Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería

Matemáticas Discretas ii

Taller Ecuaciones en Diferencias

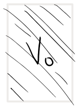
Autor:
David Santiago Cruz Hernandez

Profesor:
Francisco Albeiro Gomez Jaramillo

2023

sábado, 27 de mayo de 2023 9:48 p. m.

1. Una bomba de vacío elimina un tercio del aire restante en un cilindro con cada acción. Formule una ecuación que represente esta situación, ¿después de cuantas acciones hay solamente 1/1000000 de aire inicial?



u_1

$U_1 = V_0$
$U_2 = \frac{1}{3} U_1$
$U_3 = \frac{1}{3} U_2$

$\longrightarrow$ $U_n = \frac{1}{3} U_{n-1}, \quad n \geq 1$

$U_n = K^{n-1} U_1, \quad K = \frac{1}{3}$

$$\underbrace{U_n = \frac{1}{3}^{n-1} V_0}$$

Para $U_n = (1/1000000)\, V_0$

$$\frac{\cancel{V_0}}{1000000} = \frac{1}{3}^{n-1} \cdot \cancel{V_0}$$

$$\log\left(\frac{1}{3}^{n-1}\right)$$

$$\log(1/1000000) = (n-1)\left(\log \frac{1}{3}\right)$$

$$\log(1) - \log(1000000) = (n-1) \cdot [\log(1) - \log(3)]$$

$$(n-1) = \frac{\log(1) - \log(1000000)}{\log(1) - \log(3)}$$

$$n = \frac{\log(1) - \log(1000000)}{\log(1) - \log(3)} + 1 = 13{,}57 \approx \boxed{14}$$

Luego de 14 acciones,
Se tendran menos de $V_0 (10^{-6})$

sábado, 27 de mayo de 2023 9:48 p. m.

2. Una población se incrementa a una tasa de 25 por cada mil por año. Formule una ecuación en diferencias que describa esta situación. Resuelvala y encuentre la población en 15 años, asumiendo que la población ahora es de 200 millones. ¿Qué tan largo tomara que la población alcance 750 millones?

U= Población n= Año r = Tasa

$1000(r) = 25$

$r = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}$

$U_n = U_{n-1}(1+r)$ K= (1+r)

$U_n = (1{,}025)^{n-1} \cdot U_1$

Para $n=15$, $U_1 = 200'000.000$

• $U_{15} = 1{,}025^{14} \cdot 200'000.000$

$= 282.594.764$

Rta:

Población en 15 años:

≈ 282`594.764 habitantes.

Para $U_1 = 200'000.000$, y $U_n = 750'000.000$

$750'000.000 = (1{,}025)^{n-1} \cdot 200'000.000$

$75\cancel{0'000.000} = (1{,}025)^{n-1} \cdot 20\cancel{0'000.000}$

$\frac{75}{20} = (1{,}025)^{n-1}$

$\log\left(\frac{75}{20}\right) = \log(1{,}025)^{n-1}$

$\log\left(\frac{75}{20}\right) = (n-1)\cdot\log(1{,}025)$

$n = \frac{\log(1{,}025)}{\log\left(\frac{75}{20}\right)} + 1$

Rta:

$n = 54{,}53 \approx 55$

Luego de 55 años, habran mas de 750'000.000 de habitantes.

3. Resuelva:

- $u_n = 4u_{n-1} - 1$, para $n \geq 2$
- $u_n = 3u_{n-1} + 2$, para $n \geq 2$

- $U_n = 4U_{n-1} - 1$, $n \geq 2$, $K = 4$ y $c = -1$

Ecuación de la forma: $U_n = KU_{n-1} + C$

$$U_n = K(KU_{n-2} + C) + C = K[K(KU_{n-3} + C) + C] + C \; \ldots$$

$$= K^{n-1}U_1 + K^{n-2}C + \ldots + KC + C$$

$$= K^{n-1}U_1 + C\left[K^{n-2} + K^{n-3} + \ldots + 1\right]$$

Se ve que: $\boxed{P_n = \sum_{i=2}^{n} K^{n-i}} = \dfrac{(K^{n-1} - 1)}{K-1}$, $n \geq 2$ y $K \neq 1$

1. Paso Base $n = 2$

$$\sum^{2} K^{n-i} = K^{2-2} = K^0 = 1 \quad \text{— Ademas —} \quad \frac{K^{2-1} - 1}{K-1} = \frac{\cancel{K-1}^{1}}{\cancel{K-1}} = 1$$

$1 = 1$, por lo que P_2 se cumple!

