

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша)

В.С. Попов

В основе теоретического описания процесса нелинейной фотоионизации атомов и ионов под действием сильного лазерного излучения лежит теория Келдыша, предложенная в 1964 г. В статье дан обзор этой теории и ее современного развития. Рассмотрены энергетическое и угловое распределения фотоэлектронов в случае линейной, циркулярной и эллиптической поляризации лазерного излучения, скорость ионизации атомных состояний в монохроматической электромагнитной волне и под действием ультракороткого лазерного импульса различной формы, импульсные и угловые спектры фотоэлектронов в этих случаях. Обсуждаются предельные случаи туннельной ($\gamma \ll 1$) и многофотонной ($\gamma \gg 1$) ионизации, где γ — параметр адиабатичности, или параметр Келдыша. Вычислена вероятность надбарьерной ионизации атомов водорода в низкочастотном лазерном поле. Обсуждается влияние сильного магнитного поля на вероятность ионизации. Рассмотрен процесс лоренцевой ионизации, возникающей при движении атомов и ионов в постоянном магнитном поле. Описаны свойства точно решаемой модели: ионизация s -уровня, связанного силами нулевого радиуса действия, в поле циркулярно поляризованной электромагнитной волны. На этом примере обсуждается метод регуляризации Зельдовича в теории квазистационарных состояний. Проведено сравнение теории Келдыша с экспериментом. Кратко обсуждается релятивистская теория ионизации, применимая в тех случаях, когда энергия связи атомного уровня сравнима с массой покоя электрона (многозарядные ионы) и подбарьерное движение электрона нельзя уже считать нерелятивистским. Рассмотрен аналогичный процесс рождения электрон-позитронных пар из вакуума полем мощных оптических или рентгеновских лазеров (эффект Швингера). В расчетах используется метод мнимого времени, дающий удобный и физически наглядный способ вычисления вероятности туннелирования частиц через переменные во времени барьеры. В приложениях обсуждаются свойства асимптотических коэффициентов атомной волновой функции, разложения для функции Келдыша и так называемая "теория ADK".

PACS numbers: 12.20.Ds, 32.80. – t, 42.50.Hz

Содержание

1. Введение (921).
2. Работы ранних лет (922).
3. Дальнейшее развитие теории Келдыша (925).
4. Ионизация в поле ультракороткого лазерного импульса (930).
5. Адиабатический случай (932).
6. О влиянии магнитного поля на вероятность ионизации (933).
7. Лоренцева ионизация (934).
8. Точно решаемая модель (936).
9. Теория Келдыша и эксперимент (937).
10. Релятивистская теория туннелирования (939).
11. Рождение электрон-позитронных пар из вакуума полем мощных оптических и рентгеновских лазеров (942).
12. Заключение (944).

13. Приложения (946).

- 13.1. Асимптотические коэффициенты для атомов и ионов.
- 13.2. Функция Келдыша и ее разложения.
- 13.3. Замечания о "теории ADK".

Список литературы (949).

1. Введение

Исследованиям ионизации атомов, ионов и полупроводников под действием мощного лазерного излучения посвящены в настоящее время сотни работ. Теория этих процессов началась с работы Келдыша [1], впервые показавшего, что туннельный эффект в переменном электрическом поле $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E} \cos \omega t$ и многофотонная ионизация атомов являются двумя предельными случаями процесса нелинейной фотоионизации, характер которого существенно зависит от значения параметра адиабатичности γ . Этот параметр, также введенный Келдышем, представляет собой отношение частоты лазерного света ω к частоте ω_t туннелирования электрона через потенциальный барьер:

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_t} = \frac{\omega \sqrt{2mI}}{e\mathcal{E}} = \frac{1}{2K_0 F}, \quad (1.1)$$

В.С. Попов. Российский государственный научный центр "Институт теоретической и экспериментальной физики", 117259 Москва, ул. Б. Черемушкинская 25, Российская Федерация
Тел. (095) 129-96-14
E-mail: markina@itep.ru

Статья поступила 15 апреля 2004 г., после доработки 24 мая 2004 г.

где $I = \kappa^2 m e^4 / 2 \hbar^2$ — потенциал ионизации атомного уровня, \mathcal{E} — амплитуда электрического поля волны, $F = \mathcal{E} / \kappa^3 \mathcal{E}_a$ — приведенное поле, $K_0 = I / \hbar \omega$ — параметр многоквантовости процесса, т.е. минимальное число фотонов, необходимое для ионизации. Далее, как правило, используются атомные единицы $\hbar = m = e = 1$, где m — масса электрона. Заметим, что $\kappa = \sqrt{I / I_H}$, F , K_0 и γ — безразмерные величины; здесь $I_H = m e^4 / 2 \hbar^2 = 13,6$ эВ — потенциал ионизации атома водорода, $\mathcal{E}_a = m^2 e^5 / \hbar^4 = 5,14 \times 10^9$ В см⁻¹ — атомная единица напряженности электрического поля (при этом $\kappa = 1$ и $F \equiv \mathcal{E}$ для основного состояния атома водорода), а скорость ионизации уровня w измеряется в единицах $m e^4 / \hbar^3 = 4,13 \times 10^{16}$ с⁻¹.

Туннельная ионизация атомных состояний имеет место в случае $\gamma \ll 1$, в то время как при $\gamma \gg 1$ процесс ионизации является многофотонным [1]. При вычислении матричного элемента перехода из начального состояния атома, принадлежащего дискретному спектру, в конечное состояние, находящееся в континууме, Келдыш использовал волковскую волновую функцию [2, 3], в которой взаимодействие между электроном и полем световой волны учитывается точно, в то время как кулоновским взаимодействием между вылетающим электроном и атомным остовом пренебрегается. В результате были получены аналитические формулы для скорости ионизации w , описывающие не только два предельных случая ($\gamma \ll 1$ и $\gamma \gg 1$), но и промежуточную область значений параметра $\gamma \sim 1$, в которой формулы значительно усложняются. Полученные Келдышем результаты заложили основу дальнейших исследований (как теоретических, так и экспериментальных) в этой области атомной физики.

В этом году исполняется 40 лет со времени появления пионерской работы Л.В. Келдыша [1]. Представляется, что данный момент является подходящим для обзора этой теории и ее современного развития.

2. Работы ранних лет

Вскоре после появления работы [1] в статьях Никишова и Ритуса [4] и Переломова, Попова и Терентьева [5, 6] были получены аналитические выражения для энергетического и импульсного спектра фотоэлектронов, а также точный вид предэкспоненциального множителя в формуле Келдыша для скорости ионизации w . Эти результаты справедливы для произвольных значений параметра γ и относятся к ионизации состояния, связанного короткодействующим, или δ -потенциалом (что является хорошим приближением в случае ионизации однозарядных отрицательных ионов, таких, как H^- , Na^- , I^- и т.д.). Учет кулоновского взаимодействия в конечном состоянии рассматривался в работах [6–9]. Было также рассмотрено, с экспоненциальной точностью¹, влияние постоянного магнитного поля на скорость ионизации уровня [10]. Вероятность ионизации пропорциональна квадрату асимптотического коэффициента C_{kl} , который определяется из независимых расчетов (см. [11–15], а также

приложение 13.1). Здесь мы упомянем лишь некоторые результаты, полученные в этих работах².

Для монохроматической электромагнитной волны с линейной поляризацией дифференциальная вероятность ионизации, т.е. импульсный спектр фотоэлектронов, имеет вид

$$dw(\mathbf{p}) = P \exp \left\{ -2K_0 \left[f(\gamma) + c_1(\gamma) q_{\parallel}^2 + c_2(\gamma) q_{\perp}^2 \right] \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p} / \kappa$, $f(\gamma)$ — функция Келдыша [1, 16]:

$$f(\gamma) = \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \operatorname{arcsinh} \gamma - \frac{\sqrt{1 + \gamma^2}}{2\gamma} = \begin{cases} \frac{2}{3} \gamma - \frac{1}{15} \gamma^3, & \gamma \ll 1, \\ \ln 2\gamma - \frac{1}{2}, & \gamma \gg 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

(см. подробнее приложение 13.2), коэффициенты импульсного распределения фотоэлектронов равны [5]

$$\begin{aligned} c_1(\gamma) &= \operatorname{arcsinh} \gamma - \gamma(1 + \gamma^2)^{-1/2}, \\ c_2(\gamma) &= \operatorname{arcsinh} \gamma, \end{aligned} \quad (2.2')$$

а $P(\gamma)$ — предэкспоненциальный множитель. При этом предполагается выполнение условий

$$F \ll 1 \quad \text{и} \quad K_0 \gg 1, \quad (2.3)$$

необходимых для применимости квазиклассического приближения, в то время как параметр Келдыша γ может быть произвольным. Здесь

$$\operatorname{arcsinh} \gamma \equiv \ln (\gamma + \sqrt{1 + \gamma^2}),$$

$\mathbf{p} = (p_{\parallel}, p_{\perp})$ — импульс фотоэлектрона, причем p_{\parallel} является компонентой импульса вдоль направления электрического поля \mathcal{E} , p_{\perp} — перпендикулярно к нему, а $\kappa = \sqrt{2I}$ — характерный импульс связанного состояния.

В адиабатическом пределе ($\gamma \ll 1$) угловое распределение фотоэлектронов имеет острый максимум вдоль поля \mathcal{E} : $p_{\parallel} \sim \gamma^{-1} p_{\perp} \gg p_{\perp} \sim \kappa \sqrt{F}$. В то же время, в противоположном случае $\gamma \gg 1$ имеем:

$$p_{\parallel} \approx p_{\perp} \sim \kappa (K_0 \ln \gamma)^{-1/2} \ll \kappa,$$

а угловое распределение приближается к изотропному. Для скорости ионизации уровня (т.е. вероятности ионизации в единицу времени) имеем с экспоненциальной точностью

$$w(F, \omega) \propto \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left[1 - \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{3} \xi^2 \right) \gamma^2 \right] \right\}, & \gamma \ll 1, \\ (K_0 F)^{2K_0} \sim J^{K_0}, & \gamma \gg 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $J = (c/8\pi)(1 + \xi^2)\mathcal{E}^2$ — интенсивность лазерного излучения и ξ — его эллиптичность ($\xi^2 \leq 1$, см. формулу (3.2)).

¹ Скорость туннельной ионизации w крайне резко зависит от напряженности внешнего поля (см., например, формулу (2.5)). Вычисление экспоненциального фактора в w уже позволяет описать процесс ионизации качественно, а в некоторых случаях и количественно.

² Подробное изложение вычислений опубликовано в [8, 9]. При сравнении формул из [1, 5, 6] с работами [4, 7, 9] следует иметь в виду связь между обозначениями: $\xi = 1/\gamma$.

Предэкспоненциальный фактор P в уравнении (2.1) также был вычислен в [4, 5]. Например, при $\gamma \ll 1$ скорость ионизации состояния $|lm\rangle$ с орбитальным моментом l линейно поляризованным ($\xi = 0$) светом равна [5]

$$w_{lm} = \kappa^2 \sqrt{\frac{3}{\pi}} (2l+1) \frac{(l+m)!}{2^m m! (l-m)!} C_{kl}^2 2^{2n^*-m} \times \\ \times F^{m+1,5-2n^*} \exp \left[-\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{1}{10} \gamma^2 \right) \right], \quad m \geq 0, \quad (2.5)$$

причем $w_{l,-m} = w_{lm}$. В случае ионизации постоянным электрическим полем нужно в (2.5) положить $\gamma = 0$ и убрать множитель $\sqrt{3F/\pi}$, возникающий [5] при усреднении статической скорости ионизации по периоду лазерного излучения. Здесь $m = 0, \pm 1, \dots$ — проекция углового момента l вдоль электрического поля волны, n^* — эффективное главное квантовое число уровня [11–15], которое вычисляется по экспериментально измеряемой энергии $E_0 = -I$ атомного состояния:

$$n^* = \frac{Z}{\kappa} = \frac{Z}{\sqrt{2I}}, \quad (2.6)$$

Z — заряд атомного или ионного остова и C_{kl} — безразмерный асимптотический коэффициент атомной волновой функции³ на больших ($\kappa r \gg 1$) расстояниях от ядра (см. подробнее приложение 13.1, в частности, формулы (13.1.1), (13.1.3) и (13.1.5)).

Простое и достаточно точное выражение для этого коэффициента было предложено Хартри [11] еще в 1927 г.:

$$C_{kl}^2 = \frac{2^{2n^*-2}}{n^*(n^*+l)!(n^*-l-1)!}, \quad x! \equiv \Gamma(x+1) \quad (2.7)$$

(см. также [12–15]). Эта формула является естественным обобщением выражения, непосредственно вытекающего из точного решения уравнения Шрёдингера для атома водорода [16], когда $n^* = n = 1, 2, 3, \dots$. Другие приближения для коэффициента C_{kl} были получены с помощью метода квантового дефекта [17, 18] и разложения эффективного радиуса [19]. Численные значения C_{kl} для нейтральных атомов и ряда положительных и отрицательных ионов были вычислены методом Хартри–Фока и могут быть извлечены, например, из справочника [14]. В случае валентных s -электронов эти коэффициенты достаточно близки (с точностью $\sim \pm 10\%$) к единице, как это видно из табл. 1. Поэтому уравнения (2.1), (2.5) являются практически модельно-независимыми. Из таблицы 1 вытекает также, что приближение Хартри (2.7) имеет удовлетворительную точность для s -состояний во всех атомах, от водорода до урана.

Уравнение (2.5) является асимптотически точным, когда $F \rightarrow 0$. В случае основного состояния атома водорода оно соответствует известной асимптотике $w_{st}(\mathcal{E}) = 4\mathcal{E}^{-1} \exp(-2/3\mathcal{E})$ для постоянного электрического поля \mathcal{E} , полученной с помощью квазиклассиче-

ского метода [16]. Поскольку предполагается, что приведенное поле $F \ll 1$, то скорость ионизации $|lm\rangle$ — подуровня быстро уменьшается [4, 5] с ростом $|m|$. В итоге, вероятность ионизации, усредненная со статистическим весом

$$\bar{w}_l = (2l+1)^{-1} \sum_{m=-l}^l w_{lm}, \quad (2.5')$$

— практически та же, что и для s -уровня, за исключением асимптотического коэффициента C_{kl}^2 .

Уравнение (2.5) справедливо для низкочастотного лазерного излучения, т.е. при $\omega \ll \omega_l$. В случае произвольного γ скорость ионизации s -уровня, связанного короткодействующим ($Z = 0$) потенциалом, представляется в виде суммы вероятностей n -фотонных процессов:

$$w(\mathcal{E}, \omega) = \sum_{n > n_{th}} w_n, \quad n_{th} = K_0 \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right), \quad (2.8)$$

где $l = 0$, w_n — парциальная вероятность n -фотонной ионизации:

$$w_n = \frac{\kappa^2}{\pi} |C_k|^2 K_0^{-3/2} \beta^{1/2} F \left(\sqrt{\beta(n - n_{th})} \right) \times \\ \times \exp \left\{ - \left[\frac{2}{3F} g(\gamma) + 2c_1(n - n_{th}) \right] \right\}, \quad (2.8')$$

$g(\gamma) = 3f(\gamma)/2\gamma$, функции $f(\gamma)$ и $c_1(\gamma)$ определены выше в (2.2) и (2.2'), n_{th} — порог фотоионизации для линейно поляризованного излучения, $\beta = 2(c_2 - c_1) = 2\gamma/\sqrt{1 + \gamma^2}$ и

$$F(x) = \int_0^x \exp[-(x^2 - y^2)] dy = \\ = \begin{cases} x - \frac{2}{3}x^2 + \dots, & x \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} + \dots, & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

(так называемая функция Досона, см. 7.1.16 в справочнике [20], достигающая максимума при $x_m = 0,9241$, причем $F(x_m) = 0,541\dots$). Нетрудно показать, что в предельных случаях $\gamma \ll 1$ и $\gamma \gg 1$ уравнения (2.8), (2.8') приводят к оценкам (2.4). Кроме того, эти уравнения совпадают с формулой (2.5), если положить $\gamma \ll 1$ и $l = 0$. Таким образом, они связывают непрерывным образом области низкочастотного и высокочастотного лазерного излучения. Для состояний с произвольным орбитальным моментом l выражения для парциальных вероятностей w_n аналогичны (2.8'), но имеют более громоздкий вид [5].

В случае циркулярной поляризации излучения энергетический спектр фотоэлектронов является гауссовым. Так, при $\gamma \ll 1$ вероятность n -фотонной ионизации равна [4]

$$w_n = w_{max} \exp \left[-\frac{\gamma(n - n_0)^2}{2n_0} \right] \propto \exp \left[-\frac{\omega^4 \kappa}{\mathcal{E}^3} (n - n_0)^2 \right], \quad (2.9)$$

где $n_0 \approx 2n_c$, $n_c = n_{th}(\xi = \pm 1) = K_0(1 + \gamma^{-2})$ — порог ионизации, т.е. минимальное число поглощенных кван-

³ Атомный потенциал имеет вид $U(r) \approx Z/r$ при $r \gg r_c$, где r_c — радиус атомного остова (кора); значения $Z = 1, 2$ и 0 относятся к нейтральным атомам, однозарядным положительным и отрицательным ионам. Для основного состояния атома водорода $\kappa = n^* = 1$ и $C_{k0} = 1$. Что касается валентных s -электронов в нейтральных атомах, то для них значения n^* меняются в пределах от 0,744 для He ($I = 24,588$ эВ) до 1,869 для Cs ($I = 3,894$ эВ).

Таблица 1. Асимптотические коэффициенты для основных состояний атомов и ионов ($l = 0$)

$Z = 1$	$I, \text{эВ}$	n^*	A	C_κ		$c_1 \cdot 100$	Класс точности
				HF	H		
H	13,60	1,000	2	1,000	1,000	0	A
Li	5,392	1,588	0,82	1,07	1,061	1,87	B
Na	5,139	1,627	0,74	1,04	1,058	1,64	B
K	4,341	1,770	0,52	0,95	1,043	0,71	C
Rb	4,177	1,804	0,48	0,94	1,038	0,51	C
Cs	3,894	1,869	0,42	0,92	1,027	0,23	B
Sr	5,695	1,545	0,86	1,05	1,063	2,02	C
He	24,59	0,744	2,87	0,993	0,912	4,83	A
Ne	21,57	0,794	1,75	1,18	0,932	3,02	C
Ar	15,76	0,929	2,11	0,950	0,998	0,29	B
Kr	14,00	0,986	2,22	1,13	0,979	0,01	B
Xe	12,13	1,059	2,4	1,3	1,015	0,15	C
U	6,194	1,484	0,99	1,08	1,064	2,31	A
$Z = 2$	$I, \text{эВ}$	n^*	A	C_κ		$c_1 \cdot 100$	Класс точности
				HF	H		
Li ⁺	75,64	0,848	6,5	1,02	0,952	1,49	C
Sr ⁺	11,03	2,221	1,39	0,93	0,942	0,42	B
Xe ⁺	20,98	1,610	3,2	1,01	1,059	1,69	C
$Z = 0$	$I, \text{эВ}$	κ	A	C_κ		c_1	Класс точности
				HF	H		
H ⁻	0,7542	0,235	1,11	1,15	0,5	1,0	B
Li ⁻	0,618	0,212	1,0	1,09	0,5	1,0	D
Na ⁻	0,548	0,201	1,0	1,12	0,5	1,0	D
K ⁻	0,502	0,192	0,9	1,03	0,5	1,0	E
Rb ⁻	0,486	0,189	0,8	0,92	0,5	1,0	E

Примечание. Z — заряд атомного или ионного остова, n^* — эффективное главное квантовое число, A — коэффициенты из справочника [14], HF и H — значения C_κ , вычисленные методом самосогласованного поля (Хартри – Фок) и по формуле Хартри (2.7), c_1 — коэффициент в разложении (13.1.3). Классы точности для A и C_κ : погрешность расчета $\delta < 1\%$ (класс A), $\delta = 1-3\%$ (B), $\delta = 3-10\%$ (C), $\delta = 10-30\%$ (D) и $\delta > 30\%$ (E).

тов $\hbar\omega$, необходимое для ионизации атомного уровня с энергией связи $I = \kappa^2/2$ циркулярно-поляризованной волной. Распределение (2.9) имеет пик при $n = n_0$ и является относительно узким: $\Delta n/n_0 \sim \omega/\sqrt{\kappa\mathcal{E}} = \gamma\sqrt{F} \ll 1$, хотя ширина его сама по себе не мала:

$$\Delta n = \sqrt{\frac{\mathcal{E}^3}{\omega^4 \kappa}} \sim \sqrt{\frac{n_0}{\gamma}} \gg 1.$$

Угловое распределение вылетающих фотоэлектронов имеет вид [5]

$$w(\psi, \gamma) = \text{const} \cdot [J_{n_0}(n_0\zeta)]^2, \quad (2.10)$$

$$\zeta = \frac{p_\perp}{F\gamma^2 \kappa n_0} = 2 \sqrt{\frac{v(1-v)}{1+\gamma^2}} \cos \psi,$$

где $J_n(z)$ — функция Бесселя, $v = n_c/n_0$ ($1/2 < v < 1$), ψ — угол между импульсом электрона \mathbf{p} и плоскостью поляризации лазерного излучения, $p_\perp = p_{n_0} \cos \psi$, $p_{n_0} = \sqrt{2\omega(n_0 - n_c)} \approx \kappa/\gamma$ и n_0 — наиболее вероятное число поглощенных квантов:

$$n_0 = \begin{cases} 2n_c \left(1 - \frac{1}{3}\gamma^2\right), & \gamma \ll 1, \\ n_c [1 + (2 \ln \gamma)^{-1}], & \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Поскольку $n_0 > n_c \gg 1$, то, как следует из асимптотики для функции Бесселя [20], большая часть фотоэлектронов вылетают вблизи плоскости поляризации световой волны. Хотя с ростом γ угловое распределение фотоэлектронов заметно расширяется, все же и при $\gamma \gg 1$ оно остается еще достаточно узким [21], что видно из рис. 1.

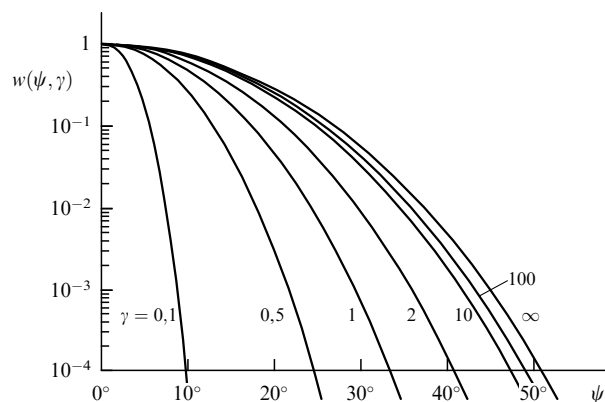


Рис. 1. Случай циркулярной поляризации. Угловое распределение фотоэлектронов, нормированное на единицу при $\psi = 0$. Здесь $K_0 = 10$, а ψ — угол между импульсом вылетающего электрона и плоскостью поляризации лазерного излучения. У кривых указаны значения параметра Келдыша γ .

Учет кулоновского взаимодействия вылетающего электрона с атомным остовом с помощью квазиклассической теории возмущений по кулоновскому потенциалу выполнен в [6]. При этом, однако, не удалось полностью рассмотреть случай $\gamma \gg 1$: условие применимости теории возмущений имеет вид [6]

$$\gamma \ll \gamma_* = (n_* F)^{-1/2}, \quad (2.12)$$

а поскольку $n_* \sim 1$ (см. табл. 1) и $F \ll 1$, то это условие всегда выполняется в области значений $\gamma \lesssim 1$. Соответствующий расчет кулоновской поправки при различных эллиптичностях света ξ выполнен в [6]. Отметим также работу [7], в которой была развита специальная диаграммная техника для этой задачи и получены некоторые формулы для кулоновской поправки, но опять-таки не для всех значений ξ и γ . Простое выражение получено в случае циркулярной поляризации [7]:

$$w(\mathcal{E}, \omega) = w_{\text{кор}}(\mathcal{E}, \omega) (F \sqrt{1 + \gamma^2})^{-2n_*}, \quad \xi = \pm 1, \quad (2.13)$$

где $w_{\text{кор}}$ — вероятность ионизации из короткодействующего потенциала. Учет кулоновского взаимодействия увеличивает плотность электронного облака при $kr \gg 1$ (см. формулу (13.1.1) в приложении 13.1); кроме того, с ростом γ сокращается эффективная ширина барьера [5]. Это приводит к тому, что при $F \sim 0,01 - 0,1$ кулоновская поправка увеличивает вероятность ионизации на несколько порядков (для нейтральных атомов).

Полученные в [1, 4–9] результаты дают достаточно подробное описание процесса нелинейной фотоионизации в широком диапазоне значений γ . Тем не менее эти результаты не были тогда проанализированы во всех деталях, что частично объясняется отсутствием в то время надежных экспериментальных данных (сам процесс многофотонной ионизации атомов был экспериментально обнаружен в [22]).

В подходе Келдыша, как и во многих последующих работах, для вычисления амплитуды перехода используется метод перевала с волковской волновой функцией, а в [5, 6, 8] — метод "мнимого времени" (соответствие между этими методами обсуждается в заключительном разделе 12). Эти приближения оправданы, если частота и напряженность электромагнитной волны малы по сравнению с потенциалом ионизации I и характерным атомным полем $\kappa^3 \mathcal{E}_a$; при этом ширина барьера велика по сравнению с радиусом связанного состояния $1/\kappa$, а его проницаемость экспоненциально мала. Впоследствии Файсал [23] и Рис [24, 25], используя несколько иной подход, получили более точные, но и более громоздкие формулы для амплитуды перехода и спектра фотоэлектронов. В этом подходе метод перевала не используется и волновая функция конечного состояния разлагается в ряд Фурье, что приводит в итоге к бесконечным суммам по числу поглощенных фотонов и требует численных расчетов. Соответствующее приближение известно в литературе как KFR-теория (Келдыш, Файсал и Рис). Эта теория часто используется при анализе различных экспериментов в данной области (см. по этому поводу [25–27], а также раздел 9).

В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний.

