

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

**Самофокусировка лазерных импульсов с регулярной поперечной
структурой и сравнительный анализ филаментации на длинах волн
0.8 и 10 мкм в воздухе**

Дипломная работа
студента 6-го курса
Ефимова О.В.

«Допущен к защите»
«___» декабря 2010г.

Зав. кафедрой ОФиВП

д.ф.-м.н., проф. В.А. Макаров

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент С.А. Шлёнов

Москва, 2010г.

Аннотация дипломной работы

Самофокусировка лазерных импульсов с регулярной поперечной структурой и сравнительный анализ филаментации на длинах волн 0.8 и 10 мкм в воздухе

Численно исследован процесс начала формирования филаментов в пучках с регулярной поперечной структурой в виде синфазных и противофазных амплитудных возмущений в среде с керровской нелинейностью. Показано, что при мощности в 6.6 раз большей по сравнению с критической мощностью самофокусировки гауссовского пучка в случае синфазной модуляции возникает один филамент, а в случае противофазной модуляции возникают четыре филамента, каждый из которых содержит 1.65 критических мощностей. При этом в случае синфазной модуляции филамент возникает на расстоянии в 2.3 раза меньшей, чем в случае противофазной модуляции. Рассмотрено влияние случайных возмущений с гауссовой спектральной корреляционной функцией и показано, что при амплитудной модуляции исходного импульса с относительной флуктуацией до 0.5 эти возмущения принципиально не влияют на характер формирования филаментов, а только незначительно (до 5–10%) увеличивают расстояние филаментации.

Разработана программа, позволяющая исследовать филаментацию аксиально-симметричных субпикосекундных импульсов на длине волны CO₂ лазера. Проведён сравнительный анализ филаментации лазерных импульсов на длинах волн 800 нм и 10 мкм в воздухе с учётом ионизации молекул азота и кислорода. Получены параметры филамента и плазменного канала для этих длин волн при превышении критической мощности самофокусировки в 1.5 раза. Показано, что при одинаковом превышении критической мощности и равных начальных интенсивностях при распространении импульса излучения с длиной волны 10 мкм возникает более широкий плазменный канал с меньшей плотностью ионов, чем при использовании излучения с длиной волны 800 нм. Расстояние филаментации при этом практически не изменяется.

В приложении к диплому описаны консервативные дифференциально-разностные схемы решения нелинейного параболического уравнения квазиоптики в одномерном и аксиально-симметричном случаях. Проведён сравнительный анализ параллельных численных алгоритмов решения уравнения квазиоптики, а именно метода на основе разностных схем и Фурье-метода. Исследована их эффективность при выполнении на суперкомпьютере СКИФ МГУ «Чебышёв».

Оглавление

Введение	4
Цели работы	9
Глава 1. Постановка задачи и численные методы её решения	10
1.1. Модель филаментации лазерных импульсов	10
1.2. Модель нелинейной ионизации	11
1.3. Методика численного моделирования	13
1.4. Причины необходимости использования параллельных вычислений и спо- собы снижения вычислительных затрат	14
1.5. Апробация численных схем	15
Глава 2. Самофокусировки пучков с регулярной поперечной структурой	19
2.1. Постановка задачи	19
2.2. Самофокусировка неограниченных пучков	19
2.3. Самофокусировка ограниченных пучков с гауссовским поперечным про- филем	21
2.4. Влияние случайных возмущений	27
2.5. Выводы	29
Глава 3. Сравнительный анализ филаментации субпикосекундных ла- зерных импульсов на длинах волн 800 нм и 10 мкм в воздухе .	31
3.1. Постановка задачи	31
3.2. Влияние дисперсии импульса на процесс филаментации	31
3.3. Характеристики филаментов на длине волны 800 нм	32
3.4. Филаментация импульсов на длине волны 10 мкм	35
3.5. Выводы	38
Заключение	39
Список литературы	41
Приложения	44
П.А. Вариационно-разностная схема для одномерного параболического урав- нения	44
П.Б. Вариационно-разностная схема для случая цилиндрических координат .	49
П.В. Фурье-метод решения параболического уравнения	52
П.Г. Сравнительный анализ параллельных численных алгоритмов решения уравнения квазиоптики	53

Введение

Явление самофокусировки стало известно ещё в 1960-х годах [1]. Её наблюдали при фокусировке импульсного лазерного излучения в органические жидкости. Теоретические исследования в этом направлении были предприняты Г. А. Аскарьяном в 1962 г. [2], им же было определено, что самофокусировка возникает лишь в пучках, мощность которых больше некоторого критического значения, определяемого свойствами среды. Сфокусированный за счёт нелинейного изменения показателя преломления пучок продолжает распространяться без разфокусировки, что принципиально отличается от обычной фокусировки с помощью линз. При этом образуется плазма, свечение которой наблюдалось в эксперименте [3] и именно подобные светящиеся нити называются филаментами.

Самофокусировка и последующая филаментация лазерных импульсов порождает множество физических процессов, имеющих как фундаментально-научное, так и чисто прикладное значение. В филаменте пространственно локализуется энергия импульса, возникает плазменный канал, возникновение филамента обычно сопровождается конической эмиссией, формированием излучения суперконтинуума [4]. Это даёт новые возможности для применения лазеров в атмосферной оптике, микрооптике и некоторых других областях. Этой тематике посвящено много работ, в том числе и опирающихся на численный эксперимент. В настоящее время наиболее активные исследования идут в области многофиламентации, атмосферного зондирования на основе генерируемого филаментом суперконтинуума и FIBS-спектроскопии (filament induced breakdown spectroscopy), управления формированием и распространением филамента.

Рассмотрим механизм возникновения филаментов. Из-за небольших флуктуаций показателя преломления в среде на поперечном профиле возникают «горячие точки» с большей интенсивностью, из которых под действием керровской самофокусировки возникают отдельные пучки. При их взаимодействии со средой образуется плазма, которая дефокусирует эти пучки и не даёт интенсивности неограниченно возрастать. Если пиковая мощность лазерного импульса в десятки или даже сотни раз превышает критическую, то возникает множество таких филаментов. Вокруг филаментов возникает область поля, называемая энергетическим резервуаром, в которой содержится большая часть энергии исходного импульса. Интерференция излучения вокруг отдельных филаментов приводит к локальному превышению критической мощности и возникновению новых «горячих точек». Этот процесс подробно описан в [5]. Процесс образования «горячих точек» носит случайный характер и трудно поддаётся контролю, тем самым увеличивая важность исследований в этой области. Это является принципиально важным для спектроскопии FIBS [6], так как необходимо, чтобы филамент возник в непосредственной близости от поверхности мишени, спектр флюоресценции которой мы хотим измерить. Также точность в предсказании точки возникновения филамента

вдоль оси распространения и поперечным координатам важна для приложений в области микромодификации оптических материалов.

Возможны два типа управления филаментацией: управление во времени, осуществляемое за счёт изменения длительности и начальной модуляции фазы импульса, и управление в пространстве, при котором меняются фокусировка, распределения интенсивности и фаза излучения в поперечном сечении пучка.

Влияние начальной фазовой модуляции на образование филамента определяется двумя факторами. Первый из них состоит в уменьшении начальной мощности и не зависит от знака фазовой модуляции. Длительность импульса при фазовой модуляции увеличивается, пиковая мощность уменьшается и в соответствии с формулой Марбургера (1.5.3) увеличивается расстояние до зарождения филамента. Вторым фактором заключается в предварительной компенсации дисперсии групповых скоростей и зависит от знака фазовой модуляции. В среде с нормальной дисперсией импульс с отрицательной фазовой модуляцией сжимается, его пиковая мощность увеличивается при распространении и, следовательно, расстояние филаментации уменьшается.

За счёт перераспределения интенсивности в поперечном сечении пучка возможно крупномасштабное управление филаментацией. Так, можно изменять расходимость выходного пучка лазерной системы или фокусировать [7] лазерный луч для смещения области зарождения филамента.

Можно управлять расстоянием филаментации и с помощью масштабирования пучка в поперечном сечении. Так, увеличение отношений полуосей эллиптического распределения интенсивности приводит к увеличению критической мощности и, как следствие, к увеличению расстояния до зарождения филамента [8].

Применительно к случаям, когда мощность импульса составляет сотни и более критических мощностей самофокусировки, развиваются методы создания упорядоченных структур филаментов. Это можно делать за счёт наложения масок с отверстиями. Если пропустить пучок через диафрагму для формирования супергауссова профиля импульса, то при многократном превышении критической мощности на границе импульса формируется нерегулярное кольцо филаментов [9]. В [10] численно показано, что создание периодической структуры подавляет случайный процесс возникновения филаментации, увеличивая предсказуемость его развития. Таким образом, за счёт создания предварительного распределения интенсивности в поперечном сечении пучка возможно улучшить качество прогнозирования возникновения филаментов в случае распространения в условиях флуктуаций показателя преломления на трассе вследствие атмосферной турбулентности или наличия аэрозолей.

Однако подобный метод уменьшает мощность выходного пучка лазерной системы по сравнению с мощностью используемого в ней лазера. Поэтому для сильных полей предпочтительной является фазовая модуляция пучка. Как правило, для этого используют или фазовые маски, или массивы микролинз.

В [11] показано, что при распространении двух импульсов с различной начальной фазой характер взаимодействия между ними определяется разностью фаз между филаментами. В случае, если разница фаз невелика ($\varphi < 0.5\pi$), филаменты притягивались друг к другу и со временем сливались в один. Чем больше фазовый сдвиг, тем более нестабильным оказывается его поведение. Также в этой работе был проведён расчёт взаимодействия двух импульсов, распространяющихся под небольшим углом друг к другу. Если этот угол невелик ($\theta = 0.01^\circ$) и импульсы синфазны, то образовывается филамент, распространяющийся по среднему направлению. В случае, если импульсы имеют разность фаз $\varphi = \pi$, то импульсы деструктивно взаимодействуют и филамент не возникает. Если же угол между направлениями распространения импульсов больше ($\theta = 0.1^\circ$), то зависимость характера взаимодействия от разницы фаз становится менее выраженной и после прохождения точки пересечения своих осей импульсы продолжают независимое распространение. Было показано, что характер взаимодействия зависит также от соотношения расстояния между филаментами и диаметра их энергетических резервуаров: именно их перекрытием и вызвано притяжение или отталкивание филаментов. По-видимому, похожие эффекты можно наблюдать и в случае большего количества импульсов, либо при разнице фаз в соседних элементах пучка с регулярной поперечной структурой. Исследованию особенностей в процессе самофокусировки пучков с регулярной поперечной структурой посвящена гл. 2 настоящей работы.

В большинстве статей по филаментации используются экспериментальные данные, полученные для Ti:Sapphire лазера с длиной волны излучения 800 нм и меньше. Временами исследования проводятся для импульсов на длине волны 1240 нм. Это накладывает определённые ограничения на параметры филаментов, которые можно получить. Как показывают аналитические оценки, с увеличением длины волны возможно увеличение пиковой интенсивности в филаменте, уменьшение концентрации плазмы и увеличение поперечных размеров филамента, что может быть полезно для различных приложений.

Изучению аналитической зависимости критической мощности самофокусировки для различных длин волн и параметров филаментов в воздухе посвящена работа [12]. В [13] приводятся данные о том, что нелинейный показатель преломления n_2 , характеризующий зависимость показателя преломления от интенсивности, зависит от длины волны:

$$n(I) = n_0 + n_2 I,$$

$$n_2(\lambda) = 3 + \frac{6.37 \cdot 10^5}{\lambda^2}. \quad (\text{B.1})$$

Это позволило автору, подставляя выражение для $n_2(\lambda)$ в формулу для критической мощности и раскладывая её в ряд Тейлора получить простую аппроксимацию зависимости $P_{cr}(\lambda)$:

$$P_{cr}(\lambda) = R_{cr} \frac{\lambda^2}{8\pi n_0 n_2(\lambda)}, \quad (\text{B.2})$$

$$P_{cr}(\lambda) = P_{cr}(\lambda^{800})(1 + 3.12 \cdot 10^{-3} \Delta\lambda + 2.36 \cdot 10^{-6} \Delta\lambda^2 - 1.82 \cdot 10^{-10} \Delta\lambda^3), \quad (\text{B.3})$$

где R_{cr} зависит от формы импульса, $P_{cr}(\lambda^{800}) = 2.4$ ГВт для воздуха, а $\Delta\lambda = (\lambda - \lambda^{800})$ измеряется в нанометрах. В работе приведены рассчитанные параметры филамента (расстояние филаментации, пиковая интенсивность, концентрация электронов, радиусы филамента и плазменного канала) для импульса с одинаковой энергией при длинах волн $\lambda = 248, 400, 600, 800, 1060$ и 1240 нм и эти данные хорошо согласуются с экспериментальными работами.

λ , нм	P/P_{cr}	z_{fil} , м	I_{fil} , 10^{13} , Вт/см ²	N_e^{fil} , 10^{16} см ⁻³	r_{fil} , мкм	r_{pl} , мкм
248	163.95	1.52	1.13	10.89	71.30	14.54
400	32.95	1.69	4.83	9.66	66.09	19.03
600	10.01	2.34	5.93	3.54	88.52	26.16
800	4.72	3.04	6.54	1.73	112.38	32.69
1060	2.44	4.23	6.66	0.82	145.44	39.63
1240	1.68	5.79	6.49	0.48	171.69	45.02

Таблица 1. Характеристики филамента и плазменного канала, полученные в [12].

Параметры импульса: $W = 8$ мДж, $\tau_0 = 100$ фс, $a_0 = 1.2$ мм, $I_0 = 10^{12}$ Вт/см².

Эти данные ограничены сверху длиной волны 1240 нм. Однако, уже не первое десятилетие идут исследования, направленные на создания мощных лазеров в среднем ИК-диапазоне. Одна из областей применения подобных лазеров — эксперименты по ускорению частиц. За счёт квадратичной зависимости ponderomotive сил от длины волны при одинаковой мощности лазер на длине волны около 10 мкм позволяет получать ускорение на два порядка большее, чем лазер ближнего ИК-диапазона. Одним из пионеров в этой области является Брукхэвенская национальная лаборатория (BNL) в США [14], где в 1995 году был построен CO_2 -лазер, генерирующий импульсы мощностью до 20 ГВт при длительности 50 пикосекунд.

Одной из проблем, стоящих перед разработчиками мощных лазеров — необходимость генерировать очень короткие импульсы, которые имеют широкий спектр. Для этого необходимо, чтобы рабочая среда имела очень широкий спектр усиления. Это достигается за счёт создания большого давления газа активной среды, обычно от нескольких до десятка атмосфер. Также возможен кропотливый подбор концентраций газов для усилителя (кроме CO_2 , в нём обычно присутствует азот и гелий, иногда водород).

Усиление происходит за счёт энергетических переходов между молекулами CO_2 и возможно изменять их вероятности за счёт использования в смеси молекул, состоящих из различных изотопов углерода и кислорода. Так, в [15] приведено описание усилителя, в котором использовалась смесь из пяти эквивалентных молекул, что позволяло добиться пятикратного усиления импульсов на длинах волн 9.6 и 10.4 микрон, характерных для CO_2 лазера ИК-диапазона. В этой же статье говорится о теоретической возможности сжимать полученные импульсы до длительности 500 фемтосекунд.

Использование описанного выше усилителя наравне с собственными разработками позволило создать в Санкт-Петербурге установку по генерации лазерных импульсов тераваттной мощности длительностью до 15 пикосекунд [16]. В статье указывается на неопубликованные материалы по уменьшению длительности импульсов до 6 пс и возлагаются большие надежды на дальнейшее развитие этой техники в области фемтосекундных длительностей и петаваттных мощностей.

Тем, кто глубоко интересуется данной тематикой, будет интересна статья [17], где описывается создание широкоапертурного CO_2 -усилителя сверхатмосферного давления, позволяющего получать импульсы мощностью $\simeq 100$ ГВт и длительностью $\simeq 100$ пс. В статье даются ценные указания по конструкции усилителя и решению технических проблем, возникающих при его создании.

Согласно последним данным [18], рекордом мощности можно считать импульсы мощностью 15 ТВт и длительностью 3 пикосекунды, полученные в августе этого года. Эта установка генерирует цуг импульсов с периодом 18 пикосекунд с различной энергией импульсов от 10 до 45 Дж.

Рассмотрим вопрос возможности филаментации лазерного излучения с длиной волны около 10 мкм. Согласно грубой оценке $P_{cr} \sim \lambda^{-2}$ или более точной оценке (В.2)-(В.3), можно ожидать критическую мощность самофокусировки для такого излучения в районе 350–650 ГВт. Как показано выше, генерация пикосекундных импульсов такой мощности вполне возможна. А также есть теоретические предпосылки для создания лазерных систем с тераваттной мощностью и длительностью импульсов до 500 фемтосекунд. Таким образом, должна быть возможность наблюдать филаментацию на длине волны 10 мкм в воздухе.

Цели работы

В дипломной работе рассмотрены две задачи о филаментации лазерного излучения в воздухе.

Первая задача связана с проблемой управления началом филаментации. В ней анализируется множественная филаментация лазерных импульсов с регулярной поперечной структурой. Рассматривается стационарная самофокусировка. Анализ включает в себя исследование различных режимов филаментации в зависимости от мощности пучка и разности фаз в соседних элементах структуры. Также исследуется влияние амплитудного шума в исходном пучке на этот процесс.

Целью второй части дипломной работы является анализ параметров филаментов на длине волны излучения CO_2 -лазера. Рассмотрена нестационарная задача с учётом нелинейной ионизации молекул воздуха и выполнен сравнительный анализ филаментации на длинах волн 0.8 и 10 мкм.

Часть расчётов проводилась на суперкомпьютере СКИФ МГУ «Чебышёв» и вычислительном кластере МЛЦ МГУ. В связи с этим одной из методических целей работы стал сравнительный анализ параллельных численных алгоритмов решения уравнения квазиоптики. В реальных условиях измерена скорость выполнения алгоритмов для метода Фурье преобразования и метода на основе разностных схем для различных размеров расчётной сетки и количества задействованных процессоров. Полученные результаты и описание алгоритмов приведены в приложении к дипломной работе.

Глава 1. Постановка задачи и численные методы её решения

1.1. Модель филаментации лазерных импульсов

В данной работе рассматривается как нестационарная задача распространения пучков (гл. 2), так и стационарная задача распространения мощных субпикосекундных импульсов в воздухе (гл. 3), где необходимо учитывать дисперсию и раздельное взаимодействие импульса с компонентами воздуха при плазмообразовании. Рассмотрим математическую постановку задачи в наиболее общем виде и последовательно сведём её к системам уравнений для конкретных случаев.

Распространение лазерных импульсов в прозрачной среде описывается уравнением для медленно меняющейся амплитуды электрического поля E [19, 20], являющегося следствием системы уравнений Максвелла в прозрачной среде с керровской нелинейностью и самонаведенной лазерной плазмой:

$$2ik_0 \frac{\partial E}{\partial z} = \left(1 - \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} \Delta_{\perp} E - \left(k_0 k'' \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(i^n n!)} \frac{\partial^n k}{\partial \omega^n} \Big|_{\omega_0} \frac{\partial^n E}{\partial t^n}\right) + \frac{2k_0^2}{n_0} \left[\left(1 - \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta n_k + \left(1 - \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t}\right) \text{Re}(\Delta n_p) + \text{Im}(\Delta n_p) \right] E - ik_0 \alpha E. \quad (1.1.1)$$

В этой формуле используются следующие обозначения: $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, Δn_k и Δn_p — добавки к показателю преломления, связанные с керровской и плазменной нелинейностями соответственно:

$$\Delta n_k(\vec{r}, z, t) = \frac{1}{2} n_2 I(\vec{r}, z, t) \quad (1.1.2)$$

$$\Delta n_p(\vec{r}, z, t) = -\frac{\omega_p^2}{2n_0(\omega_0^2 + \nu_c^2(\vec{r}, z, t))} \left(1 - i \frac{\nu_c(\vec{r}, z, t)}{\omega_0} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 + \nu_c^2(\vec{r}, z, t)}\right). \quad (1.1.3)$$

Здесь $\omega_p = \frac{4\pi N_e(\vec{r}, t)e^2}{m_e}$ — плазменная частота, ω_0 — центральная частота лазерного излучения, ν_c — частота соударений электрона с молекулами среды, N_e — концентрация свободных электронов, m_e — масса электрона, $I(\vec{r}, z, t) = \frac{c_0 n_0 \varepsilon_0}{2} |E(\vec{r}, z, t)|^2$ — интенсивность поля, c_0 — скорость света в воздухе, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ас/Вм — электрическая постоянная. Именно за счёт того, что знак плазменной нелинейности противоположен знаку керровской нелинейности, возможно динамическое равновесие этих двух эффектов в некоторой области пространства вдоль оси распространения импульса. Оператор $\frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t}$ соответствует поправкам следующего порядка к уравнению для медленно меняющейся амплитуды поля и называется оператором волновой нестационарности.