2. Paso Inductivo

Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 2$ y P_n se cumple. Tomando cualquier $K \neq 1$:

$$P_{n+1} = K^{n-1} + \underbrace{K^{n-2} + K^{n-3} + \ldots + 1}_{P_n} , \quad \text{donde} \quad P_n = \frac{K^{n-1} - 1}{K-1}$$

$$= K^{n-1} + \frac{K^{n-1} - 1}{K-1}$$

$$= \frac{K^{(n+1)-1} - \cancel{K^{n-1}} + \cancel{K^{n-1}} - 1}{K-1}$$

$$= \frac{K^{(n+1)-1} - 1}{K-1}$$, de modo que P_{n+1} se cumple para cualquier P_n

De esta forma:

$$U_n = K^{n-1} \cdot U_1 + C \cdot \frac{K^{n-1} - 1}{K-1}$$

$$\boxed{U_n = 4^{n-1} \cdot U_1 - \tfrac{1}{3}(4^{n-1} - 1)}$$

- $U_n = 3U_{n-1} + 2$, $n \geq 2$, $K = 3$ y $C = 2$

Por lo anterior demostrado:

$$\boxed{U_n = 3^{n-1}U_1 + 2(3^{n-1} - 1)}$$

sábado, 27 de mayo de 2023 9:48 p. m.

4. Encuentre la solución general para las siguientes ecuaciones:

Demostración 3

- $u_n + 4un - 1 + 3 = 0$, para $n \geq 1$
- $u_n + 2un - 1 - 13 = 0$, para $n \geq 1$

$U_n = -4U_{n-1} - 3, \quad n \geqslant 1$

$U_n = -4^{n-1} U_1 + \frac{3}{5}(-4^{n-1} - 1)$

$U_n = -2U_{n-1} + 13, \quad n \geqslant 1$

$U_n = -2^{n-1} U_1 - \frac{13}{3}(-2^{n-1} - 1)$

sábado, 27 de mayo de 2023 9:48 p. m.

5. Encuentre las soluciones particulares para:

- $u_n = 3u_{n-1} + 5$, para $n \geq 1$ $u_0 = 1$
- $u_n = -2u_{n-1} + 6$, para $n \geq 2$ $u_1 = 3$

$$U_n = 3U_{n-1} + 5 \qquad n \geq 1 \qquad U_0 = 1$$

$$U_n = 3^{n-1+1} \cdot U_0 + \frac{5}{2}\left(3^{n-1+1} - 1\right)$$

$$= 3^n \cdot U_0 + \frac{5}{2}\left(3^n - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[7 \cdot (3^n) - 5\right] \quad \checkmark$$

6. Encuentre y resuelva la ecuación en diferencias asociada a 7, 17, 37, 77, 157,...

$U_1 = 7 \qquad U_2 = 17 \qquad U_3 = 37 \qquad U_4 = 77 \qquad U_5 = 157$

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= 10 \\ U_3 - U_2 &= 20 \\ U_4 - U_3 &= 40 \\ U_5 - U_4 &= 80 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} U_1 &= 7 \\ U_2 &= U_1 + 2^0 \cdot (10) \\ U_3 &= U_2 + 2^1 (10) \\ U_4 &= U_3 + 2^2 (10) \\ U_5 &= U_4 + 2^3 (10) \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} U_n &= U_{n-1} + 2^{n-2} \cdot 10 \\ &\boxed{= U_{n-1} + 2^{n-1} \cdot 5 \,, \quad n \geq 2} \end{aligned}$$

Solución General

$$\begin{aligned} U_n &= U_{n-1} + 2^{n-1} \cdot 5 \\ &= (U_{n-2} + 2^{n-2} \cdot 5) + 2^{n-1} \cdot 5 \\ &= [(U_{n-3} + 2^{n-3} \cdot 5) + 2^{n-2} \cdot 5] + 2^{n-1} \cdot 5 \\ &= U_1 + 5 [2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}] \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i - 1 = 2^n - 1 - 1 = 2^n - 2$$

$$\longrightarrow \begin{aligned} U_n &= U_1 + 5(2^n - 2) \\ &= U_1 + 5(2)(2^{n-1} - 1) \\ &\boxed{= U_1 + 10(2^{n-1} - 1) \,, \quad n \geq 2} \end{aligned}$$

↳ Son equivalentes!

sábado, 27 de mayo de 2023 9:48 p. m.

