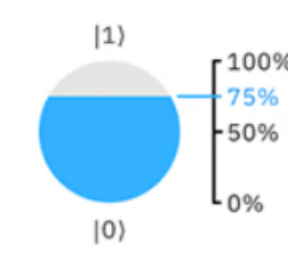


Quantencomputer und deren Simulation

Einführung in Quantencomputer

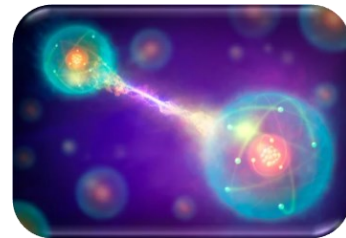
Qubits:

Im Gegensatz zu normalen Computern bestehen Quantencomputer aus sogenannten Qubits. Diese können nicht nur im Zustand 1 oder 0, sondern auch in einer Superposition dieser beiden Zustände sein. Sobald man den Zustand eines Qubits misst, ist dieses aber immer entweder 1 oder 0. Die Art der Superposition bestimmt die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Messung von 0 oder 1 eintreten wird.



Verschränkung:

Die Verschränkung ist eine Quanteneigenschaft, die es Qubits erlaubt, sich miteinander „zu verbinden“, sodass der Zustand des einen Qubits unmittelbar von dem Zustand des anderen Qubits abhängig ist. Dies funktioniert über beliebige Distanzen.



Quantenalgorithmen:

Spezielle Quantenalgorithmen können benutzt werden, um bestimmte Berechnungen deutlich schneller auszuführen, als es mit konventionellen Computern möglich wäre. Diese Algorithmen wenden Operationen auf einzelne oder mehrere Qubits an und machen sich Superposition und Verschränkung zu Nutze. Dabei ist wichtig zu beachten, dass Quantencomputer nur bestimmte Probleme schneller lösen könnten als konventionelle Computer und deshalb nicht als universelle Rechenmaschinen betrachtet werden sollten. Die Effizienz von Quantenalgorithmen hängt stark von der Art des Problems ab. Beispiele für solche Probleme sind die Faktorisierung großer Zahlen, die Suche in unsortierten Datenbanken und die Simulation quantenmechanischer Systeme.

Warum benötigen wir Simulationen?

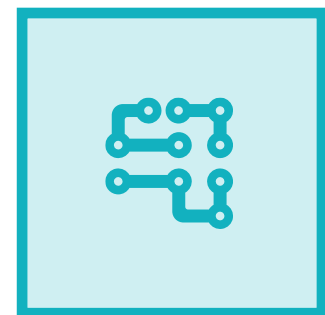
Aktueller Stand der Technik:

Unternehmen wie IBM haben bereits funktionierende Quantencomputer entwickelt, allerdings sind diese noch nicht in der Lage konventionelle Computer zu übertreffen. Hürden in der Entwicklung sind zum Beispiel:



Komplexität

Die Entwicklung von Quantenalgorithmen und Mechanismen zur Fehlerkorrektur ist schwierig und komplex.



Hardware Anforderungen

Quantencomputer benötigen komplexe Kühlsysteme und Isolation vor Vibration und elektromagnetischer Strahlung.



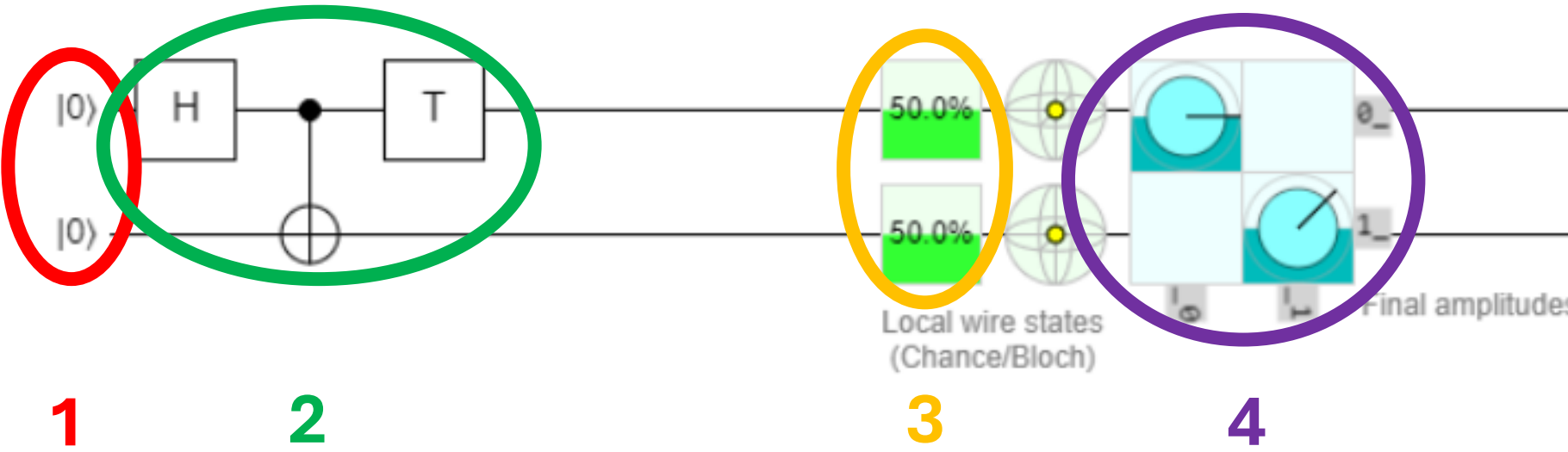
Kosten

Die außergewöhnlichen Materialien und die präzise Technik, die erforderlich sind, machen Quantencomputer sehr teuer.

