Matemáticas Discretas II - Ejercicios #3

David Santiago Cruz Hernández

2023-02-27

1. Comprobar si el Kernel(θ) es un subgrupo:

Si $k_1, k_2 \in Kernel(\theta)$, entonces se afirma que $\theta(k_1) = \theta(k_2) = e$
Por lo tanto, $\theta(k_1, k_2) = \theta(k_1) \cdot \theta(k_2) = e$
De esta manera, $k_1 \cdot k_2 \in Kernel(\theta)$.

Si $k_1 \in Kernel(\theta)$, entonces $\theta(k_1) = e$.
Por ende, $\theta(k_1^{-1}) = \theta(k_1)^{-1}$
Así que, $e^{-1} = e$
Por lo tanto, $k_1^{-1} \in Kernel(\theta)$.

2. Comprobar si la Imagen(θ) es un subgrupo:

Si I_1 y I_2 pertenecen al grupo inicial, entonces se da el hecho de que $\theta(I_1) = \hat{I}_1$ y $\theta(I_2) = \hat{I}_2$.
Asi que, $\theta(I_1, I_2) = \theta(I_1) \cdot \theta(I_2) = \hat{I}_1 \cdot \hat{I}_2$
Por lo tanto, $\hat{I}_1 \cdot \hat{I}_2 \in Img(\theta)$.

Si $I \in Img(\theta)$, entonces existe un elemento b en el grupo tal que $\theta(b) = I$.
Como este elemento existe, entonces su inversa b^{-1} también se encuentra en el grupo.
Por lo tanto, $\theta(b^{-1}) = \theta(b)^{-1} = I^{-1}$,
donde $I^{-1} \in Img(\theta)$.