7. Encuentre el pago mensual por un prestamo por 400 millones de pesos en un periodo de 3 años a una tasa de interes del 21% por año.

$U_0 = 400'000.000$ $\quad t = 3 \quad i = 21\% = 0,21 \quad A =$ Pago Anual

→ Como se busca pagar en 3 años, se tiene que $\boxed{U_3 = \emptyset}$, donde:

$$U_n = U_{n-1} \cdot (1+i) - A$$

Se resuelve sustituyendo en:

$$U_n = K^n \cdot U_0 + \frac{c \cdot (K^{n-1} - 1)}{K-1}, \quad \text{donde } K = 1,21 \text{ y } C = -A$$

$$U_3 = (1,21)^3 \cdot (400'000.000) - A\,\frac{(1,21^2 - 1)}{1,21 - 1}$$

$$0 = (1,21)^3 \cdot (400'000.000) - A\,\frac{(1,21^2 - 1)}{1,21 - 1}$$

$$A = \frac{\cancel{-}(1,21)^3 \cdot (400'000.000)}{\cancel{-}\,\frac{(1,21^2 - 1)}{1,21 - 1}} = \frac{(1,21)^3 \cdot (400'000.000)}{(1,21^2 - 1)} \cdot (1,21 - 1)$$

$A = 192'870.000$ por año!

↳ $192'870.000 / 12$ meses $= \$\ 16'072.500$

↳ Cuota Mensual

sábado, 27 de mayo de 2023 9:48 p. m.

8. Una plantación de café incrementa su producción un 1% por mes desde una tasa de 200 toneladas por mes. Las ordenes (uso de café) permanecen en 1600 toneladas por mes- ¿Cuánto café se puede apilar después de un periodo de 12 meses, después de un periodo de 2 años?

La tasa de producción crece todos los meses asi:

$r_1 = 200(1{,}01)$
$r_2 = [200(1{,}01)]\cdot(1{,}01)$
$r_3 = [(200(1{,}01)\cdot(1{,}01)](1{,}01)$

$r_n = 200(1{,}01)n$
$r_n = 202 \cdot n$

Donde $202 \cdot n - 1600 = n$

$n = \frac{1600}{202} = 7{,}42 \approx 8$

A partir del mes 8, la producción superara las ordenes de 1600T esperada!

De esta forma, el cafe acumulado es:

$\boxed{U_n = (202n - 1600) + U_{n-1}}$ $n \geq 8$

$U_7 = 0$ La producción es menor a 1600T, por lo que aún NO se puede vender!

$(U_0 \leq n \leq 7 = 0)$

Para $n = 12$

$U_{12} = 202[6(13) - 23] - 5(1600)$
$= 10100 - 8000$
$= 2100$ T

Para $n = 24$ / 2 AÑOS

$U_{24} = 202 \; 12(25) - 23] - 17(1600)$

$\boxed{U_{24} = 28\,754}$

$U_n = U_{n-2} + [202(n-1) - 1600] + [202n - 1600]$
$= U_7 - (n-7)\cdot 1600 + 202[3 + \; + 5 + \ldots + n]$

$\sum_{i=8}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{7} i = \frac{1}{2}n(n+1) - 28$

$U_n = U_7 - (n-7)\cdot 1600 + 202\left[\frac{1}{2}n(n+1) - 28\right]$
$U_n = 101[n^2 + n] - (n-7)\cdot 1600 - 5656$

sábado, 27 de mayo de 2023 9:48 p. m.

9. La productividad en una plantación de 2000 arboles se incrementa 5% cada año por la implementación de mejores tecnicas de agricultura. El granjero tambien planta ademas 100 arboles por año. Estime el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años.

