

**V 23**

# **Quantenanalogen**

Donata Osthues  
donata.osthues@tu-dortmund.de

Jonas Rönsch  
jonas.roensch@tu-dortmund.de

Durchführung: 03.06.2020

Abgabe: 19.08.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Motivation</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Akustische Modelle . . . . .	3
2.2	Quantenmechanische Modelle . . . . .	4
2.3	Modell des eindimensionalen Festkörpers . . . . .	5
2.4	Analogien zwischen den Modellen . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>11</b>
5.1	Vorbereitende Versuche . . . . .	11
5.1.1	Bestimmung der Schallgeschwindigkeit . . . . .	11
5.1.2	Vergleich der Datennahme . . . . .	12
5.2	Das Wasserstoffatom . . . . .	15
5.2.1	Vermessung der Kugelflächenfunktion . . . . .	15
5.2.2	Peakaufspaltung . . . . .	20
5.2.3	Bestimmung des Quantenzustandes . . . . .	21
5.3	Das Wasserstoffmolekül . . . . .	23
5.3.1	Resonanzfrequenz in Abhängigkeit des Blendendurchmessers . . . . .	23
5.3.2	Quantenzustand des Wasserstoffmoleküls . . . . .	24
5.4	Der eindimensionale Festkörper . . . . .	26
5.4.1	Austausch der Zylinder . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>30</b>
6.1	Das Wasserstoffmodell . . . . .	31
6.1.1	Vermessung der Kugelflächenfunktionen . . . . .	31
6.1.2	Peakaufspaltung . . . . .	31
6.1.3	Bestimmung des Quantenzustandes . . . . .	31
6.2	Das Wasserstoffmolekül . . . . .	31
6.2.1	Bestimmung des Quantenzustandes . . . . .	32
6.3	Der eindimensionale Festkörper . . . . .	32
	<b>Literatur</b>	<b>32</b>

# 1 Motivation

Ziel dieses Versuches ist, eine Analogie zwischen akustischen und quantenmechanischen Modellen herzustellen. Dabei handelt es sich genauer um eine Resonatorkette aus Hohlzylindern, welche mit der quantenmechanischen Darstellung eines eindimensionalen Festkörpers verglichen werden soll, um einen Kugelresonator der mit einem Wasserstoffatom verglichen werden soll und um eine Kopplung aus zwei Kugelresonatoren, die mit einem Wasserstoffmolekül verglichen werden soll.

## 2 Theorie

### 2.1 Akustische Modelle

Schallwellen, also Gasdruckschwankungen im Raum, breiten sich in verschieden geformten Hohlräumen spezifisch aus und zeigen zu unterschiedlichen Frequenzen unterschiedliche physikalische Phänomene. Grundlage ist dabei das Prinzip der stehenden Wellen. Ein stehendes Wellenmuster bildet sich durch Überlagerung von Wellen und es kommt zu sogenannten Knotenpunkten, -linien oder -flächen im Raum. Das kann beispielsweise passieren, indem eine einlaufende Welle an einer harten Wand reflektiert wird und ihre Wellenlänge einem halbzahligen Vielfachen der Länge der schwingenden Substanz entspricht. Die zu den Wellenlängen gehörigen Frequenzen werden Eigenfrequenzen genannt. Die Beschreibung stehender Wellen benötigt zusätzlich Kenntnis über den Zustand der Randbedingungen der schwingenden Substanz. Wird der eindimensionale Fall einer Welle betrachtet, wird für stehende Wellen der Fall eines festen Endes und der Fall zwei fester Enden betrachtet, welche zu verschiedenen Beschreibungen führen. Dieser Zusammenhang lässt sich auf Wellen in zwei oder drei Dimensionen übertragen. Für diesen Versuch sind Schallwellen in abgeschlossenen Hohlraumresonatoren von Relevanz, sodass sich die entsprechenden Randbedingungen ergeben. Wird ein abgeschlossener Zylinder betrachtet, in welchen ein akustisches Signal eingeleitet wird, dann ist es notwendig, dass sich am Boden und Deckel des Zylinders Knotenpunkte bilden um eine stehende Welle zu realisieren. Das heißt, die Bragg Bedingung

$$n\lambda = 2L = \frac{nc}{f} \quad (1)$$

muss gelten. In dieser Gleichung entspricht  $f$  der Frequenz,  $L$  der Länge des Zylinders,  $n$  die Ordnung der Resonanz und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Die Randbedingungen ergeben sich über die Druckänderungen an beiden Enden. Ist der Körper, in welchen das akustische Signal geleitet wird jedoch kugelförmig, so werden zur Beschreibung der Eigenfrequenz andere mathematische Hilfsmittel benötigt. Eigenmoden des Gases innerhalb einer Kugel sind weiterhin über stationäre Knotenpunkte definiert. Die möglichen Eigenfrequenzen lassen sich zu den entsprechenden Eigenfunktionen, den Kugelflächenfunktionen bestimmen. Sie sind in Gleichung 2 dargestellt, wobei  $P_{lm}(\cos(\theta))$  die zugeordnete Legendre-Polynome sind.

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos(\theta)) \exp(im\phi) \quad (2)$$

Kugelflächenfunktionen setzen sich aus zwei Teilen zusammen. Der eine ist von  $\theta$  abhängig und der andere von  $\phi$ :

$$\Theta_{lm}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos(\theta)), \quad (3)$$

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\phi). \quad (4)$$

Die Beschreibung der Druckverteilung innerhalb eines Kugelresonators wird durch die dreidimensionale Helmholtzgleichung 5 realisiert. In dieser Gleichung entspricht  $p$  dem Druck,  $\kappa$  der Kompressibilität des Gases und  $\rho$  der Dichte.

$$\frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho\kappa} \Delta p(\vec{r}, t) \quad (5)$$

Wenn  $r$  und der Laplace-Operator durch Kugelkoordinaten ausgedrückt werden, lässt sich die resultierende Gleichung durch den Ansatz:

$$p(\theta, \phi, r) = Y_{lm}(\theta, \phi) \cdot R(r) \quad (6)$$

lösen. Dabei wird die Helmholtzgleichung zunächst in zwei Differentialgleichungen geteilt, wobei eine nur winkelabhängig ist und durch die Kugelflächenfunktionen gelöst wird und die andere allein vom Radius abhängt. In diesem Versuch wird der Radius jedoch konstant gehalten.

## 2.2 Quantenmechanische Modelle

Den zentralen Aspekt der Quantenmechanik bildet die Schrödingergleichung 7 eines Teilchens. In dieser Gleichung steht  $\phi(\vec{r}, t)$  für eine Wellenfunktion,  $m$  beschreibt die Masse und  $V$  ein Potential. Durch die Schrödingergleichung ist es möglich, für bestimmte Wellenfunktionen Energieeigenwerte zu den entsprechenden Frequenzen zu finden.

$$i\hbar \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V\right) \phi(\vec{r}, t) \quad (7)$$

Die zentrale Erkenntnis im Bereich der Quantenmechanik beruht auf der Tatsache, dass Wellenfunktionen und die dadurch beschriebenen Teilchen nur für quantisierte Eigenenergien die Schrödingergleichung erfüllen. So ergibt sich für ein freies Elektron beispielsweise die folgende Dispersionrelation:

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2 \quad (8)$$

wobei  $\omega$  der Frequenz und  $k$  der Wellenzahl entspricht. Für den Fall, dass ein Teilchen in einem Potentialtopf gefangen ist, ergeben sich Randbedingungen an die Wellenfunktion des Teilchens. An den Rändern des Topfes muss die Wellenfunktion verschwinden. Dadurch sind notwendigerweise nur stehende Wellen erlaubt, deren Wellenlängen halbzahlige Vielfache der Ausdehnung des Potentialtopfes entsprechen. Wird das Wasserstoffatom betrachtet, muss sowohl das Elektron, als auch das Proton und die Kraft zwischen den beiden durch die Schrödingergleichung beschrieben werden. Zur Lösung dieses Zweikörperproblems, wird die Schwerpunktmassse der Teilchen angesetzt, sodass sich eine spezielle Form der Schrödingergleichung ergibt. Sie wird durch Funktionen gelöst, die die Kugelflächenfunktionen enthalten und von drei Quantenzahlen abhängen. Die für die Lösung des Wasserstoffatoms notwendigen Quantenzahlen sind die Hauptquantenzahl  $n$ , die Drehimpulsquantenzahl  $l$  und die magnetische Quantenzahl  $m$ . Für alle möglichen Kombinationen dieser Indizes lässt sich das Wasserstoffatom lösen bzw. lassen sich Eigenfunktionen aufstellen. Soll ein Wasserstoffion beschrieben werden, handelt es sich um ein Dreikörperproblem, da zwei Protonen mit einem Elektron wechselwirken. Über einen Schwerpunktsansatz wird eine Beschreibung durch elliptische Koordinaten möglich, während es beim Wasserstoffatom noch Kugelkoordinaten waren. In diesem Fall ist es nicht mehr sinnvoll die Drehimpulsquantenzahl zu verwenden, da keine Kugelsymmetrie mehr existiert. Daher wird eine neue Quantenzahl  $\lambda$  eingeführt. Sie beschreibt die Projektion des Drehimpulses auf die Symmetrieachse des Wasserstoffions.