Поскольку в воздухе частота упругих столкновений электронов с молекулами ком-

понт воздуха существенно меньше лазерной частоты, а именно при характерной интенсивности в филаменте $5 \cdot 10^{13}$ Вт/см² частота столкновений $\nu_c = 4 \cdot 10^{12}$ с⁻¹, то есть $\nu_c \ll \omega_0 \simeq 10^{15}$ с⁻¹, то добавку в показатель преломления Δn_p можно записать в виде:

$$\Delta n_p(\vec{r}, z, t) = -\frac{\omega_p^2}{2n_0\omega_0^2} \quad (1.1.4)$$

Первое слагаемое в правой части (1.1.1) описывает дифракцию пучка, второе в скобках — дисперсию лазерного импульса во втором и высших приближениях теории дисперсии, третье — изменение показателя преломления среды под воздействием плазменной и керровской нелинейностей. Последнее слагаемое описывает поглощение энергии поля за счёт нелинейной ионизации молекул воздуха, где коэффициент поглощения выражается следующим образом:

$$\alpha = \sum_i \frac{m_i \hbar \omega_0}{I} \frac{\partial N_{ei}(\vec{r}, z, t)}{\partial t}, \quad (1.1.5)$$

где число m_i определяют число фотонов, необходимых для ионизации молекул i -ой компоненты воздуха. Суммирование проводится по всем компонентам воздушной смеси.

Концентрация электронов, входящая в выражение для плазменной нелинейности, зависит от времени следующим образом:

$$\frac{\partial N_{ei}}{\partial t} = R(I)(N_{0i} - N_{ei}) \quad (1.1.6)$$

Множитель $R(I)$ в правой части описывает скорость ионизации среды под действием мощного излучения, о модели которой будет рассказано ниже; N_{0i} — плотность нейтральных молекул среды,

1.2. Модель нелинейной ионизации

Рассмотрим вопрос об учёте нелинейной ионизации при рассмотрении филаментации лазерных импульсов. Ионизация является тем механизмом, который вызывает дефокусировку импульса при сильном усилении интенсивности вследствие керровской самофокусировки. Именно благодаря балансу между этими двумя физическими эффектами возможно продолжительное существование плазменного канала и области высокой плотности лазерной энергии.

В общем случае при распространении мощного излучения нужно учитывать следующие процессы: многофотонную и/или туннельную ионизацию, ударную ионизацию, и ударно-радиационную рекомбинацию. Как было сказано выше, при определении вклада лазерной плазмы Δn_{pl} в нелинейный показатель преломления в воздухе можно пренебречь частотой упругих столкновений электронов с молекулами воздуха по сравнению с частотой излучения. Таким образом, для расчёта концентрации плазмы достаточно использовать уравнения вида (1.1.6). Одним из первых вопросов нахождения скорости

ионизации, участвующей в этом уравнении, поднял в 1964 г. Л.В. Келдыш [21]. Им был введён параметр адиабатичности:

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_t} = \frac{\omega \sqrt{2mE_i}}{eE} = \frac{1}{2K_0F}, \quad (1.2.1)$$

где E_i — потенциал ионизации атомного уровня, E — амплитуда электрического поля, $F = E/E_a$ — приведённое поле, $K_0 = E_i/\hbar\omega$ — параметр многоквантовости процесса. Было показано, что если $\gamma \gg 1$, то ионизация носит многофотонный характер, а если $\gamma \ll 1$, то туннельный.

На данный момент наиболее популярными моделями для определения скорости туннельной ионизации являются модель Переломова-Попова-Терентьева [22] и модель Аммосова-Делоне-Крайнова [23]. Как указывается в [24], формула АДК выводится из формулы ППТ при определённых приближениях, а именно в предположении ионизации водородоподобного атома в основном состоянии, и является асимптотически точной в пределе слабого поля. Для использования обеих формул необходимы экспериментальные данные по скорости ионизации для нахождения эффективного заряда иона в случае модели АДК и эффективных квантовых чисел для модели ППТ.

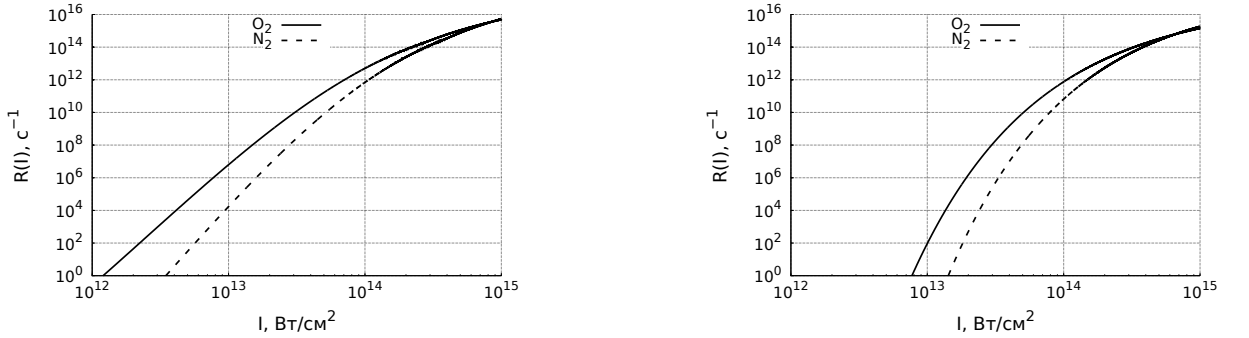


Рис. 1.2.1. Скорость ионизации O_2 и N_2 по модели ППТ для длины волны 800 нм (слева) и по модели АДК для длины волны 10 микрон (справа) в зависимости от интенсивности излучения.

Мною для моделирования использовались уже имеющиеся в распоряжении лаборатории данные для скорости ионизации по модели ППТ при $\lambda = 800$ нм (так как для характерных интенсивностей в филаменте $I \simeq 5 \cdot 10^{13}$ Вт/см² параметр $\gamma_{\lambda=800} \sim 1$ и модель ППТ хорошо описывает эту промежуточную область) и рассчитанные мной по модели АДК (хорошо описывает туннельную ионизацию при таких же интенсивностях) скорости ионизации для для длины волны 10 мкм. Согласно этой модели скорость ионизации газа полем лазерного импульса выглядит следующим образом:

$$R_{ADK}(I) = \sqrt{\frac{3n^*F}{\pi Z^3}} \frac{FD^2}{8\pi Z} \exp\left(-\frac{2Z^3}{3n^*F}\right), \quad (1.2.2)$$

где $n^* = Z^*/\sqrt{2E_i}$ — эффективной главное квантовое число, Z^* — эффективный заряд

иона, E_i — безразмерный потенциал ионизации (энергия связи), $D = \left(\frac{4eZ^{*3}}{Fn^{*4}} \right)^{n^*}$, а $F = \sqrt{I/I_a}$, где I_a — напряжённость атомного поля. Таким образом, скорость ионизации различных газов зависит от энергии связи E_i и эффективного заряда иона Z^* . Использовались следующие значения: $E_{i,N_2} = 15.576$ эВ, $Z_{N_2}^* = 0.9$, $E_{i,O_2} = 12.063$ эВ, $Z_{O_2}^* = 0.53$. Используемые зависимости скорости ионизации от интенсивности лазерного излучения приведены на рис. 1.2.1.

1.3. Методика численного моделирования

Для задач, рассматриваемых в следующих главах, влияние дисперсии высших порядков не учитывалось, поэтому уравнение (1.1.1) можно было упростить до следующего вида:

$$2ik_0 \frac{\partial E}{\partial z} = \Delta_{\perp} E - k_0 k'' \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{2k_0^2}{n_0} (\Delta n_k + \Delta n_p) E - ik_0 \alpha E \quad (1.3.1)$$

При этом Δn_k вычисляется по формуле (1.1.2), а Δn_p — по формуле (1.1.4). Для численного решения уравнения (1.3.1) перейдём к безразмерным переменным:

$$\tilde{z} = \frac{z}{L_{diff}}, \tilde{t} = \frac{t}{\tau_0}, \tilde{r} = \frac{r}{a_0}, \tilde{E} = \frac{E}{E_0}, \tilde{N}_{ei} = \frac{N_{ei}}{N_{0i}} \quad (1.3.2)$$

Подставляя выражения старых переменных через новые в (1.3.1)–(1.1.6) и опуская в записи тильды, получаем:

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} = \Delta_{\perp} E - \frac{L_{diff}}{L_{disp}} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + R|E|^2 E - R_I N_e E - i\alpha E \quad (1.3.3)$$

$$\begin{aligned} R &= R_{cr} \frac{P_0}{P_{cr}} \\ R_I &= \frac{N_0 e^2 a_0^2}{n_0 c^2 \varepsilon_0 m_e} \\ \frac{\partial N_{e,O}}{\partial t} &= R_O(I)(0.21 - N_{e,O}) \\ \frac{\partial N_{e,N}}{\partial t} &= R_N(I)(0.78 - N_{e,N}) \\ N_e &= N_{e,O} + N_{e,N} \end{aligned}$$

Здесь $L_{diff} = k_0 a_0^2$ — дифракционная длина, $L_{disp} = \frac{\tau_0^2}{|k''|}$ — дисперсионная длина во втором приближении теории дисперсии.

Уравнение (1.3.3) решалось с помощью метода расщепления по физическим факторам. В соответствии с этим методом уравнение (1.3.3) заменяется тремя уравнениями, каждое из которых решается на n -ом шаге вдоль координаты z :

1). дифракционное уравнение:

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} = \Delta_{\perp} E \quad (1.3.4)$$

2). дисперсионное уравнение:

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} = - \frac{L_{diff}}{L_{disp}} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (1.3.5)$$

3). нелинейное уравнение, учитывающее керровскую и плазменную нелинейности, а также потери энергии на нелинейную ионизацию:

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} = R|E|^2 E - R_I N_e E - i\alpha E \quad (1.3.6)$$

При решении этой цепочки уравнений в качестве начальных условий для первого уравнения берётся поле с предыдущего шага, а в качестве начальных условий для последующих уравнений — результат решения предыдущего. Решение последнего уравнения принимается за искомый результат. Для решения однотипных уравнений дифракции и дисперсии использовались метод на основе неявных схем (см. П.А–П.Б) и метод на основе преобразования Фурье (см. П.В). Уравнение (1.3.6) является локальным по поперечным координатам и его решение не представляет сложности:

$$E(\vec{r}, z + \Delta z, t) = E(\vec{r}, z, t) \cdot \exp \left(-\frac{i}{2} (R|E|^2 - R_I N_e - i\alpha) \Delta z \right) \quad (1.3.7)$$

1.4. Причины необходимости использования параллельных вычислений и способы снижения вычислительных затрат

Основные проблемы численного моделирования задачи филаментации лазерных импульсов связаны с многомасштабностью задачи. Поперечные масштабы пучка примерно на два порядка превосходят возникающие в нем структуры. В то же время размер расчётной сетки должен на порядок превосходить радиус пучка, чтобы границы сетки не отсекали существенные части пучка, а также чтобы иметь некоторую «буферную область», в которую могла бы расширяться низкоинтенсивная периферийная часть пучка, которая существенно влияет на процесс распространения филамента [4]. В противном случае также неизбежно возникновение краевых эффектов, приводящих к искажению решения. На диаметр филамента должно приходиться достаточное количество точек (не менее 10), иначе резкие перепады интенсивности в окрестности филамента будут содержать слишком высокие пространственные частоты, что приведёт к невыполнению критерия Найквиста, наложению частот и, как следствие, неадекватности получаемого решения. Как показывает практика, этот фактор является важным не только для метода решения, основанного на преобразовании Фурье, но и для остальных методов.

Таким образом, количество точек в поперечном сечении может достигать 10^4 по каждой поперечной координате. Количество временных слоев должно быть порядка 10^3 —

10^4 , а значит общее количество точек достигает величины порядка 10^{12} , а потребность в оперативной памяти — величины до 100 Гб. Даже в случае рассмотрения пучков, где временная координата не используется, при изучении сложных пространственных структур объём данных для одного шага по z доходит до 8 Гб. Это приводит к необходимости использовать для вычислений кластерные вычислительные системы, так как только их применение позволяет обрабатывать такие объёмы данных за приемлемое время.

Но, к сожалению, не всегда есть возможность выполнять вычисления на суперкомпьютерах, и в этом случае является актуальной задача создание более эффективной расчётной схемы. Для этого можно предложить использование неравномерных сеток, как по поперечным координатам, так и по временной в случае исследования распространения импульсов. При исследовании различия в процессе филаментации импульсов различных длин волн (гл. 3) применялась следующая расчётная сетка: область изменения каждой переменной разбивалась на зоны от начала координат к краям сетки, и в каждой следующей зоне шаг сетки увеличивался в 2 раза. Минимальное значение шага было в центральной зоне, где располагалась основная энергия импульса. Использование неравномерной сетки автоматически приводит к выбору в качестве метода решения уравнений дифракции и дисперсии метод на основе разностных схем.

В случае, когда мощность импульса невелика по сравнению с критической мощностью самофокусировки, и при распространении импульса возникает только один осесимметричный филамент на оси импульса, возможно уменьшить число измерений за счёт введения цилиндрических координат. В этом случае

$$\Delta_{\perp x,y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \simeq \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (1.4.1)$$

а уравнение (1.3.3) принимает вид:

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \frac{L_{diff}}{L_{disp}} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + R|E|^2 E - R_I N_e E - i\alpha E \quad (1.4.2)$$

Этот способ уменьшения вычислительных затрат также был применён при рассмотрении задачи о распространении лазерного импульса в воздухе, что позволило снизить количество точек расчётной сетки до $10^7 - 10^8$. Для получения консервативной схемы, в которой не возникает ложных источников поля, связанных с неравномерным шагом, в работе применяется вариационный подход (см. П.Б).

1.5. Апробация численных схем

В качестве теста для программ численного решения поставленных задачи были проведены расчёты для начальных условий, при которых уравнение квазиоптики решается аналитически. Для гауссова пучка можно получить следующее решение:

$$E(\vec{r}, z) = \frac{E_0}{1 + z/iL_{diff}} \cdot \exp\left(\frac{x^2 + y^2}{2a_0^2(1 + z/iL_{diff})} - ikz\right), \quad (1.5.1)$$

или для интенсивности на оси пучка:

$$I(\vec{r} = 0, z) = \frac{I_0}{1 + z^2/L_{diff}^2}. \quad (1.5.2)$$

Для проверки соответствия численных расчётов теоретической формуле были проведены вычисления для различного количества точек на сетке: $N = 1024, 2048, 4096, 8192$. Степени двойки брались из соображения наилучшего ускорения при использовании быстрого преобразования Фурье для решения уравнения квазиоптики на равномерной сетке. Большое количество точек связано с тем, что для проводимых вычислительных экспериментов с амплитудно-модулированными гауссовыми пучками необходимо удерживать большое количество Фурье-гармоник. Во время тестов выбирался шаг по z такого же порядка, как и в исследовательских расчётах и смотрелось, на каком расстоянии результаты теоретического и численного расчётов начинают существенно различаться.

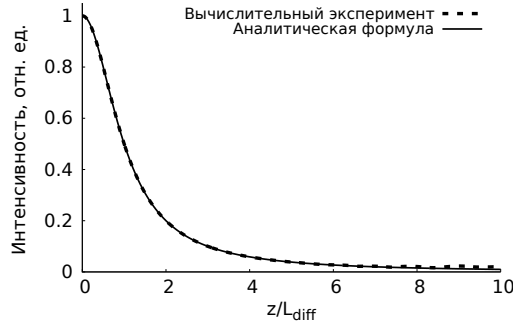


Рис. 1.5.1. Зависимость пиковой интенсивности в пучке от пройденного расстояния. Тест для программы решения уравнения дифракции, использующей метод на основе преобразования Фурье. Размер сетки составлял 10 радиусов пучка, $N = 4096$.

Как видно на рис. 1.5.1, видимая на глаз ошибка возникает только при $z \geq 5L_{diff}$, при том что за это время было пройдено 50000 шагов по z . Этой точности достаточно для проведения вычислительного эксперимента. Основной вклад в эту ошибку вносит особенность метода Фурье, в котором расчётная область периодизируется и пучок начинает интерферировать со своими копиями в соседних «виртуальных» областях. При проведении эксперимента влияние этого эффекта удалось уменьшить за счёт введения искусственного затухания в периферийных областях расчётной области.

Вторым тестом была проверка формулы Марбургера [25] для расстояния до нелинейного фокуса пучка, полученная обобщением результатов численных расчётов и хорошо согласующаяся с экспериментом. Согласно ей расстояние от плоскости $z = 0$ до точки, где интенсивность превышает начальную в 10 раз (такую величину превышения использовал Марбургер при определении нелинейного фокуса) выражается формулой:

$$z_{fil} = \frac{0.367 L_{diff}}{\left(\left(\sqrt{\frac{P_0}{P_{cr}}} - 0.852 \right)^2 - 0.0219 \right)^{1/2}} \quad (1.5.3)$$

В используемых безразмерных переменных эта формула имеет вид:

$$z_{fil} = \frac{0.367}{\left(\left(\sqrt{\frac{R}{R_{cr}}} - 0.852 \right)^2 - 0.0219 \right)^{1/2}}, \quad (1.5.4)$$

где R_{cr} — критический параметр нелинейности, зависящий от формы импульса. Так, для гауссового импульса $R_{cr}^{Gauss} \simeq 3.77$, а минимальное значение $R_{cr}^{Townes} \simeq 3.72$ принимает для солитонного решения — моды Таунса [26].

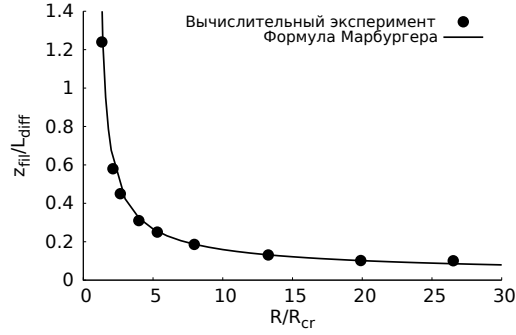


Рис. 1.5.2. Зависимость расстояния до нелинейного фокуса от параметра R , сравнение с формулой Марбургера. Тест для программы решения уравнения дифракции, использующей метод на основе преобразования Фурье. Размер сетки составлял 10 радиусов пучка, $N = 4096$.

Коэффициент детерминации $\rho^2 \equiv \frac{\sum_i (z_{fil,i}^{Experiment} - z_{fil,i}^{Marburger})^2}{\sum_i z_{fil,i}^{Experiment} - z_{fil,i}^{Experiment}}$ между формулой и полученными результатами получился равным 0.993, что даёт основания считать используемый алгоритм пригодным для численного решения уравнения (1.3.3) при выбранных параметрах сетки.

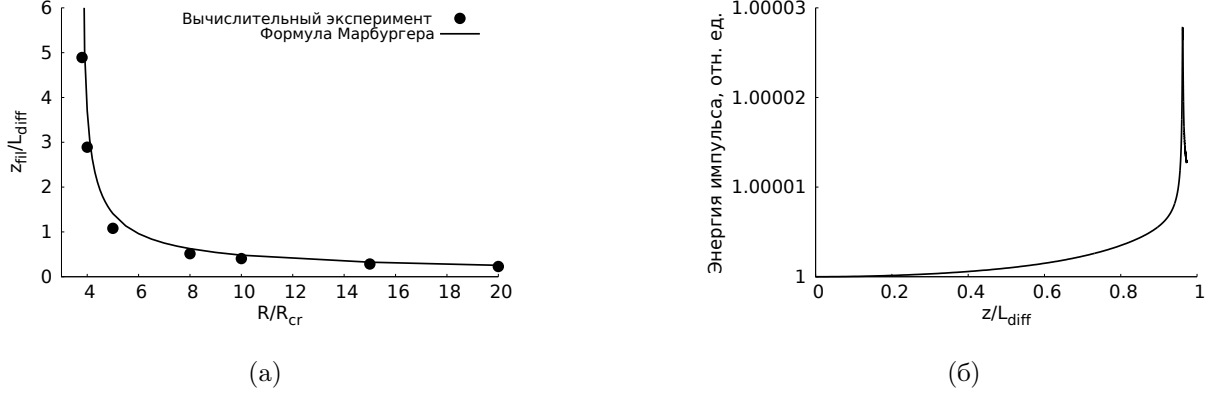


Рис. 1.5.3. Результаты тестов программы для расчёта распространения импульсов, использующей метод на основе разностных схем. Проверялось соответствие формуле Марбургера (а) и сохранение полной энергии импульса при распространении (б).