$U_0 = 2000, \qquad U_n = U_{n-1}(1{,}05) + 100$

$$U_n = (1{,}05)^n \cdot 2000 + \frac{100}{0{,}05}(1{,}05^n - 1)$$
$$= 2000 \cdot [(1{,}05)^n + 1{,}05^n - 1]$$
$$= 2000 [2 \cdot (1{,}05)^n - 1]$$

Para $n = 10$

$$U_{10} = 2000 [2 \cdot (1{,}05)^{10} - 1]$$
$$= 2000 \cdot \quad .258]$$
$$= 4515.58 \approx \boxed{4515 \text{ arboles}}$$

Respecto a la productividad p:

$$p = \frac{(U_{10} - U_0)}{U_0} \cdot 100 = \frac{(4515 - 2000)}{2000} \cdot 100$$

$$\boxed{p = 125{,}75\ \%}$$

↳ Hay una mejora del 125,75 % en la plantación.

sábado, 27 de mayo de 2023 9:48 p. m.

10. Resuelva $u_n = 3u_{n-1} + n$, para $u_1 = 5$

$U_n = 3U_{n-1} + n, \quad U_1 = 5$

$\rightarrow U_n = 3U_{n-1} + n,$ Ecuación NO Homogenea de la forma $U_n = a + bn$

SOLUCIÓN HOMOGENEA:

$U_n - 3U_{n-1} = 0$

$m = \frac{3 \pm 3}{2} \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 3 \end{cases} — U_n = A \cdot 3^n$

SOLUCIÓN PARTICULAR:

$(a + bn) - 3 \cdot [a + b(n-1)] = n$

$a - 3a + bn - 3bn + 3b = n$

$3b - 2(a + bn) = n$

$(3b - 2a) + (-2bn) = n$

$-2b = 1$

$b = \frac{-1}{2}$

$3b - 2a = 0$

$+2a = +3b$

$2a = 3\left(\frac{-1}{2}\right)$

$2a = -\frac{3}{2}$

$a = -\frac{3}{4}$

De esta forma:

$U_n = A(3^n) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}n$ $\longrightarrow$ Para U_1

$U_1 = A(3^1) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(1)$

$5 = A(3) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{12}$

$$\boxed{U_n = \frac{25}{12}(3^n) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}n}$$

sábado, 27 de mayo de 2023 9:48 p. m.

11. Encuentre la solución general para $u_n = un - 1 + 2^n$ y $u_n = 2un - 1 + n$

- $U_n = U_{n-1} + 2^n$, NO homogenea de la forma K^n donde $U_n = ak^n$

$U_n - U_{n-1} = 2^n$

1. $U_n - U_{n-1} = 0$

$m^2 - m = 0$

$m(m-1) = 0$ — $m_1 = 0$; $m_2 = 1$ — $U_n = A(1)^n = A$

2. $a \cdot 2^n - a2^{n-1} = 2^n$

$a\cancel{2^n}[1 - 2^{-1}] = \cancel{2^n}$

$a = 2$

$2(2^n) - 2(2^{n-1}) = 2^n$

$2^n[2 - 2^0] = 2^n$

$2^n[1] = 2^n$

$2^n = 2^n$

$$\boxed{U_n = 2^{n+1} + A}$$

- $U_n = 2U_{n-1} + n$, NO homogenea de la forma K^n donde $U_n = ak^n$

$U_n - 2U_{n-1} = 2^n$

1. $U_n - 2U_{n-1} = 0$

$m^2 - m = 0$

$m(m-2) = 0$ — $m_1 = 0$; $m_2 = 2$ — $U_n = A(2)^n$

2. $(a + bn) - 2(a + b(n-1)) = n$

$a - 2a + bn - 2bn + 2b = n$

$(2b - a) + (-bn) = n$

$b = -1$

$2b - a = 0$

$2(-1) - a = 0$

$a = -2$

$U_n = -2 - n$

$$\boxed{U_n = A(2^n) - 2 - n}$$

12. Si $u_n = ku_{n-1} + 5$ y $u_1 = 4$ y $u_2 = 17$ encuentre los valores de k y u_6.

→ Dado que $U_1 = 4$ y $U_2 = 17$, se puede calcular K para U_2:

