СЕКЦИЯ 2
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Н. Д. Ливанов, И. В. Изместьев

Челябинский государственный университет, г. Челябинск

УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ВОЛНОВЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ СИГНАЛА В ДЛИННОЙ ЛИНИИ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Аннотация. Рассматривается задача управления системой телеграфных уравнений, которая описывает передачу сигнала по длинной линии при наличии неопределенности. Управлением являются напряжение и сила тока генератора сигнала. Цель управления — привести среднее волновое сопротивление к заданному значению в фиксированный момент времени. Найдены необходимые и достаточные условия достижения поставленной цели при любой допустимой реализации неопределенности.

Ключевые слова: телеграфные уравнения, неопределенность, граничное управление, одномерное проектирование, волновое сопротивление.

Введение. Задачи управления объектами и процессами возникают во многих прикладных областях. Управление дает возможность достичь желаемого результата, влияя на некоторые параметры управляемой системы. Задачами управления уравнениями в частных производных гиперболического типа занимались различные ученые. Среди них представители Московской научной школы по теории управления, такие как А.А. Андреев, А.Г. Бутковский (ИПУ РАН), Г.Л. Дегтярев (КГТУ), В.А. Ильин (ВМК МГУ), Л.И. Розоноэр (МФТИ) и Т.К. Сиразетдинов (КНИТУ-КАИ) [1-5]. Отдельно следует выделить работы по данной тематике представителей Екатеринбургской научной школы по теории управления А.И. Короткого (ИММ УрО РАН) и Ю.С. Осипова [6,7]. Как правило, в работах перечисленных авторов исследуется задачи о граничном управлении гиперболическими системами.

Задача управления, рассматриваемая в данной статье, решается в рамках концепции позиционного управления научной школы академика Н.Н. Красовского [8]. Процесс управления колебательной системой в условиях неопределенности сводится к линейной позиционной дифференциальной игре. Известно, что линейные дифференциальные игры с фиксированным моментом окончания с помощью линейной замены переменных можно привести к виду, когда в правой части новых уравнений стоит только сумма управлений первого и второго игроков, значения которых принадлежат заданным множествам, зависящим от времени [8]. Для таких игр в случае, если терминальное множество является шаром заданного радиуса, Л.С. Понтрягиным построен альтернированный интеграл [9]. В.И. Ухоботовым построены соответствующие оптимальные позиционные управления игроков [10].

Постановка задачи. Рассмотрим длинную линию протяженностью l с четырьмя распределенными параметрами: сопротивлением R, индуктивностью L, электроемкостью C, коэффициентом потери G. Процесс передачи сигнала по такой линии будет описываться телеграфными уравнениями [11]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{L}\dfrac{\partial J(x,t)}{\partial x} - \dfrac{R}{L}V(x,t) + f_1(x,t) \\ \dfrac{\partial J(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial x} - \dfrac{G}{C}J(x,t) + f_2(x,t) \end{cases}, \tag{1}$$

где $0 \le x \le l$, $0 \le t \le p$, l — длина линии, p — конечный момент времени; $L > 0, R > 0, C > 0, G > 0$ заданы; $V(x,t)$ и $J(x,t)$ — функции описывающие изменение напряжения и силы тока, соответственно. Система (1) рассматривается при следующих начальных условиях:

$$V(x,t)|_{t=0} = g(x), J(x,t)|_{t=0} = h(x), \tag{2}$$

где функции $g(x), h(x)$ являются непрерывными.

Считаем, что напряжения и силы тока на концах линии изменяются согласно уравнениям:

$$V(0,t) = a_1(t) - b_1(t)\xi_V(t), J(0,t) = a_2(t) - b_2(t)\xi_J(t), \tag{3}$$

$$V(l,t) = a_3(t) - b_3(t)\eta_V(t), J(l,t) = a_4(t) - b_4(t)\eta_J(t). \tag{4}$$

Функции $a_i(t) \ge 0$, $b_i(t) \ge 0$, $i = \overline{1,4}$, непрерывны при $0 \le t \le p$. Пара функций$\xi_J(t)$ и $\xi_V(t)$ таких, что $|\xi_J(t)| \le 1, |\xi_V(t)| \le 1$, является управлением. Функции $\eta_J(t), \eta_V(t)$ такие, что $|\eta_J(t)| \le 1, |\eta_V(t)| \le 1$, являются помехами.

