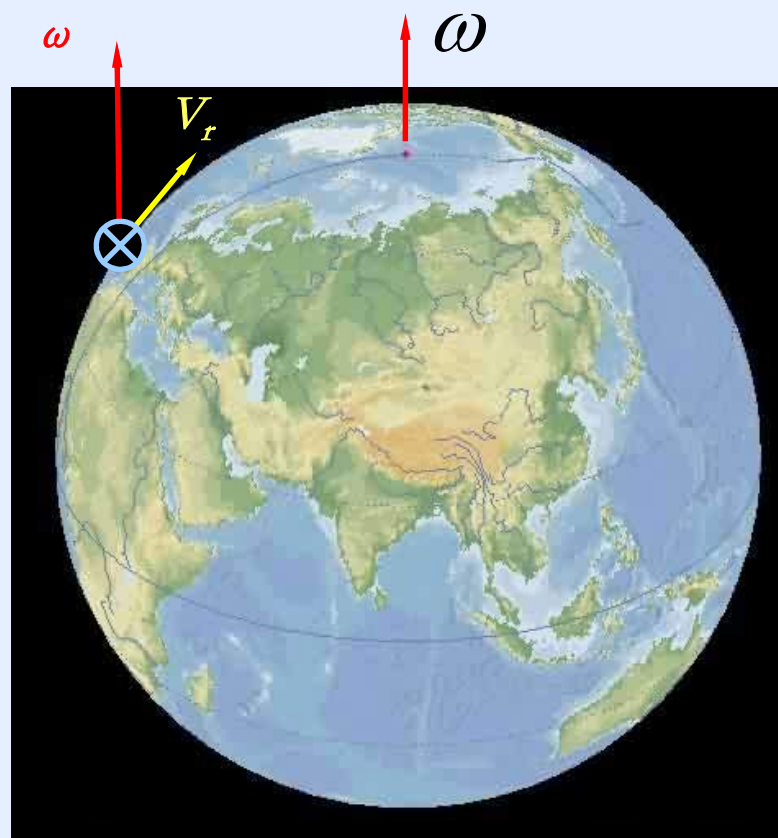
河水的哥氏加速度:

$$A_k = 2\omega \times V_r$$

哥氏加速度向西, 对应的作用力由东岸提供。

河水的反作用力作用在东岸上

因此东岸被冲刷得更厉害。





## 2.3 矢量运算



- 1 矢量表示
- 2 反对称矩阵
- 3 反对称矩阵的运算



# 1 矢量表示

矢量写成粗体并带有上标的小写字母，上标表示坐标系。矢量的分量需要带有上标但不使用粗体。比如，用一个三维的矢量 $\mathbf{r}$ 表示任意一个坐标系 $k$ 可以表示为：

$$\mathbf{r}^k = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{pmatrix}$$



## 2 反对称矩阵

当需要将两个矢量的交叉积变成更简单的矩阵乘法时，使用反对称矩阵是很有必要的。

$$\omega_{mk}^p = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega_{mk}^p = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$



### 3 反对称矩阵的运算

一个矢量可以表示成相对应的反对称矩阵形式，所以矩阵的运算法则可以运用到大多数矢量运算中。假如 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 是三维矢量，对应的反对称矩阵为 $\mathbf{A}$ ， $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 。则以下运算关系成立：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{B}^T \mathbf{a} = -\mathbf{B}\mathbf{a}$$

$$[[\mathbf{A}\mathbf{b}]] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a}^T \mathbf{B}\mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{c}$$



## 2.4 坐标系介绍



### 1、地心惯性坐标系

### Earth-Centered Inertial Frame

空间中静止的或者以恒定速度运动的坐标系定义为惯性系。所有的惯性传感器产生测量量都沿着仪器的惯性轴分解到惯性系中。此外，当卫星在轨道上围绕地球转动时，也需要一个惯性系来计算卫星的位置和速度，为此近地环境选择的坐标系为地心惯性坐标系（**ECI**）。该坐标系的定义为：

- 1) 原点为地球的质心。
- 2) **z**轴沿着地球自转轴。
- 3) **x**轴在赤道平面上并指向春分点。
- 4) **y**轴满足右手定则。





## 2.4 坐标系介绍



### 1、地心惯性坐标系

#### **Earth-Centered Inertial Frame**

- The origin is at the center of mass of the Earth.
- The z-axis is along axis of the Earth's rotation through the conventional terrestrial pole (CTP).
- The x-axis is in the equatorial plane pointing towards the vernal equinox.
- The y-axis completes a right-handed system.

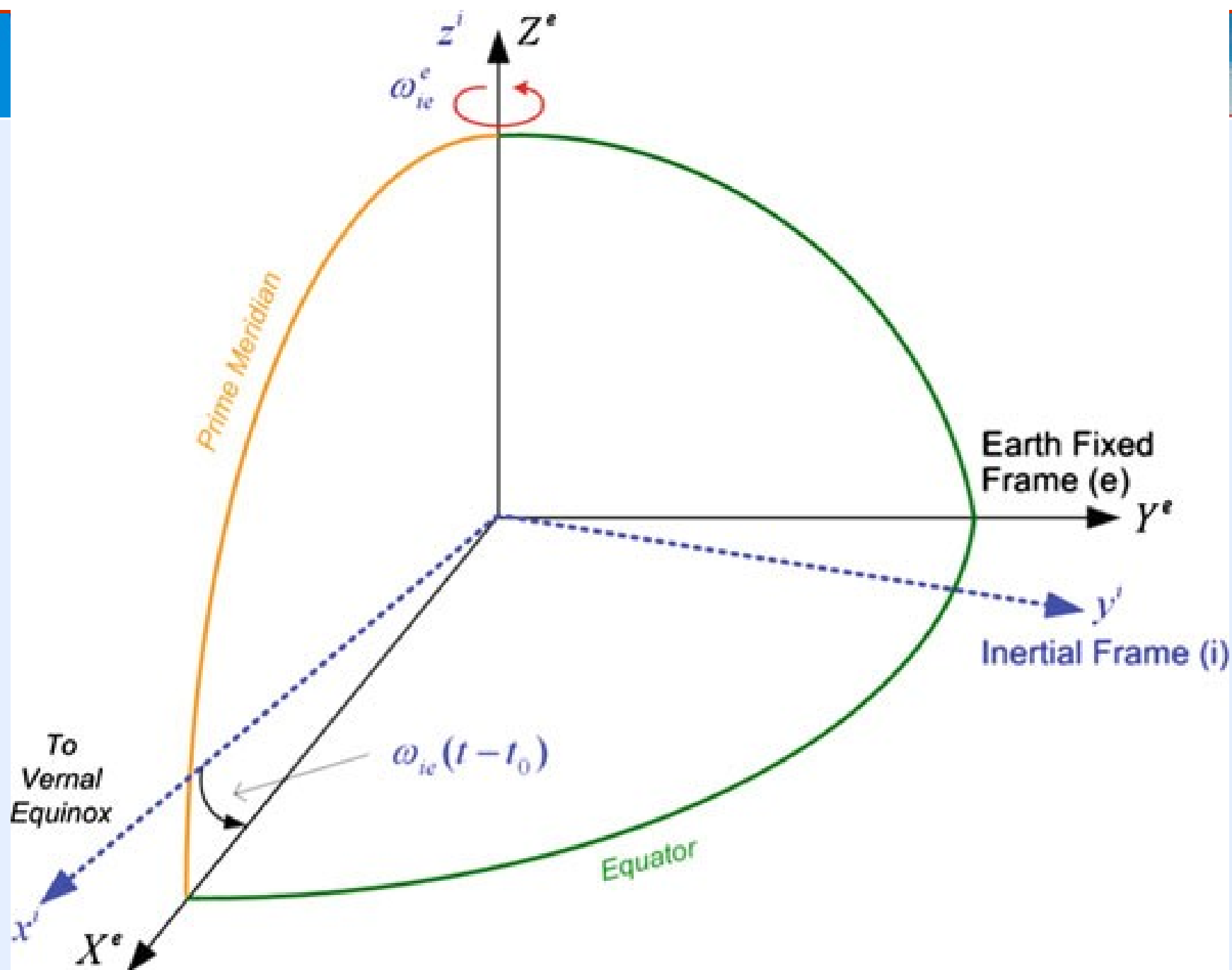


## 2、地心地固坐标系（ECEF）

该坐标系与地心惯性坐标系相似，定义为原点为地球质心。

- 1) **z**轴沿地球自转轴。
- 2) **x**轴通过赤道面和本初子午线的交点。
- 3) **y**轴满足赤道平面上的右手定则。

- The origin is at the center of mass of the Earth.
- The z-axis is through the CTP.
- The x-axis passes through the intersection of the equatorial plane and the reference meridian (i.e. the Greenwich meridian).
- The y-axis completes the right-hand coordinate system in the equatorial plane.



地心地固坐标系和地心惯性坐标系



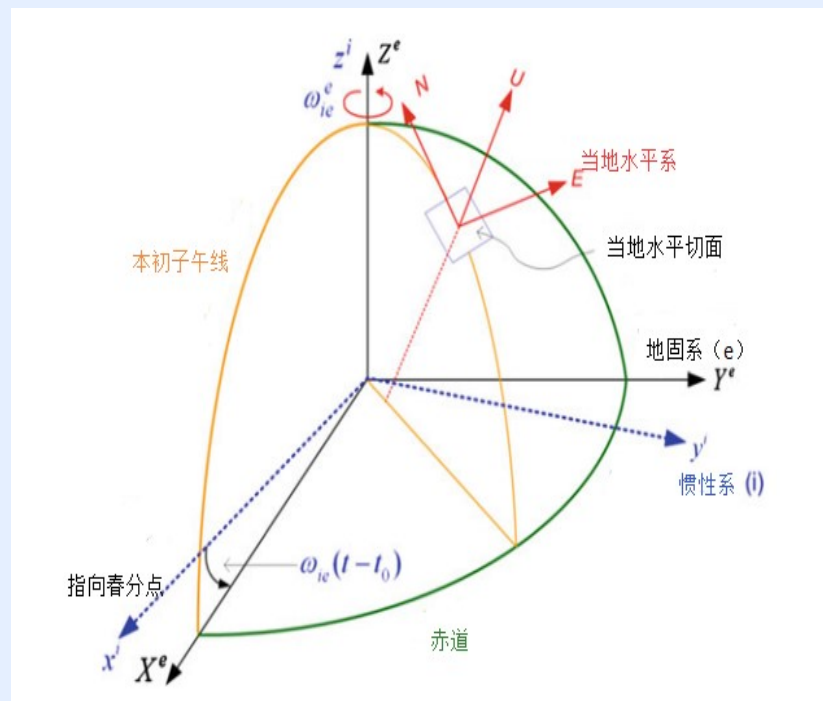
### 3、当地水平坐标系

当地水平坐标系（LLF）用于表示当交通工具位于或接近地球表面时的姿态和速度，也被称为当地测量坐标系或导航坐标系。常用的当地水平坐标系定义如下  
原点和惯性器件框架中心重合。

- 1) **x**轴指向东。
- 2) **y**轴指向北。
- 3) **z**轴满足右手定则指向上。

此坐标系也被称为东北天坐标系（**east, north and Up, ENU**），还有一种常用的当地水平坐标系为**z**轴满足左手定则指向下（地）即北东地坐标系（**NED**）。本书中使用东北天坐标系，简称**I系**。