Тесты на точность были также проведены для программы, использующейся для решения уравнения квазиоптики метод на основе разностных схем. Как видно из рис. 1.5.3.а, имеется довольно хорошее соответствие. Небольшая систематическая ошибка связана с тем, что в вычислительном эксперименте положение нелинейного фокуса определялось по точке 50-кратного увеличения интенсивности. Кроме проверки формулы Марбургера и уменьшения пиковой интенсивности импульса при наличии дифракции и дисперсии второго порядка в вычислительных экспериментах также контролировалась полная энергия импульса. Результаты этого теста представлены на рис. 1.5.3.б. Как видно, энергия сохраняется с точностью до 10^{-5} от первоначального значения. Кроме того, небольшую ошибку вносит численное интегрирование интенсивности при использовании неравномерной сетки.

Глава 2. Самофокусировки пучков с регулярной поперечной структурой

2.1. Постановка задачи

В данной главе рассматривается самофокусировка неограниченных пучков, описываемых формулами:

$$E(x, y, z = 0) = \cos(\alpha_m x) \cos(\alpha_m y) \quad (2.1.1)$$

$$E(x, y, z = 0) = |\cos(\alpha_m x) \cos(\alpha_m y)| \quad (2.1.2)$$

Коэффициент α_m в этих формулах задаётся таким образом, чтобы на полуширине расчётной области укладывалось m периодов косинуса, что понадобится для согласования граничных условий при моделировании неограниченных пучков с периодической поперечной структурой:

$$\alpha_m = \frac{2\pi}{L} m \quad (2.1.3)$$

Далее рассматривается процесс филаментации структурированных пучков с гауссовским поперечным профилем, описываемых формулами:

$$E(x, y, z = 0) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right) \cos(\alpha_m x) \cos(\alpha_m y) \quad (2.1.4)$$

$$E(x, y, z = 0) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right) |\cos(\alpha_m x) \cos(\alpha_m y)| \quad (2.1.5)$$

Пучки вида (2.1.1) и (2.1.4) будем условно называть противофазными, так как в соседних пичках импульса фаза волны отличается на π , а пучки вида (2.1.2) и (2.1.5) — синфазными, так как фаза пучка одинакова во всех точках поперечного сечения пучка.

В данной задаче исследовался начальный этап филаментации, что позволило учитывать в вычислениях только дифракцию по пространству и керровскую нелинейность.

2.2. Самофокусировка неограниченных пучков

Как было показано в гл. 1, алгоритм, использующий БПФ, применим для исследования распространения бесконечно-широких поперечно-периодических пучков. Единственное, о чём нужно помнить, это равенство граничных условий на противоположных сторонах выбранной расчётной области.

В качестве рассматриваемой области был выбран квадрат, а поле описывалось формулами (2.1.1)–(2.1.2) при значении $m = 1$.

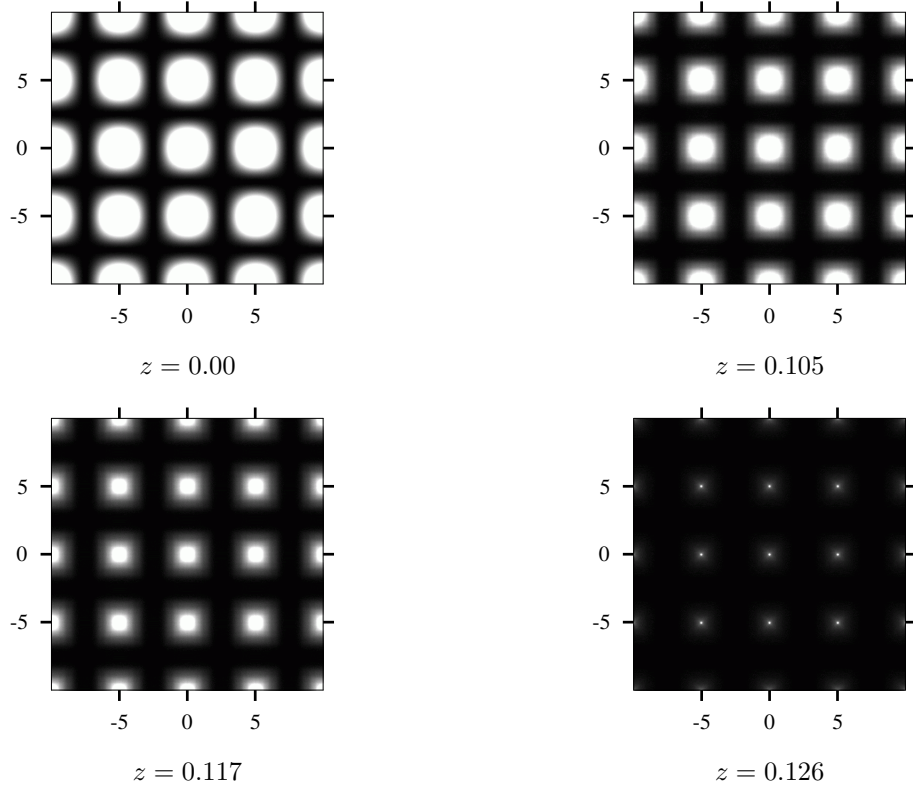


Рис. 2.2.1. Начальное распределение и процесс самофокусировки отдельных пичков неограниченного синфазного пучка. $R = 100 \simeq R_{cr}$.

Если в среде присутствует нелинейность, то каждый из пичков подвергается самофокусировке, что видно на рис. 2.2.1. По формуле Марбургера с R_{cr}^{Gauss} для гауссового пучка, $R = 100$ было получено расстояние филаментации, равное 0.095, но в численном расчёте на этом расстоянии интенсивность не превысила начальную и в два раза. Это можно связать с тем, что из-за близости филаментов они взаимодействуют друг с другом, отдаляя точку возникновения филамента, а также с изменением величины R_{cr} вследствие изменения формы пучка.

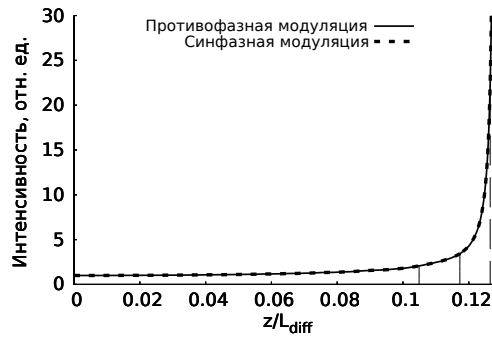


Рис. 2.2.2. Увеличение пиковой интенсивности неограниченного пучка с регулярной поперечной структурой при приближении к нелинейному фокусу. Вертикальные линии соответствуют расстояниям, распределения интенсивности на которых показаны на рис. 2.2.1.

Если рассматривать синфазный пучок, описываемый формулой (2.1.2), то процесс возникновения филаментов при такой же мощности практически не отличается от противофазного случая. Скорее всего это связано не с особенностями модуляции, а с дефектом метода из-за того, что в синфазном случае есть излом в амплитуде поля, который приводит к большой ширине спектра, а значит не совсем корректным использование дискретного преобразования Фурье для решения уравнения дифракции.

2.3. Самофокусировка ограниченных пучков с гауссовским поперечным профилем

Понятно, что довольно сложно создать периодическую структуру с шириной, достаточной для того, чтобы считать пучок «бесконечным». Намного проще сделать ограниченный пучок, соответствующий формулам (2.1.4) и (2.1.5). Рассмотрим, как распространяется подобный пучок в среде с керровской нелинейностью, будут ли возникать филаменты и как периодическая структура пучка влияет на процесс образования филамента.

Для исследования распространения импульса на большие расстояния и для уменьшения эффекта «отражения» импульса от границ расчётной области (следствие применения дискретного преобразования Фурье) полуширина области выбиралась равной десяти радиусам огибающей импульса, $L = 10$. Число периодов косинуса на полуширину окна $m = 16$, а значит в формулах (2.1.4)-(2.1.5) $\alpha = \alpha_{16} = 2\pi \frac{16}{10}$.

Попробуем оценить критическое значение параметра R для такого пучка. Прямым интегрированием можно показать, что при одинаковой пиковой интенсивности энергия пучка с регулярной поперечной структурой почти в 4 раза меньше, чем энергия пучка с гауссовой огибающей такого же радиуса:

$$\left. \frac{W}{W_\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{16}} = 4 \left. \frac{e^{2\alpha^2}}{(e^{\alpha^2} + 1)^2} \right|_{\alpha=\alpha_{16}} \approx 4. \quad (2.3.1)$$

Это означает, что можно ожидать $R_{cr}^* \approx 15$. Однако, в случае противофазных возмущений (2.1.4) вычислительный эксперимент даёт следующий результат: за счёт дифракции структура начинает расплываться от центра импульса вследствие асимметрии пиков структуры. В результате этого процесса возникают четыре области концентрации энергии, разбегающиеся от начала координат в стороны. Возникновение именно четырёх пучков связано с геометрией задачи. Таким образом, критическое значение необходимо увеличить в 4 раза: $R_{cr}^{outphase} = R_{cr}^{gauss} \cdot 4 \cdot 4 = 60.3$.

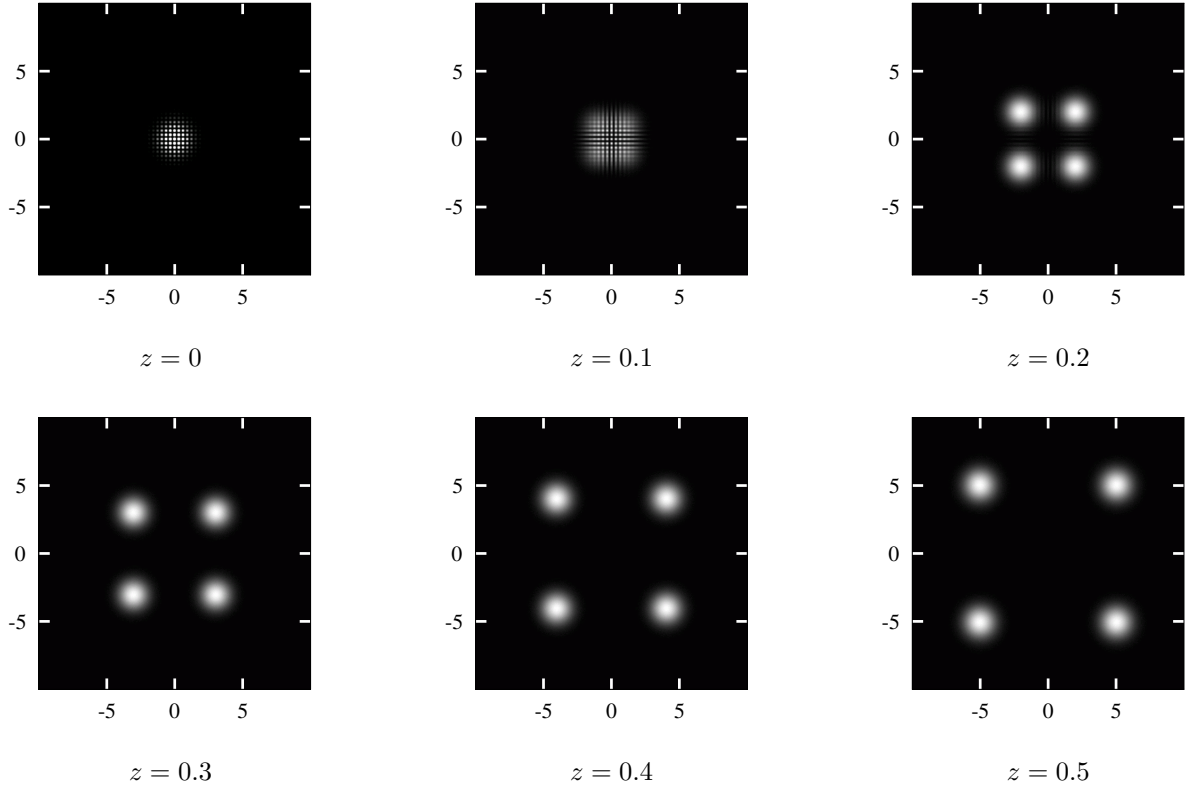


Рис. 2.3.1. Процесс распада противозадающего пучка на четыре в случае отсутствия нелинейности. Начальное распределение для наглядности показано в увеличенном виде.

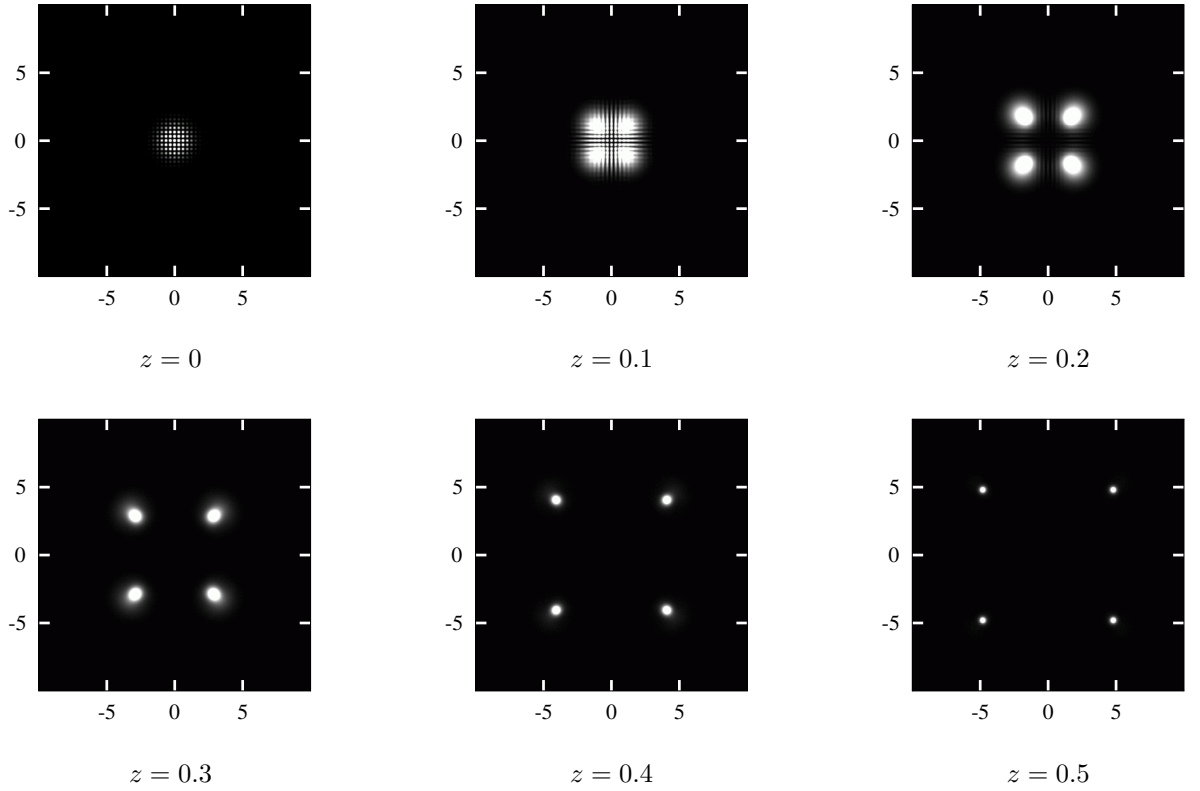


Рис. 2.3.2. Процесс образования филаментов при $R = 100$ в случае противозадающего модулированного пучка. Начальное распределение для наглядности показано в увеличенном виде.

В случае, если мощности импульса не хватает для возникновения четырёх филаментов (рис. 2.3.1), пучки убегают от начала координат, испытывая дифракционную расходимость.

Как видно из рис. 2.3.1–2.3.2, образование четырёх пучков либо филаментов связано с дифракцией начального распределения на начальном этапе распространения. На основе полученных данных были рассчитаны величины расхождения пучков для приведённых случаев без нелинейности и при $R = 100$. Характерный диаметр исходного пучка $a = 1\text{см}$, длина волны $\lambda = 800\text{нм}$. Отсюда $z_d = ka^2 = \frac{2\pi}{\lambda}a^2 = 785\text{м}$. В соответствии с приведёнными выше данными для $R = 100$ при $\tilde{z} = 0.5$ получим $z = 392\text{м}$, а расстояние между пучками $\Delta_{R=0} \simeq 5.0\text{см}$ и $\Delta_{R=100} \simeq 4.9\text{см}$. Таким образом, для прогнозирования положения филаментов можно воспользоваться линейным уравнением, решение которого с помощью метода на основе преобразования Фурье можно получить для любого z за один шаг, так как различие между положениями максимумов в линейном и нелинейном случаях составляют всего несколько процентов.

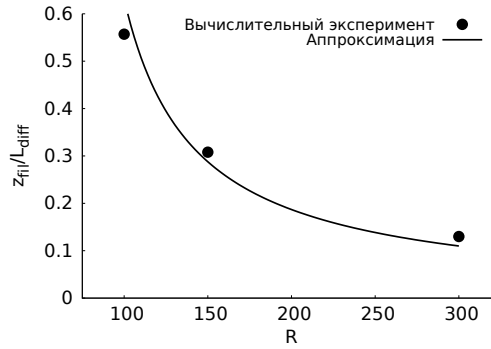


Рис. 2.3.3. Зависимость расстояния до нелинейного фокуса от параметра нелинейности R в случае противифазно модулированного пучка.

На основе проведённых вычислений была построена зависимость расстояния филаментации от параметра R , показанная на рис. 2.3.3. Из аппроксимации точек по формуле Марбургера $R_{cr} = 66.2 \pm 1.8$. Как видно, полученные результаты хорошо согласуются с полученным выше теоретическим значением $R_{cr}^{outphase} = 60.3$, а расхождение можно объяснить начальным этапом расплывания периодической структуры перед формированием энергетических сгустков, когда пиковая интенсивность импульса падает по сравнению с начальной.

Вторым вариантом начальной модуляции пучка является синфазная модуляция, соответствующая формуле (2.1.5). В этом случае можно ожидать другую зависимость расстояния филаментации от R , а также проявления эффекта Тальбо на начальной стадии распада пучка.

Проведённый расчёт показал, что поведение пучка в синфазном случае сильно отличается от противифазного. Вместо деления исходного пучка на четыре одинаковых, от центрального пучка отделяется лишь малая часть энергии импульса, а большая часть

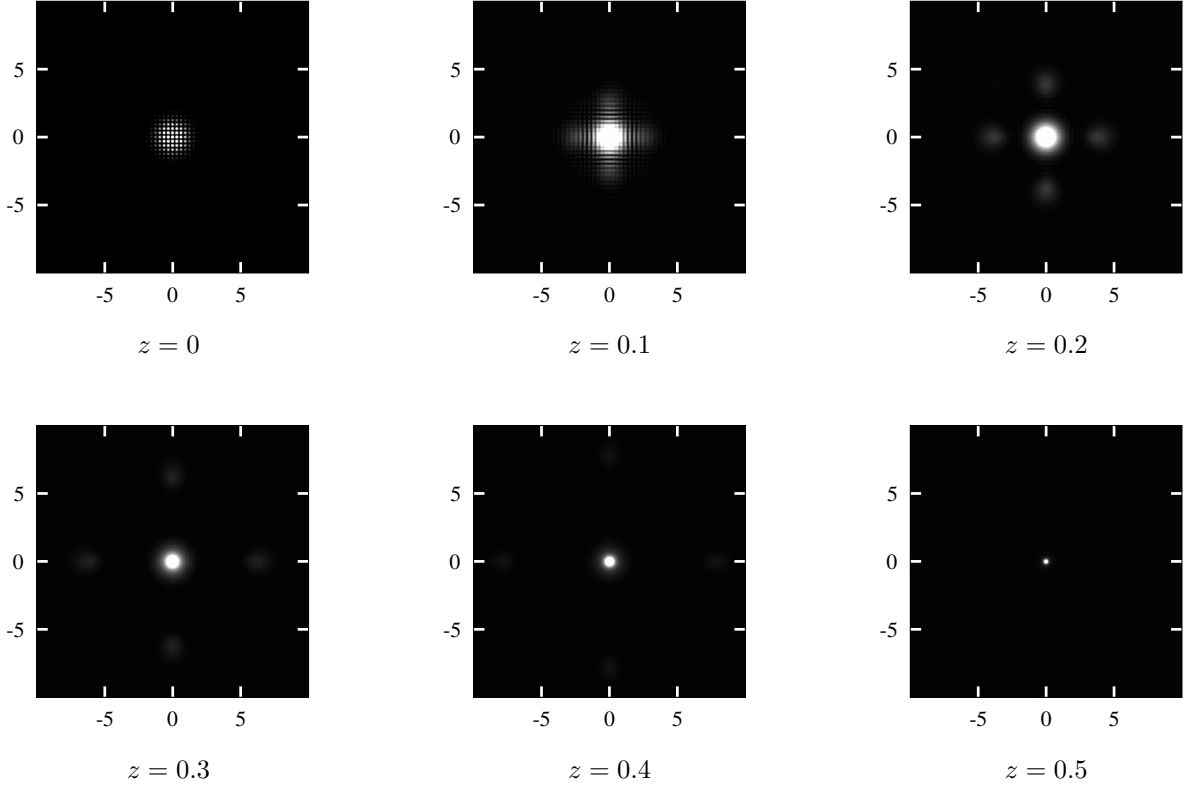


Рис. 2.3.4. Процесс образования филаментов при $R=50$ в случае синфазно модулированного пучка.