### 2.3 Modell des eindimensionalen Festkörpers

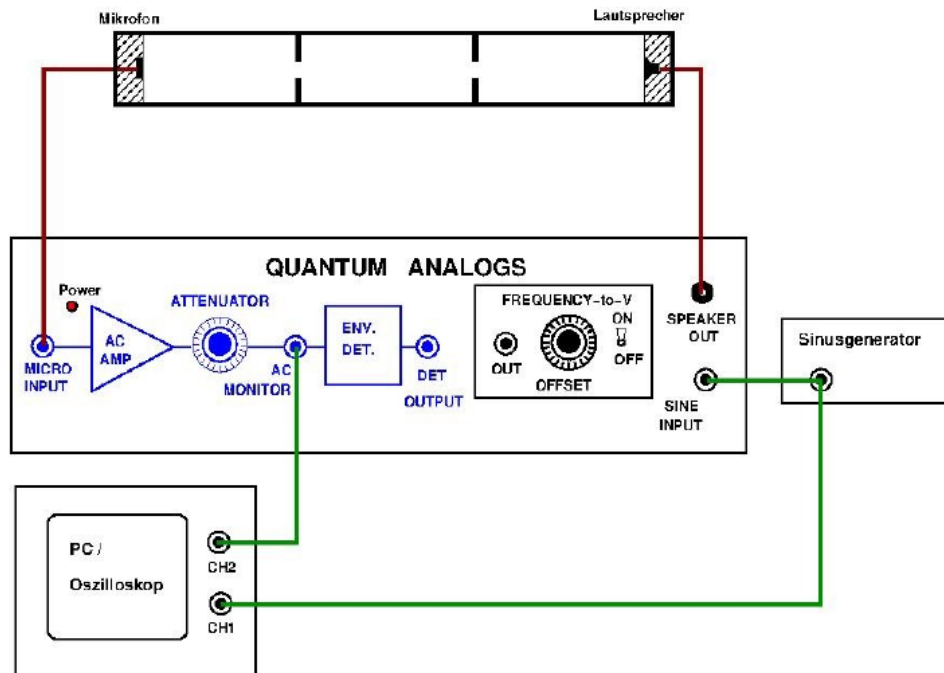
Die Beschreibung eines Festkörpers erfolgt zunächst über die Modelldarstellung durch ein Gitter, durch das die periodisch angeordneten Atome des Festkörpers dargestellt werden können. Für einen eindimensionalen Festkörper benötigt man entsprechend ein eindimensionales Gitter, also eine Aufreihung von äquidistanten Punkten entlang einer Linie. Entsprechend dieser Äquidistanzen, lassen sich periodische Potentiale beschreiben, welche auf Elektronen wirken. Die zugehörige Schrödingergleichung wird mit Blochfunktionen gelöst. Es zeigt sich, dass die Elektronen nicht beliebige Energien einnehmen können, denn es bildet sich eine sogenannte Energielücke heraus, in der keine Energieniveaus besetzt werden können. Diejenigen Energiebereiche, die von Elektronen besetzt werden können, werden Energiebänder genannt und hängen von den Parametern des periodischen Potentials ab. Durch die Tatsache, dass es sich in der Realität nicht um unendlich ausgedehnte Festkörper handelt, sorgen die entsprechenden Randbedingungen dafür, dass selbst innerhalb eines Bandes nur diskrete Energiewerte besetzt werden können.

## 2.4 Analogien zwischen den Modellen

Es ist zu erwarten, dass sich die gemessenen akustischen Eigenfrequenzen der Wellen, welche durch zylindrische Hohlraumresonatoren geleitet werden, mit der Darstellung eines Bändermodells aus der Festkörperphysik beschreiben lassen. Das gleiche wird für den Zusammenhang zwischen den Energiezuständen eines Wasserstoffatoms und den Eigenfrequenzen eines Kugelresonators erwartet, da sich beide über die Kugelflächenfunktionen ausdrücken lassen. Die Erweiterung auf ein Wasserstoffmolekül, ließe sich dann entsprechend durch zwei Hohlraumresonatoren modellieren, da deren Eigenfunktionen einen elliptisch geformten Raum durchlaufen und die Beschreibung eines Wasserstoffmoleküls ebenfalls durch elliptische Koordinaten erfolgt und sich über die Kugelflächenfunktionen lösen lässt, aus denen sich auch die Eigenfunktionen der gekoppelten Kugelresonatoren bilden lassen. Dieses Kapitel wurde mit Hilfe der Literaturen [4], [2] und [3] erstellt.

### 3 Versuchsaufbau

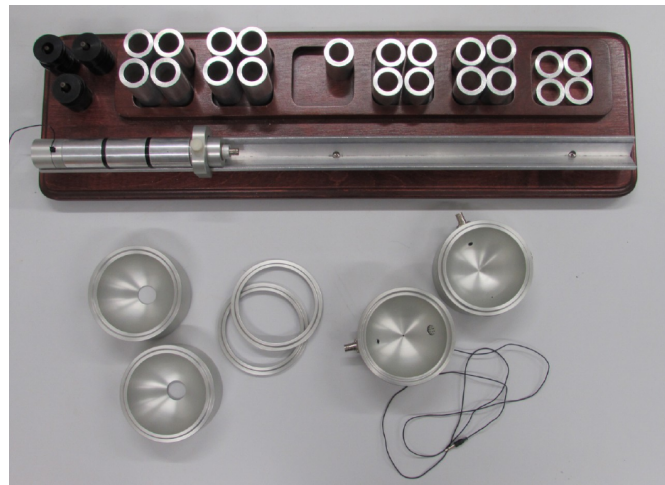
Die wichtigsten Bausteine dieses Versuches sind der Lautsprecher und das Mikrofon, sowie die damit verbundenen Steuerelektronik. Sie werden für jeden Versuchsteil benötigt. Innerhalb dieser Steuerelektronik befindet sich ein Frequenz-Spannungskonverter, der es ermöglicht Frequenzspektren auf einem Oszilloskop oder Computer zu visualisieren. Auf dem Computer erfolgt die Darstellung mit dem Programm SpectrumSLC. Der Lautsprecher ist mit einem Sinusgenerator verbunden, über den die passenden Frequenzen erzeugt werden können.



**Abbildung 1:** Diese Abbildung zeigt, die in diesem Versuch verwendete Schaltung. Im oberen Teil der Abbildung ist eine Metallschiene zu sehen, auf welcher Aluminiumzylinder eingespannt und mit einer Frequenz durchlaufen werden können. An dieser Stelle kann alternativ auch der Kugelresonator bzw. die Kombination aus zwei Kugelresonatoren eingebaut werden. Rechts im Bild befindet sich der Sinusgenerator, welcher die Schallfrequenzen erzeugen kann. Links unten befindet sich das Zweikanaloszilloskop oder alternativ ein Computer mit dem Programm SpectrumSLC. Die Schnittstelle Quantum Analogs verbindet alle Komponenten in der richtigen Reihenfolge miteinander. An diesem Gerät können auch zusätzliche Einstellungen wie Signalverstärkungen oder -verschwächerungen vorgenommen werden [4].

Für unterschiedliche Versuchsteile werden verschiedene Hohlraumresonatoren benötigt:

- eindimensionaler Festkörper:
  - Aluminiumzylinder der Längen: 12,5 mm, 50 mm und 75 mm
  - Blenden der Durchmesser: 10 mm, 13 mm und 16 mm
- Wasserstoffatom:
  - Kugelresonator aus zwei Halbkugeln
  - Mikrofon in einer Halbkugel,  $45^\circ$  relativ zur Horizontalen eingebaut
  - Lautsprecher in der anderen Halbkugel,  $45^\circ$  relativ zur Horizontalen,  $180^\circ$  relativ zum Mikrofon eingebaut
  - zwei Ringe (3 mm und 9 mm Dicke) die zwischen die Halbkugeln gelegt werden können
- Wasserstoffmolekül:
  - Kugelresonator aus zwei Halbkugeln wie beim Wasserstoffatom
  - zwei weitere Halbkugeln mit je einer Öffnung
  - zwei Blenden (10 mm und 16 mm Durchmesser), die zwischen den Kugeln befestigt werden können



**Abbildung 2:** In dieser Abbildung sind die Baukomponenten der einzelnen Versuchsteile dargestellt. Im oberen Bildbereich sind die Aluminiumzylinder und die zugehörigen schwarzen Blenden zu sehen, darunter befindet sich die Metallschiene auf der die Zylinder aufgereiht und zur Frequenzmessung positioniert werden können. Im unteren Bildbereich sind rechts die beiden Hälften des Kugelresonators mit Lautsprecher und Mikrofon, mittig die Zwischenringe und links die beiden Halbkugeln mit Öffnungen abgebildet [4].