### Local-Level Frame

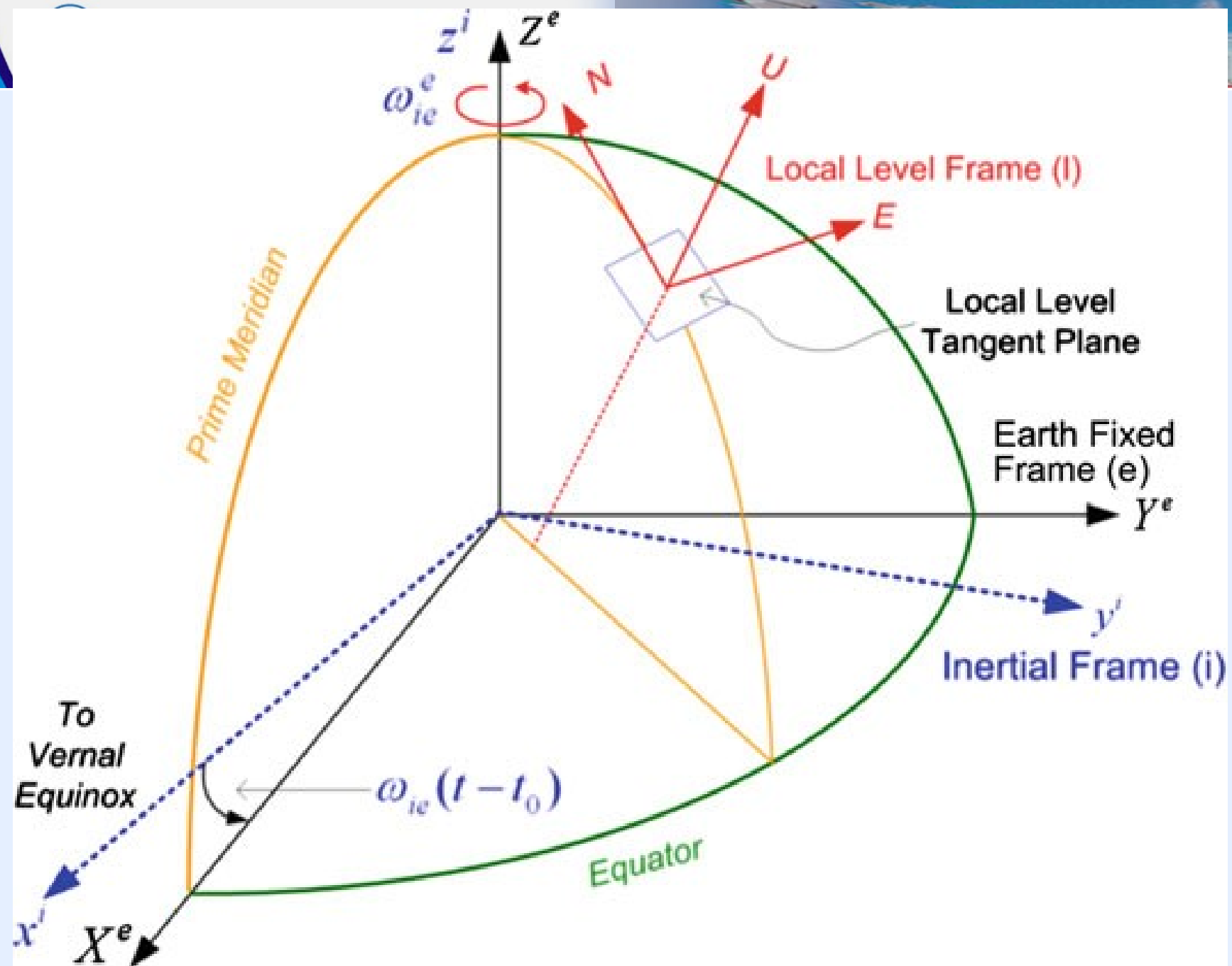




### 3、 Local-Level Frame

A local-level frame (LLF) serves to represent a vehicle's attitude and velocity when on or near the surface of the Earth. This frame is also known as the local geodetic or navigation frame.

- The origin coincides with the center of the sensor frame (origin of inertial sensor triad).
- The y-axis points to true north.
- The x-axis points to east.
- The z-axis completes the right-handed coordinate systems by pointing up,





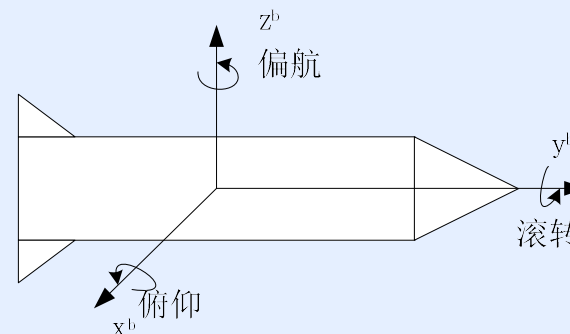


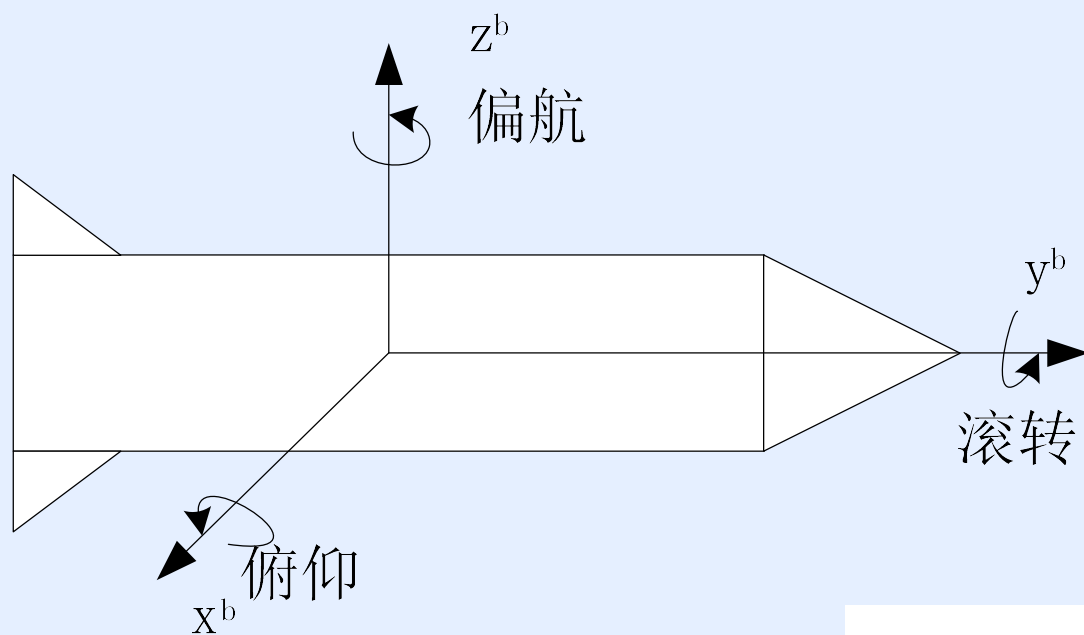
## 4、载体坐标系

在大多数应用中，加速度传感器的敏感轴与其所在移动平台的轴重合。这些轴被称为载体坐标轴，

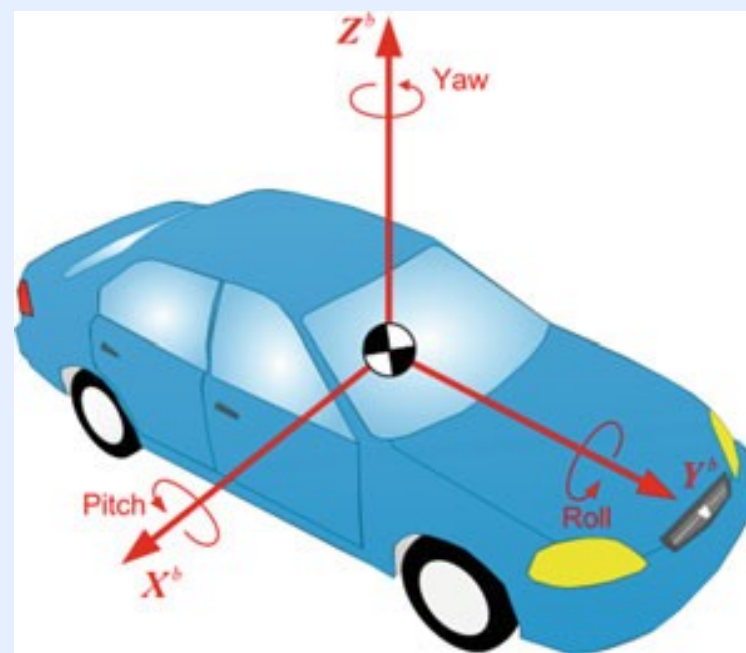
该坐标系的定义为：

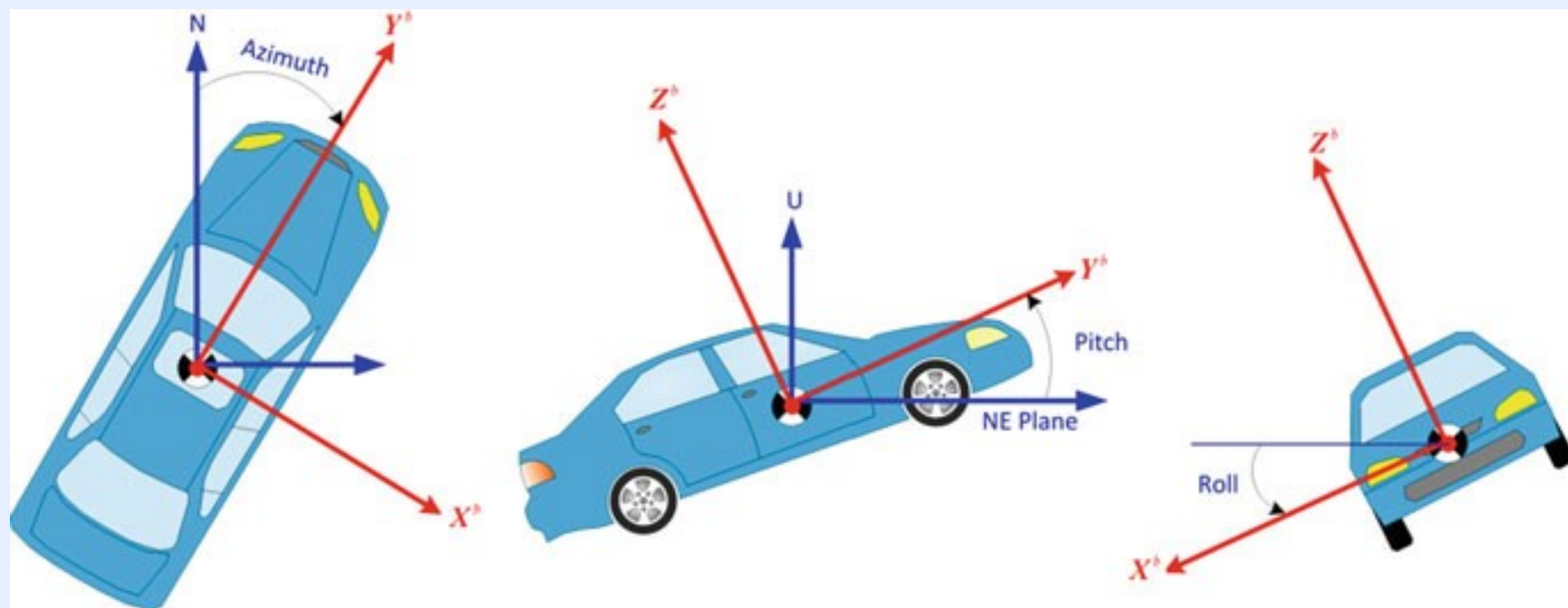
- 原点与飞行器重心重合。
- $x$ 轴沿飞行器横轴指向右。由于俯仰角是通过 $x$ 轴使用右手定则确定的，故此轴也称为俯仰轴。
- $y$ 轴沿飞行器纵轴指向正前方。由于滚转角是通过 $y$ 轴使用右手定则确定的，故此轴也被称为滚转轴。
- $z$ 轴垂直于 $x$ 轴和 $y$ 轴并构成右手系指向上，也称为偏航轴。
- 本书中载体坐标系简称**b系**。