формирует один импульс в начале координат. Соответственно, уменьшается мощность, при которой из периодически модулированного гауссова пучка возникает филамент. Этапы возникновения филамента при $R = 50$ показаны на рис. 2.3.4. Значение $R = 50$ выбрано для иллюстрации по следующим соображениям: за счёт того, что в синфазном случае возникает один филамент, критическое значение R для него меньше. В противофазном случае при $R = 50$ мощности не хватает для возникновения филаментов. Таким образом, введением фазовой модуляции в пучок можно добиваться повышения или, наоборот, понижения критической мощности для пучка.

Кроме управления филаментацией, синфазный случай интересен с точки зрения проявления эффекта Тальбо [27] на начальном этапе распространения импульса. Этот эффект заключается в том, что пучок с периодической поперечной структурой и постоянной начальной фазой способен восстанавливать поперечное распределение поля через определённые равные расстояния вдоль оси распространения. Пользуясь теорией дифракции Френеля, можно показать, что расстояние Тальбо выражается в безразмерных переменных следующим образом:

$$L_{Talbot} = \frac{b^2}{\pi}, \quad (2.3.2)$$

где b — период поперечной структуры.

Будем предполагать, что в центре импульса величина гауссовой огибающей не изменяется (только в таком предположении она будет периодической), и рассчитаем расстояние Тальбо. При $m = 16$ и $L = 10$ получаем период структуры $b = L/2m = 10/32$ и расстояние Тальбо $L_{Talbot} = 0.0311$. Из расчёта получилось значение $L_{Talbot} = 0.030 \div 0.033$, что говорит о применимости вышеприведённых суждений при описании начального этапа распространения гауссового пучка с периодической поперечной структурой. Процесс расплывания и восстановления начального распределения при распространении до точки $z = 0.03$ представлен на рис. 2.3.5.

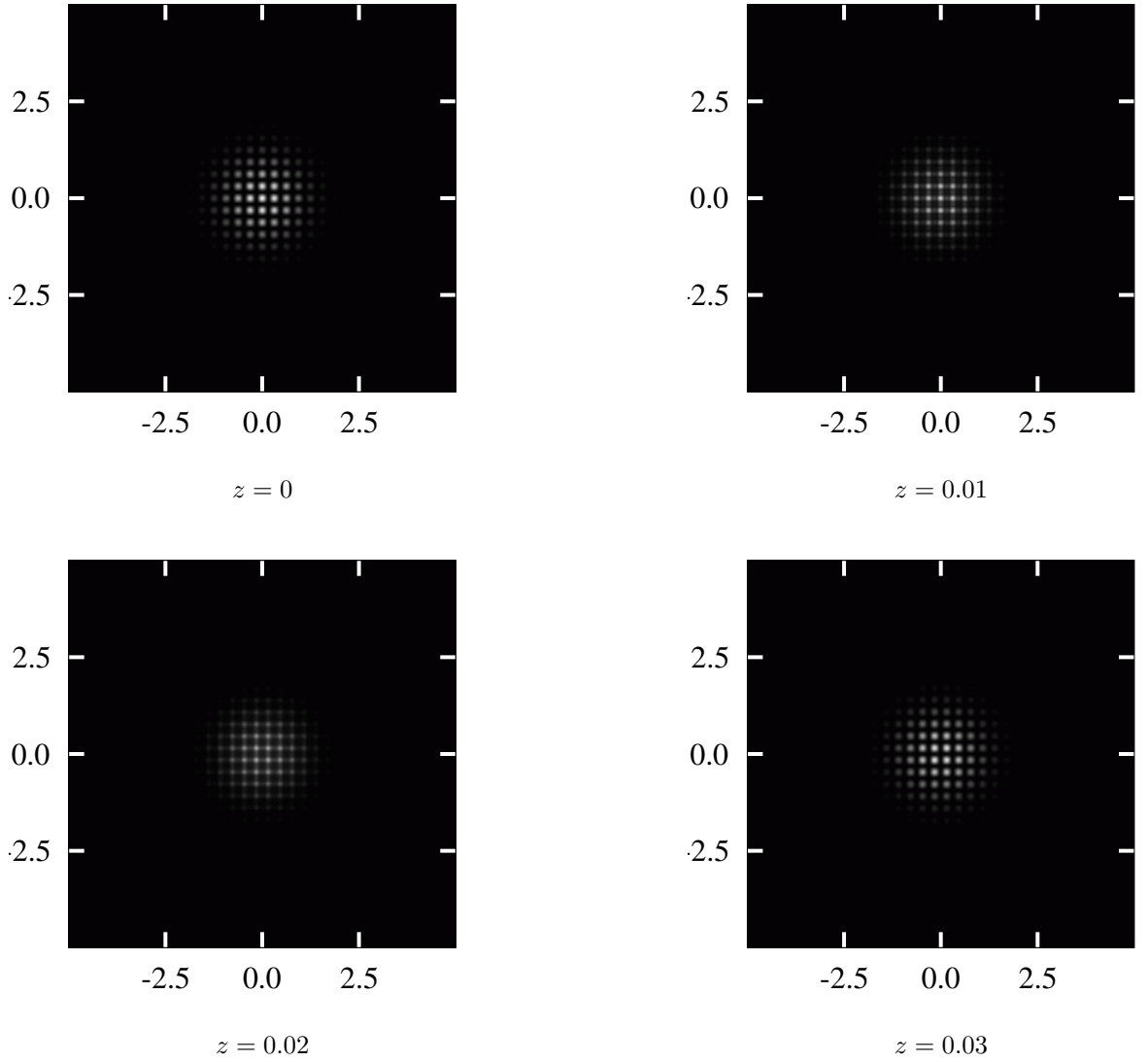
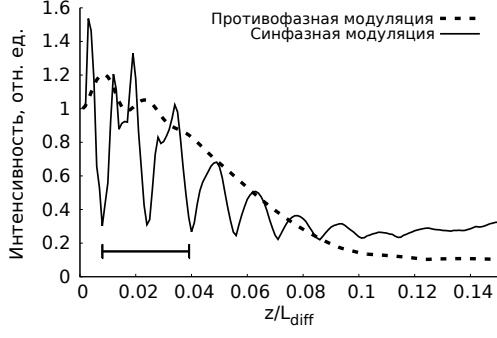
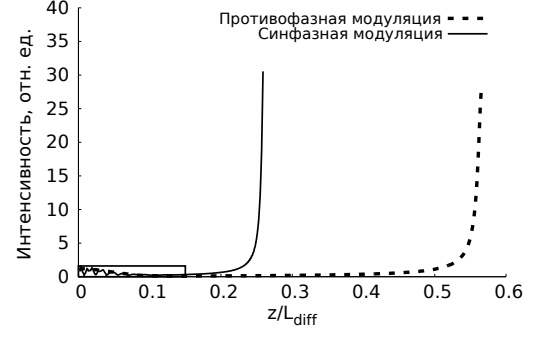


Рис. 2.3.5. Иллюстрация самовоспроизведения распределения поля (эффекта Тальбо) на начальном этапе распространения синфазно модулированного пучка.



(а)



(б)

Рис. 2.3.6. Сравнение зависимости пиковой интенсивности от расстояния для противозафазного и синфазного случаев. На графике (а) показан начальный этап распространения пучка, где в случае синфазного пучка проявляется эффект Тальбо. Длина масштабного отрезка на графике (а) равняется расстоянию Тальбо.

На рис. 2.3.6 приведена зависимость пиковой интенсивности в пучке от пройденного расстояния. Видно, что при одинаковом значении параметра R в синфазном случае фокусировка наступает значительно раньше, чем в противозафазном случае. На увеличенном фрагменте отчётливо видны периодические изменения пиковой интенсивности на начальном этапе распространения синфазного пучка, связанные с эффектом Тальбо. Период этих колебаний в два раза меньше расстояния Тальбо, так как рассматривается интенсивность, а не комплексные компоненты поля. В противозафазном случае этот эффект не проявляется.

Как показали расчёты, формула Марбургера напрямую уже не применима для синфазного пучка, скорее всего из-за длительной начальной фазы распада импульса, которую следует каким-то образом учесть в формуле. Для аппроксимации полученных данных использовалась изменённая мною формула Марбургера, учитывающая небольшое увеличение расстояния до нелинейного фокуса за счёт линейных процессов, имеющих место на начальном этапе распространения пучка:

$$z_{fil} = \frac{0.367L_{diff}}{\left(\left(\sqrt{\frac{R}{R_{cr}}} - 0.852 \right)^2 - 0.0219 \right)^{1/2}} + \delta z. \quad (2.3.3)$$

С помощью формулы (2.3.3) удаётся получить более точное совпадение результатов вычислительного эксперимента и аналитических расчётов, чем при использовании формулы Марбургера. Экспериментальные данные и аппроксимация приведены на рис. 2.3.7.

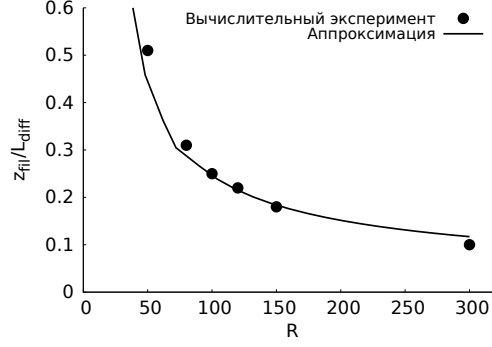


Рис. 2.3.7. Зависимость расстояния до нелинейного фокуса от параметра нелинейности R в случае синфазно модулированного пучка. Для аппроксимации использовалась модифицированная формула Марбургера.

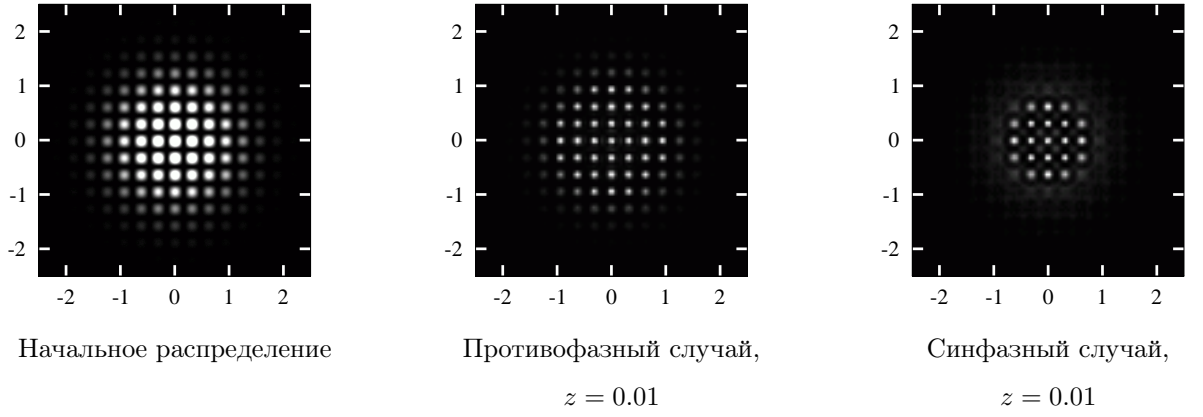


Рис. 2.3.8. Филаментация отдельных пичков импульса при $R = 1000$. В этом случае мощность пучка превышает критическую в 66.5 раз, а в центральном пичке содержится приблизительно 2 критические.

Как в случае противофазной модуляции, так и в случае синфазной возможно достичь такой мощности исходного импульса, что критическая мощность будет превышена уже в каждом из пичков в некоторой центральной области пучка. В этом случае каждый из них будет образовывать филамент, как видно из рис. 2.3.8. Происходит независимая фокусировка нескольких пичков из центральной области пучка, тогда как пички на периферии испытывают дифракционное распыление. К сожалению, в рамках этой задачи было невозможно рассмотреть дальнейшее изменение пространственной конфигурации, так как из-за большой критической мощности и разнице в расстоянии до нелинейного фокуса для различных пичков необходимость в учёте нестационарности и ионизации появляется до того, как периферийные пички начнут фокусироваться.

2.4. Влияние случайных возмущений

Все полученные выше результаты получены в предположении отсутствия шума. Однако лазерный пучок обычно имеет начальные флуктуации амплитуды и фазы. Для

моделирования этих возмущений можно использовать случайный амплитудный экран с заданной спектральной корреляционной функцией.

Радиус корреляции экрана, определяющий характерный размер неоднородностей, обратно пропорционален полуширине κ_0 спектральной корреляционной функции. Рассматривалась гауссова спектральная корреляционная функция, так как она отражает случайные шумовые флуктуации на выходе лазерной системы:

$$F_\phi(\kappa_x, \kappa_y) \sim \exp\left(-\frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{\kappa_0^2}\right) \quad (2.4.1)$$

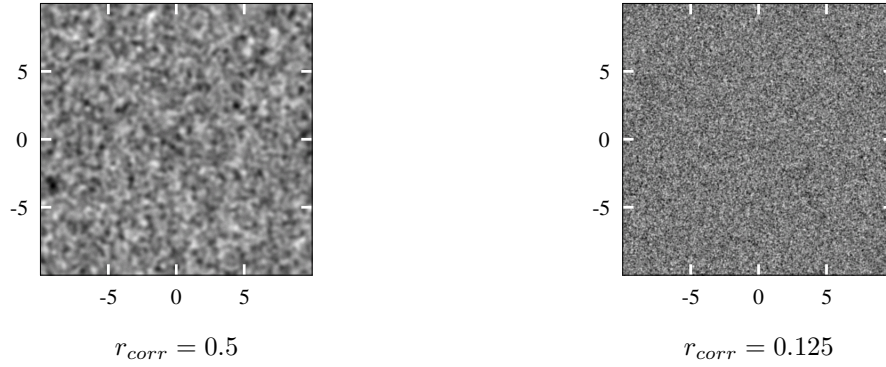


Рис. 2.4.1. Примеры случайных экранов, сгенерированных с использованием метода корреляционных функций.

На рис. 2.4.1 приведены примеры рассчитанных по методу [28] экранов (визуализировалась их действительная часть, используемая для моделирования случайных амплитудных возмущений). Для моделирования использовался второй из приведённых экранов, с $r_{corr} = 0.125$, при размере одного пикселя в импульсе $a \simeq 0.3$, т.е. пространственный масштаб флуктуаций был меньше характерного размера поперечной структуры импульса.

Для моделирования шума начальное распределение поля задавалось в виде:

$$E(x, y, z = 0) = (1 + \beta \cdot \text{Re}\phi(x, y)) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right) \cos(\alpha_m x) \cos(\alpha_m y), \quad (2.4.2)$$

где $\phi(x, y)$ — случайный экран с единичной дисперсией, а β определяет относительную величину флуктуаций.

Проведённые вычисления показали, что при $\beta = 0.1$ эти возмущения заметно не влияют на формирование филамента. Так как на начальном этапе структура всё равно расплывается для образования одного (в синфазном случае) или четырёх (в противофазном) импульсов, из которых и развивается филамент, то эти флуктуации замазываются и не влияют на последующую филаментацию.

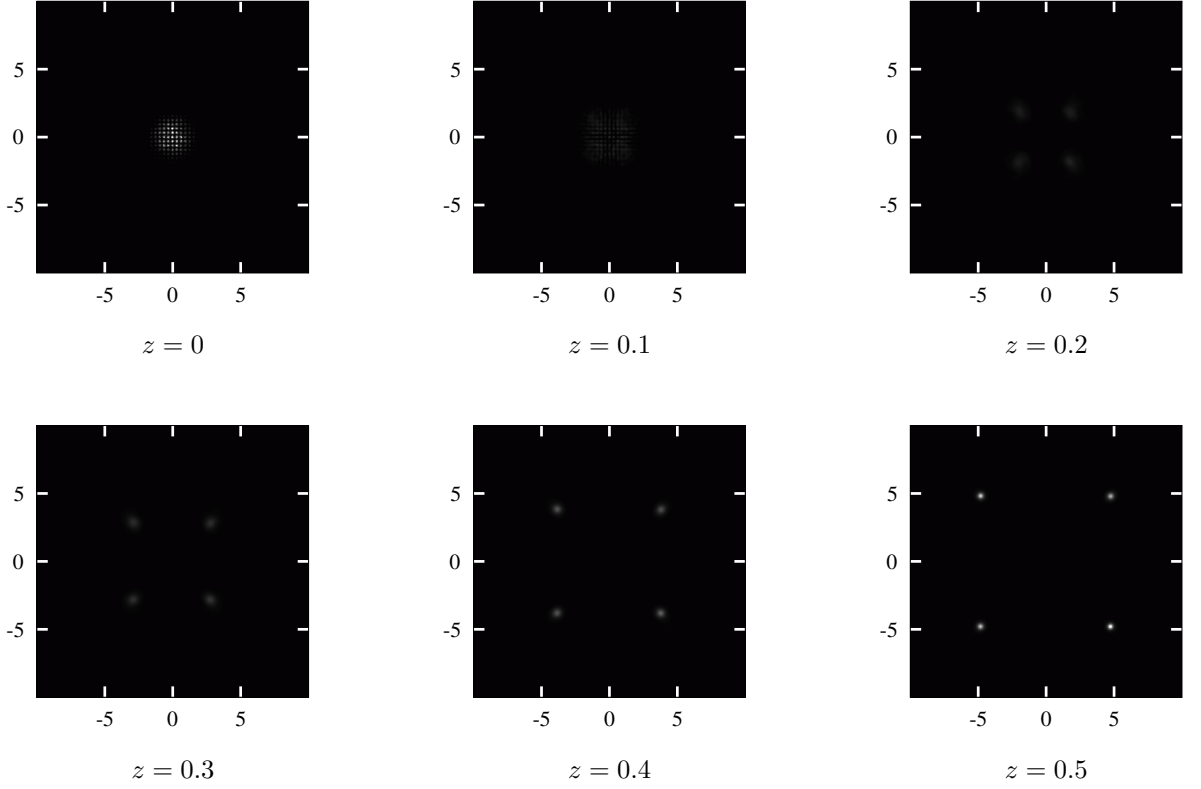


Рис. 2.4.2. Формирование четырёх филаментов в противофазном случае для относительной амплитуды флуктуаций равной 0.5.

При увеличении величины β до 0.5, когда исходное распределение интенсивности значительно изменяется (рис. 2.4.2), можно получить небольшое изменение в поведении пучка, однако, в конечном счёте, на развитие филаментов это также не влияет.

2.5. Выводы

Рассмотрена возможность применения пучков с регулярной поперечной структурой для управления филаментацией лазерного импульса.

Разработана программа, позволяющая исследовать распространение пучков в среде без дисперсии с учётом дифракции и керровской нелинейности. Программа позволяет размещать расчётные данные на нескольких вычислительных узлах вычислительного комплекса (небольшого кластера или суперкомпьютера), что позволяет использовать её для сеток любого нужного размера.

Исследована филаментация гауссового пучка с регулярной поперечной структурой и различными фазовыми соотношениями между соседними элементами этой структуры. Проведена оценка критической мощности для такого пучка и показана её справедливость для случая синфазного пучка. Обнаружено, что в случае противофазного пучка критическая мощность самофокусировки примерно в 4 раза больше, чем в синфазном случае. Это связано с тем, что в этом случае исходный импульс образует четыре

филамента. Таким образом, если область значений мощности пучка, при которой в синфазном случае филамент образуется, а в противофазном – нет.

Показано, что при одинаковых остальных параметрах в случае синфазной модуляции филамент возникает значительно раньше, а в случае противофазной модуляции возникает четыре филамента, разбегающиеся от оси распространения исходного импульса. Величину расхождения филаментов можно оценивать на основе линейного уравнения, решение которого не требует больших вычислительных затрат.