1. Формула (2.5) справедлива для $|lm\rangle$ -состояний произвольного атома, за исключением возбужденных

($n \geq 2$) уровней атома водорода, для которых вследствие специфического случайного вырождения⁴ состояний с $l = 0, 1, \dots, n-1$ меняется предэкспоненциальный множитель $F^{-\beta}$ и константа C_{kl} . Так, для постоянного электрического поля согласно [33, 5] имеем $\beta = 2n_2 + |m| + 1$, в то время как в (2.5) соответствующий показатель равен $\beta' = 2n - |m| - 1 = \beta + 2n_1$. Здесь n_1, n_2, m — параболические квантовые числа, а $n = n_1 + n_2 + |m| + 1$ — главное квантовое число уровня [16].

2. Если в (2.5) опустить адиабатический фактор $\sqrt{3F/\pi}$, то это уравнение в пределе $\omega \rightarrow 0$ переходит в известную формулу для скорости ионизации отрицательного иона ($n^* = 0$) постоянным электрическим полем [16, 34].

3. При получении (2.1) производится разложение функции действия $S(p)$ в точке перевала по конечному импульсу электрона p вплоть до членов порядка p^2/κ^2 . В работе [35], где были воспроизведены (несколько иным способом) полученные в [5] результаты, указано, что в некоторых случаях квадратичное приближение для $S(p)$ недостаточно. В частности, угловое распределение фотоэлектронов при n -фотонном поглощении $dw_n/\sin\theta d\theta$ для ионизации иона H^- лазерным светом с $\omega = 0,0043$ а.е. (CO_2 -лазер) и $J = 10^{11}$ Вт см⁻² ($\gamma \approx 0,6$) хорошо согласуется с формулой (53) из работы [5] для трех первых фотофиксов ($n = 16, 17$ и 18), однако с дальнейшим ростом n отношение p/κ возрастает, и согласие ухудшается (см. рис. 2 в [35]).

4. Недавно точность квадратичного приближения исследовалась [36] на примере ионизации s -уровня линейно-поляризованным излучением. Спектр прямой надпороговой ионизации $w(p)$, вычисленный в рамках модели Келдыша с помощью метода перевала, но без разложения по степеням p/κ , сравнивался с формулой (2.1) и было показано, что область применимости этого разложения ограничена конечными энергиями $\varepsilon \lesssim 1,5 U_p$, где $U_p = F^2/4\omega^2$ — средняя колебательная энергия электрона в поле волны (или пондеромоторный потенциал). При $\varepsilon > 2U_p$ вероятность ионизации убывает с ростом импульса p значительно более резко, чем согласно (2.1), особенно после прохождения точки $\varepsilon_0 = 2U_p - I = (1/2)\kappa^2(\gamma^{-2} - 1)$ (в туннельном режиме, т.е. при $\gamma < 1$). Однако сами значения $w(p)$ в этой области уже на несколько порядков меньше $w(0)$, поэтому полная вероятность ионизации при таком уточнении практически не меняется.

Использованное в [1, 5] квадратичное по p разложение не является принципиальным для теории ионизации, но оно справедливо при $p \lesssim \kappa$ и без него формулы существенно усложняются и требуют численных расчетов на компьютере.

3. Дальнейшее развитие теории Келдыша

Рассмотрим некоторые работы, выполненные в последние годы, в которых дано дальнейшее развитие теории Келдыша.

Во-первых, были вычислены и детально проанализированы энергетическое и угловое распределения фото-

⁴ Связанного с так называемой группой "скрытой" симметрии кулоновского поля [16, 28–32].

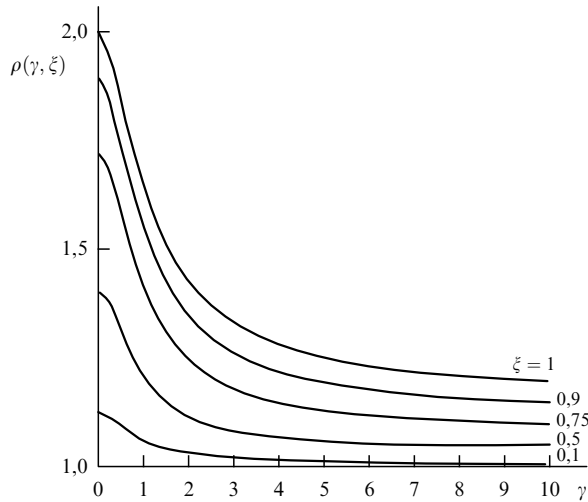


Рис. 2. Отношение $\rho(\gamma, \xi) = n_0/n_{th}$ в зависимости от γ при различных эллиптичностях ξ : n_0 — наиболее вероятное, n_{th} — пороговое значение числа поглощенных фотонов ($\xi = 0$ соответствует линейной, $|\xi| = 1$ — циркулярной поляризации излучения).

электронов в общем случае эллиптической поляризации падающей волны для произвольных значений параметра γ . В частности, показано, что в случае циркулярной поляризации лазерного излучения угловое распределение концентрируется к плоскости, в которой вращается вектор поля $\vec{E}(t)$, и остается достаточно узким не только в случае низкочастотного излучения $\gamma \ll 1$, но также и для больших γ (см. рис. 1). С ростом γ распределение w_n по числу поглощенных квантов, т.е. энергетический спектр фотоэлектронов, остается гауссовым, как в (2.9), но его относительная ширина уменьшается:

$$\frac{\Delta n}{\sqrt{n_0}} = \begin{cases} \gamma^{-1/2}, & \gamma \ll 1, \\ 1, & \gamma \approx 0.47, \\ (2 \ln \gamma)^{-1}, & \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Если $\gamma \ll 1$, то это распределение значительно шире распределения Пуассона с тем же средним значением n_0 , а при $\gamma \gg 1$ — оно, наоборот, уже пуассоновского. Точные формулы и дальнейшие подробности можно найти в [21].

Случай эллиптической поляризации,

$$\vec{E}(t) = \mathcal{E} \cos \omega t \mathbf{e}_x + \xi \mathcal{E} \sin \omega t \mathbf{e}_y, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (3.2)$$

(здесь ξ — эллиптичность лазерного излучения), для которого порог фотоионизации равен

$$n_{th} = K_0 \left(1 + \frac{1 + \xi^2}{2\gamma^2} \right) \quad (3.3)$$

(рис. 2), рассмотрен в работах [5, 37–39]. Главный (экспоненциальный) фактор в формуле для скорости ионизации

$$w \propto \exp \left[-\frac{2}{3F} g(\gamma, \xi) \right] = \exp \left[-\frac{2I}{\omega} f(\gamma, \xi) \right] \quad (3.4)$$

был вычислен в [5]. Полученное там выражение преобразовано к более удобному виду в работах [8, 39], где показано, что все формулы значительно упрощаются, если в качестве переменной выбрать $\tau_0 = \tau_0(\gamma, \xi)$ —

"время" (чисто мнимое) подбарьерного движения электрона:

$$f(\gamma, \xi) = \left(1 + \frac{1 + \xi^2}{2\gamma^2} \right) \tau_0 - \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{1 - \xi^2}{4} \sinh 2\tau_0 + \xi^2 \frac{\sinh^2 \tau_0}{\tau_0} \right], \quad (3.5)$$

причем τ_0 определяется из трансцендентного уравнения

$$\sinh \tau_0 \left[1 - \xi^2 \left(\coth \tau_0 - \frac{1}{\tau_0} \right)^2 \right]^{1/2} = \gamma. \quad (3.6)$$

В двух предельных случаях имеем: если $\gamma \ll 1$, то

$$\tau_0 = \gamma - \frac{1}{18} (3 - \xi^2) \gamma^3 + \dots, \quad (3.7)$$

$$f(\gamma, \xi) = \frac{2}{3} \gamma \left[1 - \frac{1}{10} \left(1 - \frac{\xi^2}{3} \right) \gamma^2 + \dots \right],$$

а при $\gamma \gg 1$

$$\tau_0(\gamma, \xi) = \begin{cases} \ln \left(\frac{2\gamma}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right), & 1 - \xi^2 \gg \frac{1}{\ln 2\gamma}, \\ \ln (\gamma \sqrt{2 \ln \gamma}), & \xi = \pm 1, \end{cases}$$

$$f(\gamma, \xi) = \tau_0 - \frac{1}{2} + \xi^2 \Delta + O \left(\frac{\ln \gamma}{\gamma^2} \right), \quad (3.8)$$

где

$$\Delta = \left\{ 2\tau_0^2 \left[1 - \xi^2 \left(1 - \frac{1}{\tau_0} \right)^2 \right] \right\}^{-1}$$

(поскольку $\tau_0 \gtrsim \ln 2\gamma \gg 1$, то Δ — малая поправка). С ростом эллиптичности света функции τ_0 и g монотонно возрастают при фиксированном γ (рис. 3), а вероятность ионизации соответственно падает, особенно при $|\xi| \rightarrow 1$, т.е. для поляризаций, близких к циркулярной. В низкочастотной ($\gamma \ll 1$) области скорость ионизации s -уровня

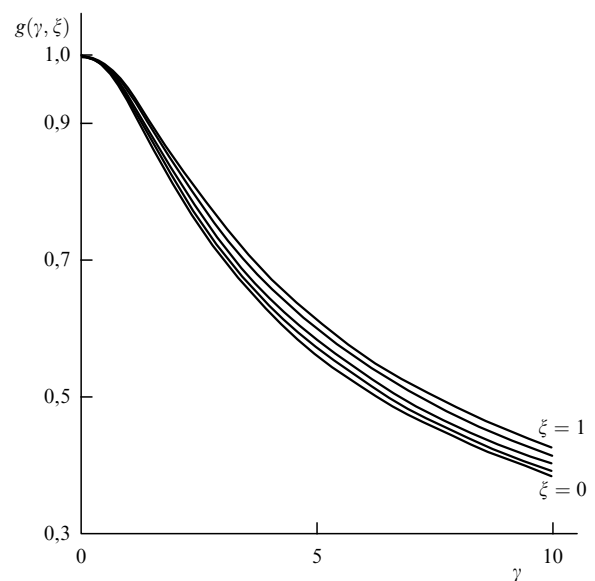


Рис. 3. Функция $g(\gamma, \xi)$ из формулы (3.4) для скорости ионизации w . Кривые (снизу вверх) относятся к значениям эллиптичности света $\xi = 0; 0.5; 0.7; 0.9$ и 1.

равна [5]

$$w_a = \kappa^2 C_\kappa^2 \sqrt{\frac{3F^3}{\pi(1-\xi^2)}} \left(\frac{F}{2}\right)^{-2n_*} \exp\left[-\frac{2}{3F}\left(1 - \frac{3-\xi^2}{30}\right)\gamma^2\right], \quad (3.8')$$

если эллиптичность ξ не слишком близка к циркулярной ($1 - \xi^2 \gtrsim F$).

Зависимость энергетических и угловых спектров фотоэлектронов от эллиптичности ξ в случае туннельной ионизации была рассмотрена в [37, 38]. Однако часть утверждений этих работ неправильна⁵. Эти неточности были исправлены в следующей публикации [39], к описанию результатов которой мы переходим.

Если $0 < \xi^2 < 1$, то наиболее вероятный импульс вылетающих фотоэлектронов \mathbf{p}_{\max} направлен вдоль малой оси полевого эллипса (ось y в (3.2)), при $\xi = 0$ (линейная поляризация) он направлен вдоль максимума электрического поля (ось x), а в случае циркулярной поляризации распределение фотоэлектронов становится изотропным в плоскости вектора $\vec{\mathcal{E}}$. Взятый из [39] рис. 4 показывает эволюцию импульсного распределения фотоэлектронов $w(p_x, p_y, p_z = 0)$ в плоскости $\vec{\mathcal{E}}$ при изменении эллиптичности света. Если поляризация близка к линейной, $|\xi| \lesssim \gamma\sqrt{F} \ll 1$, то распределение имеет острый пик вдоль главной оси полевого эллипса так же, как и в уравнении (2.1). Затем формируется двухпиковая структура [5, 39]:

$$\begin{aligned} dw(\mathbf{p}) \propto \exp\left[(1-\xi^2)\frac{\omega^2\kappa^3}{3\mathcal{E}^3}p_x^2 + \frac{\kappa}{\mathcal{E}}p_z^2\right] \times \\ \times \left\{ \exp\left[-\frac{\kappa}{\mathcal{E}}\left(p_y - \xi\frac{\mathcal{E}}{\omega}\right)^2\right] + \right. \\ \left. + \exp\left[-\frac{\kappa}{\mathcal{E}}\left(p_y + \xi\frac{\mathcal{E}}{\omega}\right)^2\right] \right\} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \quad \gamma \ll 1, \quad (3.9) \end{aligned}$$

которая хорошо выражена при $|\xi| \gtrsim \sqrt{F}$ и сохраняется вплоть до значений $|\xi| \approx 1 - F$. Наконец, при $\xi \rightarrow \pm 1$ распределение фотоэлектронов становится изотропным в плоскости $\psi = 0$:

$$dw \propto \exp\left\{-\frac{\kappa}{\mathcal{E}}\left[\left(p_\perp - |\xi|\frac{\mathcal{E}}{\omega}\right)^2 + p_z^2\right] - \frac{1-\xi^2}{3F}\sin^2\varphi\right\} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \quad (3.10)$$

Здесь $p_\perp = (p_x^2 + p_y^2)^{1/2} = p \cos\psi$, ψ — угол между p и плоскостью поляризации, $0 \leq \psi \leq \pi/2$ и $\varphi = \arctan(p_x/p_y)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Отсюда видно, что $\Delta p_z \sim \Delta p_\perp \sim \kappa\sqrt{F} \ll \kappa$. При $\xi^2 = 1$ зависимость $dw(\mathbf{p})$ от азимутального угла φ исчезает, и (3.10) переходит в импульсное распределение для циркулярной поляризации [40]:

$$\begin{aligned} dw(p_\perp, p_z) \propto \exp\left\{-\frac{2}{3\mathcal{E}}\left[\kappa^2 + \left(p_\perp - \frac{\mathcal{E}}{\omega}\right)^2 + p_z^2\right]^{3/2}\right\} \approx \\ \approx \exp\left\{-\frac{2\kappa^3}{3\mathcal{E}} - \frac{\kappa}{\mathcal{E}}\left[\left(p_\perp - \frac{\mathcal{E}}{\omega}\right)^2 + p_z^2\right]\right\} \quad (3.11) \end{aligned}$$

(световая волна распространяется вдоль оси z).

⁵ Это относится, в частности, к утверждению о том, что полученные в [5] формулы для импульсного распределения электронов имеют очень узкую область применимости только вблизи $\xi \approx 0$.

Для энергетического спектра фотоэлектронов w_n в [39] получены аналитические формулы, имеющие хорошую точность для всех значений параметра Келдыша, включая промежуточный случай $\gamma \sim 1$ (сравните сплошные и штриховые кривые на рис. 5, демонстрирующем эволюцию распределения w_n при изменении параметра γ от 0,2 до 5 и $\xi = 0,5$; для других значений ξ картина аналогична [39]). В частности, при $\gamma \ll 1$ и $1 - \xi^2 \gg F$ распределение по числу поглощенных фотонов имеет вид

$$w_n \propto a(\gamma(n - n_0)) \exp\left[-\frac{2}{3}(1 - \xi^2)\gamma^3(n - n_0)\right], \quad n > n_0, \quad (3.12)$$

где $n_0 = F^2(1 + 3\xi^2)/4\omega^3 = (1 + 3\xi^2)(1 + \xi^2)^{-1}n_{\text{th}}$,

$$a(x) = \exp(-x) I_0(x) = \begin{cases} 1 - x + \frac{3}{4}x^2 + \dots, & x \rightarrow 0, \\ (2\pi x)^{-1/2}, & x \gg 1, \end{cases} \quad (3.12')$$

и $I_0(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента. Отметим, что в настоящее время эллиптически-поляризованное излучение часто используется в экспериментах по ионизации [41–45].

В течение последних 10–15 лет, благодаря созданию инфракрасных лазеров тера- и петаваттных мощностей (для которых $\omega < 0,05 \sim 1$ эВ, $F \gtrsim 0,1$ и $\gamma \lesssim 0,1$), значительный интерес привлекают исследования процессов ионизации низкочастотным лазерным полем, $\gamma \ll 1$. В теоретических расчетах здесь часто используется адиабатическое приближение Ландау–Дыхне [16, 46–51]. В этом случае приведенные выше формулы значительно упрощаются. Так, импульсное распределение (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} w(\mathbf{p}) = w(0) \exp\left\{-\left[\frac{\omega^2(2I)^{3/2}}{3\mathcal{E}^3}p_\parallel^2 + \frac{(2I)^{1/2}}{\mathcal{E}}p_\perp^2\right]\right\}, \quad \xi = 0, \\ w(0) = C_\kappa^2 \frac{\omega^2}{\pi^2\mathcal{E}} \left(\frac{F}{2}\right)^{-2n_*} \exp\left(-\frac{2}{3F}\right), \quad (3.13) \end{aligned}$$

в то время как для циркулярной поляризации

$$w(\psi) \propto \exp(-c\psi^2), \quad c = \frac{\kappa\mathcal{E}}{\omega^2} = \frac{2K_0}{\gamma}, \quad (3.14)$$

причем коэффициент $c \gg 1$ и $\Delta\psi \sim \omega/\sqrt{\kappa\mathcal{E}} \ll 1$.

Следует отметить, что эти формулы, приведенные⁶ в [48, 49], непосредственно вытекают из общих уравнений (2.1), (2.3) и (2.10), справедливых для произвольных значений параметра Келдыша, если разложить входящие в них величины по степеням γ . Так, например,

$$c_1(\gamma) = \frac{1}{3}\gamma^3 + \dots, \quad c_2(\gamma) = \gamma - \frac{1}{6}\gamma^3 + \dots,$$

после чего уравнение (2.1) принимает вид

$$w(\mathbf{p}) = w(0) \exp\left[-\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{3}\gamma^3 p_\parallel^2 + \gamma p_\perp^2\right)\right], \quad \gamma = \frac{\omega\sqrt{2I}}{\mathcal{E}}, \quad (3.15)$$

⁶ К сожалению, приходится отметить, что в [47–51], как и в других работах тех же авторов, крайне необъективно освещается роль ранних исследований [4–7]. Подробнее об этом см. заметку [52] и приложение 13.3.

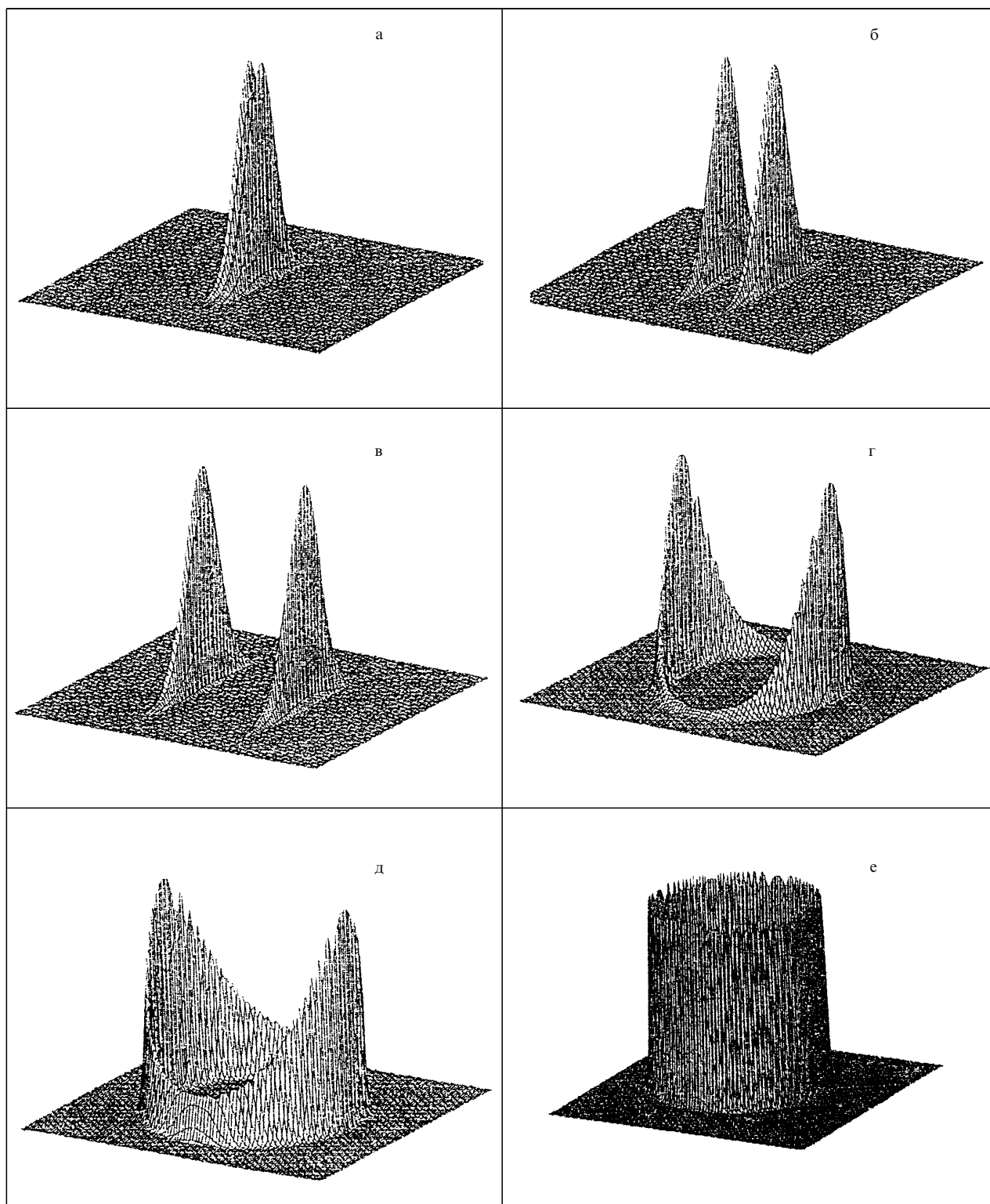


Рис. 4. Случай эллиптической поляризации. Эволюция импульсного распределения фотоэлектронов в плоскости электрического поля ($p_z = 0$) при $\xi = 0,05; 0,25; 0,5; 0,8; 0,95$ и 1 (рис. а–е, соответственно). Расчеты выполнены для случая ионизации Ne^{3+} ($I = 97,1$ эВ) полем $\text{Ti}:\text{Sa}$ лазера ($\hbar\omega = 1,58$ эВ, $J = 2 \times 10^{16}$ Вт см $^{-2}$, $\gamma = 0,2$).

что полностью совпадает с (3.13). Для циркулярной поляризации формула

$$\frac{w(\psi, \gamma)}{w(0, \gamma)} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \psi^2}} \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left[\left(1 + \frac{\psi^2}{\gamma^2} \right)^{3/2} - 1 \right] \right\} \quad (3.16)$$

является несколько более точной [21], чем (3.14). Для ее получения нужно в (2.10) учесть, что переменная $\xi = 1 - (\gamma^2 + \psi^2)/2 \rightarrow 1$ в области малых углов, и использовать асимптотику Лангера [20] для функции Бесселя $J_n(n\xi)$ с $n \gg 1$ (см. подробнее в [21]). Если $\psi \ll \gamma \ll 1$, то выражения (3.14) и (3.17) практически совпадают, однако

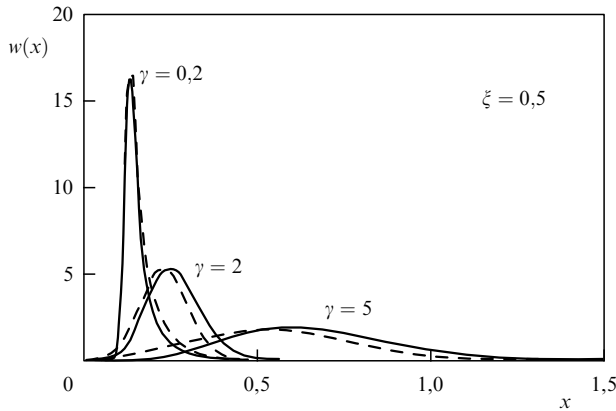


Рис. 5. Энергетический спектр фотоэлектронов при ионизации Ne^{3+} полем Ti:Sa лазера $J = 3,2 \times 10^{13}$, 2×10^{14} и 2×10^{16} Вт см $^{-2}$, кривые с $\gamma = 5$; 2 и 0,2 соответственно (штриховые кривые — расчет по формулам работы [34]). Здесь $x = E/E_0$, где $E_0 = F^2/\omega^2$ пропорциональна средней энергии колебаний электрона в поле волны, вероятность ионизации $w(x) = dW/dx$.

при $\psi > \gamma$ число фотоэлектронов уменьшается с ростом угла ψ быстрее, чем согласно (3.14).

Результаты, представленные в уравнениях (3.9)–(3.16) и на рис. 4, 5, относятся к случаю ионизации однозарядных отрицательных ионов ($Z = 0$). При $Z \neq 0$ угловое распределение фотоэлектронов может искажаться благодаря влиянию кулоновского поля остаточного иона на движение электрона в континууме [53, 54]. Импульс вылетающего электрона (на бесконечности) есть [55]

$$\mathbf{p}(t \rightarrow \infty) = \mathbf{p}(t_0, v_0) - Z \int_{t_0}^{\infty} dt \frac{\mathbf{r}_L(t; t_0, v_0)}{r_L^3(t; t_0, v_0)}, \quad (3.17)$$

где $\mathbf{r}_L(t)$ — траектория в лазерном поле после выхода электрона из-под барьера (в момент t_0 со скоростью v_0), определяемая ньютоновским уравнением движения, при этом кулоновское взаимодействие учитывается по теории возмущений⁷. Импульсное распределение фотоэлектронов получается при пересчете спектра в момент выхода dW/d^3p , выраженного через переменные t_0 и v_0 , к асимптотическим значениям импульса по соотношению (3.17). Кулоновское взаимодействие в конечном состоянии нарушает симметрию распределения (3.9) по отношению к отражению в осях полевого эллипса, смещая его максимум в сторону от оси y . Это следует из численных расчетов, относящихся к s -фотонной ионизации атомов ксенона излучением Ti:Sa лазера (при $\gamma = 1,12$ и $\xi = 0,36$ и 0,56). Имеется удовлетворительное согласие расчета [55] с экспериментом [43] для высоких ($s \gtrsim 4$) пиков.

Отметим также, что в случае низкочастотного излучения выполняется следующее соотношение между адиабатической w_a и статической (в постоянном поле, w_{st}) скоростями ионизации [5]:

$$w_a(F, \xi) = (\xi^2)^{-1/2} a\left(\frac{1 - \xi^2}{6F\xi^2}\right) w_{st}(F), \quad (3.18)$$

⁷ Ср. с работой [6], в которой кулоновский потенциал $\delta V_C = -Z/r$ учитывался на подбарьерном участке траектории, дающем вклад в $\text{Im } S$. В отличие от этого, в (3.17) время t — вещественное, и $\text{Im } S$ при $t > t_0$ уже не меняется.