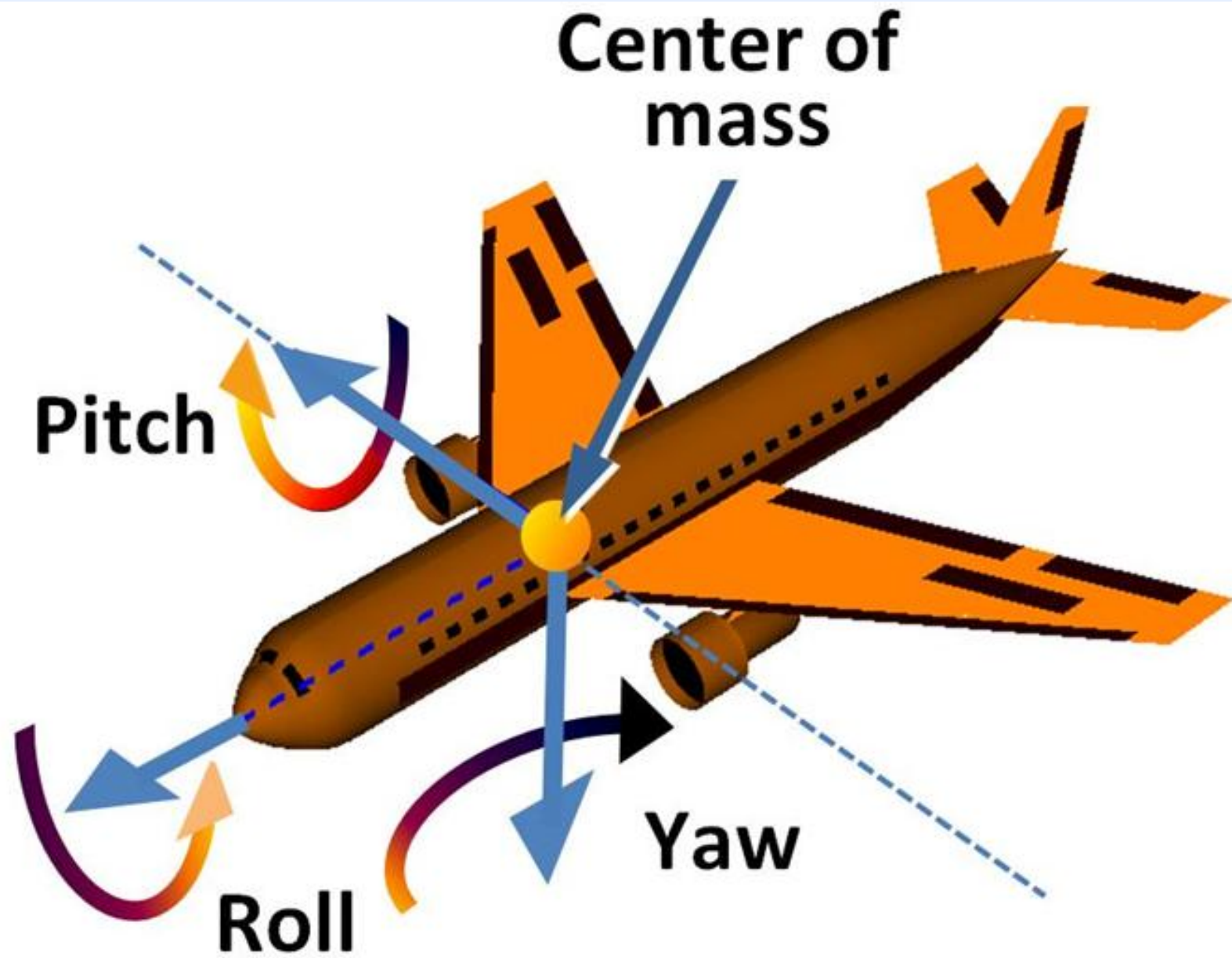


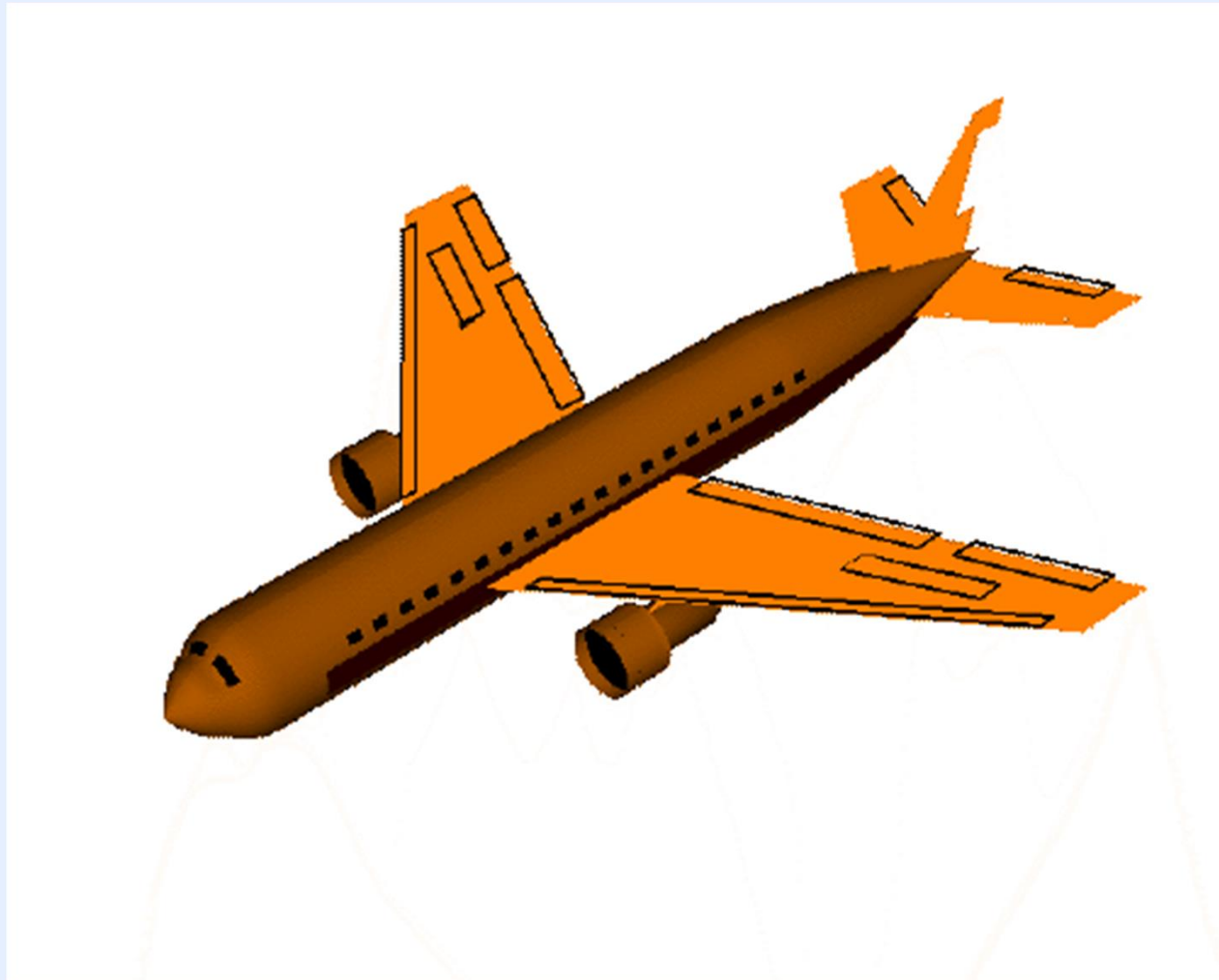


## 载体体坐标系

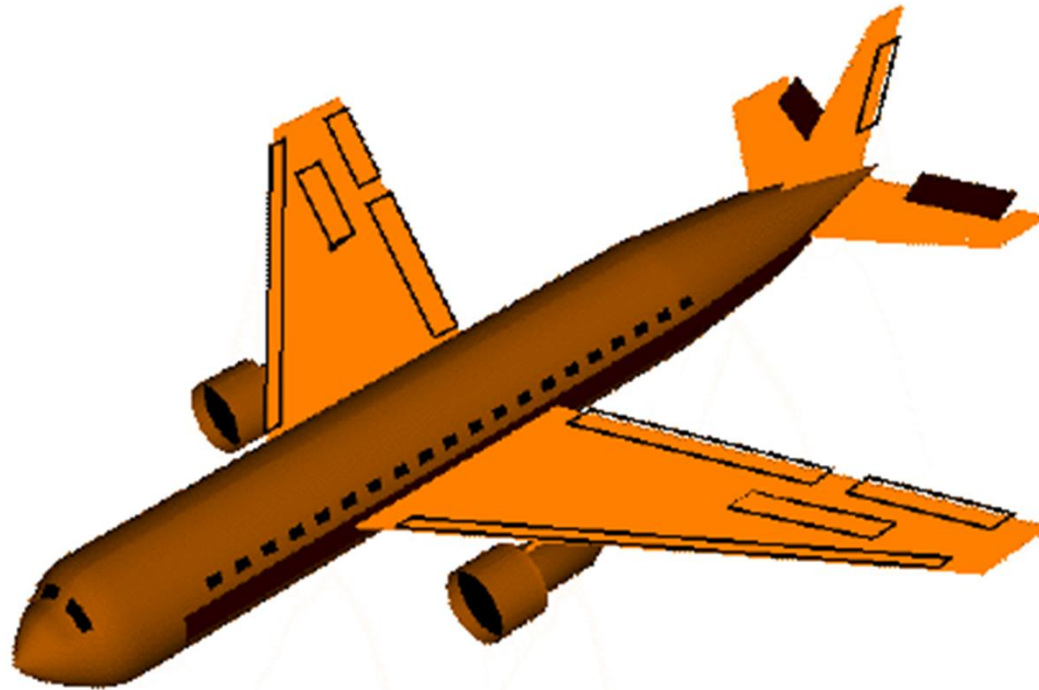






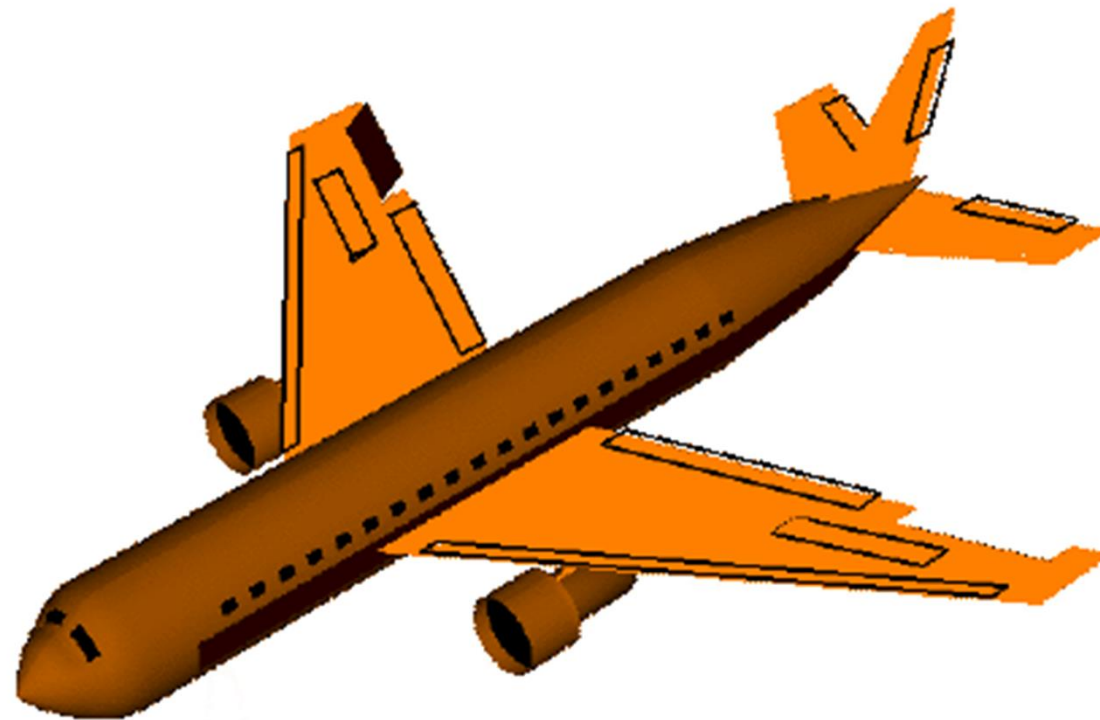


**Azimuth (or yaw, head)**



**pitch**





**roll**



## 5、导航坐标系

导航坐标系用  $ox_n y_n z_n$  表示，它是惯导系统在求解导航参数时所采用的坐标系，  
本文采用地理坐标系作为导航坐标系。

## 6、理想平台坐标系

在惯性导航中规定的导航坐标系，一般在惯导系统中采用当地地理坐标系即东北天（E-N-U）作为惯导的理想平台坐标系。



## 7、实际平台坐标系

理想陀螺稳定平台模拟理想导航坐标系，但由于系统中存在各种误差，稳定平台模拟的导航坐标系不可能与理想导航坐标系完全重合，为了区别平台模拟的导航坐标系和理想平台坐标系，将陀螺平台实际建立的坐标系称为平台坐标系。在平台惯导中，平台系与平台固连，是平台的实际指向坐标系，模拟理想导航坐标系。在捷联惯导系统中平台是“数学平台”，通过导航计算机中的姿态矩阵实现。

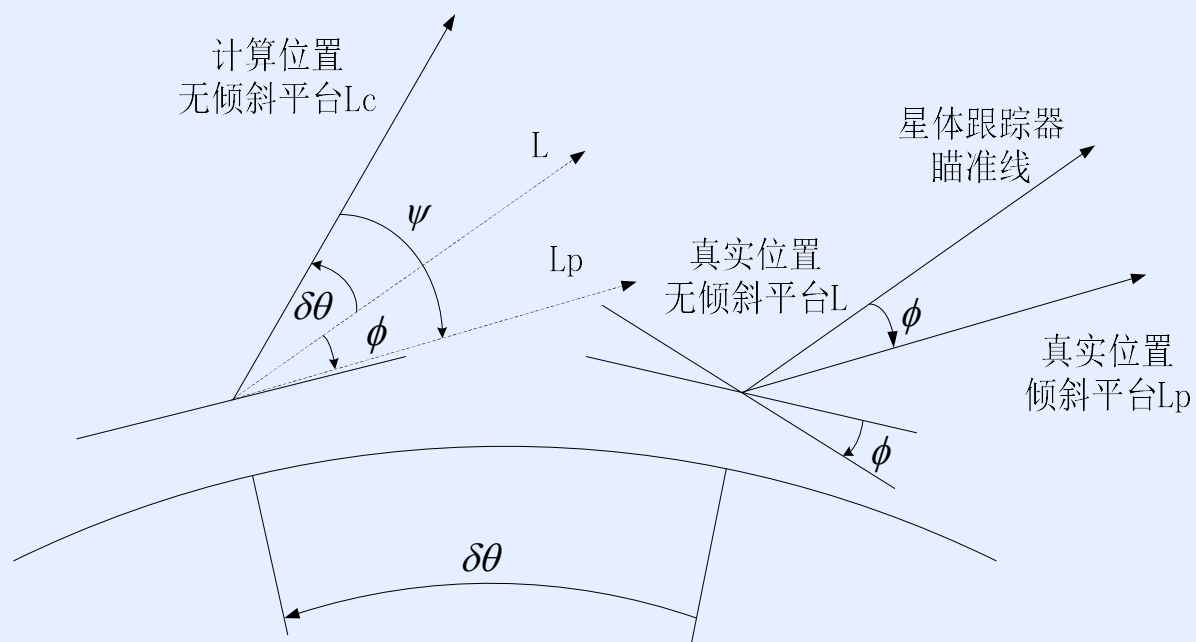


## 8、计算平台坐标系

由导航计算机输出的载体计算位置所确定的导航坐标系。由于系统误差的存在，计算载体位置与实际载体位置不一致，通常将计算位置为坐标原点规定的当地导航坐标系为计算坐标系。如在指北系统中，由计算机得的惯导输出经纬度  $L_c$  和  $\lambda_c$  确定的地理坐标系为计算坐标系。