Показано, что возможна ситуация, когда критическая мощность превышает критическую для нескольких пиков в центральной части импульса, и тогда они независимо фокусируются, слабо взаимодействуя друг с другом.

Рассмотрено влияние случайных амплитудных возмущений начального пучка на процесс возникновения филамента и показано, что при относительной амплитуде шума $\beta \lesssim 0.5$ они значительно не влияют на процесс формирования филаментов.

Результаты проведённых исследований были доложены на конференциях [29] и [30].

Глава 3. Сравнительный анализ филаментации субпикосекундных лазерных импульсов на длинах волн 800 нм и 10 мкм в воздухе

3.1. Постановка задачи

Как было рассказано во введении, на данный момент активно разрабатываются тераваттные лазеры, генерирующие импульсы длительностью до нескольких пикосекунд в среднем ИК-диапазоне. CO_2 -лазеры с усилителями сверхатмосферного давления имеют две длины волны генерации в окрестности 10 мкм. Оценка мощности самофокусировки для этих длин волн говорит о возможности филаментации генерируемых такими установками импульсов. Данная глава посвящена исследованию филаментации импульсов на длине волны 800 нм и сравнению с характеристиками филамента для излучения на длине волны 10 мкм.

Для рассмотрения подобной задачи необходимо решать нестационарное уравнение 1.3.1, включающее учёт дифракции, дисперсии, керровской нелинейности и образования плазмы. При этом необходимо рассматривать 3+1 координату: x , y , время t в движущейся вместе с импульсом системе координат и эволюционную координату z . Из-за выбранного небольшого превышения критической мощности $P = 1.5P_{cr}$ и рассмотрения одиночного филамента в отсутствии шумов было решено использовать осесимметричное приближение 1.4.2, позволяющее рассматривать задачу с учётом только одной поперечной координаты. Это позволило, в том числе, уменьшить время расчётов.

Форма пикосекундных импульсов CO_2 -лазера близка к гауссовой и не сильно изменяется от использования усилителей высокой мощности в установках по генерации тераваттных импульсов [15]. В соответствии с этим амплитуда поля для коллимированного импульса считалась равной:

$$E(\vec{r}, z = 0, t) = E_0 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau_0^2}\right) \quad (3.1.1)$$

3.2. Влияние дисперсии импульса на процесс филаментации

Для написанной программы был проведён ряд тестов. Проверялась корректная работа алгоритмов по расчёту дифракции и дисперсии, соответствие получаемых результатов формуле Марбургера и сохранение энергии импульса. Результаты этих двух тестов приведены ранее на рис. 1.5.3. Также было проведено исследование того, как сильно влияет отсутствие дисперсии второго порядка на процесс префиламентации.

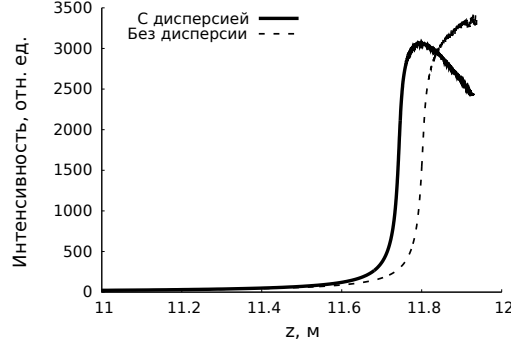


Рис. 3.2.1. Зависимость пиковой интенсивности в импульсе от расстояния распространения при учёте и без учёта дисперсии второго порядка. Параметры импульса: $\lambda = 800$ нм, $2r_0 = 2.5$ мм, $2\tau_0 = 750$ фс, $P = 1.5P_{cr}$.

Как видно из рис. 3.2.1, отсутствие дисперсии не сильно влияет на процесс префиламентации, а проявляется только в небольшом сдвиге точки возникновения филамента. Однако, без учёта дисперсии интенсивность продолжает нарастать слишком стремительно после прохождения этой точки, тогда как при учёте дисперсии пиковая интенсивность достигает своего максимума и начинает уменьшаться. Это связано с тем, что дисперсия является тем физическим механизмом, за счёт которого возможно ограничение временного сжатия импульса. Так же, как при создании стабильного филамента возникает баланс между фокусирующим действием керровского эффекта и дефокусирующего влияния возникающей плазмы, так и баланс между укорочением импульса за счёт поглощения энергии в хвосте импульса при взаимодействии его с плазмой ограничено влиянием дисперсии. Таким образом, для ускорения расчётов возможно не учитывать дисперсию на этапе префиламентации (а точнее учитывать её с помощью аналитических приближений), однако при дальнейшем повышении интенсивности и возникновении плазмы пренебрегать дисперсией нельзя. Для упрощения программы и получения более точных результатов все расчёты проводились с учётом дисперсии второго порядка на всём пути распространения импульса.

3.3. Характеристики филаментов на длине волны 800 нм

Большая часть как теоретических, так и экспериментальных работ по филаментации выполняются с использованием излучения на длине волны 800 нм. Таким образом для сравнения филаментации излучения на разных длинах волн удобно взять за основу именно эту длину волны. Кроме того, это позволяет проверить корректность работы программы, сравнив получающиеся результаты с уже известными. В качестве образца брались параметры импульса, указанные в кандидатской диссертации [31].

	z_{fil} , м	I_{fil} , 10^{13} Вт/см ²	N_e^{fil} , 10^{16} см ⁻³	r_{fil} , мкм	r_{pl} , мкм
а)	2.48	11.5	9.2	43.4	12.4
б)	2.51	12.7	9.4	40.2	9.3

Таблица 2. Сравнение пиковых параметров филамента и плазменного канала с известными результатами при филаментации на длине волны 800 нм. В строке а) таблицы указаны уже известные результаты, в строке б) — вновь рассчитанные. Параметры импульса: $\tau_0 = 100$ фс, $r_0 = 0.1$ см, $P/P_{cr} = 3.93$, $L_{diff} = 7.85$ м.

В таблице 2 приведены результаты сравнения пиковых характеристик филамента и плазменного канала с полученными ранее. Здесь z_{fil} — положение максимума интенсивности по оси z , I_{fil} — пиковая интенсивность в филаменте, N_e^{fil} — пиковая концентрация свободных электронов, r_{fil} — радиус филамента, измеренный по уровню e^{-1} от потока интенсивности (флюенса) в точке достижения пиковой концентрации электронов, r_{pl} — радиус плазменного канала, измеренный по уровню e^{-1} от концентрации электронов после прохождения импульса. Количественное совпадение результатов подтверждает возможность использования разработанной программы для исследования филаментации лазерных импульсов.

Для подготовки к сравнению процесса филаментации излучения на длине волны 800 нм и 10 мкм были выбраны другие параметры импульса. На данный момент длительность импульсов CO_2 -лазеров не достигает 100 фс, а может быть не меньше 500 фс по уровню $\frac{1}{2}$ от пиковой интенсивности [15], поэтому было решено использовать для сравнения импульсы длительностью $2\tau_0 = 750$ фс. При подборе параметров по возможности оставлялись неизменными большинство характеристик исходных импульсов. Сравнение проводилось при одинаковом превышении критической мощности, $P = 1.5P_{cr}$, а для сохранения неизменной дифракционной длины при $\lambda = 800$ нм диаметр импульса брался равным $2r_0 = 2.5$ мм, а для $\lambda = 10$ мкм — $2r_0 = 8.8$ мм. При этих параметрах дифракционная длина равнялась 12.2 м.

На графиках ниже приведены основные характеристики импульса в зависимости от пройденного расстояния в момент возникновения филамента. Кроме наблюдения за описанными выше пиковыми характеристиками филамента проводилось наблюдение за радиусом и длительностью пика интенсивности для контроля того, чтобы он не становился меньше нескольких ячеек расчётной сетки. Для того, чтобы можно было говорить об адекватности результатов численного эксперимента, необходимо было задавать шаг расчётной сетки таким, чтобы на всех шагах размер неоднородностей поля превышал шаг более, чем в два раза. Для этого в центральной области сетки с минимальным шагом он брался равным $h_r = 0.004$ и $h_t = 0.0005$.

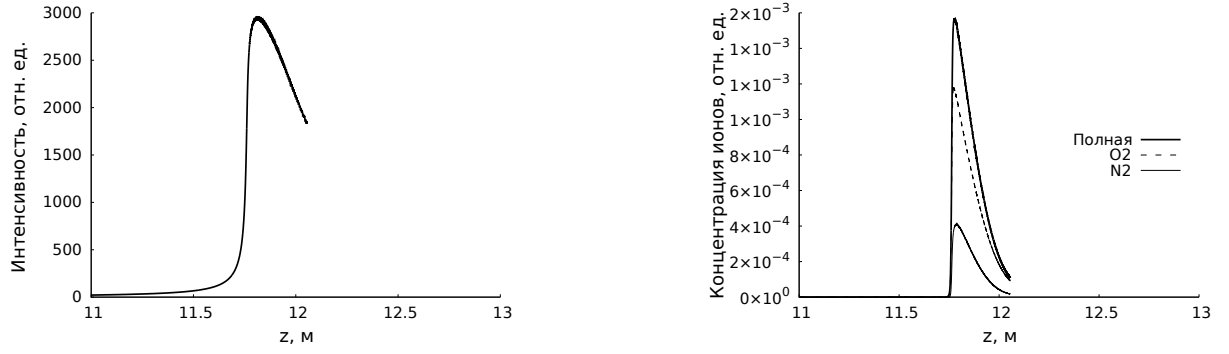


Рис. 3.3.1. Зависимости пиковой интенсивности и пиковой концентрации ионов от пройденного расстояния при филаментации излучения на длине волны 800 нм.

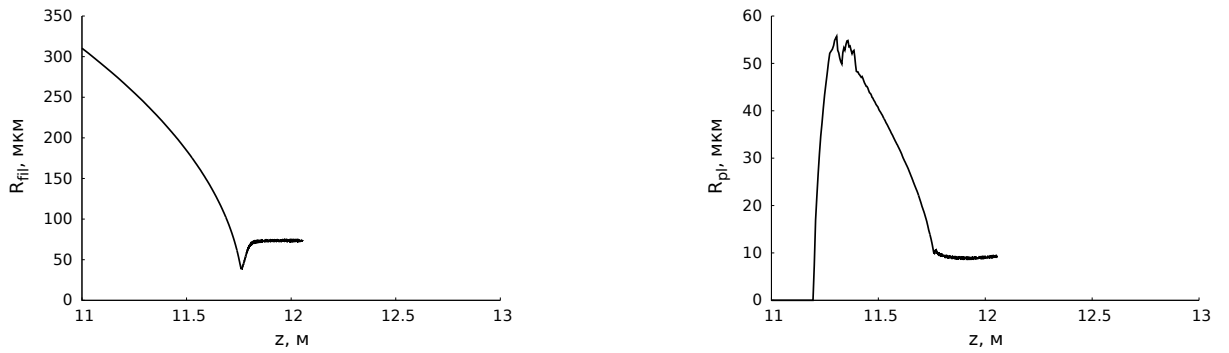


Рис. 3.3.2. Зависимости радиуса филамента и плазменного канала от пройденного расстояния при филаментации излучения на длине волны 800 нм.

Как видно из рис. 3.3.1, длина филамента по уровню e^{-1} по интенсивности заведомо больше 50 см. Если же рассчитать дифракционную длину для импульса с радиусом 50 мкм (это радиус образовавшегося филамента, что видно на рис. 3.3.2), то мы получим:

$$L_{diff}^{fil} = \frac{2\pi}{800 \cdot 10^{-9}} \cdot (50 \cdot 10^{-6})^2 \text{ м} = 1.96 \text{ см.} \quad (3.3.1)$$

Таким образом, можно говорить об образовании филамента, а не об обычном случае острой фокусировки пучка.

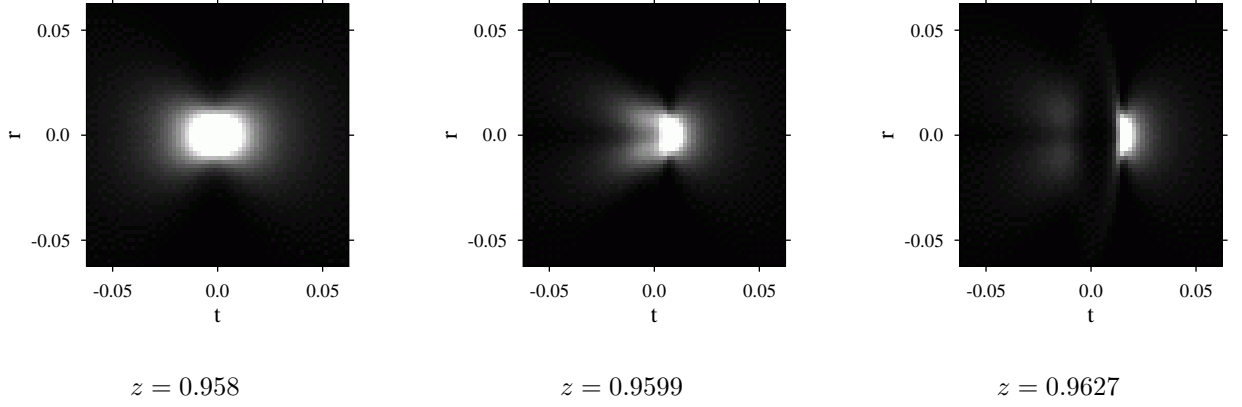


Рис. 3.3.3. Характерные распределения интенсивности в импульсе в процессе филаментации излучения на длине волны 800 нм. Переменные обезразмерены на начальную длительность и радиус импульса, соответственно.

Характерные распределения интенсивности в импульсе приведены на рис. 3.3.3. На нём можно наблюдать первоначальное сжатие центральной части импульса под действием керровской фокусировки и дальнейшее изменение пространственно-временной формы за счёт взаимодействия с индуцированной плазмой. На последней иллюстрации рис. 3.3.3 видно образование области повышенной интенсивности позади основного пика интенсивности импульса. В дальнейшем может произойти рефокусировка этой области и образование второго субимпульса. К сожалению, используемая модель не позволяет провести расчёт до этого момента, так как не учитывается дисперсия высших порядков и влияние операторов $\frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t}$, из-за чего задний фронт импульса становится слишком крутым и перестаёт разрешаться на сетке с любым самым малым шагом.

3.4. Филаментация импульсов на длине волны 10 мкм

Было проведено сравнение процесса филаментации и характеристик филамента при длине волны 800 нм и 10 мкм. Импульс излучения на длине волны 10 мкм брался со следующими параметрами: $2\tau_0 = 750$ фс, $P = 1.5P_{cr}$, $2r_0 = 8.8$ мм. Как было сказано выше, другой радиус импульса был взят для того, чтобы дифракционный масштаб остался неизменным. Были получены пиковые величины интенсивности, концентрации электронов, радиусы филамента и плазменного канала как функции расстояния распространения.

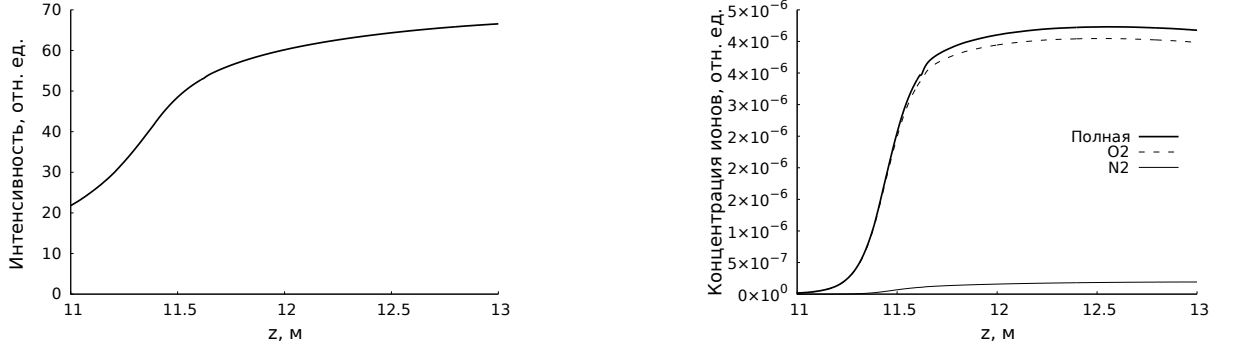


Рис. 3.4.1. Зависимости пиковой интенсивности и пиковой концентрации ионов от пройденного расстояния при филаментации излучения на длине волны 10 мкм.

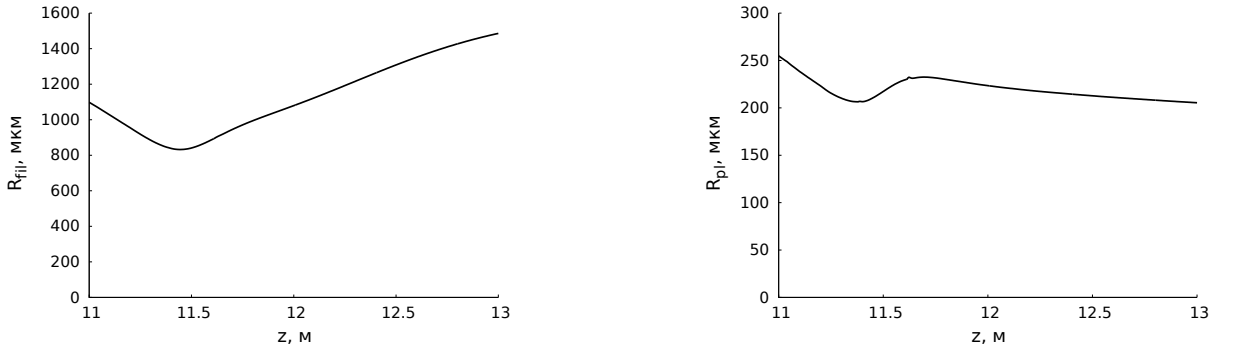


Рис. 3.4.2. Зависимости радиуса филамента и плазменного канала от пройденного расстояния при филаментации излучения на длине волны 10 мкм.

Как видно из рис. 3.4.1-3.4.2, с увеличением длины волны увеличиваются диаметры филамента и плазменного канала, тогда как концентрация ионов в плазме уменьшается. Это можно качественно объяснить следующим образом: в момент, когда прекращается рост интенсивности нелинейные добавки к показателю преломления, вызванные керровской нелинейностью и плазменной дефокусировкой, должны скомпенсировать друг друга:

$$\Delta n_k(z_{fil}) = \frac{1}{2}n_2 I_{fil} = \frac{\omega_p^2}{2n_0\omega_0^2} = -\Delta n_{pl}(z_{fil}) \quad (3.4.1)$$

Если считать, что n_2 и I_{fil} не сильно зависят от длины волны, а мощность излучения в филаменте равна ровно одной критической мощности, можно получить следующие оценки [12]:

$$N_e^{fil}(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^2} \quad (3.4.2)$$

$$r_{fil} \sim \lambda \quad (3.4.3)$$

$$r_{pl} \sim \lambda \quad (3.4.4)$$

По данным [12], численные результаты для филаментации на длинах волн 248–1240 нм хорошо описываются этими зависимостями. Однако, как можно убедиться по рис. 3.4.3, полученные в настоящей работе характеристики филаментации на длине волны 10 мкм этими зависимостями описываются не очень точно. На графиках приведены аппроксимации по формулам (3.4.2), построенные по ранее известным данным [31] и добавлена точка для вновь полученных параметров при филаментации излучения на длине волны 10 мкм.

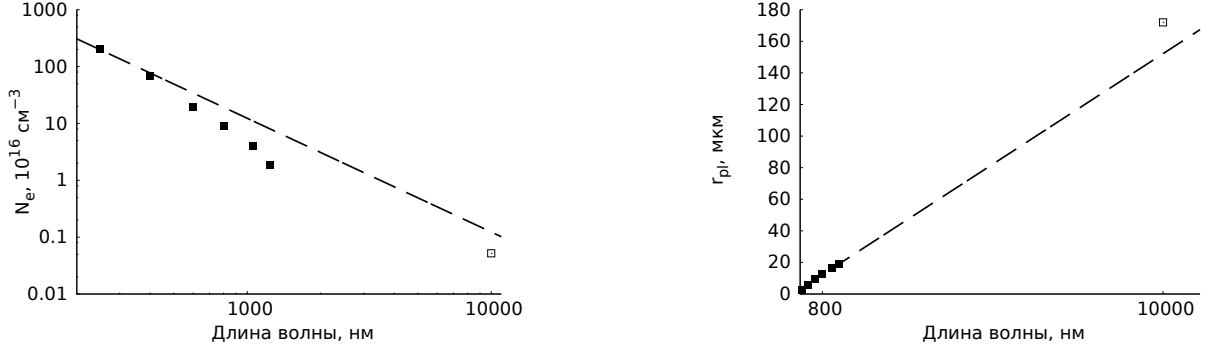


Рис. 3.4.3. Сравнение полученных характеристик плазменного канала филамента на длине волны 10 мкм с уже известными данными по длинам волн 248–1240 нм. На графиках заполненными точками отмечены данные из [31], кривые аппроксимируют их по формулам (3.4.2), а пустая точка обозначает полученные численные результаты.

