

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ КАК СПОСОБ ФОРМИРОВАНИЯ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Аннотация. В данной работе исследуется влияние использования математических софизмов на уроках математики на развитие критического мышления учащихся. Также в работе представлены теоретические основы использования софизмов в учебном процессе; рассмотренный в работе материал подтверждает, что интеграции математических софизмов в уроки математики является ценным вкладом в развитие критического мышления учащихся.

Ключевые слова: софизм, критическое мышление, рассуждение, псевдодоказательство, математика, урок.

Введение. Формированию критического мышления учащихся посвящены научные труды следующих авторов: Векслер С.И. [2], Дмитриев Г.Д. [3], Дьюи Д. [4], Попков В.А. [9] и др. Каждому уровню развития критического мышления, согласно С.И. Векслеру [2], соответствуют не только различные предметы, но и определенные формы практической деятельности: автор рассматривает обучение законам логики не как соответствующий раздел в учебном предмете, а как необходимый этап в процессе обучения критическому мышлению. Г.Д. Дмитриев [3] определяет следующие важные умения, характерные для критически мыслящего человека: определять ложные стереотипы, ведущие к неправильным выводам; выявлять предвзятое отношение, мнение и суждение; уметь отличить факт от предположения и личного мнения; подвергать сомнению логическую непоследовательность устной и письменной речи. По мнению Д. Дьюи [4] критическое мышление выступает конечной интеллектуальной целью образования; оно представляет собой процесс, направленный на активную деятельность по осмыслению, применению, анализу, обобщению или оценке информации. Каждый из перечисленных выше исследователей по-своему формулировал определения понятие критического мышления, его отличительные характеристики и способы его формирования, однако все авторы сходятся в том, что критическому мышлению нужно обучать, так как спонтанное развитие не обеспечивает должного уровня.

В современном мире развитие критического мышления играет ключевую роль в успешной адаптации к быстро меняющейся информационной среде. Способность мыслить критически поможет учащимся анализировать информацию, принимать обоснованные решения, отличать факты от мнений и эффективно решать проблемы в различных сферах жизни. Математические софизмы являются особенно эффективным инструментом развития критического мышления на уроках математики, потому что они требуют анализа логических ошибок, применения математических концепций для их выявления, формулирования обоснованных выводов.

Проблема исследования. Математика является тем самым предметом, который помогает активизировать такое свойство мышления, как критичность. Математические софизмы, представляющие собой намеренно ложные аргументы, бросают вызов логическим рассуждениям, что заставляет учащихся переосмысливать свои математические представления. Интеграция математических рассуждений, требующих понимания сущности теоретического материала, самостоятельного размышления и сознательного оперирования известным запасом

математических фактов, в уроки математики поможет критически осмысливать каждый этап рассуждений в соответствии с усвоенным запасом математических знаний и практических умений.

Использование математических софизмов позволит учащимся научиться строить аргументированные доказательства; этот навык является необходимым при решении заданий второй части ЕГЭ, где как в геометрических, так и в алгебраических задачах требуется пояснение шагов решения, в том числе аргументирование совершаемых математических преобразований, выводов, применения теорем. Не обладая навыком доказательства в достаточной мере, учащийся не сможет получить высоких баллов при решении заданий повышенной сложности.

Для доказательства тезиса, приведенного выше, приведем фрагмент таблицы результатов выполнения наиболее сложных заданий второй части ЕГЭ 2022 г. (табл. 1). Средний процент верного выполнения геометрических задач очень низкий: задача 13 — 1%, задача 16 — 4%. Такие результаты (с небольшим изменением) наблюдаются ежегодно. А это значит, что выбранная тема исследования остается актуальной каждый год.

Учителя математики в разных областях РФ бьются над решением данной проблемы, обучаясь на третьем курсе педагогического направления было принято решение обобщить существующий опыт учителей и изучить как софизмы позволяют развивать критическое мышление на уроках математики. Рассмотрим результаты выполнения заданий второй части ЕГЭ в профильной математике (табл. 1).

Таблица 1

Результаты выполнения заданий второй части ЕГЭ профильной математики (2022 г).