## 4 Versuchsdurchführung

Dieser Versuch ist in vier Messsegmente gegliedert. Zunächst wird die Resonanzfrequenz von hintereinander gereihten Aluminiumzylindern verschiedener Anzahl gesucht. Danach werden Wasserstoffatom und das Wasserstoffmolekül aus den zugehörigen Bauteilen (siehe Kapitel 3) zusammengesetzt, um weitere Frequenzspektren aufzunehmen und später mit Kugelflächenfunktionen vergleichen zu können. Als letztes werden bis zu 12 Aluminiumzylinder aufgereiht, wobei sich Blenden mit unterschiedlichem Durchmesser zwischen ihnen befinden. Die aufgenommenen Frequenzspektren werden mit Frequenzen deren Ursprung Schwingungen in einem eindimensionalen Festkörper waren, in Zusammenhang gebracht.

### 1. Vorbereitung:

Als erstes wird ein Aluminiumzylinder in die Metallschiene gelegt, sodass sich Mikrofon und Lautsprecher jeweils an einer Öffnung des Zylinders befinden. Das System wird an ein Zweikanaloszilloskop und ein Sinusgenerator angeschlossen. Die Schallfrequenz wird von 6,75 kHz ausgehend erhöht, bis die erste und zweite Resonanzfrequenz erreicht wird. Beide Frequenzen werden mit der zugehörigen Schalldruckamplitude und Phasenverschiebung notiert. Die Messung wird danach für zwei bis sechs Zylinder wiederholt. Die Messreihe wird für jede Zylinderanzahl ein weiteres Mal wiederholt, während ein Computer mit dem Programm SpectrumS-LC anstelle des Oszilloskops zur Visualisierung des Frequenzspektrums an die Metallschiene angeschlossen wird.

### 2. Wasserstoffatom:

Das Wasserstoffatommodell wird so zusammengesetzt, dass sich Lautsprecher und Mikrofon in einem Winkel von  $180^\circ$  zueinander befinden. Dann wird mit ein Sinusgenerator und ein Zweikanaloszilloskop angeschlossen. Während der Frequenzbereich zwischen 100 Hz und 100 kHz schrittweise abgelaufen wird, werden die Amplituden, Phasenverschiebungen und Resonanzfrequenzen bis zur elften Ordnung aufgeschrieben. Die Messung wird mit einem Computer im Programm SpectrumSLC für ein kontinuierliches Frequenzspektrum im selben Bereich wiederholt. Danach wird der Winkel zwischen Lautsprecher und Mikrofon in  $10^\circ$  Schritten zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  verstellt, während für die zweite, vierte und sechste Resonanzfrequenz die Amplitude aufgenommen wird. Für die folgenden Messungen wird die Signalfrequenz konstant auf 2,3 kHz und der Winkel zunächst auf  $180^\circ$  eingestellt. Dabei wird für jeden Zwischenring und jede mögliche Kombination aus Zwischenringen ein Frequenzspektrum aufgenommen. Während der 9 mm Zwischenring eingespannt ist, wird zusätzlich eine Amplitudenverteilung in Abhängigkeit des Winkels zwischen Mikrofon und Lautsprecher aufgenommen. Dabei wird erneut der Bereich zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  in  $10^\circ$  Schritten abgelaufen.

3. Wasserstoffmolekül:

Um das Wasserstoffmolekül aufzubauen werden zwischen die Halbkugeln des Wasserstoffatoms zwei Halbkugeln mit einer Öffnung geschraubt, sodass sich zwei Kugeln ergeben, die durch eine Öffnung miteinander verbunden sind. In diese Öffnung wird für die erste Messung eine Blende mit einem Durchmesser von 10 mm und für die zweite Messung eine Blende mit dem Durchmesser 16 mm eingespannt. Dann wird ein Frequenzspektrum bei einer Resonanzfrequenz von 2,3 kHz aufgenommen. Bei der 16 mm Blende wird zusätzlich eine Winkelverteilung in analogen Schritten wie bei der Durchführung zum Wasserstoffatom aufgenommen.

4. eindimensionaler Festkörper:

Für diesen Versuchsteil wird zunächst das Frequenzspektrum für einen 50 mm Zylinder aufgenommen. Daraufhin wird eine 13 mm Blende und ein weiterer Zylinder angehängt, sodass ein neues Frequenzspektrum aufgenommen werden kann. Das Verfahren wird solange wiederholt bis eine Kette von 12 Zylindern und 11 Blenden erreicht ist. Danach wird einer der Zylinder erst durch einen 75 mm Zylinder und dann durch zwei 12,5 mm ersetzt. Beide Male wird das zugehörige Spektrum aufgenommen. Das letzte Frequenzspektrum wird ebenfalls für 12 Zylindern und 11 Blenden aufgenommen, wobei alle Zylinder eine Länge von 50 mm haben, die Blenden jedoch abwechselnd einen Durchmesser von 13 mm und 16 mm aufweisen müssen.

## 5 Auswertung

### 5.1 Vorbereitende Versuche

Zur Vorbereitung werden zwei Versuche durchgeführt. Als erstes wird die Schallgeschwindigkeit über die Resonanzfrequenzen bestimmt. Danach wird ein Vergleich zwischen der Datennahme mittels Oszilloskop und mit Hilfe des Programms **SpectrumSLC** gezogen.

#### 5.1.1 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

Aus (1) kann die Schallgeschwindigkeit über die Differenz der Resonanzfrequenzen bestimmt werden. Hierfür werden die Frequenzen gegen die Länge der Röhren aufgetragen. Die Länge der Röhren ist bekannt, da nur Röhren der gleichen Länge hinzugefügt werden.

**Tabelle 1:** Messwerte für die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

Länge /mm	erste Resonanz /kHz	zweite Resonanz /kHz	Differenz /kHz
50	6,87	10,28	3,41
100	6,89	8,6	1,71
150	6,895	8,05	1,16
200	6,897	7,759	0,86
250	6,9	7,59	0,69
300	6,9	7,477	0,58

Durch die Messwerte aus 1 wird die Funktion

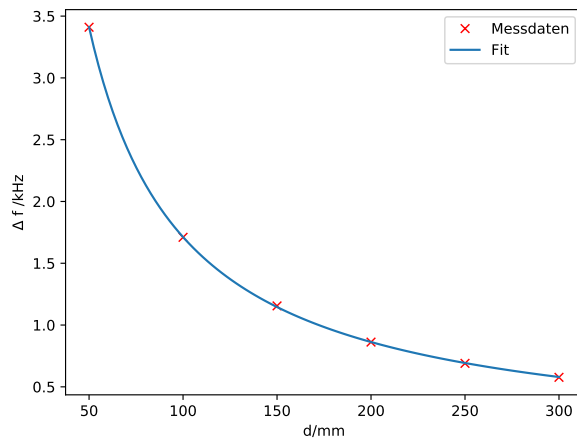
$$f(x) = a \frac{1}{x} + b$$

gefittet.

Mit der Gleichung

$$nc = 2df + b = 2a + b$$

kann die Schallgeschwindigkeit bestimmt werden.



**Abbildung 3:** Messwerte und Fitfunktion für die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

Die Parameter der Funktion sind:

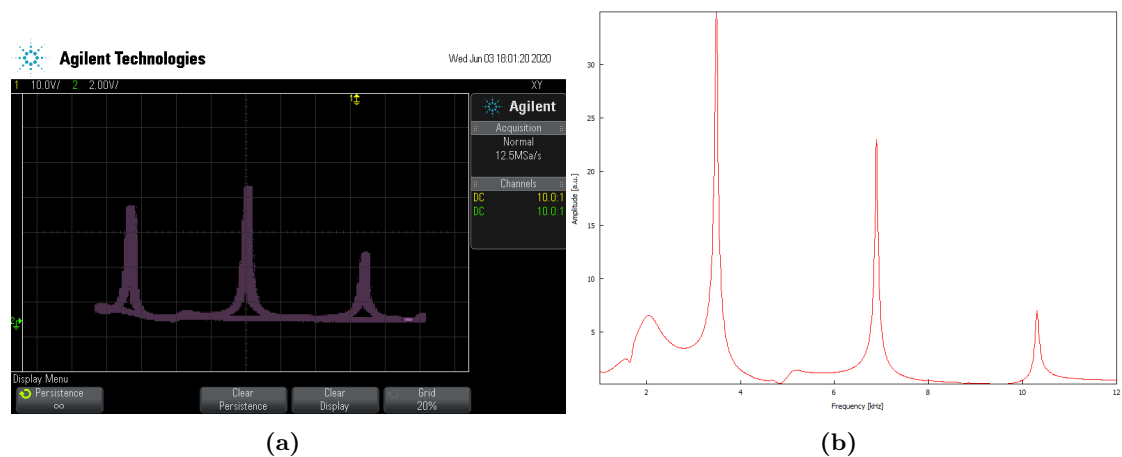
$$a = 169,9 \pm 0,3$$

$$b = 0,013 \pm 0,003$$

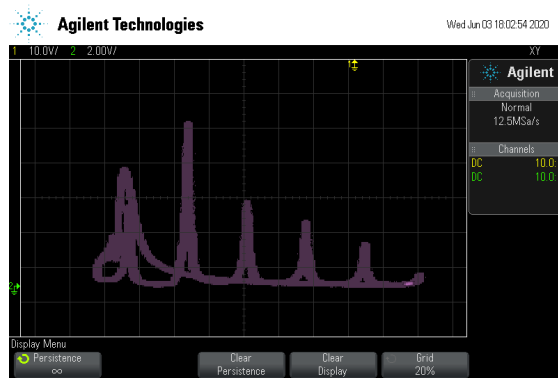
Daraus kann der Wert  $c = (339,8 \pm 0,7)$  m/s bestimmt werden.