## c系、p系和T系之间误差的说明



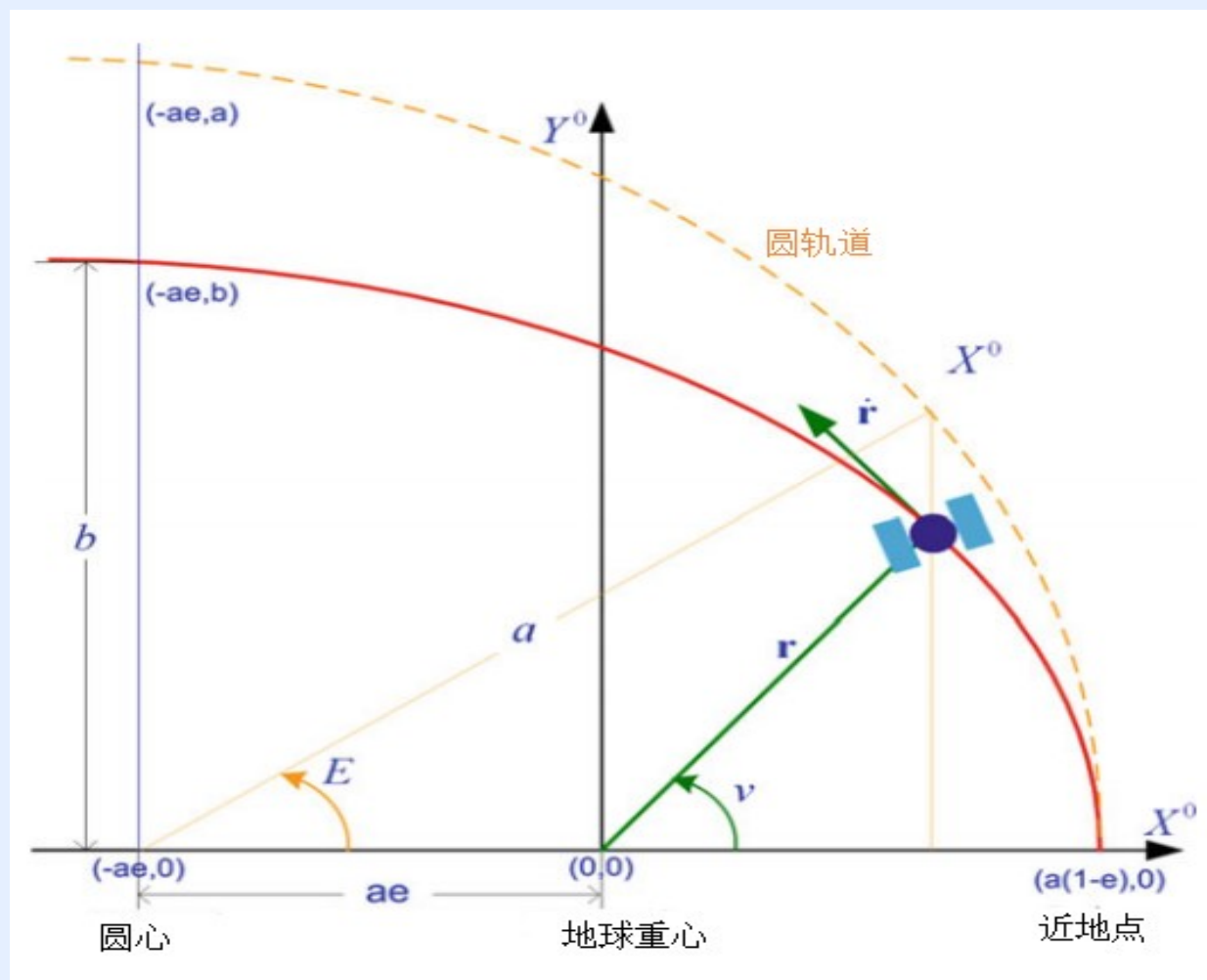
由上图可以看： $\Phi = \Psi + \delta\Theta$ （ $\Phi$ 角反映了惯导平台坐标系相对于理想坐标系的偏差角，称为平台偏角。 $\delta\Theta$ 是理想地理位置与计算地理位置之间的误差，称为位置误差角）。



## 9、轨道坐标系

轨道坐标系利用开普勒原理定位惯性空间中的卫星。定义如下：

- 1) 原点位于与地球质心重合的椭圆焦点上。
- 2)  $y$ 轴指向降交点，平行于椭圆轨道的短轴。
- 3)  $x$ 轴指向近地点并沿着卫星椭圆轨道的长轴。
- 4)  $z$ 轴垂直于轨道平面。



卫星的轨道坐标系



## 2.5 坐标系转换



在惯性导航中，我们更关心的是两组坐标系之间的角位置关系，这是因为：

**(1)**惯性导航中使用的许多坐标系，如地理坐标系、载体坐标系、平台坐标系、计算坐标系等，它们的原点是相同的，不存在原点位移问题；

**(2)**与上述坐标系原点不同的常用坐标系，如地球坐标系，虽然原点不同，但原点的位移也可通过坐标系之间的角位置关系反映出来，如地球坐标系与地理坐标系之间的角度关系可由角度 $\lambda$ 、 $\varphi$ 决定， $\lambda$ 、 $\varphi$ 同时又决定了地理坐标系原点在地球坐标系中的位置，

所以弄清了两坐标系的角度关系，就知道了载体位置( $\lambda$ 、 $\varphi$ )。

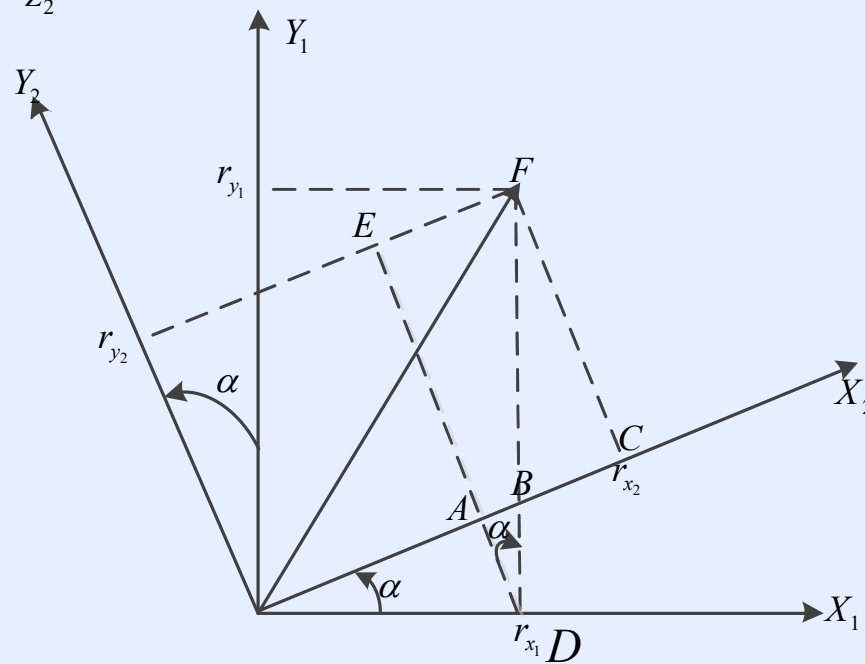




## 方向余弦矩阵

设坐标系  $O-X_1Y_1Z_1$  绕  $OZ_1$  轴旋转  $\alpha$  角后得到坐标系  $O-X_2Y_2Z_2$ ，空间矢量  $r$  在  $O-X_1Y_1Z_1$  (简称坐标系 1) 内的投影为  $[r_{x_1} \ r_{y_1} \ r_{z_1}]^T$ ，在  $O-X_2Y_2Z_2$  (简称坐标系 2) 内的投影为  $[r_{x_2} \ r_{y_2} \ r_{z_2}]^T$ ，要求推导出两组坐标值间的关系。由于旋转轴绕  $OZ_1$  轴进行，所以  $Z$  轴坐标未变，即有  $r_{z_1} = r_{z_2}$ ，

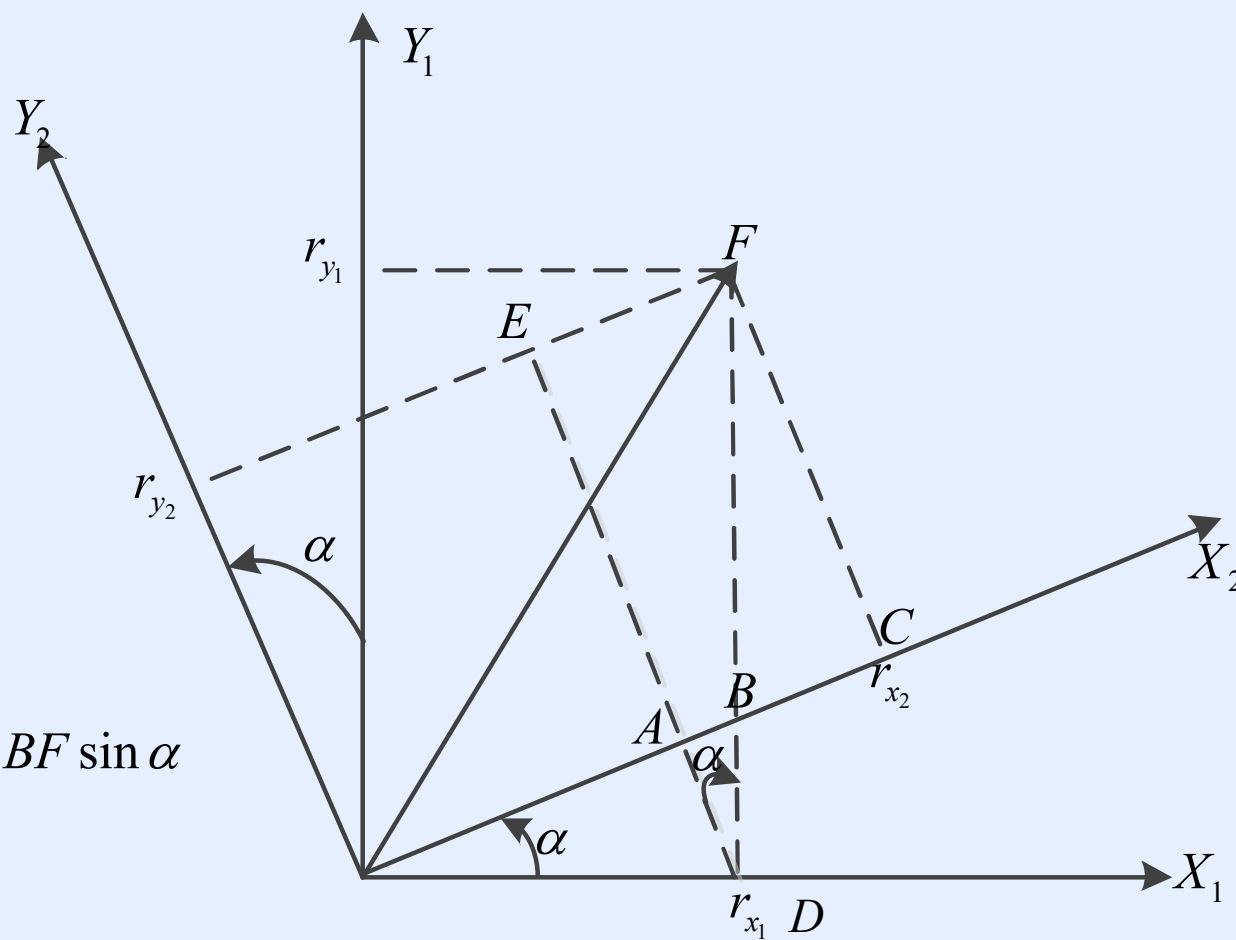
$$\begin{aligned} r_{x_2} &= OA + AB + BC \\ &= OD \cos \alpha + BD \sin \alpha + BF \sin \alpha \\ &= r_{x_1} \cos \alpha + r_{y_1} \sin \alpha \\ r_{y_2} &= DE - AD \\ &= DF \cos \alpha - OD \sin \alpha \\ &= r_{y_1} \cos \alpha - r_{x_1} \sin \alpha \\ r_{z_2} &= r_{z_1} \end{aligned}$$





## 方向余弦矩阵

$$\begin{aligned}r_{X_2} &= OA + AB + BC \\&= OD \cos \alpha + BD \sin \alpha + BF \sin \alpha \\&= r_{X_1} \cos \alpha + r_{Y_1} \sin \alpha \\r_{Y_2} &= DE - AD \\&= DF \cos \alpha - OD \sin \alpha \\&= r_{Y_1} \cos \alpha - r_{X_1} \sin \alpha \\r_{Z_2} &= r_{Z_1}\end{aligned}$$





$$\begin{bmatrix} r_{X_2} \\ r_{Y_2} \\ r_{Z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{X_1} \\ r_{Y_1} \\ r_{Z_1} \end{bmatrix}$$

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow X_2 \text{轴上的投影} \\ \leftarrow Y_2 \text{轴上的投影} \\ \leftarrow Z_2 \text{轴上的投影} \end{array}$$

