В. Н. Баженова, Д. А. Курасов

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 539.384.6

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА ПЛАСТИН

Аннотация. В работе представлен сравнительный анализ методов нахождения поперечного изгиба пластин, проведение оценки методов и выбор наилучшего.

Ключевые слова: решение Леви, решение Навье, изгиб тонких пластин, метод двойных тригонометрических рядов, метод одинарных тригонометрических рядов, уравнение Софи Жермен.

Введение. В работе было выполнено исследование теоретических основ поперечного изгиба пластин [1, 2]. Применены методы математики в прикладных областях, использующих инженерные методы расчета на прочность, жесткость и устойчивость простейших элементов конструкции. Целью работы является исследование методов для нахождения поперечного изгиба пластин, с дальнейшим их сравнительным анализом.

Проблема исследования. Решение Навье применяется для явления задач изгиба пластины прямоугольной формы, шарнирно закрепленной относительно контура под действием нагрузки в поперечном направлении *q(x,y)*.

Основываясь на предположении, что функцию *w(x,y)* может иметь вид двойного тригонометрического ряда:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, m = 1,2 \dots, n = 1,2 \dots, \tag{1}$$

где A_{mn} неизвестные коэффициенты, которые можно найти из выражения:

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab\left((\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2\right)^2}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy. \tag{2}$$

Для решения Навье функция прогиба примет вид:

$$w(x,y) = \frac{1}{D\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}\frac{sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{\left((\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2\right)^2}, \tag{3}$$

где $q_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy.$

При использовании формулы для функции прогиба можно получить аналитические зависимости для нахождения изгибающих моментов, перерезывающих сил и напряжений для пластины.

Материалы и методы. Аналогично предыдущему методу рассмотрим метод одинарных тригонометрических рядов (решение Леви). Решение представляется в общем виде, так как такой вид решения подходит для пластин прямоугольной формы, у которых два взаимно противоположных края имеют шарнирное закрепление, а два оставшихся имеют произвольное закрепление.

С учетом граничных условий функция прогибов записывается в виде:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y \sin\frac{m\pi x}{a}, \tag{4}$$

где Y — произвольная функция аргумента y.

Данная функция прогиба (4) должна удовлетворять дифференциальному уравнению полученному Софи Жермен:

$$D\Delta\Delta w = q. \tag{5}$$

где оператор ΔΔ является бигармоническим и в развернутом виде имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \tag{6}$$

При выполнении всех условия (5) можно выделить функцию Y. В данном случае она примет вид:

$$Y = Ach\frac{m\pi y}{a} + Bych\frac{m\pi y}{a} + Csh\frac{m\pi y}{a} + Dysh\frac{m\pi y}{a} + \overline{F_m}(y). \tag{7}$$

Подставляя полученную функцию в функцию прогибов:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}(Ach\frac{m\pi y}{a} + Bych\frac{m\pi y}{a} + Csh\frac{m\pi y}{a} + Dysh\frac{m\pi y}{a} + \overline{F_m}(y)) \sin\frac{m\pi x}{a}. \tag{8}$$

где $\overline{F_m}(y)$ является частным решением неоднородного уравнения.

Для нахождения постоянных *A, B, C, D* нужно использовать граничные условия на оставшихся краях пластины. При различных закреплениях краев будут получаться различные значения для *A, B, C, D*.

Для полного анализа приведем пример частного решения для обоих методов.

Рассмотрим изгиб пластины, которая имеет равномерно распределенную нагрузку *q(x,y) = q = const*.

