Konrad Drozd 188567

Metody numeryczne projekt 2. - Rozwiązywanie układów równań liniowych

Wstęp

Rozwiązywanie układów równań liniowych są powszechne w wielu dziedzinach nauki oraz zajmują znaczną część pracy superkomputerów, co powoduję zapotrzebowanie na rozwój technik rozwiązywania takowych równań. Techniki te dzielą się na iteracyjne(np. Gaussa-Seidla i Jacobiego) i bezpośrednie(np. faktoryzacji LU). Projekt ten będzie implementował obie kategorie oraz porównywał ich skuteczność oraz prędkość. Algorytmy będą przeprowadzane na układzie równań Ax = b w języku python.

Zadanie A

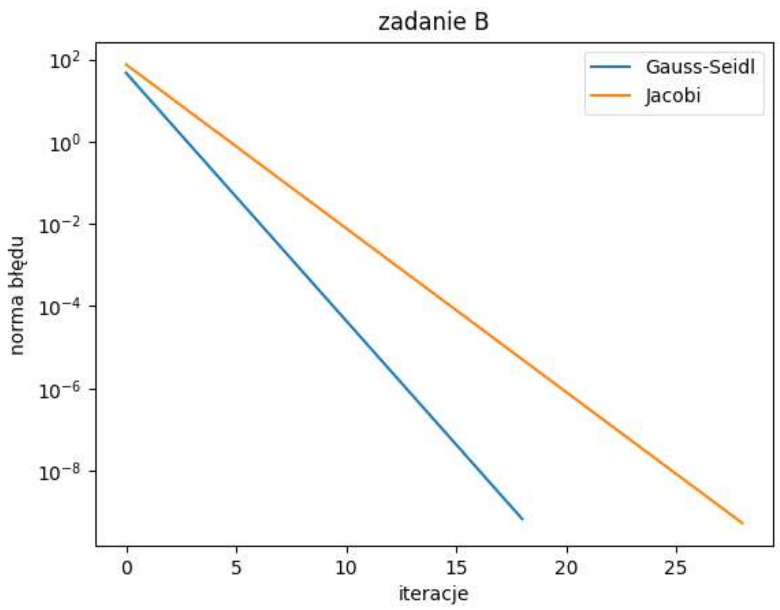
Macierz A na której prowadzone będą operacje jest macierzą o rozmiarach 967 x 967 o diagonalach:

- Głównej o elementach równych 10
- 2 powyżej o elementach równych -1
- 2 poniżej o elementach równych -1

Wektor b o długości 967 jest wypełniony elementami o wartości $b_n = \sin(n * 9)$ dla n = 0,1,2,3....966.

Zadanie B

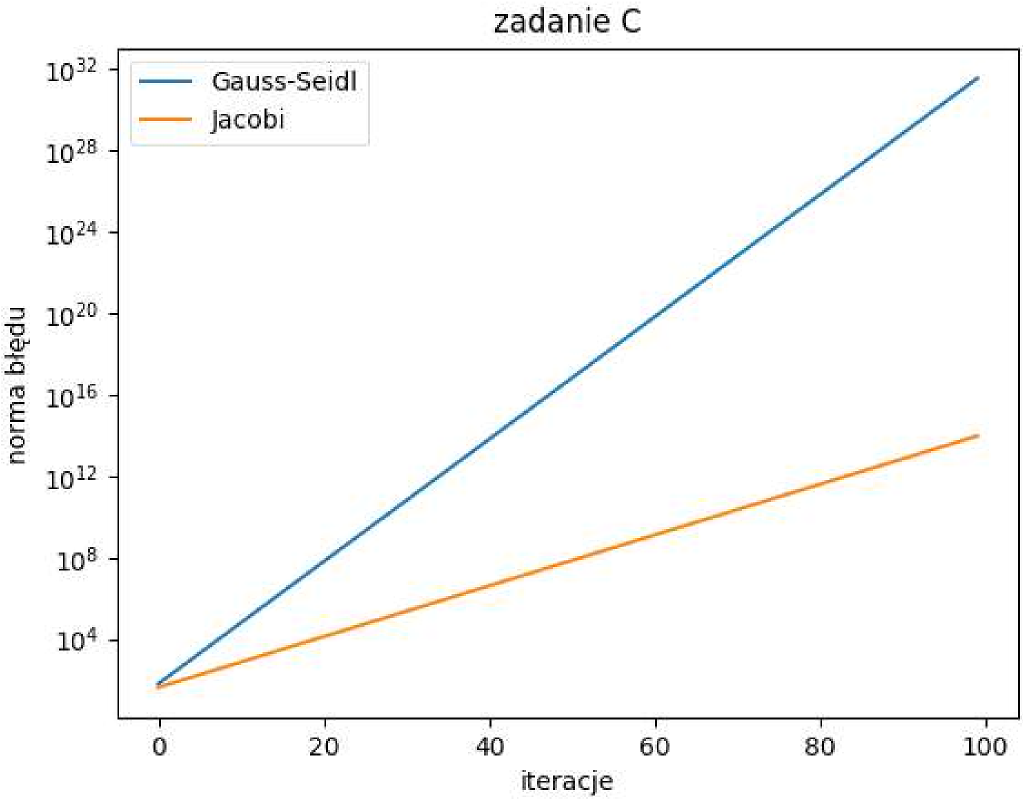
Najpierw porównujemy dwie metody iteracyjne Gaussa-Seidla i Jacobiego. Granicą błędu dla tych dwóch metod jest 10^-9 po osiągnięciu takiego lub mniejszego błędu przerywamy obliczenia. Dla metody Jacobiego liczba iteracji wyniosła 29 a dla Gaussa-Seidla 19. Czasy wykonania to odpowiednio ok. 12.36 s dla metody Jacobiego i ok. 6.67s dla Gaussa-Seidla. Jak widać metoda Gaussa-Seidla jest prawie 2 razy szybsza niż Jacobiego.