上述变换关系分析中，坐标系2是经坐标系1仅绕轴旋转角后获得的，为便于叙述，称仅绕一根轴的旋转为基本旋转。两坐标系间任何复杂的角位置关系都可以看作有限次基本旋转的复合，变换矩阵等于基本旋转确定的变换矩阵的连乘，连乘顺序依基本旋转的先后次序由右向左排列。



% 绕z轴旋转

```
function M = Mz(a)
```

```
M = [ cos(a)  sin(a)  0;  
      -sin(a)  cos(a)  0;  
        0      0      1  ];
```

Mz\_0 =

1.00	0	0
0	1.00	0
0	0	1.00

Mz\_90 =

0.00	1.00	0
-1.00	0.00	0
0	0	1.00



% 绕x轴旋转

```
function M = Mx(a)
```

```
M = [ 1      0      0 ;  
      0  cos(a) sin(a);  
      0 -sin(a) cos(a) ];
```

Mx\_0 =

1.00	0	0
0	1.00	0
0	0	1.00

Mx\_90 =

1.00	0	0
0	0.00	1.00
0	-1.00	0.00

% 绕y轴旋转

```
function M = My(a)
```

```
M = [ cos(a)  0  -sin(a);  
      0       1   0    ;  
      sin(a)  0   cos(a)  ];
```

My\_0 =

1.00	0	0
0	1.00	0
0	0	1.00

My\_90 =

0.00	0	-1.00
0	1.00	0
1.00	0	0.00



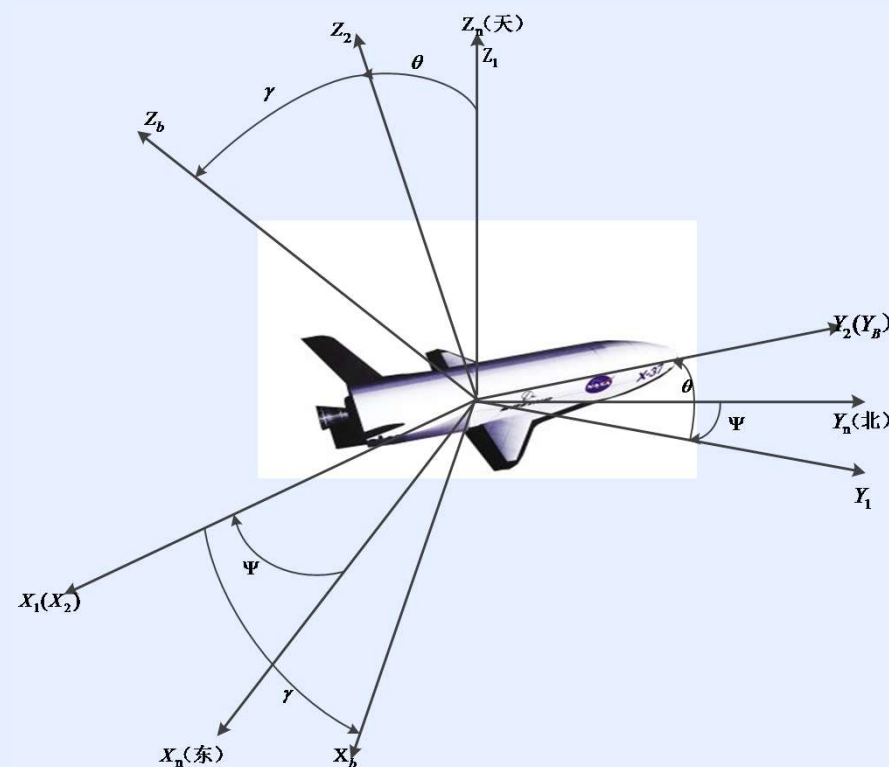
运载体的空间姿态可看作依次绕航向轴、俯仰轴、横滚轴作基本旋转后的复合结果

$$OX_n Y_n Z_n \xrightarrow[\text{旋转 } \psi]{\text{绕 } -Z_n \text{ 轴}} O - X_1 Y_1 Z_1 \xrightarrow[\text{旋转 } \theta]{\text{绕 } X_1 \text{ 轴}} O - X_2 Y_2 Z_2 \xrightarrow[\text{旋转 } \gamma]{\text{绕 } Y_2 \text{ 轴}} O - X_b Y_b Z_b$$

$$C_n^1 = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & -\cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$C_2^b = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix}$$





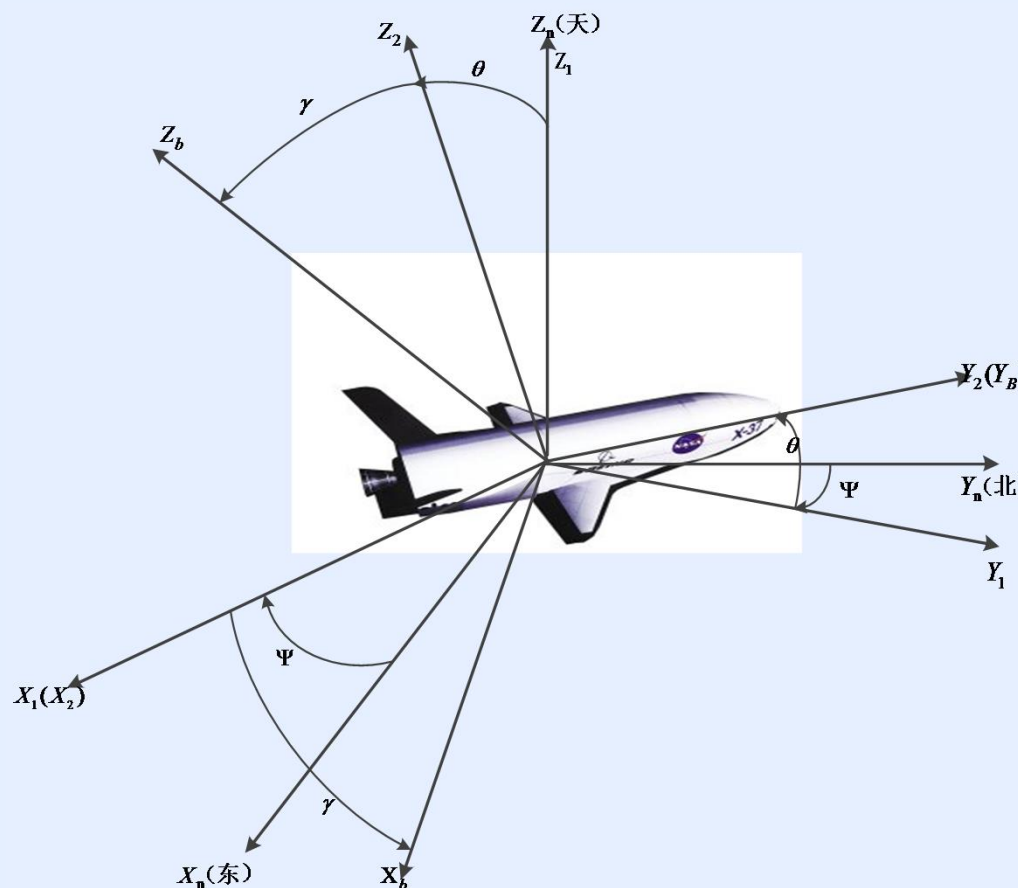
运载体的空间姿态可看作依次绕航向轴、俯仰轴、横滚轴作基本旋转后的复合结果

$$OX_nY_nZ_n \xrightarrow[\text{旋转 } \psi]{\text{绕 } -Z_n \text{ 轴}} O-X_1Y_1Z_1 \xrightarrow[\text{旋转 } \theta]{\text{绕 } X_1 \text{ 轴}} O-X_2Y_2Z_2 \xrightarrow[\text{旋转 } \gamma]{\text{绕 } Y_2 \text{ 轴}} O-X_bY_bZ_b$$

$$C_n^1 = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & -\cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Azimuth (or yaw, head)







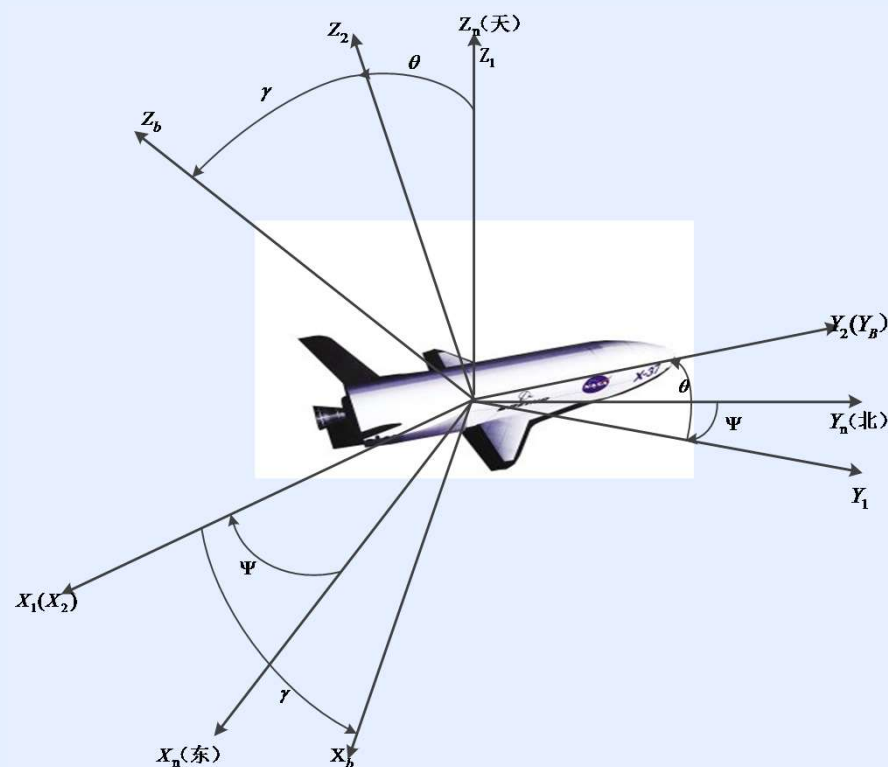
运载体的空间姿态可看作依次绕航向轴、俯仰轴、横滚轴作基本旋转后的复合结果

$$OX_nY_nZ_n \xrightarrow[\text{旋转 } \psi]{\text{绕 } -Z_n \text{ 轴}} O-X_1Y_1Z_1 \xrightarrow[\text{旋转 } \theta]{\text{绕 } X_1 \text{ 轴}} O-X_2Y_2Z_2 \xrightarrow[\text{旋转 } \gamma]{\text{绕 } Y_2 \text{ 轴}} O-X_bY_bZ_b$$

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



pitch

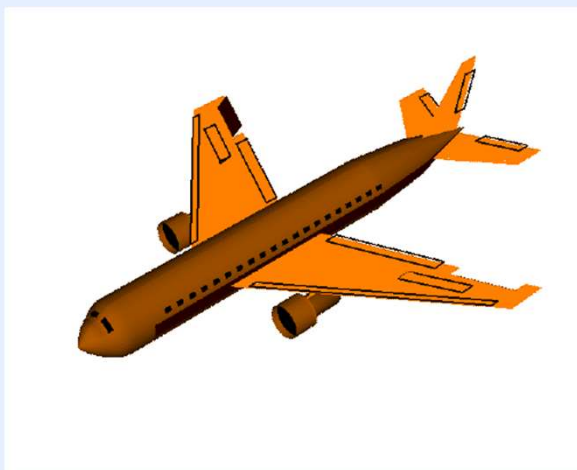




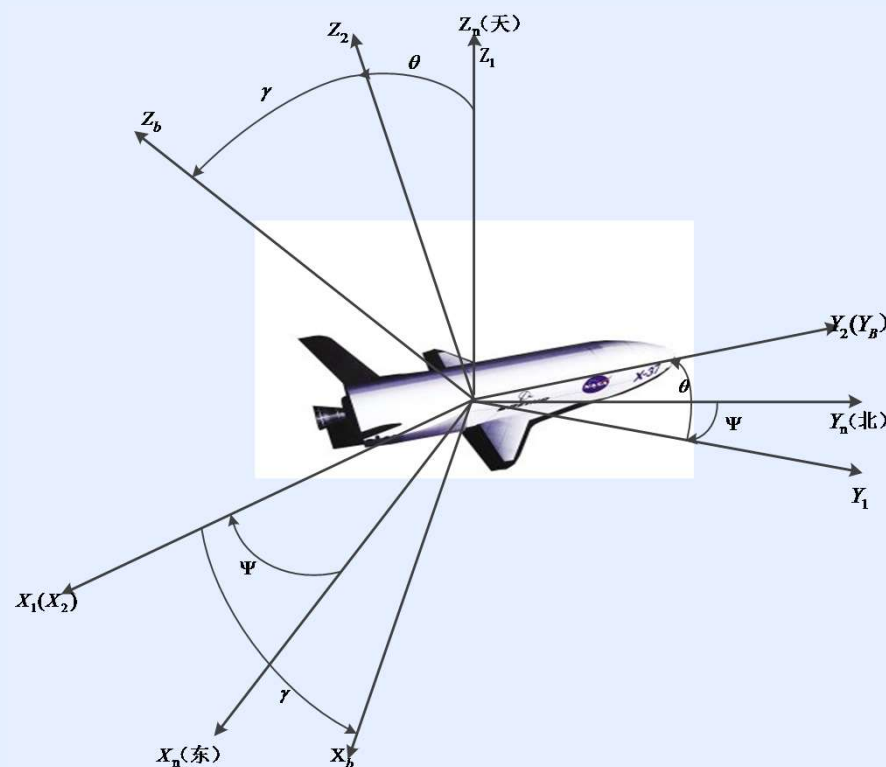
运载体的空间姿态可看作依次绕航向轴、俯仰轴、横滚轴作基本旋转后的复合结果

$$OX_nY_nZ_n \xrightarrow[\text{旋转}\psi]{\text{绕}-Z_n\text{轴}} O-X_1Y_1Z_1 \xrightarrow[\text{旋转}\theta]{\text{绕}X_1\text{轴}} O-X_2Y_2Z_2 \xrightarrow[\text{旋转}\gamma]{\text{绕}Y_2\text{轴}} O-X_bY_bZ_b$$