$$U_2 = k \cdot U_1 + 5$$

Sustituyendo U_1: $U_2 = k \cdot (4) + 5$

Sustituyendo U_2: $(17) = k \cdot 4 + 5$

Resolver para k: $k = \frac{17-5}{4} = 3$ → $\boxed{K = 3}$ ✓

→ Calcular U_6 por medio de la siguiente propiedad

$U_n = K U_{n-1} + C$

$U_n = K^{n-1} U_1 + \frac{C(K^{n-1}-1)}{K-1}$

$$U_6 = k \cdot U_5 + 5$$

$$U_6 = k^5 \cdot U_1 + \frac{5(k^5-1)}{K-1}$$

$$U_6 = 3^5 \cdot 4 + \frac{5(3^5-1)}{3-1}$$

$$U_6 = 243 \cdot 4 + \frac{5(242)}{2}$$

$$\boxed{U_6 = 1577}$$ ✓

→ COMPROBACIÓN de la PROPIEDAD: Siendo $U_1 = 4$ $U_2 = 17$ $k = 3$

$$U_n = kU_{n-1} + 5$$

$U_3 = k \cdot U_2 + 5$

$U_3 = 3 \cdot 17 + 5$

$U_3 = 56$

$U_4 = k \cdot U_3 + 5$

$U_4 = 3 \cdot 56 + 5$

$U_4 = 173$

$U_5 = k \cdot U_4 + 5$

$U_5 = 3 \cdot 173 + 5$

$U_5 = 524$

$U_6 = k \cdot U_5 + 5$

$U_6 = 3 \cdot 524 + 5$

$\boxed{U_6 = 1577}$ ✓

13. Use iteración para resolver la siguiente relación de recurrencia $u_n = \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$, para $n \geq 2$,sujeto a la condición inicial $u_1 = \frac{1}{6}$.

0. Condición inicial, $u_1 = [6]^{-1}$ •

1. $u_2 = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{6u_0} = [6u_0]^{-1}$ $*$

2. $u_3 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{6u_0} = [u_0]^{-1}$ ▲

3. $u_4 = \frac{u_3}{u_2} = \frac{6u_0}{u_0} = [6]$

4. $u_5 = \frac{u_4}{u_3} = [6u_0]$

5. $u_6 = \frac{u_5}{u_4} = \frac{6u_0}{6} = [u_0]$

6. $u_7 = \frac{u_6}{u_5} = \frac{u_0}{6u_0} = [6]^{-1}$ •

7. $u_8 = \frac{u_7}{u_6} = [6u_0]^{-1}$ $*$

8. $u_9 = \frac{u_8}{u_7} = \frac{6}{6u_0} = [u_0]^{-1}$ ▲

Para $k \in \mathbb{Z}^+$

$$u_n \begin{cases} [6]^{-1}, & n = 1 + 6k \\ [6u_0]^{-1}, & n = 2 + 6k \\ [u_0]^{-1}, & n = 3 + 6k \\ [6], & n = 4 + 6k \\ [6u_0], & n = 5 + 6k \\ [u_0], & n = 6 + 6k \end{cases}$$

Para algún u_0

14. Investigue el límite de $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ si $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$

$$U_n = U_{n-1} + 2U_{n-2}$$

$$U_n - U_{n-1} - 2U_{n-2} = 0$$

$k = n-2 \quad k+1 = n-1 \quad k+2 = n$

$$U_{k+2} - U_{k+1} - 2U_k = 0$$

Solución Homogenea λ^k

$$\lambda^{k+2} - \lambda^{k+1} - 2\lambda^k = 0$$

$$\lambda^k(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda = 2 \quad \lambda = -1$

$$u(n) = C_1(-1)^n + C_2(2)^n$$

$$\frac{u(n)}{u(n+1)} = \frac{C_1(-1)^n + C_2(2)^n}{C_1(-1)^{n+1} + C_2(2)^{n+1}}$$

$$= \frac{C_2(2)^n + C_1(-1)^n}{2C_2(2)^n - C_1(-1)^n} \cdot \frac{(-1)^n}{(-1)^n}$$

$$= \frac{C_2(-2)^n + C_1}{2C_2(-2)^n - C_1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u(n)}{u(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_2(-2)^n + C_1}{2C_2(-2)^n - C_1} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

n puede ser par o impar

n par $\longrightarrow$ $n = 2k \quad k \in \mathbb{Z}^+$

n impar $\longrightarrow$ $n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{Z}^+$