Rys. 1. – Wykres normy błędu kolejnych iteracji metod iteracyjnych dla zadania B

Zadanie C

Następnie badamy te same metody na macierzy A dla której wartości elementów głównej diagonali zostały podmienione na 3. Obie metody zawodzą w znalezieniu rozwiązania z rządaną dokładnością i po prostu się zapętlają. Pokazuje to, że do użycia tych metod równanie musi spełniać pewne kryteria, ponieważ w przeciwnym wypadku rozwiązanie w kolejnych iteracjach zamiast zbiegać do prawidłowego wyniku, będzie się rozbiegać – norma błędu będzie maleć zamiast rosnąć jak widać na poniższym wykresie(Rys.2.).



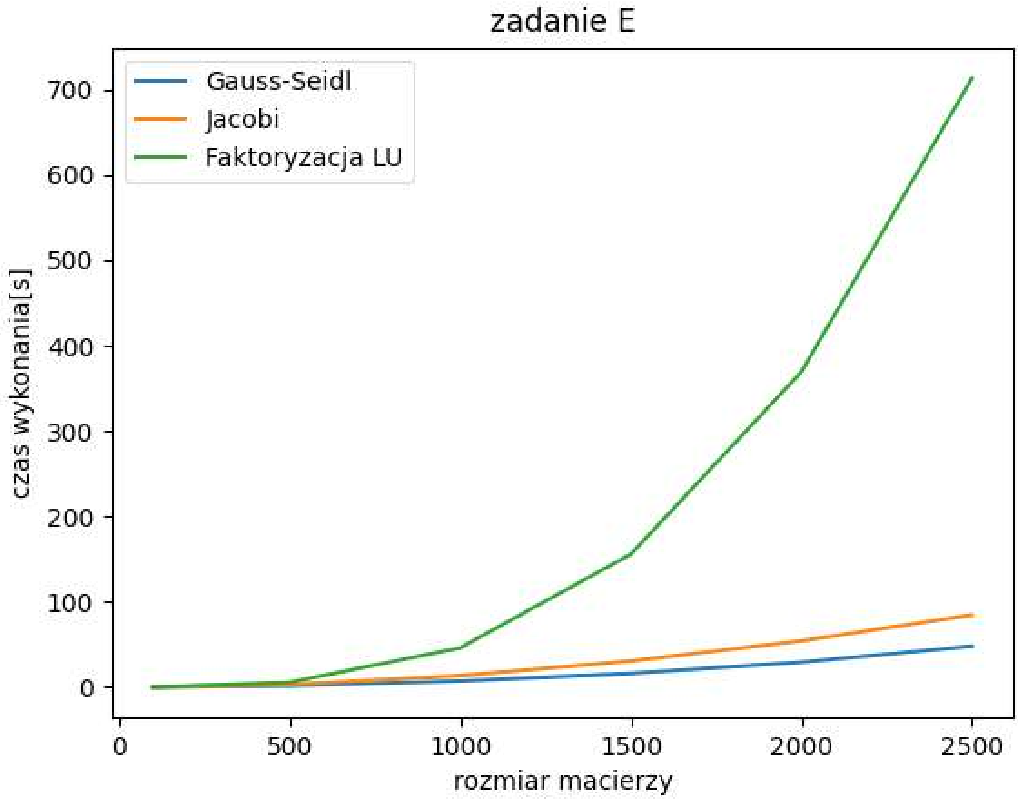
Rys. 2. – Wykres normy błędu kolejnych iteracji metod iteracyjnych dla zadania C

Zadanie D

W takich sytuacjach należy zastosować metody rozwiązania bezpośredniego takie jak faktoryzacja LU, które są wyjątkowo precyzyjne kosztem czasu obliczeń. Dla metody faktoryzacji LU dla układu z zadania C norma błędu wynosi zaledwie ok. 1.70 * 10^-13. Czas wykonania z kolei wynosi ok. 41.10s.

Zadanie E

Algorytmy zostały poddane również analizie pod kątem zależności czasu od rozmiaru danych. Rozmiary danych wynosiły kolejno 100, 500, 1000, 1500, 2000, 2500(macierze i wektor jak w zadaniu A tylko o innych rozmiarach). Przy takim porównaniu można łatwo dostrzec zalety algorytmów iteracyjnych, ponieważ czas ich wykonania rośnie znacząco wolniej(Rys. 3.).



Rys. 3. – Czas wykonania w zależności od rozmiaru danych dla wszystkich 3 metod

Wnioski

Metody iteracyjne są znacznie szybsze i pozwalają osiągnąć żądaną dokładność obliczeń, jednakże nie zawsze można je zastosować, gdyż dla niektórych układów równań, nie są one w stanie zapewnić rozwiązania. Metody bezpośrednie są dokładniejsze i zawsze pozwalają osiągnąć rozwiązanie, lecz dzieje się to kosztem czasu obliczeń przez co używanie metod iteracyjnych jest preferowalne jeśli można je zastosować.