$$C_2^b = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix}$$



**roll**





$$\begin{aligned} C_n^b &= C_2^b C_1^2 C_n^1 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \Psi + \sin \gamma \sin \Psi \sin \theta & -\cos \gamma \sin \Psi + \sin \gamma \cos \Psi \sin \theta & -\sin \gamma \cos \theta \\ \sin \Psi \cos \theta & \cos \Psi \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \Psi - \cos \gamma \sin \Psi \sin \theta & -\sin \gamma \sin \Psi - \cos \gamma \cos \Psi \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中， $C_n^b$  与旋转次序有关，即当旋转角  $\Psi$ 、 $\theta$ 、 $\gamma$  不都为小角时，对应于不同的旋转次序，坐标系  $b$  的最终空间位置是不同的，这就是常说的有限转动的不可交换性。但当  $\Psi$ 、 $\theta$ 、 $\gamma$  都为小角时，忽略小角间的高阶小量：

$$C_n^b = \begin{bmatrix} 1 & -\psi & -\gamma \\ \Psi & 1 & \theta \\ \gamma & -\theta & 1 \end{bmatrix}$$



$$C_n^b = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \Psi + \sin \gamma \sin \Psi \sin \theta & -\cos \gamma \sin \Psi + \sin \gamma \cos \psi \sin \theta & -\sin \gamma \cos \theta \\ \sin \Psi \cos \theta & \cos \Psi \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \Psi - \cos \gamma \sin \Psi \sin \theta & -\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \cos \Psi \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix}$$

Cn\_b =

$$\begin{bmatrix} c(gma)*c(psi)+s(gma)*s(sta)*s(psi), & -c(gma)*s(psi)+s(gma)*s(sta)*c(psi), & -s(gma)*c(sta) \\ c(sta)*s(psi), & c(sta)*c(psi), & s(sta) \\ s(gma)*c(psi)-c(gma)*s(sta)*s(psi), & -s(gma)*s(psi)-c(gma)*s(sta)*c(psi), & c(gma)*c(sta) \end{bmatrix}$$

c = cos  
s= sin

MATLAB脚本语言

```
syms psi  
syms sta  
syms gma
```

Cn\_b = My(gma)\*Mx(sta)\*Mz(-psi)



## 1) 地心惯性坐标系和地心地固坐标系之间的转换

由于地球的自转，**i**系和**e**系之间的角速度矢量为

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^e = (0, 0, \omega_e)^T$$

**i**系到**e**系的转换只需绕**i**系**z**轴旋转一次，旋转角为  $\omega_e t$

$$R_i^e = \begin{bmatrix} \cos \omega_e t & \sin \omega_e t & 0 \\ -\sin \omega_e t & \cos \omega_e t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



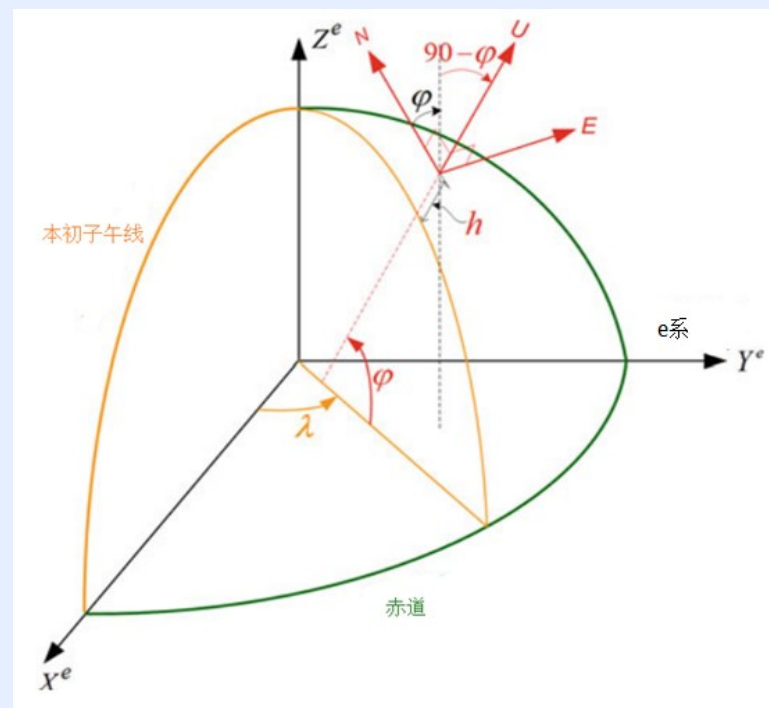
## 2) 当地水平坐标系和地心地固坐标系之间的转换

要讲**e**系和**l**系对齐，需要先将  
**l**系绕其**x**轴旋转  $\varphi - 90$  ；

然后绕**z**轴旋转  $-90 - \lambda$

由**l**系到**e**系的转换矩阵为

$$R_l^e = R_a^b(-\lambda - 90) R_b^c(\varphi - 90)$$





$$R_l^e = \begin{bmatrix} \cos(-\lambda - 90) & \sin(-\lambda - 90) & 0 \\ -\sin(-\lambda - 90) & \cos(-\lambda - 90) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi - 90) & \sin(\varphi - 90) \\ 0 & -\sin(\varphi - 90) & \cos(\varphi - 90) \end{bmatrix}$$

$$R_l^e = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda & 0 \\ \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$R_l^e = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix}$$



### 3) 当地水平坐标系和载体坐标系之间的转换

由**b**系到**l**系的转换是一个常用的转换，转换矩阵中包含了俯仰、偏航和滚转信息。转换矩阵为：

$$\begin{aligned} R_b^l &= \left(R_l^b\right)^{-1} = \left(R_l^b\right)^T = \left(R_c^b R_b^c R_a^b\right)^T \\ &= \left(R_a^b\right)^T \left(R_b^c\right)^T \left(R_c^d\right)^T \end{aligned}$$

$$R_b^l = \begin{bmatrix} \cos y & \sin y & 0 \\ -\sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos p & \sin p \\ 0 & -\sin p & \cos p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos r & 0 & -\sin r \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin r & 0 & \cos r \end{bmatrix}^T$$





$$R_b^l = \begin{bmatrix} \cos y \cos r - \sin y \sin p \sin r & -\sin y \cos p & \cos y \sin r + \sin y \sin p \cos r \\ \sin y \cos r + \cos y \sin p \sin r & \cos y \cos p & \sin y \sin r - \cos y \sin p \cos r \\ -\cos p \sin r & \sin p & \cos p \cos r \end{bmatrix}$$

其中 ‘ $p$ ’ , ‘ $r$ ’ 和 ‘ $y$ ’ 分别是俯仰角、滚转角和偏航角。

可以计算俯仰角、滚转角和偏航角。

$$p = \tan^{-1} \left\{ \frac{R_b^l(3,2)}{\sqrt{[R_b^l(1,2)]^2 + [R_b^l(2,2)]^2}} \right\} \quad y = -\tan^{-1} \left[ \frac{R_b^l(1,2)}{R_b^l(2,2)} \right] \quad r = -\tan^{-1} \left[ \frac{R_b^l(3,1)}{R_b^l(3,3)} \right]$$



## 4) 载体坐标系向地心地固坐标系和地心惯性坐标系转换

**b**系到**e**系和**i**系的转换也是两个常用的重要转换，转换矩阵可以由前述矩阵组合得到。

由载体坐标系到地心地固坐标系转换

$$R_b^e = R_l^e R_b^l$$

由载体坐标系到地心惯性坐标系转换

$$R_b^i = R_e^i R_b^e$$



## 2. 姿态矩阵

描述了**载体坐标系与地理坐标系**（即导航坐标系）之间的关系，用姿态角（俯仰角和滚转角）和航向角表示，定义如下：

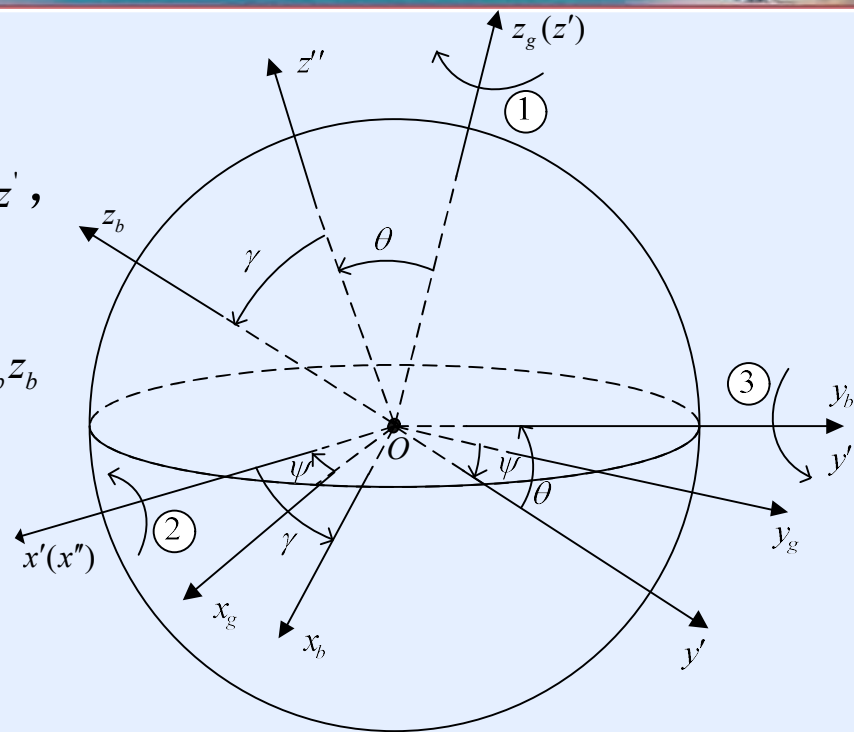
**航向角**：载体纵轴在水平面的投影与地理子午线之间的夹角，用 $\psi$ 表示，规定以地理北向为起点，偏东方向为正，定义域 $0\sim 360^\circ$ 。

**俯仰角**：载体纵轴与纵向水平轴之间的夹角，用 $\theta$ 表示，规定以纵向水平轴为起点，向上为正，向下为负，定义域 $-90^\circ \sim +90^\circ$ 。

**滚转角**：载体纵向对称面与纵向铅垂面之间的夹角，用 $\gamma$ 表示，规定从铅垂面算起，右倾为正，左倾为负，定义域 $-180^\circ \sim +180^\circ$ 。



地理坐标系  $ox_g y_g z_g$  绕  $-z_g$  轴转角  $\psi$  得  $ox' y' z'$  ,  
 $ox' y' z'$  绕  $x'$  轴转角  $\theta$  角得  $ox'' y'' z''$  ,  
 $ox'' y'' z''$  再绕  $y''$  轴转  $\gamma$  角, 则得载体坐标系  $ox_b y_b z_b$



$$\mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_b^g = (\mathbf{C}_g^b)^T =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \sin \theta & \sin \psi \cos \theta & \sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \psi \sin \theta \\ -\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta & -\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \cos \psi \sin \theta \\ -\sin \gamma \cos \theta & \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix}$$