### 5.1.2 Vergleich der Datennahme

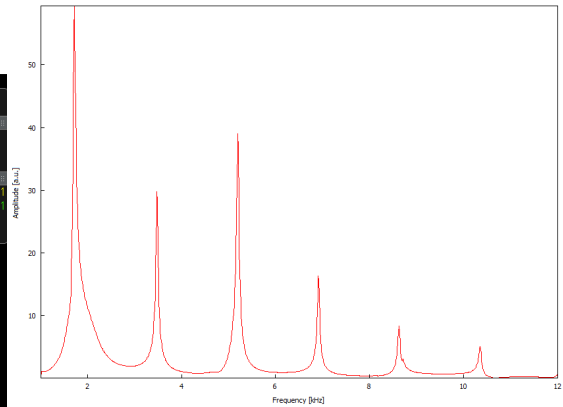
Um die beiden Methoden der Datennahme zu testen wird das Spektrum des Zylinders vermessen. Hierbei wird die Anzahl der Zylinder schrittweise von eins auf sechs erhöht.



**Abbildung 4:** Spektrum von einem Zylinder mittels (a) Oszilloskop, (b) SpectrumSLC

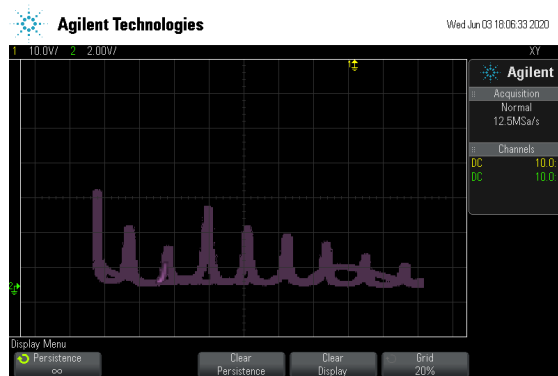


(a)

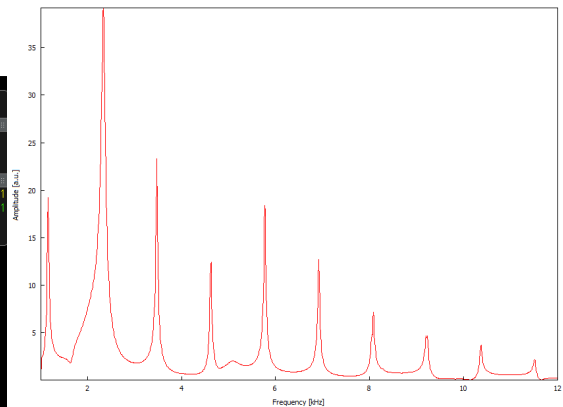


(b)

Abbildung 5: Spektrum von zwei Zylindern mittels (a) Oszilloskop, (b) SpectrumSLC

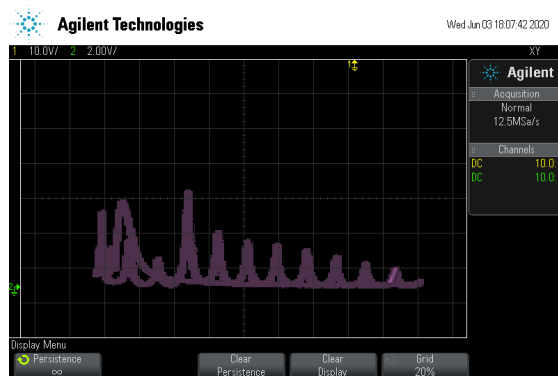


(a)

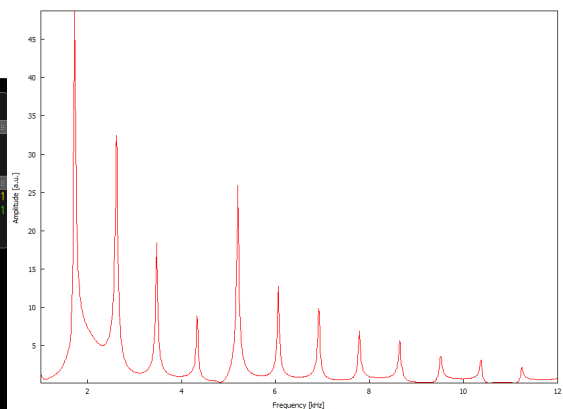


(b)

Abbildung 6: Spektrum von drei Zylindern mittels (a) Oszilloskop, (b) SpectrumSLC



(a)



(b)

Abbildung 7: Spektrum von vier Zylindern mittels (a) Oszilloskop, (b) SpectrumSLC

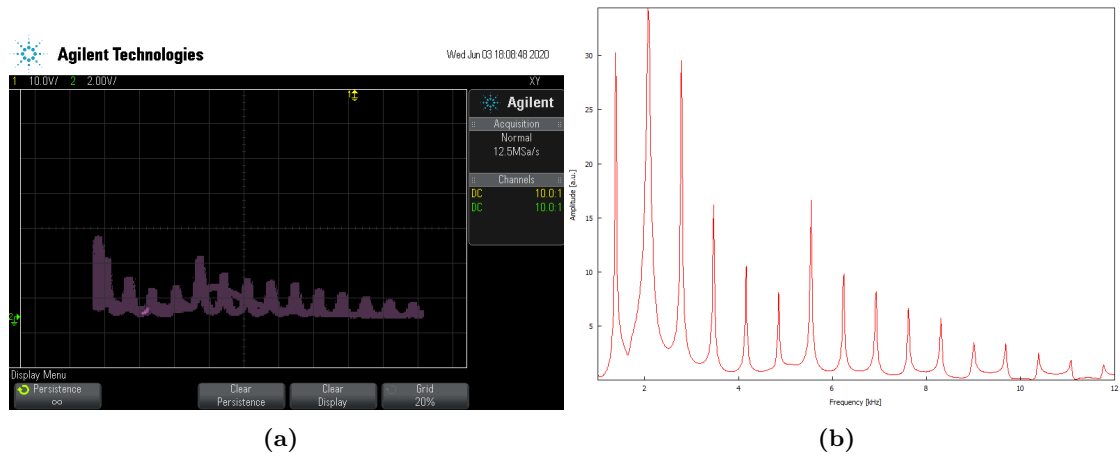


Abbildung 8: Spektrum von fünf Zylindern mittels (a) Oszilloskop, (b) SpectrumSLC

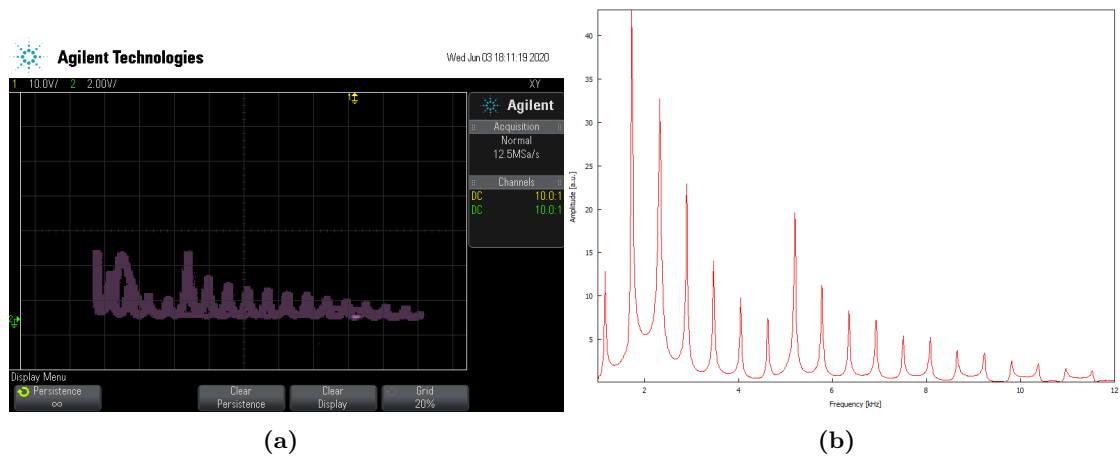


Abbildung 9: Spektrum von sechs Zylindern mittels (a) Oszilloskop, (b) SpectrumSLC

Wie an den Bildern erkennbar ist, misst das Programm **SpectrumSLC** präziser. Die Positionen der Maxima ändern sich nicht aufgrund der unterschiedlichen Messmethoden. Außerdem kann das Programm die Daten abspeichern. Das vereinfacht die Auswertung der folgenden Messreihen.

## 5.2 Das Wasserstoffatom

Für den ersten Versuch dieser Messreihe, werden die Frequenzen von 100 Hz bis 10 kHz vermessen. Die Resonanzfrequenzen sind in Tabelle 2 aufgelistet.

