Н. П. КАМШИЛОВ, Т. В. ПАВЛОВА

Ишимский педагогический институт им. П. П. Ершова, (филиал) ТюмГУ, г. Ишим

УДК 519.1

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОЧЕТАНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ И ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Аннотация. В статье рассматривается проблема различных интерпретаций начальных понятий комбинаторики. Представлены разные методы доказательств некоторых свойств сочетаний без повторений. Рассмотрено построение треугольника Паскаля на основе доказанных свойств.

Ключевые слова: комбинаторика, число сочетаний, свойства сочетаний, сочетания без повторений, треугольник Паскаля.

Введение. В повседневной жизни человек часто сталкивается с прикладными задачами, требующими подсчета числа всех возможных событий или числа всех возможных способов выполнения какого-либо действия. Сколькими способами можно выбрать лидера и его помощника из 20 учеников? Сколькими способами 30 студентов могут быть разделены на группы по 5 человек? Решением задач такого типа занимается комбинаторика.

Множество профессий имеет дело с такими задачами. Так, начальник производства должен распределить оборудование между своими сотрудниками, учитель физкультуры — разбить детей на группы для спортивной игры, майор полиции — распределить своих сотрудников для патрулирования города и т. д.

Основополагающая задача комбинаторики заключается в размещении некоторых объектов из какого-либо множества, в соответствии с каким-либо законом, и нахождении числа способов такого размещения [1; 7].

Комбинаторика берет свое начало в XVI веке [2; 7]. Катализатором интереса к комбинаторике принято считать различные азартные игры, в частности, карты и кости. Они были неотъемлемой частью жизни богатых людей. Проводя время за игрой в карты, привилегированные слои общества выигрывали и проигрывали целые состояния. Многие ученые того времени занимались вопросами комбинаторики. Среди них можно найти имена Л. Эйлера, Б. Паскаля, Я. Бернулли, П. Ферма, Г.В. Лейбница и др. [2; 7].

В настоящее время результаты комбинаторики применяются во многих областях знания: геометрия, математическая статистика, теория случайных процессов, алгебра, теория групп, программирование, кибернетика, математическая логика, теория чисел, физика, экономика, химия, биология и т. д. [2-4].

Необходимость свободного владения учащимися основами комбинаторики значительно выросла в последние годы, в связи с введением в школьный курс математики дисциплины «Вероятность и статистика», где элементы комбинаторики составляют одну из четырех содержательных линий.

А.Н. Ветохин, Е.И. Деза и Д.Л. Модель в работе [5] подчеркивают, что комбинаторику можно и нужно изучать независимо от теории вероятностей. Также ими рассматривается ряд практических проблем, возникающих при обучении школьников основным комбинаторным понятиям и формулам.

Изменение содержания школьного образования, по мнению В.Е. Казаковой и В.А. Панчищиной, должно повлечь соответствующее изменение содержания подготовки будущих учителей математики. Обучение их основам комбинаторики, должно осуществляться на достаточно высоком уровне, способствуя развитию у них комбинаторно-системного мышления, выработке умения и навыков самостоятельного конструирования примеров и задач [6].

Рассмотрение различных способов доказательства формул комбинаторики способствует расширению кругозора учащихся, знакомит их с общими методами и приемами доказательств. Например, этот подход реализуется в работе [7], где формула для числа сочетаний с повторениями доказана тремя способами, и в работе [8], которая содержит пять доказательств одного из свойств чисел Фибоначчи.

Проблема исследования. Основные понятия комбинаторики, ввиду специфики данного раздела математики, допускают целый спектр различных интерпретаций, позволяющих определить их совершенно непохожим образом. Это дает большие возможности для выбора методов доказательств их свойств. Несмотря на это, определение начальных понятий комбинаторики и доказательство их свойств в различных учебниках часто происходит односторонне. Задача исследования — продемонстрировать богатый потенциал теории на примере рассмотрения разных методов доказательств некоторых свойств сочетаний без повторений.

Материалы и методы. В процессе доказательств некоторых свойств сочетаний без повторений были использованы традиционные математические методы доказательств, такие как равносильное преобразование выражений, метод математической индукции; применялось правило произведения в комбинаторике.

Результаты. Рассмотрим следующую практическую задачу: Сколькими способами можно выбрать 5 учеников из класса, в котором учится 25 человек? На позицию первого ученика претендует 25 человек, на позицию второго претендуют оставшиеся 24 ученика, на позицию третьего — 23 ученика, четвертого — 22 ученика, пятого — 21 ученик. Всего способов выбрать пять учеников из 25 равно произведению числа способов выбрать первого, второго, третьего, четвертого, пятого учеников. Заметим, что относительно условия задачи нам не важно, в каком порядке входят в группу ученики, поэтому найденное ранее число следует разделить на количество способов составить группу из выбранных пяти человек. Это количество есть произведение чисел способов выбрать первого, второго, третьего, четвертого, пятого учеников для группы из пяти человек. Используя свойства факториала, решение нашей задачи можно записать так:

$$\frac{25!}{(25-5)!5!} = 53130 \text{ с.} \qquad (1)$$

Обобщив задачу для k и n получим, что число всех возможных комбинаций k элементов из n элементов, отличающихся друг от друга только составом элементов, но не их порядком, вычисляется по формуле (2) и называется числом сочетаний без повторений k элементов из n элементов.