载体坐标系与地理坐标系之间的变换关系

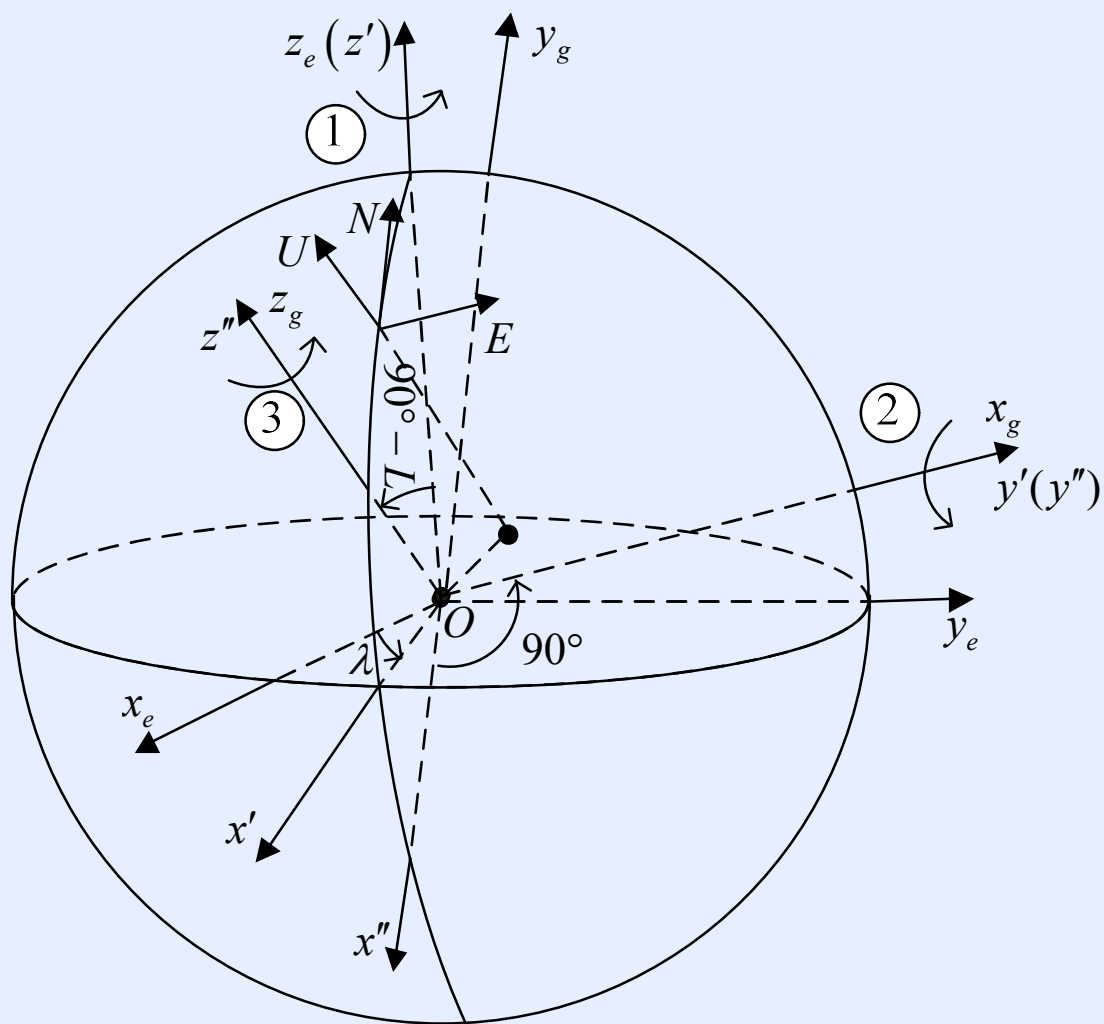


### 3.位置矩阵

描述了地理坐标系与地球坐标系之间的关系，用经度 $\lambda$ 和纬度 $L$ 表示，定义如下：

设 $S$ 为地球表面一点， $S$ 的经纬度分别为 $\lambda$ 和 $L$ ，则 $S$ 点处的地理坐标系可由地球坐标系作三次旋转确定，即地球坐标系 $Ox_e y_e z_e$ 绕 $z_e$ 轴转角 $\lambda$ 得 $Ox' y' z'$ ，然后 $Ox' y' z'$ 绕 $y'$ 轴转角 $(90^\circ - L)$ 得 $Ox'' y'' z''$ ， $Ox'' y'' z''$ 再绕 $z''$ 轴转 $90^\circ$ ，则得载体坐标系 $Ox_g y_g z_g$

$$C_n^e = C_g^e = (C_e^g)^T = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\sin L \cos \lambda & \cos L \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin L \sin \lambda & \cos L \sin \lambda \\ 0 & \cos L & \sin L \end{bmatrix}$$



载体坐标系与地理坐标系之间的变换关系



## 2.6 地球描述



### 地球参考椭球和重力场

地球附件载体的定位是相对于地球的，地球的某些特性，如自转运动、垂线及纬度定义、引力场等，在惯导系统中是必须要考虑的，因此要了解地球的这些特性。

### 地球的形状与参考椭球

人类赖以生存的地球，实际上是一个质量分布不均匀、形状不规则的几何体。从整体上看，地球近似为一个对称于自转轴的扁平旋转椭球体，其截面的轮廓近似为一扁平椭圆，沿赤道方向为长轴、沿极轴方向为短轴。这种形状的形成与地球的自转有密切的关系。地球上的每一质点，一方面受到地心引力的作用，另一方面又受自转造成的离心力的作用。越靠近赤道，离心作用力越强，正是在此离心力的作用下，地球靠近赤道的部分向外膨胀，这样，地球就成了扁平形状了。





从局部看来，地球表面有高山、有盆地，加上内部结构异常复杂，地球表面是一相当不规则的曲面，无法用数学模型表达。

在海洋上，各处的海平面均与该处重力向量垂直，若假想地球表面全部被海水包围，在风平浪静、没有潮汐的情况下，由海水水面组成的曲面就是地球重力场的等势面，称为**大地水准面**。大地水准面不像真正的地表那样有明显的起伏，虽然也不规则，但是光滑的。通常所说的海拔高度就是相对大地水准面的。大地水准面包围的体积称为大地水准体简称**大地体**。大地水准面也是不规则的，大地体也无法用一数学表达式准确描述。

对于精度要求不高的一般工程问题，常用圆球体代替大地体，地球的平均半径为 $6371.02\text{km} \pm 0.05\text{km}$ (这是1964年国际天文学会通过的数据)。



若再精确一些，可以将大地体近似为一旋转椭球体，旋转轴就是地球的自转轴，这种旋转椭球体称为**参考椭球**。参考椭球的短轴与地球表面的交点就是地球的两极，在地球自转角速度向量正向的极点为北极，另一端为南极。参考椭球的赤道平面是一圆平面，其半径即为参考椭球的长轴半径 $A$ ，沿地球极轴方向的参考椭球半径为短轴半径 $B$ 。有了长短轴半径，就可以确定出参考椭球。

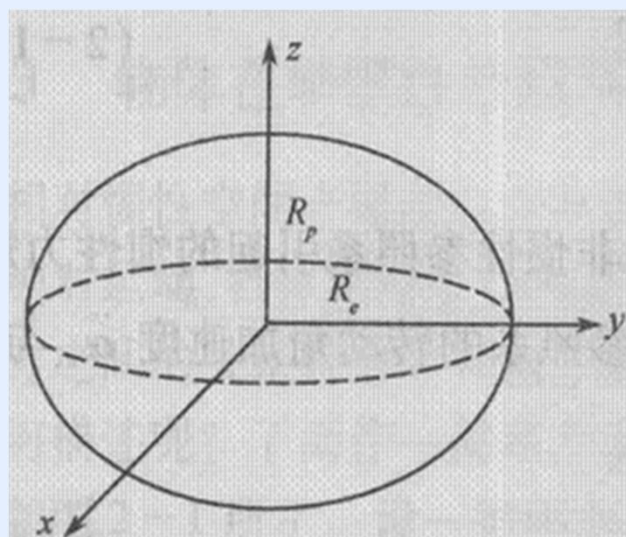
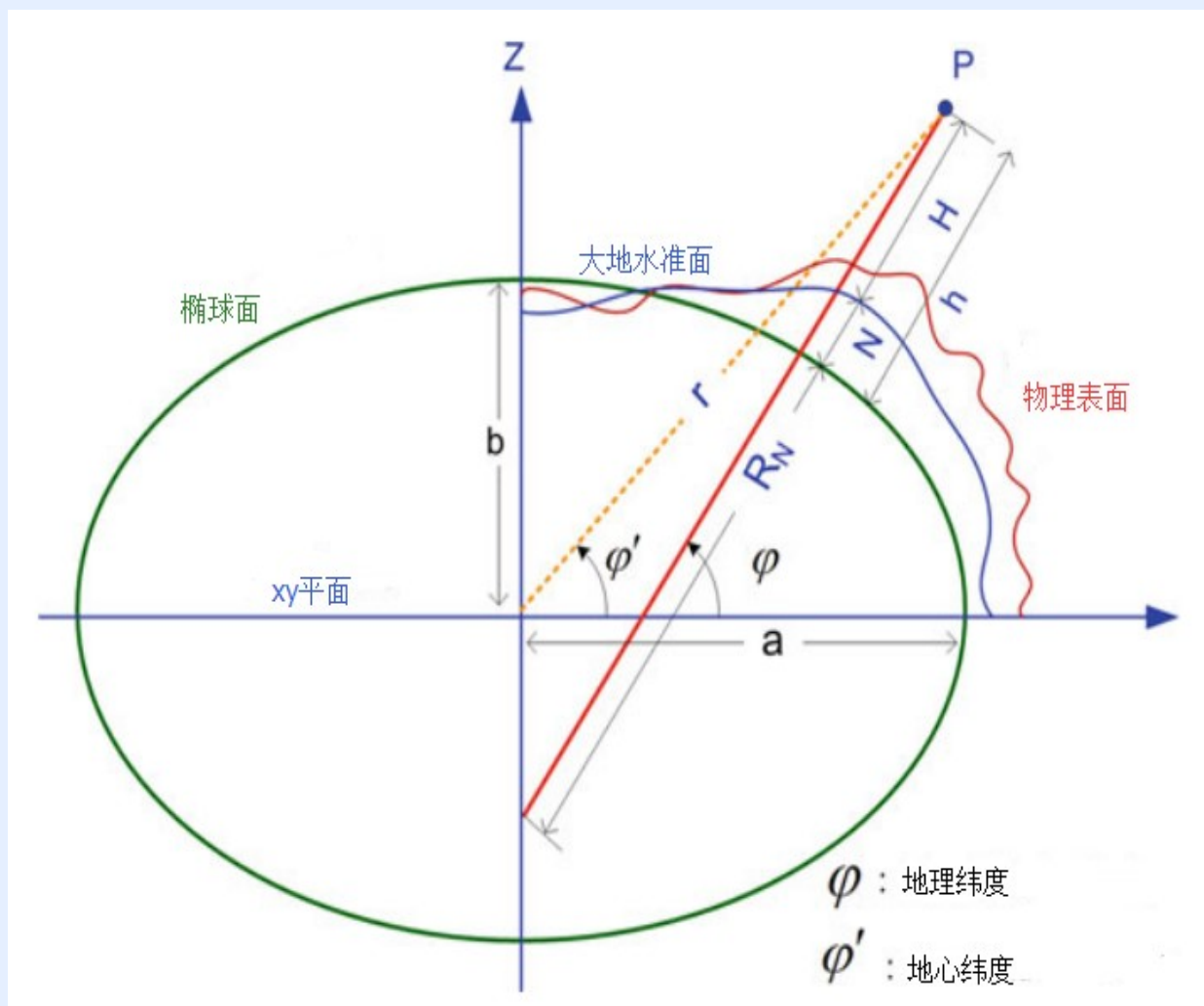


图 2-2 地球参考椭球



图 2-3 地球实际表面、大地水准面与参考椭球







参考椭球可用下面的二次方程描述:

$$\frac{x^2 + y^2}{R_e^2} + \frac{z^2}{R_p^2} = 1 \quad (2-2-1)$$

也可用长短轴半径之一和扁率  $\varepsilon$  来描述参考椭球, 扁率  $\varepsilon$  定义为

$$\varepsilon = \frac{R_e - R_p}{R_e} \quad (2-2-2)$$

扁率也称为椭圆度。

大地测量中, 还常用偏心率来描述椭球的形状:

第一偏心率:

$$e = \sqrt{R_e^2 - R_p^2} / R_e \quad (2-2-3)$$

第二偏心率:

$$e' = \sqrt{R_e^2 - R_p^2} / R_p \quad (2-2-4)$$



表 2-1 目前世界上常用的参考椭球

名 称	长轴半径 $R_e$	扁率 $\varepsilon$	使用的国家和地区
克拉索夫斯基(1940)	6378245	1/298.3	俄罗斯、中国
贝赛尔(1841)	6377397	1/299.16	日本及中国台湾
克拉克(1866)	6378206	1/294.98	北美
克拉克(1880)	6378245	1/293.46	北美
海福特(1910)	6378388	1/297.00	欧洲、北美及中东
1975 年国际会议推荐的参考椭球	6378140	1/298.257	中国
WGS-84(1984)	6378137	1/298.257	全球





