В. В. Протасов, В. Е. Мосягин

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 519.218.5

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СУПРЕМУМА ТРАЕКТОРИИ ПРОЦЕССА ПУАССОНА С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ СНОСОМ

Аннотация. В работе проведено исследование процесса Пуассона с отрицательным линейным сносом, изучены свойства функции распределения супремума траектории процесса и найдены моменты этого супремума.

Ключевые слова: процесс Пуассона с линейным сносом, производящая функция моментов, распределение функционалов от случайных процессов, вероятностные методы решения инженерных задач, вероятностные модели естественных явлений и инженерных систем.

Введение. Пуассоновский процесс с линейным сносом имеет вид

$$X(t) = x_0 + at + \sum_{k=1}^{\nu(qt)} Z_k, \quad t \ge 0, \quad -\infty < x_0 < \infty, \quad a \ne 0, \quad q > 0, \tag{1}$$

где $\nu(\tau)$ — стандартный пуассоновский процесс,

$Z_1, Z_2 \ \dots$ — независимые неотрицательные случайные величины.

Процессы вида возникают в параметрической статистике [1], актуарной математике и теории разорения [2]. Подобные процессы имеют большую практическую значимость [3] и могут быть применены к инженерным задачам, например, при построении математической модели водохранилища. В этой модели x_0 — это уровень воды (см) водохранилища в начальный момент времени, параметр $a < 0$ — скорость стока воды (см/сек), а величины $Z_1, Z_2 \ \dots$ — повышения уровня воды (см), обусловленные обильными осадками, паводками, либо иными неконтролируемыми явлениями.

Проблема исследования. Описанная выше модель водохранилища приводит к задаче поиска числовых характеристик супремума траектории процесса, позволяющих оценить вероятность критического превышения уровня воды.

Определим случайную величину

$$\xi = \sup_{t \ge 0} X(t). \tag{2}$$

Цель работы — нахождение первого и второго моментов величины ξ.

Упростим модель, предполагая величины скачков тождественно равными единице: $Z_1 \equiv Z_2 \equiv \dots \equiv 1$. Также заметим, что параллельный перенос и растяжение траектории $X(t)$ позволяют свести задачу к виду, когда $x_0 = 0$, $a = -1$.

Итак, предметом исследования будет процесс, задаваемый равенством

$$X(t) = -t + \nu(qt), \quad t \ge 0, \tag{3}$$

где параметр q удовлетворяет условию

$$0 < q < 1,$$

при выполнении которого величина ξ является собственной [4].

Графики этого процесса и сопутствующего стандартного пуассоновского процесса приведены на рис. 1 и 2, соответственно.

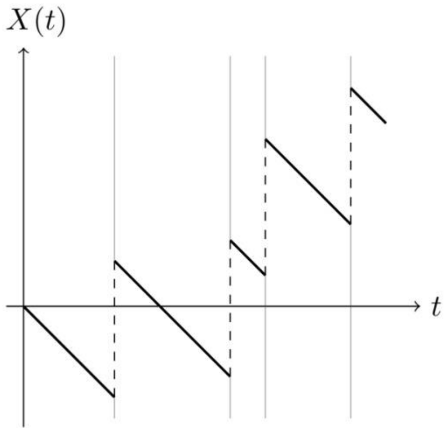

Рис 1. Траектория процесса

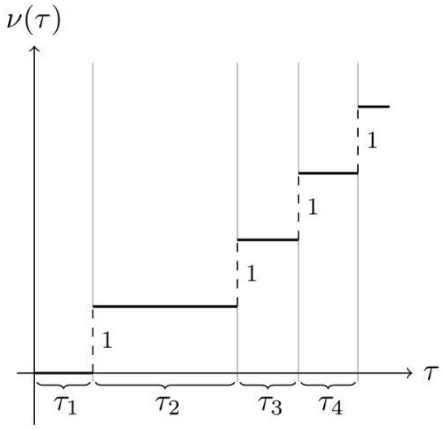

Рис. 2. Траектория стандартного процесса Пуассона

Материалы и методы исследования. Для решения поставленной задачи воспользуемся работой [4], в которой был получен следующий результат:

Теорема 1 (А. В. Скороход). *Распределение супремума траектории процесса* $X(t)$ *задается формулой*

$$\Psi(x) = \mathrm{P}(\xi \le x) = (1-q)\sum_{k=0}^{[x]}(-1)^k q^k \frac{(x-k)^k}{k!} e^{q(x-k)}, \quad x \ge 0, \tag{4}$$

где $[x]$ — целая часть переменной x.