**Tabelle 2:** Messwerte für die Bestimmung der Ordnung der Resonanzfrequenz

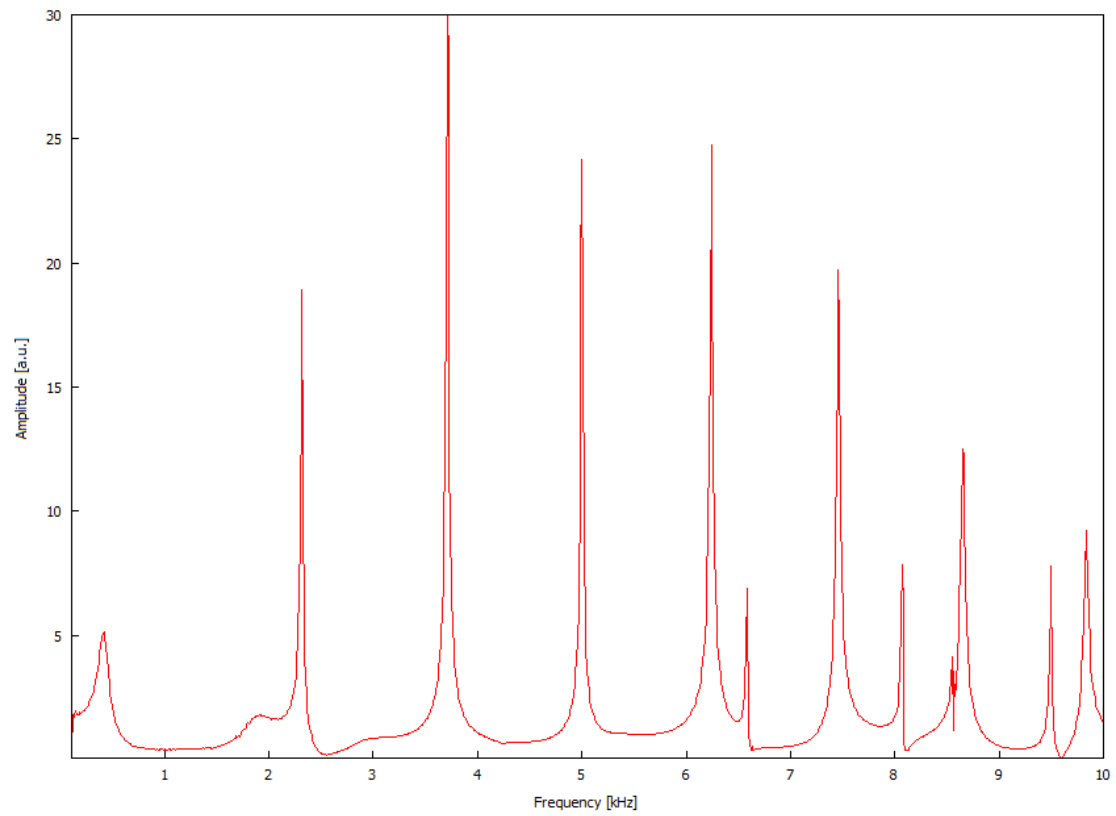
Ordnung	Resonanzfrequenz /kHz	Amplitude /mV	Phasenverschiebung /°
1	0,4376	160	0 – 30
2	2,3164	150	–20 – 4
3	3,7095	150	–20 – 0
4	5,0074	160	–20 – 0
5	6,2361	160	–20 – 0
6	6,5908	160	–20 – 4
7	7,4648	160	–15 – 7
8	8,0705	165	–20 – 0
9	8,6602	170	–30 – (–5)
10	9,5068	170	–30 – (–5)
11	9,8462	175	–15 – 3

Die Resonanzen können auch mittels des Frequenzspektrometers dargestellt werden.

### 5.2.1 Vermessung der Kugelflächenfunktion

In dieser Messreihe werden für drei verschiedene Resonanzen die Druckamplituden in Abhängigkeit des Drehwinkels  $\alpha$  vermessen. Es werden die Resonanzen der zweiten, vierten und sechsten Ordnung aus Tabelle 2 verwendet.

**Abbildung 10:** Frequenzspektrum des Kugelresonators





**Tabelle 3:** Messwerte für die Bestimmung der Ordnung der Kugelflächenfunktion

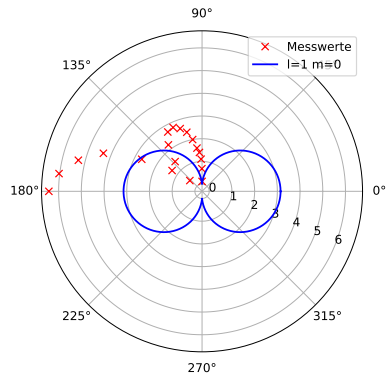
Winkel $\alpha$ /°	Winkel $\theta$ /°	Amplitude 2 /mV	Amplitude 4 /mV	Amplitude 6 /mV
0	90,0	160	0,12	1,37
10	90,4	160	0,68	1,45
20	91,7	160	1,1	1,29
30	93,8	160	1,4	1,05
40	96,7	160	1,6	1,37
50	100,3	160	2,0	1,21
60	104,5	160	2,37	0,88
70	109,2	160	2,61	0,8
80	114,4	160	2,77	0,72
90	120,0	160	2,7	0,84
100	125,9	160	2,21	1,13
110	132,1	160	1,45	1,37
120	138,6	160	0,4	1,69
130	145,2	160	1,29	2,01
140	152,0	160	2,69	2,29
150	158,9	160	4,34	2,61
160	165,9	160	5,3	2,85
170	172,9	160	6,03	3,34
180	180,0	160	6,43	3,26

In der Tabelle 3 wird der Winkel  $\theta$  mit der Funktion (9) aus  $\alpha$  bestimmt.

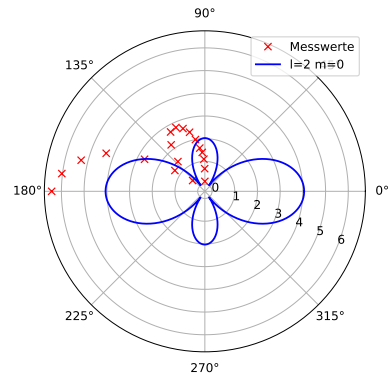
$$\theta(\alpha) = \arccos\left(\frac{1}{2} \cos(\alpha) - \frac{1}{2}\right) \quad (9)$$

Wie aus Tabelle 3 abzulesen werden kann, ist die Druckamplitude der zweiten Resonanz winkelnunabhängig, daher müssen die Quantenzahlen  $l = 1, m = 0$  sein.

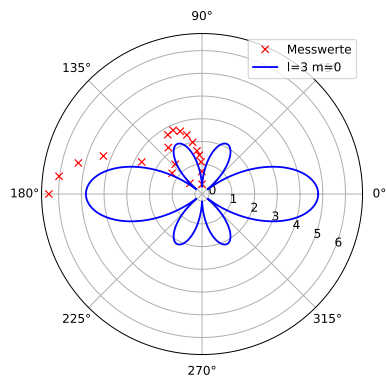
Die Druckamplitude wird in einem Polarplot gegen  $\theta$  aufgetragen. Dazu werden verschiedene Kugelflächenfunktionen geplottet, um diese miteinander vergleichen zu können. Da ohne Zwischenring keine Aufspaltung in  $m$  zu sehen ist, wird  $m = 0$  gesetzt. Die Kugelflächenfunktion werden somit nur in Abhängigkeit von  $\theta$  geplottet.



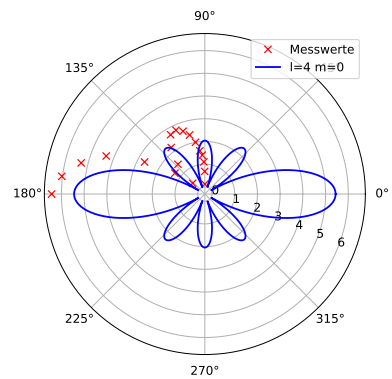
(a)



(b)

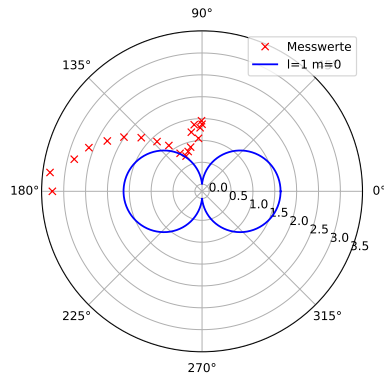


(c)

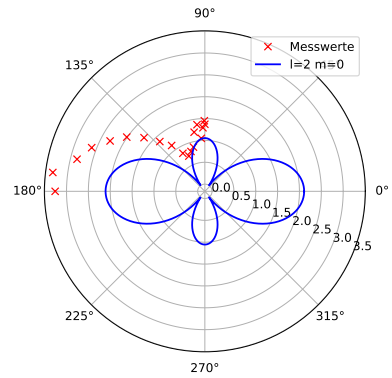


(d)

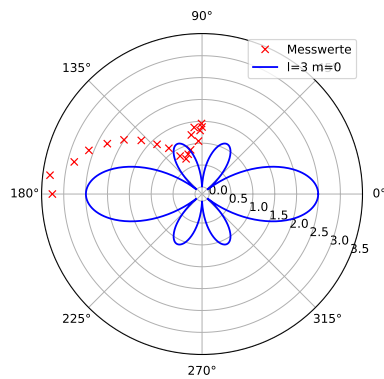
**Abbildung 11:** Winkelabhängigkeit der Druckamplitude bei einer Resonanzfrequenz von 5,0074 kHz und verschiedene Kugelflächenfunktionen.