№ задания в КИМ	Проверяемые элементы содержа- ния / умения	Уровень сложно- сти зада- ния	Кол-во участни- ков	Процент выполнения задания в субъекте Российской Федерации				
				Средний	в группе не пре- одолев- ших мини- мальный балл	в группе от мини- мального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
13	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	П	8713	1	0	0	1	18
16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	П	8713	4	0	0	4	48
17	Уметь решать уравнения и неравенства	В	8713	6	0	0	4	79
18	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	В	8713	2	0	0	2	15

Основными причинами невыполнения или неверного выполнения учащимися данных заданий являются: во-первых, незнание основных понятий курса математики, во-вторых, не сформированное умение анализировать большой текст условия задачи, и соответственно не умение построить чертеж по условию. Также можно выделить не умение доказывать умозаключения, не сформированный навык самопроверки.

Процент верного выполнения алгебраических задач также достаточно низкий: задача 17 — 6%, задача 18 — 2%. Основные причины невыполнения или неверного выполнения учащимися данных заданий: неумение анализировать условие задачи, неумение применять свойства алгебраических выражений к решению уравнений, неумение составлять математическую модель, отсутствие самопроверки.

Проанализировав сказанное выше, можно сделать вывод, что основные причины невыполнения сложных заданий второй части ЕГЭ заключаются в отсутствии умения анализировать, грамотно и аргументированно строить доказательство, применять свойства тех или иных математических объектов при решении заданий. Данные навыки относятся к составляющим критического мышления, формировать эти навыки поможет систематическое использование на уроках математики математических софизмов.

Исходя из вышесказанного проблему исследования можно сформулировать следующим образом: развитие критического мышления учащихся на уроках математики с помощью математических софизмов.

Задачей исследования является изучение влияния использования софизмов на развитие критического мышления обучающихся средней школы.

Материалы и методы. Среди методов исследования можно выделить психолого-педагогические методы — это методы, занимающиеся изучением влияния возрастной психологии на развитие критического мышления обучающихся. В ходе работы над данной темой было проанализировано более десяти источников, в числе которых книги, учебные пособия, диссертации, авторефераты, статьи по теме исследования.

Рассмотрим в формате таблицы понятие «критическое мышление» и вариации его определений, данные различными авторами в своих научных работах (табл. 2).

Таблица 2

Контент-анализ определения понятия «критическое мышление»

<i>Автор</i>	<i>Определение понятия «критическое мышление»</i>
Г.Д. Дмитриев	один из способов интеллектуальной деятельности человека, который характеризуется следующими умениями: определять ложные стереотипы, ведущие к неправильным выводам; выявлять предвзятое отношение, мнение и суждение; уметь отличить факт, от предположения и личного мнения; подвергать сомнению логическую непоследовательность устной и письменной речи; определять суть проблемы и альтернативные пути ее творческого решения; уметь делать вывод о том, чьи конкретно ценностные ориентации, интересны, идейные установки отражают текст; избегать категоричности в утверждениях [3]
Д. Дьюи	интеллектуально организованный процесс, направленный на активную деятельность по осмыслению, применению, анализу, обобщению или оценке информации, полученной или создаваемой путем наблюдения, опыта, рефлексии, рассуждений или коммуникации как руководство к действию или формированию убеждения [4]

Автор	Определение понятия «критическое мышление»
В.А. Попков	специфическая форма оценочной деятельности субъекта познания, направленная в самом общем смысле на выявление степени соответствия (или несоответствия) того или иного продукта принятым эталонам и стандартам, включающая определенные процедуры и способствующая смысловому самоопределению субъекта познания по отношению к самым разнообразным проявлениям окружающего мира и его продуктивному преобразованию [9]
С.И. Векслер	прижизненно формирующееся мышление, развитие которого можно ускорить с помощью специально организованного обучения, тренируя школьников, прежде всего в нахождении и опровержении ошибок, а также в рецензировании ученических работ [2]
Г.М. Коджаспирова «Словарь по педагогике»	способность анализировать информацию с позиций логики, умение выносить обоснованные суждения, решения и применять полученные результаты как к стандартным, так и нестандартным ситуациям, вопросам и проблемам [5]

Обобщив представленные в таблице вариации определения понятия «критическое мышление», можно сформировать «общее определение» критического мышления, которое представляет собой обязательное наличие предварительного анализа, проверки и оценки представленного суждения перед ответом на заданный вопрос с позиций их достоверности, логичности и значимости.