Также при изменении длины волны меняется характер плазмообразования: если на длине волны 800 нм кислородных ионов было в среднем в два раза больше, чем азотных, то при филаментации излучения на длине волны 10 мкм кислородные ионы преобладают. Для сравнения основные характеристики филамента и плазменного канала при одинаковой дифракционной длине, длительности импульса и одинаковым превышением критической мощности приведены в таблице 3.

λ , нм	r_0 , см	z_{fil} , м	I_{fil} , Вт/см ²	$N_e^{fil}(N_e^O + N_e^N), 10^{16}$ см ⁻³	r_{fil} , мкм	r_{pl} , мкм
800	0.125	11.77	$8.91 \cdot 10^{13}$	4.4 (3.3 + 1.1)	38.2 (68.4)	8.8 (8.7)
10000	0.442	11.52	$4.12 \cdot 10^{13}$	≈ 0.01 (0.01 + 0.0005)	839 (1213)	198 (205)

Таблица 3. Сравнение расстояния филаментации, пиковой интенсивности, пиковой концентраций плазмы, и радиусов филамента и плазменного канала при филаментации излучения на длинах волн 800 нм и 10 мкм. Для радиусов также в скобках указаны средние от точки пиковой интенсивности до точки падения интенсивности в e^{-1} раз. Параметры импульса: $\tau_0 = 375$ фс, $P/P_{cr} = 1.5$, $L_{diff} = 12.17$ м.

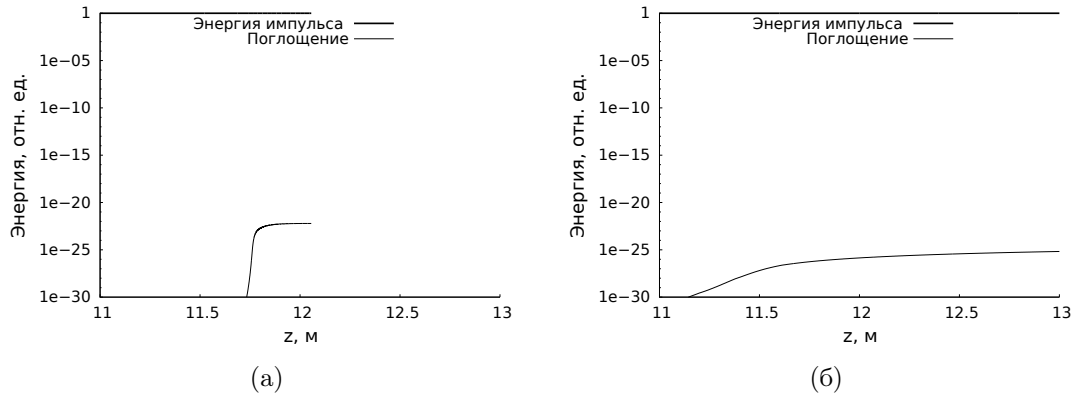


Рис. 3.4.4. Зависимости полной энергии импульса и потерь на поглощение от пройденного расстояния при филаментации излучения на длине волны 800 нм (а) и 10 мкм (б).

Отдельно хочется отметить, что, как показали проведённые расчёты, учёт поглощения излучения генерируемой плазмой не является обязательным на этом этапе расчёта. Поглощённая энергия на несколько порядков меньше, чем энергия, ушедшая из расчётной области, и в сумме они также практически не влияют на полную энергию импульса.

3.5. Выводы

Для обоснования необходимости рассмотрения нестационарной задачи было показано влияние дисперсии второго порядка на распространение филамента до точки достижения первого максимума интенсивности. В ходе расчётов также было получено, что для исследования распространения сформировавшегося филамента необходимо учитывать дисперсию высших порядков и волновую нестационарность.

Проведены тестовые эксперименты, показывающие высокую точность используемых алгоритмов на этапе префиламентации и до достижения пиковой интенсивности. Проведено сравнение получающихся результатов для длины волны 800 нм с известными из литературы и показано их количественное совпадение.

Для двух импульсов с одинаковыми длительностями, дифракционной длиной и превышением пиковой мощности над критической при длинах волн 800 нм и 10 мкм проведено сравнение характеристик возникающего филамента и плазменного канала. Показано, что при увеличении длины волны излучения диаметр филамента и плазменного канала увеличиваются, тогда как концентрация плазмы уменьшается. Это поведение предсказывается аналитическими зависимостями и экспериментальными данными, полученными для диапазона длин волн 248–1240 нм, что не позволяют получить количественного соответствия теоретического значения с полученным в эксперименте для длины волны 10 мкм. Показано, что при изменении длины волны излучения увеличивается процентное содержание ионов кислорода в образующейся плазме.

Заключение

В работе рассмотрена возможность применения пучков с регулярной поперечной структурой для управления филаментацией лазерного импульса и проведено сравнение параметров филаментов, образующихся при самофокусировке импульсов на длинах волн 800 нм и 10 мкм.

В частности, исследована филаментация гауссового пучка с регулярной поперечной структурой и различными фазовыми соотношениями между соседними элементами этой структуры.

Показано, что при одинаковых остальных параметрах в случае синфазной модуляции возникает один филамент, а в случае противофазной модуляции возникают четыре филамента, разбегающиеся от оси распространения исходного импульса. Величина углового расхождения филаментов определяется линейной дифракцией пучка на начальном этапе распространения. Обнаружено, что в случае противофазного пучка критическая мощность самофокусировки примерно в 4 раза больше, чем в синфазном случае. Это связано с тем, что в этом случае исходный импульс образует четыре филамента. Таким образом, существует область значений мощности пучка, при которой в синфазном случае филамент образуется, а в противофазном — нет. Также возможен режим филаментации, при котором критическая мощность превышает уже в каждом пиксе некоторой центральной области импульса, и в таком случае они фокусируются независимо друг от друга.

Рассмотрено влияние случайных амплитудных возмущений начального пучка на процесс возникновения филамента и показано, что при относительной амплитуде шума $\beta \lesssim 0.5$ они значительно не влияют на процесс формирования филаментов.

В качестве второй задачи была рассмотрена филаментация осесимметричного импульса и разработана расчётная программа, учитывающая дифракцию, керровскую нелинейность, дисперсию второго порядка и ионизацию с учётом раздельной концентрации ионов кислорода и азота в воздухе. Показана необходимость учёта дисперсии на этапе распространения филамента. В ходе расчётов также было получено, что для исследования распространения сформировавшегося филамента необходимо учитывать дисперсию высших порядков и, особенно, операторы волновой нестационарности.

Проведено сравнение получающихся результатов для длины волны 800 нм с известными из литературы и показано их количественное совпадение. Для двух импульсов с одинаковыми длительностями, дифракционной длиной и превышением пиковой мощности над критической при длинах волн 800 нм и 10 мкм проведено сравнение характеристик возникающего филамента и плазменного канала. Показано, что при увеличении длины волны излучения диаметр филамента и плазменного канала увеличиваются, тогда как концентрация плазмы уменьшается. Это поведение предсказывается аналитическими зависимостями и экспериментальными данными, полученными для диапазона

длин волн 248–1240 нм, что не позволяют получить количественного соответствия теоретического значения с полученным в эксперименте для длины волны 10 мкм. Показано, что при изменении длины волны излучения увеличивается процентное содержание ионов кислорода в образующейся плазме.

Полученные результаты могут служить основой для продолжения изучения филаментации излучения CO_2 -лазера среднего ИК-диапазона. Эта область длин волн на данный момент мало исследована и может нести в себе новые интересные физические эффекты и практические приложения.

Для проведения вычислительных экспериментов был написан комплект программ для расчёта стационарной и нестационарной задачи распространения лазерного импульса в воздухе. В связи с тем, что часть расчётов проводилась на суперкомпьютере СКИФ МГУ «Чебышёв» и вычислительном кластере МЛЦ МГУ, в процессе написания этих программ были разработаны методы распараллеливания задачи для проведения расчётов на вычислительных кластерах и проведён сравнительный анализ параллельных численных алгоритмов решения уравнения квазиоптики. Показано, что алгоритм на основе разностных схем имеет лучшие показатели эффективности и масштабируемости, чем метод на основе преобразования Фурье.

Список литературы

1. Беспалов В.И., Таланов В.И. О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях // *Письма в ЖЭТФ*. — 1966. — Т. 3, № 11. — С. 471–476.
2. Аскаръян Г.А. Воздействие градиента поля интенсивного электромагнитного луча на электроны и атомы // *ЖЭТФ*. — 1962. — Т. 42, № 6. — С. 1567–1570.
3. Пилипецкий Н.Ф., Рустамов А.Р. Наблюдение самофокусировки света в жидкостях // *Письма в ЖЭТФ*. — 1965. — Т. 2, № 2. — С. 88–90.
4. Кандидов В.П., Шлёнов С.А., Косарева О.Г. Филаментация мощного фемтосекундного лазерного излучения // *Квант. электроника*. — 2009. — Т. 39, № 3. — С. 205–228.
5. Centurion Martin, Pu Ye, Tsang Mankei, Psaltis Demetri. Dynamics of filament formation in a kerr medium // *Phys. Rev. A*. — 2005. — Vol. 71, no. 6. — Pp. 063811–063818.
6. Rohwetter Ph., Yu J., Mejean G., Stelmaszczyk K. Remote LIBS with ultrashort pulses: characteristics in picosecond and femtosecond regimes // *J. Anal. At. Spectrom.* — 2004. — Vol. 19, no. 4. — Pp. 437–444.
7. Fibich G., Sivan Y., Ehlrich Y. et al. Control of the collapse distance in atmospheric propagation // *Opt. Express*. — 2006. — Vol. 14, no. 12. — Pp. 4946–4957.
8. Кандидов В.П., Фёдоров В.Ю. Свойства самофокусировки эллиптических пучков // *Квант. электроника*. — 2004. — Т. 34, № 12. — С. 1163–1168.
9. Grow Taylor D., Ishaaya Amiel A., Vuong Luat T., Gaeta Alexander L., Gavish Nir, Fibich Gadi. Collapse dynamics of super-gaussian beams // *Opt. Express*. — 2006. — Vol. 14, no. 12. — Pp. 5468–5475.
10. Panov N.A., Kosareva O.G., Kandidov V.P. Regularization of multiple filaments in atmospheric turbulence // *ICONO 2005: Nonlinear Space-Time Dynamics* / Ed. by N. Rosanov, S. Trillo. — Vol. 6255. — 2006. — Pp. 212–218.
11. Xi Ting-Ting, Lu Xin, Zhang Jie. Interaction of light filaments generated by femtosecond laser pulses in air // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96, no. 2. — Pp. 025003 1–4.
12. Fedorov V.Yu., Kandidov V.P. Interaction/laser radiation with matter filamentation of laser pulses with different wavelengths in air // *Laser Physics*. — 2008. — Vol. 18, no. 12. — Pp. 1530–1538.
13. Фёдоров В.Ю., Кандидов В.П. Нелинейно-оптическая модель воздушной среды в задаче о филаментации фемтосекундных лазерных импульсов различной длины волны // *Оптика и спектроскопия*. — 2008. — Т. 105, № 2. — С. 291–298.
14. Pogorelskya I., Ben-Zvia I., Kimurab W.D., Kurnitc N.A., Kannarid F. Picosecond CO₂ laser for relativistic particle acceleration // *Infrared Physics and Technology*. — 1995. — Vol. 36, no. 1. — Pp. 341–354.

15. Botha L.R., van Heerden S.P., Prinsloo F.J. Picosecond mid-infrared amplifier for high average power // XVI International Symposium on Gas Flow, Chemical Lasers, and High-Power Lasers / Ed. by D. Schuöcker. — Vol. 6346. — 2007. — Pp. 63463B 1–7.
16. Terawatt CO_2 laser: a new tool for strong-field research // High-Power Laser Ablation VI / Ed. by C. R. Phipps. — Vol. 6261. — 2006. — Pp. 626118 1–12.
17. Баранов Г.А., Кучинский А.А., Томашевич П.В. Широкоапертурный CO_2 -усилитель сверхатмосферного давления с накачкой объемным самостоятельным разрядом // Журнал технической физики. — 2008. — Т. 78, № 10. — С. 53–58.
18. Haberberger D., Tochitsky S., Joshi C. Fifteen terawatt picosecond CO_2 laser system // Opt. Express. — 2010. — Vol. 18, no. 17. — Pp. 17865–17875.
19. Ахманов С.А., Выходин В.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988. — С. 310.
20. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн, 2-е изд. — М.: Наука, 1990. — С. 432.
21. Келдыш Л.В. Ионизация в поле сильной электромагнитной волны // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 47, № 5. — С. 1945–1956.
22. Переломов А.М., Попов В.С., Терентьев М.В. Ионизация атомов в переменном электрическом поле // ЖЭТФ. — 1966. — Т. 50, № 1. — С. 309–326.
23. Аммосов М.В., Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Туннельная ионизация сложных атомов и атомарных ионов в переменном электромагнитном поле // ЖЭТФ. — 1986. — Т. 91, № 6. — С. 2008–2013.
24. Попов В.С. Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша) // Успехи физических наук. — 2004. — Т. 174, № 9. — С. 921–951.
25. Dawest L.W., Marburger J.H. Computer studies in self-focusing // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 179, no. 3. — Pp. 862–868.
26. Chiao R.Y., Garmire E., Townes C.H. Self-trapping of optical beams // Phys. Rev. Lett. — 1964. — Vol. 13, no. 15. — Pp. 479–480.
27. Кандидов В.П., Корольков А.М. Эффект Тальбо и его демонстрация в курсе общей физики // Физическое образование в вузах. — 1998. — Т. 4, № 3. — С. 99–104.
28. Шлёнов С.А., Кандидов В.П. Формирование пучка филаментов при распространении фемтосекундного лазерного импульса в турбулентной атмосфере // Оптика атмосферы и океана. — 2004. — Т. 17, № 8. — С. 630–641.
29. Ефимов О.В. Численное моделирование распространения световых импульсов с регулярной поперечной структурой в среде с Керровской нелинейностью // Труды Шестой международной конференции молодых ученых и специалистов «Оптика-2009» (Санкт-Петербург, Россия, 19–23 октября 2009). — 2009. — С. 26–28.
30. Shlenov S.A., Dergachev A.A., Efimov O.V. Filamentation of powerful femtosecond laser pulses with regular and random perturbations in their cross-section // The 4th

- Finnish-Russian Photonics and Laser Symposium – PALS 2009, Tampere, Finland, May 24-27, 2009. — 2009. — Pp. 67–68.
31. *Фёдоров В.Ю.* Влияние параметров фемтосекундного лазерного импульса на филаментацию в атмосфере: К. диссертация / МГУ им. М.В.Ломоносова. — 2010.
 32. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. — С. 630.
 33. *Егоров К.Д., Кандидов В.П., Леденев В.И.* Вариационно-разностная схема в задаче самовоздействия волновых пучков // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 1982. — Т. 22, № 2. — С. 382–389.
 34. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978. — С. 512.
 35. *Дышко А.Л.* Разностный метод решения распространения светового луча в нелинейной среде // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 1968. — Т. 8, № 1. — С. 238–242.
 36. FFTW web-page. <http://fftw.org>.
 37. *Frigo Matteo, Johnson Steven G.* FFTW: An adaptive software architecture for the fft // Proc. of the 1998 IEEE Intl. Conf. on Acoustics Speech and Signal Processing. — Vol. 3. — 1998. — Pp. 1381–1384.
 38. *Frigo Matteo.* A fast fourier transform compiler // Proc. of the 1999 ACM SIGPLAN Conf. on Programming Language Design and Implementation. — Vol. 34. — 1999. — Pp. 169–180.

Приложения

П.А. Вариационно-разностная схема для одномерного параболического уравнения

Наиболее трудоёмкими, с точки зрения объёма вычисления, в цепочке уравнений метода расщепления по физическим факторам являются уравнения дифракции и дисперсии второго порядка. Для уменьшения объёма вычислений была использована неравномерная расчётная сетка. В качестве примера рассмотрим алгоритм построения разностной схемы для одномерного параболического уравнения, описывающего дисперсию второго порядка:

$$\kappa \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (\text{П.А.1})$$

Для построения разностной схемы воспользуемся вариационно-разностным методом Бубнова-Галеркина [32]. Он состоит в том, что решение задачи (П.А.1) эквивалентно поиску функции $E(t, z)$, для которой тождественно равен нулю функционал $J(E, V)$:

$$J(E, V) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\kappa \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right) \cdot V dt, \quad (\text{П.А.2})$$

где $V(t, z)$ — произвольная функция в классе искомых решений, то есть удовлетворяющая условию $V(t, z)|_{t \rightarrow \pm\infty} = 0$.

Интегрируя по частям второе слагаемое в (П.А.2) и используя граничные условия при $t \rightarrow \pm\infty$, перепишем функционал $J(E, V)$ в виде:

$$J(E, V) = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E}{\partial z} V dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} dt. \quad (\text{П.А.3})$$

Введём расчётную сетку $\{t_k\}$ такую, что $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ разбивают расчётную область $[t_0, t_N]$ на N произвольных частей. На её границах положим $E|_{t=t_0} = 0$, $E|_{t=t_N} = 0$. Размер области, где рассматривается задача, берётся достаточно большим, чтобы условие равенства нулю поля на её границах было эквивалентно реальным граничным условиям. Значения функций $E(t, z)$ и $V(t, z)$ в узлах сетки будем обозначать $E_k \equiv E(t_k, z)$ и $V_k \equiv V(t_k, z)$ соответственно. Представим функционал $J(E, V)$ в виде суммы интегралов на элементах сетки:

$$J(E, V) = \kappa \left[\int_{t_0}^{t_0 + \frac{h_1}{2}} \frac{\partial E_0}{\partial z} V_0 dt + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t_k - \frac{h_k}{2}}^{t_k + \frac{h_{k+1}}{2}} \frac{\partial E_k}{\partial z} V_k dt + \int_{t_N - \frac{h_N}{2}}^{t_N} \frac{\partial E_N}{\partial z} V_N dt \right] + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} dt. \quad (\text{П.А.4})$$

При этом для первого слагаемого, взятого в (П.А.4) в квадратные скобки, область интегрирования представляет собой интервал $\left(t_k - \frac{h_k}{2}, t_k + \frac{h_{k+1}}{2}\right)$, серединой которого является узел расчётной сетки. Аппроксимируем функции $E(t, z)$ и $V(t, z)$ на таких элементах сетки по методу прямоугольников:

$$\begin{aligned} E(t, z) &= E_k, \\ V(t, z) &= V_k, \end{aligned} \quad \text{где } t \in \left(t_k - \frac{h_k}{2}, t_k + \frac{h_{k+1}}{2}\right) \quad (\text{П.А.5})$$

В последнем слагаемом выражения (П.А.4) область интегрирования представляет собой интервал (t_k, t_{k+1}) между двумя узлами сетки. Для таких ячеек введём линейную аппроксимацию амплитуды поля E и функции V между узлами:

$$\begin{aligned} E(t, z) &= A_1(z) \cdot t + B_1(z) \\ V(t, z) &= A_2(z) \cdot t + B_2(z) \end{aligned}, \quad \text{где } t \in (t_k, t_{k+1}) \quad (\text{П.А.6})$$

Коэффициенты A_1, B_1, A_2, B_2 в (П.А.6) определяются значениями функций E_k и V_k на границах ячейки. В произвольной k -ой ячейке поле E и функция V между узлами выражаются через значения в узлах следующим образом:

$$E(t, z) = \frac{E_{k+1}(z) - E_k(z)}{h_{k+1}}(t - t_k) + E_k(z) = \frac{\Delta E_k}{h_{k+1}}(t - t_k) + E_k(z) \quad (\text{П.А.7})$$

$$V(t, z) = \frac{V_{k+1}(z) - V_k(z)}{h_{k+1}}(t - t_k) + V_k(z) = \frac{\Delta V_k}{h_{k+1}}(t - t_k) + V_k(z) \quad (\text{П.А.8})$$

Различная аппроксимация функций $E(t, z)$ и $V(t, z)$ в слагаемых формулы (П.А.4) оправдывается тем, что в этом случае достигается одинаковая зависимость от x во всех подынтегральных выражениях, что соответствует одному порядку аппроксимации.