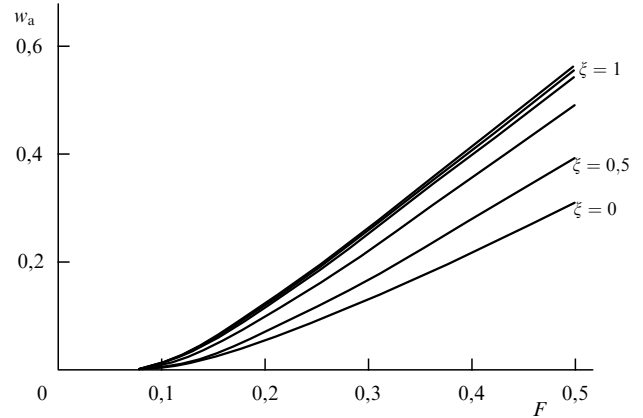


Рис. 6. Скорость надбарьерной ионизации w_a основного состояния атома водорода низкочастотным лазерным излучением [21]. Кривые соответствуют значениям эллиптичности света $\xi = 0$; 0,5; 0,8; 0,9; 0,95 и 1, величины w_a и F даны в атомных единицах.

где $a(x)$ — та же функция, что и в (3.12'). Это уравнение является асимптотически точным в пределе $F \rightarrow 0$. Если поляризация не слишком близка к циркулярной, то уравнение упрощается:

$$w_a(F, \xi) = \sqrt{\frac{3F}{\pi(1 - \xi^2)}} w_{st}(F), \quad 1 - \xi^2 \gg F. \quad (3.19)$$

С другой стороны, $w_a(F, \xi = \pm 1) = w_{st}(F)$. В узкой переходной области ($1 - \xi^2 \lesssim F \lesssim 1$) вблизи циркулярной поляризации зависимость $w_a(F, \xi)$ от амплитуды поля F не имеет (в предэкспоненте) простого степенного вида.

В случае $\gamma \ll 1$ скорость ионизации низкочастотным полем можно вычислить, усредняя $w_{st}(F(t))$ по периоду поля:

$$w_a(F) = \frac{1}{T} \int_0^T w_{st}(F(t)) dt, \quad (3.20)$$

что в области слабых полей приводит [5] к (3.18). Эту формулу можно использовать и для сильных полей, если известны численные значения $w_{st}(F)$. Для атома водорода такие расчеты были проведены многими авторами (см., в частности [56–62]). С учетом этих результатов получаем значения $w_a(F, \xi)$, представленные на рис. 6. Отметим, что в надбарьерной области зависимость w_a от амплитуды поля удивительно близка к линейной:

$$w_a(F, \xi) \approx k(F - F_0), \quad F > F_0, \quad (3.21)$$

где параметры k и F_0 зависят от квантовых чисел уровня (так, $k = 1,47$, $F_0 = 0,122$ для основного состояния атома водорода и $k = 0,81$, $F_0 = 0,260$ для ридберговских состояний; значения k и F_0 даны в атомных единицах). Аналогичное поведение $w_{st}(F)$ для эффекта Штарка в постоянном электрическом поле (рис. 7) было обнаружено в численных расчетах [60, 61] для состояний атома водорода с различными параболическими квантовыми числами (n_1, n_2, m) . При этом использовалось суммирование (расходящихся) рядов теории возмущений по степеням F с помощью аппроксимант Паде–Эрмита. Формула (3.21) относится к области $F > F_0$, причем

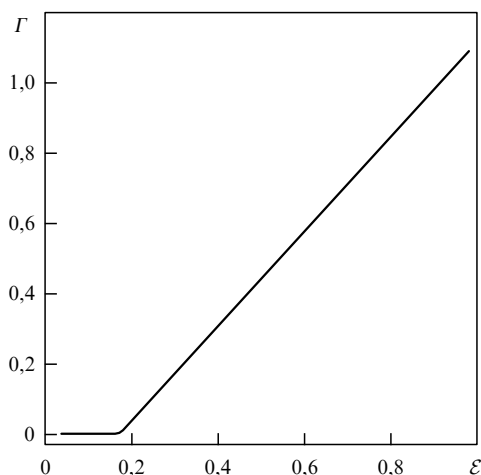


Рис. 7. Эффект Штарка в атоме водорода: зависимость штарковской ширины Γ от поля \mathcal{E} для основного состояния [61]. При $\mathcal{E} \gtrsim 0,2$ хорошо видна область промежуточной асимптотики (3.22).

значение F_0 несколько превышает критическое поле F_{cr} , при котором энергия штарковского уровня совпадает с вершиной потенциального барьера. При $F < F_{cr}$ ширина уровня $\Gamma = w(F)$ экспоненциально мала, а при $F \gtrsim F_{cr}$ (надбарьерная область) происходит выход на асимптотику (3.21).

Уравнение (3.21) является примером "промежуточной асимптотики"⁸, которая не имеет места ни в слабых, ни в сверхсильных ($F \gg F_{cr}$) полях: в последнем случае $\Gamma(F) \propto (F \ln F)^{2/3}$ (см. [65]). Объяснение промежуточной асимптотики в теории ионизации атомов сильным полем дано [66] с помощью известного из квантовой механики метода $1/n$ -разложения [67–69].

4. Ионизация в поле ультракороткого лазерного импульса

Рассмотрим теперь ионизацию атомов ультракоротким лазерным импульсом. Как известно, получение электромагнитных полей высокой интенсивности практически возможно при значительном укорочении лазерного импульса, когда его длительность становится сравнимой с оптическим периодом, а спектр содержит большое число высших гармоник. Вследствие сильной нелинейности процесса многофотонной ионизации, он не может быть сведен к сумме вкладов от отдельных гармоник. Поэтому задача о вычислении скорости ионизации и спектра фотоэлектронов для немонохроматического лазерного излучения произвольной формы является весьма актуальной. В [70] был использован, по существу, тот же вычислительный метод, что и в исходной работе [1], в то время как в [71] был применен так называемый "метод мнимого времени" (ММВ), который мы здесь обсудим очень кратко. Более подробное изложение основ ММВ можно найти в работах [8, 72], а также в главе V монографии [73].

Для описания подбарьерного движения частицы используются классические уравнения движения, но с

мнимым временем⁹: $t \rightarrow it$. Полученная при этом траектория не может быть реализована в классической механике из-за мнимых значений "времени" и импульса, однако при переходе к квантовой механике именно она позволяет описать подбарьерный переход электрона из начального состояния, связанного в атоме, в конечное состояние, принадлежащее континууму. Найдя подбарьерную траекторию и вычислив вдоль нее мнимую часть функции W (так называемое "укороченное действие" [78]), можно получить явные выражения для скорости ионизации уровня w :

$$w \propto \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \text{Im } W\right), \quad W = \int_{t_0}^0 (\mathcal{L} + E_0) dt, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \vec{\mathcal{E}}(t) \mathbf{r} - U(r), \quad E_0 = -\frac{\kappa^2}{2}.$$

Для расчета энергетического и импульсного спектра фотоэлектронов нужно рассмотреть пучок "классических" траекторий, близких к экстремальной подбарьерной траектории (минимизирующей $\text{Im } W$ и определяющей наиболее вероятный путь туннелирования частицы) и вычислить мнимую часть функции действия с точностью до квадратичных членов по отклонению такой траектории от экстремали. Этот подход применим для широкого класса импульсных полей и для произвольных значений параметра Келдыша γ . Можно показать, что в случае линейной поляризации уравнение (2.1) остается справедливым, причем [71]

$$f(\gamma) = \int_0^\gamma \chi(u) \left(1 - \frac{u^2}{\gamma^2}\right) du, \quad (4.2)$$

$$c_1(\gamma) = c_2 - \gamma c_2' = \int_0^\gamma [\chi(u) - \chi(\gamma)] du, \quad c_2(\gamma) = \int_0^\gamma \chi(u) du,$$

а входящая сюда функция $\chi(u)$ полностью определяется формой лазерного импульса. В том случае, когда внешнее поле однородно в пространстве и имеет линейную поляризацию,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E} \varphi(\omega t), \quad -\infty < t < \infty, \quad \varphi(\pm\infty) \rightarrow 0, \quad (4.3)$$

для определения $\chi(u)$ по форме импульса $\varphi(t)$ можно предложить простую аналитическую процедуру, подробно описанную в [71]. Так, например, $\chi(u) = (1 + u^2)^{-1/2}$ соответствует монохроматическому лазерному свету с $\varphi(t) = \cos t$, $\chi(u) = 1/(1 + u^2)$ — солитоноподобному импульсу с $\varphi(t) = 1/\cosh^2 t$ и т.д. (табл. 2). Для различных полей вида (4.3), в том числе и взятых непосредственно из экспериментальных данных, функцию $\chi(u)$ можно найти численно, после чего, как

⁸ Интересные примеры промежуточных асимптотик в задачах гидродинамики и математической физики рассмотрены в [63, 64].

⁹ ММВ для описания туннелирования частиц через переменные во времени барьеры впервые был предложен в [5], более подробно развит в [8] и обобщен на релятивистский случай в [74]. Заметим, что ММВ является обобщением метода комплексных классических траекторий Ландау, развитого им еще в 1932 г. для вычисления квазиклассических матричных элементов с быстро осциллирующими волновыми функциями (однако лишь в случае статических полей, когда введение комплексного времени t не является необходимым, поскольку t можно исключить из квазиклассического импульса $p = \sqrt{2(E - U(x))}$). В подходе Ландау в комплексную плоскость уходит не время t , а координата x . За дальнейшими подробностями относительно метода Ландау отсылаем к работам [75–77] и к §§ 51–53 в книге [16].

Таблица 2. Модели лазерного импульса

№	$\varphi(t)$	$\tau_0(\gamma)$	$\chi(u)$
1	1	γ	1
2	$\cos t$	$\operatorname{arcsinh} \gamma$	$(1+u^2)^{-1/2}$
3	$1/\cosh^2 t$	$\arctan \gamma$	$(1+u^2)^{-1}$
4	$1/\cosh t$	$\arctan(\sinh \gamma)$	$1/\cosh u$
5	$(1+\delta)/(\cosh t + \delta),$ $-1 < \delta \leq 1$	—	$(1-\delta)/(\cosh \rho u - \delta),$ $\rho = \sqrt{(1-\delta)/(1+\delta)}$
6	$(\cosh^2 t + \beta^2 \sinh^2 t)^{-1}$	—	$\left(\cosh^2 u + \frac{\sinh^2 \beta u}{\beta^2}\right)^{-1}$
7	$(1+t^2)^{-1}$	$\tanh \gamma$	$1/\cosh^2 u$
8	$(1+t^2)^{-3/2}$	$\gamma/\sqrt{1+\gamma^2}$	$(1+u^2)^{-3/2}$
9	$\operatorname{cn}(t, q)$	—	$[1 + (\sinh qu/q)^2]^{-1/2}$
10	$\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$	$\frac{2\gamma}{1+\sqrt{1+4\gamma^2}}$	$\frac{1}{2u^2} [1 - (1+4u^2)^{-1/2}]$

Примечание. Функция $\varphi(t)$ задает форму импульса (4.3), τ_0 — начальный момент (безразмерный) подбарьерного движения, cn — эллиптический косинус [20]. При этом № 1 соответствует постоянному полю, а для № 2, 9 и 10 импульс p_{\parallel} , переданный электрону внешним полем после выхода из-под барьера, равен нулю.

видно из (4.2), задача сводится к квадратурам. Импульсный спектр фотоэлектронов определяется формулой

$$dw(\mathbf{p}) \propto \exp \left\{ -\frac{2}{3F} g(\gamma) - \frac{\kappa}{\mathcal{E}} \left[b_1(\gamma)(p_{\parallel} - p_{\max})^2 + b_2(\gamma)p_{\perp}^2 \right] \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \quad (4.4)$$

где $g(\gamma) = 3f(\gamma)/2\gamma$ и $b_{1,2}(\gamma) = \gamma^{-1}c_{1,2}(\gamma)$, а $p_{\max} = (\mathcal{E}/\omega) \int_0^\infty \varphi(t) dt$ — импульс, переданный полем электрону после выхода последнего из-под барьера¹⁰, $0 < t < \infty$.

Отметим, что выражение для спектра (4.4) справедливо, строго говоря, только для коротких лазерных импульсов, когда $v\lambda/cL \ll 1$ (v — скорость электрона, $\lambda = 2\pi/\omega$ — длина волны и L — длина области фокусировки лазерного излучения, $L \gtrsim \lambda$). Для длинных импульсов нужно учитывать изменение дрейфового импульса электрона под действием градиентной силы [79–81]. При этом для расчета распределения электронов по конечным кинетическим энергиям нужно рассмотреть их движение в пространственно-неоднородном поле в области фокуса лазерного пучка и учесть эффект пондеромоторного ускорения. В простых моделях это можно сделать аналитически [81], а для реалистических профилей лазерного поля — численно. Мы не будем вдаваться в эти вопросы, поскольку движение электрона при $t > 0$ является классически разрешенным и полная вероятность, или скорость ионизации при этом уже не меняется (хотя импульсное и угловое распределение могут существенно исказиться).

Функции $g(\gamma)$, соответствующие нескольким импульсным полям вида (4.3), представлены на рис. 8, на

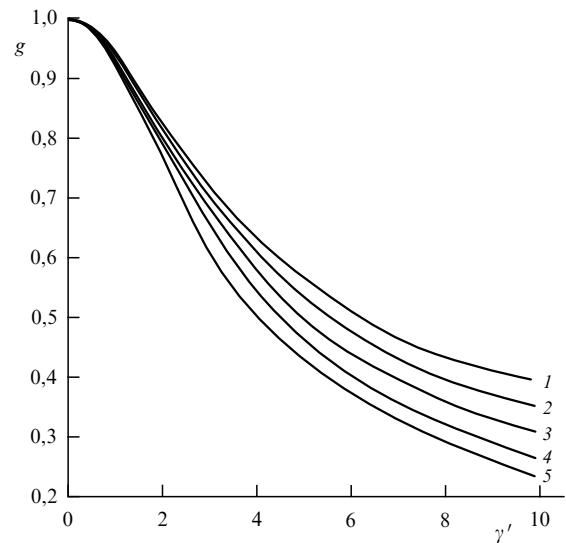


Рис. 8. Зависимость функции $g(\gamma)$ из (4.4) от формы полевого импульса. Кривые 1–5 соответствуют $\varphi(t) = \cos t$, $1/\cosh^2 t$, $\exp(-t^2)$, $(1+t^2)^{-3/2}$ и $(1+t^2)^{-1}$. По оси абсцисс отложена масштабированная переменная $\gamma' = \sqrt{a_2} \gamma$.

котором показана также эта функция для монохроматического поля (кривая 1). В частности, кривая 3 отвечает гауссову, а кривая 5 — лоренцевскому импульсу. Отметим, что ось времени на рис. 8 масштабирована так, что все импульсы имеют одинаковую кривизну в вершине: $\varphi''(0) = -1$, что удобно для сравнения импульсов различной формы.

Результаты расчета для модулированного лазерного импульса с гауссовой огибающей

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \cos t \quad (4.5)$$

(модель, достаточно близкая к эксперименту и часто используемая в лазерной физике) даны на рис. 9. В этом

¹⁰ Формула (4.4) определяет спектр фотоэлектронов, вылетающих на бесконечность (при условии адиабатического выключения внешнего поля), в то время как (2.1) и (3.13) относятся к моменту, когда электрон только выходит из-под барьера ($t = 0$).

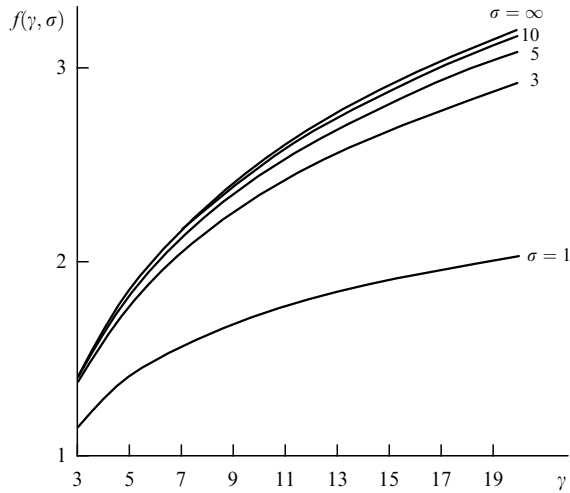


Рис. 9. Функция $f(\gamma, \sigma)$ из (2.1) для модулированного импульса (4.5). Параметр σ определяет ширину огибающей ($\sigma = 1, 3, 5, 10$ и ∞ , для кривых снизу вверх).

случае функцию $\chi(u)$ можно задать в параметрическом виде:

$$\chi = \frac{\exp(-s^2/2\sigma^2)}{\cosh s}, \quad u = \frac{1}{2} \int_{-s}^s \exp\left(\frac{t^2}{2\sigma^2} + t\right) dt, \quad (4.5')$$

где s — параметр, $0 < s < \infty$.

Импульс (4.5) укорачивается с уменьшением σ , при этом значение $f(\gamma, \sigma)$ также уменьшается, а скорость ионизации в области $\gamma \gg 1$ резко возрастает. С физической точки зрения это объясняется увеличением относительного веса высших гармоник в спектре импульса. Этот эффект становится заметен, когда импульс охватывает около 5 и менее периодов поля. Во всех рассмотренных случаях укорочение лазерного импульса приводит к значительному росту скорости ионизации (при той же амплитуде поля \mathcal{E}), если $\gamma \gtrsim 1$. В [71] подробно рассмотрена зависимость импульсного спектра фотоэлектронов от формы ультракороткого импульса, а также эффект туннельной интерференции в энергетическом спектре.

Этот эффект был отмечен [5] для случая линейной поляризации монохроматического излучения. Он возникает благодаря интерференции амплитуд перехода, отвечающих двум седловым точкам в комплексной плоскости t , которые находятся в пределах одного периода электрического поля $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E} \cos \omega t$. Если продольная компонента импульса электрона p_{\parallel} отлична от нуля, то между этими амплитудами появляется (вещественный) сдвиг фазы, приводящий к дополнительному множителю в импульсном спектре. В случае n -фотонной ионизации

$$dw(\mathbf{p}_n) \rightarrow dw(\mathbf{p}_n) [1 + (-1)^n \cos \phi_n], \quad (4.6)$$

где, согласно [5] и [35],

$$\phi_n = \frac{2\kappa p_{\parallel} \sqrt{1 + \gamma^2}}{\omega \gamma}, \quad (4.7)$$

причем $p = p_n = \sqrt{2\omega(n - n_{\text{th}})}$ и $n_{\text{th}} = K_0(1 + 2\gamma^2)/2\gamma^2$ (см. формулу (3.3)).

В квазиклассическом случае фаза ϕ_n велика: $\phi_n \sim F^2/\omega^3 \gg 1$ при $\gamma \ll 1$ и $\phi_n \sim \sqrt{K_0/\ln \gamma}$ при $\gamma \gg 1$. Поэтому при интегрировании (4.6) по углам вылета фотоэлектрона вклад члена с $\cos \phi_n$ резко уменьшается.

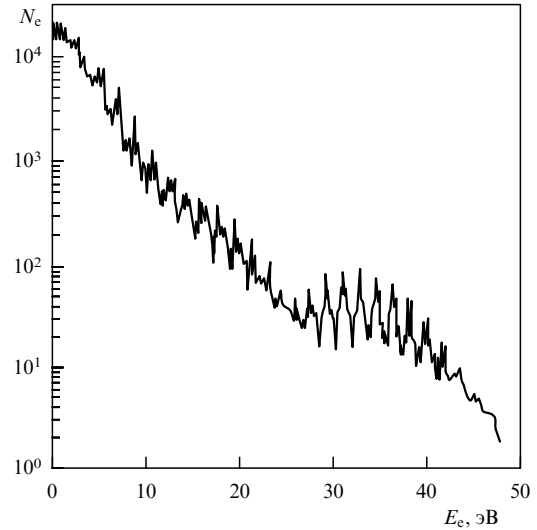


Рис. 10. Энергетический спектр фотоэлектронов при надпороговой ионизации ксенона [43] (случай линейной поляризации). N_e — число фотоэлектронов.

При вычислении скорости ионизации им можно пренебречь, но он приводит к быстрым осцилляциям в вероятностях n -фотонной ионизации $w_n = w(E_n)$, показанным на рис. 10. Экспериментальные исследования интерференционного эффекта в случае эллиптической поляризации излучения выполнены в работах [41–43]. Отметим, что из (4.6) непосредственно вытекает пороговое поведение вероятностей w_n , а именно [4], $w_n \propto (n - n_{\text{th}})^{1/2} \propto \sqrt{E_n}$ для четных n и $w_n \propto (n - n_{\text{th}})^{3/2}$ для нечетных n , при $n \rightarrow n_{\text{th}}$.

Аналогичный интерференционный эффект может проявиться в случае ионизации ультракоротким лазерным импульсом, если форма импульса такова, что несколько седловых точек с данным импульсом \mathbf{p} и с равными (или близкими по величине) значениями мнимой части действия дают вклад в амплитуду перехода. Так, быстрые осцилляции в энергетическом спектре фотоэлектронов были предсказаны [70] для импульсов вида $\varphi(t) = 3^{3/2} \sinh t/2 \cosh^3 t$ и $t \exp[(1 - t^2)/2]$, которые могут служить моделью одного периода лазерного поля (нормировка здесь выбрана так, чтобы в максимуме $\varphi(t_m) = \pm 1$).

5. Адиабатический случай

В низкочастотном лазерном поле ($\gamma \rightarrow 0$, $F \ll 1$) ионизация атомов происходит в те моменты времени, когда электрическое поле близко к своему максимальному значению. Полагая в (4.3) при $t \approx 0$

$$\varphi(t) = 1 - \frac{a_2}{2!} t^2 + \frac{a_4}{4!} t^4 - \dots, \quad a_2 > 0, \quad (5.1)$$

приходим к формуле (4.4), в которой

$$g(\gamma) = 1 - \frac{a_2}{10} \gamma^2 - \frac{1}{280} (a_4 - 10a_2^2) \gamma^4 - \frac{1}{15120} (a_6 - 56a_4a_2 + 280a_2^3) \gamma^6 + \dots, \quad (5.2)$$

$$b_1(\gamma) = \frac{1}{3} a_2 \gamma^2 + \dots, \quad b_2(\gamma) = 1 - \frac{1}{6} a_2 \gamma^2 + \dots$$

Отсюда в случае монохроматического света получаем

$$g(\gamma) = \frac{3}{2\gamma} f(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n \gamma^{2n} = 1 - \frac{1}{10} \gamma^2 + \frac{9}{280} \gamma^4 - \frac{5}{336} \gamma^6 + \dots \quad (5.3)$$

(см. подробнее приложение 13.2).

Переход к масштабированной переменной $t' = \sqrt{a_2} t$ позволяет сравнивать импульсы различного вида:

$$g(\gamma) = 1 - \frac{1}{10} \gamma'^2 + \frac{9}{280} k \gamma'^4 + \dots, \quad (5.4)$$

$$k = 1 - \frac{a_4 - a_2^2}{9a_2^2}, \quad \gamma' = \sqrt{a_2} \gamma.$$

Зависимость от конкретной формы импульса проявляется здесь начиная с членов порядка γ^4 . Коэффициент k зависит только от формы лазерного импульса, но не от его длительности. Как правило¹¹, $0 < k \leq 1$, поэтому коэффициенты разложения (5.4) имеют численную малость. Отсюда можно заключить, что при $\gamma \sim 1$ ситуация ближе к туннельной, чем к многофотонной, и область применимости асимптотических разложений "затягивается" вплоть до значений $\gamma \gtrsim 1$. Интересно отметить, что радиус сходимости этих разложений определяется положением ближайшей особой точки функции $\chi(u)$ в комплексной плоскости [71].

В адиабатической области продольный импульс фотоэлектрона намного превышает поперечный:

$$p_{\parallel} \sim a_2^{-1/2} \gamma^{-1} p_{\perp} \sim \kappa \sqrt{\frac{F}{a_2}} \frac{F}{\omega}, \quad p_{\perp} \sim \sqrt{F} \kappa \ll \kappa, \quad (5.5)$$

что объясняется возможностью разгона электрона вдоль медленно меняющегося электрического поля $\mathcal{E}(t)$. Здесь $a_2 = -\varphi''(0)$ — кривизна лазерного импульса вблизи его вершины.

6. О влиянии магнитного поля на вероятность ионизации

Рассмотрим постоянные во времени поля \mathcal{E} и \mathcal{H} . Пусть θ — угол между ними, а γ_c — параметр адиабатичности:

$$\gamma_c = \frac{\omega_c}{\omega_t} = \frac{\kappa \mathcal{H}}{c \mathcal{E}}, \quad (6.1)$$

где $\omega_c = e\mathcal{H}/mc$ — циклотронная, или ларморовская частота, связанная с вращением частицы в магнитном поле, а $\omega_t = e\mathcal{E}/\kappa$ — частота туннелирования в электрическом поле. Как и в случае ионизации лазерным полем, в этой задаче имеются две частоты, ω_c (играющая ту же роль, что и частота света ω в (1.1)) и ω_t , от соотношения между которыми существенно зависит скорость ионизации w . Экстремальная подбарьерная траектория, найден-

ная с помощью ММВ, имеет вид [10, 82]

$$x = i \frac{\mathcal{E}}{\omega_c^2} \left(\tau - \frac{\tau_0}{\sinh \tau_0} \sinh \tau \right) \sin \theta, \quad (6.2)$$

$$y = \frac{\mathcal{E}}{\omega_c^2} \frac{\tau_0}{\sinh \tau_0} (\cosh \tau - \cosh \tau_0) \sin \theta,$$

$$z = \frac{\mathcal{E}}{2\omega_c^2} (\tau_0^2 - \tau^2) \cos \theta,$$

где $\tau = i\omega_c t$ и в подбарьерном движении $-\tau_0 \leq \tau \leq 0$. Начальный момент τ_0 определяется из уравнения

$$\tau_0^2 - \sin^2 \theta (\tau_0 \coth \tau_0 - 1)^2 = \gamma_c^2. \quad (6.3)$$

Формула для скорости ионизации имеет вид, аналогичный (7.4). Приведем функцию $g = g(\gamma_c, \theta)$, стоящую в экспоненте:

$$g(\gamma_c, \theta) = \frac{3\tau_0}{2\gamma_c} \left[1 - \frac{1}{\gamma_c^2} \left(\sqrt{\tau_0^2 - \gamma_c^2} \sin \theta - \frac{1}{3} \tau_0^2 \cos^2 \theta \right) \right]. \quad (6.4)$$

Отметим, что это выражение совпадает с полученным в работе [10], но записано в более компактном виде. С ростом γ_c функция g монотонно возрастает, а вероятность ионизации соответственно резко падает. Таким образом, магнитное поле стабилизирует связанный уровень. На языке ММВ это легко объясняется тем, что из-за влияния силы Лоренца подбарьерная траектория электрона "закручивается", и ширина барьера возрастает.