Приведенные выше определения понятия критического мышления можно обобщить и представить в виде схемы, наглядно демонстрирующей основные составляющие критического мышления.



Рис. 1. Составляющие критического мышления

Критическое мышление, умение анализировать, оценивать и интерпретировать информацию для принятия обоснованных решений является необходимым навыком для успеха в обучении математике.

Софизм (от греч. *sophisma* — уловка, выдумка, головоломка) — ложный результат, полученный с помощью рассуждений, которые только кажутся правильными, но обязательно содержат ту или иную ошибку.

Разбор софизма реализуется в два этапа:

- определение суждения, содержащего ошибку;
- подбор аргументов, позволяющих обосновать наличие ошибки.

Самым сложным в разборе софизма является нахождение ошибки. Такая сложность обусловлена следующими факторами: подобные задания являются для учащихся «нетрадиционными», поэтому у них нет четкого алгоритма действий, следуя которому можно прийти к ответу; не все учащиеся в достаточной мере владеют методами самопроверки.

Софизмы поощряют учащихся задавать вопросы, искать недостатки в логических аргументах, тем самым актуализируя собственную систему знаний. Разбор софизмов дает возможность подойти к решению задач осмысленно, применить имеющиеся знания в новых условиях, разработать свой подход к решению нестандартных задач.

Включение софизмов и парадоксов в уроки математики может осуществляться различными методами:

1. *Представление софизмов*: ученикам может быть представлено несколько софизмов для анализа и последующего обсуждения их недостатков. Данное действие будет полезным, так как оно позволит каждому учащемуся самостоятельно вникнуть в задание, найти допущенную в ходе рассуждений ошибку, подобрать аргументы, подтверждающие наличие ошибки в рассуждениях, объяснить остальным учащимся (или своей группе, если работа осуществляется в группах) свою точку зрения.

2. *Создание софизмов*: учащиеся могут создавать собственные софизмы, исследуя границы математических понятий, правил, законов. Такая работа поможет учащимся глубже вникнуть в изучаемую тему, проанализировать то, какие ошибки могут совершаться в процессе изучения данной темы, на основе выявленных потенциальных ошибок создать свой софизм, демонстрирующий важность правильного применения какого-либо математического действия, закона. Также самостоятельное создание софизмов минимизирует шанс совершения ошибок, которые учащиеся сами выявили в процессе выполнения задания.

3. *Оценка способностей*: софизмы могут использоваться для оценки способностей учащихся к глубокому мышлению, анализу аргументов и обоснованным выводам. Таким способом можно проверить, насколько хорошо усвоена та или иная тема, насколько у учащихся развита способность применять имеющиеся знания в нестандартных ситуациях. Также в случае возникновения у учащихся затруднений в процессе самостоятельного решения софизмов преподаватель сможет выявить определенные пробелы в знаниях учащихся с целью их дальнейшего устранения.

После коллективного или самостоятельного разбора софизмов будет полезно провести рефлексию: это даст учащимся возможность проанализировать то, чем они руководствуются в процессе решения подобных заданий, каких знаний им не хватает в случае возникновения затруднений в процессе разбора софизма, и, проведя самоанализ, заняться ликвидацией про-

белов в собственных знаниях, если таковые имеются. Таким образом каждый учащийся сможет самостоятельно оценить свой уровень развития критического мышления, понять свои сильные и слабые стороны, построить план дальнейших действий.

Результаты. Для наглядной демонстрации встраивания софизмов в процесс обучения ниже представлен фрагмент таблицы тематического планирования курса алгебры 8 класса. В табл. 3 указаны софизмы, которые можно использовать в рамках изучения каждой из представленных тем.

Таблица 3

Включение софизмов в образовательный процесс

Темы	Софизмы, которые можно разобрать в рамках указанной темы
Квадратные корни	1. «Любые два неравных числа равны». 2. «Все числа равны между собой». 3. «Любое положительное число равно числу, ему противоположному»
Степень с целым показателем	1. «Сумма любых двух чисел равна их полусумме». 2. «Натуральная степень любого числа равна бесконечному произведению единиц»
Алгебраическая дробь	1. «Семь равно тринадцати»
Квадратные уравнения	1. «Единица в бесконечно большой степени равна произвольному числу»
Системы уравнений	1. «Восемь равно шести»
Неравенства	1. «Если A больше B , то A всегда больше, чем $2B$ ». 2. «Всякое положительное число является отрицательным»

Для подробной иллюстрации процесса формирования критического мышления с помощью математических софизмов рассмотрим урок систематизации знаний в восьмом классе по теме «Неравенства» на уроке алгебры.

