Г. В. Гренкин

Владивостокский государственный университет, г. Владивосток

УДК 517.95

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Аннотация. Рассматривается задача нахождения неизвестных интенсивностей источников тепла по известным средним значениям средней температуры источников. Для моделирования теплообмена используется стационарная диффузионная модель, учитывающая перенос теплового излучения. Для случая двух источников показана сходимость численного метода.

Ключевые слова: радиационный теплообмен, обратная задача, интегральное переопределение.

Задача восстановления тепловых источников по известным значениям их средней температуры изучалась в работе [1]. Установлено, что обратная задача имеет по крайней мере одно решение, и получены условия единственности решения, которые выполняются при достаточно большом коэффициенте температуропроводности.

Цель настоящей работы — построить численный алгоритм, монотонно сходящийся к решению обратной задачи. При этом должна учитываться возможная неединственность решения.

Радиационно-кондуктивный теплообмен в области $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ с границей Γ описывается полями температуры θ и интенсивности излучения φ, которые подчиняются системе дифференциальных уравнений

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a\left(|\theta|^3\theta - \varphi\right) = q_1 f_1 + q_2 f_2, \tag{1}$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - |\theta|^3\theta\right) = 0 \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0,\ \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma\left(\varphi - \theta_b^4\right) = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{3}$$

Положительные постоянные a, b, α, κ_a характеризуют радиационно-термические свойства среды, функции β, γ характеризуют отражающие свойства границы, f_1, f_2 — объемные плотности тепловых источников.

Уравнение (1) содержит неопределенные коэффициенты q_1, q_2, поэтому для замыкания системы зададим среднюю температуру источников:

$$\int_\Omega f_j(x)\theta(x)dx = r_j,\ j = 1, 2. \tag{4}$$

В настоящей работе ограничимся рассмотрением случая пропорциональных граничных коэффициентов: $\dfrac{\beta}{a} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Определим оператор Q_θ, который по заданной функции g дает компоненту z решения линеаризованной системы

$$-a\Delta u + b\kappa_a\left(4|\theta|^3 u - z\right) = g,\ -\alpha\Delta z + \kappa_a\left(z - 4|\theta|^3 u\right) = 0,$$

$$a\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u=0,\ \alpha\frac{\partial z}{\partial n}+\gamma z=0 \text{ на } \Gamma.$$

Также введем оператор R, который по заданной функции g дает решение краевой задачи

$$-\Delta u=g,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\beta}{a}u=0 \text{ на } \Gamma.$$

Показано, что если при заданном векторе $\mathbf{q}$ и соответствующем ему поле $\theta=\theta(\mathbf{q})$ выполнено неравенство

$$\left(f_1,Q_\theta f_1\right)>\left(f_1,Q_\theta f_2\right)\frac{\left(f_1,Rf_2\right)}{\left(f_2,Rf_2\right)}, \tag{5}$$

то при малом приращении вектора $\mathbf{q}$, при котором увеличивается общая энергия $S_j(\mathbf{q})=aF_j(\mathbf{q})+b\alpha G_j(\mathbf{q})$ в обоих источниках, количество радиационной энергии $G_j(\mathbf{q})$ может уменьшиться только во втором источнике. Здесь $F_j(\mathbf{q})=\int_\Omega f_j(x)\theta(x)dx$, $G_j(\mathbf{q})=\int_\Omega f_j(x)\varphi(x)dx$.

В случае, когда в точке $\mathbf{q}$ выполнено неравенство (5), будем говорить, что источник f_1 директивен по отношению к источнику f_2 при интенсивностях $\mathbf{q}$.

Оператор Q_θ обладает свойством положительности. Отсюда вытекает, что если источник f_1 не директивен по отношению к источнику f_2, то источник f_2 директивен по отношению к источнику f_1.

Заметим, что уменьшение радиационной энергии $G_j(\mathbf{q})$ в j-м источнике при увеличении общей энергии $S_j(\mathbf{q})$ означает преувеличение тепловой энергии $F_j(\mathbf{q})$ по сравнению с линейной моделью теплопроводности.

Алгоритм решения обратной задачи (1)–(4) приводится в работе [2]. Для гарантии монотонности предлагается применить тот же алгоритм покоординатно. А именно, сначала применяем шаг алгоритма к паре источников, а затем, если источник f_1 не директивен по отношению к источнику f_2 и, соответственно, температура источника f_2 может быть преувеличена, то применяем шаг алгоритма только к источнику f_2.

Итак, если источники взаимно директивны, то сходимость алгоритма очевидна. Если только один источник директивен по отношению к другому, то в случае перегрева этого другого источника (достижения условия $F_j(\mathbf{q})>r_j$) можно применить такой же шаг алгоритма к этому j-му источнику. Тогда, в силу нарушения условия (5), изменение излучения окажется положительным, следовательно, $F_j(\mathbf{q})$ станет меньше r_j. Отсюда вытекает монотонность и ограниченность последовательности приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. — 2018. — Т. 460, № 2. — С. 737-744.
2. Гренкин Г.В. Единственность решения обратной задачи для модели сложного теплообмена // Сиб. электрон. матем. изв. — 2024. — Т. 21, № 1. — С. 98-104.