Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ЮГОРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт Прикладной математики, информатики и управления

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО КУРСУ «МИКРОПРОЦЕССОРНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

«Устойчивость цифровых систем автоматического управления»

Ханты-Мансийск, 2009

Цель работы: изучить основные способы определения устойчивости цифровых систем автоматического управления.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1.1 Общие сведения. Определение устойчивости.

Устойчивость является одним из основных требований к системам автоматического управления (САУ). Поэтому важно уметь определять (исследовать) и соответствующим выбором структуры и параметров системы управления обеспечивать ее устойчивость.

Назначением систем управления является поддержание некоторого заданного режима, называемого невозмущенным движением. Если на систему действует возмущение, то фактическое движение (которое называется возмущенным движением) будет отличаться от невозмущенного движения. Невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым*, если после окончания действия возмущения возмущенное движение $y(t)$ с течением времени стремится к невозмущенному движению $y_н(t)$: $y(t) \to y_н(t)$ при $t \to \infty$

Линейная система управления называется *устойчивой* или *асимптотически устойчивой*, если любое ее невозмущенное движение, определяемое задающим воздействием, асимптотически устойчиво.

Общее решение уравнения движения имеет вид:

$$y(t)=y_в(t)+y_c(t), \qquad (1.1)$$

где $y_в(t)$ – частное решение уравнения;

$y_c(t)$ – общее решение однородного уравнения;

Общее решение $y_c(t)$ однородного уравнения описывает свободное движение системы управления (т.е. движение при отсутствии внешних воздействий), определяемое только начальными условиями. Частное решение $y_в(t)$ описывает вынужденное движение, определяемое внешними воздействиями. В частности, при отсутствии возмущающего воздействия частное решение описывает невозмущенное движение: $y_в(t) = y_н(t)$. Таким образом, если после начального момента t_0 возмущение перестает действовать, решение уравнения можно записать в виде

$$y(t)=y_н(t)+y_c(t) \ (t \ge t_0) \qquad (1.2)$$

Возмущение, которое действует до начального момента t_0, влияет на начальные условия, от которых зависит только свободное движение. Поэтому для того чтобы возмущенное движение было асимптотически устойчиво (т.е. для $y(t) \to y_н(t)$ при $t \to \infty$), необходимо и достаточно, чтобы:

$$\lim_{t\to\infty} y_c(t) = 0, \tag{1.3}$$

Это соотношение можно принять за математическое определение устойчивости (асимптотической устойчивости) линейных стационарных систем управления.

1.2 Характеристическое уравнение и основное условие устойчивости

В случае когда внешние воздействия заданы, то уравнение дискретной системы управления можно записать в операторном виде:

$$(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n)y(t) = \varphi(t), \tag{1.4}$$

Тогда **характеристическое уравнение** имеет вид:

$$Q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{1.5}$$

Если задана передаточная функция системы управления, то при определении характеристического полинома нужно исходить из следующих положений: по определению передаточной функции в операторной форме ее знаменатель есть собственный оператор, а знаменатель передаточной функции в z-изображениях совпадает с характеристическим полиномом (при условии, что передаточная функция в операторной форме не содержит одинаковых нулей и полюсов).

Как отмечалось выше, общее решение неоднородного разностного уравнения имеет вид:

$$y(t)=y_н(t)+y_c(t)$$

Линейная дискретная система управления называется устойчивой, если общее решение однородного разностного уравнения при $t \to \infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{t\to\infty} y_c[nT] = 0 \tag{1.6}$$

Основное условие устойчивости. Для того чтобы линейная дискретная система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были по модулю меньше единицы, или, что то же, находились внутри единичного круга на z-плоскости корней.

1.3 Алгебраический критерий устойчивости Джури

Необходимое условие устойчивости. Для того чтобы все нули (корни) характеристического полинома (1.5) были по модулю меньше единицы ($|z_i|<1,\ i=1,2,\ \ldots\ ,n$), необходимо, чтобы при $a_0>0$ выполнялись неравенства:

$$Q(1)>0 \quad \text{и} \quad (-1)^n Q(-1)>0 \qquad (1.7)$$

Критерий устойчивости Джури. Для определения устойчивости дискретной системы управления оставим таблицу Джури, которая содержит $n+1$ строк и столько же столбцов. При этом заполненные клетки имеют треугольную форму: нулевая строка содержит $n+1$ заполненных клеток, а все последующие строки имеют на единицу меньше заполненных клеток, чем предыдущая строка (таблица 1).