В первой половине урока дети решают несколько задач на закрепление материала с учителем, затем самостоятельно, сверяя ответы с преподавателем. Во второй половине урока учитель предлагает учащимся самостоятельно выполнить задание иного характера, чем предыдущие: учащимся дается математическое «доказательство» заведомо ложного утверждения (софизма), в котором нужно найти ошибку.

Данное утверждение звучит так: «Если A больше B , то A всегда больше, чем $2B$ ».

Далее дается доказательство этого утверждения:

Возьмем два произвольных положительных числа A и B таких, что $A > B$.

Умножим обе части неравенства на B , получим: $AB > B^2$.

От обеих частей неравенства отнимем A^2 , получим: $AB - A^2 > B^2 - A^2$, данное неравенство равносильно неравенству: $A(B - A) > (B + A)(B - A)$. (1)

Разделим обе части неравенства (1) на $B - A$, получим: $A > B + A$. (2)

Почленно прибавим к неравенству (2) исходное неравенство $A > B$, получим: $2A > 2B + A$, вычтем из каждой части неравенства A , получим $A > 2B$.

Итак, если $A > B$, то $A > 2B$.

Это означает, например, что из неравенства $6 > 5$ следует то, что $6 > 10$.

Рассмотрим действия по разбору данного софизма с указанием применения «составляющих» критического мышления на каждом шаге:

1 шаг: учащемуся необходимо внимательно изучить представленное доказательство и, используя набор имеющихся знаний, проверить точность преобразования математических выражений, правильность применения математических законов.

Формируемые на данном этапе навыки критического мышления: наблюдательность, внимание к деталям.

2 шаг: обратить внимание на ту часть рассуждения, которая вызвала наибольшие сомнения (поставить перед собой определенные вопросы о точности вычислений, правильности применения математических законов и равносильности переходов, и найти на них ответ, самостоятельно проведя описанные в доказательстве действия, проверив тем самым корректность представленного доказательства); выявить ошибку.

Формируемые навыки критического мышления: умение оценивать информацию, умение видеть и формулировать проблему.

3 шаг: опираясь на известные математические законы и правила, подобрать аргументы, доказывающие наличие ошибки в представленных рассуждениях. Если $A > B$, то $B - A < 0$. Но, тогда обе части неравенства (1) делятся на отрицательное число.

Формируемые навыки критического мышления: умение грамотно аргументировать свою точку зрения.

4 шаг: провести доказательство с учетом исправленной ошибки. После исправления допущенной в рассуждениях ошибки указанное неравенство (2) должно выглядеть следующим образом: $A < B + A$, почленно прибавив к нему исходное неравенство $B < A$ ($A > B$), получим: $A + B < B + 2A$, вычтем из обеих частей неравенства A , получим: $B < B + A$, то есть исходное неравенство $A > B$. (3)

Или же мы можем пойти другим путем, преобразуем неравенство $A + B < B + 2A$ следующим образом: перенесем все слагаемые, содержащие A , в левую сторону неравенства, а все слагаемые, содержащие B , в правую, получим: $-A < 0$ или $A > 0$. (4)

Формируемые навыки критического мышления: умение найти верный способ решения проблемной ситуации.

5 шаг: проанализировать полученный результат, сравнить его с результатом, представленным в софизме, сделать вывод. Однако ни одно из полученных неравенств (3) и (4) не подтверждает тезиса, высказанного в софизме, следовательно, данное суждение ошибочно, так как в процессе его доказательства была допущена грубая ошибка.

Формируемые навыки критического мышления: умение анализировать и сравнивать, рефлексия.

Следует отметить, что при разборе софизма на уроке необходимо уделять внимание каждому этапу процесса моделирования.