В данной задаче были вычислены также кулоновская поправка $Q(\gamma_c, \theta)$ и предэкспонента P [72]. Учет кулоновского взаимодействия значительно увеличивает вероятность ионизации нейтрального атома по сравнению со случаем отрицательного иона (при одном и том же значении энергии связи $|E_0| = \kappa^2/2$). Приведем разложение в области $\gamma_c \ll 1$ ("слабое" магнитное поле):

$$\tau_0(\gamma_c, \theta) = \gamma_c + \frac{1}{18} \gamma_c^3 \sin^2 \theta + O(\gamma_c^5), \quad (6.5)$$

$$g(\gamma_c, \theta) = 1 + \frac{1}{30} \gamma_c^2 \sin^2 \theta - \frac{\gamma_c^4}{315} \sin^2 \theta \left(\cos^2 \theta - \frac{11}{24} \sin^2 \theta \right) + \dots, \quad (6.6)$$

$$Q(\gamma_c, \theta) = 1 + \frac{2}{9} \gamma_c^2 \sin^2 \theta + \dots, \quad P(\gamma_c, \theta) = 1 - \frac{1}{6} \gamma_c^2 + \dots$$

При $\theta = 0$ (случай $\mathcal{E} \parallel \mathcal{H}$) имеем: $\tau_0 = \gamma_c$, $g(\gamma_c, 0) \equiv 1$ и $Q(\gamma_c, 0) = (2\kappa^3/\mathcal{E})^{2Z/\kappa}$. В другом предельном случае, $\theta = \pi/2$, формулы несколько упрощаются (этот случай мы рассмотрим в следующем разделе). Отметим, что при $\gamma_c > 1$ вероятность ионизации, хотя и экспоненциально мала, все же не обращается в нуль (в отличие от утверждения, сделанного в работе [83]).

В заключение этого раздела укажем на еще одно применение ММВ. Как известно, ряды теории возмущений (ТВ) в квантовой механике и теории поля факториально расходятся (так называемый "феномен Дайсона" [84–87]). В [88, 89] ММВ применялся к исследованию высших порядков ТВ (по степеням \mathcal{E} и \mathcal{H}) для атома водорода в постоянных внешних полях. Было показано [89], что при некотором значении отношения \mathcal{H}/\mathcal{E} , зависящем от угла θ между полями, ряд ТВ из знакопо-

¹¹ Однако этот коэффициент может быть и больше единицы, если импульс уплощается в вершине. Конкретный пример:

$$\varphi(t) = \frac{1 + (1/2)(1-a)t^2}{\cosh t} = 1 - \frac{a}{2} t^2 + \frac{1}{24} (6a-1)t^4 + \dots,$$

для которого $k > 1$ при $0 < a < 3 - \sqrt{8} = 0,172$.

стоянного (как в случае эффекта Штарка) становится знакопеременным (как для эффекта Зеемана). В работах [89, 90] ММВ успешно применялся к установлению асимптотики высших порядков $1/n$ -разложения в многомерных задачах квантовой механики, в том числе для молекулярного иона водорода H_2^+ (см. также [91, 92]).

Мы не будем входить в дальнейшие подробности, поскольку эти вопросы лежат в стороне от данного обзора.

7. Лоренцева ионизация

Когда атом или ион влетает в магнитное поле \mathcal{H} , то в его системе покоя K_0 возникает (вследствие преобразования Лоренца) электрическое поле \mathcal{E}_0 , которое может вызвать ионизацию атома. Такой процесс получил название лоренцевой ионизации. Рассмотрим квазиклассическую теорию лоренцевой ионизации [93], применимую в области слабых (по сравнению с атомными) полей:

$$\epsilon = \frac{\mathcal{E}_0}{\kappa^3 \mathcal{E}_a} \ll 1, \quad h = \frac{\mathcal{H}_0}{\kappa^2 \mathcal{H}_a} \ll 1, \quad (7.1)$$

где $\kappa = \sqrt{2I}$ и $\mathcal{H}_a = m^2 e^3 c / \hbar^3 = 2,35 \times 10^9$ Гс. Мы ограничимся случаем ионизации s -уровня ($l = 0$).

Если атом движется со скоростью v под углом φ к направлению магнитного поля \mathcal{H} , то в системе покоя действуют поля \mathcal{E}_0 и \mathcal{H}_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= q\mathcal{H} = (\Gamma^2 - 1)^{1/2} \mathcal{H} \sin \varphi = \frac{v \sin \varphi}{\sqrt{1 - v^2}} \mathcal{H}, \quad \vec{\mathcal{E}}_0 \perp \vec{\mathcal{H}}_0, \\ \mathcal{H}_0 &= (1 + q^2)^{1/2} \mathcal{H} = (\Gamma^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^{1/2} \mathcal{H} = \\ &= \sqrt{\frac{1 - v^2 \cos^2 \varphi}{1 - v^2}} \mathcal{H}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $q = p_\perp / mc$, p_\perp — поперечный (относительно магнитного поля) импульс частицы и $\Gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор. Важным параметром, определяющим подбарьерное движение электрона, является¹² $\gamma_L = \omega_c / \omega_t$ (частный случай (6.1)), где $\omega_c = e\mathcal{H}_0 / mc$ — циклотронная частота, а $\omega_t = \mathcal{E}_0 / \kappa$ — частота туннелирования:

$$\gamma_L = \frac{\kappa \mathcal{H}_0}{c \mathcal{E}_0} = \frac{\kappa}{v} \left(1 + \frac{\cot^2 \varphi}{\Gamma^2} \right)^{1/2} = \frac{\kappa}{v \sin \varphi} \sqrt{1 - v^2 \cos^2 \varphi} \quad (7.3)$$

(скорость v выражена в атомных единицах $e^2 / \hbar = 2,19 \times 10^8$ см s^{-1}). Для нерелятивистских частиц $\mathcal{E}_0 / \mathcal{H}_0 = v_\perp / c \ll 1$, а $\gamma_L = \kappa / v_\perp$ может принимать любые значения. С другой стороны, в случае ультрарелятивистских, $\Gamma \gg 1$, частиц $\mathcal{E}_0 / \mathcal{H}_0 = 1 - (2q^2)^{-1} \rightarrow 1$ и в системе K_0 возникают скрещенные поля, т.е. $\vec{\mathcal{E}}_0 \perp \vec{\mathcal{H}}_0$ и $\mathcal{E}_0 \approx \mathcal{H}_0$. При этом \mathcal{E}_0 может во много раз превышать исходное магнитное поле \mathcal{H} .

Используя квазиклассическое решение [72] задачи об ионизации атома в электрическом и магнитном полях, для вероятности лоренцевой ионизации в лабораторной

системе отсчета K находим:

$$w_L = \Gamma^{-1} \kappa^2 C_\kappa^2 \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^{1-2\eta} P(\gamma_L) [Q(\gamma_L)]^\eta \exp \left[-\frac{2}{3\epsilon} g(\gamma_L) \right]. \quad (7.4)$$

Здесь C_κ — асимптотический коэффициент волновой функции в свободном атоме (см. приложение 13.1), $\eta = Z/\kappa$ — параметр Зоммерфельда, Z — заряд атомного остова,

$$\epsilon = \frac{\mathcal{E}_0}{\kappa^3} = \Gamma \frac{v_\perp h}{137\kappa}, \quad g(\gamma) = \frac{3\tau_0}{2\gamma} \left(1 - \frac{\sqrt{\tau_0^2 - \gamma^2}}{\gamma^2} \right), \quad (7.5)$$

а более громоздкие выражения [93] для предэкспоненциального множителя P и кулоновской поправки Q мы опустим. Все эти величины наиболее просто выражаются через τ_0 — мнимое "время" подбарьерного движения электрона, которое определяется из уравнения (ср. с (3.6)):

$$\tau_0^2 \left[1 - \left(\coth \tau_0 - \frac{1}{\tau_0} \right)^2 \right] = \gamma_L^2, \quad (7.6)$$

или $\tanh \tau_0 = \tau_0 / [1 + (\tau_0^2 - \gamma_L^2)^{1/2}]$. Главный (экспоненциальный) множитель в формуле (7.4) был найден в работе [10]. Приведем его разложения:

$$g(\gamma) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{30} \gamma^2 + \frac{11}{7560} \gamma^4 + \dots, & \gamma \ll 1, \\ \frac{3}{8} [\gamma + 2\gamma^{-1} + \gamma^{-3} + \dots], & \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (7.7)$$

Хотя $P(\gamma)$ и $Q(\gamma)$ являются довольно резкими функциями параметра γ (рис. 11), вероятность w_L наиболее чувствительна к изменению именно $g(\gamma)$, поскольку эта функция входит в (7.4) в экспоненте и притом с большим коэффициентом $2/3\epsilon \gg 1$. Функции $g(\gamma)$, $P(\gamma)$ и $Q(\gamma)$ табулированы [93]. Вероятность w_L удобно представить в следующей форме:

$$w_L = \Gamma^{-1} S w_{st}(\mathcal{E}_0), \quad (7.8)$$

где $w_{st}(\mathcal{E}_0)$ — статическая вероятность ионизации в электрическом поле \mathcal{E}_0 , а S — фактор стабилизации,

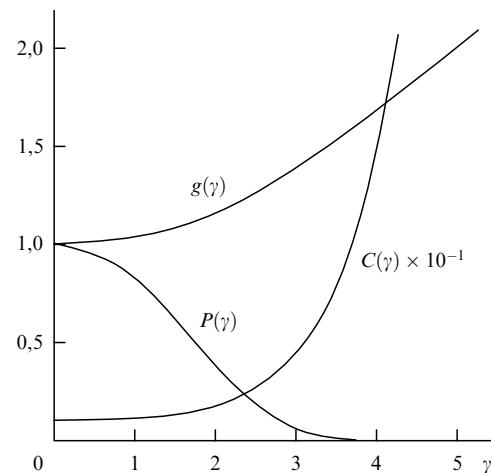


Рис. 11. Случай лоренцевой ионизации. Графики функций, входящих в уравнение (7.4), причем $C(\gamma) = \sqrt{Q(\gamma)}$ и $\gamma \equiv \gamma_L$.

¹² Этот параметр аналогичен параметру Келдыша γ в теории многофотонной ионизации. Заметим, что $\gamma_L = 2b/r_L$, где b — ширина барьера в электрическом поле, а $r_L = \kappa c / e\mathcal{H}$ — ларморовский радиус. При $r_L \lesssim b$, или $\gamma > 1$, магнитное поле искривляет подбарьерную траекторию и затрудняет туннелирование.

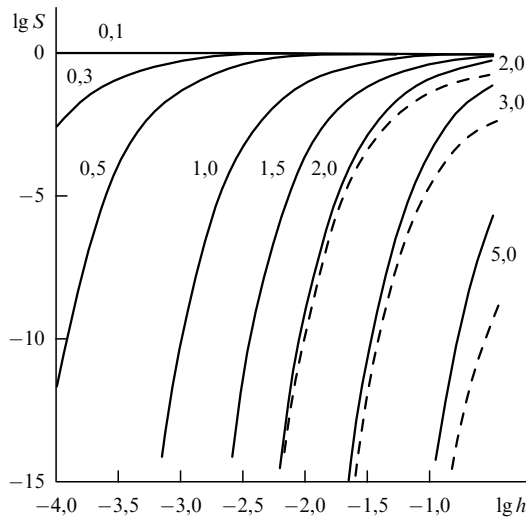


Рис. 12. Фактор стабилизации S : сплошные кривые — для основного состояния атома водорода, штриховые — для отрицательного иона с той же энергией связи ($\kappa = 1$, $Z = 0$). У кривых указаны значения параметра γ_L , $h = \mathcal{H}/\kappa^2 \mathcal{H}_a$ — приведенное магнитное поле. Масштаб по обеим осям — логарифмический.

учитывающий подавление вероятности распада связанного состояния магнитным полем. Влияние кулоновского взаимодействия на величину S становится заметным при $\gamma_L > 1,5$, как видно из рис. 12.

Статические магнитные поля, полученные в лабораторных условиях, не превышают 1 МГс. Метод магнитной кумуляции (сжатие аксиального магнитного поля с помощью взрыва), предложенный А.Д. Сахаровым в 1951 г. [94, 95], позволил достичь рекордных значений $\mathcal{H} = 25$ МГс в СССР и $\mathcal{H} = 15$ МГс в США, а дальнейший прогресс в этой области позволяет ожидать¹³ достижения полей 30–100 МГс. Из таблицы 3 видно, что в поле $\mathcal{H} = 25$ МГс при изменении скорости атома водорода от 1 до 10 а.е. ситуация меняется от практически полной стабильности атома до мгновенной ионизации его за время, сравнимое с атомным.

Таблица 3. Вероятность лоренцевой ионизации для атома водорода (основное состояние)

$\mathcal{H} = 25$ МГс			$\mathcal{H} = 350$ МГс		
v	$\mathcal{E}_0 \cdot 100$	w_L	v	$\mathcal{E}_0 \cdot 100$	w_L
1,0	1,06	1,03(–9)	0,167	2,48	7,6(–12)
1,25	1,33	6,41(–4)	0,20	2,98	8,05(–3)
1,67	1,77	2,40	0,22	3,28	50,4
2,0	2,13	1,55(5)	0,25	3,77	1,06(5)
2,5	2,66	5,56(7)	0,3	4,47	5,22(8)
5,0	5,32	6,24(12)	0,4	5,96	1,33(12)
10	10,7	7,73(14)	0,5	7,45	3,54(13)

Примечание. Здесь $\varphi = \pi/2$, скорость атома v и поле \mathcal{E}_0 даны в атомных единицах, скорость ионизации w_L — в c^{-1} .

В случае отрицательных ионов с малой энергией связи (например, ион H^- с $I = 0,7542$ эВ и $\kappa = 0,236$) зависи-

мость вероятности w_L от \mathcal{H} и v имеет качественно тот же вид, что и для нейтральных атомов, но переходная область между $w_L \approx 0$ и $w_L \rightarrow 1$ расположена при меньших значениях \mathcal{H} и v . Слабо связанные состояния с $\kappa \ll 1$ известны в физике твердого тела (экситоны Ванье–Мотта в полупроводниках, например, $\kappa \sim 0,01$ для кристалла германия). В этих случаях для ионизации требуются значительно меньшие поля, чем для атома водорода.

Сверхсильные магнитные поля встречаются также в астрофизике. На поверхности магнитных белых карликов поле \mathcal{H} меняется от 2 МГс до ~ 1000 МГс (см. табл. на с. 35 в [97], содержащую список 50 таких объектов). В частности, для звезды Gw + 70°08247 магнитное поле меняется от максимального значения $\mathcal{H}_{\max} = 350$ МГс на полюсах звезды до $0,5 \mathcal{H}_{\max}$ на ее экваторе. Лоренцева ионизация может возникать также в том случае, когда звезда в своем движении в галактике проходит сквозь облако нейтрального водорода (оценки см. в [93]).

Подбарьерное движение электрона в магнитном поле характеризуется двумя частотами: ω_L и ω_l . В этом смысле ситуация аналогична той, что имеет место при ионизации атома лазерным полем (имеются две характерные частоты — ω и ω_l). Эта аналогия не является поверхностной, достаточно сравнить уравнения (3.6) и (7.6) для мнимого времени τ_0 и соответствующие выражения для подбарьерных траекторий. Однако есть и различие между этими двумя задачами. В последнем случае с ростом параметра γ_L подбарьерная траектория "закручивается", а ширина барьера возрастает:

$$b = \frac{\kappa^2}{2\mathcal{E}} \begin{cases} 1 + \frac{1}{36} \gamma^2 + \dots, & \gamma \ll 1, \\ \gamma(1 + \gamma^{-2} + \dots), & \gamma \gg 1, \end{cases} \quad (7.9)$$

в то время как в случае ионизации лазерным светом ширина барьера с ростом γ уменьшается [5], например

$$b = \frac{\kappa^2}{2\mathcal{E}} \left(1 - \frac{1}{4} \gamma^2 \right) \quad \text{при } \gamma \ll 1.$$

Поэтому поведение функции $g(\gamma)$ и скорости ионизации в области $\gamma \gg 1$ имеет здесь прямо противоположный характер (ср. рис. 3 и 11).

Выше предполагалось, что скорость атома $v \ll c$. В релятивистской теории лоренцевой ионизации, развитой Никишовым [98] на основе уравнения Клейна–Гордона (без учета спина электрона), формулы значительно усложняются. Простой результат удается получить при $Z = 0$, $\mathbf{v} \perp \vec{\mathcal{H}}$ и $\gamma_L \ll 1$:

$$w_L(\mathcal{H}, v) \propto \mathcal{E}_0 \exp \left[-\frac{2\eta^3}{3\mathcal{E}_0} \left(1 + \frac{1}{30} \tilde{\gamma}_L^2 \right) \right], \quad (7.10)$$

где $\mathcal{E}_0 = \mathcal{H}v/\sqrt{1-v^2}$ — электрическое поле в системе покоя атома, $\tilde{\gamma}_L = \gamma_L \sqrt{1-v^2}$, $\eta = (m^2 - e_0^2)^{1/2}$, e_0 — энергия связанного состояния и $c = 1$. Поскольку $\tilde{\gamma}_L \ll 1$, то ионизация определяется в данном случае только полем \mathcal{E}_0 , а влияние магнитного поля \mathcal{H}_0 несущественно (фактор стабилизации $S \approx 1$). В нерелятивистском пределе имеем: $\eta = \kappa = \sqrt{2I}$, $\mathcal{E}_0/\eta^3 = \epsilon$, и формула (7.10) переходит в (7.4), причем коэффициент $1/30$ в поправке согласуется с первым членом разложения (7.7).

¹³ См. [96]. Отметим, что в [93] дано описание динамики процесса магнитной кумуляции, являющееся некоторым развитием оценок, проведенных Сахаровым [95].

8. Точно решаемая модель

Как всегда, представляет интерес исследование моделей, допускающих точное решение уравнения Шрёдингера. В данном случае такой моделью является задача о распаде мелкого уровня, связанного короткодействующими силами притяжения, в поле электромагнитной волны с циркулярной поляризацией¹⁴. Рассмотрение этой модели позволяет детально проследить переход от туннельной к многофотонной ионизации, обсудить точность квазиклассического приближения и т.д.

Переход в систему отсчета, вращающуюся вместе с полем [100], приводит к стационарному уравнению Шрёдингера с гамильтонианом

$$H_\omega = -\frac{1}{2} \Delta + U(r) - \omega L_z + \mathcal{E}x, \quad (8.1)$$

где ω и \mathcal{E} — частота и амплитуда электрического поля волны, а L_z — проекция орбитального момента электрона на направление ее распространения (ось z). Спектр комплексных квазиэнергетических [101, 102] состояний совпадает со спектром квазистационарных уровней гамильтониана H_ω , функция Грина которого, удовлетворяющая условию излучения Зоммерфельда на бесконечности, может быть найдена в аналитическом виде. Используя приближение δ -потенциала, эквивалентное введению граничного условия в нуле [73], для квазиэнергии $E = E_r - i\Gamma/2$ квазистационарного состояния удается получить замкнутое уравнение [103, 104]

$$I(\epsilon; \gamma, K_0) = \sqrt{\epsilon} - 1, \quad (8.2)$$

где $l = 0$,

$$I = \frac{1}{(2\pi i K_0)^{1/2}} \int_0^\infty \frac{du}{u^{3/2}} \left[\exp\left(i \frac{2K_0}{\gamma^2} \frac{\sin^2 u}{u}\right) - 1 \right] \times \\ \times \exp(-2iK_0 \epsilon u), \quad (8.3)$$

$$\epsilon = \varepsilon + \gamma^{-2}, \quad \varepsilon = \frac{E}{E_0} = 1 + \delta + i\eta,$$

$$E_r = E_0(1 + \delta), \quad \Gamma = \kappa_0^2 \eta, \quad (8.4) \\ \gamma = \frac{\omega K_0}{\mathcal{E}} = \frac{1}{2K_0 F}, \quad \kappa_0 = \sqrt{2I_0},$$

ε — приведенная квазиэнергия, $\delta = (\text{Re } E - E_0)/E_0$ — относительный сдвиг уровня в лазерном поле, $I_0 = -E_0 = \kappa_0^2/2$ — энергия связи при отсутствии волны, γ — параметр Келдыша, $F = \mathcal{E}/\kappa_0^3$ — приведенное поле, $K_0 = I_0/\omega$ — параметр многоквантовости. Уравнение (8.2) формально справедливо при любых F и позволяет выйти за границы области слабого поля (далее, без ограничения общности, полагаем $\kappa_0 = 1$). Хотя это уравнение известно уже около 30 лет, долгое время оно не поддавалось численному решению (вне рамок теории возмущений по полю F). Причина этого состоит в том, что, поскольку $\Gamma > 0$ и $\text{Im } \epsilon = \Gamma/2I_0 > 0$, то интеграл (8.3)

экспоненциально расходится на верхнем пределе¹⁵ и требует доопределения, т.е. регуляризации. В [105] в качестве такой регуляризации было предложено использовать метод Зельдовича [106], развитый им при построении теории возмущений для квазистационарных состояний (см. также [73], гл. VII).

Суть данного метода можно пояснить на примере вычисления нормировочного интеграла

$$N = \int_0^\infty |\chi_k(r)|^2 dr.$$

Поскольку для гамовской волновой функции $\chi_k(r) = rR_k(r) \propto \exp(ikr)$, то $|\chi_k|^2 \propto \exp(2k_2 r)$ при $r \rightarrow \infty$, где $k = \sqrt{2E} = k_1 - ik_2$ и $k_2 > 0$, поэтому нормировочный интеграл N расходится. Как показал Зельдович, его следует понимать в регуляризованном смысле как предел

$$N = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^\infty \chi_k^2(r) \exp(-\alpha r^2) dr, \quad (8.5)$$

играющий роль нормы этого состояния (отмечается [106], что в (8.5) входит именно квадрат комплексной волновой функции $\chi_k^2(r)$, а не квадрат ее модуля, что обеспечивает сходимость интеграла). В соответствии с этим рецептом в качестве решения уравнения (8.2) будем рассматривать предел при $\alpha \rightarrow +0$ решений уравнения

$$I_\alpha(\epsilon; \gamma, K_0) = \sqrt{\epsilon} - 1, \quad (8.2')$$

где $I_\alpha(\epsilon)$ получается из (8.3) заменой

$$\exp(-2i\epsilon K_0 u) \rightarrow \exp(-2i\epsilon K_0 u - \alpha u^2), \quad \alpha > 0. \quad (8.6)$$

Практическое выполнение указанной процедуры предъявляет определенные требования к вычислительным мощностям, которые вряд ли могли быть реализованы в 60-е годы прошлого века. Так, например, для вычисления ширины Γ из уравнения (8.2') с относительной точностью порядка 10^{-4} оказалось необходимым достичь значений параметра регуляризации $\alpha \sim 10^{-6} - 10^{-7}$, что в настоящее время вполне осуществимо на персональном компьютере. Вопросы сходимости метода Зельдовича и условия его применимости рассматриваются в [105].

Результаты вычисления ширины уровня Γ как функции $1/K_0 = \omega/I_0$ представлены на рис. 13 при нескольких значениях параметра γ . Пунктиром показано квазиклассическое приближение Γ_Q , отвечающее теории Келдыша [4, 5]. Видно, что если $\gamma \leq 1$, то оно всегда справедливо при $K_0 \gtrsim 1$; если же $\gamma \gg 1$, то требуется $K_0 \gtrsim 2 \ln \gamma$. При уменьшении параметра Келдыша происходит переход от многофотонного к туннельному режиму ионизации. Действительно, при $\gamma \gtrsim 3$ в зависи-

¹⁴ Эта задача представляет и самостоятельный интерес для теории многофотонной ионизации отрицательных ионов типа H^- , Li^- , Na^- и т.д. Результаты, ранее достигнутые в этой области, обсуждаются в монографии [17] и обзоре [99].

¹⁵ Так же обстоит дело и в случае уравнения, полученного Демковым и Друкеревым [34] для задачи об ионизации s -уровня постоянным электрическим полем, однако регуляризация этого уравнения достигается просто смещением контура интегрирования с вещественной оси в нижнюю полуплоскость [87]. Подчеркнем, что возникающие здесь расходимости отнюдь не случайны и находятся в прямой связи с экспоненциальным ростом на бесконечности гамовской волновой функции квазистационарного состояния.

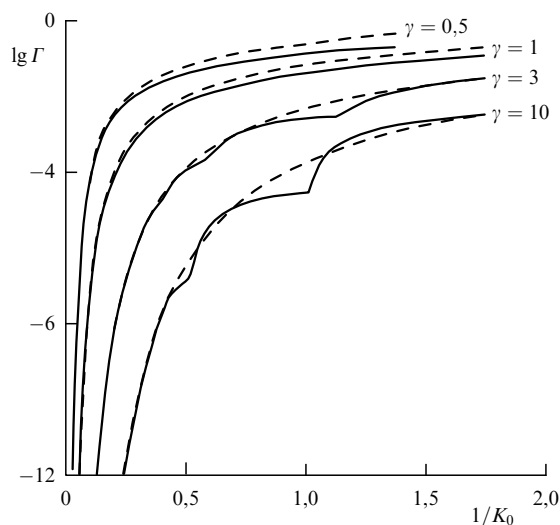


Рис. 13. Ширина квазистационарного уровня Γ в зависимости от $1/K_0$ в случае δ -потенциала ($r_c = 0$). Сплошные кривые $\Gamma = \Gamma(\gamma, \omega)$ — численное решение уравнения (8.2) с использованием метода Зельдовича, штриховые кривые — квазиклассическое приближение [4, 5].