我国在**1954**年前采用过美国海富特椭球元素，建国后很长一段时间采用的**1954**年北京坐标系，是基于苏联克拉索夫斯基参考椭球的。

**1980**年开始使用**1975**年国际大地测量与地球物理联合会第**16**届大会推荐的参考椭球。学习中，我们均以参考椭球来代替地球的形状。



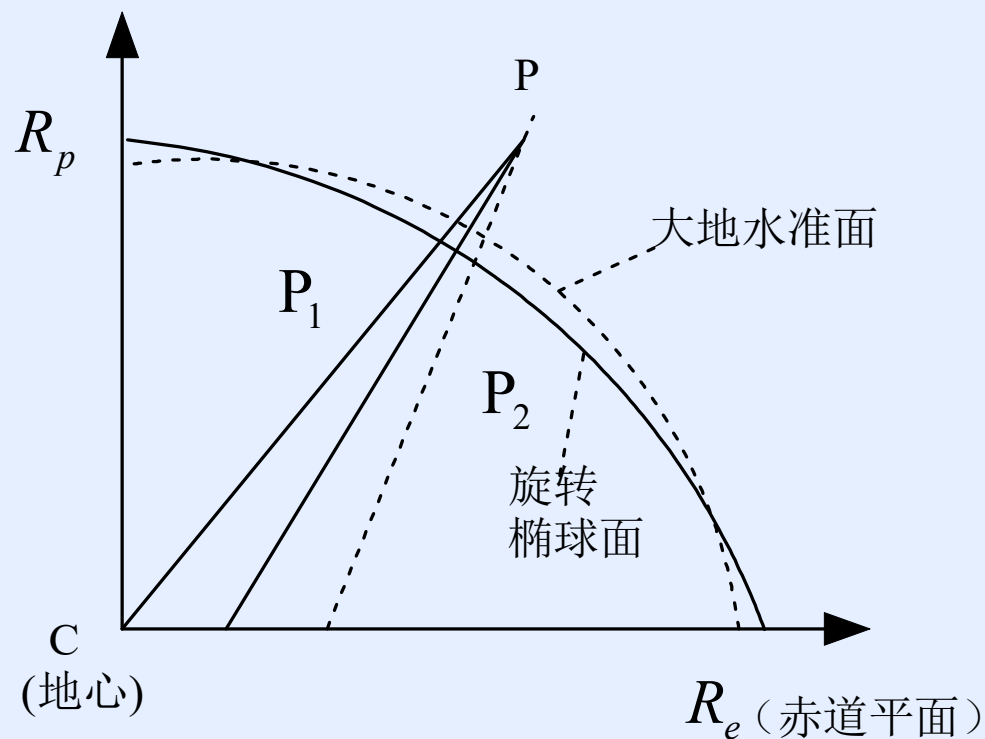
## 垂线和纬度

P为地球表面一点。过P点分别向参考旋转椭球体和大地水准体作法线，分别交于P<sub>1</sub>和P<sub>2</sub>，由于该两几何面非常接近，所以P<sub>1</sub>和P<sub>2</sub>靠得很近。

天文垂线PP<sub>1</sub>和天文纬度 $L_g$

地理垂线PP<sub>2</sub>和地理纬度 $L$

地心垂线PC和地心纬度 $L_c$





## 地球的描述

### 地球自转角速率

根据国际天文学会 (IAU) 提供的数据, 地球自转角速率为

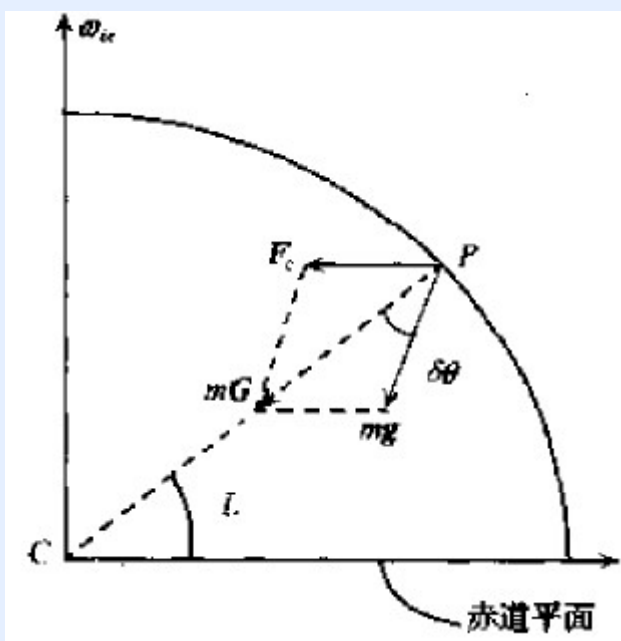
$$\omega_{ie} = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad} / \text{s} \approx 15.04108^\circ / \text{h}$$





## 向心加速度

P为地球上某一点，该点纬度为L，P点处自由放置质量为m，则质量m受到地球的万有引力 $m\mathbf{G}$ 的作用，该力指向地心，同时维持质量m跟随地球旋转需要有外力提供向心力 $\mathbf{F}_c$ ，所以向心力实质上是万有引力的一个分量，用于维持质量m跟随地球旋转，重力 $m\mathbf{g}$ 是万有引力的另一个分量，因此有：



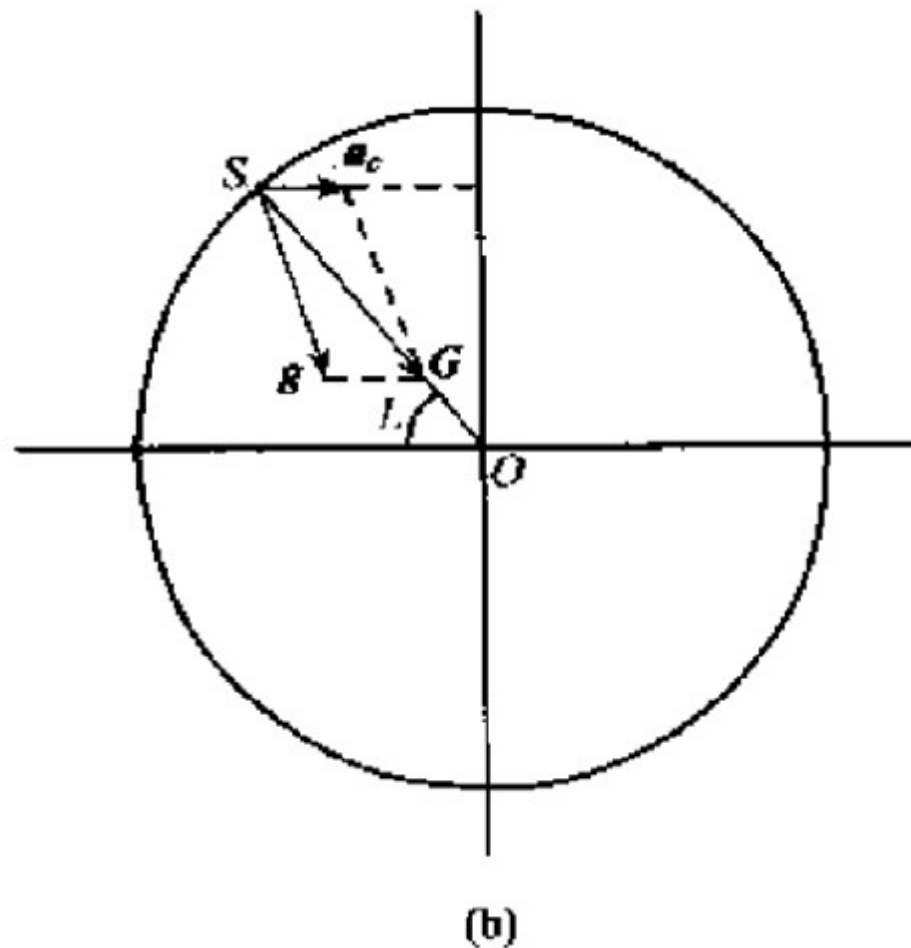
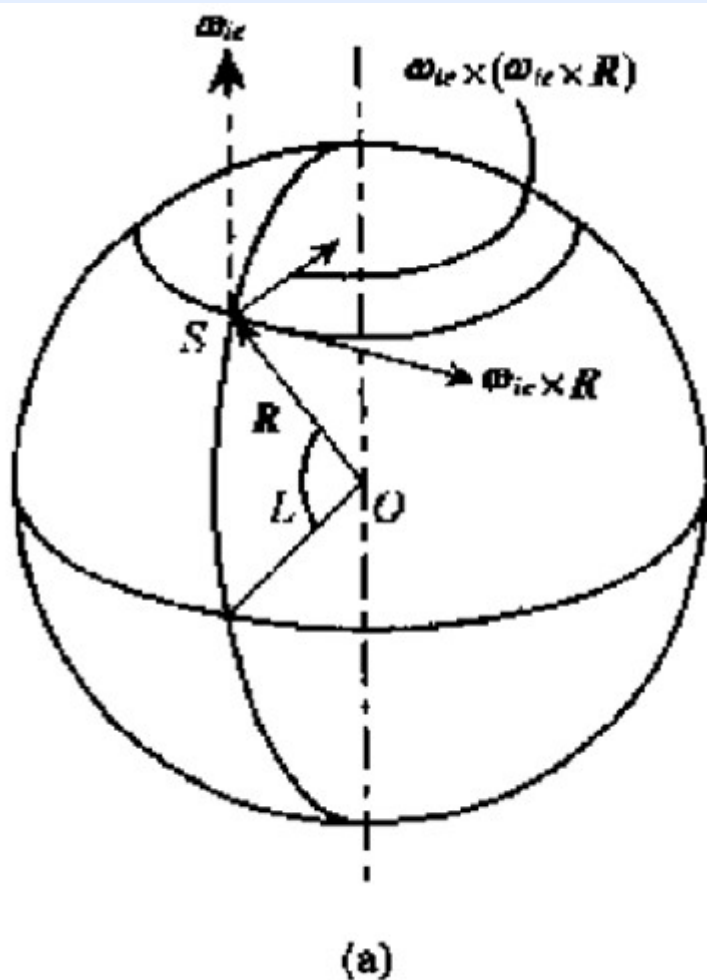
$$m\mathbf{G} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_c$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_c$$

$\mathbf{a}_c = \mathbf{F}_c / m$  是P点处地球旋转引起的向心加速度。



# 向心加速度



$a_c = R \cos L \omega_{ie}^2$  方向指向地轴。

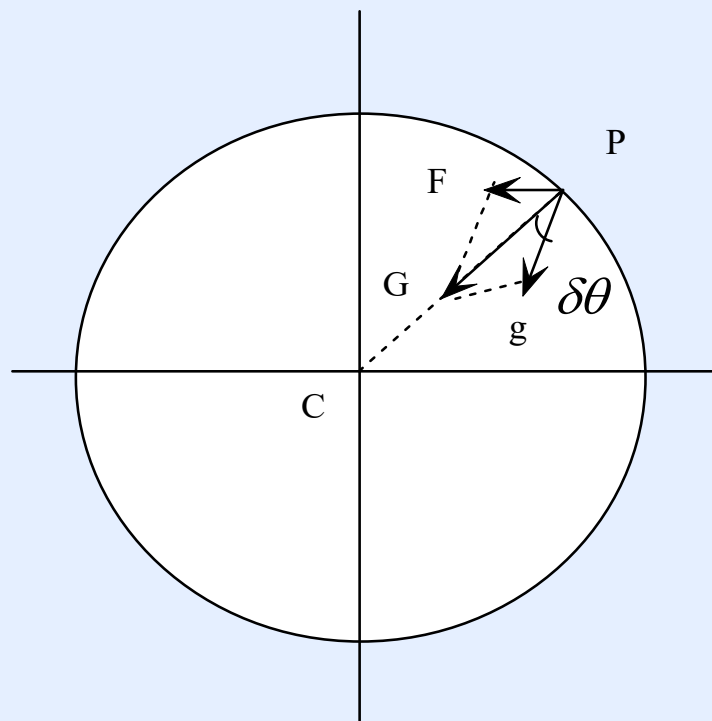
$$|\omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times R)| = \omega_{ie} \cdot (\omega_{ie} R \cos L) \sin 90^\circ = R \cos L \omega_{ie}^2$$



## 地球的描述

重力加速度

重力为万有引力的分量



重力加速度

$$g = g_0[1 + 0.00527094 \sin^2(L) + 0.0000232718 \sin^4(L)] - 0.000003086h$$

$$g_0 = 9.7803267714 m/s^2$$

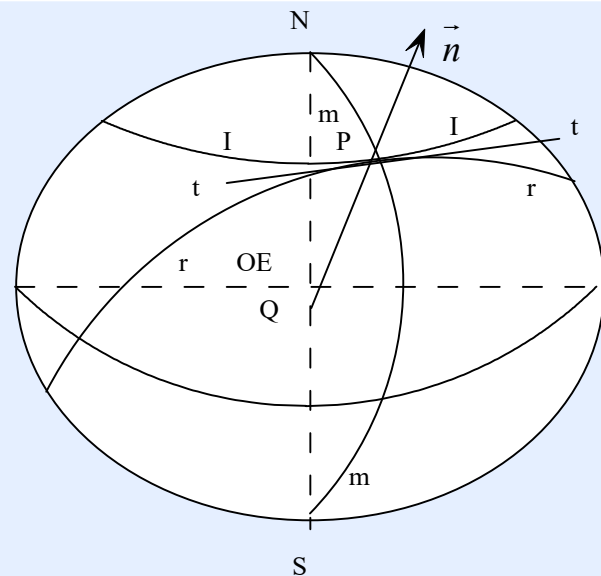


# 地球的描述

## 主曲率半径

P点处沿子午圈的曲率半径 $R_M$ :

P点处沿卯酉圈的曲率半径 $R_N$ :



$$R_M = \frac{R_e (1-f)^2}{\left[ \cos^2 L + (1-f)^2 \sin^2 L \right]^{3/2}}$$

$$R_N = \frac{R_e}{\left[ \cos^2 L + (1-f)^2 \sin^2 L \right]^{1/2}}$$

一般计算中以上两式可简化为:

$$\begin{cases} R_M \approx R_e (1 - 2f + 3f \sin^2 L) \\ R_N \approx R_e (1 + f \sin^2 L) \end{cases}$$



谢谢！