$$C_n^k = {}^nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \qquad (2)$$

Данную формулу, в привычном нам виде, вывел в XIV в. математик Л. бен Гершом [1; 12]. Заметим, что обозначения $C_n^k, {}^nC_k, \binom{n}{k}$ эквивалентны и описывают один и тот же объект. В дальнейшем, для записи числа сочетаний без повторений k элементов из n будем использовать запись $\binom{n}{k}$.

Рассмотрим некоторые свойства сочетаний без повторений:

1. Число способов выбрать k объектов из n равно числу способов выбрать $(n-k)$ объектов из n.

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}, \forall n,k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ n \ge k\ . \tag{3}$$

Доказательство: воспользуемся формулой (2) и преобразуем выражение $\binom{n}{n-k}$:

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}. \tag{4}$$

Данное доказательство можно найти в [2; 70]. Докажем это утверждение иначе: вместо того, чтобы выбирать k элементов из n элементов, можно выбирать элементы, которые не попадут в эти k элементов, то есть выбирать оставшиеся $(n-k)$ элементы. Утверждение доказано.

2. Число способов выбрать все элементы, либо же не выбрать ни одного элемента всегда равно единице, независимо от количества элементов.

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,. \tag{5}$$

Доказательство: воспользуемся формулой (2) и преобразуем правую часть выражения (5):

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{(n-n)!n!}=\frac{n!}{0!n!}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\binom{n}{0}. \tag{6}$$

3. Число способов выбрать $(k+1)$ элемент из $(n+1)$ равно сумме числа способов выбрать k элементов из n и числа способов выбрать $(k+1)$ элементов из n. В виде выражения, это утверждение записывается следующим образом:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}. \tag{7}$$

Доказательство: воспользуемся формулой (2) и преобразуем левую часть выражения (5):

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{(n-k)!k!}+\frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)!}= \tag{8}$$

Раскроем скобки в знаменателе второй дроби:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}+\frac{n!}{(n-k-1))!(k+1)!}= \tag{9}$$

Приведем дроби к общему знаменателю, используя свойства факториала, и преобразуем:

$$\frac{n!(n-k)+n!(k+1)}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{n!(n-k+k+1)}{(n-k)!(k+1)!}= \tag{10}$$

Преобразуем получившееся выражение:

$$\frac{n!(n-k+k+1)}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))!(k+1)!}\,. \tag{11}$$

Используя формулу (2) преобразуем получившиеся выражение:

$$\frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))!(k+1)!}=\binom{n+1}{k+1}. \tag{12}$$

Докажем это утверждение иначе: к исходному количеству элементов n прибавим один элемент, и будем искать все возможные способы выбрать $(k+1)$ элемент. По определению число этих способов есть $\binom{n+1}{k+1}$. Распределим число этих способов на две группы: первая группа не содержит добавленный элемент, вторая — содержит. Очевидно, что число способов для первой группы равно $\binom{n}{k+1}$, ведь добавленный элемент отсутствует, а выбрать нужно $(k+1)$ элемент. Со второй группой сделаем следующее: закрепим добавленный элемент, тогда число способов будет равно $\binom{n}{k}$. Утверждение доказано.

4. Сумма числа всех возможных сочетаний от 0 до n элементов из n элементов равна 2^n. На символическом языке математики данное утверждение выглядит следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n. \tag{13}$$

Доказательство: представим, что наши n элементов это n шариков, и их мы можем либо положить в коробку (аналог взятия элемента для какого-либо сочетания из n элементов), либо не положить. Так, для каждого шарика (элемента) существует два варианта развития событий: его либо кладут в коробку (элемент участвует в каком-либо сочетании), либо его не кладут в коробку (элемент не участвует в каком-либо сочетании). Тогда число всех возможных способов составить сочетание k элементов из n, где k принимает любое значение от 0 до n, есть произведение числа способов выбрать, либо не выбрать элемент в данное сочетание для каждого из n элементов, а это равно 2^n. Утверждение доказано.