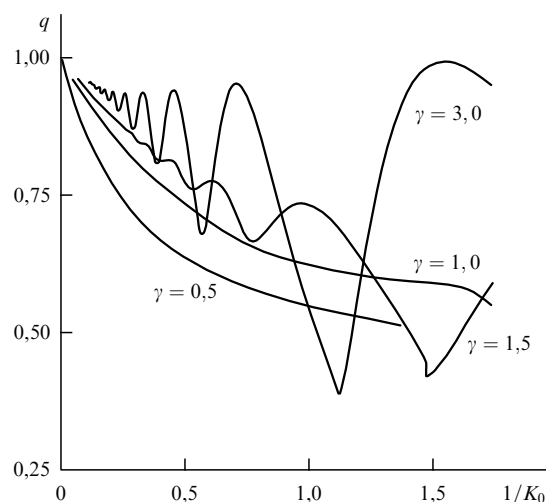


Рис. 14. Точность квазиклассического приближения для ширины уровня в случае δ -потенциала: $q = \Gamma/\Gamma_Q$, у кривых указаны значения параметра Келдыша γ .

мости ширины Γ от ω проявляется структура, связанная с открытием каналов n -фотонной ионизации. Это отчетливо видно на рис. 14, на котором показано отношение $q = \Gamma/\Gamma_Q$, где $\Gamma_Q(\gamma, \omega)$ — результат квазиклассического приближения [4, 5]. При $\gamma > 5$ и $K_0 \sim 1$ величины Γ и Γ_Q при одной и той же частоте ω могут различаться на порядок. При уменьшении γ пороговые осцилляции быстро сглаживаются, когда мы входим в адиабатическую область $\gamma \lesssim 1$.

Уравнение (8.2) соответствует нулевому радиусу действия сил, однако нетрудно ввести в него [107] поправку $\Delta(\epsilon, \kappa_0 r_s)$ на эффективный радиус взаимодействия. Численное решение такого уравнения позволяет найти сдвиги и ширины уровней однозарядных отрицательных ионов (параметр разложения $\kappa_0 r_s$ меняется при этом от 0,62 для H^- до 0,54 для Rb^-). Результаты расчета [108]

ширины Γ показывают, что хотя качественно ситуация удовлетворительно описывается приближением сил нулевого радиуса, все же поправка порядка r_s довольно существенна и должна учитываться при сравнении теории с экспериментом.

Отметим еще, что выполненные ранее [103] численные расчеты зависимости ширины Γ от параметров γ и ω в модели δ -потенциала находятся в противоречии с рис. 13 и, как уже отмечалось [107], являются ошибочными. Недавно был предложен [109, 110] способ регуляризации уравнения (8.2), существенно отличный от метода Зельдовича¹⁶ и использующий специфическую форму этого интегрального уравнения. Полученные с его помощью значения ширины Γ согласуются с результатами наших вычислений, однако метод регуляризации Зельдовича более универсален и, несомненно, найдет еще дальнейшие применения в атомной и ядерной физике.

Обобщение уравнений (8.2), (8.3) на случай состояний с отличным от нуля орбитальным моментом l с учетом эффективного радиуса взаимодействия r_l (что существенно при $l \geq 1$, поскольку приближение сил нулевого радиуса применимо только для s -состояний [73]) получено в [107]. На основе этого была решена задача об ионизации слабо связанного p -уровня полем циркулярно-поляризованной волны и найдены аналитические выражения для сдвигов и ширин трех квазиэнергетических состояний, возникающих из исходного p -уровня в поле волны [107]. Показано, что в антиадиабатическом случае ($K \gg 1, \gamma \gtrsim 1$) все три ширины Γ_{lm} различаются между собой, причем наименьшей является ширина состояния с $m = 0$. Таким образом, ситуация здесь существенно отличается от случая линейной поляризации (2.5), причем симметрия вероятностей w_{lm} по знаку m не имеет места (здесь $m = 0, \pm 1$ — проекция орбитального момента на направление распространения волны).

9. Теория Келдыша и эксперимент

Остановимся, хотя и очень бегло, на вопросе об экспериментальной проверке теории Келдыша. За последние 10–15 лет во многих работах наблюдалась однократная и многократная ионизация атомов благородных газов в областях спектра от оптического до ближнего ультрафиолетового диапазона, однако точность этих экспериментов еще недостаточно высока. Значительно более точные результаты были получены с помощью мощных инфракрасных лазеров, для которых $\omega \ll I, \gamma \lesssim 1$ и $\mathcal{E} < \mathcal{E}_a$ (типичный пример — CO_2 -лазер с $\lambda = 10,6$ мкм, $\hbar\omega = 0,117$ эВ = 0,0043 а.е.). В этих экспериментах был реализован туннельный режим ионизации, при котором параметр Келдыша меньше единицы, причем экспериментальные данные сопоставлялись, как правило, с предсказаниями так называемой "ADK-теории" [50, 51], которая обсуждается нами в приложении 13.3. Далее результаты некоторых экспериментов будут сравниваться также с формулами статьи [5]. При усреднении вероятностей ионизации w_{lm} со статистическим весом эти формулы принимают вид (13.3.1) из приложения 13.3. Не претендуя на сколько-нибудь полный обзор

¹⁶ В работах [109, 110] этим методом был рассмотрен процесс стабилизации вероятности распада атома в сильном поле и вычислена скорость ионизации отрицательного иона водорода лазерным излучением.

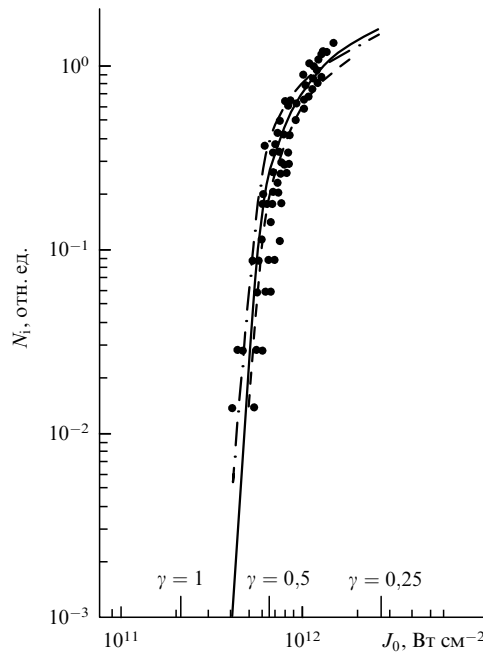


Рис. 15. Число ионов K^+ (в относительных единицах) в зависимости от интенсивности света J_0 , Вт см^{-2} , согласно [111] (CO_2 -лазер, $\xi = 0$, $K_0 = 37,2$). Сплошная кривая рассчитана по формуле (13.3.4), две другие кривые отвечают формуле (13.3.1) (см. объяснение в тексте). На оси ординат отмечены точки, в которых параметр Келдыша $\gamma = 1, 0, 5$ и $0,25$.

экспериментальных данных, рассмотрим некоторые из многих десятков работ, посвященных этому вопросу.

На рисунке 15 представлена зависимость числа N_i ионов калия (в произвольных единицах) от интенсивности лазерного излучения: точки — экспериментальные данные [111], а кривые построены, соответственно, по АДК-формуле (13.3.4) (сплошная кривая) и по формуле (13.3.1) без учета поправки $\propto \gamma^2$ в экспоненте (штриховая кривая) и с учетом этой поправки (штрихпунктирная кривая). Заметим, что адиабатическая поправка $\propto \gamma^2$ более существенна, чем различие между коэффициентами C_K и C_K^{ADK} (хотя $0,1\gamma^2 \ll 1$, но перед этим членом, стоящим в экспоненте, имеется большой коэффициент $2/3F$). На оси ординат отмечены точки, в которых параметр Келдыша $\gamma = 1; 0,5$ и $0,25$ (все экспериментальные данные относятся к области, в которой $\gamma < 0,4$, поэтому можно использовать формулы, относящиеся к туннельному режиму ионизации). Из рисунка 15 видно, что обе формулы, (13.3.1) и (13.3.4), согласуются с экспериментальными данными. Это и неудивительно, поскольку все различие между ними при $\gamma \ll 1$ связано с различием между коэффициентами C_K и C_K^{ADK} , которое невелико (в данном случае $C_K/C_K^{\text{ADK}} = 0,87$).

Приведем формулы, по которым легко рассчитать электрическое поле \mathcal{E} и параметр γ :

$$\mathcal{E} = 0,169\sqrt{J}, \quad \gamma = \frac{\omega\kappa}{\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{J_1}{J}}, \quad J_1 = \frac{35\omega^2 I}{I_H}, \quad (9.1)$$

причем $\gamma^2/15F = 0,133K_0(J_1/J)^{3/2}$, а параметр многоквантовости равен

$$K_0 = 0,011 \frac{\lambda I}{I_H} = \frac{I}{2\omega I_H}. \quad (9.2)$$

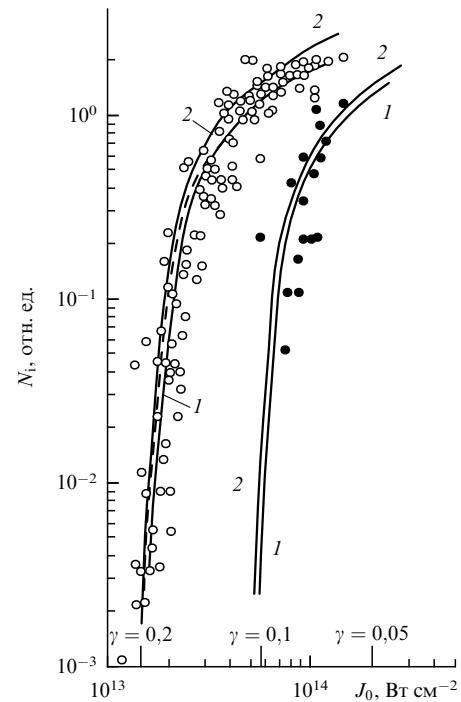


Рис. 16. Экспериментальные данные [111] по туннельной ионизации атома ксенона с образованием ионов Xe^+ (\circ) и Xe^{++} (\bullet). Кривые 1 соответствуют формуле (13.3.4), кривые 2 построены по (13.3.1).

Здесь \mathcal{E} измеряется в единицах атомного поля \mathcal{E}_a , интенсивность лазерного излучения J — в 10^{15} Вт $\text{см}^{-2} = 1$ ПВт см^{-2} , частота ω — в атомных единицах $me^4/\hbar^3 = 4,13 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$, длина волны λ — в нм и $\xi = 0$ (линейная поляризация). Для перехода к общему случаю эллиптической поляризации достаточно сделать замену $J \rightarrow J/(1 + \xi^2)$. Область туннельной ионизации соответствует интенсивностям $J > J_1$.

Аналогичные результаты были получены [111] в эксперименте по образованию ионов ксенона в поле излучения CO_2 -лазера (рис. 16), а также в случае ионизации атомов гелия [112] полем Ti:Sa лазера. Кривые, построенные по формулам (13.3.1) и (13.3.4), близки друг к другу (см. рис. 15, 16) и неплохо описывают данные эксперимента (при этом кривые для Xe^{++} рассчитаны в предположении о каскадном механизме туннельной ионизации, что, как видно, в данном случае оправдывается). Поскольку для атома гелия $C_K/C_K^{\text{ADK}} = 0,98$, то без учета поправки $\propto \gamma^2$ кривые, соответствующие формулам (13.3.1) и (13.3.4), неотличимы в пределах точности рисунка.

Недавно был измерен [113] импульсный спектр частиц, образующихся в процессе туннельной ионизации атомов неона. На рисунке 17, взятом из работы [113], представлены распределения ионов Ne^+ в направлении вдоль (p_{\parallel}) и поперек (p_{\perp}) вектора поляризации линейно поляризованного излучения Ti:Sa лазера ($\lambda = 795$ нм, $K_0 = 13,9$). Сплошные кривые на этом рисунке отвечают формуле (3.13), полученной разложением выражений (2.1) по параметру γ . В данном случае $\gamma = 0,35$, поэтому различие между этими формулами не выходит за пределы ошибок эксперимента (так, коэффициенты импульсного спектра $c_2 = 0,343$ и $0,350$, соответственно, по уравнениям (2.1) и (3.13)). Энергетическое распределение туннельных электронов [44] при иониза-

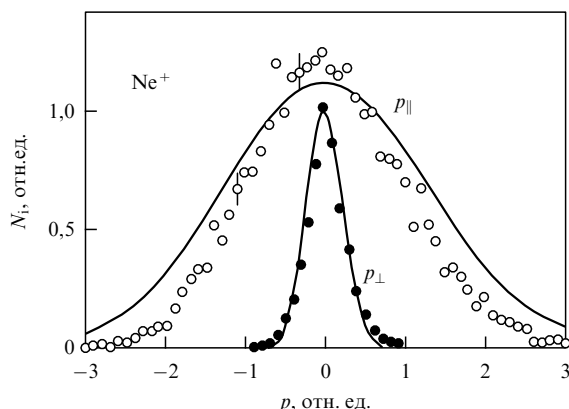


Рис. 17. Импульсное распределение ионов Ne^+ (линейная поляризация). Точки — экспериментальные данные [113], сплошные кривые построены по формуле (3.13).

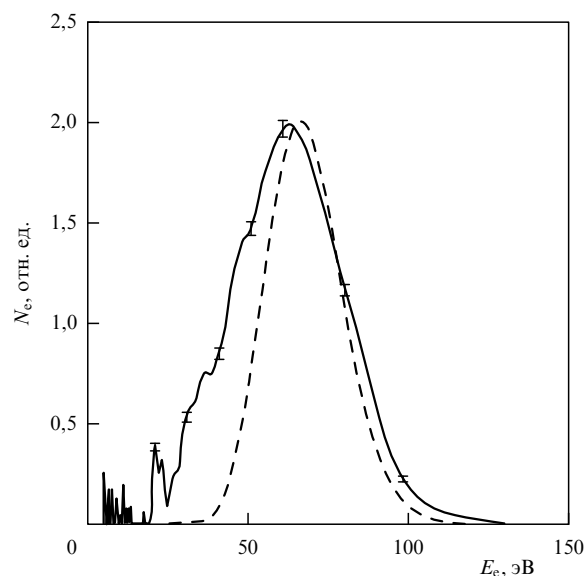


Рис. 18. Энергетический спектр фотоэлектронов при надбарьерной ионизации атомов гелия циркулярно поляризованным светом CO_2 -лазера с интенсивностью $J = 6 \times 10^{15} \text{ Вт см}^{-2}$ (сплошная линия [114]). Штриховая кривая — результаты численного расчета по модели KFR.

ции атома ксенона ($\mathcal{E} = 0,051\mathcal{E}_a$, $\gamma = 0,01$) также согласуется с уравнением (3.13).

Наконец, приведем результаты работы [114], в которой исследовалась надпороговая ионизация атомов гелия. На рисунке 18 показан энергетический спектр фотоэлектронов и результаты расчета по теории KFR (Келдыш–Файсал–Рис) в случае циркулярной поляризации лазерного излучения. Формы обоих распределений качественно согласуются между собой. Распределение фотоэлектронов имеет пик при энергии $E_e^{\text{max}} = 64 \text{ эВ}$, существенно большей, чем в случае линейной поляризации, когда $E_e^{\text{max}} \approx 10 \text{ эВ}$. Это различие объясняется тем, что электрон в поле циркулярно-поляризованной волны приобретает значительно больший орбитальный момент, чем при линейной поляризации.

Мы ограничимся рассмотренными примерами, хотя число их нетрудно было бы увеличить. В целом, процесс туннельной ионизации атомов в туннельной области $\gamma \lesssim 1$, где он имеет нерезонансный характер, хорошо

описывается (не только качественно, но и количественно) теорией Келдыша. В литературе это обычно формулируется как экспериментальное подтверждение "ADK-теории" [115, 51]. Поскольку, однако, последняя сводится к тривиальной модификации результатов, полученных [4–7] задолго до появления статьи [115], такая формулировка не представляется объективной (см. в этой связи [52] и приложение 13.3).

Что же касается области $\gamma > 1$, в которой происходит переход от туннельного механизма ионизации к многофотонному, то в ней ситуация более сложная. Здесь на процесс ионизации атомов могут оказывать существенное влияние резонансы, отвечающие возбужденным состояниям, примыкающим к границе непрерывного спектра (континуума). В этом случае аналитическая теория Келдыша и его последователей, в которой рассматривается лишь одно (начальное) связанное состояние и континуум, а структура верхних уровней конкретного атома в явном виде не учитывается, не может, вообще говоря, претендовать на непосредственное сравнение с данными эксперимента, и более адекватными являются численные расчеты на основе теории возмущений высокого порядка по полю, включающей резонансные энергетические знаменатели. Такие расчеты проводились многими авторами, в том числе для атома водорода, щелочных атомов и др. при различных значениях числа поглощенных фотонов. При этом возникает необходимость вычисления сложных многократных сумм по промежуточным состояниям, характерных для высоких порядков теории возмущений. С этой целью были развиты специальные методы расчета, в том числе использование функций Грина, методы квантового дефекта и модельного потенциала. По всем этим вопросам мы отсылаем к монографии [17], где можно найти и дальнейшие ссылки.

Следует заметить, однако, что значения $\gamma > 1$ соответствуют сильным полям, в которых атомные уровни приобретают большую ширину и перекрываются между собой, в силу чего резонансная структура не всегда проявляется. Поэтому зачастую теория Келдыша оказывается применимой и в области $\gamma \gtrsim 1$.

В итоге можно сказать, что теория ионизации Келдыша дает удобные аналитические формулы для скорости ионизации атомов, энергетического и импульсного спектра фотоэлектронов, их углового распределения и т.п. величин, приводит к качественному, а иногда и количественному описанию процессов туннельной ионизации атомов и ионов и применима также в промежуточной области $\gamma \sim 1$. С другой стороны, численные расчеты на основе нестационарной теории возмущений высокого порядка способны дать достаточно точные значения перечисленных выше величин, однако лишь для конкретного атома и для определенных значений частоты ω , напряженности электрического поля \mathcal{E} и эллиптичности ξ . Поэтому эти два подхода дополняют друг друга, и для полного понимания проблемы ионизации атомов в сильном лазерном поле требуется сочетание аналитических и численных методов.

10. Релятивистская теория туннелирования

Быстрый прогресс лазерной физики и технологии позволил достичь рекордных интенсивностей $J \sim 10^{21} \text{ Вт см}^{-2}$, а в ближайшие годы планируется повысить их еще на 1 –

2 порядка [116]. В столь сильных полях могут образовываться атомные ионы с зарядом $Z \sim 40-60$, для которых энергия связи электронных уровней $E_b = m_e c^2 - E_0$ становится сравнимой с энергией покоя $m_e c^2$. В этом случае подбарьерное движение электрона, приводящее к ионизации, нельзя уже считать нерелятивистским, и требуется обобщение теории ионизации Келдыша.

Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией задается потенциалами¹⁷

$$\mathbf{A} = \left(0, -\frac{\mathcal{E}_0}{\omega} a(\eta), 0 \right), \quad \varphi \equiv 0, \quad (10.1)$$

где \mathcal{E}_0 — амплитуда поля волны, $\mathcal{E} = \mathcal{H} = \mathcal{E}_0 a'(\eta)$, $\eta = \omega(t - x)$, ось x выбрана вдоль направления распространения волны, электрическое поле направлено вдоль оси y , а магнитное — вдоль оси z . Функция $a(\eta)$ задает форму импульса. Так, $a(\eta) = \sin \eta$ отвечает монохроматическому лазерному свету, $a(\eta) = \eta$ — постоянному скрещенному полю, $a(\eta) = \tanh \eta$ — солитоноподобному импульсу $\mathcal{E}(t, x) = \mathcal{E}_0 / \cosh^2 \eta$ и т.д. Уравнения движения для 4-импульса электрона $p^i = (\mathbf{p}, E)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= e\mathcal{E}v_y, & \dot{p}_y &= e\mathcal{E}(1 - v_x), & \dot{p}_z &= 0, \\ \dot{E} &= e(\vec{\mathcal{E}}\mathbf{v}) = e\mathcal{E}v_y, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где точка означает производную по лабораторному времени t . При любой зависимости $\mathcal{E}(\eta)$ существует интеграл движения [2, 3]

$$J = E - p_x = \frac{1 - v_x}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{\eta}{\omega\tau}, \quad (10.3)$$

где $\tau = \int^t \sqrt{1 - v^2} dt$ — собственное время частицы. Второе из уравнений (10.2) дает

$$\frac{dp_y}{d\eta} = \frac{e\mathcal{E}_0}{\omega} a'(\eta), \quad p_y(\eta) = \frac{e\mathcal{E}_0}{\omega} a(\eta) = -eA_y(\eta)$$

(при выборе константы интегрирования учитываем, что после перехода к мнимому времени, $t \rightarrow it$, переменная светового фронта η и импульс p_y становятся чисто мнимыми). Далее,

$$\frac{dy}{d\eta} = \frac{1}{J\omega} \frac{dy}{d\tau} = \frac{p_y(\eta)}{J\omega},$$

$$y(\eta) = \frac{e\mathcal{E}_0}{J\omega^2} \int_{\eta_0}^{\eta} a(\eta') d\eta', \quad y(\eta_0) = 0,$$

и аналогично определяются $p_x(\eta)$ и $x(\eta)$. Решение можно получить в явной форме при любой зависимости поля волны от η .

Приведем подбарьерную траекторию для случая монохроматического лазерного излучения, когда $a(\eta) = \sin \eta$:

$$\begin{aligned} p_x(\eta) &= \frac{1}{4\beta^2 J} \left(\frac{\sinh 2\eta_0}{2\eta_0} - \cosh 2\eta \right), & p_y(\eta) &= i\beta^{-1} \sinh \eta, \\ x &= \frac{i\eta}{4\omega\beta^2 J^2} \left(\frac{\sinh 2\eta_0}{2\eta_0} - \frac{\sinh 2\eta}{2\eta} \right), \\ y &= \frac{1}{\omega\beta J} (\cosh \eta_0 - \cosh \eta), & z &\equiv 0, \end{aligned} \quad (10.4)$$

где $\beta = \omega/e\mathcal{E}_0$ и мы выполнили замену $\eta \rightarrow i\eta$, отвечающую ММВ. При этом $\eta_0 = -i\omega t_0$, где t_0 — начальный (мнимый) момент времени для подбарьерного движения.

Величины η_0 и J определяются из начальных условий:

$$E(\eta_0) = \sqrt{p_x^2(\eta_0) + p_y^2(\eta_0) + 1} = \epsilon, \quad p_x(\eta_0) = \epsilon - J \quad (10.5)$$

(здесь $\epsilon = E_0/m_e c^2$, $0 < \epsilon < 1$, а E_0 — начальная энергия уровня, включая энергию покоя электрона), откуда

$$\sinh^2 \eta_0 = \gamma^2 \frac{1 - 2\epsilon J + J^2}{1 - \epsilon^2}, \quad \frac{\sinh 2\eta_0}{2\eta_0} = 1 + 2\gamma^2 \frac{1 - J^2}{1 - \epsilon^2}, \quad (10.6)$$

где γ — параметр адиабатичности, являющийся релятивистским обобщением параметра Келдыша,

$$\gamma = \omega T_t = \frac{\omega}{e\mathcal{E}_0} \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad (10.7)$$

и T_t — характерное время туннелирования в электрическом поле \mathcal{E}_0 . Из системы уравнений (10.6) легко определяются η_0 и J в зависимости от параметров задачи γ и ϵ .

Вычисляя вдоль подбарьерной траектории функцию "укороченного действия"

$$W = \int_{t_0}^0 [-\sqrt{1 - v^2} + e(\mathbf{A}\mathbf{v}) + \epsilon_0] dt,$$

находим с экспоненциальной точностью скорость ионизации релятивистского связанного состояния:

$$w_R \propto \exp(-2\hbar^{-1} \text{Im } W) = \exp\left[-\frac{2}{3F} g(\gamma, \epsilon)\right], \quad (10.8)$$

где

$$g = \frac{\sqrt{1 + (2/3)\xi^2 - (1/3)\xi^4}}{\xi^2 \gamma} \eta_0 (J - \epsilon),$$

$F = \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_{ch}$ и введено характерное поле \mathcal{E}_{ch} , определяемое начальной энергией уровня:

$$\mathcal{E}_{ch} = \frac{(\sqrt{3}\xi)^3}{1 + \xi^2} \mathcal{E}_{cr}, \quad \xi = \left[1 - \frac{1}{2}\epsilon(\sqrt{\epsilon^2 + 8} - \epsilon)\right]^{1/2}, \quad (10.9)$$

$\mathcal{E}_{cr} = m_e^2 c^3 / e\hbar = 1,32 \times 10^{16}$ В см⁻¹ — "критическое", или швингеровское поле в КЭД [117–120].

Значение \mathcal{E}_{ch} монотонно возрастает с углублением связанного уровня. В нерелятивистском пределе $\epsilon \rightarrow 1$ и $\mathcal{E}_{ch} = (2I)^{3/2} \mathcal{E}_a$, где $\mathcal{E}_a = \alpha^3 \mathcal{E}_{cr}$, $\alpha = 1/137$ и I — потенциал ионизации (в атомных единицах). При этом (10.8) переходит в формулу Келдыша (2.1). Уравнения (10.6)–(10.8) дают ее обобщение на случай глубоких уровней и легко решаются на компьютере (рис. 19).

Аналогичным образом можно рассчитать скорость ионизации s -уровня электромагнитной волной с эллиптической поляризацией (общий случай монохроматического излучения). Вместо (10.6) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \sinh^2 \eta_0 - \rho^2 \left(\cosh \eta_0 - \frac{\sinh \eta_0}{\eta_0} \right)^2 &= \gamma^2 \left[1 + \frac{(J - \epsilon)^2}{1 - \epsilon^2} \right], \\ (1 - \rho^2) \frac{\sinh 2\eta_0}{2\eta_0} + \rho^2 \left[2 \left(\frac{\sinh \eta_0}{\eta_0} \right)^2 - 1 \right] &= \\ &= 1 + \frac{2\gamma^2(1 - J^2)}{1 - \epsilon^2}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

¹⁷ В этом разделе используются релятивистские единицы $\hbar = m = c = 1$, а эллиптичность излучения обозначается буквой ρ .