График этой функции распределения приведен на рис. 3.

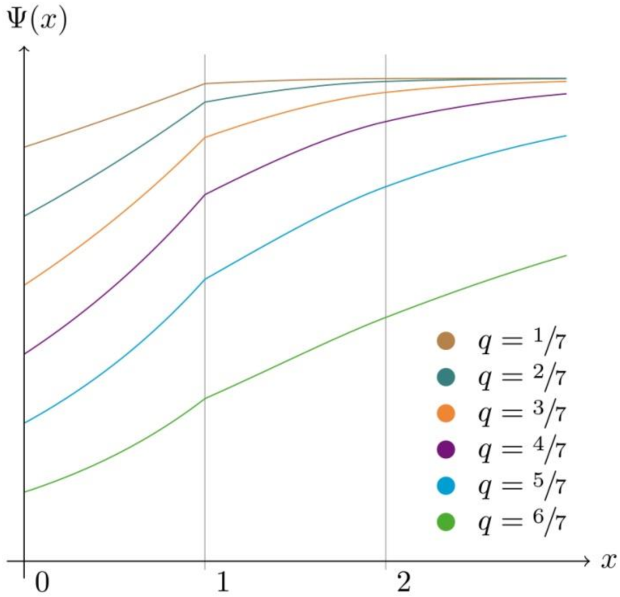

Рис. 3. График функции распределения $\Psi(x)$

Непосредственное вычисление моментов супремума неудобно в силу того, что переменная x в формуле входит не только в общий член суммы, но и в верхний предел суммирования. В этом случае удобно воспользоваться преобразованием Лапласа распределения $\Psi(x)$, которое задается формулой

$$\mathcal{L}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} d\Psi(x), \quad s > 0. \tag{5}$$

Функция $\mathcal{L}(s)$ также называется производящей функцией моментов для распределения $\Psi(x)$, так как через нее удобно находить моменты величины ξ.

Результаты.

Определение 1. Зададим параметрическую последовательность

$$\Pi_k(\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad -\infty < \lambda < \infty, \quad k = 0, 1, 2 \ \ldots \tag{6}$$

При $\lambda > 0$ эта последовательность задает распределение Пуассона, а при $\lambda < 0$ она окажется полезной для записи результатов нашей работы. В частности, формулу распределения удается записать в упрощенном виде.

Лемма 1. *Для функции распределения справедливо следующее представление:*

$$\Psi(x) = (1-q)\sum_{k=0}^{[x]} \Pi_k\left(q(k-x)\right).$$

Лемма 2. *Для членов последовательности* $\Pi_k(\lambda)$ *производная по параметру* λ *имеет вид*

$$\Pi_k'(\lambda) = \Pi_{k-1}(\lambda) - \Pi_k(\lambda), \quad k = 0, 1, 2 \ \ldots$$

Теорема 1. *Функция распределения* $\Psi(x)$ *непрерывно дифференцируема при* $x > 0$, $x \neq 1$, *и для ее производной имеет место формула*

$$\Psi'(x) = q\left(\Psi(x) - \Psi(x-1)\right).$$

Доказательство. Пусть n — произвольное целое неотрицательное число. На полуинтервале $[n, n+1)$ для распределения $\Psi(x)$ справедливо равенство

$$\Psi(x) = (1-q)\sum_{k=0}^{n} \Pi_k\left(q(k-x)\right).$$

Заметим, что функция $\Psi(x)$ не претерпевает разрывов на границах соседних полуинтервалов:

$$\Psi(n+1) - \Psi(n+1-0) = (1-q)\sum_{k=0}^{n+1} \Pi_k\left(q(k-n-1)\right)$$

$$-(1-q)\sum_{k=0}^{n} \Pi_k\left(q(k-n-1)\right) = (1-q)\Pi_{n+1}(0) = 0,$$

в силу чего заключаем, что $\Psi(x)$ непрерывна при $x>0$.

