Matemáticas Discretas II - Ejercicios #1

David Santiago Cruz Hernández

2023-02-08

1. Comprobar si la siguiente tabla corresponde a un Monoide:

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

- No vació?
  SI. Esta conformado por el conjunto **G** = {a,b,c,d}
- Cerrado?
  SI. El producto cartesiano de cada elemento pertenece al conjunto **G**.
- Asociativo?
  Si bien en algunas pruebas la igualdad existe, no se cumple para todos los elementos del conjunto, como se demuestra a continuación:

$$(b * c) * d = b * (c * d)$$
$$\boldsymbol{d} * d = b * \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{d}$$

Por lo tanto, la anterior tabla **NO** corresponde a un Monoide.

2. Probar o refutar si el producto de Matrices Cuadradas es Asociativa.

Siendo $A, B, C \in \mathbb{R}^{2x2}$, donde $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

se debe comprobar si la siguiente igualdad se cumple para cualquier elemento del conjunto:
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} b_{11}\cdot c_{11}+b_{12}\cdot c_{21} & b_{11}\cdot c_{12}+b_{12}\cdot c_{22} \\ b_{21}\cdot c_{11}+b_{22}\cdot c_{21} & b_{21}\cdot c_{12}+b_{22}\cdot c_{22}\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11}\cdot c_{11}+a_{12}\cdot b_{21}\cdot c_{11}+a_{11}\cdot b_{12}\cdot c_{21}+a_{12}\cdot b_{22}\cdot c_{21} & a_{11}\cdot b_{11}\cdot c_{12}+a_{12}\cdot b_{21}\cdot c_{12}+a_{11}\cdot b_{12}\cdot c_{22}+a_{12}\cdot b_{22}\cdot c_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}\cdot c_{11}+a_{22}\cdot b_{21}\cdot c_{11}+a_{21}\cdot b_{12}\cdot c_{21}+a_{22}\cdot b_{22}\cdot c_{21} & a_{21}\cdot b_{11}\cdot c_{12}+a_{22}\cdot b_{21}\cdot c_{12}+a_{21}\cdot b_{12}\cdot c_{22}+a_{22}\cdot b_{22}\cdot c_{22}\end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11}\cdot c_{11}+a_{11}\cdot b_{12}\cdot c_{21}+a_{12}\cdot b_{21}\cdot c_{11}+a_{12}\cdot b_{22}\cdot c_{21} & a_{11}\cdot b_{11}\cdot c_{12}+a_{11}\cdot b_{12}\cdot c_{22}+a_{12}\cdot b_{21}\cdot c_{12}+a_{12}\cdot b_{22}\cdot c_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}\cdot c_{11}+a_{21}\cdot b_{12}\cdot c_{21}+a_{22}\cdot b_{21}\cdot c_{11}+a_{22}\cdot b_{22}\cdot c_{21} & a_{21}\cdot b_{11}\cdot c_{12}+a_{21}\cdot b_{12}\cdot c_{22}+a_{22}\cdot b_{21}\cdot c_{12}+a_{22}\cdot b_{22}\cdot c_{22}\end{bmatrix}$$

La igualdad se cumple. Por lo tanto, el producto de Matrices Cuadradas es Asociativa.

3. Probar o refutar si el producto de números complejos es Asociativa.

Definiendo el producto de números complejos como la siguiente operación binaria:

$$(a+bi)\cdot(c+di)$$
$$ac+(bc+ad)i+bdi^2$$
(como $i=\sqrt{-1}$, entonces $i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$)
$$ac+(bc+ad)i-bd$$
$$(ac-bd)+(bc+ad)i$$

donde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$; se debe comprobar si la siguiente igualdad se cumple para cualquier elemento del conjunto:

$$(a+bi)\cdot[(c+di)\cdot(e+fi)]=[(a+bi)\cdot(c+di)]\cdot(e+fi)$$

donde también $e,f\in\mathbb{R}$

Así que se procede a operar respectivamente:

$$(a+bi)\cdot[(c+di)\cdot(e+fi)]=[(a+bi)\cdot(c+di)]\cdot(e+fi)$$
$$(a+bi)\cdot[(ce-df)+(de+cf)i]=[(ac-bd)+(bc+ad)i]\cdot(e+fi)$$
$$a(ce-df)+a(de+cf)i+b(ce-df)i+b(de+cf)i^2=$$
$$e(ac-bd)+e(bc+ad)i+f(ac-bd)i+f(bc+ad)i^2$$
$$a(ce-df)+a(de+cf)i+b(ce-df)i-b(de+cf)=e(ac-bd)+e(bc+ad)i+f(ac-bd)i-f(bc+ad)$$
$$a(ce-df)+[a(de+cf)+b(ce-df)]i-b(de+cf)=e(ac-bd)+[e(bc+ad)+f(ac-bd)]i-f(bc+ad)$$
$$ace-adf+[ade+acf+bce-bdf]i-bde-bcf=eac-ebd+[ebc+ead+fac-fbd]i-fbc-fad$$

reorganizando los términos:

$$ace-adf+[ade+acf+bce-bdf]i-bde-bcf=ace-adf+[ade+acf+bce-bdf]i-bde-bcf$$

La igualdad se cumple. Por lo tanto, el producto de números complejos es Asociativa.