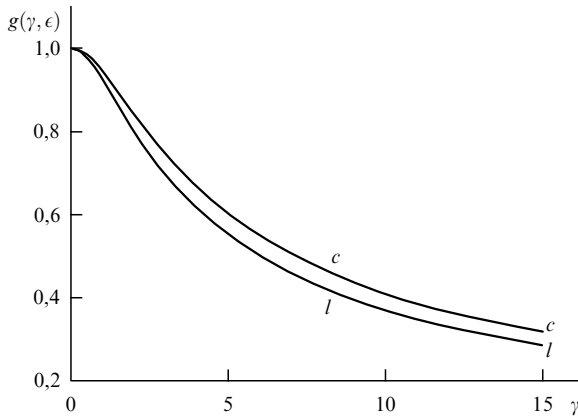


Рис. 19. Релятивистская теория ионизации: функция $g(\gamma, \epsilon)$ в случае линейной (l) и циркулярной (c) поляризации излучения для основного состояния водородоподобного атома с $Z = 60$ ($\epsilon = 0,899$).

где ρ — эллиптичность света ($-1 \leq \rho \leq 1$, $\rho = 0$ отвечает линейной, $\rho = \pm 1$ — циркулярной поляризации). Численный расчет дает для функции $g(\gamma, \xi)$ кривые рис. 19. С ростом эллиптичности функция $g = g(\gamma, \epsilon, \xi)$ монотонно возрастает, а вероятность ионизации соответственно уменьшается. Приведем разложение

$$g(\gamma, \epsilon, \rho) = 1 - \frac{1 - \rho^2/3}{10(1 - \xi^2/3)} \gamma^2 + O(\gamma^4), \quad (10.11)$$

справедливое в адиабатической области $\gamma \ll 1$. В нерелятивистском пределе ($\xi \sim \alpha\sqrt{I} \ll 1$) эта формула согласуется с [5] для произвольной эллиптичности ρ , а в случае циркулярной поляризации — с результатами, полученными в [4, 5]. Рост эллиптичности света приводит к уменьшению вероятности ионизации w_R , а уменьшение ϵ , т.е. углубление связанного уровня, наоборот, увеличивает ее (при фиксированном значении приведенного поля F , которое само зависит от энергии уровня).

Экспоненциальный фактор (10.8) не зависит от спина частицы. В рамках ММВ спиновая поправка к функции действия равна [121]

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{спин}} &= \frac{ie}{2mc} \epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} \int F^{\alpha\beta} u^\lambda s^\mu d\tau = \\ &= \frac{e}{mc} \int \{(\mathbf{sH}) - (\mathbf{vs})(\mathbf{vH}) + [\mathbf{vs}]\vec{\mathcal{E}}\} dt. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Учитывая, что подбазьерная траектория (10.4) лежит в плоскости (x, y) и $\mathcal{E} = \mathcal{H}$, получаем отсюда

$$\delta S_{\text{спин}} = \frac{e\mathcal{E}_0}{mc} \int_{t_0}^0 s_z a'(\eta)(1 - v_x) dt = -\frac{e\mathcal{E}_0 J}{mc} \int_0^{\eta_0} s_z a'(\eta) d\eta.$$

Поворот спина во внешнем электромагнитном поле определяется уравнением Баргмана–Мишеля–Телегди [122], из которого в случае скрещенных полей вытекает, что $s_z(t) = \text{const}$ и потому

$$\delta S_{\text{спин}} = -\mu_B \frac{\mathcal{E}_0}{\omega} s_z a(i\eta_0). \quad (10.13)$$

В случае постоянного поля

$$a(i\eta_0) = i \frac{\omega}{e\mathcal{E}_0} \sqrt{\frac{3\xi^2}{1 + \xi^2}};$$

кроме того, нужно учесть изменение экспоненциального фактора в (10.8) из-за расщепления начального уровня ϵ в магнитном поле, в которое входит магнитный момент μ связанного электрона — отличный от магнетона Бора, если $Z\alpha \sim 1$ [123, 124]. В итоге получаем спиновый фактор в скорости ионизации уровня постоянным скрещенным полем:

$$S_{\pm}^{\text{ММВ}} = \exp \left[\pm \frac{\sqrt{3}\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_B} \right) \right], \quad (10.14)$$

где знаки \pm соответствуют проекциям спина $\pm\hbar/2$ на направление $\vec{\mathcal{H}}$, поэтому состояния с разными s_z имеют и разные скорости ионизации.

Иной способ вычисления спиновой поправки основан на квадрировании уравнения Дирака¹⁸. При этом вместо (10.14) получаем

$$\begin{aligned} S_+ &= S_-^{-1} = \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} \exp \left(-\frac{\sqrt{3}\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \frac{\mu}{\mu_B} \right), \\ \sigma &= \frac{\sqrt{3}\xi}{1 + \sqrt{1 + \xi^2}}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Результаты этих двух расчетов практически совпадают. Так, для основного уровня $1s_{1/2}$ в водородоподобном атоме с зарядом $Z = 60$, согласно Брейту [123], имеем $\mu = 0,933\mu_B$, откуда $S_+ = 1,046$, а $S_+^{\text{ММВ}}$ отличается от него лишь на 1,5%.

Если $Z\alpha \ll 1$, то $S_{\pm} \approx S_{\pm}^{\text{ММВ}} = 1 + O((Z\alpha)^3)$, т.е. вероятность туннелирования практически не зависит от проекции спина электрона. Это и понятно: оператор $\hat{\mathbf{s}}$ коммутирует со шрёдингеровским гамильтонианом, и спиновая переменная отщепляется.

Максимальные интенсивности излучения J достигаются для ИК лазеров, когда $\gamma \ll 1$. В этом случае для скорости туннельной ионизации s -уровня можно получить формулу, асимптотически точную в пределе слабого ($F \ll 1$) поля:

$$\begin{aligned} w_R &= \frac{mc^2}{\hbar} |C_\lambda|^2 G F^{3/2-2\nu} \exp \left[-\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{\gamma^2}{10(1 - \xi^2/3)} \right) \right], \\ \rho &= 0, \quad \mathcal{E}_0 \ll \mathcal{E}_{\text{ch}}, \end{aligned} \quad (10.16)$$

где $\nu = Z\alpha\epsilon/\sqrt{1 - \epsilon^2}$ — релятивистский аналог эффективного главного квантового числа $n^* = Z/\sqrt{2I}$, а C_λ — асимптотический (на бесконечности) коэффициент волновой функции свободного (без поля волны) атома, который может быть найден численно из уравнений Хартри–Фока–Дирака, однако в случае водородоподобного атома имеется и аналитическое решение [120, 127]. Для основного состояния $1s_{1/2}$ при любом Z

$$\epsilon = v = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}, \quad C_{1s}^2 = \frac{2^{2\epsilon-1}}{\Gamma(2\epsilon+1)}. \quad (10.17)$$

Наконец, множитель $G = G(\epsilon, Z)$, не зависящий от амплитуды волны и имеющий довольно громоздкий вид, мы здесь опустим. Для эллиптической поляризации экспоненциальный фактор в (10.16) следует изменить

¹⁸ Такой подход аналогичен использованному в [125, 126] для релятивистской кулоновской задачи с $Z > 137$.

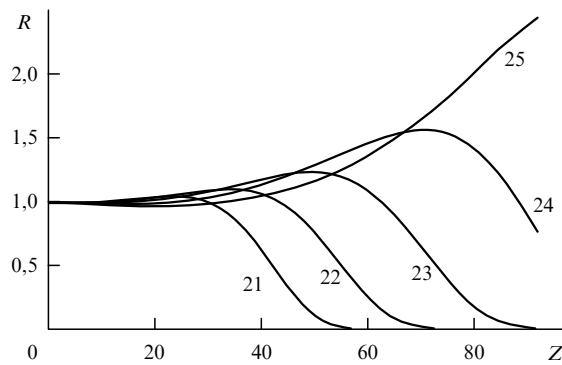


Рис. 20. Отношение $R = w_{NR}/w_R$ в зависимости от Z для основного состояния водородоподобного атома. У кривых указаны значения $\lg J$, где J — интенсивность излучения [Вт см $^{-2}$].

согласно (10.11), а показатель поля F (в предэкспоненте) в случае циркулярной поляризации — заменить на $1-2\nu$. В нерелятивистском пределе формула (10.16) принимает вид (13.3.1).

Оценим область применимости нерелятивистской теории ионизации. С экспоненциальной точностью

$$w_R \propto \exp \left[-\frac{2(\sqrt{3}\xi)^3 \mathcal{E}_{cr}}{3(1+\xi^2)\mathcal{E}} \right],$$

$$w_{NR} \propto \exp \left(-\frac{2\kappa^3 \mathcal{E}_a}{3\mathcal{E}} \right) = \exp \left\{ -\frac{2}{3} [2(1-\epsilon)]^{3/2} \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}} \right\}. \quad (10.18)$$

Полагая $\epsilon = 1 - (1/2)\alpha^2\kappa^2 = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}$, находим:

$$R = \frac{w_{NR}}{w_R} \approx \exp \left[-\frac{1}{36} (Z\alpha)^5 \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}} \right], \quad Z\alpha \ll 1. \quad (10.19)$$

Из рисунка 20 видно, что область применимости нерелятивистской теории Келдыша "затягивается" вплоть до довольно больших значений Z . Так, например, при $Z = 40, 60$ и 80 и интенсивности излучения $J = 10^{23}$ Вт см $^{-2}$ значения w_{NR} и w_R различаются соответственно в 1,15; 3 и 65 раз. При $Z \gtrsim 60$ необходимо использовать уже релятивистскую теорию туннелирования (см. рис. 20 и работу [128]).

Следует отметить, что ионизация релятивистского связанного состояния постоянным скрещенным полем впервые рассматривалась в работе Никишова и Ритуса [4]. Используя точное решение уравнения Клейна–Гордона, эти авторы вычислили вероятность ионизации s -уровня, связанного короткодействующими ($Z = 0$) силами, в случае бесспиновой частицы. Полученное ими выражение для w_R , по существу, совпадает с результатами работ [129–131] при $Z = 0$, но записано в несколько иной форме. Совпадение результатов, полученных двумя независимыми методами, имеет значение для ММВ: хотя этот метод обладает эвристической силой и физической наглядностью, его все же нельзя считать обоснованным строго математически, несмотря на некоторые попытки в этом направлении [121]. Кулоновский фактор в вероятности w_R , весьма существенный при $Z \neq 0$, был вычислен в работе [130]. Обсуждение недавно опубликованных статей [132, 133] можно найти в [128, 134] и приложении 13.3.

11. Рождение электрон-позитронных пар из вакуума полем мощных оптических и рентгеновских лазеров

Квантовая электродинамика (КЭД) предсказывает возможность рождения e^+e^- -пар из вакуума в сильном электрическом поле. Этот нелинейный и существенно непертурбативный эффект, рассмотренный вначале для постоянного поля [117–119], впоследствии был теоретически изучен для переменных полей электрического типа: $I_1 = (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)/2 < 0$, $I_2 = (\mathbf{E}\mathbf{B})/2 = 0$. В частности, модельный случай пространственно однородного поля с линейной поляризацией¹⁹

$$\mathbf{E}(t') = \{\mathcal{E}\varphi(t), 0, 0\}, \quad \mathbf{B}(t') = 0, \quad t = \omega t' \quad (11.1)$$

детально исследовался при $\varphi(t) = \cos t$ (см. работы [135–140]). Здесь t' — время, t — безразмерное время, \mathcal{E} и ω — амплитуда и характерная частота внешнего электрического поля, а функция $\varphi(t)$ задает форму лазерного импульса. Для простоты будем считать, что $\varphi(-t) = \varphi(t)$ и $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$ при $-\infty < t < \infty$ (электрическое поле достигает максимума при $t = 0$, и в этот момент e^+ и e^- выходят из-под барьера [136]). Предполагается, что $\varphi(t)$ — аналитическая функция, что необходимо для применимости ММВ.

Описывая с помощью ММВ подбарьерное движение электрона через щель $2mc^2$ между верхним и нижним континуумами, получаем вероятность рождения из вакуума e^\pm пары с импульсами $\pm \mathbf{p}$:

$$w(\mathbf{p}) = \frac{d^3 W}{dp^3} \propto \exp \left\{ -\frac{\pi}{\epsilon} \left[\tilde{g}(\gamma) + \tilde{b}_1(\gamma) \frac{p_{\parallel}^2}{m^2} + \tilde{b}_2(\gamma) \frac{p_{\perp}^2}{m^2} \right] \right\}, \quad (11.2)$$

где $\epsilon = \mathcal{E}/\mathcal{E}_{cr}$ — приведенное электрическое поле, $\mathcal{E}_{cr} = m_e^2 c^3 / e\hbar$, $K_0 = 2m_e c^2 / \hbar\omega$ — параметр многофотонности процесса (т.е. минимальное число поглощенных квантов) и γ — параметр адиабатичности:

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_t} = \frac{m_e c \omega}{eF} = \frac{\hbar\omega}{eF\lambda_e} = \frac{2}{K_0\epsilon}. \quad (11.3)$$

Здесь $\omega_t = e\mathcal{E}/m_e \sim 1/T_t$, $\lambda_e = \hbar/m_e c$, T_t — характерное время туннелирования: $T_t \sim \hbar/b$ и $b = 2m_e c^2 / e\mathcal{E}$ — ширина барьера. Далее считаем, что

$$\epsilon \ll 1, \quad K_0 \gg 1, \quad b \gg \lambda_e, \quad (11.4)$$

при этом значение γ может быть произвольным.

Входящая в (11.2) функция $\tilde{g}(\gamma)$ и коэффициенты $\tilde{b}_{1,2}(\gamma)$ импульсного спектра определяются формой полевого импульса $\varphi(t)$. Полная вероятность рождения e^\pm пар в инвариантном комптоновском 4-объеме $\lambda_e^4/c \approx 7,25 \times 10^{-53}$ см 3 с (далее $\hbar = c = 1$) получается интегрированием (11.2) по $d^3 p$, с учетом закона сохранения энергии в процессе n -фотонного поглощения. Соответствующие формулы (достаточно громоздкие) можно найти в [137].

Здесь мы ограничимся предельными случаями малых и больших γ . Первый из них (низкочастотное излучение,

¹⁹ Такое поле, в принципе, образуется в пучности стоячей световой волны, возникающей при суперпозиции двух когерентных лазерных пучков.

Таблица 4. Рождение e^+e^- -пар из вакуума лазерным полем

λ , нм	$\hbar\omega$, эВ	$N = 1$ (\mathcal{E}_{th})	$N = 10^3$	$N = 10^6$	$N = 10^9$	Тип лазера
1,06(4)	0,117	0,739 0,481	0,838 0,521	0,967 0,570	1,14 0,627	CO ₂
1,064(3)	1,165	0,873 0,521	1,02 0,570	1,21 0,628	1,49 0,698	Nd-YAG
785	1,580	0,899 0,527	1,05 0,577	1,25 0,636	1,56 0,707	Ti:Sa
694	1,786	0,912 0,530	1,06 0,58	1,27 0,64	1,59 0,71	рубин
109	11,4	1,07 0,569	1,29 0,627	1,61 0,697	2,13 0,785	FEL
25	49,6	1,26 0,61	1,56 0,67	2,04 0,75	2,91 0,86	—

Примечание. В таблице приведены значения электрического поля \mathcal{E} (в единицах 10^{15} В см $^{-1}$), при котором N пар образуется в объеме фокусировки $V = \lambda^3$ за один период поля (первая строка) и за 1 с (вторая строка, при данных значениях λ и N). Пороговое поле \mathcal{E}_{th} достаточно для рождения одной пары.

$\hbar\omega \ll mc^2$) относится к адиабатической области:

$$w = c_1 m^4 \epsilon^{5/2} \exp \left[-\frac{\pi}{\epsilon} \tilde{g}(\gamma) \right], \quad \gamma \ll 1, \quad (11.5)$$

где $c_1 = 2^{-3/2} \pi^{-4} = 3,63 \times 10^{-3}$,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\gamma) &= 1 - \frac{1}{8} \gamma^2 + \frac{3}{64} \gamma^4 + \dots, \\ \tilde{b}_1 &= \frac{1}{2} \gamma^2, \quad \tilde{b}_2 = 1 - \frac{1}{4} \gamma^2. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Численные коэффициенты этих разложений соответствуют монохроматическому лазерному полю $\varphi(t) = \cos t$. При этом поперечный (к полю) импульс e^\pm

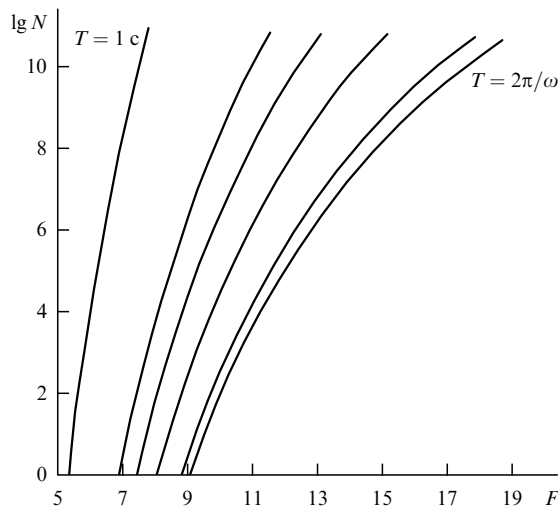


Рис. 21. Число электрон-позитронных пар N , рожденных из вакуума в объеме фокусировки λ^3 полем Ti:Sa лазера с длительностью импульса $T = 2/6$ фс (1 период поля); 10 фс; 1 пс; 10 пс; 1 нс и 1 с (кривые — справа налево).

всегда нерелятивистский: $p_\perp \sim \sqrt{e\mathcal{E}} = m\sqrt{\epsilon} \ll m$, но их продольный импульс $p_\parallel \sim \gamma^{-1} p_\perp \sim K_0 \epsilon^{3/2} m$ может стать релятивистским, если $\gamma \lesssim \sqrt{\epsilon}$.

В другом предельном случае ($\gamma \gg 1$) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\gamma) &= \frac{4}{\pi\gamma} \left[\left(1 + \frac{1}{4\gamma^2} \right) \ln \gamma + 0,386 \right], \\ \tilde{b}_1 &= \frac{2}{\pi\gamma} (\ln \gamma + 0,386), \quad \tilde{b}_2 = \frac{2}{\pi\gamma} (\ln \gamma + 1,39), \end{aligned} \quad (11.7)$$

а вероятность рождения пар w равна сумме вероятностей n -фотонных процессов $w_n, n > K_0$. При этом $w_{n+1}/w_n \sim \gamma^{-2n} \ll 1$ и

$$w = \sum_{n=K_0}^{\infty} w_n \approx c_2 m^4 \left(\frac{\omega}{m} \right)^{5/2} \left(\frac{4\gamma}{e} \right)^{-2K_0}, \quad e = 2,718\dots, \quad (11.8)$$

где $c_2 = (\sqrt{2}\pi)^{-3} = 0,0114$.

Значения порогового поля \mathcal{E}_{th} , необходимого для образования одной e^+e^- -пары в объеме²⁰ $V = \lambda^3$ в течение одного периода $T = 2\pi/\omega$ даны в табл. 4, в которой $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны, а \mathcal{E}_{th} измеряются в единицах 10^{15} В см $^{-1}$. Порог наблюдения эффекта Швингера для инфракрасных и оптических лазеров достигается при $\mathcal{E} = (0,7-1,0) \times 10^{15}$ В см $^{-1}$, что на полтора порядка ниже \mathcal{E}_{cr} . При $\mathcal{E} > \mathcal{E}_{th}$ число образовавшихся пар возрастает очень быстро, что видно из рис. 21.

В области $\gamma \gtrsim 1$ входящие в (11.2) функции начинают существенно зависеть от формы импульса $\varphi(t)$. Имеют место формулы, аналогичные (4.2), в частности [137, 140],

$$\tilde{g}(\gamma) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \chi(\gamma u) \sqrt{1-u^2} du = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \chi(\gamma \sin \theta) \cos^2 \theta d\theta, \quad (11.9)$$

причем $\chi(u)$ — та же функция, что и в теории многофотонной ионизации (см. (4.2)).

В случае монохроматического поля $\chi(u) = 1/\sqrt{1+u^2}$,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\gamma) &= \frac{4}{\pi\sqrt{1+\gamma^2}} \mathbf{D}(v), \quad \tilde{b}_1(\gamma) = \frac{2\gamma^2}{(1+\gamma^2)^{3/2}} \mathbf{D}(v), \\ \tilde{b}_2(\gamma) &= \frac{2}{\pi\sqrt{1+\gamma^2}} \mathbf{K}(v), \quad v = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \end{aligned} \quad (11.10)$$

где \mathbf{K} и \mathbf{D} — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода [135, 136]. Отсюда следуют асимптотики (11.5)–(11.7).

Другим примером является солитоноподобный импульс $\varphi(t) = 1/\cosh^2 t$, для которого $\chi(u) = (1+u^2)^{-1}$,

$$\tilde{g}(\gamma) = \frac{2}{1+\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad \tilde{b}_1 = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma^2)^{3/2}}, \quad \tilde{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad (11.11)$$

что в квазиклассическом пределе (11.4) согласуется с точным решением, полученным в [141]. Функция $\tilde{g}(\gamma)$ для модулированного импульса (4.5) представлена на рис. 22. Ее зависимость от γ аналогична функции $g(\gamma)$ в

²⁰ Дифракционный предел для фокусировки лазерного излучения с длиной волны λ .

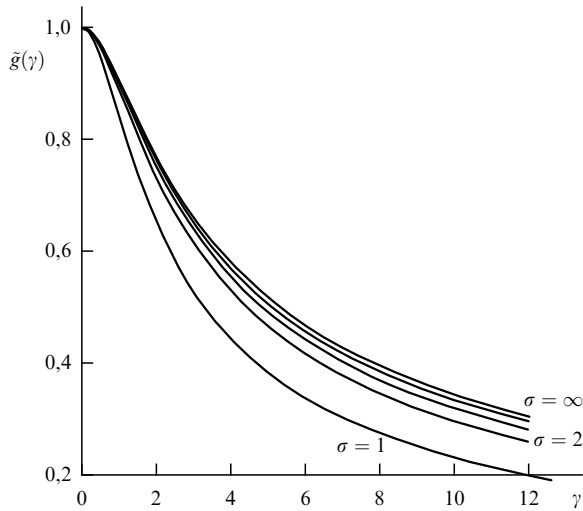


Рис. 22. Функция $\tilde{g}(\gamma)$ для модулированного лазерного импульса вида (4.5).

нерелятивистской теории ионизации, но параметр адиабатичности γ имеет в этих двух случаях разный порядок величины.

Во всех рассмотренных случаях $\tilde{g}(\gamma)$ монотонно убывает с ростом γ , а вероятность w при этом резко возрастает (при фиксированной амплитуде поля \mathcal{E}). Этот эффект проявляется в области высоких частот $\omega > \omega_t$ и был назван [140] динамическим эффектом Швингера. В последнее время вопрос о возможности экспериментального наблюдения эффекта Швингера вызывает значительный интерес [116, 142–145].

Однородное электрическое поле вида (11.1) представляет собой идеализацию, завышающую число образующихся пар N . В реальной волне всегда присутствует магнитное поле, которое уменьшает N (в чисто магнитном поле так же, как и в плоской волне в вакууме, пары вообще не рождаются [119]). В [145] рассмотрена реалистическая трехмерная модель сфокусированного лазерного импульса, основанная на полученном в [146] точном решении уравнений Максвелла. Численное интегрирование выражения (11.5) по всему 4-объему импульса позволило изучить зависимость числа образующихся e^+e^- -пар N от параметров задачи: R (радиус фокального пятна), $L = R/\Delta$ (дифракционная длина) и $\Delta = c/\omega R = \lambda/2\pi R$ (параметр фокусировки, характеризующий отличие лазерного импульса от плоской волны). Зависимость N от пиковой интенсивности излучения J является чрезвычайно резкой: так, при изменении J от 8×10^{27} до 3×10^{28} Вт см $^{-2}$, т.е. всего в 4 раза, число e^+e^- -пар, рожденных одиночным импульсом, возрастает от $N = 0,03$ до $N = 6 \times 10^9$ (при $\Delta = 0,1$).

В последние годы наблюдается быстрый прогресс в уменьшении длины волны λ лазерного излучения и повышении его интенсивности J [116]. Уже достигнуты значения $J \gtrsim 10^{21}$ Вт см $^{-2}$, что на два порядка превышает атомное поле \mathcal{E}_a . По-видимому, для экспериментального наблюдения эффекта Швингера наиболее перспективным является дальнейшее повышение мощности инфракрасных и оптических лазеров.

Имеются также проекты создания рентгеновских лазеров на свободных электронах, разрабатываемые в DESY и SLAC [143]. Если такие лазеры с $\hbar\omega \gtrsim 1$ кэВ

будут созданы и их излучение удастся сфокусировать в дифракционном объеме порядка λ^3 , то минимальные мощности лазеров P , необходимые для наблюдения эффекта Швингера, существенно снизятся, поскольку $\mathcal{E} \sim \sqrt{P}/\lambda$. Так, при $\lambda = 0,1$ нм и длительности импульса $T = 0,1$ пс мощность $P_{\min} \sim 10^{16}$ Вт достаточна для рождения одной e^+e^- -пары из вакуума [143]. Такие мощности давно уже достигнуты в оптике, однако переход к рентгеновскому диапазону требует решения весьма трудных проблем. Такие возможности в настоящее время обсуждаются.

Для других (помимо e^\pm) заряженных частиц эффект Швингера вряд ли когда-либо удастся наблюдать в лаборатории, поскольку $\mathcal{E}_{\text{cr}} \propto m^2$ и даже для π -мезонов имеет уже фантастическое значение $\sim 10^{21}$ В см $^{-1}$. Однако в физике твердого тела, в частности, для полупроводников закон дисперсии может быть приближенно записан в виде

$$\epsilon(p) = \Delta \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_*^2 \Delta}}, \quad (11.12)$$

где m_* — эффективная масса и Δ — ширина щели, отделяющей валентную зону от зоны проводимости. Это выражение имеет формально тот же вид, что и для свободной частицы в релятивистской механике: $\epsilon(p) = \sqrt{m^2 + p^2}$. Поэтому изложенные выше результаты могут быть использованы в теории многофотонной ионизации полупроводников лазерным импульсом (для случая монохроматического света это уже было сделано в работе [1]). Поскольку роль швингеровского поля \mathcal{E}_{cr} играют здесь поля порядка $10^6 - 10^7$ В см $^{-1}$, то соответствующие эффекты гораздо легче исследовать в эксперименте.

12. Заключение

Сделаем несколько заключительных замечаний.