Подставив (П.А.7) и (П.А.8) в (П.А.4) и учитывая (П.А.5), получим функционал $J(E, V)$ в виде:

$$J(E, V) = \kappa \left[\int_{t_0}^{t_0 + \frac{h_1}{2}} E'_0 V_0 dt + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t_k - \frac{h_k}{2}}^{t_k + \frac{h_{k+1}}{2}} E'_k V_k dt + \int_{t_N - \frac{h_N}{2}}^{t_N} E'_N V_N dt \right] + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\Delta E_k}{h_{k+1}} \frac{\Delta V_k}{h_{k+1}} dt, \quad (\text{П.А.9})$$

где штрихом обозначено дифференцирование по z . Вычислим интегралы в (П.А.9) и со-

берём члены с одинаковыми V_k . Для этого введем следующие обозначения:

$$I_1 \equiv \int_{t_0}^{t_0 + \frac{h_1}{2}} E'_0 V_0 dt + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t_k - \frac{h_k}{2}}^{t_k + \frac{h_{k+1}}{2}} E'_k V_k dt + \int_{t_N - \frac{h_N}{2}}^{t_N} E'_N V_N dt, \quad (\text{П.А.10})$$

$$I_2 \equiv \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\Delta E_k}{h_{k+1}} \frac{\Delta V_k}{h_{k+1}} dt. \quad (\text{П.А.11})$$

Тогда (П.А.9) можно переписать в виде:

$$J(E, V) = \kappa I_1 + I_2, \quad (\text{П.А.12})$$

Вычислим I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= E'_0 V_0 \Big|_{t_0}^{t_0 + \frac{h_1}{2}} + \sum_{k=1}^{N-1} E'_k V_k \Big|_{t_k - \frac{h_k}{2}}^{t_k + \frac{h_{k+1}}{2}} + E'_N V_N \Big|_{t_N - \frac{h_N}{2}}^{t_N} = \\ &= \frac{h_1}{2} E'_0 V_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{h_{k+1} + h_k}{2} E'_k V_k + \frac{h_N}{2} E'_N V_N \end{aligned} \quad (\text{П.А.13})$$

Вычислим I_2 :

$$I_2 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta E_k \Delta V_k}{h_{k+1}^2} \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta E_k}{h_{k+1}} (V_{k+1} - V_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta E_k}{h_{k+1}} V_{k+1} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta E_k}{h_{k+1}} V_k \quad (\text{П.А.14})$$

В первой сумме этого выражения заменим индекс суммирования $k \rightarrow k - 1$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k=1}^N \frac{\Delta E_{k-1}}{h_k} V_k - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta E_k}{h_{k+1}} V_k = - \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta E_k}{h_{k+1}} V_k - \sum_{k=1}^N \frac{\Delta E_{k-1}}{h_k} V_k \right) = \\ &= - \left(\frac{\Delta E_0}{h_0} V_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Delta E_k}{h_{k+1}} V_k - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Delta E_{k-1}}{h_k} V_k - \frac{\Delta E_{N-1}}{h_N} V_N \right) = \\ &= - \left(\frac{\Delta E_0}{h_0} V_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{E_{k+1} - E_k}{h_{k+1}} - \frac{E_k - E_{k-1}}{h_k} \right) V_k - \frac{\Delta E_{N-1}}{h_N} V_N \right) = \\ &= - \left(\frac{\Delta E_0}{h_0} V_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{E_{k+1}}{h_{k+1}} - \left(\frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \right) E_k + \frac{E_{k-1}}{h_k} \right) V_k - \frac{\Delta E_{N-1}}{h_N} V_N \right) \end{aligned} \quad (\text{П.А.15})$$

Подставим выражения (П.А.13) и (П.А.15) для I_1 и I_2 в (П.А.12):

$$J(E, V) = \kappa \left(\frac{h_1}{2} E'_0 V_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{h_{k+1} + h_k}{2} E'_k V_k + \frac{h_N}{2} E'_N V_N \right) - \left(\frac{\Delta E_0}{h_0} V_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{E_{k+1}}{h_{k+1}} - \left(\frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \right) E_k + \frac{E_{k-1}}{h_k} \right) V_k - \frac{\Delta E_{N-1}}{h_N} V_N \right) \quad (\text{П.А.16})$$

Собирая члены при одинаковых V_k получим для $J(E, V)$ следующее выражение:

$$J(E, V) = \left(\kappa \frac{h_1}{2} E'_0 - \frac{\Delta E_0}{h_1} \right) \cdot V_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\kappa \frac{h_{k+1} + h_k}{2} E'_k - \left(\frac{E_{k+1}}{h_{k+1}} - \left(\frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \right) E_k + \frac{E_{k-1}}{h_k} \right) \right) \cdot V_k + \left(\kappa \frac{h_N}{2} E'_N + \frac{\Delta E_{N-1}}{h_N} \right) \cdot V_N \quad (\text{П.А.17})$$

Функционал $J(E, V)$ обращается в нуль в том случае, если равны нулю коэффициенты при всех V_k , поскольку значения V_k в узлах сетки произвольны. Отсюда следует система уравнений относительно значений поля E_k в узлах сетки:

$$\begin{cases} \kappa \frac{h_1}{2} \frac{\partial E_0(z)}{\partial z} = \frac{E_1(z) - E_0(z)}{h_1}, & \text{при } k = 0; \\ \kappa \frac{h_{k+1} + h_k}{2} \frac{\partial E_k(z)}{\partial z} = \frac{E_{k+1}(z)}{h_{k+1}} - \left(\frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \right) E_k(z) + \frac{E_{k-1}(z)}{h_k}, & \text{при } k = 1 \dots N-1; \\ \kappa \frac{h_N}{2} \frac{\partial E_N(z)}{\partial z} = -\frac{E_N(z) - E_{N-1}(z)}{h_N}, & \text{при } k = N. \end{cases} \quad (\text{П.А.18})$$

Таким образом, вариационная формулировка исходной задачи (П.А.1) позволила получить систему дифференциально-разностных уравнений относительно комплексной амплитуды поля $E_k(z)$ в узлах сетки. При этом вариационно-разностным методом однозначно определены коэффициенты полученных уравнений для неоднородной сетки с произвольным шагом h_k . Полученная схема консервативна, поскольку минимизируется функционал, являющийся квадратичной функцией поля E_k .

Заметим, что в частном случае однородной сетки $h_k \equiv h$ правая часть построенной схемы сводится к обычной разностной аппроксимации второй производной по координате t .

Ранее вариационно-разностный метод построения численной схемы для решения задачи о самофокусировке применялся в [33]. В этой работе шаг по поперечным координатам считался постоянным и использовалась более сложная аппроксимация поля на ячейках сетки, однако это привело к громоздкой системе уравнений, относительно значений поля в узлах сетки, что потребовало последующих упрощений при численном решении полученной системы.

Для интегрирования по оси z применим процедуру Кранка-Николсона [34]. Тогда (П.А.18) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \frac{h_1}{2} \frac{E_0^{s+1} - E_0^s}{\Delta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{E_1^{s+1} - E_0^{s+1}}{h_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{E_1^s - E_0^s}{h_1} \right) \\ \kappa \frac{h_{k+1} + h_k}{2} \frac{E_k^{s+1} - E_k^s}{\Delta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{E_{k+1}^{s+1}}{h_{k+1}} - \left(\frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \right) E_k^{s+1} + \frac{E_{k-1}^{s+1}}{h_k} \right) + \\ \quad + \frac{1}{2} \left(\frac{E_{k+1}^s}{h_{k+1}} - \left(\frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \right) E_k^s + \frac{E_{k-1}^s}{h_k} \right) \\ \kappa \frac{h_N}{2} \frac{E_N^{s+1} - E_N^s}{\Delta z} = -\frac{1}{2} \left(\frac{E_N^{s+1} - E_{N-1}^{s+1}}{h_N} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{E_N^s - E_{N-1}^s}{h_N} \right) \end{array} \right. \quad (\text{П.А.19})$$

где Δz — шаг по оси z , s — номер шага по оси z .

Система (П.А.19) позволяет определить значения E_{s+1} , зная значения E_s на предыдущем шаге. Для этого необходимо разрешить систему (П.А.19) относительно E_{s+1} . Эта система является линейной алгебраической системой с трёхдиагональной матрицей, следовательно, для её решения применим метод прогонки [34]. Для применения этого метода приведём систему к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k E_{k-1}^{s+1} - C_k E_k^{s+1} + B_k E_{k+1}^{s+1} = -F_k, \text{ где } k = 1 \dots N-1; \\ E_0^{s+1} = \alpha \cdot E_1^{s+1} + \beta, \quad E_N^{s+1} = \gamma \cdot E_{N-1}^{s+1} + \delta \end{array} \right. \quad (\text{П.А.20})$$

Сравним (П.А.20) с (П.А.19) и найдём прогонные коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k = \frac{1}{h_k}, B_k = \frac{1}{h_{k+1}}, C_k = A_k + B_k + \frac{\kappa}{\Delta z} (h_{k+1} + h_k), \\ F_k = \frac{E_{k+1}^s}{h_{k+1}} - \left(\left(\frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \right) - \frac{\kappa}{\Delta z} (h_{k+1} + h_k) \right) E_k^s + \frac{E_{k-1}^s}{h_k}, \\ \alpha = \frac{1}{1 + \frac{h_1^2 \kappa}{\Delta z}}, \beta = \frac{E_1^s - \left(1 - \frac{h_1^2 \kappa}{\Delta z} \right) E_0^s}{1 + \frac{h_1^2 \kappa}{\Delta z}}, \\ \gamma = \frac{1}{1 + \frac{h_N^2 \kappa}{\Delta z}}, \delta = \frac{E_{N-1}^s - \left(1 - \frac{h_N^2 \kappa}{\Delta z} \right) E_N^s}{1 + \frac{h_N^2 \kappa}{\Delta z}}. \end{array} \right. \quad (\text{П.А.21})$$

Отсюда видно, что условия устойчивости метода прогонки ([34]) выполнены:

$$|A_k|, |B_k|, |C_k| > 0; |C_k| \geq |A_k| + |B_k|; 0 \leq \alpha < 1; 0 \leq \gamma < 1; \quad (\text{П.А.22})$$

Исследование на устойчивость численной схемы (П.А.19) в случае неравномерного шага не представляется возможным. Но в случае постоянного шага такой анализ провести можно. В этом случае построенная схема перейдёт в стандартную схему Кранка-

Николсона. Как известно, эта схема является абсолютно устойчивой, то есть её устойчивость не зависит от выбора величины шагов h и Δz .

П.Б. Вариационно-разностная схема для случая цилиндрических координат

В предыдущем разделе было показано, как с помощью вариационного метода построить дифференциально-разностное уравнение для решения одномерного параболического уравнения, которое описывает дисперсию второго порядка и одномерную дифракцию. В случае, если нужно рассчитать распространение двумерного пучка или импульса, задачу можно решить двумя способами: последовательно решив одномерное уравнение для координат x и y , либо сделать замену переменных с использованием цилиндрических координат и построить разностную схему для получившегося уравнения. Для упрощения вычислений в предположении аксиально-симметричного пучка лучше использовать второй способ.

Запишем параболическое уравнение в цилиндрических координатах, учитывая что E не зависит от угловой координаты φ :

$$\kappa \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) \quad (\text{П.Б.1})$$

Метод построения вариационно-разностной схемы аналогичен методу построения для одномерного уравнения, описанному в П.А, и был впервые рассмотрен в [35]. Используя этот метод, получим схему Кранка-Николсона для решения уравнения (П.Б.1) на неоднородной по радиальной координате сетке в области $r \in [0, R]$.

Учитывая физические особенности задачи, будем считать, что $E(r, z) \equiv 0$ для $r \geq R$. Следовательно, начальные и граничные условия выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} E(r, z = 0) = E_{\text{initial}}(r) \\ E(r, z) \text{ ограничено при } r \rightarrow 0 \\ E(r = R, z) = 0 \end{cases} \quad (\text{П.Б.2})$$

Решение задачи (П.Б.1) эквивалентно поиску функции $E(r, z)$, для которой тождественно равен нулю функционал $J(E, V)$:

$$J(E, V) = \int_0^R \left(\kappa \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) \right) V r dr, \quad (\text{П.Б.3})$$

где $V(r)$ — произвольная функция в классе искомых решений, то есть удовлетворяющая условию $V(r)|_{r=R} = 0$. Интегрируя по частям второе слагаемое в (П.Б.3) и используя граничные условия для $V(r)$, перепишем функционал $J(E, V)$ в виде:

$$J(E, V) = \kappa \int_0^R \frac{\partial E}{\partial z} V r dr + \int_0^R \frac{\partial E}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} r dr, \quad (\text{П.Б.4})$$

Введём расчётную сетку $\{r_k\}$ такую, что $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_N = R$ разбивают расчётную область $[0, R]$ на N произвольных частей. Значение функций $E(r, z)$ и $V(r)$ в узлах сетки будем обозначать $E_k^s = E(r_k, z_s)$ и $V_k = V(r_k)$ соответственно. Тогда функционал $J(E, V)$ можно представить в виде суммы интегралов на элементах сетки:

$$J(E, V) = \kappa \sum_{k=0}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\partial E}{\partial z} V r dr + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\partial E}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} r dr, \quad (\text{П.Б.5})$$

Для получения схемы Кранка-Николсона линейно аппроксимируем функции $E(r, z)$ и $V(r)$ на элементах сетки:

$$\begin{aligned} E(r, z) &= E_k^s + \frac{E_{k+1}^s - E_k^s}{r_{k+1} - r_k} (r - r_k) + \frac{E_k^{s+1} - E_k^s}{z_{s+1} - z_s} (z - z_s) + \\ &+ \frac{E_{k+1}^{s+1} - E_k^{s+1} - E_{k+1}^s + E_k^s}{(r_{k+1} - r_k)(z_{s+1} - z_s)} (r - r_k)(z - z_s) \\ V(r) &= V_k + \frac{V_{k+1} - V_k}{r_{k+1} - r_k} (r - r_k) \end{aligned} \quad (\text{П.Б.6})$$

При такой аппроксимации подынтегральные выражения в (П.Б.5) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(r, z_{s+\frac{1}{2}})}{\partial z} V(r) &= \left(\frac{E_k^{s+1} - E_k^s}{z_{s+1} - z_s} + \left(\frac{E_{k+1}^{s+1} - E_{k+1}^s}{z_{s+1} - z_s} - \frac{E_k^{s+1} - E_k^s}{z_{s+1} - z_s} \right) \frac{r - r_k}{r_{k+1} - r_k} \right) V(r) \\ \frac{\partial E(r, z_{s+\frac{1}{2}})}{\partial r} \frac{\partial V(r)}{\partial r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{E_{k+1}^{s+1} - E_k^{s+1}}{r_{k+1} - r_k} + \frac{E_{k+1}^s - E_k^s}{r_{k+1} - r_k} \right) \frac{V_{k+1} - V_k}{r_{k+1} - r_k} \end{aligned} \quad (\text{П.Б.7})$$

Элементы сетки представляют из себя концентрические кольца. Подставим аппроксимации для $E(r, z)$ и $V(r)$ в интегралы из (П.Б.5) и проинтегрируем:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\partial E}{\partial z} V r dr = \frac{r_1^2}{3} \frac{E_0^{s+1} - E_0^s}{z_{s+1} - z_s} V_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{r_{k+1}^2 + r_k(r_{k+1} - r_{k-1}) - r_{k-1}^2}{3} \frac{E_k^{s+1} - E_k^s}{z_{s+1} - z_s} V_k \quad (\text{П.Б.8})$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\partial E}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} r dr = - \frac{E_1^{s+1} - E_0^{s+1} + E_1^s - E_0^s}{2} V_0 - \\
& - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{r_{k+1} + r_k}{r_{k+1} - r_k} \frac{E_{k+1}^{s+1} + E_{k+1}^s}{2} - \left(\frac{r_{k+1} + r_k}{r_{k+1} - r_k} + \frac{r_k + r_{k-1}}{r_k - r_{k-1}} \right) \frac{E_k^{s+1} + E_k^s}{2} + \right. \\
& \left. + \frac{r_k + r_{k-1}}{r_k - r_{k-1}} \frac{E_{k-1}^{s+1} + E_{k-1}^s}{2} \right) V_k
\end{aligned} \tag{П.Б.9}$$

Подставляя (П.Б.9) в (П.Б.5) получим равенство:

$$\begin{aligned}
& \kappa \frac{r_1^2}{3} \frac{E_0^{s+1} - E_0^s}{z_{s+1} - z_s} V_0 + \kappa \sum_{k=1}^{N-1} \frac{r_{k+1}^2 + r_k(r_{k+1} - r_{k-1}) - r_{k-1}^2}{3} \frac{E_k^{s+1} - E_k^s}{z_{s+1} - z_s} V_k - \\
& - \frac{E_1^{s+1} - E_0^{s+1} + E_1^s - E_0^s}{2} V_0 - \\
& - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{r_{k+1} + r_k}{r_{k+1} - r_k} \frac{E_{k+1}^{s+1} + E_{k+1}^s}{2} - \left(\frac{r_{k+1} + r_k}{r_{k+1} - r_k} + \frac{r_k + r_{k-1}}{r_k - r_{k-1}} \right) \frac{E_k^{s+1} + E_k^s}{2} + \right. \\
& \left. + \frac{r_k + r_{k-1}}{r_k - r_{k-1}} \frac{E_{k-1}^{s+1} + E_{k-1}^s}{2} \right) V_k \equiv 0
\end{aligned} \tag{П.Б.10}$$

Поскольку функция $V(r)$ — произвольная, то это равенство должно выполняться при любых значениях V_k . Полагая равными нулю все V_k , кроме V_0 , потом все, кроме V_0 и V_1 , и так далее до V_{N-1} , получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \kappa \frac{E_0^{s+1} - E_0^s}{\Delta z} = \frac{3}{r_1^2} \frac{E_1^{s+1} - E_0^{s+1} + E_1^s - E_0^s}{2}, \\
& \kappa \frac{E_k^{s+1} - E_k^s}{\Delta z} = \frac{3}{r_{k+1}^2 + r_k(r_{k+1} - r_{k-1}) - r_{k-1}^2} \left(\frac{r_{k+1} + r_k}{r_{k+1} - r_k} \frac{E_{k+1}^{s+1} + E_{k+1}^s}{2} - \right. \\
& \left. - \left(\frac{r_{k+1} + r_k}{r_{k+1} - r_k} + \frac{r_k + r_{k-1}}{r_k - r_{k-1}} \right) \frac{E_k^{s+1} + E_k^s}{2} + \frac{r_k + r_{k-1}}{r_k - r_{k-1}} \frac{E_{k-1}^{s+1} + E_{k-1}^s}{2} \right), \\
& E_N^{s+1} = 0,
\end{aligned} \right. \tag{П.Б.11}$$

где $\Delta z = (z_{s+1} - z_s)$ — шаг по оси z , а $k = 1, \dots, N-1$.

Для того, чтобы применить метод прогонки при решении этой системы уравнений, приведём её к виду (П.А.20):

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k = \frac{r_k + r_{k-1}}{r_k - r_{k-1}}, \quad B_k = \frac{r_{k+1} + r_k}{r_{k+1} - r_k}, \\ C_k = A_k + B_k + \frac{2\kappa}{\Delta z} (r_{k+1}^2 + r_k(r_{k+1} - r_{k-1}) - r_{k-1}^2), \\ F_k = A_k E_{k-1}^s + B_k E_{k+1}^s - \left(A_k + B_k - \frac{2\kappa}{\Delta z} (r_{k+1}^2 + r_k(r_{k+1} - r_{k-1}) - r_{k-1}^2) \right) E_k^s, \\ \alpha = \frac{1}{1 + \frac{2\kappa r_1^2}{3\Delta z}}, \quad \beta = \frac{E_1^s - \left(1 - \frac{2\kappa r_1^2}{3\Delta z}\right) E_0^s}{1 + \frac{2\kappa r_1^2}{3\Delta z}}, \\ \gamma = 0, \quad \delta = 0. \end{array} \right. \quad (\text{П.Б.12})$$

Из этих выражений видно, что условия устойчивости метода прогонки (П.А.22) выполнены. Как и в случае с одномерным уравнением, провести анализ устойчивости для неравномерной сетки не представляется возможным. Однако, тестовые расчёты, результаты которых приведены в 3, показали пригодность использования этой схемы для решения параболического уравнения в цилиндрических координатах.