Таблица 1.1 – Общий вид таблицы Джури

$d_{00}=a_0$	$d_{01}=a_1$	…	$d_{0,n-1}=a_{n-1}$	$d_{0n}=a_n$
d_{10}	d_{11}	…	$d_{1,n-1}$	
…………………………………………………………………………………………				
$d_{n-1,0}$	$d_{n-1,1}$			
d_{n0}				

Клетки нулевой строки заполняются коэффициентами характеристического уравнения в порядке возрастания нижних индексов: $d_{0k} = a_k$ ($k = 0,1,...,n$). Элементы первой строки d_{1k} ($k = 0,1,...,n$) вычисляются следующим образом:

Выписываются элементы нулевой строки и под ними те же элементы в обратном порядке. Из элементов верхней строки вычитаются соответствующие элементы нижней строки, умноженные на отношение последних элементов двух выписанных строк $\alpha_1=d_{0n}/d_{00}=a_n/a_0$

$$\begin{array}{cccccccc} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n & & \\ - & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & & \alpha_1=a_n/a_0 \\ \hline \end{array}$$

$$d_{10}=a_0-\alpha_1 a_n,\quad d_{11}=a_1-\alpha_1 a_{n-1},\ \ldots,\qquad d_{1,n-1}=a_{n-1}-\alpha_1 a_1$$

Последняя разность обращается в нуль, и она отбрасывается. Поэтому первая строка содержит n элементов: на один элемент меньше, чем нулевая строка.

Элементы всех последующих строк определяются аналогично элементам первой строки. Так, например, для вычисления k-й строки выписываются элементы ($k–1$)-й строки и под ними те же элементы в обратном порядке. Из элементов верхней строки вычитаются соответствующие элементы нижней строки, умноженные на отношение последних элементов выписанных двух строк $\alpha_k = c_{k-1,n-k+1}/c_{k-1,0}$

Последняя разность, обращающаяся в нуль, отбрасывается. Формула для вычисления i-го элемента k-й строки ($k=1,2,\ldots,n$) имеет вид $c_{ki}=c_{k-1,i} - \alpha_k c_{k-1,n-k-i+1}$, $k=1,2,\ldots,n$, $i=1,2,\ldots,n-k$.

Критерий Джури (E.I. Jury). Для того чтобы все нули (корни) характеристического полинома (1.5) находились внутри единичного круга, необходимо и достаточно, чтобы при $a_0>0$ все элементы нулевого столбца таблицы Джури были положительны: $d_{0i}>0$, $i = 1, 2,\ldots,n$.

Если все элементы нулевого столбца, кроме последнего, положительны: $d_{0i} > 0$, $i = 1, 2,\ldots, n-1$, то положительность последнего элемента, т.е. условие $d_{0n}>0$, эквивалентно необходимому условию устойчивости (1.7). Поэтому если необходимое условие выполняется, то последний элемент d_{0n} можно не вычислять.

1.4 Частотный критерий устойчивости Найквиста

Для исследования устойчивости дискретных систем можно использовать также критерий Найквиста (точнее, его аналог). Как и в случае непрерывных систем, он используется для определения устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой частотной характеристике ее разомкнутой системы.

Пусть передаточная функция дискретной системы управления в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W^*(s) = W(z)\big|_{z=e^{sT}} = W(e^{sT}) = \frac{P(s)}{R(s)}, \tag{1.8}$$

где $P(s), R(s)$ – полиномы от e^{sT}.

Критерий Найквиста. Если разомкнутая система неустойчива и ее характеристическое уравнение $R(s) = 0$ имеет k основных корней в правой полуплоскости и не содержит корней на мнимой оси, то для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы (годограф частотной передаточной функции $W(j\omega)$) при изменении частоты ω охватывала точку $(-1, j0)$ $k/2$ раз.

Если разомкнутая система устойчива, то для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы не охватывала точку $(-1, j0)$.

Таким образом, процесс определения устойчивости по критерию Найквиста замкнутой системы автоматического управления сводится к следующей последовательности действий:

1. Определение числа k корней характеристического уравнения и устойчивости разомкнутой системы управления (например, используя алгебраические критерии или основное условие устойчивости).
2. Для передаточной функции разомкнутой системы производят следующую замену: $W^*(j\omega) = W(z)\big|_{z=e^{j\omega T}} = W(e^{j\omega T})$
3. Производят построение амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы (график функции при изменении ω, у которого ось абсцисс есть значения функции $ReW^*(j\omega)$, а ось ординат – значения функции $ImW^*(j\omega)$).
4. Используя критерий Найквиста и данные п.1-3, определяют устойчивость замкнутой системы управления.

2. Задание

1. Изучить основные теоретические сведения.
2. Определить устойчивость разомкнутой и замкнутой систем автоматического управления[1], используя основное условие устойчивости.
3. Определить устойчивость разомкнутой системы автоматического управления, используя алгебраический критерий устойчивости Джури.
4. Определить устойчивость замкнутой системы автоматического управления, используя частотный критерий устойчивости Найквиста.

5.Подготовить отчет.