Si $n \to \infty \Rightarrow k \to \infty$

Caso 1 $\longrightarrow$ n par

$$\lim_{k\to\infty} \frac{C_2(-2)^{2k} + C_1}{2C_2(-2)^{2k} - C_1} = \lim_{k\to\infty} \frac{C_2(4)^k + C_1}{2C_2(4)^k - C_1} \begin{matrix} \to \infty \\ \to \infty \end{matrix}$$

$$\overset{L.H}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{Ln(4)}\,\cancel{C_2}\,\cancel{(4)^k}}{2\,\cancel{Ln(4)}\,\cancel{C_2}\,\cancel{(4)^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Caso 2 $\longrightarrow$ n impar

$$\lim_{k\to\infty} \frac{C_2(-2)^{2k+1} + C_1}{2C_2(-2)^{2k+1} - C_1} = \lim_{k\to\infty} \frac{-2C_2(4)^k + C_1}{-4C_2(4)^k - C_1} \begin{matrix} \to \infty \\ \to \infty \end{matrix}$$

$$\overset{L.H}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{-2\,\cancel{Ln(4)}\,\cancel{C_2}\,\cancel{(4)^k}}{-4\,\cancel{Ln(4)}\,\cancel{C_2}\,\cancel{(4)^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dado que se cumple para todos los casos, se puede concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u(n)}{u(n+1)} = \frac{1}{2}$$

15. Encuentre el n-esimo termino de la siguiente secuencia: -3,21,3,129,147,...

$U_1 = -3 \qquad U_2 = 21 \qquad U_3 = 3 \qquad U_4 = 129 \qquad U_5 = 147$

Cada U_n se puede expresar como:

$$U_2 = 21 = (-1)^2(-3)^2 + 12 = (-1)^2(-3)^2 + (-1)\cdot 2^2\cdot(-3)$$
$$U_3 = 3 = (-1)^3(-3)^3 + (-24) = (-1)^3(-3)^3 + (-1)^2\cdot 2^3\cdot(-3)$$
$$U_4 = 129 = (-1)^4(-3)^4 + 48 = (-1)^4(-3)^4 + (-1)^3\cdot 2^4\cdot(-3)$$
$$U_5 = 147 = (-1)^5(-3)^5 + (-96) = (-1)^5(-3)^5 + (-1)^4\cdot 2^5\cdot(-3)$$

$$\boxed{U_n = (-1)^n U_1^n + (-1)^{n-1} 2^n U_1}$$

COMPROBACIÓN:

$$U_2 = (-1)^2 U_1^2 + (-1)^{2-1} 2^2 U_1$$
$$= 1\cdot(-3)^2 + (-1)^1\cdot 4\cdot(-3)$$
$$= 9 - 4\cdot(-3)$$
$$= 9 + 12 = 21 \quad \checkmark$$

$$U_4 = (-1)^4 U_1^4 + (-1)^{4-1} 2^4 U_1$$
$$= 1\cdot(-3)^4 + (-1)^3\cdot 16\cdot(-3)$$
$$= 81 + (-1)\cdot 16\cdot(-3)$$
$$= 81 + 16\cdot 3 = 129 \quad \checkmark$$

$$U_3 = (-1)^3 U_1^3 + (-1)^{3-1} 2^3 U_1$$
$$= (-1)(-3)^3 + (-1)^2\cdot 8\cdot(-3)$$
$$= (-1)(-27) + 1\cdot 8\cdot(-3)$$
$$= 27 - 8\cdot 3 = 3 \quad \checkmark$$

$$U_5 = (-1)^5 U_1^5 + (-1)^{5-1} 2^5 U_1$$
$$= (-1)(-3)^5 + (-1)^4\cdot 32\cdot(-3)$$
$$= (-1)(-243) + 1\cdot 32\cdot(-3)$$
$$= 243 - 32\cdot 3 = 147 \quad \checkmark$$