Непрерывные функции внешних возмущений $f_i(x,t)$ точно не известны, но заданы их оценки:

$$\check{f}_i(x,t) \le f_i(x,t) \le \hat{f}_i(x,t), \qquad i = 1,2, \tag{5}$$

где $\check{f}_i(x,t), \hat{f}_i(x,t)$ являются непрерывными.

Заданы числа $\Omega > 0$и $\varepsilon \ge 0$. Цель выбора управления $\left(\xi_V(t), \xi_J(t)\right)$ в (3) заключается в том, чтобы осуществить неравенство

$$\left| \int_0^l (V(x,p)\sigma_1(x) - \Omega J(x,p)\sigma_2(x))dx \right| \le \varepsilon \tag{6}$$

при любых допустимых реализациях помех $\eta_V(t), \eta_J(t)$в (4) и для любых непрерывных функций $f_i(x,t), i = 1,2$, для которых существует и единственно решение задачи (1), (2). Число Ω является желаемым значением волнового сопротивления длинной линии, которое определяется как соотношение напряжения к силе тока. Функции σ_i: $[0,1] \to R, i = 1,2$, являются непрерывными и удовлетворяют условиям $\sigma_i(0) = \sigma_i(l) = 0$.

Формализация задачи. Опишем допустимое правило формирования пары $\left(\xi_V(t), \xi_J(t)\right)$. Это означает, что каждому моменту времени $0 \le \vartheta \le p$ и любым допустимым функциям $V(x,\ \vartheta), J(x,\ \vartheta)$ сопоставляется пара измеримых функций $\left(\xi_V(t), \xi_J(t)\right)$ такая, что $\left(\xi_V(t), \xi_J(t)\right)$: $[\vartheta, p] \to [-1,1] \times [-1,1]$.

Будем обозначать это правило при $\vartheta \le t \le p$ следующим образом

$$\left(\xi_V(t), \xi_J(t)\right) = N(t,\ V(\cdot,\ \vartheta), J(\cdot,\ \vartheta)). \tag{7}$$

Зафиксируем разбиение отрезка $[0, p]$

$$\omega: 0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_{m+1} = p,$$

с диаметром разбиения $d(\omega) = \max\limits_{0 \le s \le p} (t_{s+1} - t_s)$.

Пусть $V^{(\omega)}(x, t_s), J^{(\omega)}(x, t_s), 0 \le x \le l$, реализовались в момент времени $t_s, s = \overline{0, m}$.

Пусть реализовались непрерывные функции $f_i(x, t), i = 1{,}2$. Обозначим через $V^{(\omega)}(x, t), J^{(\omega)}(x, t), 0 \le x \le l, t_s \le t \le t_{s+1}$, решения системы (1) со следующими начальными и краевыми условиями:

$$\begin{gathered} V^{(\omega)}(x, t_s) = g_s(x), J^{(\omega)}(x, t_s) = h_s(x), \\ V^{(\omega)}(0, t) = a_1(t) - b_1(t)\xi_V(t), J^{(\omega)}(0, t) = a_2(t) - b_2(t)\xi_J(t), \\ V^{(\omega)}(l, t) = a_3(t) - b_3(t)\eta_V(t), J^{(\omega)}(l, t) = a_4(t) - b_4(t)\eta_J(t). \end{gathered} \tag{8}$$

Положим $g_s(x) = V^{(\omega)}(x, t_{s-1}), h_s(x) = J^{(\omega)}(x, t_{s-1})$.