Таблица 1 – Варианты индивидуального задания

Номер задания	**Коэффициенты передаточной функции разомкнутой системы управления** $W(z)=\dfrac{b_0z^2+b_1z+b_2}{a_0z^3+a_1z^2+a_2z^1+a_3}$						
	a_0	a_1	a_2	a_3	b_0	b_1	b_2
1	106.42	100.409	–0,006	26.732	0	–215,6	100,3
2	–4,06	3,026	–0.3038	–0,709	0	0,13	–0,4
3	–1,5	0,57	–5.148	–0,143	0	–0,49	0,5
4	–110,16	96,047	–0,435	–9,998	0	0,91	–0,3
5	–3,5	4,17	–1,007	–1,683	0	1,5	–1,9
6	–2.72	1.0078	–5,231	–0.08944	0	–0.05	0,94
7	–13,392	4,68	–2,259	–0,3624	0	0,45	–0,12
8	–64.815	96.26	–0,156	–47.487	0	–21,788	–4,5
9	–23,1	9,488	–0.288	–0,344	0	0,12	0,17
10	–12,9	9,457	–6,98299	–2,341	0	–100,1	38,45
11	–144,16	202,127	–11.311	–93,315	0	0,07	0,65
12	–17,9	20,057	–1,348	–6,496	0	0,01	–0,05
13	1	0,6	0,003	0,1	0	0,45	–0.78
14	2	–8,06	–2,945	9,946	0	1,4	0,13
15	5	–22,9	–18,097	35,157	0	0,07	–0.537
16	15	–51,45	–1,772	45,084	0	–100,1	8,45
17	5	–9,4	–1,15668	5,7615	0	1,5	1,9
18	5	–12,3	–2,1	9,0715	0	0,02	–0.71

[1] Индивидуальное задание полностью определяется таблицей 1 и номером, который выдается каждому студенту преподавателем лично, после проверки основных теоретических знаний.

19	–12,9	9,457	–56.133	–2,341	0	1,7	–0,91
20	–144,16	202,127	–0,013	–93,315	0	11,2	–34,5
21	–17,9	20,057	–2,359	–6,496	0	0,12	0,17
22	–4,72	2,128	–1,844	–0,201	0	–5,7	0,03
23	–38,42	12,6888	–5,231	–1,02816	0	–215,6	100,3
24	–31,392	4,68	–7,2	–0,3624	0	0,13	–0,4
25	–0.073	0.089	–0.08944	–0.036	0	0,02	–0.71
26	–7,9	4,356	–0,3624	–0,84	0	1,7	–0,91
27	–38,1	31,988	–47.487	–8,931	0	11,2	–34,5
28	–2,5	1,77	–0,344	–0,153	0	0,12	0,17
29	5	20	122.31	–86.8	0	–5,7	0,03
30	34	1	0,17	–0,5	0	1,2	0,37
31	5	2	6,226	–6,06	0	0,54	3,5
32	2	15	48,188	–53,1	0	1,3	–0.34
33	34	1,5	9,836	–6,54	0	–2	1,13
34	5,4	5	22,712	–19,4	0	–2,56	–1,3
35	0.02	2	1.0078	–2.72	0	–8,95	7,62
36	5	7,2	4,68	–13,392	0	–2,56	–1,3
37	15	14.5	96.26	–64.815	0	0,45	–0,71
38	1	15	9,488	–23,1	0	–0,78	0,43
39	15	–68,1	–47,931	100,688	0	0,6	9,1
40	34	–106,42	–26,732	100,409	0	8,95	7,62
41	1,5	–2,34	–0,171	1,137	0	12,3	0,45
42	34	1	0,11	–0,6	0	0,01	0,003
43	2	1,2	1,66128	–2,58	0	0,91	–0,3
44	15	–21,45	10.317	8,034	0	40,7	22,4
45	4,3	–16,297	1,256	18,63448	0	–2,56	–1,3
46	4.5	–18.54	2,156	25.2	0	0,2	0,54
47	2	1	–6.84	1.5	1,2	0,521	1,45
48	7,2	34	–2,04	1,5	0,54	14,3	–12,6
49	14.5	1	–3,54	1,5	1,3	0,13	–0,4
50	15	15	8,034	–21,45	–2	0,12	0,17
51	5	4,3	18,63448	–16,297	–2,56	–21,788	–1,5
52	34	4.5	25.2	–18.54	–8,95	–10,2	6,7
53	5	34	15,807	–42,16	–2,56		

3. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Титульный лист (Приложение А).
2. Цель лабораторной работы.
3. Основные теоретические сведения.
4. Описание хода выполнения индивидуального задания (выполнение п. 2-4 заданий на лабораторную работу, графики АФЧХ)
5. Выводы по лабораторной работе.

4. Контрольные вопросы

1. Объясните физическую сущность понятия «устойчивость».
2. Сформулируйте основное условие устойчивости.
3. Поясните алгоритмы построения матрицы Джури и дальнейшего исследования устойчивости системы с ее помощью.
4. Поясните алгоритм определения устойчивости замкнутой системы управления по передаточной функции разомкнутой, используя частотный критерий Найквиста.

5. Список рекомендуемой литературы

1. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер с англ. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
2. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
3. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.

Приложение А

Пример оформления титульного листа

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ЮГОРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт Прикладной математики, информатики и управления

Отчет по лабораторной работе №

<Тема лабораторной работы>

по дисциплине «Микропроцессорные системы управления»

Выполнил: студент группы <номер группы>

<Фамилия И.О.>

Проверил: преподаватель С.Н. Горбунов

Ханты-Мансийск, 2009