Найдем ее производную, пользуясь результатом леммы 2:

$$\Psi'(x)=(1-q)\sum_{k=0}^{n}\left(\Pi_k\left(q(k-x)\right)\right)'$$
$$=-q(1-q)\sum_{k=0}^{n}\Pi_{k-1}\left(q(k-x)\right)+q(1-q)\sum_{k=0}^{n}\Pi_k\left(q(k-x)\right)$$
$$=-q(1-q)\sum_{k=0}^{n-1}\Pi_k\left(q(k-x+1)\right)+q(1-q)\sum_{k=0}^{n}\Pi_k\left(q(k-x)\right)$$
$$=q\left(\Psi(x)-\Psi(x-1)\right).$$

Поскольку $\Psi(x)=0$ при $x<0$, причем $\Psi(0)=1-q\neq 0$, делаем вывод, что производная функции распределения $\Psi(x)$ непрерывна при $x>0$, $x\neq 1$.

Теорема 2. *Преобразование Лапласа распределения* $\Psi(x)$ *имеет вид*

$$\mathcal{L}(s)=\frac{q(1-q)\left(1-e^{-s}\right)}{s-q(1-e^{-s})},\quad s>0. \tag{7}$$

Доказательство.

$$\mathcal{L}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}d\Psi(x)=\int_0^\infty e^{-sx}\Psi'(x)dx=q\int_0^\infty e^{-sx}\left(\Psi(x)-\Psi(x-1)\right)dx$$
$$=q\int_0^\infty e^{-sx}\Psi(x)dx-qe^{-s}\int_0^\infty e^{-s(x-1)}\Psi(x-1)dx$$
$$=q\left(1-e^{-s}\right)\int_0^\infty e^{-sx}\Psi(x)dx=q\left(1-e^{-s}\right)\left(\frac{1-q}{s}+\frac{1}{s}\mathcal{L}(s)\right).$$

Выражая $\mathcal{L}(s)$ из последнего равенства, получаем утверждение теоремы.

Теорема 3. *Супремум* ξ *траектории процесса* $X(t)$ *имеет следующие числовые характеристики:*

$$\mathbb{E}\xi=\frac{q}{2(1-q)},\qquad \mathbb{E}\xi^2=\frac{q(2+q)}{6(1-q)^2},\qquad \mathbb{D}\xi=\frac{q(4-q)}{12\left(1-q^2\right)}.$$

Доказательство. Выразим производные преобразования $\mathcal{L}(s)$ дифференцированием правой части под знаком интеграла:

$$\mathcal{L}'(s)=-\int_0^\infty xe^{-sx}d\Psi(x),\qquad \mathcal{L}''(s)=\int_0^\infty x^2e^{-sx}d\Psi(x). \tag{8}$$

Правомерность этого действия установлена в [5].

С учетом равенств для моментов будут справедливы представления

$$\mathbb{E}\xi = -\mathcal{L}'(0), \qquad \mathbb{E}\xi^2 = \mathcal{L}''(0).$$

Дифференцируя выражение по переменной s и устремляя в нем $s \to 0+$, получим равенства

$$\mathbb{E}\xi = \frac{q}{2(1-q)}, \qquad \mathbb{E}\xi^2 = \frac{q(2+q)}{6(1-q)^2}.$$

Дисперсию находим, пользуясь формулой $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$.

Заключение. Простой вид полученных характеристик и непрерывная дифференцируемость распределения супремума почти всюду при $x > 0$ подтверждают удобство математической модели, представленной процессом, для решения практических задач, когда простота модели является весомым критерием при выборе метода решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И. А. Асимптотическая теория оценивания / И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский. — Москва: Наука, 1979. — 527 с. — Текст: непосредственный.
2. Ротарь В. И. Введение в математическую теорию страхования / В. И. Ротарь, В. Е. Бенинг. — Текст: непосредственный // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 1994. — № 1. — С. 698-779.
3. Kutoyants Yu. A. Introduction to the Statistics of Poisson Processes and Applications / Yu. A. Kutoyants. — La Mans: Springer, 2023. — 611 p. — Direct text.
4. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями / А. В. Скороход. — Москва: Наука, 1964. — 278 с. — Текст: непосредственный.
5. Мосягин В. Е. Процесс Пуассона с линейным сносом и сопутствующие функциональные ряды / В. Е. Мосягин. — Текст: непосредственный // Теория вероятностей и ее применения. — 2024. — № 2 — С. 354-368.