П.В. Фурье-метод решения параболического уравнения

«Метод Фурье» решения уравнений в частных производных основан на переходе к Фурье-образу искомой функции. При этом в Фурье-представлении многократные производные переходят в умножение Фурье-образа на соответствующие спектральные переменные. Рассмотрим применение этого метода на пример двумерного уравнения дифракции:

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \quad (\text{П.В.1})$$

Если воспользоваться Фурье-преобразованием

$$\hat{E}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \iint E(x, y) \exp \{-i(k_x x + k_y y)\} dx dy, \quad (\text{П.В.2})$$

$$E(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint \hat{E}(k_x, k_y) \exp \{+i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y, \quad (\text{П.В.3})$$

то уравнение (П.В.1) примет вид

$$2i \frac{\partial \hat{E}(k_x, k_y, z)}{\partial z} = -(k_x^2 + k_y^2) \hat{E}(k_x, k_y, z) \quad (\text{П.В.4})$$

Оно имеет точное аналитическое решение, определяемое формулой

$$\hat{E}(k_x, k_y, z + \Delta z) = \hat{E}(k_x, k_y, z) \exp \left\{ \frac{i}{2} (k_x^2 + k_y^2) |E(k_x, k_y, z)|^2 \right\} \quad (\text{П.В.5})$$

После чего, применяя обратное преобразование Фурье к функции $E(k_x, k_y, z + \Delta z)$, получаем решение уравнения (П.В.1) на следующем шаге по z .

П.Г. Сравнительный анализ параллельных численных алгоритмов решения уравнения квазиоптики

Как было сказано в 1, для полного исследования явления филаментации необходимо решать уравнение квазиоптики на сетках с количеством точек порядка 10^4 – 10^6 , а значит потребность в оперативной памяти — величины около 4–100 Гб. Это приводит к необходимости использования кластерных вычислительных систем и параллельных методов решения нелинейного уравнения квазиоптики. Для определения области применимости двух описанных выше методов решения уравнения дифракции (на основе преобразования Фурье и на основе разностной схемы) были проведены тестовые замеры времени выполнения программы расчёта распространения пучка в среде с кубической нелинейностью. Цепочка уравнений, использованная в программе, имела следующий вид:

$$\begin{cases} 2i \frac{\partial E}{\partial z} = \Delta_{\perp} E \\ 2i \frac{\partial E}{\partial z} = R |E|^2 E \end{cases} \quad (\text{П.Г.1})$$

Для выполнения быстрого преобразования Фурье использовалась свободно распространяемая библиотека FFTW (версии 2.3) [36]. Подробнее с реализацией и методом создания алгоритма для FFTW можно ознакомиться в статьях [37, 38]. Данная реализация БПФ предполагает ленточное распределение матрицы поля по процессам. Кроме того, FFTW, как любое быстрое преобразование Фурье, эффективнее работает на матрицах, размеры которых являются степенями двойки, поэтому для тестовых запусков использовались двумерные сетки с количеством точек по одной координате $N = 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384$. Для уменьшения влияния текущей загруженности кластера и характеристик различных вычислительных узлов на результаты тестов замеры времени осуществлялись 10 раз в разное время суток и усреднялись.

Существенной особенностью алгоритмов БПФ является расположение полученных коэффициентов в памяти процессоров. Для преобразования Фурье естественным является транспонированное расположение результата в памяти всех процессов. Этому соответствует ключ `FFTW_TRANSPOSED_ORDER` функции, реализующей преобразование Фурье. Его альтернативой является ключ `FFTW_NORMAL_ORDER`, при задании которого после выполнения преобразования Фурье проводится дополнительное транспони-

рование матрицы спектра. Кроме того существует параметр указанной функции, позволяющий использование дополнительного временного массива для ускорения преобразования. Наконец, при создании плана Фурье-преобразования существует возможность оптимизировать план с целью ускорения работы функции. Это достигается использованием ключей `FFTW_ESTIMATE` (грубая оценка) и `FFTW_MEASURE` (при этом производятся замеры времени пересылок, выполняемых в Фурье-преобразовании, и их оптимизация). Как показали тесты, для параллельной версии БПФ различие скорости расчётов при использовании и без использования этого ключа отличаются в пределах статистической ошибки.

Ниже представлены результаты замеров времени работы алгоритма с использованием преобразования Фурье при различных комбинациях параметров, выбранных для анализа их влияния на время работы программы на суперкомпьютере СКИФ МГУ «Чебышёв».

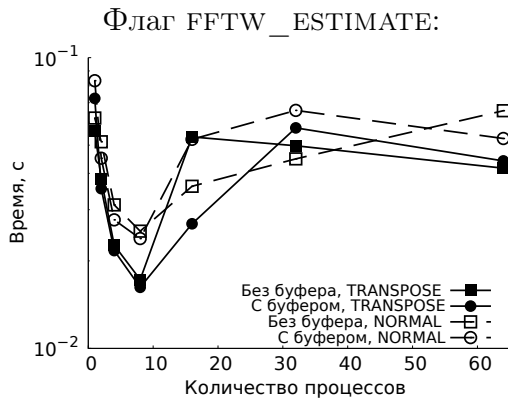


Рис. П.Г.1. Время работы Фурье-алгоритма в зависимости от количества процессов. Размер матрицы 512×512 .

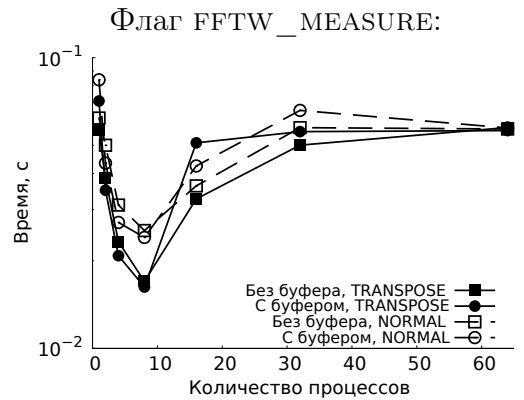


Рис. П.Г.2. Время работы Фурье-алгоритма в зависимости от количества процессов. Размер матрицы 512×512 .

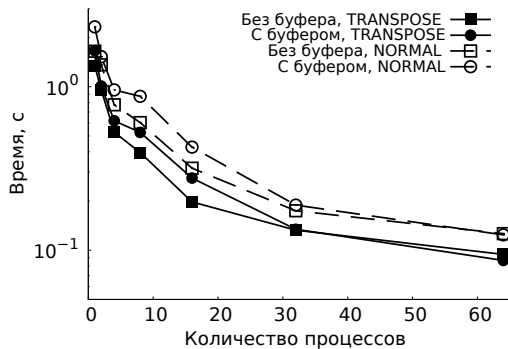


Рис. П.Г.3. Время работы Фурье-алгоритма в зависимости от количества процессов. Размер матрицы 2048×2048 .

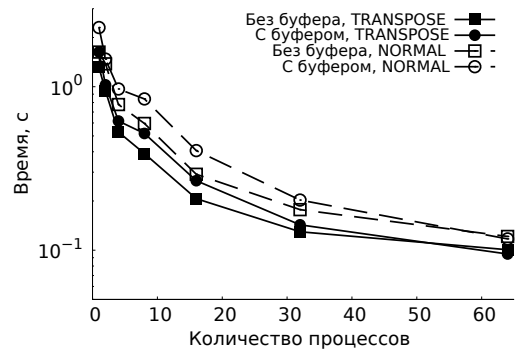


Рис. П.Г.4. Время работы Фурье-алгоритма в зависимости от количества процессов. Размер матрицы 2048×2048 .

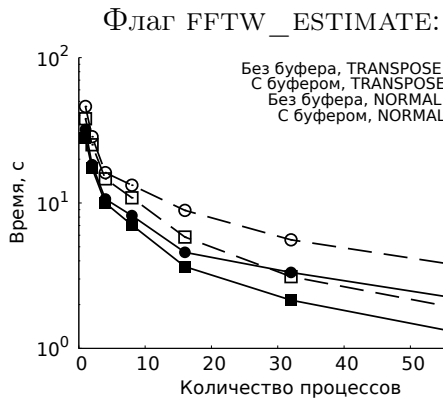


Рис. П.Г.5. Время работы Фурье-алгоритма в зависимости от количества процессов. Размер матрицы 8192×8192 .

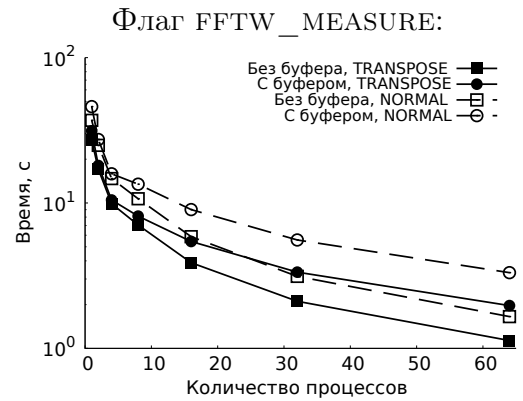


Рис. П.Г.6. Время работы Фурье-алгоритма в зависимости от количества процессов. Размер матрицы 8192×8192 .

Из представленных на рис. П.Г.1, П.Г.2 графиков видно, что использование более 8 процессоров является неэффективным для матрицы размером 512×512 , так как время работы программы возрастает по сравнению с временем работы программы при тех же параметрах на 8 процессорах. Для размера матрицы 2048×2048 , как видно из рис. П.Г.3, П.Г.4 увеличение числа процессоров даёт ощутимое уменьшение времени работы программы. При использовании матрицы размером 8192×8192 времена работы программы увеличиваются, что позволяет более чётко увидеть различие во временах работы программы для различных комбинаций флагов при использовании библиотеки FFTW.

Из графиков на рис. П.Г.1–П.Г.6 видно, что использования флага FFTW_MEASURE не приводит к ускорению работы алгоритма. Кроме того, использование буфера не только не привело к ускорению алгоритма, но, наоборот, несколько затормозило его. Скорость работы алгоритма с ключом FFTW_TRANSPOSED_ORDER, как и ожидалось, оказалась выше, чем с ключом FFTW_NORMAL_ORDER.

Далее были проведены замеры скорости выполнения программы для лучшего набора опций (отсутствие буфера, опции FFTW_TRANSPOSED_ORDER и FFTW_ESTIMATE). Замеры проводились без сохранения матрицы в файл и с параллельной записью матрицы в файл на каждом десятом шаге. Рассчитанные по полученным данным ускорения и эффективности программ представлены на рис. П.Г.9–П.Г.12. Видно, что для размера матрицы поля, не превосходящего 2048×2048 , использование более 8 процессоров нецелесообразно. Для больших матриц эффективность остаётся значительной: около 50% от идеальной для случая без сохранения данных и около 30% для случая с сохранением.

Большие размеры матрицы и необходимость в дополнительной памяти для метода с использованием неявной схемы не позволили произвести расчёт с использованием одного процесса, поэтому нормировка производилась на время работы программы на 4 процессорах.

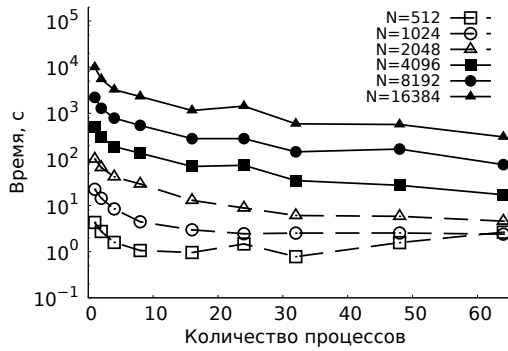


Рис. П.Г.7. Время работы Фурье-алгоритма в зависимости от количества процессов. Сохранение данных в файл не производилось.

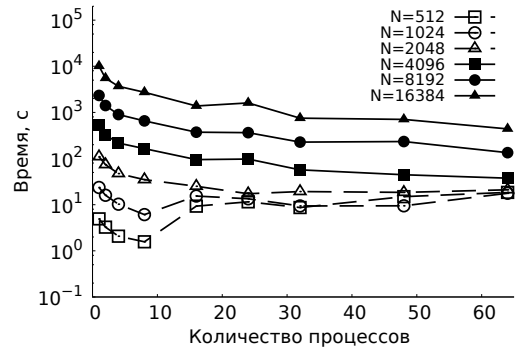


Рис. П.Г.8. Время работы Фурье-алгоритма в зависимости от количества процессов. Сохранение данных в файл производилось на каждом десятом шаге.

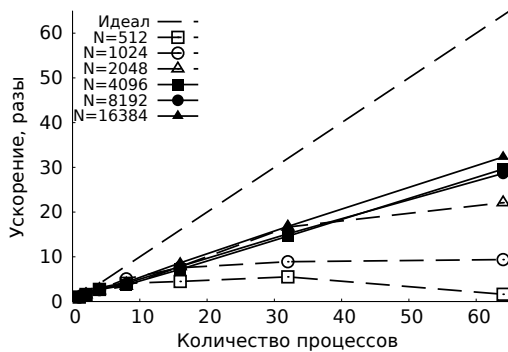


Рис. П.Г.9. Ускорение Фурье-алгоритма в зависимости от количества процессов. Сохранение данных в файл не производилось.

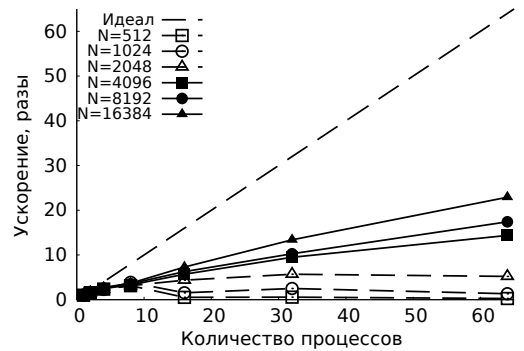


Рис. П.Г.10. Ускорение Фурье-алгоритма в зависимости от количества процессов. Сохранение данных в файл производилось на каждом десятом шаге.

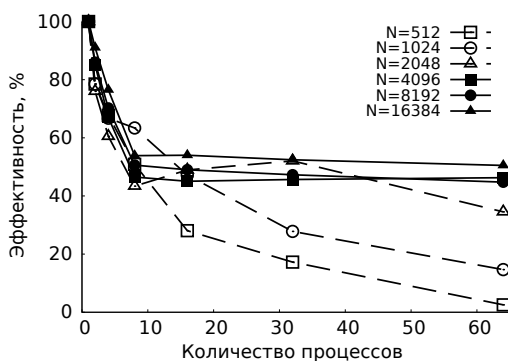


Рис. П.Г.11. Эффективность Фурье-алгоритма в зависимости от количества процессов. Сохранение данных в файл не производилось.

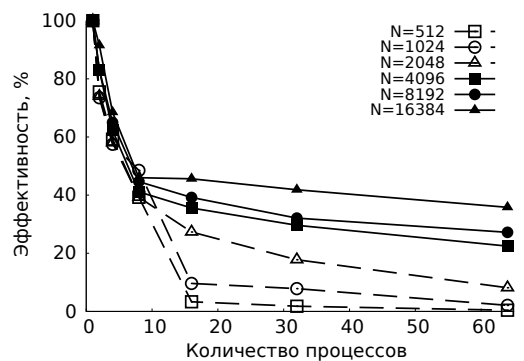


Рис. П.Г.12. Эффективность Фурье-алгоритма в зависимости от количества процессов. Сохранение данных в файл производилось на каждом десятом шаге.

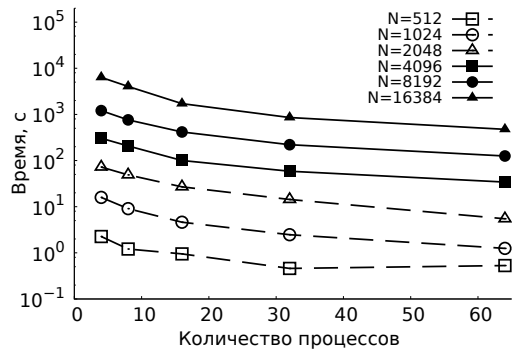


Рис. П.Г.13. Время работы алгоритма с неявной схемой в зависимости от количества процессов. Сохранение данных в файл не производилось.

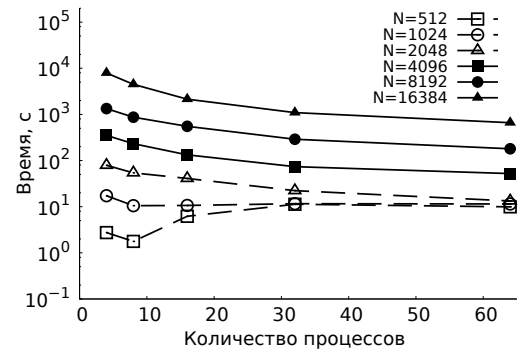


Рис. П.Г.14. Время работы алгоритма с неявной схемой в зависимости от количества процессов. Сохранение данных в файл производилось на каждом десятом шаге.

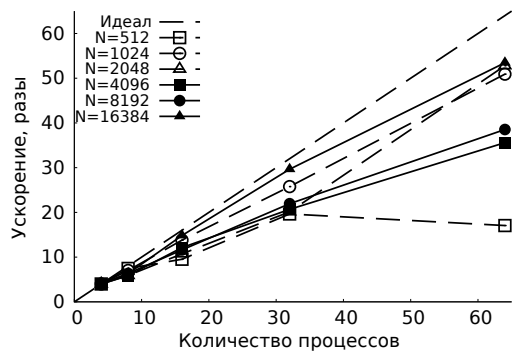


Рис. П.Г.15. Ускорение алгоритма с неявной схемой в зависимости от количества процессов. Сохранение данных в файл не производилось.

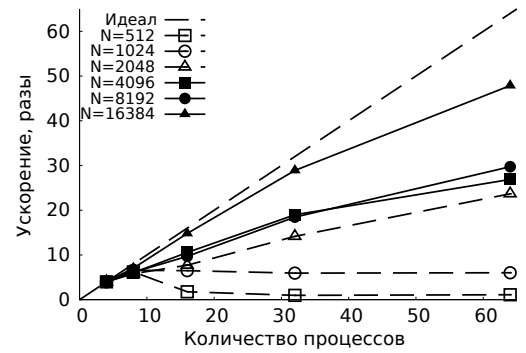


Рис. П.Г.16. Ускорение алгоритма с неявной схемой в зависимости от количества процессов. Сохранение данных в файл производилось на каждом десятом шаге.

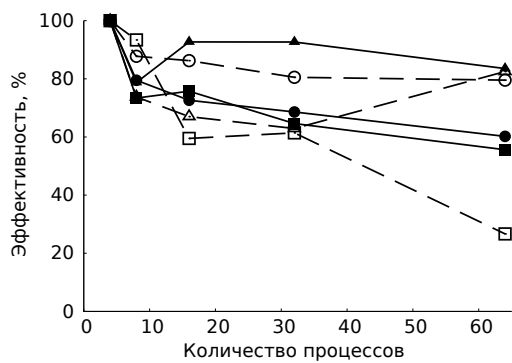


Рис. П.Г.17. Эффективность алгоритма с неявной схемой в зависимости от количества процессов. Сохранение данных в файл не производилось.

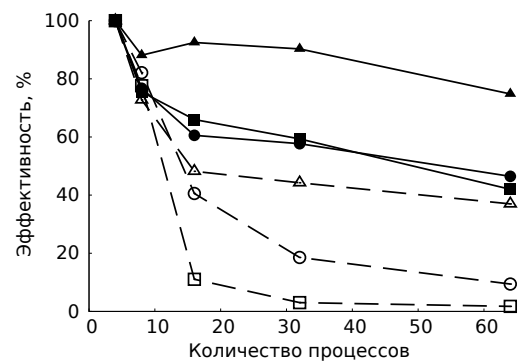


Рис. П.Г.18. Эффективность алгоритма с неявной схемой в зависимости от количества процессов. Сохранение данных в файл производилось на каждом десятом шаге.

Подведём итоги сравнения. В случае применения неявной разностной схемы требуется одна дополнительная матрица, равная основной (она используется для хранения коэффициентов метода прогонки). Алгоритм показал отличную масштабируемость, которая не сильно пострадала даже в случае периодического сохранения данных вычислений на диск. При использовании метода на основе преобразования Фурье можно обойтись без использования дополнительной матрицы. Но из-за более сложной организации пересылок при расчёте параллельного Фурье-преобразования его масштабируемость ниже. Также наблюдается провал в производительности при небольших размерах матриц.

Таким образом, нельзя однозначно сказать, что какой-то какой метод всегда является лучшим. В случае, если задача не накладывает каких-то особых ограничений, лучше использовать метод на основе преобразования Фурье. Если же имеется возможность использовать для расчёта очень большое число процессоров, то целесообразно применения метода с неявной разностной схемой. Также этот метод будет применим для задач с неравномерной сеткой по поперечному сечению, так как для них нет алгоритма быстрого преобразования Фурье и метод с его использованием теряет свою актуальность.