1. О методе перевала и ММВ. Согласно [1], скорость ионизации w_0 определяется матричным элементом

$$V_{0p} = \int \psi_p^*(e\vec{\mathcal{E}}\mathbf{r}) \psi_0 d^3r, \quad (12.1)$$

где $\psi_0(r) = \pi^{-1/2} \exp(-r)$ для основного состояния атома водорода, а ψ_p — волновая функция свободного электрона во внешнем поле $\vec{\mathcal{E}}(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos \omega t$:

$$\psi_p(\mathbf{r}, t) = \exp \left\{ i \left[\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{P}^2(t') dt' \right] \right\}, \quad (12.2)$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{p} + \frac{e\vec{\mathcal{E}}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Для w_0 получается выражение в виде суммы вероятностей n -фотонных процессов, каждая из которых содержит квадрат быстро осциллирующего интеграла (см. формулы (14), (15) в [1]). Применение метода перевала дает уравнение для седловых точек в комплексной плоскости:

$$I_0 + \frac{1}{2} \left(\mathbf{p} + \frac{e\vec{\mathcal{E}}_0}{\omega} \sin \omega t \right)^2 = 0, \quad I_0 = \frac{\kappa^2}{2},$$

$$\sin \omega t_0 = i\gamma \kappa^{-1} \left(\sqrt{\kappa^2 + p_\perp^2} + ip_\parallel \right) \quad (12.3)$$

(I_0 — потенциал ионизации, для 1s-уровня $\kappa = 1$), или

$$t_0 = i\omega^{-1} \left\{ \operatorname{arcsinh} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \left[i \frac{p_{\parallel}}{\kappa} + \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 \right) \right] + O\left(\frac{p^3}{\kappa^3}\right) \right\}, \quad (12.4)$$

что в точности совпадает с выражением для начального момента t_0 подбарьерного движения электрона в ММВ [5]. Эти уравнения определяют комплексные точки t_0 , в которых происходит переход из связанного состояния в состояние, описываемое волновой функцией (12.2). Вклад точки t_0 в амплитуду туннелирования равен [1], с экспоненциальной точностью,

$$A_0 \propto \exp \left\{ \frac{i}{2\omega} \int_0^{\sin \omega t_0} \left[\kappa^2 + \left(\mathbf{p} + \frac{e\vec{\mathcal{E}}_0}{\omega} v \right)^2 \right] \frac{dv}{(1-v^2)^{1/2}} \right\}. \quad (12.5)$$

Нетрудно убедиться в том, что этот интеграл совпадает с мнимой частью функции действия $W(t_0, 0)$, что приводит к формуле (2.1), если разложить (12.5) по \mathbf{p} до 2-го порядка включительно (аналогично (12.4)). Таким образом, на уровне экспоненциального множителя оба метода приводят к одному и тому же результату и эквивалентны²¹. Этот вывод, продемонстрированный выше на примере монохроматического света, справедлив и в общем случае. В этой связи заметим, что для импульсов вида $\varphi(t) = 1/\cosh^2 t$ и $(1+t^2)^{-1}$ соответствующие экспоненты в выражении для w_0 , вычисленные [70, 71] независимо двумя указанными выше методами, совпадают между собой (в пределах точности самого квазиклассического приближения, т.е., например, $\cosh S \approx (1/2) \exp S$, если $S \gg 1$).

2. Возникает, однако, вопрос о предэкспоненте, который мы обсудим сначала на примере постоянного электрического поля, $\omega = 0$. Такая задача впервые рассматривалась и была решена в рамках квантовой механики в работе Оппенгеймера [147]. В этом случае волновая функция конечного состояния $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ выражается через функцию Эйри [16, 20]. В [147] было получено

$$w_0(\mathcal{E}) = 0,1093 \mathcal{E}^{1/4} \exp \left(-\frac{2}{3\mathcal{E}} \right). \quad (12.6)$$

В дальнейшем, однако, выяснилось, что в [147] допущена ошибка в вычислениях ("a slight computational error", см. замечание на с. 885 в [148]), после исправления которой получается [148]

$$w_0(\mathcal{E}) = \frac{\pi}{2} \exp \left(-\frac{2}{3\mathcal{E}} \right), \quad (12.7)$$

но и эта формула является неточной. Насколько известно автору данной статьи, правильная асимптотика w_0 в слабом поле для уровня 1s впервые была получена Ландау и Лифшицем [149]:

$$w_0(\mathcal{E}) = 4\mathcal{E}^{-1} \exp \left(-\frac{2}{3\mathcal{E}} \right), \quad \mathcal{E} \rightarrow 0. \quad (12.8)$$

К тому же результату приводит ММВ [8] с учетом кулоновской поправки [6]. Таблица I в [148] содержит впечатляющий список ошибочных (в предэкспоненте) формул, опубликованных в литературе для различных состояний атома водорода. В общем случае асимптотика для $w = -2 \operatorname{Im} E_{n_1 n_2 m}(\mathcal{E})$ в слабых полях имеет вид

$$w_{n_1 n_2 m}(\mathcal{E}) = C_{n_1 n_2 m} \exp \left(-\frac{2}{3n^3 \mathcal{E}} \right) \mathcal{E}^{-(2n_2 + |m| + 1)} [1 + O(\mathcal{E})], \quad (12.9)$$

где n_1, n_2, m — параболические квантовые числа [16], $n = n_1 + n_2 + |m| + 1$ — главное квантовое число уровня. Для основного состояния ($n_1 = n_2 = m = 0$) эта формула переходит в (12.8).

Экспоненциальные множители в (12.6)–(12.8) совпадают между собой, но предэкспоненты различаются существенным образом. Таким образом, формула типа (12.1) не дает правильной предэкспоненты. Причина этого достаточно ясна: внешнее поле \mathcal{E} учтено в $\psi_{\mathbf{p}}$ точно, но кулоновским взаимодействием между вылетающим электроном и ядром (протоном) пренебрегается. Поскольку использованный в [1] метод расчета является, по существу, обобщением метода Оппенгеймера на случай переменного поля $\mathcal{E}(t)$, то, по-видимому, нет оснований ожидать, что при этом может быть получена правильная предэкспонента в вероятности $w(\mathcal{E}, \omega)$.

С другой стороны, при $Z = 0$ (короткодействующий потенциал) и $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ ММВ приводит к тому же результату, что и решение уравнения Шрёдингера с использованием метода перевала лишь на конечном этапе вычислений [5], причем совпадают не только экспоненты, но и выражения для импульсного и энергетического спектра фотоэлектронов и предэкспоненциальные множители [5, 8]. То же верно в общем случае эллиптической поляризации и любом γ (ср. формулы (23)–(28) работы [5] с (40)–(43) в [8]). Наконец, в задаче о рождении пар электрическим полем ММВ согласуется [137] с точным решением, полученным [141] в случае $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0/\cosh^2 \omega t$. Эти факты, если и не дают вполне строгого доказательства, то все же определенно говорят о применимости ММВ, в том числе и для вычисления предэкспоненты. Попытка обоснования ММВ (на физическом уровне строгости) предпринята в работе [121].

3. Экстремальная [8] подбарьерная траектория для поля $\mathcal{E}(t)$ с линейной поляризацией отвечает импульсу $\mathbf{p} = 0$ на выходе из-под барьера. Для нее t_0 и "время" t в подбарьерном движении — чисто мнимые (откуда и происходит название ММВ). Для соседних траекторий с $p_{\parallel} \neq 0$ начальная точка t_0 смещается с мнимой оси времени, но, как видно из (12.4), это смещение мало при всех γ .

В случае периодического поля, например, $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$, на каждые полпериода приходится своя точка перевала t_k . Их вклады A_k в амплитуду перехода одинаковы по величине, но при $p_{\parallel} \neq 0$ отличаются фазой (вследствие того, что $t_{k+1} - t_k \neq \pi\omega^{-1}$ из-за указанного выше смещения точек перевала). Когерентное сложение амплитуд A_k приводит к быстрым осцилляциям в импульсном спектре фотоэлектронов, впервые отмеченным в [5] (см. формулу (53) этой работы). В дальнейшем эти осцилляции обсуждались в [35, 70, 71], а в настоящее время они исследуются на эксперименте [43].

²¹ Хотя ММВ является, на наш взгляд, физически более наглядным.

4. Для экспериментальной проверки теории Келдыша особенно удобен случай ионизации отрицательных ионов ($Z = 0$). В [150, 151] было измерено импульсное распределение фотоэлектронов при ионизации H^- и F^- . Энергетические спектры и угловые распределения хорошо согласуются с результатами расчета по формулам работы [35] (которые отличаются от [5] тем, что не используется разложение $\text{Im } W$ по \mathbf{p}^2). Следует еще сказать, что хотя многофотонная ионизация атомов наблюдалась уже в 60-е годы [22], долгое время измерялся только полный выход фотоэлектронов. Впервые спектр надпороговой ионизации наблюдался в работе [152], появление которой стимулировало многочисленные исследования, теоретические и экспериментальные, в этой области.

5. В течение 40 лет, прошедших после появления статьи [1], в лазерной физике и технологии произошел огромный прогресс. В настоящее время исследования нелинейной фотоионизации атомов и ионов составляют обширную и быстро развивающуюся область атомной физики. В 60-е годы, когда появились первые теоретические работы в этой области, трудно было предположить, что такие тонкие детали процесса фотоионизации атомов лазерным излучением, как импульсное и угловое распределение фотоэлектронов или квантовая туннельная интерференция в энергетическом спектре, станут предметом детальных экспериментальных исследований. И, однако, это уже произошло! Можно ожидать и дальнейших существенных продвижений в этой области, включая, например, исследование структуры и динамики молекул и кластеров, прикладные проблемы квантовой химии или управление молекулярными процессами в сильном лазерном поле [153].

Разумеется, в рамках сравнительно короткого обзора невозможно подробно обсудить многочисленные приложения и обобщения теории Келдыша. Нашей целью было вспомнить ранние работы [1, 4–7], не потерявшие своего значения и в настоящее время, перечислить ряд новых результатов, полученных в процессе развития идей, выдвинутых в работе [1], включая релятивистскую теорию ионизации и эффект Швингера в переменном электрическом поле, и кратко сопоставить теорию Келдыша с экспериментом. Не подлежит сомнению, что пионерская работа Келдыша долго еще будет служить основой теоретического описания явлений туннельной и многофотонной ионизации в атомной и лазерной физике.

В основу настоящего обзора положены доклады, сделанные автором на 3-й Международной Сахаровской конференции по физике (Москва, июнь 2002), 11-м Международном симпозиуме JST (Токио, сентябрь 2002), Международной конференции "И.Я. Померанчук и физика на рубеже столетий" (Москва, январь 2003 г.), 31-й Зимней школе ИТЭФ (февраль 2003 г.) и XVII конференции "Фундаментальная атомная спектроскопия" (Звенигород, декабрь 2003 г.).

Автор глубоко признателен Л.В. Келдышу за стимулирующие обсуждения, предоставленную возможность ознакомиться с работой [70] в рукописи и полезные замечания по содержанию настоящей статьи. Я хотел бы выразить искреннюю благодарность С.В. Буланову, С.П. Гореславскому, К.С. Икеда, Б.М. Карнакову, В.Д. Муру, А.И. Никишову, Л.Б. Окуню и С.В. Попруженко за плодотворные обсуждения на разных стадиях данной работы и сделанные замечания, которые были

мною по возможности учтены, а также С.Г. Позднякову за проведение численных расчетов и М.Н. Маркиной за неизменную помощь в процессе оформления рукописи.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты 01-02-16850 и 04-02-17157.

13. Приложения

13.1. Асимптотические коэффициенты для атомов и ионов

Предполагая, что атомный потенциал $U(r) \approx -Z/r$ при $r \gg r_c$, из уравнения Шрёдингера получаем асимптотику радиальной волновой функции на бесконечности:

$$\chi_{kl}(r) \approx 2\kappa^{1/2} C_{kl} e^{-\kappa r} (\kappa r)^v \left[1 - \frac{(v+l)(v-l-1)}{2\kappa r} + \dots \right], \quad (13.1.1)$$

$$r \gg \frac{1}{\kappa},$$

где $v = Z/\kappa \equiv n^*$ и условие нормировки имеет вид $\int_0^\infty \chi_{kl}^2(r) dr = 1$. Асимптотические коэффициенты C_{kl} постоянно встречаются в атомной и ядерной физике, обратной задаче квантовой теории рассеяния и т.д. [13–17]. Их значения находят из решения уравнений Хартри–Фока, причем погрешность численных расчетов для некоторых многоэлектронных атомов и ионов (например, для Ne, K, Ca, Rb, Li⁺, K⁺ и др.) достигает 10–30 % и более [14].

Согласно Хартри [11], приближенное значение C_{kl} дается формулой (2.7), ее погрешность для первых s - и p -уровней в атоме рубидия составляет [11] 2–2,5 % (см. также табл. 1). Если $n^* \gg 1$ и $l \sim 1$, то (2.7) принимает вид

$$C_{kl} \approx \frac{1}{\sqrt{8\pi n^*}} \left(\frac{2e}{n^*} \right)^{n^*} \left(1 - \frac{l(l+1)}{2n^*} + \dots \right), \quad e = 2,718\dots \quad (13.1.2)$$

Недавно получено [19] разложение эффективного радиуса для этих коэффициентов, которое в случае s -состояний имеет вид

$$C_k = C_k^{(0)} [1 - c_1 \kappa r_{cs} + O((\kappa r_{cs})^3)]^{-1/2}, \quad (13.1.3)$$

где

$$C_k^{(0)}(v) = C_k^H f(v), \quad c_1(v) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \pi v}{\pi v} f(v) \right]^2, \quad (13.1.4)$$

$$f(v) = \left\{ 1 - \left(\frac{\sin \pi v}{\pi v} \right)^2 \left[v^2 \psi'(v) - \left(v + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}^{-1/2},$$

C_k^H — коэффициент Хартри (2.7) при $l = 0$, $\psi(v) = \Gamma'(v)/\Gamma(v)$ — логарифмическая производная гамма-функции и r_{cs} — ядерно-кулоновский [154] эффективный радиус системы. Чисто кулоновскому спектру ($r_{cs} = 0$, $v = n = 1, 2, \dots$) отвечают значения $C_k^{(0)} = C_k^H = 2^{n-1}/n!$ и $c_1 = 0$, причем $C_k^{(0)} = 1$ для основного уровня.

В области атомного спектра ($v \gtrsim 1$) коэффициенты $C_k^{(0)}$ и C_k^H близки друг к другу, а $c_1(v)$ численно малы, поэтому поправкой на эффективный радиус здесь можно пренебречь [19]. Это служит обоснованием формулы

Хартри²². С другой стороны, при $v \rightarrow 0$ (предельный переход к короткодействующему потенциалу) разложение принимает вид

$$\frac{1}{2C_\kappa^2} = 1 - \kappa r_s + c_3(\kappa r_s)^3 + \dots, \quad Z = 0, \quad (13.1.5)$$

или

$$C_\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \kappa r_s + \frac{3}{8} (\kappa r_s)^2 - \frac{1}{2} \left(c_3 - \frac{5}{8} \right) (\kappa r_s)^3 + \dots \right], \quad (13.1.5')$$

где $r_s = \lim_{Z \rightarrow 0} r_{cs}$ — эффективный радиус для короткодействующего потенциала. Сделаем несколько замечаний.

1. В разложениях для $1/C_\kappa^2$ отсутствуют члены, квадратичные по эффективному радиусу. Этот факт не тривиален, поскольку кулоновская волновая функция при $r \rightarrow 0$ и нецелом v содержит члены порядка $r \ln r$, $r^2 \ln r$, r^2 и $r^3 \ln r$, которые взаимно сокращаются при сшивании внешней и внутренней волновых функций в точке $r = r_c \ll a_B$.

2. Первая поправка $\propto r_{cs}$ (или r_s) не зависит от вида потенциала при $r < r_c$. Вычисление коэффициента c_3 для нескольких модельных потенциалов показало [19], что он имеет численную малость, что расширяет область применимости разложений (13.1.3) и (13.1.5).

3. Поскольку при $v = 0$ коэффициент $c_1 = 1$, что на два-три порядка больше, чем при $v \gtrsim 1$ (см. табл. 1), то для отрицательных ионов поправка на эффективный радиус более существенна, чем для нейтральных атомов [108].

4. Приведенные в справочнике [14] асимптотические коэффициенты A связаны с нашими коэффициентами соотношением

$$A = 2\kappa^{v+1/2} C_{\kappa l}, \quad v = \frac{Z}{\kappa}, \quad (13.1.6)$$

причем разброс C_κ значительно меньше, чем в случае коэффициентов A . По этой формуле были рассчитаны численные значения C_κ (см. табл. 1, столбец HF).

13.2. Функция Келдыша и ее разложения

Частотная зависимость скорости ионизации атома определяется прежде всего функцией $f(\gamma, \xi)$ (см. формулы (2.1) и (3.4)). Эту функцию, впервые вычисленную в [1] для $\xi = 0$ и в [5] для произвольной эллиптичности ξ , мы будем называть функцией Келдыша. Приведем следующие за (2.2) члены разложения, для чего удобно исходить из представления (4.2). При $\xi = 0$ имеем

$$f(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n \gamma^{2n+1}, \quad (13.2.1)$$

$$f_n = \frac{2}{3} g_n = \frac{(2n-1)!!}{n! 2^{n-1} (2n+1)(2n+3)},$$

и аналогичные ряды для коэффициентов импульсного спектра $c_{1,2}(\gamma)$. Поскольку $f_n \propto n^{-5/2}$ при $n \rightarrow \infty$, то

ряды сходятся при $|\gamma| \leq 1$. В антиадиабатической области

$$f(\gamma) = \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \ln \gamma + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma^{-2n}, \quad \gamma \rightarrow \infty, \quad (13.2.2)$$

где $a_0 = \ln 2 - 1/2$, $a_1 = \ln 2/2$, $a_2 = 3/32$, $a_3 = -5/192$ и т.д.

Из (4.2) нетрудно получить адиабатические разложения в тех случаях, когда $\chi(u)$ известна в аналитическом виде. Так, полагая

$$\chi(u) = (1 + u^2)^{-\rho}, \quad (13.2.3)$$

находим

$$f(\gamma) = \frac{2}{3} \gamma {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \rho; \frac{5}{2}; -\gamma^2 \right), \quad (13.2.4)$$

$$f_n = \frac{2\Gamma(n+\rho)}{n!(2n+1)(2n+3)\Gamma(\rho)} \propto n^{\rho-3},$$

и при $\gamma \rightarrow \infty$

$$f(\gamma) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\rho - 1/2)}{2\Gamma(\rho)}, \quad \rho > \frac{1}{2}, \quad (13.2.5)$$

а при $\rho = 1/2$ функция $f(\gamma)$ растет как $\ln \gamma$.

Отвечающая (13.2.3) форма полевого импульса характеризуется асимптотиками

$$\varphi(t) = 1 - \rho t^2 + \frac{1}{6} (7\rho^2 - 3\rho) t^4 + \dots, \quad t \rightarrow 0,$$

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \begin{cases} [2(\rho - 1)t]^{-\rho/(\rho-1)}, & \rho > 1, \\ 4 \exp(-2t), & \rho = 1, \end{cases}$$

причем значениям $\rho = 1/2$, 1 и $3/2$ соответствуют $\varphi(t) = \cos t$, $1/\cosh^2 t$ и $(1 + t^2)^{-3/2}$. При произвольной $\varphi(t)$ имеем разложение

$$\chi(u) = 1 - \frac{1}{2} a_2 u^2 + \frac{5}{12} (a_2^2 - 0,1a_4) u^4 -$$

$$- \frac{7}{18} \left(a_2^3 - \frac{1}{5} a_2 a_4 + \frac{1}{280} a_6 \right) u^6 + \dots, \quad (13.2.6)$$

подстановка которого в (4.2) дает разложение $g(\gamma)$ и коэффициентов импульсного спектра $b_{1,2}(\gamma)$ в адиабатической области (здесь a_n — коэффициенты ряда (5.1)).

Для задачи о рождении пар имеет место формула (11.9), аналогичная (4.2). Поэтому коэффициенты разложений для $f(\gamma)$ и $\tilde{f}(\gamma)$ связаны между собой:

$$\tilde{f}_n = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n+5/2)}{\Gamma(n+2)} f_n = \frac{(2n+3)!!}{(n+1)! 2^n \cdot 3} f_n, \quad (13.2.7)$$

и это соотношение справедливо для произвольной формы импульса $\varphi(t)$. Поскольку в асимптотике $f_n \propto \sqrt{n} f_n$, $n \gg 1$, то ряды для $f(\gamma)$ и $\tilde{f}(\gamma)$ имеют один и тот же радиус сходимости.

Предыдущие формулы относятся к линейной поляризации излучения. Для эллиптической поляризации функция $f(\gamma, \xi)$ определяется уравнениями (3.5) и (3.6), которые упрощаются в случае циркулярной поляризации:

$$\frac{\sinh 2\tau_0}{\tau_0} - \left(\frac{\sinh \tau_0}{\tau_0} \right)^2 = 1 + \gamma^2, \quad (13.2.8)$$

$$f_c(\gamma) = 2 \left[\tau_0 - \frac{1}{2\gamma^2} (\sinh 2\tau_0 - 2\tau_0) \right],$$

²² Другое обоснование ее получено с помощью метода квантового дефекта [17, 18].

где $f_c(\gamma) \equiv f(\gamma, \xi = \pm 1)$, отсюда

$$f_c(\gamma) = \frac{2}{3} \gamma \left(1 - \frac{1}{15} \gamma^2 + \frac{13}{945} \gamma^4 - \frac{517}{127575} \gamma^6 + \dots \right), \quad \gamma \rightarrow 0, \quad (13.2.9)$$

$$f_c(\gamma) = \ln(\gamma \sqrt{\ln \gamma}) - \frac{1}{2}(1 - \ln 2) - \frac{1}{4 \ln \gamma} + \dots, \quad \gamma \rightarrow \infty. \quad (13.2.10)$$

Зависимость $\tau_0(\gamma, \xi)$ и $f(\gamma, \xi)$ от эллиптичности света становится существенной при переходе к циркулярной поляризации, что видно из рис. 3.

Функция Келдыша для линейной поляризации может быть записана в виде, аналогичном (13.2.7):

$$f(\gamma, 0) = \tau_0 - \frac{1}{4\gamma^2} (\sinh 2\tau_0 - 2\tau_0), \quad (13.2.11)$$

где теперь $\tau_0 = \operatorname{arcsinh} \gamma$ (см. (3.6) при $\xi = 0$).

13.3. Замечания о "теории ADK"

Некоторые авторы результаты своих экспериментов по туннельной ионизации сравнивают с так называемыми²³ "формулами ADK" или "ADK-теорией" (Аммосов, Делоне, Крайнов [115]). Сделаем несколько замечаний об этой "теории" и связи ее с предыдущими работами.

В случае ионизации s -уровня низкочастотным ($\gamma \ll 1$) лазерным излучением с линейной поляризацией формула (2.5) упрощается:

$$w_a = \kappa^2 C_\kappa^2 \sqrt{\frac{3F}{\pi}} 2^{2n^*} F^{1-2n^*} \exp \left[-\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{1}{10} \gamma^2 \right) \right], \quad (13.3.1)$$

а для циркулярной поляризации

$$w_a = \kappa^2 C_\kappa^2 2^{2n^*} F^{1-2n^*} \exp \left[-\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{1}{15} \gamma^2 \right) \right], \quad \xi = \pm 1 \quad (13.3.2)$$

(здесь $l = 0$, $C_\kappa \equiv C_{\kappa 0}$, $F = \mathcal{E}/\kappa^3$ — приведенное электрическое поле и $\hbar = m = e = 1$). В частности, для основного состояния атома водорода $\kappa = n^* = 1$, $F \equiv \mathcal{E}$ и скорость туннельной ионизации равна (в атомных единицах)

$$w_a = 4 \sqrt{\frac{3}{\pi \mathcal{E}}} \exp \left[-\frac{2}{3\mathcal{E}} \left(1 - \frac{1}{10} \gamma^2 \right) \right], \quad \xi = 0. \quad (13.3.3)$$

Эти формулы являются асимптотически точными в пределе слабого поля²⁴ так же, как и известная формула [16] для основного состояния атома водорода в постоянном электрическом поле (см. (12.8)).

Отметим, что в (13.3.1) множитель $\sqrt{3F/\pi}$ перехода от циркулярной поляризации света к линейной возникает при усреднении $w_{st}(F(t))$ по периоду лазерного излучения при условии $\gamma \ll 1$ (см. уравнение (3.21)). Этот

множитель был получен в [5]. При этом асимптотические коэффициенты C_{kl} предлагалось брать из численных расчетов для свободного ($\mathcal{E} = 0$) атома, например, из таблиц типа [14].

С другой стороны, формула ADK записывается так [51, 156, 157]:

$$w_{ADK} = \sqrt{\frac{3n^{*3} \mathcal{E}}{\pi Z^3}} \frac{\mathcal{E} D^2}{8\pi Z} \exp \left(-\frac{2Z^3}{3n^{*3} \mathcal{E}} \right), \quad D = \left(\frac{4eZ^3}{n^{*4} \mathcal{E}} \right)^{n^*}, \quad (13.3.4)$$

где $e = 2,718 \dots$, n^* — эффективное главное квантовое число уровня и $Z = 0, 1, 2, \dots$ — заряд атомного остова. Переходя к переменным

$$F = \frac{n^{*3} \mathcal{E}}{Z^3}, \quad \kappa = \frac{Z}{n^*} = \sqrt{\frac{I}{I_H}},$$

легко видеть, что формула ADK отличается от (13.3.1) лишь выражением для асимптотического коэффициента C_κ и тем, что отброшена поправка $\propto \gamma^2$ в экспоненте:

$$w_{ADK} \equiv \kappa^2 (C_\kappa^{ADK})^2 \sqrt{\frac{3F}{\pi}} 2^{2n^*} F^{1-2n^*} \exp \left(-\frac{2}{3F} \right), \quad (13.3.5)$$

где²⁵

$$C_\kappa^{ADK} = \frac{1}{\sqrt{8\pi n^*}} \left(\frac{2e}{n^*} \right)^{n^*} \quad (13.3.6)$$

(ср. с (13.1.2)). Заметим, что (13.3.6) вытекает непосредственно из формулы Хартри²⁶

$$C_\kappa^H = \frac{2^{n^*-1}}{\Gamma(n^* + 1)}, \quad l = 0, \quad (13.3.7)$$

если в последней заменить гамма-функцию на приближение Стирлинга, $\Gamma(n^* + 1) \approx \sqrt{2\pi n^*} (n^*/e)^{n^*}$. Обобщение (13.3.6) на случай любых l приведено в [115] и получается из предложенного Хартри выражения (2.7) применением той же формулы Стирлинга,

$$C_{nl}^2 = \frac{2^{2n-2}}{n\Gamma(n+l+1)\Gamma(n-l)} \rightarrow (C_{nl}^{ADK})^2 = \frac{1}{8\pi n} \left(\frac{4e^2}{n^2 - l^2} \right)^n \left(\frac{n-l}{n+l} \right)^{l+1/2} \quad (13.3.8)$$

с последующей заменой n и l на эффективные квантовые числа n^* и l^* . Этим тривиальным преобразованием исчерпывается оригинальный вклад авторов "ADK-теории" по сравнению с более ранними работами [4, 5,

²³ Эти термины, введенные в [156], часто используются в литературе, в том числе и самими авторами (см., например, [50, 51, 132, 157]).