Тогда для решения Навье функция прогиба после всех операций примет вид:

$$w(x,y) = \frac{16q}{\pi^6 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{mn(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2})^2}. \tag{9}$$

Так как нагрузка распределена равномерно по всей пластине, то можно сделать вывод, что максимальный ее прогиб возникает в центре, т. е. при $x = \frac{a}{2}$ и $y = \frac{b}{2}$:

$$w_{max}(x,y) = \frac{192qa^4}{\pi^6 Eh^3}(1-\mu^2)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2})^2}, \tag{10}$$

где *m* = 1, 3, 5… и *n*=1, 3, 5…

Например, если принять, что пластина квадратная и $\mu = 0{,}3$, сохраняя первые четыре члена ряда получаем, что функцией прогиба будет

$$w_{max}(x,y) = \frac{16qa^4}{D\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2})^2} = 0{,}0443\frac{qa^4}{Eh^3}, \tag{11}$$

полученный ответ является точным для функции прогиба, что говорит о том, что ряд входящий в функцию имеет быструю сходимость.

Также найдем частное решение метод одинарных тригонометрических рядов. Примем во внимание тот факт, что для метода Леви [3] стоит уточнить характер опирания пластины. Так при шарнирном опирании постоянные из решения (7) определяются из краевых условий.

При соблюдении граничных условий: $w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$, получаем функцию:

$$Y = \frac{4qa^4}{m^4\pi^5 D}\left(1 - \frac{\left(1+\frac{m\pi q}{4a}th\frac{m\pi q}{2a}\right)ch\frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{2a}sh\frac{m\pi y}{a}}{ch\frac{m\pi q}{2a}}\right), \tag{12}$$

где m = 1, 3, 5…

Подставим полученное значение в ряд (4):

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{4qa^4}{m^4\pi^5 D}\left(1 - \frac{\left(1+\frac{m\pi q}{4a}th\frac{m\pi q}{2a}\right)ch\frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{2a}sh\frac{m\pi y}{a}}{ch\frac{m\pi q}{2a}}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}, \tag{13}$$

где m = 1, 3, 5…

Можно видеть, что ряд имеет быструю сходимость, это можно увидеть, если ограничиться первым членом ряда, пусть m=1, тогда

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\left(1 - \frac{\left(1+\frac{\pi q}{4a}th\frac{\pi q}{2a}\right)}{ch\frac{\pi q}{2a}}\right). \tag{14}$$

Для пластины $w = 0{,}0441\frac{qa^4}{Eh^3}$, что отличается от точного значения на 1%.

Заключение. Благодаря найденным решениям и изучением общих и частных случаев, мы можем сделать вывод, что метод Навье имеет гораздо больше ограничений, так как подходит только для прямоугольных пластин, шарнирно опертых по контуру. При этом метод Леви является более общим, поскольку хоть и имеет определенное ограничение в виде закрепления пластины, у которой два противоположных конца имеют шарнирную опору, а два других имеют произвольное закрепление, однако решение Леви более удобно, даже для пластинки прямоугольной формы, шарнирно опертой по всему контуру. Этот метод гораздо более точен, чем предыдущее решение Навье, поскольку в решении Леви функция прогиба, которую мы находим, приближается с помощью тригонометрических функций в одном направлении, а в другом находится с помощью дифференциального уравнения без всякого приближения. Также оно достаточно удобно для проведения больших расчетов различных механических систем [4, 5] с соответствующей визуализацией на основе цифровых программных продуктов [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Пластики и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер ; пер. с англ. В.И. Контовта ; под ред. Г.С. Шапиро. — 2-е изд., стер. — Москва: Наука, 1966. — 635 с.
2. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. — Москва: Высш. шк., 1990. — 398 с.
3. Кудрявцев О.Е. Эффективный численный метод решения специального класса интегро-дифференциальных уравнений, связанных с моделями Леви / О.Е. Кудрявцев // Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, № 5.
4. Эксцентриковый подшипник качения: пат. 73045 РФ / Г.Ю. Волков, Д. А. Курасов — 2008. — Бюл. № 13.
5. Безводильная планетарная передача: пат. 108525 РФ / Г.Ю. Волков, Д.А. Курасов, С.В. Колмаков. — 2011. — Бюл. № 26.
6. Kurasov D.A. Digital technologies Industry 4.0 // CEUR Workshop Proceedings. — 2021. — 2843.