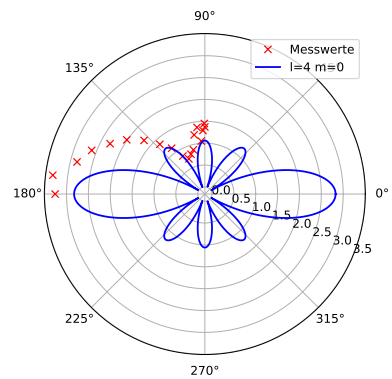
(a)



(b)



(c)



(d)

**Abbildung 12:** Winkelabhängigkeit der Druckamplitude bei einer Resonanzfrequenz von 6,5908 kHz und verschiedene Kugelflächenfunktionen.

Bei Betrachtung der Abbildungen 11 kann geschlussfolgert werden, dass die gemessene Verteilung der Kugelflächenfunktion mit  $l = 3$  ähnelt.

Die gemessene Verteilung bei der Resonanzfrequenz von 6,5908 kHz ähnelt der Kugelflächenfunktion von  $l = 2$ , da diese aufgrund der höheren Frequenz eigentlich höher energetisch sein muss, muss die radiale Mode sich um einen erhöht haben.

### 5.2.2 Peakaufspaltung

Bei dieser Messreihe wird die Peakaufspaltung der Resonanzfrequenz von 2,3 kHz vermessen, indem verschieden dicke Ringe zwischen den Halbkugeln des Kugelresonators eingefügt werden. Die dafür benötigten Messdaten sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

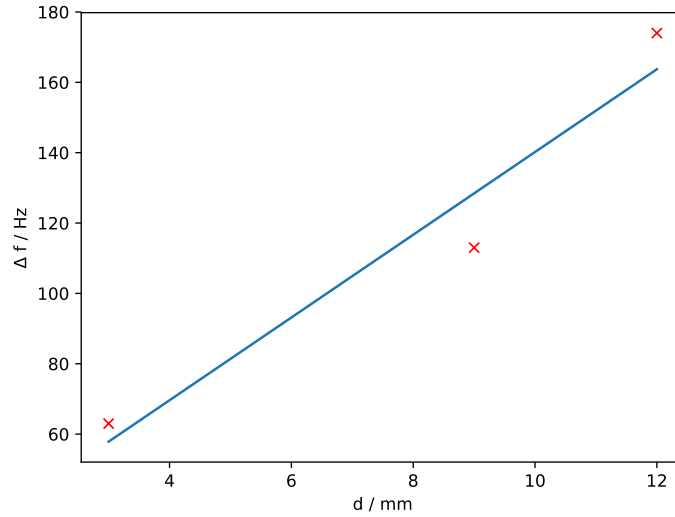
**Tabelle 4:** Messwerte für die Bestimmung des Zusammenhangs zwischen der Dicke des Zwischerings und der Aufspaltung der Resonanzfrequenz

Dicke / mm	erste Resonanz / kHz	zweite Resonanz / kHz	Differenz / kHz
3	2239	2302	63
9	2173	2286	113
12	2103	2277	174

Aufgrund der wenigen Kombinationsmöglichkeiten der beiden Zwischenringe, können für diesen Versuch nur drei Messwerte aufgenommen werden. Da aus drei Punkten nicht auf komplexe Funktionen geschlossen werden kann, wird der Zusammenhang als linear angenommen. Dafür wird die Funktion (10) durch die Daten gefittet.

$$f(x) = ax + b \quad (10)$$

**Abbildung 13:** Messdaten und Fit für den Zusammenhang zwischen Zwischenringdicke und Peakaufspaltung



In der Abbildung 13 sind die Parameter auf

$$a = 12 \pm 3$$

$$b = 23 \pm 26$$

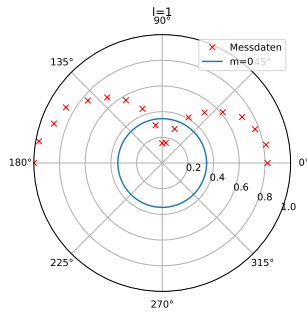
bestimmt worden.

### 5.2.3 Bestimmung des Quantenzustandes

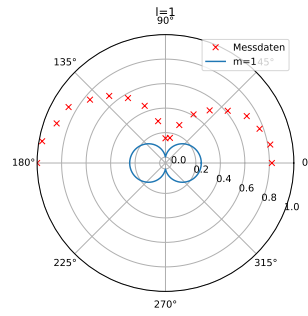
Um die Quantenzahlen des Zustandes zu bestimmen, wird ein Zwischenring der Dicke  $d = 9 \text{ mm}$  eingefügt. Da der Zwischenring die Symmetrie der Kugel bricht, gibt es jetzt eine Vorzugsrichtung. Dadurch ist der  $\alpha$ -Winkel der  $\phi$ -Winkel der Kugelflächenfunktion und die Ausrichtung des Mikrofons wird durch den  $\theta$ -Winkel charakterisiert. Bei einer Frequenzen von  $2,3 \text{ kHz}$  wird die winkelabhängige Druckamplitude vermessen, mit dem vorherigen Versuch konnte für diese Frequenz  $l = 1$  bestimmt werden. Die Messdaten sind in Tabelle 5 aufgelistet.

**Tabelle 5:** Messwerte für die Bestimmung des Quantenzustandes bei einer Resonanzfrequenz von 2,3 kHz und einem Zwischenring der Dicke  $d = 9$  mm

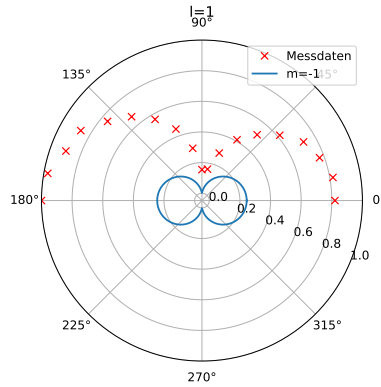
Winkel $\phi$ /°	Amplitude /mV
0	640
10	640
20	600
30	560
40	480
50	400
60	320
70	220
80	125
90	120
100	233
110	350
120	440
130	520
140	590
150	675
160	700
170	760
180	780



**Abbildung 14:** Winkelabhängigkeit der Druckamplitude bei einer Resonanzfrequenz von 2,3 kHz und Kugelflächenfunktion mit  $l = 1, m = -1$ .



**Abbildung 15:** Winkelabhängigkeit der Druckamplitude bei einer Resonanzfrequenz von 2,3 kHz und Kugelflächenfunktion mit  $l = 1, m = +1$ .



**Abbildung 16:** Winkelabhängigkeit der Druckamplitude bei einer Resonanzfrequenz von 2,3 kHz und Kugelflächenfunktion mit  $l = 1, m = -1$ .

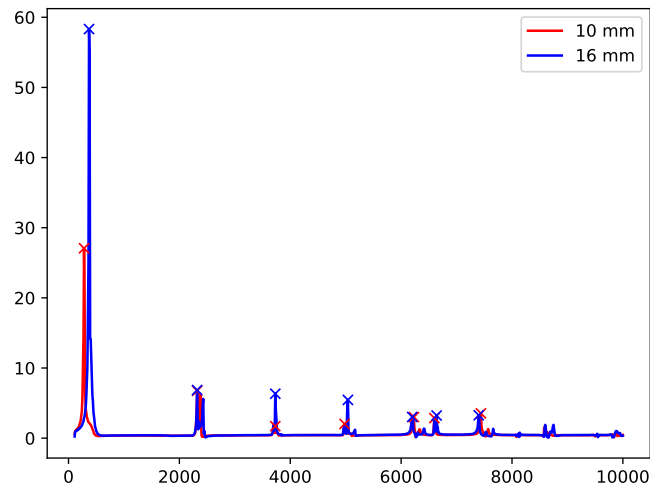
Wie in Abbildung 16 zu sehen ist, ähnelt der Zustand am meisten den  $l = 1, m = \pm 1$  Kugelflächenfunktionen.

### 5.3 Das Wasserstoffmolekül

Für die folgenden Versuchsteilen werden zwei Kugelresonatoren übereinander gesteckt und mit einem Loch in der Mitte in Verbindung gebracht.

#### 5.3.1 Resonanzfrequenz in Abhängigkeit des Blendendurchmessers

Da nur zwei Blenden zu Verfügung standen, kann auch hier nur ein linearer Zusammenhang in Erwägung gezogen werden. Die beiden Spektren werden mit einer Blende mit einem Durchmesser von  $d = 10 \text{ mm}$  und  $d = 16 \text{ mm}$  aufgenommen. Die Spektren sind in Abbildung 17 zu sehen.