²⁴ Вопрос о том, до каких значений F и с какой точностью можно пользоваться этими асимптотиками, справедливыми при $F \rightarrow 0$, требует отдельного исследования. Для атома водорода он был рассмотрен в работах [72, 82], а для короткодействующего потенциала — в [105].

²⁵ Численные значения C_κ^{ADK} отличаются от точных коэффициентов C_κ на 10–15% обычно в сторону завышения. Так, для основного состояния атома водорода $C_\kappa^2 = 1$, а $(C_\kappa^{ADK})^2 = e^2/2\pi \approx 1,18$; для атома гелия отличие достигает 47%, для калия — 30%, для цезия — 35%, и т.д.

²⁶ См. уравнение (7.6) в работе [11], где формула (2.7) получена из анализа рекуррентных соотношений, которым удовлетворяют нормировочные интегралы $\int \chi_{n^*l}^2(r) dr$ с соседними значениями квантовых чисел n^* , $n^* \pm 1$ в кулоновском поле, искаженном на малых расстояниях $r \lesssim r_c$. Впоследствии более строгий вывод формулы Хартри (с оценкой поправок к ней) был дан с помощью метода квантового дефекта [17, 18] и из разложения эффективного радиуса [19].

11]. При этом для скорости ионизации w получается довольно громоздкое выражение (см. уравнение (30) в [156], где введено название "теория ADK").

Заметим, что сама запись w в форме (13.3.4) неестественна: из нее, казалось бы, должно вытекать, что главный фактор $\exp(-2Z^3/3n^* \mathcal{E})$ резко зависит от заряда атомного остова Z , и к тому же неочевиден переход к случаю $Z=0$ (ионизация отрицательных ионов типа H^- , Na^- и др.). Между тем, этот фактор вообще не зависит от Z и определяется только энергией связанного состояния $E_0 = -\kappa^2/2$ (в которую можно включить штарковский сдвиг уровня) и внешним электрическим полем \mathcal{E} , что легко видеть уже на простейшей одномерной модели:

$$w \propto \exp\left(-2 \int_0^b \sqrt{\kappa^2 - 2\mathcal{E}x} dx\right) = \exp\left(-\frac{2\kappa^3}{3\mathcal{E}}\right), \quad (13.3.9)$$

где ширина барьера $b = \kappa^2/2\mathcal{E} \gg \kappa^{-1}$. Зависимость от Z входит в (13.3.1), (13.3.2) через $n^* = Z/\kappa$ и начинается (в экспоненте) с кулоновской поправки $2n^* \ln F$, которая при $F \ll 1$ мала по сравнению с главным членом $2/3F$. В формуле ADK (13.3.4) этот факт замаскирован принятыми в ней обозначениями, что делает ее менее наглядной. К тому же эта формула не имеет каких-либо вычислительных преимуществ по сравнению с (13.3.1). Последняя, по существу, даже проще (если асимптотические коэффициенты C_κ брать из [14] или подобных им таблиц) и имеет не меньшую точность. Поэтому нельзя согласиться с утверждением, что "формулы, полученные в работах [4, 5],... не удовлетворяли полностью запросы эксперимента. В работе [115] формула, полученная в [5], была приведена к виду, наиболее удобному для практического использования в случаях туннельной ионизации многоэлектронных атомов и их многозарядных ионов" (см. [157], с. 228). Все "приведение" состоит в замене факториалов в (2.5), (2.7) на приближение Стирлинга, для чего к тому же нет достаточных оснований (ибо квантовые числа n, l обычно порядка единицы).

Заметим еще, что импульсное распределение фотоэлектронов для линейной поляризации [5] непосредственно переходит при $\gamma \ll 1$ в формулу (3.13), полученную в [48, 49] отдельным расчетом. Распределение (2.9) для циркулярно-поляризованного излучения вытекает из формул работ [4, 5], справедливых для всех значений γ , и уже было выписано в явном виде (см. уравнение (29'') в [4]). Учет кулоновского взаимодействия проводится в [49, 50] по квазиклассической теории возмущений, причем соответствующие выкладки полностью повторяют работу [5]. Наконец, отметим, что полученная в [5] формула (2.5) справедлива для произвольного атомного уровня, а не только для атома водорода, и не требует обобщения с помощью метода квантового дефекта — вопреки тому, что утверждается в [51, 115].

Таким образом, все результаты "ADK-теории" содержатся, как частный случай $\gamma \ll 1$, в формулах работ [4–7], справедливых при всех значениях γ . Однако это нигде не отмечено в [50, 51, 156] и других работах, хотя статьи [4–7] известны этим авторам и иногда цитируются ими, но не по существу.

В заключение остановимся на статьях [132, 133], посвященных "полуклассической дираковской теории туннельной ионизации". В [132] содержится формула (8) для скорости ионизации w_τ основного состояния в

постоянных скрещенных полях. Данную формулу (которая рассматривается [132] как "главный результат" этой работы) нетрудно записать в виде

$$w_\tau = \frac{mc^2}{\hbar} C_\lambda^2 PQ \text{Exp}, \quad (13.3.10)$$

где множители Exp (10.18), кулоновский фактор Q и предэкспонента P тождественно совпадают с выражениями, полученными ранее в [4, 129–131], а коэффициент C_λ^2 содержится в любом учебнике по квантовой механике [120, 127].

В [132] не вычислены ни спиновый фактор (10.14) в вероятности туннелирования, ни поправка порядка γ^2 в экспоненте (10.11), и не учтена адиабатическая поправка [5], меняющая степень поля в предэкспоненте. Поэтому формула (8) работы [132] могла бы иметь отношение только к случаю постоянных полей. Однако и в этом случае авторы фактически предполагают, что дираковский биспинор \hat{S} , определяющий поляризацию электрона и заданный вблизи ядра атома, не меняется в процессе подбарьерного движения (см. формулы (1), (2) и (5) в [132]), что неверно [128] (см. формулы (10.14), (10.15)). Оригинальный вклад авторов [132] сводится к перемножению факторов Exp , Q и P , найденных в предыдущих работах [4, 129–131], о чем, однако, нигде не упоминается. При этом асимптотический коэффициент C_λ^2 относится к спину $s=1/2$, а спиновая поправка к действию не рассматривается, поэтому формула (8) из [132] не является физически осмысленной.

"Главный результат" этой статьи является простым переписыванием формул из наших работ с сохранением обозначений, включая переход от энергии уровня $\epsilon = E_0/mc^2$ к введенной в [129] удобной вспомогательной переменной ξ (10.9), естественным образом возникающей в ММВ. В [133] к этому добавлены формулы релятивистской теории ионизации постоянным электрическим полем, целиком заимствованные из [130] (сравните, например, формулу (35) в [133] с (6), (32) из работы [130]), причем необходимые ссылки в [133] также отсутствуют. Считая подобную ситуацию не только странной, но и противоречащей элементарным принципам научной этики, я хотел бы обратить на эти факты внимание научной общественности.

Список литературы

1. Келдыш Л В *ЖЭТФ* **47** 1945 (1964)
2. Volkov D M *Z. Phys.* **94** 250 (1935); Волков Д М *ЖЭТФ* **7** 1286 (1937)
3. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Релятивистская квантовая теория* Ч. 1 (М.: Наука, 1968)
4. Никишов А И, Ритус В И *ЖЭТФ* **50** 255 (1966)
5. Переломов А М, Попов В С, Терентьев М В *ЖЭТФ* **50** 1393; **51** 309 (1966)
6. Переломов А М, Попов В С *ЖЭТФ* **52** 514 (1967)
7. Никишов А И, Ритус В И *ЖЭТФ* **52** 223 (1967)
8. Попов В С, Кузнецов В П, Переломов А М *ЖЭТФ* **53** 331 (1967); Препринт № 517 (М.: ИТЭФ, 1967)
9. Никишов А И *Труды ФИАН* **111** 152 (1979)
10. Котова Л П, Переломов А М, Попов В С *ЖЭТФ* **54** 1151 (1968)
11. Hartree D R *Proc. Cambr. Philos. Soc.* **24** 89 (1927)
12. Bates D R, Damgaard A *Philos. Trans. R. Soc. London* **242** 101 (1949)
13. Hartree D R *The Calculation of Atomic Structures* (New York: J. Wiley, 1957)

14. Радциг А А, Смирнов Б М *Параметры атомов и атомных ионов* (М.: Энергоатомиздат, 1986)
15. Собельман И И *Введение в теорию атомных спектров* (М.: Наука, 1977)
16. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2001)
17. Рапопорт Л П, Зон Б А, Манаков Н Л *Теория многофотонных процессов в атомах* (М.: Атомиздат, 1978)
18. Seaton M J *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **118** 504 (1958); *Rep. Prog. Phys.* **46** 167 (1983)
19. Мур В Д, Карнаков Б М, Попов В С *Докл. РАН* **365** 329 (1999); *ЖЭТФ* **115** 521 (1999)
20. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* (Под ред. М Абрамовица, И Стиган) (М.: Наука, 1979)
21. Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **70** 493 (1999); *ЖЭТФ* **118** 56 (2000); Popov V S *Laser Phys.* **10** 1033 (2000)
22. Воронов Г С и др. *Письма в ЖЭТФ* **2** 377 (1965); Воронов Г С, Делоне Н Б *ЖЭТФ* **50** 78 (1966); Воронов Г С, Делоне Г А, Делоне Н Б *ЖЭТФ* **51** 1660 (1966)
23. Faisal F H M *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **6** L89 (1973)
24. Reiss H R *Phys. Rev. A* **22** 1786 (1980); **42** 1476 (1990); *Prog. Quantum Electron.* **16** (1) 1 (1992)
25. Reiss H R *J. Opt. Soc. Am. B* **7** 574 (1990)
26. Brabec T, Krausz F *Rev. Mod. Phys.* **72** 545 (2000)
27. Delone N B, Krainov V P *Multiphoton Processes in Atoms* (Berlin: Springer-Verlag, 1994; 2nd ed. — Berlin: Springer, 2000)
28. Fock V A *Z. Phys.* **98** 145 (1935)
29. Bargmann V *Z. Phys.* **99** 576 (1935)
30. Bander M, Itzykson C *Rev. Mod. Phys.* **38** 330, 346 (1966)
31. Переломов А М, Попов В С *ЖЭТФ* **50** 179 (1966)
32. Попов В С "О "скрытой" симметрии атома водорода", в сб. *Физика высоких энергий и теория элементарных частиц* (Отв. ред. В П Шелест) (Киев: Наукова думка, 1967) с. 702
33. Смирнов Б М, Чибисов М И *ЖЭТФ* **49** 841 (1965)
34. Демков Ю Н, Друкарев Г Ф *ЖЭТФ* **47** 918 (1964)
35. Gribov G F, Kuchiev M Yu *Phys. Rev. A* **55** 3760 (1997)
36. Гореславский С П, Швецов-Шиловский Н И, Щербачев О В, в сб. *Научная сессия МИФИ-2004, Москва, 26 – 30 января 2004 г.* Т. 5 (М.: МИФИ, 2004) с. 158
37. Гореславский С П, Попруженко С В *ЖЭТФ* **110** 1200 (1996)
38. Goreslavskii S P, Popruzhenko S V *Laser Phys.* **6** 780 (1996); Goreslavsky S P, Popruzhenko S V *Laser Phys.* **7** 700 (1997)
39. Мур В Д, Попруженко С В, Попов В С *ЖЭТФ* **119** 893 (2001)
40. Krainov V P *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **32** 1607 (1999)
41. Paulus G G et al. *Phys. Rev. Lett.* **80** 484 (1998)
42. Becker W et al. *Laser Phys.* **8** 56 (1998)
43. Paulus G G et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 3791 (2000)
44. Corkum P B, Burnett N H, Brunel F *Phys. Rev. Lett.* **62** 1259 (1989)
45. Pont M, Shakeshaft R, Potvliege R M *Phys. Rev. A* **42** 6969 (1990); Pont M et al. *Phys. Rev. A* **45** 8235 (1992)
46. Дыхне А М *ЖЭТФ* **38** 570 (1960); **41** 1324 (1961)
47. Делоне Н Б, Крайнов В П *Атом в сильном световом поле* 2-е изд. (М.: Энергоатомиздат, 1984)
48. Delone N B, Krainov V P *J. Opt. Soc. Am. B* **8** 1207 (1991)
49. Krainov V P *J. Opt. Soc. Am. B* **14** 425 (1997)
50. Крайнов В П, Ристич В М *ЖЭТФ* **101** 1479 (1992)
51. Делоне Н Б, Крайнов В П *УФН* **168** 531 (1998)
52. Попов В С *УФН* **169** 819 (1999)
53. Bashkansky M, Bucksbaum P H, Schumacher D W *Phys. Rev. Lett.* **60** 2458 (1988)
54. Basile S, Trombetta F, Ferrante G *Phys. Rev. Lett.* **61** 2435 (1988)
55. Швецов-Шиловский Н И, Гореславский С П, Попруженко С В, в сб. *Научная сессия МИФИ-2004, Москва, 26 – 30 января 2004 г.* Т. 5 (М.: МИФИ, 2004) с. 208
56. Hehenberger M, McIntosh N V, Brändas E *Phys. Rev. A* **10** 1494 (1974)
57. Yamabe T, Tachibana A, Silverstone H J *Phys. Rev. A* **16** 877 (1977)
58. Benassi L, Grecchi V J *Phys. B: At. Mol. Phys.* **13** 911 (1980)
59. Franceschini V, Grecchi V, Silverstone H J *Phys. Rev. A* **32** 1338 (1985)
60. Вайнберг В М и др. *Письма в ЖЭТФ* **44** 9 (1986); *ЖЭТФ* **93** 450 (1987)
61. Popov V S et al. *Phys. Lett. A* **124** 77 (1987); **149** 418 (1990); Popov V S, Mur V D, Sergeev A V *Phys. Lett. A* **193** 159 (1994)
62. Fernández F M *Phys. Rev. A* **54** 1206 (1996)
63. Баренблатт Г И, Зельдович Я Б *УМН* **26** 115 (1971)
64. Зельдович Я Б, Соколов Д Д *УФН* **146** 493 (1985)
65. Benassi L et al. *Phys. Rev. Lett.* **42** 704, 1430 (1979)
66. Popov V S *Phys. Lett. A* **173** 63 (1993)
67. Yaffe L G *Rev. Mod. Phys.* **54** 407 (1982)
68. Doren D J, Herschbach D R *Phys. Rev. A* **34** 2654 (1986)
69. Tsipis C A et al. (Eds) *New Methods in Quantum Theory* (Dordrecht: Kluwer Acad., 1996)
70. Keldysh L "Multiphoton ionization by a very short laser pulse" (частное сообщение)
71. Popov V S *Laser Phys.* **10** 1033 (2000); Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **73** 3 (2001); *ЖЭТФ* **120** 315 (2001)
72. Popov V S, Karnakov B M, Mur V D *Phys. Lett. A* **229** 306 (1997); Попов В С, Карнаков Б М, Мур В Д *ЖЭТФ* **113** 1579 (1998)
73. Базь А И, Зельдович Я Б, Переломов А М *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* 2-е изд. (М.: Наука, 1971)
74. Попов В С *ЖЭТФ* **61** 1334 (1971); **63** 1586 (1972)
75. Landau L D *Phys. Z. Sowjetunion* **1** 88; **2** 46 (1932); Ландау Л Д *Собрание трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1969) с. 71, 81
76. Лифшиц Е М *ЖЭТФ* **8** 930 (1938)
77. Никитин Е Е, Питаевский Л П *УФН* **163** (9) 101 (1993)
78. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Физматлит, 2001)
79. Гапонов А В, Миллер М А *ЖЭТФ* **34** 242 (1958)
80. Muller H G, Tip A, van der Wiel M J *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **16** L679 (1983)
81. Goreslavsky S P, Narozhny N B, Yakovlev V P *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 1752 (1989)
82. Попов В С, Сергеев А В *Письма в ЖЭТФ* **63** 398 (1996)
83. Друкарев Г Ф, Монозон Б С *ЖЭТФ* **61** 956 (1971)
84. Dyson F J *Phys. Rev.* **85** 631 (1952)
85. Kazakov D I, Shirkov D V *Fortschr. Phys.* **28** 465 (1980)
86. Ицксон Р, Зюбер Ж-Б *Квантовая теория поля* Т. 2 (М.: Мир, 1984) Гл. 9
87. Казаков Д И, Попов В С *ЖЭТФ* **122** 675 (2002)
88. Попов В С, Сергеев А В *ЖЭТФ* **113** 2047 (1998)
89. Попов В С, Сергеев А В, Щерблякин А В *ЖЭТФ* **102** 1453 (1992); Попов В С, Сергеев А В *ЖЭТФ* **105** 568 (1994)
90. Popov V S, Sergeev A V *Phys. Lett. A* **172** 193 (1993); **193** 165 (1994)
91. López-Cabrera M et al. *Phys. Rev. Lett.* **68** 1992 (1992)
92. Kais S, Herschbach D R *J. Chem. Phys.* **98** 3990 (1993)
93. Карнаков Б М, Мур В Д, Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **65** 391 (1997); Попов В С, Карнаков Б М, Мур В Д *ЖЭТФ* **115** 1642 (1999)
94. Сахаров А Д и др. *ДАН СССР* **196** 65 (1965)
95. Сахаров А Д *УФН* **88** 725 (1966)
96. Павловский А И, в кн. *Академик А.Д. Сахаров. Научные труды* (Под ред. Б Л Альтшулера и др.) (М.: Центрком ОТФ ФИАН, 1995) с. 85
97. Фабрика С Н, Балявин Г Г, Препринт № 129 (Нижний Архыз: Специальная астрофизическая обсерватория РАН, 1998)
98. Никишов А И *ЖЭТФ* **60** 1614 (1971); *Труды ФИАН* **113** 211 (1979)
99. Manakov N L et al. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **33** R141 (2000)
100. Бункин Ф В, Прохоров А М *ЖЭТФ* **46** 1090 (1964)
101. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **51** 1492 (1966); *УФН* **110** 139 (1973)
102. Ритус В И *ЖЭТФ* **51** 1544 (1966)
103. Манаков Н Л, Рапопорт Л П *ЖЭТФ* **69** 842 (1975); Manakov N L, Ovsiannikov V D, Rapoport L P *Phys. Rep.* **141** 319 (1986)
104. Berson I J *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **8** 3078 (1975)
105. Мур В Д и др. *Письма в ЖЭТФ* **75** 294 (2002); *ЯФ* **66** 2014 (2003)
106. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **39** 776 (1960)
107. Андреев С П, Карнаков Б М, Мур В Д *Письма в ЖЭТФ* **37** 155 (1983); Андреев С П и др. *ЖЭТФ* **86** 866 (1984)
108. Mur V D et al. *Phys. Lett. A* **316** 226 (2003)
109. Манаков Н Л и др. *Письма в ЖЭТФ* **72** 426 (2000)
110. Borca B et al. *Phys. Rev. Lett.* **88** 193001 (2002); Manakov N L et al. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **36** R49 (2003)
111. Ксионг В, Чин С Л *ЖЭТФ* **99** 481 (1991)

112. Fittinghoff D N et al. *Phys. Rev. Lett.* **69** 2642 (1992)
113. Moshhammer R et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 447 (2000)
114. Mohideen U et al. *Phys. Rev. Lett.* **71** 509 (1993)
115. Аммосов М В, Делоне Н Б, Крайнов В П *ЖЭТФ* **91** 2008 (1986)
116. Tajima T, Mourou G *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **5** 031301 (2002)
117. Sauter F Z. *Phys.* **69** 742; **73** 547 (1931)
118. Heisenberg W, Euler H Z. *Phys.* **98** 714 (1936)
119. Schwinger J *Phys. Rev.* **82** 664 (1951)
120. Ахвезер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1981)
121. Маринов М С, Попов В С *ЯФ* **15** 1271 (1972)
122. Bargmann V, Michel L, Telegdi V L *Phys. Rev. Lett.* **2** 435 (1959)
123. Breit G *Nature* **122** 649 (1928)
124. Переломов А М, Попов В С *ЯФ* **14** 661 (1971)
125. Попов В С *ЯФ* **12** 429 (1970); **14** 458 (1971); **64** 421 (2001)
126. Зельдович Я Б, Попов В С *УФН* **105** 403 (1971)
127. Шифф Л И *Квантовая механика* (М.: ИЛ, 1959)
128. Попов В С, Карнаков Б М, Мур В Д *Письма в ЖЭТФ* **79** 320 (2004)
129. Попов В С, Мур В Д, Карнаков Б М *Письма в ЖЭТФ* **66** 213 (1997); Popov V S, Mur V D, Karnakov B M *Phys. Lett. A* **250** 20 (1998)
130. Мур В Д, Карнаков Б М, Попов В С *ЖЭТФ* **114** 798 (1998)
131. Карнаков Б М, Мур В Д, Попов В С *ЯФ* **62** 1444 (1999)
132. Milosevic N, Krainov V P, Brabec T *Phys. Rev. Lett.* **89** 193001 (2002)
133. Milosevic N, Krainov V P, Brabec T *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35** 3515 (2002)
134. Karnakov B M, Mur V D, Popov V S, quant-ph/0405158
135. Brezin E, Itzykson C *Phys. Rev. D* **2** 1191 (1970)
136. Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **13** 261 (1971); *ЖЭТФ* **61** 1334 (1971)
137. Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **18** 453 (1973); *ЯФ* **19** 155 (1974)
138. Нарожный Н Б, Никишов А И *ЖЭТФ* **65** 862 (1973)
139. Мостепаненко В М, Фролов В М *ЯФ* **19** 885 (1974)
140. Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **74** 151 (2001); *ЖЭТФ* **121** 1235 (2002)
141. Nikishov A I *Nucl. Phys. B* **21** 346 (1970); Нарожный Н Б, Никишов А И *ЯФ* **11** 1072 (1970)
142. Alkofer R et al. *Phys. Rev. Lett.* **87** 193902 (2001)
143. Ringwald A *Phys. Lett. B* **510** 107 (2001)
144. Popov V S *Phys. Lett. A* **298** 83 (2002)
145. Bulanov S S et al. *Phys. Lett. A* (2004) (in press)
146. Нарожный Н Б, Фофанов М С *ЖЭТФ* **117** 867 (2000); Narozhny N B, Fofanov M S *Phys. Lett. A* **295** 87 (2002)
147. Oppenheimer J R *Phys. Rev.* **31** 66 (1928)
148. Yamabe T, Tachibana A, Silverstone H J *Phys. Rev. A* **16** 877 (1977)
149. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика* 2-е изд. (М.: Физматгиз, 1963) с. 327
150. Reichle R, Helm H, Kiyani I Yu *Phys. Rev. Lett.* **87** 243001 (2001)
151. Kiyani I Yu, Helm H *Phys. Rev. Lett.* **90** 183001 (2003)
152. Agostini P et al. *Phys. Rev. Lett.* **42** 1127 (1979)
153. *JST Intern. Symp. on Control of Molecules in Intense Laser Fields, Tokyo, Japan, Sept. 9–10, 2002, Program and Abstracts* (Tokyo, 2002)
154. Гольдбергер М, Ватсон К *Теория столкновений* (М.: Мир, 1967)
155. Curtis A R *Coulomb Wave Functions* (Cambridge: Univ. Press, 1964)
156. Krainov V P, Xiong W, Chin S L *Laser Phys.* **2** 467 (1992)
157. Делоне Н Б, Крайнов В П *Нелинейная ионизация атомов лазерным излучением* (М.: Физматлит, 2001)

Tunnel and multiphoton ionization of atoms and ions in an intense laser field (Keldysh theory)

V.S. Popov

Russian State Research Center 'Institute of Theoretical and Experimental Physics',
ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117259 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 129-96 14
E-mail: markina@itep.ru

The 1964 Keldysh theory describing the nonlinear photoionization of atoms and ions in intense laser radiation is reviewed and its recent developments are discussed. Photoelectron energy and angular distribution for linearly, circularly, and elliptically polarized laser radiation is considered, atomic state ionization rate in a monochromatic electromagnetic wave and ultra-short laser pulses of various shapes are discussed, and for each of these cases the momentum and angular spectra of photoelectrons are examined. The limiting cases of tunnel, $\gamma \ll 1$, and multiphoton, $\gamma \gg 1$, ionization are considered, where the adiabatic parameter γ is also known as the Keldysh parameter. The above-barrier ionization probability for a hydrogen atom in a low-frequency laser field is calculated. The effect of a strong magnetic field on the ionization rate is discussed. Lorentzian ionization, a process due the motion of atoms and ions in an intense static magnetic field, is considered. The exactly solvable model of a zero-range-force bound s-state ionized by a circularly polarized electromagnetic wave is described and used as an example to illustrate Zel'dovich regularization method in the theory of quasistationary states. A comparison of Keldysh theory with experiment is given. A relativistic theory of ionization is discussed, valid when the level binding energy is comparable to the electron rest mass (multicharged ions being an example) and when electron sub-barrier motion can no longer be considered nonrelativistic. The analogous process in which electron-positron pairs are created from vacuum by intense optical and X-ray laser fields (the so-called Schwinger effect) is considered. The imaginary time method (ITM) employed in the work provides a convenient and physically transparent way of calculating the tunneling probability through time-varying barriers. Keldysh function expansions, the asymptotic behaviour of atomic wave function coefficients, and the so-called 'ADK theory' are discussed in Appendices.

PACS numbers: 12.20.Ds, **32.80. -t**, 42.50.Hz

Bibliography — 157 references

Received 15 April 2004, revised 24 May 2004