Будем говорить, что управление (7) гарантируют выполнение цели (6), если для любого $\gamma > \varepsilon$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любых непрерывных $f_i(x, t), i = 1{,}2$, удовлетворяющих (5), для которых существует и единственно решение задачи (1), (2) и для любого разбиения ω с диаметром $d(\omega) < \delta$ выполнено неравенство:

$$\left| \int_0^l \left(V^{(\omega)}(x, p)\sigma_1(x) - \Omega J^{(\omega)}(x, p)\sigma_2(x) \right) dx \right| \le \gamma \tag{9}$$

Переход к одномерной задаче. Пусть функции $\psi(x, \tau)$ и $\varphi(x, \tau)$ при $0 \le x \le l, 0 \le \tau \le p$, является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} = -\dfrac{1}{\Omega L} \dfrac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial x} - \dfrac{G}{C}\varphi(x, \tau) \\ \dfrac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial \tau} = -\dfrac{\Omega}{C} \dfrac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial x} - \dfrac{R}{L}\psi(x, \tau) \end{cases}, \tag{10}$$

$$\varphi(x, 0) = \sigma_1(x), \psi(x, 0) = \sigma_2(x), 0 \le x \le l. \tag{11}$$

Используя условие (5) и (10), (11) получим, что

$$\begin{gathered} \int_0^l f_1(x, t)\, \psi(x, p - t)\, dx = \beta_1(t) + \lambda_1(t)\eta_1(t), \qquad |\eta_1(t)| \le 1, \\ \int_0^l f_2(x, t)\varphi(x, p - t)\, dx = \beta_2(t) + \lambda_2(t)\eta_2(t), \qquad |\eta_2(t)| \le 1, \end{gathered} \tag{12}$$

где функции $\beta_i(t)$, $\lambda_i(t)$ непрерывны при $i = 1{,}2, 0 \le t \le p$, и определяются следующим образом:

$$\beta_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\hat{f}_i(x, t) + \check{f}_i(x, t))\, \psi(x, p - t) dx,$$

$$\beta_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\hat{f}_i(x,t) + \check{f}_i(x,t))\,\varphi(x,p-t)dx,$$

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\hat{f}_1(x,t) - \check{f}_1(x,t)\right)|\psi(x,p-t)|dx \geq 0,$$

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\hat{f}_2(x,t) - \check{f}_2(x,t)\right)|\varphi(x,p-t)|dx \geq 0.$$

Зафиксируем управления (7) и разбиение ω. Перейдем к новой одномерной переменной:

$$z^{(\omega)}(\mathrm{t}) = \int_0^l (V^{(\omega)}(x,t)\psi(x,p-t) - \Omega J^{(\omega)}(x,t)\varphi(x,p-t))dx + + \int_t^p (\beta(r))dr, \qquad (13)$$

где

$$\beta(t) = \beta_1(t) - \Omega\beta_2(t) + \frac{1}{L}\left(\psi(0,p-t)a_2(t) - \psi(l,p-t)a_4(t)\right) +$$

$$+ \mathrm{x} + \frac{\Omega}{C}(\varphi(l,p-t)a_3(t) - \varphi(0,p-t)a_1(t)).$$

Следую подходу, изложенному в [12], используя формулы (1), (8), (10)-(12) и принимая помехи и неопределенности за управление второго игрока (противника) [13], получим однотипную дифференциальную игру [14]:

$$\dot{z}^{(\omega)}(t) = -a(t)u + b(t)v, |u| \leq 1, |v| \leq 1\,, \qquad (14)$$

где

$$a(t) = \frac{\Omega}{C}|\varphi(0,p-t)|b_1(t) + \frac{1}{L}|\psi(0,p-t)|b_2(t),$$

$$u(t) = \frac{\Omega}{C}\frac{\varphi(0,p-t)b_1(t)}{a(t)}\xi_V(t) - \frac{1}{L}\frac{\psi(0,p-t)b_2(t)}{a(t)}\xi_J(t) \text{ при } a(t) > 0,$$

$$b(t) = \lambda_1(t) + \Omega|\lambda_2(t)| + \frac{1}{L}|\psi(l,p-t)|b_4(t) + \frac{\Omega}{C}|\varphi(l,p-t)|b_3(t),$$

$$v(t) = \frac{\lambda_1(t)}{b(t)}\eta_1(t) - \frac{\Omega\lambda_2(t)}{b(t)}\eta_2(t) + \frac{1}{L}\frac{\psi(l,p-t)b_4(t)}{b(t)}\eta_J(t) -$$

$$-\frac{\Omega}{C}\frac{\varphi(l,p-t)b_3(t)}{b(t)}\eta_V(t) \text{ при } b(t) > 0.$$

Если $a(t) = 0$, то $u(t)$ берется любым из $[-1,1]$. Если $b(t) = 0$, то $v(t)$ берется любым из $[-1,1]$. Здесь u — управление первого игрока, а v — управление второго игрока.