Приведенное выше тождество содержится в книге М. Холла [1; 12]. Также докажем это утверждение методом математической индукции. Проверим утверждение для $n = \{1,2\}$:

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=1+1=2=2^1. \tag{14}$$

$$\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}=\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=1+2+1=4=2^2. \tag{15}$$

Предположим, что формула (13) верна для n. Выполним шаг индукции — докажем, что в этом случае формула (13) будет также справедлива $(n+1)$:

$$2^{n+1}=2\times 2^n=2\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}. \tag{16}$$

Умножим сумму на скобку и раскроем суммы:

$$(1+1)\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}= \tag{17}$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}+\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}. \tag{18}$$

Преобразуем получившуюся сумму: крайние слагаемые $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{k}$ оставим без изменений, остальные слагаемые группируем следующим образом: $(i+1)$ слагаемое первой суммы складываем с i-м слагаемым второй суммы, где $i \in \{1,2,3,\dots,(n-2),(n-1)\}$:

$$\binom{n}{0}+\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right)+\dots+\left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}\right)+\dots+\binom{n}{n}. \tag{19}$$

Крайние слагаемые $\binom{n}{0}$ и $\binom{n}{n}$ преобразуем с помощью свойств 1 и 2 в $\binom{n+1}{0}$ и $\binom{n+1}{n+1}$ соответственно. Сгруппированные в скобках слагаемые преобразуем с помощью свойства 3. В результате преобразований получим:

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\dots\binom{n+1}{n-1}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}. \tag{20}$$

Полученная сумма включает в себя все возможные сочетания из $(n+1)$ элементов по k, где k принимает все значения от 0 до $(n+1)$, следовательно, полученное выражение можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=2^{n+1}. \tag{21}$$

Шаг индукции доказан, значит формула (13) справедлива для любого натурального числа n. Утверждение доказано.

Заметим, доказанная нами формула (13) является частным случаем известной формулы — бинома Ньютона, которая определяет разложение в сумму неотрицательной степени суммы двух элементов.

На основании свойств 1-3 построим математическую модель, которая в математике носит название «треугольник Паскаля» (рис. 1). В нулевой строке запишем $\binom{0}{0}$. В первой строке $\binom{1}{0}$ и $\binom{1}{1}$. Элементы каждой следующей строки считаются как сумма двух соседних элементов, стоящих в строчке над ним, отсутствующий элемент принимается равным нулю.

№ строки		
	0	$\binom{0}{0}$
	1	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
	2	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
	3	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
	4	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$
	5	$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$
	6	$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$
	…	… … … … … … … …

Рис. 1. Треугольник Паскаля из чисел сочетаний без повторений

Заменим числа сочетаний на их значения, треугольник Паскаля будет выглядеть следующим образом (см. рис. 2):

№ строки	0	1
	1	1 1
	2	1 2 1
	3	1 3 3 1
	4	1 4 6 4 1
	5	1 5 10 10 5 1
	6	1 6 15 20 15 6 1
	…	… … … … … … … …

Рис. 2. Треугольник Паскаля из значений чисел сочетаний

На данном математическом объекте хорошо видны доказанные нами ранее свойства сочетаний без повторений. У каждого элемента, из которых состоит треугольник Паскаля, есть свое место, определяемое двумя характеристиками: номером строки и номером числа в строке (в обоих случаях нумерация начинается с нуля). Заметим, что эти характеристики есть не что иное, как число элементов, из которых происходит выборка, и число элементов, которые попадают в выборку соответственно. Свойство 4 на треугольнике Паскаля означает то, что сумма всех элементов n-й строки равна 2^n. Подробнее о данной конструкции можно прочесть в книге Л.Я. Савельева [4; 64-70].

Заключение. В данной работе каждое рассмотренное нами свойство сочетания без повторения было доказано двумя различными способами. Этим продемонстрировано, что доказательство формул и утверждений комбинаторики возможно различными методами, что подтверждает богатые возможности этой теории в области ее приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холл М. Комбинаторика / М. Холл; под ред. А. О. Гельфонда, В. Е. Тараканова. — Москва: Мир, 1970. — 424 с.
2. Виленкин Н.Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. — Москва: ФИМА, МЦНМО, 2006. — 400 с.
3. Ежов И.И. Элементы комбинаторики / И.И. Ежов, Л.В. Скороход, М.И. Ядренко. — Москва: Наука, 1977. — 80 с.
4. Савельев Л.Я. Комбинаторика и вероятность / Л.Я. Савельев. — Новосибирск: Наука, Сибир. отд-ние, 1975. — 423 с.
5. Ветохин А.Н. О месте комбинаторики в математической подготовке школьников / А.Н. Ветохин, Е.И. Деза, Д.Л. Модель // Наука и школа. — 2023. — № 6. — С. 160-172.
6. Казакова В.Е. К вопросу о предметной подготовке по дискретной математике в педагогическом университете / В.Е. Казакова, В.А. Панчищина // Проблемы современного педагогического образования. — 2024. — № 82-1. — С. 188-191.
7. Глушков А.И. Методические подходы к выводу формулы числа сочетаний с повторениями при изучении элементов комбинаторики / А.И. Глушков, Л.Н. Шенцева // Colloquium-Journal. — 2019. — № 16-5 (40). — С. 8-10.
8. Костин С.В. О методах доказательства свойств чисел Фибоначчи / С.В. Костин // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2016. — № 18. — С. 163-176.