16. Resuelva $u_n - 6u_{n-1} + 8u_{n-2} = 0$, para $n \geq 3$ dado $u_1 = 10$ y $u_2 = 28$. Evalue u_6.

$$U_n - 6U_{n-1} + 8U_{n-2} = 0$$

$U_1 = 10$
$U_2 = 28$
$U_6 = ?$

Polinomio Característico

$$r^2 + 6r + 8$$

$$\frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - (4)(1)(8)}}{2(1)}$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \quad \frac{8}{2} \quad , \quad \frac{4}{2}$$

$4 \qquad 2$

Sln general

$$A(4)^n + B(2)^n$$

$10 = A_4 + B_2$
$28 = A_{16} + B_4$

$\Downarrow$

$10 = A4\,B2$
$8 = A8$
$A = 1$

$\Rightarrow \frac{10-4}{2} = B = 3$

Sln. específica

$$4^n + 3 \cdot 2^n = U_n$$

$$U_6 = 4^6 + 3 \cdot 2^6$$

$$4096 + 192$$

$$U_6 = 4288$$

17. Encuentre la solución particular para $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$, para $n \geq 1$, cuando $u_1 = -1$, $u_2 = -2$.

$U_{n+2} + 2U_{n+1} + U_n = 0$

$n \geqslant 1$

$U_1 = -1$

$U_2 = -2$

Polinomio Característico $r^2 + 2r + 1$

$(r+1)^2$

Sln. general

Sln específica: $4(-1)^n + (-3)$

$n(-1)^n$

$-1 = -A - B$

$-2 = A + 2B$

$-3 = 0 + B$

$-3 = B$

$-1 = -A - (-3)$

$-4 = -A$

$A = 4$

18. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = f(n)$, cuando $f(n) = 2$, $f(n) = n$, $f(n) = 5^n$ y $f(n) = 1 + n^2$.

$$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = f(n), \quad f(n) = 2$$

→ hallamos el polinomio

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m-3) = 0$$

$m_1 = 2$

$m_2 = 3$

$$U_n = A(2)^n + B(3)^n \rightarrow \text{Parte Homogenea}$$

Solución $a + bn$

$U_n = a + bn$

$U_{n-1} = a + b(n-1)$

$U_{n-2} = a + b(n-2)$

Reescribir

$a + bn - 5(a + b(n-1)) + 6(a + b(n-2))$

$\Rightarrow 2a + 2bn - 7b$

$\Rightarrow \underbrace{2(a+bn)}_{1} - \underbrace{7b}_{0} = 2$

$+b = 0$

$b = 0$

$\underbrace{a + bn}_{0} = 1$

$a = 1$

$$U_n = A(2)^n + B(3)^n + 1$$

$f(n) = n$

Se sabe que la solución de la parte homogenea es: $U_n = A(2)^n + B(3)^n$

$\left.\begin{array}{l} U_n = an + b \\ U_{n-1} = a(n-1) + b \\ U_{n-2} = a(n-2) + b \end{array}\right\}$ a, b constantes

reemplazar

$$an - 5(a(n-1) + b) + 6(a(n-2) + b) = n$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2a)}_{1} n + \underbrace{(12b - 7a)}_{0} = n$$

$a = \frac{1}{2}$ $\quad 12b - 7\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ $\quad b = \frac{7}{24}$

$$U_n = A(2)^n + B(3)^n + \frac{11}{24}$$

$f(n) = 5^n$

Sol. Homogenea

$U_n = A(2)^n + B(3)^n$

Sol. alternativa

Reemplazar

$$\left.\begin{aligned} U_n &= a5^n \\ U_{n-1} &= a5^{n-1} \\ U_{n-2} &= a5^{n-2} \end{aligned}\right\} \quad a5^n - 5(a5^{n-1}) + 6(a5^{n-2})$$

$$\Rightarrow 6\,5^{n-2} \times a \Rightarrow 5^n \times \underbrace{\left(\tfrac{6}{25} \times a\right)}_{1}$$

$\frac{6}{25} a = 1$ $\quad \boxed{a = \frac{25}{6}}$

$U_n = A(2)^n + B(3)^n + \frac{25}{6}$

$f(n) = 1 + n^2$

Sol. Homogenea

$U_n = A(2)^n + B(3)^n$

Alternativa $\quad U_n = a + bn + cn^2$

$U_{n-1} = a + b(n-1) + c(n-1)^2 \quad U_{n-2} = a + b(n-2) + c(n-2)^2$

(reescribir) $\quad a + bn + (n^2 - 5(a + b(n-1) + c(n-1)^2)$
$+ 6(a + b(n-2) + c(n-2)^2)$