Заключение

Проведя анализ теоретического материала по данной теме, а также подробно разобрав решение софизма и проанализировав, как на каждом шаге разбора задействуются элементы критического мышления, можно сделать следующий вывод: включение математических софизмов в образовательный процесс по математике является эффективным средством формирования критического мышления учащихся.

Важно обратить внимание на тот факт, что сформировать у учащихся умение мыслить критически, используя только стандартные задачи, невозможно, так как выполнение исключительно шаблонных заданий ведет к формированию мышления, ограниченного рамками известных алгоритмов. Использование нестандартных задач, таких как математические

софизмы, позволяют отойти от стандартных алгоритмов решения, проявить имеющиеся знания в новой ситуации.

Использование математических софизмов на уроках математики позволяет сформировать интерес к изучению предмета: разбор софизма, поиск допущенной ошибки является увлекательным процессом, ведь, применяя собственные знания, учащийся восстанавливает истину, что безусловно доставляет удовольствие, которое возрастает в зависимости от того, насколько процесс разбора задания был длительным и трудоемким.

В ходе работы над данной темой были разобраны более десяти математических софизмов, разработан тематический план использования софизмов в образовательной практики и составлены пояснительные материалы к урокам с использованием софизмов. В дальнейшем планируется апробировать полученные результаты в ходе педагогической практики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимова Т.А. Сущность критического мышления: от Сократа до настоящего времени / Т.А. Акимова // *Kazakhstan science journal*. — 2019. — Т. 2, № 5. — С. 31-45.
2. Векслер С.И. Развитие критического мышления старшеклассников в процессе обучения: автореф. дис. ... канд. пед. наук / С.И. Векслер. — Киев, 1974. — 20 с.
3. Дмитриев Г.Д. Многокультурное образование: учебник для вузов / Г.Д. Дмитриев. — М.: Народное образование, 1999. — 208 с.
4. Дьюи Д. Психология и педагогика мышления / Д. Дьюи; пер. Н.М. Никольской. — Москва: Юрайт, 2024. — 166 с. — (Антология мысли). — URL: <https://urait.ru/bcode/544266> (дата обращения: 15.04.2024). — Текст: электронный.
5. Коджаспирова Г.М. Словарь по педагогике / Г.М. Коджаспирова, А.Ю.Коджаспиров. — М.: ИКЦ МарТ; Ростов н/Д: Изд. ц. МарТ, 2005. — 448 с.
6. Койшыбай Е.О. Анализ навыков критического мышления при решении задач по алгебре с точки зрения когнитивного стиля / Е.О. Койшыбай. — Текст: непосредственный // *Исследования молодых ученых: материалы LXXVII Междунар. науч. конф. (г. Казань, март 2024 г.)*. — Казань: Молодой ученый, 2024. — С. 41-45. — URL: <https://moluch.ru/conf/stud/archive/511/18392/> (дата обращения: 17.04.2024).
7. Кузнецова Д.А. Особенности развития мышления в подростковом возрасте / Д.А. Кузнецова, О.А. Братцева. — Текст: непосредственный // *Молодой ученый*. — 2018. — № 22 (208). — С. 285-288. — URL: <https://moluch.ru/archive/208/50908/> (дата обращения: 15.04.2024).
8. Пономарева Е.В. Применение технологии критического мышления на уроках математики / Е.В. Пономарева, А.К. Каримова, Л. В. Звезда. — Текст: непосредственный // *Молодой ученый*. — 2020. — № 34 (324). — С. 133-138. — URL: <https://moluch.ru/archive/324/73282/> (дата обращения: 10.04.2024).
9. Попков В.А. Критический стиль мышления в профессиональном самостановлении преподавателя высшей школы: автореф. ... дис. д-ра психол. наук. — Москва, 2002. — 42 с.
10. Развитие критического мышления обучающихся в образовательном процессе / В.М. Жураковская, А.Л. Морозова, Т.П. Симакова, С.Л. Рыков, Т.В. Авгусманова, Е.В. Антонова // *Образовательное пространство в информационную эпоху* — 2019: сборник научных трудов. Материалы Международной научно-практической конференции / под ред. С.В. Ивановой. — 2019. — С. 992-1012.
11. Анализ результатов выполнения заданий КИМ. 2022. — URL: https://rcoi02.ru/sao11/files/analysis_SAO_EGE_MA_PROF_2022.pdf (дата обращения 06.04.2024).