Simulationen können vor allem bei der Entwicklung von Quantenalgorithmen helfen; sie sind kostengünstig und für jeden verfügbar.

Visualisierte Darstellung einer Simulation

In dem gezeigten Beispiel ist eine simple Simulation von zwei Qubits dargestellt



1. **Startzustände der Qubits sind 0.**
2. **Operationen werden auf Qubits angewendet.**
3. **Zeigt die Wahrscheinlichkeit, die einzelnen Qubits im Zustand 1 zu messen.**
4. **Zeigt die Wahrscheinlichkeiten dafür, das gesamte System in einem bestimmten Zustand aufzufinden. Aufgrund von Verschränkung können die Qubits hier nur im gleichen Zustand gemessen werden.**

Mathematische Darstellung eines Systems mit n Qubits:

Der Zustand eines einzelnen Qubits wird folgendermaßen dargestellt:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$|0\rangle$ und $|1\rangle$ sind die möglichen Zustände 0 und 1 nach einer Messung und α und β geben Auskunft über die Wahrscheinlichkeiten, mit welcher die Zustände gemessen werden. Anstelle dieser Schreibweise wird häufig folgende Vektorschreibweise verwendet:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Durch das Bilden des Tensorprodukts der einzelnen Qubit-Zustände in einem System aus n Qubits erhält man einen Zustandsvektor für das gesamte System, welcher n^2 Einträge besitzt, wobei jeder Eintrag Auskunft darüber gibt, wie wahrscheinlich es ist, einen der möglichen Gesamtzustände zu messen:

$$|\psi_{gesamt}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n \\ \alpha_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n \\ \vdots \\ \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_n \end{pmatrix}$$

Durch Quadrieren dieses Vektors erhält man die Wahrscheinlichkeiten für jede mögliche Messung, welche beispielhaft in **4.** gezeigt wurden. Eine entsprechende Histogrammdarstellung sieht wie folgt aus:



Anwenden von Operationen auf Qubits

Operationen auf Qubits werden als 2x2, bzw. 4x4 Matrizen dargestellt, welche den Zustand eines oder mehrerer Qubits durch Multiplikation verändern. Die folgenden drei Operationen bilden ein universelles Set, was bedeutet, dass mit ihnen jeder Quantenschaltkreis mit einer beliebigen Genauigkeit dargestellt werden kann:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine weitere für die Berechnung benötigte Matrix ist die folgende Identitätsmatrix. Wenn diese auf ein Qubit angewendet wird, hat sie keinen Einfluss auf dessen Zustand:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Um eine Operation U auf ein Ziel-Qubit i im System anzuwenden, wird der Zustandsvektor des Zielqubits mit der Operationsmatrix multipliziert, wobei auf alle anderen Qubits keine, bzw. die Identitätsoperation angewendet wird. Der Zustandsvektor des Gesamtsystems ergibt sich wieder aus dem Tensorprodukt der Zustandsvektoren der einzelnen Qubits.

$$U_2|\psi_{gesamt}\rangle = I|\psi_1\rangle \otimes U|\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes I|\psi_n\rangle = I \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \otimes U \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes I \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} \right) \cdot (I \otimes U \otimes \dots \otimes I)$$

Daraus folgen zwei Darstellungen für Transformationsmatrizen, die jeweils auf den Zustandsvektor des Gesamtsystems angewendet werden können:

$$U_i = \bigotimes_{j=1}^n \begin{cases} U & \text{falls } j = i \\ I & \text{sonst} \end{cases}$$

Matrix, die Operationen auf einzelnes Qubit im System anwendet.

$$U_{i,i+1} = \bigotimes_{j=1}^n \begin{cases} U & \text{falls } j = i \\ I & \text{falls } j \neq i \text{ und } j \neq i+1 \end{cases}$$

Matrix, die Operationen auf zwei benachbarte Qubits im System anwendet (notwendig für CNOT).

Da durch diesen Ansatz Multi-Qubit-Operationen nur auf benachbarte Qubits angewendet werden können, wird außerdem eine weitere SWAP-Matrix benötigt, welche die Zustände zweier benachbarter Qubits tauscht und so Operationen auf zwei beliebige, nicht-benachbarte Qubits möglich macht.

Vereinfachung

Der oben dargestellte mathematische Ansatz bildet die Grundlage für eine Simulation, ist aber relativ rechenintensiv und speicherlastig. Deshalb verwende ich einen angepassten Algorithmus, mit welchem die Berechnungen deutlich effizienter durchgeführt werden können. Für Ein-Qubit-Operationen wird dieser rechts dargestellt.

Algorithm 1: GATE APPLICATION ALGORITHM
(v, G, t)
Input: An n qubit quantum state represented by a column vector $v = (v_1, \dots, v_{2^n})^T$ and a single qubit gate G , represented by a 2×2 matrix, acting on the t th qubit.
1 for $i \leftarrow 0$ to 2^{n-1} do
2 $a \leftarrow$ the i th integer who's t th bit is 0;
3 $b \leftarrow$ the i th integer who's t th bit is 1;
 // The following must be simultaneously updated
4 $v_a \leftarrow v_a \cdot G_{0,0} + v_b \cdot G_{0,1};$
5 $v_b \leftarrow v_b \cdot G_{1,1} + v_a \cdot G_{1,0};$

Quelle:
P. Oscar Boykin u. a. On Universal and Fault-Tolerant Quantum Computing. 1999. arXiv: quant-ph/9906054 [quant-ph]