Отсюда следует, что цель управления (9) принимает вид:

$$\left|z^{(\omega)}(\mathrm{p})\right| \leq \gamma\,. \tag{15}$$

Обозначим

$$F(z) = \max\left(|z| + \int_0^p \big(b(r) - a(r)\big)dr\,; \max_{0\leq\tau\leq p}\int_\tau^p \big(b(r) - a(r)\big)dr\right).$$

Результаты. Получены условия окончания в исходной задаче (1)-(6).

Теорема 1. Пусть заданы начальные законы изменения напряжения и силы тока $V(x,0) = g(x), J(x,0) = h(x)$, и число $\varepsilon \geq 0$, такие, что выполнено неравенство $F(z(0)) \leq \varepsilon$. Тогда существует управление (7), гарантирующее выполнение поставленной цели (6).

Теорема 2. Пусть число $0 \leq \gamma < F(z(0))$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что $\left|z^{(\omega)}(\mathrm{p})\right| > \gamma$ для любой ломаной $z^{(\omega)}(\mathrm{t})$ с диаметром разбиения $d(\omega) < \delta$. Тогда найдется такая реализация помех (4) и внешних возмущений (5), при которых невозможно достигнуть поставленной цели (6) при любых управлениях (7).

Заключение. Таким образом, исходная задача управления системой телеграфных уравнений (1) с помощью замены переменных (13) была сведена к одномерной дифференциальной игре с однотипной динамикой (14), (15). Используя результаты [14], для задачи (1)-(6) получены необходимые и достаточные условия окончания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А.А. Задача граничного управления для системы волновых уравнений / А.А. Андреев, С.В. Лексина // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2008. — № 1 (16). — С. 5-10.
2. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. — М.: Наука, 1965. — 474 с.
3. Дегтярев Г.Л. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами / Г.Л. Дегтярев, Т.К. Сиразетдинов. — М.: Машиностроение, 1986. — 216 с.
4. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией / В.А. Ильин // Дифференц. уравн. — 2000. — Т. 36, № 11. — С. 1513-1528.
5. Ильин В.А. Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев. — Докл. РАН, 2004. Т. 394, № 2. С. 154-158.
6. Короткий А.И. Реконструкция управлений в гиперболических системах / А.И. Короткий, Е. И. Грибанова // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 3. — С. 64-78.
7. Осипов Ю.С. К теории позиционного управления в гиперболических системах / Ю.С. Осипов, С.П. Охезинов // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 233, № 4. — С. 551-554.
8. Красовский Н.Н. Позиционные дифференциальные игры: монография / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
9. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования / Л.С. Понтрягин // Мат. сб. — 1980. — Т. 112, № 3. — С. 307-330.
10. Ухоботов В. И. Синтез управления в однотипных дифференциальных играх с фиксированным временем / В. И. Ухоботов // Вестник ЧелГУ. — 1996. — № 3. — С. 178-183.
11. Кошляков Н. С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков. — ОНТИ, 1936. — 767 с.

12. Ливанов Н. Д. On one problem of control of voltage during signal transmission in a long line / Н. Д. Ливанов, В. И. Ухоботов // Вестник ЮУрГУ серия «Компьютерные технологии. Управление. Радиоэлектроника». — 2021. — № 3. — С. 59-65.
13. Красовский Н. Н. Управление динамической системой / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1985. — С. 511-516.
14. Ухоботов В. И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учебное пособие / В. И. Ухоботов. — Челябинск: Челябинский государственный университет, 2005. — 124 с.