$2a + 2bn + 2cn^2 - 7b - 14cn + 19c = 1 + n^2$

$2bn + 2cn^2 - 14cn - 7b + \underbrace{19c}_{\to 2c + 17c} + 2a$

$2c(1+n^2) + \underbrace{(2bn - 14cn - 7b + 17c) + 2a}_{0}$

$c = \frac{1}{2}$

$b(2n-7) + ((-14-17) + 2a = 0 \qquad a = 8 \quad b = \frac{7}{2} \quad c = \frac{1}{2}$

$A(2)^n + B(3)^n + 12$

$\downarrow$

Solución

19. Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias utilizando la función generatríz $u_n - 3u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$, dado $u_0 = 0$, y $u_1 = 20$, $n \geq 2$.

$$U_n - 3U_{n-1} + 4\,4U_{n-2} = 0$$

P.C $\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(4)(1)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2}$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$$

$$\lambda = \frac{3 + \sqrt{7}\,i}{2} \qquad \lambda = \frac{3 - \sqrt{7}\,i}{2}$$

$$\lambda = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i \longrightarrow \lambda = a + bi$$

$$a = \frac{3}{2} \qquad b = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{3}{4} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\theta \approx 0{,}723 = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$U(n) = 2^n\left[C_1 \cos(0{,}723n) + C_2 \sin(0{,}723n)\right]$$

$U(0) = 0 \qquad U(1) = 20$

$$U(0) = 1\left(C_1(1) + C_2(0)\right) = 0$$

$$U(1) = 2\left[C_1 \cos(0{,}723) + C_2 \sin(0{,}723)\right] = 20$$

$$2\left[\cancel{C_1\left(\frac{3}{4}\right)} + C_2\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\right] = 20 \qquad C_1 = 0$$

$$C_2\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = 10$$

$$C_2 = \frac{40}{\sqrt{7}}$$

$$U(n) = 2^n\left[\frac{40}{\sqrt{7}} \cdot \sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)n\right)\right]$$

20. Encuentre la función generatriz de la secuencia de Fibonacci.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

$k = n-2 \quad k+1 = n-1 \quad k+2 = n$

$$f_{k+2} - f_{k+1} - f_k = 0$$

Hallamos sln sistema homogeneo

λ^k

$$\lambda^{k+2} - \lambda^{k+1} - \lambda^k = 0$$

$$\lambda^k(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$f_h(n) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$f_h(0) = 0 \qquad f_h(1) = 1$

$$f_h(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$f_h(0) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -C_1$$

$$C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\sqrt{5}\, C_1 = 1 \rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$f(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$f(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

21. Utilice el método de la función generatriz para resolver $u_n - 2u_{n-1} = 3^n$, para $n \geq 1$ dado $u_0 = 1$

Solucion Homogenea

$$u_n - 2u_{n-1} = 0$$

$k = n-1 \qquad k+1 = n$

$$u_{k+1} - 2u_k = 0$$

Supose λ^k

$$\lambda^{k+1} - 2\lambda^k = 0$$

$$\lambda^k(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = 2$$

$$f_H(n) = C_1(2)^n$$

Solución particular

$$f_p(n) \sim 3^n$$

Propuesta $f_p(n) = \alpha 3^n$

$$\alpha 3^n - 2\alpha 3^{n-1} = 3^n$$

$$\alpha 3^n - \frac{2}{3}\alpha 3^n = 3^n$$

$$\frac{\alpha}{3} 3^n = 3^n$$

$$\frac{\alpha}{3} = 1$$

$$\alpha = 3$$

$$f_p(n) = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$$

Sln General

$$f(n) = f_H(n) + f_p(n) = C_1(2)^n + 3^{n+1}$$

$$f(0) = C_1 + 3 = 1 \rightarrow C_1 = -2$$

$$f(n) = -2(2)^n + 3^{n+1}$$

$$f(n) = -2^{n+1} + 3^{n+1}$$

$$f(n) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$