**Abbildung 17:** Spektren für den Zusammenhang zwischen den Resonanzfrequenzen und dem Blendendurchmesser.

Die Resonanzen sind in Tabelle 6 aufgelistet.

**Tabelle 6:** Resonanzen für den Zusammenhang zwischen Resonanzfrequenz und Blendendurchmesser.

Durchmesser $d = 10$ mm	Durchmesser $d = 16$ mm	
Frequenz $f/\text{Hz}$	Frequenz $f/\text{Hz}$	Differenz $\Delta f/\text{Hz}$
280	370	90
2320	2320	0
3730	3730	0
4980	5040	60
6230	6200	-30
6600	6640	40
7440	7400	-40

Wie an den den Differenzen aus Tabelle 6 zu erkennen ist, kann aus diesen Daten kein Zusammenhang zwischen Blendendurchmesser und Resonanz gezogen werden.

### 5.3.2 Quantenzustand des Wasserstoffmoleküls

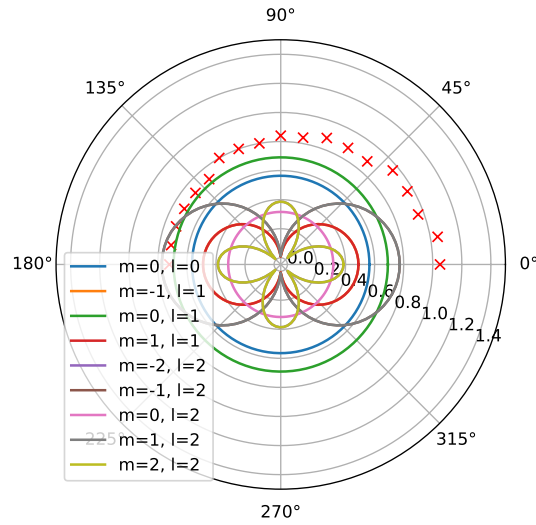
Für die Bestimmung des Quantenzustandes des Wasserstoffmoleküls wird die Druckamplitude in Abhängigkeit des Drehwinkels vermessen. Hierbei ist die Frequenz auf 2,3 kHz eingestellt. Die gemessenen Daten sind in Tabelle 7 aufgelistet.



**Tabelle 7:** Daten für die Bestimmung des Quantenzustandes des Wasserstoffmoleküls

Drehwinkel $\alpha/^\circ$	Druckamplitude / V
0	1,05
10	1,05
20	0,96
30	0,96
40	0,96
50	0,88
60	0,88
70	0,88
80	0,84
90	0,84
100	0,8
110	0,8
120	0,8
130	0,72
140	0,72
150	0,72
160	0,72
170	0,72
180	0,72

Die Daten werden in Abbildung 18 dargestellt.

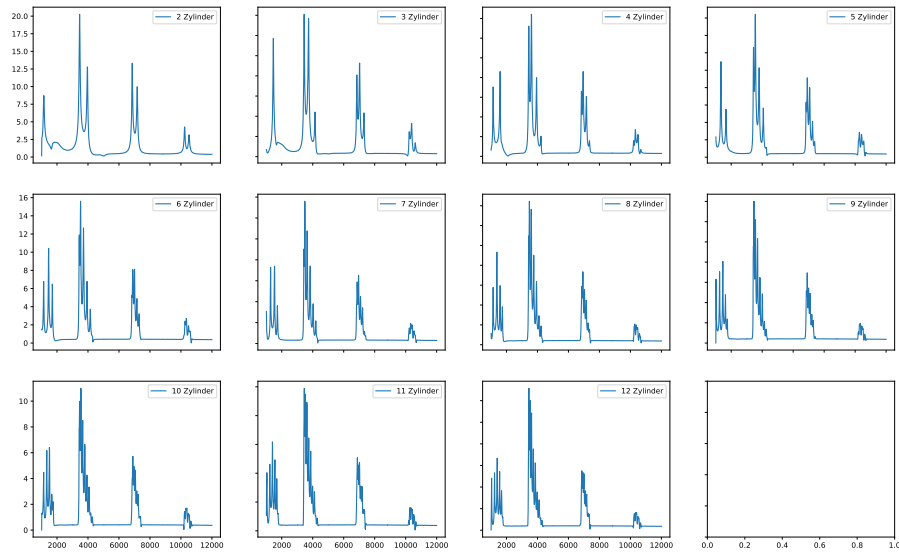


**Abbildung 18:** Messdaten und verschiedene Kugelflächenfunktionen, für die Bestimmung des Quantenzustandes

Aufgrund der aufgenommenen  $\phi$ -Abhängigkeit kann nur ein  $\sigma$  Zustand in Betracht kommen. Da der Zustand energetisch nahe am  $l = 1, m = 0$ -Zustand des ungestörten Wasserstoffatoms liegt und der Molekülzustand aus den Zuständen des Wasserstoffatoms zusammengesetzt ist, wird es ein  $2\sigma$ -Zustand sein. Ungrade und grade Zustände können weiter unterschieden werden, in dem der Phasenunterschied in den beiden Kugelhälften mit verwendet wird.

## 5.4 Der eindimensionale Festkörper

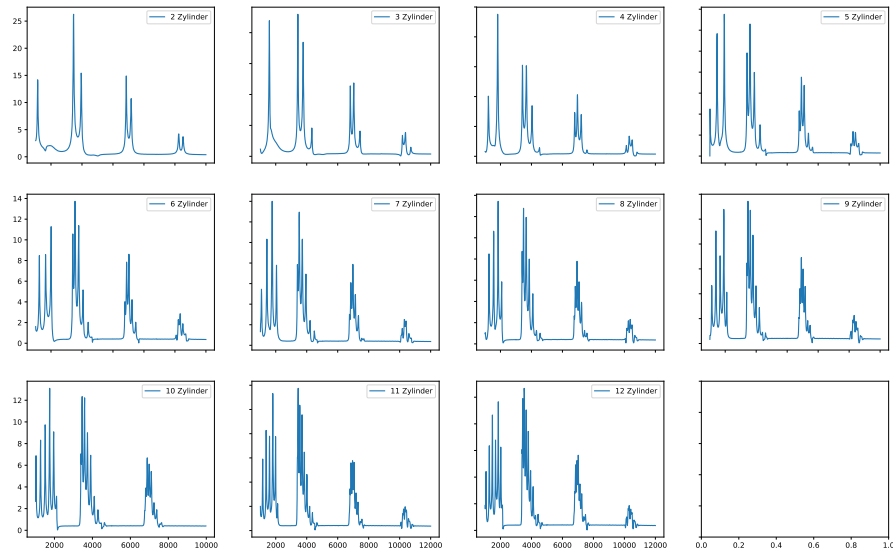
Für die Simulation eines eindimensionalen Festkörpers werden Zylinder mit einer Länge von 50 mm verwendet. Diese werden durch verschiedene Blenden voneinander getrennt.



**Abbildung 19:** Resonanzen der Zylinderketten mit unterschiedlichen Längen und jeweils einer 10 mm Blende

Wie Abbildung 19 vermuten lässt, werden die Resonanzen durch mehr Zylinder aufgespalten. Die Aufspaltung entspricht der Anzahl an Zylindern.

Diese Versuchsreihe wird wiederholt, wobei die Blenden einen Durchmesser von 13 mm haben.

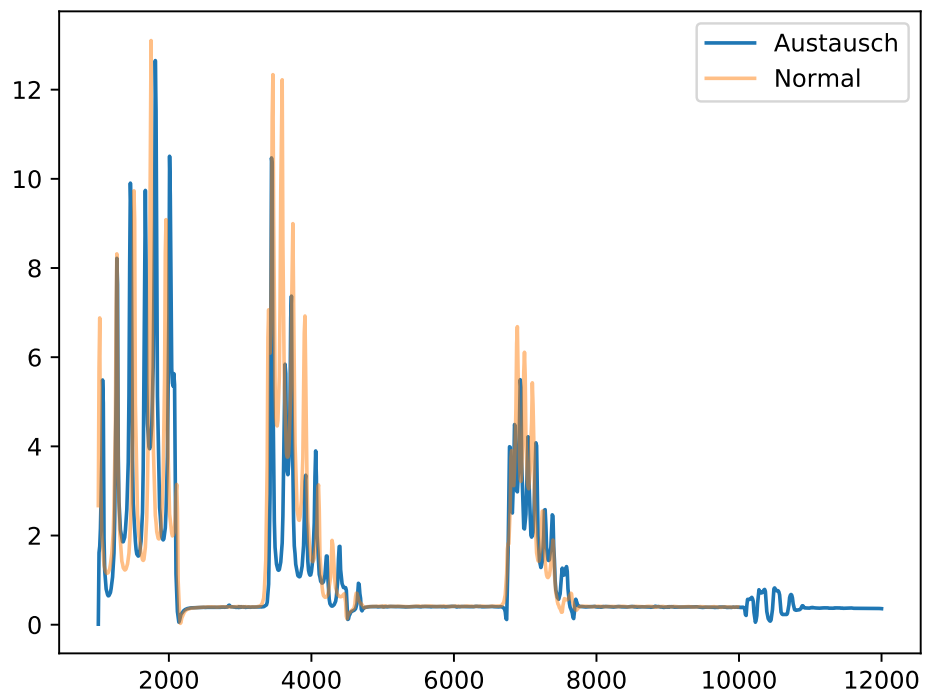


**Abbildung 20:** Resonanzen der Zylinderketten mit unterschiedlichen Längen und jeweils einer 13 mm Blende

Wenn die Abbildungen 19 und 20 verglichen werden, ist zu sehen, dass die Aufspaltungen bei Blenden von 13 mm weiter auseinander sind.

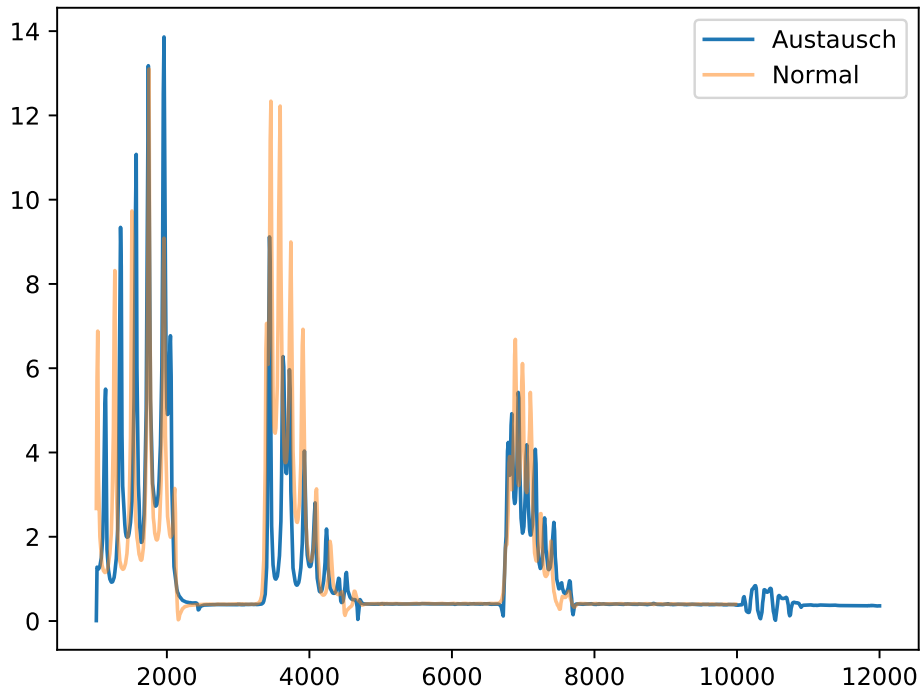
#### 5.4.1 Austausch der Zylinder

Im Folgenden werden einzelne Zylinder ausgetauscht. Einmal wird ein Zylinder der Länge 75 mm eingesetzt und einmal werden zwei Zylinder der Länge 12,5 mm hintereinander gesetzt, wobei zwischen ihnen keine Blende verwendet wird.



**Abbildung 21:** Resonanzen der Zylinderketten mit 10 Zylindern, wobei ein Zylinder mit einem Zylinder der Länge 75 mm ausgetauscht wird

Wie an der Abbildung 21 zu sehen ist, sind die Resonanzen weniger ausgeprägt.



**Abbildung 22:** Resonanzen der Zylinderketten mit 10 Zylindern, wobei bei ein Zylinder mit zwei Zylinder der Länge 12,5 mm ausgetauscht wird

In Abbildung 22 ist zu sehen, dass die erste Resonanz erhöht ist. Die anderen sind allerdings wieder weniger ausgeprägt. Bei beiden Spektren ist zu sehen, dass zwischen ein weiterer schwach ausgeprägter Peak zwischen Peak eins und Peak zwei entsteht. Beim 75 mm Zylinder ist der neu entstandene Peak näher beim zweiten Peak und beim 12,5 mm Zylinder ist dieser näher beim ersten Peak. Der 75 mm Zylinder kann als Donator und der 12,5 mm Zylinder als Akzeptor gesehen werden.

## 6 Diskussion

Bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit wurde ein Wert von  $(339,8 \pm 0,7)$  m/s ermittelt. Die relative Unsicherheit des Wertes liegt bei 0,2%. Der Theoriewert der Schallgeschwindigkeit bei einer Temperatur von 20 °C liegt bei 343,2 m/s [1]. Der Theoriewert liegt nicht in der Unsicherheit des gemessenen Wertes. Das kann daran liegen, dass die Raumtemperatur nicht konstant auf 20 °C gehalten wurde.

## 6.1 Das Wasserstoffmodell

Um ein Wasserstoffatom zu simulieren wird ein Kugelresonator verwendet. Die Resonanzen wurden vermessen, sodass in den darauf folgenden Messungen die Resonanzen gezielt verwendet werden können.

### 6.1.1 Vermessung der Kugelflächenfunktionen

Um die Kugelflächenfunktionen zu vermessen, wird das akustische Signal auf einer der vorher bestimmten Resonanzen eingestellt und die Druckamplitude wird in Abhängigkeit des Drehwinkels aufgenommen. Den aufgenommenen Verteilungen kann jeweils eine Kugelflächenfunktion zugeordnet werden. Bei einer Resonanzfrequenz von 2,3164 kHz wurde eine konstante Druckverteilung gemessen und daher kann auf  $l = 1, m = 0$  geschlossen werden. Bei 5,0074 kHz können die Messwerte mit einer Kugelflächenfunktion mit  $l = 3$  identifiziert werden. Da eine Resonanz von 6,5908 kHz höher energetisch ist, jedoch die Kugelflächenfunktion mit  $l = 2$  zu den Messdaten passt, muss die radiale Mode sich erhöht haben.

### 6.1.2 Peakaufspaltung

Bei diesem Versuchsteil soll auf einen Zusammenhang zwischen der Peakaufspaltung und der Dicke der Zwischenringe geschlossen werden. Da nur drei verschiedene Zwischenringe verwendet werden konnten, kann keine komplexere Funktion als eine lineare Funktion verwendet werden. Auch diese kann nicht gut gefittet werden. Allerdings kann gesagt werden, dass die Aufspaltung im gemessenen Bereich mit der Dicke ansteigt.

### 6.1.3 Bestimmung des Quantenzustandes

Um den Quantenzustand zu bestimmen, wird ein Zwischenring in den Kugelresonator eingebaut. Hierdurch wird die Entartung aufgehoben. Es wird die Druckamplitude in Abhängigkeit des Drehwinkels aufgenommen. Diese wird zum Vergleich zusammen mit den verschiedenen Kugelflächenfunktionen dargestellt. Da in einem vorherigen Versuch bei einer Resonanz von 2,3164 kHz  $l = 1$  bestimmt wurde, muss nur noch  $m$  bestimmt werden. Wie an den Kugelflächenfunktionen zu erkennen ist kann  $m$  nur  $\pm 1$  sein.

## 6.2 Das Wasserstoffmolekül

Das Wasserstoffmolekül wird durch zwei aufeinander gesteckte Kugelresonatoren simuliert, zwischen den Resonatoren kann eine Blende eingesetzt werden. Zunächst sollte ein Zusammenhang zwischen den Resonanzen und dem Blendendurchmesser herausgefunden werden. Da nur zwei Blenden zu Verfügung standen, kann nur ein linearer Zusammenhang gezogen werden. Hierzu wird die Verschiebung der einzelnen Resonanzen berechnet. Da die Verschiebungen nicht eindeutig sind, kann kein Zusammenhang erkannt werden.

### 6.2.1 Bestimmung des Quantenzustandes

Um den Quantenzustand zu bestimmen, wird der Drehwinkel gegen die Druckamplitude aufgetragen. Die aufgenommenen Daten werden mit den verschiedenen Kugelflächenfunktionen verglichen. Dadaurch kann der Zustand auf einen  $2\sigma$ -Zustand eingegrenzt werden, allerdings kann nicht gesagt werden, ob der Zustand bindend oder antibindend ist.

### 6.3 Der eindimensionale Festkörper

Der eindimensionale Festkörper wird mit einer Kette aus Zylindern simuliert, welche mit verschiedenen Blenden getrennt werden. Je mehr Zylinder, desto öfter werden die resonanzen aufgespalten. Die einzelnen Zylinder stellen in diesem Model Atome dar. Die Blenden können als Stärke der Kopplung zwischen den einzelnen Atomen interpretiert werden. Wenn dabei ein Zylinder ausgetauscht wird, ist das äquivalent zu einer Fehlstellung in einem Gitter. Hierbei ist ein längerer Zylinder wie ein Donator und ein kürzerer verhält sich wie ein Akzeptor.

## Literatur

- [1] 2020. URL: <https://www.geothermie.de/bibliothek/lexikon-der-geothermie/s/schallgeschwindigkeit.html#:~:text=In%20Gasen%20oder%20Gasgemischen%20wie,1235%2C5%20km%2Fh>.
- [2] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*. Springer-Lehrbuch. ISBN: 978-3-540-79295-6.
- [3] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 3 - Atome, Moleküle und Festkörper*. Springer-Lehrbuch. ISBN: 978-3-662-49094-5.
- [4] TU Dortmund. *Versuchsanleitung V23 Quantenanalogien*. 2014.